

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Daniel Boy Vasconcellos

ANÁLISE COMPUTACIONAL TRIDIMENSIONAL DE SÓLIDOS HOOKEANOS
UTILIZANDO A FAMÍLIA DE DEFORMAÇÃO SENO HIPERBÓLICO
GENERALIZADA

Belo Horizonte/MG

2025

Daniel Boy Vasconcellos

**ANÁLISE COMPUTACIONAL TRIDIMENSIONAL DE SÓLIDOS
HOOKEANOS UTILIZANDO A FAMÍLIA DE DEFORMAÇÃO
SENO HIPERBÓLICO GENERALIZADA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Doutor em Engenharia de Estruturas”.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Greco

Belo Horizonte/MG

2025

V331a

Vasconcellos, Daniel Boy.

Análise computacional tridimensional de sólidos hookeanos utilizando a família de deformação seno hiperbólico generalizada [recurso eletrônico] / Daniel Boy Vasconcellos. - 2025.

1 recurso online (134 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Marcelo Greco.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Deformações e tensões - Teses. 3. Método dos elementos finitos - Teses. I. Greco, Marcelo. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº 111 DO ALUNO DANIEL BOY VASCONCELLOS

Às **13:30** horas do dia **30** do mês de **maio** de **2025**, reuniu-se em ambiente virtual, na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em **25 de abril de 2025**, para julgar a defesa da Tese de Doutorado intitulada "**Análise Computacional Tridimensional de Sólidos Hookeanos Utilizando a Família de Deformação Seno Hiperbólico Generalizada**", cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de DOUTOR EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de ESTRUTURAS.

Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, **Prof. Dr. Marcelo Greco**, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa do candidato. Finalizada a apresentação, seguiu-se para a fase de arguição pelos examinadores, com as respectivas respostas do aluno. Logo após a fase de arguição, a Comissão se reuniu, sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final, a saber:

☒ (X) Aprovado

☐ () Reprovado

O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Presidente da Comissão.

Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora e pelo aluno.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Greco - DEES-UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Jeferson Wilian Dossa Fernandes - DEES-UFMG

Prof. João Paulo Pascon - EEL-USP

Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel - UFRN

Prof. Dr. Fernando Pereira Duda - UFRJ

A aprovação do aluno na Defesa de Tese de Doutorado não significa que o mesmo tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do DIPLOMA de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Para ciência do aluno:

1. Atesto que as alterações solicitadas pela Comissão Examinadora serão cumpridas no prazo de ATÉ 60 dias corridos.
2. Atesto estar ciente que a versão corrigida da dissertação deverá ser entregue ao Repositório Institucional da UFMG, conforme orientações disponíveis em: <https://repositorio.ufmg.br/custom/instructions.jsp>

Ciente: **Daniel Boy Vasconcellos.**

Aluno

Belo Horizonte, 30 de maio de 2025.

Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de Pós-Graduação.

Após a Homologação da Defesa pelo Colegiado do Programa, este documento será assinado pela Coordenação e disponibilizado ao aluno.



Documento assinado eletronicamente por **Jefferson Wilian Dossa Fernandes, Professor do Magistério Superior**, em 30/05/2025, às 16:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fernando Pereira Duda, Usuário Externo**, em 30/05/2025, às 16:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Daniel Nelson Maciel, Usuário Externo**, em 30/05/2025, às 16:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Paulo Pascon, Usuário Externo**, em 02/06/2025, às 09:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Greco, Professor do Magistério Superior**, em 02/06/2025, às 09:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Daniel Boy Vasconcellos, Usuário Externo**, em 02/06/2025, às 11:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

Documento assinado eletronicamente por **Leandro Lopes da Silva, Coordenador(a)**, em



02/06/2025, às 14:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador 4242073 e o código CRC 536B27D4.

Referência: Processo nº 23072.232451/2025-22

SEI nº 4242073

Dedico este trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela sua misericórdia e graça para comigo pois é Ele quem me sustenta dia após dia.

Aos meus pais e às minhas irmãs pelo incentivo e constante apoio ao longo deste curso.

Ao Prof. Marcelo Greco pela atenção, paciência e presteza na orientação deste trabalho.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

*“Se o buscares, Ele deixará achar-se por ti;
se o deixares, Ele te rejeitará para sempre.”*

1 Cr 28:9b

RESUMO

A proposição de equações constitutivas para a modelagem de sólidos isotrópicos hiperelásticos sob moderadas/grandes deformações ainda é um desafio na comunidade científica, tendo em vista o comportamento não linear que eles apresentam nesse regime. Este trabalho, em âmbito 3D, implementa computacionalmente e investiga uma equação constitutiva construída a partir da lei de Hooke, na qual utiliza-se o tensor de deformação seno hiperbólico generalizado e o seu correspondente tensor de tensão energeticamente conjugado. Emprega-se a formulação posicional do método dos elementos finitos, a qual é inicialmente escrita considerando um par energeticamente conjugado Lagrangiano genérico. Desenvolveu-se uma estratégia simples e geral para a determinação das derivadas do tensor de deformação seno hiperbólico em relação ao gradiente de deformação. Além disso, o método de Newton-Raphson é utilizado na solução do problema não linear. Para se demonstrar a aplicabilidade da formulação, alguns exemplos numéricos são realizados. Lançando-se mão de resultados experimentais de extensão axial, extensão equi-biaxial e cisalhamento simples obtidos da literatura, realizaram-se calibrações a fim de determinar as constantes do modelo proposto, que possui quatro parâmetros. Elas conduziram a uma ótima concordância dos dados analíticos/numéricos em relação aos experimentais. A versatilidade do modelo construído permitiu a modelagem de borrachas, tecidos biológicos e espumas. Por fim, três exemplos numéricos de deformação não homogênea, cujos resultados mostram qualitativamente um excelente desempenho da formulação, são apresentados.

Palavras-chave: medida de deformação; seno hiperbólico generalizado; modelo hookeano; grandes deformações; formulação posicional do método dos elementos finitos.

ABSTRACT

The proposition of constitutive equations for the modeling of isotropic hyperelastic solids under moderate/large deformations is still a challenge in the scientific community, considering the nonlinear behavior they exhibit in this regime. This work, in a 3D context, computationally implements and investigates a constitutive equation derived from Hooke's law, which uses the generalized hyperbolic sine strain tensor and its corresponding energetically conjugated stress tensor. The positional formulation of the finite element method is employed, initially written considering a generic Lagrangian energetically conjugate pair. A simple and general strategy was developed for determining the derivatives of the hyperbolic sine strain tensor with respect to the deformation gradient. Additionally, the Newton-Raphson method is used to solve the nonlinear problem. To demonstrate the applicability of the formulation, some numerical examples are conducted. Using experimental results from axial extension, equibiaxial extension, and simple shear obtained from the literature, calibrations were performed to determine the constants of the proposed model, which has four parameters. They resulted in remarkable agreement between the analytical/numerical and experimental data. The versatility of the constructed model allowed for the modeling of rubbers, biological tissues, and foams. Finally, three numerical examples of non-homogeneous deformation, whose results qualitatively show an excellent performance of the formulation, are presented.

Keywords: strain measure; generalized hyperbolic sine; Hookean model; large strains; positional formulation of the finite element method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – (a) Acúmulo de gelo em uma asa de um avião. (b) Sistema degelo de membranas elásticas.	25
Figura 2 – Tendão real (superior) e tendão artificial (inferior) em diferentes escadas.....	26
Figura 3 – (a) Família de Seth-Hill. (b) Família de Itskov (2004). (c) Família exponencial de Darijani e Naghdabadi (2013).....	28
Figura 4 – Simetria à tração e à compressão no diagrama tensão-deformação e na curva deformação-estiramento.	29
Figura 5 – SHG-Biot para alguns valores de β	30
Figura 6 – Simbologia de referencial.	44
Figura 7 – (a) Mapeamento da deformação utilizando-se dois referenciais (adaptado de Mase (1970)). (b) Mapeamento da deformação utilizando-se um referencial.....	45
Figura 8 – Mapeamento da deformação.	45
Figura 9 – Mapeamento do MCR.....	48
Figura 10 – MCR da configuração atual.	50
Figura 11 – Mudança de base em um mesmo referencial.	54
Figura 12 – Imposição de dois MCRs distintos.....	66
Figura 13 – Problema estático.	73
Figura 14 – Mapeamentos para a implementação computacional.....	80
Figura 15 – (a) Pseudocódigo do programa. (b) Pseudocódigo da função <code>compute_ElemHessIntForce(elem)</code>	85
Figura 16 – Tela principal do GiD.....	92
Figura 17 – <i>Problem type</i> adotado neste trabalho.	93
Figura 18 – Tela de abertura do <i>problem type</i> criado.	93
Figura 19 – Árvore de dados.	94
Figura 20 – Dados para o item ‘ <i>Parts</i> ’.	94
Figura 21 – Malha e condições de contorno da EA.....	95
Figura 22 – Malha e condições de contorno da EB.....	96
Figura 23 – (a) Dados e (b) malha utilizados no CPT.	97
Figura 24 – Condições de contorno no CPT.....	97
Figura 25 – Respostas numérica e analítica para a EA.	98
Figura 26 – Deformada e indicação de T_{11}/μ para a compressão da EA no passo (a) 1 (b) 40 (c) 80 (d) 500.	99

Figura 27 – Deformada e indicação de T_{11}/μ para a tração da EA no passo (a) 1 (b) 52 (c) 92 (d) 192.....	99
Figura 28 – Respostas numérica e analítica para a compressão na EB.....	100
Figura 29 – Respostas numérica e analítica para a tração na EB.....	100
Figura 30 – Deformada e indicação de T_{11}/μ para a compressão da EB no passo (a) 1 (b) 6 (c) 16 (d) 26.....	101
Figura 31 – Deformada e indicação de T_{11}/μ para a tração da EB no passo (a) 1 (b) 26 (c) 56 (d) 96.....	101
Figura 32 – Respostas numérica e analítica no CPT.....	102
Figura 33 – Deformada e indicação de T_{12}/μ para o CPT no passo (a) 1 (b) 50 (c) 126 (d) 226.....	103
Figura 34 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Yeoh e Fleming (1997) para a EA da borracha vulcanizada C.....	104
Figura 35 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Yeoh e Fleming (1997) para o CPT da borracha vulcanizada C.....	105
Figura 36 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Gal <i>et al.</i> (2010) para a EA do fígado suíno.....	105
Figura 37 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Budday <i>et al.</i> (2017) para a EA do córtex.....	106
Figura 38 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Budday <i>et al.</i> (2017) para o CPT do córtex.....	106
Figura 39 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Budday <i>et al.</i> (2017) para a EA dos gânglios da base.....	106
Figura 40 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Budday <i>et al.</i> (2017) para o CPT dos gânglios da base.....	107
Figura 41 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Treloar (1944) para a EA de uma borracha.....	107
Figura 42 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Treloar (1944) para a EB de uma borracha.....	108
Figura 43 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Kut e Ryzińska (2023) para a EA de um elastômero.....	108
Figura 44 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Kut e Ryzińska (2023) para a EB de um elastômero.....	109

Figura 45 – Diagrama tensão-deformação numérico e analítico frente ao típico diagrama experimental dado por Zenkert e Burman (2009) para a EA da espuma polimérica rígida de célula fechada Rohacell WF-200.....	109
Figura 46 – (a) Compressão não homogênea. (b) Compressão não homogênea após a simetria.	110
Figura 47 – Deslocamento em x do nó $A \times$ Passo de carga.	111
Figura 48 – Deformada do cubo e indicação de T_{11}/μ nos nós para o passo (a) 7 (b) 17 (c) 27 e (d) 57.....	112
Figura 49 – Dados do exemplo de deformação não homogênea 2.....	112
Figura 50 – Deslocamento em z do nó $A \times$ Passo de carga.	113
Figura 51 – Deformada do cubo e indicação de T_{11}/μ nos nós para o passo (a) 1 (b) 100 (c) 200 e (d) 400.	113
Figura 52 – Dados do exemplo de deformação não homogênea 3.....	114
Figura 53 – Deslocamento em y do nó $A \times$ Passo de carga.	114
Figura 54 – Deformada do cubo e indicação de T_{11}/μ nos nós para o passo (a) 1 (b) 18 (c) 36 e (d) 86.....	115
Figura 55 – Numeração dos nós no elemento hexaédrico.....	129

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Incrementos na direção x no CPT.....	97
Tabela 2 – Coordenadas dos nós do elemento hexaédrico.....	129

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Mudanças em algumas grandezas devido a MCR da configuração atual.	53
Quadro 2 – Ordem dos graus de liberdade.....	81

LISTA DE SÍMBOLOS

Conjuntos

$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais.
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{V}$	conjunto dos vetores de 3 componentes.
$\mathbb{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_0}$	conjunto de vetores que localizam pontos materiais de um corpo contido na região Ω_0 em relação a $\mathcal{R}$.
$\mathbb{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_t}$	conjunto de vetores que localizam pontos materiais de um corpo contido na região Ω_t em relação a $\mathcal{R}$.
$\mathbb{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_i^*}, \mathbb{V}_{\mathcal{R}}^{(\Omega_i^*)_I}, \mathbb{V}_{\mathcal{R}}^{(\Omega_i^*)_{II}}$	conjunto de vetores que localizam pontos materiais de um corpo contido na região Ω_i^* em relação a $\mathcal{R}$.
Lin	conjunto dos tensores de 2ª ordem.
Lin^+	conjunto dos tensores de 2ª ordem com determinante positivo.
Orth	conjunto dos tensores ortogonais de 2ª ordem.
Orth^+	conjunto dos tensores ortogonais próprios de 2ª ordem.
Sym	conjunto dos tensores de 2ª ordem simétricos.
Skw	conjunto dos tensores de 2ª ordem antissimétricos.
Psym	conjunto dos tensores de 2ª ordem simétricos e positivos definidos.

Letras gregas minúsculas

λ, μ	parâmetros de Lamé.
ν	coeficiente de Poisson.
λ_i	i -ésimo autovalor de $\mathbf{U}$ ($i = 1, 2, 3$).
γ, β	parâmetros em uma medida de deformação.
ε_g	deformação associada à função de escala g (usada na Figura 4).
σ_g	tensão associada à função de escala g (usada na Figura 4).
ω	função usada em (54), $\omega: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$; constante auxiliar usada na Eq. (238).
$\delta_{\square\square}$	delta de Kronecker.
φ	função usada em (55), $\varphi: \text{Lin} \rightarrow \mathbb{R}$; constante auxiliar usada na Eq. (215).

φ_i	funções auxiliares ($i = 0, 1, 2$), usadas na Eq. (153).
α	variável auxiliar, usada na Eq. (48).
$\iota_i(\mathbf{A})$	i -ésimo invariante principal de $\mathbf{A}$ ($i = 1, 2, 3$).
ρ_0	massa específica em relação à configuração de referência.
ρ	massa específica em relação à configuração atual.
τ	variável temporal.
η, κ	parâmetros do material.
$\psi, \bar{\psi}, \psi_i, \tilde{\psi}$	energia de deformação específica ($i = \text{I, II, III, IV, 1, 2}$).
$\psi_{\text{vol}}, \hat{\psi}_{\text{vol}}$	energia de deformação específica volumétrica.
$\psi_{\text{iso}}, \bar{\psi}_{\text{iso}}, \hat{\psi}_{\text{iso}}$	energia de deformação específica isocórica.
$\bar{\mu}$	parâmetro do material, usado na Eq. (17).
μ_n, α_n	parâmetros do material ($n = 1, 2, 3, \dots, N$), usados na Eq. (19).
β_i	funções auxiliares ($i = 0, 1, 2$) na Eq. (26).
$\bar{\pi}$	pressão hidrostática.
ξ_i	coordenadas naturais ($i = 1, 2, 3$).
θ	parâmetro de cisalhamento.
$\bar{\omega}$	constante auxiliar usada na Eq. (238).
ν	constante auxiliar usada no Apêndice B.

Letras gregas maiúsculas

Ω_0	região do espaço ocupada por um corpo na configuração de referência.
Ω_{t_0}	região do espaço ocupada por um corpo na configuração atual no tempo t_0 .
Ω_t	região do espaço ocupada por um corpo na configuração atual no tempo t .
Ω_t^*	região do espaço ocupada por um corpo após um MCR de Ω_t .
$\Pi, \bar{\Pi}$	funcional (energia potencial total).

Letras gregas minúsculas em negrito

α_i	i -ésimo autovetor normalizado de $\mathbf{U}$ ($i = 1, 2, 3$).
$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A})$	função auxiliar no item 3.1, $\boldsymbol{\varphi}: \text{Lin} \rightarrow \mathbb{V}$.
χ	função de deformação, $\chi: \mathbb{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_t}$.
$\bar{\chi}$	mapeamento do elemento finito da configuração de referência no espaço fictício para a sua configuração de referência no espaço real.
$\tilde{\chi}$	mapeamento do elemento finito da configuração de referência no espaço fictício para a sua configuração atual no espaço real.
ξ	vetor das coordenadas naturais.

Letras gregas maiúsculas em negrito

$\boldsymbol{\Omega}(t)$	igual a $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\top$. Usualmente chamado de <i>frame-spin</i> .
--------------------------	---

Letras romanas minúsculas

$g(\lambda_i)$	função de deformação ou função de escala.
a_1, a_2	parâmetros do material, usados na Eq. (4).
f	função auxiliar no item 3.1; função de escala na Eq. (188).
t_0	tempo inicial.
t	tempo atual.
$m(\mathcal{P})$	massa da parte $\mathcal{P}$.
k	módulo de compressão, empregado logo após a Eq. (20).
q	indica um carregamento por unidade de área no Capítulo 4.
x, y, z	indicam as direções do sistema de coordenadas cartesiano no Capítulo 4.
n_{EA}	resíduo associado à Extensão Axial.
n_{EB}	resíduo associado à extensão Equi-Biaxial.
n_{CPT}	resíduo associado ao Cisalhamento em estado Plano de Tensão.
r_s	resíduo associado à calibração simultânea.
tol	tolerância.
$incr$	incremento corrente.

$nincr$	número de incrementos.
$elem$	elemento.
$nelem$	número de elementos.
nGP	número de pontos de Gauss.

Letras romanas maiúsculas

B, B', A'	ponto material.
A	ponto material; área de $\partial\mathcal{P}_i$; nó.
A_0	área de $\partial\mathcal{P}_0$.
$\mathcal{V}$	volume de $\mathcal{P}_i$.
$\mathcal{V}_0$	volume de $\mathcal{P}_0$.
J	jacobiano, igual a $\det \mathbf{F}$.
I_A	1º invariante principal de $\mathbf{A}$.
II_A	2º invariante principal de $\mathbf{A}$.
III_A	3º invariante principal de $\mathbf{A}$.
GP	ponto de Gauss corrente.
T	temperatura, usado na Eq. (16).
C_i, D_j	parâmetros de um material ($i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$).
N_z	função de forma ($z = 1, 2, 3, \dots, 8$).
P_{11}^e	componente de tensão P_{11} experimental.
P_{11}^a	componente de tensão P_{11} analítica.
P_{12}^e	componente de tensão P_{12} experimental.
P_{12}^a	componente de tensão P_{12} analítica.

Letras romanas minúsculas em negrito

e_i	i -ésimo vetor da base canônica ($i = 1, 2, 3$) de $\mathcal{R}_1$.
u	vetor auxiliar no item 3.1; vetor deslocamento.
v	vetor auxiliar no item 3.1; vetor velocidade
w, z, b, d	vetores auxiliares no item 3.1.
c, c_i	vetor auxiliar no item 3.1; vetor dependente apenas do tempo ($i = I, II$).
a	vetor auxiliar no item 3.1; vetor aceleração.

h	vetor auxiliar no item 3.1; vetor que conecta as origens de $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ (Figura 7); vetor de resíduos.
x, x_i	vetor auxiliar no item 3.1; vetor posição de um ponto material da configuração atual (Capítulo 2) ($i = I, II$); vetor que agrupa as posições nodais referentes à configuração atual (Capítulo 3).
p	vetor posição de um ponto material da configuração de referência (Capítulo 2); vetor que agrupa as posições nodais referentes à configuração de referência (Capítulo 3).
q	vetor posição de um ponto material da configuração de referência.
d_i	i -ésimo vetor da base canônica ($i = 1, 2, 3$) de $\mathcal{R}_2$.
y	vetor posição de um ponto material da configuração atual.
r_I, r_{II}	vetor de resto na série de Taylor.
dp, dp⁽ⁱ⁾	vetor incremental de p ($i = 1, 2, 3$).
dx, dx⁽ⁱ⁾	vetor incremental de x ($i = 1, 2, 3$).
e'_i	i -ésimo vetor da base canônica rotacionada a partir de $\{\mathbf{e}_i\}$ ($i = 1, 2, 3$).
q_ℓ	quantidade de movimento linear.
q_a	quantidade de movimento angular.
f_ℓ	força resultante sobre o corpo em Ω_t .
m_a	momento da força f_ℓ em relação à origem.
s	vetor força por unidade de área na configuração atual.
s₀	vetor força por unidade de área na configuração de referência.
b	vetor força por unidade de volume na configuração atual.
b₀	vetor força por unidade de volume na configuração de referência.
n	vetor unitário normal em $\partial\mathcal{P}_t$ apontando para fora de $\mathcal{P}_t$.
m	vetor unitário normal em $\partial\mathcal{P}_0$ apontando para fora de $\mathcal{P}_0$.
p	vetor posição de um ponto do domínio de um elemento finito da configuração de referência.
x	vetor posição de um ponto do domínio de um elemento finito da configuração atual.
f	vetor de forças externas diretamente aplicadas nos nós da configuração corrente.
h	vetor de resíduos em relação apenas aos graus liberdade incógnitos.

$\mathbf{x}$ vetor de posição em relação apenas aos graus de liberdade incógnitos.

Letras romanas maiúsculas em negrito

U	estiramento direito.
G, Z, K, M	função que retorna um tensor de 2ª ordem.
I	tensor identidade de 2ª ordem.
$\mathbf{E}^{(\gamma)}$	deformação da família de Seth-Hill.
${}^{\text{hs}}\mathbf{E}^{(\beta)}$	tensor de deformação seno hiperbólico generalizado.
${}^{\text{hs}}\mathbf{T}^{(\beta)}$	tensor de tensão seno hiperbólico generalizado.
S	tensor auxiliar no item 3.1; 2º tensor de tensão de Piola-Kirchhoff.
T	tensor auxiliar no item 3.1; tensor de tensão de Cauchy.
A, X	tensor auxiliar.
B	tensor auxiliar; Cauchy-Green esquerdo.
W	tensor antissimétrico genérico no item 3.1; tensor taxa instantânea de rotação;
Q, Q_i	tensor ortogonal ($i = \text{I, II}$).
F, F_i	gradiente de deformação ($i = \text{I, II}$).
$\bar{\mathbf{F}}$	gradiente de $\bar{\chi}$.
$\tilde{\mathbf{F}}$	gradiente de $\tilde{\chi}$.
L	gradiente espacial da velocidade.
D	tensor taxa instantânea de estiramento.
R	tensor ortogonal da decomposição polar de F .
V	estiramento esquerdo.
H	gradiente de deslocamento.
V	estiramento esquerdo.
C	Cauchy-Green direito.
P	1º tensor de tensão de Piola-Kirchhoff.
$\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{R}}$	funcional.
E	tensor de deformação infinitesimal.
F_{vol}	fator volumétrico associado à decomposição multiplicativa de F .
F_{iso}	fator isocórico associado à decomposição multiplicativa de F .

$\mathbf{C}_{\text{iso}}$	Cauchy-Green direito associado a $\mathbf{F}_{\text{iso}}$.
${}^i\mathbf{E}$	deformação associada à função de escala Lagrangiana i ($i = f, g$).
${}^i\mathbf{T}$	tensão associada à função de escala Lagrangiana i ($i = f, g$).
$\mathbf{T}$	tensor de tensão arbitrário energeticamente conjugado com $\mathbf{E}$.
$\mathbf{E}$	tensor de tensão arbitrário energeticamente conjugado com $\mathbf{T}$.
$[\mathbf{U}\mathbf{Q}]$	matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores normalizados de $\mathbf{U}$.

Outros símbolos e notações

$\mathcal{R}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$	referencial.
$\mathbb{F}, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \mathbb{G}, \mathbb{H}$	função que retorna um tensor de ordem ≤ 2 .
$\mathbb{X}, \mathbb{X}_0, \mathbb{U}$	tensor de ordem ≤ 2 .
$\mathbb{I}, \bar{\mathbb{I}}$	tensores unitários de 4ª ordem.
$\mathbf{J}_{\mathbf{A}}$	lista dos invariantes principais de $\mathbf{A}$.
$\mathcal{P}$	parte = região do interior de um contínuo ($\mathcal{P}_0 \subset \Omega_0$ e $\mathcal{P}_t \subset \Omega_t$).
$\partial\mathcal{P}$	contorno de $\mathcal{P}$.
$\mathcal{K}$	energia cinética.
$\mathcal{N}(\mathbf{p})$	vizinhança em torno do ponto localizado por $\mathbf{p}$.
$\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$	classe constitutiva.
$\mathcal{G}_{\mathbf{p}}$	grupo de simetria em $\mathbf{p}$.
$\mathbb{I}$	tensor nulo de 2ª ordem.
$(\cdot)_{\mathcal{S}}$	descrição espacial.
$(\cdot)_m$	descrição material.
$(\dot{\cdot})$	1ª derivada temporal.
$(\ddot{\cdot})$	2ª derivada temporal.
$(\cdot)^*$	correspondente grandeza após um MCR.
$(\cdot)^{\text{T}}$	transposto.
$(\cdot)$	correspondente grandeza associada às direções principais.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MCR	Movimento de Corpo Rígido.
SHG	Seno Hiperbólico Generalizado.
PEC	Par Energeticamente Conjugado.
GNLH	Generalização Natural da Lei de Hooke.
FPMEF	Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos.
PIRM	Princípio da Invariância da Resposta Material.
PEPTE	Princípio da Energia Potencial Total Estacionária.
EA	Extensão Axial.
EB	Equi-Biaxial.
CPT	Cisalhamento em estado Plano de Tensão.
CI	Calibração Individual.
CS	Calibração Simultânea.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	25
1.1	Motivação e justificativa.....	25
1.2	Objetivos	31
1.3	Organização do texto	31
2	ESTADO DA ARTE	33
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	38
3.1	Definições matemáticas.....	38
3.2	Descrição da deformação.....	44
3.3	Descrição do movimento de corpo rígido.....	47
3.4	Movimento de corpo rígido da configuração atual	49
3.5	Mudança de base.....	54
3.6	Equações de equilíbrio.....	55
3.7	Tensor de tensão de Cauchy	56
3.8	Par tensão-deformação energeticamente consistente	57
3.9	Premissas constitutivas básicas.....	61
3.10	Simetria material	67
3.11	Hiperelasticidade	69
3.12	Princípio da energia potencial total estacionária.....	73
3.13	Elasticidade linear	74
4	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	77
4.1	Equação constitutiva proposta e o PIRM	77
4.2	Formulação posicional para um PEC arbitrário	79
4.3	Derivadas do tensor de deformação SHG em relação ao gradiente de deformação	85
4.4	Pré e pós-processador GiD	92
5	EXEMPLOS NUMÉRICOS	95

5.1	Teste inicial	98
5.2	Comparação com respostas experimentais	103
5.3	Deformação não homogênea 1	110
5.4	Deformação não homogênea 2	112
5.5	Deformação não homogênea 3	114
6	CONCLUSÕES.....	116
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	118
	APÊNDICE A.....	129
	APÊNDICE B.....	132

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação e justificativa

Observação: As figuras e tabelas sem indicação de fonte são de autoria do próprio autor desta tese.

O estudo do comportamento de um material em regime de grandes deformações amplia o conhecimento fenomenológico e propicia possíveis novas aplicações estruturais dele. Eventualmente, esse estudo pode mostrar resultados contraintuitivos como, por exemplo, o aumento da resistência do concreto armado em algumas situações pós colapso devido ao fenômeno de confinamento.

Um exemplo de um material submetido a moderadas/grandes deformações é o elastomérico, que é encontrado em diversas áreas, dentre as quais citam-se a indústria civil, automobilística, aeronáutica e a bioengenharia. A Figura 1 mostra um contexto aeronáutico no qual um material elastomérico é empregado. Para evitar o acúmulo de gelo no bordo de ataque da semiasa (Figura 1a), membranas elásticas são instaladas de modo a, quando infladas, induzirem a quebra do gelo (Figura 1b).

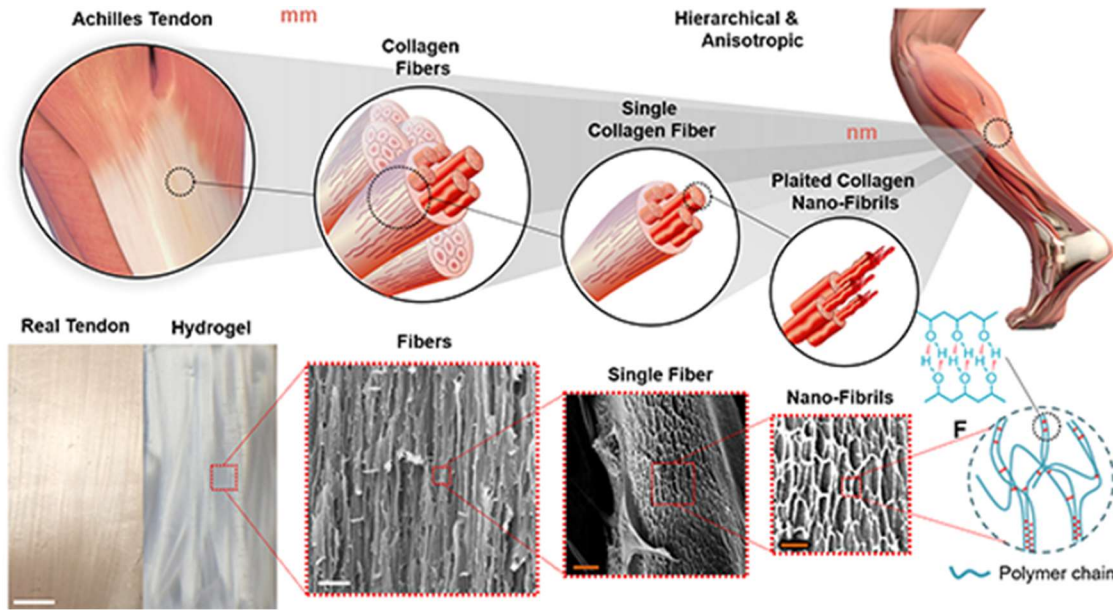
Figura 1 – (a) Acúmulo de gelo em uma asa de um avião. (b) Sistema degelo de membranas elásticas.



Fonte: (a) (A importância [...], 2015). (b) Cessa Flyer Association, [2025].

No campo da bioengenharia, os hidrogéis (redes poliméricas com água em seus interstícios) construídos com impressão 3D (veja Miri *et al.* (2018)) são exemplos de biomateriais sujeitos a grandes deformações. A Figura 2 mostra uma comparação de tendões reais (superior) com tendões feitos com hidrogel (inferior) em escalas diferentes.

Figura 2 – Tendão real (superior) e tendão artificial (inferior) em diferentes escalas.



Fonte: Everett (2021).

A mudança de forma de um corpo é quantificada através da medida de deformação. É implícito que medidas de deformação diferentes fornecem valores próximos entre si quando a mudança de forma é pequena, e tendem a resultar em valores distantes entre si quando a mudança de forma é grande. Por isso, o estudo de medidas de deformação no contexto de grandes deformações é essencial.

A escolha da medida de deformação é uma decisão do engenheiro, o qual pode se valer de alguns princípios norteadores, tais como: que ela não sofra mudança após um Movimento de Corpo Rígido (MCR) arbitrário e que ela dependa das dimensões da estrutura na posição inicial. Nesse contexto, a classe geral de tensores de deformação Lagrangeanos foi concebida em Hill (1968) e é dada por

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = g(\lambda_i)(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i), \quad (1)$$

sujeita a

$$g(1) = 0, \quad g'(1) = 1, \quad g'(\lambda_i) > 0, \quad \lim_{\lambda_i \rightarrow 0} g(\lambda_i) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda_i \rightarrow \infty} g(\lambda_i) = \infty. \quad (2)$$

Na Eq. (1), λ_i e $\mathbf{a}_i$ são, respectivamente, os estiramentos principais e os autovetores normalizados do tensor de estiramento direito $\mathbf{U}$ e $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de escala. Diante da notação da Eq. (1), algumas medidas são apresentadas a seguir.

A conhecida família de Seth-Hill (Seth, 1964; Hill, 1968), cuja concepção remonta a Doyle e Ericksen (1956), é dada por

$$g(\lambda_i) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} (\lambda_i^\gamma - 1) & \gamma \neq 0 \\ \ln \lambda_i & \gamma = 0 \end{cases} . \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad (3)$$

As medidas mais comuns da Eq. (3) são Green ($\gamma = 2$), Biot ($\gamma = 1$), Hencky ($\gamma = 0$), Hiperbólica ($\gamma = -1$) e Almansi ($\gamma = -2$). Curnier e Rakotomanana (1991) propuseram uma combinação de duas medidas da família de Seth-Hill $g_1(\lambda_i)$ e $g_2(\lambda_i)$ para obter outras medidas existentes,

$$\begin{aligned} g(\lambda_i) &= \frac{a_1}{a_1 - a_2} g_1(\lambda_i) + \frac{a_2}{a_2 - a_1} g_2(\lambda_i) = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \frac{1}{a_1} (\lambda_i^{a_1} - 1) + \frac{a_2}{a_2 - a_1} \frac{1}{a_2} (\lambda_i^{a_2} - 1) = \\ &= \frac{1}{a_1 - a_2} (\lambda_i^{a_1} - \lambda_i^{a_2}), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{Z}, \text{ com } -2 \leq a_2 \leq 0 \leq a_1 \leq 2 \text{ e } a_1 \neq a_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Através da Eq. (4) é possível obter as seguintes medidas: Pelzer ($a_1 = -a_2 = 1$), Mooney ($a_1 = -a_2 = 2$), Wall ($a_1 = -a_2/2 = 1$) e Rivlin ($a_1/2 = -a_2 = 1$). Expandindo a ideia de Curnier e Rakotomanana (1991), Itskov (2004) construiu

$$g(\lambda_i) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta} (\lambda_i^\beta - \lambda_i^{-\beta}) & \beta \neq 0 \\ \ln \lambda_i & \beta = 0 \end{cases} . \quad \beta \in \mathbb{R}_+ \quad (5)$$

Com o objetivo de se evitar o cálculo de $\mathbf{U}$ no uso da família de Seth-Hill, Curnier e Zysset (2006) propuseram uma aproximação de segunda ordem para ela,

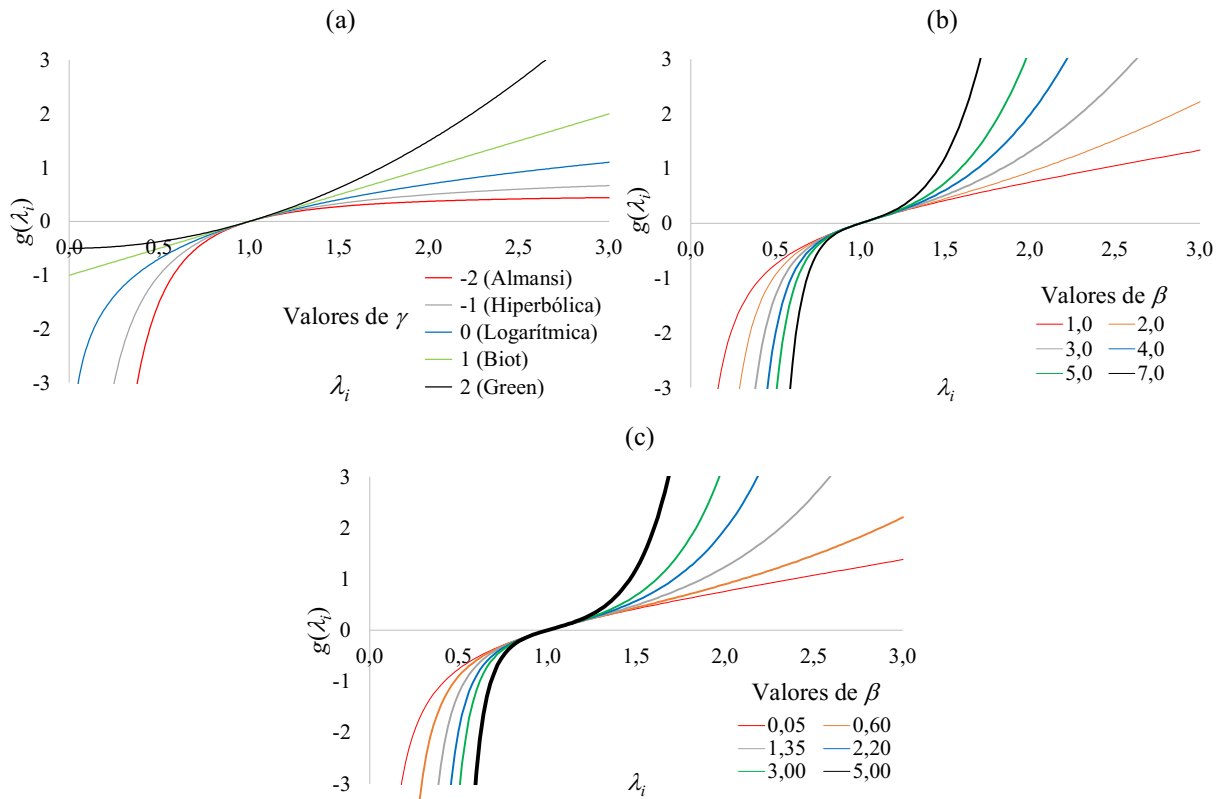
$$g(\lambda_i) = \frac{2+\beta}{8} \lambda_i^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{2-\beta}{8} \lambda_i^{-2}. \quad -2 \leq \beta \leq 2 \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Darijani e Naghdabadi (2013) idealizaram as medidas exponenciais,

$$g(\lambda_i) = \frac{1}{2\beta} [e^{\beta(\lambda_i-1)} - e^{\beta(\lambda_i^{-1}-1)}]. \quad \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad (7)$$

A Figura 3 mostra os gráficos das Eqs. (3), (5) e (7). O gráfico da Eq. (6) é muito próximo do da Eq. (3), e o da Eq. (4) do da Eq. (5).

Figura 3 – (a) Família de Seth-Hill. (b) Família de Itskov (2004). (c) Família exponencial de Darijani e Naghdabadi (2013).



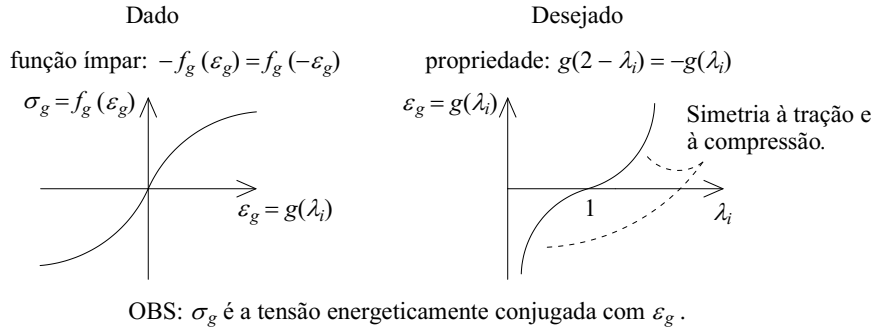
Da Figura 3b e da Figura 3c percebe-se que um mesmo comportamento à tração e à compressão somente é observado quando β aumenta.

Um dos motivos para a proposição de uma nova medida é a ideia de que um dado material, cujo diagrama tensão-deformação é representado por uma função ímpar, também deve apresentar uma simetria à tração e à compressão na sua curva deformação-estiramento, para qualquer valor de β . A propriedade da função g que satisfaz esse requisito não foi encontrada na literatura e é dada por

$$g(2 - \lambda_i) = -g(\lambda_i). \quad (8)$$

A Figura 4 resume a motivação apresentada no parágrafo anterior.

