

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Decisões de preço e propaganda em um oligopólio considerando o processo de difusão da inovação

Daniel Teixeira Eloi Santos

Belo Horizonte - 2009

Daniel Teixeira Eloi Santos

Decisões de preço e propaganda em um oligopólio considerando o processo de difusão da inovação

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Área de Concentração: Produção e Logística

Linha de Pesquisa: Modelos Estocásticos de Apoio à Decisão

Orientador: Leonardo Pereira Santiago – Departamento de Engenharia de Produção – UFMG

Belo Horizonte - 2009

Dedico a todos que me apoiaram na decisão
de voltar à minha terra natal para cursar o
mestrado e realizar meu sonho de
empreender.

AGRADECIMENTOS

À Clarissa e minha mãe por me receberem novamente e me apoiarem nessa jornada.

Ao Léo, meu pai, meu avô, minha avó e demais familiares pelos incentivos.

Aos meus amigos e à Rochelle pela torcida.

Ao professor Leonardo Santiago pela orientação.

Aos companheiros do LADEC e do mestrado, em especial Henrique Mendes, Thiago Augusto, Max Neves, Lauro Bruno e Wagner Curi pela convivência.

À PRIS, Instituto Inovação e Ferrous, em especial à Raquel e ao Caio, pela ajuda sempre importante.

Aos companheiros de CONANI, em especial Dudu, pela compreensão e amizade.

Ao Unibanco por ter me permitido cursar o mestrado.

À FAPEMIG e à CAPES pelo auxílio à pesquisa.

RESUMO

A literatura sobre difusão da inovação vem sendo desenvolvida há décadas e a importância dada ao tema vem crescendo ultimamente graças à recente atenção dada ao tópico inovação. Entretanto, os principais modelos de difusão desenvolvidos estão ligados a mercados monopolísticos ou competição monopolista, uma vez que praticamente desconsideram o impacto das ações de concorrentes no resultado financeiro obtido por uma empresa. Além disso, esses modelos têm como principal objetivo prever o comportamento do mercado (nível de vendas ao longo do tempo), deixando em segundo plano o apoio à tomada de decisões de preço e propaganda ao longo do ciclo de vida de um produto. Motivados pela utilidade prática e pela lacuna existente na literatura atual, desenvolvemos um modelo teórico, focado em mercados oligopolistas e baseado no *General Bass Model* (GBM), que, fazendo uso de teoria dos jogos, projeta o retorno potencial de um novo produto ou serviço ao longo do ciclo de vida, além de guiar seus gestores na tomada de decisão de preço e propaganda. Mais especificamente, o presente trabalho calcula decisões ótimas de preço ou propaganda para todo o ciclo de vida de um novo produto, considerando o cenário em que duas empresas concorrentes lançam seus produtos simultaneamente. Dentro desse cenário, situações de equilíbrio de preço, de propaganda, e de preço e propaganda simultaneamente são analisadas. Os resultados dessa pesquisa têm o potencial de auxiliar gestores em diferentes decisões considerando cenários de competição de produtos inovadores. Além das decisões de preço e propaganda, já citados, o modelo oferece informações que auxiliam a definição do momento de substituição de uma linha de produtos, de implantação de capacidade produtiva e de planejamento de produção.

Palavras-chave: Difusão da inovação, precificação, investimento em propaganda, teoria dos jogos.

ABSTRACT

Literature on innovation diffusion has been developed for decades and its importance has been growing lately due to the attention being paid to innovation by recent papers. However, current research seems more proper for dealing with monopolistic markets or monopolistic competition, as competitor actions have little influence on a company's market payoff. Motivated by the practical relevance and the gap in the current literature on innovation diffusion and future cash flows estimation, we developed a game theoretical model based on General Bass Model (GBM) for predicting innovation's potential reward throughout its life-cycle in oligopolistic markets. The present paper considers the problem of pricing and advertizing competition in an oligopolistic market of an innovative product. We focus on the situation in which two companies launch simultaneously similar, but not identical, products into the market and compete throughout their lifecycle. Results obtained on this research are useful for guiding managers in innovative and competitive situations and also in favor of estimating marketing payoffs for innovative products. We analyze three main scenarios: price equilibria, advertizing equilibria, and price and advertizing equilibria simultaneously. Besides guiding managers making pricing and advertizing decisions, the proposed model helps managers planning the substitution of a certain product generation and planning capacity and production throughout product lifecycle.

Key-words: Innovation Diffusion, pricing, advertizing, game-theory.

SUMÁRIO

Conteúdo

1	Introdução	13
1.1	Contextualização e Objetivos da Pesquisa.....	15
1.2	Principais Resultados	15
2	Revisão Bibliográfica	17
2.1	Ciclo de vida de produtos	17
2.1.1	Visão Geral	17
2.1.2	Introdução no mercado	18
2.1.3	Crescimento.....	19
2.1.4	Maturidade	20
2.1.5	Declínio	21
2.2	Difusão da Inovação.....	21
2.2.1	Conceito básico.....	21
2.2.2	Relevância do tema.....	22
2.2.3	Classificação das pesquisas relacionadas à Difusão da Inovação	22
2.2.4	Modelos Clássicos	25
2.2.5	Trabalhos relacionados a decisões de preço e propaganda.....	30
2.2.6	Particularidades do modelo proposto	32
2.3	Teoria dos Jogos.....	33
2.3.1	Origem	33
2.3.2	Definição	33
2.3.3	Aplicações e Benefícios	34
2.3.4	Classificação dos Jogos.....	35
2.3.5	Tipos de estratégia.....	36
2.3.6	Dilema do Prisioneiro	36
2.3.7	Equilíbrio Nash.....	37
2.3.8	Modelos Clássicos de Oligopólio/Duopólio.....	37
3	Formulação do modelo	39
3.1	Assunções.....	40
3.1.1	Assunções recorrentes na literatura	40
3.1.2	Assunções específicas do presente trabalho	40
3.2	Função Densidade de Compra.....	42
3.3	Variáveis de decisão (Preço e Propaganda).....	43

3.4	Relação do modelo proposto como BM e GBM.....	45
3.4.1	Definição dos termos.....	45
3.4.2	Aproximações para GBM e BM	49
3.5	Solução do modelo em forma fechada.....	51
3.6	Processo de tomada de decisão	53
3.6.1	Adequação do modelo	53
3.6.2	Função Lucro	55
3.7	Maximizando o Lucro	60
4	Estratégias considerando o Equilíbrio Nash.....	64
4.1.1	Equilíbrio Nash considerando efeito de preço nas vendas	65
4.1.2	Caso prático – internet rápida nos EUA.....	77
4.1.3	Equilíbrio Nash de preço considerando o efeito de propaganda nas vendas (propaganda não – ótima)	99
4.1.4	Equilíbrio Nash de investimento em propaganda considerando o preço dado pelo mercado	110
4.1.5	Equilíbrio Nash de preço e investimento em propaganda simultaneamente .	119
5	Conclusão	126
6	ANEXOS.....	129
6.1	ANEXO I – Decisão ótima de preço	129
6.2	ANEXO II – Decisão ótima de investimento em propaganda	132
6.3	ANEXO III – Decisão ótima de preço para a função lucro sem propaganda.....	134
6.4	ANEXO IV – Cálculo do equilíbrio de preço para o caso em que a propaganda é desconsiderada.....	136
6.5	ANEXO V - Cálculo de equilíbrio de preços considerando o investimento em propaganda conhecido	138
6.6	ANEXO VII– Cálculo de equilíbrio de investimento em propaganda considerando o preço conhecido	140
7	Bibliografia.....	142

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Nível de vendas ao longo do ciclo de vida de um produto.....	17
Figura 2 - Nível de vendas acumuladas ao longo do ciclo de vida de um produto	18
Figura 3 - Exemplo ilustrativo de pontos de tomada de decisão ao longo do ciclo de vida de um produto	55
Figura 4 - Gráfico de vendas acumuladas do exemplo ilustrativo de Equilíbrio de Preços	72
Figura 5 - Gráfico de vendas por período do exemplo ilustrativo de Equilíbrio de Preços	73
Figura 6 - Gráfico de nível ótimo de preços do exemplo ilustrativo de Equilíbrio de Preços.....	74
Figura 7 - Gráfico de lucro das empresas do exemplo ilustrativo de Equilíbrio de Preços	75
Figura 8 - Gráfico comparativo de vendas por período exemplo ilustrativo de Equilíbrio de Preços..	76
Figura 9 - Gráfico comparativo de vendas acumuladas por período - exemplo ilustrativo de Equilíbrio de Preços	77
Figura 10 - Gráfico comparativo entre vendas cumulativas reais e estimadas do caso da internet rápida	87
Figura 11 - Gráfico comparativo entre vendas reais e estimadas por período do caso da internet rápida	90
Figura 12 - Gráfico comparativo entre estratégia ótima e estratégia realizada de preços para o caso da internet rápida	96
Figura 13- Gráfico comparativo de nível de vendas acumuladas considerando cenários de tomada de decisão ótima e real de preços para o caso da internet rápida	97
Figura 14 - Gráfico comparativo entre lucros obtidos seguindo estratégia ótima e estratégia real de preços para o caso da internet rápida	98
Figura 15 - Gráfico de vendas acumuladas do caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido	104
Figura 16 - Gráfico de vendas por período do caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido	105
Figura 17 - Gráfico de investimento em propaganda e estratégia ótima de preço do caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido	106
Figura 18 - Gráfico de lucros por período do caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido	107
Figura 19 - Gráfico comparativo de vendas por período do caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido	108
Figura 20 - Gráfico comparativo de vendas acumuladas por período do caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido	109
Figura 21 - Gráfico de vendas acumuladas do caso de Equilíbrio de investimento unitário em propaganda com preço conhecido	114
Figura 22 - Gráfico de vendas por período do caso de Equilíbrio de investimento unitário em propaganda com preço conhecido	115
Figura 23 - Gráfico de estratégia ótima de investimento em propaganda do caso de Equilíbrio de investimento unitário em propaganda com preço conhecido	116
Figura 24 - Gráfico de lucros do caso de Equilíbrio de investimento unitário em propaganda com preço conhecido	117
Figura 25 - Gráfico comparativo de vendas por período do caso de Equilíbrio de investimento unitário em propaganda com preço conhecido	118
Figura 26 - Gráfico comparativo de vendas acumuladas do caso de Equilíbrio de investimento unitário em propaganda com preço conhecido	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -Custo unitário e coeficientes de inovação, imitação e de preço dos exemplos ilustrativos	68
Tabela 2 - Nível de vendas e esforço de marketing no período 0 para as duas empresas segundo o Equilíbrio Nash de preços do exemplo ilustrativo	68
Tabela 3 - Preços ótimos e nível de vendas no período 1 para as duas empresas segundo o Equilíbrio Nash de preços do exemplo ilustrativo	70
Tabela 4 - Lucro e nível de vendas calculado para o período 1 para as duas empresas segundo o Equilíbrio Nash de preços do exemplo ilustrativo	70
Tabela 5 - Esforço de marketing no período 1 para as duas empresas segundo o Equilíbrio Nash de preços do exemplo ilustrativo	70
Tabela 6 - Preços ótimos e processo de difusão para as duas empresas segundo o Equilíbrio Nash de preços do exemplo ilustrativo	71
Tabela 7- Custo unitário e coeficientes de inovação, imitação e preço do caso da internet rápida....	85
Tabela 8 - Dados descritivos do processo de difusão do caso da internet rápida.....	86
Tabela 9 - Dados reais e estimados de vendas por período do caso da internet rápida.....	89
Tabela 10 - Decisões ótimas de preço e processo de difusão projetado do caso da internet rápida ..	92
Tabela 11 - Decisões ótimas de preço e processo de difusão entre 2000 e 2008 do caso da internet rápida	95
Tabela 12 - Coeficientes de Impacto das decisões de propaganda utilizados nos exemplos ilustrativos	101
Tabela 13 - Dados de investimento unitário em propaganda para o caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido	102
Tabela 14 - Decisões ótimas de preço e dados do processo de difusão para o caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido.....	103
Tabela 15 - Estratégia ótima de propaganda e dados do processo de difusão do caso de Equilíbrio de investimento unitário em propaganda com preço conhecido	113
Tabela 16 - Decisões ótimas de preço e propaganda do caso de Equilíbrio Nash de preço e propaganda simultaneamente	125

LISTA DE EQUAÇÕES¹

Equação 1-Difusão segundo o Modelo de Bass.....	26
Equação 2 - Difusão segundo o GBM.....	28
Equação 3 - Esforço de marketing segundo o GBM	28
Equação 4 - Esforço acumulado de marketing segundo o GBM.....	29
Equação 5 - Solução fechada do GBM.....	29
Equação 6 - Nível absoluto de vendas	30
Equação 7 - Nível absoluto de vendas segundo o GBM	30
Equação 8 – Difusão de uma empresa segundo o modelo proposto.....	42
Equação 9 - Esforço de marketing de uma empresa segundo o modelo proposto	44
Equação 10 - Esforço cumulativo de marketing de uma empresa segundo o modelo proposto	44
Equação 11 - Coeficiente de inovação da categoria de produtos	46
Equação 12 - Coeficiente de imitação da categoria de produtos.....	46
Equação 13- Difusão da categoria de produtos.....	46
Equação 14- Difusão acumulada da categoria de produtos.....	46
Equação 15 - Somatório dos esforços de marketing da categoria de produtos.....	47
Equação 16 - Esforço de marketing médio da categoria de produtos	48
Equação 17 - Efeito do esforço de marketing de uma empresa desconsiderando o efeito das decisões de competidores.....	50
Equação 18 - Difusão acumulada da categoria de produtos segundo o modelo proposto	51
Equação 19 - Processo de difusão de uma marca segundo o modelo proposto.....	52
Equação 20 - Integral indefinida que representa as vendas acumuladas de uma empresa segundo o modelo proposto	52
Equação 21 - Solução fechada da equação que representa as vendas de uma empresa no modelo proposto	52
Equação 22 - Maximização do lucro	56
Equação 23 - Vendas de uma empresa como função das vendas acumuladas ao longo do tempo	56
Equação 24 - Valor absoluto de vendas de uma empresa para um determinado período.....	57
Equação 25- Aproximação da demanda prevista para o período t	58
Equação 26 - Nível acumulado de vendas das marcas de uma categoria de produtos com exceção da empresa i	59
Equação 27 - Aproximação do processo de difusão da empresa i segundo o modelo proposto.....	59
Equação 28 - Aproximação do nível de vendas da empresa i segundo modelo proposto.....	59
Equação 29 - Discretização do esforço de marketing de uma empresa segundo o modelo proposto	60
Equação 30 - Maximização do lucro da empresa i considerando o processo de difusão	61
Equação 31 - Termos da maximização de lucro que não têm influência de variáveis de decisão	61
Equação 32 - Simplificação da maximização de lucro da empresa i	61
Equação 33 – Preço ótimo da empresa i para o tempo t	63
Equação 34 - Investimento ótimo em propaganda da empresa i para o tempo t	63
Equação 35 - Maximização do lucro desconsiderando o investimento em propaganda	65
Equação 36 - Esforço de marketing da empresa i desconsiderando o investimento em propaganda	65
Equação 37 - Variação ótima de preços da empresa i desconsiderando o investimento em propaganda.....	65
Equação 38 - Preço ótimo em equilíbrio desconsiderando o investimento em propaganda	66

¹ Foi criado o índice de equações com o intuito de facilitar a orientação por parte do leitor.

Equação 39 - Variação ótima do preço em equilíbrio desconsiderando o investimento em propaganda.....	66
Equação 40 - Esforço de marketing considerando decisões de preço e propaganda em um duopólio	99
Equação 41 - Variação ótima de preço da empresa i em um duopólio.....	99
Equação 42 - Preço ótimo da empresa i considerando o equilíbrio Nash em um cenário de investimentos em propaganda conhecidos.....	100
Equação 43 - Variação ótima de propaganda em um duopólio considerando decisões de preço e propaganda.....	110
Equação 44 - Investimento unitário ótimo em propaganda considerando o equilíbrio Nash em um duopólio e preço dos produtos conhecido.....	111
Equação 45 - Decisão ótima de preço em equilíbrio Nash de preço e investimento em propaganda simultaneamente.....	121
Equação 46 - Decisão ótima de investimento em propaganda em equilíbrio Nash de preço e investimento em propaganda simultaneamente	121
Equação 47 - Regra da cadeia para a derivada do lucro em relação ao preço.....	129
Equação 48 - Derivada do lucro da empresa i em relação ao preço no instante t.....	130
Equação 49 - Cálculo do valor ótimo de preço da empresa i no instante t.....	130
Equação 50 - Regra da cadeia para a derivada do lucro em relação ao investimento em propaganda	132
Equação 51 - Derivada do lucro em relação ao investimento em propaganda	133
Equação 52 - Cálculo do valor ótimo de preço da empresa i no instante t.....	133
Equação 53 - Regra da cadeia para derivada do lucro em relação ao preço desconsiderando a propaganda.....	135
Equação 54 - Derivada do lucro da empresa i em relação ao preço no instante t para o caso sem propaganda.....	135
Equação 55 - Cálculo do valor ótimo de preço da empresa i no instante t para o caso sem propaganda.....	136

1 Introdução

O impacto da inovação nas empresas pode ser caracterizado pelo lançamento de novos produtos e serviços ou pela melhoria de processos internos. Em diversas indústrias, por exemplo, eletro-eletrônicos, TI ou Telecom, a sobrevivência das empresas depende do sucesso do processo de desenvolvimento de produto e, posteriormente, da boa gestão do ciclo de vida dos produtos lançados, foco da dissertação.

No que diz respeito à gestão do ciclo de vida, diversas decisões táticas e estratégicas devem ser tomadas pela empresa. Inicialmente, a empresa deve definir o momento mais apropriado para a introdução do produto no mercado. Esse aspecto é ainda mais importante nos casos em que o produto lançado tem a função de substituir uma geração ou tecnologia já madura, cujas vendas estão em declínio.

Definido o momento de lançamento, a empresa deve desenvolver o planejamento de capacidade de produção, ou atendimento de serviços, considerando a expectativa de crescimento e a estabilização da demanda ao longo do tempo. Em relação a esse planejamento, algumas especificidades se destacam em função da natureza do produto. Para fabricantes de bens duráveis, por exemplo, a capacidade de produção deve atender ao crescimento do número de clientes. Em outras palavras, os fabricantes focam os novos clientes, já que não prestam serviços contínuos aos clientes que já compraram seu produto. Por outro lado, empresas voltadas ao setor de Telecom ou Internet, por exemplo, devem planejar a capacidade levando em consideração o fato de que clientes já conquistados continuam demandando os serviços. Assim, o número acumulado de clientes é fundamental para, por exemplo, investir na instalação de novas antenas de transmissão.

Além das decisões supracitadas, as empresas devem definir o preço e investimento em propaganda no momento do lançamento e também ao longo das demais fases do ciclo de vida do produto. A estimativa do impacto da variação de preço ou investimento em propaganda no nível de vendas, apesar de bastante discutido em trabalhos acadêmicos, continua sendo um grande desafio. Outros aspectos, como a potencial existência de concorrentes, além do pouco conhecimento da aceitação do mercado em relação a um novo produto, tornam essas decisões táticas ainda mais complexas.

Outra utilidade importante da compreensão do ciclo de vida de um novo produto é a estimativa do retorno potencial que esse pode gerar para a empresa. Considerando a estimativa do volume de vendas aliada à estimativa de margem ao longo do ciclo de vida do produto, é possível projetar os fluxos de caixa futuros, o que é fundamental para a tomada de decisões como lançamento ou não de um novo produto ou serviço.

Dessa forma, mesmo reconhecido como um aspecto crucial para o sucesso de uma empresa que insere novos produtos e/ou serviços no mercado, a gestão do ciclo de vida desses não é trivial, sendo apontada como um importante desafio para pesquisas acadêmicas (MAHAJAN, MULLER & WIND 2000); (SHANE & ULRICH 2004).

Uma das principais abordagens utilizadas para estimar o nível de vendas de novos produtos é baseada no conceito da “Difusão da Inovação”, tema que começou a ganhar destaque no fim da década de 1960 e, em especial, na década de 1970.

1.1 Contextualização e Objetivos da Pesquisa

No presente trabalho é proposto um modelo para auxílio à tomada de decisão na gestão do ciclo de vida de bens duráveis ou de serviços que envolvam assinatura, como internet banda larga ou telefonia. Os grandes diferenciais do trabalho em relação a outros trabalhos já consolidados são o fato de considerar a existência de competição entre empresas (mercado oligopolista) e também a abordagem do horizonte de decisão em tempo discreto, voltado para o processo de tomada de decisão.

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão da literatura pertinente para o desenvolvimento do trabalho. Nessa, os tópicos analisados são o ciclo de vida de novos produtos, os modelos de difusão da inovação, o qual é analisado em maior grau de detalhe, e a teoria dos jogos.

No capítulo 3 o modelo é formalmente proposto. Nesse capítulo é apresentada toda a fundamentação teórica por trás da proposta, seu desenvolvimento matemático e situações ilustrativas de competição entre empresas. Além disso, é apresentado um caso baseado em dados reais que visa não apenas validar o modelo, mas demonstrar seu potencial de aumento de lucros para as empresas que o utilizam.

No capítulo 5 são apresentadas as principais conclusões da pesquisa e direção para futuros trabalhos são apontados. Já o capítulo 5 apresenta as referências bibliográficas utilizadas.

1.2 Principais Resultados

Os principais resultados da pesquisa foram:

- (1) Formulação de uma variação do modelo *Generalized Bass Model* – GBM (BASS, KRISHNAN & JAIN 1994) para a projeção da velocidade de difusão de bens

duráveis ou serviços de assinatura. A principal novidade em relação ao GBM original está no fato de considerarmos a influência de decisões de preço e/ou propaganda dos *players* (competidores) nos níveis de vendas.

(2) Indicação de estratégias ótimas de precificação e propaganda com o objetivo de maximizar o lucro dos competidores no curto prazo em um mercado duopolista.

São analisados três tipos de equilíbrio Nash:

- a. Equilíbrio considerando apenas decisões de preço - nesse caso, as empresas tendem a estabilizar o preço de longo prazo em um patamar que depende da percepção do mercado em relação aos produtos;
- b. Equilíbrio considerando apenas decisões de propaganda – nesse caso as empresas tentem a fazer investimentos periódicos em propaganda. Ou seja, em um período de decisão reforçam o investimento em propaganda e depois o reduzem. Fazem isso de forma alternada.
- c. Equilíbrio considerando ambas as decisões simultaneamente – nesse caso a competição entre as empresas atinge um nível prejudicial. Isso porque as empresas tomam decisões de modo a zerar a margem de lucro (aumentando o preço e o investimento em propaganda de forma proporcional), além de anular o processo de difusão. Isso indica que as empresas não devem buscar simultaneamente o preço e o investimento em propaganda ótimos. A melhor saída é definir o nível de uma dessas variáveis e, com base nisso, calcular o valor ótimo da outra.

(3) São apresentados exemplos numéricos para cada tipo de equilíbrio citado acima e, especificamente para o caso de equilíbrio de preços, é desenvolvida uma análise baseada em dados reais que indica que a utilização da estratégia de

precificação dada pelo modelo traria um aumento significativo nos lucros das empresas.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 *Ciclo de vida de produtos*

2.1.1 Visão Geral

Produtos e serviços possuem, de forma geral, um ciclo de vida determinado. Por ciclo de vida, compreende-se o período entre o lançamento e a retirada do produto ou serviço do mercado. Durante esse período podem ser notadas grandes diferenças no que diz respeito à situação do mercado, o que impacta diretamente o nível de vendas, além de estratégias precificação de investimento em propaganda.

Na literatura, de modo geral, o ciclo de vida de produtos e serviços é dividido em quatro estágios de desenvolvimento: introdução no mercado, crescimento, maturidade e declínio (URBAN & HAUSER 1993).

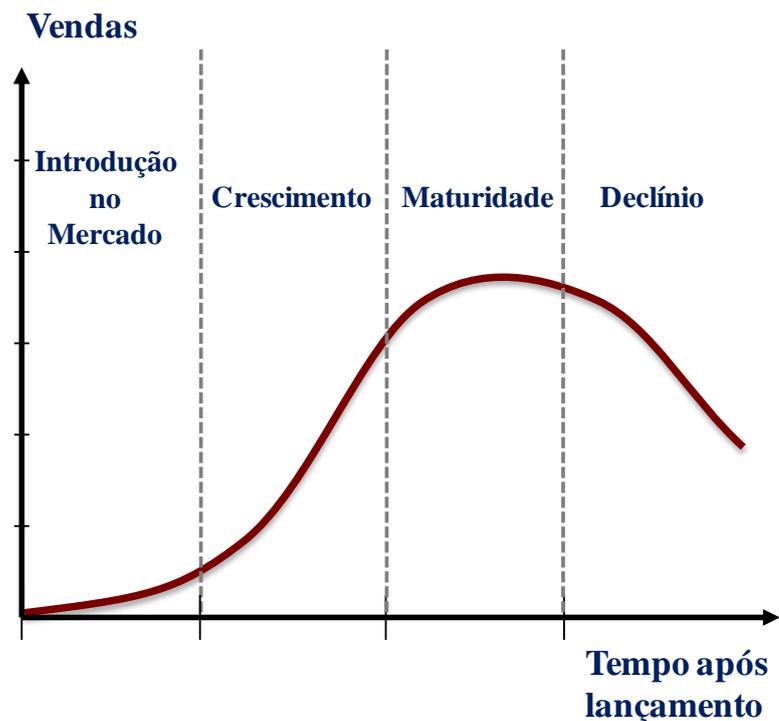


Figura 1 - Nível de vendas ao longo do ciclo de vida de um produto

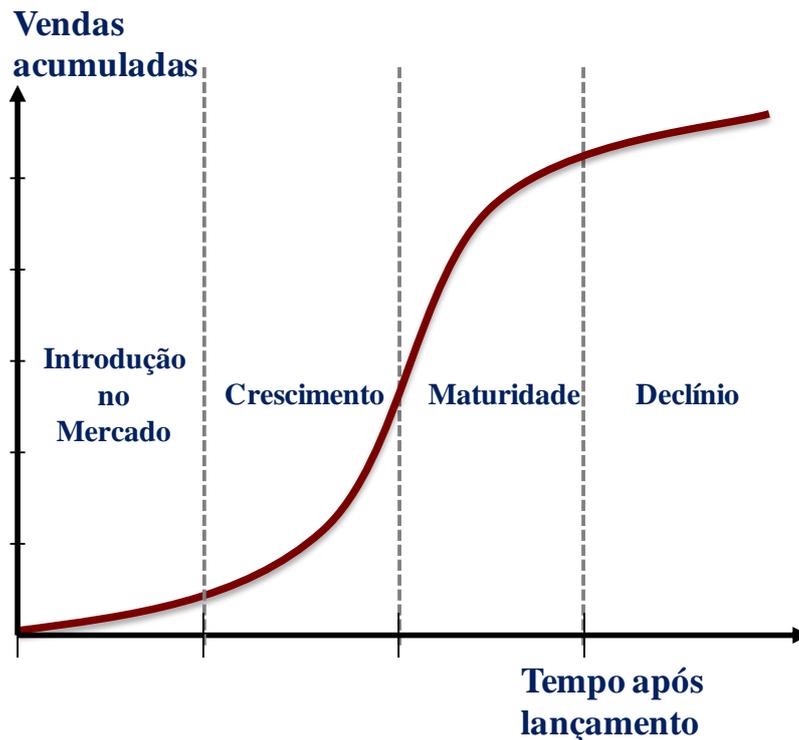


Figura 2 - Nível de vendas acumuladas ao longo do ciclo de vida de um produto

A seguir são apresentadas as principais características de cada uma dessas fases:

2.1.2 Introdução no mercado

Na fase de introdução no mercado, o principal objetivo da empresa é criar um reconhecimento do produto ou serviço pelo mercado e começar a alavancar as vendas. A imagem da qualidade do produto ou serviço e de sua respectiva marca começam a ser testados e conhecidos nesse estágio.

Em relação à estratégia de precificação, duas estratégias são as mais utilizadas pelos tomadores de decisão. Para determinados tipos de produtos, começa-se com um preço baixo, com o objetivo de acelerar o ganho de fatia no mercado, para, em outras etapas, ocorrer um aumento do preço do produto ou serviço e, conseqüentemente, da margem da empresa. Outra estratégia conhecida é de

precificação *Premium* do produto/serviço. Nesse caso, apesar da velocidade de conquista de fatia do mercado se reduzir, a empresa garante margens mais significativas, além de buscar posicionar seu produto com um algo “superior”. Tal estratégia é bastante comum para os casos em que há importante nível de inovação tecnológica nos novos produtos ou serviços oferecidos.

Alguns autores, como (MARN, ROEGNER & ZAWADA 2003) e (ROEGNER, SEIFERT & SWINFORD 2001), defendem que as empresas costumam precificar seus produtos com um valor inferior ao seu verdadeiro potencial e que é mais fácil reduzir o preço de um produto após lançá-lo com um preço alto do que aumentar seu preço após lançá-lo com um preço baixo.

Nessa etapa, a estratégia de divulgação e promoção do produto tem como principal objetivo fazer o produto conhecido pelo mercado, em especial clientes considerados inovadores (*early adopters*), além de ter também papel de educar o cliente sobre o funcionamento do novo produto ou serviço (URBAN & HAUSER 1993).

Finalmente, em relação à distribuição, essa é seletiva até que o produto tenha sido aceito e reconhecido pelo mercado.

2.1.3 Crescimento

Na fase de crescimento, o produto ou serviço já possui certo conhecimento do mercado e, caso tenha sido “aceito” pelos consumidores, terá o maior crescimento de vendas e da fatia do mercado do seu ciclo de vida. É importante que a empresa esteja preparada para atender à sua crescente demanda para que vendas não sejam perdidas por falta de capacidade de entrega. Assim, a previsão de demanda passa a ter papel fundamental no planejamento de produção e distribuição da empresa.

