UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-graduação em Matemática

Julio Cesar Lanazca Vargas

O comportamento limite de soluções para problemas de Dirichlet envolvendo o p-Laplaciano com termos de convecção e de crescimento exponencial

Belo Horizonte

2024

Julio Cesar Lanazca Vargas

O comportamento limite de soluções para problemas de Dirichlet envolvendo o p-Laplaciano com termos de convecção e de crescimento exponencial

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de
Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Grey Ercole

Coorientador: Prof. Dr. Anderson Luís Albuquerque de Araujo

Belo Horizonte

2024

2024, Julio Cesar Lanazca Vargas.
Todos os direitos reservados

Lanazca Vargas, Julio Cesar.

L243c O comportamento limite de soluções para problemas de Dirichlet envolvendo o p-Laplaciano com termos de convecção e de crescimento exponencial [recurso eletrônico] / Julio Cesar Lanazca Vargas. Belo Horizonte — 2024.
1 recurso online (70 f. il.): pdf.

Orientador: Grey Ercole.
Coorientador: Anderson Luís Albuquerque de Araújo.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 64-66

1. Matemática – Teses. 2. Comportamento assintótico – Teses. 3. Operador laplaciano – Teses. 4. Dirichlet, Problemas de – Teses. I. Ercole, Grey. II. Araújo, Anderson Luís Albuquerque de III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz - CRB 6ª Região - nº 819.

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

O comportamento limite de soluções para problemas de Dirichlet envolvendo o p-Laplaciano com termos de convecção e de crescimento exponencial

JULIO CESAR LANAZCA VARGAS

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Documento assinado digitalmente
gov.br
GREY ERCOLE
Data: 09/09/2024 15:57:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Grey Ercole
Orientador - UFMG

Documento assinado digitalmente
gov.br
ANDERSON LUIS ALBUQUERQUE DE ARAUJO
Data: 10/09/2024 21:55:36-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Anderson Luís Albuquerque de Araújo
Coorientador - UFV

Documento assinado digitalmente
gov.br
HAMILTON PRADO BUENO
Data: 10/09/2024 17:24:47-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Hamilton Prado Bueno
UFMG

Documento assinado digitalmente
gov.br
LUCAS CATAO DE FREITAS FERREIRA
Data: 10/09/2024 14:24:37-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Lucas Catão de Freitas Ferreira
UNICAMP

Documento assinado digitalmente
gov.br
LUIZ FERNANDO DE OLIVEIRA FARIA
Data: 10/09/2024 15:51:26-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Luiz Fernando de Oliveira Faria
UFJF

Documento assinado digitalmente
gov.br
OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI
Data: 10/09/2024 06:42:18-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Olímpio Hiroshi Miyagaki
UFSCar

Documento assinado digitalmente
gov.br
RONALDO BRASILEIRO ASSUNCAO
Data: 10/09/2024 19:02:25-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Ronaldo Brasileiro Assunção
UFMG

Belo Horizonte, 06 de setembro de 2024.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, que é a base sobre a qual me sustento. Em especial, à minha mãe, Aurea Vargas, pelo exemplo de perseverança. Agradeço às minhas irmãs Blanca, Mercedes, Nátaly e ao meu sobrinho Fabián, pelo apoio, compreensão e carinho. Sou grato a todos eles, pois não teria conseguido concluir esta fase sem o amor deles.

À dona Jurema Yara Bento, por ter me acolhido com tanto carinho e por ter tirado "as pedras do caminho". Obrigado, dona Jurema.

Ao meu orientador, Grey Ercole, pela paciência, aprendizado valioso e pela dedicação ao longo destes anos. Ao meu coorientador, Anderson Araujo, pelo conhecimento, motivação e compreensão.

Agradeço em especial à Fernanda, pelos cafés no corredor, pelas conversas na sala e pela "hora da bala". Também agradeço pela amizade à Alejandra, Adam, Isadora, Maíra, Marco, por estarem presentes no percurso do doutorado.

Agradeço aos meus amigos de Juiz de Fora, Edyenis, Wilian, Sarah, Eli, Mariana e Edneia, por sempre estarem na torcida.

Agradeço à Mary Zaravia e à Raquel Schmidt, pela companhia, pelo carinho e pelos momentos de força.

Agradeço à turbulência no avião, que me fez conhecer a Érica Vieira. Obrigado pela amizade, Érica.

Agradeço também a todos os professores da pós-graduação e à Andréa e à Kelli, pela dedicação e disposição de sempre. Por fim, agradeço à UFMG pela oportunidade e ao CNPq pelo suporte financeiro.

¨Aqui é galo doido¨.

Fernanda Baêta

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é determinar o comportamento assintótico, quando $p \to \infty$, de soluções de problemas de Dirichlet para o p-Laplaciano em que a não-linearidade combina um termo de convecção com um termo exponencial.

Estudamos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{q-1} + \beta u^{a-1} |\nabla u|^b + m u^{l-1} e^{\alpha u^s} & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

em que Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, e $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ é o operador p-Laplaciano, $p > 1$. Os parâmetros λ, β e m são não negativos, e os expoentes q, a, b, l, α e s satisfazem certas condições, entre as quais $1 < q < p$.

Motivados pelo trabalho de Bueno e Ercole [9], provamos um resultado de existência de soluções para o problema (P) que complementa trabalhos de: de Figueiredo, Gossez, Quoirin e Ubilla [21], de Araujo e Montenegro [15] e de Araujo e Faria [13].

Em seguida, para λ e β arbitrariamente fixados e para m suficientemente pequeno, provamos que as soluções obtidas convergem uniformemente para d_Ω, a função distância até a fronteira, quando $p \to \infty$.

Palavras-chave: comportamento assintótico; p-Laplaciano; termo de convecção.

Abstract

The main purpose of this work is to determine the asymptotic behavior, as $p \to \infty$, of solutions to a Dirichlet p-Laplacian problem in which the nonlinearity combines a convection term with an exponential term.

We study the Dirichlet problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{q-1} + \beta u^{a-1} |\nabla u|^b + m u^{l-1} e^{\alpha u^s} & \text{in} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

where Ω is a bounded, smooth domain of $\mathbb{R}^N$, with $N \geq 2$, and $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ is the p-Laplacian operator, $p > 1$. The parameters λ, β e m are nonnegative and the exponents q, a, b, l, α and s satisfy certain conditions, among them $1 < q < p$.

Motivated by Bueno and Ercole [9], we first prove an existence result of solutions to the problem (P) which complements works by: de Figueiredo, Gossez, Quoirin and Ubilla [21], de Araujo and Montenegro [15] and de Araujo and Faria [13].

In the sequence, for arbitrarily fixed λ and β, and for sufficiently small m, we prove that the obtained solutions converge uniformly to d_Ω, the distance function to the boundary, as $p \to \infty$.

Keywords: asymptotic behavior; p-Laplacian; convection term.

Sumário

Introdução **10**

1 Preliminares **16**

1.1 A função distância até a fronteira 16

1.2 O operador p-Laplaciano 17

1.3 O problema de autovalor do p-Laplaciano 17

1.4 O primeiro autovalor do p-Laplaciano 18

1.5 O problema de Torção 19

1.6 O espaço de Lorentz 19

1.7 O espaço de Lorentz-Sobolev 24

2 Existência de soluções do problema de Dirichlet com termos de convecção e de crescimento exponencial **25**

2.1 Definições e resultados preliminares 26

2.2 Prova do resultado principal 30

2.3 Aplicações do resultado principal 35

2.3.1 Aplicação 1 35

2.3.2 Aplicação 2 37

2.3.3 Aplicação 3 39

2.3.4 Aplicação 4 40

3 Um resultado de não existência **42**

4 Comportamento assintótico **46**

4.1 Resultados de convergência e estimativas 46

4.2 Convergência uniforme para d_Ω 53

5 Comportamento limite de soluções do problema de Dirichlet envolvendo o p-Laplaciano e um termo de convecção com expoente dependendo de p **59**

5.1 Estimativas assintóticas 60

5.2 A convergência uniforme para d_Ω 63

Referências **66**

A Espaço de Sobolev **71**

B Desigualdade de Hölder **73**

C Princípio de Comparação **75**

D Método de sub-supersolução **76**

E Unicidade de soluções positivas para certas equações elíticas quase lineares **78**

F Imersões Compactas **80**

G Teorema do Ponto fixo de Schauder **81**

Introdução

Este trabalho é dedicado ao estudo de um problema quasilinear elítico envolvendo um termo de convecção e um termo exponencial. Mais precisamente, estudamos a existência e o comportamento limite, quando p tende ao infinito, das soluções do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{q-1} + \beta u^{a-1} |\nabla u|^b + m u^{l-1} e^{\alpha u^s} & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

em que Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) e $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ é o operador p-Laplaciano, $p > 1$ (observe que para $p = 2$, é exatamente o operador Laplaciano). Os parâmetros λ, β e m, são não negativos e as constantes q, a, b, l, α e s satisfazem

$$a, l \geq 1, \quad b > 0, \quad s, \alpha \geq 0, \quad \text{e} \quad p > q \geq 1.$$

Entende-se o problema (P) no sentido fraco, isto é, $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução de (P) se, e somente se,

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\lambda u_p^{q-1} + \beta u_p^{a-1} |\nabla u_p|^b + m u_p^{l-1} e^{\alpha u_p^s} \right) v \, \mathrm{d}x, \; \forall \, v \in W_0^{1,p}(\Omega).^1$$

Quanto ao comportamento limite, nosso principal objetivo é mostrar que, sob determinadas condições, as soluções u_p convergem uniformemente para d_Ω, a função distância até a fronteira, quando p tende ao infinito, em que

$$d_\Omega(x) := \min_{y \in \partial\Omega} |x - y|, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

[1] $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.

Nas últimas décadas, este tipo de comportamento limite das soluções do problema de Dirichlet da forma

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\phi_p(|\nabla u|)\nabla u) &= f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u &> 0 & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

foi obtido por muitos autores. Podemos nos referir a [5], [27], [31] para o p-Laplaciano, isto é, para o caso quando $\phi_p(t) = t^{p-2}$, e para o caso de funções ϕ_p mais gerais, podemos nos referir [7], [19], [20], [22], [23], [25]. Em todos estes trabalhos os autores encontraram a função distância até a fronteira como o limite uniforme das soluções u_p, quando p tende ao infinito. No entanto, até onde sabemos, este é o primeiro trabalho em que o comportamento assintótico, quando $p \to \infty$, é estudado para uma $p-$família de problemas de Dirichlet com termos de convecção (ou seja, gradiente na não linearidade).

No Capítulo 1, apresentamos algumas definições que serão utilizadas nos capítulos seguintes: Problema do Primeiro Autovalor do p-Laplaciano, problema de Torção, entre outros. Também são apresentados resultados de convergência (ver Lema 1.4.1, Teorema 1.5.1), os quais são fundamentais para obter a convergência uniforme da família de soluções (u_p).

No Capítulo 2, provamos a existência de uma solução do problema (P) (Teorema 2.0.1). Enfatizamos que este resultado de existência não impõe restrição alguma nem no expoente s no termo exponencial, nem no expoente b no termo de convecção; respectivamente ao valor crítico $\frac{N}{N-1}$ (desigualdade de Trudinger Moser) e ao expoente crítico p (o crescimento natural do gradiente). A prova deste teorema, apresentada na Seção 2.2, é inspirada por uma abordagem introduzida por Bueno e Ercole em [9], a qual combina o método de sub-supersolução com uma versão do Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Em [21], de Figueiredo, Gossez, Quoirin e Ubilla provaram resultados de existência

para as seguintes classes de problemas envolvendo o p-Laplaciano e um termo de convecção

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= g(u)\,|\nabla u|^p + f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u &> 0 & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Estes resultados se aplicam às seguintes não linearidades particulades (na nossa notação), em que $p^* = \frac{Np}{N-p}$ denota o bem conhecido expoente crítico de Sobolev:

(a) $\beta\,|\nabla u|^p + u^{l-1}e^{\alpha u}$, com $\beta > 0$, $l > p$ e $0 < \alpha < \beta\frac{p^*-p}{p-1}$ ([21, Exemplo 2.3]);

(b) $u^{a-1}\,|\nabla u|^p + mu^{p-1}e^{\alpha u^a}$, com $a > 1$, $0 < \alpha < \frac{p^*-p}{(p-1)a}$ e $0 < m < \lambda_p$ ([21, Exemplo 2.9]);

(c) $\beta\,|\nabla u|^p + u^{l-1}$, com $\beta > 0$ e $l > p$ ([21, Examplo 2.13]); e

(d) $\beta\,|\nabla u|^p + mu^{l-1}e^{\alpha u}$, com $\beta > 0$, $0 < \alpha < \beta\frac{p^*-p}{p-1}$, $1 \le l < p$ e m positivo, suficientemente pequeno ([21, Teorema 2.17]).

Nosso Teorema 2.0.1 complementa resultados de existência para essas não linearidades particulares, com um termo sublinear adicional λu^{q-1} $(1 \le q < p)$ e com $|\nabla u|^b$ $(b > 0)$ no lugar de $|\nabla u|^p$. De fato, os ítens (a) e (c) são complementados pelo Corolário 2.3.3, o item (b) é complementado pelo Corolário 2.3.4, e o item (d) é complementado pelo Corolário 2.3.1.

Em [15], Araujo e Montenegro consideraram o seguinte problema de Dirichlet (na nossa notação)

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda u^{q-1} + u^{l-1}e^{\alpha u^s} & \text{em } \Omega, \\ u &> 0 & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $1 < q < p$, $l \ge 1$ e $s > 0$. Usando uma abordagem introduzida em [9], eles provaram um resultado de existência para λ e α suficientemente pequenos, assumindo $l \ne p$. Além de incluir um termo de convecção, nosso Teorema 2.0.1 complementa o Teorema 1.1 de [15].

Ainda neste capítulo, na Seção 2.3 apresentamos mais duas aplicações do Teorema 2.0.1 (ver Corolário 2.3.2 e 2.3.3), que estendem um recente resultado de existência ob-

tido por Araujo e Faria em [13].

No Capítulo 3, provamos, como consequência da desigualdade de Picone, um resultado de não existência para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= mu^{l-1}e^{\alpha u^s} + g(x) & \text{em } \Omega, \\ u &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

enunciado na Proposição 3.0.2, para $g \in L^\infty(\Omega)$, $g \geq 0$, $1 \leq l < p$ e $\alpha, s > 0$. Este resultado generaliza o Teorema 2.1, demonstrado por Garcia Azorero e Peral Alonso em [24] e também mostra que, com respeito à existência de soluções, uma restrição para o parâmetro m em (P) é de se esperar quando $1 \leq l < p$.

No Capítulo 4, provamos a convergência uniforme da família de soluções (u_p) à função distância d_Ω (Teorema 4.2.2). Inicialmente provamos que, a menos de subsequências,

$$\lim_{p\to\infty} u_p = u_\infty \tag{1}$$

uniformemente em $\overline{\Omega}$, com $u_\infty \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$, tal que

$$0 \leq u_\infty \leq d_\Omega.$$

Para obter esta convergência, provamos alguns resultados assintóticos na Seção 4.1. Em particular, mostramos que

$$\lim_{p\to\infty} k_p = 1,$$

em que

$$k_p := \sup_{w\in\mathcal{S}_p} \|\nabla w\|_\infty , \tag{2}$$

e

$$\mathcal{S}_p := \left\{ w \in W_0^{1,p}(\Omega) : -\Delta_p w = g \text{ em } \Omega, \text{ para alguma } g \in L^\infty(\Omega), \ \|g\|_\infty = 1 \right\}. \tag{3}$$

Um passo crucial na prova deste limite é dado pela seguinte estimativa

$$\|\nabla w\|_\infty \leq (cp^\gamma)^{\frac{1}{p-1}} \text{ para todo } w \in \mathcal{S}_p,\ p \geq 2,$$

em que c e γ são constantes positivas independentes de p e w. Tal estimativa é uma adaptação para o p-Laplaciano, feita por Ercole em [18], de uma estimativa global para o gradiente de soluções para problemas mais gerais, provada por Cianchi e Maz'ya (ver [11]).

Ainda no Capítulo 4, provamos na Proposição 4.2.1 que $u_\infty = d_\Omega$. Este fato é obtido levando-se em conta que a solução u_p também é solução fraca do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{q-2} u + h_p & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega; \end{cases} \tag{4}$$

em que

$$h_p := \beta u_p^{a-1} |\nabla u_p|^b + m u_p^{l-1} e^{\alpha u_p^s}.$$

Devido ao fato de u_p ser o único minimizador positivo do funcional energia I_p associado ao problema (4), temos

$$I_p(u_p) \leq I_p(d_\Omega).$$

A partir desta desigualdade, do fato $d_\Omega - u_\infty \geq 0$ (dada em (4.19)) e da convergência uniforme de u_p para u_∞, conseguimos provar que

$$\lim_{p\to\infty} \int_\Omega (d_\Omega^q - u_p^q) \mathrm{d}x = \int_\Omega (d_\Omega^q - u_\infty^q) \mathrm{d}x \geq 0, \tag{5}$$

donde concluímos que $d_\Omega = u_\infty$.

Os resultados dos Capítulos 2, 3 e 4, descritos nesta introdução, foram apresentados no artigo [14] y publicado.

No Capítulo 5, estudamos o comportamento assintótico, quando $p \to \infty$, de uma solução positiva u_p para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-2} u + \mu |u|^{a-2} u \, |\nabla u|^{p-a} & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

em que Ω é um domínio Lipschitz limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, e $q, a \geq 1$.