Figura 4 – Simetria à tração e à compressão no diagrama tensão-deformação e na curva deformação-estiramento.



Além da Eq. (8), almeja-se também que a medida possua o máximo de coerência física possível. Essa coerência é expressa matematicamente pela Eq. (2). A medida de Biot ($\lambda_i - 1$), por exemplo, satisfaz a Eq. (8), mas não se preocupa com a Eq. (2)₄. Evidentemente, as Eqs. (2) e (8) não são totalmente consistentes, isto é, dada uma função que obedece a Eq. (8), na melhor das hipóteses a Eq. (2)₄ ou a Eq. (2)₅ não será satisfeita. Por exemplo, a deformação tangente

$$g(\lambda_i) = \frac{2}{\pi} \tan\left[\frac{\pi}{2}(\lambda_i - 1)\right], \quad \lambda_i \in]0, 2[\quad (9)$$

segue a Eq. (8), mas dentre os requisitos da Eq. (2) somente a Eq. (2)₅ não é satisfeita.

Nesse contexto, uma nova família de deformação foi idealizada por Peixoto (2024) e Peixoto *et al.* (2024), e é dada por

$${}^{\text{hs}}\mathbf{E}^{(\beta)} = \beta^{-1} \sinh(\beta \mathbf{E}^{(\gamma)}), \quad \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad (10)$$

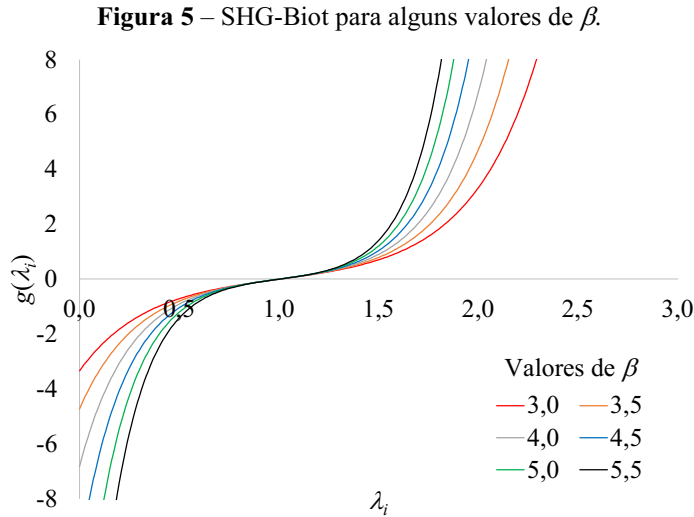
em que, $\mathbf{E}^{(\gamma)}$ é, *a priori*, qualquer medida de deformação e ${}^{\text{hs}}\mathbf{E}^{(\beta)}$ foi denominado de tensor de deformação Seno Hiperbólico Generalizado (SHG). Considerando $\mathbf{E}^{(\gamma)}$ como a família de Seth-Hill, a Eq. (10) se torna

$${}^{\text{hs}}\mathbf{E}^{(\beta)} = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta}{\gamma}(\mathbf{U}^\gamma - \mathbf{I})\right) & \gamma \neq 0 \\ \frac{1}{\beta} \sinh(\ln \mathbf{U}) = \frac{1}{2\beta}(\mathbf{U}^\beta - \mathbf{U}^{-\beta}) & \gamma = 0 \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad (11)$$

sendo que $\mathbf{I}$ é o tensor identidade de 2ª ordem. Nota-se que a função de escala g da família SHG-Hencky, dada pela Eq. (11)₂, é igual à medida de Itskov (2004), dada pela Eq. (5)₁. A função de escala da família SHG-Biot, dada pela Eq. (11)₁ com $\gamma = 1$, é

$$g(\lambda_i) = \frac{1}{\beta} \sinh[\beta(\lambda_i - 1)]. \quad \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad (12)$$

A Figura 5 mostra o gráfico da Eq. (12) para alguns valores de β .



Por uma simples verificação conclui-se que a Eq. (12) satisfaz a Eq. (8), o que torna a família SHG-Biot uma candidata para a solução do problema exposto na Figura 4. No entanto, o requisito da Eq. (2)₄ não é obedecido pela Eq. (12). Apesar disso, durante o desenvolvimento de um projeto, a faixa de deformação à qual o material estará submetido é conhecida/imposta. Portanto, por meio do parâmetro β , pode-se escolher um material cuja curva deformação-estiramento não intercepte o eixo vertical dentro daquela faixa de deformação. Assim, para fins de engenharia, a Eq. (12) é uma solução factível teoricamente. Enfatiza-se que a construção da Eq. (12) foi devida à motivação mostrada na Figura 4, mas ela culminou na concepção da Eq. (11), que é objeto de estudo deste trabalho.

Nesta tese, a função ímpar adotada no diagrama tensão-deformação é a linear. Essa equação constitutiva, que é obtida substituindo-se o par tensão-deformação da lei de Hooke por qualquer Par Energeticamente Conjugado (PEC) de tensão-deformação, foi proposta por Hill (1979), sendo denominada de Generalização Natural da Lei de Hooke (GNLH). Além de garantir a existência da energia de deformação específica, como destacado por Volokh (2004), a GNLH tem a vantagem de utilizar constantes (Módulo de Young E e o coeficiente de Poisson ν ou os parâmetros de Lamé μ e λ) que são facilmente conhecidas para a maioria dos materiais. Algumas aplicações da GNLH podem ser vistas em Korobeynikov (2019), Korobeynikov *et al.* (2022), Greco e Peixoto (2022), Korobeynikov (2023) e Korobeynikov e Larichkin (2023).

Destaca-se que o uso de medidas alternativas de deformação pode ser encontrado na modelagem de polímeros e tecidos biológicos (veja, e. g., Saucedo-Mora *et al.* (2021), Korobeynikov (2023) e Kang *et al.* (2024)). Diante disso, este trabalho também aplica a formulação desenvolvida na modelagem desses materiais.

1.2 Objetivos

Perante o exposto no item anterior, esta tese tem como objetivos:

— implementar computacionalmente a Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos (FPMEF) em âmbito tridimensional, utilizando o elemento finito hexaédrico de 8 nós, adotando-se a equação constitutiva dada por

$${}^{\text{hs}}\mathbf{T}^{(\beta)} = 2\mu {}^{\text{hs}}\mathbf{E}^{(\beta)} + \lambda (\text{tr } {}^{\text{hs}}\mathbf{E}^{(\beta)}) \mathbf{I}, \quad (13)$$

em que ${}^{\text{hs}}\mathbf{T}^{(\beta)}$ é o tensor de tensão SHG (${}^{\text{hs}}\mathbf{T}^{(\beta)}$ e ${}^{\text{hs}}\mathbf{E}^{(\beta)}$ formam um PEC). Adota-se o corpo como isotrópico e homogêneo e considera-se apenas o caso estático;

— discutir os resultados e a aplicabilidade da equação constitutiva da Eq. (13) na modelagem de polímeros e tecidos biológicos.

1.3 Organização do texto

Este texto é composto por seis capítulos principais, incluindo a Introdução. O Capítulo 2 (Estado da Arte) apresenta a maneira mais comum com que os materiais do tipo borracha são

modelados na literatura. O Capítulo 3 (Fundamentação Teórica) fornece o alicerce teórico sobre o qual constrói-se esta tese. No Capítulo 4 (Implementação Computacional) encontra-se todo o desenvolvimento do trabalho propriamente dito. No Capítulo 5 (Exemplos Numéricos) aplica-se a formulação desenvolvida. Por fim, no Capítulo 6 (Conclusões) apresenta-se as conclusões do trabalho e as recomendações para pesquisas futuras.

Ao longo do texto, indica-se os passos nas equações por números romanos entre parênteses. A explicação do que foi realizado naquele passo encontra-se *logo após* a equação.

2 ESTADO DA ARTE

Um procedimento comum na literatura na modelagem de materiais do tipo borracha é o uso da decomposição multiplicativa do gradiente de deformação $\mathbf{F}$ em um fator volumétrico $\mathbf{F}_{\text{vol}}$ e um isocórico $\mathbf{F}_{\text{iso}}$ (segundo Düster *et al.* (2003) esses fatores estão relacionados com a tensão de Cauchy esférica e desviadora, respectivamente):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{vol}} \mathbf{F}_{\text{iso}} \quad \text{com} \quad \mathbf{F}_{\text{vol}} = J^{1/3} \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_{\text{iso}} = J^{-1/3} \mathbf{F}, \quad \text{em que} \quad \det \mathbf{F}_{\text{vol}} = J \quad \text{e} \quad \det \mathbf{F}_{\text{iso}} = 1 \quad (14)$$

juntamente com uma decomposição aditiva de ψ em uma parcela volumétrica ψ_{vol} e uma isocórica ψ_{iso} ,

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi_{\text{vol}}(J) + \psi_{\text{iso}}(\mathbf{F}_{\text{iso}}). \quad (15)$$

Essa abordagem é fundamentada em Flory (1961). Entretanto, a proposta original de Flory (1961) foi

$$\psi(\mathbf{F}, T) = \psi_1(J, T) + \psi_2(\mathbf{F}_{\text{iso}}, T), \quad T: \text{temperatura} \quad (16)$$

em que $\psi_1(J, T)$ é a contribuição devida às interações intermoleculares, como as que ocorrem em líquidos, e $\psi_2(\mathbf{F}_{\text{iso}}, T)$ é a contribuição devida à elasticidade de uma longa cadeia molecular. Dal *et al.* (2021) afirmam que ψ_2 não é uma parcela totalmente isocórica, mas, apesar disso, o uso da Eq. (14) junto com a Eq. (15) é uma abordagem padrão na comunidade científica desse assunto. Alguns exemplos são: Ogden (1982), Simo *et al.* (1985), Miehe (1994), Kaliske e Rothert (1997) e Miehe e Keck (2000).

Fundamentados em diversas conclusões a serem apresentadas no Capítulo 3, mais precisamente mostradas nas Eqs. (173) e (174), vários modelos constitutivos têm sido propostos para materiais hiperelásticos. A seguir, apresenta-se a parcela isocórica de alguns. Treloar (1943) construiu

$$\psi_{\text{iso}} = \frac{\mu}{2} (I_C - 3), \quad (17)$$

em que μ é um parâmetro do material e I_C é primeiro invariante principal do tensor Cauchy-Green direito $\mathbf{C}$. O modelo da Eq. (17) é conhecido como Neo-Hookeano. Salienta-se que os modelos baseados nos invariantes principais, que não possuem III_C na equação da energia de deformação específica, adotam o material como incompressível, haja vista as Eqs. (67) e (96) que serão discutidas posteriormente. Uma função linear em I_C e II_C é estabelecida em Rivlin (1948),

$$\psi_{iso} = C_1(I_C - 3) + C_2(II_C - 3), \quad (18)$$

em que C_1 e C_2 são parâmetros do material. O modelo da Eq. (18) é uma adaptação do apresentado em Mooney (1940) e por isso é conhecido como modelo de Mooney-Rivlin. Ogden (1972a) propôs

$$\psi_{iso} = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3), \quad (19)$$

em que μ_n e α_n são parâmetros do material. Comumente $N=3$, o que torna necessário o conhecimento de 6 parâmetros materiais. Yeoh (1990) concebeu

$$\psi_{iso} = D_1(I_C - 3) + D_2(I_C - 3)^2 + D_3(I_C - 3)^3, \quad (20)$$

em que D_1 , D_2 e D_3 são parâmetros do material.

Em relação à parcela ψ_{vol} da Eq. (15), é comum se expressar $\psi_{vol}(J) = k\hat{\psi}_{vol}(J)$, em que k representa um módulo de compressão. No caso em que $\psi_{vol}''(1) = k$, i. e. $\hat{\psi}_{vol}''(1) = 1$, k é interpretado como o módulo de compressibilidade da elasticidade linear, como destaca Hartmann e Neff (2003). Ogden (1972b) propôs

$$\hat{\psi}_{vol}(J) = \kappa^{-2}(\kappa \ln J + J^{-\kappa} - 1), \quad (21)$$

sendo κ um parâmetro adicional. Hartmann e Neff (2003) e Dürster *et al.* (2003) lançam mão da seguinte fórmula

$$\hat{\psi}_{\text{vol}}(J) = \frac{1}{50} (J^5 + J^{-5} - 2), \quad (22)$$

Dal *et al.* (2021) apresentaram um estudo comparativo utilizando 44 modelos constitutivos. Foram empregadas estratégias de otimização multiobjetivo para selecionar os melhores modelos a partir de resultados experimentais de tração uniaxial, cisalhamento puro e tração equi-biaxial.

Considerando apenas a tração equi-biaxial, do melhor para o pior¹, Dal *et al.* (2021) obteve para os modelos com

- três parâmetros: Heinrich e Kaliske (1997), Dal *et al.* (2020) e Ball *et al.* (1981);
- quatro parâmetros: Kaliske e Heinrich (1999), Khiêm e Itskov (2016) e Swanson (1985);
- cinco parâmetros: Lambert-Diani e Rey (1999), Miehe *et al.* (2004) e Alexander (1968).

Considerando os resultados de tração uniaxial, cisalhamento puro e tração equi-biaxial simultâneos, do melhor para o pior, Dal *et al.* (2021) obtiveram para os modelos com

- três parâmetros: Dal *et al.* (2020), Carroll (2011) e Davidson e Goulbourne (2013);
- quatro parâmetros: Khiêm e Itskov (2016), Kaliske e Heinrich (1999) e Bechir *et al.* (2006);
- cinco parâmetros: Miehe *et al.* (2004), Alexander (1968) e Shariff (2000).

Dos 44 modelos, os que obtiveram melhor correlação com os resultados experimentais de Treloar (1943) na tração uniaxial, no cisalhamento puro e na tração equi-biaxial simultâneos, do melhor para o pior, foram: Miehe *et al.* (2004), Alexander (1968) e Lambert-Diani e Rey (1999).

Uma inconsistência no estudo/análise de materiais elastoméricos destacada por Stumpf e Marczak (2021) é a tendência de se calibrar modelos utilizando-se resultados experimentais provenientes de modos de deformação puros (ensaios de tração, cisalhamento e tração equi-biaxial) com o objetivo de empregá-los na análise 3D, situação na qual há estados gerais de tensão. Segundo Stumpf e Marczak (2021), vários modelos clássicos falham em prever boas

¹ Os melhores modelos foram elencados segundo a otimização descrita no parágrafo imediatamente anterior.

respostas para modos de deformação diferentes daqueles usados para calibrá-los e, quando predizem, não o fazem de forma precisa para qualquer nível de deformação.

Outro aspecto importante comentado por Stumpf e Marczak (2021) é a necessidade que ψ tem de obedecer às inequações de Baker-Ericksen, propostas em Baker e Ericksen (1954). Essas inequações garantem que, para um corpo elástico isotrópico, a tensão (de Cauchy) principal máxima T_{ii} sempre ocorre na mesma direção do estiramento principal máximo λ_i , isto é,

$$(T_{ii} - T_{jj})(\lambda_i - \lambda_j) > 0 \quad \text{para } \lambda_i \neq \lambda_j, \quad (\text{sem soma}) \quad (23)$$

com $i, j = 1, 2$ e 3 . Quando há transformação de fase do material, entretanto, essas inequações podem ser violadas, como apontam Marsden e Hughes (1994). Agora, da Eq. (167), pode-se desenvolver a Eq. (15) como

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{F}) &= \psi_{\text{vol}}(J) + \psi_{\text{iso}}(\mathbf{U}_{\text{iso}}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi(\mathbf{F}) &= \psi_{\text{vol}}(J) + \bar{\psi}_{\text{iso}}(\mathbf{C}_{\text{iso}}) \Rightarrow \psi(\mathbf{F}) = \psi_{\text{vol}}(J) + \hat{\psi}_{\text{iso}}(\mathbf{I}_{\mathbf{C}_{\text{iso}}}, \Pi_{\mathbf{C}_{\text{iso}}}), \end{aligned} \quad (24)$$

em que

$$\mathbf{C}_{\text{iso}} = \mathbf{F}_{\text{iso}}^T \mathbf{F}_{\text{iso}} \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \mathbf{C}_{\text{iso}} = J^{-2/3} \mathbf{C}, \quad (25)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (14). Agora, da Eq. (152), nota-se que é possível expressar $\mathbf{T}$ em função de $\mathbf{B}$, uma vez que $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2$. Portanto, a relação constitutiva geral para um corpo elástico isotrópico pode ser expressa por (Gurtin, 1981)

$$\mathbf{T} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{B} + \beta_2 \mathbf{B}^{-1}, \quad (26)$$

Se o material for incompressível, a Eq. (26) assume a seguinte forma (Stumpf e Marczak (2021))

$$\mathbf{T} = -\bar{\pi} \mathbf{I} + 2 \frac{\partial \hat{\psi}_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{C}_{\text{iso}}}} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial \hat{\psi}_{\text{iso}}}{\partial \Pi_{\mathbf{C}_{\text{iso}}}} \mathbf{B}^{-1}, \quad (27)$$

sendo $\bar{\pi}$ a pressão hidrostática. Como destacam Stumpf e Marczak (2021), Truesdell e Noll (2004) concluem que a Eq. (23) é satisfeita se

$$\beta_1 > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \hat{\psi}_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{c}_{\text{iso}}}} > 0 \quad \text{e} \quad \beta_1 \leq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \hat{\psi}_{\text{iso}}}{\partial \Pi_{\mathbf{c}_{\text{iso}}}} \geq 0. \quad (28)$$

O estudo de equações constitutivas alternativas capazes de modelar novos materiais hiperelásticos ainda é intenso na literatura, como se constata em Bhuiyan *et al.* (2025), Havasi e Kossa (2025), Park (2025), Martín-Sosa *et al.* (2025), Kossa (2025), Istiak *et al.* (2025), Safa *et al.* (2025), Vaverka e Burša (2025), Kuznetsov (2025), Masrar e Ettaouil (2025) e Abdusalamov e Itskov (2025).

Um conceito importante com respeito à energia de deformação é a policonvexidade. Como apontam Buonsanti e Royer-Carfagni (2003), Ball (1976) denomina ψ como policonvexa se ela for escrita como

$$\psi(\mathbf{F}) = \tilde{\psi}(\mathbf{F}, \text{adj} \mathbf{F}, \det \mathbf{F}), \quad (29)$$

em que $\tilde{\psi}(\cdot, \cdot, \cdot)$ é convexa em cada termo e adj indicada adjunta. Segundo Ball (1976), essa imposição é crucial para demonstrar teoremas de existência na teoria da elasticidade não linear, uma vez que ela implica na semicontinuidade inferior do funcional de energia. A discussão da policonvexidade de ψ associada à equação constitutiva proposta nesta tese está fora do escopo do trabalho, sendo incluída como uma sugestão de trabalho futuro.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Definições matemáticas

A maioria das definições a seguir são encontradas em Gurtin (1981), outras são obtidas do Cálculo e da Álgebra Linear.

Utiliza-se o termo ‘tensor de 2ª ordem’ como sinônimo de ‘transformação linear de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{V}$ ’, em que $\mathbb{V}$ é o conjunto de todos os vetores de 3 componentes. Agora, introduz-se alguns conjuntos:

Lin = conjunto dos tensores de 2ª ordem;

Lin^+ = conjunto dos tensores de 2ª ordem com determinante positivo;

Orth = conjunto dos tensores ortogonais de 2ª ordem;

Orth^+ = conjunto dos tensores ortogonais próprios de 2ª ordem;

Sym = conjunto dos tensores de 2ª ordem simétricos;

Skw = conjunto dos tensores de 2ª ordem antissimétricos;

Psym = conjunto dos tensores de 2ª ordem simétricos e positivos definidos;

A seguir, comenta-se sobre a notação adotada neste trabalho.

- *Notação tensorial.* Todos os tensores de 2ª ordem são representados por letras romanas ou gregas maiúsculas em negrito (acompanhadas ou não por subíndice(s)) e os vetores por letras romanas ou gregas minúsculas em negrito (acompanhadas ou não por subíndice(s)). Todos os tensores de 4ª ordem são representados por letra romanas (na fonte **DEXTOROUTD**) maiúsculas em negrito. Exemplos: **A**, **Ω** , **a**, **ω** , **A_I**, **Ω_1** , **a₂** e **ω_ℓ** , **$\mathbb{A}$** ;
- *Notação indicial.* A componente de um tensor de 2ª ordem é representada por uma letra romana ou grega maiúscula em itálico com um subíndice formado por duas letras romanas minúsculas em itálico. A componente de um vetor é indicada por uma letra romana ou grega minúscula em itálico com um subíndice em letra romana minúscula em itálico. As componentes de grandezas tensoriais acompanhadas por subíndices (**A_I**, **Ω_1** , **a₂** e **ω_ℓ**) são escritas com o auxílio de parênteses. A componente de um tensor de 4ª ordem é representada

por uma letra romana (na fonte DEXTOROUITD) maiúscula em itálico com um subíndice formado por quatro letras romanas minúsculas em itálico. Exemplos: A_{ij} , Ω_{ij} , a_i , ω_i , $(A_1)_{ij}$, $(\Omega_1)_{ij}$, $(a_2)_i$ e $(\omega_\ell)_i$, $\mathcal{A}_{ijkl}$;

- *Notação matricial.* A representação matricial de um tensor de 2ª ordem é indicada pela sua notação tensorial entre colchetes ou pela sua notação indicial entre colchetes. A representação matricial de um vetor é dada pela sua notação tensorial entre chaves ou pela sua notação indicial entre chaves. Nesta tese, não se utiliza notação matricial de tensores de 4ª ordem. Exemplos: $[\mathbf{A}] = [A_{ij}]$, $[\mathbf{\Omega}] = [\Omega_{ij}]$, $\{\mathbf{a}\} = \{a_i\}$, $\{\mathbf{\omega}\} = \{\omega_i\}$, $[\mathbf{A}_1] = [(A_1)_{ij}]$, $[\mathbf{\Omega}_1] = [(\Omega_1)_{ij}]$, $\{\mathbf{a}_2\} = \{(a_2)_i\}$ e $\{\mathbf{\omega}_\ell\} = \{(\omega_\ell)_i\}$.

Designa-se por $\mathbf{e}_i$ um vetor da base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ do sistema de coordenadas cartesiano. Assim, as componentes S_{ij} de um tensor $\mathbf{S}$ são dadas por

$$S_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S} \mathbf{e}_j \quad \forall \mathbf{S} \in \text{Lin} . \quad (30)$$

Além disso, o tensor $\mathbf{S}$ é dado por

$$\mathbf{S} = S_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j), \quad (31)$$

em que $\otimes$ representa o produto tensorial. O tensor transposto de $\mathbf{S}$, dado por $\mathbf{S}^\top$, é o tensor único com a seguinte propriedade

$$\mathbf{S} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}^\top \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V} . \quad (32)$$

O produto interno (contração dupla) entre dois tensores de 2ª ordem é definido como

$$\mathbf{S} : \mathbf{T} = \text{tr}(\mathbf{S}^\top \mathbf{T}) = \mathbf{T} : \mathbf{S} \quad \forall \mathbf{S}, \mathbf{T} \in \text{Lin} . \quad (33)$$

A contração dupla possui as seguintes propriedades

$$\mathbf{S} : (\mathbf{T} \mathbf{A}) = (\mathbf{T}^\top \mathbf{S}) : \mathbf{A} = (\mathbf{S} \mathbf{A}^\top) : \mathbf{T} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} : (\mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{V}) = (\mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{V}^\top) : \mathbf{C} \quad \forall \mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{A} \in \text{Lin} . \quad (34)$$

Além disso, o traço possui a seguinte propriedade

$$\text{tr}(\mathbf{ST}) = \text{tr}(\mathbf{TS}) \quad \forall \mathbf{S}, \mathbf{T} \in \text{Lin}. \quad (35)$$

A norma euclidiana de um tensor de 2ª ordem é dada por

$$\|\mathbf{S}\| = \sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}} \quad \forall \mathbf{S} \in \text{Lin}. \quad (36)$$

Todo tensor de 2ª ordem pode ser decomposto unicamente como (Decomposição Aditiva):

$$\mathbf{S} = \text{sym} \mathbf{S} + \text{skw} \mathbf{S} \quad \forall \mathbf{S} \in \text{Lin}. \quad (37)$$

sendo $\text{sym} \mathbf{S}$ a parcela simétrica de $\mathbf{S}$, $\text{sym} \mathbf{S} = (\mathbf{S} + \mathbf{S}^T) / 2$, e $\text{skw} \mathbf{S}$ a parcela antissimétrica de $\mathbf{S}$, $\text{skw} \mathbf{S} = (\mathbf{S} - \mathbf{S}^T) / 2$. Diante disso, afirma-se que

$$\mathbf{T} : \mathbf{W} = 0 \quad \forall \mathbf{T} \in \text{Sym} \text{ e } \forall \mathbf{W} \in \text{Skw}. \quad (38)$$

Um tensor $\mathbf{Q}$ é ortogonal se ele preserva o produto interno,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}. \quad (39)$$

O Teorema Espectral é apresentado a seguir.

- *Teorema Espectral* -

Seja $\mathbf{U} \in \text{Sym}$. Então, existe um base ortonormal $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ na qual $\mathbf{U}$ admite a seguinte representação², sendo λ_i o autovalor de $\mathbf{U}$ correspondente ao autovetor $\mathbf{a}_i$,

$$\mathbf{U} = \lambda_i (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i). \quad (40)$$

Agora, sejam campos vetoriais $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{w}(\mathbf{x})$. Então,

$$\nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x})^T \mathbf{w} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}(\mathbf{x})^T \mathbf{v}. \quad (41)$$

² Aqui é apenas mostrado o caso em que os três autovalores são distintos.

Sejam $\mathbf{z}(\mathbf{y})$, $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{h} = \mathbf{z}(\mathbf{w}(\mathbf{x}))$. A regra da cadeia fornece

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h} = (\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{z})(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}). \quad (42)$$

Seja $\mathbf{w}$ um campo vetorial arbitrário. Então

$$\text{div}(\mathbf{S}^T \mathbf{w}) = \mathbf{S} : \nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot (\text{div} \mathbf{S}). \quad (43)$$

De acordo com Holzapfel (2000), o produto tensorial $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ é o tensor de 4ª ordem tal que

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) : \mathbf{V} = (\mathbf{B} : \mathbf{V}) \mathbf{A}. \quad (44)$$

Além disso, as propriedades

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \otimes (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \quad \text{e} \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}) \quad (45)$$

serão úteis. Ademais, seguindo-se Holzapfel (2000), existem tensores unitários de 4ª ordem $\mathbb{I}$ e $\bar{\mathbb{I}}$ tais que

$$\mathbf{A} = \mathbb{I} : \mathbf{A} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^T = \bar{\mathbb{I}} : \mathbf{A}, \quad (46)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \mathbb{I}_{ijkl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell) = \delta_{ik} \delta_{jl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell) \quad \text{e} \\ \bar{\mathbb{I}} &= \bar{\mathbb{I}}_{ijkl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell) = \delta_{il} \delta_{jk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell), \end{aligned} \quad (47)$$

em que $\delta_{\square\square}$ representa o delta de Kronecker. A seguir, apresenta-se a extensão do conceito de incremento de uma função $\mathbb{F}$ de uma variável $\mathbb{X}$, sendo $\mathbb{X}$ e $\mathbb{F}(\mathbb{X})$ tensores de ordem ≤ 2 (a ordem de $\mathbb{X}$ não necessariamente é igual à de $\mathbb{F}(\mathbb{X})$). Nesta tese, a grafia de $\mathbb{F}$ em cada caso indica a ordem do tensor da imagem da função. Se $\mathbb{F}$ for uma letra minúscula (romana ou grega) em itálico, então a imagem é um escalar, por exemplo: $f(\mathbf{A})$, $\varphi(\mathbf{A})$. Se $\mathbb{F}$ for uma letra minúscula (romana ou grega) em negrito, então a imagem é um vetor, por exemplo: $\mathbf{f}(\mathbf{A})$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A})$. Se $\mathbb{F}$ for uma letra maiúscula (romana ou grega) em negrito, então a imagem é um tensor de 2ª ordem, por exemplo: $\mathbf{F}(\mathbf{A})$, $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{A})$.

Sendo³ $\mathbb{X}_0$ um valor inicial (fixo) e $\mathbb{U}$ um incremento (não fixo) na variável independente, a expressão $\mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \mathbb{U})$ é vista como uma função de $\mathbb{U}$, $\mathbb{G}(\mathbb{U}) = \mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \mathbb{U})$. Essa expressão é a mesma que $\mathbb{G}(\alpha\mathbb{U}) = \mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \alpha\mathbb{U})$ com $\alpha = 1$. No entanto, se $\mathbb{U}$ for constante e α for variável, o termo anterior se torna em uma função⁴ de α , $\mathbb{H}(\alpha) = \mathbb{G}(\alpha\mathbb{U}) = \mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \alpha\mathbb{U})$. Diante disso, escreve-se

$$\mathbb{H}(\alpha) = \mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \alpha\mathbb{U}). \quad (48)$$

A série de Taylor de $\mathbb{H}$ em torno de 0 (série de Maclaurin de $\mathbb{H}$) é

$$\mathbb{H}(\alpha) = \mathbb{H}(0) + \left. \frac{d\mathbb{H}(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} (\alpha - 0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathbb{H}(\alpha)}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} (\alpha - 0)^2 + \dots \quad (49)$$

Avaliando-se a função $\mathbb{H}$ em $\alpha = 1$ na Eq. (49), tem-se

$$\mathbb{H}(1) = \mathbb{H}(0) + \left. \frac{d\mathbb{H}(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} 1 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathbb{H}(\alpha)}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} 1^2 + \dots \quad (50)$$

Substituindo-se a Eq. (48) na Eq. (50) tem-se

$$\mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \mathbb{U}) = \mathbb{F}(\mathbb{X}_0) + \left. \frac{d\mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \alpha\mathbb{U})}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \alpha\mathbb{U})}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} + \dots \quad (51)$$

Observa-se que quando α foi fixado na Eq. (50), $\mathbb{U}$ passou a ser a variável do problema, como mostra a Eq. (51). Diante disso, quando a norma⁵ de $\mathbb{U}$ é pequena, a Eq. (51) se torna

$$\mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \mathbb{U}) \approx \mathbb{F}(\mathbb{X}_0) + \left. \frac{d\mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \alpha\mathbb{U})}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \Rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \mathbb{U}) \approx \mathbb{F}(\mathbb{X}_0) + D_{\mathbf{x}}\mathbb{F}(\mathbb{X}_0)[\mathbb{U}], \quad (52)$$

em que se definiu

³ A ordem de $\mathbb{X}_0$ e de $\mathbb{U}$ deve ser a igual à de $\mathbb{X}$.

⁴ A ordem de $\mathbb{G}$ e de $\mathbb{H}$ deve ser a igual à de $\mathbb{F}$.

⁵ A definição da norma de $\mathbb{U}$ depende da ordem do tensor $\mathbb{U}$.

$$D_{\mathbf{x}}\mathbb{F}(\mathbb{X}_0)[\mathbb{U}] = \left. \frac{d\mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \alpha\mathbb{U})}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad (53)$$

que é a expressão geral do incremento de uma função, também chamada de incremento de Gâteaux. Destaca-se que o tensor $\mathbb{U}$ na Eq. (53) é arbitrário, com norma pequena. Além disso, salienta-se que $D_{\mathbf{x}}\mathbb{F}(\mathbb{X}_0)[\mathbb{U}]$ não representa a derivada em si, e sim o incremento na função (que é linear em $\mathbb{U}$). Nos casos especiais em que se tem $\omega: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi: \text{Lin} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{K}: \text{Lin} \rightarrow \text{Lin}$ ter-se-á

$$D_{\mathbf{x}}\omega(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = \nabla\omega(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}, \quad (54)$$

$$D_{\mathbf{T}}\varphi(\mathbf{T})[\mathbf{U}] = \frac{d\varphi(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}} : \mathbf{U} \quad \text{e} \quad (55)$$

$$D_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(\mathbf{X})[\mathbf{U}] = \frac{d\mathbf{K}(\mathbf{X})}{d\mathbf{X}} : \mathbf{U}, \quad (56)$$

em que $\frac{d\varphi(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}$ é um tensor de 2ª ordem e $\frac{d\mathbf{K}(\mathbf{X})}{d\mathbf{X}}$ é um tensor de 4ª ordem. Agora, a fim de se apresentar a regra da cadeia conforme Bonet e Wood (2008), sejam funções $\mathbb{F}(\mathbb{X})$, $\mathbb{F}_1(\mathbb{Y})$ e $\mathbb{F}_2(\mathbb{X})$ tais que $\mathbb{F}(\mathbb{X}) = \mathbb{F}_1(\mathbb{F}_2(\mathbb{X}))$. Fazendo-se $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0 + \mathbb{U}$ na última expressão, tem-se

$$\mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \mathbb{U}) = \mathbb{F}_1(\mathbb{F}_2(\mathbb{X}_0 + \mathbb{U})), \quad (57)$$

Linearizando-se $\mathbb{F}_2$ na Eq. (57) obtém-se

$$\mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \mathbb{U}) \approx \mathbb{F}_1(\mathbb{F}_2(\mathbb{X}_0)) + D_{\mathbf{x}}\mathbb{F}_2(\mathbb{X}_0)[\mathbb{U}]. \quad (58)$$

Prosseguindo-se com a linearização de $\mathbb{F}_1$ no ‘ponto’ $\mathbb{F}_2(\mathbb{X}_0)$, com ‘incremento’ $D_{\mathbf{x}}\mathbb{F}_2(\mathbb{X}_0)[\mathbb{U}]$, a Eq. (58) se torna

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(\mathbb{X}_0 + \mathbb{U}) &\approx \\ &\approx \mathbb{F}_1(\mathbb{F}_2(\mathbb{X}_0)) + D_{\mathbf{Y}}\mathbb{F}_1(\mathbb{F}_2(\mathbb{X}_0))[D_{\mathbf{x}}\mathbb{F}_2(\mathbb{X}_0)[\mathbb{U}]] = \mathbb{F}(\mathbb{X}_0) + D_{\mathbf{Y}}\mathbb{F}_1(\mathbb{F}_2(\mathbb{X}_0))[D_{\mathbf{x}}\mathbb{F}_2(\mathbb{X}_0)[\mathbb{U}]]. \end{aligned} \quad (59)$$

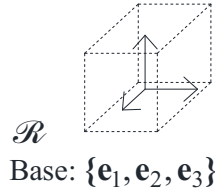
Comparando-se as Eqs. (52) e (59), a regra da cadeia é dada por:

$$D_{\mathbf{x}}\mathbb{F}(\mathbb{X}_0)[\mathbf{U}] = D_{\mathbf{y}}\mathbb{F}_1(\mathbb{F}_2(\mathbb{X}_0))[D_{\mathbf{x}}\mathbb{F}_2(\mathbb{X}_0)[\mathbf{U}]], \quad (60)$$

3.2 Descrição da deformação

Como apontam Muschik e Restuccia (2002), um observador (ou referencial) deve possuir um sistema de coordenadas e dispositivos para medir grandezas físicas, a fim de que a descrição do movimento de um corpo seja possível. Dentre essas grandezas, inclui-se o tempo. Diante disso, a Figura 6 mostra a simbologia adotada neste trabalho para um referencial $\mathcal{R}$: um cubo rígido em linha tracejada e três vetores indicando uma base ortonormal do sistema de coordenadas cartesianas.

Figura 6 – Simbologia de referencial.

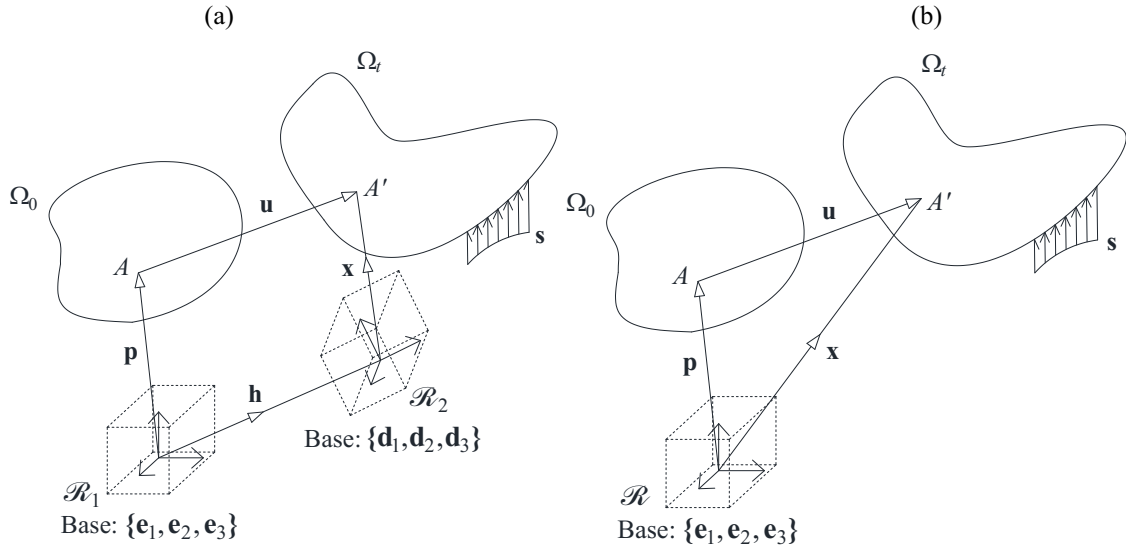


Seja um corpo deformável em um estado livre de tensões que ocupa uma região Ω_0 em um instante inicial t_0 (configuração de referência). Devido a um carregamento $\mathbf{s}$ (força por unidade de área da configuração atual), o corpo passa a ocupar a região Ω_t em um instante de tempo t (configuração atual). Pelo menos duas abordagens podem ser utilizadas para se mapear esse movimento: a que utiliza dois referenciais $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ (Figura 7a) ou a que emprega apenas um (Figura 7b). O ponto material⁶ A é localizado pelo vetor posição $\mathbf{p}$ e o ponto material A' por $\mathbf{x}$. O vetor $\mathbf{h}$ conecta as origens dos sistemas de coordenadas dos dois referenciais e o vetor $\mathbf{u}$ representa o deslocamento sofrido por A .

⁶ De acordo com Mal e Singh (1991), ponto material (ou partícula material) é uma pequena porção do corpo que, na Mecânica do Contínuo Clássico, pode ser idealizado como um ponto matemático.

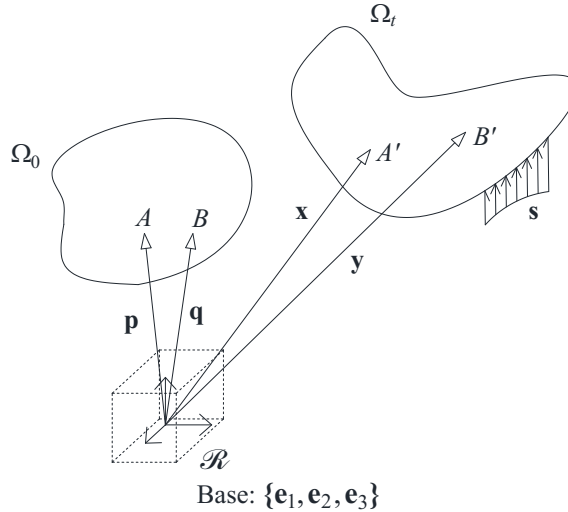
Figura 7 – (a) Mapeamento da deformação utilizando-se dois referenciais (adaptado de Mase (1970)).

(b) Mapeamento da deformação utilizando-se um referencial.



A abordagem da Figura 7b é comumente adotada nos livros de Mecânica do Contínuo e será empregada nesta tese a partir daqui, com exceção de apenas um caso, no qual se fará a devida justificativa do uso da Figura 7a. Agora, seja a Figura 8.

