



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Lidiane de Paula Pinto Mapa

**ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DA FLAMBAGEM DE LAMINADOS
DUPLO-DUPLO SOB CARGAS AXIAIS E DE CISALHAMENTO**

Belo Horizonte

2025

Lidianne de Paula Pinto Mapa

**ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DA FLAMBAGEM DE LAMINADOS
DUPLO-DUPLO SOB CARGAS AXIAIS E DE CISALHAMENTO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. PhD. Antônio Ferreira Ávila

Belo Horizonte

2025

M297e	<p>Mapa, Lidianne de Paula Pinto. Estudo analítico e numérico da flambagem de laminados duplo-duplo sob cargas axiais e de cisalhamento [recurso eletrônico] / Lidianne de Paula Pinto Mapa. - 2025. 1 recurso online (134 f. : il., color.) : pdf.</p>
	Orientador: Antonio Ferreira Ávila
	Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.
	Inclui bibliografia.
	<p>1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Método dos elementos finitos - Teses. 3. Compósitos - Teses. 4. Materiais laminados - Teses. 5. Cisalhamento - Teses. 6. Flambagem (Mecânica) - Teses. I. Ávila, Antonio Ferreira. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.</p>
	CDU: 621(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

"ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DA FLAMBAGEM DE LAMINADOS DUPLO-DUPLO SOB CARGAS AXIAIS E DE CISALHAMENTO"

LIDIANNE DE PAULA PINTO MAPA

Tese submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, constituída pelos Professores Dr. Antônio Ferreira Ávila (Orientador - Departamento de Engenharia Mecânica-UFMG), Dr. Paulo Cesar de Matos Rodrigues (Departamento de Engenharia Mecânica-UFMG), Dr. Frederico de Castro Magalhães (Departamento de Engenharia Mecânica-UFMG), Dr. Igor Cezar Pereira (Universidade Federal de Ouro Preto -UFOP) e Dr. Rodrigo Teixeira Santos Freire (Universidade Federal de São João Del Rei). como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "**Doutora em Engenharia Mecânica**", na área de concentração de "**Projeto e Sistemas**".

Tese aprovada no dia 06 de junho de 2025.

Por:



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Ferreira Avila, Professor do Magistério Superior**, em 17/06/2025, às 11:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Frederico de Castro Magalhaes, Professor do Magistério Superior**, em 17/06/2025, às 12:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Paulo Cesar de Matos Rodrigues, Professor do Magistério Superior**, em 17/06/2025, às 12:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Igor César Pereira, Usuário Externo**, em 18/06/2025, às 15:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Teixeira Santos Freire, Usuário Externo**, em 18/06/2025, às 21:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0,

informando o código verificador **4304701** e o código CRC **DC6D1D3A**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, por me conceder força, saúde e perseverança ao longo desta jornada.

Ao Professor Ávila, sou grata pela orientação, pelo compartilhamento de seu vasto conhecimento e experiência, e por sua dedicação à pesquisa e interesse em publicações, que contribuíram tanto para o desenvolvimento deste trabalho quanto para o meu crescimento profissional.

Aos meus familiares, expesso minha profunda gratidão pelo suporte incondicional e compreensão em todos os momentos.

Agradeço também a todos os amigos que estiveram ao meu lado ao longo desse percurso.

À CAPES e à FAPEMIG, sou grata pelo apoio financeiro, essencial para a realização desta pesquisa.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma maneira, contribuíram para que esta tese se tornasse realidade.

RESUMO

Laminados duplo-duplo (DD), introduzidos em 2021 como uma alternativa aos laminados quase isotrópicos convencionais amplamente utilizados em aplicações aeroespaciais, consistem em sublaminados repetidos com dois grupos de ângulos balanceados. Essas configurações oferecem maior flexibilidade de projeto e facilidade de fabricação, despertando um crescente interesse da comunidade científica. Esta tese apresenta expressões de forma fechada para a análise de flambagem de placas de laminados DD de carbono/epóxi submetidas a cargas de compressão e de cisalhamento, considerando diferentes condições de contorno. Para o caso de carregamento por cisalhamento, a análise concentra-se em placas longas. Também é proposta uma estratégia de otimização com o objetivo de maximizar a resistência à flambagem por cisalhamento, considerando um espaço de projeto constituído por pré-impregnados de carbono/epóxi disponíveis comercialmente. As expressões de forma fechada são obtidas a partir de matrizes de rigidez adimensionais, normalizadas pela espessura do laminado e pelo módulo de Tsai. Um estudo comparativo de flambagem com laminados quase isotrópicos é realizado, avaliando a homogeneização e a influência do número de repetições nos termos de acoplamento D_{16} e D_{26} . Para auxiliar no desenvolvimento de projetos, elabora-se um algoritmo capaz de identificar as sequências de empilhamento que maximizam as cargas de flambagem por cisalhamento. O algoritmo considera o módulo de Tsai, o conceito de camada mestre e tem como critério principal a maximização de D_{22} . A validação por meio de análises de elementos finitos mostra que, para laminados que satisfazem as condições de homogeneização, as diferenças nas cargas de flambagem permanecem abaixo de 8%, com modos de flambagem consistentes. O algoritmo identifica com sucesso sequências de empilhamento próximas da solução ótima, com um erro de previsão de 8,2%.

Palavras-chave: placas de compósitos laminados; flambagem de placas; compósitos duplo-duplo; solução analítica; método dos elementos finitos.

ABSTRACT

Double-double (DD) laminates, introduced in 2021 as an alternative to conventional quasi-isotropic laminates widely used in aerospace applications, consist of repeated sublaminates with two groups of balanced angles. These configurations offer greater design flexibility and ease of manufacturing, attracting growing research interest. This thesis presents closed-form expressions for the buckling analysis of carbon/epoxy DD laminate plates subjected to compressive and shear loads, considering various boundary conditions. For shear loading, the analysis focuses on long plates. An optimization strategy is also proposed to maximize shear buckling performance, using a design space based on commercially available carbon/epoxy prepregs. The closed-form solutions are derived from dimensionless stiffness matrices normalized by laminate thickness and Tsai's modulus. A comparative buckling study with quasi-isotropic laminates is conducted, evaluating homogenization behavior and the effect of repetition count on coupling terms D_{16} e D_{26} . To support the design process, an algorithm is developed to identify stacking sequences that maximize shear buckling loads. The algorithm incorporates Tsai's modulus, the master ply concept, and the maximization of D_{22} as its primary criterion. Validation through finite element analysis shows that, for laminates satisfying homogenization conditions, differences in buckling loads remain below 8%, with consistent buckling modes. The algorithm successfully identifies near-optimal stacking sequences with a prediction error of 8.2%.

Keywords: laminated composites plates; plate buckling; double-double composites; analytical solution; finite element method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Capítulo 2

Figura 2.1: Classificação dos materiais compósitos.....	16
Figura 2.2: Construção de um laminado.....	17
Figura 2.3: Representação de um compósito anisotrópico.....	18
Figura 2.4: Representação da tensão em um elemento infinitesimal.....	19
Figura 2.5: O sistema de coordenada global x, y, z e o local x_1, x_2, x_3	22
Figura 2.6: Seção do laminado antes e depois da deformação.....	25
Figura 2.7: K-ésima camada do laminado.....	27
Figura 2.8: Distribuição de deformação ε_x e tensão σ_x	28
Figura 2.9: Forças e momentos resultantes em uma camada de compósito.....	29
Figura 2.10: Coordenadas das camadas de um laminado.....	30
Figura 2.11: Empilhamento simétrico.....	32
Figura 2.12: Laminado quadriaxial heterogêneo.....	34
Figura 2.13: Homogeneização do laminado quadriaxial.....	35
Figura 2.14: Laminado duplo-duplo.....	36
Figura 2.15: Laminado duplo-duplo homogeneizado.....	37
Figura 2.16: Componentes da camada mestre dos CFRP.....	45
Figura 2.17: Flambagem local da fuselagem de uma aeronave (a) e flambagem global de um tanque de armazenamento.....	46
Figura 2.18: Placa sob compressão biaxial.....	49
Figura 2.19: Placa simplesmente apoiada em três lados e um livre.....	51
Figura 2.20: Placa com três lados simplesmente apoiados e um lado engastado.....	53
Figura 2.21: Placa com dois lados simplesmente apoiados, um livre e um engastado.....	54
Figura 2.22: Placa sob cisalhamento.....	55

Capítulo 3

Figura 3.1: Placa simplesmente apoiada sob compressão biaxial.....	65
Figura 3.2: Placa simplesmente apoiada em três lados e um livre.....	67
Figura 3.3: Placa com três lados simplesmente apoiados e um lado engastado.....	68
Figura 3.4: Placa com dois lados simplesmente apoiados, um livre e um engastado.....	69

Figura 3.5: Placa sob cisalhamento	70
Figura 3.6: Fluxograma do algoritmo.....	79
Figura 3.7: Fluxograma do algoritmo.....	79
Figura 3.8: Representação esquemática das simulações realizadas	80
Figura 3.9: Elemento de casca quadrático SHELL281.	80

Capítulo 4

Figura 4.1: Modo de flambagem: (a) MH (b) MEF	87
Figura 4.2: Modos de flambagem para as placas simplesmente apoiadas obtidos por análise numérica	90
Figura 4.3: Modos críticos de flambagem da placa simplesmente apoiada obtidos pelo método analítico	91
Figura 4.4: Modo de flambagem para a placa com um lado livre: (a) MEF e (b) MH	93
Figura 4.5: Modos de flambagem da placa engastada em um lado.....	95
Figura 4.6: Modos de flambagem da placa engastada em um lado, obtidos pelo método analítico	96
Figura 4.7: Modo de flambagem da placa com um lado livre e um engastado.....	98
Figura 4.8: Modos de flambagem da placa longa simplesmente apoiada sob cisalhamento .	100
Figura 4.9: Modos de flambagem da placa longa engastada nas longitudinais.....	102
Figura 4.10: Valores de D_{22} para as 13 configurações de empilhamento.....	105
Figura 4.11: Modo de flambagem para a placa simplesmente apoiada: (a) quadriaxial e (b-n) casos 1 a 13.....	107
Figura 4.12 Modo de flambagem para a placa engastada: (a) quadriaxial e (b-n) casos 1 a 13	108

LISTA DE TABELAS

Capítulo 2

Tabela 2.1: Tabela de cálculo da camada mestre	44
--	----

Capítulo 3

Tabela 3.1: Sequências de empilhamento	62
Tabela 3.2: Combinações comerciais de duplo-duplo (Mapa e Ávila, 2025)	73
Tabela 3.3: Duplo-duplo equivalentes (Mapa e Ávila, 2025).	73

Capítulo 4

Tabela 4.1: Propriedades do material (Ansys Inc., 2012)	82
Tabela 4.2: Matriz de rigidez a flexão \mathbf{D} [N. m]	83
Tabela 4.3: Matriz de Rigidez à flexão adimensional	84
Tabela 4.4: Avaliação dos critérios de homogeneização	84
Tabela 4.5: Matriz de rigidez à flexão em função do número de repetições	85
Tabela 4.6: Propriedades do material IM7/977-3 (Kappel, 2024)	86
Tabela 4.7: Cargas de flambagem e diferenças entre os métodos	86
Tabela 4.8: Carga de flambagem para a placa simplesmente apoiada	88
Tabela 4.9: Carga de flambagem para a placa com um lado livre	92
Tabela 4.10: Carga de flambagem placa engastada em um lado	93
Tabela 4.11: Cargas de flambagem para a placa com um lado livre e um engastado	97
Tabela 4.12: Carga de flambagem para a placa longa simplesmente apoiada sob cisalhamento	99
Tabela 4.13: Carga de flambagem para a placa longa engastada nas longitudinais sob cisalhamento	101
Tabela 4.14: Carga de flambagem para placa longa (Mapa e Avila, 2025)	104

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Objetivos.....	13
1.1.1	Geral	13
1.1.2	Específicos.....	13
1.2	Estrutura da Tese	13
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	15
2.1	Compósitos	15
2.1.1	Definições.....	15
2.1.2	Relação Tensão-Deformação.....	18
2.1.3	Estado Plano de Tensão.....	21
2.1.4	Transformação de Tensão e Deformação	22
2.1.5	Laminados	24
2.2	Flambagem de Placas de Compósitos Simétricos	46
2.2.1	Flambagem por Compressão	48
2.2.2	Flambagem por Cisalhamento	54
3	METODOLOGIA	61
3.1	Definição das Sequências de Empilhamento Equivalentes	61
3.2	Fundamentação Teórica.....	62
3.3	Flambagem de Placas de Laminado Duplo-Duplo	64
3.3.1	Flambagem de Placas sob Compressão.....	64
3.3.2	Flambagem de Placas Longas sob Cisalhamento	70
3.4	Estratégia de Projeto para Laminados Duplo-Duplo sob Cisalhamento	72
3.4.1	Definição de Empilhamentos Duplo-Duplo com Camadas Comercialmente Disponíveis.....	72
3.4.2	Modelo Matemático.....	73

3.4.3	Implementação da Formulação.....	77
3.5	Análises Numéricas	80
4	RESULTADOS	82
4.1	Equivalência de Rigidez e Homogeneização dos Laminados Duplo-Duplo.....	82
4.1.1	Avaliação do Número de Repetições.....	85
4.2	Problema de validação.....	86
4.3	Estudo Comparativo da Flambagem de Laminados	87
4.3.1	Flambagem por Compressão	88
4.3.2	Flambagem por Cisalhamento Puro	98
4.4	Resultados da Estratégia de Projeto para Laminados Duplo-Duplo sob Cisalhamento 103	
4.4.1	Placas longas sob cisalhamento	103
5	CONCLUSÕES.....	109
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	110
	REFERÊNCIAS	111
	APÊNDICE A	116

1 INTRODUÇÃO

Placas são elementos estruturais amplamente utilizados por proporcionar eficiência mecânica e versatilidade, sendo empregadas em diversos setores da engenharia, como aeronáutica (El Yaakoubi-Mesbah e Mittelstedt, 2025), automotivo (Malic e Kozar, 2012) e construção civil (Tan *et al.*, 2024). Elas podem ser fabricadas de diferentes materiais como: aço, alumínio e compósito. Dentre esses materiais, os compósitos se destacam por permitirem que os projetistas alcancem benefícios notáveis de redução de peso, que não podem ser alcançados por meio do uso de outros materiais convencionais (Garofano *et al.*, 2024). Além disso, o uso de compósitos reduz a necessidade de juntas tradicionais, como fixadores e parafusos, o que também contribui para a diminuição dos custos de montagem e de material (Garofano *et al.*, 2023).

A redução de peso em estruturas, especialmente naquelas que envolvem placas, tem sido um aspecto de grande interesse de projetistas. Nesse contexto, aplicações que priorizam a redução de peso associada à alta rigidez e resistência consideram materiais de alto desempenho, como os compósitos (D'Aguiar e Parente Junior, 2018). Esses materiais oferecem grande flexibilidade de projeto, permitindo a adaptação das sequências de empilhamento às condições específicas da estrutura, além de viabilizar várias combinações de fibras e matrizes, como polímero reforçado com fibra de carbono, polímero reforçado com fibra de vidro, polímero reforçado com fibra de aramida, entre outros. Essa adaptabilidade tem sido amplamente explorada no setor aeronáutico, onde, nas últimas décadas, o uso crescente de compósitos contribuiu significativamente para o desenvolvimento de estruturas mais leves e para a redução do consumo de combustível (Riccio *et al.*, 2024).

As placas de compósitos laminados frequentemente estão sob carregamentos de compressão e cisalhamento, que desempenham um fator crítico na determinação da resistência e estabilidade dessas estruturas. Sob esses carregamentos, elas estão suscetíveis a fenômenos de instabilidade como flambagem local, flambagem distorcional e flambagem global ou uma interação entre esses três modos de falha, dependendo da geometria e rigidez da estrutura (Batista, 2009; Batista, 2010). Por isso, essas placas são projetadas de modo a evitar a ocorrência desses modos de falha.

A flambagem de placas compósitos tem sido amplamente investigadas por meio de estudos analíticos trazendo contribuições significativas para o dimensionamento de estruturas

esbeltas (Hsu, Mittelstedt e Hwu, 2024; Vescovini *et al.*, 2024). Nessas investigações, fatores como geometria, empilhamento, carregamento e material da placa estão diretamente relacionados com o comportamento da estrutura sob flambagem. Além disso, essas investigações consideram estruturas que compartilham características semelhantes: são fabricadas com laminados quadriaxiais ou assimétricos com práticas bem estabelecidas.

Os laminados quadriaxiais se baseiam em combinações de camadas orientadas a 0° , $\pm 45^\circ$ e 90° . Para os projetos que consideram esses laminados, é necessário cumprir algumas regras, como simetria do empilhamento em relação a um plano médio para evitar empenamento (acoplamento extensão-flexão), a presença de pelo menos 10% das camadas em cada uma das direções de 0° , $\pm 45^\circ$ e 90° , conhecida como regra dos 10%, e empilhamento balanceado, que elimina o acoplamento de extensão/cisalhamento (Tsai, 2021).

O uso de apenas quatro ângulos e as regras mencionadas introduzem limitações nas sequências de empilhamento, que muitas vezes levam ao superdimensionamento, principalmente de componentes aeronáuticos (Vermes, Tsai, Massard, *et al.*, 2021). Além disso, essas regras podem inviabilizar a otimização, devido ao elevado número de permutações necessárias e a falta de critério de exclusividade, o que gera soluções duplicadas e processos computacionalmente custosos. Por exemplo, um laminado com 8 camadas apresenta 24 sequências de empilhamento possíveis, enquanto esse número aumenta para 331.776 ao ser considerado um laminado com 32 camadas (Kappel, 2023).

O desenvolvimento de novas sequências de empilhamento oferece aos engenheiros e projetistas oportunidades significativas para explorar a flexibilidade e a resistência proporcionadas pelos compósitos. Entre esses avanços, destaca-se a introdução dos laminados duplo-duplo (DD) por Tsai *et al.* (2017) e Tsai (2021), que representam uma alternativa promissora para o projeto de estruturas de compósitos laminados.

Os laminados duplo-duplo consistem na repetição de dois grupos de ângulos, estrategicamente escolhidos entre 0° e 90° , balanceados na forma $[\pm\Phi/\pm\Psi]_r$ que permitem obter diferentes propriedades estruturais. Eles não requerem uma disposição simétrica do empilhamento, pois alcançam a homogeneização após a realização de repetições do sublaminado, apresentando a matriz de acoplamento **B** insignificante. Dessa forma, as estruturas desse laminado ficam isentas de empenamento e a redução de espessura pode ser realizada removendo uma unidade repetitiva sem impactar na rigidez a flexão ou introduzir mudanças abruptas na espessura (Wang *et al.*, 2024).

Tsai (2021) e Vermes *et al* (2021b) demonstraram que o número de repetições e a seleção das orientações das fibras influenciam diretamente nas propriedades mecânicas dos laminados duplo-duplo. No entanto, apesar de muitos empilhamentos propostos na literatura se basearem em fundamentos da mecânica dos compósitos, a implementação prática de algumas orientações específicas pode ser desafiadora (por exemplo, $[\pm 18^\circ/\pm 62^\circ]_{rt}$), dificultando a aplicação industrial.

A ascensão do uso dos laminados duplo-duplo pode ser promovida pelo desenvolvimento de soluções analíticas e de estratégias práticas de projeto. Estratégias de projeto são essenciais para a definição de diretrizes e critérios de dimensionamento, enquanto formulações analíticas são particularmente importantes nas fases iniciais, que frequentemente envolvem otimização e estudos paramétricos. Essas abordagens podem contribuir para o desenvolvimento de estruturas mais leves e eficientes (Mapa e Avila, 2025).

A capacidade de resistência à flambagem é um aspecto crítico nos laminados duplo-duplo, especialmente devido ao risco elevado associado ao afunilamento. Verifica-se na literatura que estudos que consideram a flambagem por cisalhamento de laminados duplo-duplo não foram desenvolvidos até o momento (Kappel, 2023; Kappel, 2024; Vescovini et al., 2024). Nesse contexto, este trabalho propõe um conjunto de soluções analíticas de forma fechada para a análise de flambagem de placas de compósitos laminados duplo-duplo de polímeros reforçados com fibra de carbono (CFRP). As análises consideram laminados duplo-duplo equivalentes a quadriaxiais selecionados. Além disso, desenvolve-se uma estratégia prática de projeto para placas longas sob cisalhamento, considerando pré-impregnados disponíveis comercialmente (por exemplo, 0° , $\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 60^\circ$ e 90°), com base no conceito de camada mestre e no módulo de Tsai. As formulações analíticas e a estratégia proposta fornecem um impulso significativo para análises analíticas de colunas (Schilling e Mittelstedt, 2020), placas (Guillén-Rujano *et al.*, 2021; Le *et al.*, 2021), painéis sanduíche (Li *et al.*, 2021), pós-flambagem (Do; Dao e Lee, 2024) e otimizações (Kappel, 2024) de laminados duplo-duplo.

1.1 Objetivos

1.1.1 Geral

O objetivo deste trabalho é estudar a flambagem de placas de compósitos laminados duplo-duplo de polímeros reforçados com fibra de carbono (CFRP). Para isso, desenvolvem-se formulações analíticas para a análise da flambagem de placas submetidas à compressão e ao cisalhamento. Além disso, propõe-se uma estratégia prática de projeto para placas longas sob cisalhamento, considerando camadas de pré-impregnados disponíveis comercialmente.

1.1.2 Específicos

- ✓ Validar a análise de flambagem de modelos de placas por meio da comparação com resultados da literatura e simulações numéricas;
- ✓ Realizar um estudo comparativo da flambagem dos laminados quadriaxiais e duplo-duplo;
- ✓ Analisar a homogeneização dos laminados duplo-duplo e avaliar a influência do número de repetições sobre os termos de acoplamento flexão-torção;
- ✓ Investigar a flambagem de placas de laminados duplo-duplo considerando variações nos parâmetros: tipos de carga aplicada, condições de contorno e sequências de empilhamento;
- ✓ Desenvolver formulações analíticas considerando a assimetria do laminado duplo-duplo, o conceito de camada mestre e o Módulo de Tsai.
- ✓ Identificar as sequências de empilhamento que resultam nas maiores cargas críticas de flambagem.

1.2 Estrutura da Tese

Esta tese foi elaborada em cinco capítulos. No capítulo 2, são apresentadas as definições e formulações necessárias para a análise de modelos de placas de compósitos laminados duplo-duplo. Inicialmente, são descritos os diferentes tipos de compósitos. Em seguida, é apresentada a teoria clássica de compósitos laminados, incluindo as relações constitutivas da teoria da

elasticidade e o estado plano de tensão. Um estudo sobre laminados quadriaxiais e duplo-duplo é apresentado. Por fim, as formulações analíticas de flambagem de placas de compósitos laminados quadriaxiais são descritas.

No capítulo 3, é apresentada a metodologia. Inicialmente, são definidas as sequências de empilhamentos de laminados quadriaxiais e de duplo-duplo. Posteriormente, é desenvolvida uma fundamentação teórica. Por seguinte, são apresentadas as funções de forma fechada para a análise de flambagem de placas sob diferentes condições de contorno submetidas ao cisalhamento e à compressão. Além disso, é apresentada uma estratégia prática de projeto por meio de um algoritmo que verifica as sequências de empilhamento que resultam em maiores cargas de flambagem, considerando o espaço de projeto composto apenas por camadas comercialmente disponíveis. Ademais, um fluxograma é apresentado, detalhando as etapas das simulações numéricas.

Os resultados das análises de placas são apresentados no capítulo 4. Inicialmente, a homogeneização das sequências de empilhamento de duplo-duplo é avaliada. Em seguida, avalia-se como os termos de acoplamento D_{16} e D_{26} são influenciados pelo número de repetições. Um modelo de placa de laminado duplo-duplo é validado por meio de resultados encontrados na literatura. Em seguida, a estabilidade das placas de laminado duplo-duplo é analisada para diferentes condições de contorno sob os carregamentos de cisalhamento e de compressão. Por seguinte, são verificadas as sequências de empilhamentos formadas por pré-impregnados disponíveis comercialmente que apresentam as maiores cargas de flambagem para placas longas sob cisalhamento. No capítulo 5, são desenvolvidas as conclusões sobre a pesquisa.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, são apresentados os fundamentos teóricos que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, são apresentados conceitos sobre compósitos e a teoria clássica de compósitos laminados. Em seguida, discute-se a configuração e as principais características dos laminados quadriaxiais e dos laminados duplo-duplo. Por fim, são apresentadas formulações analíticas de flambagem de placas de laminados quadriaxiais.

2.1 Compósitos

2.1.1 Definições

Os materiais compósitos surgiram em meados do século XX como uma classe promissora de materiais de engenharia, proporcionando novas perspectivas para a tecnologia moderna e encontrando aplicações em quase todos os setores industriais (Vasiliev e Morozov, 2013). Eles são formados pela combinação de dois ou mais materiais com propriedades físicas e químicas distintas com a finalidade de atingir propriedades finais desejáveis, como baixo coeficiente de expansão térmica, baixo peso e alta resistência à fadiga e à corrosão — propriedades raramente encontradas em materiais estruturais isotrópicos. Knight e Curliss (2003) relatam que os compósitos podem reduzir o peso de um projeto em até 20 % a 30 %, o que resulta em economia de energia e aumento de desempenho.

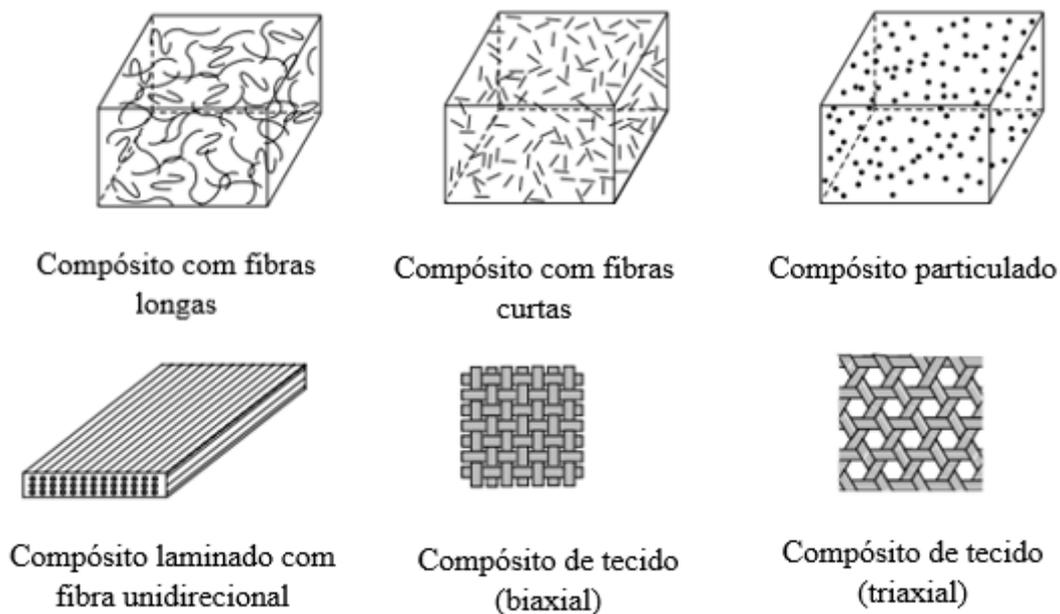
Segundo Ogin, Brondsted e Zangenberg (2016), os materiais compósitos alcançam suas propriedades a partir da ligação entre o reforço — geralmente na forma de fibras ou outras geometrias — e a matriz que possui densidade, rigidez e resistência consideravelmente mais baixas do que as fibras ou partículas.

Daniel e Ishai (2006) relatam que as fibras possuem a função de transportar carga, devido à elevada resistência e rigidez. A matriz, por sua vez, atua no suporte e na proteção das fibras, além de garantir a distribuição e a transferência de carga entre elas. Se uma fibra fraturar, uma parte dessa será carregada e transferirá carga para a matriz e, subsequentemente, para a outra parte da fibra fraturada, bem como para as fibras adjacentes. A combinação de fibras ou partículas com uma matriz resulta em materiais de alta resistência e rigidez, mas com baixa densidade.

Vários materiais podem ser usados como matriz, entre eles: metais, cerâmicas e polímeros. Os compósitos de matriz polimérica são amplamente utilizados em uma variedade de aplicações de alto desempenho e sensíveis ao peso (Guo *et al.*, 2021). Os materiais comumente utilizados como reforçadores são: vidros, metais, polímeros, cerâmica e grafite (Hosseini *et al.*, 2010). Ao escolher cuidadosamente a matriz, o reforço e o processo de fabricação que os combina, é possível adaptar as propriedades para atender a requisitos específicos de projeto.

Jones (1999) classifica os materiais compósitos como: materiais compósitos fibrosos, que consistem em fibras imersas em uma matriz; materiais compósitos laminados, que consistem em camadas unidas de fibras sob uma matriz, e materiais compósitos particulados, formados por partículas de um ou mais materiais suspensos em uma matriz. A Figura 2.1 ilustra os diferentes tipos de compósitos, cada um deles com características específicas para distintas áreas de aplicação.

Figura 2.1: Classificação dos materiais compósitos.



Fonte: Adaptado de Kollár e Springer (2003).

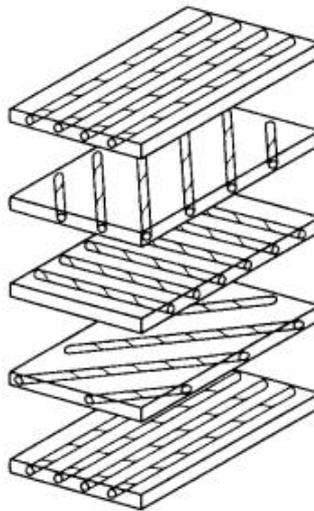
Os compósitos fabricados com fibras são os mais comumente utilizados, pois as fibras apresentam alta razão entre o comprimento e o diâmetro, o que permite uma transferência de tensão eficaz e a fabricação de compósitos em vários formatos. Dessa forma, conforme relata

Ngo (2020), os compósitos que utilizam esse tipo de reforço permitem uma grande flexibilidade de projeto.

As fibras podem ser longas ou curtas, contínuas ou descontínuas, orientadas em direções específicas ou distribuídas aleatoriamente. Quando as fibras são alinhadas em uma única direção, são definidas como unidirecionais. Por outro lado, quando são entrelaçadas em duas ou mais direções, são definidas como tecidos (Figura 2.1).

A Figura 2.2 ilustra um compósito laminado de quatro camadas com fibras unidirecionais. As fibras desse compósito podem ser orientadas preferencialmente para atender aos requisitos de projeto. Knight e Curliss (2003) destacam que a ampla variedade de propriedades obtidas e a capacidade de personalizá-las representam uma vantagem significativa dos compósitos laminados.

Figura 2.2: Construção de um laminado



Fonte: Kollár e Springer (2003).

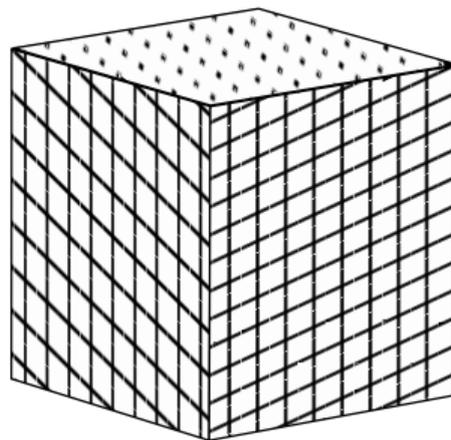
Conforme Daniel e Ishai (2006), os compósitos que possuem reforços de fibras curtas ou partículas geralmente fornecem fortalecimento reduzido, pois a carga é transportada principalmente pela matriz. Em contrapartida, os compósitos com fibras contínuas fornecem rigidez e resistência desejáveis. Essa característica explica o interesse da ciência e da indústria no estudo e aplicação de compósitos laminados. Na subseção 2.1.2, serão descritas as relações de tensões e deformações para esses compósitos.

2.1.2 Relação Tensão-Deformação

Os compósitos podem se comportar de maneira diferente em diferentes direções, conforme a disposição das fibras. Dessa forma, eles podem ser caracterizados como anisotrópicos, monoclônicos, ortotrópicos e transversalmente isotrópicos (Jones, 1999).

Um compósito ortotrópico tem propriedades que diferem nas três direções perpendiculares entre si. Já um compósito anisotrópico possui propriedades que diferem em todas as direções. Nesse caso, não há planos de simetria em relação ao alinhamento das fibras do material. Um exemplo de compósito anisotrópico é ilustrado na Figura 2.3, em que as fibras do compósito estão alinhadas em três direções não ortogonais (Allen, 2003).

Figura 2.3: Representação de um compósito anisotrópico



Fonte: Kollar e Springer (2003).

Segundo D'aguiar e Parente Junior (2018), os compósitos apresentam comportamento linear antes de falharem. Sendo assim, a lei de Hooke generalizada rege o comportamento desses materiais e pode ser escrita na forma indicial, como:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.1)$$

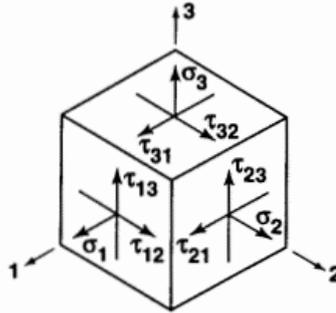
onde σ_i é um tensor de tensão com orientações apresentadas no elemento infinitesimal da Figura 2.4, C_{ij} é a matriz de rigidez e ε_j é o tensor de deformação.

O inverso da relação tensão-deformação resulta em:

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.2)$$

sendo que S_{ij} é a matriz de flexibilidade.

Figura 2.4: Representação da tensão em um elemento infinitesimal



Fonte: Jones (1999).

As relações tensão-deformação dos materiais anisotrópicos no regime linear, expressas em forma matricial, são dadas em coordenadas principais por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Por outro lado, as relações deformação-tensão para um material anisotrópico são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

As componentes das matrizes de rigidez C_{ij} e de flexibilidade S_{ij} são constantes relativas às propriedades dos materiais. Conforme demonstram Daniel e Ishai (2006), as propriedades dos compósitos são uma combinação das propriedades da matriz e da fibra. No caso de propriedades longitudinais, a lei da mistura apresenta excelente concordância com resultados experimentais.

As matrizes de rigidez e de flexibilidade, C_{ij} e S_{ij} , possuem 36 constantes, entretanto apenas 21 constantes são independentes, pois as matrizes são simétricas, ou seja:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= S_{ji} \\ C_{ij} &= C_{ji} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Adicionalmente, essas matrizes são inversas entre si, conforme expresso por:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1} \quad (2.6)$$

e vice e versa.

Os testes de caracterização dos materiais são realizados com as cargas ou tensões pré-estabelecidas, e os deslocamentos ou deformações resultantes são medidos. As constantes de engenharia podem ser obtidas pela inclinação da curva de tensão-deformação. Assim, a matriz de flexibilidade \mathbf{S} é determinada mais facilmente do que a matriz de rigidez \mathbf{C} (Jones, 1999).

As relações constitutivas para o material ortotrópico podem ser escritas em coordenadas principais, como apresentado por Kollár e Springer (2003):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

na qual E_i é o módulo de elasticidade na direção i , $\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$ é o coeficiente de Poisson, a razão entre a deformação na direção j e a deformação na direção perpendicular i quando a tensão aplicada está na direção i , e G_{ij} o módulo de cisalhamento no plano ij .

2.1.3 Estado Plano de Tensão

A maioria dos compósitos laminados possui a espessura muito menor do que as outras dimensões. Para esses laminados, as tensões fora do plano (σ_3 , τ_{23} e τ_{13}) são desprezíveis em comparação com as tensões no plano, ou seja (Kollár e Springer, 2003):

$$\sigma_3 = 0; \tau_{23} = 0; \tau_{13} = 0 \quad (2.8)$$

Dessa forma, as relações constitutivas (deformação-tensão) para materiais ortotrópicos submetidos a tensão no plano 1-2 são expressas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

As relações deformação-tensão podem ser invertidas para obter as relações tensão-deformação, resultando em:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

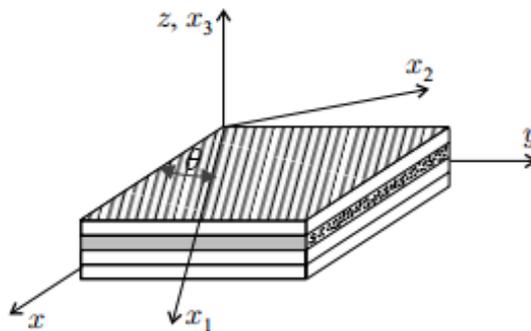
Nesse caso, a matriz de rigidez é denominada reduzida, e seus componentes serão designados como Q_{ij} .

2.1.4 Transformação de Tensão e Deformação

As coordenadas locais muitas vezes não coincidem com as coordenadas que são naturais para a solução do problema. Para conhecer o comportamento das placas de compósitos laminados, analisam-se os resultados em uma orientação arbitrária (D'Aguiar e Parente Junior, 2018).

Dessa forma, é conveniente empregar dois sistemas de coordenadas: um sistema de coordenadas local cujos eixos são paralelos e perpendiculares à direção da fibra, designado por x_1 , x_2 e x_3 (Figura 2.5), e um sistema de coordenadas global que pode ser definido por um ponto de referência, designado por x , y e z (Figura 2.5). Ambos os sistemas de coordenadas geralmente estão relacionados por um ângulo θ . Esse ângulo representa a rotação entre o sistema local e o sistema global, e é crucial para a transformação das tensões e deformações entre esses dois sistemas de coordenadas (Daniel e Ishai, 2006).

Figura 2.5: O sistema de coordenada global x , y , z e o local x_1 , x_2 , x_3



Fonte: Kassapoglou (2013).

A transformação das tensões de coordenadas locais x_1 , x_2 e x_3 para coordenadas globais (arbitrárias) x , y e z no estado plano de tensão é escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

sendo

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

No sistema de coordenadas principais x_1 , x_2 e x_3 , as tensões normais são σ_1 , σ_2 e σ_3 e as tensões de cisalhamento são τ_{12} , τ_{13} e τ_{23} . As deformações normais e de cisalhamento são ε_1 , ε_2 e ε_3 e γ_{12} , γ_{13} e γ_{23} , respectivamente. Em coordenadas globais, tem-se que as tensões normais são expressas por σ_x , σ_y e σ_z , enquanto as tensões de cisalhamento são indicadas por τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} . O mesmo se aplica para as deformações.

A transformação das deformações de coordenadas locais para globais no estado plano de tensão é escrita como (Kollár e Springer, 2003):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

As propriedades de rigidez também podem ser obtidas em qualquer sistema de coordenadas por meio das transformações de coordenadas. Introduzindo a Equação (2.12) e a Equação (2.11) na relação tensão-deformação (Equação (2.10)), tem-se a transformação do tensor de rigidez reduzida \mathbf{Q} do sistema de coordenadas locais para o sistema de coordenadas globais, expresso por:

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{xx} & \bar{Q}_{xy} & 2\bar{Q}_{xz} \\ \bar{Q}_{yx} & \bar{Q}_{yy} & 2\bar{Q}_{yz} \\ \bar{Q}_{zx} & \bar{Q}_{zy} & 2\bar{Q}_{zz} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{12} \end{bmatrix} \mathbf{T} \quad (2.14)$$

em que \bar{Q}_{ij} é a matriz de rigidez reduzida no sistema de coordenadas global.

Consequentemente, as relações tensão-deformação em coordenadas globais x-y podem ser escritas como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{xx} & \bar{Q}_{xy} & \bar{Q}_{xz} \\ \bar{Q}_{yx} & \bar{Q}_{yy} & \bar{Q}_{yz} \\ \bar{Q}_{zx} & \bar{Q}_{zy} & \bar{Q}_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

2.1.5 Laminados

Conforme já descrito na Seção 2.1.1, os compósitos laminados são fabricados por camadas unidas. Dessa forma, a repetição de uma orientação da fibra é especificada por um subscrito numérico. Um laminado de camadas unidirecionais pode ser designado, por exemplo, como:

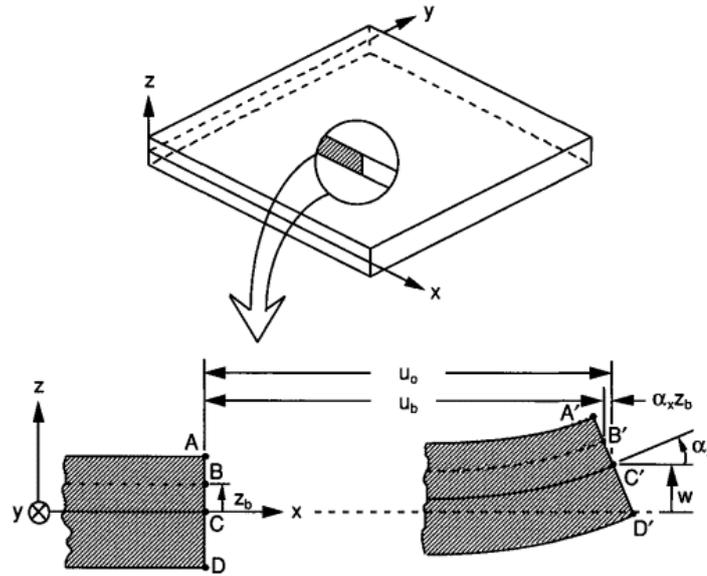
$$[-45_2/0_4/-45_2] \equiv [-45_2/0_2]_s$$

O laminado exemplificado contém três grupos de camadas, o primeiro contendo duas camadas na direção de -45° , o segundo contendo quatro camadas na direção de 0° e o terceiro contendo duas camadas na direção de -45° a partir dos eixos de referência. Ele é simétrico em relação ao plano médio, por isso o subscrito s indica simetria em relação a esse plano.