Este problema não possui um termo exponencial como o tratado no Capítulo 4. Em contrapartida, o expoente do termo convectivo é dependente de p. Provamos neste capítulo que se $0 < \mu < \|d_\Omega\|_\infty^{-a}$, então u_p converge uniformemente em $\overline{\Omega}$ para d_Ω, quando $p \to \infty$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos uma coleção de definições e resultados que vamos precisar no resto do trabalho. A intenção deste capítulo é fazer mais fácil a leitura deste trabalho. Em general são apresentados resultados conhecidos, motivo pelo qual vamos omitir as provas deles, as quais podem ser encontradas na bibliografia citada.

1.1 A função distância até a fronteira

As definições e resultados abaixo, podem ser encontrados em [26].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um domínio suave e limitado. Definimos a **função distância** d_Ω até a fronteira $\partial\Omega$ como sendo

$$d_\Omega(x) := \min_{y\in\partial\Omega} |x-y|\,, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Algumas propriedades conhecidas da função d_Ω:

1. $d_\Omega \in C_0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$,
2. $|\nabla d_\Omega(x)| = 1$, q.t.p em Ω,
3. $\|d_\Omega\|_\infty$ é o raio de maior bola inscrita em $\overline{\Omega}$.

Mais detalhes podem ser encontrados em [26].

Consideremos v uma outra função em $C_0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$. Fixando $x \in \Omega$, escolhemos

$y \in \partial\Omega$, tal que $d_\Omega(x) = |x - y|$. Como v se anula na fronteira,

$$|v(x)| = |v(x) - v(y)| \leq |x - y| \, \|\nabla v\|_\infty = d_\Omega(x) \, \|\nabla v\|_\infty , \tag{1.1}$$

onde a desigualdade na passagem anterior é devido ao Teorema do Valor Médio, uma vez que o segmento de reta $[x, y] \subset \Omega$. Logo, da desigualdade (1.1) temos que

$$\|v\|_\infty \leq \|d_\Omega\|_\infty \, \|\nabla v\|_\infty , \text{para todo } v \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega}). \tag{1.2}$$

1.2 O operador p-Laplaciano

Consideremos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

em que $p > 1$, $f \in (W_0^{1,p}(\Omega))'$ e $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ é o **operador p-Laplaciano**. Dizemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução fraca de (1.3), se

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x, \; \forall \, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Mais detalhes deste operador podem ser vistos em [17].

1.3 O problema de autovalor do p-Laplaciano

Consideremos o problema de Dirichlet do p-Laplaciano dado por

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= \lambda \, |v|^{p-2} \, v \quad \text{em } \Omega, \\ v &= 0 \qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $N \geq 1$ e $1 < p < \infty$.

Definição 1.3.1. *Dizemos que λ é um **autovalor** de (1.4) se existir uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega) - \{0\}$, tal que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} uv \, \mathrm{d}x, \; \forall \, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.5}$$

A função u é chamada de ***autofunção****.*

Notemos que em (1.5), tomando $v = u$, λ pode ser escrito como

$$\lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}x}.$$

O problema (1.4) tem um menor autovalor e uma primeira autofunção associada a ele.

1.4 O primeiro autovalor do p-Laplaciano

O **primeiro autovalor** do problema de Dirichlet do p-Laplaciano é denotado por λ_p e definido como

$$\lambda_p := \min \left\{ \frac{\|\nabla v\|_p^p}{\|v\|_p^p} : v \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \right\} = \frac{\|\nabla e_p\|_p^p}{\|e_p\|_p^p} \tag{1.6}$$

em que e_p denota a **primeira autofunção** positiva associada ao primeiro autovalor λ_p. Consideramos a autofunção e_p como $L^\infty-$normalizada, isto é, $e_p > 0$ em Ω e $\|e_p\|_\infty = 1$. Lembremos que a autofunção $e_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (1.4).

Na sequência, apresentamos um resultado provado por Juutine, Lindqvist e Manfredi que relaciona o primeiro autovalor do p-Laplaciano com a função distância (para mais detalhes, ver [26], Lema 1.5).

Lema 1.4.1. *Tem-se*

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p^{1/p} = \|d_\Omega\|_\infty^{-1}.$$

Teorema 1.4.2. *Dada uma sequência (p_n), com $p_n \to \infty$, existem uma subsequência (p_{n_j}) e uma função $e_\infty \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$, tais que: $\|e_\infty\|_\infty = 1$, $e_{p_{n_j}}$ converge uniformemente em $\overline{\Omega}$ para e_∞, e*

$$0 < e_\infty \leq \frac{d_\Omega}{\|d_\Omega\|_\infty}, \text{ em } \Omega.$$

Observação 1.4.3. *A positividade estrita de e_∞ segue da Desigualdade de Harnack, provada em [4, Teorema 1] (ver também [30, Corolário 4.5]) devido a e_∞ ser ∞-superharmônico e não ser identicamente zero ($\|e_\infty\|_\infty = 1$). A igualdade $e_\infty = \frac{d_\Omega}{\|d_\Omega\|_\infty}$ não vale para um*

domínio geral limitado Ω. Ela vale para bolas, anéis e estádios [1] *(ver [35]), mas não para quadrados (ver[26, Proposição 4.1]) e triângulos, por exemplo.*

1.5 O problema de Torção

Para cada $p > 1$, denotamos por ϕ_p a **p-função de torção** associada a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, isto é ϕ_p é a solução fraca, no espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, do **problema de torção**

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= 1 \quad \text{em } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.7}$$

Portanto,

$$\int_\Omega |\nabla \phi_p|^{p-2} \nabla \phi_p \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega v \, \mathrm{d}x, \; \forall \, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

O seguinte resultado de convergência, que será usado na Seção 4.2, foi provado por Bhattacharya, Di Benedetto e Manfredi em [5] na Proposição 2.1, Parte II e por Kawohl em [27], Teorema 1.

Teorema 1.5.1. *Tem-se*

$$\lim_{p\to\infty} \phi_p = d_\Omega, \;\; \textit{uniformemente em } \overline{\Omega}.$$

1.6 O espaço de Lorentz

Nesta seção, introduziremos o espaço de Lorentz $L^{p,q}(\Omega)$, que é definido pelo conjunto das funções tais que o funcional $\|\cdot\|_{p,q}$ está bem definido em $L^{p,q}(\Omega)$. Além disso, veremos que para certos valores de p e q, o espaço $L^{p,q}(\Omega)$ é um espaço normado. Mais detalhes deste espaço podem ser vistos em [3].

Na sequência, definiremos alguns conceitos básicos que serão necessários no decorrer desta seção, tais como função distribuição e rearranjamento. Assumiremos também que (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finito e que v é uma função Σ-mensurável em Ω, ou mensurável, caso não haja confusão.

[1] um estádio é o fecho convexo da união de duas bolas com o mesmo raio e centros distintos.

Definição 1.6.1. *A* ***função distribuição*** μ_v *de uma função mensurável* v *é definida por*

$$\begin{aligned}\mu_v : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\} \\ t &\longmapsto \mu_v(t) := \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |v(x)| > t\}\right).\end{aligned}$$

Notemos que a função distribuição μ_v depende apenas do valor absoluto $|v|$ da função v e que μ_v pode atingir o valor $+\infty$.

Exemplo 1.6.2. *A função distribuição* μ_v *de uma função simples e não negativa* v*, definida por*

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x),$$

em que os subconjuntos $E_j \subset \mathbb{R}$ *são disjuntos dois a dois com medida* μ*-finita e* $a_1 > a_2 > \cdots > a_j > 0$*. Se* $t \geq a_1$*, então* $|v(x)| \leq t$*; logo,* $\mu_v(t) = 0$*. Se* $a_2 \leq t < a_1$*, então* $v(x) > t$ *precisamente no conjunto* E_1*; logo* $\mu_v(t) = \mu(E_1)$*. Se* $a_3 \leq t < a_2$*, então* $v(x) > t$ *precisamente no conjunto* $E_1 \cup E_2$*; logo* $\mu_v(t) = \mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$*.*

Em geral,

$$\mu_v(t) = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(t),$$

para $t \in \mathbb{R}_+^*$*, em que* $a_{n+1} = 0$*, para* $j = 1, 2, \cdots, n$*,*

$$m_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i).$$

Definição 1.6.3. *Sejam* v, v' *funções* Σ *e* Σ' *mensuráveis, respectivamente. Dizemos que* v *e* v' *são funções* ***equimensuráveis*** *se* $\mu_v(t) = \mu'_{v'}(t)$*, para qualquer* $t > 0$*.*

Definição 1.6.4. *Seja* v *uma função mensurável. O* ***rearranjamento decrescente*** *de* v *é a função*

$$\begin{aligned}v^* : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto v^*(s) := \sup\{t \geq 0 : \mu_v(t) > s\}\end{aligned}$$

Notar que o rearranjamento decrescente v^* depende apenas do valor absoluto $|v|$ da função v.

Observação 1.6.5. *Como uma consequência imediata da Definição 1.6.4, podemos obter*

$$v^*(s) = \inf\{t \geq 0 : \mu_v(t) \leq s\} = m(\mu_v(t)), \tag{1.8}$$

em que m é a medida de Lebesgue.

Exemplo 1.6.6. *Calculemos o rearranjamento decrescente da função simples dada no Exemplo 1.6.2. Se $s \geq m_3$, então $v^*(s) = 0$. Se $m_3 > s \geq m_2$, então $v^*(s) = a_3$. Se $m_2 > s \geq m_1$, então $v^*(s) = a_2$. Se $0 \leq s < m_1$, então $v^*(s) = a_1$. Portanto,*

$$v^*(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[m_{j-1}, m_j)}(s),$$

em que $m_0 := 0$.

Definição 1.6.7. *Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida completo σ-finito; sejam $1 \leq p$ e $1 \leq q \leq \infty$. O **espaço de Lorentz** $L^{p,q}(\Omega)$ é constituído por todas as funções $\Sigma-$mensuráveis v, para as quais a quantidade $\|v\|_{p,q}$ é finita, em que*

$$\|v\|_{p,q} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left(t^{\frac{1}{p}}\, v^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & se \quad 0 < q < \infty, \\ \sup_{t>0} \left(t^{\frac{1}{p}}\, v^*(t)\right), & se \quad q = \infty. \end{cases}$$

Pode-se conferir que o espaço de Lorentz é um espaço linear. Além disso, o funcional $\|\cdot\|_{p,q}$ é uma seminorma, pois este funcional não satisfaz a desigualdade triangular para todo $1 < p < +\infty$ e $1 \leq q \leq +\infty$.

Exemplo 1.6.8. *A quantidade $\|v\|_{1,\infty}$ é uma seminorma e não vale a desigualdade triangular. Consideremos as funções*

$$u(x) = \frac{1}{x}\chi_{(0,1)(x)} \quad e \quad v(x) = \frac{1}{1-x}\chi_{(0,1)}(x).$$

Então,

$$\|u\|_{1,\infty} = 1 \quad e \quad \|v\|_{1,\infty} = 1.$$

Entretanto, $\|u+v\|_{1,\infty} \not\leq \|u\|_{1,\infty} + \|v\|_{1,\infty}$, pois $\|u+v\|_{1,\infty} = 4$.
Em geral, vale a desigualdade $\|u+v\|_{p,q} \leq 2\|u\|_{p,q} + 2\|v\|_{p,q}$.

Teorema 1.6.9. *Sejam $1 \leq q \leq p < +\infty$ ou $p = q = +\infty$. Então $(L^{p,q}(\Omega), \|\cdot\|_{p,q})$ é um espaço de Banach invariante por rearranjamentos.*

Proposição 1.6.10. *Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida completo σ-finito e v uma função mensurável. Então, cumpre-se*

- *Se $1 \leq p$, então $L^{p,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Isto é, $\|v\|_{p,p} = \|v\|_p$*
- *$L^{\infty,q}(\Omega) = \{0\}$*
- *Para $1 \leq p \leq +\infty$ e $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq +\infty$, vale a desigualdade*

$$\|v\|_{p,q_2} \leq c\,(p, q_1, q_2)\|v\|_{p,q_1}, \text{ isto é } L^{p,q_1} \subset L^{p,q_2}.$$

Definição 1.6.11. *Seja v uma função mensurável. Então a **função maximal** é definida por*

$$\begin{aligned} v^{**} : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ s &\longmapsto v^{**}(s) := \frac{1}{s}\int_0^s v^*(r)\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Observação 1.6.12. *No Teorema 1.6.9 é usada a hipótese restritiva $q \leq p$. Entretanto, no caso $1 < p$ é possível substituir $\|\cdot\|_{p,q}$ por um funcional equivalente que é norma para todo $1 \leq q$. A ideia é substituir v^* por v^{**} na Definição 1.6.7 de $\|\cdot\|_{p,q}$.*

Definição 1.6.13. *Se $1 < p \leq +\infty$ e $1 \leq q \leq +\infty$. Para v, função mensurável, definimos a quantidade*

$$\|v\|^*_{p,q} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left(t^{\frac{1}{p}}\, v^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & se \quad 0 < q < +\infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\, v^{**}(t)\,, & se \quad q = +\infty. \end{cases}$$

finita.

Lema 1.6.14. *Se $1 < p \leq +\infty$ e $1 \leq q \leq +\infty$, então para toda função mensurável v, valem as desigualdades*

$$\|v\|_{p,q} \leq \|v\|^*_{p,q} \leq p'\,\|v\|_{p,q},$$

em que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. *Em particular,* $L^{p,q}(\Omega)$ *consiste de todas as funções para as quais* $\|v\|^*_{p,q}$ *é finita.*

Teorema 1.6.15. *Se* $1<p<+\infty$ *e* $1\leq q\leq+\infty$, *ou* $p=q=+\infty$. *Então,* $\left(L^{p,q}(\Omega),\|\cdot\|^*_{p,q}\right)$ *é um espaço de Banach, invariante por rearranjamentos.*

Observação 1.6.16. *Nem todos os espaços de Lorentz são espaços invariantes por rearranjamentos. Por exemplo, o espaço de Lorentz* $L^{1,\infty}(\Omega)$ *não é invariante por rearranjamento.*

A seguinte proposição, que pode ser encontrada em [3], Proposition 1.7, permite expressar a norma de uma função $v\in L^\infty(\Omega)$ em termos do seu rearranjamento.

Proposição 1.6.17. *Seja* $v:\Omega\to\mathbb{R}$ *uma função mensurável e* v^* *o rearranjamento de* v. *Então* v *e* v^* *são equimensuráveis. Isto é,* $\mu_v=\mu_{v^*}$.

Agora, tomemos $v\in L^\infty(\Omega)$. Então, da Observação 1.6.5 e da proposição anterior,

$$\begin{aligned}\|v\|_\infty &= \inf\{C>0:\mu_v(\{x\in\Omega:|v(x)|>C\})=0\}\\ &= \inf\{C>0:\mu_{v^*}(\{x\in\Omega:|v(x)|>C\})=0\}=\|v^*\|_\infty. \end{aligned}\tag{1.9}$$

Se $v\in L^p(\Omega)$ também temos que $v^*\in L^p([0,|\Omega|])$ e

$$\|v\|_p=\|v^*\|_{L^p([0,|\Omega|)}.\tag{1.10}$$

Enunciaremos a desigualdade de Hölder para os espaços de Lorentz.

Teorema 1.6.18 (Desigualde de Hölder)**.** *Seja* $\Omega\subset\mathbb{R}^N$. *Suponha que* $1<p<+\infty$ *e* $1\leq q\leq+\infty$. *Se* $u\in L^{p,q}(\Omega)$ *e* $v\in L^{p',q'}(\Omega)$. *Então,*

$$\int_\Omega|u(x)v(x)|\mathrm{d}x\leq\int_0^\infty u^*(t)v^*(t)\,\mathrm{d}t\leq\|u\|_{p,q}\|v\|_{p',q'},$$

em que p' *e* q' *são conjugados de* p *e* q, *respectivamente.*

1.7 O espaço de Lorentz-Sobolev

Esta seção está baseada no Capítulo 4 do trabalho de Serban Costea, em [12] e no Capítulo 2 do trabalho de Cianchi e Mas'ya [11].

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$. Denotemos por $L^{p,q}(\Omega, \mathbb{R}^M)$ ao espaço de funções

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_M) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M,$$

tais que $f_i \in L^{p,q}(\Omega)$.

Definição 1.7.1. *Seja uma função vetorial mensurável $f = (f_1, f_2, \cdots, f_M) : \Omega \to \mathbb{R}^M$ e denotemos por $|f| := \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_M^2}$. Dizemos que*

$$f \in L^{p,q}(\Omega, \mathbb{R}^M) \iff f_i \in L^{p,q}(\Omega), \text{ para } i = 1, 2, \cdots, M \iff |f| \in L^{p,q}(\Omega).$$

Além disso, usando a norma dos espaços de Lorentz, definimos

$$\|f\|_{L^{p,q}(\Omega,\mathbb{R}^M)} := \| \, |f| \, \|_{p,q}.$$

Observação 1.7.2. *O espaço $L^{p,q}(\Omega, \mathbb{R}^M)$ com a norma $\|\cdot\|_{L^{p,q}(\Omega,\mathbb{R}^M)}$ é um espaço de Banach, para $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ (ver [12] para mais detalhes).*

Definição 1.7.3. *Sejam $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ e seja $m \in \mathbb{N}$. O espaço de* ***Sobolev-Lorentz*** *$W^m L^{p,q}(\Omega)$ é o espaço de Banach definido como*

$$W^m L^{p,q}(\Omega) := \Big\{ u \in L^{p,q}(\Omega), \text{ é } m\text{-vezes fracamente diferenciável em } \Omega \\ \text{e } |\nabla^k u| \in L^{p,q}(\Omega), \text{ para } 1 \leq k \leq m \Big\}$$

com a norma

$$\|u\|_{W^m L^{p,q}(\Omega)} := \|u\|_{L^{p,q}(\Omega)} + \sum_{k=1}^{m} \|\nabla^k u\|_{L^{p,q}(\Omega)},$$

em que $\nabla^k u$ denota o vector de todas as derivadas fracas de u, de ordem k.