Figura 8 – Mapeamento da deformação.



Além disso, define-se:

$\mathbb{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_0}$ = conjunto de vetores que localizam pontos materiais de um corpo contido (no instante t_0) na região Ω_0 em relação a $\mathcal{R}$;

$\mathbb{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_t}$ = conjunto de vetores que localizam pontos materiais de um corpo contido (no instante t) na região Ω_t em relação a $\mathcal{R}$.

Uma motivação básica é encontrar o vetor posição $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_t}$ associado ao ponto material A' que, antes da aplicação do carregamento, era localizado pelo vetor posição $\mathbf{p} \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_0}$ associado ao ponto A . De maneira análoga, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_t}$ é o vetor posição associado ao ponto B' que, na configuração de referência, era localizado pelo vetor $\mathbf{q} \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_0}$ associado ao ponto B .

A Mecânica do Contínuo Clássico estabelece uma função $\chi: \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_t}$ com $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{p}, t)$, sendo χ bijetora. Esse ponto de partida é fruto do Princípio da Ação Local, que será apresentado formalmente no item 3.9. Assim, supondo-se que a função χ tenha representação em série de Taylor em torno de um vetor conhecido $\mathbf{q}$, tem-se

$$\chi(\mathbf{p}, t) = \chi(\mathbf{q}, t) + \nabla_{\mathbf{p}} \chi(\mathbf{q}, t)(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + \mathbf{r}_I \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y} + \nabla_{\mathbf{p}} \chi(\mathbf{q}, t)(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + \mathbf{r}_I, \quad (61)$$

em que $\mathbf{r}_I$ representa a soma restante da série, que se aproxima de $\mathbf{0}$ mais rápido do que $(\mathbf{p} - \mathbf{q})$. Fazendo-se $(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{0}$ na Eq. (61), tem-se que $\mathbf{r}_I \rightarrow \mathbf{0}$, e então pode-se escrever

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \nabla_{\mathbf{p}} \chi(\mathbf{q}, t)(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \stackrel{(I)}{\Rightarrow} d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, t)d\mathbf{p}, \quad (62)$$

sendo que $d\mathbf{p}$ representa o vetor $(\mathbf{p} - \mathbf{q})$, $d\mathbf{x}$ representa o vetor $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ quando $(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{0}$ e em (I) definiu-se

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, t) = \nabla_{\mathbf{p}} \chi(\mathbf{q}, t), \quad (63)$$

que é chamado de tensor gradiente de deformação.

Caso o problema fosse descrito de maneira inversa, constrói-se $\chi^{-1}: \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_t} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_0}$ com $\mathbf{p} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$. Supondo-se que χ^{-1} também tenha representação em série de Taylor em torno de um vetor conhecido $\mathbf{y}$, tem-se

$$\chi^{-1}(\mathbf{x}, t) = \chi^{-1}(\mathbf{y}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \chi^{-1}(\mathbf{y}, t)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{r}_{II} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{q} + \nabla_{\mathbf{x}} \chi^{-1}(\mathbf{y}, t)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{r}_{II}, \quad (64)$$

em que $\mathbf{r}_{II}$ representa a soma restante da série, que se aproxima de $\mathbf{0}$ mais rápido do que $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Fazendo-se $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{0}$ na Eq. (64), tem-se que $\mathbf{r}_{II} \rightarrow \mathbf{0}$, e então pode-se escrever

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} + \nabla_{\mathbf{x}} \chi^{-1}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{x} \Rightarrow d\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{x}} \chi^{-1}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{x}. \quad (65)$$

Agora, pré-multiplicando-se a Eq. (62) por $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{q}, t)$ tem-se

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{q}, t) d\mathbf{x}. \quad (66)$$

Comparando-se as Eqs. (65) e (66) conclui-se que $\nabla_{\mathbf{x}} \chi^{-1}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{q}, t)$. Essa expressão será utilizada no item 4.2. Então, uma vez que χ é bijetora, deve-se ter $\det \mathbf{F}(\mathbf{q}, t) \neq 0$.

Agora, seja dV_0 o volume do corpo gerado por $\{d\mathbf{p}^{(1)}, d\mathbf{p}^{(2)}, d\mathbf{p}^{(3)}\}$. Após a deformação, esses três vetores transformam-se em $\{d\mathbf{x}^{(1)}, d\mathbf{x}^{(2)}, d\mathbf{x}^{(3)}\}$, cujo volume do corpo gerado é dV . Tendo em vista a forma indicial da Eq. (62), pode-se fazer

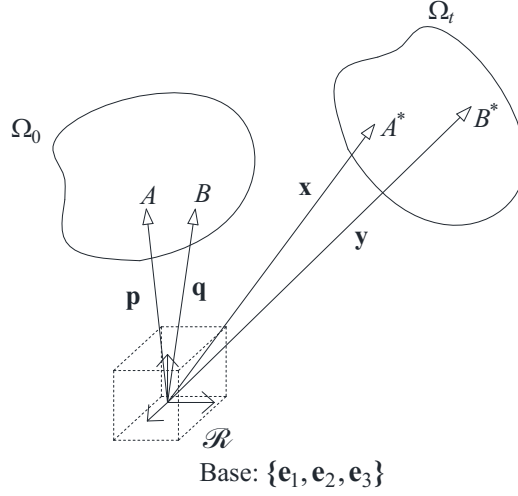
$$\begin{aligned} dV &= d\mathbf{x}^{(1)} \cdot (d\mathbf{x}^{(2)} \times d\mathbf{x}^{(3)}) = \begin{vmatrix} dx_1^{(1)} & dx_1^{(2)} & dx_1^{(3)} \\ dx_2^{(1)} & dx_2^{(2)} & dx_2^{(3)} \\ dx_3^{(1)} & dx_3^{(2)} & dx_3^{(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{1j} dp_j^{(1)} & F_{1j} dp_j^{(2)} & F_{1j} dp_j^{(3)} \\ F_{2j} dp_j^{(1)} & F_{2j} dp_j^{(2)} & F_{2j} dp_j^{(3)} \\ F_{3j} dp_j^{(1)} & F_{3j} dp_j^{(2)} & F_{3j} dp_j^{(3)} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dp_1^{(1)} & dp_1^{(2)} & dp_1^{(3)} \\ dp_2^{(1)} & dp_2^{(2)} & dp_2^{(3)} \\ dp_3^{(1)} & dp_3^{(2)} & dp_3^{(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dp_1^{(1)} & dp_1^{(2)} & dp_1^{(3)} \\ dp_2^{(1)} & dp_2^{(2)} & dp_2^{(3)} \\ dp_3^{(1)} & dp_3^{(2)} & dp_3^{(3)} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} (d\mathbf{p}^{(1)} \cdot (d\mathbf{p}^{(2)} \times d\mathbf{p}^{(3)})) \Rightarrow dV = J dV_0, \end{aligned} \quad (67)$$

em que se definiu $J = \det \mathbf{F}$. Diante da Eq. (67), como dV_0 e dV são positivos, conclui-se que em qualquer deformação fisicamente possível deve-se ter $\det \mathbf{F}(\mathbf{q}, t) > 0$. Essa exigência satisfaz a imposição anterior (determinante do gradiente de deformação não nulo) e é uma premissa neste trabalho.

3.3 Descrição do movimento de corpo rígido

A Figura 9 mostra o MCR de um contínuo. Pretende-se encontrar a função χ que representa esse movimento particular.

Figura 9 – Mapeamento do MCR.



Seguindo-se Gurtin (1981), nota-se que a distância entre quaisquer dois pontos materiais A e B é preservada

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \Rightarrow \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \|\chi(\mathbf{p}, t) - \chi(\mathbf{q}, t)\| \Rightarrow \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2 = \|\chi(\mathbf{p}, t) - \chi(\mathbf{q}, t)\|^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}) = (\chi(\mathbf{p}, t) - \chi(\mathbf{q}, t)) \cdot (\chi(\mathbf{p}, t) - \chi(\mathbf{q}, t)). \end{aligned} \quad (68)$$

Destaca-se que $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ são arbitrários. Aplicando-se o gradiente em relação a $\mathbf{p}$ na Eq. (68) tem-se

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{p}}((\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q})) &= \nabla_{\mathbf{p}}((\chi(\mathbf{p}, t) - \chi(\mathbf{q}, t)) \cdot (\chi(\mathbf{p}, t) - \chi(\mathbf{q}, t))) \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{(I)}{\Rightarrow} 2(\nabla_{\mathbf{p}}(\mathbf{p} - \mathbf{q}))^T (\mathbf{p} - \mathbf{q}) = 2\nabla_{\mathbf{p}}(\chi(\mathbf{p}, t) - \chi(\mathbf{q}, t))^T (\chi(\mathbf{p}, t) - \chi(\mathbf{q}, t)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p} - \nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{q})^T (\mathbf{p} - \mathbf{q}) = (\nabla_{\mathbf{p}}\chi(\mathbf{p}, t) - \nabla_{\mathbf{p}}\chi(\mathbf{q}, t))^T (\chi(\mathbf{p}, t) - \chi(\mathbf{q}, t)) \stackrel{(II)}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{(II)}{\Rightarrow} \mathbf{p} - \mathbf{q} = \nabla_{\mathbf{p}}\chi(\mathbf{p}, t)^T (\chi(\mathbf{p}, t) - \chi(\mathbf{q}, t)) \Rightarrow \nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}}(\nabla_{\mathbf{p}}\chi(\mathbf{p}, t)^T (\chi(\mathbf{p}, t) - \chi(\mathbf{q}, t))) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\mathbf{I} = \nabla_{\mathbf{p}}\chi(\mathbf{p}, t)^T (-\nabla_{\mathbf{q}}\chi(\mathbf{q}, t)) \Rightarrow \nabla_{\mathbf{p}}\chi(\mathbf{p}, t)^T = \nabla_{\mathbf{q}}\chi(\mathbf{q}, t)^{-1}. \end{aligned} \quad (69)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (41). No passo (II), com respeito ao termo $\nabla_{\mathbf{p}}\chi(\mathbf{q}, t)$, salienta-se que o gradiente em relação a $\mathbf{p}$ é realizado depois da avaliação da função χ em $\mathbf{q}$. Essa é a justificativa para esse termo ser o tensor nulo. Na Eq. (61), por outro lado, esse mesmo termo é obtido aplicando-se o gradiente em relação a $\mathbf{p}$ em χ e, depois, avaliando-se o tensor em $\mathbf{q}$.

Agora, como $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ são arbitrários, percebe-se que a Eq. (69) é verdadeira se, e somente se, os termos $\nabla_{\mathbf{p}}\chi$ e $\nabla_{\mathbf{q}}\chi$ não dependerem de $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, respectivamente. Assim, os tensores $\nabla_{\mathbf{p}}\chi$ e $\nabla_{\mathbf{q}}\chi$ dependem apenas do tempo. Portanto, $\nabla_{\mathbf{p}}\chi = \nabla_{\mathbf{q}}\chi = \mathbf{Q}(t)$ e então, da Eq. (69), conclui-se que $\mathbf{Q}(t)$ é ortogonal. Diante disso, a série de Taylor da função χ é

$$\chi(\mathbf{p}, t) = \chi(\mathbf{q}, t) + \nabla_{\mathbf{p}}\chi(\mathbf{q}, t)(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \Rightarrow \chi(\mathbf{p}, t) = \chi(\mathbf{q}, t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (70)$$

Nota-se que a Eq. (70) pode ser reescrita como

$$\chi(\mathbf{p}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{p} + (\chi(\mathbf{q}, t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{q}). \quad (71)$$

Fixando-se $\mathbf{p}$ e variando-se $\mathbf{q}$, conclui-se que o membro esquerdo da Eq. (71) não se altera. Portanto, o termo entre parênteses da Eq. (71) é visto como um vetor que depende apenas do tempo. Assim, a Eq. (71) se torna

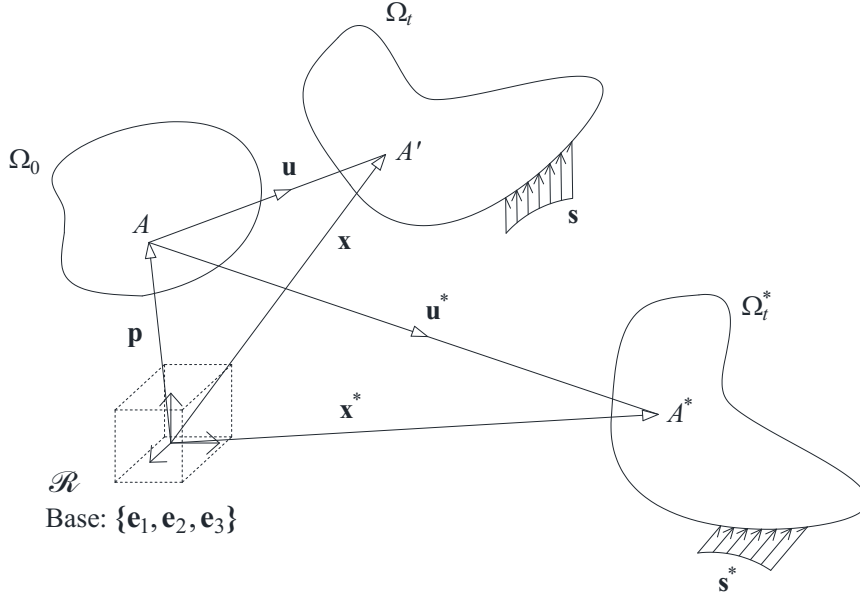
$$\chi(\mathbf{p}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{p} + \mathbf{c}(t) \quad \text{ou} \quad \mathbf{x} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{p} + \mathbf{c}(t). \quad (72)$$

em que $\mathbf{c}(t) = \chi(\mathbf{q}, t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{q}$, sendo $\mathbf{q}$ arbitrário. Destaca-se que quando $t = t_0$, deve-se ter $\chi(\mathbf{p}, t_0) = \mathbf{p}$. Para que isso aconteça, impõe-se as seguintes restrições na Eq. (72): $\mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{I}$ e $\mathbf{c}(t_0) = \mathbf{0}$. Além disso, ao longo deste trabalho deve-se ter $\mathbf{Q}(t) \in \text{Orth}^+$.

3.4 Movimento de corpo rígido da configuração atual

A fim de se compreender as consequências do Princípio da Invariância da Resposta Material na seção 3.9, este item apresenta a maneira pela qual algumas grandezas se transformam dado um MCR arbitrário da configuração atual, como mostra a Figura 10.

Figura 10 – MCR da configuração atual.



Inicialmente constrói-se a função $\chi^*: \mathbb{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_t^*}$ com $\mathbf{x}^* = \chi^*(\mathbf{p}, t)$. De acordo com a Eq. (72), os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}^*$ relacionam-se via

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t) \quad \text{ou} \quad \chi^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{Q}(t)\chi(\mathbf{p}, t) + \mathbf{c}(t). \quad (73)$$

A derivada temporal da Eq. (73)₂ é

$$\dot{\chi}^*(\mathbf{p}, t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\chi(\mathbf{p}, t) + \mathbf{Q}(t)\dot{\chi}(\mathbf{p}, t) + \dot{\mathbf{c}}(t). \quad (74)$$

Diante da Eq. (74) pode-se escrever

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{x} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{c}}(t). \quad (75)$$

em que $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (\dot{\chi}(\mathbf{p}, t))_{\mathbf{s}}$ é a descrição espacial da velocidade no movimento χ e $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t) = (\dot{\chi}^*(\mathbf{p}, t))_{\mathbf{s}^*}$ é a descrição espacial da velocidade no movimento χ^* . Prosseguindo-se com a derivada temporal da Eq. (74) obtém-se

$$\ddot{\chi}^*(\mathbf{p}, t) = \ddot{\mathbf{Q}}(t)\chi(\mathbf{p}, t) + 2\dot{\mathbf{Q}}(t)\dot{\chi}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{Q}(t)\ddot{\chi}(\mathbf{p}, t) + \ddot{\mathbf{c}}(t). \quad (76)$$

Diante da Eq. (76) escreve-se

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{x}^*, t) = \ddot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{x} + 2\dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + \ddot{\mathbf{c}}(t), \quad (77)$$

sendo que $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = (\ddot{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{p}, t))_s$ e $\mathbf{a}^*(\mathbf{x}^*, t) = (\ddot{\boldsymbol{\chi}}^*(\mathbf{p}, t))_s$ são as descrições espaciais da aceleração nos movimentos $\boldsymbol{\chi}$ e $\boldsymbol{\chi}^*$, respectivamente. Agora, aplicando-se o gradiente em relação a $\mathbf{x}$ na Eq. (75) tem-se

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}^* &= \dot{\mathbf{Q}}(t) + \mathbf{Q}(t) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \stackrel{(I)}{\Rightarrow} (\nabla_{\mathbf{x}^*} \mathbf{v}^*) (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^*) = \dot{\mathbf{Q}}(t) + \mathbf{Q}(t) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \stackrel{(II)}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}(t)^\top + \dot{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{Q}(t)^\top, \end{aligned} \quad (78)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (42) no membro esquerdo da equação e em (II) foram definidos os gradientes espaciais da velocidade nos movimentos $\boldsymbol{\chi}$ e $\boldsymbol{\chi}^*$, respectivamente, como $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*, t) = \nabla_{\mathbf{x}^*} \mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t)$. Seja o tensor taxa instantânea de estiramento dado por $\mathbf{D} = \text{sym} \mathbf{L}$ e o tensor taxa instantânea de rotação dado por $\mathbf{W} = \text{skw} \mathbf{L}$. Como o tensor $\boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{Q}(t)^\top$ da Eq. (78) é antissimétrico⁷, conclui-se que

$$\mathbf{D}^*(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}(t)^\top \quad \text{e} \quad (79)$$

$$\mathbf{W}^*(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}(t)^\top + \boldsymbol{\Omega}(t), \quad (80)$$

sendo $\mathbf{D}^* = \text{sym} \mathbf{L}^*$ e $\mathbf{W}^* = \text{skw} \mathbf{L}^*$. A seguir, apresenta-se o Teorema da Decomposição Polar.

- Teorema da Decomposição Polar -

Seja $\mathbf{F} \in \text{Lin}^+$. Então, existem tensores únicos $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \text{Psym}$ e $\mathbf{R} \in \text{Orth}^+$ tais que $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ com $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^\top \mathbf{F}}$ e $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F}\mathbf{F}^\top}$ (tensor estiramento esquerdo).

Agora, aplicando-se o gradiente em relação a $\mathbf{p}$ na Eq. (73) tem-se

$$\nabla_{\mathbf{p}} \boldsymbol{\chi}^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{Q}(t) \nabla_{\mathbf{p}} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{p}, t) \Rightarrow \mathbf{F}^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{F}(\mathbf{p}, t), \quad (81)$$

⁷ Gurtin (1981), página 142.

em que se definiu $\mathbf{F}^*(\mathbf{p}, t) = \nabla_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\chi}^*(\mathbf{p}, t)$. Novamente de acordo com a Figura 10, os vetores $\mathbf{p}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ relacionam-se via

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{u} \Rightarrow \nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{x} = \nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p} + \nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{u} \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}, \quad (82)$$

sendo que em (I) definiu-se $\mathbf{H}(\mathbf{p}, t) = \nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{p}, t)$. Além disso, os vetores $\mathbf{p}$, $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{u}^*$ relacionam-se via

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* = \mathbf{p} + \mathbf{u}^* \Rightarrow \nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{x}^* &= \nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p} + \nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{u}^* \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \mathbf{F}^* = \mathbf{I} + \mathbf{H}^* \stackrel{(II)}{\Rightarrow} \mathbf{H}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F} - \mathbf{I} \stackrel{(III)}{\Rightarrow} \mathbf{H}^* = \mathbf{Q}(\mathbf{H} + \mathbf{I}) - \mathbf{I} \stackrel{(III)}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{(III)}{\Rightarrow} \mathbf{H}^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{H}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{Q}(t) - \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (83)$$

sendo que em (I) definiu-se $\mathbf{H}^*(\mathbf{p}, t) = \nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{u}^*(\mathbf{p}, t)$, em (II) empregou-se a Eq. (81) e em (III) aplicou-se a Eq. (82). Agora, do Teorema da Decomposição Polar, pode-se utilizar $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ e $\mathbf{F}^* = \mathbf{R}^*\mathbf{U}^*$ na Eq. (81) para se obter $\mathbf{R}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{U}$. Uma vez que $\mathbf{Q}\mathbf{R} \in \text{Orth}^+$, conclui-se da unicidade da decomposição polar que

$$\mathbf{R}^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(\mathbf{p}, t) \quad \text{e} \quad (84)$$

$$\mathbf{U}^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{p}, t). \quad (85)$$

Além disso, a decomposição polar de $\mathbf{F}^*$ resulta em $\mathbf{V}^* = \mathbf{R}^*\mathbf{U}^*(\mathbf{R}^*)^T$. Substituindo-se as Eqs. (84) e (85) nessa expressão tem-se

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T \Rightarrow \mathbf{V}^*(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}(t)^T, \quad (86)$$

uma vez que $\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T$. Em relação à $\mathbf{F}$, o tensor Cauchy-Green direito é $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ e o tensor Cauchy-Green esquerdo é $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2$. Analogamente, para $\mathbf{F}^*$ ter-se-á $\mathbf{C}^* = (\mathbf{U}^*)^2$ e $\mathbf{B}^* = (\mathbf{V}^*)^2$. Assim, diante das Eqs. (85) e (86), obtém-se

$$\mathbf{C}^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{p}, t) \quad \text{e} \quad (87)$$

$$\mathbf{B}^*(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}(t)^T. \quad (88)$$

Agora, nota-se que

$$\dot{\chi}(\mathbf{p}, t) = (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t))_m \Rightarrow \dot{\chi}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{v}_m(\chi(\mathbf{p}, t), t). \quad (89)$$

Aplicando-se o gradiente em relação à $\mathbf{p}$ na Eq. (89) utilizando-se a Eq. (42) tem-se

$$\nabla_{\mathbf{p}} \dot{\chi}(\mathbf{p}, t) = (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v})(\nabla_{\mathbf{p}} \chi) \Rightarrow \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}_m \mathbf{F}. \quad (90)$$

Substituindo-se as Eqs. (78) e (81) em $\dot{\mathbf{F}}^* = \mathbf{L}_m^* \mathbf{F}^*$ tem-se

$$\dot{\mathbf{F}}^* = (\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^\top + \boldsymbol{\Omega})\mathbf{Q}\mathbf{F} \Rightarrow \dot{\mathbf{F}}^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{p}, t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{F}(\mathbf{p}, t). \quad (91)$$

Alternativamente, a Eq. (91) também seria obtido caso se fizesse a derivada temporal total da Eq. (81). O Quadro 1 resume as equações de transformação apresentadas neste item.

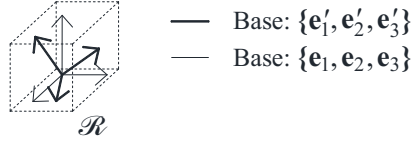
Quadro 1 – Mudanças em algumas grandezas devido a MCR da configuração atual.

Grandeza	MCR da config. atual
$\mathbf{p}$	$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}$
$\mathbf{x}$	$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t)$
$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$	$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{x} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{c}}(t)$
$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$	$\mathbf{a}^*(\mathbf{x}^*, t) = \ddot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{x} + 2\dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + \ddot{\mathbf{c}}(t)$
$\mathbf{F}(\mathbf{p}, t)$	$\mathbf{F}^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{F}(\mathbf{p}, t)$
$\mathbf{R}(\mathbf{p}, t)$	$\mathbf{R}^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{R}(\mathbf{p}, t)$
$\mathbf{U}(\mathbf{p}, t)$	$\mathbf{U}^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{p}, t)$
$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$	$\mathbf{V}^*(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}(t)^\top$
$\mathbf{C}(\mathbf{p}, t)$	$\mathbf{C}^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{p}, t)$
$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$	$\mathbf{B}^*(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}(t)^\top$
$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$	$\mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}(t)^\top + \boldsymbol{\Omega}(t)$
$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$	$\mathbf{D}^*(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}(t)^\top$
$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t)$	$\mathbf{W}^*(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}(t)^\top + \boldsymbol{\Omega}(t)$
$\mathbf{H}(\mathbf{p}, t)$	$\mathbf{H}^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{H}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{Q}(t) - \mathbf{I}$
$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{p}, t)$	$\dot{\mathbf{F}}^*(\mathbf{p}, t) = \dot{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{F}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{Q}(t) \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{p}, t)$

3.5 Mudança de base

As grandezas de um movimento/deformação de um corpo são calculadas em relação a um referencial fixo $\mathcal{R}$, como mostra a Figura 7b. Nesse caso, a base adotada por $\mathcal{R}$ é a canônica. No entanto, por vezes é necessário determinar as componentes de uma grandeza em outra base, em relação ao *mesmo* referencial $\mathcal{R}$. A Figura 11 mostra um esquema desse raciocínio.

Figura 11 – Mudança de base em um mesmo referencial.



Sejam w_i e w'_i as componentes de um dado $\mathbf{w}$ na base $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{e}'_i\}$, respectivamente. Além disso, sejam as componentes A_{ij} e A'_{ij} de um dado $\mathbf{A}$ na base $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{e}'_i\}$, respectivamente. Segundo Gonzalez e Stuart (2008) tem-se

$$\{\mathbf{w}'\} = [\mathbf{Q}]\{\mathbf{w}\} \quad \text{e} \quad (92)$$

$$[\mathbf{A}'] = [\mathbf{Q}][\mathbf{A}][\mathbf{Q}]^T, \quad (93)$$

em que $Q_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$. Tendo em vista que o traço e o determinante de $\mathbf{A}$ são definidos através da sua representação matricial, $\text{tr } \mathbf{A} = \text{tr } [\mathbf{A}]$ e $\det \mathbf{A} = \det [\mathbf{A}]$, as funções

$$I_1(\mathbf{A}) = \text{tr } \mathbf{A}, \quad (94)$$

$$I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \left[(\text{tr } \mathbf{A})^2 - \text{tr } (\mathbf{A}^2) \right] \quad \text{e} \quad (95)$$

$$I_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A} \quad (96)$$

possuem as seguintes propriedades: $I_1(\mathbf{A}) = I_1(\mathbf{A}')$, $I_2(\mathbf{A}) = I_2(\mathbf{A}')$ e $I_3(\mathbf{A}) = I_3(\mathbf{A}')$. Por esse motivo, elas são conhecidas como ‘invariantes principais’. Normalmente, essas funções são representadas pela seguinte notação: $I_1(\mathbf{A}) = \text{I}_A$, $I_2(\mathbf{A}) = \text{II}_A$ e $I_3(\mathbf{A}) = \text{III}_A$. Ademais, adota-se o símbolo $\mathcal{J}_A$ para designar a lista I_A , II_A e III_A .

3.6 Equações de equilíbrio

Uma região do interior de um contínuo é denominada parte ($\mathcal{P}$), isto é, $\mathcal{P}_0 \subset \Omega_0$ e $\mathcal{P}_t \subset \Omega_t$. A massa de uma parte $\mathcal{P}_t$ é dada por

$$m(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV, \quad (97)$$

em que $\rho(\mathbf{x}, t)$ é a massa específica do ponto localizado por $\mathbf{x}$ no instante t . A quantidade de movimento linear $\mathbf{q}_\ell$ de uma parte $\mathcal{P}_t$ é escrita como

$$\mathbf{q}_\ell(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{v} \rho dV. \quad (98)$$

A quantidade de movimento angular $\mathbf{q}_a$ em relação à origem de uma parte $\mathcal{P}_t$ é dada por

$$\mathbf{q}_a(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times \mathbf{v} \rho dV. \quad (99)$$

Utilizando-se as grandezas vetoriais definidas nas Eqs. (98) e (99), a 2ª Lei de Newton estabelece que, em relação a um referencial inercial, deve-se ter

$$\mathbf{f}_\ell(\mathcal{P}_t) = \dot{\mathbf{q}}_\ell(\mathcal{P}_t) \quad \text{e} \quad (100)$$

$$\mathbf{m}_a(\mathcal{P}_t) = \dot{\mathbf{q}}_a(\mathcal{P}_t), \quad (101)$$

sendo $\mathbf{f}_\ell(\mathcal{P}_t)$ o vetor força resultante que atua sobre o corpo em Ω_t e $\mathbf{m}_a(\mathcal{P}_t)$ o vetor momento da força $\mathbf{f}_\ell(\mathcal{P}_t)$ em relação à origem. Usualmente a Eq. (100) é chamada de Equação de Equilíbrio da Quantidade de Movimento Linear e a Eq. (101) de Equação de Equilíbrio da Quantidade de Movimento Angular. Substituindo-se a Eq. (98) na Eq. (100) obtém-se

$$\mathbf{f}_\ell(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho \dot{\mathbf{v}} dV, \quad (102)$$

e substituindo-se a Eq. (99) na Eq. (101) tem-se

$$\mathbf{m}_a(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{v}} dV, \quad (103)$$

Consideram-se dois tipos de força atuando sobre uma parte: a força de superfície (força de contato) e a força de atração gravitacional exercida pela Terra (força de corpo). A força de contato é representada por um campo espacial de força por unidade de área $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ e a força de corpo por um campo espacial de força por unidade de volume $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$. Incluindo-se esses dois campos nas Eqs. (102) e (103), tem-se

$$\mathbf{f}_\ell(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho \dot{\mathbf{v}} dV \Rightarrow \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\mathcal{P}_t} \rho \dot{\mathbf{v}} dV \quad \text{e} \quad (104)$$

$$\mathbf{m}_a(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{v}} dV \Rightarrow \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{v}} dV. \quad (105)$$

Ao par $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$ dá-se o nome de *sistema de forças*.

3.7 Tensor de tensão de Cauchy

Seja $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ o campo espacial que fornece o vetor normal unitário no ponto em $\partial\mathcal{P}_t$ localizado por $\mathbf{x}$ no instante t , apontando para fora de $\mathcal{P}_t$. Segundo a hipótese de Cauchy, o campo $\mathbf{s}$ em um ponto do contorno depende unicamente de $\mathbf{n}$, $\mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(\mathbf{n})$. A seguir, apresenta-se o Teorema de Cauchy.

- Teorema de Cauchy -

Seja $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$ um sistema de forças de um corpo. Então, admitindo-se a hipótese de Cauchy, uma condição necessária e suficiente para que as equações de equilíbrio das Eqs. (104) e (105) sejam satisfeitas é a existência de um campo tensorial espacial $\mathbf{T}$, chamado de tensor de tensão de Cauchy, tal que

$$\begin{cases} \mathbf{s}(\mathbf{n}) = \mathbf{T} \mathbf{n} \\ \text{div } \mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \end{cases} \quad (106)$$

que é equivalente à Eq. (104). Além disso, dado a Eq. (106), tem-se que

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T, \quad (107)$$

que é equivalente à Eq. (105).

3.8 Par tensão-deformação energeticamente consistente

Desenvolvendo-se $\int_{\partial \mathcal{P}_t} [\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] dA$ tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dA &\stackrel{(I)}{=} \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{T} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dA \stackrel{(II)}{=} \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{T}^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \stackrel{(III)}{=} \int_{\mathcal{P}_t} \text{div}(\mathbf{T} \mathbf{v}) dV \stackrel{(IV)}{=} \\ &\stackrel{(IV)}{=} \int_{\mathcal{P}_t} (\mathbf{T} : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T}) dV \stackrel{(V)}{=} \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} : \mathbf{L} dV + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{v} \cdot (\rho \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{b}) dV \stackrel{(VI)}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{(VI)}{\Rightarrow} \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dA = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} : \mathbf{D} dV + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{v} \cdot \rho \dot{\mathbf{v}} dV - \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV, \end{aligned} \quad (108)$$

sendo que em (I) foi utilizado a Eq. (106)₁, em (II) a Eq. (32), em (III) o Teorema da Divergência, em (IV) a Eq. (43), em (V) a Eq. (106)₂ e em (VI) as Eqs. (37) e (38) na primeira integral. Observa-se que o cálculo de $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \rho dV$ fornece

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \rho dV &\stackrel{(I)}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \rho + \mathbf{v} \cdot (\dot{\rho} \mathbf{v} + \rho \dot{\mathbf{v}}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rho) \text{div} \mathbf{v}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}_t} (2 \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \rho + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} (\dot{\rho} + \rho \text{div} \mathbf{v})) dV \stackrel{(II)}{=} \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{v} \cdot \rho \dot{\mathbf{v}} dV \Rightarrow \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{v} \cdot \rho \dot{\mathbf{v}} dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \rho dV, \end{aligned} \quad (109)$$

sendo que em (I) empregou-se o Teorema de Transporte de Reynolds e em (II) a Conservação da Massa. Substituindo-se a Eq. (109) na Eq. (108) encontra-se o resultado do próximo Teorema.

- Teorema da Potência Despendida em relação à configuração atual -

Para toda parte $\mathcal{P}_t$ tem-se

$$\int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} : \mathbf{D} dV + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \rho dV. \quad (110)$$

O termo

$$\mathcal{K} = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \rho dV \quad (111)$$

é chamado de energia cinética e a integral

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} : \mathbf{D} dV \quad (112)$$

é denominada potência das tensões. Agora, pretende-se escrever o Teorema da Potência Despendida e as equações de equilíbrio das Eqs. (106) e (107) em relação à configuração de referência. Inicialmente, sabe-se que a fórmula de Nanson é

$$\mathbf{n} dA = J \mathbf{F}^{-\top} \mathbf{m} dA_0, \quad (113)$$

sendo $\mathbf{m}$ o vetor normal unitário em $\partial \mathcal{P}_0$, na área dA_0 , que aponta para fora da parte $\mathcal{P}_0$.

Substituindo-se a Eq. (106)₁ em $\int_{\partial \mathcal{P}_t} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) dA$ tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{T} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dA &\stackrel{(I)}{=} \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{T} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \stackrel{(II)}{=} \int_{\partial \mathcal{P}_0} \mathbf{T}_m \dot{\chi} \cdot J \mathbf{F}^{-\top} \mathbf{m} dA_0 \stackrel{(III)}{=} \int_{\partial \mathcal{P}_0} \mathbf{T}_m J \mathbf{F}^{-\top} \mathbf{m} \cdot \dot{\chi} dA_0 \stackrel{(IV)}{=} \\ &= \int_{\partial \mathcal{P}_0} \mathbf{P} \mathbf{m} \cdot \dot{\chi} dA_0, \end{aligned} \quad (114)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (32), em (II) a Eq. (113), em (III) a Eq. (32) e em (IV) definiu-se

$$\mathbf{P}(\mathbf{p}, t) = J \mathbf{T}_m \mathbf{F}^{-\top}, \quad (115)$$

que é conhecido como 1º tensor de tensão de Piola-Kirchhoff. Para uso futuro, ainda se define

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}, \quad (116)$$

que é conhecido como 2º tensor de tensão de Piola-Kirchhoff. Agora, o termo $\int_{\mathcal{P}_t} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) d\mathcal{V}$ se torna

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} \stackrel{(I)}{=} \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{b}_m \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} J d\mathcal{V}_0 \stackrel{(II)}{=} \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} d\mathcal{V}_0, \quad (117)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (67) e em (II) definiu-se $\mathbf{b}_0 = J \mathbf{b}_m$. Percebe-se que a Conservação da Massa, além de valer para $t > t_0$, pode também ser admitida em um movimento partindo de t_0 até t ,

$$\begin{aligned} m(\mathcal{P}_{t_0}) = m(\mathcal{P}_t) &\stackrel{(I)}{\Rightarrow} \int_{\mathcal{P}_0} \rho_0(\mathbf{p}) d\mathcal{V}_0 = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathcal{V} \stackrel{(II)}{\Rightarrow} \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\rho_0(\mathbf{p})}{J} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathcal{V} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\rho_0(\mathbf{p})}{J} - \rho(\mathbf{x}, t) \right) d\mathcal{V} = 0 \stackrel{(III)}{\Rightarrow} \rho_0(\mathbf{p}) = J \rho(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (118)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (97), em (II) a Eq. (67) e em (III) o Teorema da Localização. O campo material ρ_0 é a massa específica do corpo em Ω_0 . Então, a energia cinética pode ser desenvolvida como

$$\int_{\mathcal{P}_t} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \rho d\mathcal{V} \stackrel{(I)}{=} \int_{\mathcal{P}_0} \frac{\dot{\boldsymbol{\chi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}}}{2} \frac{\rho_0}{J} J d\mathcal{V}_0 = \int_{\mathcal{P}_0} \frac{\dot{\boldsymbol{\chi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}}}{2} \rho_0 d\mathcal{V}_0, \quad (119)$$

sendo que em (I) empregou-se as Eqs. (67) e (118). A potência das tensões fica

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} : \mathbf{D} d\mathcal{V} &\stackrel{(I)}{=} \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} : (\mathbf{L} - \mathbf{W}) d\mathcal{V} \stackrel{(II)}{=} \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} : \mathbf{L} d\mathcal{V} \stackrel{(III)}{=} \int_{\mathcal{P}_t} \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{L}) d\mathcal{V} \stackrel{(IV)}{=} \int_{\mathcal{P}_0} \text{tr}(\mathbf{T}_m \mathbf{L}_m) J d\mathcal{V}_0 \stackrel{(V)}{=} \\ &\stackrel{(V)}{=} \int_{\mathcal{P}_0} \text{tr}(\mathbf{T}_m \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) J d\mathcal{V}_0 \stackrel{(VI)}{=} \int_{\mathcal{P}_0} \text{tr}(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}_m \dot{\mathbf{F}}) J d\mathcal{V}_0 \stackrel{(VII)}{=} \int_{\mathcal{P}_0} J \mathbf{T}_m \mathbf{F}^{-\top} : \dot{\mathbf{F}} d\mathcal{V}_0 \stackrel{(VIII)}{=} \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} d\mathcal{V}_0, \end{aligned} \quad (120)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (37), em (II) a Eq. (38), em (III) a Eq. (33), em (IV) a Eq. (67), em (V) a Eq. (90), em (VI) a Eq. (35), em (VII) a Eq. (33) e em (VIII) a Eq. (115). Substituindo-se as Eqs. (114), (117), (119) e (120) na Eq. (110) obtém-se o próximo Teorema.

- Teorema da Potência Despendida em relação à configuração de referência -

Para toda parte $\mathcal{P}_0$ tem-se

$$\int_{\partial\mathcal{P}_0} \mathbf{P}\mathbf{m} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} dA_0 + \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} dV_0 = \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV_0 + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_0} \frac{\dot{\boldsymbol{\chi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}}}{2} \rho_0 dV_0. \quad (121)$$

Com respeito à Eq. (106), pode-se proceder, a partir da substituição da Eq. (106)₁ na Eq. (104), da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{T}\mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho \dot{\mathbf{v}} dV \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \int_{\partial\mathcal{P}_0} \mathbf{T}_m J \mathbf{F}^{-\top} \mathbf{m} dA_0 + \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{b}_m J dV_0 = \int_{\mathcal{P}_0} \frac{\rho_0}{J} \ddot{\boldsymbol{\chi}} J dV_0 \stackrel{(II)}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{(II)}{\Rightarrow} \int_{\partial\mathcal{P}_0} \mathbf{P}\mathbf{m} dA_0 + \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{b}_0 dV_0 = \int_{\mathcal{P}_0} \rho_0 \ddot{\boldsymbol{\chi}} dV_0 \stackrel{(III)}{\Rightarrow} \int_{\mathcal{P}_0} (\text{Div } \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 - \rho_0 \ddot{\boldsymbol{\chi}}) dV_0 = \mathbf{0} \stackrel{(IV)}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{(IV)}{\Rightarrow} \text{Div } \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 - \rho_0 \ddot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (122)$$

sendo que em (I) utilizou-se as Eqs. (113) e (118). Em (II) foi empregado a Eq. (115), em (III) o Teorema da Divergência e em (IV) o Teorema da Localização. Além disso, da Eq. (115) conclui-se que

$$\mathbf{T}_m = J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^\top. \quad (123)$$

Substituindo-se a Eq. (123) na Eq. (107) tem-se

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{T}_m^\top \Rightarrow J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^\top = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{P}^\top \Rightarrow \mathbf{P} \mathbf{F}^\top = \mathbf{F} \mathbf{P}^\top. \quad (124)$$

Portanto, as Eqs. (122) e (124) representam as Eqs. (106) e (107) escritos na configuração de referência, respectivamente.