No que diz respeito à precificação, a tendência é que esse chegue a um valor intermediário tanto para a estratégia de lançamento com preço *Premium* quanto para

a estratégia de lançamento com preço baixo. No primeiro caso, a explicação é que a empresa busca aumentar a penetração do produto no mercado, além desse já ter perdido o *status* de inovação. Já para o caso de lançamento com preço baixo, a empresa quer aproveitar o fato do produto já ser relativamente conhecido pelo mercado para aumentar sua margem de lucro.

Já a estratégia de divulgação passa a ter como foco, também, consumidores menos inovadores, que costumam esperar o bom funcionamento de uma tecnologia antes de experimentá-la.

2.1.4 Maturidade

Na fase de maturidade o nível de vendas começa a se estabilizar e a empresa enfrenta maior concorrência de produtos similares ou substitutos. Ao contrário do que ocorre em fases anteriores, nas quais a empresa busca aumentar sua participação no mercado, na fase de maturidade a empresa passa a buscar a maximização dos lucros apenas mantendo o nível atual de participação.

Graças ao crescimento do nível de competitividade do mercado, muitas vezes as empresas melhoram de forma incremental seu produto ou serviço com o objetivo de se diferenciar dos competidores e, conseqüentemente, possibilitar aumento da margem de lucro. Caso a obtenção de tal diferencial não seja possível, a tendência é uma queda gradual de preços em função do aumento da competitividade do mercado.

No que diz respeito à distribuição, essa pode ser fator importante na escolha do consumidor, também conseqüência da menor existência de diferenciação entre produtos. Finalmente, em relação à promoção, essa deixa de ter o papel de apresentar o produto ao cliente e passa a buscar a diferenciação do produto dos concorrentes.

2.1.5 Declínio

Na fase de declínio, o nível de vendas de todas as empresas cai e a lucratividade do produto ou serviço cai vertiginosamente (URBAN & HAUSER 1993). A tendência é que empresas lancem novos produtos ou serviços, também conhecidos como substitutos. Nesse caso, a produção da geração do produto que se encontra em declínio é descontinuada.

Uma alternativa conhecida é manter o produto ou serviço focando um nicho fiel (URBAN & HAUSER 1993). Nesse caso, a escala de produção é reduzida drasticamente, assim como os ganhos de escala. Um exemplo conhecido dessa alternativa é a fabricação de LPs (*Long-Plays*) de vinil que, mesmo com o surgimento de tecnologias mais baratas e conhecidas, continua sendo fabricado e vendido a preços *Premium*.

Algumas empresas também tentam dar sobrevida a seus produtos ou serviços em fase de declínio adicionando novos atributos com o objetivo de “rejuvenecê-lo” ou dar a eles novas aplicações.

2.2 Difusão da Inovação

2.2.1 Conceito básico

O conceito de difusão da inovação é definido por (ROGERS 1962) como o processo no qual uma inovação é disseminada na sociedade ao longo do tempo por meio de canais de comunicação.

Com o intuito de explicar ou prever esse fenômeno, tanto estudos de natureza qualitativa quanto quantitativa vêm sendo desenvolvidos nas últimas décadas. Dentro dessa classificação, o presente trabalho se enquadra como uma

análise quantitativa com o foco na previsão de demanda e auxílio à tomada de decisão de preço e propaganda para mercados oligopolistas.

2.2.2 Relevância do tema

Diversos autores têm destacado a importância de modelos de difusão da inovação, baseados no artigo seminal de Bass (BASS 1969), nas pesquisas voltadas à inovação, *Marketing* e previsão de demanda (*Forecasting*). Segundo (SHANE & ULRICH 2004), esse tópico apresenta grande potencial para desenvolvimento prático e teórico. Além disso, duas importantes revisões de literaturas, e (HAUSER, G.J. & GRIFFIN 2006), destacam as diversas oportunidades de pesquisa ligadas aos modelos de difusão da inovação.

Em relação à aplicabilidade de modelos de difusão, diversas oportunidades se destacam:

- Previsão de demanda de produtos para planejamento de capacidade;
- Auxílio em decisões táticas, como precificação e investimento em propaganda;
- Definição do momento de substituição de linhas de produtos por novas gerações;
- Auxílio na valoração de novas tecnologias ou startups, através da previsão do *payoff* (retorno) gerado por essas.

Assim, além de ser um tópico atual e com amplo potencial de pesquisa, é também um tópico com diversas aplicações do ponto de vista prático.

2.2.3 Classificação das pesquisas relacionadas à Difusão da Inovação

De modo geral, as pesquisas relacionadas à difusão podem ser classificadas de acordo com a natureza do modelo, isto é, se é um modelo normativo ou

descritivo(MAHAJAN, MULLER & WIND 2000). Modelos normativos são aqueles focados na conceituação matemática do mercado e nas implicações desses na tomada de decisão das empresas. Como qualquer tentativa de se modelar matematicamente a realidade, esse tipo de modelo é baseado em pressuposições. Já os modelos descritivos possuem foco empírico, uma vez que dados reais são utilizados na estimativa de parâmetros para modelos de difusão. Ultimamente, algumas pesquisas têm apresentado foco tanto empírico quanto normativo. Isso é, pesquisadores propõem um modelo normativo e depois buscam a validação do modelo com dados reais (CHATTERJEE, ELIASHBERG & RAO 2000). Essa, inclusive, é a abordagem utilizada no presente trabalho.

Quando a evolução do tópico de pesquisa “Difusão da Inovação” é analisada, fica claro que temas como estimativa de parâmetros, extensão de modelos existentes de difusão e impacto de variáveis de decisão como preço e propaganda na velocidade de difusão vêm perdendo espaço para a análise de mecanismos por trás do comportamento de mercado e empresas (MAHAJAN, MULLER & WIND 2000). A previsão de vendas de forma isolada vem dando lugar a diagnósticos gerenciais com foco na tomada de decisão. Além disso, ao invés de se focar a difusão considerando uma categoria de produtos (por exemplo, televisão digital) ou mercados monopolistas, os trabalhos lidam agora com competição entre marcas, o que aumenta a complexidade de análise (MULLER, PERES & MAHAJAN 2007) e (HAUSER, G.J. & GRIFFIN 2006).

Como afirmado anteriormente, a competição entre marcas é um tópico de pesquisa recente, logo, a literatura disponível sobre o assunto é ainda limitada. Ainda assim, é possível encontrar trabalhos que focam o impacto do número de competidores no processo de difusão ((KAUFFMAN 2005); (VAN DEN BULTE &

STREMERSCH 2004); (KIM & SRIVASTAVA 1999)). O trabalho (KRISHNAN, BASS & KUMAR 2000) analisa o impacto de empresas entrantes no nível de vendas das empresas já presentes no mercado e a referência (LOCH & HUBERMAN 1999) propõe um modelo de difusão que considera a competição entre tecnologias: uma considerada nova e outra obsoleta.

Para classificar modelos de difusão que consideram competição, é importante compreender as dimensões de análise mais significativas. A mais fundamental dessas é o número de competidores presentes no mercado. Além dessa dimensão, as variáveis de decisão consideradas também têm papel importante. Enquanto alguns autores (por exemplo, (ERICKSON 1995b),(GUPTA & Di BENEDETTO 2007) ,(THOMAS 1999) e (FRUCHTER & KALISH 1997)) consideram decisões táticas referentes ao *marketing mix* (por exemplo, decisões de preço e propaganda), outros autores focam em decisões ligadas a um nível mais estratégico do *marketing*, como momento de entrada no mercado, estratégias defensivas, escolhas tecnológicas ou nível de desempenho de produtos (por exemplo, (BAYUS, JAIN & RAO 1997) e (KALISH, MAHAJAN & MULLER 1995)).

Além das dimensões supracitadas, a situação competitiva do mercado também é fundamental (CHATTERJEE, ELIASHBERG & RAO 2000). São elas: competição entre firmas já estabelecidas (por exemplo, (ERICKSON 1995a)), competição entre firmas já estabelecidas e potenciais entrantes (ver (CARPENTER & NAKAMOTO 1990) e (KALISH, MAHAJAN & MULLER 1995)) e competição entre empresas entrantes (ver (BAYUS, JAIN & RAO 1997) e (KRIDER & WEINBERG 1998)).

Outras dimensões também levantadas por autores são o tipo de interação e estratégias de equilíbrio entre as empresas. As interações competitivas podem ser

ações únicas (por exemplo, a escolha do momento de lançamento de um produto), ou um conjunto de decisões contínuas (por exemplo, competição por preço ao longo do ciclo de vida do produto) (CHATTERJEE, ELIASHBERG & RAO 2000). Em ambos os casos, o Equilíbrio Nash (explicado na referência bibliográfica de teoria dos jogos) é a solução analítica mais utilizada como decisão ótima. De modo geral, além de ser um Equilíbrio Nash, as soluções diferenciais costumam ser as chamadas *Open-loop* (ciclo aberto) ou *Closed-loop* (ciclo fechado). Enquanto a primeira representa as variáveis do Equilíbrio Nash exclusivamente como função do tempo, (ver (DOCKNER & JORGENSEN 1992)), a segunda considera o estado do sistema em cada ponto de decisão (ver (ERICKSON 1993)).

Dentro das classificações apresentadas, o modelo do presente trabalho pode ser considerado um modelo normativo, situado em um mercado oligopolista e focado em decisões ligadas ao *marketing mix* (mais especificamente de decisões de preço ou propaganda). As empresas que competem são estabelecidas no mercado (não consideramos entrantes potenciais) e o tipo de interação competitiva representa um conjunto contínuo de ações seguindo o Equilíbrio Nash em uma solução diferencial de ciclo fechado (*Closed-Loop*).

2.2.4 Modelos Clássicos

2.2.4.1 Modelo de Bass (*Bass Model - BM*)

Conceitualmente, o BM *Bass-Model* (BASS 1969) representa a taxa de adoção de um novo produto (bem durável) por consumidores como função de potenciais adesões realizadas espontaneamente por consumidores inovadores e também das adesões acumuladas até o momento analisado.

Em seu trabalho, Bass (BASS 1969) dividiu os consumidores em dois grupos: os inovadores e os imitadores. Enquanto o primeiro grupo não tem sua decisão de

compra influenciada pelas vendas acumuladas do novo produto até o momento, o segundo grupo é totalmente dependente dessa quantidade. De forma geral o nível de vendas acumuladas para um bem durável segue uma curva “S” graças à natureza dos parâmetros estimados.

O modelo de Bass e outros modelos derivados desse vêm sendo amplamente utilizados em função de sua grande aderência a dados coletados empiricamente, além da facilidade de modelagem e interpretação (ver (KRISHNAN & JAIN 2006); (HAUSER, G.J. & GRIFFIN 2006); (PUTSIS 2000) para mais informações).

A equação geral do modelo é dada por:

$$\frac{f(t)}{[1 - F(t)]} = [p + qF(t)]$$

Equação 1-Difusão segundo o Modelo de Bass

Na qual $f(t)$ representa a parcela da população que adota a nova categoria de produto no instante t e $F(t)$ representa a parcela da população que adotou a tecnologia até o instante t . O termo $f(t)$ também é descrito como a função densidade de compra no instante t , sendo $F(t)$ a sua função cumulativa.

Os fatores que influenciam a difusão são o coeficiente de inovação, dado por p , e o coeficiente de imitação, dado por q . Segundo (MULLER, PERES & MAHAJAN 2007), p representa a influência externa que leva um novo consumidor a adquirir o produto. Esse parâmetro deve capturar a influência das empresas no mercado, representando aspectos como propaganda do novo produto e atratividade da inovação. Por outro lado, o parâmetro q representa a influência interna do Mercado. Em outras palavras, esse parâmetro representa as distintas formas de

interdependência entre os consumidores (por exemplo, sinais, externalidades e comunicação interpessoal).

É importante ressaltar que o modelo original de Bass não considera a competição entre marcas. O modelo, na verdade, representa um mercado monopolista ou, para os casos de duopólio ou oligopólio, o modelo representa a difusão da categoria de produto como um todo. Além disso, o modelo não representa diretamente variáveis de decisão como preço e propaganda. Tais variações são consideradas intrínsecas aos parâmetros p e q .

2.2.4.2 Generalized Bass Model (GBM)

Uma importante variação do modelo original de Bass é o *Generalized Bass Model*, ou GBM (BASS, KRISHNAN & JAIN 1994). No artigo em que esse modelo é apresentado, os autores explicam a razão pela qual o BM original não considera variáveis de decisão como preço e propaganda e propõem um modelo generalista que leva em conta esses aspectos. Ao contrário de outros modelos que consideram essas variáveis de decisão, o GBM tem a propriedade de ser resolvido de forma analítica, o que possibilita a representação do nível de vendas explicitamente como função das variáveis do *marketing mix*, mais especificamente preço e propaganda. Esse artigo permitiu a compreensão dos efeitos da variação do *marketing mix* no nível de vendas de uma empresa, além da busca por estratégias ótimas de precificação e investimentos em propaganda (KRISHNAN & JAIN 2006); (LEHMANN & ESTEBAN-BRAVO 2006); (KRISHNAN, BASS & JAIN 1999).

Segundo o modelo GBM, a decisão de um indivíduo por adotar uma categoria de produtos no instante t é impactada por duas forças distintas. São elas o processo de difusão (que representa a divulgação “boca-a-boca”) e o efeito dos esforços relacionados ao *marketing mix* (por exemplo, investimento em propaganda e

decisões de preço). É importante ressaltar que, assim como o BM, o GBM considera um mercado monopolista ou, para os casos em que há mais de um competidor no mercado, a difusão é abordada no nível da categoria de produtos. A equação geral do modelo é similar à equação geral do BM e é dada por:

$$\frac{f(t)}{[1 - F(t)]} = [p + qF(t)]x(t)$$

Equação 2 - Difusão segundo o GBM

Na qual $f(t)$ representa a parcela do mercado potencial que adota a categoria de produtos no instante t e $F(t)$ representa a parcela acumulada de adoções até o instante t . Ao lado dos fatores p , coeficiente de inovação, e q , coeficiente de imitação, o “esforço de *marketing*”, representado pelo termo $x(t)$, também tem influência no processo de difusão. É justamente o termo $x(t)$ a principal diferença entre o BM e o GBM.

Esse termo é função de distintas variáveis de *marketing* (por exemplo, preço e propaganda, como apresentado no artigo original (BASS, KRISHNAN & JAIN 1994)). Nesse artigo, o efeito da precificação e da propaganda na difusão da inovação, dentro de um mercado monopolista, é ser representado por:

$$x(t) = 1 + \left[\frac{P'(t)}{P(t)} \right] \beta_P + \left[\frac{A'(t)}{A(t)} \right] \beta_A$$

Equação 3 - Esforço de marketing segundo o GBM

E sua função cumulativa é dada por:

$$X(t) = t + \left[\text{Ln} \frac{P(t)}{P(0)} \right] \beta_P + \left[\text{Ln} \frac{A(t)}{A(0)} \right] \beta_A$$

Equação 4 - Esforço acumulado de marketing segundo o GBM

Em que $P(t)$ e $A(t)$ representam, respectivamente, o preço e a propaganda no instante t ; $P'(t)$ e $A'(t)$ representam, respectivamente, a variação de preço e propaganda no instante t ; $\frac{P'(t)}{P(t)}$ e $\frac{A'(t)}{A(t)}$ são, respectivamente, a taxa de variação de preço e propaganda no instante t ; β_P e β_A são, respectivamente, os coeficientes que modelam o impacto da variação de preço e propaganda no nível de vendas. O conceito desses coeficientes é similar ao conceito da elasticidade de preços da microeconomia.

Resolvendo a equação (2) (ver (BASS, KRISHNAN & JAIN 1994) para maiores detalhes), chegamos a uma solução fechada para a previsão de vendas ao longo do tempo de uma categoria de produtos (ou de uma empresa monopolista).

$$f(t) = x(t) \left[\frac{(p+q)^2}{p} \right] \frac{e^{-(X(t)-X(0))(p+q)}}{\left(\left(\frac{q}{p} \right) e^{-(X(t)-X(0))(p+q)} + 1 \right)^2}$$

Equação 5 - Solução fechada do GBM

A função densidade representada pela Equação 5 mostra que o momento de adoção de uma inovação por parte dos consumidores depende do esforço atual de *marketing* e também do esforço acumulado nos períodos anteriores. Esse último chamado de *the carry over effect* (BASS, KRISHNAN & JAIN 1994).

Como $f(t)$ representa a função densidade do nível de vendas, $S(t)$ representa o de nível de vendas no instante t considerando a equação:

$$S(t) = Mf(t)$$

Equação 6 - Nível absoluto de vendas

Na qual M é o potencial de Mercado estimado para a categoria de produtos ao longo de seu ciclo de vida. Assim, a Equação 6 pode ser reescrita como:

$$S(t) = Mx(t) \left[\frac{(p+q)^2}{p} \right] \frac{e^{-(X(t)-X(0))(p+q)}}{\left(\left(\frac{q}{p} \right) e^{-(X(t)-X(0))(p+q)} + 1 \right)^2}$$

Equação 7 - Nível absoluto de vendas segundo o GBM

2.2.5 Trabalhos relacionados a decisões de preço e propaganda

Para destacar a relevância do presente trabalho é importante citar alguns trabalhos já desenvolvidos no que diz respeito a decisões de preço e propaganda e seu efeito na difusão da inovação.

Alguns trabalhos, como os de (MAHAJAN & PETERSON 1978), (BASS 1980), (BASS & BULTEZ 1982), (KALISH 1985) e (HORSKY 1990), analisam o impacto do preço no tamanho do mercado potencial (representado na Equação 7 por M). Diferentes raciocínios são utilizados pelos autores para interpretar esse impacto. (MAHAJAN & PETERSON 1978), por exemplo, defendem que um preço mais baixo possibilita que o produto se enquadre nas limitações orçamentárias de uma quantidade maior de usuários, o que, conseqüentemente, aumenta o mercado potencial do produto. Já (HORSKY 1990) relaciona a variação de preço dos produtos e dos salários dos consumidores com a quantidade de vendas esperada.

Os primeiros autores a inserir a variável de preço impactando no modelo de Bass foram (ROBINSON & LAKHANI 1975). A partir do modelo proposto, os autores puderam analisar diferentes estratégias de preço. A primeira delas, chamada de

precificação marginal, consiste em iniciar o processo de difusão com um preço mais alto que vai reduzindo com a evolução da difusão. Essa estratégia mostrou-se inferior a estratégias como preço ótimo constante ou uma estratégia de preços na qual o preço começa mais baixo, sobe até um pico e depois volta a cair.

Outros autores, como (HORSKY & SIMON 1983) analisaram os efeitos de investimentos em propaganda na velocidade de difusão de novos produtos. No modelo por eles proposto, coeficientes distintos representam os efeitos da publicidade, do “boca a boca” e da propaganda. Esse modelo, inclusive, mostrou resultados interessantes no que diz respeito à difusão do serviço bancário por telefone.

(THOMSON & TENG 1984) propuseram um modelo que incorporava tanto decisões de preço quanto propaganda, fazendo uma adaptação dos modelos propostos por (HORSKY & SIMON 1983) e (ROBINSON & LAKHANI 1975).

(KAMAKURA & BALASUBRAMANIAN 1988), (JAIN & RAO 1990) e (PARKER 1992) também desenvolveram modelos que incorporavam os efeitos da propaganda e da precificação no processo de difusão. Esses foram os últimos modelos de destaque antes do desenvolvimento do GBM em 1994.

A partir de 1994, modelos baseados no GBM foram propostos com o objetivo de se obter estratégias ótimas de preço e ou propaganda para todo o ciclo de vida do produto. O principal exemplo de trabalho relacionado à precificação ótima considerando um mercado monopolista é o de (KRISHNAN, BASS & JAIN 1999). Os autores, concluem, a partir de uma função objetivo cumulativa que representa o lucro ao longo do ciclo de vida do produto, que a estratégia ótima de precificação é aumentar o preço até um momento a partir do qual o preço deve cair monotonicamente.

Em 2006, (KRISHNAN & JAIN 2006) propõem uma análise similar à proposta por (KRISHNAN, BASS & JAIN 1999) e derivam estratégias ótimas de investimento em propaganda ao longo do ciclo de vida de um novo produto em um mercado monopolista. Segundo eles, a estratégia pode ser reduzir-aumentar, aumentar-reduzir, aumentar monotonicamente ou reduzir monotonicamente, dependendo da efetividade do investimento em propaganda, da taxa de desconto utilizada para analisar o valor presente líquido (VPL) do investimento e a relação entre investimento e lucros.

Há um ponto interessante ressaltado na revisão realizada por (MEADE & ISLAM 2006). Apesar de haver certo consenso em relação às formas mais apropriadas de se introduzir variáveis relacionadas ao *marketing-mix* no modelo Bass, não se pode dizer que essas são as únicas formas aceitáveis de se modelar a difusão. Há diversos modelos não diretamente derivados do modelo de Bass que também se apresentam como alternativas viáveis. Essa “abertura” no que diz respeito a possibilidades de pesquisa dificilmente se encerrará, uma vez que o processo de difusão aparenta ser muito mais complexo do que os modelos matemáticos conseguem representar. Assim, é esperado que apenas modelos, que obviamente são uma pobre representação da realidade sejam definitivamente descartados. Isso, inclusive, é mais um indicativo do amplo espaço de pesquisa nesse tema.

2.2.6 Particularidades do modelo proposto

Apesar da existência de trabalhos que levam em consideração a competição durante o processo de difusão, pode-se afirmar que ainda há espaço para pesquisa prática e teórica, especialmente no que diz respeito a decisões de preço e propaganda em um mercado oligopolista (MAHAJAN, MULLER & WIND 2000).

Esse trabalho tem como objetivo suprir parte dessa lacuna, propondo não apenas um modelo que explica o processo de difusão em um ambiente competitivo, mas também orienta tomadores de decisão na definição de estratégias de preço e propaganda ao longo do ciclo de vida do produto.

2.3 Teoria dos Jogos

2.3.1 Origem

A teoria dos jogos é uma área de conhecimento que vem ganhando cada vez mais importância quando situações de competição nas quais as estratégias de participantes em uma indústria são analisadas.

Apesar da atenção que tem recebido ultimamente, a Teoria dos Jogos tem sua origem entre as décadas de 1940 e 1950 ((RASMUSSEN 2006)). Um trabalho seminal sobre o tema é (VON NEUMANN & MORGENSTERN 1944). Com essa publicação, outras pesquisas foram desenvolvidas e serviram como base tanto para a teoria relacionada a jogos não cooperativos quanto a cooperativos. Em relação ao primeiro tipo, o trabalho não publicado de Tucker sobre o “Dilema do Prisioneiro” (*Prisoner’s Dilemma*)(TUCKER 1950 - não publicado) e os artigos de Nash que definem e demonstram a existência de estratégias de equilíbrio((NASH 1950b), (NASH 1951)), são referências importantes. No que diz respeito a jogos cooperativos, merecem destaque os trabalhos de (NASH 1950a) e (SHAPLEY 1953b) em jogos de barganha e (SHAPLEY 1953a) em sua essência.

2.3.2 Definição

Hoje, a literatura relacionada à Teoria dos Jogos é bastante abrangente, o que propicia a existência de diversas definições do tema. Uma definição, apresentada em (OSBORNE & RUBINSTEIN 1994), resume bem o conceito dessa área de pesquisa:

“Teoria dos jogos é um conjunto de ferramentas criadas para auxiliar o entendimento dos fenômenos observados quando tomadores de decisão (jogadores) interagem entre si. Partindo do pressuposto de que os tomadores de decisão agem racionalmente na busca de seus objetivos, a Teoria dos Jogos leva em conta as capacidades, os conhecimentos e as expectativas dos diversos jogadores para criar representações abstratas de uma extensa classe de situações reais” (OSBORNE & RUBINSTEIN 1994)

Uma premissa fundamental da Teoria dos jogos, apresentada por (CRAINER 1996), é que, em qualquer situação competitiva, existem fatores que podem ser representados matematicamente e analisados de forma a explicar o resultado que prevalecerá. Entretanto, o tema não é inerentemente matemático. A Teoria dos Jogos é, na verdade, um ferramental analítico para o estudo de situações nas quais há interação e/ou conflitos de interesses entre participantes, o que é típico em ambientes de negócios (OSBORNE & RUBINSTEIN 1994).

2.3.3 Aplicações e Benefícios

A Teoria dos Jogos pode ser aplicada a situações nas quais existem poucos jogadores (no mínimo 2 para existir um jogo). Considerando a aplicação no âmbito dos negócios, pode-se dizer que a Teoria dos Jogos é aplicável em mercados de duopólio ou de oligopólio.

A utilização da Teoria dos Jogos permite a tomadores de decisão compreender e prever a reação competitiva de diferentes atores do ambiente de

negócios. Em outras palavras, é possível observar um problema da perspectiva de todos os competidores, o que auxilia a definição de estratégias que funcionam como resposta à ação do concorrente. Alguns exemplos práticos de aplicação são a definição de preços, investimentos em propaganda, investimento em P&D ou capacidade, leilões e negociações em geral.

2.3.4 Classificação dos Jogos

De acordo com a natureza do problema, diversas classificações foram criadas para designar os tipos de jogos existentes. Alguns exemplos de classificação são:

- **Disponibilidade de informação:** Um jogo é classificado como de informação perfeita quando todos os jogadores conhecem a história do jogo antes de fazerem suas escolhas. Caso, em algum momento do jogo, um jogador tome decisões desconhecendo parte da história do jogo, esse é classificado como de informação imperfeita (FIANI 2004).
- **Relação entre participantes:** Um jogo é considerado cooperativo quando seus participantes podem negociar entre si, permitindo que planejem estratégias em conjunto (PINDYCK & RUBINFELD 2000). Um exemplo de jogo cooperativo, porém ilegal, é a formação de cartéis. Nos jogos não-cooperativos, segundo (BRONSON 1985), não é possível o planejamento de estratégias em conjunto. Esse é o tipo de jogo mais comum no mercado.
- **Soma dos *payoffs* (resultados):** Nos jogos de soma zero, os interesses dos participantes são diametralmente opostos. Em outras palavras, se um participante ganha, outro(s) perde(m) exatamente a mesma quantidade

(DAVIS 1970). Já nos jogos de soma não-zero isso não ocorre, o que faz com que a soma dos *payoffs* possa ser maior ou menor que zero.

- **Freqüência:** um jogo pode estar relacionado a uma tomada de decisão isolada ou uma série de tomadas de decisão iguais em seqüência. No caso da segunda alternativa ocorre o chamado “jogo repetitivo” que possui complexidade maior de análise, uma vez que as decisões passadas devem ser consideradas no novo ponto de decisão. Um exemplo de jogo repetitivo é o processo de definição de preço e nível de produção por parte das empresas (PINDYCK & RUBINFELD 2000).

2.3.5 Tipos de estratégia

Há duas classificações básicas para as estratégias definidas pelas empresas. Elas podem ser “Dominantes ou Dominadas” e “Puras ou Mistas”. As estratégias dominantes são aquelas bem sucedidas quaisquer as atitudes dos participantes, ou seja, são sempre a melhor resposta à tomada de decisão do competidor. Já as estratégias dominadas, como o próprio nome diz, nunca são as que proporcionam o melhor *payoff* para o tomador de decisão. Isso quer dizer que elas podem ser eliminadas do leque de opções do tomador de decisão, uma vez que nunca serão as escolhidas.

Já em relação à classificação “pura ou mista”, diz-se que o jogador utiliza estratégias mistas quando, ao invés de escolher uma única estratégia entre as possíveis, ele decide alternar sua escolha aleatoriamente, atribuindo uma probabilidade a cada estratégia a ser escolhida (FIANI 2004).

2.3.6 Dilema do Prisioneiro

O dilema do prisioneiro é, provavelmente, o jogo mais popular na teoria dos jogos. Ele indica um exemplo no qual a cooperação entre jogadores é difícil de ser

mantida, especialmente na situação de imperfeição de informação, uma vez que cada um busca o melhor para si, levando a uma situação que não é a melhor para todos.

2.3.7 Equilíbrio Nash

O equilíbrio de Nash foi explicado claramente pela primeira vez em 1951 pelo matemático John Nash (NASH 1950b). Segundo ele, no equilíbrio, cada empresa faz o melhor que pode em função daquilo que seus concorrentes estão fazendo.

De acordo com (KREPS 1990), equilíbrio de Nash é uma combinação de estratégias, uma para cada jogador, tais que nenhum jogador tenha incentivos em termos de retorno para alterá-la.

Há diversos métodos para se resolver um jogo e obter o equilíbrio Nash. O mais simples desses é eliminar sucessivamente as estratégias dominadas de cada jogador. Se a eliminação sucessiva de estratégias dominadas conduzirem a um resultado único, esse resultado é também o único equilíbrio de Nash nesse jogo (KREPS 1990). Outra alternativa, a qual foi utilizada no presente trabalho, é substituir a equação da decisão ótima do concorrente na decisão ótima da própria empresa (uma vez que uma decisão é função da outra) e resolver o sistema de equações obtido. Dessa forma é possível atingir as equações de equilíbrio.

2.3.8 Modelos Clássicos de Oligopólio/Duopólio

2.3.8.1 Modelo de Cournot

No modelo de Cournot as empresas produzem mercadorias homogêneas (não existe diferença na percepção dos clientes em relação aos produtos) e conhecem a curva de demanda do mercado. Dessa forma, o consumidor toma a decisão de compra baseado no preço (FIANI 2004).

Ao início de cada período de decisão, as empresas definem a quantidade de produtos que será produzida e levada ao mercado. A partir da quantidade total de produtos disponíveis, o mercado define o preço a ser pago pelo produto. Apesar de definir a quantidade produzida de forma independente, cada empresa leva em consideração uma expectativa fixa da produção dos concorrentes (PINDYCK & RUBINFELD 2000).