Capítulo 2

Existência de soluções do problema de Dirichlet com termos de convecção e de crescimento exponencial

Neste capítulo consideraremos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{q-1} + \beta u^{a-1} \left|\nabla u\right|^b + m u^{l-1} e^{\alpha u^s} & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

em que Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, e $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ é o operador p-Laplaciano, $p > 1$. Os parâmetros λ, β e m, são não negativos e as constantes q, a, b, l, α e s satisfazem

$$a, l \geq 1, \quad b > 0, \quad s, \alpha \geq 0, \quad \text{e} \quad p > q \geq 1.$$

Antes, vamos recordar as seguintes notações (veja Capítulo 1):

1) d_Ω é a função distância até a fronteira de Ω.

2) ϕ_p é a p-função de torção.

3) λ_p é o primeiro autovalor do p-Laplaciano.

4) e_p é a autofunção correspondente a λ_p, positiva em Ω e normalizada na norma $L^\infty(\Omega)$.

A solução u_p do Teorema 4.2.2 é obtida como uma aplicação do Teorema 2.0.1 o qual será enunciado em breve.

Definimos

$$k_p := \sup_{w\in\mathcal{S}_p} \|\nabla w\|_\infty , \tag{2.1}$$

em que

$$\mathcal{S}_p := \left\{ w \in W_0^{1,p}(\Omega) : -\Delta_p w = g \text{ em } \Omega, \text{ para alguma } g \in L^\infty(\Omega), \ \|g\|_\infty = 1 \right\}. \tag{2.2}$$

Para cada $M > 0$, denotemos por $\mathcal{E}(M)$ a região de $\mathbb{R}^3_+$ definida por

$$\mathcal{E}(M) := \left\{ (\lambda,\beta,m) \in \mathbb{R}^3_+ : \frac{\lambda A_p}{M^{p-q}} + \frac{\beta B_p}{M^{p-(a+b)}} + \frac{m A_p}{M^{p-l} e^{-\alpha M^s}} \le 1 \right\}, \tag{2.3}$$

em que

$$A_p := \|\phi_p\|_\infty^{p-1} \quad \text{e} \quad B_p := k_p^b \, \|\phi_p\|_\infty^{p-1-b} . \tag{2.4}$$

Agora, podemos enunciar nosso principal resultado de existência.

Teorema 2.0.1. *Assuma que $\partial\Omega \in C^{1,\tau}$ para algum $\tau \in (0,1)$. Se $(\lambda,\beta,m) \in \mathcal{E}(M)$ para algum $M > 0$, então o problema de Dirichlet (P) admite pelo menos uma solução fraca $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que*

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)} e_p \le u_p \le \frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\phi_p \qquad e \qquad \|\nabla u_p\|_\infty \le \frac{k_p M}{\|\phi_p\|_\infty}. \tag{2.5}$$

2.1 Definições e resultados preliminares

Nesta seção vamos assumir que $\partial\Omega$ é ao menos de classe $C^{1,\tau}$, para algum $\tau \in (0,1)$.

Relembremos que no caso particular em que Ω é uma bola centrada em $x_0 \in \mathbb{R}^N$ com raio $R > 0$, a solução explícita para ϕ_p foi apresentada por Sakaguchi em [34] e explorada por Kawohl em [27]. A função ϕ_p é radialmente simétrica, radialmente decrescente e explicitamente dada pela expressão,

$$\phi_p(x) = \frac{p-1}{p} N^{-\frac{1}{p-1}} \left(R^{\frac{p}{p-1}} - |x-x_0|^{\frac{p}{p-1}} \right), \ \ |x-x_0| \le R.$$

Segue da expressão anterior que

$$\|\phi_p\|_\infty = \frac{p-1}{p} N^{-\frac{1}{p-1}} R^{\frac{p}{p-1}}. \tag{2.6}$$

Para um domínio limitado geral Ω, podemos combinar a simetrização de Schwarz com a igualdade (2.6) e obter

$$\|\phi_p\|_\infty \leq M_0 := \frac{p-1}{p} N^{-\frac{1}{p-1}} \left(\frac{|\Omega|}{\omega_N}\right)^{\frac{p}{N(p-1)}}, \tag{2.7}$$

em que $|\Omega|$ denota o volume de Ω e ω_N denota o volume da bola unitária (Veja: [27]).

Na sequência, $|\cdot|_{1,\eta}$ denotará a norma de $C^{1,\eta}(\overline{\Omega})$ definida por

$$|u|_{1,\eta} := \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty + \sum_{i=1}^{N} [u_{x_i}]_\eta$$

em que

$$[u_{x_i}]_\eta := \sup\left\{ \frac{|u_{x_i}(x) - u_{x_i}(y)|}{|x-y|^\eta} : x, y \in \overline{\Omega} \ \text{ e } \ x \neq y \right\}$$

para cada $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$.

O conjunto $\mathcal{S}_p$, que aparece na sequência, foi definido em (2.2).

Proposição 2.1.1. *Se $u \in \mathcal{S}_p$, então*

$$|u(x)| \leq \phi_p(x) \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{2.8}$$

Além disso, existem constantes positivas η_p e K_p, tais que $u \in C^{1,\eta_p}(\overline{\Omega})$ e

$$|u|_{1,\eta_p} \leq K_p.$$

Demonstração. A desigualdade (2.8) pode ser obtida aplicando o Princípio de Comparação (Teorema C.0.1) às funções u e $-u$.
Como $u \in \mathcal{S}_p$, então $-\Delta_p u = g$, para algum $g \in L^\infty(\Omega)$, $\|g\|_\infty = 1$. Temos também que

$\phi_p \in \mathcal{S}_p$, pois $\phi_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução fraca do problema de torção $-\Delta_p \phi_p = 1$. Assim,

$$-\Delta_p u = g \leq 1 = -\Delta_p \phi_p, \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = \phi_p = 0, \text{ em } \partial\Omega. \tag{2.9}$$

Considerando o mesmo raciocínio, conseguimos um resultado análogo para a função $-u$. Logo, pelo Teorema C.0.1 e da expressão (2.9), conseguimos

$$u(x) \leq \phi_p(x) \quad \text{e} \quad -\phi_p(x) \leq u(x), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Além disso, considerando (2.7) e (2.8), obtemos

$$|u(x)| \leq \phi_p(x) \leq \|\phi_p\|_\infty \leq M_0,$$

isto é,

$$|u| \leq M_0. \tag{2.10}$$

A outra afirmação segue da desigualdade (2.10) e dos conhecidos resultados de regularidade de Lieberman [29, Teorema 1], aplicados ao p-Laplaciano. □

Observação 2.1.2. *Da Proposição 2.1.1 temos*

i) Em concordância com [29, Teorema 1], as constantes η_p e K_p dependem apenas de τ, N, p, M_0 e Ω.

ii) Da Proposição 2.1.1 e da definição de $|\cdot|_{1,\eta}$, temos

$$K_p \geq |u|_{1,\eta} = \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty + \sum_{i=1}^{N} [u_{x_i}]_\eta \geq \|\nabla u\|_\infty .$$

Desta última desigualdade e pela definição de k_p dada em (2.1), obtemos $k_p \leq K_p$, portanto

$$0 < \|\nabla \phi_p\|_\infty \leq k_p \leq K_p, \quad \textit{sempre que } p > 1,$$

iii) Da desigualdade dada em (1.2) para a função distância, temos

$$\|v\|_\infty \leq \|d_\Omega\|_\infty \|\nabla v\|_\infty \quad \forall\, v \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega}),$$

e, com isso, conseguimos um limite inferior para k_p em termos de $\|\phi_p\|_\infty$ e $\|d_\Omega\|_\infty$:

$$\frac{\|\phi_p\|_\infty}{\|d_\Omega\|_\infty} \leq \|\nabla\phi_p\|_\infty \leq k_p, \quad \textit{sempre que } p > 1. \tag{2.11}$$

Corolário 2.1.3. *Se $g \in L^\infty(\Omega)$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é a solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= g \quad \textit{em } \Omega, \\ v &= 0 \quad \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \in C^{1,\eta_p}(\overline{\Omega})$ e as seguintes estimativas são satisfeitas

$$|u(x)| \leq \|g\|_\infty^{1/(p-1)} \phi_p(x) \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}, \tag{2.12}$$

$$|u|_{1,\eta_p} \leq K_p \|g\|_\infty^{1/(p-1)}, \tag{2.13}$$

e

$$\|\nabla u\|_\infty \leq k_p \|g\|_\infty^{1/(p-1)}. \tag{2.14}$$

Demonstração. Na prova deste corolário é suficiente considerar o caso $\|g\|_\infty \neq 0$. Definamos,

$$v := \frac{u}{\|g\|_\infty^{1/(p-1)}} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{g} := \frac{g}{\|g\|_\infty}.$$

Como o operador Δ_p é $(p-1)-$homogêneo

$$\Delta_p v = \Delta_p \left(\frac{u}{\|g\|_\infty^{1/(p-1)}} \right) = \frac{\Delta_p u}{\|g\|_\infty},$$

com isto e da hipótese temos

$$-\Delta_p v = \frac{g}{\|g\|_\infty} = \tilde{g},$$

obtendo $v = \frac{u}{\|g\|_\infty^{1/(p-1)}} \in \mathcal{S}_p$. Assim, pela Proposicão 2.1.1 conseguimos

$$\frac{u}{\|g\|_\infty^{1/(p-1)}} \in C^{1,\eta_p}(\overline{\Omega}) \quad \text{e} \quad \left| \frac{u(x)}{\|g\|_\infty^{1/(p-1)}} \right| \leq \phi_p(x), \, \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

donde obtemos $u \in C^{1,\eta_p}(\overline{\Omega})$ e a estimativa dada em (2.12), isto é

$$|u(x)| \leq \|g\|_\infty^{1/(p-1)} \phi_p(x), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Uma vez que $\frac{u}{\|g\|_\infty^{1/(p-1)}} \in \mathcal{S}_p$, da Proposição 2.1.1 conseguimos a estimava (2.13), isto é

$$\left|\frac{u}{\|g\|_\infty^{1/(p-1)}}\right|_{1,\eta_p} \leq K_p \iff |u|_{1,\eta_p} \leq K_p \|g\|_\infty^{1/(p-1)}.$$

Como $\frac{u}{\|g\|_\infty^{1/(p-1)}} \in \mathcal{S}_p$, da definição de k_p, dada em (2.1), obtemos a estimativa (2.14)

$$\left\|\nabla\left(\frac{u}{\|g\|_\infty^{1/(p-1)}}\right)\right\|_\infty = \left\|\frac{\nabla u}{\|g\|_\infty^{1/(p-1)}}\right\|_\infty \leq k_p \iff \|\nabla u\| \leq k_p \|g\|_\infty^{1/(p-1)}.$$

□

O seguinte lema estabelece uma relação entre as quantidades λ_p e $\|\phi_p\|_\infty$ que, entre outras utilidades, fornece uma cota inferior para o primeiro autovalor do p-Laplaciano em termos da p-função de torção.

Lema 2.1.4. *A seguinte desigualdade vale para todo $p > 1$:*

$$1 \leq \lambda_p^{1/(p-1)} \|\phi_p\|_\infty . \tag{2.15}$$

Demonstração. Como e_p é solução do problema do autovalor associado a λ_p e ϕ_p é solução do problema de p-torção, novamente usando a homogeneidade do operador Δ_p e lembrando que e_p é $L^\infty(\Omega)-$normalizado,

$$-\Delta_p e_p = \lambda_p e_p^{p-1} \leq \lambda_p \|e_p\|_\infty^{p-1} = \lambda_p = -\Delta_p(\lambda_p^{1/(p-1)}\phi_p), \text{ em } \Omega.$$

Por hipótese, temos $e_p = \phi_p = 0$ sobre $\partial\Omega$. Logo, pelo Teorema C.0.1 e pelo Princípio da Comparação

$$e_p \leq \lambda_p^{1/(p-1)}\phi_p, \text{ em } \Omega.$$

Portanto,

$$1 = \|e_p\|_\infty \leq \lambda_p^{1/(p-1)} \|\phi_p\|_\infty .$$

□

2.2 Prova do resultado principal

Agora, apresentamos a prova do nosso resultado principal.

Demonstração do Teorema 2.0.1 . Da definição de $\mathcal{E}(M)$, dada em (2.3), temos

$$\lambda\frac{A_p}{M^{p-q}}+\beta\frac{B_p}{M^{p-(a+b)}}+m\frac{A_p}{M^{p-l}e^{-\alpha M^s}}\leq 1. \tag{2.16}$$

Consideremos o subconjunto fechado, convexo e limitado $F\subset C^1(\overline{\Omega})$ definido por

$$F:=\left\{u\in C^1(\overline{\Omega}):\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)}e_p\leq u\leq\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\phi_p \text{ e } \|\nabla u\|_\infty\leq\frac{k_pM}{\|\phi_p\|_\infty}\right\}. \tag{2.17}$$

Definamos um operador que associa a cada elemento deste subconjunto um elemento do espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} T:F\subset C^1(\overline{\Omega})&\longrightarrow C^1(\overline{\Omega})\\ u&\longmapsto T(u)\end{aligned}$$

em que $T(u)\in W_0^{1,p}(\Omega)$ é a única função satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta_p(T(u)) &= \lambda(T(u))^{q-1}+\beta u^{a-1}\left|\nabla u\right|^b+mu^{l-1}e^{\alpha u^s} & \text{em } \Omega,\\ T(u) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega.\end{cases} \tag{2.18}$$

Assim, para cada $u\in F$ a função $U=T(u)$ é a única solução fraca no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= g_u(x,v) & \text{em } \Omega,\\ v &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega,\end{cases} \tag{2.19}$$

em que a não linearidade $g_u(x,t)$ é definida pela expressão

$$g_u(x,t):=\lambda t^{q-1}+\beta u(x)^{a-1}\left|\nabla u(x)\right|^b+mu(x)^{l-1}e^{\alpha u(x)^s},\ x\in\overline{\Omega}\ \text{ e } t\geq 0. \tag{2.20}$$

Temos a unicidade da solução U ao escrever

$$g_u(x,t)=\lambda t^{q-1}+h(x)$$

com $h\in L^\infty(\Omega)$, $h\geq 0$ e $1<q<p$, e aplicar resultados de Díaz e Saa em [16] (veja Corolário E.0.2).

Para provar a existência da função U, usaremos o método de sub-supersolução (veja

Teorema D.0.3). Sejam,

$$\overline{u} := \frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\phi_p \qquad \text{e} \qquad \underline{u} := \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)} e_p.$$

Provaremos que $\overline{u}$ é supersolução e $\underline{u}$ é subsolução do problema (2.19) e também que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω. Com efeito, como $u \in F$, temos

$$0 \leq u \leq \frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\phi_p \leq M \ \text{ em } \Omega,$$

daí,

$$e^{\alpha u^s} \leq e^{\alpha M^s} \quad \text{e} \quad u^{l-1} \leq M^{l-1}.$$

Portanto,

$$0 \leq u^{l-1}e^{\alpha u^s} \leq M^{l-1}e^{\alpha M^s} \ \text{ em } \Omega. \tag{2.21}$$

Da definição de F obtemos,

$$0 \leq |\nabla u| \leq \|\nabla u\|_\infty \leq \frac{k_p M}{\|\phi_p\|_\infty} \ \text{ em } \Omega. \tag{2.22}$$

Mais ainda, a definição de supersolução nos dá

$$0 \leq \overline{u} := \frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\phi_p \leq M \text{ em } \Omega. \tag{2.23}$$

Além disso, multiplicando ambos os lados a expressão (2.16) por $\left(\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^{p-1}$ e lembrando as definições de A_p e B_p, dadas em (2.4), temos

$$\lambda M^{q-1} + \beta M^{a-1}\left(\frac{k_p M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^b + mM^{l-1}e^{\alpha M^s} \leq \left(\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^{p-1}. \tag{2.24}$$

Assim, das expressões (2.21), (2.22), (2.23) e da última desigualdade (2.24), temos

$$\begin{aligned} g_u(x,\overline{u}(x)) &= \lambda\overline{u}(x)^{q-1} + \beta u(x)^{a-1}\left|\nabla u(x)\right|^b + mu(x)^{l-1}e^{\alpha u(x)^s} \\ &\leq \lambda M^{q-1} + \beta M^{a-1}\left(\frac{k_p M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^b + mM^{l-1}e^{\alpha M^s} \leq \left(\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$g_u(x, \overline{u}(x)) \leq \left(\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^{p-1}, \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.25}$$

Da homogeneidade de Δ_p, do fato de que $-\Delta_p \phi_p = 1$ em Ω e da desigualdade (2.25), decorre que

$$-\Delta_p \overline{u} = -\Delta_p \left(\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\phi_p\right) = \left(\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^{p-1}(-\Delta_p\phi_p) = \left(\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^{p-1} \geq g(x, \overline{u}), \text{ em } \Omega.$$

Portanto, como $\overline{u} = \frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\phi_p = 0$ sobre $\partial\Omega$, concluímos que $\overline{u}$ é uma supersolução do problema (2.19).