Quando o produto interno no integrando da potência das tensões for entre um tensor de tensão e a taxa de um tensor de deformação, diz-se que o tensor de tensão e o tensor de deformação formam um Par Energicamente Consistente (PEC). Na Eq. (121), o par é $\mathbf{P}$ e $\mathbf{F}$.

A seguir, determina-se como $\mathbf{T}$ e $\mathbf{P}$ são transformados devido a um MCR da configuração da configuração atual. Como $\mathbf{s}$ e $\mathbf{n}$ são campos espaciais, percebe-se da Figura 10 que no movimento χ^* esses campos vetoriais são identificados em relação à $\mathcal{R}$ por $\mathbf{s}^*(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{n}^*(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$, respectivamente. Substituindo-se essas expressões em $\mathbf{s}^* = \mathbf{T}^* \mathbf{n}^*$, tendo em vista a Eq. (106)₁, obtém-se

$$\mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}(t)^\top. \quad (125)$$

Utilizando-se as Eqs. (81) e (125) em $\mathbf{P}^* = J^* \mathbf{T}^* (\mathbf{F}^*)^{-\top}$, diante da Eq. (115), tem-se

$$\mathbf{P}^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{P}(\mathbf{p}, t). \quad (126)$$

Substituindo-se as Eqs. (81) e (126) em $\mathbf{S}^* = (\mathbf{F}^*)^{-1} \mathbf{P}^*$, diante da Eq. (116), tem-se

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} \mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{S}^* = \mathbf{S}. \quad (127)$$

3.9 Premissas constitutivas básicas

Apresenta-se a seguir uma breve exposição dos três princípios básicos que governam o comportamento mecânico dos materiais segundo Truesdell e Noll (2004), a saber:

- Princípio do Determinismo;
- Princípio da Ação Local e
- Princípio da Invariância da Resposta Material (PIRM).

Seja $\tau \in [0, \infty[$ uma variável temporal. Inicialmente, pressupõe-se que a posição final $\mathbf{x}$ de um ponto material, outrora localizado por $\mathbf{p}$, dependa do vetor posição de todos os pontos materiais desde o passado remoto até o presente, isto é, $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{q}, t - \tau)$, com $\mathbf{q} \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_0}$. Diante disso, apresenta-se o Princípio do Determinismo a seguir.

- *Princípio do Determinismo* -

O tensor de tensão de Cauchy $\mathbf{T}$, avaliado em $\mathbf{x}$ no instante t , é determinado pelo histórico do movimento (função χ) de todos os pontos materiais até o instante t . Matematicamente, tem-se:

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{T}}(\chi(\mathbf{q}, t - \tau)) \\ \mathbf{q} \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_0} \quad \text{e} \quad \tau \in [0, \infty[\end{cases} \quad (128)$$

Nota-se que $\hat{\mathbf{T}}$ é um funcional, uma vez que depende da função χ . O aspecto não local na Eq. (128) está no fato de que $\mathbf{q}$ não é fixo (ele se refere ao vetor posição inicial de cada ponto material do corpo) e o efeito de memória é indicado matematicamente no intervalo de τ . Além disso, percebe-se que $\hat{\mathbf{T}}$ não depende explicitamente do tempo porque $\mathbf{T}$ não pode depender da escolha da origem do tempo. Agora, o próximo princípio traz uma simplificação na Eq. (128).

- *Princípio da Ação Local* -

Valendo-se do Princípio do Determinismo, o histórico do movimento (função χ) de pontos materiais fora de uma vizinhança em torno do ponto indicado por $\mathbf{p}$ pode ser desconsiderado no cálculo de $\mathbf{T}$. Sendo $\mathcal{N}(\mathbf{p})$ uma vizinhança (região) definida em torno do ponto localizado por $\mathbf{p}$, matematicamente tem-se:

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{T}}(\chi(\mathbf{q}, t - \tau)) \\ \mathbf{q} \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}(\mathbf{p})} \quad \text{e} \quad \tau \in [0, \infty[\end{cases} \quad (129)$$

Ressalta-se, então, que no Princípio da Ação Local o vetor $\mathbf{q}$ permanece não fixo, porém limitado à localização de pontos materiais pertencentes à $\mathcal{N}(\mathbf{p})$.

Ao par $(\chi, \mathbf{T})$ dá-se o nome de *processo dinâmico*. Salienta-se que à cada par $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$ que obedece às Eqs. (104) e (105) existe um único par $(\chi, \mathbf{T})$ que satisfaz a Eq. (106), e vice-versa. A seguir, apresenta-se um conceito necessário para a correta explanação do PIRM.

- *Definição de Classe Constitutiva* -

Uma família de processos dinâmicos consistentes com as premissas constitutivas de um corpo é chamada de *classe constitutiva* ($\mathcal{C}$). Matematicamente:

$$\mathcal{C} = \{(\chi, \mathbf{T}) / \text{Os campos } \chi \text{ e } \mathbf{T} \text{ satisfazem as hipóteses constitutivas adotadas para o corpo}\}. \quad (130)$$

Além das restrições impostas em um processo dinâmico a fim de que ele pertença à determinada classe constitutiva, obriga-se agora que a classe constitutiva obedeça ao PIRM.

- *Princípio da Invariância da Resposta Material (PIRM)* -

Seja $(\chi, \mathbf{T}) \in \mathcal{C}$. Além disso, seja o processo dinâmico $(\chi^*, \mathbf{T}^*)$ obtido de $(\chi, \mathbf{T})$ através das Eqs. (73) e (125) com $\mathbf{Q}(t)$ e $\mathbf{c}(t)$ arbitrários (*a priori*, os funcionais $\hat{\mathbf{T}}$ e $\hat{\mathbf{T}}^*$ são supostos diferentes). Então, diz-se que a resposta de um material é invariante frente a um MCR da configuração atual se, e somente se, $(\chi^*, \mathbf{T}^*) \in \mathcal{C}$.

Nota-se que o conhecimento de um tensor de tensão determina o conhecimento de *qualquer* tensor de tensão. Diante disso, pode-se substituir $\mathbf{T}$ por qualquer outro tensor de tensão na Eq. (130) e na definição do PIRM. A fim de se aplicar essa ideia, propõe-se determinar se a seguinte equação constitutiva obedece ao PIRM,

$$\mathbf{P} = -\eta \mathbf{F}^{-\top} + \kappa (\mathbf{F} - \mathbf{F}^{-\top}) \quad \text{em que } \eta, \kappa \in \mathbb{R} \quad (\text{corpo elástico e homogêneo}). \quad (131)$$

Seja $\mathcal{C}_1$ a classe constitutiva formada pelos processos dinâmicos $(\chi, \mathbf{P})$ que satisfazem a Eq. (131). Aplicando-se um MCR na configuração atual, a Eq. (131) se torna

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^* &= -\eta (\mathbf{F}^*)^{-\top} + \kappa (\mathbf{F}^* - (\mathbf{F}^*)^{-\top}) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \mathbf{Q}\mathbf{P} = -\eta (\mathbf{Q}\mathbf{F})^{-\top} + \kappa (\mathbf{Q}\mathbf{F} - (\mathbf{Q}\mathbf{F})^{-\top}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{Q}\mathbf{P} = -\eta \mathbf{Q}\mathbf{F}^{-\top} + \kappa (\mathbf{Q}\mathbf{F} - \mathbf{Q}\mathbf{F}^{-\top}) \Rightarrow \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}\mathbf{P} = -\eta \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}\mathbf{F}^{-\top} + \kappa \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}(\mathbf{F} - \mathbf{F}^{-\top}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{P} = -\eta \mathbf{F}^{-\top} + \kappa (\mathbf{F} - \mathbf{F}^{-\top}), \end{aligned} \quad (132)$$

sendo que em (I) utilizou-se as Eqs. (81) e (126). Assim, a Eq. (132) mostra que $(\chi^*, \mathbf{P}^*) \in \mathcal{C}_1$ e, portanto, a Eq. (131) obedece ao PIRM.

Agora, alicerçando-se no Princípio da Ação Local, pode-se supor que apenas o histórico do vetor $\mathbf{p}$ influencia no cálculo de $\mathbf{x}$. Somando-se isso à eliminação do efeito de memória, obtém-se a função adotada para descrever a deformação de um contínuo no item 3.2, $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{p}, t)$. Aplicando-se essas duas simplificações na Eq. (129), tem-se

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{T}}(\chi(\mathbf{p}, t)) \\ \mathbf{p} \in \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_0} \end{cases}. \quad (133)$$

A seguir, define-se ponto material elástico.

- Definição de ponto material elástico -

Valendo-se da Eq. (133), o ponto material localizado por $\mathbf{p}$ é dito elástico se, e somente se, $\hat{\mathbf{T}}$ depender de $\mathbf{p}$ e de $\mathbf{F}(\mathbf{p}, t)$,

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}(\mathbf{p}, t), \mathbf{p}). \quad (134)$$

Um corpo é dito elástico se a Eq. (134) for verdadeira em todo ponto material. Assim, a classe constitutiva de um corpo elástico é a família de todos os processos dinâmicos que obedecem a Eq. (134). Neste trabalho, o corpo é considerado elástico e homogêneo. A próxima definição apresenta esse conceito matematicamente.

- Definição de corpo elástico homogêneo -

Dado um corpo elástico, diz-se que ele é homogêneo se, e somente se, ρ_0 e $\hat{\mathbf{T}}$ não dependerem de $\mathbf{p}$ explicitamente, ou seja

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}(\mathbf{p}, t)). \quad (135)$$

Agora, a partir da Eq. (135), pode-se encontrar uma restrição para a construção de $\hat{\mathbf{T}}$ de maneira que o PIRM seja atendido. Assim, seja $\mathcal{C}$ a classe constitutiva de todos os processos dinâmicos $(\chi, \mathbf{T})$ que obedecem a Eq. (135). De acordo com o PIRM, no movimento χ^* o funcional $\hat{\mathbf{T}}^*$ também deve seguir a hipótese da Eq. (135), isto é, $\hat{\mathbf{T}}^*$ deve ser função apenas de $\mathbf{F}^*$ para quaisquer $\mathbf{Q}(t)$ e $\mathbf{c}(t)$, a fim de que o corpo permaneça elástico e homogêneo após o MCR da configuração atual em relação à $\mathcal{R}$. Portanto, é necessário que $\mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*, t) = \hat{\mathbf{T}}^*(\mathbf{F}^*)$. Substituindo-se essa expressão e a Eq. (135) na Eq. (125) tem-se

$$\hat{\mathbf{T}}^*(\mathbf{F}^*) = \mathbf{Q}(t) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \mathbf{Q}(t)^\top \quad \forall \mathbf{Q}(t) \in \text{Orth}^+. \quad \mathbf{F} \text{ e } t \text{ são quaisquer, porém fixos} \quad (136)$$

Como a Eq. (136) deve ser satisfeita para qualquer $\mathbf{Q}(t)$, de acordo com Murdoch (2003), em um mesmo instante t deve-se ter

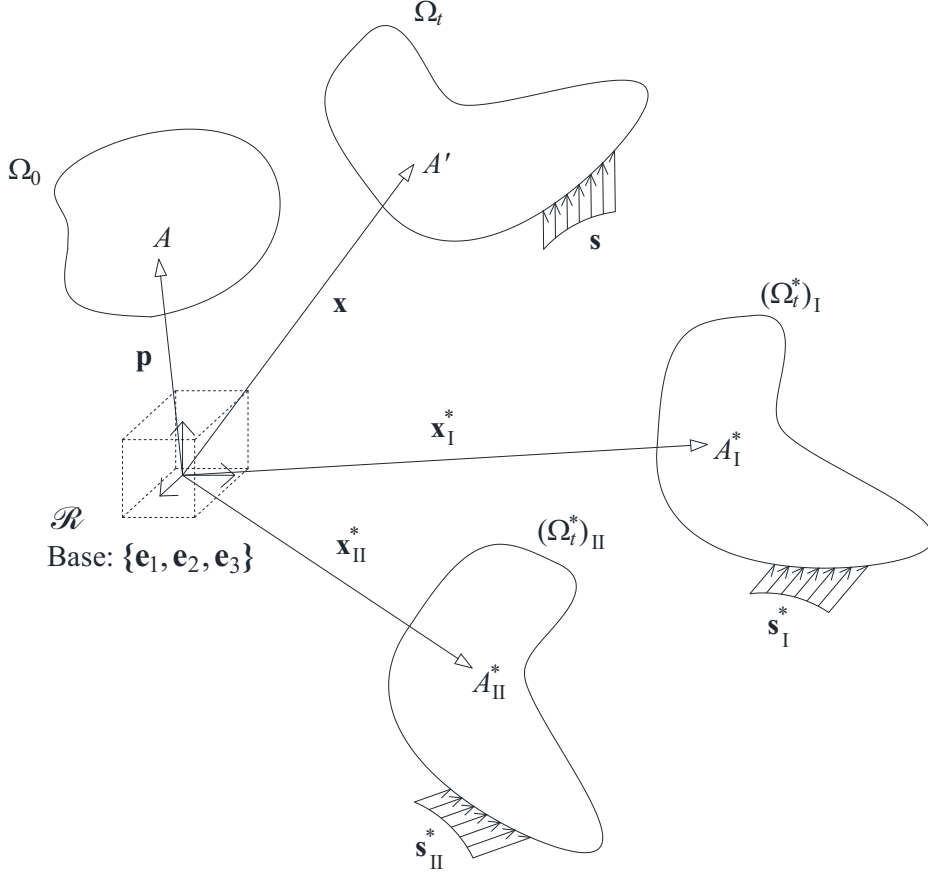
$$\hat{\mathbf{T}}^*(\mathbf{F}_I^*) = \mathbf{Q}_I \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \mathbf{Q}_I^\top \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \hat{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Q}_I \mathbf{F}) = \mathbf{Q}_I \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \mathbf{Q}_I^\top \quad \text{e} \quad (137)$$

$$\hat{\mathbf{T}}^*(\mathbf{F}_{II}^*) = \mathbf{Q}_{II} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \mathbf{Q}_{II}^\top \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \hat{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Q}_{II} \mathbf{F}) = \mathbf{Q}_{II} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \mathbf{Q}_{II}^\top, \quad (138)$$

sendo que no passo (I) das duas equações anteriores foi utilizado a Eq. (81). A Figura 12 mostra um esquema desse raciocínio, em que $\chi_I^*: \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{(\Omega')_I}$, com $\mathbf{x}_I^* = \chi_I^*(\mathbf{p}, t)$, e $\chi_{II}^*: \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\Omega_0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{(\Omega')_{II}}$, com $\mathbf{x}_{II}^* = \chi_{II}^*(\mathbf{p}, t)$, de maneira que

$$\chi_I^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{Q}_I(t) \chi(\mathbf{p}, t) + \mathbf{c}_I(t) \quad \text{e} \quad (139)$$

$$\chi_{II}^*(\mathbf{p}, t) = \mathbf{Q}_{II}(t) \chi(\mathbf{p}, t) + \mathbf{c}_{II}(t). \quad (140)$$

Figura 12 – Imposição de dois MCRs distintos.

Da Figura 12 nota-se que, no instante t , a configuração atual Ω_t é fixa e, então, o tensor de tensão de Cauchy $\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})$ na Eq. (137) é o mesmo do da Eq. (138). Assim, isolando-se $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})$ na Eq. (137) e na Eq. (138), e igualando-se as expressões, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_I^T \hat{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Q}_I \mathbf{F}) \mathbf{Q}_I &= \mathbf{Q}_{II}^T \hat{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Q}_{II} \mathbf{F}) \mathbf{Q}_{II} \Rightarrow \hat{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Q}_I \mathbf{F}) = \mathbf{Q}_I \mathbf{Q}_{II}^T \hat{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Q}_{II} \mathbf{F}) \mathbf{Q}_{II} \mathbf{Q}_I^T \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Q}_I \mathbf{Q}_{II}^T \mathbf{Q}_{II} \mathbf{F}) &= \mathbf{Q}_I \mathbf{Q}_{II}^T \hat{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Q}_{II} \mathbf{F}) \mathbf{Q}_{II} \mathbf{Q}_I^T \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \hat{\mathbf{T}}^*(\mathbf{Q} \mathbf{F}^*) = \mathbf{Q} \hat{\mathbf{T}}^*(\mathbf{F}^*) \mathbf{Q}^T, \end{aligned} \quad (141)$$

sendo que em (I) definiu-se $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_I \mathbf{Q}_{II}^T$ e $\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}_{II} \mathbf{F}$. Devido à arbitrariedade de $\mathbf{F}^*$ e $\hat{\mathbf{T}}^*$ na Eq. (141), conclui-se que, em especial, a Eq. (141) deve ser válida para um gradiente de deformação $\mathbf{F}$ e um funcional $\hat{\mathbf{T}}$. Assim, obtém-se o próximo caso particular do PIRM.

- *PIRM para corpos elásticos homogêneos* -

Valendo-se da Eq. (135), a condição necessária e suficiente para que o PIRM (enunciado neste item) seja atendido é que $\hat{\mathbf{T}}$ satisfaça:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^\top \quad \forall \mathbf{Q}(t) \in \text{Orth}^+. \quad \mathbf{F} \text{ e } t \text{ são quaisquer, porém fixos} \quad (142)$$

Substituindo-se a Eq. (135) na Eq. (115), pode-se definir

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) \quad (143)$$

com

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = J \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-\top}. \quad (144)$$

Como $\mathbf{Q}\mathbf{F} \in \text{Lin}^+$, pode-se substituir $\mathbf{F}$ por $\mathbf{Q}\mathbf{F}$ na Eq. (144),

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \det(\mathbf{Q}\mathbf{F}) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) (\mathbf{Q}\mathbf{F})^{-\top} \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = (\det \mathbf{F}) \mathbf{Q} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} \mathbf{F}^{-\top} \stackrel{(II)}{\Rightarrow} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \mathbf{Q} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}), \quad (145)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (142) e em (II) a Eq. (144). Assim, a Eq. (145) expressa a restrição na construção de $\hat{\mathbf{P}}$ devida ao PIRM.

3.10 Simetria material

Seja um $\mathbf{Q}(t)$ para o qual vale

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}\mathbf{Q}). \quad (146)$$

Se para $\mathbf{Q}$ fixo a Eq. (146) for satisfeita para todo $\mathbf{F} \in \text{Lin}^+$, então $\mathbf{Q}$ é chamado de transformação de simetria em $\mathbf{p}$. O conjunto dos tensores ortogonais próprios que satisfazem a Eq. (146) é chamado de grupo de simetria em $\mathbf{p}$, sendo denominado por $\mathcal{G}_{\mathbf{p}}$. Se $\mathcal{G}_{\mathbf{p}}$ for o conjunto

de todos os tensores ortogonais próprios, então o ponto localizado por $\mathbf{p}$ é dito isotrópico. Matematicamente:

- *Definição de ponto material isotrópico* -

O ponto material localizado por $\mathbf{p}$ é dito isotrópico se, e somente se, $\mathcal{G}_{\mathbf{p}} = \text{Orth}^+$.

Além disso, diz-se que um corpo é isotrópico se todos os pontos materiais forem isotrópicos. Agora, algumas importantes relações podem ser encontradas valendo-se do PIRM e do conceito de isotropia.

Nota-se que a Eq. (142) é válida para $\mathbf{Q}$ arbitrário, em especial no caso em que $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$, sendo $\mathbf{R}$ o tensor ortogonal próprio da decomposição polar de $\mathbf{F}$. Assim, uma consequência direta da Eq. (142) é

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U}) = \mathbf{R}^T \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \mathbf{R} \Rightarrow \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \mathbf{R} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{U}) \mathbf{R}^T. \quad (147)$$

Percebe-se se que a Eq. (146) pode ser reescrita como

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F} \mathbf{Q}^T) \quad (148)$$

uma vez que $\mathbf{Q}^T$ também é ortogonal. Como $\mathbf{Q} \mathbf{F} \in \text{Lin}^+$, pode-se substituir $\mathbf{F}$ na Eq. (148) por $\mathbf{Q} \mathbf{F}$

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q} \mathbf{F}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{Q}^T). \quad (149)$$

Substituindo-se a Eq. (149) na Eq. (142) tem-se

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \mathbf{Q}^T. \quad (150)$$

Salienta-se que a Eq. (150) satisfaz a isotropia e o PIRM. Assim, como $\mathbf{U} \in \text{Lin}^+$, pode-se usar a propriedade isotrópica de $\hat{\mathbf{T}}$ na Eq. (147),

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \mathbf{R} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{U}) \mathbf{R}^\top \Rightarrow \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^\top) \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{V}), \quad (151)$$

sendo que em (I) utilizou-se $\mathbf{V} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^\top$, relação obtida da Decomposição Polar de $\mathbf{F}$. Portanto, substituindo-se a Eq. (151) na Eq. (135) obtém-se

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{V}). \quad (152)$$

Seguindo-se Gurtin (1981), a expressão geral da Eq. (152) é (Teorema da Representação)

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{V}) = \varphi_0(\mathcal{J}_A) \mathbf{I} + \varphi_1(\mathcal{J}_A) \mathbf{V} + \varphi_2(\mathcal{J}_A) \mathbf{V}^2. \quad (153)$$

Agora, avaliando-se a Eq. (144) em $\mathbf{FQ}$ obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{FQ}) &= \det(\mathbf{FQ}) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{FQ}) (\mathbf{FQ})^{-\top} \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{FQ}) = (\det \mathbf{F}) \overbrace{(\det \mathbf{Q})}^{=1} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{F}^{-1})^\top \Rightarrow \\ &\Rightarrow \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{FQ}) = J \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-\top} \mathbf{Q} \stackrel{(II)}{\Rightarrow} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{FQ}) = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (154)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (146) e em (II) a Eq. (144). Portanto, a Eq. (154) expressa a restrição devida à isotropia na construção de $\hat{\mathbf{P}}$.

3.11 Hiperelasticidade

De acordo com Gurtin (1981), um corpo é hiperelástico se

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \frac{d\psi(\mathbf{F})}{d\mathbf{F}}, \quad (155)$$

em que $\psi(\mathbf{F})$ é a energia de deformação por unidade de volume da configuração de referência. Diante da Eq. (144), verifica-se que $\mathbf{P} \mathbf{F}^\top = \mathbf{F} \mathbf{P}^\top$. Substituindo-se a Eq. (143) nessa expressão tem-se

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^\top = \mathbf{F} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})^\top. \quad (156)$$

Considerando-se a Eq. (156) em $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ obtém-se

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I}) = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I})^\top. \quad (157)$$

Assim, $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I})$ é simétrico. Além disso, lembrando-se que $\mathbf{Q}$ é ortogonal, nota-se que

$$\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Q}^\top \dot{\mathbf{Q}} = -(\mathbf{Q}^\top \dot{\mathbf{Q}})^\top. \quad (158)$$

Portanto, $\mathbf{Q}^\top \dot{\mathbf{Q}}$ é antissimétrico. Percebe-se que a Eq. (145) avaliada em $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ fornece

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I}). \quad (159)$$

Agora, desenvolvendo-se $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) : \dot{\mathbf{Q}}$ tem-se

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) : \dot{\mathbf{Q}} \stackrel{(I)}{=} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I}) : \dot{\mathbf{Q}} \stackrel{(II)}{=} \text{tr}(\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I})^\top \mathbf{Q}^\top \dot{\mathbf{Q}}) \stackrel{(III)}{=} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I}) : \mathbf{Q}^\top \dot{\mathbf{Q}} \stackrel{(IV)}{\Rightarrow} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) : \dot{\mathbf{Q}} = 0, \quad (160)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (159), em (II) e (III) a Eq. (33) e em (IV) empregou-se a Eq. (38), tendo em vista as Eqs. (157) e (158). O resultado apresentado na Eq. (160) é fundamental para se obter algumas propriedades da função $\psi(\mathbf{F})$.

Supondo-se que $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$, a decomposição polar fornece $\mathbf{F} = \mathbf{R}$. Nessas condições, a variável independente na Eq. (155) pode ser vista como $\mathbf{R}$

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{R}) = \frac{d\psi(\mathbf{R})}{d\mathbf{R}}. \quad (161)$$

Ademais, através das Eqs. (55) e (60), $\dot{\psi}(\mathbf{R})$ pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt}\psi(\mathbf{R}) = \frac{d\psi(\mathbf{R})}{d\mathbf{R}} : \dot{\mathbf{R}} \stackrel{(I)}{=} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{R}) : \dot{\mathbf{R}} \Rightarrow \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{R}) : \dot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt}\psi(\mathbf{R}), \quad (162)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (161). Percebe-se que o termo $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{R}) : \dot{\mathbf{R}}$ é nulo, uma vez que é obtido da Eq. (160) fazendo-se $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$. Diante disso, sabendo-se que $\mathbf{R}$ no instante inicial t_0 é igual ao tensor identidade e em um instante t qualquer é igual à $\mathbf{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{R}) : \dot{\mathbf{R}} = 0 &\Rightarrow \int_{t_0}^t \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{R}) : \dot{\mathbf{R}} dt = 0 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \psi(\mathbf{R}(t)) dt = 0 \Rightarrow \psi(\mathbf{R}(t)) - \psi(\mathbf{R}(t_0)) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \psi(\mathbf{R}) = \psi(\mathbf{I}),\end{aligned}\quad (163)$$

sendo que em (I) empregou-se a Eq. (162). Como $\mathbf{R}$ na Eq. (163) representa uma rotação arbitrária, pode-se reescrever a equação anterior como

$$\psi(\mathbf{Q}) = \psi(\mathbf{I}). \quad (164)$$

Agora, de acordo com a Eq. (60), desenvolve-se $D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{QF})[\mathbf{A}]$ da seguinte forma

$$D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{QF})[\mathbf{A}] = D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{QF})[\mathbf{QA}] \stackrel{(I)}{\Rightarrow} D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{QF}) : \mathbf{A} = D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{QF}) : \mathbf{QA}, \quad (165)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (55). Substituindo-se a Eq. (155) na Eq. (145) tem-se

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{QF}) &= \mathbf{Q} D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{F}) \stackrel{(I)}{\Rightarrow} D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{QF}) : \mathbf{QA} = \mathbf{Q} D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{F}) : \mathbf{QA} \stackrel{(II)}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{(II)}{\Rightarrow} D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{QF}) : \mathbf{A} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{F})) : \mathbf{A} \stackrel{(III)}{\Rightarrow} D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{QF}) = D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{F}) \Rightarrow \int_{\mathbf{I}}^{\mathbf{F}} D_{\mathbf{F}}(\psi(\mathbf{QF}) - \psi(\mathbf{F})) d\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \psi(\mathbf{QF}) - \psi(\mathbf{F}) - (\psi(\mathbf{Q}) - \psi(\mathbf{I})) = 0 \stackrel{(IV)}{\Rightarrow} \psi(\mathbf{QF}) = \psi(\mathbf{F}),\end{aligned}\quad (166)$$

sendo que em (I) fez-se o produto interno em ambos os lados da equação por um tensor arbitrário $\mathbf{QA}$. Em (II), utilizou-se a Eq. (165) no membro esquerdo da equação e a Eq. (34) em seu membro direito. No passo (III) lançou-se mão da arbitrariedade de $\mathbf{A}$ e em (IV) empregou-se a Eq. (164). Observa-se que a Eq. (166) representa a restrição em ψ devido ao PIRM. Uma consequência clássica da Eq. (166) é obtida através da decomposição polar de $\mathbf{F}$ no membro esquerdo dessa equação,

$$\psi(\mathbf{QRU}) = \psi(\mathbf{F}) \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \psi(\mathbf{R}^T \mathbf{RU}) = \psi(\mathbf{F}) \Rightarrow \psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{U}), \quad (167)$$

sendo que em (I) utilizou-se o caso particular no qual $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$. Ressalta-se que, assim como $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ na Eq. (167) também é um tensor ortogonal próprio arbitrário.

Novamente, de acordo com a Eq. (60), desenvolve-se $D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{FQ})[\mathbf{A}]$ da seguinte forma

$$D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{FQ})[\mathbf{A}] = D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{FQ})[\mathbf{AQ}] \stackrel{(I)}{\Rightarrow} D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{FQ}) : \mathbf{A} = D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{FQ}) : \mathbf{AQ}, \quad (168)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (55). Substituindo-se a Eq. (155) na Eq. (154) tem-se

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{FQ}) &= D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{F})\mathbf{Q} \stackrel{(I)}{\Rightarrow} D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{FQ}) : \mathbf{AQ} = D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{F})\mathbf{Q} : \mathbf{AQ} \stackrel{(II)}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{(II)}{\Rightarrow} D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{FQ}) : \mathbf{A} = [D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{F})\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\top}] : \mathbf{A} \stackrel{(III)}{\Rightarrow} D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{FQ}) = D_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{F}) \Rightarrow \int_{\mathbf{I}}^{\mathbf{F}} D_{\mathbf{F}}[\psi(\mathbf{FQ}) - \psi(\mathbf{F})]d\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \psi(\mathbf{FQ}) - \psi(\mathbf{F}) - [\psi(\mathbf{Q}) - \psi(\mathbf{I})] = 0 \stackrel{(IV)}{\Rightarrow} \psi(\mathbf{FQ}) = \psi(\mathbf{F}), \end{aligned} \quad (169)$$

sendo que em (I) fez-se o produto escalar em ambos os lados da equação por um tensor arbitrário $\mathbf{AQ}$. Em (II), utilizou-se a Eq. (168) no membro esquerdo da equação e a Eq. (34) em seu membro direito. No passo (III) lançou-se mão da arbitrariedade de $\mathbf{A}$ e em (IV) empregou-se a Eq. (164). Observa-se que a Eq. (169) representa a restrição em ψ devida à isotropia.

Admitindo-se que um material atenda ao PIRM e que ele seja isotrópico, pode-se igualar a Eq. (166) com a Eq. (169),

$$\psi(\mathbf{FQ}) = \psi(\mathbf{QF}). \quad (170)$$

Substituindo-se $\mathbf{F}$ da Eq. (170) por $\mathbf{FQ}^{\top} \in \text{Lin}^+$ obtém-se

$$\psi(\mathbf{FQ}^{\top}\mathbf{Q}) = \psi(\mathbf{QFQ}^{\top}) \Rightarrow \psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{QFQ}^{\top}). \quad (171)$$

Seguindo-se Gurtin (1981), e diante da Eq. (171), pode-se expressar $\psi(\mathbf{U})$ como (Teorema da Representação)

$$\psi(\mathbf{U}) = \psi_1(\mathcal{J}_{\mathbf{U}}). \quad (172)$$

Um caso particular da Eq. (172) ocorre quando os invariantes são calculados a partir dos autovalores de $\mathbf{U}$. Nesse caso, a energia de deformação específica pode ser vista como uma função dos autovalores (λ_i) de $\mathbf{U}$. Assim, reescreve-se a Eq. (172) como

$$\psi(\mathbf{U}) = \psi_I(\mathcal{I}_U) = \psi_{II}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (173)$$

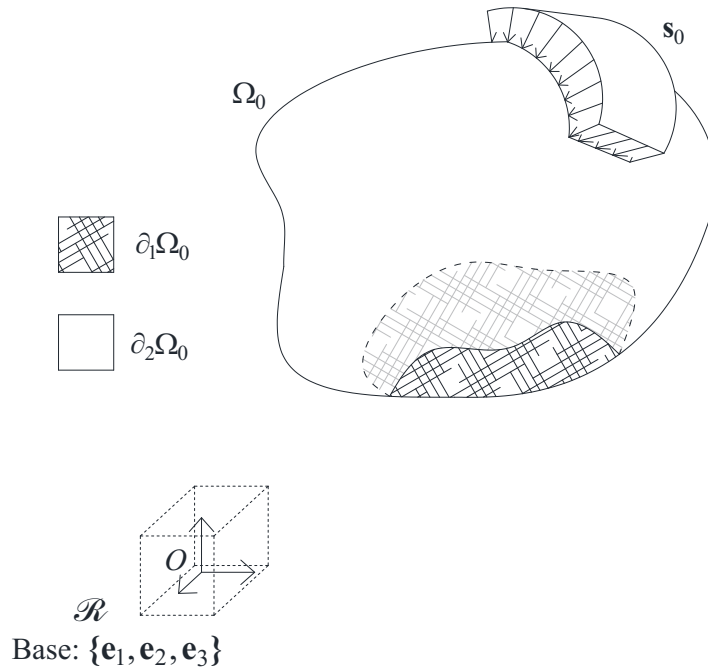
Lembrando-se que $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$, pode-se escrever $\psi(\mathbf{U}) = \bar{\psi}(\mathbf{C})$. Então, de maneira análoga à Eq. (173), infere-se que

$$\bar{\psi}(\mathbf{C}) = \psi_{III}(\mathcal{I}_C) = \psi_{IV}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2). \quad (174)$$

3.12 Princípio da energia potencial total estacionária

A Figura 13 mostra um esquema do problema estático para um corpo hiperelástico homogêneo. O carregamento⁸ $\mathbf{s}_0$ mostrado foi obtido através de uma transformação apropriada de $\mathbf{s}$.

Figura 13 – Problema estático.



As expressões $\partial_1\Omega_0$ e $\partial_2\Omega_0$ representam, respectivamente, o contorno com deslocamento prescrito e o contorno com carregamento prescrito, de maneira que $\partial_1\Omega_0 \cup \partial_2\Omega_0 = \partial\Omega_0$. Diante disso, dados $\boldsymbol{\chi} = \hat{\boldsymbol{\chi}}$ em $\partial_1\Omega_0$ e $\mathbf{Pm} = \mathbf{s}_0$ em $\partial_2\Omega_0$, o problema da Figura 13 se resume em encontrar $\boldsymbol{\chi}$ tal que as Eqs. (122) (com $\tilde{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0}$) e (124) sejam satisfeitas, sendo $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \frac{d\psi(\mathbf{F})}{d\mathbf{F}}$. A Eq. (122) é simplificada para

⁸ Neste trabalho, as forças externas são conservativas.

$$\text{Div } \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0} . \quad (175)$$

O problema anterior pode ser formulado de uma maneira alternativa. Seja Π um funcional que atribui a cada vetor $\boldsymbol{\chi}$ um escalar $\Pi(\boldsymbol{\chi})$, definido da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\chi}) &= \int_{\Omega_0} \psi(\mathbf{F}) dV_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} dV_0 - \int_{\partial_2 \Omega_0} \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{u} dA_0 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \\ \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \Pi(\boldsymbol{\chi}) &= \int_{\Omega_0} \psi(\nabla_{\mathbf{p}} \boldsymbol{\chi}) dV_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \cdot (\boldsymbol{\chi} - \mathbf{p}) dV_0 - \int_{\partial_2 \Omega_0} \mathbf{s}_0 \cdot (\boldsymbol{\chi} - \mathbf{p}) dA_0 . \end{aligned} \quad (176)$$

sendo que em (I) utilizou-se $\mathbf{u} = \boldsymbol{\chi} - \mathbf{p}$, em que $\mathbf{u}$ é o campo de deslocamentos. Se a Eq. (175) se verifica, então, o incremento de Π ($\delta\Pi$), obtido pela Eq. (53), é nulo,

$$\delta\Pi = 0 . \quad (177)$$

Portanto, a Eq. (177) é a forma alternativa de se expressar a condição de equilíbrio indicada na Eq. (175). Ela é a expressão matemática do Princípio da Energia Potencial Total Estacionária (PEPTE). Destaca-se que a energia de deformação por unidade de volume da configuração de referência $\psi(\mathbf{F})$ da Eq. (176), considerando uma mesma equação constitutiva, depende do PEC empregado.

3.13 Elasticidade linear

Supondo-se que a função $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})$ tenha representação em série de Taylor em torno de $\mathbf{I}$, tem-se

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) \stackrel{(I)}{=} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I} + \mathbf{H}) = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I}) + \frac{d}{d\alpha} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{H}) \Big|_{\alpha=0} + \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{H}), \quad (178)$$

sendo em (I) utilizou-se a Eq. (82). O termo $\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{H})$ representa a soma restante da série, que se aproxima de $\mathbf{0}$ mais rápido do que $\mathbf{H}$. Quando não há deslocamentos ($\mathbf{H} = \mathbf{0}$), a configuração atual se torna a própria configuração de referência. Da Eq. (82) conclui-se que essa situação ocorre quando $\mathbf{F} = \mathbf{I}$. Assim, como mencionado no item 3.2, o corpo na configuração de referência está em um estado livre de tensões, ou seja, $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$. Diante disso, simplifica-se a Eq. (178),

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \left. \frac{d}{d\alpha} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{H}) \right|_{\alpha=0} + \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{H}). \quad (179)$$

Como $\left. \frac{d}{d\alpha} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{H}) \right|_{\alpha=0}$ é uma função (linear) em $\mathbf{H}$, define-se

$$\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{H}) = \left. \frac{d}{d\alpha} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{H}) \right|_{\alpha=0}. \quad (180)$$

Substituindo-se a Eq. (180) na Eq. (179) tem-se

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{H}) + \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{H}). \quad (181)$$

Prova-se que a imagem da função $\hat{\mathbf{C}}$ é o conjunto Sym. Além disso, sabe-se que

$$\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{H}) = \hat{\mathbf{C}}(\text{sym } \mathbf{H}) = \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{E}), \quad (182)$$

em que se definiu

$$\mathbf{E} = \text{sym } \mathbf{H}, \quad (183)$$

usualmente denominado tensor de deformações infinitesimais. A demonstração da Eq. (182) pode ser encontrada na página 195 de Gurtin (1981). Assim, $\hat{\mathbf{C}}$ é uma função linear que atribui a cada tensor $\mathbf{E} \in \text{Sym}$ um outro tensor $\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{E}) \in \text{Sym}$. Substituindo-se a Eq. (182) na Eq. (181) tem-se

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{E}) + \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{H}). \quad (184)$$

Agora, a Teoria da Elasticidade Linear é introduzida. Sua premissa fundamental é supor $\mathbf{H}$ próximo de $\mathbf{0}$. Admitindo-se isso, e lembrando-se da Eq. (143), pode-se desprezar $\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{H})$ na Eq. (184) para se obter

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{E}) \Rightarrow \mathbf{P} = \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{E}). \quad (185)$$

Como a imagem de $\hat{\mathbf{C}}$ é igual a Sym, da Eq. (185) conclui-se que $\mathbf{P}$ na Teoria da Elasticidade Linear é simétrico. Ademais, lembrando-se que $\hat{\mathbf{C}}$ é linear, o Teorema da Representação permite escrever

$$\mathbf{P} = 2\mu \mathbf{E} + \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I}. \quad (186)$$

Valendo-se das Eqs. (83), (126) e (183), seguindo-se a metodologia apresentada na obtenção da Eq. (132), conclui-se que a Eq. (186) não obedece ao PIRM. Esse fato é destacado em Smith (1993) e em Irgens (2008). Salienta-se que quando $\mathbf{Q} \cong \mathbf{I}$ (implicando em um MCR pequeno) tem-se que a Eq. (186) tende a satisfazer o PIRM.

4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

4.1 Equação constitutiva proposta e o PIRM

O uso direto da lei de Hooke para grandes deformações, considerando o tensor de tensão de Cauchy $\mathbf{T}$ como uma função do tensor gradiente de deslocamento $\mathbf{H}$, não conduz a uma equação constitutiva que segue o PIRM, como demonstrado por Fosdick e Serrin (1979). Além disso, Ji *et al.* (2013) alertam sobre os erros que ocorrem quando se escolhe taxas de tensão não consistentes com o PIRM. Os autores destacam também a importância de se utilizar um PEC ao mostrarem os erros provenientes do emprego de um par não energeticamente conjugado em análises de flambagem tridimensionais. Diante disso, a verificação do PIRM pela Eq. (13) se faz necessária.