O conhecimento da variação de tensão e deformação através da espessura do laminado é essencial para definir a rigidez extensiva e à flexão de um laminado. A teoria clássica de laminados, baseada em hipóteses de Kirchhoff, pressupõe que os laminados estejam ligados uns aos outros perfeitamente, através de uma espessura infinitesimalmente fina, e que não se deformam por cisalhamento (Jones, 1999; Kollár e Springer, 2003). Ou seja, os deslocamentos são contínuos através dos limites da lâmina, de modo que nenhuma lâmina pode deslizar em relação a outra.

Considera-se também uma linha permanentemente reta e perpendicular à superfície média do laminado, mesmo após a deformação, conforme exibido na Figura 2.6. Essa suposição é equivalente a ignorar deformações por cisalhamento no plano perpendicular à superfície média ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$), onde z é a direção normal a superfície média.

Figura 2.6: Seção do laminado antes e depois da deformação



Fonte: Daniel e Ishai (2006).

As deformações no plano médio, conforme as definições da teoria da elasticidade (Vilaça e Garcia, 1998), são escritas como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u^0}{\partial x} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v^0}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.16}$$

onde u e v são os deslocamentos nas direções x e y .

As rotações em torno dos eixos x e y são escritas como:

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \frac{\partial w^0}{\partial x} \\ \alpha_y &= \frac{\partial w^0}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.17}$$

onde w^0 é o deslocamento fora do plano.

A teoria clássica de laminados considera que a deformação varia linearmente ao longo da seção transversal do laminado. Usando essa aproximação, tem-se que o deslocamento na direção x é dado por:

$$u = u^0 - z\alpha_x = u^0 - z \frac{\partial w^0}{\partial x} \quad (2.18)$$

em que u^0 é o deslocamento da superfície média.

Similarmente, o deslocamento em um ponto na direção y é escrito como:

$$v = v^0 - z \frac{\partial w^0}{\partial y} \quad (2.19)$$

sendo v^0 o deslocamento na superfície média.

Conforme a teoria da elasticidade, as deformações são dadas por (Vilaça e Garcia, 1998):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde u e v são os deslocamentos nas direções x e y .

Substituindo as Equações (2.18) e (2.19) nas expressões de deformação (2.20), tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} - z \frac{2 \partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.21)$$

As equações (2.21) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

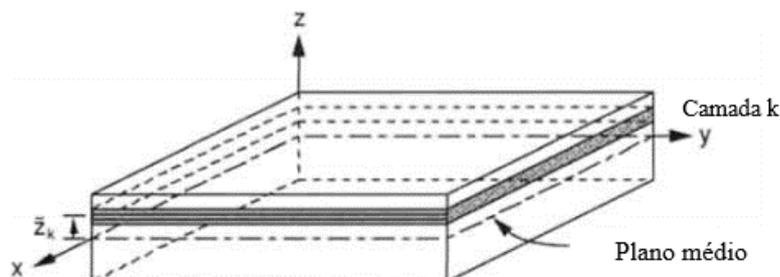
onde k_x , k_y e k_{xy} são as curvaturas da superfície média da placa definidas como:

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \\ \frac{2 \partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Considerando uma camada distante z_k da superfície média, conforme ilustra a Figura 2.7, e substituindo a expressão de deformação (2.22) na relação tensão-deformação (2.15) tem-se que a tensão é dada por (Kollár e Springer, 2003):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z[\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Figura 2.7: K-ésima camada do laminado



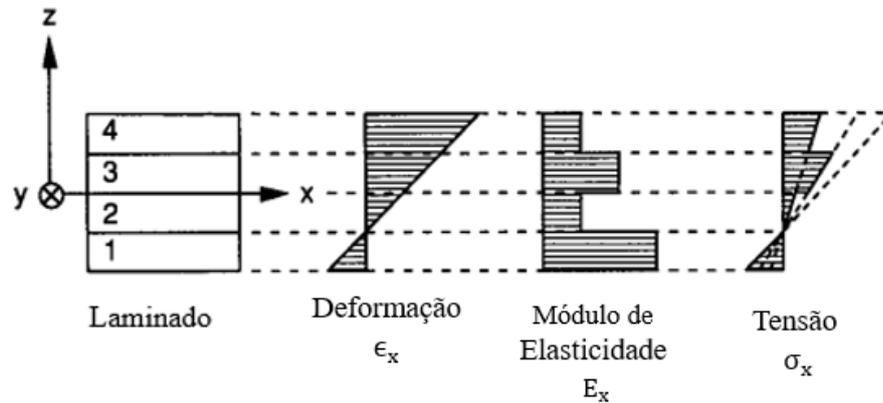
Fonte: Daniel e Ishai (2006).

Embora a variação da deformação seja linear conforme verifica-se na Equação (2.23), a distribuição de tensão pode não ser, pois ocorre variação descontínua da transformada da matriz

de rigidez reduzida $[\bar{Q}]$ para as diferentes camadas. Uma distribuição de tensão e deformação típicas para um laminado de quatro camadas podem ser observadas na Figura 2.8.

Observa-se pela Figura 2.8, que as tensões são lineares em cada camada, porém descontínuas ao longo da seção transversal do laminado.

Figura 2.8: Distribuição de deformação ϵ_x e tensão σ_x .



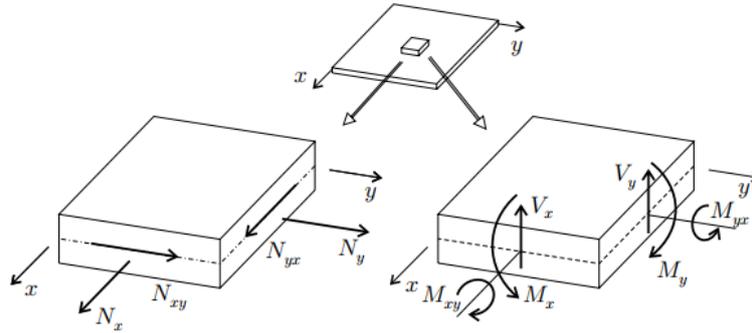
Fonte: Jones (1999).

As forças resultantes e momentos que atuam no laminado são definidas pela integração das tensões ao longo da espessura t da camada. Considerando a k -ésima camada ilustrada na Figura 2.7 com os momentos e forças resultantes representados na Figura 2.9, tem-se:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz & N_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz & N_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \\
 M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz & M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_y dz & M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{xy} dz
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

em que as forças N e os momentos M resultantes são dados por unidade de comprimento.

Figura 2.9: Forças e momentos resultantes em uma camada de compósito



Fonte: Daniel e Ishai (2006).

As forças de cisalhamento transversais por unidade de comprimento são:

$$V_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \quad (2.26)$$

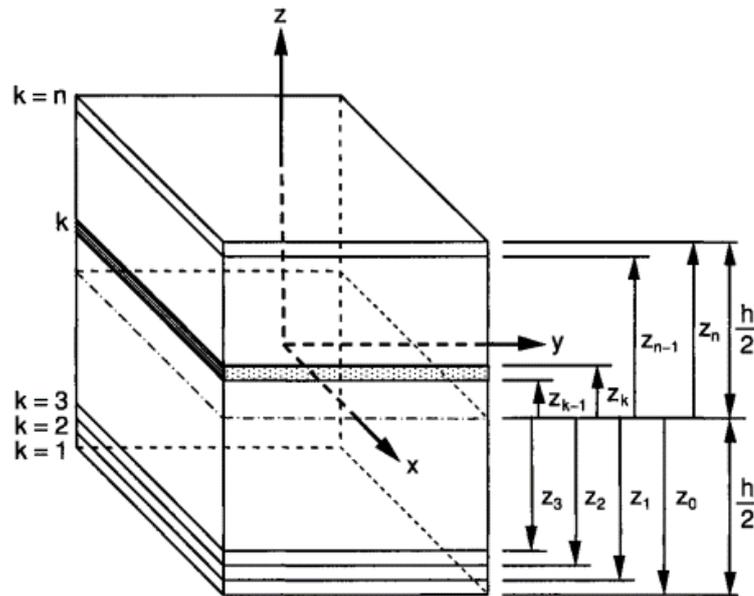
$$V_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz$$

Substituindo (2.24) em (2.25), obtêm-se as expressões das forças e dos momentos resultantes para um laminado com n camadas, ilustrado na Figura 2.10, dados por:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left\{ [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [\bar{Q}]_k z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right\} dz \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz + [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \left\{ [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [\bar{Q}]_k z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right\} dz \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz + [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right\} \end{aligned}$$

Figura 2.10: Coordenadas das camadas de um laminado



Fonte: Daniel e Ishai (2006).

As variáveis $[k]_{xy}$, $[\bar{Q}]_{xy}^k$ e $[\varepsilon^0]_{xy}$ não dependem de z . Além disso, apenas $[\bar{Q}]_{xy}^k$ possui valores diferentes para cada camada. Dessa forma, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \left[\sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \\ &= [A]_{x,y} [\varepsilon^0]_{x,y} + [B]_{x,y} [k]_{x,y} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \left[\sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \\ &= [B]_{x,y} [\varepsilon^0]_{x,y} + [D]_{x,y} [k]_{x,y} \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^k (\overline{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^k (\overline{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^k (\overline{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Considerando as Equações (2.28), as expressões para forças e momentos no plano tornam-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{16} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.30}$$

As matrizes **A**, **B** e **D** representam a rigidez do laminado. Elas são função da geometria, propriedade dos materiais e sequencia de empilhamento (Kassapoglou, 2013). A matriz A_{ij} representa a rigidez extensional que relaciona as forças no plano N_x , N_y e N_{xy} com as deformações ε_x^o , ε_y^o e γ_{xy}^o . O termo B_{ij} é a rigidez de acoplamento (plano/ flexão) que relaciona as cargas no plano N_x , N_y e N_{xy} com as curvaturas k_x , k_y e k_{xy} , além de relacionar os momentos M_x , M_y e M_{xy} com as deformações no plano ε_x^o , ε_y^o e γ_{xy}^o . Por fim, D_{ij} representa a rigidez a flexão, que relacionam os momentos M_x , M_y e M_{xy} com as curvaturas k_x , k_y e k_{xy} .

2.1.5.1 Laminados Quadriaxiais

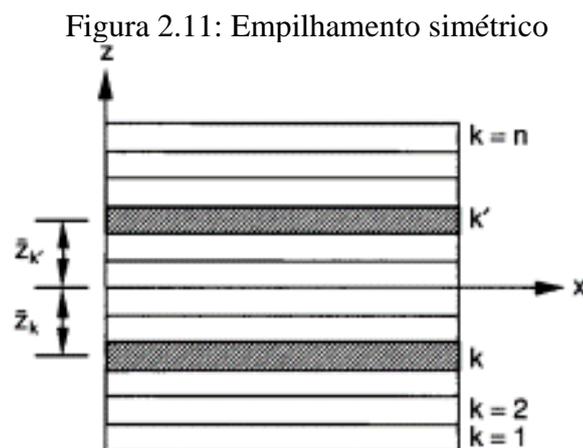
Nos anos de 1960, os compósitos laminados com fibras de boro e carbono foram desenvolvidos para competir com o alumínio utilizado em estruturas aeronáuticas (Tsai, 2023). Nesse período, surgiu também a teoria clássica de compósitos laminados, que consolidou os laminados quadriaxiais como o padrão da indústria.

Os laminados quadriaxiais se baseiam em combinações de camadas orientadas a 0° , $\pm 45^\circ$ e 90° . Algumas diretrizes para o projeto são geralmente seguidas para projetá-los, como simetria do empilhamento em relação a um plano médio para evitar empenamento (acoplamento extensão-flexão), a presença de pelo menos 10% das camadas em cada uma das direções de 0° , $\pm 45^\circ$ e 90° (conhecida como regra dos 10%) e empilhamento balanceados, que elimina o acoplamento de extensão/cisalhamento, $A_{16} = A_{26} = 0$ (Tsai, 2021).

Essas regras determinam um empilhamento mínimo de oito camadas. Considerando camadas que possuem 0,125 mm, a espessura total do laminado é de 1 mm. Conforme Tsai (2021), para obter propriedades direcionais, é necessário incluir camadas adicionais. Por exemplo, os laminados rígido $[0_5/\pm 45_2/90]_s$ e flexível em $[0/\pm 45_4/90]_s$ apresentam sublaminados com dez camadas. Considerando a simetria, a espessura total desses laminados é de 2,5 mm.

Considerando o empilhamento com n camadas, conforme ilustra a Figura 2.11, onde as camadas k e k' estão posicionadas simetricamente em relação à superfície média, tem-se:

$$\begin{aligned} t_k &= t_{k'} \\ z_k &= -z_{k'} \\ (\bar{Q}_{ij})_k &= (\bar{Q}_{ij})_{k'} \end{aligned} \quad (2.31)$$



Fonte: Daniel e Ishai (2006).

A matriz de acoplamento \mathbf{B} , equação (2.29), é dada por:

$$\begin{aligned}
B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^k (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^k (\bar{Q}_{ij})_k (z_k + z_{k-1}) (z_k - z_{k-1}) \quad (2.32) \\
&= \sum_{k=1}^k (\bar{Q}_{ij})_k \bar{z}_k t_k
\end{aligned}$$

em que:

$$\bar{z}_k = \frac{1}{2} (z_k + z_{k-1})$$

$$t_k = z_k - z_{k-1}$$

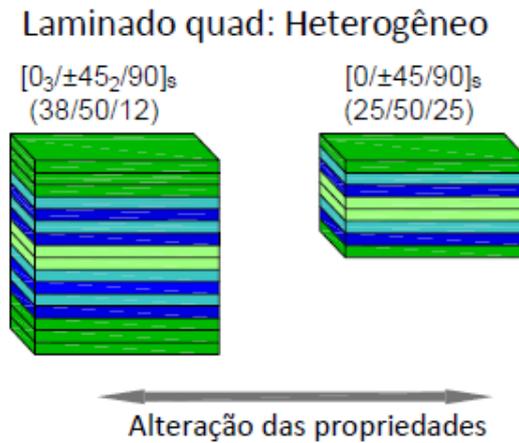
Dessa forma, devido a simetria, a expressão da matriz B_{ij} possuirá em pares, termos de valor absoluto igual e sinal oposto, que resulta em:

$$B_{ij} = 0 \quad (2.33)$$

A equação (2.33) confirma que, devido ao empilhamento simétrico e balanceado, o acoplamento é eliminado. Entretanto, as diretrizes que restringem o uso de apenas quatro ângulos e a simetria do plano médio limitam as combinações de camadas. Essas restrições podem levar ao sobredimensionamento e dificultar tanto o projeto quanto a fabricação de componentes estruturais (Riccio *et al.*, 2024). Além disso, dificulta o afinamento da espessura, pois duas camadas precisam ser eliminadas de forma simétrica quando o objetivo é reduzir a espessura (Kappel, 2024).

Vale ressaltar que os laminados quadriaxiais são heterogêneos, de modo que, à medida que camadas são eliminadas, as propriedades como a rigidez à flexão se modificam. A Figura 2.12 ilustra a mudança de propriedades desse laminado quando a espessura é reduzida.

Figura 2.12: Laminado quadriaxial heterogêneo

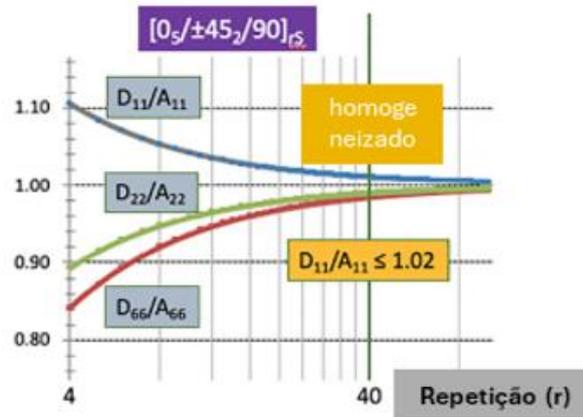


Fonte: Autor.

Devido às regras impostas aos laminados quadriaxiais e à característica de heterogeneidade (Figura 2.12), a otimização desses laminados torna-se desafiadora. O número de permutações cresce rapidamente, exigindo recálculos a cada modificação da espessura. Riccio *et al.* (2024) relata que, ao considerar um sublaminado com 4 camadas, o número de permutações necessárias é 24, que cresce com o aumento do número de camadas, atingindo o valor de 166.080 permutações ao considerar 10 camadas. Ademais, essas permutações não possuem critérios de exclusividade, o que aumenta muito o número de soluções duplicadas, desperdiçando muito o tempo de busca. Garofano *et al.* (2024) relata que, devido às regras impostas aos laminados quadriaxiais, a otimização resulta em laminados mais espessos, o que afasta a vantagem da redução de peso dos compósitos.

Conforme Vermes *et al.* (2021a), a homogeneização de laminados é alcançada ao repetir sublaminados idênticos, um sobre o outro, até atingir a espessura desejada. No caso de laminados quadriaxiais, a homogeneização é geralmente obtida com um grande número de repetições do bloco de construção, porque esses incluem camadas orientadas com grandes diferenças de ângulos. A Figura 2.13, apresentada em Vermes *et al.* (2021b), ilustra o número de repetições necessárias para a homogeneização do laminado quadriaxial $[0_5/\pm 45_2/90]_s$. Os critérios adotados para determinar a homogeneização incluem a equivalência entre as matrizes de rigidez extensional e flexional ($\mathbf{A} = \mathbf{D}$), apresentado na Figura 2.13 (a), e a matriz de acoplamento (\mathbf{B}) próxima de zero.

Figura 2.13: Homogeneização do laminado quadriaxial



Fonte: Adaptado de Vermes *et al.*(2021a).

Conforme verifica-se na Figura 2.13 (a), o laminado quadriaxial $[0_s/\pm 45_z/90]_s$ necessitou de 40 repetições para atender ao requisito de homogeneização ($\mathbf{A} = \mathbf{D}$). Garofano *et al.* (2024) relata que os principais benefícios da homogeneização são a melhora das características de resistência e tenacidade, além de uma distribuição mais uniforme de tensões. Contudo, o elevado número de repetições requer uma grande quantidade de camadas para alcançar a homogeneização dos laminados quadriaxiais, resultando no aumento significativo da massa total dos componentes estruturais.

Até recentemente, os laminados quadriaxiais foram usados amplamente devido à dificuldade de fabricar camadas precisamente em qualquer ângulo. Durante esse período, diversos avanços foram implementados e continuam a serem desenvolvidos para obter melhorias nas características mecânicas dos compósitos, considerando aspectos relacionados ao material (Czél *et al.*, 2017; Huang e Joosten, 2021; Xiang *et al.*, 2022), à geometria (Barnes e Morozov, 2016; Guo *et al.*, 2024) e ao empilhamento (Catapano e Montemurro, 2020; Le-Manh e Lee, 2014; Panettieri, Montemurro e Catapano, 2019; Vannucci, 2005; Zhang *et al.*, 2018). No entanto, com o desenvolvimento de dispositivos de corte e posicionamento automáticos, tornou-se mais fácil fabricar os laminados com as fibras em qualquer ângulo. Nesse contexto, Tsai *et al.* (2014) propuseram o conceito de laminados homogeneizados e desenvolveram os laminados duplo-duplo (Tsai, 2021), que são descritos na seção a seguir.

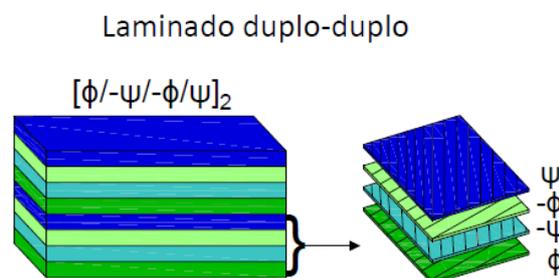
2.1.5.2 Laminados Duplo-Duplo

2.1.5.2.1 Definições

Os laminados duplo-duplo representam um avanço promissor no projeto de estruturas de compósitos laminados. Diferentemente dos laminados tradicionais, eles oferecem flexibilidade nas orientações das camadas, menor custo de fabricação, facilidade de homogeneização e capacidade de afinamento (Wang *et al.*, 2024). Por isso, eles podem ser uma solução para os desafios impostos pelas sequências de empilhamento quadriaxiais.

Introduzidos por Tsai *et al.* (2021), os laminados duplo-duplo possuem dois pares de orientações de camadas equilibradas, formando blocos de construção no formato $[\pm\Phi/\pm\Psi]_r$ onde r é o número de repetições. A Figura 2.14 ilustra um laminado duplo-duplo com duas repetições.

Figura 2.14: Laminado duplo-duplo



Fonte: Autor.

Conforme ilustra a Figura 2.14, os blocos de construção se repetem r vezes, formando o laminado completo e demonstrando uma assimetria no empilhamento. O uso de apenas dois ângulos, Φ e Ψ , ajuda a simplificar o projeto estrutural e a melhorar a capacidade de fabricação. Riccio *et al.* (2024) relatam que a seleção e a organização das orientações das múltiplas camadas tornam-se mais diretas e os requisitos de configuração e de calibração são diminuídos, tornando a fabricação mais eficiente. Wang *et al.* (2025) relatam que velocidade de fabricação dos laminados duplo-duplo pode atingir 4 a 8 vezes a velocidade de fabricação dos laminados quadriaxiais.

Kappel *et al.* (2024) relatam que os laminados assimétricos exibem distorções após a fabricação e quando são submetidos a cargas mecânicas e térmicas. Entretanto, ao aumentar o

número de repetições, os efeitos de assimetria do laminado duplo-duplo são diminuídos, fazendo o laminado atingir a homogeneização.

Quando o laminado atinge a homogeneização, a matriz de acoplamento \mathbf{B} se torna insignificante e a rigidez no plano \mathbf{A} se torna igual à sua rigidez a flexão \mathbf{D} (Vermes et al., 2021b). Conforme Tsai (2021), a homogeneização é avaliada considerando os seguintes critérios:

$$\mathbf{A} - \mathbf{D} < 0,02I_q \quad (2.34)$$

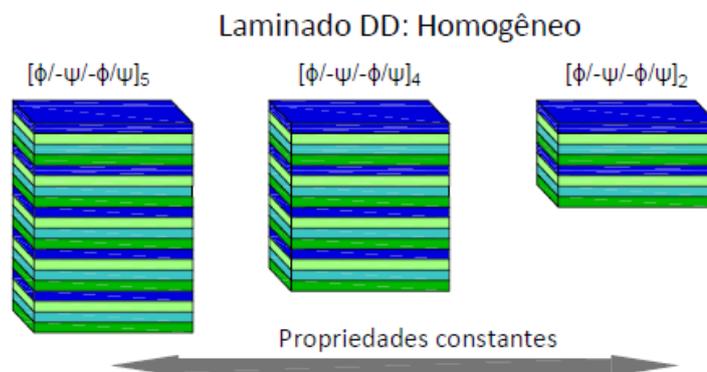
$$\mathbf{B} < 0,02I_q \quad (2.35)$$

em que $I_q = Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{66}$

Dessa forma, os laminados duplo-duplo não requerem simetria em relação ao um plano médio, uma vez que a homogeneização faz com que a matriz de acoplamento se torne insignificante. Segundo Riccio *et al.* (2024), embora os critérios apresentados nas equações (2.34) e (2.35) não elimine por completo as características padrões de um laminado assimétrico, eles fornecem um nível aceitável de desacoplamento com um número limitado de camadas.

Um laminado homogêneo tem suas propriedades aproximadamente as mesmas em toda a espessura ao longo do eixo z (Shabani *et al.*, 2025). A Figura 2.15 ilustra um laminado duplo-duplo homogêneo. Após a sua espessura ser modificada, ou seja, alterar o número de repetições, suas propriedades, como a rigidez a flexão, não se modificam.

Figura 2.15: Laminado duplo-duplo homogeneizado



Fonte: Autor.

De acordo com Tsai (2021), devido à capacidade de manter as mesmas propriedades, os laminados duplo-duplo podem permitir a redução de peso de até 50%. O afunilamento pode ser aplicado em lugares onde as estruturas recebem menos carregamento, permitindo o uso de menos camadas nessas áreas. Nesse caso, as camadas podem ser descartadas eliminando uma unidade repetitiva, em vez de pares de camadas, como ocorre com os laminados quadriaxiais.

Kappel (2022a) destaca que os blocos de construção podem ser adicionados localmente sem a necessidade de reorganizar as camadas para manter a simetria ou reconsiderar as sequências de empilhamento dos laminados nas zonas adjacentes. Essa abordagem cria uma independência entre as diferentes zonas de laminados, o que também facilita os reparos. Para a manutenção, considera-se o empilhamento do laminado base, simplificando o processo.

Tsai *et al.* (2022) relatam que os laminados duplo-duplo também permitem utilizar a técnica de deslizamento de camadas para simplificar o empilhamento de vigas, painéis, longarinas e tubos cônicos, o que também contribui para a redução de peso.

Outra vantagem, é que o processo de otimização é mais simples, resultando em laminados mais finos nas soluções estruturais (Kappel, 2024; Grafano *et al.*, 2023 e Zhao *et al.*, 2023). Vermes *et al.* (2021b) destaca que, enquanto os laminados quadriaxiais podem exigir milhares de permutações de sequência de empilhamento, os laminados duplo-duplo requerem apenas quatro permutações, devido à presença de apenas dois ângulos, $\pm\Phi$ e $\pm\Psi$.

Ademais, a disposição das camadas dos laminados duplo-duplo é contínua, rápida e menos propensa a erros do que as dos laminados quadriaxiais. Segundo Tsai *et al.* (2022), devido a simetria não ser necessária, a laminação pode ser contínua, sem pausas no plano médio. Isso aumenta a velocidade de laminação e diminui os erros de fabricação.

De acordo com Tsai (2022) e Dantas *et al.* (2023), as orientações das camadas, Φ e Ψ , podem assumir qualquer valor entre 0° e 90° com qualquer incremento de ângulo. Essa característica permite a interpolação dos ângulos e a aplicação de transformações de coordenadas, proporcionando uma maior flexibilidade de projeto. Como resultado, os laminados duplo-duplo formam um espaço de projeto contínuo. Em contrapartida, os laminados quadriaxiais são discretos, o que impossibilita a interpolação e restringe o espaço de projeto (Fang *et al.*, 2025)

Outra vantagem notável dos laminados duplo-duplo em relação aos quadriaxiais é a oportunidade de gerenciar as propriedades mecânicas dos sublaminados, adaptando os ângulos Φ e Ψ às condições de cargas aplicadas (Garofano *et al.*, 2023). Esse ajuste permite atender aos requisitos de resistência com um número mínimo de sublaminados.

Além disso, é possível encontrar, de forma relativamente simples, um laminado duplo-duplo equivalente a um quadriaxial. Os autores Tsai *et al.* (2022) demonstraram que algumas substituições de laminados quadriaxiais por duplo-duplo são exatas, e outras são aproximadas. Por exemplo, um laminado quadriaxial $[0_5/\pm 45_2/90]_S$ e um duplo-duplo $[\pm 0/\pm 50]_{5T}$ possuem a mesma rigidez.

2.1.5.2.2 Estado da Arte

Diversos estudos recentes têm sido conduzidos desde a introdução dos laminados duplo-duplo por Tsai *et al.* (2017). Tsai. (2021) forneceram uma visão geral sobre as definições e estratégias de projeto associadas a esse tipo de empilhamento. Shrivastava *et al.* (2020) utilizaram um otimizador estocástico considerando um algoritmo de inteligência artificial para substituir os laminados quadriaxiais por laminados duplo-duplo, levando em consideração critérios de falha de círculo unitário, modo de flambagem e deflexão.

Vermes *et al.* (2021a) destacaram as vantagens de empregar o módulo de Tsai no contexto de laminados duplo-duplo. Por meio de testes de fadiga realizados nos laminados $[\pm 0/\pm 25]$ e $[\pm 0/\pm 50]$, observaram que eles apresentam resistência à fadiga semelhante à dos laminados quadriaxiais equivalentes. Em outro trabalho, Vermes *et al.* (2021b) desenvolveram a ferramenta analítica *LamSearch*, capaz de identificar o laminado mais resistente com base em parâmetros como as propriedades do material e as cargas aplicadas.

Tsai *et al.* (2022) apresentaram os processos de fabricação dos laminados duplo-duplo e propuseram formulações para encontrar um laminado duplo-duplo equivalente a um quadriaxial especificado. Kappel (2022b) propôs um método de otimização para os laminados duplo-duplo considerando o círculo de falha de Nettles e a técnica de otimização por colônia de formigas. Wang *et al.* (2023) propuseram um método de otimização topológica que integra índices do critério de falha de Tsai–Hill em diferentes camadas, permitindo o controle efetivo de tensões.

Riccio *et al.* (2024) apresentaram a ferramenta *DD Automated Design Tool*, que realiza interações entre um software de Método dos Elementos Finitos e a ferramenta *Lamsearch* para identificar os melhores ângulos de laminado, visando atender a requisitos de resistência e reduzir a massa da estrutura. Zhao *et al.* (2024) desenvolveram um método semi-analítico para estudar a delaminação de modo I em interfaces de laminados duplo-duplo. Kappel *et al.* (2024)

investigaram a compressão após o impacto em zonas de transição de laminados e observaram uma resistência inferior relacionada aos laminados duplo-duplo.

Além de estratégias de projeto, diversos estudos destacam o potencial dos laminados duplo-duplo na redução de peso estrutural. Vermes *et al.* (2021b) alcançaram a redução de 6 % no peso de eixos ao substituir os laminados quadriaxiais pelos laminados duplo-duplo, considerando um processo de otimização. Garofano *et al.* (2023) realizaram a otimização do revestimento externo de um segmento de fuselagem sob impacto e demonstraram uma redução de 34 % da massa total da estrutura. Riccio *et al.* (2024) também realizaram otimizações em um segmento de fuselagem e em uma asa de aeronave sob carregamentos típicos. Os laminados duplo-duplo permitiram reduções de peso de 64,6 % na fuselagem e de 50 % na asa, em comparação com as configurações tradicionais.

Além dos trabalhos mencionados, é fundamental considerar estudos sobre flambagem, uma vez que essas análises desempenham um papel crucial na garantia da estabilidade das estruturas e são parte essencial deste trabalho. Kappel (2023) analisou a flambagem de placas retangulares de laminado duplo-duplo simplesmente apoiadas sob compressão. Foi demonstrado que os laminados duplo-duplo com menos repetições, ou seja, menos espessura, podem ser especificados diretamente para uma carga de flambagem determinada.

Em estudo posterior, Kappel (2024) aplicou uma formulação para a análise de placas de duplo-duplo simplesmente apoiadas no estudo de um painel em formato de ferradura, denominados *horse-shoe*, com o objetivo de identificar um grupo compatível de laminados para regiões adjacentes. O autor demonstrou como os laminados duplo-duplo simplificam o processo de otimização, e comparou a massa otimizada do painel com os valores mínimos obtidos em estudos anteriores com laminados quadriaxiais.

Por último, Vescovini *et al.* (2024b) investigaram experimentalmente a pós-flambagem e os modos de falha de seis espécimes de placas enrijecidas de laminado duplo-duplo com perfil de geometria ômega. Consideraram-se dois espécimes com a seção transversal de espessura constante, quatro espécimes com a técnica de deslizamento de camadas e dois espécimes com um inserto de Teflon no flange da longarina. Os modos de falha observados foram discutidos, e os resultados mostraram boa concordância com as simulações por Método dos Elementos Finitos (MEF).

2.1.5.2.3 Formulação

As matrizes da teoria clássica dos laminados (Equação (2.30)) podem ser normalizadas pela espessura dos laminados. Considerando as tensões e deformações, como $\{\sigma^0\} = \frac{1}{t_{\text{lam}}}\{\mathbf{N}\}$, $\{\sigma^f\} = \frac{6}{t_{\text{lam}}^2}\{\mathbf{M}\}$ e $\{\varepsilon^f\} = \frac{t_{\text{lam}}}{2}\{\mathbf{k}\}$, tem-se a forma normalizada escrita como (Zerbst *et al.*, 2024):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \{\sigma^0\}t_{\text{lam}} \\ \{\sigma^f\}\frac{t_{\text{lam}}^2}{6} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^f\}\frac{2}{t_{\text{lam}}} \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} \{\sigma^0\} \\ \{\sigma^f\} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{A}}{t_{\text{lam}}} & \frac{2\mathbf{B}}{t_{\text{lam}}^2} \\ \frac{6\mathbf{B}}{t_{\text{lam}}^2} & \frac{12\mathbf{D}}{t_{\text{lam}}^3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^f\} \end{pmatrix} \quad (2.36) \\ \begin{pmatrix} \{\sigma^0\} \\ \{\sigma^f\} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^n & \mathbf{B}^n \\ 3\mathbf{B}^n & \mathbf{D}^n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^f\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A normalização da espessura leva ao fato de que todas as matrizes têm a mesma unidade, Pa. As matrizes normalizadas pela espessura são dadas por (Kappel, 2023):

$$\mathbf{A}^n = \frac{1}{t_{\text{lam}}}\mathbf{A}, \mathbf{B}^n = \frac{2}{t_{\text{lam}}^2}\mathbf{B}, \mathbf{D}^n = \frac{12}{t_{\text{lam}}^3}\mathbf{D} \quad (2.37)$$

em que $t_{\text{lam}} = 4rt_{\text{ply}}$.

Ao analisar as matrizes normalizadas pela espessura, \mathbf{D}^n e \mathbf{B}^n , é possível verificar porque os laminados duplo-duplo podem ser livres de empenamento e de acoplamento extensão-flexão, embora o laminado possua a configuração assimétrica. Considerando o bloco de construção $[\pm\Phi/\pm\Psi]$, as matrizes normalizadas pela espessura podem ser expressas como função de r , conforme descrito a seguir (Zerbst *et al.*, 2024):

$$\mathbf{B}^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \cdot (\dots) & \frac{1}{r} \cdot (\dots) & \frac{1}{r} \cdot (\dots) \\ \frac{1}{r} \cdot (\dots) & \frac{1}{r} \cdot (\dots) & \frac{1}{r} \cdot (\dots) \\ \frac{1}{r} \cdot (\dots) & \frac{1}{r} \cdot (\dots) & \frac{1}{r} \cdot (\dots) \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{D}^n = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \frac{1}{r^2} \cdot (\dots) \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{r^2} \cdot (\dots) \\ \frac{1}{r^2} \cdot (\dots) & \frac{1}{r^2} \cdot (\dots) & \cdot \end{bmatrix}$$

em que \cdot denota termos positivos e não nulos

Por meio de (2.38), verifica-se que os termos da matriz de acoplamento, \mathbf{B}^n , são inversamente proporcionais ao número de repetições do laminado. Para a matriz de rigidez à flexão, \mathbf{D}^n , apenas os termos D_{16} e D_{26} se alteram com o número de repetições. Sendo que diminuem proporcionalmente a $\frac{1}{r^2}$.

Como os laminados duplo-duplo são laminados assimétricos, além das equações (2.29), as matrizes de transformação propostas por Huang e Qiao (2020) também podem ser aplicadas. Nesse caso, considerando que os termos de acoplamento \mathbf{B} são diferentes de zero, têm-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{B}' &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{D}' &= \mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.39)$$

em que \mathbf{B} tende a ser nula.

A combinação de laminados duplo-duplo com o módulo de Tsai, parâmetro que permite caracterizar a rigidez dos laminados, facilita o desenvolvimento de projetos e a fabricação de estruturas, tornando os laminados duplo-duplo competitivos (Arteiro et al., 2020; Tsai e Melo, 2014; Vermes et al., 2021a). Essa abordagem permite que os laminados duplo-duplo sejam caracterizados sem as quatro propriedades de rigidez típicas exigidas para a definição dos laminados. O módulo do Tsai foi definido a partir do conceito de camada mestre, que representa um passo considerável para a simplificação dos projetos estruturais (Ricchio *et al.*, 2024). Esses conceitos são descritos na Seção 2.1.5.3.

2.1.5.3 Módulo de Tsai e Camada Mestre

Tsai e Melo (2014) propuseram caracterizar a rigidez de um compósito laminado por uma única constante de engenharia, o módulo de Tsai. O módulo de Tsai é um invariante dado pela soma dos componentes da diagonal da matriz de rigidez \mathbf{Q} , conhecido como traço, escrito como:

$$\begin{aligned} I_q &= Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{66} \\ &= A_{11}^n + A_{22}^n + 2A_{66}^n \\ &= D_{11}^n + D_{22}^n + 2D_{66}^n \end{aligned} \quad (2.40)$$

Do ponto de vista físico, o traço da matriz de rigidez reduzida representa uma medida da rigidez total oferecida pelo material, independentemente do sistema de referência adotado, do número de camadas e do empilhamento (Garofano *et al.*, 2024). Essa definição permite que apenas um teste experimental seja necessário para determinar todas as propriedades elásticas. O valor do traço é obtido e utilizado no cálculo das demais propriedades elásticas (Vignoli *et al.*, 2021).

Tsai e Melo (2014) observaram, com base em resultados experimentais, que as matrizes de rigidez reduzida dos polímeros reforçados com fibra de carbono (CFRP) ao serem normalizadas pelo traço, apresentam apenas pequenas variações, que podem ser negligenciadas. Essas análises levaram à introdução de um conceito chamado de camada mestre, definido como a média das matrizes de rigidez reduzida normalizadas pelo traço.

Na Tabela 2.1 são apresentados quinze CFRP, caracterizados nas cinco primeiras colunas pelas propriedades dos materiais, e da sexta a nona coluna pelas componentes da matriz de rigidez reduzida \mathbf{Q} . Na décima coluna é apresentado o traço. Por último, são apresentadas as componentes da matriz de rigidez reduzida normalizada pelo traço \mathbf{Q}_I .

Tabela 2.1: Tabela de cálculo da camada mestre

CFRP	E_x	E_y	G	ν	Q_{11}	Q_{22}	Q_{12}	Q_{66}	I_q	Q_{11}^I	Q_{22}^I	Q_{12}^I	Q_{66}^I
IM6/epoxy	203	11.20	8.40	0.32	204	11.26	3,60	8,40	232	0,879	0,049	0,016	0,036
IM7/977-3	191	9,94	7,79	0,35	192	10,0	3,50	7,79	218	0,883	0,046	0,016	0,036
T300/5208	181	10,30	7,17	0,28	182	10,35	2,90	7,17	206	0,880	0,050	0,014	0,035
IM7/MTM45	175	8,20	5,50	0,33	176	8,24	2,72	5,50	195	0,901	0,042	0,014	0,028
T800s/3900	162	9,00	5,00	0,40	163	9,08	3,63	5,00	183	0,895	0,050	0,020	0,027
IM7/8S52	159	8,96	5,50	0,32	160	9,01	2,88	5,50	180	0,889	0,050	0,016	0,031
T800S/3900	151	8,20	4,00	0,33	152	8,25	2,72	4,00	168	0,903	0,049	0,016	0,024
T300/F934	148	9,65	4,55	0,30	149	9,71	2,91	4,55	168	0,888	0,058	0,017	0,027
T700 C-ply 5	141	9,30	5,80	0,30	152	9,36	2,81	5,80	163	0,871	0,057	0,017	0,036
AS4/H3S01	138	8,96	7,10	0,30	139	9,01	2,70	7,10	162	0,857	0,056	0,017	0,044
T650/epoxy	139	9,40	5,50	0,32	140	9,47	3,03	5,50	160	0,872	0,059	0,019	0,034
T4708/MR60	142	7,72	3,80	0,34	143	7,77	2,64	3,80	158	0,903	0,049	0,017	0,024
T700/2510	126	8,40	4,20	0,31	127	8,45	2,62	4,20	144	0,883	0,059	0,018	0,029
AS4/MTM45	128	7,93	3,65	0,30	129	7,97	2,39	3,65	144	0,894	0,055	0,017	0,025
T700 C-ply 5	121	8,00	4,70	0,30	122	8,05	2,41	4,70	139	0,875	0,058	0,017	0,034
Média: Camada Mestre (Q^{CM})										0,885	0,051	0,016	0,032
Cv (%)										1,5	10,4	9,9	17,4
Desvio-padrão										0,013	0,005	0,002	0,005

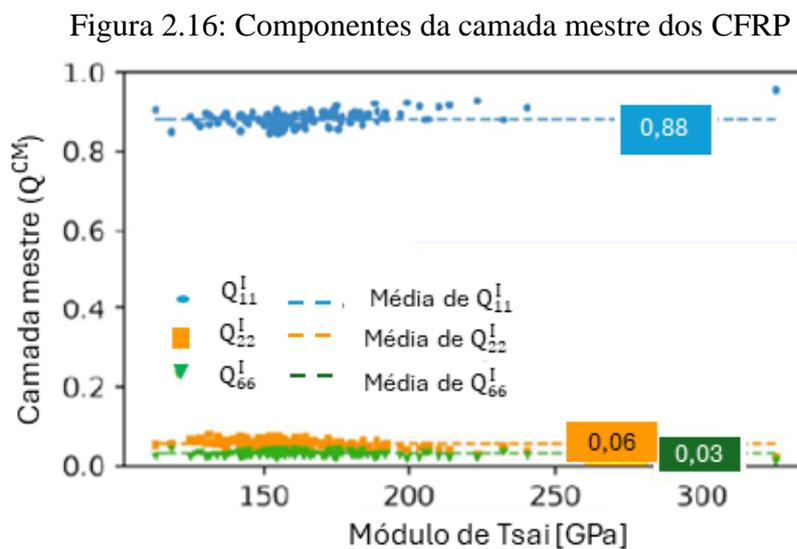
Fonte: Tsai *et al.* (2022) adaptado.