Agora provaremos que $\underline{u} \coloneqq \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)} e_p$ é uma subsolução do problema (2.19). Uma vez que $e_p^{p-q} \leq \|e_p\|_\infty^{p-q} \leq 1$ em Ω, temos que

$$\begin{aligned}
-\Delta_p \underline{u} &= -\Delta_p\left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)} e_p\right) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{(p-1)/(p-q)} (-\Delta_p e_p) \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{(p-1)/(p-q)} \lambda_p e_p^{p-1} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{(q-1)/(p-q)} \lambda_p e_p^{p-q} e_p^{q-1} \\
&\leq \lambda \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{(q-1)/(p-q)} e_p^{q-1} = \lambda \underline{u}^{q-1} \leq g(x, \underline{u}), \quad \text{em } \Omega.
\end{aligned}$$

Portanto, como $\underline{u} \coloneqq \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)} e_p = 0$ sobre $\partial\Omega$, concluímos que $\underline{u}$ é uma subsolução do problema (2.19).

Na sequência, provaremos que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω. Substituindo a definição de A_p, dada em (2.4), na desigualdade (2.16) e considerando apenas o primeiro termo do lado direito dessa desigualdade, decorre que

$$\lambda \frac{\|\phi_p\|_\infty^{p-1}}{M^{p-q}} \leq 1 \iff M \geq \left(\lambda \|\phi_p\|_\infty^{p-1}\right)^{1/(p-q)} = \left(\lambda \|\phi_p\|_\infty^{p-q} \, \|\phi_p\|_\infty^{q-1}\right)^{1/(p-q)}.$$

Logo,

$$\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty} \geq \left(\lambda \|\phi_p\|_\infty^{q-1}\right)^{1/(p-q)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)} \lambda_p^{1/(p-q)} \|\phi_p\|_\infty^{(q-1)/(p-q)}. \tag{2.26}$$

Além disso, do Lema 2.1.4 obtemos

$$\lambda_p^{1/(p-1)} \|\phi_p\|_\infty \geq 1 \iff \|\phi_p\|_\infty^{(q-1)/(p-q)} \geq \left(\lambda_p^{-1/(p-1)}\right)^{(q-1)/(p-q)}$$
$$\iff \lambda_p^{1/(p-q)} \|\phi_p\|_\infty^{(q-1)/(p-q)} \geq \lambda_p^{1/(p-q)} \left(\lambda_p^{-1/(p-1)}\right)^{(q-1)/(p-q)} = \lambda_p^{1/(p-1)}.$$

Daí,

$$\lambda_p^{1/(p-q)} \|\phi_p\|_\infty^{(q-1)/(p-q)} \geq \lambda_p^{1/(p-1)}.$$

Substituindo a última desigualdade na expressão (2.26),

$$\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty} \geq \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)} \lambda_p^{1/(p-1)}.$$

Portanto,

$$\left(\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^{p-1} \geq \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{(p-1)/(p-q)} \lambda_p. \tag{2.27}$$

Como $\underline{u} := \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)} e_p$, da homogeneidade do operador Δ_p e pela desigualdade (2.27), temos que

$$-\Delta_p \underline{u} = -\Delta_p \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)} e_p\right) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{(p-1)/(p-q)} \lambda_p e_p^{p-1}$$
$$\leq \left(\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^{p-1} e_p^{p-1} \leq \left(\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^{p-1} = -\Delta_p \overline{u},$$

e pelo Princípio de Comparação (Teorema C.0.1), isto implica que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω.

Com isto provado, podemos usar o método de sub-supersolução (Teorema D.0.3), para obter a existência de uma solução fraca $U \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para o problema (2.19), satisfazendo

$$\underline{u} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)} e_p \leq U \leq \frac{M}{\|\phi_p\|_\infty} \phi_p = \overline{u}, \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.28}$$

Além disso, como

$$\|g_u(x,U)\|_\infty \leq \lambda M^{q-1} + \beta M^{a-1} \left(\frac{k_p M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^b + m M^{l-1} e^{\alpha M^s} \leq \left(\frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^{p-1}$$

decorre que $g_u \in L^\infty$. Então, do Corolário 2.1.3, $U = T(u) \in C^{1,\eta_p}(\overline{\Omega}) \subset C^1(\overline{\Omega})$, e valem

as estimativas

$$|U|_{1,\eta_p} \leq K_p \frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}$$

e

$$\|\nabla U\|_\infty \leq k_p \frac{M}{\|\phi_p\|_\infty}. \tag{2.29}$$

Das expressões (2.28), (2.29) e como $U \in C^1(\overline{\Omega})$, da definição de F, dada em (2.17), concluímos que $U = T(u) \in F$, o que significa que F é invariante por T, isto é, $T(F) \subset F$. Pelo Teorema F.0.1, temos que a imersão, $C^{1,\eta_p}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ é compacta. Usando este fato, podemos verificar que o operador $T : F \to F$ é compacto. Portanto, estão satisfeitas as condições do Teorema G.0.2 (Teorema do Ponto Fixo de Schauder), o que garante a existência de um ponto fixo $u_p \in F$. Consequentemente, $T(u_p) = u_p$ no problema (2.18), isto é

$$\begin{cases} -\Delta_p u_p &= \lambda u_p^{q-1} + \beta u_p^{a-1} |\nabla u_p|^b + m u_p^{l-1} e^{\alpha u_p^s} & \text{em } \Omega, \\ u_p &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

no sentido fraco. Além disso, como $u_p \in F$, valem as estimativas em (2.5).

□

Observação 2.2.1. *Bueno e Ercole em [9] limitam inferiormente o conjunto F, dado em (2.17), (o qual também é usado em [15]), para isto consideram o escalar ϵ, em que*

$$0 < \epsilon \leq \min\left\{ \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)}, \frac{M}{\|\phi_p\|_\infty \lambda_p^{1/(p-1)}} \right\}$$

Graças à desigualdade (2.27), obtemos que $\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)} \leq \frac{M}{\|\phi_p\|_\infty \lambda_p^{1/(p-1)}}$ e com isto, conseguimos melhorar o limite inferior do conjunto F.

2.3 Aplicações do resultado principal

2.3.1 Aplicação 1

Como uma simples aplicação do Teorema 2.0.1 temos o seguinte resultado de existência. Neste resultado vamos fixar os parâmetros λ e β. Além disso, considerando certas condições para p, obtemos solução para o problema (P).

Corolário 2.3.1. *Suponha que $\partial\Omega \in C^{1,\tau}$ para algum $\tau \in (0,1)$. Sejam q, a, b, l, λ e β fixos, com $q, a, l \geq 1$; $b, \lambda, \beta > 0$, e $s, \alpha \geq 0$. Para cada*

$$p > \max\{q, a+b, l\},$$

existe uma constante positiva M_p satisfazendo

$$\lambda \frac{A_p}{M_p^{p-q}} + \beta \frac{B_p}{M_p^{p-(a+b)}} = \frac{1}{2}. \tag{2.30}$$

Além disso, se

$$0 < m \leq m_p := \frac{M_p^{p-l}}{2A_p e^{\alpha M_p^s}}, \tag{2.31}$$

o problema (P) admite uma solução fraca $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo (2.5).

Demonstração. Motivados pela definição de $\mathcal{E}(M)$, dada em (2.3), definimos a função

$$\varphi(t) := \lambda \frac{A_p}{t^{p-q}} + \beta \frac{B_p}{t^{p-(a+b)}}, \quad t > 0.$$

Da hipótese do problema, $p > q \geq 1$ e como $p > \max\{q, a+b, l\}$, obtemos que φ satisfaz $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = +\infty$ e $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$. Consequentemente, existe $M_p > 0$ tal que $\varphi(M_p) = \frac{1}{2}$, que é (2.30).

Para obter uma solução u_p, provaremos que $(\lambda, \beta, m) \in \mathcal{E}(M_p)$. Notamos da expressão de m_p em (2.31) que

$$\frac{m_p A_p}{M_p^{p-l} e^{-\alpha M_p^s}} = \frac{1}{2}.$$

Lembrando que $m \leq m_p$, temos de (2.30) e da última igualdade que

$$\frac{\lambda A_p}{M_p^{p-q}} + \frac{\beta B_p}{M_p^{p-(a+b)}} + \frac{m A_p}{M_p^{p-l} e^{-\alpha M^s}} \leq \frac{1}{2} + \frac{m_p A_p}{M_p^{p-l} e^{-\alpha M^s}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Assim, $(\lambda, \beta, m) \in \mathcal{E}(M_p)$ e, pelo Teorema 2.0.1, existe uma solução fraca $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

□

2.3.2 Aplicação 2

Agora apresentaremos algumas aplicações adicionais do Teorema 2.0.1 que estendem ou complementam alguns resultados recentes para problemas que envolvem termos exponenciais e termos de convecção.

Corolário 2.3.2. *Suponha que $\partial\Omega \in C^{1,\tau}$ para algum $\tau \in (0,1)$. Sejam q, a, b, l, α, s e m fixados, com $p > q \geq 1$; $m, b > 0$; $\alpha, s \geq 0$; $a \geq 1$, e*

$$l > p \geq a + b.$$

Existe uma constante positiva M_p tal que se

$$(\lambda, \beta) \in \mathcal{D} := \left\{ (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2_+ : \lambda \frac{A_p}{M_p^{p-q}} + \beta \frac{B_p}{M_p^{p-(a+b)}} \leq \frac{1}{2} \right\}, \tag{2.32}$$

então o problema (P) admite uma solução fraca $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que satisfaz (2.5).

Demonstração. Para cada $M > 0$, podemos escrever a desigualdade (2.16) como

$$\varphi_1(M) + \varphi_2(M) \leq 1, \tag{2.33}$$

em que

$$\varphi_1(t) := \lambda \frac{A_p}{t^{p-q}} + \beta \frac{B_p}{t^{p-(a+b)}}, \quad t > 0$$

e

$$\varphi_2(t) := m A_p t^{l-p} e^{\alpha t^s}, \quad t > 0.$$

Como $m, l - p > 0$ e $s, \alpha \geq 0$, temos que φ_2 é estritamente crescente e

$$\lim_{t \to 0^+} \varphi_2(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to \infty} \varphi_2(t) = \infty.$$

Logo, existe um único $M_p > 0$, tal que

$$\varphi_2(M_p) = \frac{1}{2}. \tag{2.34}$$

Com o intuito de obter o conjunto $\mathcal{D}$ dado na expressão (2.32), usaremos φ_1 e a constante

M_p. Com isto, de (2.33) e (2.34) obtemos,

$$\lambda\frac{A_p}{M_p^{p-q}}+\beta\frac{B_p}{M_p^{p-(a+b)}}=\varphi_1(M_p)\leq\frac{1}{2}. \tag{2.35}$$

Assim, se $(\lambda,\beta)\in\mathcal{D}$ obtemos a desigualdade (2.16), com $M=M_p$, das expressões (2.33), (2.34) e (2.35). O resultado de existência é, então, obtido pelo Teorema 2.0.1. □

Geometricamente, $\mathcal{D}$ é a região no quadrante $\mathbb{R}^2_+$ do $\lambda\beta-$plano que está baixo a reta

$$\lambda\frac{A_p}{M_p^{p-q}}+\beta\frac{B_p}{M_p^{p-(a+b)}}=\frac{1}{2}.$$

No trabalho [13], de Araujo e Faria consideraram o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_N u &= \gamma(a_1u^{r_1}+a_2\left|\nabla u\right|^{r_2})+f(u) & \text{em } \Omega,\\ u &> 0 & \text{em } \Omega,\\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.36}$$

em que $0<r_1,r_2<N-1$, $a_1>0$, $a_2\geq 0$, e $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo

$$0\leq f(t)\leq a_3t^{r_3}e^{\alpha t^{N/(N-1)}},\quad \text{em que } a_3,\alpha>0 \quad \text{e} \quad r_3>N-1.$$

Eles usaram um método de aproximação para provar a existência da solução fraca $u\in W_0^{1,N}(\Omega)$ para o problema (2.36), sempre que $\gamma\in(0,\gamma^*)$, para algum $\gamma^*>0$.

Notemos que (2.36) é um caso particular do problema (P), com $\lambda=\gamma a_1$, $\beta=\gamma a_2$, $q=r_1+1$, $a=1$, $b=r_2$, $m=a_3$, $l=r_3+1$, e $s=\frac{N}{N-1}$.

Relembremos que o Corolário 2.3.2 estende o resultado obtido por de Araujo e Faria em [13] (para o caso $f(t)=a_3t^{r_3}e^{\alpha t^{N/(N-1)}}$) já que admite $p\neq N$ e também permite que o termo de convecção seja multiplicado por uma potência da solução.

2.3.3 Aplicação 3

O seguinte corolário estende o resultado de Araujo e Faria apresentado no problema (2.36). Nesse problema, considerando o caso quando $f(t) = a_3 t^{r_3} e^{\alpha t^{N/(N-1)}}$, os autores impõem a condição $r_2 > N-1$. No resultado seguinte admitimos $p < a+b$, na notação deles isto significa que $r_2 + 1 < N$.

Corolário 2.3.3. *Assumamos que $\partial\Omega \in C^{1,\tau}$ para algum $\tau \in (0,1)$. Sejam q, a, b, l, α, s, β e m fixos, com $a, l \geq 1$; $\alpha, s \geq 0$ e $\beta, m > 0$. Suponhamos que*

$$1 \leq q < p < \min\{a+b, l\}.$$

Então, existe uma constante positiva M_p, tal que se

$$0 < \lambda \leq \lambda^* := \frac{M_p^{p-q}}{2A_p},$$

então (P) admite uma solução fraca $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo (2.5).

Demonstração. Agora, escrevamos a desigualdade (2.16) como

$$\varphi_1(M) + \varphi_2(M) \leq 1$$

em que

$$\varphi_1(t) := \lambda \frac{A_p}{t^{p-q}}, \quad t > 0$$

e

$$\varphi_2(t) := \beta B_p t^{(a+b)-p} + m A_p t^{l-p} e^{\alpha t^s}, \quad t > 0.$$

Devido às hipóteses, $(a+b)-p > 0$ e $l-p > 0$, daí temos que φ_2 é estritamente crescente e

$$\lim_{t\to 0} \varphi_2(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} \varphi_2(t) = \infty.$$

Portanto, existe $M_p > 0$, tal que

$$\varphi_2(M_p) = \frac{1}{2}.$$

Assim, se $\lambda \leq \lambda^*$

$$\varphi_1(M_p) = \lambda \frac{A_p}{M_p^{p-q}} \leq \left(\frac{M_p^{p-q}}{2A_p}\right) \frac{A_p}{M_p^{p-q}} = \frac{1}{2}$$

com isto, a desigualdade (2.16) é satisfeita com $M = M_p$. Consequentemente, podemos aplicar o Teorema 2.0.1 e obter o resultado desejado. □

Na notação do problema (2.36) temos

$$\gamma \leq \gamma^* := \frac{M_p^{p-q}}{2a_1 A_p}$$

em que a constante M_p é definida pela equação

$$\gamma a_2 B_p M_p^{(a+b)-p} + m A_p M_p^{l-p} e^{\alpha M^s} = \frac{1}{2}.$$

2.3.4 Aplicação 4

Procedendo como nas duas provas anteriores, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.3.4. *Suponha que $\partial\Omega \in C^{1,\tau}$ para algum $\tau \in (0,1)$. Sejam q, a, b, l, α, s e β fixados, com $b, \beta > 0$, $a \geq 1$, $\alpha, s \geq 0$. Suponha, ainda, que*

$$1 \leq q < l = p < a + b.$$

Se

$$M_p := \left(\frac{1}{2\beta B_p}\right)^{\frac{1}{(a+b)-p}}$$

e

$$(\lambda, m) \in \mathcal{D} := \left\{(\lambda, m) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : \lambda \frac{A_p}{M_p^{p-q}} + m\, A_p e^{\alpha M_p^s} \leq \frac{1}{2}\right\},$$

o problema (P) admite uma solução fraca $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo a desigualdade (2.5).

Demonstração. Da hipótese,

$$M_p := \left(\frac{1}{2\beta B_p}\right)^{\frac{1}{(a+b)-p}} \iff \beta = \frac{1}{2B_p M_p^{(a+b)-p}}.$$

Logo, como $(\lambda, m) \in \mathcal{D}$, temos

$$\begin{aligned}\lambda \frac{A_p}{M_p^{p-q}} + \beta \frac{B_p}{M_p^{p-(a+b)}} + m \frac{A_p\, e^{\alpha M^s}}{M_p^{p-l}} &\leq \lambda \frac{A_p}{M_p^{p-q}} + \left(\frac{1}{2B_p M_p^{(a+b)-p}}\right) \frac{B_p}{M_p^{p-(a+b)}} + m\, A_p\, e^{\alpha M^s} \\ &\leq \lambda \frac{A_p}{M_p^{p-q}} + \frac{1}{2} + m\, A_p e^{\alpha M_p^s} \leq 1.\end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade (2.16) é satisfeita e o resultado segue do Teorema 2.0.1. □

Capítulo 3

Um resultado de não existência

Em [24, Theorem 2.1], Garcia Azorero e Peral Alonso provaram que o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= me^u & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

não tem uma solução se

$$m > \max\left\{\lambda_p, \lambda_p \left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1}\right\}. \tag{3.2}$$

Nesta seção, estendemos o resultado de não existência de Garcia Azorero e Peral Alonso, para uma equação mais geral

$$-\Delta_p u = mu^{l-1}e^{\alpha u^s} + g(x), \text{ em } \Omega.$$

O lema seguinte foi provado por Allegretto e Huang (ver [2, Theorem 2.4]) como uma consequência da identidade de Picone.