Esse modelo possui algumas limitações. Em primeiro lugar, nem sempre as empresas competem diretamente por quantidade (a não ser no médio-longo prazo quando consideramos capacidade instalada), e sim por preço, o que vai contra a essência do modelo de preço definido pelo mercado. Além disso, considerar a o nível de produção de concorrentes como fixo só é válido quando o equilíbrio de Cournot é atingido. Nesse caso nenhuma das duas empresas terá nenhum estímulo para variar seu nível de produção.

2.3.8.2 Modelo de Stackelberg

No modelo de Stackelberg, assim como no modelo de Cournot, as empresas competem a partir de decisões relativas ao nível de produção. Entretanto, ao invés de tomar decisões simultaneamente, as empresas assumem o papel de líderes ou seguidoras. Nessa dinâmica de decisão, a empresa líder define seu nível de produção de forma a maximizar o lucro partindo do princípio que as demais empresas aceitaram sua estratégia. Após a definição da empresa líder, as empresas seguidoras definem suas estratégias considerando uma restrição baseada na decisão já tomada pela empresa líder (RASMUSSEN 2006).

Geralmente a empresa com maior poder no mercado, a chamada empresa dominante, exerce o papel de líder. Entretanto, quando mais de uma empresa tenta

assumir esse papel, surge uma situação de conflito que só é resolvida quando apenas uma empresa consegue exercer esse papel.

2.3.8.3 Modelo de Bertrand

O modelo de Bertrand tem estrutura similar à do modelo de Cournot. A principal diferença, a qual torna o modelo mais realista para análises de curto prazo, é que nesse modelo as empresas competem por preço (KUPFER & HASENCLEVER 2002).

Nesse modelo, em função da competitividade, as empresas tendem a reduzir o preço para aumentar a participação no mercado. Essa redução se dá até o ponto no qual o preço se iguala ao custo marginal e os competidores não conseguem ter qualquer lucro acima do retorno esperado para a natureza do negócio no qual atuam (PINDYCK & RUBINFELD 2000). Resultados similares aos previstos por nesse equilíbrio foram encontrados no cálculo de equilíbrio considerando decisões de preço e propaganda no modelo proposto.

3 Formulação do modelo

Como em qualquer modelo matemático que busca representar a realidade, algumas assunções, recorrentes na literatura de difusão da inovação, foram necessárias para a formulação do modelo. Essas foram separadas em dois grupos: as usualmente utilizadas em trabalhos de difusão da inovação e as criadas especificamente para o presente trabalho

3.1 Assunções

3.1.1 Assunções recorrentes na literatura

- i. **Categoria de produtos bem definida:** o modelo considera a competição entre marcas dentro de uma categoria de produtos bem definida, na qual a diferenciação não é muito significativa. Assim, o potencial de mercado é estimado para a categoria como um todo, dentro do qual as empresas disputam fatias de mercado. Exemplos de categorias de produtos são “Televisores de LCD” e “Carros populares”.
- ii. **Potencial de mercado da categoria de produtos é conhecido:** o potencial de mercado da categoria de produtos, em número de unidades vendidas, foi considerado determinístico no modelo;
- iii. **Os competidores entram no mercado simultaneamente:** nenhuma empresa possui a vantagem por ser o primeiro e, por isso, ninguém exerce o papel de líder do mercado. Todas as empresas tomam a decisão simultaneamente, o que possibilita o cálculo das decisões ótimas de preço e propaganda através do Equilíbrio Nash;
- iv. **As variáveis do *marketing mix* impactam os coeficientes de inovação e imitação na mesma proporção:** assim como no GBM (*Generalized Bass Model*), assume-se que o impacto das variáveis do marketing mix é o mesmo nos coeficientes de inovação (p) e de imitação (q);

3.1.2 Assunções específicas do presente trabalho

- i. **A fatia de Mercado destinada a cada empresa é função do processo de difusão da inovação, além das decisões de preço e propaganda das marcas:** a dinâmica do mercado para a categoria de produtos como um todo segue uma “curva S” e a fatia de mercado de cada empresa, a qual representa a escolha do

consumidor entre as marcas. Essa escolha é baseada em variáveis ligadas ao *marketing mix* (preço e propaganda) e a atributos intrínsecos aos produtos (representados pelos coeficientes de inovação, imitação, precificação e propaganda);

ii. **Decisões de preço e propaganda de uma empresa impactam a fatia de mercado das demais:** como as empresas estão disputando fatias de mercado em um oligopólio e as variáveis do *marketing mix* (preço e propaganda) influenciam a decisão do consumidor por uma ou outra marca, consideramos que as decisões de preço e propaganda de uma empresa têm impacto (positivo ou negativo) na fatia de mercado atingida pelas concorrentes;

iii. **O processo de tomada de decisão segue um horizonte de tempo discreto:** com o intuito de aproximar o processo decisório do modelo do que é observado na prática, o processo de decisão foi definido seguindo um horizonte de tempo discreto (por exemplo, semestral, mensal ou anual);

iv. **As definições de preço e propaganda seguem estratégias míopes:** Apesar de tomadores de decisão reconhecerem a importância de se planejar as estratégias de preço e propaganda com antecedência, é constatado que empresas tomam decisão para um curto espaço de tempo baseadas nos últimos resultados obtidos e na reação recente dos competidores (McKinsey&Company 2008). Assim, assumir que empresas tomam decisões míopes, isto é, sem enxergar todo o processo de difusão do novo produto, representa as dinâmicas de competição de um novo mercado. Isso reflete bem o fato de empresas não conseguirem prever com precisão as reações de competidores no longo prazo, o que ocorre especialmente em cenários com elevado grau de incerteza como o de novas tecnologias;

- v. **O valor do dinheiro no tempo não impacta a tomada de decisão:** apesar do valor do dinheiro no tempo ser uma variável importante no processo decisório de empresas, esse aspecto foi desconsiderado, sem perda de generalização, no modelo dada a miopia do processo decisório (explicada no item anterior).

3.2 Função Densidade de Compra

O modelo proposto representa a evolução das vendas de uma nova categoria de produtos ou serviços ao longo de seu ciclo de vida considerando competição entre marcas. Quando comparado à literatura sobre difusão, o modelo pode ser considerado uma extensão do GBM - *Generalized Bass Model*, (BASS, KRISHNAN & JAIN 1994), além de possuir similaridades com o modelo proposto por (KRISHNAN, BASS & KUMAR 2000).

Com o intuito de modelar a competição entre marcas durante o processo de difusão, foi seguida a abordagem proposta por (KRISHNAN, BASS & KUMAR 2000). Dessa forma, a função densidade de vendas da empresa i é dada por $f_i(t)$. Isso significa que a fatia de mercado total (da categoria de produtos) obtida pela empresa i durante o período t é dada por:

$$\frac{f_i(t)}{[1 - F(t)]} = x_i(t)[p_i + q_i F(t)]$$

Equação 8 – Difusão de uma empresa segundo o modelo proposto

O que difere a Equação 8 da equação proposta por (KRISHNAN, BASS & KUMAR 2000) é o coeficiente $x_i(t)$, o qual representa o efeito das decisões de preço e propaganda de todos os *players* no processo de difusão da empresa i .

A Equação 8 é, na verdade, análoga à Equação 2 (equação fundamental do GBM), porém com o foco no processo de difusão da empresa i , e não de toda categoria de produtos.

Os termos p_i e q_i representam, respectivamente, os coeficientes de inovação e imitação específicos da empresa i . $x_i(t)$ representa o esforço de *marketing* da empresa i e o efeito do esforço de marketing dos demais competidores nas vendas da empresa i . Já o termo $F(t)$ representa a função cumulativa do nível de vendas de toda a categoria de produtos (ou seja, a soma das vendas de todas as marcas) até o período t .

Conforme apresentado por (KRISHNAN, BASS & KUMAR 2000), esse tipo de modelagem que considera a difusão das marcas como função da difusão de uma categoria é aplicável para os casos nos quais a categoria de produtos é bem definida (o que foi explicado nas assunções do modelo). Ainda segundo (KRISHNAN, BASS & KUMAR 2000), esse tipo de análise proporciona resultados mais aderentes à realidade se comparado a análises tradicionais de participação de mercado (*market share*). Isso ocorre porque no modelo de difusão o mercado é considerado em fase de crescimento, enquanto nos modelos tradicionais, o mercado tem um tamanho “estático” ou com pequenas variações.

3.3 Variáveis de decisão (Preço e Propaganda)

Uma diferença significativa entre o modelo proposto no presente trabalho e o GBM é o coeficiente que representa a influência do *marketing mix* no processo de difusão. Segundo o GBM, o coeficiente $x(t)$, dado pela Equação 3, o efeito do *marketing mix* no processo de difusão é função das decisões de preço e propaganda de uma única empresa, o que faz sentido em mercados monopolistas. Entretanto, para modelar a difusão da inovação em um mercado oligopolista, foi

necessário incluir a influência das decisões de preço e propaganda de todas as empresas no processo de difusão. Dessa forma, o coeficiente referente ao *marketing mix* do processo de difusão da empresa i é dado por:

$$x_i(t) = 1 + \left[\frac{P_i'(t)}{P_i(t)} \right] \beta_{P_i} + \left[\frac{A_i'(t)}{A_i(t)} \right] \beta_{A_i} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left\{ \left[\frac{P_j'(t)}{P_j(t)} \right] \beta_{P_{ji}} + \left[\frac{A_j'(t)}{A_j(t)} \right] \beta_{A_{ji}} \right\}$$

Equação 9 - Esforço de marketing de uma empresa segundo o modelo proposto

E sua função cumulativa é dada por:

$$X_i(t) = t + \left[\text{Ln} \frac{P_i(t)}{P_i(0)} \right] \beta_{P_i} + \left[\text{Ln} \frac{A_i(t)}{A_i(0)} \right] \beta_{A_i} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left\{ \left[\text{Ln} \frac{P_j(t)}{P_j(0)} \right] \beta_{P_{ji}} + \left[\text{Ln} \frac{A_j(t)}{A_j(0)} \right] \beta_{A_{ji}} \right\}$$

Equação 10 - Esforço cumulativo de marketing de uma empresa segundo o modelo proposto

Essas equações compõem uma das principais diferenças entre o presente trabalho e pesquisas já conhecidas. Os primeiros termos da Equação 9, $1 +$

$\left[\frac{P_i'(t)}{P_i(t)} \right] \beta_{P_i} + \left[\frac{A_i'(t)}{A_i(t)} \right] \beta_{A_i}$, são similares ao esforço corrente de *marketing* proposto no

GBM. Esse termo representa a influência das decisões de preço e propaganda da própria empresa em seu processo de difusão. Já o segundo termo, dado por

$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left\{ \left[\frac{P_j'(t)}{P_j(t)} \right] \beta_{P_{ji}} + \left[\frac{A_j'(t)}{A_j(t)} \right] \beta_{A_{ji}} \right\}$, representa o somatório do efeito das decisões de

preço e propaganda de cada um dos $n - i$ competidores j no nível de vendas da empresa i .

De forma mais específica, a influência da decisão de preço da empresa j nas vendas da empresa i é representada pelo termo $\left[\frac{P_j'(t)}{P_j(t)}\right] \beta_{P_{ji}}$, no qual $\frac{P_j'(t)}{P_j(t)}$ representa a variação instantânea de preço da empresa j no instante t e $\beta_{P_{ji}}$ é o coeficiente que representa o efeito (ou a intensidade) dessa variação sobre as vendas da empresa i . Já a influência da decisão de propaganda da empresa j nas vendas da empresa i é representada pelo termo $\left[\frac{A_j'(t)}{A_j(t)}\right] \beta_{A_{ji}}$, no qual $\frac{A_j'(t)}{A_j(t)}$ representa a variação instantânea de propaganda da empresa j no instante t e $\beta_{A_{ji}}$ é o coeficiente que representa o efeito (ou a intensidade) dessa variação.

Com base na definição da Equação 9 e da Equação 10, é possível estimar o nível de vendas de cada competidor como função das decisões de todos os players do mercado.

3.4 Relação do modelo proposto como BM e GBM

3.4.1 Definição dos termos

Como já foi apresentado em alguns trabalhos, por exemplo, (HAUSER, G.J. & GRIFFIN 2006) e (MEADE & ISLAM 2006), tanto o modelo original de Bass (BM), quanto o GBM possuem grande aderência prática. Assim, é importante demonstrar que o modelo proposto nesse trabalho pode ser reduzido tanto ao GBM quanto ao BM dadas algumas considerações.

Em primeiro lugar, é coerente afirmar que os coeficientes de inovação e imitação de uma categoria de produtos, dados por p e q respectivamente, são compostos pelos somatórios dos coeficientes de inovação e imitação de cada empresa do mercado. Isso pode ser representado pelas seguintes equações:

$$p = \sum_{i=0}^n p_i$$

Equação 11 - Coeficiente de inovação da categoria de produtos

$$q = \sum_{i=0}^n q_i$$

Equação 12 - Coeficiente de imitação da categoria de produtos

No caso de um monopólio, os coeficientes da marca se igualam aos coeficientes da categoria de produtos, o que demonstra aderência aos modelos BM e GBM, os quais representam mercados monopolistas ou a difusão de uma categoria de produtos como um todo.

O mesmo raciocínio é seguido para modelar as funções densidade ($f(t)$) e cumulativa ($F(t)$) de vendas para a categoria de produtos. Para a coerência do modelo, as funções densidade e cumulativa de vendas da categoria devem ser consideradas o somatório das funções densidade e cumulativa de vendas das empresas competidoras. Isso é representado pelas seguintes equações:

$$f(t) = \sum_{i=0}^n f_i(t)$$

Equação 13- Difusão da categoria de produtos

$$F(t) = \sum_{i=0}^n F_i(t)$$

Equação 14- Difusão acumulada da categoria de produtos

Nas quais $F_i(t)$ e $f_i(t)$ representam, respectivamente, as funções densidade e cumulativa de adoção da marca i . Assim como no caso dos coeficientes de imitação e inovação, as funções densidade e cumulativa de uma empresa monopolista se igualam às funções da categoria. Esse resultado, apesar de trivial, ajuda a demonstrar a relação entre o modelo proposto e os modelos GBM/BM. É importante ressaltar que, para que essas relações sejam mantidas, $0 \leq \sum_{i=0}^n F_i(t) \leq 1$ e $0 \leq \sum_{i=0}^n f_i(t) \leq 1$.

O próximo passo é relacionar o coeficiente de *marketing mix* das marcas ($x_i(t)$) ao coeficiente da categoria de produtos ($x(t)$). Se seguirmos o mesmo raciocínio utilizado nas equações apresentadas acima, (Equação 11, Equação 12, Equação 13 e Equação 14) chegamos à seguinte equação:

$$\sum_{i=0}^n x_i(t) = n + \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{P_i'(t)}{P_i(t)} \beta_{P_i} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{P_j'(t)}{P_j(t)} \beta_{P_{ji}} + \frac{A_i'(t)}{A_i(t)} \beta_{A_i} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{A_j'(t)}{A_j(t)} \beta_{A_{ji}} \right\}$$

Equação 15 - Somatório dos esforços de marketing da categoria de produtos

Claramente, a Equação 15 se difere da Equação 3, a qual representa o coeficiente $x(t)$, referente ao *marketing mix* da categoria de produtos no GBM. Com o intuito de relacionar os coeficientes $x_i(t)$ ao termo $x(t)$, uma alternativa direta é dividir a Equação 15 pelo número de competidores n . Dessa forma, obtemos:

$$\frac{\sum_{i=0}^n x_i(t)}{n} = 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{P_i'(t)}{P_i(t)} \beta_{P_i} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{P_j'(t)}{P_j(t)} \beta_{P_{ji}} + \frac{A_i'(t)}{A_i(t)} \beta_{A_i} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{A_j'(t)}{A_j(t)} \beta_{A_{ji}} \right\}$$

Equação 16 - Esforço de marketing médio da categoria de produtos

A Equação 16 pode ser interpretada como o efeito médio das variáveis do *marketing mix* das marcas que competem em uma categoria de produtos. Tal interpretação proporciona análises interessantes.

Em primeiro lugar, o efeito de decisões de preço e propaganda de uma empresa na difusão da categoria como um todo é diluído com o aumento do número de competidores. Extrapolando a análise de um oligopólio para um mercado de competição perfeita, pode-se considerar $n \rightarrow \infty$, o que faz com que o termo

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{P_i'(t)}{P_i(t)} \beta_{P_i} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{P_j'(t)}{P_j(t)} \beta_{P_{ji}} + \frac{A_i'(t)}{A_i(t)} \beta_{A_i} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{A_j'(t)}{A_j(t)} \beta_{A_{ji}} \right\} \text{ tenda a zero.}$$

Nesse caso, o *marketing mix* deixa de ter qualquer influência no processo de difusão da categoria de produtos (como ocorre no BM). Assim o modelo proposto se reduz ao BM.

Considerando o caso oposto, no qual há apenas uma empresa no mercado (um monopólio), seu *marketing mix* $x_i(t)$ é o exatamente igual ao *marketing mix* da categoria de produtos $x(t)$. Isso porque o termo referente às decisões das empresas concorrentes se anula e o termo $1 + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{P_i'(t)}{P_i(t)} \beta_{P_i} + \frac{A_i'(t)}{A_i(t)} \beta_{A_i} \right\}$ é mantido. Assim o termo $x(t)$ do modelo proposto se iguala ao do GBM.

Com base nessas análises, é seguro definir o termo $x(t)$, referente ao *marketing mix* da categoria de produtos, pela Equação 16, e pode ser reescrito como:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{P_i'(t)}{P_i(t)} \beta_{P_i} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{P_j'(t)}{P_j(t)} \beta_{P_{ji}} + \frac{A_i'(t)}{A_i(t)} \beta_{A_i} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{A_j'(t)}{A_j(t)} \beta_{A_{ji}} \right\}$$

3.4.2 Aproximações para GBM e BM

Com base no desenvolvimento apresentado na seção anterior, é relativamente simples a aproximação do modelo proposto para o GBM e o BM.

A aproximação para o GBM pode ser feita de duas formas. A primeira consiste em considerar um Mercado monopolista (conforme apresentado na seção anterior). Nesse caso, todos os coeficientes e funções densidade e cumulativa referentes ao processo de difusão da empresa se igualam aos coeficientes e funções da categoria de produtos. Além disso, os coeficientes que representam a competição entre marcas deixam de existir. Assim, a Equação 8 pode ser reescrita como a Equação 2 e o termo dado pela Equação 9 se iguala à Equação 3.

A outra forma de aproximar o modelo proposto do GBM é considerar que o efeito cruzado das decisões de preço e propaganda dos competidores

$$\left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{P_j'(t)}{P_j(t)} \beta_{P_{ji}} \text{ e } \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{A_j'(t)}{A_j(t)} \beta_{A_{ji}} \right) \text{ seja nulo. Nesse caso, } x_i(t) \text{ pode ser reescrito}$$

como:

$$x_i(t) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{P_i'(t)}{P_i(t)} \beta_{P_i} + \frac{A_i'(t)}{A_i(t)} \beta_{A_i} \right\}$$

Equação 17 - Efeito do esforço de marketing de uma empresa desconsiderando o efeito das decisões de competidores

A Equação 17 é análoga à Equação 3, entretanto, representando o efeito do *marketing mix* de uma empresa apenas. Para obter o $x(t)$ da categoria, como apresentado no GBM, o próximo passo é calcular a média dos $x_i(t)$ de todas as empresas do mercado, como descrito na seção anterior.

Para aproximar o modelo proposto ao BM, que, segundo (BASS, KRISHNAN & JAIN 1994), é uma simplificação do GBM, existem três alternativas. A primeira delas é considerar um mercado monopolista (como feito para o GBM) e, em seguida, considerar que o impacto das decisões de preço (β_{P_i}) e propaganda (β_{A_i}) no processo de difusão é nulo (isto é, já está considerado nos coeficientes de inovação e imitação). Nesse caso, $x_i(t) = x(t) = 1$.

Outra alternativa é considerar um mercado oligopolista no qual não só o impacto das decisões de preço da própria empresa é nulo, mas também o impacto

cruzado das decisões dos concorrentes é nulo $\left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{P_j'(t)}{P_j(t)} \beta_{P_{ji}} \text{ e } \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{A_j'(t)}{A_j(t)} \beta_{A_{ji}} \right)$.

Nesse caso, $x_i(t) = 1$ e, conseqüentemente, $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_i(t) = 1$.

Finalmente, o modelo proposto se reduz ao BM no caso de competição perfeita, o qual foi explicado na seção anterior. Nesse caso, $n \rightarrow \infty$, o que faz com que a variação de preços ou propaganda de qualquer empresa não impacte o processo de difusão. Esse resultado é interessante, já que indica que o BM é útil não apenas para monopólios, mas também para a modelagem de categorias de produtos em um mercado de competição perfeita.

3.5 Solução do modelo em forma fechada

A obtenção da forma fechada do modelo proposto não foi tarefa trivial devido à complexidade matemática das equações. Para a solução de algumas das equações diferenciais foi utilizado o *software* WOLFRAN MATHEMATICA 6.0 como ferramenta de auxílio. Entretanto, após o desenvolvimento das equações no *software*, o desenvolvimento foi revisado manualmente e se encontra na seção 6 (ANEXOS).

Os passos utilizados no desenvolvimento matemático seguiram, de forma aproximada, o que foi feito por (KRISHNAN, BASS & KUMAR 2000). Estes autores, entretanto, analisam um problema similar, mercado com mais de uma empresa, porém as decisões de preço e propaganda não desempenhavam papel crucial. Por isso o coeficiente referente ao *marketing mix* não foi utilizado.

O primeiro passo é resolver a Equação 8. Para tanto, deve-se encontrar o termo $F(t)$, o qual representa a função cumulativa da categoria de produtos até o período t . Seguindo a análise feita em $F(t)$, é possível demonstrar que (ver detalhe do desenvolvimento e a interpretação da equação em (BASS, KRISHNAN & JAIN 1994)):

$$F(t) = \frac{1 - e^{-(X(t) - X(0))(p+q)}}{\left(\frac{q}{p}\right) e^{-(X(t) - X(0))(p+q)} + 1}$$

Equação 18 - Difusão acumulada da categoria de produtos segundo o modelo proposto

A seguir, deve-se substituir a Equação 18 na Equação 8. Dessa forma, obtém-se:

$$\frac{f_i(t)}{[1 - F(t)]} = \left(p_i + q_i \frac{1 - e^{-(X(t)-X(0))(p+q)}}{\left(\frac{q}{p}\right) e^{-(X(t)-X(0))(p+q)} + 1} \right) x_i(t)$$

Equação 19 - Processo de difusão de uma marca segundo o modelo proposto

A Equação 19 deve então ser resolvida. Sua solução, obtida numericamente pelo software WOLFRAN MATHEMATICA 6.0, é a seguinte integral indefinida:

$$F_i(t) = - \int_1^0 \left[\frac{e^{(p+q)X(0)}(p+q) \left(e^{(p+q)X(t)} p(p_i + q_i) + e^{(p+q)X(0)}(p_i q - p q_i) \right) x_i(t)}{(p e^{(p+q)X(t)} + q e^{(p+q)X(0)})^2} \right] dt$$

$$+ \int_1^t \left[\frac{x_i(t) e^{(p+q)X(0)}(p+q) \left(e^{(p+q)X(t)} p(p_i + q_i) + e^{(p+q)X(0)}(p_i q - p q_i) \right)}{(p e^{(p+q)X(t)} + q e^{(p+q)X(0)})^2} \right] dt$$

Equação 20 - Integral indefinida que representa as vendas acumuladas de uma empresa segundo o modelo proposto

Claramente, essa solução não pode ser denominada uma “solução fechada” do problema. Entretanto, pode-se obter a função densidade de vendas da empresa i , $f_i(t)$, diferenciando a Equação 20 em t . Após a diferenciação, a seguinte equação é obtida:

$$f_i(t) = x_i(t) \frac{e^{(p+q)X(0)}(p+q) \left(e^{(p+q)X(t)} p(p_i + q_i) + e^{(p+q)X(0)}(p_i q - p q_i) \right)}{(p e^{(p+q)X(t)} + q e^{(p+q)X(0)})^2}$$

Equação 21 - Solução fechada da equação que representa as vendas de uma empresa no modelo proposto

Essa equação é, portanto, a função densidade de vendas da empresa i no instante t como função dos coeficientes de inovação e imitação, coeficientes de preço e propaganda e decisões de preço e propaganda de todas as empresas do mercado. O termo $x_i(t)$, como já explorado, reflete o esforço de *marketing* das empresas. Já o segundo termo representa o processo de difusão considerando os

coeficientes de inovação e imitação da categoria e da empresa i , além do impacto acumulado do esforço de *marketing*.

3.6 Processo de tomada de decisão

3.6.1 Adequação do modelo

Como descrito na introdução do trabalho, um dos principais objetivos da presente pesquisa é auxiliar tomadores de decisão na definição de estratégias de preço e propaganda ao longo do ciclo de vida de novos bens duráveis ou serviços de assinatura. Com esse objetivo em mente, e considerando a complexidade das equações desenvolvidas na seção anterior, foram desenvolvidos alguns ajustes no modelo com o intuito de simplificar sua implementação prática.

O primeiro ajuste foi considerar o horizonte de tomada de decisões como discreto, ao invés de deixá-lo em tempo contínuo, como apresentado na seção anterior. Tal ajuste representa bem a realidade do processo de tomadas de decisão de preço e propaganda das empresas. Isso porque as decisões são tomadas periodicamente (por exemplo, semanalmente, mensalmente ou anualmente) em função dos níveis de vendas obtidos, da entrada de produtos concorrentes e das decisões de empresas concorrentes (URBAN & HAUSER 1993).

Outro ajuste foi considerar que as empresas seguem um processo de decisão míope. Isto é, elas buscam maximizar os lucros no próximo período de decisão ao invés de buscar maximizar o valor presente líquido ou a geração de caixa de todo o ciclo de vida do produto. Essa simplificação captura, na verdade, a dinâmica de decisão presente em um mercado competitivo, já que as empresas não conseguem prever, no longo prazo, a reação dos concorrentes. (CHRISTENSEN 1997) indica que o nível de incerteza encontrado em novos Mercados, em especial

se tratando de tecnologias disruptivas, limita muito o planejamento de longo prazo das empresas.

Além disso, essa simplificação reflete bem os resultados obtidos em um estudo recente (McKinsey&Company 2008). Os resultados desse trabalho demonstram que gestores, ao definir a estratégia de precificação de seus produtos ou serviços, estão mais preocupados com os efeitos no curto prazo do que no longo prazo. 12% dos gestores afirmaram que consideram os efeitos obtidos num período de seis meses após a tomada de decisão. 32% disseram que consideram um período de seis meses a um ano e 28% dos gestores afirmaram considerar um período de 12 a 24 meses. Além disso, apenas 9% dos gestores afirmaram utilizar ferramentas de VPL (valor presente líquido) de longo prazo para analisar suas próximas decisões e, também, as próximas decisões dos concorrentes. Essa série de resultados reforça a relevância prática do presente trabalho para o processo de tomada de decisão das empresas.

As duas simplificações são refletidas no modelo da seguinte forma. Em relação à discretização do tempo, o ciclo de vida dos produtos foi dividido em n períodos de $t = 0$ até $t = T$, dentro dos quais uma decisão de preço ou propaganda não pode ser alterada.

Em relação ao processo míope de decisão, consideramos que a empresa toma decisão no período t com o objetivo de maximizar os lucros obtidos no período $t + 1$, ao invés de buscar maximizar os lucros obtidos em todo o ciclo de vida do produto, T . Seguindo essa lógica, em cenários de inflação e juros baixos, como ocorre atualmente na maior parte do mundo, praticamente não há necessidade de se considerar o valor do dinheiro no tempo. Por isso, não foi considerado nenhum fator referente à taxa de desconto na equação de maximização dos lucros.

Para ilustrar as simplificações supracitadas, um exemplo conceitual é apresentado. Considere ciclo de vida do produto ou serviço dividido em quatro períodos: introdução no mercado, crescimento, maturidade e declínio (Figura 3).

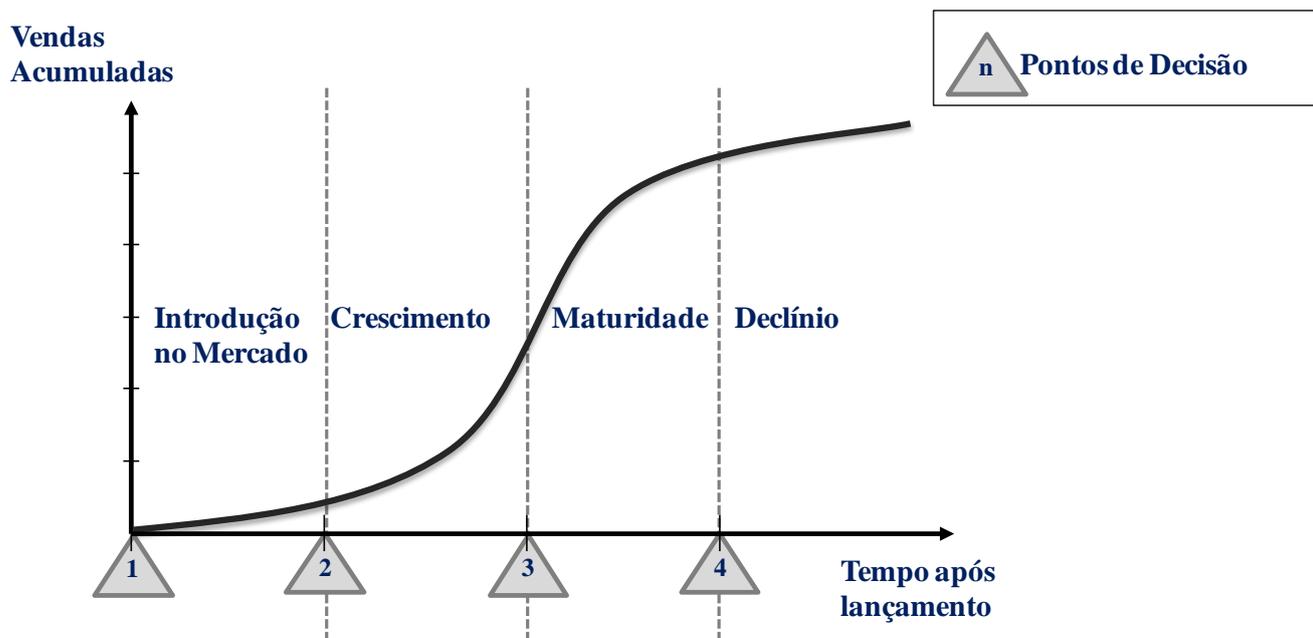


Figura 3 - Exemplo ilustrativo de pontos de tomada de decisão ao longo do ciclo de vida de um produto

Nesse exemplo serão tomadas apenas quatro decisões de preço e propaganda ao longo de todo o ciclo de vida do produto (no cada início de período). Obviamente, é normal que mais decisões sejam tomadas ao longo do ciclo de vida do produto (isto é, existam muito mais que quatro divisões ao longo do ciclo de vida do produto). Entretanto, esse exemplo simples é bastante intuitivo para compreender a simplificação do problema.