Nas linhas inferiores da Tabela 2.1, são apresentados os valores da camada mestre dos CFRP, calculados com base na média dos valores de Q_I , juntamente com os respectivos coeficientes de variação e desvios padrão. Em particular, o componente Q_{11} normalizado pelo traço teve o coeficiente de variação de apenas 1,5%, enquanto que Q_{22} e Q_{66} apresentaram coeficientes de variação de 10,4% e 17,4%, respectivamente.

A relação entre os componentes da matriz de rigidez da camada mestre e o módulo de Tsai, resulta na matriz de rigidez reduzida, expressa como:

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= Q_{11}^{CM} I_q \\
 Q_{22} &= Q_{22}^{CM} I_q \\
 Q_{12} &= Q_{12}^{CM} I_q \\
 Q_{66} &= Q_{66}^{CM} I_q
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

Outros cálculos relativos à camada mestre foram apresentados por Vermes *et al.* (2021a). Ele considerou um banco de dados com 200 CFRP, que apresentou menos de 2 % de variação dos termos das matrizes normalizadas pelo traço. O gráfico que demonstra essa pequena variação é ilustrado na Figura 2.16 para os termos Q_{11} , Q_{22} e Q_{66} .



Fonte: Adaptado de Vermes *et al.* (2021a).

Ha e Cimini (2018) verificaram que, além dos laminados de carbono epóxi, os laminados aramida/epóxi também podem ser representados pelo conceito da camada mestre, uma vez que apresentam variações nos parâmetros de rigidez normalizados pelo traço de no máximo 2 %. Por outro lado, os laminados de vidro/epóxi exibem variações significativas nesses parâmetros e, por isso, não podem ser representados pelo conceito de camada mestre.

Apesar das limitações em representar toda a gama de materiais e da ausência de rigor matemático, o conceito de camada mestre fornece uma ferramenta valiosa para engenheiros e projetistas permitindo facilitar a otimização das estruturas para diversas aplicações (Riccio et al., 2024; Vermes et al., 2021a). A existência da camada mestre sugere que todos os CFRP podem ser caracterizados por apenas uma propriedade mecânica: o traço da matriz de rigidez (Zhao et al., 2024). Dessa forma, ao analisar, projetar e testar os compósitos, considera-se inicialmente a camada mestre e a solução geral obtida abrange todos os CFRP.

Ao caracterizar o comportamento mecânico de estruturas considerando o conceito de camada mestre, não é necessário recalculas as matrizes para a modificação do material. O módulo de Tsai pode ser usado como um parâmetro de escala para um grupo de materiais que possuem a mesma camada mestre, reduzindo o número de variáveis de projetos e simplificando

os processos de otimização dos compósitos laminados (Riccio *et al.*, 2024). Nesse sentido, não são necessárias as quatro propriedades de rigidez do laminado para caracterizá-lo. Se o módulo de Tsai for o dobro, o material é duas vezes mais rígido e apresentará a metade da deformação.

Considerando o módulo de Tsai, a camada mestre e laminados duplo-duplo (DD), é possível encontrar métodos mais simples de projetar e fabricar, levando a economias significativas de peso (Vermees *et al.* 2021). Essas abordagens fundamentam o desenvolvimento das formulações e modelos que serão apresentados nesta tese.

Nesta seção, foram apresentadas definições de materiais compósitos, relações constitutivas de tensão-deformação, a teoria clássica de compósitos laminados e laminados duplo-duplo. Essas formulações e definições serão utilizadas para desenvolver modelos de laminados duplo-duplo e analisá-los. Na Seção 2.2 são apresentadas definições e formulações do comportamento de placas de laminado sob flambagem.

2.2 Flambagem de Placas de Compósitos Simétricos

Placas de compósito sob carregamento de compressão e/ou cisalhamento estão suscetíveis às instabilidades, como a flambagem local e a flambagem global (Kollár e Springer, 2003). A Figura 2.17 (a) ilustra a flambagem local na fuselagem de uma aeronave e a Figura 2.17 (b) a flambagem global de um tanque de armazenamento.

Figura 2.17: Flambagem local da fuselagem de uma aeronave (a) e flambagem global de um tanque de armazenamento (b).



Fonte: U. S. Air Force (2017).

Conforme observa-se na Figura 2.17 (b), a flambagem global do tanque de armazenamento resultou em uma falha catastrófica da estrutura. Em contraste, a flambagem local não implicou na perda total da capacidade estrutural, resultando apenas em uma redução da rigidez. Esse modo de instabilidade oferece resistência pós-flambagem, oferecendo um potencial significativo para a economia de peso estrutural (Batista, 2009; de Miranda Batista, 2010). Dessa forma, a determinação das cargas críticas e dos modos de flambagem é fundamental para projetos eficientes das estruturas.

Para analisar a estabilidade das placas de compósito, é necessário compreender o equilíbrio das forças atuantes. A Figura 2.18 ilustra uma placa sob carregamento de compressão axial e lateral, N_x e N_y . Conforme Kassapoglou (2013), a equação de equilíbrio de uma placa de compósito retangular sob carregamento no plano, N_x , N_y e N_{xy} , é dada por.

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde w é o deslocamento fora do plano da placa.

Como equação (2.42) não permite uma solução exata, recorre-se, portanto, a uma formulação baseada em energia para a análise de estabilidade. Considerando uma placa de comprimento a e largura b com uma sequência de empilhamento simétrica, ou seja, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (Figura 2.18), a energia de deformação associada à placa é determinada de acordo com a teoria de placas finas de Kirchhoff, conforme a equação apresentada por Vescovini e Bisagni (2015):

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + D_{66} \left(\frac{2 \partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\ \left. + 2 \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{2 \partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{2 \partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (2.43)$$

A energia potencial das forças externas, considerando que a carga permanece constante nas direções x e y , é determinada por:

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\lambda N_{x0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \lambda N_{y0} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\lambda N_{xy0} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dy dx \quad (2.44)$$

onde N_{x0} , N_{y0} e N_{xy0} são as cargas longitudinais, transversais e de cisalhamento internas, as quais estão relacionadas com as cargas aplicadas por meio do parâmetro de carga λ , conforme:

$$N_{x0} = -\lambda N_x \quad N_{y0} = -\lambda N_y \quad N_{xy0} = -\lambda N_{xy} \quad (2.45)$$

As formulações para a flambagem de placas de compósitos laminados com empilhamento simétrico submetidas à compressão e ao cisalhamento são apresentadas nas Seções 2.2.1 e 2.2.2. No caso de carregamento por cisalhamento, considera-se a hipótese de placas longas.

2.2.1 Flambagem por Compressão

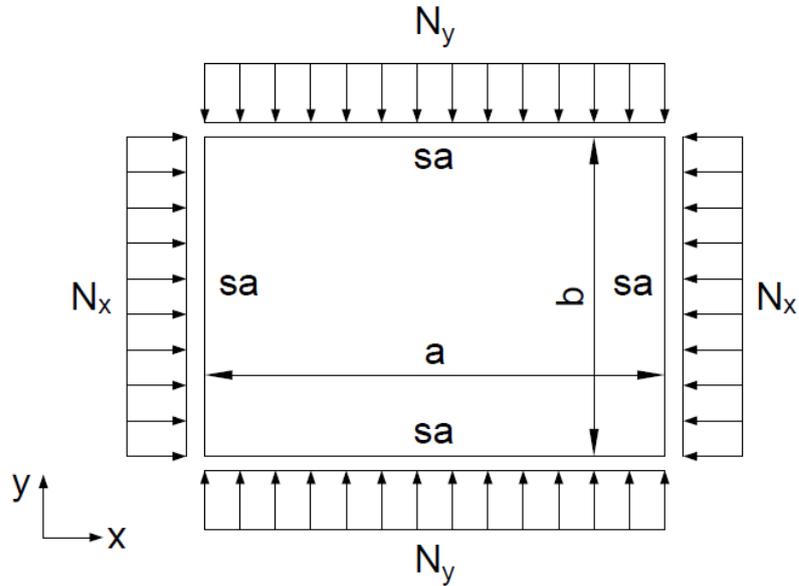
2.2.1.1 Placa Simplesmente Apoiada: Empilhamento Simétrico

Para uma placa de comprimento a e largura b simplesmente apoiada nos quatro lados sob carregamento de compressão biaxial, $N_{xy} = 0$, conforme a ilustra Figura 2.18, tem-se as seguintes condições de contorno (Kassapoglou, 2013):

$$w = M_x = \left(-D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{em } x = 0 \text{ e } x = a \quad (2.46)$$

$$w = M_y = \left(-D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{em } y = 0 \text{ e } y = b \quad (2.47)$$

Figura 2.18: Placa sob compressão biaxial



Fonte: Autor.

A função de interpolação do deslocamento w , que satisfaz as condições de contorno de apoio simples em todas as bordas é dada por (Vescovini e Bisagni, 2015):

$$w = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \omega_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \quad (2.48)$$

onde i e j são os números de termos ao longo das direções longitudinal e transversal, respectivamente, e ω_{ij} são as amplitudes, que podem ser determinadas a partir do princípio da energia potencial estacionária, expresso como (Daniel e Ishai, 2006):

$$\frac{\partial \pi}{\partial \omega_{ij}} = \frac{\partial (U + \Omega)}{\partial \omega_{ij}} = 0 \quad (2.49)$$

Introduzindo a Equação (2.48) em (2.43) e em (2.44) e, em seguida, substituindo na expressão do princípio da energia potencial estacionária (2.49), tem-se o seguinte problema de autovalor, após manipulações algébricas (Kassapoglou, 2013):

$$w = \sum_{k=1}^{I \times J} G_{kl} \omega_k = \lambda \sum_{k=1}^{I \times J} b_{kl} \omega_k \quad (2.50)$$

Em que G_{kl} e b_{kl} , com $G_{kl} = G_{lk}$ e $b_{kl} = b_{lk}$, são expressos, respectivamente, por (Kollár e Springer, 2002):

$$\begin{aligned} G_{lk} = & \frac{1}{4} ab \pi^4 \left[D_{11} \left(\frac{i}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{i}{a} \right)^2 \left(\frac{j}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{j}{b} \right)^2 \right] \delta_{lk} \\ & - 2ab \pi^4 D_{16} \left[\left(\frac{i}{a} \right)^2 \left(\frac{m}{a} \right) \left(\frac{n}{b} \right) r_{im} r_{jn} + \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{i}{a} \right) \left(\frac{j}{b} \right) r_{mi} r_{nj} \right] \\ & - 2ab \pi^4 D_{26} \left[\left(\frac{j}{b} \right)^2 \left(\frac{m}{a} \right) \left(\frac{n}{b} \right) r_{im} r_{jn} + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \left(\frac{i}{a} \right) \left(\frac{j}{b} \right) r_{mi} r_{nj} \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$b_{lk} = \frac{1}{4} ab \pi^2 \left[N_x \left(\frac{i}{a} \right)^2 + N_y \left(\frac{j}{b} \right)^2 \right] \delta_{lk} + ab \pi^2 N_{xy} \left(\frac{i}{a} \frac{n}{b} r_{mi} r_{nj} + \frac{j}{a} \frac{m}{b} r_{im} r_{nj} \right) \quad (2.52)$$

Em forma matricial, tem-se a Equação (2.50) escrita como :

$$\left(\begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1(I \times J)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{(I \times J)1} & \dots & G_{(I \times J)(I \times J)} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1(I \times J)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{(I \times J)1} & \dots & b_{(I \times J)(I \times J)} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{(I \times J)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

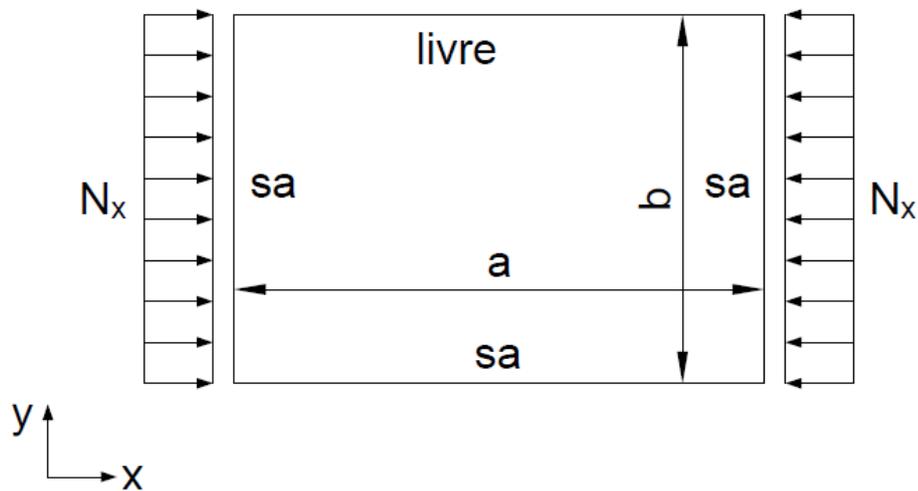
Como solução trivial do problema de autovalor (2.53), tem-se que $\lambda = 0$ e $\omega_k = 0$, o que indica que a placa se encontra em equilíbrio estável, sem a ocorrência de flambagem. Conforme destacado por Kassapoglou (2013), os termos de acoplamento flexão-torção, D_{16} e D_{26} , são desprezíveis em comparação com os demais termos D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} . Com essa simplificação, os autovalores λ_{cr} para os quais ocorre a flambagem da placa submetida a carregamento no plano N_x e N_y , são determinados pela seguinte expressão:

$$N_{cr} = (\lambda_{cr})_{ij} = \frac{\pi^2 \left[D_{11} i^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{i}{a} \right)^2 \left(\frac{j}{b} \right)^2 + D_{22} j^4 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right]}{a^2 \left[i^2 + \left(\frac{N_y}{N_x} \right) j^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]} \quad (2.54)$$

2.2.1.2 Placa Simplesmente Apoiada com um Lado Livre: Empilhamento Simétrico

Considera-se uma placa retangular de comprimento a e largura b , com um empilhamento simétrico, simplesmente apoiada ao longo da aresta $y = 0$ e livre ao longo da aresta $y = b$. As arestas paralelas ao eixo y (isto é, nas extremidades $x = 0$ e $x = b$) também são simplesmente apoiadas. A placa está submetida à compressão axial uniforme N_x na direção x , conforme ilustra a Figura 2.19.

Figura 2.19: Placa simplesmente apoiada em três lados e um livre



Fonte: Autor.

As condições de contorno são definidas como (Kassapoglou, 2013):

$$w(x = 0) = w(x = a) = 0 \quad (2.55)$$

$$w(y = 0) = 0 \quad (2.56)$$

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } x = 0 \text{ e } x = a \quad (2.57)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } y = 0 \text{ e } y = b \quad (2.58)$$

Nesse caso, introduz-se uma constante η na expressão do deslocamento fora do plano para atender as condições de contorno (2.55)-(2.58), o qual é expresso por (Kassapoglou, 2013):

$$w = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \omega_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{\eta_j \pi y}{b} \quad (2.59)$$

A energia potencial da placa é definida considerando $N_{y0} = 0$ e $N_{xy} = 0$ na Equação (2.44). Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned} U + \Omega = & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + D_{66} \left(\frac{2 \partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2 \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dx dy + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\lambda N_{x0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dy dx \end{aligned} \quad (2.60)$$

Pelo princípio da energia potencial estacionária, $\frac{\partial(U+\Omega)}{\partial \omega_{ij}} = 0$, obtém -se (Kollár e Springer, 2003):

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi^2 D_{11}}{a^2} + \frac{12 D_{66}}{b^2} \right) \quad (2.61)$$

2.2.1.3 Placa Simplesmente Apoiada com um Lado Engastado: Empilhamento Simétrico

As cargas críticas de flambagem de placas com empilhamento simétrico, simplesmente apoiadas, com um lado paralelo ao eixo x engastado (Figura 2.20), podem ser obtidas de maneira semelhante à Equação (2.61). Entretanto, nesse caso o deslocamento fora do plano é dado pela expressão (Whitney, 1987):

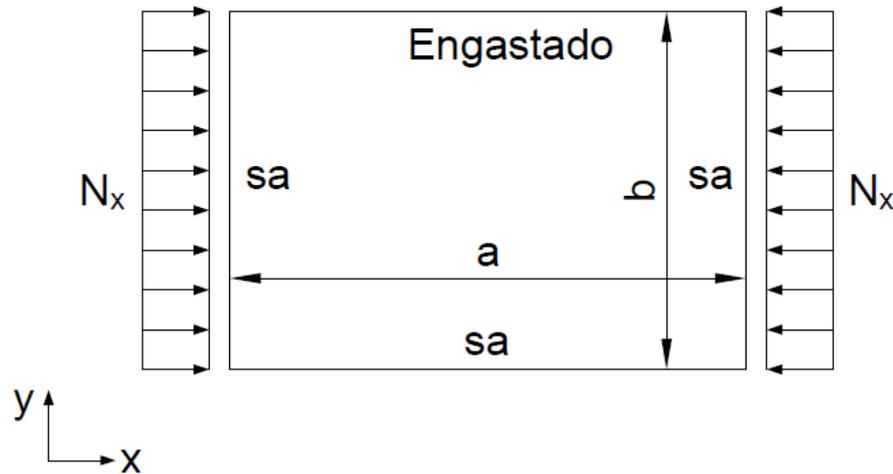
$$\begin{aligned} w = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \omega_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \left(Y \cos \left(\frac{\mu y}{b} \right) - Y \cosh \left(\frac{\mu y}{b} \right) + \sin \left(\frac{\mu y}{b} \right) \right. \\ \left. - \sinh \left(\frac{\mu y}{b} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.62)$$

em que:

$$\mu = (j + 0,25)\pi$$

$$Y = \frac{\sin\mu - \sinh\mu}{\cosh\mu - \cos\mu} \quad (2.63)$$

Figura 2.20: Placa com três lados simplesmente apoiados e um lado engastado



Fonte: Autor.

Assim, para laminados simétricos, uma solução aproximada pode ser expressa conforme proposto por Kassapoglou (2013):

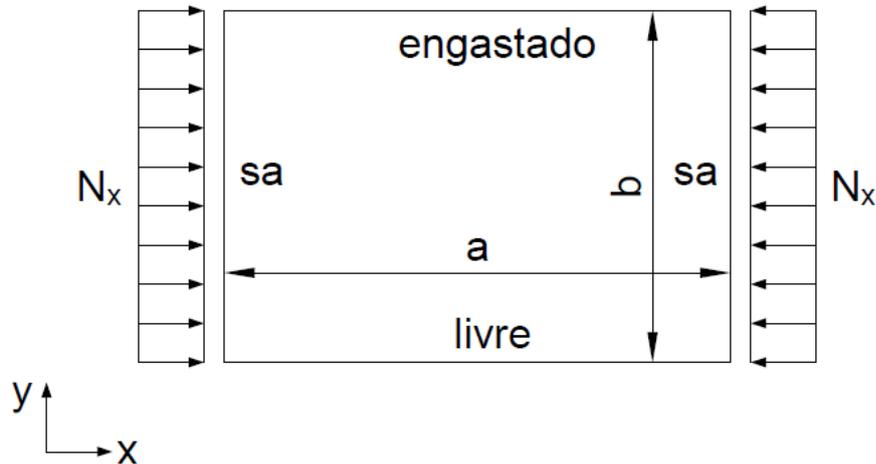
$$N_o = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left[D_{11} \frac{b^2}{(a/i)^2} + 2.44D_{22} \frac{(a/i)^2}{b^2} + 2.33(D_{12} + 2D_{66}) \right] \quad (2.64)$$

2.2.1.4 Placa Simplesmente Apoiada com um Lado Engastado e Outro Livre: Empilhamento Simétrico

Uma expressão aproximada para o cálculo da carga de flambagem de placas engastadas ao longo do eixo $y = b$, livre ao longo do eixo $y = 0$ e simplesmente apoiada ao longo das bordas $x = 0$ e $x = a$ (Figura 2.21) foi apresentada por Kassapoglou (2013). A placa é submetida a uma compressão uniaxial uniforme na direção x ($N_y = 0$). Nesse caso, a expressão para a carga de flambagem é definida como:

$$N_{cr} = \left[\frac{\pi^2}{(a/i)^2} D_{11} + 1.25 \frac{(a/i)^2}{b^4} D_{22} + \frac{12}{b^2} D_{66} \right] \quad (2.65)$$

Figura 2.21: Placa com dois lados simplesmente apoiados, um livre e um engastado



Fonte: Autor.

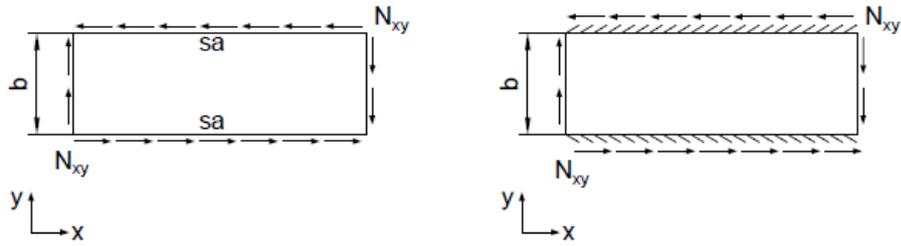
As equações (2.65), (2.64), (2.61) e (2.54) permitem calcular as cargas de flambagem de laminados quadriaxiais, evidenciando que essas cargas dependem das rigidezes à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} , das dimensões a e b e do número de meias-ondas nas direções x e na direção y . Dessa forma, os cálculos devem ser realizados para diferentes combinações de i e j , que definem o modo de flambagem correspondente. O menor autovalor obtido é o mais relevante, pois indica o modo de flambagem que ocorre sob a menor carga externa.

Na seção 2.2.2, será apresentada a flambagem de placas longas de empilhamento simétrico submetidas ao cisalhamento.

2.2.2 Flambagem por Cisalhamento

Considera-se uma placa longa retangular de espessura constante e empilhamento simétrico, cujo comprimento é grande em comparação com a largura ($a \gg b$). A placa está submetida a uma carga de cisalhamento uniforme N_{xy} . Supondo que a placa seja infinitamente longa na direção longitudinal, analisam-se dois conjuntos de condições de contorno aplicados nos lados longitudinais: simplesmente apoiados e engastados. A Figura 2.22 ilustra a placa sob essas condições de contorno.

Figura 2.22: Placa sob cisalhamento



Fonte: Autor.

Conforme Mittelstedt, Erdmann e Schroder (2011), a energia potencial total da placa pode ser formulada supondo que os esforços normais sejam nulos, $N_{y0} = 0$ e $N_{x0} = 0$. Nessas condições, a expressão da energia potencial é dada por:

$$\begin{aligned}
 U + \Omega = & \frac{1}{2} \int_0^{\lambda_1} \int_0^b \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + D_{66} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\
 & + 2 \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \Big] dx dy \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{\lambda_1} \int_0^b \left[2 \lambda N_{xy0} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dy dx
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

em que λ_1 representa o comprimento de meia-onda de flambagem.

Os termos D_{16} e D_{26} podem ser desconsiderados para laminados simétricos. Dessa forma, desenvolvem-se as formulações correspondentes às duas condições de contorno aplicadas à placa: simplesmente apoiada e engastada, considerando $D_{16} = D_{26} = 0$.

2.2.2.1 Placa Simplesmente Apoiada

Para a placa simplesmente apoiada (Figura 2.22), consideram-se as seguintes condições de contorno:

$$w(y = 0) = w(y = b) = 0 \tag{2.67}$$

$$M_y(y = 0) = -D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad M_y(y = b) = -D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{2.68}$$

Supondo-se a placa como infinitamente longa, não há a imposição de condições de contorno específicas nas bordas transversais.

Conforme Mittelstedt, Erdmann e Schroder (2011), o deslocamento fora do plano que atende as condições de contorno (2.67-2.68) é expresso por:

$$w = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \omega_{ij} \sin \left[\frac{\pi}{\lambda_1} (x - \lambda_2 y) \right] \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2.69)$$

em que λ_2 é a inclinação do modo de flambagem.

Introduzindo a Equação (2.69) na Equação (2.66) e, em seguida, substituindo na expressão do princípio da energia potencial estacionária (2.49), tem-se a seguinte formulação de forma fechada para a carga crítica de flambagem, conforme Mittelstedt, Erdmann e Schroder (2011):

$$N_{cr} = -\pi^2 \frac{D_{11}b^4 + D_{22}(\lambda_1^4 + 6\lambda_1^2\lambda_2^2b^2 + \lambda_2^4b^4) + 2(D_{12} + 2D_{66})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2b^2)b^2}{2\lambda_1^2\lambda_2b^4} \quad (2.70)$$

A carga crítica é o menor valor que satisfaz os seguintes requisitos:

$$\frac{\partial N_{cr}}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \frac{\partial N_{cr}}{\partial \lambda_2} = 0 \quad (2.71)$$

Desenvolvendo (2.71), obtém-se:

$$\lambda_1 = b \sqrt[4]{\frac{D_{11} + D_{22}\lambda_2^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_2^2}{D_{22}}} \quad (2.72)$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{\lambda_3 - 3D_{22}\lambda_1^2 - (D_{12} + 2D_{66})b^2}}{\sqrt{3D_{22}b}}$$

em que:

$$\lambda_3 = \sqrt{12D_{22}\lambda_1^2[D_{22}\lambda_1^2 + (D_{12} + 2D_{66})b^2] + [3D_{11}D_{22} + (D_{12} + 2D_{66})^2]b^4} \quad (2.73)$$

Mittelstedt, Erdmann e Schroder (2011) propuseram um processo iterativo para obter λ_1 e λ_2 , com base nas Equações (2.72) e (2.73). O procedimento tem início com a escolha de um valor inicial para λ_1 , geralmente adotando-se $\lambda_1 = b$. A partir disso, realiza-se a primeira iteração para calcular uma estimativa inicial de $\lambda_2 = \lambda_{2,1}$. Um novo valor $\lambda_1 = \lambda_{1,1}$ é determinado, levando a uma atualização de $\lambda_2 = \lambda_{2,2}$, e assim por diante. O processo é repetido até que os valores consecutivos de λ_1 e λ_2 atinjam convergência, isto é, quando $\lambda_{1,i} \cong \lambda_{1,i-1}$ e $\lambda_{2,i-1} \cong \lambda_{2,i-1}$, dentro de uma tolerância da ordem de 10^{-3} . De acordo com os autores, nos exemplos considerados no estudo, foram necessárias apenas 4 a 5 iterações para alcançar a convergência, evidenciando a eficiência do método proposto.

Kollár e Springer (2003) também apresentaram uma formulação para placas longas submetidas ao cisalhamento. Além de considerarem a razão de aspecto elevada ($a \gg b$), os autores assumiram que ocorre deformação cilíndrica ao longo do comprimento da placa, sendo que essas considerações são válidas quando:

$$a > 3b \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \quad (2.74)$$

Nesse contexto, o deslocamento fora do plano, descrito pela equação (2.48), e a energia potencial total da placa (2.66) podem ser considerados. Aplicando o princípio a energia potencial estacionária, $\frac{\partial(U+\Omega)}{\partial\omega_{ij}} = 0$, Kollár e Springer (2003) derivaram uma expressão em forma fechada para a carga crítica de flambagem de placas longas com empilhamento simétrico, dada por:

$$N_0 = \begin{cases} \frac{4}{b^2} \sqrt[4]{D_{11}(D_{22})^3} (8.125 + 5.045K) & K \leq 1 \\ \frac{4}{b^2} \sqrt{D_{22}(D_{12} + 2D_{66})} \left(11.71 + \frac{1.46}{K^2} \right) & 1 < K \end{cases} \quad (2.75)$$

em que $K = \frac{2D_{66} + D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}$

2.2.2.2 Placa Engastada nas Longitudinais

De forma semelhante, Mittelstedt, Erdmann e Schroder (2011) apresentaram uma formulação para placas engastadas nas longitudinais (Figura 2.22) sob cisalhamento uniforme N_{xy} , sendo que as seguintes condições de contorno são válidas:

$$w(y = 0) = w(y = b) = 0 \quad (2.76)$$

Além disso, as rotações nos lados engastados são nulas:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \quad (2.77)$$

Assim, o deslocamento fora do plano que satisfaz os critérios estabelecidos pelas equações (2.76) e (2.77) é expresso por:

$$w = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{ij}}{2} \sin \left[\frac{\pi}{\lambda_1} (x - \lambda_2 y) \right] \left[1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \quad (2.78)$$

A carga crítica de flambagem para uma placa infinita com condições de contorno de engaste submetida ao carregamento de cisalhamento pode ser determinada pela substituição da Equação (2.78) na Equação (2.66), e considerando o princípio da energia potencial estacionária (2.49). Dessa forma, a expressão de forma fechada é escrita (Mittelstedt, Erdmann e Schroder, 2011):

$$N_{cr} = -\pi^2 \frac{3D_{11}b^4 + D_{22}(16\lambda_1^4 + 24\lambda_1^2\lambda_2^2b^2 + 3\lambda_2^4b^4) + 2(D_{12} + 2D_{66})(4\lambda_1^2 + 3\lambda_2^2b^2)b^2}{6\lambda_1^2\lambda_2b^4} \quad (2.79)$$

As condições impostas pela Equação (2.71) resultam nas seguintes expressões:

$$\lambda_1 = \frac{b^4}{2} \sqrt{3 \frac{D_{11} + D_{22}\lambda_2^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_2^2}{D_{22}}} \quad (2.80)$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{\lambda_3 - 3D_{22}\lambda_1^2 - (D_{12} + 2D_{66})b^2}}{\sqrt{3D_{22}b}}$$

em que:

$$\lambda_3 = \sqrt{16D_{22}[2D_{22}\lambda_1^2 + (D_{12} + 2D_{66})b^2]\lambda_1^2 + [3D_{11}D_{22} + (D_{12} + 2D_{66})^2]b^4} \quad (2.81)$$

O mesmo procedimento iterativo descrito anteriormente pode ser aplicado para calcular λ_1 e λ_2 , que, então, são substituídos na Equação (2.79) para determinar a carga crítica.

Kollár e Springer (2003) também apresentaram uma formulação de forma fechada que foi obtida por metodologia semelhante a apresentada por Mittelstedt, Erdmann e Schroder (2011). Essa expressão para carga crítica de flambagem de placas longas de laminado simétrico é dada por:

$$N_0 = \begin{cases} \frac{4}{b^2} \sqrt[4]{D_{11}(D_{22})^3} (15.07 + 7.08K) & K \leq 1 \\ \frac{4}{b^2} \sqrt{D_{22}(D_{12} + 2D_{66})} \left(18.59 + \frac{3.56}{K^2} \right) & 1 < K \end{cases} \quad (2.82)$$

em que $K = \frac{2D_{66} + D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}$

As expressões (2.70), (2.75) (2.79) e (2.82) permitem avaliar a carga crítica de flambagem de placas longas de laminados quadriaxiais sob cisalhamento. Verifica-se que essas expressões dependem da largura b da placa e da rigidez à flexão.

Este capítulo apresentou os fundamentos da teoria clássica de laminados, bem como as características dos empilhamentos de laminados quadriaxiais e duplo-duplo. Foram também descritas as formulações para a análise de flambagem de placas de compósitos de laminados quadriaxiais, considerando diferentes condições de contorno e carregamentos. Esse embasamento teórico fornece o suporte necessário para o desenvolvimento das formulações propostas neste trabalho. No capítulo seguinte, são descritos os procedimentos metodológicos,

com destaque para o desenvolvimento das soluções analíticas e da estratégia de projeto proposta.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo, são apresentados os procedimentos considerados para o desenvolvimento das expressões de forma fechada para a análise da flambagem de laminados duplo-duplo. Além disso, detalha-se o critério prático de projeto proposto para placas longas submetidas à flambagem por cisalhamento. Por meio das expressões de forma fechada, realiza-se um estudo comparativo entre os laminados duplo-duplo e quadriaxiais. As sequências de empilhamento consideradas nesse estudo são detalhadas na Seção 3.1. Em seguida, são descritas as formulações da teoria clássica de laminados adaptadas para os laminados duplo-duplo, incluindo os cálculos das matrizes de rigidez adimensionalizadas. Por seguinte, são apresentadas as expressões de forma fechada para a análise de flambagem de placas de laminados duplo-duplo submetidas a cargas compressivas e de cisalhamento. No caso de cisalhamento, o estudo concentra-se em placas longas. Essas análises foram desenvolvidas no *software* MATLAB.

Por seguinte, é apresentado o critério prático de projeto para laminados duplo-duplo resistentes à flambagem por cisalhamento, utilizando camadas pré-fabricadas disponíveis comercialmente. Nesse critério, é considerado a assimetria do laminado duplo-duplo, o conceito de camada mestre e o Módulo de Tsai. O objetivo do critério proposto é maximizar a carga de flambagem dos laminados duplo-duplo.

Por fim, são apresentados os procedimentos para o desenvolvimento dos modelos numéricos, os quais foram desenvolvidos no *Ansys Workbench* considerando o módulo *Ansys Composite*.

3.1 Definição das Sequências de Empilhamento Equivalentes

Para o estudo comparativo da flambagem de laminados quadriaxiais e duplo-duplo submetidos a cargas compressivas e de cisalhamento, utilizou-se a ferramenta MICMAC 6.0, disponibilizada gratuitamente por Tsai *et al.* (2022), para identificar as sequências de empilhamento de laminados duplo-duplo com rigidez equivalente à dos laminados quadriaxiais.

A seleção da sequência de empilhamento foi baseada no tipo de laminado: neutro, flexível e rígido (Tsai, 2021). Os laminados rígidos são caracterizados por 50 % ou mais de camadas de 0° ou 90° , enquanto os laminados flexíveis consistem predominantemente em

camadas de $\pm 45^\circ$. Dessa forma, foram selecionados para a investigação três tipos populares de laminados quadriaxiais: laminado neutro $[0/\pm 45/90]_s$, rígido $[0_5/\pm 45/90]$ e flexível $[0/\pm 45_4/90]_s$, cujos laminados duplo-duplo equivalentes são descritas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Sequências de empilhamento

Sequência de empilhamento			
Camadas	Classificação	Quadriaxial	Duplo-duplo
8	Neutro	$[0/\pm 45/90]_s$	$[\pm 0/\pm 44]_{2T}$
16	Rígido	$[0_5/\pm 45/90]_s$	$[\pm 0/\pm 22]_{4T}$
20	Flexível	$[0/\pm 45_4/90]_s$	$[\pm 22/\pm 50]_{5T}$

Verifica-se pela Figura 3.1, que o laminado neutro possui 8 camadas, o rígido 16 camadas e o flexível 20 camadas. Os laminados duplo-duplo equivalentes são $[\pm 0/\pm 44]_{2T}$, $[\pm 0/\pm 22]_{4T}$ e $[\pm 22/\pm 50]_{5T}$, respectivamente.

Nesse estudo comparativo, foram utilizadas as formulações apresentadas nas Seções 3.2 e 3.3, que descrevem, respectivamente, a fundamentação teórica e a formulação da flambagem de placas.

3.2 Fundamentação Teórica

A homogeneização dos laminados duplo-duplo permite caracterizá-los considerando as propriedades de rigidez de apenas um bloco de construção representativo, $[\pm\Phi/\pm\Psi]$ (Zerbst *et al.*, 2024). A matriz constitutiva da k -ésima camada, com $k = 1, 2, 3$ e 4 , desse bloco representativo é escrita como:

$$[\bar{Q}]_k = [T]_k^{-1}[Q][T]_k \quad (3.1)$$

onde a matriz de transformação $[T]_k$ é dada por:

$$[T]_k = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

em que $\theta = [+ \Phi, - \Phi, + \Psi, - \Psi]$ para $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Dessa forma, as matrizes de rigidez apresentadas por Kóllar e Springer (2002) (Equação (2.30)), podem ser escritas para laminado duplo-duplo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^4 (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^4 (\bar{Q}_{ij})_k \left(\frac{t_{lam}}{4} \right) = r t_{ply} \sum_{k=1}^4 (\bar{Q}_{ij})_k \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^4 (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para o desenvolvimento da formulação, as matrizes da Equação (3.3) foram adimensionalizadas através da normalização pela espessura, consideração realizada por Kappel (2023), e pelo módulo de Tsai, definido por Tsai e Melo (2014):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= \frac{1}{I_q t_{lam}} \mathbf{A} = \frac{1}{4 I_q} \sum_{k=1}^4 (\bar{Q}_{ij})_k \\ \mathbf{B}^* &= \frac{2}{I_q t_{lam}^2} \mathbf{B} = \frac{1}{8 r^2 t_{ply}^2 I_q} \mathbf{B} \\ \mathbf{D}^* &= \frac{12}{I_q t_{lam}^3} \mathbf{D} = \frac{3}{16 r^3 t_{ply}^3 I_q} \mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde t_{lam} e t_{ply} a espessura total do laminado e a espessura de cada camada, respectivamente.

Essas matrizes adimensionalizadas permitem que a espessura e o material sejam ajustados posteriormente, possibilitando a adaptação da espessura para cada região da estrutura. Além disso, permite monitorar os termos da matriz de acoplamento \mathbf{B} rapidamente. A seção 3.3 apresenta a flambagem de placas.

3.3 Flambagem de Placas de Laminado Duplo-Duplo

Considerando a homogeneização dos laminados duplo-duplo, os componentes da matriz de rigidez à flexão, D_{16}^* e D_{26}^* , não contribuem de forma significativa na resposta da estrutura. Dessa forma, nesse trabalho, assume-se que D_{16}^* e D_{26}^* são desprezíveis. Portanto, a equação de equilíbrio para placas, conforme descrita por Kassapoglou (2013) (Equação (2.42)), pode ser reescrita para laminados duplo-duplo como:

$$\frac{16r^3 t_{ply}^3 I_q}{3} \left(D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.5)$$

onde w é o deslocamento fora do plano da placa.

O problema de flambagem é solucionado considerando-se o princípio da energia potencial mínima (2.49), em que a energia de deformação por flexão (2.43) associada placa pode ser reescrita para os laminados duplo-duplo da seguinte forma:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \frac{16r^3 t_{ply}^3 I_q}{3} \int_{\Omega} \left(D_{11}^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66}^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4D_{16}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_{26}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) d\Omega \quad (3.6)$$

Verifica-se que o resultado da integral da equação (3.6) não se modifica ao alterar o material e a espessura do laminado.

3.3.1 Flambagem de Placas sob Compressão

Nesta seção, são apresentadas as formulações para a flambagem de placas submetidas à compressão, considerando diferentes condições de contorno: simplesmente apoiada nos quatro lados, simplesmente apoiada com um lado livre, simplesmente apoiada com um lado engastado e simplesmente apoiada com um lado livre e outro engastado. Em particular, a subseção seguinte apresenta o caso de uma placa simplesmente apoiada nos quatro lados.

3.3.1.1 Placa Simplesmente Apoiada nos Quatro Lados

No estudo, foram apresentadas expressões de forma fechada para a flambagem de placas simplesmente apoiadas submetidas a compressão axial e lateral, bem como placas sob compressão axial apenas. Na Seção 3.3.1.1.1, apresenta-se as formulações da flambagem dessas placas sob carregamento axial e lateral.

3.3.1.1.1 Placa sob Carga de Compressão Biaxial

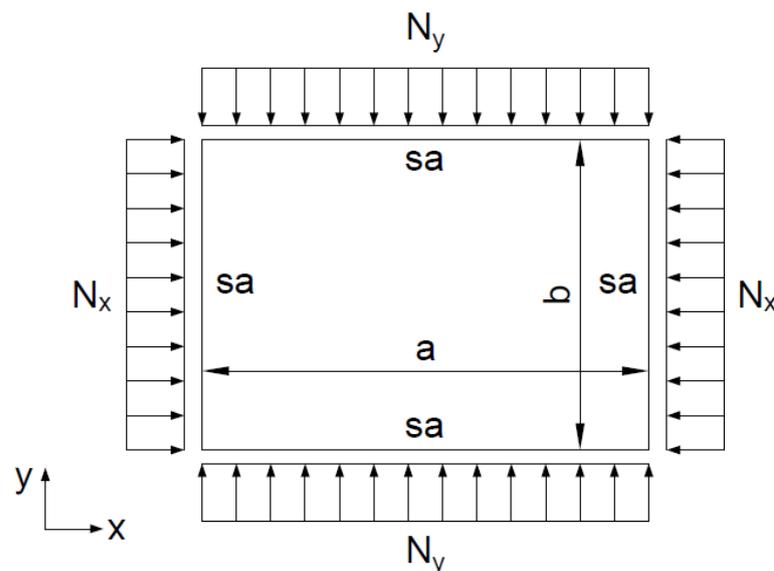
Inicialmente, considerou-se uma placa simplesmente apoiada nos quatro lados e submetida a cargas de compressão, N_x e N_y , conforme ilustra a Figura 3.1.