Lema 3.0.1. *Seja $h \in L^\infty(\Omega)$ uma função não negativa. O problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_p |u|^{p-2} u + h(x) & em \quad \Omega, \\ u \geq 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma solução fraca se, e somente se, $h \equiv 0$ em Ω e $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Neste caso, a solução é um múltiplo de e_p.

Proposição 3.0.2. *Suponha que $u_m \in W_0^{1.p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ seja uma solução fraca positiva do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= m u^{l-1} e^{\alpha u^s} + g(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0, \qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

em que $g \in L^\infty(\Omega)$, $g \geq 0$, $1 \leq l < p$ e $\alpha, s > 0$. Então,

$$m < \lambda_p \left(\frac{p-l}{\alpha s e} \right)^{\frac{p-l}{s}}. \tag{3.4}$$

Demonstração. Consideremos, para $t > 0$, a função estritamente positiva

$$Q(t) := m \frac{e^{\alpha t^s}}{t^{p-l}}, \quad t > 0.$$

Logo,

$$Q'(t) = \frac{m e^{\alpha t^s} t^{p-l-1} \left(\alpha s t^s - (p-l) \right)}{(t^{p-l})^2},$$

donde obtemos que o único ponto crítico de Q é

$$t_c = \left(\frac{p-l}{\alpha s} \right)^{1/s}.$$

Por hipótese temos, $p - l, \alpha, s > 0$, o que nos dá

$$\lim_{t \to 0^+} Q(t) = \lim_{t \to +\infty} Q(t) = +\infty.$$

Disto, temos que t_c é o único ponto de mínimo global de $Q(t)$. Assim,

$$Q(t) > Q(t_c) = m \frac{e^{\alpha \left(\left(\frac{p-l}{\alpha s} \right)^{\frac{1}{s}} \right)^s}}{\left(\left(\frac{p-l}{\alpha s} \right)^{\frac{1}{s}} \right)^{p-l}} = m \frac{e^{\frac{p-l}{s}}}{\left(\frac{p-l}{\alpha s} \right)^{\frac{p-l}{s}}} = m \left(\frac{\alpha s e}{p-l} \right)^{\frac{p-l}{s}} = m C_p, \quad \forall\, t \neq t_c,$$

em que

$$C_p := \left(\frac{\alpha\, s\, e}{p-l} \right)^{\frac{p-l}{s}}.$$

Da definição da função Q decorre que

$$m u_m^{l-1} e^{\alpha u_m^s} = Q(u_m) u_m^{p-1} \geq Q(t_c) u_m^{p-1} = m C_p u_m^{p-1}, \text{ em } \Omega \tag{3.5}$$

em que a igualdade acontece apenas se $u_m = t_c$ ou $u_m = 0$.

Agora, como $u_m \in W_0^{1.p}(\Omega)$ é uma solução positiva, podemos escrever o problema (3.3) como

$$-\Delta_p u_m = \lambda_p u_m^{p-1} + h, \text{ em } \Omega \tag{3.6}$$

em que

$$h := m u_m^{l-1} e^{\alpha u_m^s} + g - \lambda_p u_m^{p-1}.$$

Mais ainda, temos que a função $h \in L^\infty(\Omega)$, pois $u_m, g \in L^\infty(\Omega)$. Lembrando que $g \geq 0$, da desigualdade (3.5) obtemos

$$h \geq m u_m^{l-1} e^{\alpha u_m^s} - \lambda_p u_m^{p-1} \geq (mC_p - \lambda_p) u_m^{p-1}. \tag{3.7}$$

Para obter o resultado, provaremos que

$$mC_p - \lambda_p < 0,$$

que é a desigualdade dada em (3.4), considerando a constante $C_p = \left(\frac{\alpha s e}{p-l}\right)^{\frac{p-l}{s}}$. Suponhamos, por contradição, que

$$mC_p \geq \lambda_p.$$

Devido a esta suposição, temos que $h \geq 0$ na expressão (3.7). Portanto, na igualdade (3.6) são sastisfeitas as condições do Lema 3.0.1, o que garante que $h \equiv 0$, q.t.p. em Ω. Assim,

$$0 \leq (mC_p - \lambda_p) u_m^{p-1} \leq m u_m^{l-1} e^{\alpha u_m^s} + g - \lambda_p u_m^{p-1} = 0. \tag{3.8}$$

Portanto, temos duas possibilidades a serem consideradas:
Se $mC_p > \lambda_p$, então da expressão (3.8) temos

$$u_m = 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

o que é um absurdo, pois $u_m > 0$.
Se $mC_p = \lambda_p$, da desigualdade (3.5) temos $\lambda_p u_m^{p-1} \leq m u_m^{l-1} e^{\alpha u_m^s}$ e pela expressão (3.8)

conseguimos

$$g = \lambda_p u_m^{p-1} - m u_m^{l-1} e^{\alpha u_m^s} \leq 0.$$

Isto implica que $g = 0$, daí $\lambda_p u_m^{p-1} = m u_m^{l-1} e^{\alpha u_m^s}$. Além disso, como estamos considerando $mC_p = \lambda_p$, obtemos a igualdade na expressão (3.5) e esta igualdade nos dá

$$u_m = t_c, \qquad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

que é uma contradição, pois t_c não é solução de (3.3).
Assim, concluímos que

$$mC_p - \lambda_p < 0 \Longleftrightarrow m < \frac{\lambda_p}{C_p} = \lambda_p \left(\frac{p-l}{\alpha s e} \right)^{\frac{p-l}{s}}.$$

□

Notemos que a Proposição 3.0.2 diz que o problema dado em (3.3) não tem solução se

$$m \geq \lambda_p \left(\frac{p-l}{\alpha s e} \right)^{\frac{p-l}{s}}.$$

Além disso, esta proposição refina o resultado dado por Garcia Azorero e Peral Alonso [24, Theorem 2.1], pois se no problema (3.3) consideramos $l = \alpha = s = 1$ e $g \equiv 0$, obtemos que o problema (3.1) não tem solução se

$$m \geq \lambda_p \left(\frac{p-1}{e} \right)^{p-1},$$

o que melhora a condição dada em (3.2).

Também, observemos que a desigualdade (3.4) melhora a estimativa dada em (3.2) quando $1 < p \leq 1 + e$. De fato, neste caso, (3.1) também não tem solução se

$$\lambda_p \left(\frac{p-1}{e} \right)^{p-1} \leq m \leq \lambda_p.$$

Capítulo 4

Comportamento assintótico

Nesta seção, assumiremos uma hipótese forte na regularidade de Ω: ou $\partial\Omega \in C^{1,1}$ ou Ω é convexo e $\partial\Omega \in C^{1,\tau}$, com $\tau \in (0,1)$.

Nosso objetivo é provar a convergência uniforme da sequência (u_p) à função distância d_Ω, quando $p \to \infty$, em que $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é a solução do problema (P), dada pelo Corolário 2.3.1.

Para isto, consideremos: $p > \max\{q, a+b, l\}$, os parâmetros positivos λ e β arbitrários, porém fixados, e o parâmetro m restrito ao intervalo $(0, m_p]$. Recordemos que m_p foi dada na expressão (2.31):

$$m_p := \frac{M_p^{p-l}}{2A_p e^{\alpha M_p^s}},$$

em que a constante positiva M_p foi definida na igualdade (2.30) e satisfaz

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)} e_p \leq u_p \leq \frac{M_p}{\|\phi_p\|_\infty}\phi_p \quad \text{e} \quad \|\nabla u_p\|_\infty \leq \frac{k_p M_p}{\|\phi_p\|_\infty}. \tag{4.1}$$

Para obter nosso objetivo, faremos uso de estimativas explícitas do gradiente, devido a Ercole em [18]. Estas estimativas são baseadas em um resultado de Cianchi e Maz'ya, em [11] para uma classe de operadores que incluem, como um caso particular, o operador p-Laplaciano.

4.1 Resultados de convergência e estimativas

Antes de enunciarmos o resultado que nos ajudará em obtermos as estimativas do gradiente, vejamos uma outra estimativa para uma função $g \in L^\infty(\Omega)$ que envolve a norma do

espaço de Lorentz, definida na Seção 1.6.

Dada $g \in L^\infty(\Omega)$ e considerando $p = N$ e $q = 1$ na Definição 1.6.13, em que $N' = \frac{N}{N-1}$, temos

$$\begin{aligned}\|g\|_{N,1} &= \int_0^{|\Omega|} |g^{**}(s)| s^{-\frac{1}{N'}} \mathrm{d}s = \int_0^{|\Omega|} \left| \frac{1}{s} \int_0^s g^*(r) \mathrm{d}r \right| s^{-\frac{1}{N'}} \mathrm{d}s \\ &\leq \|g^*\|_\infty \int_0^{|\Omega|} \left| \frac{1}{s} \int_0^s \mathrm{d}r \right| s^{-\frac{1}{N'}} \mathrm{d}s = \|g^*\|_\infty \int_0^{|\Omega|} s^{-\frac{1}{N'}} \mathrm{d}s \\ &= \|g^*\|_\infty \int_0^{|\Omega|} s^{\frac{1}{N}-1} \mathrm{d}s = N\,|\Omega|^{\frac{1}{N}}\,\|g\|_\infty\,, \end{aligned} \tag{4.2}$$

a última igualdade decorrendo de $\|g^*\|_\infty = \|g\|_\infty$, conforme (1.9).

Lema 4.1.1. *Suponha que $p \geq 2$ e, ou $\partial\Omega \in C^{1,1}$ ou Ω é convexo. Seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ a solução fraca do problema do Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= g \quad \text{em } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $g \in L^\infty(\Omega)$. Existem constantes positivas c e γ, as quais são uniformes com respeito a p e à função g, tais que

$$\|\nabla v\|_\infty^{p-1} \leq c p^\gamma \|g\|_\infty\,. \tag{4.3}$$

Demonstração. Na prova deste lema, consideraremos os casos $N = 2$ e $N \geq 3$.

No caso $N = 2$: Consideremos $\partial\Omega \in C^{1,1}$. Devido a $C^{1,1} \subset W^2 L^{\theta,1}$, resulta que $\partial\Omega \in W^2 L^{\theta,1}$, para algum $\theta > 1$. Além disso, $g \in L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para algum $q > 2$. Então, invocando [18, Teorema 1.3], existe uma constante C positiva que depende no máximo de q e Ω, tal que

$$\|\nabla v\|_\infty^{p-1} \leq C\, p^{\frac{5}{2}+\frac{2\theta}{\theta-1}}\, \|g\|_q\,. \tag{4.4}$$

Além disso, como $\|g\|_q \leq \|g\|_\infty |\Omega|^{1/q}$, podemos definir $c := C\,|\Omega|^{1/q}$ e $\gamma := \frac{5}{2} + \frac{2\theta}{\theta-1}$, dessa maneira, obtemos o resultado.

Agora, consideremos Ω convexo. Do [18, Teorema 1.3], a estimativa (4.4) escreve-se

como

$$\|\nabla v\|_\infty^{p-1} \leq C\, p^{\frac{5}{2}}\, \|g\|_q\,,$$

e é suficiente definir $c := C\,|\Omega|^{1/q}$ e $\gamma := \frac{5}{2}$.

Caso $N \geq 3$: Se $\partial\Omega \in C^{1,1}$, analogamente ao caso anterior, obtemos que $\partial\Omega \in W^2L^{\theta,1}$, para algum $\theta > 1$. Além disso, a expressão (4.2) obtemos que $g \in L^{N,1}(\Omega)$. Portanto, do [18, Teorema 1.2] e (4.2) conseguimos

$$\|\nabla v\|_\infty^{p-1} \leq Cp^{\frac{5}{2}+\frac{\theta N}{\theta-(N-1)}}\, \|g\|_{N,1} \leq Cp^{\frac{5}{2}+\frac{\theta N}{\theta-(N-1)}} N\,|\Omega|^{\frac{1}{N}}\, \|g\|_\infty\,, \tag{4.5}$$

e, definindo as constantes $c := CN\,|\Omega|^{\frac{1}{N}}$ e $\gamma := \frac{5}{2} + \frac{\theta N}{\theta-(N-1)}$, obtemos o resultado.

Agora, se a hipótese $\partial\Omega \in W^2L^{\theta,1}$ for substituída por Ω ser convexo, então devido a [18, Teorema 1.2], temos

$$\|\nabla v\|_\infty^{p-1} \leq Cp^{\frac{5}{2}}\, \|g\|_{N,1}\,.$$

Procedendo analogamente, podemos utilizar a desigualdade (4.2) e tomar as constantes $c := CN\,|\Omega|^{\frac{1}{N}}$ e $\gamma := \frac{5}{2}$ para obter

$$\|\nabla v\|_\infty^{p-1} \leq cp^{\gamma}\, \|g\|_\infty\,.$$

□

Observação 4.1.2. *Seguindo Cianchi e Maz'ya em [11], a suposição $\partial\Omega \in W^2L^{\theta,1}$ significa que Ω é localmente o subgráfico de uma função de $N-1$ variáveis, cujas derivadas distribucionais de segunda ordem encontram-se no espaço de Lorentz $L^{\theta,1}$. A hipótese de regularidade, isto é, $\partial\Omega \in W^2L^{N-1,1}$ é a suposição de integrabilidade mais fraca possível sobre derivadas de segunda ordem para que as derivadas de primeira ordem sejam contínuas e, portanto, para que $\partial\Omega \in C^{1,0}$ [10].*

Graças ao Lema 4.1.1, podemos enunciar e provar o próximo resultado, que será crucial para demonstrar a convergência uniforme da família de soluções (u_p) do problema (P).

Proposição 4.1.3. *Seja* $k_p := \sup_{w\in\mathcal{S}_p} \|\nabla w\|_\infty$, *como definido em (2.1). Vale*

$$\lim_{p\to\infty} k_p = 1. \tag{4.6}$$

Demonstração. Observemos que da desigualdade (2.11) decorre

$$\frac{\|\phi_p\|_\infty}{\|d_\Omega\|_\infty} \leq k_p, \text{ sempre que } p > 1,$$

e assim, pelo Teorema 1.5.1, segue-se que

$$1 = \lim_{p\to\infty} \frac{\|\phi_p\|_\infty}{\|d_\Omega\|_\infty} \leq \liminf_{p\to\infty} k_p. \tag{4.7}$$

De acordo com o Lema 4.1.1 temos

$$\|\nabla w\|_\infty \leq (cp^\gamma)^{\frac{1}{p-1}}, \quad \text{para todo } w \in \mathcal{S}_p,\ p \geq 2.$$

Consequentemente, devido à definição de k_p, dada em (2.1), concluímos que

$$k_p \leq (cp^\gamma)^{\frac{1}{p-1}}, \quad \text{para todo } p \geq 2.$$

Portanto, na expressão anterior, tomando o limite quando $p \to \infty$ e aplicando L'Hopital, segue-se que

$$\limsup_{p\to\infty} k_p \leq \lim_{p\to\infty} (cp^\gamma)^{\frac{1}{p-1}} = \lim_{p\to\infty} e^{\ln(cp^\gamma)^{\frac{1}{p-1}}} = \lim_{p\to\infty} e^{\frac{\ln(cp^\gamma)}{p-1}} = e^{\lim_{p\to\infty}\frac{\gamma}{p}} = 1. \tag{4.8}$$

Assim, das desigualdades (4.7) e (4.8), obtemos

$$\lim_{p\to\infty} k_p = 1.$$

□

No próximo lema, as expressões M_p e m_p estão definidas no Corolário 2.3.1. Para comodidade do leitor vamos recordar estas definições: M_p é definida pela igualdade

$$\lambda \frac{A_p}{M_p^{p-q}} + \beta \frac{B_p}{M_p^{p-(a+b)}} = \frac{1}{2}$$

enquanto m_p é dada por

$$m_p \coloneqq \frac{M_p^{p-l}}{2A_p e^{\alpha M_p^s}}.$$

Lema 4.1.4. *As seguintes convergências são satisfeitas:*

1. $\lim_{p\to\infty} M_p = \|d_\Omega\|_\infty$,
2. $\lim_{p\to\infty} \left(\frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p}\right)^p = \frac{1}{2\left(\lambda \|d_\Omega\|_\infty^{q-1} + \beta \|d_\Omega\|_\infty^{a-1}\right)}$,
3. $\lim_{p\to\infty} m_p = m_\infty$, *em que*

$$m_\infty \coloneqq \left(\lambda \|d_\Omega\|_\infty^{q-1} + \beta \|d_\Omega\|_\infty^{a-1}\right) \|d_\Omega\|_\infty^{l-1} e^{-\alpha \|d_\Omega\|_\infty^s}. \tag{4.9}$$

Demonstração. Recordemos que $A_p = \|\phi_p\|_\infty^{p-1}$ e $B_p = k_p^b \|\phi_p\|_\infty^{p-1-b}$.