3.6.2 Função Lucro

Dadas as adequações do modelo acima descritas, é possível definir a função lucro a ser maximizada:

$$\max \Pi_i(t) = \max[S_i(t)(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))]$$

Equação 22 - Maximização do lucro

Na qual $S_i(t)$ representa o nível de vendas da empresa i no período t , $P_i(t)$ representa o preço definido pela empresa i no período t , $C_i(t)$ representa o custo unitário de produção da empresa i no período t e $A_i(t)$ representa o investimento unitário em propaganda definido pela empresa i no período t .

Enquanto as variáveis $P_i(t)$ e $A_i(t)$ emergem como variáveis de decisão, e $C_i(t)$ representa uma variável conhecida, $S_i(t)$ possui comportamento complexo, já que depende de uma série de fatores, incluindo as variáveis de decisão $P_i(t)$ e $A_i(t)$. A seguir esse termo é analisado separadamente com base nas simplificações apresentadas na seção anterior.

3.6.2.1 Nível de Vendas - $S_i(t)$

O primeiro passo para se obter $S_i(t)$ é transformar a função densidade da difusão, dada por $f_i(t)$, no nível de vendas do período t . Seguindo a abordagem sugerida por (SRINIVASAN & MASON 1986) para a discretização do modelo de Bass, tem-se:

$$f_i(t) = \begin{cases} F_i(t) & t = 1 \\ F_i(t) - F_i(t - 1) & t > 1 \end{cases}$$

Equação 23 - Vendas de uma empresa como função das vendas acumuladas ao longo do tempo

Com base na Figura 23, $S_i(t)$ pode ser obtido pela multiplicação da variável $f_i(t)$ pelo potencial de Mercado estimado para a categoria de produtos, dado por M :

$$S_i(t) = Mf_i(t)$$

Equação 24 - Valor absoluto de vendas de uma empresa para um determinado período

Para garantir a simplificação do modelo, M foi considerado como o potencial de Mercado fixo. Ou seja, independentemente de se tratar de um mercado de monopólio ou oligopólio, o potencial de mercado é o mesmo em ambas as situações. O que muda, na verdade, é a velocidade com a qual a difusão se dá. Em outras palavras, a entrada de outros competidores pode tanto impactar os coeficientes de inovação e imitação da categoria ao incorporar novos p_i 's e q_i 's, quanto acirrar a competitividade de preço e propaganda, o que acaba impactando o $x(t)$ da categoria.

Em alguns trabalhos, como (KRISHNAN, BASS & KUMAR 2000), autores argumentam que, além de acelerar a difusão, a entrada de novos competidores aumenta o potencial de mercado. Entretanto, como nesse trabalho não é considerada a entrada potencial de empresas, pode-se dizer que o tamanho de mercado M foi definido para os competidores já estabelecidos no mercado.

Com a estimativa do potencial de Mercado da categoria de produtos, o tomador de decisão deve compreender como se dá o processo de difusão para estimar as vendas dos períodos futuros. Dois aspectos merecem destaque nesse estágio. O primeiro deles, já mencionado, é que a tomada de decisão segue um processo discreto no qual o gestor toma as decisões de preço e propaganda referentes ao período t ao fim do período $t - 1$. Essa dinâmica se repete durante todo o ciclo de vida do produto ou serviço.

O segundo aspecto a ser destacado está relacionado às informações disponíveis para o tomador de decisão. Um gestor dificilmente terá acesso ao valor

de todas as variáveis apresentadas pela Equação 21 (que define $f_i(t)$). Além de conseguir estimar parâmetros intrínsecos à sua marca (q_i, p_i e $x_i(t)$), gestores também deveriam estimar outros coeficientes como q, p e $X(t)$. Considerando essa limitação prática, uma abordagem mais condizente com a realidade do processo de tomada de decisão é sugerida.

Ao fim do período $t - 1$, instante no qual a tomada de decisão de preço e propaganda para o período t é feita, as informações disponíveis para a empresa (ou, ao menos, as quais podem ser estimadas com mais facilidade) são os níveis de vendas dos *players* do mercado e as respectivas decisões de preço e propaganda do período $t - 1$.

Com isso, e seguindo a idéia de discretização do modelo, como proposto por (SRINIVASAN & MASON 1986), pode-se reescrever a Equação 8, que representa $f_i(t)$, em um novo formato que utiliza apenas as informações disponíveis ao fim do período $t - 1$:

$$\frac{f_i^{prev}(t)}{[1 - F_i(t - 1) - \sum_{j=1, j \neq i}^n F_j(t - 1)]} = \left[p_i + q_i[F_i(t - 1) + \sum_{j=1, j \neq i}^n F_j(t - 1)] \right] x_i(t)$$

Equação 25- Aproximação da demanda prevista para o período t

Em que $\sum_{j=1, j \neq i}^n F_j(t)$ representa as vendas acumuladas da categoria, excluindo a empresa i , até o período $t - 1$ e $F_i(t)$ representa as vendas acumuladas da empresa i até o fim do período $t - 1$.

O próximo passo da análise é resolver a Equação 25. Para tanto, foi criada uma variável que servirá apenas para facilitar a notação utilizada no desenvolvimento. $H_i(t - 1)$ representa a venda cumulativa até o fim do período

$t - 1$ das empresas concorrentes da empresa i . Essa relação é representada abaixo:

$$H_i(t - 1) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_j(t - 1)$$

Equação 26 - Nível acumulado de vendas das marcas de uma categoria de produtos com exceção da empresa i

Substituindo a Equação 26 na Equação 25, obtém-se a equação que representa o nível esperado de vendas da empresa i no período t como função das vendas acumuladas até o período $t - 1$ tanto da empresa i quanto de seus competidores t , além dos coeficientes de inovação, imitação e de *marketing mix* da empresa i :

$$\frac{f_i^{prev}(t)}{[1 - F_i(t - 1) - H_i(t - 1)]} = \{p_i + q_i[F_i(t - 1) + H_i(t - 1)]\}x_i(t)$$

Equação 27 - Aproximação do processo de difusão da empresa i segundo o modelo proposto

Rearranjando a Equação 27 é possível isolar $f_i(t)$ e calculá-lo a partir de variáveis conhecidas e do coeficiente de *marketing mix*:

$$f_i^{prev}(t) = x_i(t) \left[p_i + (q_i - p_i)(F_i(t - 1) + H_i(t - 1)) - q_i(F_i(t - 1) + H_i(t - 1))^2 \right]$$

Equação 28 - Aproximação do nível de vendas da empresa i segundo modelo proposto

A discretização do modelo também exige um ajuste na variável $x_i(t)$, a qual, inclusive, foi proposta de maneira bastante similar por (BASS, KRISHNAN & JAIN 1994). Conforme a abordagem apresentada por esses autores, em um cenário

discreto, a variação do preço e da propaganda é obtida comparando as decisões realizadas no período $t - 1$ às decisões do presente período. Isso pode ser representado pela seguinte equação:

$$x_i(t) = 1 + \left[\frac{P_i(t) - P_i(t-1)}{P_i(t-1)} \right] \beta_{P_i} + \left[\frac{A_i(t) - A_i(t-1)}{A_i(t-1)} \right] \beta_{A_i} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left\{ \left[\frac{P_j(t) - P_j(t-1)}{P_j(t-1)} \right] \beta_{P_{ji}} + \left[\frac{A_j(t) - A_j(t-1)}{A_j(t-1)} \right] \beta_{A_{ji}} \right\}$$

Equação 29 - Discretização do esforço de marketing de uma empresa segundo o modelo proposto

Com o que foi apresentado até esse ponto do trabalho é possível projetar o processo de difusão de um produto para determinadas estratégias de preço e propaganda dos competidores. Na próxima seção o objetivo é definir a estratégia ótima de precificação e investimento em propaganda.

3.7 Maximizando o Lucro

Para a definição da estratégia ótima de precificação e investimento em propaganda, a função lucro, dada pela Equação 22, deve ser reescrita considerando todas as adaptações descritas na seção anterior:

$$\max \Pi_i(t) =$$

$$\max \left\{ M \left[1 + \left(\frac{P_i(t) - P_i(t-1)}{P_i(t-1)} \right) \beta_{P_i} + \left(\frac{A_i(t) - A_i(t-1)}{A_i(t-1)} \right) \beta_{A_i} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left[\left(\frac{P_j(t) - P_j(t-1)}{P_j(t-1)} \right) \beta_{P_{ji}} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left(\frac{A_j(t) - A_j(t-1)}{A_j(t-1)} \right) \beta_{A_{ji}} \right] \left[p_i + (q_i - p_i)(F_i(t-1) + H_i(t-1)) - q_i(F_i(t-1) + H_i(t-1))^2 \right] (P_i(t) - C_i(t) - A_i(t)) \left. \right\}$$

Equação 30 - Maximização do lucro da empresa i considerando o processo de difusão

Analisando a Equação 30, fica claro que apenas os termos $x_i(t)$ e $(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))$ incluem variáveis de decisão. Todos os outros termos não podem ser alterados, ao menos no curto prazo, pelos tomadores de decisão. Com o objetivo de simplificar a manipulação matemática, todos os termos que não incluem variáveis de decisão foram substituídos pela variável $u_i(t)$:

$$u_i(t) = M \left[p_i + (q_i - p_i)(F_i(t-1) + H_i(t-1)) - q_i(F_i(t-1) + H_i(t-1))^2 \right]$$

Equação 31 - Termos da maximização de lucro que não têm influência de variáveis de decisão

Assim, a equação de maximização do lucro pode ser reescrita como:

$$\max \Pi_i(t) = \max [u_i(t)x_i(t)(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))]$$

Equação 32 - Simplificação da maximização de lucro da empresa i

Com base na Equação 32 é possível encontrar a estratégia ótima de preço e propaganda que maximiza os lucros no período t . Entretanto, um ponto deve ser ressaltado antes do início dos cálculos. Até aqui, o modelo foi proposto de forma genérica considerando um mercado oligopolista. A partir desse ponto, com o intuito de apresentar uma análise matemática menos densa, porém mantendo a essência

do problema, o modelo passa a considerar um mercado duopolista (com dois competidores). Trabalhos futuros podem manter a generalização do modelo na definição de estratégias ótimas de preço e propaganda.

Em um Mercado duopolista, na qual as empresas i e j competem, o lucro máximo em um determinado período t é obtido pela solução de um sistema de equações composto pelas curvas de reação de cada uma das empresas. A curva de reação é obtida pela condição de primeira ordem da Equação 32. Como o estágio de decisão é discreto e a política é míope, a condição de primeira ordem é suficiente para a obtenção das curvas de reação.

No caso de um mercado monopolista, no qual o objetivo é maximizar o lucro no longo prazo, as condições de segunda ordem também precisam ser atendidas. Em outras palavras, a matriz Hessiana $\nabla^2 \Pi_i(P_i^*(t), A_i^*(t))$ deve ser definida negativa. Essa condição é atendida para todos os valores positivos de $P_i(t)$ e $A_i(t)$. Isto pode ser comprovado analisando a referida matriz a partir das variáveis $P_i(t)$ e $A_i(t)$. Para maiores detalhes sobre o assunto, ver (BERTSEKAS 1999).

Dito isto, para calcular a decisão ótima de preço ou propaganda para o período t , a Equação 32 deve ser derivada em relação à $P_i(t)$ ou $A_i(t)$, respectivamente, e o resultado igualado à zero. Assim, obtém-se um sistema com uma equação e quatro incógnitas.

Considerando essa abordagem, a estratégia ótima de precificação para a empresa i no instante t é dada por (resultado já simplificado. O desenvolvimento matemático é apresentado na seção 6.1:

$$P_i(t)^* = P_i(t-1) \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{C_i(t) + A_i(t)}{P_i(t-1)} + \frac{1}{\beta_{P_i}} \left[-\beta_{A_i} \left(\frac{A_i(t)}{A_i(t-1)} - 1 \right) + \beta_{A_{ji}} \left(\frac{A_j(t)}{A_j(t-1)} - 1 \right) + \beta_{P_{ji}} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\}$$

Equação 33 – Preço ótimo da empresa i para o tempo t

E o investimento ótimo em propaganda para a empresa i no instante t é dado por (resultado já simplificado. O desenvolvimento matemático é apresentado na seção 6.2:

$$A_i(t)^* = A_i(t-1) \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{P_i(t) - C_i(t)}{A_i(t-1)} + \frac{1}{\beta_{A_i}} \left[-\beta_{P_i} \left(\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} - 1 \right) + \beta_{A_{ji}} \left(\frac{A_j(t)}{A_j(t-1)} - 1 \right) + \beta_{P_{ji}} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\}$$

Equação 34 - Investimento ótimo em propaganda da empresa i para o tempo t

A análise das equações acima proporciona interpretações interessantes. A primeira delas é que o termo $u_i(t)$, o qual reflete o processo de difusão do produto ou serviço, não é parte das soluções ótimas de preço e propaganda. Isso reflete o fato das empresas tomarem decisões míopes e, por isso, estarem preocupadas apenas em maximizar os lucros no próximo período. Nesse caso, as informações sobre o processo de difusão são úteis para o planejamento do nível de produção, por exemplo, mas não para as decisões sobre preço e investimento unitário em propaganda.

Outro ponto importante a ser destacado é que as estratégias ótimas de preço ou propaganda dependem de três outras variáveis de decisão: uma referente à própria empresa e duas referentes à empresa concorrente. Mais especificamente, a estratégia ótima de preços da empresa i depende de sua decisão sobre propaganda

e da decisão de preço e propaganda da empresa j . De maneira análoga, a decisão ótima de propaganda da empresa i depende de sua definição de preço e das definições de preço e propaganda da empresa j . Como as duas empresas buscam a estratégia ótima de preço e propaganda simultaneamente, foi utilizada uma forma de equilíbrio da teoria dos jogos, mais especificamente o Equilíbrio Nash, para modelar o problema. Na próxima seção essa abordagem é explicada em maior detalhe.

4 Estratégias considerando o Equilíbrio Nash

Para a obtenção das estratégias ótimas de preço e propaganda das empresas competidoras utilizou-se o conceito de equilíbrio Nash. Entretanto, para solucionar o sistema de equações, a análise foi separada em quatro casos para a melhor compreensão do processo de tomada de decisão por parte das empresas. São esses:

- i) Equilíbrio Nash de preço considerando apenas a influência do preço no nível de vendas;
- ii) Equilíbrio Nash de preço em função de decisões de investimento em propaganda, cujos valores são conhecidos para ambas as empresas;
- iii) Equilíbrio Nash de propaganda considerando um preço conhecido (dado pelo mercado);
- iv) Equilíbrio Nash com decisões simultâneas de preço e propaganda.

Para cada um dos casos foram desenvolvidos cálculos e um exemplo numérico ilustrativo é analisado. Um caso baseado em dados reais do mercado de internet rápida nos EUA é utilizado para ilustrar e validar a aderência prática do modelo.

4.1.1 Equilíbrio Nash considerando efeito de preço nas vendas

4.1.1.1 Equação

O primeiro caso analisado é uma simplificação do modelo até então proposto no presente trabalho. Nesse, o efeito da propaganda na difusão foi desconsiderado e, com isso, não há investimento em propaganda. Ou seja, a única variável de decisão é o preço. Assim, a função lucro é definida por:

$$\max \Pi_i(t) = \max[u_i(t)x_i(t)(P_i(t) - C_i(t))]$$

Equação 35 - Maximização do lucro desconsiderando o investimento em propaganda

E o termo x_i é definido por (em um duopólio):

$$x_i(t) = 1 + \left[\frac{P_i(t) - P_i(t-1)}{P_i(t-1)} \right] \beta_{P_i} - \left[\frac{P_j(t) - P_j(t-1)}{P_j(t-1)} \right] \beta_{P_{ji}}$$

Equação 36 - Esforço de marketing da empresa i desconsiderando o investimento em propaganda

Seguindo a mesma abordagem utilizada para se obter o preço ótimo (Equação 33), deriva-se a Equação 35 em relação ao preço da empresa i , $P_i(t)$. Após simplificações, demonstradas na seção 6.3, tem-se que a variação ótima de preço da empresa i é dada por:

$$\frac{P_i^*(t)}{P_i(t-1)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{C_i(t)}{P_i(t-1)} + 1 + \frac{1}{\beta_{P_i}} \left[\beta_{P_{ji}} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\}$$

Equação 37 - Variação ótima de preços da empresa i desconsiderando o investimento em propaganda

Como esperado, a decisão ótima de preço da empresa i é função da decisão da empresa j . Considerando que a empresa j age de maneira racional e também

busca a estratégia ótima de preço, pode-se afirmar que a estratégia ótima de preço da empresa j é dada por uma equação análoga à Equação 37. Substituindo $P_j^{max}(t)$ em $P_i^{max}(t)$ e após manipulação matemática é possível reescrever como (ver manipulação matemática na seção 6.4):

$$P_i^*(t) = \frac{1}{k} \left\{ 2\beta_{P_i}\beta_{P_j}(C_i(t)) + P_i(t-1) \left[2\beta_{P_j}(\beta_{P_i} - \beta_{P_{ji}} - 1) + \beta_{P_{ji}}(-\beta_{P_{ij}} - 1) + \frac{C_j(t)\beta_{P_j}\beta_{P_{ji}}}{P_j(t-1)} \right] \right\}$$

Equação 38 - Preço ótimo em equilíbrio desconsiderando o investimento em propaganda

Para: $k = 4\beta_{P_i}\beta_{P_j} - \beta_{P_{ij}}\beta_{P_{ji}}$

Rearranjando os termos, a Equação 38 pode ser reescrita como:

$$\frac{P_i^*(t)}{P_i(t-1)} = \frac{1}{k} \left\{ \beta_{P_j} \left(2\beta_{P_i} \frac{C_i(t)}{P_i(t-1)} + \beta_{P_{ji}} \frac{C_j(t)}{P_j(t-1)} \right) + \Delta_P + \beta_{P_i}\beta_{P_j} - 2\beta_{P_j} - \beta_{P_{ji}} - \beta_{P_j}\beta_{P_{ji}} \right\}$$

Equação 39 - Variação ótima do preço em equilíbrio desconsiderando o investimento em propaganda

Para: $\Delta_P = (\beta_{P_i}\beta_{P_j} - \beta_{P_{ij}}\beta_{P_{ji}})$

Analisando a Equação 39, constata-se que a decisão ótima de preço de uma empresa é função da razão entre seu custo unitário de produção e o preço do período anterior ponderada pelo seu coeficiente de preço e da razão entre custo unitário de produção e o preço do concorrente no período anterior ponderada pelo impacto da precificação do concorrente em suas vendas. Esses termos ajustados por relações entre coeficientes ligados aos preços dos competidores.

4.1.1.2 Exemplo Numérico – dados ilustrativos

Para exemplificar essa e as demais situações de Equilíbrio Nash com dados ilustrativos, foi desenvolvido um modelo em um software de planilha de dados convencional. Os coeficientes de inovação e imitação utilizados no modelo foram definidos com base em trabalhos acadêmicos (mais especificamente (JIANG, BASS & BASS 2006) sugerem valores para p e q da categoria) ou de forma *ad hoc* para os coeficientes criados especificamente para esse trabalho.

Em relação ao custo das empresas, um valor fixo e arbitrário foi definido, já que a idéia é apenas ilustrar a operacionalização do modelo. Outra alternativa seria desenvolver uma curva decrescente de preço ao longo do tempo que ilustrasse a curva de aprendizado da companhia.

Para ilustrar um cenário competitivo no qual os produtos ou serviço possuem algum diferencial, apesar de pertencerem à mesma categoria, foi definido que uma empresa, no caso a empresa i , possui coeficientes maiores que os da empresa j .

O quadro abaixo apresenta os coeficientes e custos utilizados no exemplo ilustrativo:

	Coeficiente de inovação	Coeficiente de imitação	Impacto do preço	Impacto cruzado de preço	Custo
Categoria	$p = 4,71 \times 10^{-3}$	$q = 5,06 \times 10^{-1}$			
Empresa <i>i</i>	$p_i = 2,83 \times 10^{-3}$	$q_i = 3,04 \times 10^{-1}$	$\beta_{P_i} = -3$	$\beta_{P_{ij}} = -0,6$	$C_i(t) = \$150$
Empresa <i>j</i>	$p_j = 1,88 \times 10^{-3}$	$q_j = 2,02 \times 10^{-1}$	$\beta_{P_j} = -2,5$	$\beta_{P_{ji}} = -0,5$	$C_j(t) = \$145$

Tabela 1 -Custo unitário e coeficientes de inovação, imitação e de preço dos exemplos ilustrativos

Além dos valores definidos acima, outro valor definido de forma arbitrária foi o preço de lançamento do produto no mercado: $P(0)_i = P(0)_j = \$1000$. Como o foco do presente trabalho não está relacionado ao preço de lançamento de um novo produto, mas sim à definição do preço ao longo do ciclo de vida, não foi dada atenção especial a esse valor. Para discussões sobre preços de lançamento, ver (MARN, ROEGNER & ZAWADA 2003) e (ROEGNER, SEIFERT & SWINFORD 2001).

Com as informações apresentadas, é possível calcular os valores relacionados ao processo de difusão para o primeiro período da difusão, $t = 0$:

Período	$f(t)$	$f_i(t)$	$f_j(t)$	$x(t)$	$x_i(t)$	$x_j(t)$
0	0,47%	0,28%	0,19%	1,00	1,00	1,00

Tabela 2 - Nível de vendas e esforço de marketing no período 0 para as duas empresas segundo o Equilíbrio Nash de preços do exemplo ilustrativo

Isso indica que, ao fim do primeiro período, $t = 0$, as empresas atingiram em conjunto 0,47% do mercado total estimado. Para calcular a quantidade estimada de vendas da categoria, deve-se multiplicar $f(t)$ pelo tamanho estimado do mercado,

M (ou $f_i(t)$ e $f_j(t)$ para o cálculo das vendas dos competidores separadamente). Em relação aos termos $x(t)$, $x_i(t)$ e $x_j(t)$, esses são necessariamente 1, uma vez que ainda não houve qualquer variação de preços.

Com base nesses resultados e no valor de M , é possível calcular o lucro das empresas no período inicial. Considerando um mercado total de um milhão de clientes, tem-se:

$$\Pi_i(0) = M f_i(0) (P_i(0) - C_i(0)) = \$2,4 \text{ Mi}$$

$$\Pi_j(0) = M f_j(0) (P_j(0) - C_j(0)) = \$1,6 \text{ Mi}$$

Tal diferença era esperada uma vez que as empresas competem com o mesmo preço e a empresa i possui coeficientes de inovação e imitação maiores que a empresa j .

Considerando o processo decisório, o próximo passo dos gestores das empresas i e j seria definir o preço e o nível de produção para o período $t = 1$. Para calcular o preço, os gestores utilizam a Equação 38, função de informações conhecidas, dos coeficientes do processo de difusão e da estimativa do custo do concorrente. Já para calcular a previsão de demanda, os gestores utilizam a Equação 28, versão simplificada da equação que define processo de difusão, em função de informações conhecidas, do preço a ser utilizado no período seguinte e da expectativa do preço do concorrente (o qual é obtido pela equação do preço ótimo em equilíbrio Nash, Equação 38). Assim, têm-se os seguintes preços e as seguintes previsões de demanda (como função densidade):

Período	$P_i(t)$	$P_j(t)$	$f^{prev}(t)$	$f_i^{prev}(t)$	$f_j^{prev}(t)$
1	\$719,91	\$738,39	1,33%	0,72%	0,61%

Tabela 3 - Preços ótimos e nível de vendas no período 1 para as duas empresas segundo o Equilíbrio Nash de preços do exemplo ilustrativo

Ao fim do período, as empresas conseguem calcular o lucro obtido. No problema ilustrado, foi considerada a venda real como a obtida pela equação “completa” da difusão, dada pela Equação 21. Assim, a demanda real (como função densidade) e o lucro de cada empresa são dados por:

Período	$\Pi_i(t)$	$\Pi_j(t)$	$f(t)$	$f_i(t)$	$f_j(t)$
1	\$6,39 Mi	\$3,60 Mi	1,73%	1,12%	0,42%

Tabela 4 - Lucro e nível de vendas calculado para o período 1 para as duas empresas segundo o Equilíbrio Nash de preços do exemplo ilustrativo

Em relação ao efeito da decisão de preços no processo de difusão, dado pela variável $x(t)$, fica claro que a estratégia adotada pelas empresas aumentou a velocidade de difusão ($x(t) > 1$).

Período	$x(t)$	$x_i(t)$	$x_j(t)$
1	1,60	1,71	1,48

Tabela 5 - Esforço de marketing no período 1 para as duas empresas segundo o Equilíbrio Nash de preços do exemplo ilustrativo

Uma vez analisada a transição do período $t = 0$ para $t = 1$, pode-se replicar essa dinâmica para o restante do ciclo de vida do produto (que é dado por todos os

períodos até que $F(t) = 100\%$, ou seja, até que todo o mercado seja atingido). A tabela e os gráficos abaixo representam a dinâmica do ciclo de vida do produto:

Período	$F(t)$	$F_i(t)$	$F_j(t)$	$f(t)$	$f_i(t)$	$f_j(t)$	$P_i(t)$	$P_j(t)$
0	0,47%	0,28%	0,19%	0,47%	0,28%	0,19%	\$ 1000	\$ 1000
1	2,20%	1,40%	0,79%	1,73%	1,12%	0,61%	\$ 719,91	\$ 738,89
2	5,69%	3,70%	1,99%	3,49%	2,30%	1,19%	\$ 541,04	\$ 567,69
3	12,03%	7,89%	4,14%	6,34%	4,19%	2,15%	\$ 426,78	\$ 455,50
4	22,06%	14,48%	7,58%	10,03%	6,58%	3,45%	\$ 353,78	\$ 382,00
5	35,55%	23,16%	12,39%	13,49%	8,68%	4,81%	\$ 307,14	\$ 333,86
6	50,79%	32,66%	18,13%	15,24%	9,51%	5,74%	\$ 277,34	\$ 302,31
7	65,35%	41,41%	23,94%	14,56%	8,75%	5,81%	\$ 258,31	\$ 281,63
8	77,39%	48,39%	29,00%	12,04%	6,98%	5,06%	\$ 246,17	\$ 268,05
9	86,29%	53,40%	32,89%	8,90%	5,01%	3,89%	\$ 238,43	\$ 259,13
10	92,38%	56,75%	35,63%	6,09%	3,35%	2,74%	\$ 233,50	\$ 253,24
11	96,34%	58,89%	37,44%	3,96%	2,15%	1,81%	\$ 230,37	\$ 249,36
12	98,83%	60,23%	38,60%	2,49%	1,34%	1,15%	\$ 228,38	\$ 246,80
13	100,36%	61,05%	39,31%	1,53%	0,82%	0,71%	\$ 227,12	\$ 245,09

Tabela 6 - Preços ótimos e processo de difusão para as duas empresas segundo o Equilíbrio Nash de preços do exemplo ilustrativo

4.1.1.2.1 Interpretação do modelo

Com a interpretação dos valores da tabela e dos gráficos a seguir, gestores têm a possibilidade de desenvolver o planejamento no que diz respeito a uma série de decisões. Em primeiro lugar, com base na análise do nível acumulado de vendas ($F(t)$ – Figura 4), os gestores podem ter uma expectativa do tamanho do ciclo de vida do produto e planejar sua substituição. No caso apresentado, a expectativa é que o produto atinja 100% do mercado praticamente ao fim do 13º período de decisão (ao fim do 13º período o modelo indica que 100,36% do mercado foram

atingidos). Assim, as empresas podem planejar o início da substituição, como analisado em pesquisas, por exemplo, (MAHAJAN & MULLER 1996), para o período 9 ou 10, por exemplo. Além disso, as empresas conseguem ter uma idéia da fatia do mercado total obtida ao fim do ciclo de vida do produto. A expectativa é que a empresa i , a qual possui um produto melhor (com melhores coeficientes), atinja 60% do Mercado e a empresa j fique com os 40% restantes.