Não obstante, como aponta Brannon (2018), o fato de uma equação constitutiva atender ao PIRM, mesmo quando ela é construída utilizando-se um PEC, não implica em afirmar que ela é adequada para um contexto de grandes deformações. Um exemplo clássico disso, como apontam Sautter *et al.* (2022), é o modelo de St. Venant-Kirchhoff (no qual o par é $\mathbf{S}$ e o tensor de deformação de Green). Pela Figura 3a percebe-se que a deformação de Green não segue a Eq. (2)₄. Do ponto de vista prático, segundo Brannon (2018), a comparação de análises numéricas com as experimentais mostrará se o modelo constitutivo adotado é apropriado ou não.

Uma indagação natural a partir da discussão anterior é: o uso de um PEC em uma equação constitutiva já garante o cumprimento do PIRM? Valendo-se das Eqs. (81) e (126), a utilização do PEC ($\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$) na lei de Hooke mostra que a resposta para esse questionamento é negativa.

Agora, diante da Eq. (85), a partir da Eq. (11) se escreve

$$\left({}^{\text{hs}}\mathbf{E}^{(\beta)} \right)^* = {}^{\text{hs}}\mathbf{E}^{(\beta)} \Rightarrow \left({}^{\text{hs}}E_{ij}^{(\beta)} \right)^* = {}^{\text{hs}}E_{ij}^{(\beta)}. \quad (187)$$

Sejam ${}^f\mathbf{E} = f(\lambda_i)(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i)$ e ${}^g\mathbf{E} = g(\lambda_i)(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i)$ tensores Lagrangianos arbitrários e ${}^f\mathbf{T} = {}^f\bar{T}_{ij}(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j)$ e ${}^g\mathbf{T} = {}^g\bar{T}_{ij}(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j)$ seus tensores de tensão energeticamente conjugados, respectivamente. A barra superior ($\bar{}$) indica as componentes do correspondente tensor escrito

na base $\{\mathbf{a}_i\}$. Segundo Farahani e Naghdabadi (2003), para estiramentos principais distintos, tem-se

$$\begin{cases} {}^f\bar{T}_{ii} = \frac{g'(\lambda_i)}{f'(\lambda_i)} {}^g\bar{T}_{ii} & i = 1, 2, 3 \\ {}^f\bar{T}_{ij} = \frac{g(\lambda_i) - g(\lambda_j)}{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)} {}^g\bar{T}_{ij} & i \neq j \end{cases} \quad \text{(sem soma nos índices repetidos)} \quad (188)$$

Substituindo-se na Eq. (188) a deformação de Green, $f(\lambda_i) = (\lambda_i^2 - 1)/2$, e a Eq. (11)₁, $g(\lambda_i) = (1/\beta) \sinh[(\beta/\gamma)(\lambda_i^\gamma - 1)]$, obtém-se

$$\begin{cases} \bar{S}_{ii} = \lambda_i^{\gamma-2} \cosh\left[\frac{\beta}{\gamma}(\lambda_i^\gamma - 1)\right] {}^{\text{hs}}\bar{T}_{ii}^{(\beta)} & i = 1, 2, 3 \\ \bar{S}_{ij} = \frac{2}{\beta} \frac{\sinh\left[\frac{\beta}{\gamma}(\lambda_i^\gamma - 1)\right] - \sinh\left[\frac{\beta}{\gamma}(\lambda_j^\gamma - 1)\right]}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} {}^{\text{hs}}\bar{T}_{ij}^{(\beta)} & i \neq j \end{cases} \quad \text{(sem soma)} \quad (189)$$

Para uso futuro, se g for a Eq. (11)₂, $g(\lambda_i) = (\lambda_i^\beta - \lambda_i^{-\beta})/2\beta$, obtém-se

$$\begin{cases} \bar{S}_{ii} = \frac{\lambda_i^{\beta-1} + \lambda_i^{-\beta-1}}{2\lambda_i} {}^{\text{hs}}\bar{T}_{ii}^{(\beta)} & i = 1, 2, 3 \\ \bar{S}_{ij} = \frac{\lambda_i^\beta - \lambda_i^{-\beta} - \lambda_j^\beta + \lambda_j^{-\beta}}{\beta(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)} {}^{\text{hs}}\bar{T}_{ij}^{(\beta)} & i \neq j \end{cases} \quad \text{(sem soma)} \quad (190)$$

Agora, diante da Eq. (127) conclui-se que $\bar{S}_{ij}^* = \bar{S}_{ij}$. Substituindo-se essa equação tanto na Eq. (189) quanto na Eq. (190) tem-se

$$\left({}^{\text{hs}}\bar{T}_{ij}^{(\beta)}\right)^* = {}^{\text{hs}}\bar{T}_{ij}^{(\beta)} \Rightarrow \left({}^{\text{hs}}T_{ij}^{(\beta)}\right)^* = {}^{\text{hs}}T_{ij}^{(\beta)}, \quad (191)$$

haja vista que o estiramento (grandeza escalar) é inalterado após um MCR da configuração atual. Por fim, substituindo-se as Eqs. (187) e (191) em $({}^{\text{hs}}T_{ij}^{(\beta)})^* = 2\mu ({}^{\text{hs}}E_{ij}^{(\beta)})^* + \lambda \delta_{ij} \text{tr} ({}^{\text{hs}}\mathbf{E}^{(\beta)})^*$, tendo em vista a Eq. (13), conclui-se que

$${}^{\text{hs}}T_{ij}^{(\beta)} = 2\mu {}^{\text{hs}}E_{ij}^{(\beta)} + \lambda \delta_{ij} \text{tr} {}^{\text{hs}}\mathbf{E}^{(\beta)} \quad (192)$$

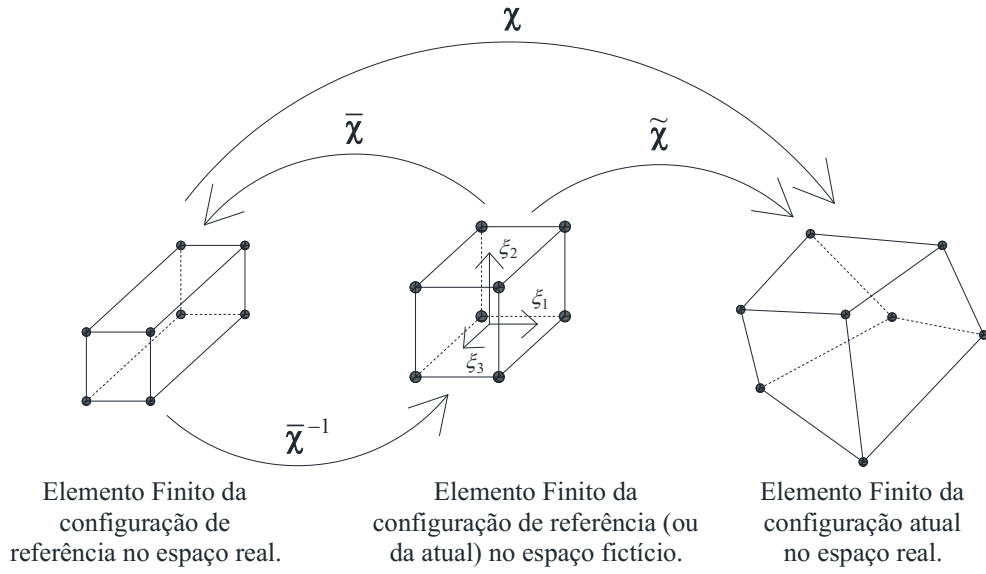
e, dessarte, a equação constitutiva proposta segue o PIRM (ver item 3.9).

4.2 Formulação posicional para um PEC arbitrário

Formulações que incorporam a posição de um nó como incógnita foram inicialmente concebidas em Shabana (1996), Shabana (1997) e Bonet *et al.* (2000). Apresentando algumas semelhanças com essas formulações, a FPMEF foi primeiramente idealizada em Coda (2003) e Coda e Greco (2004). Nessa formulação, as equações de equilíbrio são escritas a partir do PEPTTE considerando, em vez dos deslocamentos nodais, as posições dos nós (em relação a um sistema de coordenadas global) como incógnitas⁹. Destaca-se, então, que a FPMEF é Lagrangeana total e intrinsecamente não linear geométrica.

Alicerçando-se em Maciel (2008), Pascon (2012) e Siqueira (2019), os mapeamentos envolvidos na implementação computacional 3D são apresentados a seguir. Utiliza-se o elemento finito hexaédrico Lagrangeano de 8 nós neste trabalho. Como cada nó tem três graus de liberdade (posição cartesiana de um ponto no espaço), cada elemento finito possui 24 incógnitas. Seguindo-se o procedimento usual do Método dos Elementos Finitos, concebe-se um referencial fictício, de coordenadas naturais ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , e duas funções $\bar{\chi}$ e $\tilde{\chi}$, de maneira que $\chi = \tilde{\chi} \circ \bar{\chi}^{-1}$, como mostra a Figura 14.

⁹ Eventuais rotações nodais são mantidas como incógnitas.

Figura 14 – Mapeamentos para a implementação computacional.

Agora, em relação ao modelo discretizado no espaço real, define-se:

$\mathbf{p}$ – vetor que agrupa as posições nodais referentes à configuração de referência;

$\mathbf{x}$ – vetor que agrupa as posições nodais referentes à configuração atual;

$\mathbf{p}$ – vetor posição de um ponto do domínio de um elemento finito da configuração de referência;

$\mathbf{x}$ – vetor posição de um ponto do domínio de um elemento finito da configuração atual.

A ordem dos graus de liberdade nos vetores $\mathbf{p}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{x}$ é dada no Quadro 2.

Quadro 2 – Ordem dos graus de liberdade.

p e x		p e x
$\left\{ \begin{array}{l} \text{posição em } x \text{ do } 1^{\circ} \text{ nó} \\ \text{posição em } y \text{ do } 1^{\circ} \text{ nó} \\ \text{posição em } z \text{ do } 1^{\circ} \text{ nó} \\ \text{posição em } x \text{ do } 2^{\circ} \text{ nó} \\ \text{posição em } y \text{ do } 2^{\circ} \text{ nó} \\ \text{posição em } z \text{ do } 2^{\circ} \text{ nó} \\ \vdots \\ \text{posição em } x \text{ do } 8^{\circ} \text{ nó} \\ \text{posição em } y \text{ do } 8^{\circ} \text{ nó} \\ \text{posição em } z \text{ do } 8^{\circ} \text{ nó} \end{array} \right\}$	1ª componente	$\left\{ \begin{array}{l} \text{posição em } x \\ \text{posição em } y \\ \text{posição em } z \end{array} \right\}$
	2ª componente	
	3ª componente	
	4ª componente	
	5ª componente	
	6ª componente	
	$\vdots$	
	22ª componente	
	23ª componente	
	24ª componente	

De posse dessas definições, os vetores $\mathbf{p}$ e $\mathbf{x}$ são obtidos através de funções de forma¹⁰ $N_z(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ como ($z = 1, 2, 3, \dots, 8$ e $i = 1, 2$ e 3)

$$\mathcal{p}_i = \sum_{z=1}^8 N_z(\xi_1, \xi_2, \xi_3) p_{3(z-1)+i} \quad \text{e} \quad (193)$$

$$\mathcal{x}_i = \sum_{z=1}^8 N_z(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_{3(z-1)+i} . \quad (194)$$

Definindo-se $\xi = \{\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3\}^T$, pode-se entender $\mathbf{p}$ como uma função de ξ e $\mathbf{p}$, haja vista a Eq. (193). Analogamente, pela Eq. (194), $\mathbf{x}$ é visto como uma função de ξ e $\mathbf{x}$. Assim,

$$\mathbf{p} = \bar{\chi}(\xi, \mathbf{p}) \Rightarrow \xi = \bar{\chi}^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \quad \text{e} \quad (195)$$

$$\mathbf{x} = \tilde{\chi}(\xi, \mathbf{x}) . \quad (196)$$

Salienta-se que nas Eqs. (195) e (196) os vetores $\mathbf{p}$ e $\mathbf{x}$ são supostos conhecidos. No espaço real, sabe-se que $\mathbf{x}$ depende $\mathbf{p}$ através de χ , $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{p})$. Então, utilizando-se $\chi = \tilde{\chi} \circ \bar{\chi}^{-1}$, o gradiente de deformação no espaço real (gradiente de χ em relação a $\mathbf{p}$) é

¹⁰ O Apêndice A apresenta mais informações sobre essas relações.

$$\nabla_p \chi = \nabla_p (\tilde{\chi} \circ \bar{\chi}^{-1}) = \nabla_p \tilde{\chi}(\bar{\chi}^{-1}(p)) \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \nabla_p \chi = (\nabla_{\xi} \tilde{\chi})(\nabla_p \bar{\chi}^{-1}), \quad (197)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (42). No item 3.2 concluiu-se que $[\nabla_x \chi^{-1}(y, t)] = [\nabla_p \chi(q, t)]^{-1}$. Analogamente, da Eq. (197) infere-se que $[\nabla_p \bar{\chi}^{-1}(p, p)] = [\nabla_{\xi} \tilde{\chi}(\xi, p)]^{-1}$. Substituindo-se essa expressão na Eq. (197) tem-se

$$\nabla_p \chi = (\nabla_{\xi} \tilde{\chi})(\nabla_{\xi} \bar{\chi})^{-1}. \quad (198)$$

Por fim, convencionando-se

$$\mathbf{F} = \nabla_p \chi, \quad (199)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \nabla_{\xi} \bar{\chi} \quad \text{e} \quad (200)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \nabla_{\xi} \tilde{\chi}, \quad (201)$$

pode-se reescrever a Eq. (198) como

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}^{-1}. \quad (202)$$

Das Eqs. (193) e (194), respectivamente, escreve-se $\bar{F}_{ij}$ e $\tilde{F}_{ij}$ ($j = 1, 2$ e 3),

$$\bar{F}_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\sum_{z=1}^8 N_z p_{3(z-1)+i} \right) \Rightarrow \bar{F}_{ij} = \sum_{z=1}^8 \frac{\partial N_z}{\partial \xi_j} p_{3(z-1)+i} \quad \text{e} \quad (203)$$

$$\tilde{F}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\sum_{z=1}^8 N_z x_{3(z-1)+i} \right) \Rightarrow \tilde{F}_{ij} = \sum_{z=1}^8 \frac{\partial N_z}{\partial \xi_j} x_{3(z-1)+i}. \quad (204)$$

A partir da Eq. (204), para uso futuro se calcula ($a = 1, 2, 3, \dots, 24$)

$$\frac{\partial \tilde{F}_{ij}}{\partial x_a} = \frac{\partial}{\partial x_a} \left(\sum_{z=1}^8 \frac{\partial N_z}{\partial \xi_j} x_{3(z-1)+i} \right) \Rightarrow \frac{\partial \tilde{F}_{ij}}{\partial x_a} = \sum_{z=1}^8 \frac{\partial N_z}{\partial \xi_j} \delta_{[3(z-1)+i]a}, \quad (205)$$

em que

$$\delta_{[3(z-1)+i]a} = \begin{cases} 1 & \text{se } 3(z-1)+i = a \\ 0 & \text{se } 3(z-1)+i \neq a \end{cases} \quad (206)$$

Agora, utilizando-se a Eq. (176) para se escrever a energia potencial total Π do modelo discreto, tem-se

$$\Pi(\mathbf{x}) = \int_{V_0} \psi(\mathbf{F}) dV_0 - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \stackrel{(I)}{=} \int_{V_0} \psi(\mathbf{U}) dV_0 - \mathbf{f} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}), \quad (207)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (167) e $\mathbf{f}$ é o vetor de forças externas diretamente aplicadas nos nós da configuração corrente. Com vistas à aplicação do PEPTE, a FPMEF simplifica a Eq. (207) para

$$\bar{\Pi}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_0} \psi(\mathbf{U}) dV_0 - \mathbf{f} \cdot \mathbf{x} \quad \text{ou} \quad \bar{\Pi} = \int_{V_0} \psi dV_0 - f_a x_a, \quad (208)$$

uma vez que a equação de equilíbrio oriunda da Eq. (208) será igual à da Eq. (207). Aplicando-se o PEPTE na Eq. (208) tem-se ($\mathbf{T}$, $\mathbf{E}$ é um PEC arbitrário)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_a} = 0 &\Rightarrow \int_{V_0} \frac{\partial \psi}{\partial x_a} dV_0 - f_a = 0 \Rightarrow \int_{V_0} \frac{\partial \psi}{\partial E_{k\ell}} \frac{\partial E_{k\ell}}{\partial x_a} dV_0 - f_a = 0 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \int_{V_0} T_{k\ell} \frac{\partial E_{k\ell}}{\partial x_a} dV_0 - f_a = 0 \stackrel{(II)}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \int_{V_0} (2\mu E_{k\ell} + \lambda \delta_{k\ell} \text{tr} \mathbf{E}) \frac{\partial E_{k\ell}}{\partial x_a} dV_0 - f_a = 0, \end{aligned} \quad (209)$$

sendo que em (I) utilizou-se a definição de hiperelasticidade, $T_{k\ell} = \partial \psi / \partial E_{k\ell}$, e em (II) aplicou-se a GNLH, $T_{k\ell} = 2\mu E_{k\ell} + \lambda \delta_{k\ell} \text{tr} \mathbf{E}$. A expressão $\partial E_{k\ell} / \partial x_a$ da Eq. (209) é desenvolvida como

$$\frac{\partial E_{k\ell}}{\partial x_a} = \frac{\partial E_{k\ell}}{\partial F_{mn}} \frac{\partial F_{mn}}{\partial x_a} \stackrel{(I)}{=} \frac{\partial E_{k\ell}}{\partial F_{mn}} \frac{\partial (\tilde{F}_{mq} \bar{F}_{qn}^{-1})}{\partial x_a} \stackrel{(II)}{=} \frac{\partial E_{k\ell}}{\partial F_{mn}} \frac{\partial \tilde{F}_{mq}}{\partial x_a} \bar{F}_{qn}^{-1}, \quad (210)$$

em que no passo (I) utilizou-se a Eq. (202) e em (II) aplicou-se $\partial \bar{F}_{qn}^{-1} / \partial x_a = 0$, resultado obtido a partir da Eq. (195). A seguir, da Eq. (209) define-se

$$h_a(\mathbf{x}) = \int_{V_0} (2\mu E_{k\ell} + \lambda \delta_{k\ell} \text{tr} \mathbf{E}) \frac{\partial E_{k\ell}}{\partial x_a} dV_0 - f_a, \quad (211)$$

como a componente do vetor de resíduos $\mathbf{h}(\mathbf{x})$. Derivando-se a Eq. (211) em relação a x_b , com $b = 1, 2, 3, \dots, 24$, obtém-se a notação indicial da hessiana $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$,

$$\frac{\partial h_a}{\partial x_b} = \int_{V_0} \left(\left(2\mu \frac{\partial E_{k\ell}}{\partial x_b} + \lambda \delta_{k\ell} \left(\frac{\partial E_{11}}{\partial x_b} + \frac{\partial E_{22}}{\partial x_b} + \frac{\partial E_{33}}{\partial x_b} \right) \right) \frac{\partial E_{k\ell}}{\partial x_a} + T_{k\ell} \frac{\partial^2 E_{k\ell}}{\partial x_a \partial x_b} \right) dV_0. \quad (212)$$

Agora, sejam $\mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$ e $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$ o vetor de resíduos e a hessiana do modelo em relação apenas aos graus liberdade incógnitos, respectivamente. Uma vez que a solução do problema é a raiz de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, o método de Newton-Raphson foi empregado para resolvê-lo. Assim, linearizando-se $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ em torno de um vetor conhecido $\mathbf{x}_0$ obtém-se

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_0) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) \Delta \mathbf{x} \cong \mathbf{0} \Rightarrow \Delta \mathbf{x} \cong -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_0), \quad (213)$$

em que $\Delta \mathbf{x}$ é o vetor de posição incremental com respeito apenas aos graus de liberdade incógnitos e $\mathbf{0}$ é o vetor nulo. Para uma tolerância pré-definida tol , a convergência do método de Newton-Raphson é verificada por $\|\Delta \mathbf{x}\| / \|\mathbf{x}\| \leq tol$, sendo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$. A expressão $\partial^2 E_{k\ell} / \partial x_a \partial x_b$ da Eq. (213) é desenvolvida como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{k\ell}}{\partial x_a \partial x_b} &= \frac{\partial}{\partial x_b} \left(\frac{\partial E_{k\ell}}{\partial F_{mn}} \frac{\partial \tilde{F}_{mq}}{\partial x_a} \bar{F}_{qn}^{-1} \right) \stackrel{(I)}{=} \frac{\partial \tilde{F}_{mq}}{\partial x_a} \bar{F}_{qn}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_b} \left(\frac{\partial E_{k\ell}}{\partial F_{mn}} \right) = \frac{\partial \tilde{F}_{mq}}{\partial x_a} \bar{F}_{qn}^{-1} \frac{\partial}{\partial F_{op}} \left(\frac{\partial E_{k\ell}}{\partial F_{mn}} \right) \frac{\partial F_{op}}{\partial x_b} \stackrel{(II)}{=} \\ &= \frac{\partial \tilde{F}_{mq}}{\partial x_a} \bar{F}_{qn}^{-1} \frac{\partial^2 E_{k\ell}}{\partial F_{mn} \partial F_{op}} \frac{\partial (\tilde{F}_{or} \bar{F}_{rp}^{-1})}{\partial x_b} = \frac{\partial \tilde{F}_{mq}}{\partial x_a} \bar{F}_{qn}^{-1} \frac{\partial \tilde{F}_{or}}{\partial x_b} \bar{F}_{rp}^{-1} \frac{\partial^2 E_{k\ell}}{\partial F_{mn} \partial F_{op}}, \end{aligned} \quad (214)$$

sendo que em (I) utilizou-se o resultado $\partial^2 \tilde{F}_{mq} / \partial x_a \partial x_b = 0$, obtido a partir da Eq. (205). No passo (II) aplicou-se a Eq. (202). Assim, das Eqs. (210) e (214), conclui-se que a FPMEF fica completa se as derivadas $\partial E_{k\ell} / \partial F_{mn}$ e $\partial^2 E_{k\ell} / \partial F_{mn} \partial F_{op}$ da deformação escolhida $\mathbf{E}$ forem conhecidas. Um pseudocódigo não exaustivo da formulação apresentada é mostrado na Figura 15a, em que *incr*, *nincr*, *elem*, e *nelem* representam o incremento corrente, o número de

incrementos, o elemento corrente e o número de elementos, respectivamente. A função `compute_ElemHessIntForce(elem)`, responsável por calcular $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ e $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$ para *elem*, é mostrada na Figura 15b, em que *GP* e *nGP* representam o ponto de Gauss corrente e o número de pontos de Gauss, respectivamente.

Figura 15 – (a) Pseudocódigo do programa. (b) Pseudocódigo da função `compute_ElemHessIntForce(elem)`.

(a)	(b)
START	function <code>compute_ElemHessIntForce(elem)</code> {
read input	for each <i>GP</i> in <i>nGP</i> {
<i>j</i> = 0	compute $\tilde{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{F}}$ and $\mathbf{F}$
for each <i>incr</i> in <i>nincr</i> {	compute $\mathbf{E}$ and $\mathbf{T}$
do {	compute $d\tilde{\mathbf{F}}/d\mathbf{x}$
for each <i>elem</i> in <i>nelem</i> {	compute $d\mathbf{E}/d\mathbf{F}$
function <code>compute_ElemHessIntForce(elem)</code>	compute $d\mathbf{E}/d\mathbf{x}$
assemble $\mathbf{h}(\mathbf{x}_j)$ and $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}_j)$ to model	compute $\mathbf{h}(\mathbf{x}_j)$
}	compute $d^2\mathbf{E}/d\mathbf{F}^2$
$\Delta \mathbf{x}_j = -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}_j)^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_j)$	compute $d^2\mathbf{E}/d\mathbf{F}d\mathbf{x}$
$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \Delta \mathbf{x}_j$	compute $d^2\mathbf{E}/d\mathbf{x}^2$
$rnorm = \ \Delta \mathbf{x}_j\ / \ \mathbf{x}_{j+1}\ $	compute $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}_j)$
<i>j</i> = <i>j</i> + 1	}
} while (<i>rnorm</i> > <i>tol</i>)	}
}	
END	

4.3 Derivadas do tensor de deformação SHG em relação ao gradiente de deformação

Inicialmente, apresenta-se um roteiro para o cálculo de $\mathbf{P}$ a partir de ${}^{\text{hs}}\mathbf{T}^{(\beta)}$:

- Aplica-se a Eq. (192);
- Determina-se as componentes de ${}^{\text{hs}}\mathbf{T}^{(\beta)}$ nas direções principais, $[{}^{\text{hs}}\bar{\mathbf{T}}^{(\beta)}] = [\mathbf{U}\mathbf{Q}]^T [{}^{\text{hs}}\mathbf{T}^{(\beta)}] [\mathbf{U}\mathbf{Q}]$, em que $[\mathbf{U}\mathbf{Q}]$ é a matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores normalizados de $\mathbf{U}$;
- Aplica-se a Eq. (189) ou a Eq. (190);
- Determina-se as componentes de $\mathbf{S}$ nas direções globais, $[\mathbf{S}] = [\mathbf{U}\mathbf{Q}] [\bar{\mathbf{S}}] [\mathbf{U}\mathbf{Q}]^T$;
- A partir da Eq. (116) aplica-se $[\mathbf{P}] = [\mathbf{F}] [\mathbf{S}]$. A tensão de Cauchy opcionalmente é obtida pela Eq. (123).

A seguir, determinam-se as expressões indiciais de $\partial^{\text{hs}} \mathbf{E}^{(\beta)} / \partial \mathbf{F}$ e $\partial^2 \text{hs} \mathbf{E}^{(\beta)} / \partial \mathbf{F}^2$ na base canônica do sistema de coordenadas cartesiano (direções globais) em vez de na base formada pelos autovetores de $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$. Isso evita mudanças de base em tensores de quarta e sexta ordem no código computacional. A metodologia construída é simples e constitui uma contribuição significativa deste trabalho. As expressões $\partial^{\text{hs}} \mathbf{E}^{(\beta)} / \partial \mathbf{F}$ e $\partial^2 \text{hs} \mathbf{E}^{(\beta)} / \partial \mathbf{F}^2$ desenvolvidas aqui não fazem uso explícito de $\partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{F}$ (veja Wheeler e Casey (2011)), e consequentemente nem de $\partial^2 \mathbf{U} / \partial \mathbf{F}^2$.

Inicialmente, seja $\mathbf{Z} = e^{\varphi \mathbf{X}}$ ($\varphi \in \mathbb{R}$). Aplicando-se a Eq. (53) em $\mathbf{Z}$ tem-se

$$\begin{aligned}
 D_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}(\mathbf{X})[\mathbf{A}] &= \left. \frac{d \mathbf{Z}(\mathbf{X} + \alpha \mathbf{A})}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d}{d\alpha} e^{\varphi(\mathbf{X} + \alpha \mathbf{A})} \right|_{\alpha=0} = \varphi \mathbf{A} e^{\varphi(\mathbf{X} + \alpha \mathbf{A})} \Big|_{\alpha=0} = \varphi e^{\varphi \mathbf{X}} \mathbf{A} = \mathbf{I} : \varphi e^{\varphi \mathbf{X}} \mathbf{A} = \\
 &\stackrel{\text{(II)}}{=} \delta_{kx} \delta_{\ell n} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) : \left(\varphi (e^{\varphi \mathbf{X}})_{xm} (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_m) A_{mn} (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) \right) = \\
 &\stackrel{\text{(III)}}{=} \varphi (e^{\varphi \mathbf{X}})_{xm} A_{mn} \delta_{kx} \delta_{\ell n} ((\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell) \otimes (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_n)) : ((\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_m) (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n)) = \\
 &\stackrel{\text{(IV)}}{=} \varphi (e^{\varphi \mathbf{X}})_{xm} A_{mn} \delta_{kx} \delta_{\ell n} ((\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_n) : ((\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_m) (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n))) (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell) = \\
 &\stackrel{\text{(V)}}{=} \varphi (e^{\varphi \mathbf{X}})_{xm} A_{mn} \delta_{kx} \delta_{\ell n} (((\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_x) (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_n)) : (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n)) (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell) = \\
 &\stackrel{\text{(VI)}}{=} \varphi (e^{\varphi \mathbf{X}})_{km} A_{mn} \delta_{\ell n} ((\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) : (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n)) (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell) = \\
 &\stackrel{\text{(VII)}}{=} \varphi (e^{\varphi \mathbf{X}})_{km} \delta_{\ell n} ((\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell) \otimes (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n)) : A_{mn} (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) = \\
 &\stackrel{\text{(VIII)}}{=} \varphi (e^{\varphi \mathbf{X}})_{km} \delta_{\ell n} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) : A_{mn} (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow D_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}(\mathbf{X})[\mathbf{A}] = \varphi (e^{\varphi \mathbf{X}})_{km} \delta_{\ell n} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) : \mathbf{A}, \tag{215}
 \end{aligned}$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (46)₁, em (II) a Eq. (47)₁, em (III) a Eq. (45)₁, em (IV) a Eq. (44), em (V) a Eq. (34)₁, em (VI) a Eq. (45)₂, em (VII) a Eq. (44) e em (VIII) a Eq. (45)₁. Da Eq. (56), conclui-se a partir da Eq. (215) que

$$\frac{\partial Z_{k\ell}}{\partial X_{mn}} = \varphi (e^{\varphi \mathbf{X}})_{km} \delta_{\ell n}. \tag{216}$$

A seguir, como $\mathbf{U} = \ln(\sqrt{\mathbf{F}^\top \mathbf{F}})$, define-se $\mathbf{K}(\mathbf{F}) = \ln(\sqrt{\mathbf{F}^\top \mathbf{F}})$. Aplicando-se a Eq. (53) em $\mathbf{K}$, tem-se

$$\begin{aligned} D\mathbf{K}(\mathbf{F})[\mathbf{A}] &= \left. \frac{d\mathbf{K}(\mathbf{F} + \alpha\mathbf{A})}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d}{d\alpha} \ln \sqrt{(\mathbf{F} + \alpha\mathbf{A})^\top (\mathbf{F} + \alpha\mathbf{A})} \right|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^\top \mathbf{F})^{-1} (\mathbf{F}^\top \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{F}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow D\mathbf{K}(\mathbf{F})[\mathbf{A}] = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-\top} \mathbf{A}^\top \mathbf{F}). \end{aligned} \quad (217)$$

Agora, tendo em vista que $\mathbf{F}$ é um tensor material-espacial (*two-point tensor*), é instrutivo adotar a abordagem da Figura 7a para escrevê-lo. Além disso, essa escolha evidencia que não há operações de produto escalar/vetorial entre $\mathbf{e}_i$ e $\mathbf{d}_i$ nos cálculos subsequentes (elas normalmente são evitadas). Portanto, de acordo com Gurtin *et al.* (2010), tem-se

$$\mathbf{F} = F_{ij}(\mathbf{d}_i \otimes \mathbf{e}_j), \quad \mathbf{F}^{-1} = F_{ij}^{-1}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{d}_j), \quad \mathbf{F}^\top = F_{ij}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{d}_i) \quad \text{e} \quad \mathbf{F}^{-\top} = F_{ij}^{-1}(\mathbf{d}_j \otimes \mathbf{e}_i). \quad (218)$$

Assim, desenvolve-se $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A} &\stackrel{(I)}{=} \mathbf{I} : (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}) \stackrel{(II)}{=} \delta_{su} \delta_{tn} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t \otimes \mathbf{e}_u \otimes \mathbf{e}_n) : (F_{um}^{-1}(\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{d}_m) A_{mn}(\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n)) \stackrel{(III)}{=} \\ &\stackrel{(III)}{=} \delta_{su} \delta_{tn} F_{um}^{-1} A_{mn} ((\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \otimes (\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{e}_n)) : ((\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{d}_m)(\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n)) \stackrel{(IV)}{=} \\ &\stackrel{(IV)}{=} \delta_{su} \delta_{tn} F_{um}^{-1} A_{mn} ((\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{e}_n) : ((\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{d}_m)(\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n))) (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \stackrel{(V)}{=} \\ &\stackrel{(V)}{=} \delta_{su} \delta_{tn} F_{um}^{-1} A_{mn} (((\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_u)(\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{e}_n)) : (\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n)) (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \stackrel{(VI)}{=} \\ &\stackrel{(VI)}{=} \delta_{tn} F_{sm}^{-1} A_{mn} ((\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n) : (\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n)) (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \stackrel{(VII)}{=} \\ &\stackrel{(VII)}{=} \delta_{tn} F_{sm}^{-1} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t \otimes \mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n) : A_{mn}(\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n) \Rightarrow \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A} = \delta_{tn} F_{sm}^{-1} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t \otimes \mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n) : \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (219)$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (46)₁, em (II) a Eq. (47)₁, em (III) a Eq. (45)₁, em (IV) a Eq. (44), em (V) a Eq. (34)₁, em (VI) a Eq. (45)₂ e em (VII) as Eqs. (44) e (45)₁. Agora, desenvolve-se $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-\top}\mathbf{A}^\top\mathbf{F}$,

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-\top}\mathbf{A}^\top\mathbf{F} = (\mathbf{F}^\top\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-\top})^\top \stackrel{(I)}{=} \bar{\mathbf{I}} : (\mathbf{F}^\top\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-\top}) \stackrel{(II)}{=}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(II)}{=} \delta_{sv} \delta_{tu} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t \otimes \mathbf{e}_u \otimes \mathbf{e}_v) : (F_{mu} (\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{d}_m) A_{mn} (\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n) F_{nw}^{-1} (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{d}_w) F_{vw}^{-1} (\mathbf{d}_w \otimes \mathbf{e}_v)) \stackrel{(III)}{=} \\
& \stackrel{(III)}{=} \delta_{sv} \delta_{tu} F_{mu} A_{mn} F_{nw}^{-1} F_{vw}^{-1} ((\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{e}_v) : ((\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{d}_m) (\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n) (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{d}_w) (\mathbf{d}_w \otimes \mathbf{e}_v))) (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \stackrel{(IV)}{=} \\
& \stackrel{(IV)}{=} \delta_{sv} \delta_{tu} F_{mu} A_{mn} F_{nw}^{-1} F_{vw}^{-1} (((\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_u) (\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{e}_v) (\mathbf{e}_v \otimes \mathbf{d}_w) (\mathbf{d}_w \otimes \mathbf{e}_n)) : (\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n)) (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \stackrel{(V)}{=} \\
& \stackrel{(V)}{=} F_{mt} A_{mn} F_{nw}^{-1} F_{sw}^{-1} ((\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n) : (\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n)) (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \stackrel{(VI)}{=} F_{mt} F_{nw}^{-1} F_{sw}^{-1} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t \otimes \mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n) : A_{mn} (\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{A}^T \mathbf{F} = F_{mt} F_{nw}^{-1} F_{sw}^{-1} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t \otimes \mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n) : \mathbf{A}, \tag{220}
\end{aligned}$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (46)₂, em (II) a Eq. (47)₂, em (III) as Eqs. (45)₁ e (44), em (IV) a Eq. (34)₂, em (V) a Eq. (45)₂ e em (VI) as Eqs. (44) e (45)₁. Substituindo-se as Eqs. (219) e (220) na Eq. (217) tem-se

$$DK(\mathbf{F})[\mathbf{A}] = \frac{1}{2} (\delta_{tn} F_{sm}^{-1} + F_{mt} F_{nw}^{-1} F_{sw}^{-1}) (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t \otimes \mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_n) : \mathbf{A}. \tag{221}$$

Da Eq. (56), conclui-se a partir da Eq. (221) que

$$\frac{\partial(\ln \mathbf{U})_{st}}{\partial F_{mn}} = \frac{1}{2} (\delta_{tn} F_{sm}^{-1} + F_{mt} F_{nw}^{-1} F_{sw}^{-1}). \tag{222}$$

Agora, seja $\mathbf{M}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^{-1}$. Aplicando-se a regra do produto em $\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}$ tem-se

$$\mathbf{F}\mathbf{M}(\mathbf{F}) = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{M}(\mathbf{F}) + \mathbf{F}\mathbf{D}\mathbf{M}(\mathbf{F})[\mathbf{A}] = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{D}\mathbf{M}(\mathbf{F})[\mathbf{A}] = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}, \tag{223}$$

em que $\mathbf{0}$ é o tensor nulo de 2ª ordem. Desenvolvendo-se $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}$ tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1} & \stackrel{(I)}{=} \mathbf{I} : (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}) \stackrel{(II)}{=} \delta_{su} \delta_{mw} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{d}_m \otimes \mathbf{e}_u \otimes \mathbf{d}_w) : (F_{un}^{-1} (\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{d}_n) A_{no} (\mathbf{d}_n \otimes \mathbf{e}_o) F_{ow}^{-1} (\mathbf{e}_o \otimes \mathbf{d}_w)) \stackrel{(III)}{=} \\
& \stackrel{(III)}{=} \delta_{su} \delta_{mw} F_{un}^{-1} A_{no} F_{ow}^{-1} ((\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{d}_m) \otimes (\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{d}_w)) : ((\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{d}_n) (\mathbf{d}_n \otimes \mathbf{e}_o) (\mathbf{e}_o \otimes \mathbf{d}_w)) \stackrel{(IV)}{=} \\
& \stackrel{(IV)}{=} \delta_{su} \delta_{mw} F_{un}^{-1} A_{no} F_{ow}^{-1} ((\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{d}_w) : ((\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{d}_n) (\mathbf{d}_n \otimes \mathbf{e}_o) (\mathbf{e}_o \otimes \mathbf{d}_w))) (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{d}_m) \stackrel{(V)}{=} \\
& \stackrel{(V)}{=} \delta_{su} \delta_{mw} F_{un}^{-1} A_{no} F_{ow}^{-1} ((\mathbf{d}_n \otimes \mathbf{e}_u) (\mathbf{e}_u \otimes \mathbf{d}_w) (\mathbf{d}_w \otimes \mathbf{e}_o) : (\mathbf{d}_n \otimes \mathbf{e}_o)) (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{d}_m) \stackrel{(VI)}{=}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(VI)}{=} F_{sn}^{-1} A_{no} F_{om}^{-1} ((\mathbf{d}_n \otimes \mathbf{e}_o) : (\mathbf{d}_n \otimes \mathbf{e}_o)) (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{d}_m) \stackrel{(VII)}{=} F_{sn}^{-1} F_{om}^{-1} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{d}_m \otimes \mathbf{d}_n \otimes \mathbf{e}_o) : A_{no} (\mathbf{d}_n \otimes \mathbf{e}_o) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \mathbf{F}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{F}^{-1} = F_{sn}^{-1} F_{om}^{-1} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{d}_m \otimes \mathbf{d}_n \otimes \mathbf{e}_o) : \mathbf{A}, \tag{224}
\end{aligned}$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (46)₁, em (II) a Eq. (47)₁, em (III) a Eq. (45)₁, em (IV) a Eq. (44), em (V) a Eq. (34)₂, em (VI) a Eq. (45)₂ e em (VII) as Eqs. (44) e (45)₁. Tendo em vista a Eq. (56), conclui-se das Eqs. (223) e (224) que

$$\frac{\partial F_{sm}^{-1}}{\partial F_{no}} = -F_{sn}^{-1} F_{om}^{-1}. \tag{225}$$

Derivando-se a Eq. (222) em relação F_{no} , utilizando-se a Eq. (225), obtém-se

$$\frac{\partial^2 (\ln \mathbf{U})_{st}}{\partial F_{mn} \partial F_{op}} = \frac{1}{2} \left(-\delta_{tn} F_{so}^{-1} F_{pm}^{-1} + \delta_{mo} \delta_{tp} F_{nx}^{-1} F_{sx}^{-1} - F_{mt} F_{no}^{-1} F_{px}^{-1} F_{sx}^{-1} - F_{mt} F_{nx}^{-1} F_{so}^{-1} F_{px}^{-1} \right). \tag{226}$$

Desenvolve-se agora as expressões indiciais de $\partial^{\text{hs}} \mathbf{E}^{(\beta)} / \partial \mathbf{F}$ e $\partial^2 \text{hs} \mathbf{E}^{(\beta)} / \partial \mathbf{F}^2$ para os seguintes casos: $\gamma \neq 0$ e $\gamma = 0$.