Prova do item 1. Das definições de A_p e B_p podemos escrever a igualdade (2.30) como

$$\lambda \|\phi_p\|_\infty^{q-1} \left(\frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p}\right)^{p-q} + \beta \|\phi_p\|_\infty^{a-1} k_p^b \left(\frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p}\right)^{p-r} = \frac{1}{2}, \tag{4.10}$$

em que

$$r \coloneqq a + b.$$

Logo, de (4.10) decorre

$$\lambda \|\phi_p\|_\infty^{q-1} \left(\frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p}\right)^{p-q} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p} \leq \frac{1}{(2\lambda \|\phi_p\|_\infty^{q-1})^{1/(p-q)}}. \tag{4.11}$$

Agora, analisando a convergência do lado direito da expressão (4.11), obtemos

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{(2\lambda \|\phi_p\|_\infty^{q-1})^{1/(p-q)}} = \frac{1}{\lim_{p\to\infty} (2\lambda \|\phi_p\|_\infty^{q-1})^{1/(p-q)}} = \frac{1}{\left(2\lambda \|d_\Omega\|_\infty^{q-1}\right)^0} = 1,$$

onde aplicamos o Teorema 1.5.1 para obter

$$\lim_{p\to\infty} \|\phi_p\|_\infty = \|d_\Omega\|_\infty. \tag{4.12}$$

Portanto, da desigualdade (4.11) obtemos

$$\limsup_{p\to\infty} \frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p} \leq \lim_{p\to\infty} \frac{1}{(2\lambda \|\phi_p\|_\infty^{q-1})^{1/(p-q)}} = 1. \tag{4.13}$$

Para concluir a prova do item 1 vamos mostrar que

$$1 \leq \liminf_{p\to\infty} \frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p}.$$

Sem perda de generalidade, analisaremos o caso em que $r \geq q$ (o caso $r < q$ é análogo). Da desigualdade (4.13), temos que $\frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p} \leq 1$. Assim, como $r \geq q$, temos

$$\left(\frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p}\right)^{p-q} \leq \left(\frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p}\right)^{p-r}$$

para todo p suficientemente grande . Substituindo esta última desigualdade na expressão (4.10), temos

$$\frac{1}{2} \leq \left(\lambda \|\phi_p\|_\infty^{q-1} + \beta \|\phi_p\|_\infty^{a-1} k_p^b\right) \left(\frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p}\right)^{p-r},$$

donde concluímos

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p-r}} \left(\lambda \|\phi_p\|_\infty^{q-1} + \beta \|\phi_p\|_\infty^{a-1} k_p^b\right)^{-\frac{1}{p-r}} \leq \frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p}$$

para todo p suficientemente grande. Logo, usando as expressões (4.6), (4.12) e fazendo $p \to \infty$ na desigualdade anterior, obtemos

$$1 = \lim_{p\to\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p-r}} \left(\lambda \|\phi_p\|_\infty^{q-1} + \beta \|\phi_p\|_\infty^{a-1} k_p^b\right)^{-\frac{1}{p-r}}\right) \leq \lim_{p\to\infty} \inf \frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p},$$

e assim obtemos

$$1 \leq \liminf_{p\to\infty} \frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p}. \tag{4.14}$$

Combinando as desigualdades (4.13) e (4.14), concluímos que

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p} = 1. \tag{4.15}$$

Logo, tendo em vista (4.12), obtemos o item 1.

Prova do item 2. Definamos o seguinte limite por

$$L := \lim_{p\to\infty} \left(\frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p} \right)^p.$$

Reescrevendo e aplicando passando ao limite na expressão (4.10), vem

$$\lim_{p\to\infty} \left(\lambda \|\phi_p\|_\infty^{q-1} \left(\frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p} \right)^p \left(\frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p} \right)^{-q} + \beta \|\phi_p\|_\infty^{a-1} k_p^b \left(\frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p} \right)^p \left(\frac{\|\phi_p\|_\infty}{M_p} \right)^{-r} \right) = \frac{1}{2}.$$

Assim, de (4.6), (4.12), (4.15) e L, obtemos a igualdade

$$\lambda \|d_\Omega\|_\infty^{q-1} L + \beta \|d_\Omega\|_\infty^{a-1} L = \frac{1}{2} \iff L = \frac{1}{2\left(\lambda \|d_\Omega\|_\infty^{q-1} + \beta \|d_\Omega\|_\infty^{a-1}\right)},$$

o que prova o item 2.

Prova do item 3. Das definições de m_p, A_p, e usando os itens 1 e 2, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty} m_p &= \lim_{p\to\infty} \frac{M_p^{p-l}}{2A_p e^{\alpha M_p^s}} = \frac{1}{2} \lim_{p\to\infty} \left(\left(\frac{M_p}{\|\phi_p\|_\infty} \right)^p \left(\frac{M_p}{\|\phi_p\|_\infty} \right)^{-1} M_p^{1-l} \frac{1}{e^{\alpha M_p^s}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{L} \|d_\Omega\|_\infty^{1-l} \frac{1}{e^{\alpha \|d_\Omega\|_\infty^s}} \\
&= \frac{1}{2} 2\left(\lambda \|d_\Omega\|_\infty^{q-1} + \beta \|d_\Omega\|_\infty^{a-1}\right) \|d_\Omega\|_\infty^{1-l} \, e^{-\alpha \|d_\Omega\|_\infty^s} = m_\infty.
\end{aligned}$$

□

O próximo lema está contido em [26] e uma prova detalhada pode ser consultada em [20, Lemma 4.2].

Lema 4.1.5. *Para cada $p > N$, seja u_p uma função não negativa em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Suponhamos que*

$$\limsup_{p\to\infty} \|\nabla u_p\|_p \leq C, \tag{4.16}$$

para alguma constante C. Se $p_n \to \infty$, então existem uma subsequência $(u_{p_{n_j}})$ e uma função $u_\infty \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$, tais que $u_{p_{n_j}} \to u_\infty$ uniformemente em $\overline{\Omega}$. Além disso,

$$\|\nabla u_\infty\|_\infty \leq C \quad e \quad 0 \leq u_\infty \leq C d_\Omega, \text{ em } \overline{\Omega}.$$

4.2 Convergência uniforme para d_Ω

A Proposição 4.1.3 e os Lemas 4.1.4 e 4.1.5 nos garantem que, a menos de subsequências, u_p converge uniformemente para uma função u_∞ em $\overline{\Omega}$, quando $p \to \infty$. Com efeito, tomando a desigualdade da direita na expressão (4.1) e usando as convergências dadas em (4.6) e no Lema 4.1.4, obtemos a seguinte estimativa assintótica para $\|\nabla u_p\|_p$:

$$\limsup_{p\to\infty} \|\nabla u_p\|_p \leq \limsup_{p\to\infty} |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|\nabla u_p\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty} \frac{|\Omega|^{\frac{1}{p}} k_p M_p}{\|\phi_p\|_\infty} = 1, \quad \text{em } \overline{\Omega}. \tag{4.17}$$

Logo, pelo Lema 4.1.5, existe uma subsequência $(u_{p_{n_j}})$ a qual converge uniformemente para uma função $u_\infty \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ em $\overline{\Omega}$ e a menos de subsequências

$$\lim_{p\to\infty} u_p = u_\infty, \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}. \tag{4.18}$$

Além disso,

$$\|\nabla u_\infty\|_\infty \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq u_\infty \leq d_\Omega, \text{ em } \overline{\Omega}. \tag{4.19}$$

Na sequência, vamos mostrar que $u_\infty = d_\Omega$. É interessante observarmos que as informações e resultados que temos até agora nos levam às seguintes estimativas para u_∞:

$$\|d_\Omega\|_\infty e_\infty \leq u_\infty \leq d_\Omega, \tag{4.20}$$

em que e_∞ é a função limite dada pelo Teorema 1.4.2. De fato, combinando as estimativas para u_p em (4.1), com o item 1 do Lema 4.1.4, o Lema 1.4.1 e o Teorema 1.4.2 obtemos (4.20).

Portanto, já podemos concluir de (4.20) e da Observação 1.4.3 que a igualdade $u_\infty = d_\Omega$ ocorre para domínios simples como bolas, anéis e estádios, uma vez que $e_\infty = \frac{d_\Omega}{\|d_\Omega\|_\infty}$ para estes domínios.

Entretanto, para outros domínios simples, como quadrados, triângulos e outros polígonos, ainda não podemos garantir a igualdade $u_\infty = d_\Omega$, pois para estes domínios temos $e_\infty \neq \frac{d_\Omega}{\|d_\Omega\|_\infty}$.

Proposição 4.2.1. *Assuma que $\partial\Omega \in C^{1,1}$. Sejam q, a, b, l, λ e β fixos, com $q > 1$, $a, l \geq 1$, e $b, s, \alpha, \lambda, \beta > 0$. Para cada $p > \max\{q, a+b, l\}$, sejam M_p, m_p e $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ como no Corolário 2.3.1. Então,*

$$\lim_{p\to\infty} u_p = d_\Omega, \ \textit{uniformemente em } \overline{\Omega}.$$

Demonstração. Para obter o resultado, provaremos que $u_\infty = d_\Omega$.
Da expressão (4.18) temos que, a menos de subsequências, u_p converge uniformemente para a função $u_\infty \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ em $\overline{\Omega}$, satisfazendo a desigualdade (4.19). Além disso, recordemos de (2.19) que u_p também é solução fraca do problema de Dirichlet,

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{q-2} u + h_p & \text{em } \Omega, \\ u &> 0 & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega; \end{cases} \tag{4.21}$$

em que

$$h_p := \beta u_p^{a-1} |\nabla u_p|^b + m u_p^{l-1} e^{\alpha u_p^s}.$$

Da desigualdade (4.1), sabemos que $0 \leq u_p \leq M_p$ e $\|\nabla u_p\|_\infty \leq \dfrac{k_p M_p}{\|\phi_p\|_\infty}$. Logo,

$$0 \leq \|h_p\|_\infty \leq \beta M_p^{a-1} \left(\frac{k_p M_p}{\|\phi_p\|_\infty}\right)^b + m M_p^{l-1} e^{\alpha M_p^s} < \infty.$$

Da convergência em (4.15), do Lema 4.1.4, item 1, e da Proposição 4.1.3, obtemos

$$\limsup_{p\to\infty} \|h_p\|_\infty \leq \beta \|d_\Omega\|_\infty^{a-1} + m \|d_\Omega\|_\infty^{l-1} e^{\alpha \|d_\Omega\|_\infty^s} < \infty. \tag{4.22}$$

Seja

$$I_p(v) := \frac{1}{p} \|\nabla v\|_p^p - \frac{1}{q} \int_\Omega |v|^q \, \mathrm{d}x - \int_\Omega h_p v \mathrm{d}x, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

o funcional energia associado ao problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{q-2} u + h_p & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.23}$$

Este funcional é de classe C^1 e assume valores não negativos. Além disso, ele é limitado

inferiormente e coercivo, isto é

$$-\infty < \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} I_p(u)$$

e

$$\lim_{\|\nabla u\|_p \to \infty} \frac{I_p(u)}{\|\nabla u\|_p} = \infty.$$

Portanto, um método de minimização direta padrão garante a existência de um minimizador global v_p para I_p que não é a função nula.

Tal minimizador v_p é não negativo (note que $I_p(|v_p|) \leq I_p(v_p)$). Naturalmente, v_p é um ponto crítico de I_p e, consequentemente, v_p é uma solução fraca não negativa e não trivial de (4.23). Pelo princípio do máximo forte, temos $v_p > 0$ em Ω. Portanto, v_p é uma solução fraca de (4.21). Da unicidade de soluções para este problema (veja o Corolário E.0.2), segue-se que $v_p = u_p$.

Das propriedades da função distância d_Ω, dadas em (1.1), temos que $d_\Omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Daí, $I_p(u_p) \leq I_p(d_\Omega)$, ou seja,

$$I_p(u_p) \leq \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla d_\Omega|^p \, \mathrm{d}x - \frac{1}{q} \int_\Omega d_\Omega^q \mathrm{d}x - \int_\Omega h_p d_\Omega \mathrm{d}x.$$

Novamente, segue das propriedades dadas em (1.1) que $|\nabla d_\Omega| = 1$ q.t.p. em Ω. Assim, da desigualdade anterior temos

$$\frac{1}{q} \int_\Omega (d_\Omega^q - u_p^q) \mathrm{d}x + \int_\Omega h_p (d_\Omega - u_p) \mathrm{d}x \leq \frac{|\Omega|}{p} - \frac{1}{p} \|\nabla u_p\|_p^p \leq \frac{|\Omega|}{p}. \tag{4.24}$$

Portanto, de (4.24) decorre que

$$\limsup_{p \to \infty} \left[\frac{1}{q} \int_\Omega (d_\Omega^q - u_p^q) \mathrm{d}x + \int_\Omega h_p (d_\Omega - u_p) \mathrm{d}x \right] \leq 0. \tag{4.25}$$

Na sequência, provaremos que

$$\liminf_{p \to \infty} \left[\frac{1}{q} \int_\Omega (d_\Omega^q - u_p^q) \mathrm{d}x + \int_\Omega h_p (d_\Omega - u_p) \mathrm{d}x \right] \geq 0.$$

Da expressão (4.19) temos que $d_\Omega - u_\infty \geq 0$. Então, a convergência uniforme de u_p para

u_∞ implica que

$$\lim_{p\to\infty}\int_\Omega (d_\Omega^q - u_p^q)\mathrm{d}x = \int_\Omega (d_\Omega^q - u_\infty^q)\mathrm{d}x \geq 0. \tag{4.26}$$

Uma vez que $d_\Omega - u_\infty \geq 0$, temos

$$\int_\Omega h_p(d_\Omega - u_p)\mathrm{d}x = \int_\Omega h_p(d_\Omega - u_\infty)\mathrm{d}x + \int_\Omega h_p(u_\infty - u_p)\mathrm{d}x \geq \int_\Omega h_p(u_\infty - u_p)\mathrm{d}x.$$

Daí,

$$\liminf_{p\to\infty}\int_\Omega h_p(d_\Omega - u_p)\mathrm{d}x \geq \liminf_{p\to\infty}\int_\Omega h_p(u_\infty - u_p)\mathrm{d}x. \tag{4.27}$$

Devido à convergência uniforme de u_p para u_∞, combinando com (4.22), conseguimos que

$$\lim_{p\to\infty}\int_\Omega h_p(u_\infty - u_p)\mathrm{d}x = 0, \tag{4.28}$$

pois

$$\left|\int_\Omega h_p(u_\infty - u_p)\mathrm{d}x\right| \leq \|u_\infty - u_p\|_\infty \|h_p\|_\infty |\Omega|.$$

Assim, das desigualdade dadas em (4.27) e (4.28), temos que

$$\liminf_{p\to\infty}\int_\Omega h_p(d_\Omega - u_p)\mathrm{d}x \geq 0. \tag{4.29}$$

Portanto, de (4.26) e de (4.29),

$$\liminf_{p\to\infty}\left[\frac{1}{q}\int_\Omega (d_\Omega^q - u_p^q)\mathrm{d}x + \int_\Omega h_p(d_\Omega - u_p)\mathrm{d}x\right] \geq 0. \tag{4.30}$$

Combinando as desigualdades (4.25) e (4.30) obtemos

$$\lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{q}\int_\Omega (d_\Omega^q - u_p^q)\mathrm{d}x + \int_\Omega h_p(d_\Omega - u_p)\mathrm{d}x\right] = 0.$$

Levando em conta as expressões (4.26) e (4.29) decorre que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{q}\int_\Omega (d_\Omega^q - u_p^q)\mathrm{d}x + \int_\Omega h_p(d_\Omega - u_p)\mathrm{d}x\right] \\
&= \liminf_{p\to\infty}\left[\frac{1}{q}\int_\Omega (d_\Omega^q - u_p^q)\mathrm{d}x + \int_\Omega h_p(d_\Omega - u_p)\mathrm{d}x\right] \\
&\geq \liminf_{p\to\infty}\frac{1}{q}\int_\Omega (d_\Omega^q - u_p^q)\mathrm{d}x + \liminf_{p\to\infty}\int_\Omega h_p(d_\Omega - u_p)\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{1}{q}\int_\Omega (d_\Omega^q - u_\infty^q)\mathrm{d}x \geq 0.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{1}{q}\int_\Omega (d_\Omega^q - u_\infty^q)\mathrm{d}x = 0.$$

Portanto, lembrando mais uma vez que $u_\infty \leq d_\Omega$, concluímos que $u_\infty = d_\Omega$.

Observando que o limite é sempre d_Ω, concluímos que u_p converge uniformemente para d_Ω em $\overline{\Omega}$ (independentemente de subsequências). □

Agora estamos em condições de enunciar e provar o resultado principal desta seção. Enfim daremos a prova do problema do comportamento assintótico da solução u_p do problema (P).

Teorema 4.2.2. *Assuma que $\partial\Omega \in C^{1,1}$. Sejam λ e β arbitrários, porém números reais positivos fixos, e seja m tal que*

$$0 < m < m_\infty. \tag{4.31}$$

Existe $p_0 > \max\{q, a+b, l\}$ tal que, se $p > p_0$, então o problema de Dirichlet (P) admite uma solução fraca $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso,

$$\lim_{p\to\infty} u_p = d_\Omega \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}. \tag{4.32}$$

Demonstração: Da hipótese, $q, a+b, l$ são fixos e como $\lim_{p\to\infty} m_p = m_\infty$, então

$$\exists\, p_0 > \max\{q, a+b, l\}, \quad \text{tal que} \quad 0 < m < m_p, \quad \forall p > p_o. \tag{4.33}$$

A expressão (4.33) juntamente com o fato que $C^{1,1} \subset C^{1,\tau}$ garantem que as hipóteses do

Corolário 2.3.1 são satisfeitas. Portanto, existem $M_p > 0$ e $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tais que

$$\lambda \frac{A_p}{M_p^{p-q}} + \beta \frac{B_p}{M_p^{p-(a+b)}} = \frac{1}{2} \tag{4.34}$$

e

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{1/(p-q)} e_p \leq u_p \leq \frac{M_p}{\|\phi_p\|_\infty}\phi_p \quad \text{e} \quad \|\nabla u_p\|_\infty \leq \frac{k_p M_p}{\|\phi_p\|_\infty}.$$

Mais ainda, vemos que as expressões (4.33) e (4.34) satisfazem as hipóteses da Proposição 4.2.1, de onde temos que

$$\lim_{p\to\infty} u_p = d_\Omega, \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}.$$

□

Capítulo 5

Comportamento limite de soluções do problema de Dirichlet envolvendo o p-Laplaciano e um termo de convecção com expoente dependendo de p

Neste capítulo, vamos estudar o comportamento assintótico, quando $p \to \infty$, de uma solução positiva u_p do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda|u|^{q-2}u + \mu|u|^{a-2}u\,|\nabla u|^{p-a} & \text{em} \quad \Omega, \\ \qquad u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{A}$$

em que Ω é um domínio Lipschitz limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, e $q, a \geq 1$.