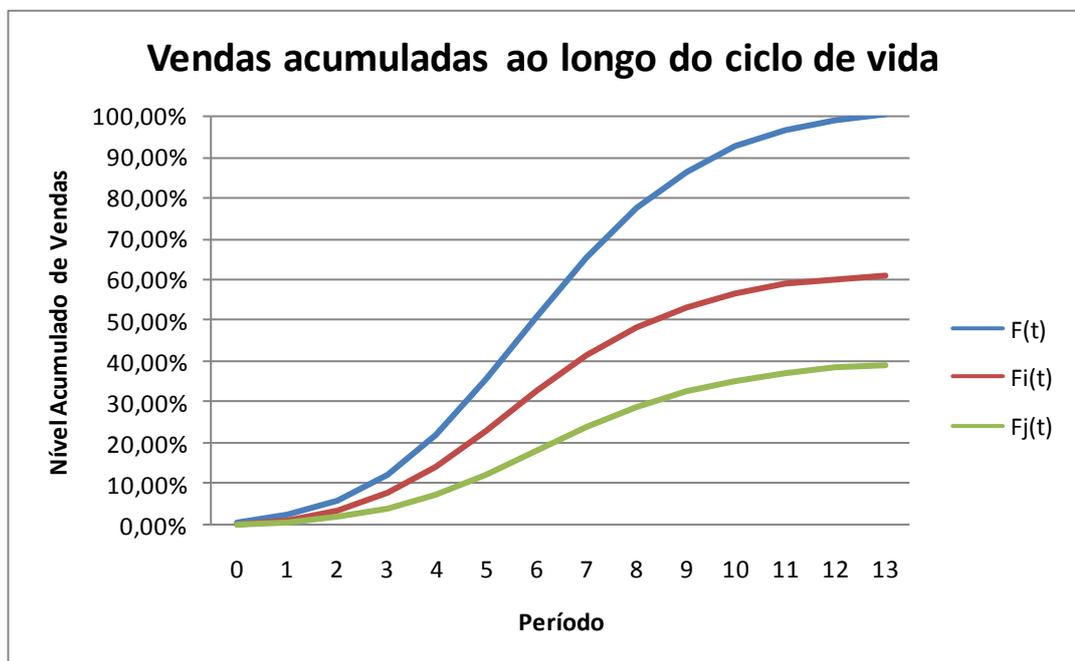


Figura 4 - Gráfico de vendas acumuladas do exemplo ilustrativo de Equilíbrio de Preços

Já as informações referentes à $f(t)$ (Figura 5 - Gráfico de vendas por período do exemplo ilustrativo de Equilíbrio de Preços) são úteis no planejamento de produção período a período, nos ajustes e no planejamento de capacidade das empresas (lógica de planejamento agregado). Com a análise das vendas discriminadas por período as empresas conseguem estimar o instante e a quantidade demandada no pico de demanda (período 6 para a empresa i , cerca de 10% do mercado e períodos 6 e 7 para a empresa j , cerca de 6% do mercado). Ou

seja, as empresas têm uma idéia da capacidade máxima produtiva requerida, a quantidade que deverão produzir, ofertar e estocar e também o momento em que a planta deve começar a ser substituída pela planta do novo produto.

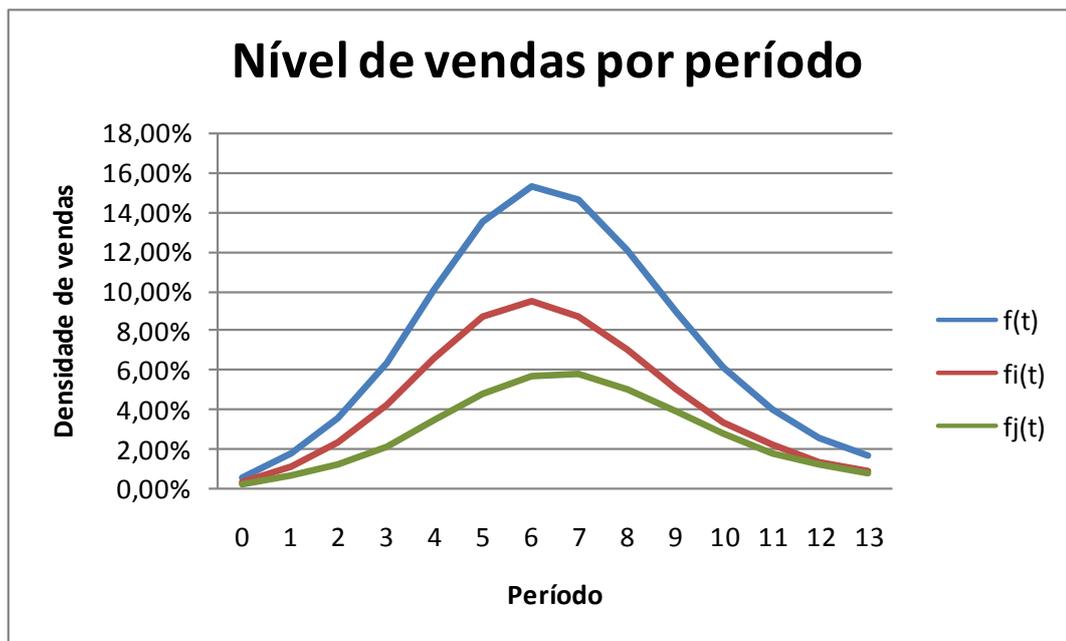


Figura 5 - Gráfico de vendas por período do exemplo ilustrativo de Equilíbrio de Preços

Em relação à estratégia de preços ($P_i(t)$ e $P_j(t)$ – Figura 6), as empresas podem não só planejar os preços para os períodos futuros, mas também fazer um planejamento financeiro considerando a margem e o nível de produção período a período. No exemplo apresentado, as empresas vão reduzindo o preço gradativamente até atingir um preço de equilíbrio, a partir do qual as empresas têm pouco incentivo para reduzir, já que a margem está reduzida, apesar de não ser nula.

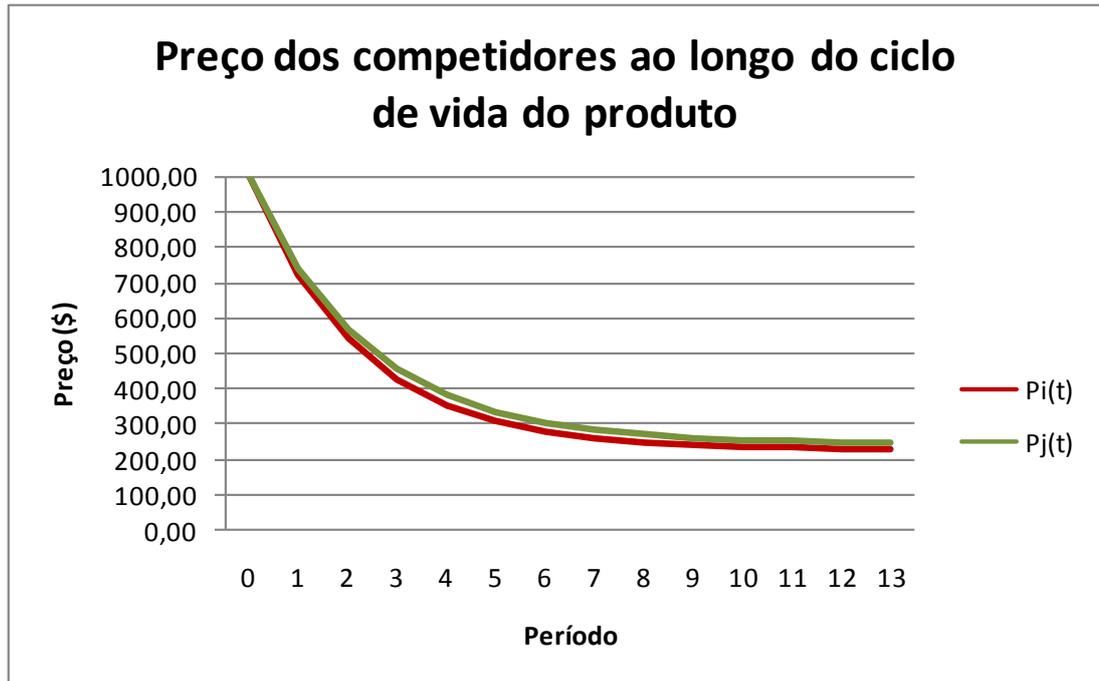


Figura 6 - Gráfico de nível ótimo de preços do exemplo ilustrativo de Equilíbrio de Preços

A análise financeira pode ser complementada pela projeção de lucros de cada empresa considerando as previsões de vendas, custos e preço (Figura 7). No exemplo apresentado, fica claro que, com o aumento da fatia de mercado proporcionado pela maior queda de preço e maior velocidade de difusão, a empresa *i* consegue aumentar os lucros mais rapidamente que a empresa *j*. Apenas ao fim do ciclo de vida do produto, a empresa *j* consegue igualar os lucros ao da empresa *i* principalmente pelo fato de manter o preço em um patamar mais elevado.

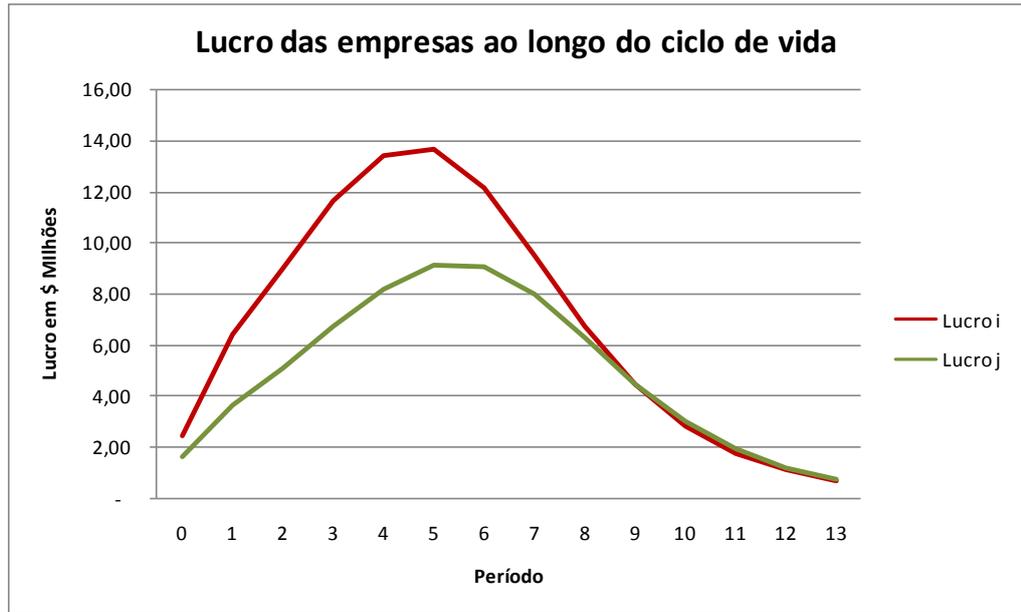


Figura 7 - Gráfico de lucro das empresas do exemplo ilustrativo de Equilíbrio de Preços

4.1.1.2.2 Aproximação de $f(t)$

Conforme indicado na seção 3.6, o modelo sofreu adaptações para que seja aplicado na prática. Um desses ajustes foi reescrever a equação que fornece $f_i(t)$, Equação 21, segundo o modelo discretizado (Equação 27). Abaixo são apresentados os processos de difusão modelados pela Equação 21 e pela Equação 27. Tanto visualmente quanto ao comparar os valores obtidos é fácil constatar que essa é uma aproximação satisfatória.

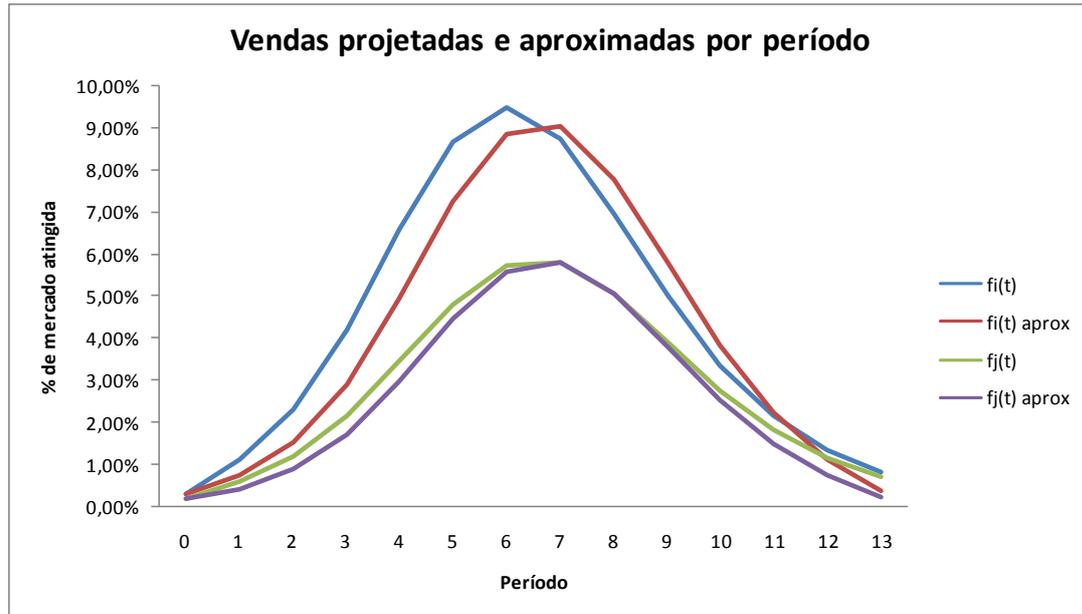


Figura 8 - Gráfico comparativo de vendas por período exemplo ilustrativo de Equilíbrio de Preços

No caso das vendas por períodos, a aproximação apresenta erro mais significativo na modelagem da curva da empresa i , a qual acaba projetando o processo de difusão com certo atraso (o pico é atingido um período depois e o nível de vendas projetado é menor antes e maior depois deste). Ainda assim, em termos absolutos, o erro é de 0,4% na média e de cerca de 9% em termos relativos. No caso da empresa j , comportamento similar é observado, porém com menor amplitude do erro.

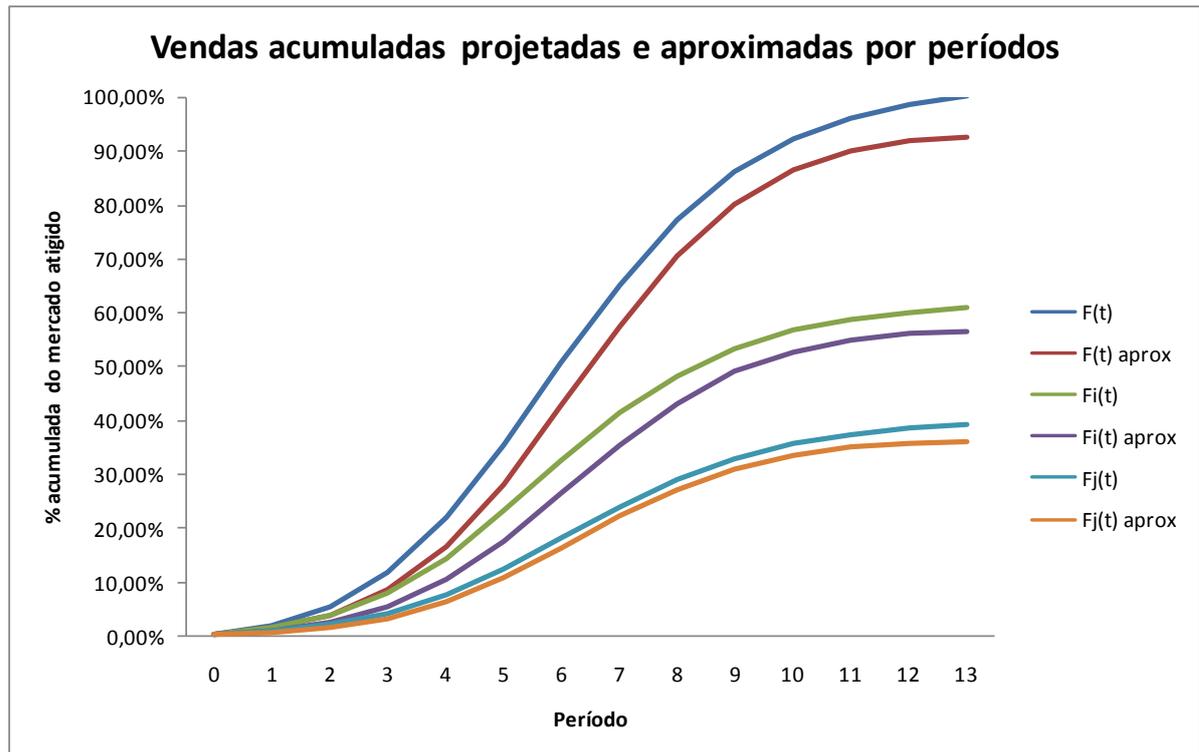


Figura 9 - Gráfico comparativo de vendas acumuladas por período - exemplo ilustrativo de Equilíbrio de Preços

Já no caso das vendas acumuladas, a aproximação similar para as duas empresas, projetando menor velocidade de difusão e, conseqüentemente, menor fatia de mercado atingida ao longo do tempo. Ainda assim, as curvas apresentam formato muito similar, constituindo uma boa aproximação do modelo.

4.1.2 Caso prático - internet rápida nos EUA

4.1.2.1 Introdução

Para ilustrar a aplicabilidade prática do modelo e sua aderência a situações reais, foi desenvolvida uma análise do mercado de provedores de internet rápida (banda larga) dos Estados Unidos desde o fim da década de 1990 até os dias de hoje.

O mercado norte-americano é hoje um oligopólio no que diz respeito tanto ao número de empresas concorrentes quanto à variedade de tecnologias disponíveis.

Em relação às tecnologias existentes, duas delas atendem a mais de 90% do mercado norte-americano (OECD 2008a): internet a cabo e internet baseada em linha telefônica (DSL, por exemplo). Assim, mesmo com a presença de outras tecnologias, como fibra-ótica e internet sem-fio (*wireless*), analisar o mercado norte-americano como um duopólio do ponto de vista tecnológico é uma aproximação bastante razoável.

Já em relação aos competidores, apesar de existir um oligopólio, duas empresas se destacam no que diz respeito ao número de assinantes. Dessas, uma é o principal *player* entre os provedores de internet via DSL e a outra é a líder de mercado de internet a cabo (a explicação técnica sobre as tecnologias está na seção 4.1.2.3). Cada uma delas possui participação de mais de 50% no mercado de sua tecnologia.

Como o intuito do trabalho é representar um modelo de difusão da inovação em um duopólio, optou-se por analisar a competição entre as tecnologias DSL e cabo tomando como base as decisões de seus principais *players* para a representação da dinâmica de competição do mercado. Ainda, devido à indisponibilidade de algumas informações, algumas aproximações referentes aos custos das empresas foram feitas. Ainda, como eram limitadas as informações sobre investimento em propaganda, optou-se por modelar um mercado de competição exclusiva por preço, como apresentado na seção anterior sobre Equilíbrio Nash de preços. Dessa forma, o investimento em propaganda foi considerado constante, discricionário e incorporado aos custos das empresas.

Abaixo é apresentado o histórico do mercado norte-americano de internet banda larga, assim como uma descrição sucinta de cada tecnologia e empresa.

4.1.2.2 Histórico do Mercado

A internet rápida para usuários domésticos surgiu para o mercado norte-americano entre os anos de 1997 e 1998. A primeira alternativa tecnológica a surgir no mercado foi a internet a cabo, que conquistou algumas centenas de milhares de usuários nos primeiros anos de comercialização. Em 1999 a competição tecnológica surgiu com a disponibilização da tecnologia banda larga DSL no mercado. Desde então, outras tecnologias, como internet sem fio, têm encontrado dificuldades para competir de igual para igual com essas tecnologias no mercado norte americano (ARON & BURNSTEIN 2003). Vale ressaltar que isso não impede que os consumidores possuam internet sem fio em suas residências a partir de roteadores pessoais, os quais utilizam as redes DSL ou a cabo para acessar a internet.

A partir de 2001, a penetração da internet rápida para usuários domésticos passou a crescer de forma mais acelerada que a tradicional conexão *dial-up*, a qual é praticamente inexistente em 2008. Também, especialmente após o ano 2000, a competição entre empresas e, especialmente, entre as tecnologias de internet a cabo e DSL se intensificou (OECD 2008a).

A seguir são apresentadas as principais características das duas tecnologias foco desse estudo.

4.1.2.3 Tecnologias

Nos Estados Unidos, assim como em boa parte dos países membros da OECD (OECD 2008a), as formas mais conhecidas e difundidas de se obter acesso à internet banda larga são via cabo, cujo provedor são empresas de TV a cabo, e via linha telefônica, chamada DSL (*digital subscriber line*), oferecido por operadoras de telefonia fixa. Tanto no caso da internet a cabo quanto na DSL, a internet

costuma ser oferecida como um serviço adicional às assinaturas de TV a cabo ou de telefone fixo.

Do ponto de vista técnico, a internet via cabo utiliza cabo coaxial, o mesmo utilizado para enviar sinais de TV, para transmitir dados da internet partindo ou chegando à residência do usuário. Já a tecnologia DSL utiliza os cabos de telefonia fixa ligados a uma rede digital de computadores para transportar os dados da internet em alta velocidade. Em algumas localidades é possível acessar internet sem fio (*wireless*) seja por meio de sinais via satélite, seja por torres similares às torres de telefonia celular. Essas alternativas, entretanto, representam menos de 10% do mercado norte-americano, foco dessa análise, e por isso foram suprimidas da competição por preço (SAVAGE & WALDMAN 2005) e (OECD 2008a).

4.1.2.4 Players Analisados

4.1.2.4.1 Provedor a cabo²

A empresa provedora de internet a cabo considerada na análise é líder no mercado norte americano do que diz respeito a serviços e produtos de entretenimento e comunicação via cabo. Em setembro de 2008, a empresa possuía 24,4 milhões de clientes de TV por assinatura, 6,1 milhões de serviços de telefonia digital e 14,7 milhões de internet banda larga, o que representa uma fatia de cerca de 50% do mercado de internet a cabo dos EUA (COMCAST 2008).

A sede da empresa nos EUA é em Filadélfia e seus serviços atendem trinta e nove estados norte americanos, além do distrito de Columbia. A empresa conta hoje com os serviços de 100 mil funcionários distribuídos por todo o país.

4.1.2.4.2 Provedor DSL³

² Algumas informações a respeito desse *player* são fortemente baseadas na empresa *Comcast Corporation*. Entretanto, é importante ressaltar que apenas informações públicas são apresentadas e algumas assunções foram feitas.

A empresa provedora de DSL considerada na análise é a mais importante no mercado norte americano no que diz respeito a serviços de telefonia e a empresa do setor que possui maior receita em todo o mundo. A empresa, que tem sede em no Texas, possui hoje mais de 300 mil funcionários ao redor do globo.

Em setembro de 2008 a empresa possuía 74,9 milhões de assinantes de serviços de telefonia móvel e 14,8 milhões de assinantes de serviços de internet rápida, o que representa cerca de 50% do mercado de internet rápida via DSL segundo a OECD (OECD 2008b).

Assim como o *player* de internet a cabo, essa empresa tem atuação em nível nacional nos EUA no que diz respeito ao serviço de internet rápida (AT&T 2008).

4.1.2.5 Metodologia de Análise

Para analisar o processo de difusão de serviços de banda larga nos EUA foram seguidas as seguintes etapas:

1. **Levantamento de dados históricos de número de assinantes por tipo de tecnologia:** com base nas informações e relatórios da OECD ((OECD 2008a) e (OECD 2008b)) foi possível mapear o número de assinantes de cada tecnologia, ano a ano, desde setembro de 2000 até setembro de 2008. Esse número serve como base para a compreensão do processo de difusão ocorrido até o momento de análise.
2. **Levantamento de preços históricos por tipo de tecnologia:** foram levantados preços históricos de referência do mercado norte americano para cada tipo de tecnologia entre 2005 e 2007 nos relatórios da OECD (OECD 2008a). Os valores de 2008 foram retirados dos sites das empresas consideradas base de comparação ((AT&T 2008) e (COMCAST

³ Algumas informações a respeito desse *player* são fortemente baseadas na empresa AT&T. Entretanto, é importante ressaltar que apenas informações públicas são apresentadas que algumas assunções foram feitas.

2008)). Os demais valores foram obtidos em fontes secundárias, considerando sempre a AT&T como referência da tecnologia DSL e a Comcast como referência da tecnologia a cabo ((ISP 2002), (CNET 2003), (CNET 2005), (Business Week 2002),(Washington Post 2003) e (BNET 2002)), com exceção do valor da assinatura DSL de 2004. Esse valor foi definido pela média entre a assinatura de 2003 e 2005.

3. **Estimativa do custo unitário de assinatura:** o custo unitário por assinatura não é uma informação apresentada nos relatórios a investidores de empresas. Com isso, foi utilizado um valor unitário fixo para cada tipo tecnologia baseado em estimativas de especialistas do setor. Como o custo não é o foco do modelo, foram dispensadas análises mais aprofundadas desse valor. Como ressaltado anteriormente, o valor correspondente ao investimento em propaganda foi agregado ao custo unitário por assinatura.
4. **Estimativa do número potencial de assinantes nos EUA (potencial de mercado):** baseado no tamanho atual do mercado de 75 milhões de assinantes, na velocidade de difusão até hoje e considerando que um número razoável de assinaturas seria de 105 milhões, que representaria um nível de penetração de cerca de 35% da população no estágio máximo de maturação (nível obtido hoje pela Dinamarca, país com maior penetração segundo a OECD (OECD 2008a). Ainda, esse número representaria penetração em pouco mais de 90% dos lares, considerando estimativas do censo norte-americano de aproximadamente 115 milhões de lares em 2010. Esse valor é plausível, especialmente porque dentro dos assinantes, há também empresas de pequeno porte que assinam o serviço

de internet de banda larga e são contabilizadas dentro do universo das 105 milhões de assinaturas.

5. **Estimativas dos parâmetros que descrevem o processo de difusão:** com base nos valores de assinantes obtidos ano a ano, na estimativa do tamanho do mercado, e nos preços históricos da assinatura dos dois tipos de tecnologia, foi possível definir os parâmetros do modelo e, conseqüentemente, predizem o processo de difusão de 2008 em diante. Esse ajuste foi feito de maneira *ad hoc*, uma vez que a metodologia de estimativa de parâmetros não é o foco desse trabalho.
6. **Cálculo das estratégias ótimas de preço:** foram calculadas as estratégias ótimas de preço para a provedora DSL e a provedora a cabo de 2009 em diante considerando os preços “reais” previamente definidos por essas empresas.
7. **Projeção do processo de difusão da internet rápida:** foram desenvolvidos gráficos que projetam o ciclo de vida das tecnologias DSL e cabo no que diz respeito à internet rápida. Tal análise é útil para o planejamento da capacidade e previsão de obsolescência dessas tecnologias por parte das provedoras.
8. **Comparação de desempenho das empresas utilizando e não utilizando a estratégia ótima de preço:** foram feitas algumas comparações com o intuito de verificar o benefício trazido pela utilização da estratégia ótima de preços em detrimento da estratégia “real” das empresas:
 - a. A primeira comparação foi entre o lucro obtido pelas empresas considerando as vendas reais e os preços reais (assumindo

determinado custo unitário) e a estimativa de lucros potencialmente obtidos pelas empresas considerando a estratégia ótima de preços e o nível de vendas proporcionado por essa estratégia.

- b. Comparação do desempenho das empresas considerando que uma delas tome decisões ótimas de preço e a concorrente siga a tomada de decisões “real”.

4.1.2.6 Projeção do ciclo de vida das tecnologias DSL e cabo de internet rápida

Como apresentado na metodologia do caso, foram estimados os parâmetros da difusão dos serviços de internet rápida assim como o mercado potencial a ser atingido (105 milhões de assinaturas) e o custo unitário de cada tecnologia. Os valores são apresentados na tabela abaixo:

	Coeficiente de inovação	Coeficiente de imitação	Impacto do preço	Impacto cruzado de preço	Custo Unitário
Categoria	$p = 1,3 \times 10^{-2}$	$q = 3,7 \times 10^{-1}$			
Empresa <i>i</i>	$p_i = 6,5 \times 10^{-3}$	$q_i = 1,54 \times 10^{-1}$	$\beta_{P_i} = -1,6$	$\beta_{P_{ij}} = -0,1$	$C_i(t) = \$15$
DSL					
Empresa <i>j</i>	$p_j = 6,5 \times 10^{-3}$	$q_j = 2,16 \times 10^{-1}$	$\beta_{P_j} = -1,5$	$\beta_{P_{ji}} = -0,8$	$C_j(t) = \$18$
Cabo					

Tabela 7- Custo unitário e coeficientes de inovação, imitação e preço do caso da internet rápida

Com base nesses parâmetros foi possível projetar as vendas acumuladas e as vendas em cada ano do processo de difusão. Para tal análise foi assumido que as empresas manterão os preços de 2008 para todos os anos a partir de 2009. A Tabela 8 apresenta os preços considerados pelas empresas ao longo do ciclo de vida dos produtos e o processo de difusão real, o calculado pela Equação 21, dado por $F(t)$, e o aproximado pela Equação 26, dado por $F(t)^{Aprox}$. A diferença entre as duas estimativas é detalhada na seção 3.6.

Ano ⁴	$F(t)$	$F(t)^{Aprox}$	$F_i(t)$	$F_i(t)^{Aprox}$	$F_j(t)$	$F_j(t)^{Aprox}$	$P_i(t)^5$	$P_j(t)^6$
1998	-	1,3%	-	0,7%	-	0,7%	<u>\$70,00</u>	<u>\$100,00</u>
1999	-	3,2%	-	1,5%	-	1,7%	<u>\$70,00</u>	<u>\$90,00</u>
2000	3,8%	7,2%	1,6%	3,6%	2,2%	3,6%	\$29,95	\$60,00
2001	8,5%	11,9%	3,6%	4,8%	4,9%	7,1%	\$35,95	\$43,21
2002	14,7%	16,7%	6,0%	6,5%	8,7%	10,2%	\$42,95	\$44,95
2003	21,5%	21,4%	8,5%	8,8%	13,0%	12,6%	\$49,90	\$56,95
2004	29,9%	30,7%	12,2%	12,8%	17,7%	17,9%	\$43,45	\$49,99
2005	39,3%	38,0%	16,4%	17,7%	22,9%	20,3%	\$36,99	\$67,95
2006	50,2%	50,9%	22,4%	23,9%	27,8%	27,0%	\$24,99	\$57,95
2007	58,0%	60,4%	25,2%	28,0%	32,8%	32,3%	\$24,99	\$59,95
2008	66,7%	71,6%	28,9%	30,5%	37,8%	41,1%	\$29,99	\$33,00
2009	-	79,0%	-	33,6%	-	45,5%	<u>\$29,99</u>	<u>\$33,00</u>
2010	-	85,1%	-	36,1%	-	49,0%	<u>\$29,99</u>	<u>\$33,00</u>
2011	-	90,0%	-	38,2%	-	51,8%	<u>\$29,99</u>	<u>\$33,00</u>
2012	-	93,8%	-	39,8%	-	54,1%	<u>\$29,99</u>	<u>\$33,00</u>
2013	-	96,9%	-	41,0%	-	55,8%	<u>\$29,99</u>	<u>\$33,00</u>
2014	-	99,3%	-	42,0%	-	57,2%	<u>\$29,99</u>	<u>\$33,00</u>
2015 ⁷	-	101,2%	-	42,8%	-	58,4%	<u>\$29,99</u>	<u>\$33,00</u>

Tabela 8 - Dados descritivos do processo de difusão do caso da internet rápida

⁴ Os valores reais de assinaturas de 1998 e 1999 não estão disponíveis.