Para $\gamma \neq 0$

Lançando-se mão da definição da função seno hiperbólico na Eq. (11)₁, tem-se

$$\text{hs} \mathbf{E}^{(\beta)} = \frac{1}{2\beta} \left(\left(e^{\frac{\beta}{\gamma} (e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})} \right) - \left(e^{-\frac{\beta}{\gamma} (e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})} \right) \right), \tag{227}$$

sendo que $\mathbf{U}^\gamma = e^{\ln \mathbf{U}^\gamma} = e^{\gamma \ln \mathbf{U}}$. A notação indicial da Eq. (227) é

$$\text{hs} E_{k\ell}^{(\beta)} = \frac{1}{2\beta} \left(\left(e^{\frac{\beta}{\gamma} (e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})} \right)_{k\ell} - \left(e^{-\frac{\beta}{\gamma} (e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})} \right)_{k\ell} \right). \tag{228}$$

Derivando-se a Eq. (228) em relação a F_{mn} tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial {}^{\text{hs}}E_{k\ell}^{(\beta)}}{\partial F_{mn}} &= \frac{1}{2\beta} \left(\frac{\partial \left(e^{\frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})} \right)_{k\ell}}{\partial (e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})_{st}} \frac{\partial (e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})_{st}}{\partial (\ln \mathbf{U})_{uv}} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{uv}}{\partial F_{mn}} - \frac{\partial \left(e^{-\frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})} \right)_{k\ell}}{\partial (e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})_{st}} \frac{\partial (e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})_{st}}{\partial (\ln \mathbf{U})_{uv}} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{uv}}{\partial F_{mn}} \right) \stackrel{(I)}{=} \\
&\stackrel{(I)}{=} \frac{1}{2\beta} \gamma \delta_{tv} (e^{\gamma \ln \mathbf{U}})_{su} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{uv}}{\partial F_{mn}} \left(\frac{\beta}{\gamma} \delta_{\ell t} \left(e^{\frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})} \right)_{ks} + \frac{\beta}{\gamma} \delta_{\ell t} \left(e^{-\frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})} \right)_{ks} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\partial {}^{\text{hs}}E_{k\ell}^{(\beta)}}{\partial F_{mn}} = U_{su}^{\gamma} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{u\ell}}{\partial F_{mn}} \left(\cosh \left(\frac{\beta}{\gamma} (\mathbf{U}^{\gamma} - \mathbf{I}) \right) \right)_{ks}. \quad (229)
\end{aligned}$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (216). Derivando-se a Eq. (229) em relação a F_{op} tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 {}^{\text{hs}}E_{k\ell}^{(\beta)}}{\partial F_{mn} \partial F_{op}} &= \frac{\partial (e^{\gamma \ln \mathbf{U}})_{su}}{\partial F_{op}} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{u\ell}}{\partial F_{mn}} \left(\cosh \left(\frac{\beta}{\gamma} (\mathbf{U}^{\gamma} - \mathbf{I}) \right) \right)_{ks} + U_{su}^{\gamma} \frac{\partial^2 (\ln \mathbf{U})_{u\ell}}{\partial F_{mn} \partial F_{op}} \left(\cosh \left(\frac{\beta}{\gamma} (\mathbf{U}^{\gamma} - \mathbf{I}) \right) \right)_{ks} \\
&\quad + U_{su}^{\gamma} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{u\ell}}{\partial F_{mn}} \frac{\partial}{\partial F_{op}} \left(\cosh \left(\frac{\beta}{\gamma} (\mathbf{U}^{\gamma} - \mathbf{I}) \right) \right)_{ks} = \\
&= \frac{\partial (e^{\gamma \ln \mathbf{U}})_{su}}{\partial (\ln \mathbf{U})_{wx}} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{wx}}{\partial F_{op}} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{u\ell}}{\partial F_{mn}} \left(\cosh \left(\frac{\beta}{\gamma} (\mathbf{U}^{\gamma} - \mathbf{I}) \right) \right)_{ks} + U_{su}^{\gamma} \frac{\partial^2 (\ln \mathbf{U})_{u\ell}}{\partial F_{mn} \partial F_{op}} \left(\cosh \left(\frac{\beta}{\gamma} (\mathbf{U}^{\gamma} - \mathbf{I}) \right) \right)_{ks} \\
&\quad + \frac{U_{su}^{\gamma}}{2} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{u\ell}}{\partial F_{mn}} \left(\frac{\partial \left(e^{\frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})} \right)_{ks}}{\partial (e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})_{wx}} \frac{\partial (e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})_{wx}}{\partial (\ln \mathbf{U})_{yz}} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{yz}}{\partial F_{op}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \left(e^{-\frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})} \right)_{ks}}{\partial (e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})_{wx}} \frac{\partial (e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})_{wx}}{\partial (\ln \mathbf{U})_{yz}} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{yz}}{\partial F_{op}} \right) \stackrel{(I)}{=} \\
&\stackrel{(I)}{=} \gamma \delta_{ux} (e^{\gamma \ln \mathbf{U}})_{sw} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{wx}}{\partial F_{op}} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{u\ell}}{\partial F_{mn}} \left(\cosh \left(\frac{\beta}{\gamma} (\mathbf{U}^{\gamma} - \mathbf{I}) \right) \right)_{ks} + \\
&\quad + U_{su}^{\gamma} \frac{\partial^2 (\ln \mathbf{U})_{u\ell}}{\partial F_{mn} \partial F_{op}} \left(\cosh \left(\frac{\beta}{\gamma} (\mathbf{U}^{\gamma} - \mathbf{I}) \right) \right)_{ks} + \\
&\quad + \frac{U_{su}^{\gamma}}{2} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{u\ell}}{\partial F_{mn}} \gamma \delta_{xz} (e^{\gamma \ln \mathbf{U}})_{wy} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{yz}}{\partial F_{op}} \left(\frac{\beta}{\gamma} \delta_{sx} \left(e^{\frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})} \right)_{kw} + \left(-\frac{\beta}{\gamma} \right) \delta_{sx} \left(e^{-\frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma \ln \mathbf{U}} - \mathbf{I})} \right)_{kw} \right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial^2 {}^{\text{hs}} E_{k\ell}^{(\beta)}}{\partial F_{mn} \partial F_{op}} &= \gamma U_{sw}^\gamma \frac{\partial(\ln \mathbf{U})_{wu}}{\partial F_{op}} \frac{\partial(\ln \mathbf{U})_{u\ell}}{\partial F_{mn}} \left(\cosh \left(\frac{\beta}{\gamma} (\mathbf{U}^\gamma - \mathbf{I}) \right) \right)_{ks} + \\
&+ U_{su}^\gamma \frac{\partial^2(\ln \mathbf{U})_{u\ell}}{\partial F_{mn} \partial F_{op}} \left(\cosh \left(\frac{\beta}{\gamma} (\mathbf{U}^\gamma - \mathbf{I}) \right) \right)_{ks} + \\
&+ \beta U_{su}^\gamma U_{wy}^\gamma \frac{\partial(\ln \mathbf{U})_{u\ell}}{\partial F_{mn}} \frac{\partial(\ln \mathbf{U})_{ys}}{\partial F_{op}} \left(\sinh \left(\frac{\beta}{\gamma} (\mathbf{U}^\gamma - \mathbf{I}) \right) \right)_{kw}. \quad (230)
\end{aligned}$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (216).

Para $\gamma = 0$

A notação indicial da Eq. (11)₂ é

$${}^{\text{hs}} E_{k\ell}^{(\beta)} = \frac{1}{2\beta} \left((e^{\beta \ln \mathbf{U}})_{k\ell} - (e^{-\beta \ln \mathbf{U}})_{k\ell} \right), \quad \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad (231)$$

Derivando-se a Eq. (231) em relação a F_{mn} tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial {}^{\text{hs}} E_{k\ell}^{(\beta)}}{\partial F_{mn}} &= \frac{1}{2\beta} \left(\frac{\partial(e^{\beta \ln \mathbf{U}})_{k\ell}}{\partial(\ln \mathbf{U})_{st}} \frac{\partial(\ln \mathbf{U})_{st}}{\partial F_{mn}} - \frac{\partial(e^{-\beta \ln \mathbf{U}})_{k\ell}}{\partial(\ln \mathbf{U})_{st}} \frac{\partial(\ln \mathbf{U})_{st}}{\partial F_{mn}} \right) \stackrel{(I)}{=} \\
&\stackrel{(I)}{=} \frac{1}{2\beta} \frac{\partial(\ln \mathbf{U})_{st}}{\partial F_{mn}} \left(\beta \delta_{\ell t} (e^{\beta \ln \mathbf{U}})_{ks} + \beta \delta_{\ell t} (e^{-\beta \ln \mathbf{U}})_{ks} \right) \Rightarrow \frac{\partial {}^{\text{hs}} E_{k\ell}^{(\beta)}}{\partial F_{mn}} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln \mathbf{U})_{s\ell}}{\partial F_{mn}} (U_{ks}^\beta + U_{ks}^{-\beta}). \quad (232)
\end{aligned}$$

sendo que em (I) utilizou-se a Eq. (216). Derivando-se a Eq. (232) em relação a F_{op} tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 {}^{\text{hs}} E_{k\ell}^{(\beta)}}{\partial F_{mn} \partial F_{op}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2(\ln \mathbf{U})_{s\ell}}{\partial F_{mn} \partial F_{op}} (U_{ks}^\beta + U_{ks}^{-\beta}) + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial(\ln \mathbf{U})_{s\ell}}{\partial F_{mn}} \left(\frac{\partial(e^{\beta \ln \mathbf{U}})_{ks}}{\partial(\ln \mathbf{U})_{uv}} \frac{\partial(\ln \mathbf{U})_{uv}}{\partial F_{op}} + \frac{\partial(e^{-\beta \ln \mathbf{U}})_{ks}}{\partial(\ln \mathbf{U})_{uv}} \frac{\partial(\ln \mathbf{U})_{uv}}{\partial F_{op}} \right) \right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 {}^{hs} E_{kl}^{(\beta)}}{\partial F_{mn} \partial F_{op}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 (\ln \mathbf{U})_{sl}}{\partial F_{mn} \partial F_{op}} (U_{ks}^{\beta} + U_{ks}^{-\beta}) + \beta \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{sl}}{\partial F_{mn}} \frac{\partial (\ln \mathbf{U})_{us}}{\partial F_{op}} (U_{ku}^{\beta} - U_{ku}^{-\beta}) \right). \quad (233)$$

4.4 Pré e pós-processador GiD

GiD é um pré e pós-processador gráfico utilizado principalmente em simulações numéricas de sólidos e/ou fluidos. Algumas vantagens que culminaram na sua escolha neste trabalho incluem uma licença gratuita pelo próprio site (www.gidsimulation.com) e a existência de um fórum virtual no qual existe interação frequente dos administradores para retirar dúvidas dos usuários do *software*. Como desvantagem menciona-se a linguagem para customização adotada pelo GiD (Tcl/Tk) e o limite de nós do modelo na licença gratuita (10000 nós). Essa linguagem não é comum e, por mais simples que seja a análise, o contato com ela é inevitável. A Figura 16 mostra a tela inicial do GiD.

Figura 16 – Tela principal do GiD.



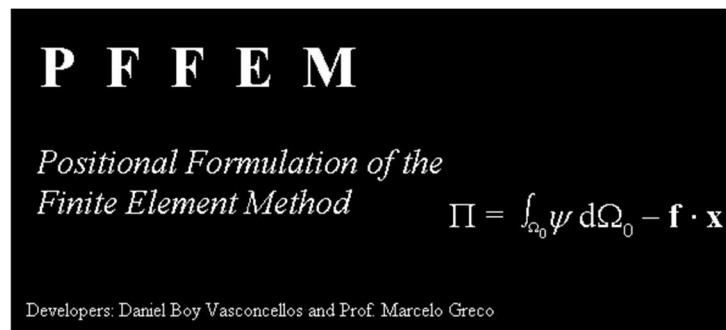
O GiD denomina *problem type* a uma pasta com extensão .gid que deve possuir um conjunto de arquivos específicos. A Figura 17 mostra a composição do *problem type* construído neste trabalho. O código fonte, usado para gerar o arquivo .exe, foi escrito majoritariamente em C.

Figura 17 – *Problem type* adotado neste trabalho.

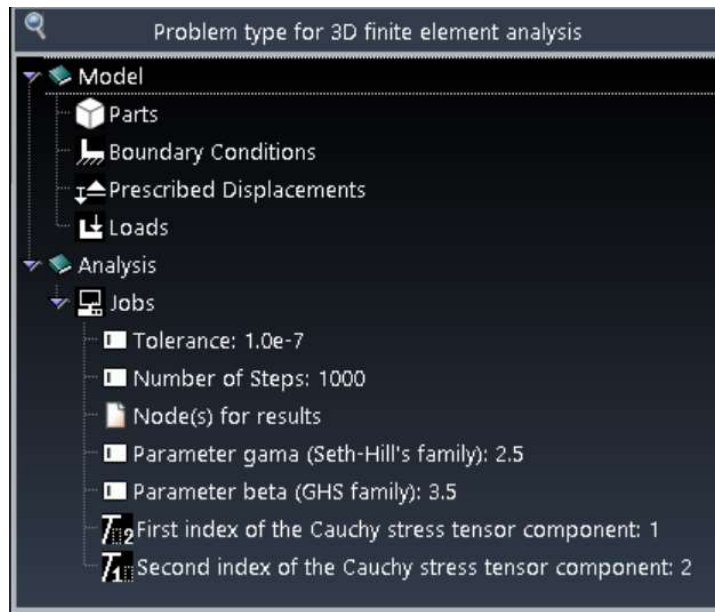
	Traz algumas informações básicas do <i>problem type</i> como nome, versão, descrição, validação de senha, entre outros.
	Escrito em Tcl/Tk. Possui as rotinas de inicialização. Determina a maneira com que os dados serão escritos no arquivo de entrada (.dat) a ser lido pelo arquivo .exe.
	Contém as informações para a construção da árvore de dados. Escrito em formato XML.
	Define algumas condições da malha e da geometria.
	Lê o arquivo de entrada gerado pelo GiD, faz os cálculos necessários e gera três arquivos que serão lidos pelo pós-processador (.post.msh; .post.res; .post.lst).

Após o usuário carregar o *problem type* (*Data* → *Problem Type* → *Load*), a tela de abertura mostrada na Figura 18 é exibida no GiD.

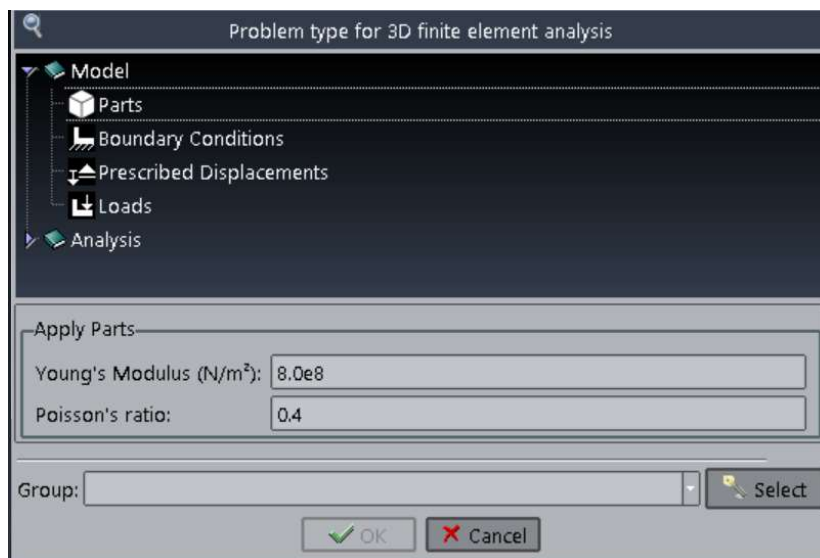
Figura 18 – Tela de abertura do *problem type* criado.



Logo depois da tela de abertura, a árvore de dados da Figura 19 é mostrada ao usuário.

Figura 19 – Árvore de dados.

Clicando-se duas vezes em cada item da árvore, pode-se criar/editar o campo seleccionado. A Figura 20 mostra um exemplo para o item 'Parts'. Outros campos (Módulo de Young e coeficiente de Poisson) aparecem e devem ser preenchidos pelo usuário.

Figura 20 – Dados para o item 'Parts'.

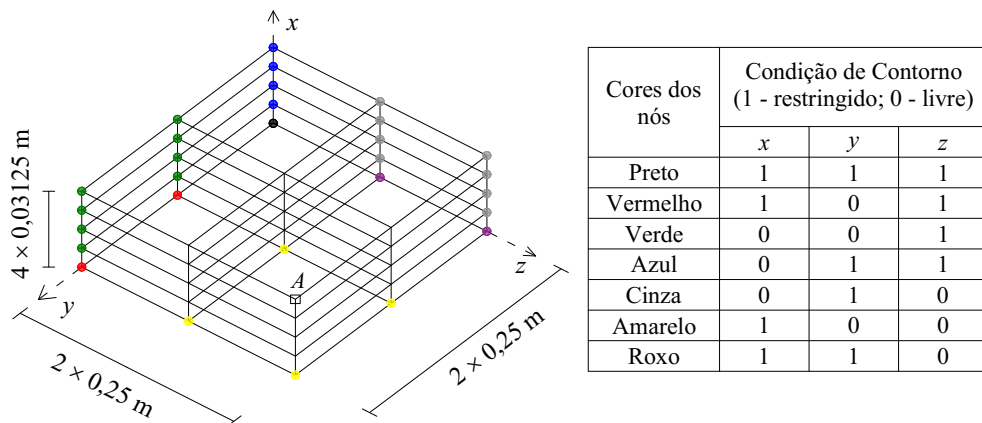
Finalizada a etapa de inserção dos dados, a análise é iniciada pelo menu 'Calculate' (ver Figura 16).

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

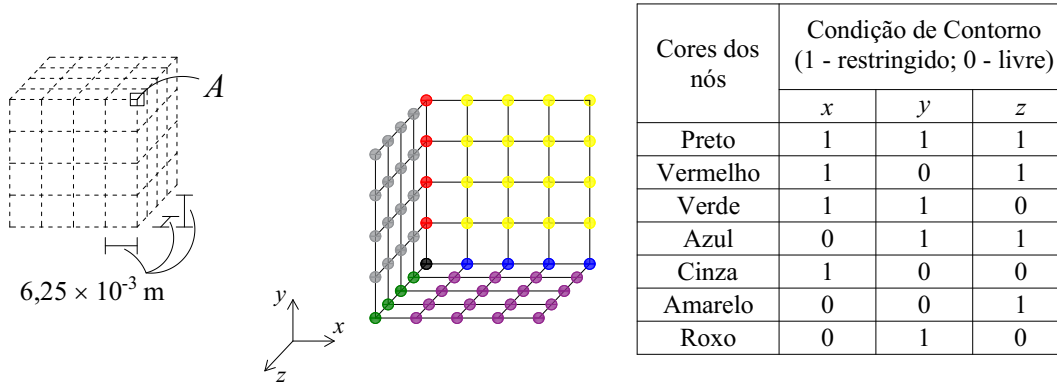
Inicialmente, apresenta-se as características e dados dos modelos numéricos de Extensão Axial (EA), extensão Equi-Biaxial (EB) e Cisalhamento em estado Plano de Tensão (CPT). Adotou-se em todas as análises $tol = 10^{-7}$ (ver item 4.2).

O sólido prismático da EA possui base quadrada de lado igual a 1,0 m e altura igual a 12,5 cm. Lançando-se mão simetria do problema, apenas 1/4 do sólido foi modelado, como mostra a malha na Figura 21, juntamente com as condições de contorno. Um carregamento uniformemente distribuído q é disposto na direção de x . A componente de tensão P_{11} apresentada nos gráficos da EA diz respeito ao nó A , também indicado na Figura 21.

Figura 21 – Malha e condições de contorno da EA.



A EB é feita em um sólido cúbico com lado igual a 5 cm. Lançando-se mão da simetria do problema, apenas 1/8 do sólido foi modelado, como mostra a malha da Figura 22, juntamente com as condições de contorno. Um carregamento equi-biaxial q é disposto nas direções de x e y . A componente de tensão P_{11} apresentada nos gráficos da EB diz respeito ao nó A , também indicado na Figura 22.

Figura 22 – Malha e condições de contorno da EB.

No tocante ao cisalhamento, em sua grande maioria, a literatura apresenta as respostas colocando-o em estado plano de deformação, dado por

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (234)$$

Os experimentos de cisalhamento geralmente adotam um corpo de prova cuja dimensão na direção perpendicular ao plano de cisalhamento é maior em relação às outras duas, o que leva ao uso da hipótese de deformação nula nessa direção, induzindo o emprego da Eq. (234). No entanto, constatou-se uma dificuldade em se obter a Eq. (234) numericamente impondo-se apenas forças no modelo tridimensional. Diante disso, para uma concepção vantajosa computacionalmente e mais condizente com as análises experimentais, considerou-se o CPT,

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (235)$$

e impôs-se as posições nodais x , sendo as incógnitas dadas pelas posições nodais z (as posições nodais y foram inalteradas). Dessa forma, a comparação dos resultados analíticos/numéricos com os experimentais torna-se mais consistente.

O sólido do CPT é mostrado na Figura 23a. Lançando-se mão da simetria, apenas 1/2 do sólido foi modelado, como mostra a malha da Figura 23b. As condições de contorno estão indicadas

na Figura 24. Os nós não indicados na Figura 24 tiveram sua translação impedida apenas na direção y . O incremento na posição x dos nós livres foi dado de acordo com a Tabela 1.

Figura 23 – (a) Dados e (b) malha utilizados no CPT.

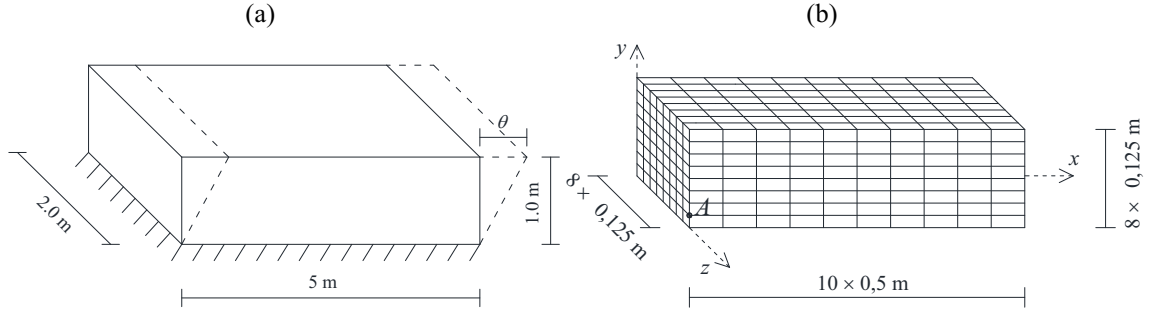


Figura 24 – Condições de contorno no CPT.

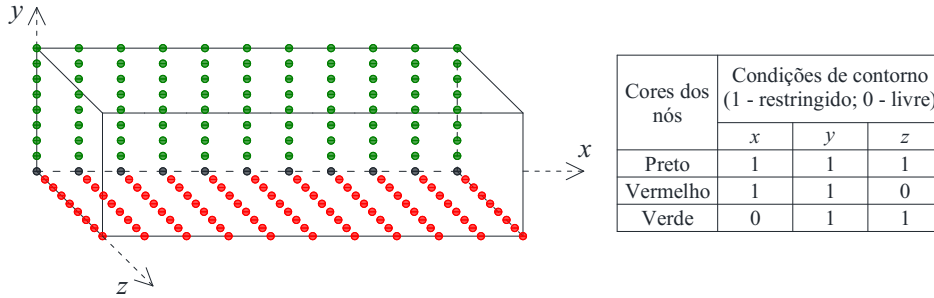


Tabela 1 – Incrementos na direção x no CPT.

Coordenada y do nó (m)	Δx (m)
1,0	0,01
0,875	$8,75 \times 10^{-3}$
0,75	$7,5 \times 10^{-3}$
0,625	$6,25 \times 10^{-3}$
0,5	$5,0 \times 10^{-3}$
0,375	$3,75 \times 10^{-3}$
0,25	$2,5 \times 10^{-3}$
0,125	$1,25 \times 10^{-3}$

As expressões analíticas de P_{11} para a EA e a EB são dadas em Peixoto *et al.* (2024), a saber,

$$P_{11} = \begin{cases} \frac{\omega \lambda_1^{\gamma-1}}{\beta} \cosh \left[\frac{\beta}{\gamma} (\lambda_1^\gamma - 1) \right] \sinh \left[\frac{\beta}{\gamma} (\lambda_1^\gamma - 1) \right] & \gamma \neq 0 \\ \frac{\omega}{\beta \lambda_1} \sinh(\beta \ln \lambda_1) \cosh(\beta \ln \lambda_1) & \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (\text{para EA}) \quad (236)$$

$$P_{11} = \begin{cases} \frac{\bar{\omega} \lambda_1^{\gamma-1}}{\beta} \cosh\left[\frac{\beta}{\gamma}(\lambda_1^\gamma - 1)\right] \sinh\left[\frac{\beta}{\gamma}(\lambda_1^\gamma - 1)\right] & \gamma \neq 0 \\ \frac{\bar{\omega}}{\beta \lambda_1} \sinh(\beta \ln \lambda_1) \cosh(\beta \ln \lambda_1) & \gamma = 0 \end{cases}, \quad (\text{para EB}) \quad (237)$$

em que

$$\omega = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{e} \quad \bar{\omega} = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}. \quad (238)$$

Para o CPT, a expressão analítica de P_{12} é dada no Apêndice B, na Eq. (B17).

5.1 Teste inicial

A fim de se verificar a precisão da malha, apresenta-se a seguir os resultados da EA, da EB e do CPT de um material hipotético. O símbolo da ampulheta (⌚) nos gráficos indica o tempo de processamento em um computador com sistema operacional Windows 11, processador Intel core i5-1235U e 8 GB de RAM. Utilizou-se $\gamma = 0,528$, $\beta = 0,437$, $E = 1,243$ MPa e $\nu = 0,479$. Para a EA empregou-se $|\Delta q| = 9,6$ kPa e para EB $|\Delta q| = 15,36$ kPa.

A Figura 25 mostra as respostas numérica e analítica para a EA. Alguns passos da compressão (Figura 26) e da tração (Figura 27) com respeito à EA são mostrados em seguida.

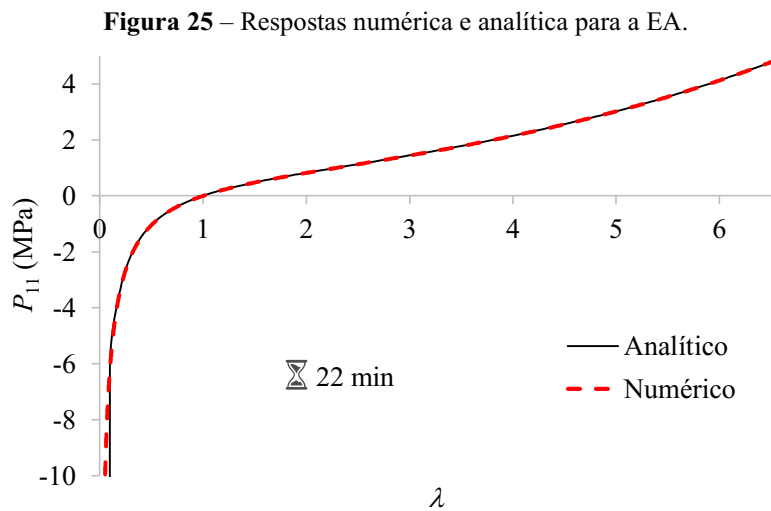


Figura 26 – Deformada e indicação de T_{11}/μ para a compressão da EA no passo (a) 1 (b) 40 (c) 80 (d) 500.

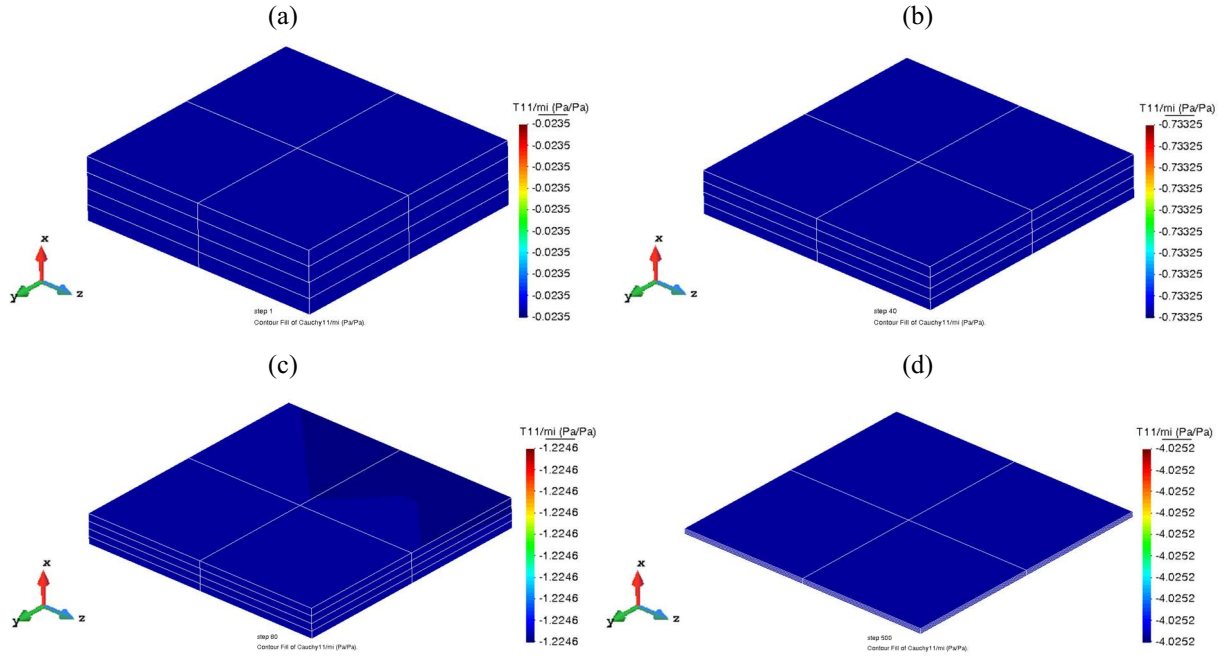
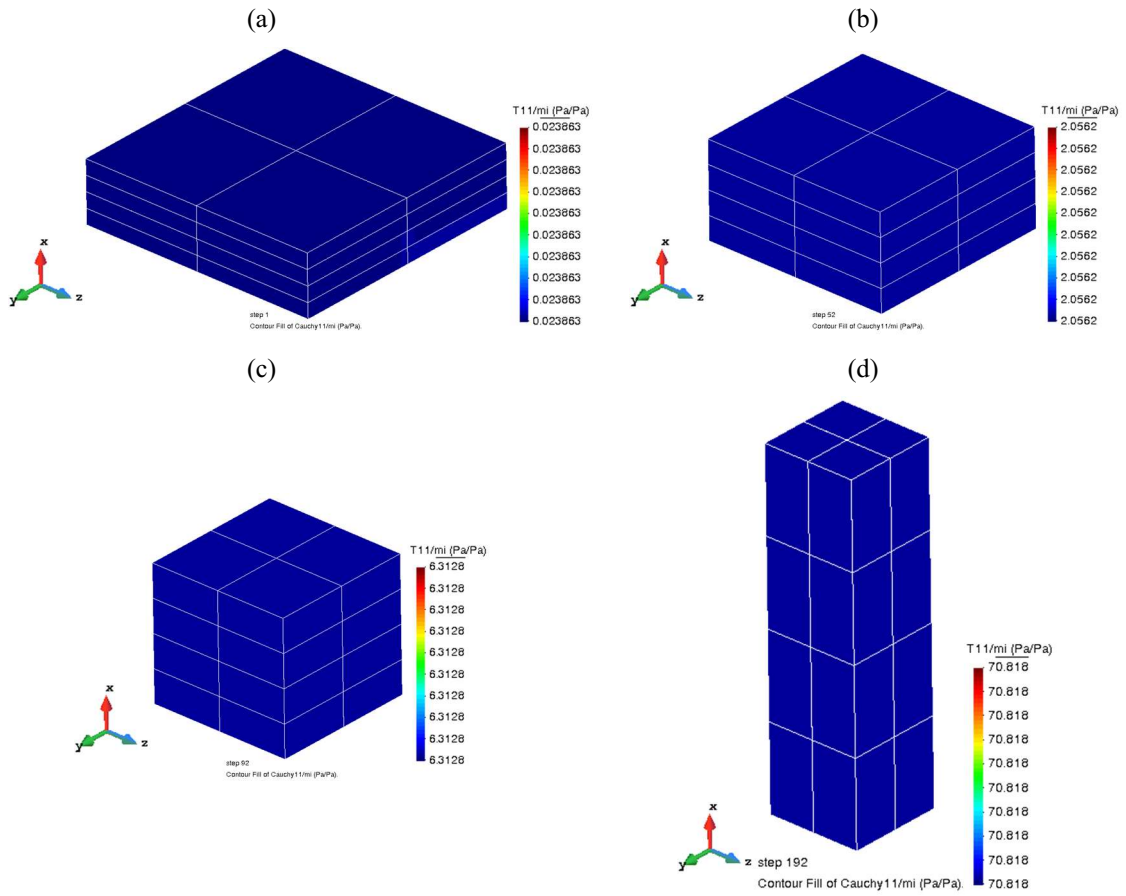


Figura 27 – Deformada e indicação de T_{11}/μ para a tração da EA no passo (a) 1 (b) 52 (c) 92 (d) 192.



Tendo em vista a excelente correção entre a resposta analítica e numérica (Figura 25), a malha adotada foi considerada adequada para a avaliação da tensão normal. As Figuras 26 e 27 atestam a homogeneidade da deformação no modelo numérico na compressão e na tração.

A seguir, as Figuras 28 e 29 mostram, respectivamente, as respostas obtidas na compressão e na tração da EB. Alguns passos da compressão (Figura 30) e da tração (Figura 31) com respeito à EB são mostrados em seguida.

Figura 28 – Respostas numérica e analítica para a compressão na EB.

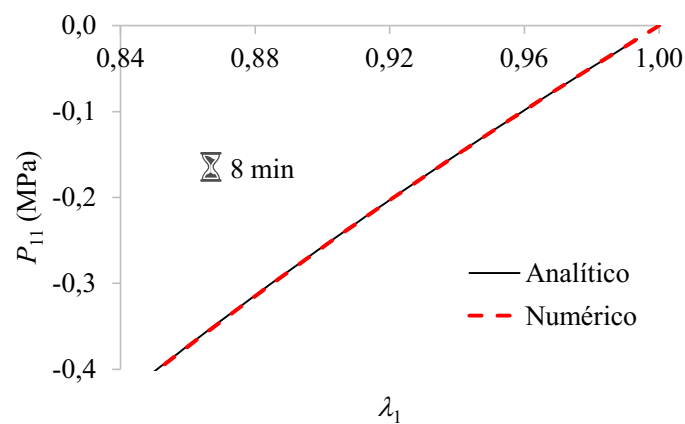


Figura 29 – Respostas numérica e analítica para a tração na EB.

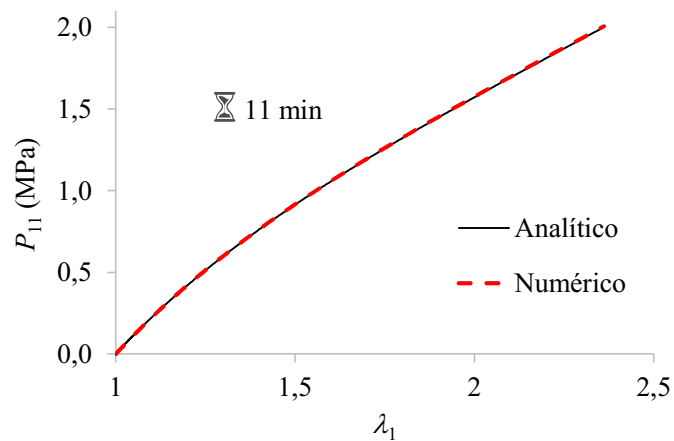


Figura 30 – Deformada e indicação de T_{11}/μ para a compressão da EB no passo (a) 1 (b) 6 (c) 16 (d) 26.