Sem perda de generalidade, vamos considerar $\lambda = 1$ (veja a Observação 5.2.1). Considerando (u_p) uma família arbitrária de soluções fracas positivas do problema (A), provaremos que u_p converge uniformemente à função distância até a fronteira d_Ω, quando $p \to \infty$, sempre que $0 < \mu < \|d_\Omega\|_\infty^{-a}$.

Definição 5.0.1. *Dizemos que $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma **solução fraca** do problema de Dirichlet (A), se*

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \nabla v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |u_p|^{q-2}u_p v\,\mathrm{d}x + \mu\int_\Omega |u_p|^{a-2}u_p v\,|\nabla u_p|^{p-a}\,\mathrm{d}x,\ \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Para μ suficientemente pequeno, o problema (A) tem pelo menos uma solução fraca positiva u_p tal que $|\nabla u_p| \in L^\infty(\Omega)$ (veja [9]).

O principal resultado deste capítulo tem o seguinte enunciado.

Teorema 5.0.2. *Suponha que para algum μ satisfazendo*

$$0 < \mu < \|d_\Omega\|_\infty^{-a} \tag{5.1}$$

e para todo p suficientemente grande, o problema (A) tenha uma solução fraca positiva $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $|\nabla u_p| \in L^\infty(\Omega)$. Então,

$$\lim_{p\to\infty} u_p = d_\Omega, \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}. \tag{5.2}$$

A demonstração deste resultado de convergência será desenvolvida ao longo das seções seguintes. Enfatizamos que tal resultado é válido para qualquer família de soluções para o problema (A) com gradiente limitado. Acreditamos que isto é relevante, uma vez que unicidade de soluções para este problema não é conhecida na literatura.

5.1 Estimativas assintóticas

Da definição do primeiro autovalor do p-Laplaciano λ_p, dada em (1.6), temos a seguinte desigualdade de imersão,

$$\|u_p\|_p \leq \lambda_p^{-\frac{1}{p}} \|\nabla u_p\|_p . \tag{5.3}$$

Tomando $v = u_p$ na Definição 5.0.1 obtemos

$$\|\nabla u_p\|_p^p = \|u_p\|_q^q + \mu \int_\Omega |u_p|^a \, |\nabla u_p|^{p-a} \, \mathrm{d}x. \tag{5.4}$$

Vamos estimar a integral que aparece na última igualdade. Para isto consideremos

$$\widetilde{p} = \frac{p}{a} \quad \text{e} \quad \widetilde{q} = \frac{p}{p-a}, \quad \text{em que} \quad \frac{1}{\widetilde{p}} + \frac{1}{\widetilde{q}} = 1.$$

Da desigualdade de Hölder e do Teorema B.0.1, obtemos

$$\int_\Omega |u_p|^a \, |\nabla u_p|^{p-a} \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega (|u_p|^a)^{\frac{p}{a}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{a}{p}} \left(\int_\Omega \left(|\nabla u_p|^{p-a} \right)^{\frac{p}{p-a}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{p-a}{p}} = \|u_p\|_p^a \, \|\nabla u_p\|_p^{p-a}.$$

Para estimar o termo à direita da igualdade acima usamos a desigualdade de imersão dada em (5.3). Assim, temos

$$\int_\Omega |u_p|^a \, |\nabla u_p|^{p-a} \, \mathrm{d}x \leq \lambda_p^{-\frac{a}{p}} \, \|\nabla u_p\|_p^a \, \|\nabla u_p\|_p^{p-a} = \lambda_p^{-\frac{a}{p}} \, \|\nabla u_p\|_p^p \, . \tag{5.5}$$

Substituindo a expressão (5.5) na expressão (5.4), obtemos

$$\|\nabla u_p\|_p^p \leq \|u_p\|_q^q + \mu \, \lambda_p^{-\frac{a}{p}} \, \|\nabla u_p\|_p^p \, .$$

Mais ainda, para $q \leq p$, na Proposição B.0.3, temos que $\|u\|_q^q \leq |\Omega|^{1-\frac{q}{p}} \|u\|_p^q$ e, substituindo este resultado na desigualdade anterior, concluímos que

$$\|\nabla u_p\|_p^p \leq |\Omega|^{1-\frac{q}{p}} \|u\|_p^q + \mu \, \lambda_p^{-\frac{a}{p}} \, \|\nabla u_p\|_p^p \, .$$

Aplicando novamente a desigualdade de imersão (5.3) temos que

$$\|\nabla u_p\|_p^p \leq |\Omega|^{1-\frac{q}{p}} \lambda_p^{-\frac{q}{p}} \, \|\nabla u_p\|_p^q + \mu \, \lambda_p^{-\frac{a}{p}} \, \|\nabla u_p\|_p^p \, , \tag{5.6}$$

que é equivalente à seguinte estimativa a priori

$$1 \leq \mu \, \lambda_p^{-\frac{a}{p}} + \frac{|\Omega|^{1-\frac{q}{p}} \, \lambda_p^{-\frac{q}{p}}}{\|\nabla u_p\|_p^{p-q}}. \tag{5.7}$$

Afirmação 5.1.1. *Se* $0 < \mu < \|d_\Omega\|_\infty^{-a}$, *então*

$$\limsup_{p \to \infty} \|\nabla u_p\|_p \leq 1.$$

Demonstração. A prova desta afirmação será feita por absurdo. Suponhamos que existam $L > 1$ e $p_0 > 1$ tais que

$$\|\nabla u_p\|_p \geq L, \text{ para todo } p > p_0. \tag{5.8}$$

Do Lema 1.4.1, obtemos

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p^{-1/p} = \|d_\Omega\|_\infty . \tag{5.9}$$

Disto, da expressão (5.8) e tomando limite em ambos os lados na desigualdade (5.7), segue-se que

$$1 \leq \lim_{p\to\infty} \left(\mu\, \lambda_p^{-\frac{a}{p}} + \frac{|\Omega|^{1-\frac{q}{p}}\ \lambda_p^{-\frac{q}{p}}}{\|\nabla u_p\|_p^{p-q}} \right) \leq \mu \|d_\Omega\|_\infty^a + \lim_{p\to\infty} \frac{|\Omega|^{1-\frac{q}{p}}\ \lambda_p^{-\frac{q}{p}}}{L^{p-q}} = \mu \|d_\Omega\|_\infty^a, \tag{5.10}$$

pois

$$\lim_{p\to\infty} \left(|\Omega|^{1-\frac{q}{p}}\ \lambda_p^{-\frac{q}{p}} \right) = |\Omega| \|d_\Omega\|_\infty^q \quad \text{e} \quad \lim_{p\to\infty} \frac{1}{L^{p-q}} = 0.$$

Da expressão (5.10) segue que

$$\mu \geq \|d_\Omega\|_\infty^{-a},$$

que é claramente uma contradição com a hipótese. □

Afirmação 5.1.2. *Se* $0 < \mu < \|d_\Omega\|_\infty^{-a}$, *então*

$$\limsup_{p\to\infty} \|\nabla u_p\|_p^{p-1} < \infty.$$

Demonstração. Com efeito, multiplicando ambos os lados da desigualdade (5.6) por $\|\nabla u_p\|_p^{-1}$, obtemos

$$\|\nabla u_p\|_p^{p-1} \leq |\Omega|^{1-\frac{q}{p}} \lambda_p^{-\frac{q}{p}}\ \|\nabla u_p\|_p^{q-1} + \mu\, \lambda_p^{-\frac{a}{p}}\ \|\nabla u_p\|_p^{p-1}\,,$$

se, e somente se

$$\|\nabla u_p\|_p^{p-1} \leq |\Omega|^{1-\frac{q}{p}} \lambda_p^{-\frac{q}{p}} \frac{1}{1-\mu\, \lambda_p^{-\frac{a}{p}}}\ \|\nabla u_p\|_p^{q-1}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\limsup_{p\to\infty} \|\nabla u_p\|_p^{p-1} &\leq \limsup_{p\to\infty} \left(|\Omega|^{1-\frac{q}{p}} \lambda_p^{-\frac{q}{p}} \frac{1}{1-\mu\, \lambda_p^{-\frac{a}{p}}}\ \|\nabla u_p\|_p^{q-1} \right) \\
&\leq \limsup_{p\to\infty} \left(|\Omega|^{1-\frac{q}{p}} \lambda_p^{-\frac{q}{p}} \frac{1}{1-\mu\, \lambda_p^{-\frac{a}{p}}} \right) \limsup_{p\to\infty} \|\nabla u_p\|_p^{q-1} \\
&\leq \lim_{p\to\infty} \left(|\Omega|^{1-\frac{q}{p}} \lambda_p^{-\frac{q}{p}} \frac{1}{1-\mu\, \lambda_p^{-\frac{a}{p}}} \right) \limsup_{p\to\infty} \|\nabla u_p\|_p^{q-1}\,.
\end{aligned}$$

Daí, aplicando (5.9), a condição $0 < \mu < \|d_\Omega\|_\infty^{-a}$ e a Afirmacão 5.1.1, concluímos

$$\limsup_{p\to\infty} \|\nabla u_p\|_p^{p-1} \leq |\Omega| \, \|d_\Omega\|_\infty^q \frac{1}{1-\mu \, \|d_\Omega\|_\infty^a} < \infty.$$

□

5.2 A convergência uniforme para d_Ω

Tendo em vista a Afirmação 5.1.1, podemos utilizar o Lema 4.1.5 com $C = 1$. Portanto, quando $p \to \infty$, temos que, a menos de subsequências, u_p converge uniformemente para uma função $u_\infty \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$, tal que

$$0 \leq u_\infty(x) \leq d_\Omega(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}. \tag{5.11}$$

Da convergência uniforme de $u_p \to u_\infty$ e da segunda desigualdade em (5.11) temos

$$\lim_{p\to\infty} \left(\|d_\Omega\|_q^q - \|u_p\|_q^q\right) = \lim_{p\to\infty} \int_\Omega (d_\Omega^q - u_p^q) \mathrm{d}x = \int_\Omega (d_\Omega^q - u_\infty^q) \mathrm{d}x = \|d_\Omega\|_q^q - \|u_\infty\|_q^q \geq 0$$

e, portanto,

$$\|d_\Omega\|_q \geq \|u_\infty\|_q. \tag{5.12}$$

Com o intuito de obter a desigualdade $\|d_\Omega\|_q \leq \|u_\infty\|_q$, definamos o seguinte problema de Dirichlet auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-2} u + h_p, & \text{em} \quad \Omega \\ \quad u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{A_1}$$

em que

$$h_p \coloneqq \mu u_p^{a-1} |\nabla u_p|^{p-a}.$$

Por hipótese, temos que $|\nabla u_p| \in L^\infty(\Omega)$. Além disso, como estamos supondo que p é suficientemente grande, podemos assumir que $p > N$ e daí, a continuidade da imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ (consequência da bem conhecida desigualdade de Morrey) assegura que $u_p \in L^\infty(\Omega)$. Combinando estes fatos, concluímos que

$$h_p \in L^\infty(\Omega).$$

Vemos que a solução u_p do problema (A) também é solução do problema (A_1). Além disso, u_p é solução única de (A_1), de acordo com o Corolário E.0.2.

Na sequência, exibiremos uma estimativa para a função h_p do problema (A_1), a qual permitirá obter o valor de certa integral. Além disso, considerando o funcional energia associado a este problema, decorre que $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ minimiza tal funcional energia. Estes fatos serão aplicados para obtermos que $\|d_\Omega\|_q \leq \|u_\infty\|_q$.

Para obter a estimativa para a função h_p consideremos

$$\widetilde{p} = p, \quad \widetilde{q} = \frac{p}{a-1} \quad \text{e} \quad \widetilde{r} = \frac{p}{p-a}, \text{ donde } \quad \frac{1}{\widetilde{p}} + \frac{1}{\widetilde{q}} + \frac{1}{\widetilde{r}} = 1.$$

Pelo Corolário B.0.2 e pela desigualdade da imersão dada em (5.3), temos

$$\begin{aligned}\|h_p\|_1 &\leq \mu \left(\int_\Omega \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \left(|u_p|^{a-1}\right)^{\frac{p}{a-1}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{a-1}{p}} \left(\int_\Omega \left(|\nabla u_p|^{p-a}\right)^{\frac{p}{p-a}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-a}{p}} \\ &\leq \mu |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|u_p\|_p^{a-1} \|\nabla u_p\|_p^{p-a} \leq \mu \, |\Omega|^{\frac{1}{p}} \, \lambda_p^{-\frac{(a-1)}{p}} \|\nabla u_p\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

Além disso, levando em conta a expressão (5.9) e a Afirmação 5.1.2, concluímos que

$$\begin{aligned}\limsup_{p\to\infty} \|h_p\|_1 &\leq \limsup_{p\to\infty} \left(\mu \, |\Omega|^{\frac{1}{p}} \, \lambda_p^{-\frac{(a-1)}{p}} \|\nabla u_p\|_p^{p-1}\right) \\ &\leq \limsup_{p\to\infty} \left(\mu \, |\Omega|^{\frac{1}{p}} \, \lambda_p^{-\frac{(a-1)}{p}}\right) \limsup_{p\to\infty} \|\nabla u_p\|_p^{p-1} \\ &\leq \mu \lim_{p\to\infty} \left(|\Omega|^{\frac{1}{p}} \, \lambda_p^{-\frac{(a-1)}{p}}\right) \limsup_{p\to\infty} \|\nabla u_p\|_p^{p-1} \\ &\leq \mu \, \|d_\Omega\|_\infty^{a-1} \limsup_{p\to\infty} \|\nabla u_p\|_p^{p-1} < \infty. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Por outro lado, também temos

$$\left|\int_\Omega h_p(u_\infty - u_p)\mathrm{d}x\right| \leq \|h_p\|_1 \, \|u_\infty - u_p\|_\infty ,$$

e passando ao limite a ambos os lados, da última desigualdade (5.13) e pelo fato da

convergência $u_p \to u_\infty$ ser uniforme, chegamos

$$\lim_{p\to\infty}\left|\int_\Omega h_p(u_\infty - u_p)\mathrm{d}x\right| \leq \limsup_{p\to\infty}\|h_p\|_1 \lim_{p\to\infty}\|u_\infty - u_p\|_\infty = 0.$$

Daí, vem

$$\lim_{p\to\infty}\int_\Omega h_p(u_\infty - u_p)\mathrm{d}x = 0. \tag{5.14}$$

Recordemos que o funcional energia associado a (A_1) é definido por

$$I_p(v) := \frac{1}{p}\|\nabla v\|_p^p - \frac{1}{q}\|v\|_q^q - \int_\Omega h_p v\,\mathrm{d}x, \text{ para todo } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.15}$$

Este funcional é limitado inferiormente e coercivo. Portanto, uma técnica padrão de minimização direta garante a existência de um minimizador global v_p. Segue-se deste fato que v_p é uma solução fraca de (A_1). É fácil verificar que I_p assume valores negativos e, como consequência, v_p não é a função nula. Além disso, podemos verificar que $I_p(|v_p|) \leq I_p(v_p)$, garantindo assim que v_p é não negativa (pois $|v_p|$ é um minimizador). Aplicando o princípio do máximo forte para (A_1) concluímos que $v_p > 0$ em Ω e isso mostra que v_p é, de fato, uma solução fraca de (A). Por fim, da unicidade de soluções para (A), dada pelo Corolário E.0.2, temos $v_p = u_p$. Portanto, $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ minimiza o funcional energia I_p.