A placa possui comprimento a e largura b . As condições de contorno definidas por Kassapoglou (2013) para laminados simétricos podem ser reescritas da seguinte forma:

$$w = M_x = \frac{16rt_{ply}^3 I_q}{3} \left(-D_{11}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{em } x = 0 \text{ e } x = a \quad (3.7)$$

$$w = M_y = \frac{16rt_{ply}^3 I_q}{3} \left(-D_{12}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{em } y = 0 \text{ e } y = b \quad (3.8)$$

Figura 3.1: Placa simplesmente apoiada sob compressão biaxial



Fonte: Autor.

A equação (2.48) satisfaz todas as condições de contorno listadas nas Equações (3.7)-(3.8). Por meio da substituição da Equação (2.48) em (3.6) e aplicando o princípio da energia potencial mínima (2.49), obtém-se as expressões das cargas de flambagem. Considerando a definição dada pela Equação (3.4), pode-se definir o seguinte fator nessas expressões:

$$f = \frac{I_q t_{lam}^3}{12} = \frac{I_q (4rt_{ply})^3}{12} = \frac{16I_q t_{ply}^3 r^3}{3} \quad (3.9)$$

Dessa forma, a expressão da carga de flambagem definida por Kassapoglou (2013) pode ser escrita para laminados duplo-duplo como:

$$N_o = f \left[\frac{\pi^2 [D_{11}^* i^4 + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*)(i^2 j^2)(a/b)^2 + D_{22}^* j^4 (a/b)^4]}{a^2 [i^2 + (N_y/N_x) j^2 (a/b)^2]} \right] \quad (3.10)$$

A carga de flambagem N_o é função do número de meias-ondas i na direção x e j na direção y . A carga de flambagem crítica (N_{cr}) é obtida para os valores de i e j que minimizam N_o .

3.3.1.1.2 Placa sob Compressão Axial

Posteriormente, analisou-se um caso particular de uma placa retangular sob compressão, considerando $N_y = 0$. Assim, a equação (3.10) pode ser reescrita como (Kassapoglou, 2013):

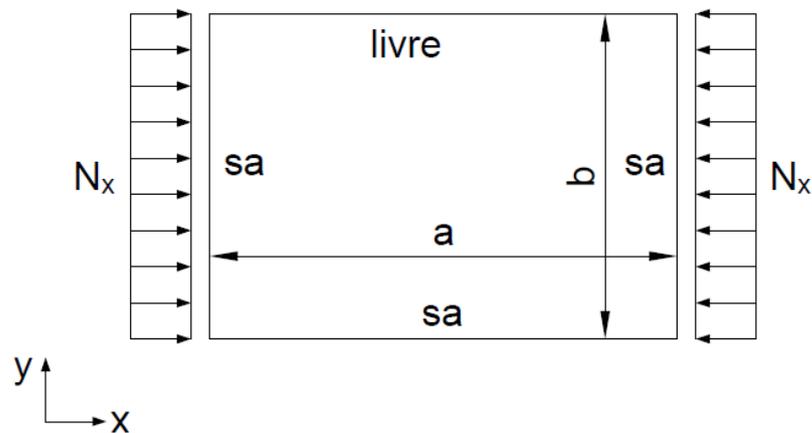
$$N_o = f \left[\frac{\pi^2 [D_{11}^* i^4 + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*)(i^2 j^2)(a/b)^2 + D_{22}^* j^4 (a/b)^4]}{a^2 i^2} \right] \quad (3.11)$$

Como mencionado anteriormente, a carga crítica de flambagem é determinada quando i e j assumem os valores que minimizam N_o .

3.3.1.2 Placa Simplesmente Apoiada em Três Lados e um Livre

Para verificar a validade da metodologia para outras condições de contorno, considerou-se o caso de uma placa com três lados simplesmente apoiados e um lado livre, sob compressão axial, conforme demonstrado na Figura 3.2.

Figura 3.2: Placa simplesmente apoiada em três lados e um livre



Fonte: Autor.

De acordo com Kassapoglou (2013), a equação de equilíbrio para esse caso é a mesma da equação (3.5) com $N_y = 0$, escrita como:

$$f\left(D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.12)$$

As condições de contorno são definidas como:

$$w(x = 0) = w(x = a) = 0 \quad (3.13)$$

$$w(y = 0) = 0 \quad (3.14)$$

$$M_x = -D_{11}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } x = 0 \text{ e } x = a \quad (3.15)$$

$$M_y = -D_{12}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } y = 0 \text{ e } x = b \quad (3.16)$$

A expressão do deslocamento fora do plano é ajustada para satisfazer as condições de contorno (Equações (3.13)-(3.16)), incorporando uma constante η na componente do eixo y , sendo definida como:

$$w = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \omega_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{\eta j\pi y}{b} \quad (3.17)$$

Conforme Kollar e Springer (2003), substituindo o deslocamento fora do plano (3.7) na Equação

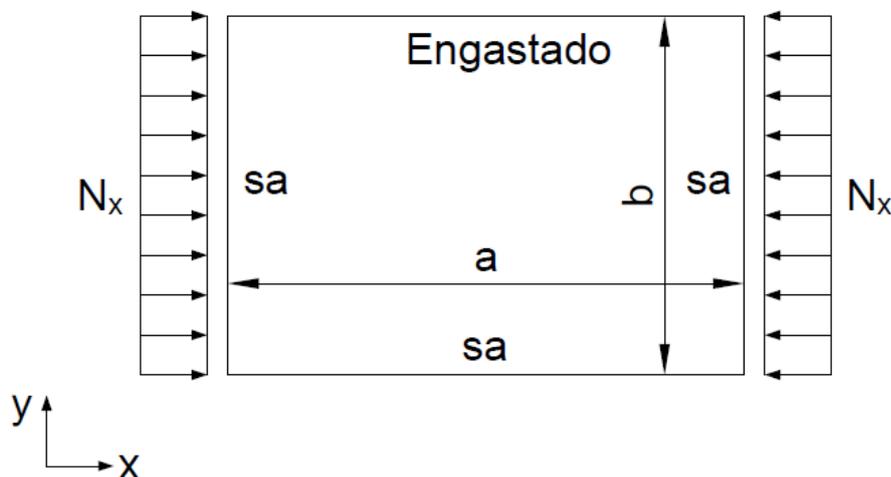
(3.6) e aplicando o princípio da energia potencial estacionária (2.49), obtém-se a expressão da carga de flambagem. Dessa forma, a carga de flambagem é dada por:

$$N_o = f \left(\frac{\pi^2 D_{11}^*}{a^2} + \frac{12 D_{66}^*}{b^2} \right) \quad (3.18)$$

3.3.1.3 Placa Simplesmente Apoiada em Três Lados e um Lado Engastado

Posteriormente, foi considerada uma placa com três lados simplesmente apoiados e um engastado, conforme ilustrado na Figura 3.3. A metodologia previamente definida também é aplicada a esse caso.

Figura 3.3: Placa com três lados simplesmente apoiados e um lado engastado



Fonte: Autor.

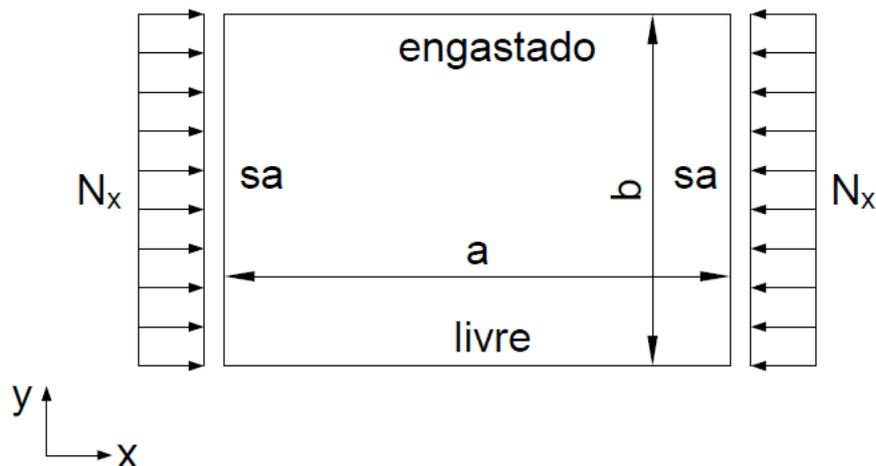
Dessa forma, a expressão para cálculo da carga de flambagem apresentada por Kóllar e Springer (2002), pode ser reescrita como:

$$N_o = f\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left[D_{11}^* \frac{b^2}{(a/i)^2} + 2.44D_{22}^* \frac{(a/i)^2}{b^2} + 2.33(D_{12}^* + 2D_{66}^*) \right] \quad (3.19)$$

3.3.1.4 Placa Simplesmente Apoiada em Dois Lados, Um Lado Engastado e Outro Livre

A Figura 3.4 ilustra as condições de contorno da placa seguinte, que possui dois lados simplesmente apoiados, um lado livre e um engastado.

Figura 3.4: Placa com dois lados simplesmente apoiados, um livre e um engastado



Fonte: Autor.

Nesse caso, a expressão da carga de flambagem é baseada na formulação apresentada por Kassapoglou (2013) e pode ser escrita como:

$$N_o = f \left[\frac{\pi^2}{(a/i)^2} D_{11}^* + 1.25 \frac{(a/i)^2}{b^4} D_{22}^* + \frac{12}{b^2} D_{66}^* \right] \quad (3.20)$$

Nas equações (3.10), (3.11), (3.18), (3.19) e (3.20), observa-se que, para um dado laminado duplo-duplo, apenas o fator f é modificado no cálculo da carga de flambagem quando a espessura ou o material são alterados. Esse fator depende do invariante do material e da espessura do laminado e, conseqüentemente, do número de repetições do sublaminado. Isso

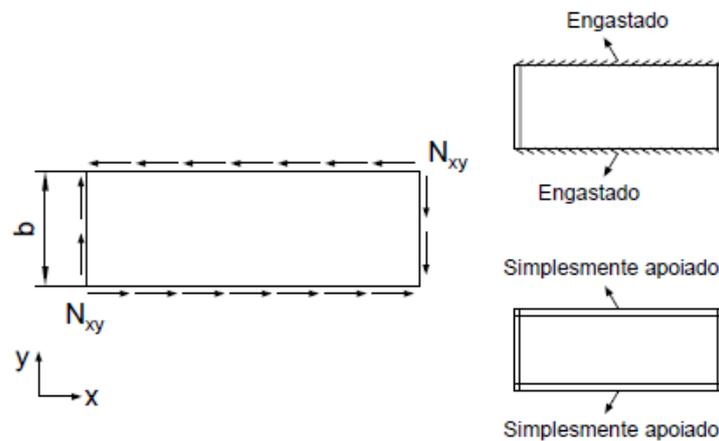
permite ajustar rapidamente a espessura das diferentes áreas da estrutura e modificar o material, sem a necessidade de recalculas as expressões.

Na seção 3.3.2, será apresentada a flambagem de placas longas submetidas ao cisalhamento.

3.3.2 Flambagem de Placas Longas sob Cisalhamento

Nesta seção, é abordada a flambagem de placas longas de duplo-duplo submetidas ao cisalhamento, considerando duas condições de contorno aplicadas nos lados longitudinais: simplesmente apoiados e engastados. A Figura 3.5 ilustra a placa sob essas condições de contorno.

Figura 3.5: Placa sob cisalhamento



Fonte: Mapa e Ávila (2025).

Além de considerar a placa como longa ($a \gg b$), assumiu-se deformação cilíndrica ao longo de seu comprimento. Reescrevendo a Equação (2.74) para laminados duplo-duplo, verifica-se que essas considerações são válidas quando:

$$a > 3b \sqrt[4]{\frac{D_{11}^*}{D_{22}^*}} \quad (3.21)$$

3.3.2.1 Placa Simplesmente Apoiada

Primeiramente, considerou-se a placa simplesmente apoiada. Para esse caso, o deslocamento fora do plano (equação (2.48)) e a equação de equilíbrio (3.5) podem ser considerados, em que N_x e N_y são nulos. Dessa forma, a expressão de forma fechada para a carga de flambagem de laminados duplo-duplo, baseada na formulação apresentada por Kollár e Springer (2002), é escrita como:

$$N_0 = \begin{cases} \frac{4}{b^2} f^4 \sqrt{D_{11}^* (D_{22}^*)^3} (8.125 + 5.045K) & K \leq 1 \\ \frac{4}{b^2} f \sqrt{D_{22}^* (D_{12}^* + 2D_{66}^*)} \left(11.71 + \frac{1.46}{K^2} \right) & 1 < K \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\text{em que } K = \frac{2D_{66}^* + D_{12}^*}{\sqrt{D_{11}^* D_{22}^*}}$$

3.3.2.2 Placa Engastada das Longitudinais e Simplesmente Apoiada nas Transversais

O deslocamento fora do plano para uma placa simplesmente apoiada nas transversais e engastada nas longitudinais pode ser dado por (Chiara, 2015):

$$w = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \omega_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \left[\cos \frac{(j-1)\pi y}{b} - \cos \frac{(j+1)\pi y}{b} \right] \quad (3.23)$$

Substituindo o deslocamento fora do plano (3.22) na Equação

(3.6) e aplicando o princípio da energia potencial estacionária (2.49), obtém-se a expressão da carga de flambagem, formulada com base em Kóllar e Springer (2003):

$$N_0 = \begin{cases} \frac{4}{b^2} f^4 \sqrt{D_{11}^* (D_{22}^*)^3} (15.07 + 7.08K) & K \leq 1 \\ \frac{4}{b^2} f \sqrt{D_{22}^* (D_{12}^* + 2D_{66}^*)} \left(18.59 + \frac{3.56}{K^2} \right) & 1 < K \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\text{em que } K = \frac{2D_{66}^* + D_{12}^*}{\sqrt{D_{11}^* D_{22}^*}}$$

As expressões (3.22) e (3.24) permitem avaliar a carga crítica de flambagem para placas longas de laminados duplo-duplo sob cisalhamento. Essas expressões e as expressões da seção 3.3.1 permitem a avaliação rápida da carga de flambagem, pois D^* não se altera à medida que o número de repetições do sublaminado e/ou o material é alterado. Basta alterar o invariante e/ou a espessura para refletir as alterações desejadas.

Posteriormente, desenvolveu-se uma estratégia de projeto para a análise de flambagem de placas longas de laminado duplo-duplo submetidas ao cisalhamento. Essa estratégia baseia-se em um modelo matemático formulado a partir da abordagem de Mittelstedt, Erdmann e Schroder (2011), considerando-se o módulo de Tsai e o conceito de camada mestre. Essa estratégia de projeto é detalhada na seção 3.4.

3.4 Estratégia de Projeto para Laminados Duplo-Duplo sob Cisalhamento

Embora os laminados propostos na Seção 3.1 sejam baseados em Tsai (2021) e fundamentados na mecânica de materiais compósitos, a fabricação destes pode ser desafiadora devido às orientações específicas das fibras. Dessa forma, esta tese apresenta um critério prático de projeto para placas longas de laminados duplo-duplo submetidas à flambagem por cargas de cisalhamento, considerando um espaço de projeto de camadas pré-fabricadas. Analisam-se dois conjuntos de condições de contorno aplicados nos lados longitudinais: simplesmente apoiados e engastados. Na Seção 3.4.1 são definidos os empilhamentos estudados.

3.4.1 Definição de Empilhamentos Duplo-Duplo com Camadas Comercialmente Disponíveis

Neste estudo, conforme mostrado por Mapa e Avila (2025), considerou-se o espaço de projeto composto por apenas sequências de empilhamento de camadas pré-fabricadas disponíveis comercialmente, como pré-impregnados unidirecionais de carbono/epóxi (0° e 90°) e pré-impregnados de carbono/epóxi de tecidos ($\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 60^\circ$). Dessa forma, os ângulos Φ e Ψ foram selecionados da seguinte lista: 0° , $\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 60^\circ$ e 90° . Nesse contexto, o espaço de projeto abrange um total de 23 empilhamentos, os quais estão listados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Combinações comerciais de duplo-duplo (Mapa e Ávila, 2025)

$\pm\Psi/\pm\Phi$	0°	$\pm 30^\circ$	$\pm 45^\circ$	$\pm 60^\circ$	90°
0°	-----	$[\pm 0/\pm 30]$	$[\pm 0/\pm 45]$	$[\pm 0/\pm 60]$	$[\pm 0/\pm 90]$
$\pm 30^\circ$	$[\pm 30/\pm 0]$	$[\pm 30/\pm 30]$	$[\pm 30/\pm 45]$	$[\pm 30/\pm 60]$	$[\pm 30/\pm 90]$
$\pm 45^\circ$	$[\pm 45/\pm 0]$	$[\pm 45/\pm 30]$	$[\pm 45/\pm 45]$	$[\pm 45/\pm 60]$	$[\pm 45/\pm 90]$
$\pm 60^\circ$	$[\pm 60/\pm 0]$	$[\pm 60/\pm 30]$	$[\pm 60/\pm 45]$	$[\pm 60/\pm 60]$	$[\pm 60/\pm 90]$
90°	$[\pm 90/\pm 0]$	$[\pm 90/\pm 30]$	$[\pm 90/\pm 45]$	$[\pm 90/\pm 60]$	-----

Algumas sequências de empilhamento apresentadas na Tabela 3.2 são equivalentes entre si, ou seja, apresentam a mesma rigidez. Portanto, a verificação da carga de flambagem é necessária apenas para 13 combinações distintas. Essas combinações, juntamente com seus empilhamentos equivalentes, são apresentadas na Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Duplo-duplo equivalentes (Mapa e Ávila, 2025).

$[\pm\Psi/\pm\Phi]$			
$[\pm 30/\pm 0] = [\pm 0/\pm 30]$	$[\pm 45/\pm 30] = [\pm 30/\pm 45]$	$[\pm 60/\pm 45] = [\pm 45/\pm 60]$	$[\pm 30/\pm 30]$
$[\pm 45/\pm 0] = [\pm 0/\pm 45]$	$[\pm 60/\pm 30] = [\pm 30/\pm 60]$	$[\pm 90/\pm 45] = [\pm 45/\pm 90]$	$[\pm 45/\pm 45]$
$[\pm 60/\pm 0] = [\pm 0/\pm 60]$	$[\pm 90/\pm 30] = [\pm 30/\pm 90]$	$[\pm 90/\pm 60] = [\pm 60/\pm 90]$	$[\pm 60/\pm 60]$
$[\pm 0/\pm 90] = [\pm 90/\pm 0]$	-----	-----	-----

Os empilhamentos apresentados na Tabela 3.3 foram considerados no algoritmo que é apresentado detalhado na Seção 3.4.3. Na Seção 3.4.2 são apresentadas as formulações do modelo matemático.

3.4.2 Modelo Matemático

O conceito de camada mestre desenvolvido por Tsai e Melo (2014) para laminados carbono/epóxi pode ser considerado no desenvolvimento de uma estratégia de projeto para laminados duplo-duplo. A matriz de rigidez reduzida da camada mestre \mathbf{Q}^{CM} é dada por (Tabela 2.1):

$$\mathbf{Q}^{\text{CM}} = \begin{bmatrix} 0,8849 & 0,0167 & 0 \\ 0,0167 & 0,0525 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0313 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Considerando o conceito de camada mestre, as matrizes de rigidez podem ser definidas como (Mapa e Ávila, 2025):

$$\begin{aligned}
A_{ij}^{CM} &= \sum_{k=1}^k (\bar{Q}_{ij}^{CM})_k (z_k - z_{k-1}) \\
B_{ij}^{CM} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^k (\bar{Q}_{ij}^{CM})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
D_{ij}^{CM} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^k (\bar{Q}_{ij}^{CM})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

onde \bar{Q}_{ij}^{CM} é a componente da matriz de rigidez da camada mestre, localizado na i -ésima linha e j -ésima coluna, referente à k -ésima lâmina. O número total de lâminas é representado por k . Para laminados duplo-duplo, k é igual ao número de repetições multiplicado por 4 ($k = 4r$).

Como os laminados duplo-duplo são laminados assimétricos, as Equações (2.39), apresentadas por Huang e Qiao (2021), podem ser reescritas com base na camada mestre da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{CM'} &= (\mathbf{A}^{CM})^{-1} \\
\mathbf{B}^{CM'} &= -(\mathbf{A}^{CM})^{-1} \mathbf{B}^{CM} \\
\mathbf{D}^{CM'} &= \mathbf{D}^{CM} - \mathbf{B}^{CM} (\mathbf{A}^{CM})^{-1} \mathbf{B}^{CM}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

A partir das Equações (3.27), é possível escrever matrizes equivalentes às apresentadas por Huang e Qiao (Equação (2.39)), considerando o módulo de Tsai I_q , conforme segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}' &= \frac{\mathbf{A}^{CM'}}{I_q} \\
\mathbf{B}' &= \mathbf{B}^{CM'} \\
\mathbf{D}' &= I_q \mathbf{D}^{CM'}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Considerando a matriz de rigidez à flexão descrita na Equação (3.28), a equação de equilíbrio da placa sujeita apenas a esforços de cisalhamento no plano (ou seja, com $N_x = N_y = 0$) pode ser expressa como:

$$D'_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D'_{12} + 2D'_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D'_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3.29)$$

O problema de flambagem é solucionado considerando o princípio da energia potencial mínima (2.49). Considerando-se a Equação (3.28), a expressão da energia potencial pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} U + \Omega = & \frac{1}{2} \int_0^{\lambda_1} \int_0^b \left[D'_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D'_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + D'_{66} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2 \left(D'_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D'_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D'_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\lambda_1} \int_0^b \left[2\lambda N_{xy0} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dy dx \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para laminados duplo-duplo homogeneizados, admite-se que $D_{16} \approx D_{26} \approx 0$.

As Seções 3.4.3 e 3.4.4 apresentam as formulações para a análise de placas com lados longitudinais simplesmente apoiados e com lados longitudinais engastados, considerando as simplificações adotadas para os laminados duplo-duplo- homogeneizados.

3.4.2.1 Placa simplesmente apoiada

Para a placa simplesmente apoiada as condições de contorno são expressas como:

$$w(y = 0) = w(y = b) = 0 \quad (3.31)$$

$$M_y(y = 0) = -D'_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad M_y(y = b) = -D'_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.32)$$

Como a placa em consideração é assumida como infinitamente longa, não há a imposição de condições de contorno específicas nas bordas transversais.

O deslocamento fora do plano (2.69) satisfaz as condições de contorno listadas nas Equações (3.31)-(3.32). Por meio da substituição da Equação (2.69) em (3.30) e aplicando o princípio da energia potencial mínima (2.49), obtém-se as expressões das cargas de flambagem.

Nesse caso a expressão de forma fechada apresentada por Mittelstedt, Erdmann e Schroder (2011), pode ser reescrita como:

$$N_{cr} = -\pi^2 \frac{D'_{11}b^4 + D'_{22}(\lambda_1^4 + 6\lambda_1^2\lambda_2^2b^2 + \lambda_2^4b^4) + 2(D'_{12} + 2D'_{66})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2b^2)b^2}{2\lambda_1^2\lambda_2b^4} \quad (3.33)$$

A carga crítica é o menor valor que satisfaz os seguintes requisitos:

$$\frac{\partial N_{cr}}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \frac{\partial N_{cr}}{\partial \lambda_2} = 0 \quad (3.34)$$

Desenvolvendo (2.71), obtém-se:

$$\lambda_1 = b \sqrt[4]{\frac{D'_{11} + D'_{22}\lambda_2^4 + 2(D'_{12} + 2D'_{66})\lambda_2^2}{D'_{22}}} \quad (3.35)$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{\lambda_3 - 3D'_{22}\lambda_1^2 - (D'_{12} + 2D'_{66})b^2}}{\sqrt{3D'_{22}b}}$$

em que:

$$\lambda_3 = \sqrt{12D'_{22}\lambda_1^2[D'_{22}\lambda_1^2 + (D'_{12} + 2D'_{66})b^2] + [3D'_{11}D'_{22} + (D'_{12} + 2D'_{66})^2]b^4} \quad (3.36)$$

Conforme Mittelstedt, Erdmann e Schroder (2011), embora seja possível apresentar expressões explícitas para λ_1 e λ_2 no caso de materiais isotrópicos, para placas de compósitos laminados é necessário empregar um procedimento iterativo. O procedimento tem início com a escolha de um valor inicial para λ_1 , geralmente adotando-se $\lambda_1 = b$.

3.4.2.2 Placa engastada

Para o caso da placa de laminado duplo-duplo engastada nas longitudinais, os critérios estabelecidos pelas Equações (3.37) e (2.77) e a expressão do deslocamento fora do plano (2.78)

podem ser considerados. Dessa forma, substituindo (2.78) na expressão da energia total (3.30) e aplicando o princípio da energia estacionária (2.49), tem-se a expressão de forma fechada para laminados duplo-duplo (Mapa e Ávila, 2025):

$$N_{cr} = -\pi^2 \frac{3D'_{11}b^4 + D'_{22}(16\lambda_1^4 + 24\lambda_1^2\lambda_2^2b^2 + 3\lambda_2^4b^4) + 2(D'_{12} + 2D'_{66})(4\lambda_1^2 + 3\lambda_2^2b^2)b^2}{6\lambda_1^2\lambda_2b^4} \quad (3.38)$$

As condições impostas pela Equação (2.71) resultam nas seguintes expressões:

$$\lambda_1 = \frac{b}{2} \sqrt[4]{3 \frac{D'_{11} + D'_{22}\lambda_2^4 + 2(D'_{12} + 2D'_{66})\lambda_2^2}{D'_{22}}} \quad (3.39)$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{\lambda_3 - 3D'_{22}\lambda_1^2 - (D'_{12} + 2D'_{66})b^2}}{\sqrt{3D'_{22}b}}$$

em que:

$$\lambda_3 = \sqrt{16D'_{22}[2D'_{22}\lambda_1^2 + (D'_{12} + 2D'_{66})b^2]\lambda_1^2 + [3D'_{11}D'_{22} + (D'_{12} + 2D'_{66})^2]b^4} \quad (3.40)$$

O mesmo procedimento iterativo descrito anteriormente pode ser aplicado para calcular λ_1 e λ_2 , que, então, são substituídos na Equação (3.38) para determinar a carga crítica.

3.4.3 Implementação da Formulação

A identificação do empilhamento de laminado duplo-duplo, composto por camadas comercialmente disponíveis, mais adequado para uma placa longa de largura b e submetida a uma carga N_{xy} , é realizada por meio do algoritmo proposto, ilustrado na Figura 3.6. Esse algoritmo verifica o empilhamento que possui maior D_{22} (Whitney, 1987) para determinar a sequência de empilhamento que resulta na maior carga de flambagem dessas placas.

O algoritmo inicia-se fazendo a leitura de dados geométricos e das propriedades do laminado de carbono/epóxi ($E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$). A rotina procede determinando a matriz

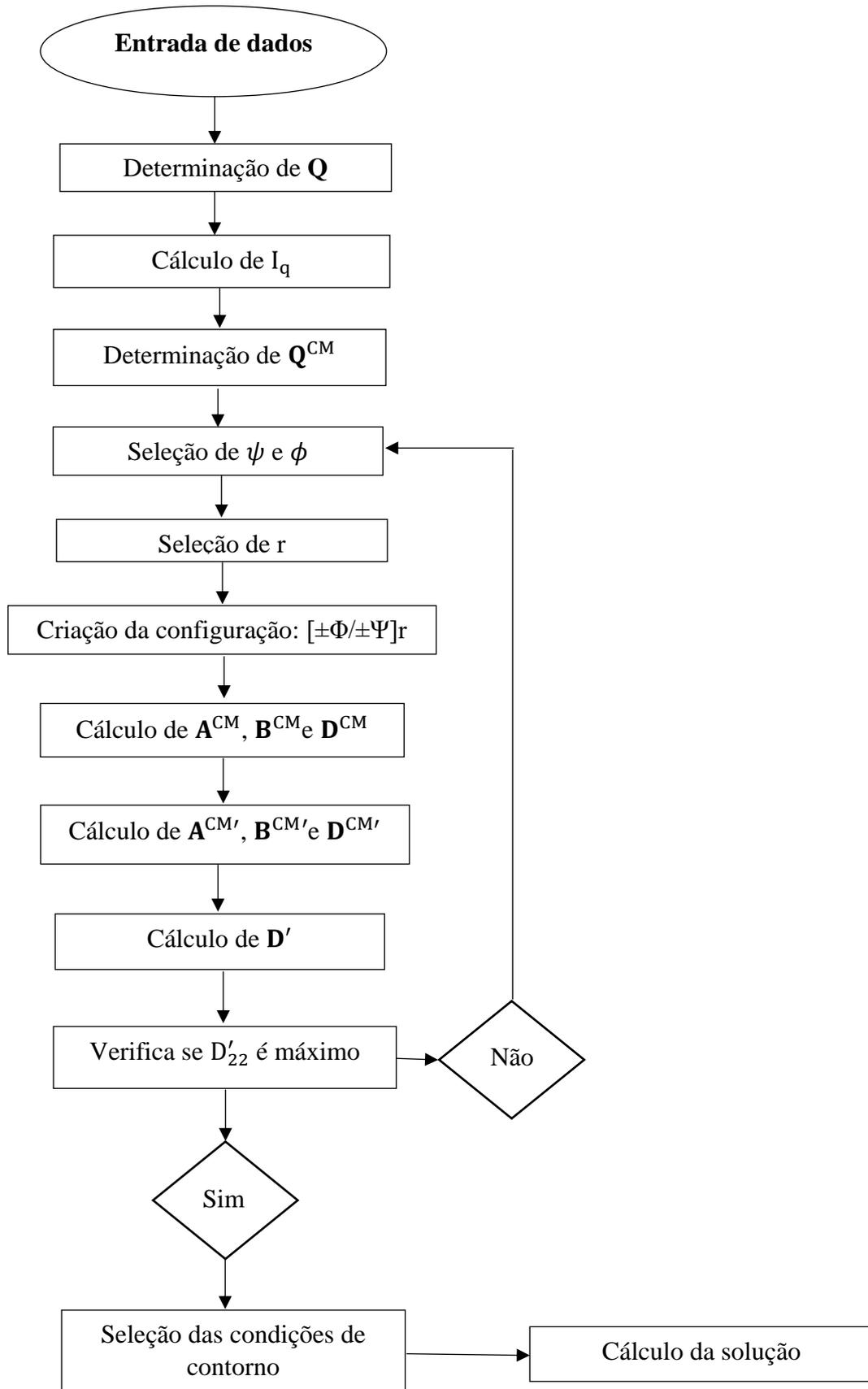
constitutiva \mathbf{Q} , calculada pela Equação (2.10), e o módulo de Tsai, I_q (Equação (2.40)). Em seguida, a matriz da camada mestre \mathbf{Q}_{CM} é determinada, sendo dada pela equação (3.25).

Posteriormente, selecionam-se os ângulos ψ e ϕ , conforme a Tabela 3.3, o número de repetições r e cria-se a configuração de duplo-duplo $[\pm\Phi/\pm\Psi]_r$. Com base na matriz da camada mestre \mathbf{Q}_{CM} , as matrizes de rigidez e de acoplamento \mathbf{A}^{CM} , \mathbf{B}^{CM} e \mathbf{D}^{CM} (Equação (3.26)) são calculadas.

Calcula-se também as matrizes transformadas com base no conceito de camada mestre $\mathbf{A}^{CM'}$, $\mathbf{B}^{CM'}$ e $\mathbf{D}^{CM'}$ (Equação (3.27)). Em seguida, calcula-se \mathbf{D}' , conforme a Equação (3.28). Caso D'_{22} não seja o maior, seleciona-se novos ψ e ϕ . Caso seja o maior, definem-se as condições de contorno e calcula-se a carga de flambagem definidas pelas Equações (3.38) e (3.33).

As cargas de flambagem e os modos de flambagem também foram obtidas pelo *software* de elementos finitos ANSYS Wokbench Composite, e os detalhes da análise são apresentados na Seção 3.3.

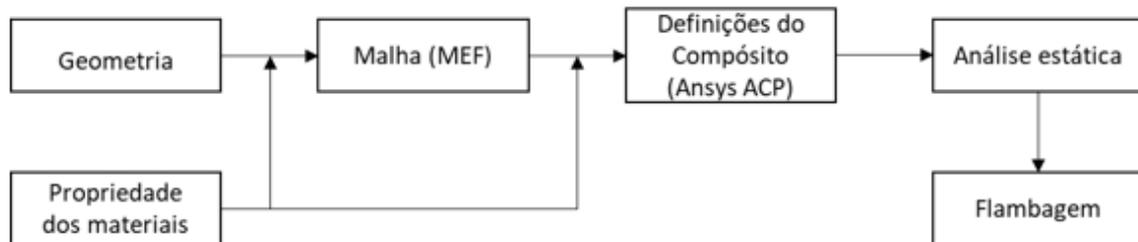
Figura 3.6: Fluxograma do algoritmo



3.5 Análises Numéricas

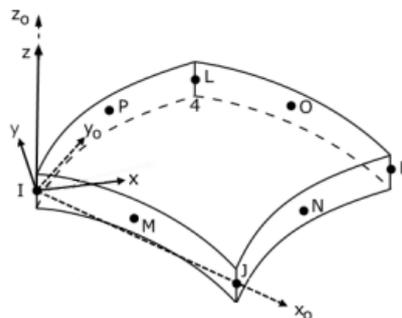
Os modelos numéricos foram desenvolvidos utilizando o *software* ANSYS 2020 R2 em um computador Intel® Core i7 com 8 GB de RAM. Na Figura 3.8 é possível observar a representação esquemática dos modelos realizados.

Figura 3.8: Representação esquemática das simulações realizadas



Inicialmente, foram definidas as propriedades dos materiais utilizados, a geometria dos modelos e informações da malha de elementos finitos (Figura 3.8). Considerando que as placas analisadas são esbeltas, os modelos foram discretizados com elementos finitos de casca quadráticos SHELL281, com dimensões de 5×5 mm. Na Figura 3.9 é possível observar esse elemento.

Figura 3.9: Elemento de casca quadrático SHELL281.



Fonte: ANSYS Inc. (2012).

Os elementos quadráticos, conforme ilustra a Figura 3.9, possui oito nós, com seis graus de liberdade em cada nó, e são interpolados por uma função de segunda ordem.

Por seguinte, conforme ilustra a Figura 3.8, o ANSYS *Composite PrepPost* (ACP) foi utilizado para definir informações sobre o compósito: espessura do laminado, sequência de

empilhamento e orientações das camadas. É importante destacar que, ao utilizar o ACP, a geometria do modelo deve ser construída com corpos de superfície, devido à forma como o software define os compósitos.

O passo seguinte, como é exibido pela Figura 3.8, consiste na realização de uma análise estática, na qual cargas unitárias são aplicadas à seção transversal para determinar as pré-tensões surgidas no modelo. Para essa análise, foram consideradas as condições de contorno descritas na seção 3.3. Vale ressaltar, que essa análise é necessária para realizar a análise de flambagem. Na análise de flambagem linear são obtidos os modos de flambagem (autovetores) e as respectivas cargas críticas de flambagem (autovalores).

4 RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentadas as análises de equivalência de rigidez e de homogeneização dos laminados duplo-duplo selecionados. Também é investigada a influência do número de repetições desses laminados nos termos de acoplamento D_{16} e D_{26} . Em seguida, a formulação desenvolvida é validada por meio da comparação dos resultados com o modelo de placa quadrada apresentado por Kappel (2023). Por seguinte, são discutidos os resultados obtidos a partir da formulação proposta e de análises numéricas da flambagem de placas de laminados duplo-duplo e quadriaxiais, sob as condições de contorno descritas na Seção 3.3. Por fim, são apresentados os resultados da estratégia de projeto aplicada à flambagem de placas longas submetidas ao cisalhamento, identificando as configurações que resultam nas maiores cargas críticas de flambagem.

4.1 Equivalência de Rigidez e Homogeneização dos Laminados Duplo-Duplo

Segundo Tsai *et al.* (2022), um laminado duplo-duplo equivalente pode ser determinado com base nas matrizes \mathbf{A} ou \mathbf{D} , dependendo das tensões predominantes na aplicação desejada. Como a rigidez à flexão é o principal fator na resposta à flambagem, foram identificados laminados duplo-duplo equivalentes considerando a similaridade da matriz \mathbf{D} . O material considerado foi um compósito unidirecional (UD) de fibra de carbono com resina epóxi, cujas propriedades e espessura da camada constam na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Propriedades do material (Ansys Inc., 2012)

E_1	209 GPa
$E_3 = E_2$	9,45 GPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0,27
ν_{23}	0,40
$G_{12} = G_{13}$	5,5 GPa
t_{ply}	0,125 mm

As matrizes \mathbf{D} para os laminados quadriaxiais (Quad) e os respectivos duplo-duplo (DD) equivalentes são apresentadas na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Matriz de rigidez a flexão \mathbf{D} [N. m]

	Quad Neutro: $[0/\pm 45/90]_s$	DD Neutro: $[\pm 0/\pm 44]_{2T}$
\mathbf{D} [N. m]	$\begin{bmatrix} 12,1992 & 1,8388 & 0,7821 \\ 1,8388 & 2,8143 & 0,7821 \\ 0,7821 & 0,7821 & 2,0838 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11,4507 & 2,2114 & -0,4039 \\ 2,2114 & 2,8175 & -0,3777 \\ -0,4039 & -0,3777 & 2,4564 \end{bmatrix}$
	Quad Rígido: $[0_5/\pm 45/90]_s$	DD Rígido: $[\pm 0/\pm 22]_{4T}$
\mathbf{D} [N. m]	$\begin{bmatrix} 134,5190 & 3,3321 & 0,7821 \\ 3,3321 & 8,3451 & 0,7821 \\ 0,7821 & 0,7821 & 5,2921 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 122,7060 & 9,4295 & -0,9181 \\ 9,4295 & 7,9631 & -0,1684 \\ -0,9181 & -0,1684 & 11,3896 \end{bmatrix}$
	Quad Flexível: $[0/\pm 45_4/90]_s$	DD Flexível: $[\pm 22/\pm 50]_{5T}$
\mathbf{D} [N. m]	$\begin{bmatrix} 132,3711 & 48,8457 & 7,8207 \\ 48,8457 & 61,9848 & 7,8207 \\ 7,8207 & 7,8207 & 52,6739 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 132,8547 & 48,7331 & 0,3453 \\ 48,7331 & 61,7265 & -0,9126 \\ 0,3453 & -0,9126 & 52,5613 \end{bmatrix}$

Comparando os laminados quadriaxiais com os duplo-duplo equivalentes, verifica-se que apenas o laminado $[0/\pm 45_4/90]_s$ possui um duplo-duplo equivalente exato, $[\pm 22/\pm 50]_{5T}$, sendo que as componentes das matrizes desses laminados diferem em menos de 1%. Tsai et al., (2022) demonstraram que os laminados quadriaxiais que possuem 50% ou mais de lâminas 0° ou 90° não possuem um duplo-duplo exato.

Considerando o laminado neutro, a componente D_{11} do duplo-duplo equivalente foi 6,13 % menor, D_{12} foi 20,26 % maior, D_{66} foi 17,88 % maior e D_{22} apresentou uma diferença de menos de 1%. Os termos da matriz de rigidez à flexão do laminado rígido apresentaram maiores diferenças em relação ao laminado duplo-duplo equivalente, devido à ausência de uma correspondência exata do duplo-duplo, o que também ocorreu no caso do laminado neutro. Considerando esse laminado, a componente D_{11} do DD foi 8,78 % menor, D_{22} foi 4,57 % menor, D_{12} foi 182,90 % maior e D_{66} foi 115,20 % maior.

As matrizes adimensionais podem ser utilizadas para verificar os critérios de homogeneização. As matrizes \mathbf{D}^* são apresentadas na Tabela 4.3 para os três laminados duplo-duplo.

Tabela 4.3: Matriz de Rigidez à flexão adimensional

Laminado	\mathbf{D}^*
$[\pm 0/\pm 44]_{2T}$	$\begin{bmatrix} 0,6047 & 0,1168 & -0,0213 \\ 0,1168 & 0,1488 & -0,0199 \\ -0,0213 & -0,0199 & 0,1297 \end{bmatrix}$
$[\pm 0/\pm 22]_{4T}$	$\begin{bmatrix} 0,8100 & 0,0622 & -0,0061 \\ 0,0622 & 0,0526 & -0,0011 \\ -0,0061 & -0,0011 & 0,0752 \end{bmatrix}$
$[\pm 22/\pm 50]_{5T}$	$\begin{bmatrix} 0,4490 & 0,1647 & 0,0012 \\ 0,1647 & 0,2086 & -0,0031 \\ 0,0012 & -0,0031 & 0,1776 \end{bmatrix}$

Além de ser utilizada para avaliar os critérios de homogeneização, por meio de \mathbf{D}^* é possível fazer uma avaliação rápida da carga de flambagem para um laminado duplo-duplo, pois \mathbf{D}^* não se altera à medida que o número de repetições do sublaminado e/ou o material é alterado.

Na Tabela 4.4 é possível verificar as matrizes $\mathbf{A}^* - \mathbf{D}^*$ e \mathbf{B}^* para os três laminados duplo-duplo com a finalidade de avaliar a homogeneização.