⁵ Os preços sublinhados são estimativas

⁶ Os preços sublinhados são estimativas

⁷ Segundo a aproximação apresentada nessa tabela, a maturidade é atingida entre 2014 e 2015

A Figura 10 representa as vendas acumuladas da categoria de produtos e das tecnologias:

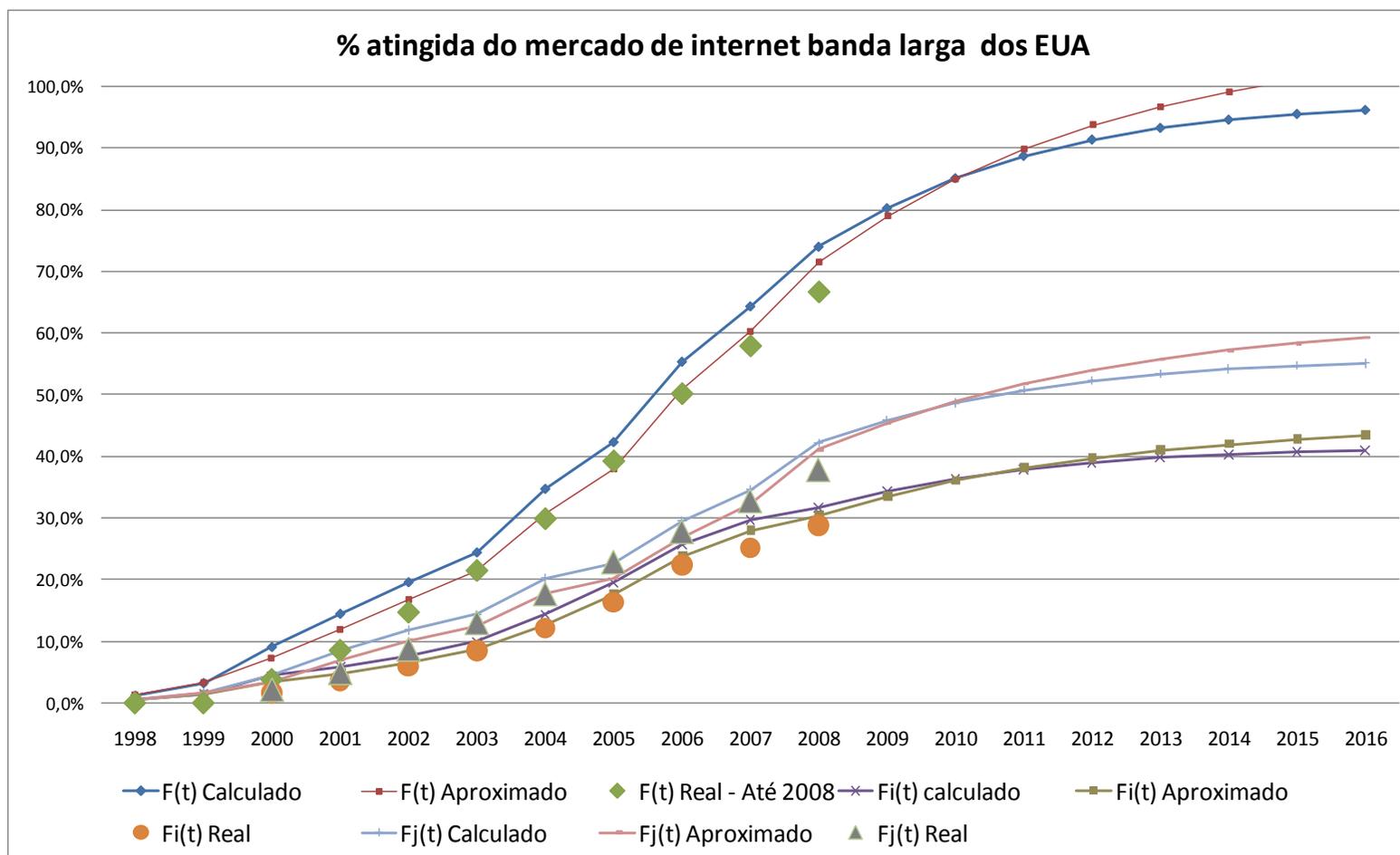


Figura 10 - Gráfico comparativo entre vendas cumulativas reais e estimadas do caso da internet rápida

Nesse gráfico tem-se todo ciclo de vida tanto da categoria de serviços de internet rápida, representada pelas séries $F(t)$, quanto de cada uma das tecnologias: DSL representada por $F_i(t)$ e cabo representada por $F_j(t)$. Uma série de interpretações surge da Figura 10. A primeira dessas diz respeito à precisão do modelo na previsão do processo de difusão. Quando se compara os valores reais de assinaturas obtidos previamente com os valores estimados (calculados a partir da Equação 21) e aproximados (calculados a partir da Equação 27), fica clara a boa aproximação que o modelo representa da realidade. No caso apresentado, inclusive, a equação aproximada representa a realidade de forma mais fiel que a equação “completa”.

O gráfico também demonstra que o mercado de internet rápida por DSL e cabo deve atingir sua maturidade máxima em 2016 (ou 2015, dependendo da abordagem de análise), com grande queda no número de novas assinaturas a partir de 2012. Isso indica que novas tecnologias, como internet wireless, devem começar a ganhar mercado de maneira significativa a partir desse instante (CHRISTENSEN 1997).

Finalmente, esse gráfico também apresenta claramente a vantagem da tecnologia a cabo sobre a DSL. Enquanto a estimativa indica que a primeira proverá serviços para cerca de 60% do mercado, a segunda deverá prover serviço para os outros 40% (considerando um duopólio).

A Tabela 9 e a Figura 11, demonstram as vendas por período e proporcionam outras interpretações complementares às do gráfico em “S”, de assinaturas acumuladas.

Ano ⁸	$f(t)$	$f(t)^{Aprox}$	$f_i(t)$	$f_i(t)^{Aprox}$	$f_j(t)$	$f_j(t)^{Aprox}$	$P_i(t)^9$	$P_j(t)^{10}$
1998	-	1,3%	-	0,65%	-	0,7%	<u>\$70,00</u>	<u>\$100,00</u>
1999	-	1,9%	-	0,83%	-	1,1%	<u>\$70,00</u>	<u>\$90,00</u>
2000	3,8%	4,0%	1,6%	2,12%	2,2%	1,9%	\$29,95	\$60,00
2001	4,7%	4,7%	2,0%	1,23%	2,8%	3,4%	\$35,95	\$43,21
2002	6,2%	4,8%	2,4%	1,71%	3,8%	3,1%	\$42,95	\$44,95
2003	6,8%	4,7%	2,5%	2,25%	4,3%	2,4%	\$49,90	\$56,95
2004	8,4%	9,3%	3,7%	3,99%	4,7%	5,3%	\$43,45	\$49,99
2005	9,4%	7,3%	4,2%	4,95%	5,2%	2,4%	\$36,99	\$67,95
2006	10,9%	12,9%	6,0%	6,22%	4,9%	6,7%	\$24,99	\$57,95
2007	7,8%	9,4%	2,8%	4,09%	5,0%	5,3%	\$24,99	\$59,95
2008	8,8%	11,2%	3,7%	2,42%	5,1%	8,8%	\$29,99	\$33,00
2009	-	7,4%	-	3,12%	-	4,3%	<u>\$29,99</u>	<u>\$33,00</u>
2010	-	6,1%	-	2,56%	-	3,6%	<u>\$29,99</u>	<u>\$33,00</u>
2011	-	4,9%	-	2,04%	-	2,8%	<u>\$29,99</u>	<u>\$33,00</u>
2012	-	3,8%	-	1,60%	-	2,2%	<u>\$29,99</u>	<u>\$33,00</u>
2013	-	3,0%	-	1,26%	-	1,8%	<u>\$29,99</u>	<u>\$33,00</u>
2014	-	2,4%	-	1,00%	-	1,4%	<u>\$29,99</u>	<u>\$33,00</u>
2015 ¹¹	-	1,9%	-	0,81%	-	1,1%	<u>\$29,99</u>	<u>\$33,00</u>

Tabela 9 - Dados reais e estimados de vendas por período do caso da internet rápida

⁸ Os valores reais de assinaturas de 1998 e 1999 não estão disponíveis.

⁹ Os preços sublinhados são estimativas

¹⁰ Os preços sublinhados são estimativas

¹¹ Segundo a aproximação apresentada nessa tabela, a maturidade é atingida entre 2014 e 2015

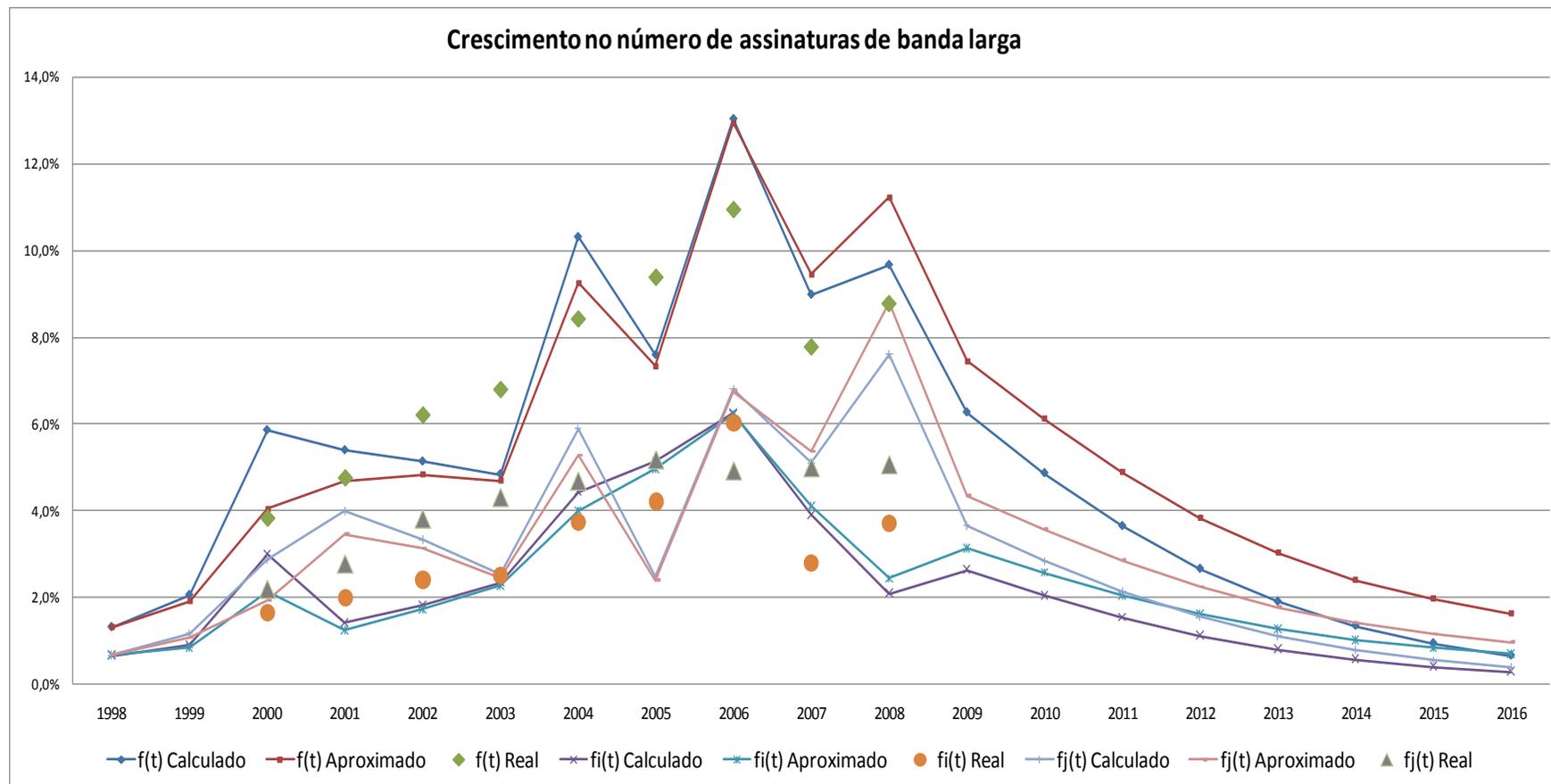


Figura 11 - Gráfico comparativo entre vendas reais e estimadas por período do caso da internet rápida

Com essas informações é possível se estimar o instante em que o pico de demanda é atingido. Como apresentado pelos dados reais, o pico de demanda da categoria se deu em 2006. A partir daí, o número de novos assinantes tende a reduzir até que chegue próximo de zero em 2016.

Em relação à precisão das estimativas, fica claro que a precisão não é tão grande quanto à do gráfico de vendas acumuladas. Isso, inclusive, pode ser notado em trabalhos importantes como o de Bass (BASS 1969), no qual a precisão das estimativas acumuladas de vendas é maior que a apresentada pela estimativa de um período específico. Ainda assim, as tendências previstas no modelo e as tendências seguidas pelos valores reais são similares.

Um aspecto interessante a ser ressaltado é que a variação de preço teve níveis distintos de impacto na demanda ao longo dos anos. Isto é, enquanto em alguns períodos uma grande variação de preços foi seguida de uma grande variação de demanda, em outros, o impacto da variação de preço foi pouco sentido. O segundo caso, de pouco impacto da variação de preços, ocorreu principalmente nos primeiros anos, o que pode indicar que consumidores mais “inovadores” são menos propensos à variação de preços que consumidores “imitadores”.

4.1.2.7 Decisões ótimas de preço para os próximos períodos

Com base no processo de difusão modelado e na decisão de preço tomada em 2008 pelas empresas, é possível calcular as decisões ótimas de preço entre 2009 e 2016, ou seja, até o instante no qual as empresas deixam de conseguir novos assinantes. Para tanto, é utilizada a Equação 38, cujo desenvolvimento é apresentado na seção 4.1.1. A Tabela 10 apresenta as decisões de preço sugeridas e as respectivas estimativas de $f(t)$ e $F(t)$ para a categoria de produtos e para as empresas.

Ano	$F(t)^{Calc}$	$F(t)^{Aprox}$	$F_i(t)^{Calc}$	$F_i(t)^{Aprox}$	$F_j(t)^{Calc}$	$F_j(t)^{Aprox}$	$f(t)^{Calc}$	$f(t)^{Aprox}$	$f_i(t)^{Calc}$	$f_i(t)^{Aprox}$	$f_j(t)^{Calc}$	$f_j(t)^{Aprox}$	$P_i(t)$	$P_j(t)$
2009	79,6%	78,1%	34,2%	33,3%	45,4%	44,8%	5,6%	6,5%	2,43%	2,82%	3,2%	3,7%	\$31,95	\$36,57
2010	84,3%	83,7%	36,2%	35,7%	48,1%	48,0%	4,6%	5,7%	1,99%	2,43%	2,6%	3,2%	\$33,52	\$39,54
2011	87,9%	88,4%	37,8%	37,7%	50,1%	50,7%	3,7%	4,7%	1,56%	2,02%	2,1%	2,7%	\$34,79	\$42,00
2012	90,7%	92,3%	39,0%	39,4%	51,7%	52,9%	2,8%	3,8%	1,18%	1,64%	1,6%	2,2%	\$35,81	\$44,04
2013	92,8%	95,4%	39,8%	40,7%	52,9%	54,7%	2,1%	3,1%	0,87%	1,31%	1,2%	1,8%	\$36,63	\$45,73
2014	94,2%	97,9%	40,5%	41,7%	53,8%	56,1%	1,5%	2,5%	0,63%	1,05%	0,9%	1,4%	\$37,29	\$47,14
2015	95,3%	99,9%	40,9%	42,6%	54,4%	57,3%	1,1%	2,0%	0,45%	0,85%	0,6%	1,2%	\$37,82	\$48,30
2016	96,0%	101,6%	41,2%	43,3%	54,8%	58,3%	0,7%	1,7%	0,31%	0,71%	0,4%	1,0%	\$38,25	\$49,27

Tabela 10 - Decisões ótimas de preço e processo de difusão projetado do caso da internet rápida

A principal conclusão tirada da análise da Tabela 10 é que tanto a empresa provedora de internet DSL quanto a provedora a cabo precificaram seus serviços em um patamar mais baixo do que ideal. Isso porque, a partir de 2009, todas as decisões ótimas de preço indicam o aumento gradativo do valor da assinatura até 2016.

Esse aumento de preços faz com que o processo de difusão seja um pouco mais lento que o modelado anteriormente com preços constantes a partir de 2009. Assim, segundo o cálculo baseado na Equação 21 a expectativa é que 100% do mercado só sejam atingidos após 2016. Já segundo a Equação 27, a expectativa é que esse valor seja atingido entre 2015 e 2016.

Um ponto deve ser ressaltado. Caso a empresa j precifique seu serviço de forma inadequada, o preço ótimo da empresa i sempre será definido pela sua curva de reação.

4.1.2.8 Comparação entre estratégia ótima de preços e estratégia utilizada pelas empresas

Uma forma encontrada para se avaliar o impacto da adoção da estratégia ótima de preços para as empresas é comparando-se os lucros obtidos com a estratégia “real” e com a estratégia “ótima”. A comparação do lucro reflete bem as variáveis impactadas pela variação da estratégia de preços: a margem da assinatura e o volume de novas assinaturas (nível de vendas).

Como afirmado anteriormente, o custo, outra variável que impacta o lucro, foi assumido \$18 para a operadora a cabo e \$15 para a provedora DSL durante todos os períodos. De qualquer forma, para a análise em questão, o custo passa a ser uma variável irrelevante, já que foi considerado o mesmo em ambos os cenários (de preço ótimo e preço “real”).

Assim, calculando o preço ótimo para as duas provedoras a partir da Equação 38, tem-se o seguinte cenário de preços e vendas:

Ano	$F(t)^{Calc}$	$F(t)^{Aprox}$	$F_i(t)^{Calc}$	$F_i(t)^{Aprox}$	$F_j(t)^{Calc}$	$F_j(t)^{Aprox}$	$f(t)^{Calc}$	$f(t)^{Aprox}$	$f_i(t)^{Calc}$	$f_i(t)^{Aprox}$	$f_j(t)^{Calc}$	$f_j(t)^{Aprox}$	$P_i(t)$	$P_j(t)$
2000	6,4%	5,9%	2,9%	2,7%	3,5%	3,2%	3,1%	2,7%	1,41%	1,27%	1,7%	1,5%	\$64,25	\$83,75
2001	10,7%	9,7%	4,9%	4,4%	5,8%	5,2%	4,3%	3,8%	1,91%	1,70%	2,4%	2,1%	\$59,61	\$78,59
2002	16,4%	14,8%	7,4%	6,7%	9,0%	8,1%	5,7%	5,1%	2,51%	2,24%	3,2%	2,8%	\$55,85	\$74,33
2003	23,7%	21,4%	10,5%	9,6%	13,2%	11,8%	7,3%	6,6%	3,17%	2,87%	4,2%	3,7%	\$52,81	\$70,81
2004	32,6%	29,5%	14,3%	13,1%	18,2%	16,5%	8,8%	8,2%	3,78%	3,51%	5,1%	4,7%	\$50,36	\$67,90
2005	42,5%	39,0%	18,5%	17,1%	24,0%	21,9%	9,9%	9,5%	4,22%	4,04%	5,7%	5,4%	\$48,37	\$65,49
2006	52,9%	49,3%	22,9%	21,4%	29,9%	27,8%	10,4%	10,2%	4,38%	4,34%	6,0%	5,9%	\$46,76	\$63,50
2007	62,8%	59,5%	27,1%	25,7%	35,7%	33,7%	10,0%	10,2%	4,21%	4,31%	5,8%	5,9%	\$45,46	\$61,86
2008	71,8%	68,9%	30,9%	29,7%	40,9%	39,2%	8,9%	9,4%	3,75%	3,96%	5,2%	5,5%	\$44,42	\$60,50

Tabela 11 - Decisões ótimas de preço e processo de difusão entre 2000 e 2008 do caso da internet rápida

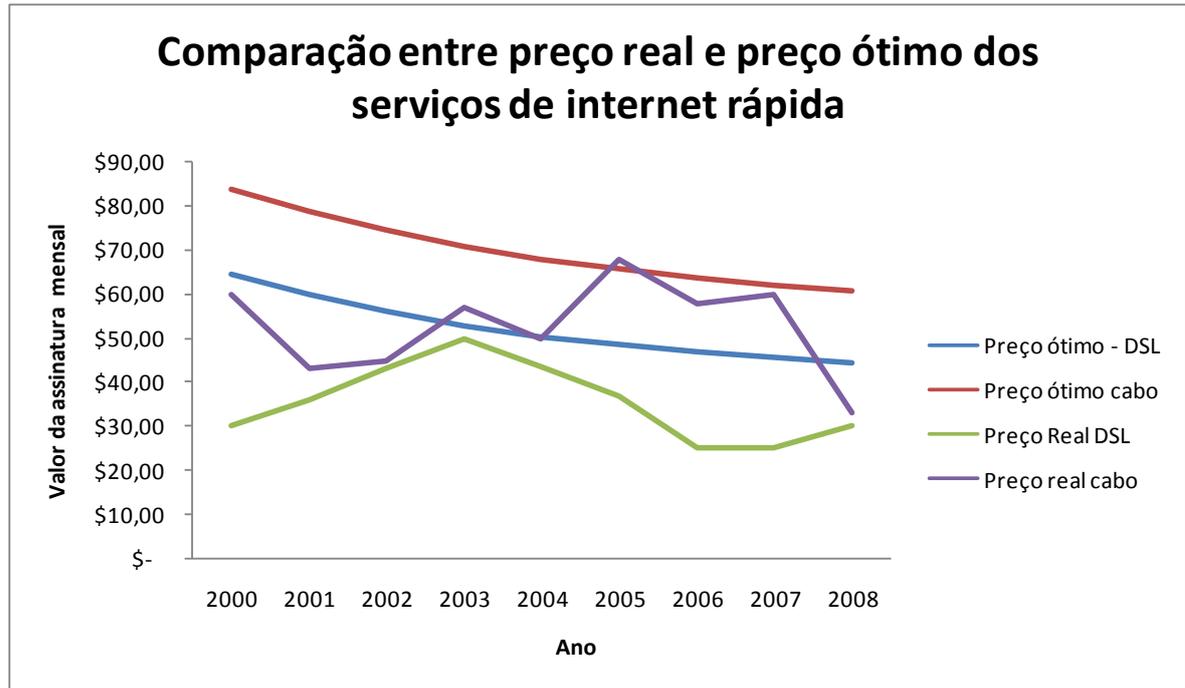


Figura 12 - Gráfico comparativo entre estratégia ótima e estratégia realizada de preços para o caso da internet rápida

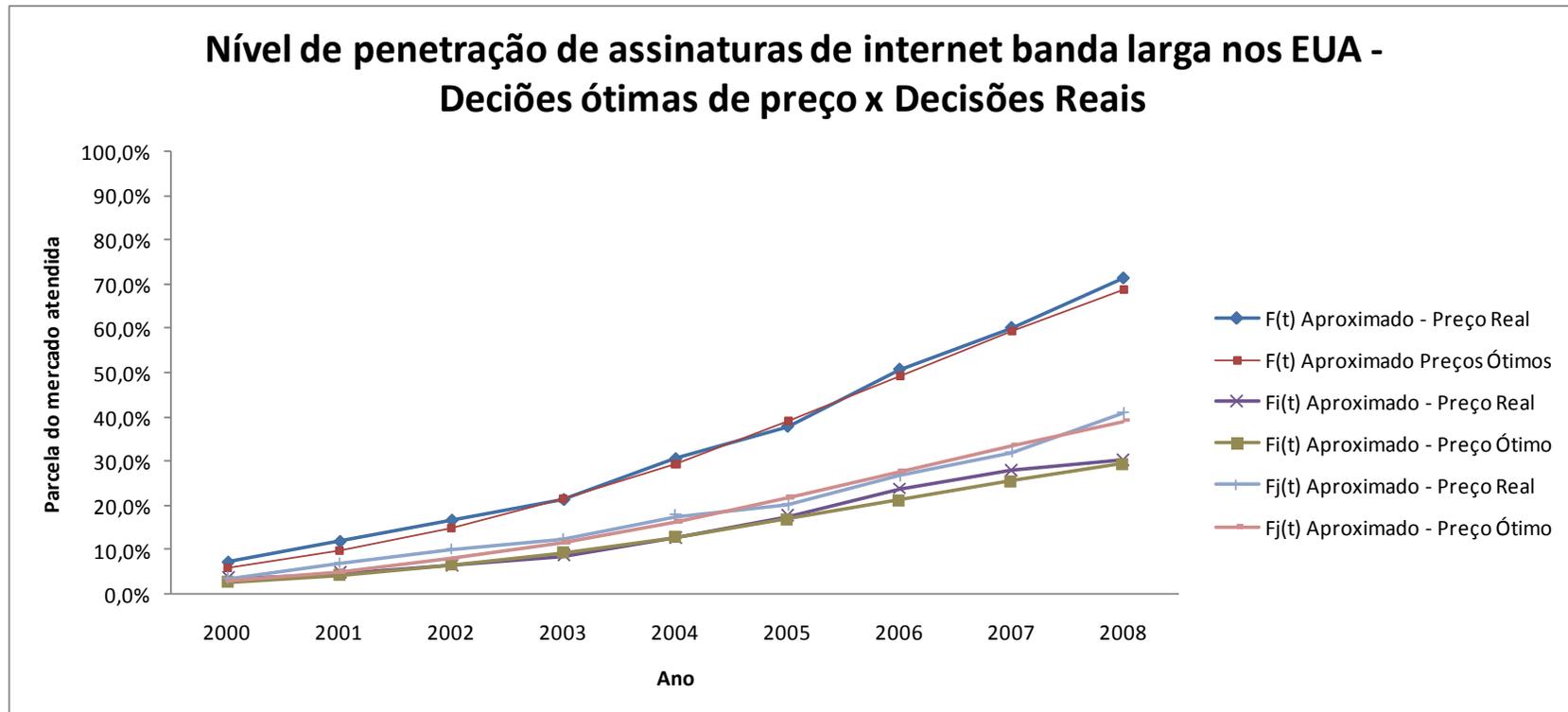


Figura 13- Gráfico comparativo de nível de vendas acumuladas considerando cenários de tomada de decisão ótima e real de preços para o caso da internet rápida

A análise da Tabela 11, da Figura 12 e da Figura 13 demonstra que as empresas mantiveram o preço constantemente abaixo do preço considerado ótimo para determinado período. Além disso, fica claro que as empresas variaram muito a estratégia de precificação com “picos” de aumento e “vales” de desconto em diversos instantes. Pela Figura 13 é fácil perceber que tais variações não tiveram impacto significativo no processo de difusão. Ou seja, o mercado não se mostrou tão sensível a preço quanto esperado pelas empresas. Assim, o ganho de fatia de mercado por elas esperado não ocorreu, o que ocasionou na perda de um volume significativo de lucros¹², como pode ser observado na Figura 14.

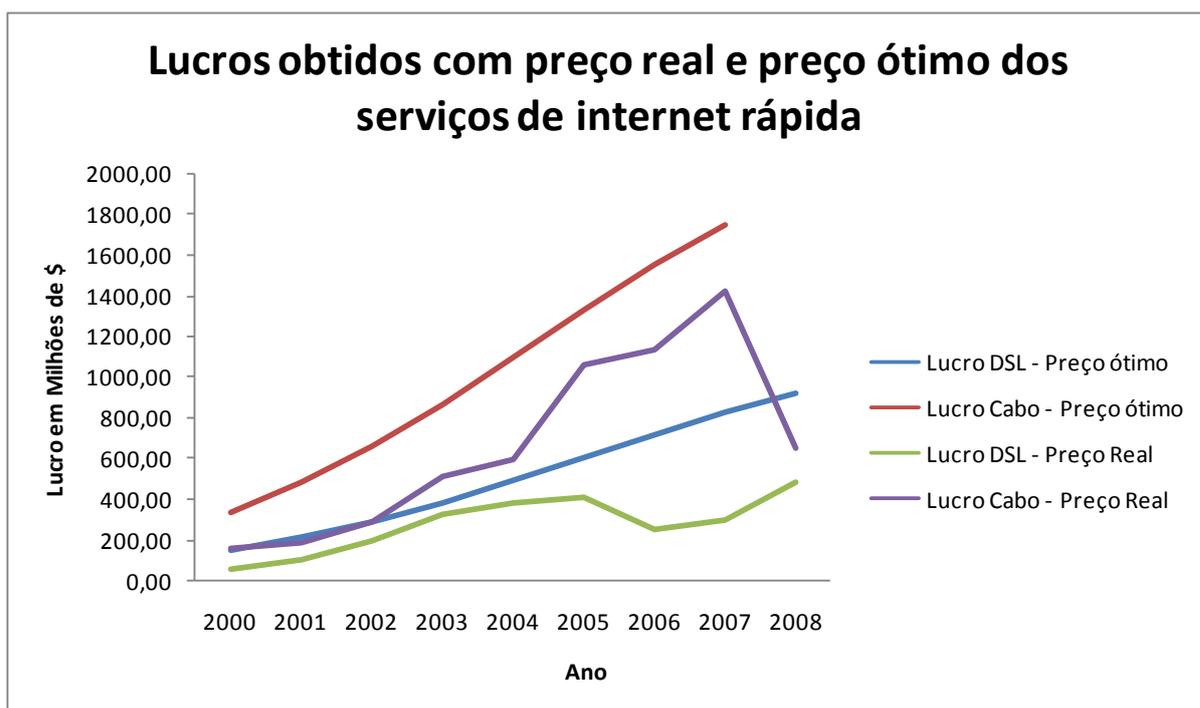


Figura 14 - Gráfico comparativo entre lucros obtidos seguindo estratégia ótima e estratégia real de preços para o caso da internet rápida

Com base no gráfico fica claro que em todos os anos entre 2000 e 2008 as empresas teriam obtido lucros maiores caso seguissem a estratégia ótima de

¹² No trabalho foi considerado “lucro” a margem unitária ($P_i(t) - C_i(t)$) multiplicada pelo volume de assinaturas de cada tecnologia

preços, mesmo considerando a perda de participação de mercado por manter um preço mais alto. Essa análise demonstra, com base em um caso prático, mesmo considerando algumas aproximações, o potencial de ganho proporcionado pela utilização do modelo proposto por tomadores de decisão.