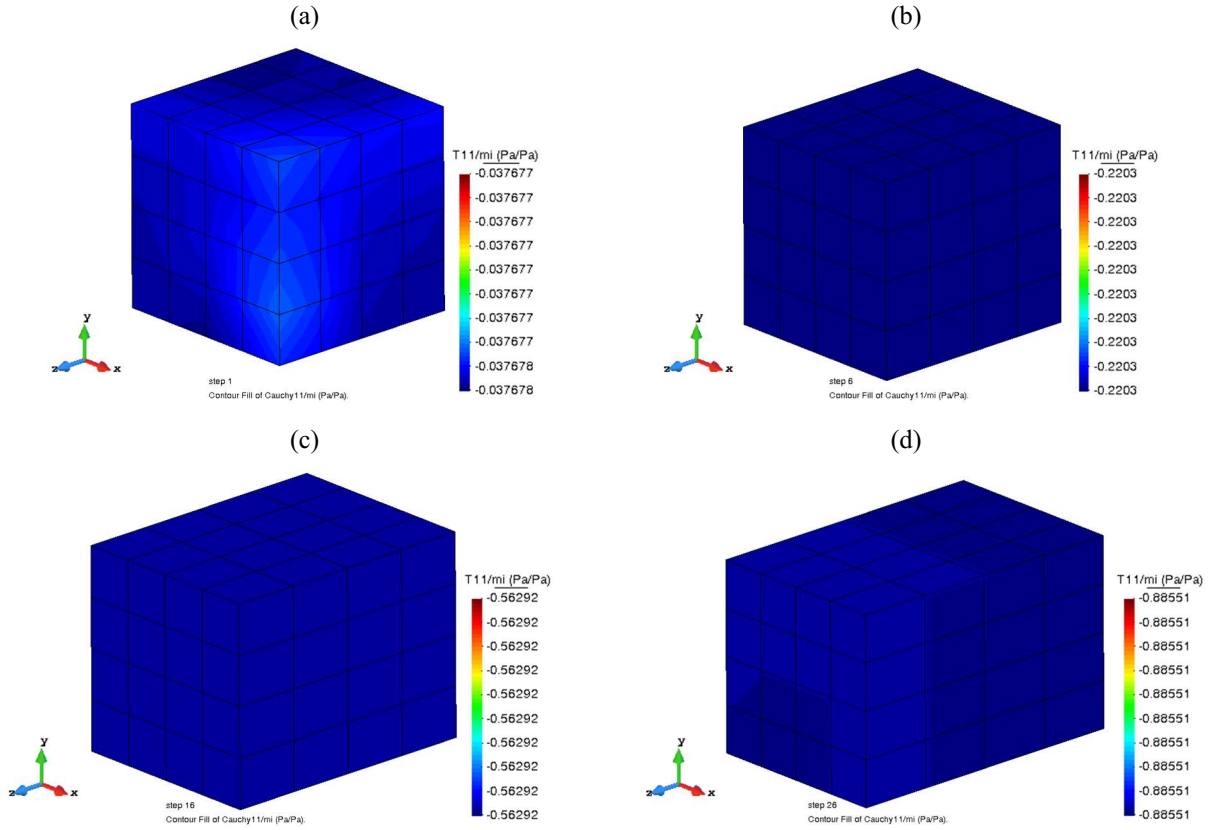
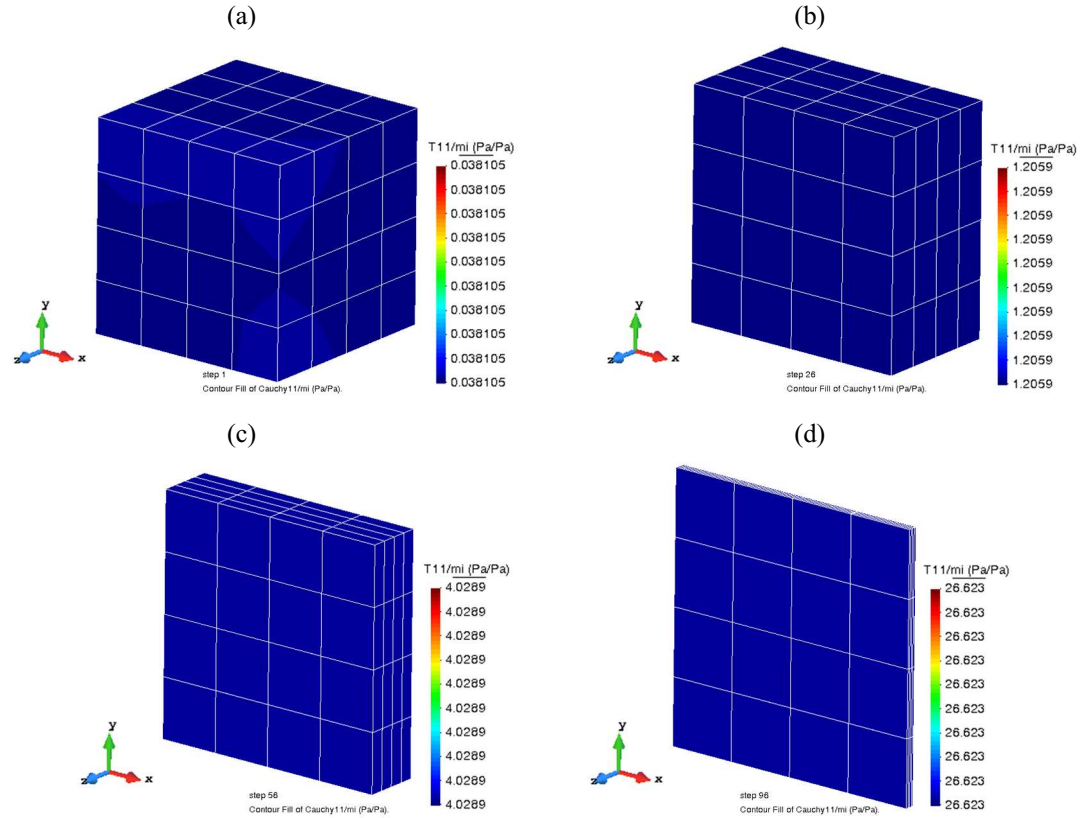
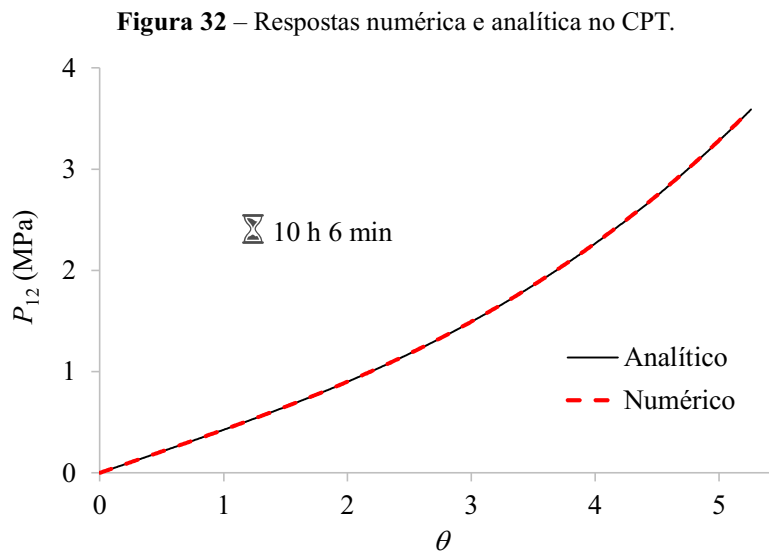


Figura 31 – Deformada e indicação de T_{11}/μ para a tração da EB no passo (a) 1 (b) 26 (c) 56 (d) 96.



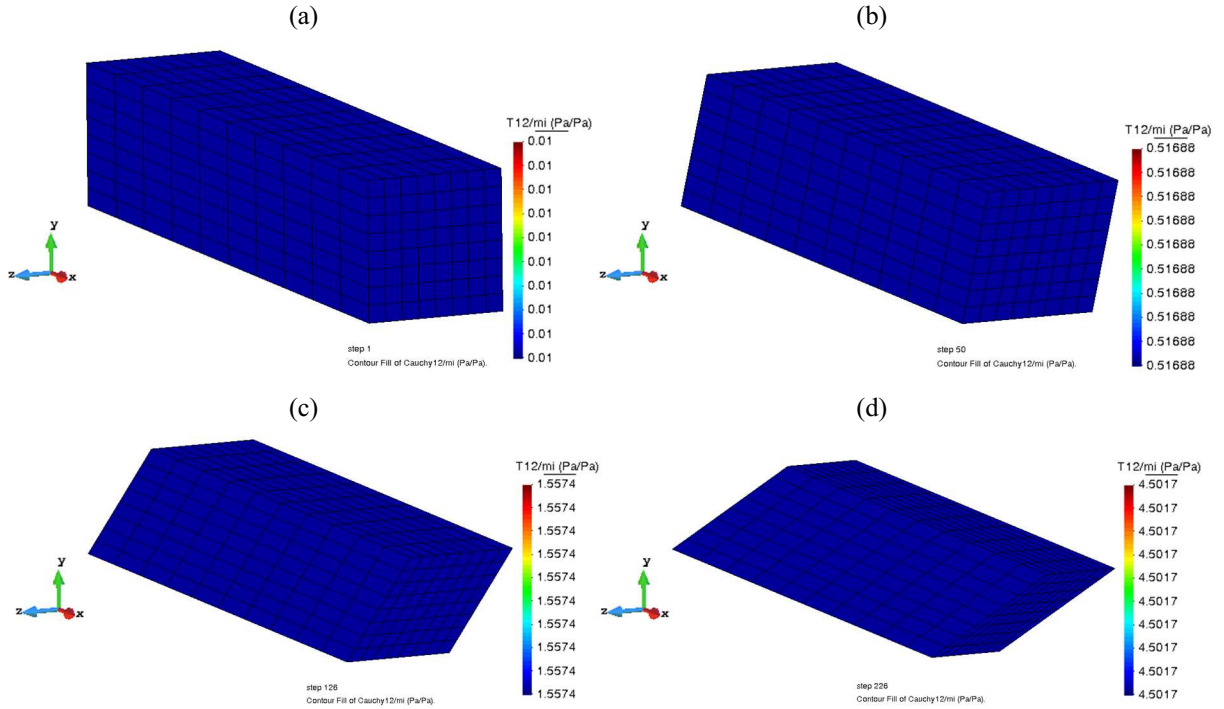
Das Figuras 28 e 29 conclui-se que a malha empregada é adequada para se avaliar a tensão normal na direção x . As Figuras 30 e 31 comprovam a homogeneidade da deformação no modelo numérico na compressão e na tração. Destaca-se que na EB, em geral, o carregamento máximo na compressão alcançado pela formulação desenvolvida é bem menor (em módulo) do que o carregamento máximo alcançado na tração.

A seguir, a Figura 32 mostra a respostas obtida no CPT.



Conclui-se que a malha utilizada no CPT é adequada para se avaliar P_{12} . Alguns passos com respeito ao CPT são mostrados na Figura 33, na qual a homogeneidade de P_{12} no modelo numérico é constada com clareza. Além disso, nota-se que a deformação na direção z aumenta negativamente ao longo da análise.

Figura 33 – Deformada e indicação de T_{12}/μ para o CPT no passo (a) 1 (b) 50 (c) 126 (d) 226.



5.2 Comparação com respostas experimentais

Primeiramente define-se

$$r_{EA} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n_{EA}} \sum_{i=1}^{n_{EA}} (P_{11}^e - P_{11}^a)^2}}{\frac{1}{n_{EA}} \sum_{i=1}^{n_{EA}} |P_{11}^e|}, \quad r_{EB} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n_{EB}} \sum_{i=1}^{n_{EB}} (P_{11}^e - P_{11}^a)^2}}{\frac{1}{n_{EB}} \sum_{i=1}^{n_{EB}} |P_{11}^e|} \quad \text{e} \quad r_{CPT} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n_{CPT}} \sum_{i=1}^{n_{CPT}} (P_{12}^e - P_{12}^a)^2}}{\frac{1}{n_{CPT}} \sum_{i=1}^{n_{CPT}} |P_{12}^e|}, \quad (239)$$

em que

- r_{EA} , r_{EB} e r_{CPT} são os resíduos associados, respectivamente, à EA, EB e ao CPT;
- n_{EA} , n_{EB} e n_{CPT} são os números de pares ordenados experimentais associados, respectivamente, à EA, EB e ao CPT;
- P_{11}^e e P_{11}^a são, respectivamente, as componentes de tensão P_{11} experimental e analítica associadas ao modo de deformação (EA ou EB) correspondente à equação em questão (r_{EA} ou r_{EB}) e

- P_{12}^e e P_{12}^a são, respectivamente, as componentes de tensão P_{12} experimental e analítica associadas ao CPT.

Além disso, define-se:

- Calibração Individual (CI): processo de encontrar γ , β , E e ν minimizando-se somente r_{EA} , r_{EB} ou r_{CPT} ;
- Calibração Simultânea (CS): processo de encontrar γ , β , E e ν minimizando-se r_s , em que r_s é a norma euclidiana de dois ou mais resíduos escolhidos (r_{EA} , r_{EB} , r_{CPT}) para a calibração simultânea.

Utilizou-se a ferramenta *Solver* do *software* Excel para a CI e a CS. Essa ferramenta é fundamentada em Lasdon *et al.* (1978). Agora, apresenta-se a comparação das respostas numérica e analítica com alguns dados experimentais da literatura (nem todos fornecem a EA, a EB e o CPT de um mesmo material). Os pares ordenados experimentais foram obtidos com o uso do *software* Engauge Digitizer, versão 12.1.

As Figuras 34 e 35 mostram, respectivamente, a CS da EA e do CPT de uma borracha vulcanizada, denominada em Yeoh e Fleming (1997) como borracha C.

Figura 34 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Yeoh e Fleming (1997) para a EA da borracha vulcanizada C.

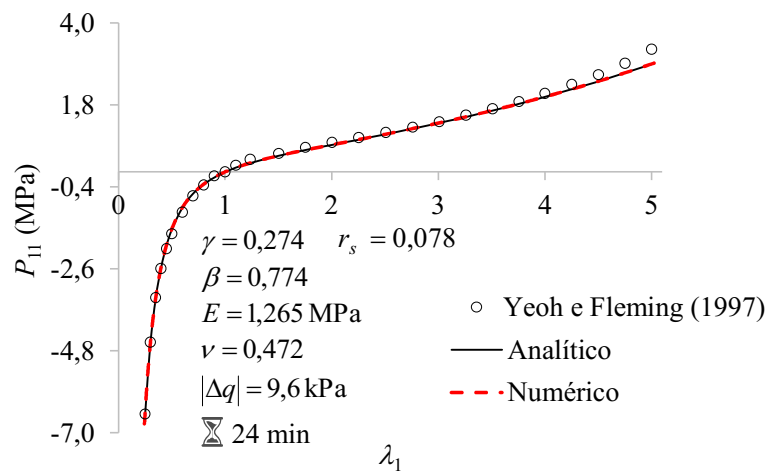
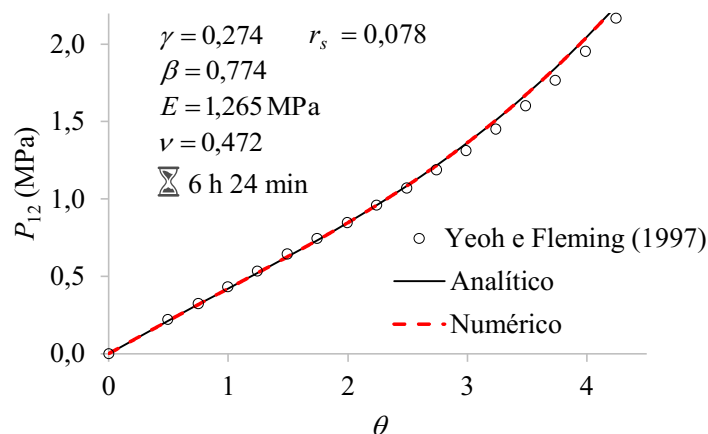
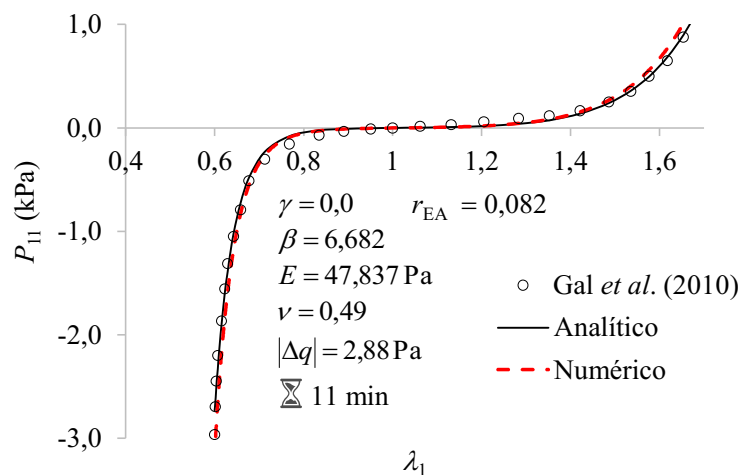


Figura 35 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Yeoh e Fleming (1997) para o CPT da borracha vulcanizada C.



O modelo numérico/analítico possui boa correlação com os dados experimentais de Yeoh e Fleming (1997) mesmo para grandes deformações, tanto para a EA quanto para o CPT. A seguir, a Figura 36 mostra os resultados da CI da EA do fígado suíno; a curva experimental se refere à curva azul escuro da Figura 10 de Gao *et al.* (2010).

Figura 36 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Gal *et al.* (2010) para a EA do fígado suíno.



O modelo numérico/analítico apresenta um ótimo ajuste com os dados experimentais de Gal *et al.* (2010). A seguir, as Figuras 37 e 38 mostram, respectivamente, a CS da EA e do CPT do córtex¹¹ e as Figuras 39 e 40 mostram, respectivamente, a CS da EA e do CPT dos gânglios da base¹². Os dados experimentais são de Budday *et al.* (2017).

¹¹ Camada externa de substância cinzenta dos hemisférios cerebrais.

¹² Conjunto de neurônios localizado profundamente no cérebro.

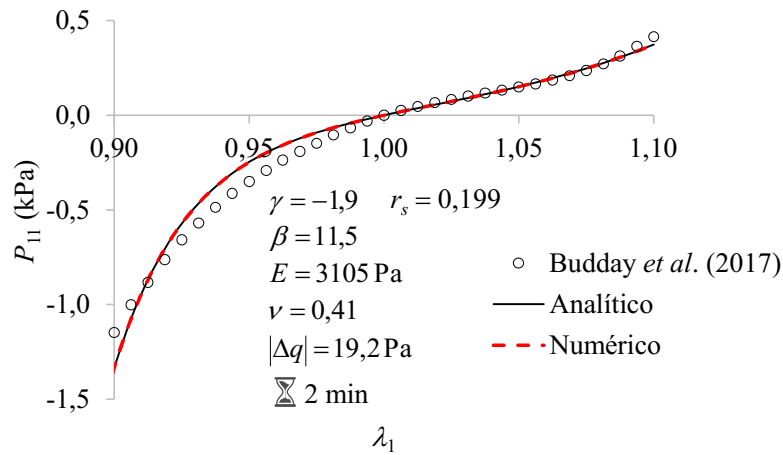
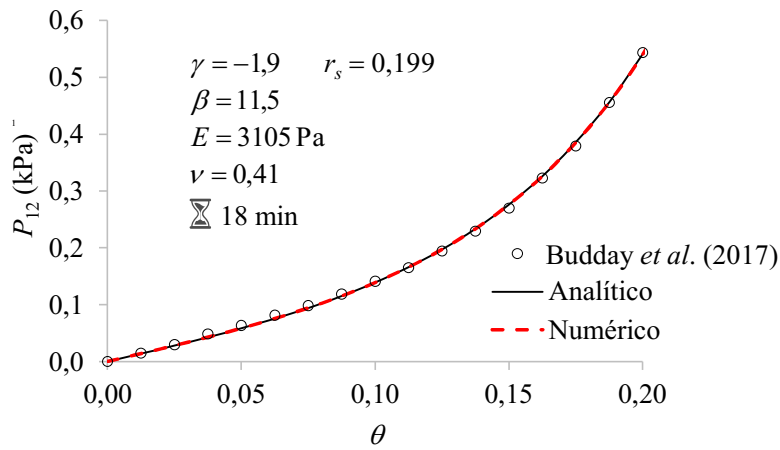
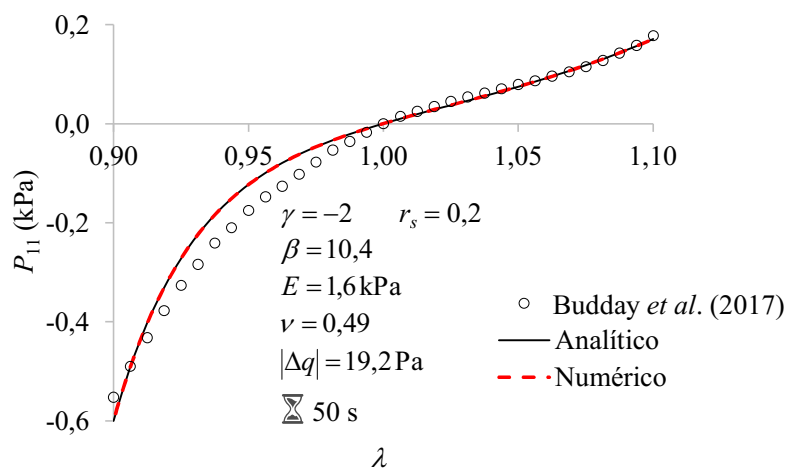
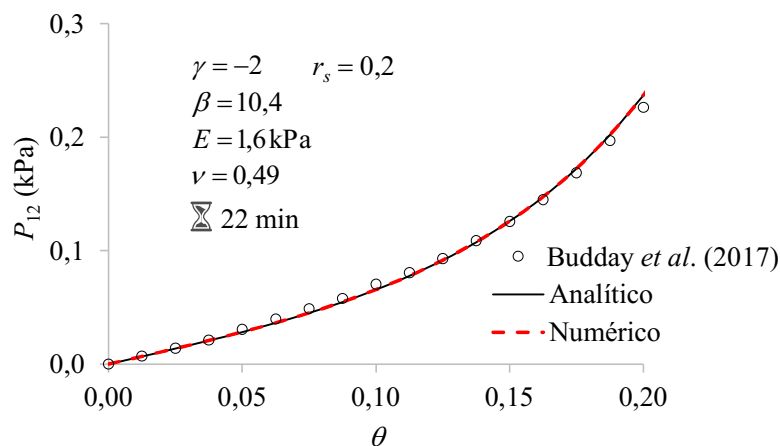
Figura 37 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Budday *et al.* (2017) para a EA do córtex.**Figura 38** – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Budday *et al.* (2017) para o CPT do córtex.**Figura 39** – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Budday *et al.* (2017) para a EA dos gânglios da base.

Figura 40 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Budday *et al.* (2017) para o CPT dos gânglios da base.



Observa-se uma ligeira diferença entre o modelo numérico/analítico e o resultado experimental no trecho da compressão, tanto para o córtex quanto para os gânglios basais. Ainda assim, de maneira geral, o modelo numérico/analítico mostrou um ajuste satisfatório com os dados experimentais de Budday *et al.* (2017). A seguir, as Figuras 41 e 42 mostram, respectivamente, a CS da EA e da EB de uma borracha cuja resposta experimental é de Treloar (1944).

Figura 41 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Treloar (1944) para a EA de uma borracha.

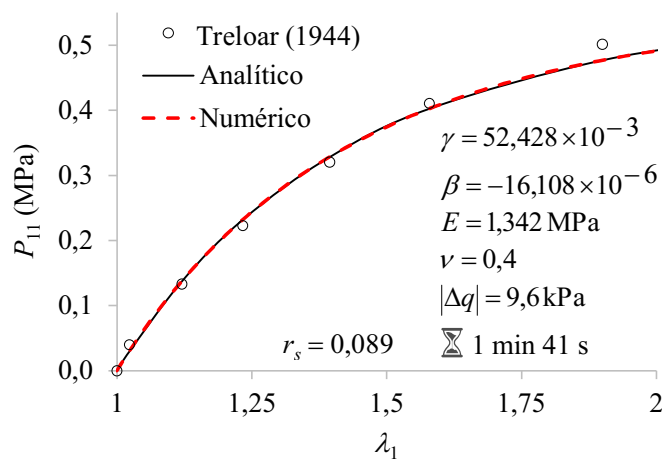
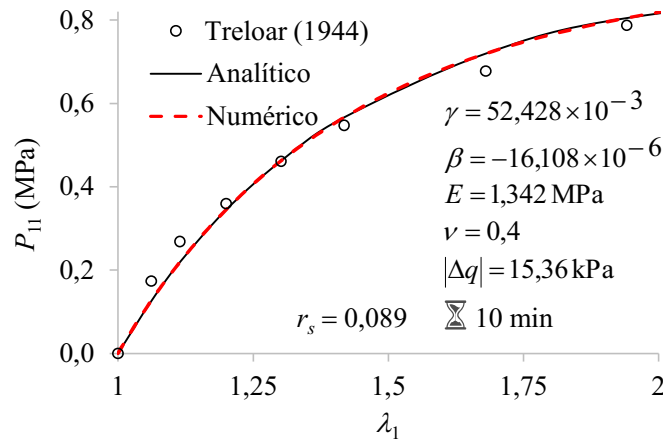


Figura 42 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Treloar (1944) para a EB de uma borracha.



A resposta numérica/analítica se aproxima satisfatoriamente da experimental de Treloar (1944). Ressalta-se que a CS é um processo desafiador (Abdusalamov e Itskov, 2025), sobretudo quando se considera três ou mais modos de deformação. A seguir, as Figuras 43 e 44 mostram, respectivamente, a CS da EA e da EB de um elastômero; a resposta experimental se refere à Figura 10 de Kut e Ryzińska (2023).

Figura 43 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Kut e Ryzińska (2023) para a EA de um elastômero.

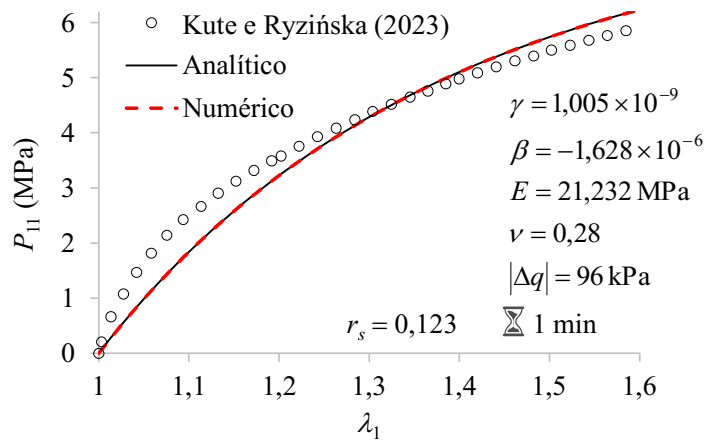
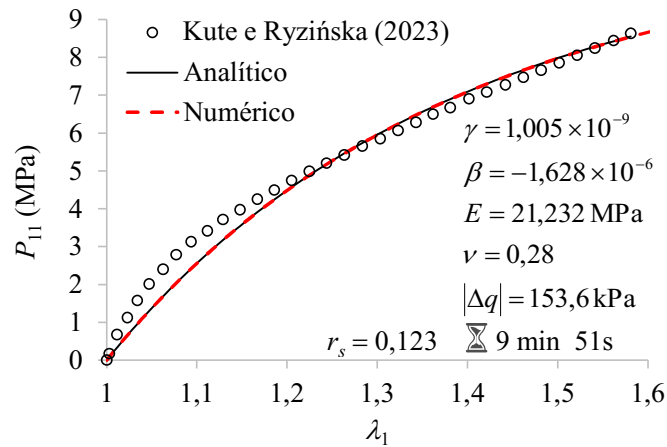


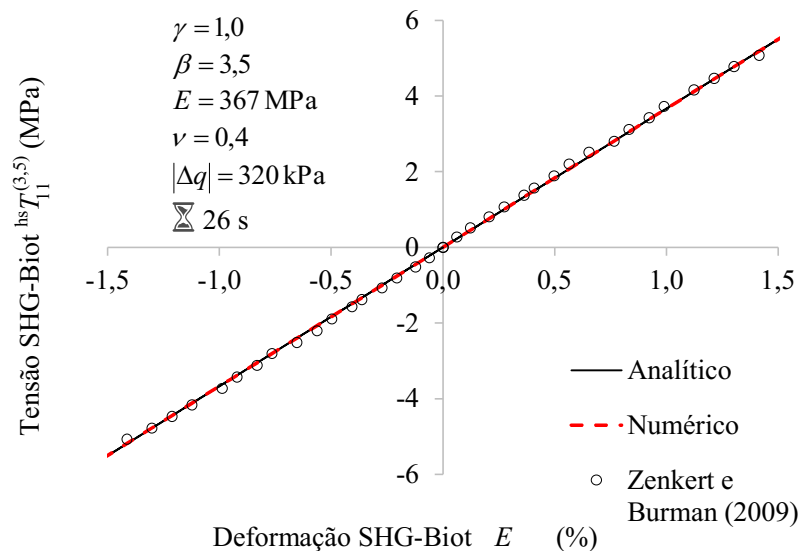
Figura 44 – Respostas numérica e analítica frente à experimental de Kut e Rzyńska (2023) para a EB de um elastômero.



Visualmente, das Figuras 43 e 44, percebe-se que a CS não forneceu um ajuste tão bom quanto os obtidos anteriormente. No entanto, esse exemplo aponta para a versatilidade e precisão da formulação mesmo para valores bem pequenos de γ e β .

Por fim, lembrando-se da motivação inicial deste trabalho (Figura 4), a Figura 45 mostra a comparação do típico diagrama experimental tensão-deformação (linear) de uma espuma polimérica, obtido de Zenkert e Burman (2009), com o modelos analítico/ numérico utilizando-se a deformação SHG-Biot.

Figura 45 – Diagrama tensão-deformação numérico e analítico frente ao típico diagrama experimental dado por Zenkert e Burman (2009) para a EA da espuma polimérica rígida de célula fechada Rohacell WF-200.

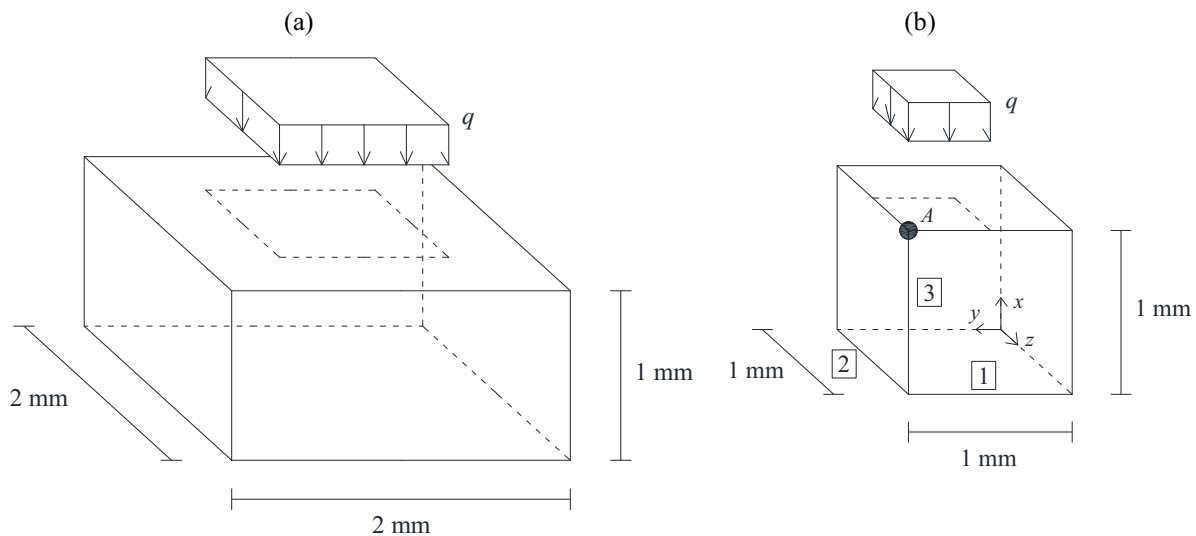


Percebe-se que o modelo analítico/numérico possui ótima correlação com os dados experimentais. Ressalta-se que o valor máximo de deformação atingido (1,5 % de deformação SHG-Biot) é maior do que aquele tipicamente empregado na indústria aeroespacial (0,4 % de deformação de Biot)¹³ para um tipo diferente de polímero, baseado em compósitos de matriz epóxi de fibra de carbono (Tsai e Melo, 2014). A curva *deformação SHG-Biot* $\times$ *estiramento* associada ao diagrama tensão-deformação da Figura 45 pode ser vista na Figura 5 ($\beta = 3,5$).

5.3 Deformação não homogênea 1

Este exemplo trata da compressão não homogênea do sólido indicado na Figura 46a (o carregamento q está centralizado na seção transversal). Lançando-se mão simetria do problema, apenas 1/4 do sólido foi modelado, como mostra a Figura 46b. Utilizou-se $\gamma = 0,783$, $\beta = 3,432$, $E = 800$ MPa, $\nu = 0,4$ e $\Delta q = -38,4$ MPa.

Figura 46 – (a) Compressão não homogênea. (b) Compressão não homogênea após a simetria.



A malha foi obtida após uma divisão de cada lado em 8 partes iguais. As condições de contorno relativas à Figura 46b são (os pares ordenados estão em mm):

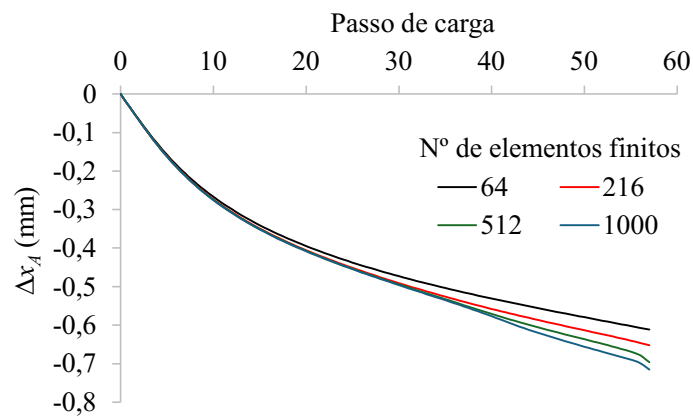
- o nó (0; 1; 1) foi restrito nas três direções;
- os nós da aresta 1, excetuando-se o nó (0; 1; 1), foram restritos apenas em x e z ;

¹³ De um ponto de vista pragmático, as diferentes medidas de deformação possuem valores próximos entre si até 1,5 %, o que justifica a comparação realizada.

- os nós da aresta [2], excetuando-se o nó (0; 1; 1), foram restritos apenas em x e y ;
- os nós contidos no plano yz em $x = 0$, excetuando-se os pertencentes às arestas [1] e [2], foram restritos apenas em x ;
- os nós da aresta [3], excetuando-se o nó (0; 1; 1), foram restritos apenas em y e z ;
- os nós contidos no plano xz em $y = 1$ mm, excetuando-se os pertencentes às arestas [2] e [3], foram restritos apenas em y ;
- os nós contidos no plano xy em $z = 1$ mm, excetuando-se os pertencentes às arestas [1] e [3], foram restritos apenas em z .

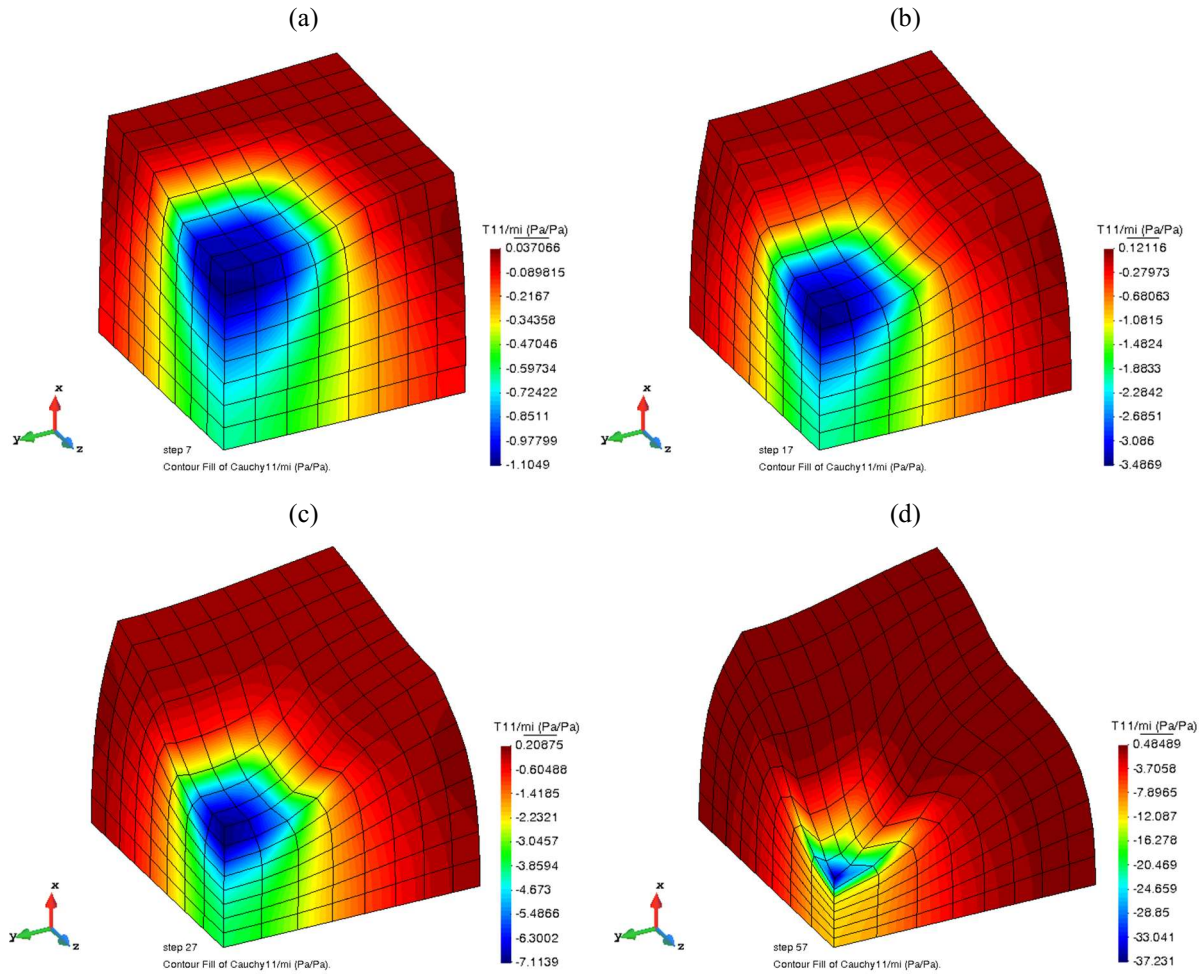
A Figura 47 mostra o deslocamento em x do nó A *versus* o passo de carga para quatro malhas diferentes. Conclui-se que, de um ponto de vista prático, uma malha de 512 elementos finitos é suficiente para se avaliar o deslocamento vertical do nó A .

Figura 47 – Deslocamento em x do nó $A \times$ Passo de carga.



A Figura 48 mostra, para alguns passos de carga, o aspecto da deformada do sólido e, em cores, o valor de T_{11}/μ para a malha de 512 elementos.

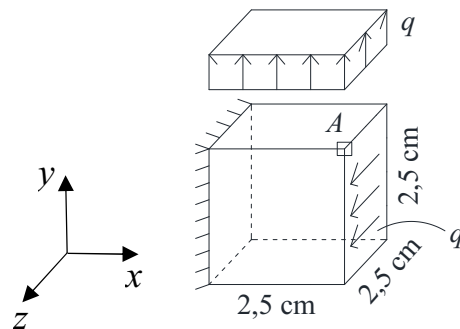
Figura 48 – Deformada do cubo e indicação de T_{11}/μ nos nós para o passo (a) 7 (b) 17 (c) 27 e (d) 57.



5.4 Deformação não homogênea 2

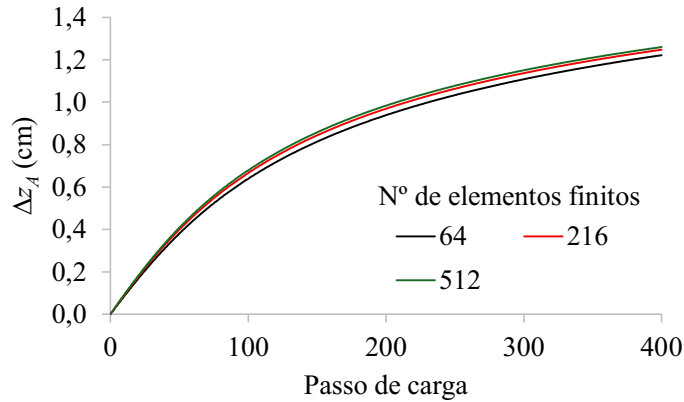
Este exemplo trata da aplicação de dois carregamentos iguais em um cubo engastado. A Figura 49 mostra as informações do modelo.

Figura 49 – Dados do exemplo de deformação não homogênea 2.



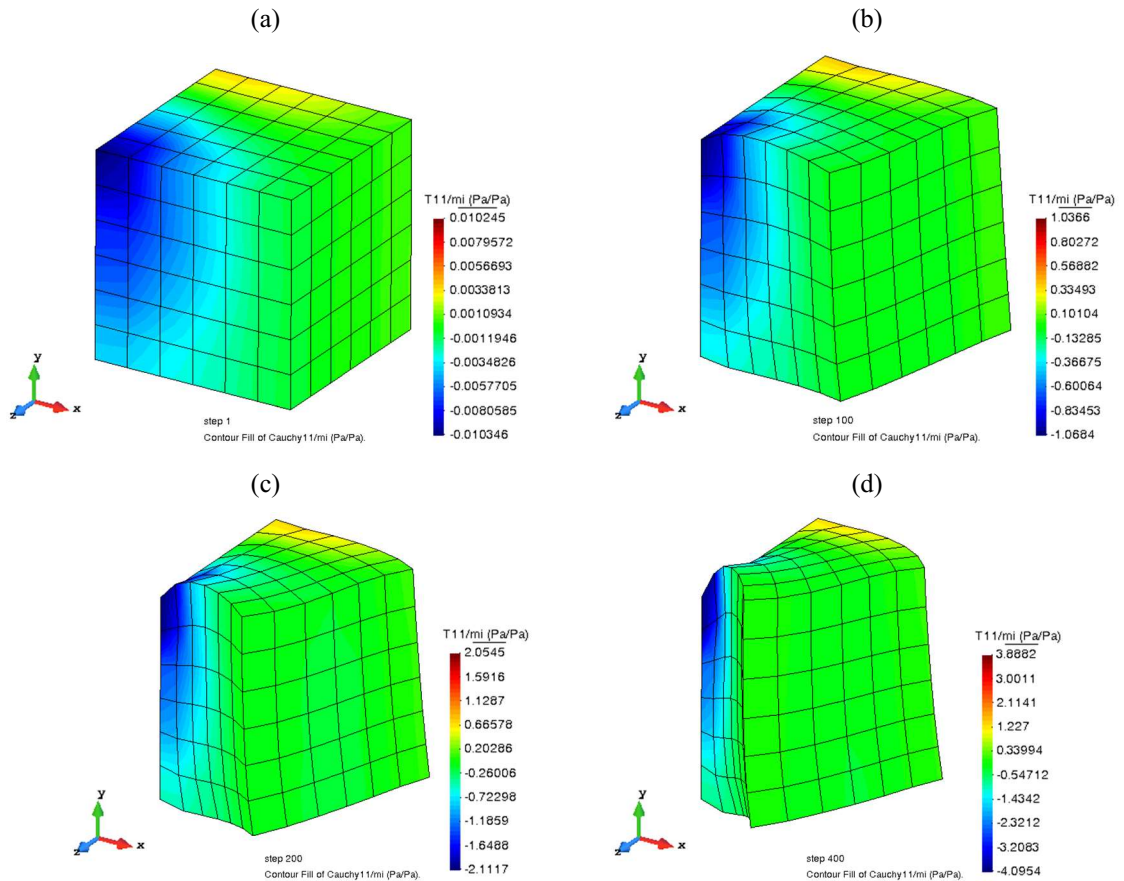
A Figura 50 mostra o deslocamento em z do nó A *versus* o passo de carga para três malhas diferentes. Percebe-se que uma malha com 216 elementos finitos é suficiente para se avaliar o deslocamento em z do nó A .