Tabela 4.4: Avaliação dos critérios de homogeneização

Laminado	$\mathbf{A}^* - \mathbf{D}^*$	\mathbf{B}^*
$[\pm 0/\pm 44]_{2T}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,0213 \\ 0 & 0 & 0,0199 \\ 0,0213 & 0,0199 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0795 & 0,0264 & -0,0142 \\ 0,0264 & 0,0268 & -0,0133 \\ -0,0142 & -0,0133 & 0,0264 \end{bmatrix}$
$[\pm 0/\pm 22]_{4T}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,0061 \\ 0 & 0 & 0,0011 \\ 0,0061 & 0,0011 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0141 & 0,0064 & -0,0081 \\ 0,0064 & 0,0014 & -0,0015 \\ -0,0081 & -0,0015 & 0,0064 \end{bmatrix}$
$[\pm 22/\pm 50]_{5T}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,0012 \\ 0 & 0 & 0,0031 \\ -0,0012 & 0,0031 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0248 & 0,0051 & 0,0110 \\ 0,0051 & 0,0145 & -0,0075 \\ 0,0110 & -0,0075 & 0,0051 \end{bmatrix}$

Verifica-se pela Tabela 4.4, que o critério $A^* - D^* < 2\%$ foi atendido para os laminados flexível e rígido. Apenas o termo B_{11}^* do laminado flexível e as componentes de B^* do laminado neutro apresentaram valores maior que 2%.

4.1.1 Avaliação do Número de Repetições

Para os laminados duplo-duplo, Tsai (2021) postulou que, à medida que o número de repetições aumenta, a homogeneização é alcançada e o efeito do acoplamento extensão-flexão é reduzido. Para analisar a influência do número de repetições na matriz de rigidez à flexão, a Tabela 7 apresenta essa matriz para um bloco de construção $[\pm 45/\pm 60]$, considerando $r = 1, 2, 4$ e 8 repetições. Vale destacar que, na matriz de rigidez à flexão adimensionalizada D^* não é necessário considerar a variação da espessura total. O material considerado foi o pré-impregnado UD de carbono/epóxi com propriedades mecânicas listadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.5: Matriz de rigidez à flexão em função do número de repetições

D [N.m] ($r = 1$)	D [N.m] ($r = 2$)
$\begin{bmatrix} 0.3333 & 0.2851 & 0.0480 \\ 0.2851 & 0.6453 & -0.0420 \\ 0.0480 & -0.0420 & 0.4073 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.4616 & 3.2613 & 0.0960 \\ 3.2613 & 7.0792 & -0.0840 \\ 0.0960 & -0.0840 & 3.7157 \end{bmatrix}$
D [N.m] ($r = 4$)	D [N.m] ($r = 8$)
$\begin{bmatrix} 29.2829 & 28.0509 & 0.1920 \\ 28.0509 & 60.4676 & -0.1680 \\ 0.1920 & -0.1680 & 30.6400 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 237.4444 & 228.3283 & 0.3839 \\ 228.3283 & 491.4093 & -0.3360 \\ 0.3839 & -0.3360 & 246.9486 \end{bmatrix}$

Ao analisar a Tabela 4.5, verifica-se que ao dobrar a espessura, ocorre aumento de aproximadamente uma ordem da magnitude de D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} , enquanto que D_{16} e D_{26} apenas dobra. Dessa forma, verifica-se que os termos D_{16} e D_{26} desempenham um papel menor na resposta estrutural do laminado.

Considerando oito repetições, os componentes da matriz de rigidez de flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} são pelo menos 3 ordens de magnitude maiores do que os componentes de acoplamento D_{16} e D_{26} , evidenciando que esses últimos são insignificantes.

4.2 Problema de validação

Para a validação da formulação, adotou-se um modelo de placa de laminado duplo-duplo previamente analisado por Kappel (2023). A placa é quadrada, com 1 metro de lado, empilhamento $[\pm 30/\pm 40]_{14T}$ e espessura total de 7 mm. O modelo foi submetido à flambagem por compressão axial e lateral, com uma carga aplicada de 0,05 MN/m. As especificações do material de carbono/epóxi estão apresentadas na Tabela 4.6.

Tabela 4.6: Propriedades do material IM7/977-3 (Kappel, 2024)

E_1	191 GPa
E_2	9,94 GPa
ν_{12}	0,35
G_{12}	7,79 GPa
t_{ply}	0,125 mm

Na Tabela 4.7 é possível verificar as cargas de flambagem apresentadas por Kappel (2024), juntamente com os valores obtidos por meio de simulações numéricas (N_{MEF}) e pela formulação analítica proposta neste trabalho (N_{MH}) para os seis primeiros modos de flambagem.

Tabela 4.7: Cargas de flambagem e diferenças entre os métodos

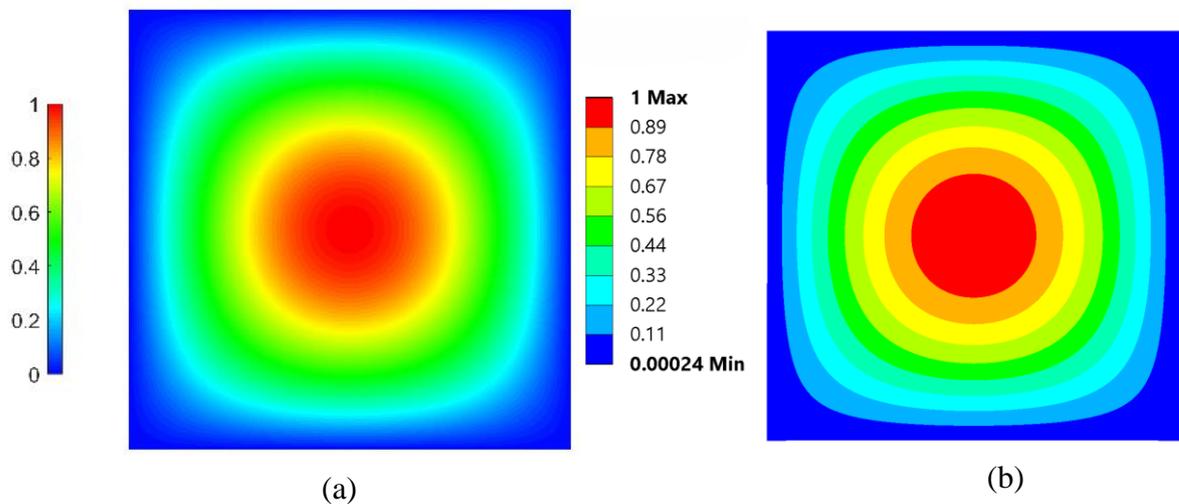
Modo	Kappel (2024)	N_{MH} (N/m)	N_{MEF} (N/m)	Diferença (%)	
				N_{MH} e Kappel	N_{MH} e N_{MEF}
1	52,5	53,8	53,7	2,42	0,19
2	91,9	93,1	92,8	1,30	0,32
3	143,0	145,5	144,8	1,72	0,48
4	143,6	146,5	145,7	1,98	0,55
5	209,0	215,2	213,7	2,88	0,70
6	213,6	217,3	215,7	1,70	0,74

Verifica-se pela Tabela 4.7 que a carga crítica de flambagem obtida pelo método analítico proposto (N_{MH}) para a placa é de 53,8 N/m. A comparação desse método com a solução numérica e os resultados de Kappel (2023) indica que a solução proposta tende a superestimar

levemente as cargas de flambagem. A maior diferença em relação aos valores de Kappel é de 2,88 %, observada no quinto modo de flambagem, enquanto a maior diferença em relação à simulação numérica é de 0,74 %, associada ao sexto modo de flambagem.

Os modos de flambagem apresentados por Kappel (2024) e os obtidos pela formulação analítica e pela simulação numérica revelam um padrão de comportamento similar. A Figura 3.9 ilustra o modo crítico de flambagem, obtido considerando a formulação analítica (a) e a simulação numérica (b).

Figura 4.1: Modo de flambagem: (a) MH (b) MEF



Observa-se na Figura 4.1 (a) e (b) que o modo de flambagem crítico apresenta uma meia onda nas direções longitudinal e transversal, sendo a amplitude máxima na parte central da placa.

Os resultados obtidos validam o método analítico proposto, demonstrando sua precisão na análise de flambagem de laminados duplo-duplo.

4.3 Estudo Comparativo da Flambagem de Laminados

Esta seção apresenta um estudo comparativo da flambagem de laminados quadriaxiais e duplo-duplo submetidos à compressão e ao cisalhamento puro, considerando a formulação desenvolvida para laminados duplo-duplo. A seção 4.3.1 apresenta a análise de flambagem por compressão.

4.3.1 Flambagem por Compressão

Para as análises comparativas da flambagem de placas submetidas ao carregamento de compressão, foram consideradas placas com dimensões de 284 x 150 mm, semelhantes às empregadas por Vescovini *et al.* (2024). As condições de contorno foram descritas no Capítulo 3, as propriedades do material considerado foram apresentadas na Tabela 4.1 e os empilhamentos considerados foram descritos na Seção 3.1.

A Tabela 4.8 apresenta as cargas críticas de flambagem para placas simplesmente apoiadas nos quatro lados, considerando os três tipos de laminados quadriaxiais e seus respectivos duplo-duplo equivalentes.

Tabela 4.8: Carga de flambagem para a placa simplesmente apoiada

Laminado	N_{MH} (N/m)	N_{MEF} (N/m)	Diferença (%)
$[0/\pm 45/90]_s$	11208	10806	3,59
$[\pm 0/\pm 44]_{2T}$	12082	9962	21,28
$[0_5/\pm 45/90]_s$	41679	41664	0,04
$[\pm 0/\pm 22]_{4T}$	55793	53717	3,86
$[0/\pm 45_4/90]_s$	224149	220080	1,82
$[\pm 22/\pm 50]_{5T}$	224270	214770	4,42

Comparando os resultados do método analítico proposto com as análises de elementos finitos apresentados na Tabela 4.8, verifica-se que o laminado duplo-duplo neutro $[\pm 0/\pm 44]_{2T}$ apresentou uma diferença de 21,28 % entre os métodos. Os demais laminados apresentaram uma diferença inferior a 5 % entre as formulações.

Além disso, ao analisar-se as cargas de flambagem obtidas pelo método analítico, verifica-se que as diferenças entre os laminados quadriaxiais e seus duplo-duplo equivalentes (neutro, rígido e flexível) são de 7,79 %, 33,86 % e 0,05 %, respectivamente. Essas diferenças ocorreram porque os laminados neutro e rígido não possuem um equivalente duplo-duplo exato, enquanto o flexível possui, resultando em uma diferença mínima.

Para esse caso, a expressão da carga de flambagem considera os termos da matriz de rigidez à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} (Equação (3.11)), cujas diferenças entre o laminado neutro e o duplo-duplo equivalente foram de 6,13 % para D_{11} , 20,26 % para D_{12} , 17,88 % para D_{22} e menos de 1% para D_{66} . Já as diferenças entre o laminado rígido e o duplo-duplo equivalente

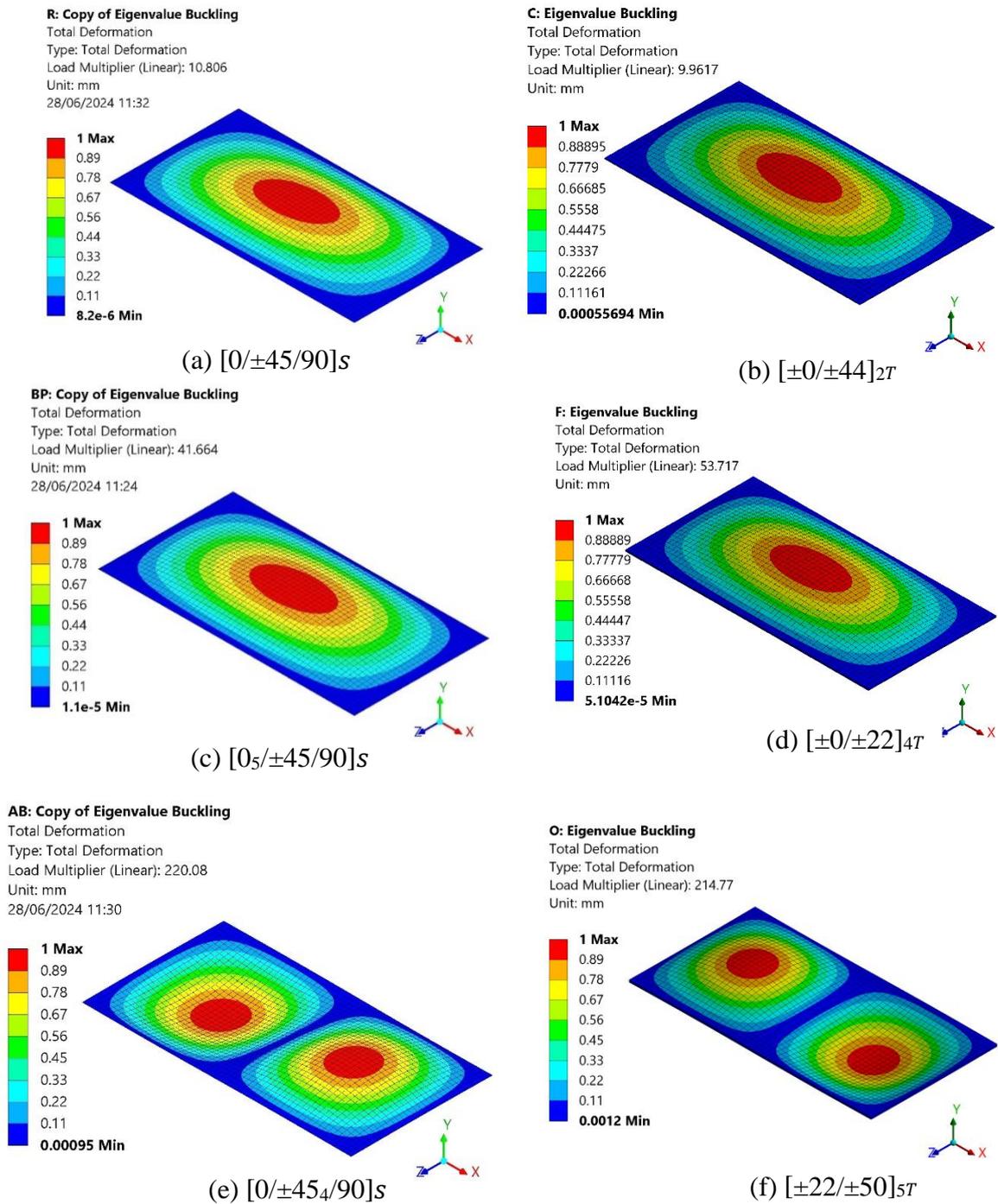
foram de 8,78 % para D_{11} , 182,98 % para D_{12} , 4,57 % para D_{22} e 115,21 % para D_{66} . A diferença desses termos para o laminado flexível e o duplo-duplo equivalente foi inferior a 1 %.

Verifica-se na Equação (3.11), que os termos D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} são multiplicados por fatores distintos, e a influência na carga crítica depende da razão entre o comprimento e a largura da placa. Como no presente estudo $\frac{a}{b} = 1,89$, o termo D_{22} é amplificado por $\left(\frac{a}{b}\right)^4$, e a parcela $D_{12} + 2D_{66}$ por $2\left(\frac{a}{b}\right)^2$. Dessa forma, as diferenças observadas para D_{11} , D_{12} e D_{66} entre o laminado rígido e seu duplo-duplo equivalente explicam a diferença de 33,86 % entre as cargas de flambagem desses laminados.

Vale destacar que o laminado quadriaxial flexível e o seu duplo-duplo equivalente apresentam valores relativamente mais elevados para os termos D_{12} , D_{22} e D_{66} em comparação aos demais laminados, conforme pode ser observado na Tabela 4.2, o que resulta na maior carga de flambagem entre os casos analisados .

Os modos de flambagem correspondentes às cargas de flambagem apresentadas na Tabela 4.8, obtidos pela solução numérica, são apresentados na Figura 4.2 para os laminados quadriaxiais neutro (a), rígido (c) e flexível (e) e seus duplo-duplo equivalentes (b), (d) e (f), respectivamente.

Figura 4.2: Modos de flambagem para as placas simplesmente apoiadas obtidos por análise numérica

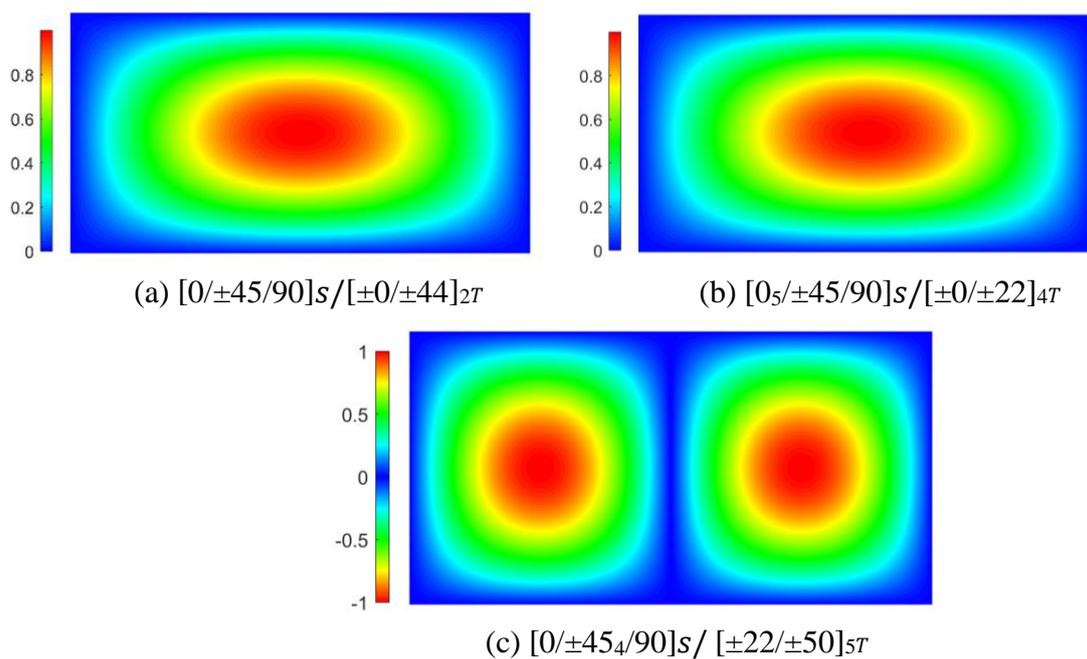


Verifica-se pela Figura 4.2 que os modos críticos de flambagem dos laminados quadriaxiais, neutro e rígido, e de seus duplo-duplo equivalentes, apresentam uma meia onda nas direções transversal e longitudinal. Por outro lado, o laminado flexível e seu duplo-duplo equivalente exibem duas meias ondas na direção longitudinal e uma meia onda na direção

transversal. Esse comportamento indica que o aumento da espessura, aliado à maior rigidez à flexão do laminado flexível, favorece a ocorrência de modos de flambagem com maior número de meias-ondas.

Na Figura 4.3 são ilustrados os modos críticos de flambagem obtidos pelo método analítico para os laminados quadriaxiais e os duplo-duplo equivalentes: (a) neutro, (b) rígido e (c) flexível.

Figura 4.3: Modos críticos de flambagem da placa simplesmente apoiada obtidos pelo método analítico



Verifica-se, pela Figura 4.3, que os modos obtidos analiticamente são similares aos obtidos pela solução numérica, apresentando o mesmo padrão de comportamento.

A Tabela 4.9 apresenta as cargas críticas de flambagem para as placas de laminados com três lados simplesmente apoiados e um lado livre.

Tabela 4.9: Carga de flambagem para a placa com um lado livre

Laminado	N_{MH} (N/m)	N_{MEF} (N/m)	Diferença (%)
$[0/\pm 45/90]_S$	2594	2484	4.24
$[\pm 0/\pm 44]_{2T}$	2701	2273	18,82
$[0_5/\pm 45/90]_S$	19168	19037	0.68
$[\pm 0/\pm 22]_{4T}$	21090	20273	4,03
$[0/\pm 45_4/90]_S$	44177	42029	5,11
$[\pm 22/\pm 50]_{5T}$	44176	41762	5,78

Ao comparar os resultados analíticos e numéricos apresentados na Tabela 4.9, verifica-se que os laminados flexível e rígido, bem como seus equivalentes duplo-duplo, apresentaram diferenças inferiores a 5,78 % entre os métodos. Entretanto, o laminado duplo-duplo equivalente ao neutro apresentou uma diferença de 18,82 % entre os métodos. Além disso, as diferenças entre as cargas de flambagem obtidas pelo método analítico para os laminados quadriaxiais e seus respectivos duplo-duplo foram de 4,5% para o laminado neutro, 10,03% para o rígido e 0,002 % para o flexível. Essas diferenças são atribuídas aos termos de rigidez à flexão D_{11} e D_{66} , conforme a Equação (3.18). Como $\frac{a}{b} = 1,89$, os fatores de amplificação são $\pi^2/a^2 \approx 5,52/b^2$ para D_{11} e $12/b^2$ para D_{66} . Ou seja, o termo associado a D_{66} contribui com um fator aproximadamente 2,2 vezes maior do que o de D_{11} na expressão da carga crítica.

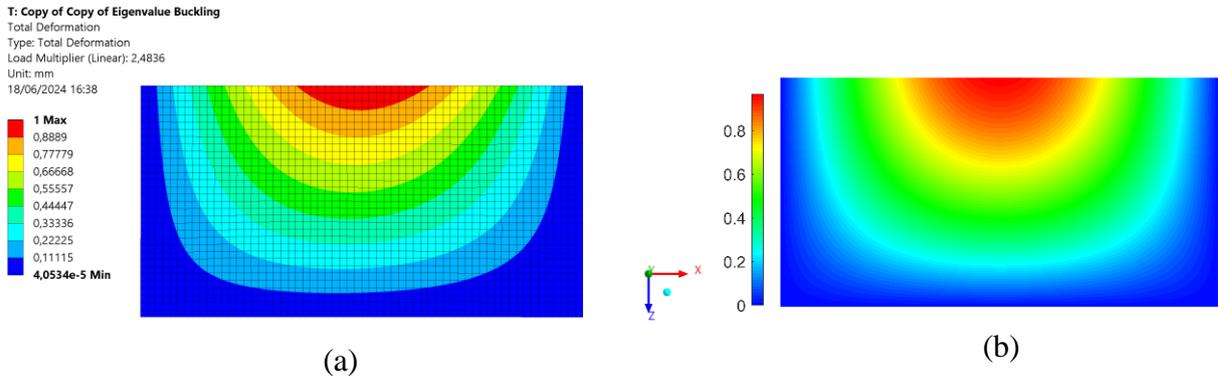
Considerando o laminado neutro e o duplo-duplo equivalente, foram observadas diferenças de 6,13 % para D_{11} e 17,88 % para D_{66} . Considerando o laminado rígido e o seu duplo-duplo equivalente, observou-se uma diferença de 8,78 % no termo D_{11} e 115,21 % no termo D_{66} . O laminado flexível e o seu duplo-duplo equivalente apresentaram diferenças inferiores a 1 % entre esses termos. Dessa forma, como os termos de rigidez à flexão diferem mais acentuadamente no caso do laminado rígido — especialmente o termo D_{66} , cuja influência é 2,2 vezes maior que a D_{11} — é justificado a maior divergência observada na carga de flambagem entre esse laminado e seu duplo-duplo equivalente.

Vale destacar que, embora o termo D_{11} do laminado flexível seja 1,59 % inferior ao do laminado rígido, o termo D_{66} é aproximadamente 10 vezes maior, conforme pode ser observado na Tabela 4.2, o que resulta em uma carga de flambagem 2,21 vezes superior.

A Figura 4.4 (a) e (b) ilustra os modos críticos de flambagem dos laminados obtidos pelo MEF e pelo método analítico, respectivamente. Esses modos apresentam a mesma forma

modal para todos os laminados com a condição de contorno de um lado livre. Além disso, observa-se que os modos obtidos pelos dois métodos apresentam comportamento similar, com deflexão máxima no lado livre.

Figura 4.4: Modo de flambagem para a placa com um lado livre: (a) MEF e (b) MH



A Tabela 4.10 apresenta as cargas de flambagem para as placas de laminado com um lado engastado e os demais simplesmente apoiados, obtidas pelo Método de Elementos Finitos e pela formulação analítica.

Tabela 4.10: Carga de flambagem placa engastada em um lado

Laminado	N_{MH} (N/m)	N_{MEF} (N/m)	Diferença (%)
$[0/\pm 45/90]_S$	14787	14120	4,51
$[\pm 0/\pm 44]_{2T}$	15568	12761	21,99
$[0_5/\pm 45/90]_S$	62825	62612	0,34
$[\pm 0/\pm 22]_{4T}$	78486	75424	4,06
$[0/\pm 45_4/90]_S$	281829	264540	6,53
$[\pm 22/\pm 50]_{5T}$	281483	263239	6,93

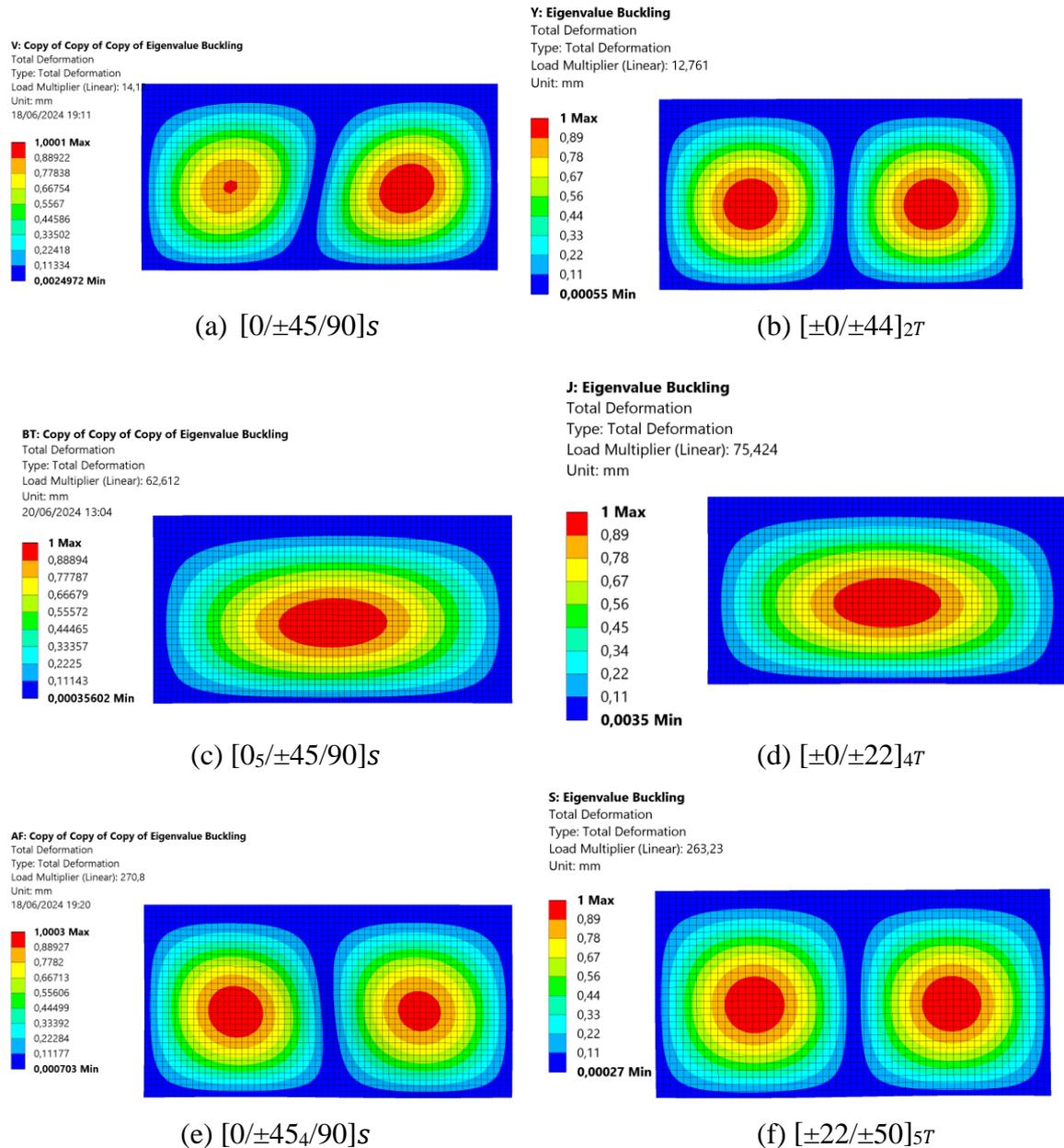
Pela Tabela 4.10, observa-se que a maior diferença entre as formulações ocorreu para o laminado duplo-duplo $[\pm 0/\pm 44]_{2T}$, atingindo aproximadamente 22 %. Os demais laminados apresentaram diferenças inferiores a 6,93 % entre os métodos. Considerando os resultados analíticos, a diferença da carga de flambagem entre os laminados quadriaxiais e os duplo-duplo equivalentes foram de 5,42 % para o laminado neutro, 24,92 % para o laminado rígido e 0,12 % para o laminado flexível.

A expressão da carga de flambagem, apresentada pela Equação (3.19), considera os termos da matriz de rigidez a flexão D_{11} , D_{12} , D_{66} e D_{22} . Como $\frac{a}{b} = 1,89$, o termo D_{11} é ponderado por $b^2/(a/i)^2$, sendo reduzido, enquanto D_{22} é amplificado por $(a/i)^2/b^2$ e $D_{12} + 2D_{66}$ é multiplicado por um fator constante de 2,33. Dessa forma, os termos D_{12} , D_{66} e D_{22} são mais significativos que D_{11} . Por isso, embora o termo D_{11} do laminado flexível seja 1,59 % inferior ao do laminado rígido, os demais termos são relativamente maiores, resultando em uma carga de flambagem 4,48 vezes superior à do laminado rígido.

As diferenças desses termos entre o laminado neutro e o duplo-duplo equivalente foram de 6,13 % para D_{11} , 20,26 % para D_{12} , 17,88 % para D_{22} e menos de 1% para D_{66} . Já as diferenças entre o laminado rígido e o duplo-duplo equivalente foram de 8,78 % para D_{11} , 182,98 % para D_{12} , 4,57 % para D_{22} e 115,21 % para D_{66} . Embora o termo D_{22} apresente uma diferença menor entre o laminado rígido e o duplo-duplo equivalente, os outros termos apresentam diferenças consideravelmente maiores. Por isso, a diferença entre as cargas de flambagem do laminado rígido e o seu duplo-duplo equivalente é a mais significativa.

Os modos de flambagem obtidos via elementos finitos para as placas de laminado quadriaxial: (a) $[0/\pm 45/90]_s$, (c) $[0_5/\pm 45/90]_s$ e (e) $[0/\pm 45_4/90]_s$ e para as placas de laminado duplo-duplo: (b) $[\pm 0/\pm 44]_{2T}$ (c) $[\pm 0/\pm 22]_{4T}$ (f) $[\pm 22/\pm 50]_{5T}$ engastadas em um lado e com os demais lados simplesmente apoiados constam na Figura 4.5.

Figura 4.5: Modos de flambagem da placa engastada em um lado



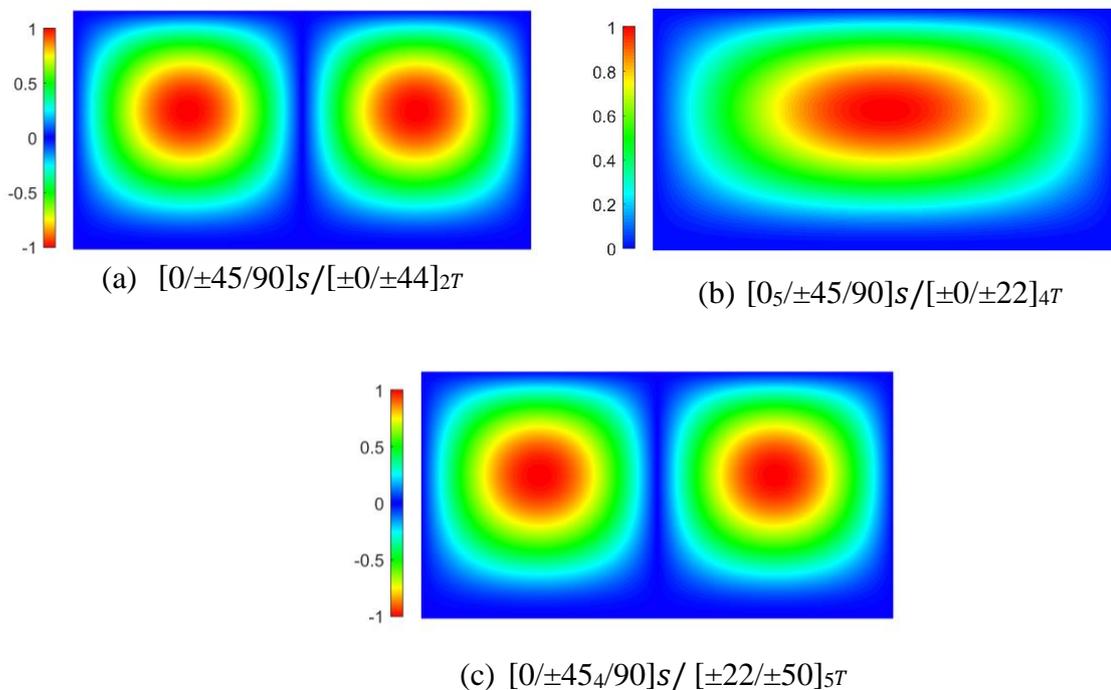
Verifica-se pela Figura 4.5 que os laminados $[0/\pm 45/90]_s$, $[\pm 0/\pm 44]_{2T}$, $[0/\pm 45_4/90]_s$ e $[\pm 22/\pm 50]_{5T}$ apresentaram duas meias ondas na longitudinal e uma na transversal. Os laminados $[0_5/\pm 45/90]_s$ e $[\pm 0/\pm 22]_{4T}$ apresentaram uma meia onda nas direções longitudinal e transversal. Esse comportamento indica que, embora o laminado neutro apresente menor rigidez à flexão, sua configuração geométrica favorece a ocorrência de duas meias-ondas, comportamento semelhante ao do laminado flexível, que possui maior rigidez e espessura.

Adicionalmente, observa-se uma inclinação das meias-ondas nos modos de flambagem dos laminados quadriaxiais $[0/\pm 45/90]_s$ e $[0_5/\pm 45/90]_s$, comportamento não verificado nos

duplo-duplos equivalentes. Esse fenômeno está relacionado aos termos de acoplamento D_{16} e D_{26} , que são positivos e mais intensos nesses laminados quadriaxiais (Tabela 4.3), além da condição de contorno assimétrica imposta pelo engaste em uma das bordas. Assim, mesmo com rigidezes à flexão semelhantes, a combinação entre o acoplamento significativo e a assimetria da condição de contorno favorece a formação de meias-ondas inclinadas.

Os modos críticos obtidos de forma analítica para esses laminados constam na Figura 4.6.

Figura 4.6: Modos de flambagem da placa engastada em um lado, obtidos pelo método analítico



Os modos críticos de flambagem dos laminados quadriaxiais e duplo-duplo obtidos via elementos finitos apresentam concordância com os resultados analíticos apresentados na Figura 4.6. No entanto, a inclinação das meias-ondas observada nos modos obtidos numericamente não aparece nas soluções analíticas, que assumem modos alinhados aos eixos principais. Esse comportamento ocorre porque o modelo analítico não leva em consideração os termos de acoplamento D_{16} e D_{26} . Ao comparar esses modos com os das placas simplesmente apoiadas, observa-se que a deflexão máxima é deslocada para o lado simplesmente apoiado, enquanto, nas placas simplesmente apoiadas, as deflexões máximas ocorrem na região central.

Além disso, para a placa simplesmente apoiada, observa-se que os laminados neutro e rígido apresentaram modos de flambagem idênticos (Figura 4.2). Por outro lado, para a placa com um lado engastado, os laminados neutro e flexível exibiram o mesmo modo de flambagem (Figura 4.5). Esses resultados indicam que a formação de meia onda nos laminados é influenciada pela espessura, pela sequência de empilhamento e pelas condições de contorno.

A Tabela 4.11 apresenta as cargas críticas de flambagem para as placas com um lado livre, um lado engastado, e os demais lados simplesmente apoiados, além das diferenças entre os resultados obtidos pelo método analítico e pelo método de elementos finitos.

Tabela 4.11: Cargas de flambagem para a placa com um lado livre e um engastado

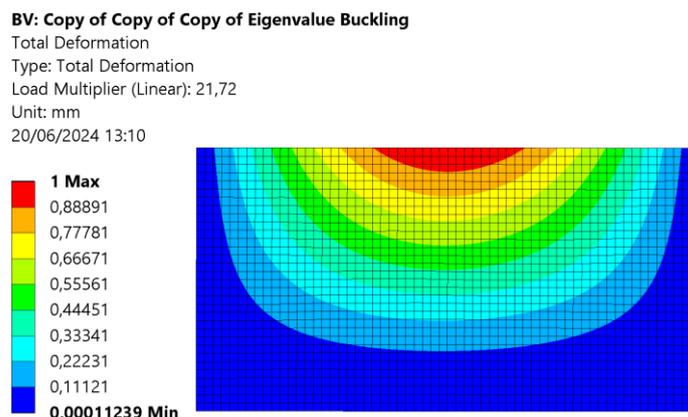
Laminado	N_{MH} (N/m)	N_{MEF} (N/m)	Diferença (%)
$[0/\pm 45/90]_S$	3158	3371	6,32
$[\pm 0/\pm 44]_{2T}$	3267	3124	4,57
$[0_5/\pm 45/90]_S$	20841	21698	3,94
$[\pm 0/\pm 22]_{4T}$	22675	23510	3,55
$[0/\pm 45_4/90]_S$	56608	61403	7,81
$[\pm 22/\pm 50]_{5T}$	56555	60920	7,16

Verifica-se pela Tabela 4.11, que a diferença máxima entre as formulações foi inferior a 7,81 %. Ao comparar os laminados quadriaxiais e os respectivos duplo-duplo equivalentes pelo método proposto, verifica-se uma diferença de 3,4 % para o laminado neutro, 8,8 % para o laminado rígido e 0,09 % considerando o laminado flexível.

A expressão da carga de flambagem, apresentada pela Equação (3.20), considera os termos da matriz de rigidez à flexão D_{11} , D_{22} e D_{66} , ponderados por diferentes fatores. Como $\frac{a}{b} = 1,89$, o termo D_{11} é multiplicado por $\pi^2/(a/i)^2$, sendo consideravelmente diminuído devido ao comprimento relativamente maior da placa. Por outro lado, o termo D_{22} é amplificado por $1,25(a/i)^2/b^4$, e o termo D_{66} por $12/b^2$, sendo este último o maior fator entre os três. Dessa forma, o termo D_{66} exerce maior influência na carga de flambagem das placas. Isso justifica a maior sensibilidade da carga de flambagem às variações no termo D_{66} , como observado no caso do laminado rígido e seu equivalente duplo-duplo, cuja diferença de 115,21 % no valor de D_{66} resultou em uma diferença de aproximadamente 8,8 % nas cargas críticas.

O modo crítico de flambagem das placas com um lado engastado e um livre é ilustrado na Figura 4.7.

Figura 4.7: Modo de flambagem da placa com um lado livre e um engastado



Observa-se que esse modo possui a deflexão máxima na região da borda livre, assim como ocorre para a placa simplesmente apoiada nos três lados e livre em um, ilustrada na Figura 4.4. No entanto, neste caso, a presença do engaste em um dos lados longitudinais resulta em menores deflexões ao longo de uma maior extensão da seção transversal.

Verifica-se que a maior diferença entre os métodos ocorreu para o laminado $[\pm 0/\pm 44]_{2T}$ na maioria das condições de contorno. No entanto, para a placa com um lado livre e outro engastado, a maior discrepância foi observada no laminado quadriaixial flexível, com uma diferença de 7,81% entre os métodos. Esses resultados podem ser atribuídos ao número reduzido de repetições da configuração $[\pm 0/\pm 44]_{2T}$.

A seção a seguir apresenta os resultados da análise de flambagem para placas longas sob cisalhamento.

4.3.2 Flambagem por Cisalhamento Puro

Para as análises da flambagem de placas submetidas ao cisalhamento puro, consideraram-se placas longas de dimensões 810 x 150 mm. As propriedades dos materiais são descritas na Tabela 4.1.

A Tabela 4.12 apresenta as cargas críticas de flambagem para as placas longas sob cisalhamento simplesmente apoiadas dos quatro lados.

Tabela 4.12: Carga de flambagem para a placa longa simplesmente apoiada sob cisalhamento

Laminado	N_{MH} (N/m)	N_{MEF} (N/m)	Diferença (%)
$[0/\pm 45/90]_S$	9547	7813	22,19
$[\pm 0/\pm 44]_{2T}$	10046	9132	10,00
$[0_5/\pm 45/90]_S$	30382	31694	4.13
$[\pm 0/\pm 22]_{4T}$	37148	40481	8.23
$[0/\pm 45_4/90]_S$	212038	197240	7.50
$[\pm 22/\pm 50]_{5T}$	213969	214470	0.75

Verifica-se pela Tabela 4.11, que o laminado quadriaxial neutro apresentou uma diferença de 22,19 % entre o método de elementos finitos e o método analítico proposto, enquanto que para os demais laminados essa diferença foi inferior a 10 %. Além disso, a diferença entre as cargas críticas de flambagem dos laminados quadriaxiais e dos laminados duplo-duplo equivalentes foi de 5,23 % para o laminado neutro, 22,26 % para o laminado rígido e 0,91 % para o laminado flexível, considerando o método analítico.