4.1.3 Equilíbrio Nash de preço considerando o efeito de propaganda nas vendas (propaganda não – ótima)

4.1.3.1 Equação

Nesse caso é utilizada a Equação 22 - Maximização do lucro, dada por:

$$\max \Pi_i(t) = \max[S_i(t)(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))]$$

E o termo x_i é definido por (em um duopólio):

$$x_i(t) = 1 + \left[\frac{P_i'(t)}{P_i(t)} \right] \beta_{P_i} + \left[\frac{A_i'(t)}{A_i(t)} \right] \beta_{A_i} - \left\{ \left[\frac{P_j'(t)}{P_j(t)} \right] \beta_{P_{ji}} + \left[\frac{A_j'(t)}{A_j(t)} \right] \beta_{A_{ji}} \right\}$$

Equação 40 - Esforço de marketing considerando decisões de preço e propaganda em um duopólio

A seguir, deriva-se (22) em relação ao preço para obter a equação (33) Após simplificações, demonstradas na seção 6.1, e igualando a equação à zero, obtém-se a variação ótima de preço para a empresa i :

$$\frac{P_i^{max}(t)}{P_i(t-1)} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{C_i(t) + A_i(t)}{P_i(t-1)} + \frac{1}{\beta_{P_i}} \left[-\beta_{A_i} \left(\frac{A_i(t)}{A_i(t-1)} - 1 \right) + \beta_{A_{ji}} \left(\frac{A_j(t)}{A_j(t-1)} - 1 \right) + \beta_{P_{ji}} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\}$$

Equação 41 - Variação ótima de preço da empresa i em um duopólio

Assim como no caso anterior, a decisão ótima de preço da empresa i é função das decisões da empresa j e da decisão da empresa i em relação à propaganda. Considerando que a empresa j age de maneira racional e também busca a estratégia ótima de preço, pode-se afirmar que a estratégia ótima de preço da empresa j é dada por uma equação análoga à (39). Substituindo $P_j^{max}(t)$ em $P_i^{max}(t)$, e após manipulação matemática, é possível reescrever como (ver manipulação matemática na seção 6.5):

$$\begin{aligned}
 P_i^*(t) = \frac{1}{k} & \left\{ 2\beta_{P_i}\beta_{P_j} (A_i(t) + C_i(t)) \right. \\
 & + P_i(t-1) \left[2\beta_{P_j} (\beta_{P_i} + \beta_{A_i} - \beta_{A_{ji}} - 1) \right. \\
 & + \beta_{P_{ji}} (\beta_{A_j} - \beta_{P_{ij}} - \beta_{A_{ij}} - \beta_{P_j} - 1) + \frac{C_j(t)\beta_{P_j}\beta_{P_{ji}}}{P_j(t-1)} \\
 & \left. \left. + A_i(t) \frac{\beta_{P_{ji}}\beta_{A_{ij}} - 2\beta_{P_j}\beta_{A_i}}{A_i(t-1)} + A_j(t) \left(\frac{2\beta_{P_j}\beta_{A_{ji}} - \beta_{P_{ji}}\beta_{A_j}}{A_j(t-1)} + \frac{\beta_{P_j}\beta_{P_{ji}}}{P_j(t-1)} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Equação 42 - Preço ótimo da empresa i considerando o equilíbrio Nash em um cenário de investimentos em propaganda conhecidos

Para: $k = 4\beta_{P_i}\beta_{P_j} - \beta_{P_{ij}}\beta_{P_{ji}}$

Como esperado, a Equação 40 é função de estratégias anteriores de preço das duas empresas e da estratégia atual de propaganda (isto é, do período atual de decisão).

4.1.3.2 Exemplo Numérico – dados ilustrativos

Para exemplificar essa situação de Equilíbrio Nash foram utilizados os mesmos valores do equilíbrio de preço sem propaganda (seção 4.1.1.2). Entretanto

foi necessário acrescentar coeficientes relacionados ao efeito da propaganda no processo de difusão (ver Tabela 12).

Em relação ao custo das empresas, o mesmo valor fixo e arbitrário do exemplo ilustrativo anterior foi mantido, já que a idéia é apenas representar o funcionamento do modelo. Em relação aos valores de investimento em propaganda, valores arbitrários foram considerados com o intuito de demonstrar situações de acréscimo e decréscimo no nível de investimento das duas empresas (ver Tabela 13).

Assim, como no exemplo ilustrativo anterior, para ilustrar um cenário competitivo no qual os produtos ou serviço possuem algum diferencial, apesar de pertencerem à mesma categoria, definimos que uma empresa, no caso a i , possui coeficientes maiores que os da empresa j .

As tabelas abaixo apresentam, respectivamente, os coeficientes de propaganda e os investimentos em propaganda utilizados no exemplo ilustrativo (os demais valores: coeficientes de preço, inovação, imitação e o custo são apresentados na Tabela 1, página 68):

	Impacto da propaganda	Impacto cruzado da propaganda
Empresa i	$\beta_{A_i} = 0,39$	$\beta_{A_{ij}} = 0,045$
Empresa j	$\beta_{A_j} = 0,31$	$\beta_{A_{ji}} = 0,042$

Tabela 12 - Coeficientes de Impacto das decisões de propaganda utilizados nos exemplos ilustrativos

Período	$A_i(t)$	$A_j(t)$
0	\$100	\$200
1	\$100	\$150
2	\$200	\$180
3	\$150	\$130
4	\$180	\$130
5	\$130	\$130
6	\$130	\$100
7	\$130	\$70
8	\$100	\$150
9	\$70	\$70
10	\$150	\$150
11	\$70	\$100
12	\$150	\$100
13	\$100	\$80

Tabela 13 - Dados de investimento unitário em propaganda para o caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido

Além dos valores definidos acima, o preço de introdução do produto no mercado foi definido como $P(0)_i = P(0)_j = \$1000$. Com as informações apresentadas é possível projetar o processo decisório para todo o ciclo de vida do produto até que $F(t) = 100\%$, ou seja, até que todo o mercado seja atingido. A Tabela 14, a Figura 15 e a Figura 16 representam a dinâmica do ciclo de vida do produto:

Período	$F(t)$	$F_i(t)$	$F_j(t)$	$f(t)$	$f_i(t)$	$f_j(t)$	$P_i(t)$	$P_j(t)$
0	0,5%	0,3%	0,2%	0,5%	0,28%	0,2%	\$1.000	\$1.000
1	1,9%	1,2%	0,6%	1,4%	0,93%	0,5%	\$777	\$805
2	4,3%	2,9%	1,5%	2,5%	1,66%	0,8%	\$736	\$724
3	8,3%	5,5%	2,8%	4,0%	2,60%	1,4%	\$621	\$620
4	14,5%	9,5%	5,1%	6,2%	3,99%	2,2%	\$583	\$566
5	23,7%	15,4%	8,3%	9,2%	5,94%	3,2%	\$515	\$527
6	35,9%	23,1%	12,8%	12,1%	7,68%	4,5%	\$480	\$480
7	49,8%	31,5%	18,3%	14,0%	8,43%	5,5%	\$457	\$431
8	63,9%	40,1%	23,8%	14,0%	8,61%	5,4%	\$423	\$477
9	76,5%	47,6%	28,9%	12,6%	7,43%	5,2%	\$381	\$421
10	86,0%	52,9%	33,1%	9,5%	5,35%	4,2%	\$433	\$475
11	93,0%	56,9%	36,1%	7,0%	4,03%	3,0%	\$382	\$441
12	97,6%	59,4%	38,2%	4,6%	2,50%	2,1%	\$433	\$433
13	100,5%	61,0%	39,5%	2,9%	1,60%	1,3%	\$403	\$408

Tabela 14 - Decisões ótimas de preço e dados do processo de difusão para o caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido

4.1.3.2.1 Interpretação do modelo

Analisando o nível acumulado de vendas ($F(t)$ – Figura 15), os gestores têm a expectativa de que o produto atinja 100% do mercado praticamente ao fim do 13º período de decisão (ao fim do 13º período o modelo indica que 100,5% do mercado foram atingidos). Assim, o início da substituição pode ser planejado para o período 10, por exemplo. Como no modelo de equilíbrio exclusivo de preço, expectativa é que a empresa i atinja cerca de 60% do Mercado e a empresa j fique com os 40% restantes.

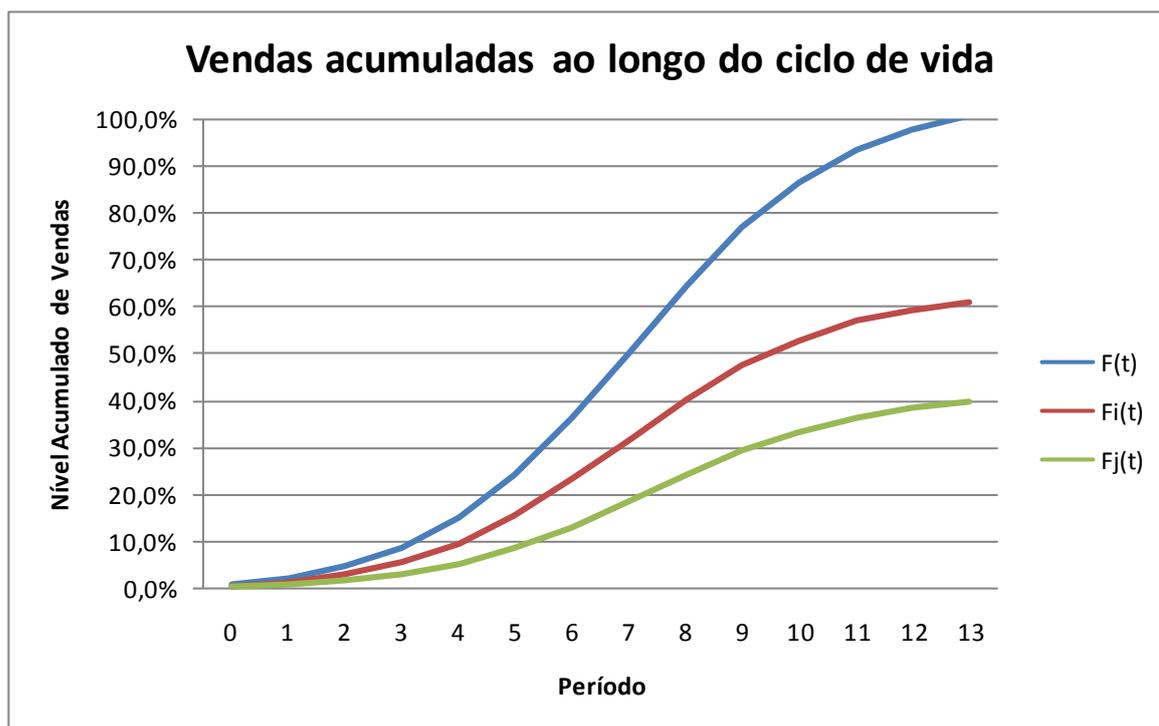


Figura 15 - Gráfico de vendas acumuladas do caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido

No que diz respeito às vendas de cada período ($f(t)$) – Figura 16), tem-se que o pico de demanda da categoria se dá no 7^o e 8^o períodos, nos quais aproximadamente 14% do mercado é atingido. Nesses mesmos períodos, as empresas i e j atingem o pico com cerca de 8% e 5% do mercado, respectivamente.

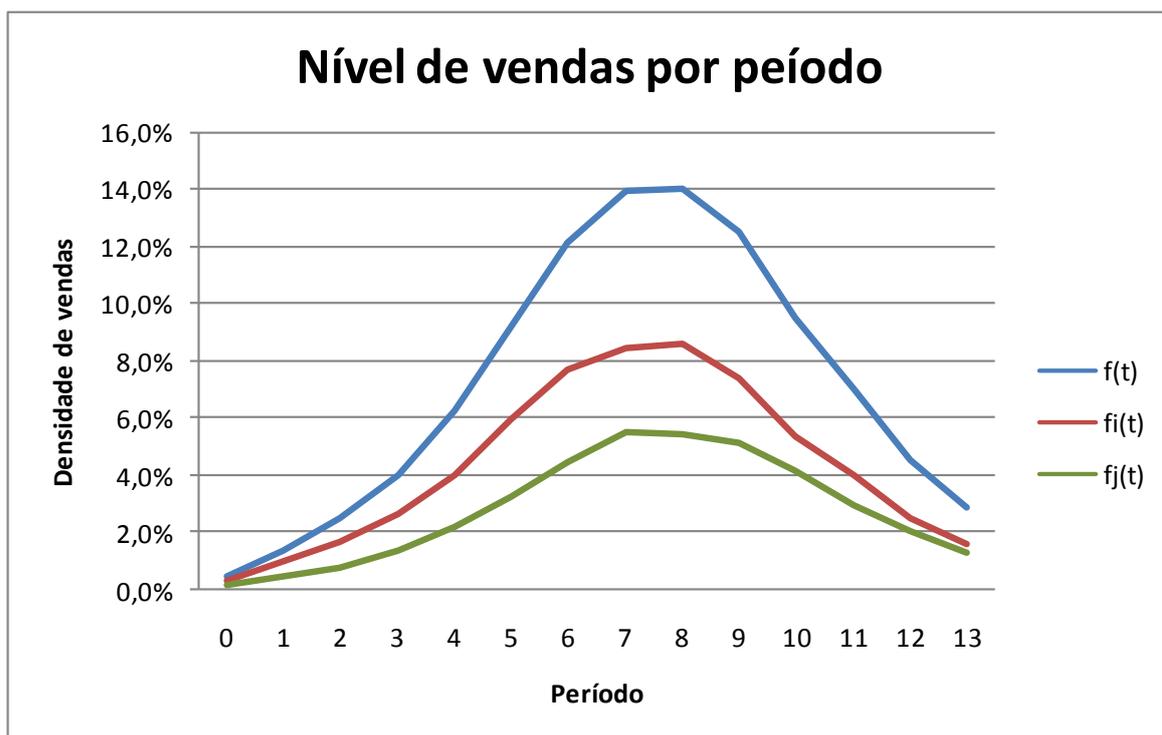


Figura 16 - Gráfico de vendas por período do caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido

Em relação à estratégia de preços ($P_i(t)$ e $P_j(t)$ – Figura 17), assim como no exemplo anterior, as empresas vão reduzindo o preço gradativamente até atingir um preço de equilíbrio. Esse preço de equilíbrio, no entanto, é mais alto que o do caso anterior, já que a empresa deve também cobrir o investimento em propaganda. Enquanto no exemplo anterior as empresas estabilizavam o preço pouco acima dos \$ 200, no caso atual as empresas estabilizam o preço próximo de \$ 400. Outra diferença importante entre os casos é que, no segundo, as variações no investimento em propaganda acabam deixando as curvas de preço menos “suaves”, proporcionando saltos que refletem a curva do investimento em propaganda. Mais especificamente, quando uma empresa aumenta seu investimento em propaganda ela aumenta seu preço não só para cobrir seu investimento, mas também porque o aumento da demanda gerado pela propaganda a permite tomar essa decisão. O

contrário também é verdadeiro, quando o investimento cai, o preço tende a cair. Esse resultado, bastante intuitivo, acaba reforçando a racionalidade do modelo.

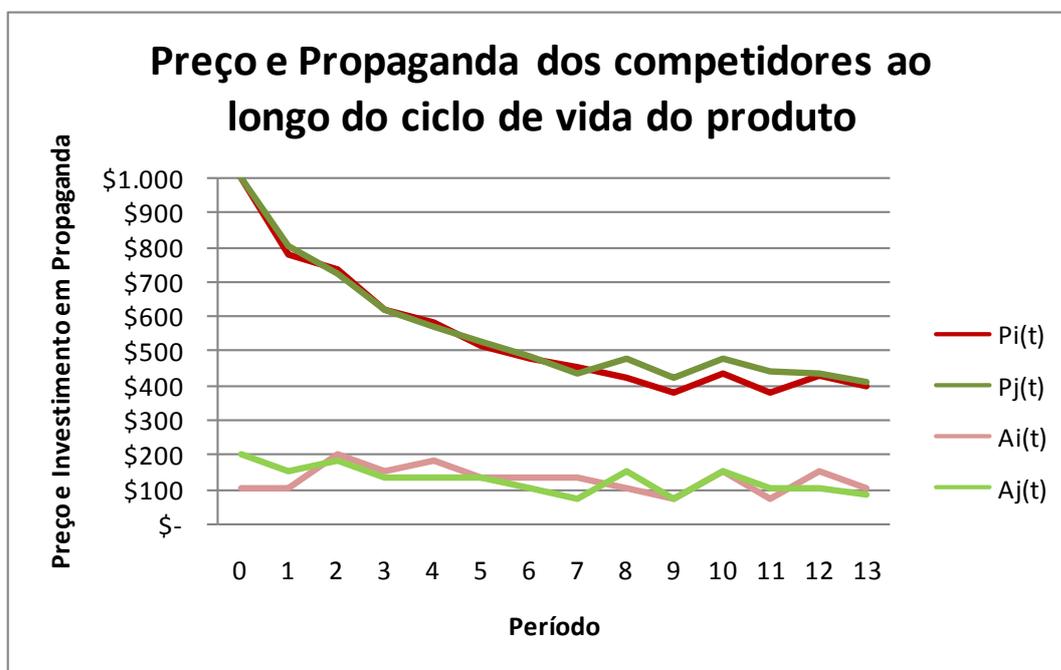


Figura 17 - Gráfico de investimento em propaganda e estratégia ótima de preço do caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido

Finalmente, analisando a projeção de lucros (Figura 18), nota-se que a empresa i usufrui da maior velocidade de difusão de seu produto e consegue lucros maiores até que o pico de demanda seja atingido. A partir desse ponto, a empresa j consegue obter lucros mais próximos aos obtidos pela concorrente. Assim como ocorreu no gráfico de preços, o gráfico de lucros sofre alguns “saltos” em decorrência da estratégia arbitrária de investimento em propaganda adotada no modelo.

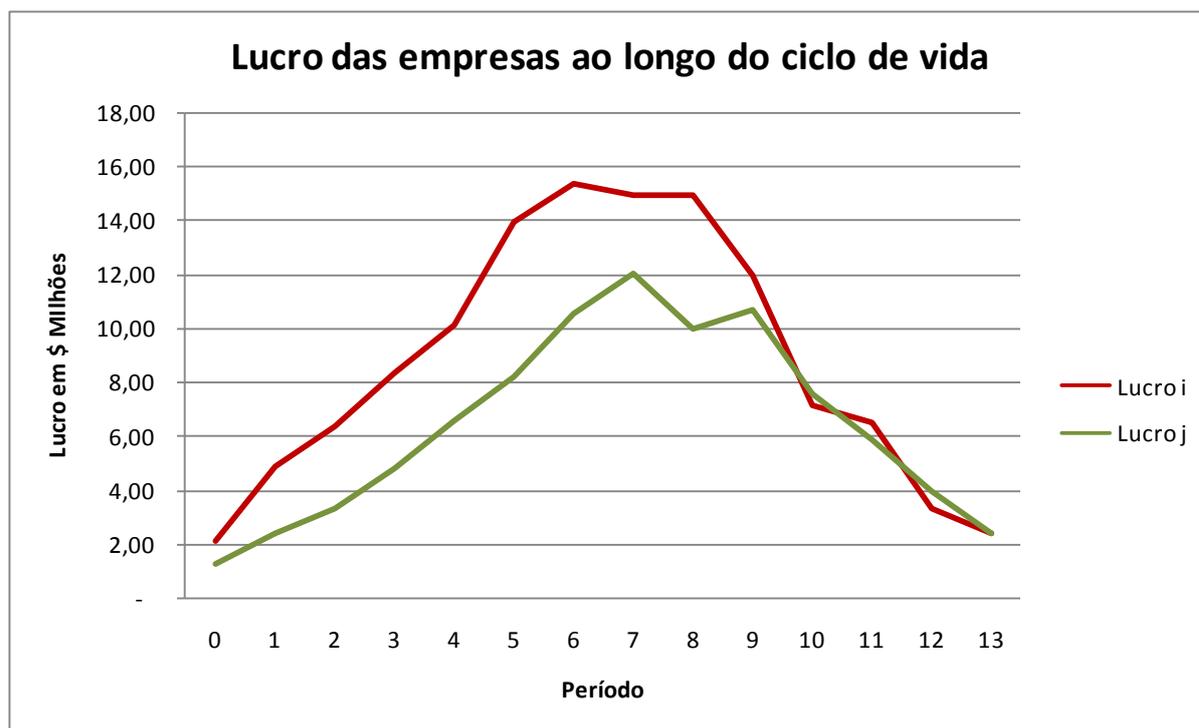


Figura 18 - Gráfico de lucros por período do caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido

4.1.3.2.2 Aproximação de $f(t)$

Com o intuito de verificar a aproximação proposta na seção 3.6, aproximar a Equação 21 através da Equação 27, abaixo são apresentados os processos de difusão modelados por cada uma dessas equações para o caso proposto. Tanto visualmente quanto ao comparar os valores obtidos é fácil constatar que essa é uma aproximação satisfatória.

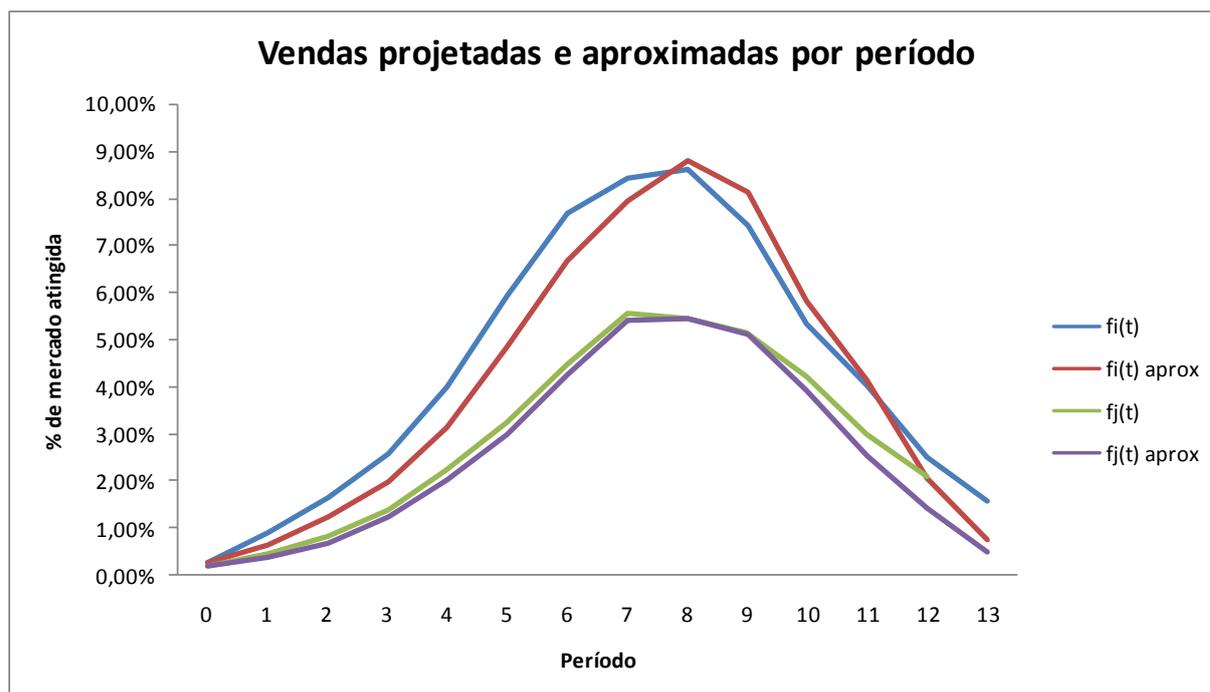


Figura 19 - Gráfico comparativo de vendas por período do caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido

Assim como no caso anterior, a aproximação das vendas por período apresenta erro mais significativo na modelagem da curva da empresa i . Nesse caso, o processo de difusão ocorre de forma ligeiramente defasada, com as vendas aproximadas superando as calculadas pela Equação 21 após o período de pico. Essa diferença se deve ao fato do cálculo por meio da Equação 26 considerar o horizonte discreto de tempo. Assim, apenas as vendas até o período $t - 1$ multiplicam o coeficiente de imitação no cálculo de $f(t)^{Aprox}$. No cálculo de $f(t)$, ao contrário, é considerado o horizonte de tempo contínuo. Assim, as vendas realizadas até o instante t multiplicam o coeficiente de imitação, o que acelera o processo de difusão projetado. No caso da empresa j , o erro é mínimo e a aproximação representa fielmente o processo de difusão até o 10º período de decisão. Isso se deve ao fato dos coeficientes de inovação e imitação serem

menores que o da empresa i , proporcionando uma distorção menor entre as estimativas.

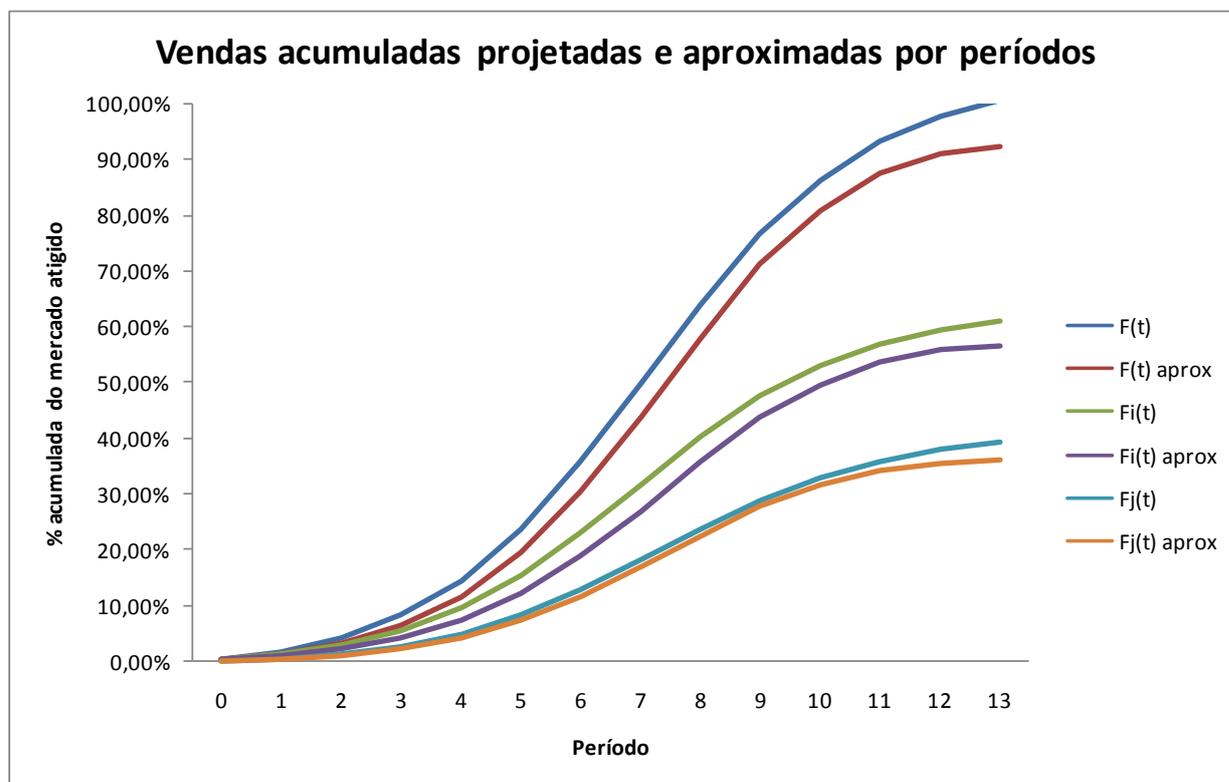


Figura 20 - Gráfico comparativo de vendas acumuladas por período do caso de Equilíbrio de preço considerando investimento em propaganda conhecido

Em relação às vendas acumuladas, a aproximação é similar ao calculado pela Equação 21 para as duas empresas, projetando velocidade de difusão ligeiramente menor e, conseqüentemente, menor fatia de mercado atingida ao longo do tempo. Ainda assim, as curvas também apresentam formato muito próximo, representando aproximação interessante do modelo.