Das propriedades da função distância, dadas na Seção 1.1, d_Ω também está em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo,

$$I_p(u_p) \leq I_p(d_\Omega).$$

Daí, temos

$$\frac{1}{p}\|\nabla u_p\|_p^p - \frac{1}{q}\|u_p\|_q^q - \int_\Omega h_p u_p\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{p}\|\nabla d_\Omega\|_p^p - \frac{1}{q}\|d_\Omega\|_q^q - \int_\Omega h_p d_\Omega \mathrm{d}x,$$

se, e somente se,

$$\frac{1}{q}\left(\|d_\Omega\|_q^q - \|u_p\|_q^q\right) + \int_\Omega h_p\left(d_\Omega - u_p\right)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla d_\Omega|^p \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\|\nabla u_p\|_p^p.$$

Lembramos que $|\nabla d_\Omega(x)| = 1$ q.t.p. em Ω, veja a Seção 1.1. Assim, da desigualdade anterior, decorre

$$\frac{1}{q}\left(\|d_\Omega\|_q^q - \|u_p\|_q^q\right) + \int_\Omega h_p\left(d_\Omega - u_p\right)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{p}|\Omega|. \tag{5.16}$$

Da desigualdade (5.11) e devido a termos $h_p \geq 0$ (pois $u_p > 0$), concluímos que $\int_\Omega h_p(d_\Omega - u_\infty)\mathrm{d}x \geq 0$ e, com isto, obtemos

$$\int_\Omega h_p(d_\Omega - u_p)\mathrm{d}x = \int_\Omega h_p(d_\Omega - u_\infty)\mathrm{d}x + \int_\Omega h_p(u_\infty - u_p)\mathrm{d}x \geq \int_\Omega h_p(u_\infty - u_p)\mathrm{d}x.$$

Daí, substituindo na expressão (5.16), chegamos a

$$\frac{1}{q}\left(\|d_\Omega\|_q^q - \|u_p\|_q^q\right) + \int_\Omega h_p\left(u_\infty - u_p\right)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{p}|\Omega|.$$

Desta última desigualdade, pela convergência uniforme de u_p e pela convergência dada em (5.14), concluímos que

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{q}\left(\|d_\Omega\|_q^q - \|u_p\|_q^q\right) + \int_\Omega h_p\left(u_\infty - u_p\right)\mathrm{d}x\right) \leq \lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}|\Omega| = 0,$$

isto é, $\|d_\Omega\|_q^q - \|u_\infty\|_q^q \leq 0$. Portanto,

$$\|d_\Omega\|_q \leq \|u_\infty\|_q. \tag{5.17}$$

Agora, das desigualdades (5.12) e (5.17), obtemos

$$\|d_\Omega\|_q = \|u_\infty\|_q. \tag{5.18}$$

Isto é,

$$\int_\Omega \left(d_\Omega^q - u_\infty^q\right)\mathrm{d}x = 0$$

Como (5.11) garante que $d_\Omega(x) \geq u_\infty(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, obtemos $u_\infty = d_\Omega$ em $\overline{\Omega}$. Devido ao limite da função ser sempre d_Ω, concluímos que

$$\lim_{p\to\infty} u_p = d_\Omega, \quad \text{uniformemente em } \overline{\Omega}.$$

Observação 5.2.1. *É simples verificar que $w_p = \lambda^{\frac{1}{p-q}}u_p$ é solução de (A), com $\lambda > 0$. Note que $\lim_{p\to\infty} w_p = \lim_{p\to\infty} u_p = d_\Omega$ (uniformemente).*

Referências

[1] R. Adams: Sobolev Spaces, Academic Press, New York 1975.

[2] W. Allegreto, Y.X. Huang: A Picone's identity for the p-Laplacian and applications, Nonlinear Anal. **32** (1998) 819–830.

[3] C. Bennett, R. Sharpley. Interpolation of Operators. Orlando, Florida: Academic Press (1988). Pure and Applied Mathematics, 129.

[4] T. Bhattacharya: An elementary proof of the Harnack inequality for non-negative infinity-superharmonic functions, Electron. J. Differential Equations **2001.44** (2001) 1–8.

[5] T. Bhattacharya, E. DiBenedetto, J. Manfredi: Limits as $p \to \infty$ of $\Delta_p u_p = f$ and related extremal problems, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino Fascicolo Speciale (1989) 15–68.

[6] R. J. Biezuner. Equações diferenciais parciais i/ii. Notas de Aula, UFMG, 2010.

[7] M. Bocea, M. Mihăilescu: On a family of inhomogeneous torsional creep problems, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017) 4397–4409.

[8] H. Brezis. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011.

[9] H. Bueno, G. Ercole: A quasilinear problem with fast growing gradient, Applied Mathematics Letters **26** (2013) 520–523.

[10] A. Cianchi, L. Pick: Sobolev embeddings into BMO, VMO and L^∞, Ark. Math. **36** (1998) 317–340.

[11] A. Cianchi, V. G. Maz'ya: Global Lipschitz regularity for a class of quasilinear elliptic equations. Comm. Partial Differential Equations, **36** (2011) 100–133.

[12] S. Costea: Sobolev-Lorentz spaces in the Euclidean setting and counterexamples. Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications, 152 (2017), 149–182.

[13] de Araujo A.L.A, L.F.O. Faria: Positive solutions of quasilinear elliptic equations with exponential nonlinearity combined with convection term, J. Differential Equations **267** (2019) 4589–4608.

[14] de Araujo A.L.A, G. Ercole, J.C. Lanazca Vargas: The limiting behavior of solutions to p-Laplacian problems with convection and exponential terms, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 64 (2024), 339-359

[15] de Araujo A.L.A, M. Montenegro: Existence of solution for a nonlinear equation with supercritical exponential growth, J. Fixed Point Theory Appl. **25:26** (2023).

[16] J.I. Díaz, J.E. Saa: Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires, C.R. Acad. Sci., Paris **305** (Série I) (1987) 521–524.

[17] P. Drábek. The p-Laplacian-mascot of nonlinear analysis. Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 76(1), (2007) 85-98.

[18] G. Ercole: On a global gradient estimate in p-Laplacian problems, aceito para publicação em Israel Journal of Mathematics (preprint disponível em https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.05538).

[19] G. Ercole: On a family of problems driven by rapidly growing operators, Monatsh. Math. **202** (2023), 263-279.

[20] G. Ercole, G.M. Figueiredo, V.M. Magalhães and G.A. Pereira: The limiting behavior of global minimizers in non-reflexive Orlicz-Sobolev spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **150** (2022) 5267–5280.

[21] D.G. de Figueiredo, J.P. Gossez, H.R. Quoirin, P. Ubilla: Elliptic equations involving the p-Laplacian and a gradient term having natural growth, Rev. Mat. Iberoam. **35** (2019) 173–194.

[22] M. Fărcăşeanu, M. Mihăilescu: On a family of torsional creep problems involving rapidly growing operators in divergence form, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **149** (2019) 495–510.

[23] M. Fărcăşeanu, M. Mihăilescu, D. Stancu-Dumitru: On the convergence of the sequence of solutions for a family of eigenvalue problems, Math. Methods Appl. Sci. **40** (2017) 6919-6926.

[24] J. Garcia Azorero, I. Peral Alonso: On an Emden-Fowler type equation, Nonlinear Anal. **18** (1992) 1085–1097.

[25] A. Grecu, D. Stancu-Dumitru: The asymptotic behavior of solutions to a class of inhomogeneous problems: an Orlicz–Sobolev space approach, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **38** (2021) 1–20.

[26] J. Juutine, P. Lindqvist, J. Manfredi: The $\infty-$eigenvalue problem, Arch. Ration. Mech. Anal. **148** (1999) 89–105.

[27] B. Kawohl: On a family of torsional creep problems, J. Reine Angew. Math. **410** (1990) 1–22.

[28] M.C. Leon: Existence resuts for quasilinear problems via ordered sub and super-solutions. *Ann. Fac. Sciences Toulouse.* **6** (1997), 591-608.

[29] G.M. Lieberman: Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations, Nonlinear Anal. **12** (1988) 1203–1219.

[30] J. Manfredi, P. Lindqvist: Note on ∞-superharmonic functions, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **10** (1997) 471–480.

[31] M. Mihăilescu, D. Stancu-Dumitru, C. Varga: The convergence of nonnegative solutions for the family of problems $-\Delta_p u = \lambda e^u$ as $p \to \infty$, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **24** (2018) 569–578.

[32] I. Peral: Multiplicity of Solutions for thep-Laplacian, Second school of nonlinear functional analysis and applications to differential equation. Miramare-Trieste: International center for theoretical physics, 21 de abril - 9 de maio. 1997.

[33] D. SMART: Fixed point theorems, Cambridge University Press, New York, 1974.

[34] S. Sakaguchi: Concavity properties of solutions to some degenerated quasilinear elliptic Dirichlet problems, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci **14** (1987), 403–421.

[35] Y. Yu : Some properties of the ground states of the infinity Laplacian, Indiana Univ. Math. J. **56** (2007) 947–964 .

Apêndice A

Espaço de Sobolev

Neste primeiro apêndice, apresentamos alguns resultados relacionados ao Espaço de Sobolev. Para mais detalhes, ver [8].

Definição A.0.1. *Seja Ω subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e seja $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o* ***Espaço de Sobolev*** *$W^{1,p}(\Omega)$ por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \text{ tal que existem } \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), j = 1, \dots, N \right\}.$$

Para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, a $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ denota a $j-$ésima derivada fraca de u, isto é

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi \, \mathrm{d}x, \, \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

O espaço de Sobolev munido com a norma

$$\|u\|_{1,p} := \begin{cases} \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_\infty + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\infty, & \text{se} \quad p = \infty. \end{cases}$$

é um espaço de Banach.

Dada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, definimos

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

e podemos escrever o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \text{ tal que } |\nabla u| \in L^p(\Omega)\},$$

com a norma

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p.$$

Definição A.0.2. *Definimos $W_0^{1,p}(\Omega)$, sub espaço de $W^{1,p}(\Omega)$, como*

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}$$

Teorema A.0.3 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja Ω um domínio limitado em uma direção. Então, existe uma constante $C = C(p, \Omega)$, tal que para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p.$$

Observação A.0.4. *Da desigualdade de Poincaré temos que as normas $\|u\|_{1,p}$ e $\|\nabla u\|_p$ são equivalentes em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Apêndice B

Desigualdade de Hölder

Vamos assumir que Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, para $N \geq 2$. Denotamos por $\|u\|_s$ à norma do espaço $L^s(\Omega)$, para $1 \leq s \leq \infty$.

Teorema B.0.1. *Sejam $1 < p < \infty$ e q o conjugado de p, definido por $q = \dfrac{p}{p-1}$, isto é $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, em que $1 < q < \infty$. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\mathrm{d}x \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

A igualdade acontece se, e somente se, $|u|^p$ e $|v|^q$ são proporcionais q.t.p. em Ω.

Corolário B.0.2. *Sejam $p, q, r \in (0, \infty)$, tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$. Se $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ e $w \in L^r(\Omega)$, então $uvw \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)w(x)|\mathrm{d}x \leq \|u\|_p \|v\|_q \|w\|_r.$$

Proposição B.0.3. *Suponha $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Se $u \in L^q(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$ e $\|u\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_q$. Além disso, a imersão $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é contínua. Se $u \in L^\infty(\Omega)$, então $\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$.*

Para mais detalhes, veja [1].

Definição B.0.4. *Dado $x \in \mathbb{R}^N$, denotamos os conjuntos*

$$\mathbb{R}^N_+ = \left\{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N, x_N > 0\right\}, \text{ em que } x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ com}$$

$$|x'| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Q = \left\{ x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N, |x'| < 1, \text{ e } |x_N| < 1 \right\}, Q_+ = Q \cap \mathbb{R}^N_+, \text{ e}$$

$$Q_0 = \left\{ x = (x', 0) \in \mathbb{R}^N, |x'| < 1 \right\}.$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ conjunto aberto. Dizemos que Ω é um ***conjunto de classe*** $\mathbf{C^{0,1}}$ *se para cada $x \in \partial\Omega$, existe uma vizinhança U de $x \in \mathbb{R}^N$ e uma aplicação bijetiva $H : Q \to U$, chamada gráfico local, tal que*

i) $H \in C^1(\overline{\Omega})$,

ii) $H^{-1} \in C^1(\overline{U})$,

ii) $H(Q_+) = U \cap Q$,

iv) $H(Q_0) = U \cap \partial\Omega$.

Definição B.0.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Dizemos que* $\partial\mathbf{\Omega}$ ***é de classe*** $\mathbf{C^{1,\gamma}}$, *com $\gamma \in (0, 1]$, se para todo $\partial\Omega$, existe uma bola $B \subset \mathbb{R}^N$, um aberto $W \subset \mathbb{R}^N$ e uma aplicação bijetora $\psi : B \to W$, tal que*

i) $\psi(\Omega \cap B) \subset \mathbb{R}^N_+$,

ii) $\psi(\partial\Omega \cap B) \subset \partial\mathbb{R}^N_+$,

iii) $\psi \in C^{1,\gamma}(B)$, $\psi^{-1} \in C^{1,\gamma}(W)$

Quando $\partial\Omega$ for de classe $C^{1,\gamma}$, dizemos que Ω é um ***domínio é de classe*** $\mathbf{C^{1,\gamma}}$.

Apêndice C

Princípio de Comparação

Teorema C.0.1. *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave. Sejam $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo (no sentido fraco)*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 \leq -\Delta_p u_2 & em\ \Omega, \\ u_1 \leq u_2 & sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Então,

$$u_1 \leq u_2, \ em\ \Omega.$$

Demonstração. Ver [32], Lema A.0.7. □

Apêndice D

Método de sub-supersolução

As definições seguintes se referem ao problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= g(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{D.1}$$

e podem ser encontradas em [28]. Consideramos $p > 1$ e $q = \dfrac{p}{p-1}$ o conjugado de p,

Definição D.0.1. *Seja $\underline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $g(x,\underline{u}(x)) \in L^q(\Omega)$. Dizemos que $\underline{u}$ é uma* ***subsolução*** *para (D.1) se $\underline{u} \leq 0$ em $\partial\Omega$ e*

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \cdot \nabla \phi dx \leq \int_\Omega g(x,\underline{u})\phi dx,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$.

Definição D.0.2. *Seja $\overline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $g(x,\overline{u}(x)) \in L^q(\Omega)$. Dizemos que $\overline{u}$ é uma* ***supersolução*** *para (D.1) se $\overline{u} \geq 0$ em $\partial\Omega$ e*

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \cdot \nabla \phi dx \geq \int_\Omega g(x,\overline{u})\phi dx,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$.

O seguinte resultado de existência é uma versão simplificada do Teorema 2.1, de [28].

Teorema D.0.3. *Sejam $\underline{u}$ e $\overline{u}$ sub e supersoluções para (D.1), respectivamente. Suponha que $\max\{\|\underline{u}\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty\} \leq M$, para alguma constante positiva M e para todo $x \in \overline{\Omega}$. Suponha, ainda, que $g(x,t) \in C\left(\overline{\Omega} \times [0,M]\right)$. Então o problema (D.1) possui uma solução*

fraca $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que*

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \quad \textit{para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Definição D.0.4. *Seja* $U = T(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que* $g_u(x, U(x))$ *pertence ao espaço* $L^{p'}(\Omega)$. *Então, dizemos que* U *é uma* ***solução fraca*** *para (2.19) se*

$$\int_\Omega |\nabla U|^{p-2} \nabla U \cdot \nabla \phi dx = \int_\Omega g_u(x, U)\phi dx,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. *(Uma vez que* $C_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *podemos considerar* $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *nesta definição.)*

Apêndice E

Unicidade de soluções positivas para certas equações elíticas quase lineares

Em [16] Díaz e Saa, estudaram existência e unicidade de soluções positivas para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u), \quad u \geq 0 \quad \text{e} \quad u \not\equiv 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{E.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e suave e $f(x,r) : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz:

(H_1) para quase todo $x \in \Omega$, a função $r \mapsto f(x,r)$ é contínua em $[0,\infty)$. Além disso, para todo $r \geq 0$, a função $x \mapsto f(x,r)$ pertence a $L^\infty(\Omega)$;

(H_2) para quase todo $x \in \Omega$, a função $r \mapsto \dfrac{f(x,r)}{r^{p-1}}$ é estritamente decrescente em $(0,\infty)$;

(H_3) existe $C > 0$, tal que $f(x,r) \leq C(r^{p-1}+1)$, q.t.p. em $x \in \Omega$ e para todo $r \geq 0$.

Teorema E.0.1. *([16], Théorèm 1) Sob as hipóteses (H_1), (H_2) e (H_3) o problema (E.1) admite, no máximo, uma solução.*

Corolário E.0.2. *Sejam $1 < q < p$, $\lambda > 0$ e $h \in L^\infty(\Omega)$, $h \geq 0$. O problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{q-1} + h & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

admite, no máximo, uma solução.

Demonstração. Com efeito:

(H_1) para quase todo $x \in \Omega$, a função $r \mapsto f(x,r) := \lambda r^{q-1} + h(x)$ é contínua em $[0,\infty)$ e, para todo $r \geq 0$, a função $x \mapsto f(x,r) = \lambda r^{q-1} + h(x)$ pertence a $L^\infty(\Omega)$;

(H_2) para quase todo $x \in \Omega$, a função $r \mapsto \dfrac{f(x,r)}{r^{p-1}} = \dfrac{\lambda}{r^{p-q}} + \dfrac{h(x)}{r^{p-1}}$ é estritamente decrescente em $(0,\infty)$;

(H_3) como $\dfrac{f(x,r)}{r^{p-1}+1} \leq \dfrac{\lambda r^{q-1} + \|h\|_\infty}{r^{p-1}+1}$ e este último quociente é limitado para $r \in [0,\infty)$, existe $C > 0$ tal que $f(x,r) \leq C(r^{p-1}+1)$.

□

Apêndice F

Imersões Compactas

Teorema F.0.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Então, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e para todo $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ valem as seguintes imersões:*

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$
$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$
$$C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k.\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Se Ω é limitado, então as duas últimas imersões são compactas e se Ω é convexo e limitado, todas as três imersões são compactas.

Demonstração. Ver [6], Teorema 9.6. □

Apêndice G

Teorema do Ponto fixo de Schauder

Definição G.0.1. *Dizemos que um espaço topológico F tem a* ***propriedade do ponto fixo****, se toda aplicação contínua $T : F \to F$ tem um ponto fixo. Isto é, se para toda aplicação contínua $T : F \to F$, existe $x_0 \in F$, tal que $T(x_0) = x_0$.*

Teorema G.0.2. *Seja F um espaço de Banach, e seja C conjunto convexo, fechado e não vazio em F. Seja $T : C \to C$ uma aplicação contínua tal que $T(C) \subset K$, em que K é um subconjunto compacto de C. Então, T tem um ponto fixo em K.*

Demonstração. Ver [33] □