Figura 50 – Deslocamento em z do nó $A \times$ Passo de carga.



A Figura 51 mostra, para alguns passos de carga, o aspecto da deformada do sólido e, em cores, o valor de T_{11}/μ para a malha de 216 elementos.

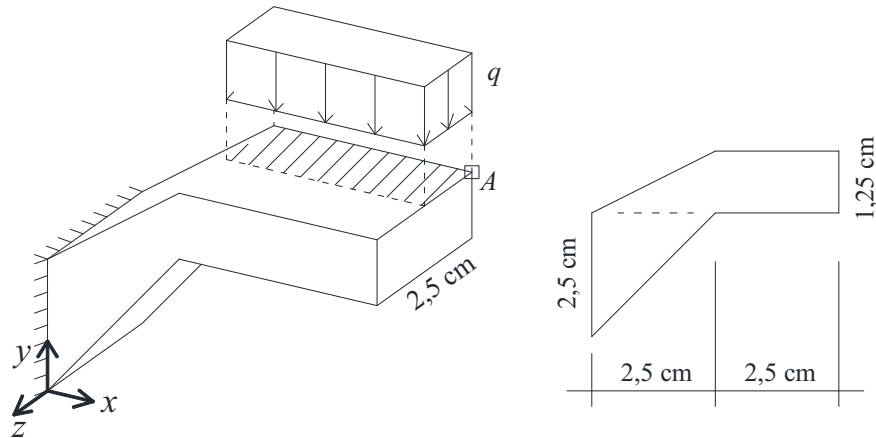
Figura 51 – Deformada do cubo e indicação de T_{11}/μ nos nós para o passo (a) 1 (b) 100 (c) 200 e (d) 400.



5.5 Deformação não homogênea 3

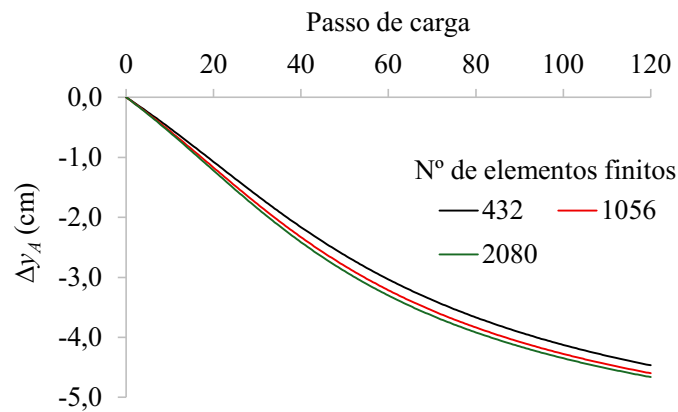
A Figura 52 mostra os dados do modelo deste exemplo, cuja face no plano yz está engastada.

Figura 52 – Dados do exemplo de deformação não homogênea 3.



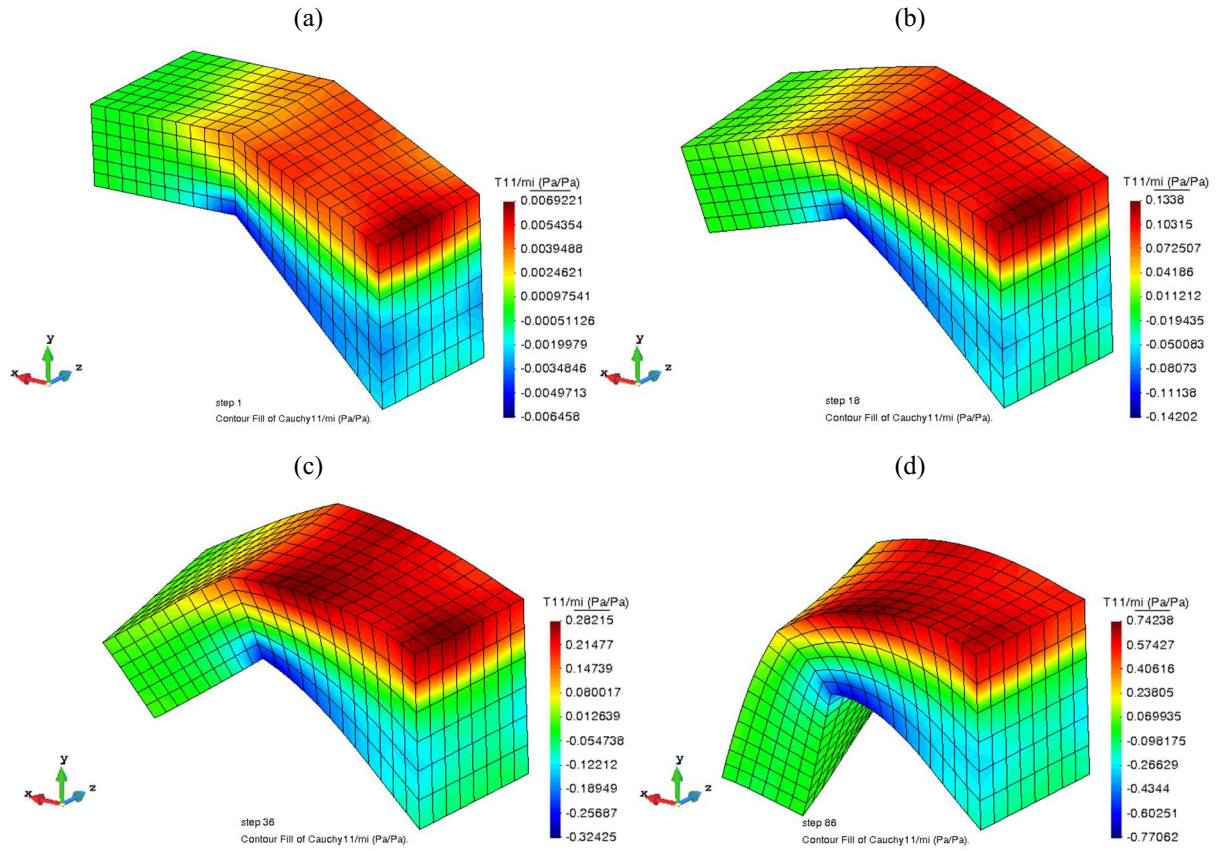
A Figura 53 mostra o deslocamento em y do nó A versus o passo de carga para três malhas diferentes. Infere-se que uma malha com 1056 elementos finitos é suficiente para se avaliar o deslocamento vertical do nó A .

Figura 53 – Deslocamento em y do nó $A \times$ Passo de carga.



A Figura 54 mostra, para alguns passos de carga, o aspecto da deformada do sólido e, em cores, o valor de T_{11}/μ para a malha de 1056 elementos.

Figura 54 – Deformada do cubo e indicação de T_{11}/μ nos nós para o passo (a) 1 (b) 18 (c) 36 e (d) 86.



6 CONCLUSÕES

Este trabalho implementou numericamente em âmbito 3D a FPMEF juntamente com um modelo constitutivo hookeano concebido em Peixoto *et al.* (2024). Alguns dos resultados desta tese foram publicados em Vasconcellos e Greco (2025).

Inicialmente, escreveu-se a FPMEF considerando um PEC Lagrangiano qualquer juntamente com a GNLH. Em seguida, considerou-se no modelo a família de deformação da Eq. (11). Mostrou-se que a equação constitutiva obtida atende ao PIRM. A seguir, determinou-se as derivadas do tensor de deformação SHG em relação ao gradiente de deformação. Elas foram escritas diretamente na base canônica do sistema de coordenadas cartesiano (direções globais), em vez de na base formada pelos autovetores de $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$. Essa estratégia desenvolvida é simples, geral e eficaz.

Para demonstrar a aplicabilidade da formulação desenvolvida alguns exemplos numéricos foram apresentados. Tendo em vista a versatilidade da equação constitutiva, alcançada por meio dos parâmetros E , ν , γ e β , foi possível a modelagem de borrachas, tecidos biológicos (fígado suíno, córtex e gânglios basais) e espumas, como demonstrado no item 5.2. A formulação permite modelar tanto materiais incompressíveis quanto compressíveis. A calibração individual e a calibração simultânea, realizada neste trabalho para dois modos puros de deformação, conduziram a resultados de excelente ajuste na maioria dos casos apresentados. Além disso, o modelo numérico forneceu respostas em extrema concordância com as analíticas.

Explorando-se ainda mais a formulação, três modelos de deformação não homogênea foram apresentados. A partir de uma análise qualitativa dos resultados, conclui-se que os modelos numéricos foram capazes de responder às condições impostas satisfatoriamente.

O tema abordado nesta tese abre inúmeros ramos de pesquisa para trabalhos futuros. Dentre eles, citam-se:

- o aprofundamento teórico do modelo constitutivo proposto sob o ponto de vista da policonvexidade;
- a consideração da irreversibilidade do material (curvas diferentes de carregamento e descarregamento, que descrevem o fenômeno da histerese);

- a consideração de efeitos térmicos e
- o desenvolvimento da formulação dinâmica.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A IMPORTÂNCIA de um sistema de proteção anti-gelo. Hangar 33. [Massaranduba], 6 mar. 2015. Disponível em: <http://blog.hangar33.com.br/protecao-anti-gelo/>. Acesso em: 16 abr. 2025.

ABDUSALAMOV, R.; ITSKOV, M. Rediscovering Hyperelasticity by Deep Symbolic Regression. **Computational Engineering, Finance, and Science**, PrePrint, 2025.

ALEXANDER, H. A constitutive relation for rubber-like materials. **International Journal of Engineering Science**, v. 6, n. 9, p. 549–563, 1968.

BAKER, M.; ERICKSEN, J. L. Inequalities Restricting the Form of the Stress-Deformation Relations for Isotropic Elastic Solids and Reiner-Rivlin Fluids. **Journal of the Washington Academy of Sciences**, v. 44, n. 2, p. 33–35, 1954.

BALL, J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 63, n. 4, p. 337–403, 1976.

BALL, R. C.; DOI, M.; EDWARDS, S. F.; WARNER, M. Elasticity of entangled networks. **Polymer**, v. 22, n. 8, p. 1010–1018, 1981.

BECHIR, H.; CHEVALIER, L.; CHAOUCHE, M.; BOUFALA, K. Hyperelastic constitutive model for rubber-like materials based on the first Seth strain measures invariant. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, v. 25, n. 1, p. 110–124, 2006.

BHUIYAN, M. Z. H.; KHANAFER, K.; RAFI, E. I.; SHIHAB, M. S. Non-Linear Hyperelastic Model Analysis and Numerical Validation of 3D Printed PLA+ Material Incorporating Various Infill Densities. **Machines**, v. 13, n. 2, p. 91, 2025.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. [s.l.] Cambridge University Press, 2008.

BONET, J.; WOOD, R. D.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5–7, p. 579–595, 2000.

BRANNON, R. M. **Rotation, Reflection, and Frame Changes**. [s.l.] IOP Publishing, 2018.

BUDDAY, S.; SOMMER, G.; BIRKL, C.; LANGKAMMER, C.; HAYBAECK, J.; KOHNERT, J.; BAUER, M.; PAULSEN, F.; STEINMANN, P.; KUHL, E.; HOLZAPFEL, G. A. Mechanical characterization of human brain tissue. **Acta Biomaterialia**, v. 48, p. 319–340, 2017.

BUONSANTI, M.; ROYER-CARFAGNI, G. From 3-D Nonlinear Elasticity Theory to 1-D Bars with Nonconvex Energy. **Journal of Elasticity**, v. 70, n. 1–3, p. 87–100, 2003.

CARROLL, M. M. A Strain Energy Function for Vulcanized Rubbers. **Journal of Elasticity**, v. 103, n. 2, p. 173–187, 2011.

CESSNA FLYER ASSOCIATION. Pneumatic boots illustration. Upland: Cessna Flyer Association, [2025]. Disponível em: <https://www.cessnaflyer.org/images/Pneumatic-boots-illustrati-copy.jpg>. Acesso em: 16 abr. 2025.

CODA, H. B. **An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description**. 17th International Congress of Mechanical Engineering. **Anais**. ABCM, 2003.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33–35, p. 3541–3557, 2004.

CURNIER, A.; RAKOTOMANANA, L. Generalized strain and stress measures - critical survey and new results. **Engineering Transactions**, v. 39, p. 461–538, 1991.

CURNIER, A.; ZYSSET, P. A family of metric strains and conjugate stresses, prolonging usual material laws from small to large transformations. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 10, p. 3057–3086, 2006.

DAL, H.; AÇIKGÖZ, K.; BADIENIA, Y. On the Performance of Isotropic Hyperelastic Constitutive Models for Rubber-Like Materials: A State of the Art Review. **Applied Mechanics Reviews**, v. 73, n. 2, p. 020802, 2021.

DAL, H.; GÜLTEKIN, O.; AÇIKGÖZ, K. An extended eight-chain model for hyperelastic and finite viscoelastic response of rubberlike materials: Theory, experiments and numerical aspects. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 145, p. 104159, 2020.

DARIJANI, H.; NAGHDABADI, R. Kinematics and kinetics modeling of thermoelastic continua based on the multiplicative decomposition of the deformation gradient. **International Journal of Engineering Science**, v. 62, p. 56–69, 2013.

DAVIDSON, J. D.; GOULBOURNE, N. C. A nonaffine network model for elastomers undergoing finite deformations. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 61, n. 8, p. 1784–1797, 2013.

DOYLE, T. C.; ERICKSEN, J. L. Nonlinear Elasticity. Em: DRYDEN, H. L.; KÁRMÁN, TH. VON (Eds.). **Advances in Applied Mechanics**. New York: Academic Press, 1956. v. 4, p. 53–115.

DÜSTER, A.; HARTMANN, S.; RANK, E. p-FEM applied to finite isotropic hyperelastic bodies. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, n. 47–48, p. 5147–5166, 2003.

EVERETT, Hayley. Researchers construct stronger, more flexible hydrogels for artificial tendons. 3D Printing Industry, [S.l.], 26 fev. 2021. Disponível em: <https://3dprintingindustry.com/news/researchers-construct-stronger-more-flexible-hydrogels-for-artificial-tendons-185197/>. Acesso em: 16 abr. 2025.

FARAHANI, K.; NAGHDABADI, R. Basis free relations for the conjugate stresses of the strains based on the right stretch tensor. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 22, p. 5887–5900, 2003.

FLORY, P. J. Thermodynamic relations for high elastic materials. **Transactions of the Faraday Society**, v. 57, p. 829–838, 1961.

FOSDICK, R. L.; SERRIN, J. On the impossibility of linear Cauchy and Piola-Kirchhoff constitutive theories for stress in solids. **Journal of Elasticity**, v. 9, p. 83–89, 1979.

GAO, Z.; LISTER, K.; DESAI, J. P. Constitutive Modeling of Liver Tissue: Experiment and Theory. **Annals of Biomedical Engineering**, v. 38, n. 2, p. 505–516, 2010.

GONZALEZ, O.; STUART, A. M. **A First Course in Continuum Mechanics**. [s.l.] Cambridge University Press, 2008.

GRECO, M.; PEIXOTO, D. H. N. Comparative assessments of strain measures for nonlinear analysis of truss structures at large deformations. **Engineering Computations**, v. 39, n. 5, p. 1621–1641, 2022.

GURTIN, M. E. **An Introduction to Continuum Mechanics**. New York: Academic Press, 1981.

GURTIN, M. E.; FRIED, E.; ANAND, L. **The Mechanics and Thermodynamics of Continua**. [s.l.] Cambridge University Press, 2010.

HARTMANN, S.; NEFF, P. Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 11, p. 2767–2791, 2003.

HAVASI, K.; KOSSA, A. A novel approach to calculating the equibiaxial stress response from biaxial tests with non-homogeneous deformations. **The Journal of Strain Analysis for Engineering Design**, 2025.

HEINRICH, G.; KALISKE, M. Theoretical and numerical formulation of a molecular based constitutive tube-model of rubber elasticity. **Computational and Theoretical Polymer Science**, v. 7, n. 3–4, p. 227–241, 1997.

HILL, R. On constitutive inequalities for simple materials—I. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 16, n. 4, p. 229–242, 1968.

HILL, R. Aspects of Invariance in Solid Mechanics. **Advances in Applied Mechanics**, v. 18, p. 1–75, 1979.

HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear solid mechanics**. Chichester: Wiley, 2000.

IRGENS, F. **Continuum Mechanics**. Berlin: Springer, 2008.

ISTIAK, A.; ISLAM, S.; ADOUNI, M.; FAISAL, T. R. Hyperelastic constitutive modeling of healthy and enzymatically mediated degraded articular cartilage. **Biomechanics and Modeling in Mechanobiology**, 2025.

ITSKOV, M. On the application of the additive decomposition of generalized strain measures in large strain plasticity. **Mechanics Research Communications**, v. 31, n. 5, p. 507–517, 2004.

JI, W.; WAAS, A. M.; BAZANT, Z. P. On the Importance of Work-Conjugacy and Objective Stress Rates in Finite Deformation Incremental Finite Element Analysis. **Journal of Applied Mechanics**, v. 80, n. 4, 2013.

KALISKE, M.; HEINRICH, G. An Extended Tube-Model for Rubber Elasticity: Statistical-Mechanical Theory and Finite Element Implementation. **Rubber Chemistry and Technology**, v. 72, n. 4, p. 602–632, 1999.

KALISKE, M.; ROTHERT, H. Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. **Computational Mechanics**, v. 19, n. 3, p. 228–239, 1997.

KANG, J.; TAN, L. X.; LIU, Q. P.; WANG, S. Y.; BRUHNS, O. T.; XIAO, H. Unified and accurate simulation for large elastic strain responses of rubberlike soft materials under multiple modes of loading. **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, v. 36, p. 155–169, 2024.

KHIÊM, V. N.; ITSKOV, M. Analytical network-averaging of the tube model: **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 95, p. 254–269, 2016.

KOROBAYNIKOV, S. N. Objective Symmetrically Physical Strain Tensors, Conjugate Stress Tensors, and Hill's Linear Isotropic Hyperelastic Material Models. **Journal of Elasticity**, v. 136, n. 2, p. 159–187, 2019.

____. Families of Hooke-like isotropic hyperelastic material models and their rate formulations. **Archive of Applied Mechanics**, v. 93, n. 10, p. 3863–3893, 2023.

KOROBAYNIKOV, S. N.; LARICHKIN, A. Y. Simulating body deformations with initial stresses using Hooke-like isotropic hypoelasticity models based on corotational stress rates. **ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 104, n. 2, 2023.

KOROBAYNIKOV, S. N.; LARICHKIN, A. Y.; ROTANOVA, T. A. Hyperelasticity models extending Hooke's law from small to moderate strains and experimental verification of their scope of application. **International Journal of Solids and Structures**, v. 252, 2022.

KOSSA, A. Closed-Form Analytical Solutions for Stability Bounds of the Incompressible Mooney–Rivlin Hyperelastic Model Under Standard Homogeneous Loadings. **International Journal of Applied Mechanics**, n. 2550015, p. 1-27, 2025.

KUT, S.; RYZIŃSKA, G. Modeling Elastomer Compression: Exploring Ten Constitutive Equations. **Materials**, v. 16, n. 11, p. 4121, 2023.

KUZNETSOV, S. V. Hyperelasticity: Lennard-Jones potentials. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 170, p. 105014, 2025.

LAMBERT-DIANI, J.; REY, C. New phenomenological behavior laws for rubbers and thermoplastic elastomers. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, v. 18, n. 6, p. 1027–1043, 1999.

LASDON, L. S.; WARREN, A. D.; JAIN, A.; RATNER, M. Design and testing of a generalized reduced gradient code for nonlinear programming. **Transactions on Mathematical Software**, v. 4, n. 1, p. 34–50, 1978.

MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o MEFP**. Tese de doutorado. São Carlos: Universidade de São Paulo, 2008.

MAL, A. K.; SINGH, S. J. **Deformation of Elastic Solids**. [s.l.] Prentice Hall, 1991.

MARSDEN, J. E.; HUGHES, T. J. R. **Mathematical Foundations of Elasticity**. Mineola: Dover Publications, 1994.

MARTÍN-SOSA, E.; TÁVARA, L.; OJEDA, J.; ESTEFANI, A. Anisotropic and hyperelastic mechanical response of 3D printed TPU parts. **Progress in Additive Manufacturing**, 2025.

MASE, G. **Schaum's Outline of Continuum Mechanics**. [s.l.] McGraw Hill, 1970.

MASRAR, Y.; ETTOUILL, M. Finite Element Analysis of Nonlinear Strains in Hyperelastic Cylinder: Convergence Study and Bearing Design Application. **Mathematical Modelling of Engineering Problems**, v. 12, n. 1, p. 82–94, 2025.

MIEHE, C. Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, n. 12, p. 1981–2004, 1994.

MIEHE, C.; GÖKTEPE, S.; LULEI, F. A micro-macro approach to rubber-like materials - Part I: the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 52, n. 11, p. 2617–2660, 2004.

MIEHE, C.; KECK, J. Superimposed finite elastic–viscoelastic–plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 48, n. 2, p. 323–365, 2000.

MIRI, A. K. *et al.* Microfluidics-Enabled Multimaterial Maskless Stereolithographic Bioprinting. **Advanced Materials**, v. 30, n. 1800242, p. 1–9, 2018.

MOONEY, M. A Theory of Large Elastic Deformation. **Journal of Applied Physics**, v. 11, n. 9, p. 582–592, 1940.

MURDOCH, A. I. Objectivity in classical continuum physics: a rationale for discarding the “principle of invariance under superposed rigid body motions” in favour of purely objective considerations. **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, v. 15, n. 3, p. 309–320, 2003.

MUSCHIK, W.; RESTUCCIA, L. Changing the Observer and Moving Materials in Continuum Physics: Objectivity and Frame-Indifference. **Technische Mechanik**, v. 22, n. 2, p. 152–160, 2002.

OGDEN, R. W. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. **Proceedings of the Royal Society of London A**, v. 326, n. 1567, p. 565–584, 1972a.

____. Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. **Proceedings of the Royal Society of London A**, v. 328, n. 1575, p. 567–583, 1972b.

OGDEN, R. W. Elastic Deformations of Rubberlike Solids. *Em: Mechanics of Solids*. [s.l.] Elsevier, 1982. p. 499–537.

PARK, S.-J. Comparative Study on Hyperelastic Constitutive Models for the Static and Dynamic Behavior of Resilient Mounts. **Materials**, v. 18, n. 2, p. 311, 2025.

PASCON, J. P. **Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica**. Tese de doutorado. São Carlos: Universidade de São Paulo, 2012.

PEIXOTO, D. H. N. **Estudo sobre diferentes medidas de deformação e apresentação da família Seno-Hiperbólica Generalizada, com aplicação na modelagem de polímeros, biomateriais.** Tese de doutorado. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2024.

PEIXOTO, D. H. N.; GRECO, M.; VASCONCELLOS, D. B. A new family of strain tensors based on the hyperbolic sine function. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 21, n. 2, p. e529, 2024.

RIVLIN, R. S. Large elastic deformations of isotropic materials IV. Further developments of the general theory. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, v. 241, n. 835, p. 379–397, 1948.

SAFA, M.; MOHAMED, T.; MAKREM, A. On homogeneous and inhomogeneous deformation response of some generalized linear incompressible transversely isotropic hyperelastic potentials. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 173, p. 105024, 2025.

SAUCEDO-MORA, L.; GARCÍA-BAÑALES, O.; MONTÁNS, F. J.; BENÍTEZ, J. M. A two-parameter strain energy function for brain matter: An extension of the Hencky model to incorporate locking. **Brain Multiphysics**, v. 2, n. 100036, 2021.

SAUTTER, K. B.; MESSMER, M.; TESCHEMACHER, T.; BLETZINGER, K.-U. Limitations of the St. Venant–Kirchhoff material model in large strain regimes. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 147, p. 104207, 2022.

SETH, B. R. **Generalized Strain Measure with Applications to Physical Problems** (M. Reiner & D. Abir, Eds.). Second-order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics: International Symposium. **Anais**. Haifa: Pergamon Press, 1964.

SHABANA, A. A. Finite Element Incremental Approach and Exact Rigid Body Inertia. **Journal of Mechanical Design**, v. 118, n. 2, p. 171–178, 1996.

SHABANA, A. A. Definition of the Slopes and the Finite Element Absolute Nodal Coordinate Formulation. **Multibody System Dynamics**, v. 1, n. 3, p. 339–348, 1997.

SHARIFF, M. H. B. M. Strain Energy Function for Filled and Unfilled Rubberlike Material. **Rubber Chemistry and Technology**, v. 73, n. 1, p. 1–18, 2000.

SIMO, J. C.; TAYLOR, R. L.; PISTER, K. S. Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 51, p. 177–208, 1985.

SIQUEIRA, T. M. **Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos 3D pelo método dos elementos finitos posicional**. Tese de doutorado. São Carlos: Universidade de São Paulo, 2019.

SMITH, D. R. **An Introduction to Continuum Mechanics - after Truesdell and Noll**. [s.l.] Springer Science, 1993. v. 22.

STUMPF, F. T.; MARCZAK, R. J. Constitutive framework of a new hyperelastic model for isotropic rubber-like materials for finite element implementation. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 18, n. 2, 2021.

SWANSON, S. R. A Constitutive Model for High Elongation Elastic Materials. **Journal of Engineering Materials and Technology**, v. 107, n. 2, p. 110–114, 1985.

TRELOAR, L. R. G. The elasticity of a network of long-chain molecules - II. **Trans. Faraday Soc.**, v. 39, p. 241–246, 1943.

____. Stress-Strain Data for Vulcanized Rubber under Various Types of Deformation. **Rubber Chemistry and Technology**, v. 17, n. 4, p. 813–825, 1944.

TRUEDELLE, C.; NOLL, W. **The Non-Linear Field Theories of Mechanics**. 3. ed. [s.l.] Springer, 2004.

TSAI, S. W.; MELO, J. D. D. An invariant-based theory of composites. **Composites Science and Technology**, v. 100, p. 237–243, 2014.

VASCONCELLOS, D. B.; GRECO, M. Reconciling the strain-stretching curve with the stress-strain diagram of a Hooke-like isotropic hyperelastic material using the Biot's hyperbolic sine strain tensor. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 22, p. e8362, 2025.

VAVERKA, J.; BURŠA, J. A modification of Holzapfel–Ogden hyperelastic model of myocardium better describing its passive mechanical behavior. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, v. 111, p. 105586, 2025.

VOLOKH, K. Y. Comments and authors' reply on "Linear stress-strain relations in nonlinear elasticity" by A. Chiskis and R. Parnes, (Acta Mech. 146, 109-113, 2001). **Acta Mechanica**, v. 171, p. 241–245, 2004.

WHEELER, L. T.; CASEY, J. Fréchet differentiation of the stretch and rotation tensors. **Mathematics and Mechanics of Solids**, v. 16, n. 7, p. 753–768, 2011.

YEOH, O. H. Characterization of Elastic Properties of Carbon-Black-Filled Rubber Vulcanizates. **Rubber Chemistry and Technology**, v. 63, n. 5, p. 792–805, 1990.

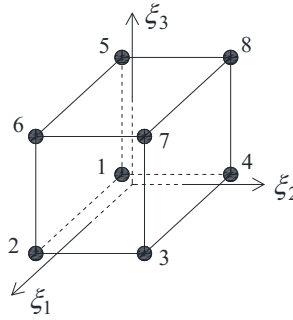
YEOH, O. H.; FLEMING, P. D. A new attempt to reconcile the statistical and phenomenological theories of rubber elasticity. **Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics**, v. 35, n. 12, p. 1919–1931, 1997.

ZENKERT, D.; BURMAN, M. Tension, compression and shear fatigue of a closed cell polymer foam. **Composites Science and Technology**, v. 69, n. 6, p. 785–792, 2009.

APÊNDICE A

Este Apêndice mostra algumas informações sobre o elemento finito utilizado nas análises numéricas. A Figura 55 mostra o elemento hexaédrico de 8 nós no espaço fictício.

Figura 55 – Numeração dos nós no elemento hexaédrico.



A Tabela 2 mostra as coordenadas dos nós da Figura 55.

Tabela 2 – Coordenadas dos nós do elemento hexaédrico.

Coordenadas Nó	ξ_1	ξ_2	ξ_3
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	1	1	-1
4	-1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	1	1	1
8	-1	1	1

As funções de forma do elemento da Figura 55 estão indicadas na Eq. (A1).

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) & N_5 &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3) \\
 N_2 &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) & N_6 &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3) \\
 N_3 &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3) & N_7 &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3) \\
 N_4 &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3) & N_8 &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3)
 \end{aligned} \tag{A1}$$

Lembrando-se que $\xi = \{\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3\}^\top$, e diante da Eq. (A1), monta-se $[N_{ia}(\xi)]$,

$$[N_{ia}(\xi)] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}_{3 \times 24}. \quad (\text{A2})$$

Agora, diante da Figura 55, constrói-se $\mathbf{p}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{x}$ de acordo com o item 4.2,

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ p_3^{(1)} \\ p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \\ p_3^{(2)} \\ \vdots \\ p_1^{(8)} \\ p_2^{(8)} \\ p_3^{(8)} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ \vdots \\ x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \\ x_3^{(8)} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathcal{p}_1 \\ \mathcal{p}_2 \\ \mathcal{p}_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathcal{x}_1 \\ \mathcal{x}_2 \\ \mathcal{x}_3 \end{Bmatrix}, \quad (\text{A3})$$

em que $p_j^{(i)}$ $[x_j^{(i)}]$ indica a posição na direção j do nó i na configuração de referência [atual]. De posse das Eqs. (A2) e (A3), $\mathbf{p}$ e $\mathbf{x}$ são concebidos como

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{p}_1 \\ \mathcal{p}_2 \\ \mathcal{p}_3 \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}_{3 \times 24} \begin{Bmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ p_3^{(1)} \\ p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \\ p_3^{(2)} \\ \vdots \\ p_1^{(8)} \\ p_2^{(8)} \\ p_3^{(8)} \end{Bmatrix}_{24 \times 1} \quad \text{e} \quad (\text{A4})$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}_{3 \times 24} \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ \vdots \\ x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \\ x_3^{(8)} \end{Bmatrix}_{24 \times 1}. \quad (\text{A5})$$

Por fim, as derivadas da Eq. (A1) em relação às coordenadas naturais são dadas por

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{8}(1-\xi_2)(1-\xi_3) & \frac{\partial N_1}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{8}(1-\xi_1)(1-\xi_3) & \frac{\partial N_1}{\partial \xi_3} = -\frac{1}{8}(1-\xi_1)(1-\xi_2) \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi_1} = \frac{1}{8}(1-\xi_2)(1-\xi_3) & \frac{\partial N_2}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{8}(1+\xi_1)(1-\xi_3) & \frac{\partial N_2}{\partial \xi_3} = -\frac{1}{8}(1+\xi_1)(1-\xi_2) \\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi_1} = \frac{1}{8}(1+\xi_2)(1-\xi_3) & \frac{\partial N_3}{\partial \xi_2} = \frac{1}{8}(1+\xi_1)(1-\xi_3) & \frac{\partial N_3}{\partial \xi_3} = -\frac{1}{8}(1+\xi_1)(1+\xi_2) \\ \frac{\partial N_4}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{8}(1+\xi_2)(1-\xi_3) & \frac{\partial N_4}{\partial \xi_2} = \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1-\xi_3) & \frac{\partial N_4}{\partial \xi_3} = -\frac{1}{8}(1-\xi_1)(1+\xi_2) \\ \frac{\partial N_5}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{8}(1-\xi_2)(1+\xi_3) & \frac{\partial N_5}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{8}(1-\xi_1)(1+\xi_3) & \frac{\partial N_5}{\partial \xi_3} = \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1-\xi_2) \\ \frac{\partial N_6}{\partial \xi_1} = \frac{1}{8}(1-\xi_2)(1+\xi_3) & \frac{\partial N_6}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{8}(1+\xi_1)(1+\xi_3) & \frac{\partial N_6}{\partial \xi_3} = \frac{1}{8}(1+\xi_1)(1-\xi_2) \\ \frac{\partial N_7}{\partial \xi_1} = \frac{1}{8}(1+\xi_2)(1+\xi_3) & \frac{\partial N_7}{\partial \xi_2} = \frac{1}{8}(1+\xi_1)(1+\xi_3) & \frac{\partial N_7}{\partial \xi_3} = \frac{1}{8}(1+\xi_1)(1+\xi_2) \\ \frac{\partial N_8}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{8}(1+\xi_2)(1+\xi_3) & \frac{\partial N_8}{\partial \xi_2} = \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1+\xi_3) & \frac{\partial N_8}{\partial \xi_3} = \frac{1}{8}(1-\xi_1)(1+\xi_2) \end{array}. \quad (\text{A6})$$

APÊNDICE B

Este Apêndice determina a componente P_{12} relativa ao cisalhamento em estado plano de tensão, dado pelo gradiente de deformação

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{B1})$$

Definindo-se ν por

$$\nu = \arctan\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (\text{B2})$$

a decomposição polar fornece

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sin \nu}{\cos \nu}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sin \nu}{\cos \nu}, \quad \lambda_3 = \lambda_3, \quad [\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ \sin \nu & \frac{1 + \sin^2 \nu}{\cos \nu} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{B3})$$

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -\sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [{}_{\mathbf{U}}\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} \frac{\cos \nu}{\sqrt{2 + 2 \sin \nu}} & \frac{\cos \nu}{\sqrt{2 - 2 \sin \nu}} & 0 \\ \frac{\sin \nu + 1}{\sqrt{2 + 2 \sin \nu}} & \frac{\sin \nu - 1}{\sqrt{2 - 2 \sin \nu}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B4})$$

Neste Apêndice, seja ${}^{\text{hs}}\mathbf{E}^{(\beta)} = {}^g\mathbf{E} = g(\lambda_i) (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i)$. Assim, $g(\lambda_i)$ é dado por

$$g(\lambda_i) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \sinh \left[\frac{\beta}{\gamma} (\lambda_i^\gamma - 1) \right] & \gamma \neq 0 \\ \frac{1}{\beta} \sinh (\ln \lambda_i) = \frac{1}{2\beta} (\lambda_i^\beta - \lambda_i^{-\beta}) & \gamma = 0 \end{cases}. \quad (\text{B5})$$

E ainda,

$$g'(\lambda_i) = \begin{cases} \lambda_i^{\gamma-1} \cosh\left[\frac{\beta}{\gamma}(\lambda_i^\gamma - 1)\right] & \gamma \neq 0 \\ \frac{1}{2}(\lambda_i^{\beta-1} + \lambda_i^{-\beta-1}) & \gamma = 0 \end{cases}. \quad (\text{B6})$$

Aplicando-se a Eq. (13) nas direções principais, tem-se

$$\begin{aligned} [\text{hs } \overline{\mathbf{T}}^{(\beta)}] &= 2\mu [\text{hs } \overline{\mathbf{E}}^{(\beta)}] + \lambda (\text{tr} [\text{hs } \overline{\mathbf{E}}^{(\beta)}]) [\mathbf{I}] \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{hs } \overline{T}_{11}^{(\beta)} & 0 & 0 \\ 0 & \text{hs } \overline{T}_{22}^{(\beta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= 2\mu \begin{bmatrix} g(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & g(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & g(\lambda_3) \end{bmatrix} + \lambda [g(\lambda_1) + g(\lambda_2) + g(\lambda_3)] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

Da Eq. (B7) conclui-se que

$$g(\lambda_3) = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} [g(\lambda_1) + g(\lambda_2)]. \quad (\text{B8})$$

Isolando-se λ_3 na Eq. (B5) tem-se

$$\lambda_3 = \begin{cases} \left\{ \frac{\gamma}{\beta} \text{arcsinh}[\beta g(\lambda_3)] + 1 \right\}^{1/\gamma} & \gamma \neq 0, \\ \exp\{\text{arcsinh}[\beta g(\lambda_3)]\} & \gamma = 0 \end{cases}, \quad (\text{B9})$$

com $g(\lambda_3)$ dado pela Eq. (B8). Novamente a partir da Eq. (B7) encontra-se

$$\text{hs } \overline{T}_{11}^{(\beta)} = (2\mu + \lambda)g(\lambda_1) + \lambda[g(\lambda_2) + g(\lambda_3)] \quad \text{e} \quad (\text{B10})$$

$$\text{hs } \overline{T}_{22}^{(\beta)} = (2\mu + \lambda)g(\lambda_2) + \lambda[g(\lambda_1) + g(\lambda_3)], \quad (\text{B11})$$

com $g(\lambda_1)$ e $g(\lambda_2)$ dado pela Eq. (B5). Substituindo-se as Eqs. (B10) e (B11) na Eq. (188) obtém-se

$$\bar{S}_{11} = \frac{g'(\lambda_1)}{\lambda_1} {}^{\text{hs}}\bar{T}_{11}^{(\beta)} \quad \text{e} \quad (\text{B12})$$

$$\bar{S}_{22} = \frac{g'(\lambda_2)}{\lambda_2} {}^{\text{hs}}\bar{T}_{22}^{(\beta)}, \quad (\text{B13})$$

com $g'(\lambda_i)$ dado pela Eq. (B6). Uma vez determinado $[\bar{\mathbf{S}}]$, escreve-se

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{Q}] [\bar{\mathbf{S}}] [\mathbf{Q}]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\cos \nu}{\sqrt{2+2\sin \nu}} & \frac{\cos \nu}{\sqrt{2-2\sin \nu}} & 0 \\ \frac{\sin \nu + 1}{\sqrt{2+2\sin \nu}} & \frac{\sin \nu - 1}{\sqrt{2-2\sin \nu}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{S}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\cos \nu}{\sqrt{2+2\sin \nu}} & \frac{\sin \nu + 1}{\sqrt{2+2\sin \nu}} & 0 \\ \frac{\cos \nu}{\sqrt{2-2\sin \nu}} & \frac{\sin \nu - 1}{\sqrt{2-2\sin \nu}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B14})$$

Desenvolvendo-se a Eq. (B14), S_{22} e S_{12} são dados por

$$S_{22} = \frac{1+\sin \nu}{2} \bar{S}_{11} + \frac{1-\sin \nu}{2} \bar{S}_{22} \quad \text{e} \quad (\text{B15})$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{\cos \nu}{2} (\bar{S}_{11} - \bar{S}_{22}). \quad (\text{B16})$$

Da Eq. (116) escreve-se $[\mathbf{P}] = [\mathbf{F}] [\mathbf{S}]$ e, então,

$$P_{12} = S_{12} + \theta S_{22}. \quad (\text{B17})$$