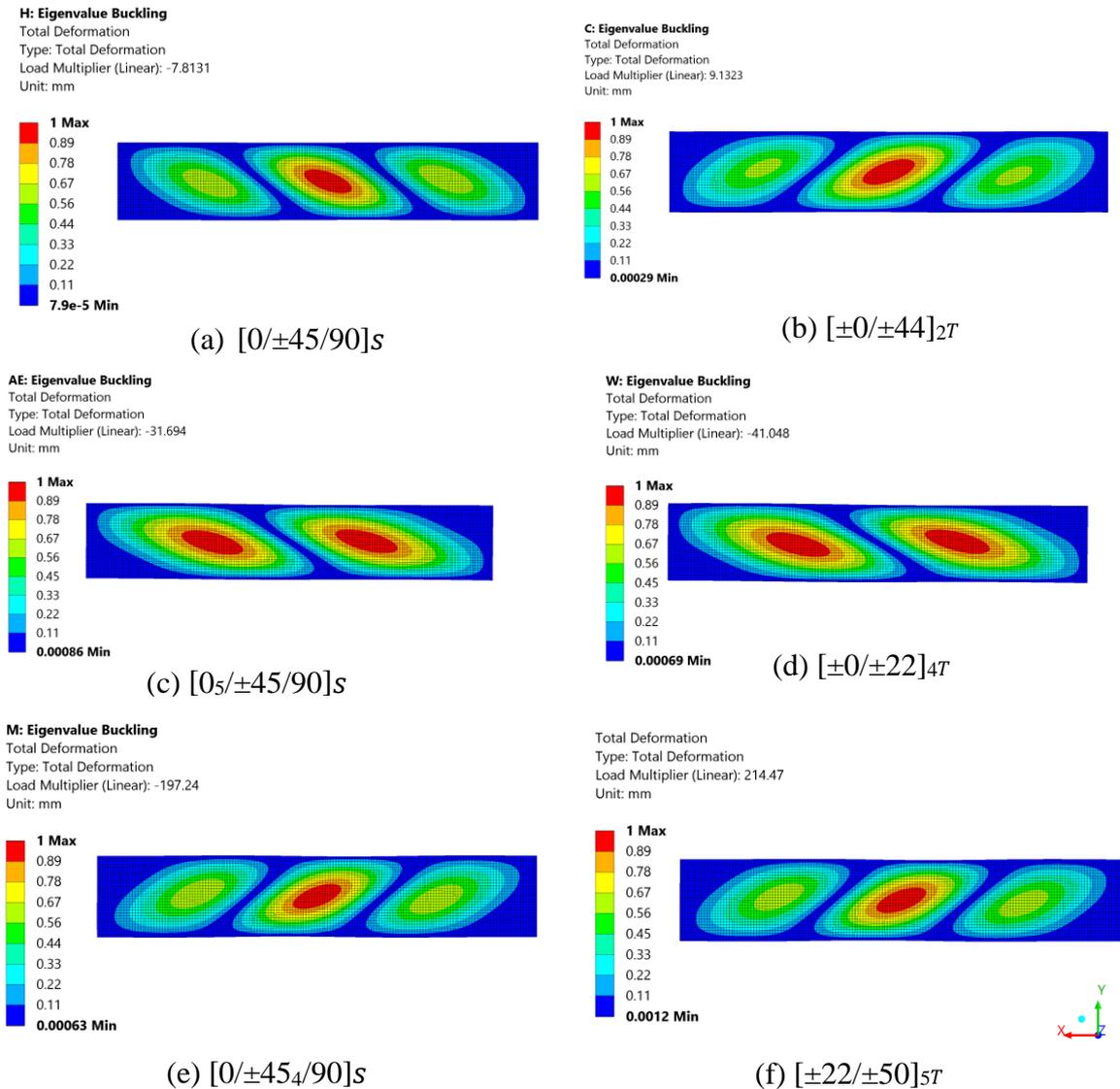
Nesse caso, o cálculo da carga de flambagem considera os termos da matriz de rigidez a flexão D_{11} e D_{22} para $K < 1$, e D_{12} , D_{66} e D_{22} para $K > 1$ (Equação (3.22)), sendo que apenas o laminado quadriaxial rígido apresentou $K < 1$. Ao comparar esses termos entre o laminado neutro e o seu duplo-duplo equivalente, verifica-se que D_{12} , D_{22} e D_{66} apresentam diferenças de 20,26 %, 17,88 % e menos de 1%, respectivamente. Para o laminado rígido e o seu duplo-duplo equivalente, as diferenças foram de 8,78 % para D_{11} , 4,57 % para D_{22} , 182,98 % para D_{12} e 115,21 % para D_{66} . Já para o laminado flexível e o duplo-duplo equivalente, as diferenças em D_{12} , D_{22} e D_{66} foram inferiores a 1%. Dessa forma, verifica-se que a diferença entre as cargas críticas dos laminados quadriaxiais e os duplo-duplos equivalentes foi maior entre laminado rígido e seu duplo-duplo equivalente, pois eles apresentaram as maiores diferenças nos termos da matriz de rigidez a flexão. Além disso, devido ao fato de o laminado quadriaxial rígido apresentar $K < 1$ e o duplo-duplo equivalente $K > 1$, são utilizadas expressões diferentes para o cálculo da carga de flambagem, o que aumenta as diferenças entre as cargas críticas desses laminados.

Vale destacar que, por apresentar os termos D_{12} , D_{66} e D_{22} significativamente maiores que os demais laminados, o laminado flexível apresenta a maior carga de flambagem.

Os modos de flambagem associados às cargas críticas apresentadas na Tabela 4.12 são ilustrados na Figura 4.8. Os laminados quadriaxiais —(a) neutro, (c) rígido e (e) flexível — e

seus respectivos laminados duplo-duplo equivalentes — (b), (d) e (f) — apresentaram os mesmos modos de flambagem.

Figura 4.8: Modos de flambagem da placa longa simplesmente apoiada sob cisalhamento



Conforme ilustra a Figura 4.8, o laminado neutro apresentou três meias-ondas nas longitudinais, o rígido duas meias ondas e o laminado flexível três meias ondas. Esse comportamento indica que, embora o laminado neutro apresente menor rigidez à flexão, sua configuração geométrica favorece a ocorrência de três meias-ondas, comportamento semelhante ao do laminado flexível, que possui maior rigidez e espessura.

As cargas críticas de flambagem para as placas longas engastadas nas longitudinais são apresentadas na Tabela 4.13.

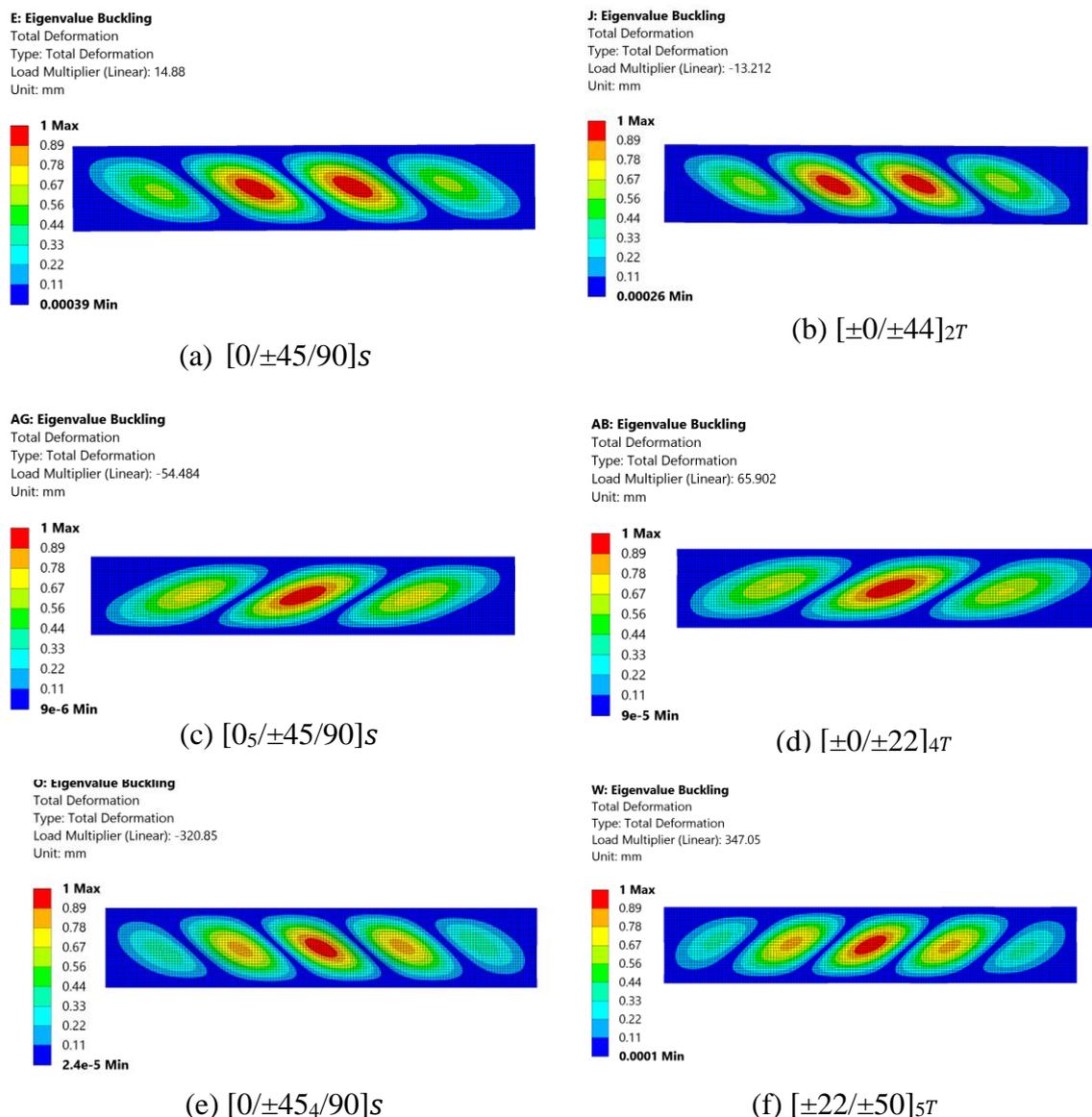
Tabela 4.13: Carga de flambagem para a placa longa engastada nas longitudinais sob cisalhamento

Laminado	N_{MH} (N/m)	N_{MEF} (N/m)	Diferença (%)
$[0/\pm 45/90]_S$	16064	13212	21,58
$[\pm 0/\pm 44]_{2T}$	16609	14880	11,62
$[0_5/\pm 45/90]_S$	53540	54484	1,73
$[\pm 0/\pm 22]_{4T}$	62475	65902	5,20
$[0/\pm 45_4/90]_S$	344449	320850	7,35
$[\pm 22/\pm 50]_{5T}$	343436	347050	1,04

A diferença máxima entre as cargas de flambagem obtidas via elementos finitos e o método proposto foi de 21,58 %, referente ao laminado $[0/\pm 45/90]_S$. No entanto, os demais laminados apresentaram diferenças inferiores a 11,62 % entre os métodos. Considerando a solução analítica, verifica-se que a diferença entre as cargas dos laminados quadriaxiais e os respectivos duplo-duplo foram de 3,4 % para o laminado neutro, 16,7 % para o laminado rígido e 0,29 % para o laminado flexível. Nesse caso, o cálculo da carga de flambagem considera os termos da matriz de rigidez a flexão D_{11} e D_{22} para $K < 1$, e D_{12} , D_{66} e D_{22} para $K > 1$ (Equação (3.24)), sendo que apenas o laminado quadriaxial rígido apresentou $K < 1$. Verifica-se um comportamento semelhante ao observado para a placa simplesmente apoiada nos quatro lados. A maior diferença entre as cargas críticas de flambagem foi observada entre o laminado quadriaxial rígido e seu duplo-duplo equivalente, pois exibem as maiores diferenças nos termos da matriz de rigidez à flexão. Além disso, o cálculo da carga de flambagem foi realizado com expressões distintas para esses laminados, pois o coeficiente K difere entre eles: para o laminado quadriaxial, $K < 1$, enquanto para o duplo-duplo equivalente, $K > 1$.

As Figuras 4.11 (a), (c) e (e) apresentam os modos de flambagem dos laminados neutro, rígido e flexível e as Figuras 4.11 (b), (d) e (f) os modos de flambagem dos respectivos laminados duplo-duplo equivalentes.

Figura 4.9: Modos de flambagem da placa longa engastada nas longitudinais



Novamente, verifica-se a similaridade entre os modos de flambagem dos laminados quadriaixiais e seus duplo-duplo equivalentes. O laminado neutro e o duplo-duplo equivalente apresentaram quatro meias ondas, o laminado rígido, três meias ondas, e o laminado flexível, cinco meias ondas. Esse comportamento indica que devido ao laminado flexível apresentar maior rigidez, o modo de flambagem desse laminado apresenta menores comprimentos de meias-ondas.

Observa-se que os laminados neutro e rígido exibiram uma meia onda a mais em comparação com as placas simplesmente apoiadas nos quatro lados, enquanto o laminado flexível apresentou duas meias ondas adicionais (Figura 4.8). Esse comportamento indica que

a condição de contorno de engaste torna a placa mais rígida, resultando na redução dos comprimentos de onda dos modos.

Observa-se que as maiores diferenças entre os resultados do modelo analítico e do Método dos Elementos Finitos na análise de flambagem por cisalhamento ocorrem para o laminado $[0/\pm 45/90]_s$, com cerca de 20 %, e para o laminado $[\pm 0/\pm 44]_{2T}$, com cerca de 10 %, considerando ambas as condições de contorno. No caso do laminado quadriaxial $[0/\pm 45/90]_s$, a maior diferença pode ser atribuída ao fato de o termo D_{12} ser apenas 2,35 vezes maior que os termos de acoplamento D_{16} e D_{26} , os quais são desprezados nas equações analíticas adotadas. Ressalta-se, ainda, que esse laminado apresenta ausência de acoplamento entre momentos e deformações, e entre forças e curvaturas, uma vez que, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Além disso, os modos de flambagem dos laminados quadriaxiais e duplo-duplo equivalentes foram idênticos para todas as condições de contorno. No entanto, para a placa simplesmente apoiada, os laminados neutro e flexível apresentaram o mesmo modo de flambagem, comportamento que não foi observado na placa engastada nas longitudinais.

4.4 Resultados da Estratégia de Projeto para Laminados Duplo-Duplo sob Cisalhamento

Esta seção apresenta as cargas de flambagem das placas sob cisalhamento para os empilhamentos construídos a partir do espaço de projeto de camadas pré-fabricadas disponíveis comercialmente, permitindo a identificação das configurações que maximizam a carga crítica de flambagem para as condições de contorno de apoio simples e engaste nos lados longitudinais.

4.4.1 Placas longas sob cisalhamento

As placas analisadas na flambagem por cisalhamento, considerando o espaço de projeto de camadas pré-fabricadas disponíveis comercialmente, possuem comprimento de 810 mm e largura de 150 mm. As propriedades do material e a espessura das camadas estão apresentadas na Tabela 4.1.

As cargas de flambagem obtidas pela solução analítica (N_{MH}) e via elementos finitos (N_{MEF}) para as 13 combinações de camadas (Tabela 3.3) são apresentados na Tabela 4.14. O laminado $[0_3/\pm 45_2/90]_s$ também foi considerado para fins de comparação. Conforme discutido

por Tsai (2021), a distribuição percentual de 38/50/12 entre as orientações das fibras 0/±45/90 torna esse laminado amplamente utilizado, devido às suas boas propriedades mecânicas. Duas condições de contorno foram consideradas: simplesmente apoiada (SS) e engastada nas longitudinais (CC).

Tabela 4.14: Carga de flambagem para placa longa (Mapa e Avila, 2025)

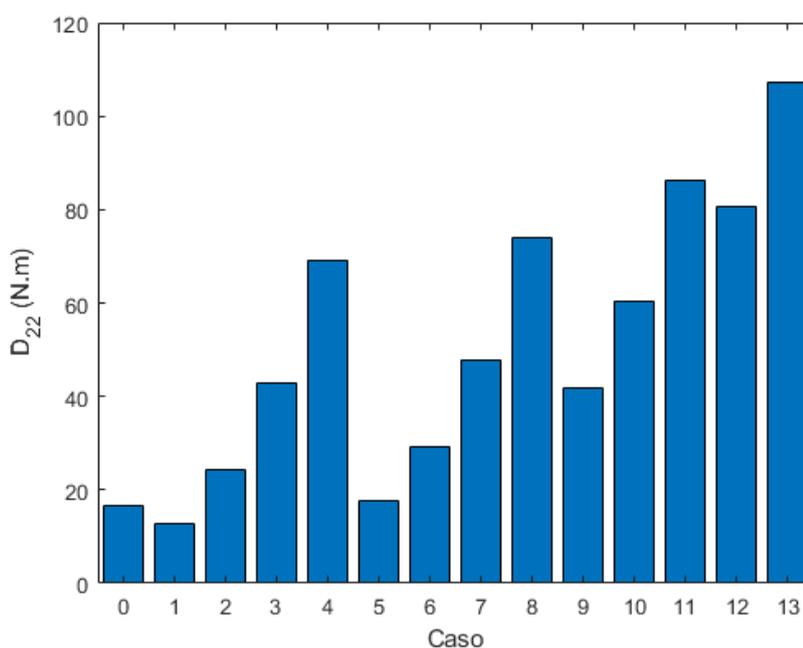
Caso	Emp.	SS				CC			
		N _{MH} (kN/m)	N _{MEF} (kN/m)	Dif. (%)	λ ₁ (m)	N _{MH} (kN/m)	N _{MEF} (kN/m)	Dif. (%)	λ ₁ (m)
0	[0 ₃ /±45 ₂ /90] _s	±56,0	±52,7	6,03	0,29	±97,9	±89,9	8,16	0,19
1	[±0/±30] ₄	±56,2	±54,9	2,29	0,33	±96,6	±89,3	7,63	0,22
2	[±0/±45] ₄	±86,6	±86,9	0,41	0,26	±148,1	±141,4	5,04	0,18
3	[±0/±60] ₄	±110,9	±109,9	0,86	0,20	±193,6	±187,5	3,17	0,14
4	[±0/±90] ₄	±117,5	±115,3	1,86	0,16	±213,9	±208,8	2,40	0,11
5	[±30/±30] ₄	±82,9	±84,5	1,91	0,32	±140,2	±133,5	4,76	0,33
6	[±30/±45] ₄	±114,2	±116,8	2,30	0,27	±193,1	±186,0	3,65	0,18
7	[±30/±60] ₄	±139,3	±141,2	1,32	0,21	±237,3	±228,9	3,52	0,14
8	[±30/±90] ₄	±145,5	±144,7	0,54	0,15	±253,9	±244,5	3,74	0,10
9	[±45/±45] ₄	±143,5	±147,1	2,49	0,23	±242,1	±234,0	3,31	0,15
10	[±45/±60] ₄	±164,0	±166,3	1,42	0,19	±277,4	±267,3	3,64	0,12
11	[±45/±90] ₄	±163,0	±163,4	0,23	0,14	±280,4	±266,6	4,92	0,09
12	[±60/±60] ₄	±177,9	±179,4	0,79	0,15	±301,1	±287,4	4,54	0,10
13	[±60/±90] ₄	±163,3	±158,7	2,79	0,11	±280,7	±262,0	6,68	0,08

Conforme ilustrado na Tabela 4.14, o método analítico proposto apresenta boa concordância com as soluções de análise de elementos finitos, apresentando diferença inferior a 6,09 % para as placas simplesmente apoiadas e inferior a 8,16 % para as placas engastadas nas longitudinais. Essas diferenças podem ser atribuídas à análise de elementos finitos ser baseada em uma placa longa, porém finita (810 mm x 150 mm), enquanto a solução analítica considera uma placa infinitamente longa. Além disso, na formulação analítica desconsideraram-se os termos de acoplamento D_{16} e D_{26} , que, embora apresentem valores uma ou duas ordens menores que os demais termos da matriz de rigidez à flexão, não são nulos (Consultar apêndice A). Tais termos influenciam a interação entre a flexão e o cisalhamento, e são considerados na modelagem por elementos finitos. Ademais, é importante ressaltar que a malha utilizada no MEF, embora refinada, ainda está sujeita a discretizações finitas e aproximações numéricas, as quais podem também introduzir pequenas variações nos resultados.

Considerando-se as cargas de flambagem obtidas pelo método analítico proposto, observa-se que a carga de flambagem do laminado quadriaixial de referência selecionado, $[0_3/\pm 45_2/90]_s$, foi superada por quase todos os casos de configuração de duplo-duplo, exceto pelo caso nº 1. Esse resultado ocorre porque o duplo-duplo equivalente a esse laminado é o $[0/36]_4$, indicando que o caso 1, $[0/30]_4$, apresenta menor rigidez em comparação com as demais configurações. Além disso, nota-se que as configurações de empilhamento têm influência significativa nas cargas de flambagem das placas. Para os empilhamentos analisados, os valores das cargas críticas absolutas variaram de 56,0 kN/m a 177,9 kN/m na condição de contorno simplesmente apoiada.

O critério de investigar o D_{22} máximo para $[\pm\Psi/\pm\Phi]_{rT}$ demonstra consistência com a obtenção da carga máxima de flambagem por cisalhamento, a Figura 4.10 ilustra os valores de D_{22} para os casos de configuração de duplo-duplo.

Figura 4.10: Valores de D_{22} para as 13 configurações de empilhamento



A Figura 4.10 ilustra que os três maiores valores de D_{22} foram obtidos para os casos 13, 11 e 12, correspondentes às sequências de empilhamento $[\pm 60/\pm 90]_4$, $[\pm 45/\pm 90]_4$ e $[\pm 60/\pm 60]_4$, respectivamente. No entanto, a Tabela 4.14 indica que as maiores cargas de flambagem, considerando as condições de contorno de simplesmente apoiada e engastada nas longitudinais, foram de 177,9 kN/m e 287,4 kN/m, respectivamente, ambas associadas ao caso 12, $[\pm 60/\pm 60]_4$. Essa discrepância pode ser explicada pelos valores mais elevados dos termos D_{12} e D_{66} nesse

empilhamento. Para as configurações $[\pm 60/\pm 90]_4$ e $[\pm 45/\pm 90]_4$ esses termos são 13,57 N.m e 15,58 N.m, e 16,98 N.m e 19,08 N.m, respectivamente, enquanto para $[\pm 60/\pm 60]_4$, os valores são significativamente maiores: 24,70 e 26,95 N.m aumentando a carga de flambagem atribuída a esse laminado (Consultar apêndice A). Além disso, o empilhamento $[\pm 0/\pm 30]$ é o que possui o menor valor de D_{22} , confirmando que é o laminado que possui a menor carga de flambagem. Conforme Whitney (1987) relata, o componente D_{22} é o componente de rigidez de flexão mais importante quando a carga de cisalhamento no plano é considerada.

Os modos de flambagem foram obtidos numericamente por meio de análises de elementos finitos, permitindo a verificação dos comprimentos de meia-onda previstos analiticamente na Tabela 4.14. As Figuras 4.11 e 4.12 ilustram os modos de flambagem para cada caso de configuração de duplo-duplo, sob as condições de contorno de simplesmente apoiada (SS) e engastada (CC), respectivamente. Os modos apresentam deflexões máximas na região central da placa. Em geral, as placas engastadas nos lados longitudinais apresentam os comprimentos de meia onda menores, variando de 0,19 m a 0,08 m. As configurações com as maiores cargas críticas de flambagem, $[\pm 60/\pm 60]_4$, $[\pm 60/\pm 90]_4$ e $[\pm 45/\pm 90]_4$, exibem os menores comprimentos de meia onda e a que possui menor carga de flambagem é a que possui maiores comprimentos de meia onda $[\pm 0/\pm 30]_4$. Conforme ilustra a Figura 4.12 (l), a placa de laminado $[\pm 45/\pm 90]_4$ apresenta nove meia onda, resultando em um comprimento de meia onda de aproximadamente 0,09 m, valor compatível com aquele calculado analiticamente, enquanto que o laminado $[\pm 0/\pm 30]_4$, apresenta três meias ondas, correspondendo a um comprimento de meia-onda visual de aproximadamente 0,27 m, também próximo do valor calculado analiticamente, que foi de 0,22 m (Figura 4.12 (b)).

As soluções de elementos finitos para o caso de referência (caso 0) e para o caso $[\pm 0/\pm 30]_4$ apresentam cargas de flambagem próximas para as condições de contorno SS e CC, conforme se verifica na Tabela 4.14. No entanto, devido às diferenças das componentes das matrizes de rigidez à flexão, os modos de flambagem dos dois empilhamentos são distintos. Essa distinção pode ser observada nas Figuras 4.11(a)-(b) e 4.12(a)-(b).

Verifica-se, pela Figura 4.12, que as placas engastadas nas longitudinais apresentam menores comprimentos de meia onda, devido à maior rigidez imposta por essa condição de contorno. Conforme apresenta-se na Tabela 4.14 e nas Figuras 4.11 e 4.12, os menores comprimentos de meias-ondas estão associados aos maiores valores de D_{22} (Figura 4.10). Pela Figura 4.11, verifica-se que os laminados $[\pm 60/\pm 90]_4$, $[\pm 45/\pm 90]_4$ e $[\pm 60/\pm 60]_4$ possuem sete, cinco e seis meias-ondas, respectivamente. De forma semelhante, observa-se pela Figura 4.12, que esses laminados possuem onze, nove e oito meias-ondas, respectivamente.

Figura 4.11: Modo de flambagem para a placa simplesmente apoiada: (a) quadriaxial e (b-n) casos 1 a 13

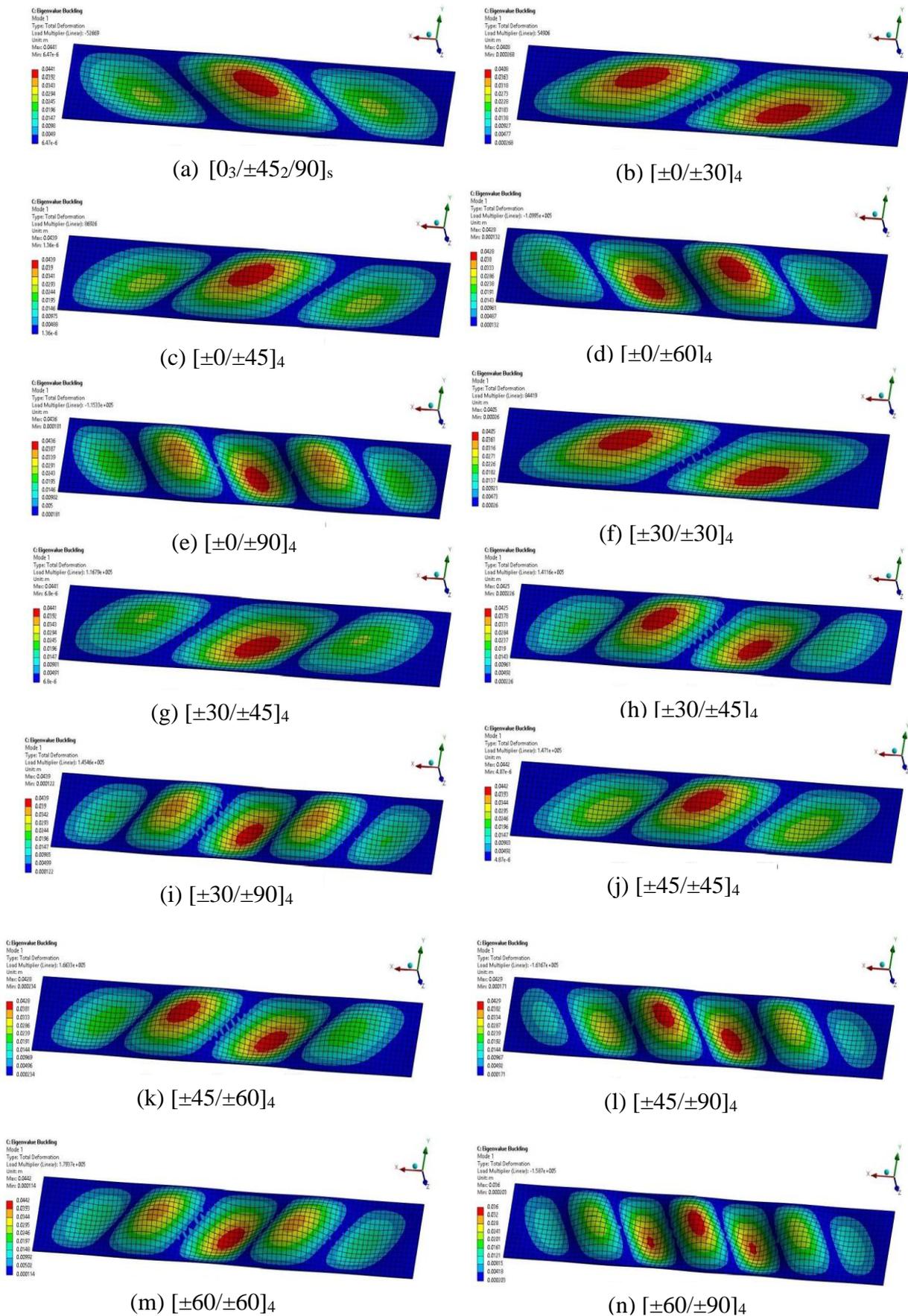
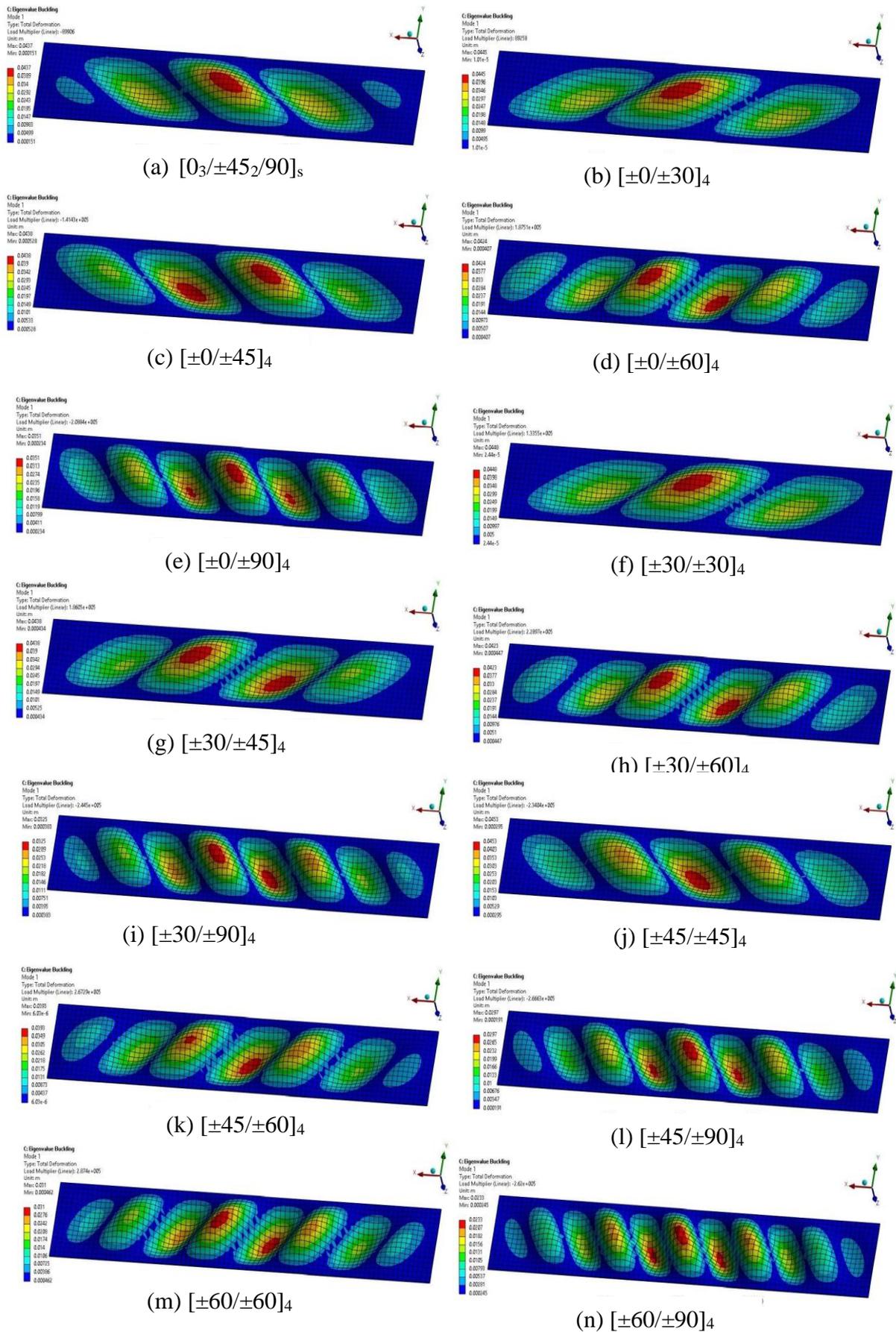


Figura 4.12 Modo de flambagem para a placa engastada: (a) quadriaixial e (b-n) casos 1 a 13



5 CONCLUSÕES

Formulações analíticas para a análise da flambagem de placas de laminados duplo-duplo submetidas à compressão e ao cisalhamento foram desenvolvidas para diversas condições de contorno, considerando os carregamentos de compressão e de cisalhamento. Essa abordagem possibilita ajustar a espessura e o material ao final do projeto, permitindo a adaptação da espessura conforme o carregamento em cada região da estrutura de forma eficiente e rápida. Também foi proposta uma estratégia prática de projeto para placas longas sujeitas ao cisalhamento, considerando camadas de pré-impregnados disponíveis comercialmente. As análises de flambagem de laminados duplo-duplo sob cisalhamento bem como o desenvolvimento de estratégias de projeto com base em camadas comercialmente disponíveis, foram introduzidos pela primeira vez na literatura.

Os resultados mostram boa concordância entre a formulação analítica proposta e as análises de Elementos Finitos, com exceção do laminado duplo-duplo $[\pm 0/\pm 44]_{2T}$, que exibiu diferenças de cargas críticas de até 21,28% entre os métodos. Os demais laminados apresentaram diferenças inferiores a 7,81% entre os métodos. Essas diferenças ocorreram porque os termos de acoplamento D_{16} e D_{26} dos laminados duplo-duplo $[\pm 0/\pm 22]_{4T}$ e $[\pm 22/\pm 50]_{4T}$ possuem uma e duas ordens de grandeza, respectivamente, menores que os demais termos da matriz de rigidez à flexão e podem ser desprezados nos cálculos das cargas de flambagem. Entretanto, o laminado duplo-duplo equivalente ao quadriaxial neutro, $[\pm 0/\pm 44]_{2T}$, possui esses termos apenas cinco vezes menores que os demais termos, o que explica a diferença maior observada. Os modos de flambagem obtidos pelos dois métodos apresentaram comportamentos semelhantes para todos os laminados.

Além disso, verifica-se que o laminado duplo-duplo equivalente ao laminado neutro, $[\pm 0/\pm 44]_{2T}$, não atingiu a homogeneização, apresentando um valor de 0,0213 em um dos termos do critério $\mathbf{A}^* - \mathbf{D}^*$ e de -0,0795 em um os termos de \mathbf{B}^* . Isso indica que, embora o laminado quadriaxial neutro apresente um duplo-duplo equivalente, ele não está isento dos efeitos de acoplamento, como o empenamento. Assim, constata-se a existência de um limite inferior para a espessura de laminados duplo-duplo quando se busca eliminar esses efeitos.

À medida que o número de repetições dos blocos de construção aumenta, o laminado alcança a condição de homogeneização. No caso do sublaminado $[\pm 0/\pm 22]$, essa condição foi

atingida com quatro repetições. Por outro lado, o laminado $[\pm 22/\pm 50]$ não satisfaz completamente todos os critérios de homogeneização mesmo após cinco repetições.

Os laminados duplo-duplo equivalentes apresentaram respostas similares aos quadriaxiais correspondentes. Entretanto, o laminado flexível apresentou menores diferenças em relação ao duplo-duplo equivalente, devido à correspondência exata de rigidez entre eles. Verifica-se que, embora os laminados neutro e rígido não apresentem laminados duplo-duplo equivalentes exatos, a carga de flambagem dos duplo-duplo equivalentes a esses laminados não foi menor em nenhuma das condições de contorno. Além disso, constata-se que os modos de flambagem críticos dos laminados duplo-duplo equivalentes seguem o mesmo padrão dos laminados quadriaxiais.

O algoritmo proposto identifica as configurações de duplo-duplo que resultam em maiores cargas de flambagem por cisalhamento, utilizando o critério do valor máximo de D_{22} , podendo ser considerado qualquer espaço de projeto. Observa-se que os laminados $[\pm 45/\pm 90]_4$ e $[\pm 60/\pm 90]_4$ apresentam os valores de D_{22} maiores do que a configuração que apresenta maior carga crítica $[\pm 60/\pm 60]_4$, porém a diferença máxima entre a carga crítica desse duplo-duplo e dos demais é 8,2 %. As configurações de duplo-duplo com pequenos ângulos, como $[\pm 0/\pm 30]_4$, $[\pm 30/\pm 30]_4$ e $[\pm 0/\pm 45]_4$, apresentam os menores valores de D_{22} , indicando que esses laminados tendem a possuir as menores cargas críticas de flambagem sob cisalhamento no plano entre os casos analisados.

A abordagem desenvolvida neste trabalho pode ser integrada a técnicas de deslizamento de camadas e afinamento, viabilizando a fabricação de estruturas de compósitos leves com desempenho mecânico equivalente ao dos laminados quadriaxiais. Além disso, a formulação proposta é aplicável a diversas configurações estruturais, incluindo painéis e perfis.

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Para sugestões de trabalhos futuros, pode-se indicar:

- Extensão das formulações para análise não linear;
- Aplicação a outras estruturas como placas enrijecidas e perfis estruturais;
- Incorporar critérios de falha ao modelo;
- Considerar técnicas de deslizamento de camadas.

REFERÊNCIAS

- ALLEN, D. H. Structural Analysis, Aerospace. Em: MEYERS, R. A. (Ed.). . **Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition)**. New York: Academic Press, 2003. p. 155–173.
- ANSYS INC. Ansys. 2012.
- ARTEIRO, A. *et al.* A case for Tsai's Modulus, an invariant-based approach to stiffness. **Composite Structures**, v. 252, p. 112683, 2020.
- BARNES, R. H.; MOROZOV, E. V. Structural optimisation of composite wind turbine blade structures with variations of internal geometry configuration. **Composite Structures**, v. 152, p. 158–167, 15 set. 2016.
- BATISTA, E. DE M. Local–global buckling interaction procedures for the design of cold-formed columns: Effective width and direct method integrated approach. **Thin-Walled Structures**, v. 47, n. 11, p. 1218–1231, 2009.
- _____. Effective section method: A general direct method for the design of steel cold-formed members under local–global buckling interaction. **Thin-Walled Structures**, v. 48, n. 4, p. 345–356, 2010.
- CATAPANO, A.; MONTEMURRO, M. Strength Optimisation of Variable Angle-Tow Composites Through a Laminate-Level Failure Criterion. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 187, n. 3, p. 683–706, 1 dez. 2020.
- CZÉL, G.; JALALVAND, M.; WISNOM, M. R.; CZIGÁNY, T. Design and characterisation of high performance, pseudo-ductile all-carbon/epoxy unidirectional hybrid composites. **Composites Part B: Engineering**, v. 111, p. 348–356, 15 fev. 2017.
- D'AGUIAR, S. C. M.; PARENTE JUNIOR, E. Local buckling and post-critical behavior of thin-walled composite channel section columns. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 15, 2018.
- DANIEL, I. M.; ISHAI, O. **Engineering Mechanics of Composite Materials**. [s.l.] Oxford University Press, 2006.
- DO, V. N. VAN; DAO, T. N.; LEE, C.-H. Thermal and thermo-mechanical post-buckling analysis of GNP-reinforced composite laminated plates. **Mechanics of Materials**, v. 199, p. 105171, 2024.
- FANG, P.; GAO, T.; HUANG, Y.; SONG, L.; LIU, H.; DUYSINX, P.; ZHANG, W. Uniform multiple laminates interpolation model and design method for double–double laminates based on multi-material topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 433, 1 jan. 2025.
- GAROFANO, A.; SELLITTO, A.; ACANFORA, V.; CAPRIO, F. DI; RICCIO, A. On the effectiveness of double-double design on crashworthiness of fuselage barrel. **Aerospace Science and Technology**, v. 140, p. 108479, 2023.

GAROFANO, A.; SELBITTO, A.; CAPRIO, F. DI; RICCIO, A. On the use of double-double design philosophy in the redesign of composite fuselage barrel frame components. **Polymer Composites**, v. 45, n. 5, p. 4250–4265, 10 abr. 2024.

GUILLÉN-RUJANO, R.; AVILÉS, F.; VIDAL-LESSO, A.; HERNÁNDEZ-PÉREZ, A. Closed-form solution and analysis of the plate twist test in sandwich and laminated composites. **Mechanics of Materials**, v. 155, p. 103753, 2021.

GUO, G.; ZHU, W.; SUN, Z.; FU, S.; SHEN, W.; CAO, J. An aero-structure-acoustics evaluation framework of wind turbine blade cross-section based on Gradient Boosting regression tree. **Composite Structures**, v. 337, 1 jun. 2024.

GUO, Q.; YAO, W.; LI, W.; GUPTA, N. Constitutive models for the structural analysis of composite materials for the finite element analysis: A review of recent practices. **Composite Structures**, v. 260, p. 113267, 2021.

HA, S. K.; CIMINI, C. A. Theory and validation of the master ply concept for invariant-based stiffness of composites. **Journal of Composite Materials**, v. 52, n. 12, p. 1699–1708, 1 maio 2018.

HOSSEINI, A.; GHAHARPOUR, F.; RAJAEI, H.; ABBASI, M. **Investigation of Physical and Mechanical Properties of Al Nanocomposite Reinforced with CNTs**. [s.l.: s.n.].

HSU, C. W.; MITTELSTEDT, C.; HWU, C. Boundary element method for bending-extension coupling shear deformable laminated composite plates with multiple stiffeners. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 164, 1 jul. 2024.

HUANG, C.; JOOSTEN, M. W. 3D printed continuous fibre-reinforced composites: Design and characterisation of advanced pseudo-ductile hybrid laminates. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 146, 1 jul. 2021.

HUANG, S.; QIAO, P. A novel semi-analytical method for buckling analysis of stiffened laminated composite plates. **Thin-Walled Structures**, v. 148, 1 mar. 2020.

JONES, R. M. **Mechanics Of Composite Materials**. [s.l.] Taylor & Francis, 1999.

KAPPEL, E. Double–Double laminates for aerospace applications — Finding best laminates for given load sets. **Composites Part C: Open Access**, v. 8, 1 ago. 2022a.

_____. Double–Double laminates for aerospace applications — Finding best laminates for given load sets. **Composites Part C: Open Access**, v. 8, 1 ago. 2022b.

_____. Buckling of simply-supported rectangular Double–Double laminates. **Composites Part C: Open Access**, v. 11, 1 jul. 2023.

_____. On the Double-Double Laminate Buckling Optimum for the 18-Panel ‘Horse-Shoe’ Reference Case. **Journal of Composites Science**, v. 8, n. 2, 1 fev. 2024.

KAPPEL, E.; BOOSE, Y.; MISSBACH, M. A CAI study on transition zones of conventional and Double-Double laminates. **Composites Part C: Open Access**, v. 14, 1 jul. 2024.

KASSAPOGLOU, C. **Design and Analysis of Composite Structures: With Applications to Aerospace Structures**. segunda edição ed. [s.l.: s.n.].

- KNIGHT, M.; CURLISS, D. Composite Materials. *Em: MEYERS, R. A. (Ed.). . Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition)*. New York: Academic Press, 2003. p. 455–468.
- KOLLÁR. Buckling of Unidirectionally Loaded Composite Plates with One Free and One Rotationally Restrained Unloaded Edge. 2002.
- KOLLÁR, L. P.; SPRINGER, G. S. **Mechanics of Composite Structures**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- LE, V. A.; ZOBEIRY, N.; ERKMEN, E.; MALEK, S. Buckling behaviour of laminated viscoelastic composites under axial loads. **Mechanics of Materials**, v. 159, p. 103897, 2021.
- LE-MANH, T.; LEE, J. Stacking sequence optimization for maximum strengths of laminated composite plates using genetic algorithm and isogeometric analysis. **Composite Structures**, v. 116, p. 357–363, 2014.
- LI, X.; LEI, H.; YANG, H.; WANG, H.; ZHANG, Z.; ZHANG, H.; CHEN, H. Compressive local buckling of integrated fluted-core sandwich composite panels. **Mechanics of Materials**, v. 160, p. 103954, 2021.
- MALIC, N. T.; KOZAR, I. Vehicle strip element in the analysis of stiffened plate under realistic moving loading. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics**, v. 226, n. 4, p. 374–384, 27 abr. 2012.
- MAPA, L. P. P.; AVILA, A. F. The non-dimensional design strategy for double-double laminates under shear: The off-the-shelf prepreg approach. **Journal of Composite Materials**, 2025. DOI: 10.1177/00219983251329534
- MITTELSTEDT, C.; ERDMANN, H.; SCHRÖDER, K. U. Postbuckling of imperfect rectangular composite plates under inplane shear closed-form approximate solutions. **Archive of Applied Mechanics**, v. 81, n. 10, p. 1409–1426, out. 2011.
- NGO, T.-D.). **Composite and Nanocomposite Materials-From Knowledge to Industrial Applications**. [s.l: s.n.].
- OGIN, S. L.; BRØNDSTED, P.; ZANGENBERG, J. Composite materials: constituents, architecture, and generic damage. *Em: TALREJA, R.; VARNA, J. (Eds.). . Modeling Damage, Fatigue and Failure of Composite Materials*. [s.l.] Woodhead Publishing, 2016. p. 3–23.
- PANETTIERI, E.; MONTEMURRO, M.; CATAPANO, A. Blending constraints for composite laminates in polar parameters space. **Composites Part B: Engineering**, v. 168, p. 448–457, 2019.
- RICCIO, A.; CAPRIO, F. DI; TSAI, S. W.; RUSSO, A.; SELBITTO, A. Optimization of composite aeronautical components by Re-designing with double-double laminates. **Aerospace Science and Technology**, v. 151, 1 ago. 2024.
- SCHILLING, J. C.; MITTELSTEDT, C. A simple closed-form analytical model for the column buckling of omega-stinger-stiffened panels with periodic boundary conditions. **Results in Engineering**, v. 6, p. 100120, 2020.

- SHRIVASTAVA, S.; SHARMA, N.; TSAI, S. W.; MOHITE, P. M. D and DD-drop layup optimization of aircraft wing panels under multi-load case design environment. **Composite Structures**, v. 248, 15 set. 2020.
- TAN, C.; JIANG, X.; QIANG, X.; HAN, S.; REN, X.; XIE, J. Development of an anchor system for thick CFRP plates: Experimental and numerical investigation. **Case Studies in Construction Materials**, v. 21, p. e03814, 2024.
- TSAI, S. W. Double–Double: New Family of Composite Laminates. **AIAA Journal**, v. 59, n. 11, p. 4293–4305, 12 out. 2021.
- TSAI, S. W. *et al.* **Double-double: a new perspective in the manufacture and design of composites**. [s.l.] Composites Design Group, 2022.
- TSAI, S. W. Expectation of the next generation research in composite materials. **Materials System**, v. 40, p. 55–59, 2023.
- TSAI, S. W.; MELO, J. D. D. An invariant-based theory of composites. **Composites Science and Technology**, v. 100, p. 237–243, 2014.
- TSAI, S. W.; MELO, J. D. D.; SIHN, S.; ARTEIRO, A.; RAINSBERGER, R. **Composite Laminates: Theory and Practice of Analysis, Design and Automated Layup**. [s.l.] Stanford Aeronautics & Astronautics, 2017.
- VANNUCCI, P. Plane anisotropy by the polar method. **Meccanica**, v. 40, n. 4- 6 SPEC. ISS., p. 437–454, dez. 2005.
- VASILIEV, V. V; MOROZOV, E. V. Chapter 1 - Introduction. *Em:* VASILIEV, V. V; MOROZOV, E. V (Eds.). . **Advanced Mechanics of Composite Materials (Third Edition)**. Boston: Elsevier, 2013. p. 1–27.
- VERMES, B.; TSAI, S. W.; MASSARD, T.; SPRINGER, G. S.; CZIGANY, T. Design of laminates by a novel “double–double” layup. **Thin-Walled Structures**, v. 165, 1 ago. 2021.
- VERMES, B.; TSAI, S. W.; RICCIO, A.; CAPRIO, F. DI; ROY, S. Application of the Tsai’s modulus and double-double concepts to the definition of a new affordable design approach for composite laminates. **Composite Structures**, v. 259, 1 mar. 2021.
- VESCOVINI, A.; LI, C. X.; MALVERTI, C.; JIN, B. C.; MANES, A. Low-velocity impact behaviour of flat and tapered Single-Double composites specimens. **Composite Structures**, p. 118823, dez. 2024.
- VESCOVINI, A.; LI, C. X.; PAZ MENDEZ, J.; JIN, B. C.; MANES, A.; BISAGNI, C. Post-buckling behavior and collapse of Double-Double composite single stringer specimens. **Composite Structures**, v. 327, 1 jan. 2024.
- VESCOVINI, R.; BISAGNI, C. Semi-analytical buckling analysis of omega stiffened panels under multi-axial loads. **Composite Structures**, v. 120, p. 285–299, 1 fev. 2015.
- VIGNOLI, L. L.; NETO, R. M. C.; SAVI, M. A.; PACHECO, P. M. C. L.; KALAMKAROV, A. L. Trace theory applied to composite analysis: A comparison with micromechanical models. **Composites Communications**, v. 25, p. 100715, 2021.
- VILAÇA, F. R.; GARCIA, T. **Villaca_Elasticidade**. [s.l: s.n.].

WANG, D.; SU, Z.; NARAYANASWAMY, S.; TSAI, S. W. L. Buckling optimization of Double-Double (DD) laminates with gradual thickness tapering. **Composite Structures**, v. 351, 1 jan. 2025.

WANG, Y.; WANG, D.; ZHONG, Y.; ROSEN, D. W.; LI, S.; TSAI, S. W. Topology optimization of Double-Double (DD) composite laminates considering stress control. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 414, 1 set. 2023.

WANG, Z.; ZHENG, C.; WANG, L.; GU, J.; JING, L.; LAI, X. Optimal design of composite grid/skin structures based on deep learning and Double-Double layup strategy. **Aerospace Science and Technology**, v. 147, 1 abr. 2024.

WHITNEY, J. M. **Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates** 1987Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:135693976>>

XIANG, H.; ZHANG, Y.; CHEN, Y.; PAGANI, A.; ZHANG, C. A nonlinear analytical model for tensile failure prediction of pseudo-ductile composite laminates. **Thin-Walled Structures**, v. 179, 1 out. 2022.

YAAKOUBI-MESBAH, C. EL; MITTELSTEDT, C. Closed-form analytical solution for local buckling of omega-stringer-stiffened composite panels under compression. **Composite Structures**, v. 353, 1 jan. 2025.

ZERBST, D.; TÖNJES, L.; DÄHNE, S.; WERTHEN, E.; KAPPEL, E.; HÜHNE, C. Equivalent plate formulation of Double-Double laminates for the gradient-based design optimization of composite structures. 2024.

ZHANG, Z.; HOU, S.; LIU, Q.; HAN, X. Winding orientation optimization design of composite tubes based on quasi-static and dynamic experiments. **Thin-Walled Structures**, v. 127, p. 425–433, 2018.

ZHAO, M.; ZHAO, Y.; WANG, A.; CHANG, Z.; ZHANG, J.; WANG, Z. Investigation of the mode-I delamination behavior of Double-Double laminate carbon fiber reinforced composite. **Composites Science and Technology**, v. 248, 22 mar. 2024.

APÊNDICE A

Matrizes de Rigidez a flexão:

$$\begin{aligned}
 [0_3/\pm 45_2/90]_s \quad \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 112.8339 & 9.7983 & 2.2453 \\ 13.5876 & 16.5372 & 2.2453 \\ 2.2453 & 2.2453 & 12.0386 \end{bmatrix} N.m \\
 [\pm 0/\pm 30]_4 \quad \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 107.0882 & 13.5876 & -0.6023 \\ 13.5876 & 12.6822 & -0.1309 \\ -0.6023 & -0.1309 & 15.5746 \end{bmatrix} N.m \\
 [\pm 0/\pm 45]_4 \quad \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 86.3394 & 16.9818 & -0.3264 \\ 16.9818 & 24.3529 & -0.2069 \\ -0.3264 & -0.2069 & 19.0885 \end{bmatrix} N.m \\
 [\pm 0/\pm 60]_4 \quad \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 73.9814 & 13.2204 & -0.1223 \\ 13.2204 & 43.0259 & -0.2334 \\ -0.1223 & -0.2334 & 15.5262 \end{bmatrix} N.m \\
 [\pm 0/\pm 90]_4 \quad \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 69.2595 & 2.4677 & -0.0000 \\ 2.4677 & 69.2595 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 4.8029 \end{bmatrix} N.m \\
 [\pm 30/\pm 30]_4 \quad \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 80.7369 & 24.7282 & 0.0000 \\ 24.7282 & 17.4990 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 26.9709 \end{bmatrix} N.m \\
 [\pm 30/\pm 45]_4 \quad \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 60.4799 & 28.0609 & 0.1448 \\ 28.0609 & 29.2907 & -0.2183 \\ 0.1448 & -0.2183 & 30.6483 \end{bmatrix} N.m \\
 [\pm 30/\pm 60]_4 \quad \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 47.8900 & 23.9877 & 0.3285 \\ 23.9877 & 47.8900 & -0.3703 \\ 0.3285 & -0.3703 & 26.9696 \end{bmatrix} N.m \\
 [\pm 30/\pm 90]_4 \quad \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 43.0393 & 13.2295 & 0.2284 \\ 13.2295 & 73.9861 & 0.1051 \\ 0.2284 & 0.1051 & 15.5310 \end{bmatrix} N.m \\
 [\pm 45/\pm 45]_4 \quad \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 41.7003 & 32.0994 & 0.0000 \\ 32.0994 & 41.7003 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 34.3585 \end{bmatrix} N.m \\
 [\pm 45/\pm 60]_4 \quad \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 29.2829 & 28.0509 & 0.1920 \\ 28.0509 & 60.4676 & -0.1680 \\ 0.1920 & -0.1680 & 30.6400 \end{bmatrix} N.m \\
 [\pm 45/\pm 90]_4 \quad \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 24.3529 & 16.9818 & 0.2069 \\ 16.9818 & 86.3394 & 0.3263 \\ 0.2069 & 0.3263 & 19.0885 \end{bmatrix} N.m
 \end{aligned}$$

$$[\pm 60/\pm 60]_4 \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 17.4881 & 24.7069 & 0.0000 \\ 24.7069 & 80.7054 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 26.9579 \end{bmatrix} N.m$$

$$[\pm 60/\pm 90]_4 \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 12.6776 & 13.5786 & 0.1406 \\ 13.5786 & 107.0748 & 0.6069 \\ 0.1406 & 0.6069 & 15.5869 \end{bmatrix} N.m$$

The non-dimensional design strategy for double-double laminates under shear: The off-the-shelf prepreg approach

Lidiane PP Mapa¹ and Antonio F Avila² 

Abstract

A novel buckling design strategy for double-double (DD) laminates under in-plane shear loading has been developed, employing an off-the-shelf approach to enhance the applicability of DD configurations in aeronautical main structures. This strategy relies on four key components: Tsai's modulus, the Master-Ply concept, the D_{22}^* maximization criterion, and a homogenization procedure tailored for commercially available unidirectional (0° , 90°) and angle-ply ($\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 60^\circ$) carbon/epoxy prepregs. Finite element analysis (FEA) was used to validate analytical predictions for long/infinite composite plates under two primary boundary conditions: simply supported and clamped edges. From a design standpoint, increasing the number of sub-laminate repetitions $[\pm\psi/\pm\phi]_{r-T}$ effectively reduces bend-twist coupling effects (D_{16}^* , D_{26}^*) in DD laminates. Simultaneously, the bending stiffness components (D_{11}^* , D_{22}^* , D_{12}^* , D_{66}^*) increase by nearly an order of magnitude when the laminate thickness is doubled. Among the 13 DD configurations analyzed, those with smaller angles, such as $[\pm 0/\pm 30]_4$ and $[\pm 0/\pm 45]_4$, exhibit the lowest critical buckling loads under in-plane shear loading. However, configurations like $[\pm 0/\pm 45]_4$ and $[\pm 30/\pm 30]_4$ outperform the benchmark case $[03/\pm 452/90]_s$ by 45.56% and 44.27%, respectively. A clear trend emerges: increasing the angle orientation reduces the half-wavelength of buckling, leading to higher critical loads. The top-performing DD configuration, $[\pm 60/\pm 60]_4$, achieves a buckling load nearly double that of the benchmark case—an improvement of approximately 185%.

Keywords

Double-double laminates, non-traditional composite design, master-ply concept, Tsai's modulus

Introduction

The concept of double-double laminate proposed by Professor Tsai¹ has its foundation based on a 4-ply $[\pm\psi/\pm\phi]$ sub-laminates which are stacked upon to each other. Since this pioneering paper, researchers have examined both the advantages and limitations of the double-double (DD) stacking sequence. Vermes et al.² highlighted its benefits in terms of manufacturing efficiency and weight reduction. Garofano et al.³ noted significant time savings in stacking sequence preparation due to the use of sub-laminates. Kappel⁴ expanded on this by identifying potential improvements in stiffness compared to QUADs (a quad laminate is a composite laminate made up of plies that are oriented at 0° , $\pm 45^\circ$, and 90°). Zhang et al.⁵ explored the application of machine learning techniques to enhance the design of double-double laminates. Additionally, Wang et al.⁶ discussed the potential of topology optimization

techniques for improving double-double laminates performance.

However, because DD laminates are essentially formed by the repetition of sub-laminates (e.g., $[\pm\psi/\pm\phi]$), the resulting laminate is non-traditional. As discussed by Tsai et al.,⁷ although the coupling stiffness matrix $[B]$ is not zero, its value decreases

¹Mechanical Engineering Graduate Studies Program, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brazil

²Department of Mechanical Engineering, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brazil

Corresponding author:

Antonio F Avila, Department of Mechanical Engineering, Universidade Federal de Minas Gerais, 6627 Antonio Carlos Avenue, Belo Horizonte 31270-901, Brazil.
 Email: avila@ufmg.br

Data Availability Statement included at the end of the article

significantly as the number of sub-laminate repetitions increases. Vermes et al.⁸ reported a 97.5% reduction in warping with eight repetitions, equating to a 32-ply laminate. Kappel⁹ also explored the possibility of further reducing repetitions through optimization techniques.

The design of double-double laminates is based on Tsai's modulus principles.^{10,11} This method not only identifies the trace of the plane stress stiffness matrix as a material property¹² but also enables the computation of trace-normalized stiffness factors.¹³ The applications of double-double laminates are expanding, with growing use in areas such as low-velocity impact,¹⁴ fatigue,¹⁵ and buckling.¹⁶

To date, few researchers have investigated the buckling behavior of double-double laminates. Kappel¹⁷ presented an analytical model for analyzing the buckling of composite plates under compressive loading. However, this model is limited to plates with simply supported boundary conditions. Similarly, Wang et al.⁶ employed optimization procedures for tapered double-double laminates, but their model was restricted to specific fiber orientations that are not commercially available. Vescovini et al.,¹⁶ on the other hand, experimentally examined the buckling of reinforced panels using angle-ply prepreps oriented at $\pm 30^\circ$ and $\pm 45^\circ$. While their research also focused on compressive loading, it did not address in-plane shear effects.

The proposed model advances this field by introducing, for the first time, a double-double buckling analysis that incorporates in-plane shear loading. Additionally, its off-the-shelf approach enhances practicality, making it a viable option for industrial applications.

Tsai et al.⁷ have discussed how the number of repetitions and the selection of fiber orientations impact the mechanical properties of double-double laminates. While the proposed solutions have a solid foundation based on mechanics of composite materials, implementing specific fiber orientations during manufacturing can be challenging (e.g., $[\pm 18^\circ/\pm 62^\circ]_n$). This paper proposes a practical criterion for designing double-double laminates to resist buckling, under in-plane shear loadings, using off-the-shelf pre-oriented prepreg fibers (e.g., 0° , $\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 60^\circ$, and 90°). By combining these fibers with an optimal number of repetitions, it is possible to minimize warping and enhance the cost-effectiveness of double-double laminates.

Mathematical modeling and homogenization

As discussed by Kassapoglou,¹⁸ the buckling analysis of composite plates and panels is a critical issue in the aeronautical industry. Key structural components such as wings and fuselages are particularly susceptible to buckling. Mittelstedt¹⁹ highlights the significance of shear loads on reinforced panels and plates in

commercial airplane fuselages. Furthermore, with commercial airlines under increasing pressure to enhance energy efficiency, the post-buckling concept for panels and plates has gained prominence as a strategy to reduce weight while maintaining safety factors.

Buckling and bending analysis of non-traditional laminates has been explored by various researchers since the pioneering work of Lagace et al.²⁰ and Qatu and Leissa.²¹ Moreover, Lagace et al.²⁰ stated that, in general, non-traditional laminates do not exhibit classical bifurcation buckling behavior. The bending-stretching coupling, which is "natural" in such laminates causes normal out-of-plane displacements simultaneously with the application of the load. However, as discussed by Vermes et al.,² as the number of repetitions (rT) increases, the $[\mathbf{B}]$, for homogenized double-double laminates, be likely near zero (see appendix 1). Therefore, double-double laminates can be considered a special class of non-traditional laminate where bifurcation buckling behavior can exist.

As commented by Wang et al.,⁶ the constitutive equation of a composite laminate is calculated as an integral resultant along the laminate,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} \quad (1)$$

where \mathbf{N} and \mathbf{M} are the force and moment resultants, respectively. \mathbf{A} , \mathbf{D} , and \mathbf{B} matrices are the extensional, bending, and coupling material stiffness matrices, respectively. $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ and $\boldsymbol{\kappa}$ are the mid-plane strains and curvatures, respectively.

The concept of homogenization was introduced to treat non-traditional laminates as equivalent symmetric laminates. The strategy proposed by Tsai and Melo,¹¹ normalized the stiffness matrices, that is extensional $[\mathbf{A}]$, coupling $[\mathbf{B}]$, and bending $[\mathbf{D}]$ by the laminate total thickness. Differently from Tsai and Melo,¹¹ this research introduced the trace of the plane stress stiffness matrix as a material property¹² (Tsai's modulus) associated to the Master-Ply concept²² as a way of making these matrices, that is \mathbf{ABD} , non-dimensional matrices.

The Tsai's modulus¹¹ is defined as,

$$I_q = [Q_{11}] + [Q_{22}] + 2[Q_{66}] \quad (2)$$

where the plane stress stiffness matrix for a unidirectional ply component is listed, by Kollar and Springer²³ as

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (3)$$

where E_1 is the Young's modulus at longitudinal direction, while E_2 represents the Young's modulus at transverse direction. G_{12} stands for the shear modulus at 1-2 plane, while ν_{12} is the Poisson ratio at 1-2 plane and ν_{21} defines the Poisson's ratio at 2-1 plane.

The proposed non-dimensional design approach for off-the-shelf carbon/epoxy double-double laminates has its foundation in four pillars, that is Tsai's modulus,¹¹ the master-ply,²² the D_{22}^* maximization criterion²⁴ and the transformation matrices proposed by Huang and Qiao.²⁵

The master-ply approach developed by Melo and Tsai²⁶ for carbon/epoxy laminates can be applied as a design strategy for off-the-shelf double-double laminates. The master-ply plane stiffness matrix was experimentally obtained by Tsai and Melo¹¹ for carbon/epoxy prepregs. The master ply values employed in this model are an average of the 10 types of carbon/epoxy studied by Tsai and Melo.¹¹ The master-ply plane stiffness matrix for carbon/epoxy laminates prepregs can be expressed as,

$$[Q]^{MP} = \begin{bmatrix} 0.8849 & 0.0167 & 0 \\ 0.0167 & 0.0525 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0313 \end{bmatrix} \quad (4)$$

As discussed by Tsai et al.,⁷ if all components of the Master-ply plane stiffness matrix is multiplied by the Tsai's modulus, the resulting matrix will be the same as the traditional²⁷ formulation employed for calculating $[Q]$.

The stiffness matrices, based on the Master-Ply approach, can be defined as,

$$A_{ij}^{MP} = \sum_{k=1}^n (Q_{ij}^{MP})_k (h_k - h_{k-1}) \quad (5)$$

$$B_{ij}^{MP} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (q_{ij}^{MP})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (6)$$

$$D_{ij}^{MP} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij}^{MP})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (7)$$

where Q_{ij}^{MP} is the component at the i th row and j th column of the material stiffness matrix based on the Master-Ply approach at k th ply. The total number of plies is represented by n . For DD laminates n is equal to the number of repetitions multiplied by 4 ($n = rT^*4$).

As double-double laminates are non-traditional laminates, the transformation matrices proposed by Huang and Qiao²⁵ must be applied,

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{*,MP} & A_{12}^{*,MP} & A_{16}^{*,MP} \\ A_{12}^{*,MP} & A_{22}^{*,MP} & A_{26}^{*,MP} \\ A_{16}^{*,MP} & A_{26}^{*,MP} & A_{66}^{*,MP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{MP} & A_{12}^{MP} & A_{16}^{MP} \\ A_{12}^{MP} & A_{22}^{MP} & A_{26}^{MP} \\ A_{16}^{MP} & A_{26}^{MP} & A_{66}^{MP} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} B_{11}^{*,MP} & B_{12}^{*,MP} & B_{16}^{*,MP} \\ B_{12}^{*,MP} & B_{22}^{*,MP} & B_{26}^{*,MP} \\ B_{16}^{*,MP} & B_{26}^{*,MP} & B_{66}^{*,MP} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_{11}^{MP} & A_{12}^{MP} & A_{16}^{MP} \\ A_{12}^{MP} & A_{22}^{MP} & A_{26}^{MP} \\ A_{16}^{MP} & A_{26}^{MP} & A_{66}^{MP} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{11}^{MP} & B_{12}^{MP} & B_{16}^{MP} \\ B_{12}^{MP} & B_{22}^{MP} & B_{26}^{MP} \\ B_{16}^{MP} & B_{26}^{MP} & B_{66}^{MP} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} D_{11}^{*,MP} & D_{12}^{*,MP} & D_{16}^{*,MP} \\ D_{12}^{*,MP} & D_{22}^{*,MP} & D_{26}^{*,MP} \\ D_{16}^{*,MP} & D_{26}^{*,MP} & D_{66}^{*,MP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^{MP} & D_{12}^{MP} & D_{16}^{MP} \\ D_{12}^{MP} & D_{22}^{MP} & D_{26}^{MP} \\ D_{16}^{MP} & D_{26}^{MP} & D_{66}^{MP} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{11}^{MP} & B_{12}^{MP} & B_{16}^{MP} \\ B_{12}^{MP} & B_{22}^{MP} & B_{26}^{MP} \\ B_{16}^{MP} & B_{26}^{MP} & B_{66}^{MP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{MP} & A_{12}^{MP} & A_{16}^{MP} \\ A_{12}^{MP} & A_{22}^{MP} & A_{26}^{MP} \\ A_{16}^{MP} & A_{26}^{MP} & A_{66}^{MP} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{11}^{MP} & B_{12}^{MP} & B_{16}^{MP} \\ B_{12}^{MP} & B_{22}^{MP} & B_{26}^{MP} \\ B_{16}^{MP} & B_{26}^{MP} & B_{66}^{MP} \end{bmatrix}$$

where Master-Ply transformed stiffness matrices are represented by $[\mathbf{ABD}]^{*,MP}$, and the Master-ply stiffness matrices are described by $[\mathbf{ABD}]^{MP}$.

The transformed $[\mathbf{ABD}]^{*,MP}$ matrices based on Master-Ply approach can be reverted to the "traditional" transformed $[\mathbf{ABD}]$ by applying the following equations:

$$A_{ij}^* = \frac{A_{ij}^{*,MP}}{I_q}; B_{ij}^* = B_{ij}^{*,MP}; D_{ij}^* = I_q D_{ij}^{*,MP} \quad (9)$$

where $A_{ij}^*, B_{ij}^*, D_{ij}^*$ represent the traditional transformed stiffness matrix, that is extensional, coupling and bending, respectively. I_q is the Tsai modulus, while $A_{ij}^{*,MP}, B_{ij}^{*,MP}, D_{ij}^{*,MP}$ describe the transformed Master-ply stiffness matrix components, that is extensional, coupling and bending, respectively.

Equation (8), transformation matrices associated to the Master Ply approach (Equation (4)) makes the coupling bending-stretching $[\mathbf{B}^*]$ near to zero (see appendix 1), which means that the pseudo-buckling condition listed by Lagace et al²⁰ does not hold. Therefore, homogenized double-double laminates can exhibit bifurcation buckling behavior.

The non-dimensional design approach, for carbon/epoxy laminates, can be implemented following a simple procedure. This process can be described as,

1st: Calculate the Tsai's modulus based on the unidirectional ply mechanical properties;

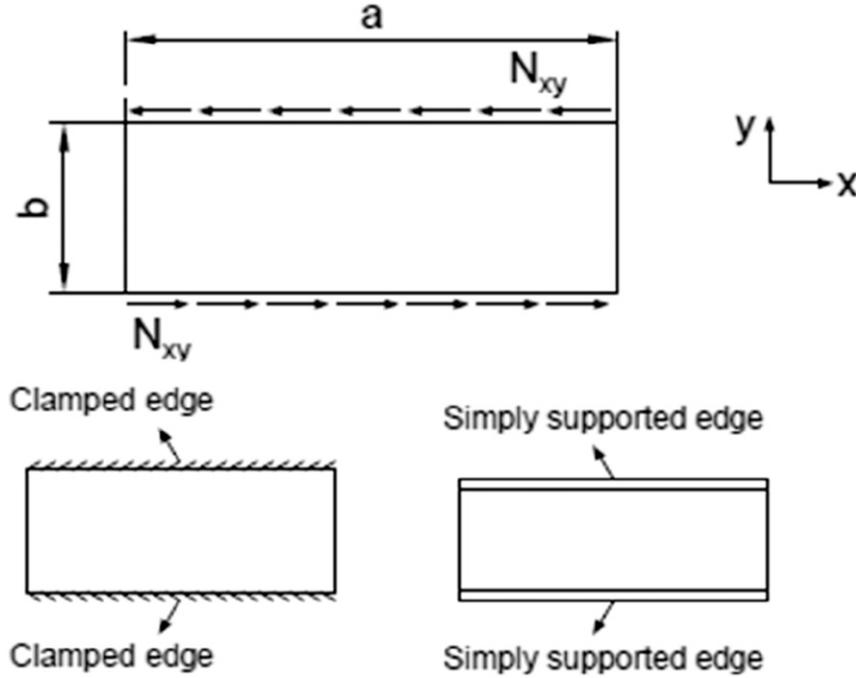


Figure 1. Applied load and boundary conditions.

- 2nd: Use the master-ply plane stiffness matrix to calculate $[A^{MP}]$, $[B^{MP}]$ and $[D^{MP}]$ matrices;
- 3rd: Calculate the transformed matrices $[A^{*,MP}]$, $[B^{*,MP}]$ and $[D^{*,MP}]$;
- 4th: Calculate the traditional bending stiffness matrix component $[D^*]$;
- 5th: Calculate the buckling loads.

Before defining the governing equations for the buckling analysis of double-double homogenized laminates, certain conditions must be clarified.

- A. It is assumed that $[B^*] \approx 0$, $A_{16}^* \approx A_{26}^* \approx 0$ and $D_{16}^* \approx D_{26}^* \approx 0$ for homogenized $[\pm\Psi/\pm\Phi]_{rT}$, where $rT \geq 4$.
- B. As this research focuses on homogenized laminates, the applied forces are considered to act on the neutral plane. Chan and Syed²⁸ defined the neutral plane based on a ratio $-(B_{11}^*/D_{11}^*)$ as $B_{11}^* \rightarrow 0$, the neutral plane for a double-double homogenized laminate is located at a distance of half the laminate thickness from the top surface. The superscript '0' denotes the neutral plane.
- C. Following Mittelsted et al²⁹ assumption, the rectangular plate (Figure 1) is assumed to have an infinite length ($a \rightarrow \infty$). This assumption is realistic because the length-to-width ratio in aerospace engineering is typically around 3.5.
- D. Based on the assumptions listed above, it is possible to conclude that the bifurcation buckling behavior

exists for homogenized double-double laminated plates.

- E. The orthogonal reference system (x, y, z) with associated displacements (u, v, w) described Kassapoglou¹⁸ was employed.

As discussed by Mittelstedt et al.,²⁹ although $D_{16}^* = D_{26}^* = 0$ is strictly accurate only for cross-ply laminates, this assumption is reasonable for many practically relevant laminates, such as those used in aerospace engineering. In these applications, the bending-twisting coupling terms (D_{16}^*, D_{26}^*) do not completely vanish but have only a minor influence on the overall structural response of a laminated plate.

The governing equations for a double-double (DD) plate under shear loading follow the same form as the fourth-order homogeneous partial differential equation described by Kassapoglou.¹⁸

$$D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (10)$$

An exact solution for equation (10) is, unfortunately, not feasible. Therefore, an energy formulation is adopted. For double-double (DD) laminates, the concept of elastic potential π_p is considered. It is well established that, for a buckled infinite plate,²⁹ the π_p comprises the strain energy U

and the work done by the applied forces Ω , ($\pi_p = U + \Omega$). For a buckled DD infinite plate under shear loading, U and Ω can be expressed as follows:

$$U = \int_0^b \int_0^{\lambda_1} \left[\frac{D_{11}^*}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{D_{22}^*}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + D_{12}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66}^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (11)$$

$$\Omega = -N_{xy}^0 \int_0^b \int_0^{\lambda_1} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (12)$$

As the DD plate is infinite, λ_1 is the length of a buckling halfwave.²⁹

$$w_{cr} = W \sin \left[\frac{\pi}{\lambda_1} (x - \lambda_2 y) \right] \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \quad (15)$$

where W is the buckling amplitude, and λ_1 and λ_2 represent the length of a buckling half-wave and the skewness of the buckling pattern, respectively.

By inserting equation (14) into the potential formulation, as expressed in equations (10), and (11), and evaluating the buckling condition, the following result can be obtained:

$$\frac{\partial}{\partial W} (U + \Omega) = 0 \quad (16)$$

Based on the previously listed equations, Mittelstedt et al.²⁹ proposed a closed-form equation, which has been adapted for double-double (DD) laminates as follows:

$$N_{xy,cr}^0 = -\pi^2 \frac{D_{11}^* b^4 + D_{22}^* (\lambda_1^4 + 6\lambda_1^2 \lambda_2^2 b^4) + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 b^2) b^2}{2\lambda_1^2 \lambda_2 b^4} \quad (17)$$

To derive a closed-form analytical expression for the bifurcation buckling load, $N_{xy,cr}^0$, an appropriate shape function for the buckling mode, w_{cr} , must be defined. This shape function is then substituted into equations (11), and (12). By evaluating the buckling condition, the analytical expression for $N_{xy,cr}^0$ ³⁰ can be obtained.

Plates with simply supported (SS) longitudinal edges

The boundary conditions for a plate with simply supported longitudinal edges can be described as,

$$w(y=0) = 0, w(y=b) = 0 \quad (13)$$

The critical value is the minimum value that satisfies two key requirements for the bifurcation buckling load $N_{xy,cr}^0$:

$$\frac{\partial N_{xy,cr}^0}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \frac{\partial N_{xy,cr}^0}{\partial \lambda_2} = 0 \quad (18)$$

The estimation of equation (18) produces two equations:

$$\lambda_1 = b \sqrt[4]{\frac{D_{11}^* + D_{22}^* \lambda_2^4 + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) \lambda_2^2}{D_{22}^*}} \quad (19)$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{\lambda_3 - 3D_{22}^* \lambda_1^2 - (D_{12}^* + 2D_{66}^*) b^2}}{\sqrt{3D_{22}^*} b} \quad (20)$$

with

$$\lambda_3 = \sqrt{12D_{22}^* \lambda_1^2 [D_{22}^* \lambda_1^2 + (D_{12}^* + 2D_{66}^*) b^2]} + [3D_{11}^* D_{22}^* + (D_{12}^* + 2D_{66}^*)^2] b^4$$

The boundary condition at unloaded edges of the SS plate regarding the bending moment M_{yy}^0 can be written as,

$$\begin{aligned} M_{yy}^0(y=0) &= -D_{22}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0, M_{yy}^0(y=b) \\ &= -D_{22}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Mittelstedt et al.²⁹ proposed a bifurcation buckling mode (w_{cr}) for an infinite plate with simply supported longitudinal edges under in-plane shear loading as,

Mittelstedt et al.²⁹ proposed an iterative procedure for solving equations (19), and (20). The initial guess for λ_1 is set equal to b . Based on the authors' experience, this iterative approach typically converges within 5–6 iterations. A reasonable convergence criterion ensures accurate results with minimal computational effort. ($\lambda_{1,i} \approx \lambda_{1,i-1}$, $\lambda_{2,i} \approx \lambda_{2,i-1}$) is around 10^{-3} . Once the convergence is reached, the λ_1 and λ_2 values are plugged into equation (17).

Plates with fully clamped (CC) longitudinal edges

The boundary conditions for a plate with simply supported longitudinal edges can be described as,

$$w(y=0) = 0, w(y=b) = 0 \quad (21)$$

For plates with clamped longitudinal edges, the edge rotations must be zero;

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \quad (22)$$

Mittelstedt et al²⁹ proposed a bifurcation buckling mode (w_{cr}) for an infinite plate with clamped longitudinal edges under in-plane shear load as,

$$w_{cr} = \frac{W}{2} \sin \left[\frac{\pi}{\lambda_1} (x - \lambda_2 y) \right] \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \right] \quad (23)$$

The critical buckling load for an infinite plate with clamped-clamped (CC) boundary conditions under shear loading can be determined by substituting equation (23) into equations (11), and (12) and evaluating the buckling condition (Equation (16)). The explicit equation for the critical buckling load ($N_{xy,cr}^0$) is given as: as,

$$N_{xy,cr}^0 = -\pi^2 \frac{3D_{11}^* b^4 + D_{22}^* (16\lambda_1^4 + 24\lambda_1^2 \lambda_2^2 b^4 + 3\lambda_2^4 b^4) + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) (4\lambda_1^2 + 3\lambda_2^2 b^2) b^2}{6\lambda_1^2 \lambda_2 b^4} \quad (24)$$

The requirements of equation (18) must be satisfied. Therefore, the following equations are valid,

$$\lambda_1 = \frac{b}{2} \sqrt[4]{3 \frac{D_{11}^* + D_{22}^* \lambda_2^4 + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) \lambda_2^2}{D_{22}^*}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{\lambda_3 - 4D_{22}^* \lambda_1^2 - (D_{12}^* + 2D_{66}^*) b^2}}{\sqrt{3D_{22}^*} b} \quad (25)$$

with

$$\lambda_3 = \sqrt{16D_{22}^* [2D_{22}^* \lambda_1^2 + (D_{12}^* + 2D_{66}^*) b^2] \lambda_1^2 + [3D_{11}^* D_{22}^* + (D_{12}^* + 2D_{66}^*)^2] b^4}$$

The same iterative procedure described earlier can be applied to calculate λ_1 and λ_2 which are then substituted into equation (24) to determine $N_{xy,cr}^0$. Both solutions are accurate for long plates, specifically those with a length-to-width ratio greater than 3.5, a condition commonly met in aerospace engineering applications.^{18,29} As previously noted,^{11,31} the Master-Ply approach assumes the use of carbon/epoxy prepregs. Therefore, the model is constrained by these two conditions.

Off-the-shelf roadmap design procedure for double-double laminates

The concept of off-the-shelf laminate composite design takes into consideration a combination of unidirectional carbon/epoxy prepregs (0° and 90°) and non-crimp fabrics carbon/epoxy prepregs ($\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 60^\circ$). The double-double configuration selected is the one where angles are balanced within each biaxial product,⁷ that is $[\pm\Phi/\pm\Psi]_{rT}$, where rT is the number of repetitions of the sub-laminate $[\pm\Phi/\pm\Psi]$. Moreover, Φ and Ψ are selected from the following list: 0° , $\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 60^\circ$, and 90° . Before defining the roadmap algorithm for designing off-the-shelf DD laminates some practical restrictions must be imposed. A typical carbon/epoxy prepreg composite has a single ply thickness of 0.125 mm¹⁶. According to Kollar and Springer,²³ the minimum thickness for a QUAD laminate is around 0.5–0.6 mm. By considering the same minimum thickness for the DD laminate, the minimum number of repetitions should be equals to one. However, no repetitions, that is $rT = 1$, will lead to warping due to coupling bending-

twisting as D_{16} and D_{26} are non-null and large enough when compared to D_{11} , D_{12} , D_{22} , and D_{66} .

The roadmap design algorithm can be defined as in Figure 2. The sub-laminate selection criterion can be described by two nested loops. A description of the selection procedure in pseudo-language is shown in Appendix 4.

Once the sub-laminates were created, the algorithm described in Figure 2 is straight forward. Note that unidirectional configurations, that is $[\pm 0/\pm 0]$, $[\pm 90/\pm 90]$, are not considered DD and must be eliminated.

The optimization/maximization criterion is based on Whitney's²⁴ D_{22} condition. For DD laminates, the optimum solution is obtained when D_{22}^* is maximized.

Data analysis

The algorithm described in Figure 2 is easily implemented in programming platforms, for example MATLAB. Considering the off-the-shelf angle ply orientation, the

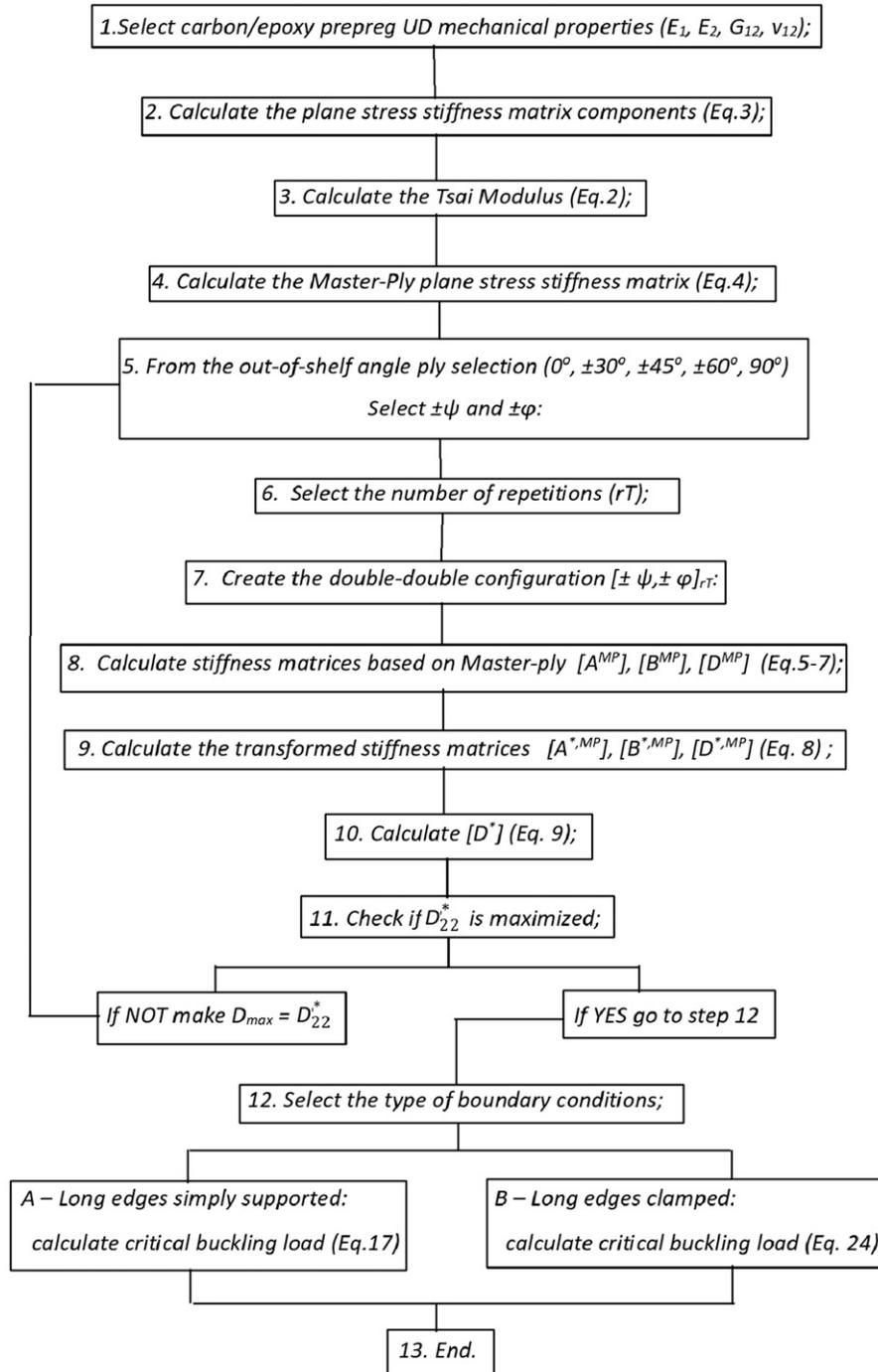


Figure 2. Roadmap algorithm.

algorithm will provide 23 combinations. However, as discussed by Kollar and Springer,²³ considering stiffness, some configurations leads to same stiffness. Table 1 summarized the double-double configurations where $\pm\Psi$ and $\pm\Phi$ were permuted. From the composite mechanics²³ point of view the permutation does not affect the $[D^*]$. Only 13 configurations have distinct $[D^*]$ (see Table 1).

For double-double laminates, it was postulated by Tsai¹ that as the number of repetitions increased the warping effect is reduced. To be able to understand how the number of repetitions and for conciseness, let's consider a carbon/epoxy UD prepreg³² with mechanical properties listed in Table 2, and a double-double configuration, that is $[\pm 45/\pm 60]_{rT}$, where rT is defined as 1, 2, 4, 8 (see Table 3).

Table 1. Results with distinct configurations.

$\pm\psi/\pm\Phi$						
$[\pm 0/\pm 30]$	$[\pm 0/\pm 60]$	$[\pm 30/\pm 30]$	$[\pm 30/\pm 60]$	$[\pm 45/\pm 45]$	$[\pm 45/\pm 90]$	$[\pm 60/\pm 90]$
$[\pm 0/\pm 45]$	$[\pm 0/\pm 90]$	$[\pm 30/\pm 45]$	$[\pm 30/\pm 90]$	$[\pm 45/\pm 60]$	$[\pm 60/\pm 60]$	-----

Table 2. Carbon/epoxy UD prepreg mechanical properties.³²

Properties	Values
E_1	209 GPa
$E_2 = E_3$	9.45 GPa
$G_{12} = G_{31}$	5.5 GPa
G_{23}	3.63 GPa
$\nu_{12} = \nu_{31}$	0.27
ν_{23}	0.40
h	0.125 mm

Table 3. Bending stiffness matrices, for $[\pm 45/\pm 60]_{rT}$, as a function of the number of repetitions.

$[D^*]$ N.m (for $rT = 1$)	$[D^*]$ N.m (for $rT = 2$)
$\begin{bmatrix} 0.3333 & 0.2851 & 0.0480 \\ 0.2851 & 0.6453 & -0.0420 \\ 0.0480 & -0.0420 & 0.4073 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.4616 & 3.2613 & 0.0960 \\ 3.2613 & 7.0792 & -0.0840 \\ 0.0960 & -0.0840 & 3.7157 \end{bmatrix}$
$[D^*]$ N.m (for $rT = 4$)	$[D^*]$ N.m (for $rT = 8$)
$\begin{bmatrix} 29.2829 & 28.0509 & 0.1920 \\ 28.0509 & 60.4676 & -0.1680 \\ 0.1920 & -0.1680 & 30.6400 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 237.4444 & 228.3283 & 0.3839 \\ 228.3283 & 491.4093 & -0.3360 \\ 0.3839 & -0.3360 & 246.9486 \end{bmatrix}$

By analyzing Table 3, a clear pattern emerges: doubling the thickness results in an increase of approximately one order of magnitude in D_{11}^* , D_{12}^* , D_{22}^* , D_{66}^* , while D_{16}^* , D_{26}^* only doubles. Since the warping effect is influenced by D_{16}^* , D_{26}^* , the coupling between bending and twisting is significantly reduced with an increase in repetitions. Although the condition $D_{16}^* = D_{26}^* = 0$ holds exactly only for cross-ply laminates, Mittelstedt et al²⁹ argue that this assumption is reasonable for many practical laminates, particularly in aerospace engineering. In these cases, the bending-twisting coupling terms D_{16}^* , D_{26}^* do not entirely vanish but often play a minor role in the overall structural response of laminated plates.

For the double-double laminate shown in Table 3, the bending stiffness matrix components (D_{11}^* , D_{12}^* , D_{22}^* , D_{66}^*) are at least three orders of magnitude higher than coupling components (D_{16}^* , D_{26}^*) for the laminate with eight repetitions. These results align with experimental data.⁷ From these findings, we can infer that for homogenized double-double laminates with a large number of repetitions ($rT \geq 4$), the bending-twist coupling components are negligible. Furthermore, as the coupling bending-stretching

transformed matrix approaches zero ($\sim 10^{-15}$) (see appendix 1), bifurcation buckling behavior may occur. This assumption was experimentally confirmed by Vescovini et al.,¹⁶ who subjected double-double panels to compressive loads and observed buckling.

The next step is to compare the data from the proposed off-the-shelf approach and the Master-Ply based equations for shear to the finite element analysis (FEA). The finite element analysis (FEA) was performed using four-node shell elements (Shell 181),³³ with six degrees of freedom at each node: translations in the x , y , and z directions, and rotations about the x , y , and z axes. The analysis was conducted in ANSYS Workbench 2023 R1. The model employed a structured mesh consisting of 1312 nodes and 1215 elements.

For the long-edge simply supported (SS) models, the essential boundary conditions were defined as follows: displacement in the z -direction was constrained along all edges; rotations about the xxx -axis were constrained along the short edges, and rotations about the y -axis were constrained along the long edges. To prevent rigid body motion, displacement in the x - and y -directions was constrained at a central node, while a side node on a short edge had its y -direction displacement constrained.

The natural boundary conditions were represented by unit pressure line loads (1 N/m) applied along the long edges parallel to the longitudinal axis (x -axis). The upper long edge was loaded with +1 N/m, while the lower long edge was loaded with -1 N/m. Similarly, for the short edges, the right edge was loaded with a pressure line parallel to the transverse axis (y -axis) of +1 N/m, while the left edge was loaded with -1 N/m. For the long-edge clamped (CC) models, similar boundary conditions were applied. However, along the long edges, both rotation and displacement were constrained in all three directions.

The finite element model was validated against the results described in Kollar and Springer,²³ calculation of buckling force of a rectangular plate under in-plane shear loading with the long edges clamped and the two small edges simply supported. Table 4 describes the geometry and boundary conditions employed.

The finite element model follows the same characteristics as described early.

Kollar and Springer²³ solution, mode 1, for the validation problem is 77.15 KN/m while the finite element analysis (FEA) result is 78.83. The difference between the analytical solution²³ and the FEA is around 2.17%. Figure 3 shows the FEA solution for mode 1.

To evaluate the accuracy of the proposed model, we will consider a double-double (DD) plate with a length of 810 mm and a width of 150 mm under in-plane shear loading. The length-to-width ratio is greater than 5, allowing the plate to be considered a long plate. The stacking

sequences are those listed in Table 1, with four repetitions. The material properties are outlined in Table 2. Two boundary conditions are considered: simply supported (along the long edges) and clamped (along the long edges), as described in previous paragraphs.

As shown in Table 5, the proposed model aligns well with the finite element analysis solutions. The benchmark QUAD, that is $[0_3/\pm 45_2/90]_s$, was selected considering their mechanical properties. As discussed by Tsai,¹ the 38/50/12 percentage ratio between $0/\pm 45/90$ fiber orientation makes this type of laminate largely used by the composite community, due to their good mechanical properties.⁷ Moreover, the shear buckling load for the benchmark QUAD selected, that is $[0_3/\pm 45_2/90]_s$, was surpassed by all cases but case #1. The $\pm 0/\pm 30$ fiber orientation makes the bending stiffness matrix D_{22}^* component smaller than the one from the benchmark selection (see Appendixes 2 and 3).

Table 4. The finite element method validation model properties.

Geometric Parameters				
Length (mm)		Width (mm)		
700		200		
Stacking sequence				
$[\pm 45_2/0_6]_s$				
Ply mechanical properties				
E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	t_{ply} (mm)
148	9.65	4.55	0.30	0.10

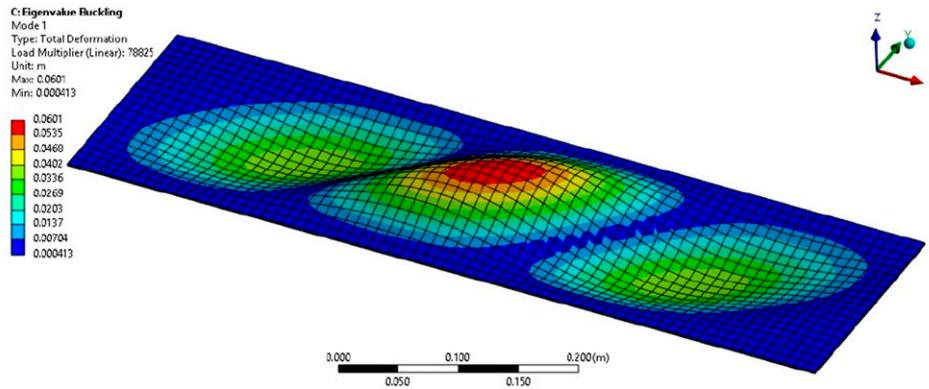


Figure 3. FEM solution, mode I, validation case.

Table 5. Shear buckling critical load ($N_{xy,cr}$) for different DD laminates.

Case ID	Stacking Sequence	Long Edge SS				Long Edge CC			
		Model (KN/m)	FEA (KN/m)	Abs. Diff (%)	Half-wave (m)	Model (KN/m)	FEA (KN/m)	Abs. Diff (%)	Half-wave (m)
BM*	$[0_3/\pm 45_2/90]_s$	± 56.05	± 52.67	6.03	0.29	± 97.89	± 89.90	8.16	0.19
1	$[\pm 0/\pm 30]_4$	± 56.20	± 54.91	2.29	0.33	± 96.64	± 89.26	7.63	0.22
2	$[\pm 0/\pm 45]_4$	± 86.59	± 86.93	0.41	0.26	± 148.93	± 141.43	5.04	0.18
3	$[\pm 0/\pm 60]_4$	± 110.91	± 109.95	0.86	0.20	± 193.64	± 187.51	3.17	0.14
4	$[\pm 0/\pm 90]_4$	± 117.51	± 115.33	1.86	0.16	± 213.99	± 208.84	2.40	0.11
5	$[\pm 30/\pm 30]_4$	± 82.87	± 84.46	1.91	0.32	± 140.23	± 133.55	4.76	0.33
6	$[\pm 30/\pm 45]_4$	± 114.16	± 116.79	2.30	0.27	± 193.10	± 186.05	3.65	0.18
7	$[\pm 30/\pm 60]_4$	± 139.32	± 141.16	1.32	0.21	± 237.34	± 228.97	3.52	0.14
8	$[\pm 30/\pm 90]_4$	± 145.46	± 144.67	0.54	0.15	± 253.96	± 244.45	3.74	0.10
9	$[\pm 45/\pm 45]_4$	± 143.52	± 147.10	2.49	0.23	± 242.06	± 234.04	3.31	0.15
10	$[\pm 45/\pm 60]_4$	± 164.00	± 166.33	1.42	0.19	± 277.40	± 267.29	3.64	0.12
11	$[\pm 45/\pm 90]_4$	± 163.03	± 163.41	0.23	0.14	± 280.43	± 266.63	4.92	0.09
12	$[\pm 60/\pm 60]_4$	± 177.95	± 179.37	0.79	0.15	± 301.06	± 287.40	4.54	0.10
13	$[\pm 60/\pm 90]_4$	± 163.27	± 158.70	2.79	0.11	± 280.75	± 262.00	6.68	0.08

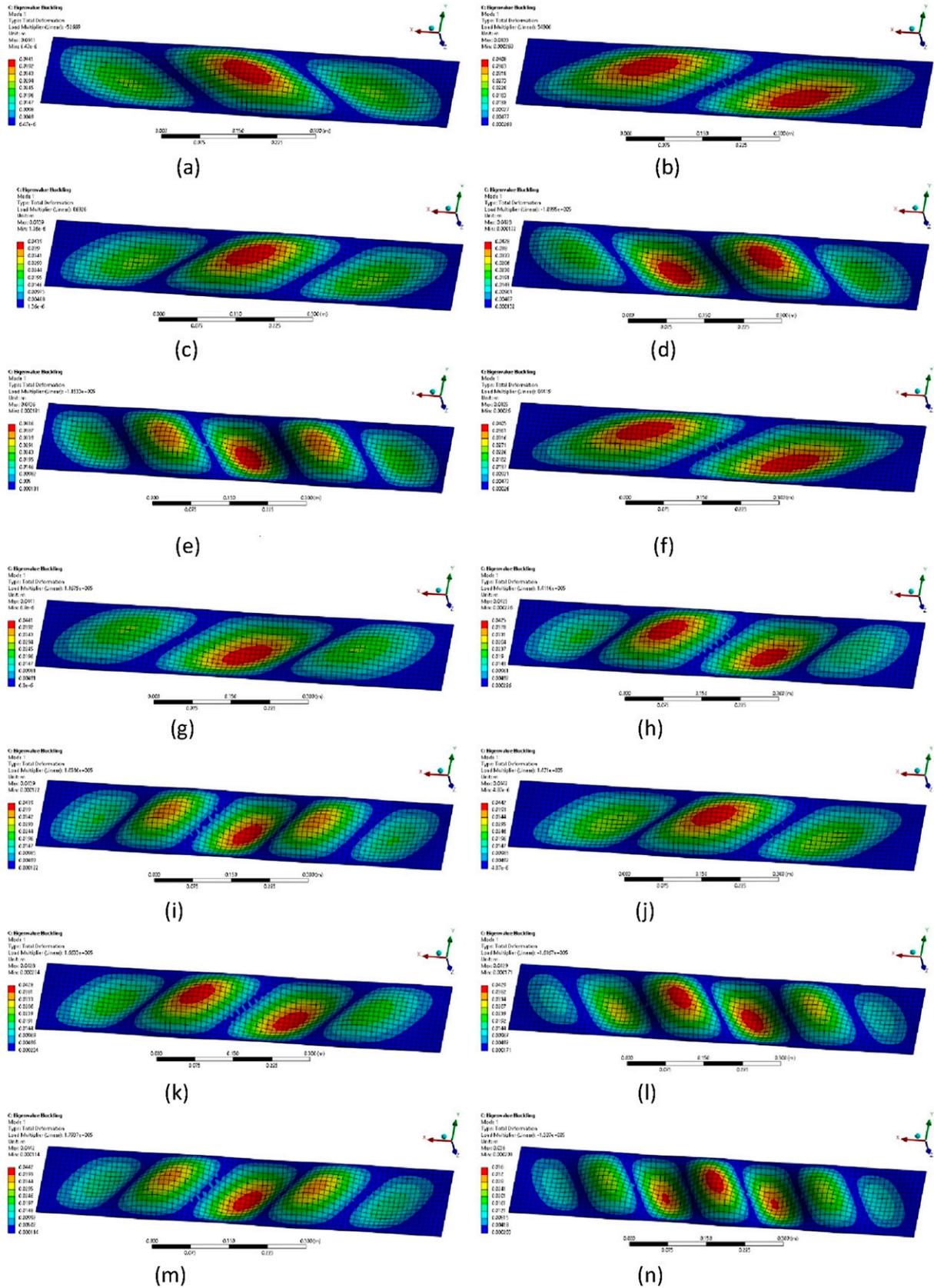


Figure 4. Critical buckling mode, SS boundary condition at long edge, for benchmark (a) and cases 1-13 (b-n).

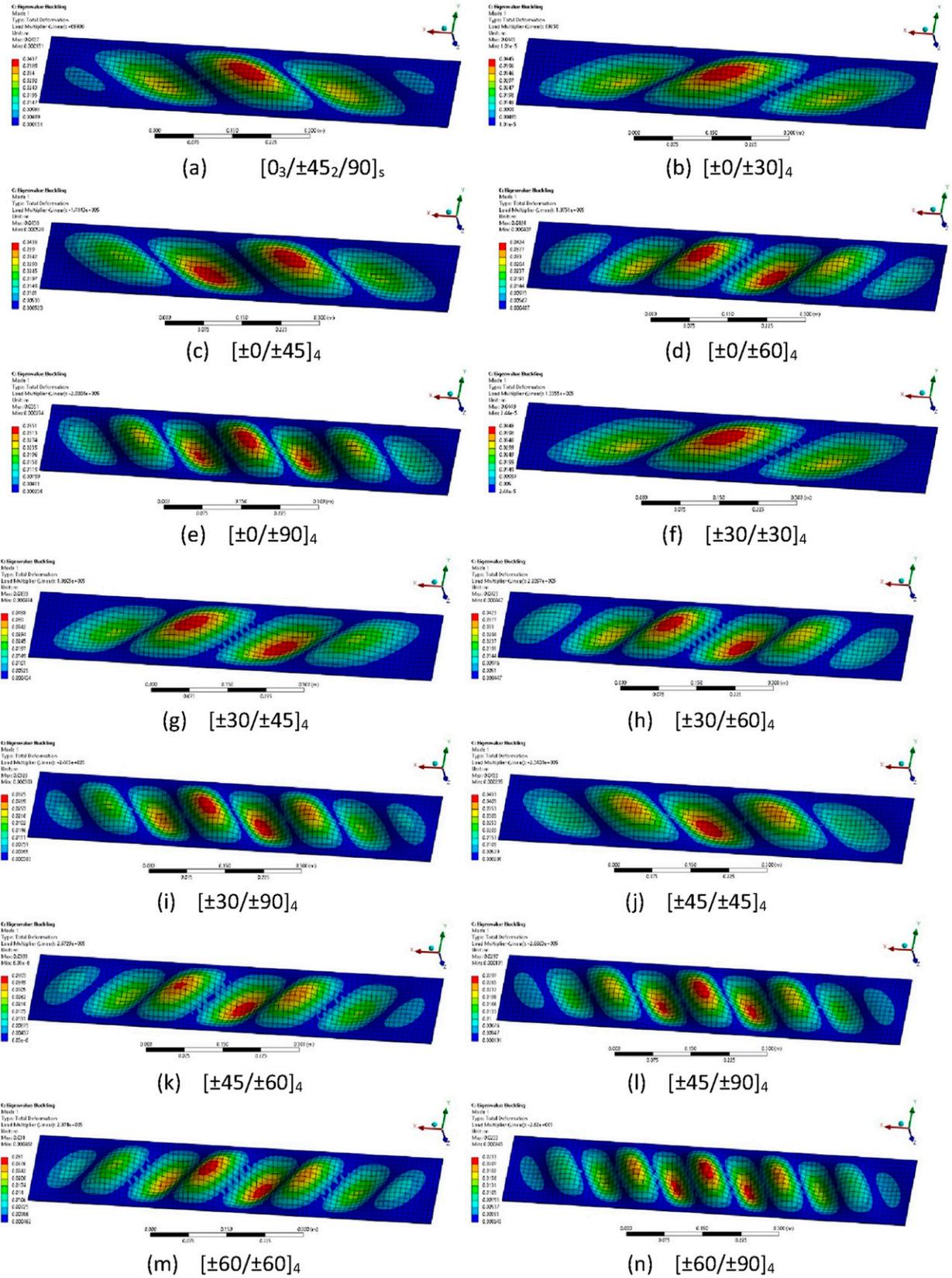


Figure 5. Critical buckling mode, CC boundary condition at long edge, for benchmark (a) and cases I-13 (b-n).

As commented by Whitney,²⁴ the D_{22}^* component is the most important bending stiffness component when in-plane shear loading is considered.

- Benchmark

The largest discrepancy between the proposed model and the FEA occurs for the clamped (CC) boundary condition along the long edge, around 8.2% for the benchmark condition. This difference can be attributed to two factors. First, the finite element analysis is based on a long but finite plate (810 mm × 150 mm), while the analytical solution considers an infinitely long plate. Another factor affecting the results is the imposition of clamped boundary conditions at the long edge.

The D_{22}^* criterion for $[\pm\Psi/\pm\Phi]_{rT}$ seems to be consistent with the critical buckling shear loading (see Table 4 and appendix 3). The only result in which the D_{22} criterion deviates is the $[\pm60/\pm90]_4$. The reason for this decrease in buckling load can be attributed to the decrease in D_{12}^* and D_{66}^* , when compared to $[\pm60/\pm60]_4$. However, the difference between the two configurations is around.

The buckling modes were investigated with consideration of the buckling half-wave. Figures 3 and 4 illustrate the critical buckling mode for each case studied, under simply supported (SS) and clamped (CC) conditions. The finite element solutions for the benchmark case and the $[\pm0/\pm30]_4$ case present close buckling loads for SS and CC configurations. However, due to the different stacking sequences and bending stiffness matrix components the buckling modes are different. As expected, the configurations with the largest critical buckling loads, $[\pm60/\pm60]_4$ and $[\pm45/\pm90]_4$, exhibit the smallest buckling half-waves, as shown in Table 4 and Figures 4 and 5.

As noted by Kassaplogou,¹⁸ the buckling loads are influenced by the applied boundary conditions. Buckling modes in composite plates depend primarily on two factors: bending stiffness and boundary conditions. As shown in Figure 5(L) (the long-edge clamped case), the half-wavelength is relatively small, approximately 0.09 m. For a composite plate with a length of around 0.8 m, the model predicts nine half-waves, which aligns with expectations.

Additionally, the highest out-of-plane displacement occurs at the plate's center, consistent with the findings of Mittelstedt.¹⁹ The alternating out-of-plane displacement directions (u_3), as described by Qiao and Huo,³⁴ are also evident in Figure 4(L). From a design perspective, and considering the bending stiffness criterion, the highest buckling load is achieved when buckling modes are characterized by small half-wavelengths.

Conclusions

A new strategy for designing double-double laminates to resist buckling under in-plane shear conditions has been

proposed. This approach integrates the off-the-shelf method for carbon/epoxy prepregs with the master-ply concept. The off-the-shelf method employs unidirectional prepregs (0° and 90°) and angle-ply fabrics ($\pm30^\circ$, $\pm45^\circ$, and 90°). By adopting this strategy, manufacturers can leverage the simplicity and effectiveness of the double-double configuration.

The proposed algorithm successfully identifies the optimized off-the-shelf double-double configuration with the highest shear buckling load, based on the D_{22}^* maximum value criterion for calculating the buckling loads of composite plates under in-plane shear.

From a design perspective, an increase in the number of repetitions of sub-laminates $[\pm\Psi/\pm\Phi]_{rT}$ reduces the bend-twist coupling effect (D_{16}^* , D_{26}^*). Meanwhile, the bending stiffness components (D_{11}^* , D_{22}^* , D_{12}^* , D_{66}^*) increase nearly tenfold when the thickness doubles. Double-double configurations with small angles, such as $[\pm0/\pm30]_4$, $[\pm30/\pm30]_4$, and $[\pm0/\pm45]_4$, exhibit the lowest critical buckling loads under in-plane shear among their peers. However, the model predictions for $[\pm0/\pm45]_4$ and $[\pm30/\pm30]_4$ exceed the benchmark case by 45.56% and 44.27%, respectively.

Since buckling loads and modes are influenced by boundary conditions, results for simply supported and clamped conditions differ. Nevertheless, the same trend is observed: an increase in angle orientation results in smaller half-wavelengths and, consequently, higher buckling loads. The best-performing double-double configuration, $[\pm60/\pm60]_4$, achieves a buckling load nearly two times higher ($\sim 185\%$).

The only configuration deviating from the D_{22}^* criterion for in-plane shear is $[\pm60/\pm90]_4$. This deviation occurs due to reductions in D_{12}^* and D_{66}^* , resulting in a critical buckling load 6.75% lower than that of $[\pm60/\pm60]_4$.

The strength of this non-dimensional design strategy lies in its simplicity, requiring only two parameters: Tsai's modulus and the number of repetitions.

Acknowledgments

The authors would like to express their appreciation to the UFMG's Mechanical Engineering Graduate Studies Program (PPGMEC) for the logistical support during the student's research time.

Declaration of conflicting interests

The author(s) declared no potential conflicts of interest with respect to the research, authorship, and/or publication of this article.

Funding

The author(s) disclosed receipt of the following financial support for the research, authorship, and/or publication of this article: This work was supported by the Specifically, the first author thanks the

Minas Gerais State Agency for Research and Development (FAPEMIG) for the scholarship provided under grant agreement (FAPEMIG-UFGM 5.24/2021), number 202. The second author acknowledges project funding from the Brazilian Research Council (CNPq) through grants (406040/2021-4) and (307385/2022-1). Both authors also express their gratitude for the financial support from the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) in Brazil under grant (001).

ORCID iD

Antonio F Avila  <https://orcid.org/0000-0003-4788-8943>

Data availability statement

Data is available upon a reasonable request to the corresponding author.

References

1. Tsai SW. Double–double: new family of composite laminates. *AIAA J* 2021; 59: 4293–4305.
2. Vermes B, Tsai SW, Massard T, et al. Design of laminates by a novel “double–double” layup. *Thin-Walled Struct* 2021; 165: 107954.
3. Garofano A, Sellitto A, Di Caprio F, et al. On the use of double-double design philosophy in the redesign of composite fuselage barrel frame components. *Polym Compos* 2024; 45: 4250–4265.
4. Kappel E. Double–Double laminates for aerospace applications — finding best laminates for given load sets. *Compos Part C Open Access* 2022; 8: 100244.
5. Zhang Z, Zhang Z, Di Caprio F, et al. Machine learning for accelerating the design process of double-double composite structures. *Compos Struct* 2022; 285: 115233.
6. Wang Y, Wang D, Zhong Y, et al. Topology optimization of Double-Double (DD) composite laminates considering stress control. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2023; 414: 116191.
7. Tsai SW, Falzon BG, Aravand A, et al. *Double – DOUBLE simplifying the design and manufacture of composite laminates*. 2nd ed. Belfast: JEC, 2023. DOI: [10.1012/97780981914350](https://doi.org/10.1012/97780981914350).
8. Vermes B, Tsai SW, Riccio A, et al. Application of the Tsai’s modulus and double-double concepts to the definition of a new affordable design approach for composite laminates. *Compos Struct* 2021; 259: 113246.
9. Kappel E. On the double-double laminate buckling optimum for the 18-panel ‘horse-shoe’ reference case. *J Compos Sci* 2024; 8: 77–115.
10. Arteiro A, Sharma N, Melo JDD, et al. A case for Tsai’s Modulus, an invariant-based approach to stiffness. *Compos Struct* 2020; 252: 112683.
11. Tsai SW and Melo JDD. An invariant-based theory of composites. *Compos Sci Technol* 2014; 100: 237–243.
12. Vignoli LL, Savi MA, Pacheco PMCL, et al. Theoretical justification of Tsai’s modulus based on micromechanical analysis. *Compos Sci Technol* 2023; 238: 110041.
13. Millen SLJ, Falzon BG and Aravand MA. Invariant based approaches in the design of composite laminates. *Compos Sci Technol* 2021; 202: 108526.
14. Dantas da Cunha R, Targino TG, Cardoso C, et al. Low velocity impact response of non-traditional double-double laminates. *J Compos Mater* 2023; 57: 1807–1817.
15. Vasconcelos TB, Alves JLC, Paiva da Costa Ferreira E, et al. Static and fatigue behavior of double-double glass/epoxy laminates. *J Compos Mater* 2024; 59: 119–133.
16. Vescovini A, Li CX, Paz Mendez J, et al. Post-buckling behavior and collapse of Double-Double composite single stringer specimens. *Compos Struct* 2024; 327: 117699.
17. Kappel E. Buckling of simply-supported rectangular Double–Double laminates. *Compos Part C Open Access* 2023; 11: 100364.
18. Kassapoglou C. Epub ahead of print 2013. In: *Design and analysis of composite structures: with applications to aerospace structures*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 2013. DOI: [10.1002/9780470972700](https://doi.org/10.1002/9780470972700).
19. Mittelstedt C. Buckling and post-buckling of thin-walled composite laminated beams — a review of engineering analysis methods. *Appl Mech Rev* 2020; 72: 1–36.
20. Lagace PA, Jensen DW and Finch DC. Buckling of unsymmetric composite laminates. *Compos Struct* 1986; 5: 101–123.
21. Qatu MS and Leissa AW. Buckling or transverse deflections of unsymmetrically laminated plates subjected to in-plane loads. *AIAA J* 1993; 31: 189–194.
22. Tsai SW, Arteiro A and Melo JDD. A trace-based approach to design for manufacturing of composite laminates. *J Reinf Plast Compos* 2016; 35: 589–600.
23. Kollar LP and Springer GS. Epub ahead of print 2003. In: *Mechanics of composite structures*. 1st ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. DOI: [10.1017/9780511547140](https://doi.org/10.1017/9780511547140).
24. Whitney JM. *Structural analysis of laminated anisotropic plates*. 1st ed. Lancaster: Technomic Publishing Company, 1987. DOI: [10.12783/877625182](https://doi.org/10.12783/877625182).
25. Huang S and Qiao P. A novel semi-analytical method for buckling analysis of stiffened laminated composite plates. *Thin-Walled Struct* 2020; 148: 106575.
26. Melo JDD, Bi J and Tsai SW. A novel invariant-based design approach to carbon fiber reinforced laminates. *Compos Struct* 2017; 159: 44–52.
27. Schilling JC, Atamann D, Voges J, et al. Local buckling of omega-stringer-stiffened composite panels under compression–shear interaction. *Thin-Walled Struct* 2022; 180: 109838.
28. Chan WS and Syed KA. Determination of centroid and shear center locations of composite box beams. In: Banks W and Visnom M (eds). *ICCM International Conferences*

on Composite Materials 17. Edingburg, UK: Institute of Materials Mineral and Mining, 2009, pp. 1–9.

29. Mittelstedt C, Erdmann H and Schröder KU. Postbuckling of imperfect rectangular composite plates under inplane shear closed-form approximate solutions. *Arch Appl Mech* 2011; 81: 1409–1426.
30. Schreiber P and Mittelstedt C. Closed-form buckling analysis of unsymmetrically laminated plates.pdf. *Proc Appl Math Mech* 2022; 22: 1–6.
31. Zhao K, Kennedy D, Miravete A, et al. Defining the design space for double–double laminates by considering homogenization criterion. *AIAA J* 2023; 61: 3190–3203.
32. Singh V and Rastogi V. Design and static analysis of mono composite leaf spring made of various types of composite materials using finite element method. *IOP Conf Ser Mater Sci Eng* 2021; 1033: 012041.
33. Johri N, Agarwal G, Mishra RK, et al. FEM analysis of polymeric hybrid composites. *Mater Today Proc* 2022; 57: 383–390.
34. Qiao P and Huo X. Explicit local buckling analysis of rotationally-restrained orthotropic plates under uniform shear. *Compos Struct* 2011; 93: 2785–2794.

Appendix

Appendix 1: The repetition effect into $[A^*]$, $[B^*]$ and $[D^*]$

rT = 1 (one repetition)

$$A^* = \begin{bmatrix} 0.8096 & -0.3765 & 0 \\ -0.3765 & 0.3909 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4309 \end{bmatrix} x10^{-7} \frac{N}{m}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0.4033 & -0.0572 & 0 \\ -0.0572 & -0.3137 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0655 \end{bmatrix} x10^{-15} N$$

$$D^* = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.2851 & 0.0480 \\ 0.2851 & 0.6453 & -0.0420 \\ 0.0480 & -0.0420 & 0.4073 \end{bmatrix} N.m$$

rT = 2 (two repetitions)

$$A^* = \begin{bmatrix} 0.4048 & -0.1882 & 0 \\ -0.1882 & 0.1955 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2154 \end{bmatrix} x10^{-7} \frac{N}{m}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0.4033 & -0.0572 & 0 \\ -0.0572 & -0.3137 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0655 \end{bmatrix} x10^{-15} N$$

$$D^* = \begin{bmatrix} 3.4616 & 3.2613 & 0.0960 \\ 3.2613 & 7.0792 & -0.0840 \\ 0.0960 & -0.0840 & 3.7157 \end{bmatrix} N.m$$

rT = 4 (four repetitions)

$$A^* = \begin{bmatrix} 0.2024 & -0.0941 & 0 \\ -0.0941 & 0.0977 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1077 \end{bmatrix} x10^{-7} \frac{N}{m}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0.4033 & -0.0572 & 0 \\ -0.0572 & -0.3137 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0655 \end{bmatrix} x10^{-15} N$$

$$D^* = \begin{bmatrix} 29.2829 & 28.0509 & 0.1920 \\ 28.0509 & 60.4676 & -0.1680 \\ 0.1920 & -0.1680 & 30.6400 \end{bmatrix} N.m$$

rT = 8 (eight repetitions)

$$A^* = \begin{bmatrix} 0.1012 & -0.0470 & 0 \\ -0.0470 & 0.0489 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0539 \end{bmatrix} x10^{-7} \frac{N}{m}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0.4033 & -0.0572 & 0 \\ -0.0572 & -0.3137 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0655 \end{bmatrix} x10^{-15} N$$

$$D^* = \begin{bmatrix} 237.4444 & 228.3283 & 0.3839 \\ 228.3283 & 491.4093 & -0.3360 \\ 0.3839 & -0.3360 & 246.9486 \end{bmatrix} N.m$$

Appendix 2: $[D^*]$ matrix for the benchmark QUAD $[0_3/\pm 45_2/90]_s$

$$[0_3/\pm 45_2/90]_s D^* = \begin{bmatrix} 112.8339 & 9.7983 & 2.2453 \\ 13.5876 & 16.5372 & 2.2453 \\ 2.2453 & 2.2453 & 12.0386 \end{bmatrix} N.m$$

Appendix 3: $[D^*]$ matrices for off-the-shelf cases considering 4 repetitions

$$[\pm 0/\pm 30]_4 D^* = \begin{bmatrix} 107.0882 & 13.5876 & -0.6023 \\ 13.5876 & 12.6822 & -0.1309 \\ -0.6023 & -0.1309 & 15.5746 \end{bmatrix} N.m$$

$$[\pm 0/\pm 45]_4 D^* = \begin{bmatrix} 86.3394 & 16.9818 & -0.3264 \\ 16.9818 & 24.3529 & -0.2069 \\ -0.3264 & -0.2069 & 19.0885 \end{bmatrix} N.m$$

$$[\pm 0/\pm 60]_4 \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 73.9814 & 13.2204 & -0.1223 \\ 13.2204 & 43.0259 & -0.2334 \\ -0.1223 & -0.2334 & 15.5262 \end{bmatrix} N.m \quad [\pm 60/\pm 60]_4 \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 17.4881 & 24.7069 & 0.0000 \\ 24.7069 & 80.7054 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 26.9579 \end{bmatrix} N.m$$

$$[\pm 0/\pm 90]_4 \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 69.2595 & 2.4677 & -0.0000 \\ 2.4677 & 69.2595 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 4.8029 \end{bmatrix} N.m \quad [\pm 60/\pm 90]_4 \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 12.6776 & 13.5786 & 0.1406 \\ 13.5786 & 107.0748 & 0.6069 \\ 0.1406 & 0.6069 & 15.5869 \end{bmatrix} N.m$$

$$[\pm 30/\pm 30]_4 \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 80.7369 & 24.7282 & 0.0000 \\ 24.7282 & 17.4990 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 26.9709 \end{bmatrix} N.m$$

Appendix 4: $[\pm\psi/\pm\Phi]$ sub laminate construction pseudo language

Two nested loops were defined:

1 - Internal loop for selecting $\pm \psi$ from the vector:

$$i(1) = \pm 0^\circ, i(2) = \pm 30^\circ, i(3) = \pm 45^\circ, i(4) = \pm 60^\circ, i(5) = \pm 90^\circ;$$

2 - External loop for selecting $\pm \phi$ from the vector:

$$j(1) = \pm 0^\circ, j(2) = \pm 30^\circ, j(3) = \pm 45^\circ, j(4) = \pm 60^\circ, j(5) = \pm 90^\circ;$$

3 - The loops are defined as,

3A: Loop: $m = 1$ to 5: increment of 1

3B: Make $\pm \phi = j(m)$;

3C: Loop $n = 1$ to 5: increment of 1

3D: Make $\pm \psi = i(n)$;

3E: Make $DVector[n,m] = [\pm\psi, \pm\phi]$;

3F: Check if $n \leq 5$

3G: YES: Make $n = n + 1$: return to Line 5D; End If

3H: End Loop

3I: Check if $m \leq 5$

YES: make $m = m + 1$: return to Line 3B;

3J: End If

3K: End Loop

$$[\pm 30/\pm 45]_4 \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 60.4799 & 28.0609 & 0.1448 \\ 28.0609 & 29.2907 & -0.2183 \\ 0.1448 & -0.2183 & 30.6483 \end{bmatrix} N.m$$

$$[\pm 30/\pm 60]_4 \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 47.8900 & 23.9877 & 0.3285 \\ 23.9877 & 47.8900 & -0.3703 \\ 0.3285 & -0.3703 & 26.9696 \end{bmatrix} N.m$$

$$[\pm 30/\pm 90]_4 \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 43.0393 & 13.2295 & 0.2284 \\ 13.2295 & 73.9861 & 0.1051 \\ 0.2284 & 0.1051 & 15.5310 \end{bmatrix} N.m$$

$$[\pm 45/\pm 45]_4 \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 41.7003 & 32.0994 & 0.0000 \\ 32.0994 & 41.7003 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 34.3585 \end{bmatrix} N.m$$

$$[\pm 45/\pm 60]_4 \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 29.2829 & 28.0509 & 0.1920 \\ 28.0509 & 60.4676 & -0.1680 \\ 0.1920 & -0.1680 & 30.6400 \end{bmatrix} N.m$$

$$[\pm 45/\pm 90]_4 \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 24.3529 & 16.9818 & 0.2069 \\ 16.9818 & 86.3394 & 0.3263 \\ 0.2069 & 0.3263 & 19.0885 \end{bmatrix} N.m$$

The sub-laminates $[\pm\psi/\pm\phi]$ are storage in a matrix called $DVector[n,m]$.