4.1.4 Equilíbrio Nash de investimento em propaganda considerando o preço dado pelo mercado

4.1.4.1 Equação

Para analisar o equilíbrio Nash de investimento em propaganda é utilizada a Equação 22 - Maximização do lucro, dada por:

$$\max \Pi_i(t) = \max[S_i(t)(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))]$$

E o termo x_i , assim como para o caso anterior, é definido pela Equação 40:

$$x_i(t) = 1 + \left[\frac{P_i'(t)}{P_i(t)} \right] \beta_{P_i} + \left[\frac{A_i'(t)}{A_i(t)} \right] \beta_{A_i} - \left\{ \left[\frac{P_j'(t)}{P_j(t)} \right] \beta_{P_{ji}} + \left[\frac{A_j'(t)}{A_j(t)} \right] \beta_{A_{ji}} \right\}$$

Para a obtenção da estratégia ótima de investimento em propaganda, deriva-se a Equação 22 em relação à $A_i(t)$ para obter a Equação 34. Após simplificações, demonstradas na seção 6.2, e igualando a equação à zero, obtém-se a variação ótima no investimento em propaganda para a empresa i :

$$\frac{A_i^{\max}(t)}{A_i(t-1)} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{P_i(t) - C_i(t)}{A_i(t-1)} + \frac{1}{\beta_{A_i}} \left[-\beta_{P_i} \left(\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} - 1 \right) + \beta_{A_{ji}} \left(\frac{A_j(t)}{A_j(t-1)} - 1 \right) + \beta_{P_{ji}} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\}$$

Equação 43 - Variação ótima de propaganda em um duopólio considerando decisões de preço e propaganda

De forma análoga ao equilíbrio de preços, a decisão ótima de propaganda da empresa i é função das decisões da empresa j e da decisão da empresa i em relação ao preço. Considerando que a empresa j age de maneira racional e também busca a estratégia ótima de propaganda, a equação que representa sua decisão de

propaganda é análoga à Equação 43. Substituindo $A_j^{max}(t)$ em $A_i^{max}(t)$, e após manipulação matemática, é possível reescrever a estratégia ótima de propaganda como (ver seção 6.6):

$$\begin{aligned}
 A_i^*(t) = \frac{1}{w} & \left\{ 2\beta_{A_i}\beta_{A_j} [P_i(t) - C_i(t)] \right. \\
 & + A_i(t-1) \left[2\beta_{A_j} (\beta_{P_i} + \beta_{A_i} - \beta_{P_{ji}} - 1) \right. \\
 & + \beta_{A_{ji}} (\beta_{P_j} - \beta_{P_{ij}} - \beta_{A_{ij}} - \beta_{A_j} - 1) - \frac{C_j(t)\beta_{A_j}\beta_{A_{ji}}}{A_j(t-1)} \\
 & + \frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} (\beta_{P_{ij}}\beta_{A_{ji}} - 2\beta_{P_i}\beta_{A_j}) + \frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} (2\beta_{P_{ji}}\beta_{A_j} - \beta_{A_{ji}}\beta_{P_j}) \\
 & \left. \left. + \frac{P_j(t)\beta_{A_j}\beta_{A_{ji}}}{A_j(t-1)} + \frac{P_j(t)A_i(t-1)}{w} \left(\frac{2\beta_{P_{ji}}\beta_{A_j} - \beta_{A_{ji}}\beta_{P_j}}{P_j(t-1)} + \frac{\beta_{A_j}\beta_{A_{ji}}}{A_j(t-1)} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Equação 44 - Investimento unitário ótimo em propaganda considerando o equilíbrio Nash em um duopólio e preço dos produtos conhecido

Para: $w = 4\beta_{A_i}\beta_{A_j} - \beta_{A_{ij}}\beta_{A_{ji}}$

Como esperado, a Equação 44 é função de estratégias anteriores de propaganda das duas empresas e da estratégia atual de preço (isto é, do período atual de decisão).

4.1.4.2 Exemplo Numérico – dados ilustrativos

Para exemplificar essa situação de Equilíbrio Nash foram utilizados os mesmos coeficientes do equilíbrio de preço com propaganda pré-definida (ver Tabela 1 e Tabela 12).

Em relação ao custo das empresas, o mesmo valor fixo e arbitrário dos exemplos anteriores foi mantido, já que a idéia é apenas representar o funcionamento do modelo. Em relação ao preço ao longo do tempo, o valor arbitrário de \$ 1.000 foi pré-definido para todo o ciclo de vida do produto das duas empresas.

Como nos exemplos anteriores, a empresa i possui coeficientes de preço, propaganda, inovação e imitação maiores que os da empresa j , o que ilustra certa vantagem competitiva.

Com as informações apresentadas é possível projetar o processo decisório para todo o ciclo de vida do produto até que $F(t) = 100\%$, ou seja, até que todo o mercado seja atingido. A tabela e os gráficos abaixo representam a dinâmica do ciclo de vida do produto:

Período	$F(t)$	$F_i(t)$	$F_j(t)$	$f(t)$	$f_i(t)$	$f_j(t)$	$A_i(t)$	$A_j(t)$
0	0,5%	0,3%	0,2%	0,5%	0,28%	0,2%	\$200,0	\$200,0
1	1,3%	0,8%	0,5%	0,9%	0,54%	0,3%	\$268,5	\$211,1
2	2,5%	1,5%	1,0%	1,2%	0,70%	0,5%	\$212,7	\$190,7
3	4,7%	2,9%	1,8%	2,2%	1,36%	0,9%	\$259,7	\$219,5
4	7,8%	4,7%	3,1%	3,0%	1,83%	1,2%	\$218,7	\$182,1
5	13,1%	7,9%	5,2%	5,3%	3,19%	2,1%	\$256,3	\$228,3
6	19,8%	12,0%	7,8%	6,7%	4,09%	2,6%	\$220,4	\$172,5
7	30,3%	18,2%	12,1%	10,5%	6,17%	4,3%	\$256,5	\$238,6
8	41,3%	24,9%	16,4%	11,0%	6,77%	4,2%	\$219,1	\$160,9
9	55,4%	33,0%	22,4%	14,1%	8,10%	6,0%	\$259,6	\$251,5
10	66,8%	40,1%	26,8%	11,4%	7,05%	4,4%	\$215,2	\$146,0
11	78,4%	46,6%	31,9%	11,6%	6,46%	5,1%	\$265,7	\$268,4
12	85,8%	51,1%	34,7%	7,3%	4,54%	2,8%	\$208,7	\$126,3
13	92,2%	54,5%	37,6%	6,4%	3,43%	3,0%	\$275,7	\$290,6
14	95,6%	56,7%	39,0%	3,4%	2,12%	1,3%	\$198,7	\$100,0
15	98,5%	58,1%	40,4%	2,9%	1,46%	1,5%	\$292,6	\$320,3
16	99,9%	59,0%	41,0%	1,4%	0,85%	0,5%	\$182,6	\$64,4

Tabela 15 - Estratégia ótima de propaganda e dados do processo de difusão do caso de Equilíbrio de investimento unitário em propaganda com preço conhecido

4.1.4.2.1 Interpretação do modelo

Analisando o nível acumulado de vendas ($F(t)$ – Figura 21), os gestores têm a expectativa de que o produto atinja 100% do mercado praticamente logo após o fim do 16º período de decisão (ao fim desse período 99,9% do mercado foi atingido). Dessa forma, o início da substituição pode ser planejado para o período 12 ou 13, por exemplo. Assim como nos modelos apresentados, a expectativa é que a empresa i atinja cerca de 60% do Mercado e a empresa j fique com os 40% restantes.

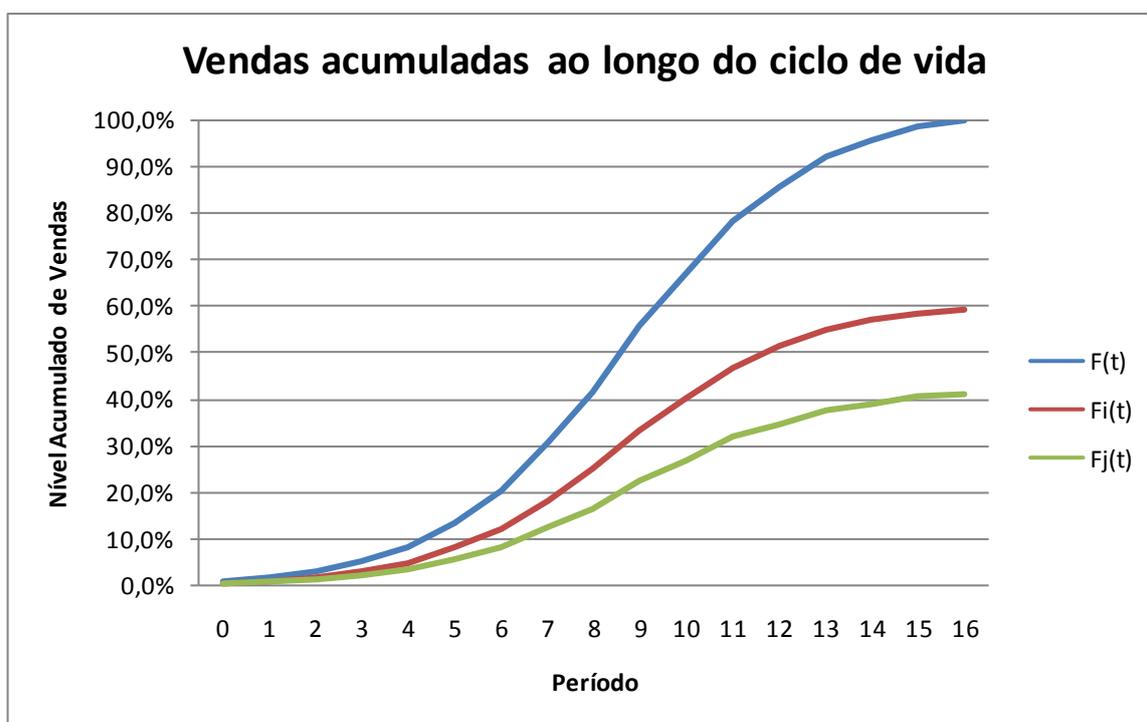


Figura 21 - Gráfico de vendas acumuladas do caso de Equilíbrio de investimento unitário em propaganda com preço conhecido

No que diz respeito às vendas de cada período ($f(t)$), tem-se que o pico de demanda da categoria se dá no 9º período, no qual aproximadamente 14% do mercado são atingidos. Nesse mesmo período, as empresas i e j atingem o pico com 8% e 6% do mercado, respectivamente.

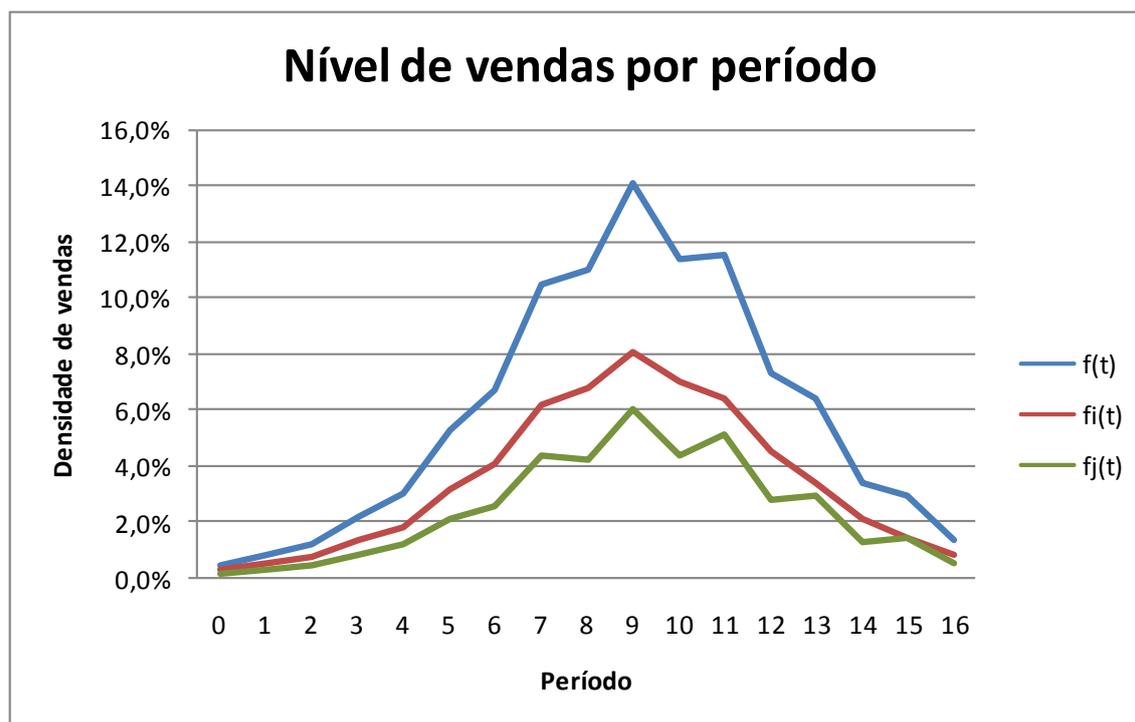


Figura 22 - Gráfico de vendas por período do caso de Equilíbrio de investimento unitário em propaganda com preço conhecido

Comparando a curva de vendas desse gráfico às curvas dos casos anteriores, tem-se um formato com uma série de “pontas”. A explicação para essa variação vem da estratégia ótima de propaganda não seguir uma curva, como ocorre com o preço, mas sim oscilar de período para período em torno de um valor “médio” (ver Figura 23). A explicação racional para esse fenômeno está ligada ao fato da propaganda proporcionar um efeito cumulativo, ou seja, o investimento em propaganda no período $t = n$ ainda impacta a demanda no período $t = n + 1$. Isso faz com que o investimento faseado seja uma boa alternativa. Ainda, comparando as estratégias da empresa i e j , tem-se que a primeira segue uma estratégia com amplitude de investimento relativamente constante, enquanto a segunda vai aumentando a diferença entre o nível de investimento período a período. A explicação desse fenômeno está no fato do impacto da propaganda da empresa j ser menor, o que a obriga a buscar variações maiores de investimento.

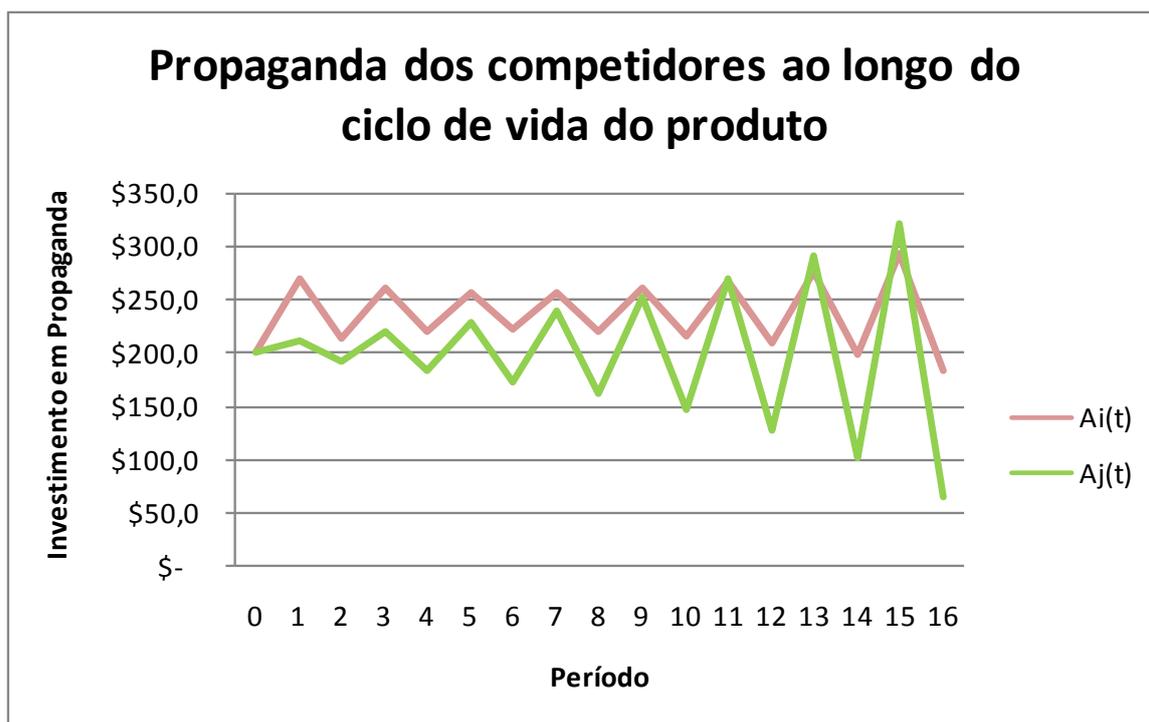


Figura 23 - Gráfico de estratégia ótima de investimento em propaganda do caso de Equilíbrio de investimento unitário em propaganda com preço conhecido

Finalmente, analisando a projeção de lucros (Figura 24), nota-se que a empresa i usufrui da maior velocidade de difusão de seu produto e consegue lucros maiores até que o pico de demanda seja atingido. Entretanto, a diferença entre a lucratividade das empresas nos primeiros períodos é menor nesse caso. A explicação dessa diferença está no fato de não haver competição por preço e a competição por propaganda apresentar menor influência na variação da demanda (os coeficientes de propaganda são menores que os de preço).

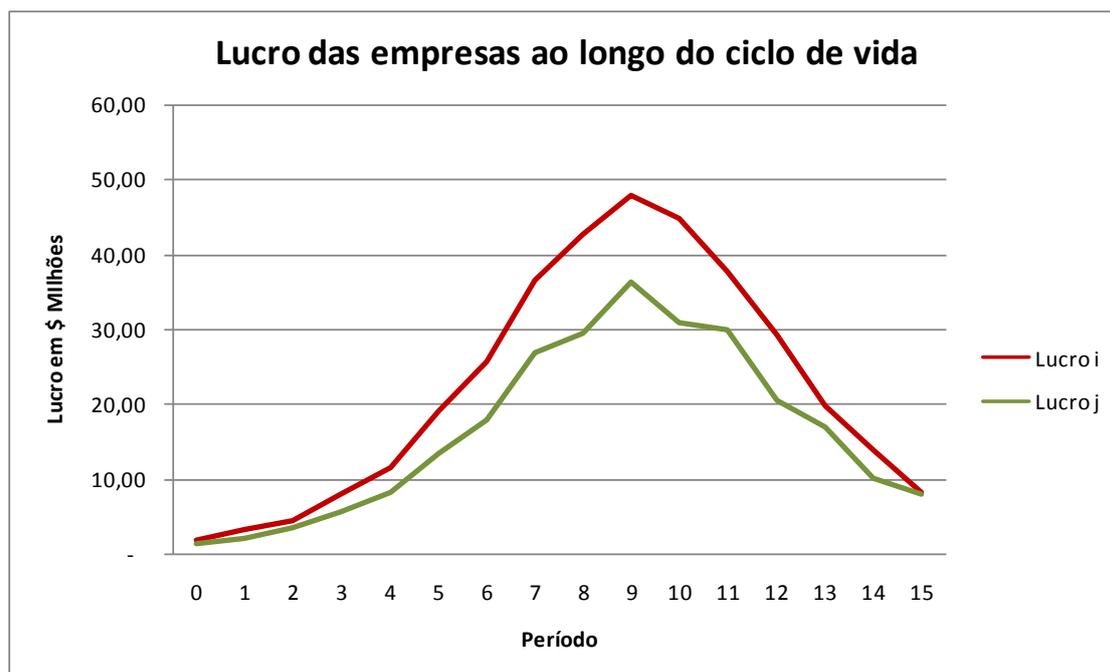


Figura 24 - Gráfico de lucros do caso de Equilíbrio de investimento unitário em propaganda com preço conhecido

4.1.4.2.2 Aproximação de $f(t)$

Abaixo é apresentado gráfico que compara os processos de difusão modelados pela Equação 21 e pela Equação 26 para o caso de equilíbrio Nash de investimento em propaganda. Nesse caso, a aproximação tem precisão ainda melhor que a dos casos propostos anteriormente, o que reforça a validade da simplificação. Como nos casos anteriores, entretanto, a aproximação acaba retardando um pouco o processo das duas empresas, o que faz com que a previsão antes do pico seja menor, se tornando maior após o pico.

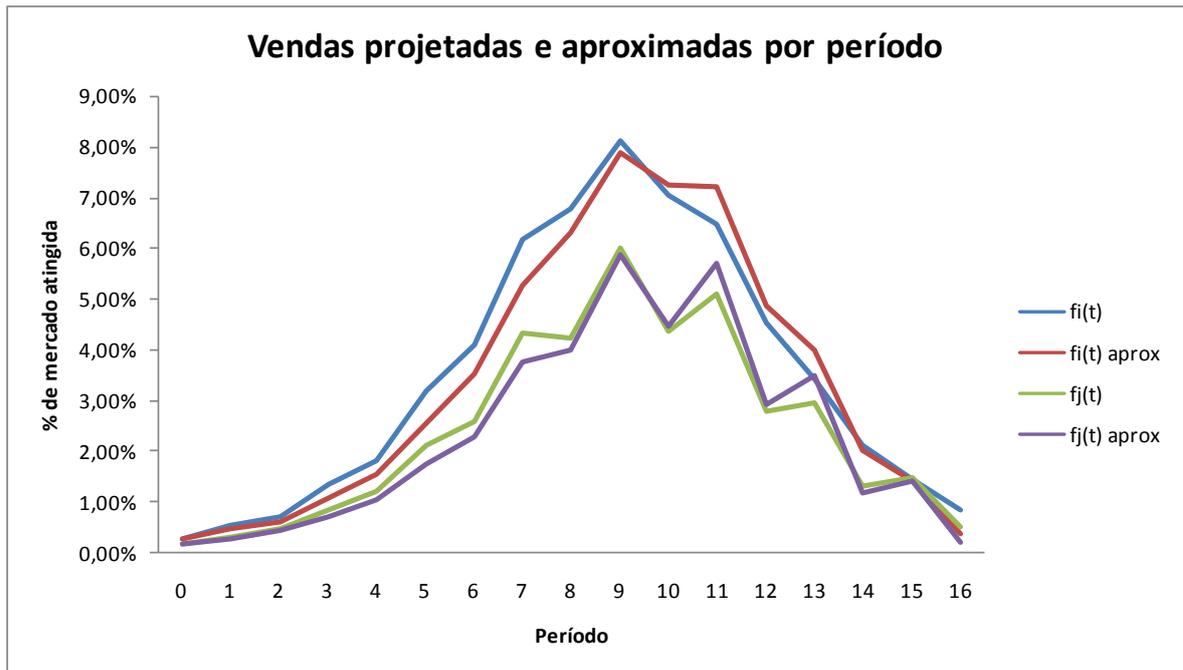


Figura 25 - Gráfico comparativo de vendas por período do caso de Equilíbrio de investimento unitário em propaganda com preço conhecido

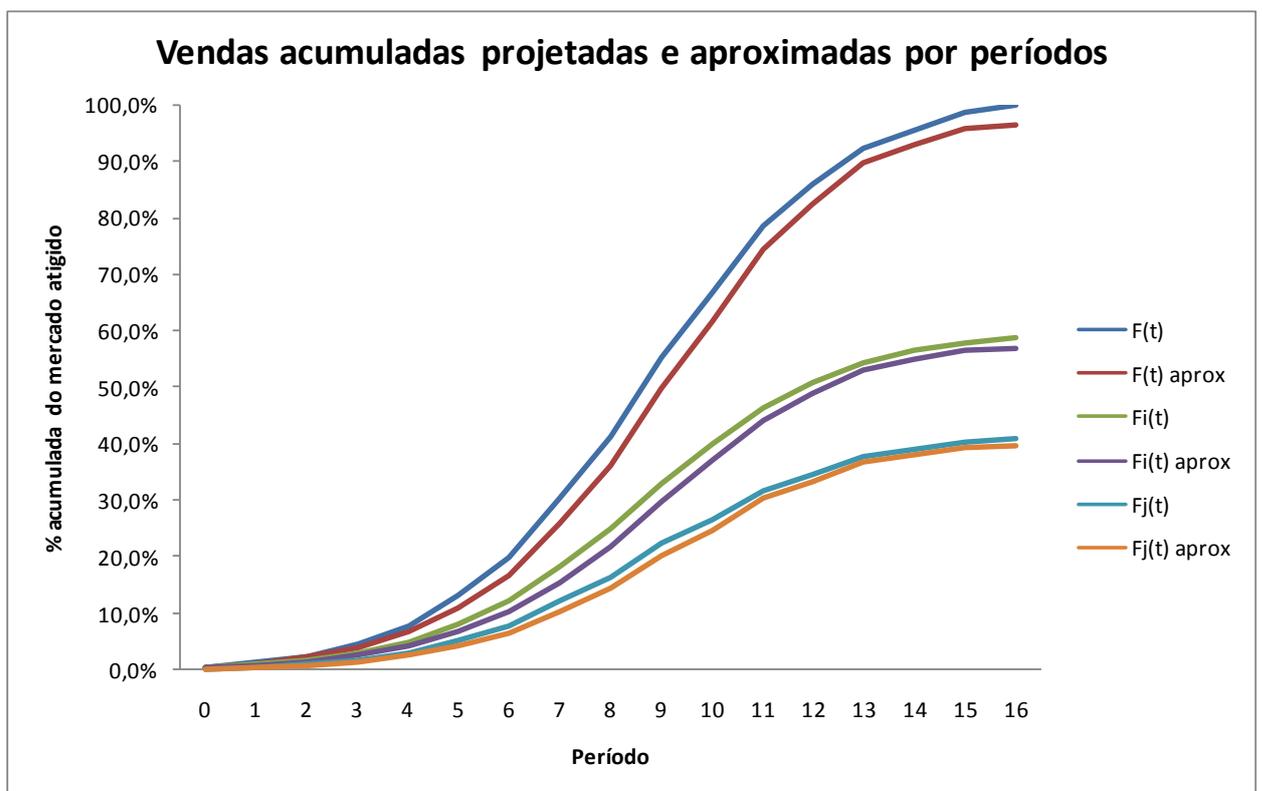


Figura 26 - Gráfico comparativo de vendas acumuladas do caso de Equilíbrio de investimento unitário em propaganda com preço conhecido

Em relação às vendas acumuladas, Figura 26, a aproximação é similar para as duas empresas, projetando velocidade de difusão ligeiramente menor e, conseqüentemente, menor fatia de mercado atingida ao longo do tempo. Nesse caso as curvas também apresentam formato muito próximo, representando uma aproximação adequada do modelo.

4.1.5 Equilíbrio Nash de preço e investimento em propaganda simultaneamente

4.1.5.1 Equação

Para analisar o equilíbrio Nash preço e investimento em propaganda é utilizada a Equação 22 - Maximização do lucro, dada por:

$$\max \Pi_i(t) = \max [S_i(t)(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))]$$

E o termo x_i , assim como para os dois casos anteriores, é definido pela Equação 40.

Para a obtenção da estratégia de precificação, deriva-se a Equação 22 em relação à $P_i(t)$, obtendo a Equação 33. Já para definir a estratégia ótima de investimento em propaganda, deriva-se a Equação 22 em relação à $A_i(t)$ para obter a Equação 34. Após simplificações e igualando ambas as equações à zero, obtém-se as variações ótimas de preço e do investimento em propaganda para a empresa i , dada pela Equação 41 e pela Equação 43, respectivamente:

$$\frac{P_i^{max}(t)}{P_i(t-1)} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{C_i(t) + A_i(t)}{P_i(t-1)} + \frac{1}{\beta_{P_i}} \left[-\beta_{A_i} \left(\frac{A_i(t)}{A_i(t-1)} - 1 \right) + \beta_{A_{ji}} \left(\frac{A_j(t)}{A_j(t-1)} - 1 \right) + \beta_{P_{ji}} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\}$$

$$\frac{A_i^{max}(t)}{A_i(t-1)} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{P_i(t) - C_i(t)}{A_i(t-1)} + \frac{1}{\beta_{A_i}} \left[-\beta_{P_i} \left(\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} - 1 \right) + \beta_{A_{ji}} \left(\frac{A_j(t)}{A_j(t-1)} - 1 \right) + \beta_{P_{ji}} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\}$$

Nesse caso, o preço ótimo da empresa i é função do preço da concorrente e das estratégias de investimento em propaganda de ambas as empresas. Já a decisão ótima de propaganda da empresa i é função da decisão de propaganda da empresa j e das decisões de preço de ambas as empresas. Assumindo que a empresa j age de maneira racional e também busca as estratégias ótimas de preço e propaganda, as equações que representam suas decisões são análogas à Equação 41 e à Equação 43. Dessa forma, têm-se um sistema com quatro equações (Equação 41, Equação 43 e suas análogas para a empresa j) e quatro variáveis ($P_i^{max}(t)$, $P_j^{max}(t)$, $A_i^{max}(t)$ e $A_j^{max}(t)$) o qual pode ser resolvido analiticamente. Solucionando o sistema, têm-se as seguintes equações de preço e propaganda ótimas em equilíbrio para a empresa i (a solução foi obtida numericamente através do *software* WOLFRAN MATHEMATICA 6.0):

$$\begin{aligned}
\frac{P_i^{**}(t)}{P_i(t-1)} &= C_i(t) \left[P_j(t-1)\Delta_A + A_j(t-1)\Delta_{A_iP_j} \right] \\
&+ A_i(t-1) \left[A_j(t-1) \left(\Delta_P + \Delta_{A_iP_j} - \Delta_{P_jA_{ji}} - \beta_{P_{ji}} - \beta_{P_j} \right) \right. \\
&+ \Delta_{P_jA_{ji}} \left(P_j(t-1) - C_j(t) \right) \\
&+ P_j(t-1) \left(\Delta_A + \Delta_{P_iA_j} - \beta_{A_j} \right. \\
&\left. \left. - \beta_{A_{ji}} \right) \right] \times \left\{ P_i(t-1) \left(P_j(t-1)\Delta_A + A_j(t-1)\Delta_{A_iP_j} \right) \right. \\
&\left. + A_i(t-1) \left(P_j(t-1)\Delta_{P_iA_j} + A_j(t-1)\Delta_P \right) \right\}^{-1}
\end{aligned}$$

Equação 45 - Decisão ótima de preço em equilíbrio Nash de preço e investimento em propaganda simultaneamente

$$\begin{aligned}
\frac{A_i^{**}(t)}{A_i(t-1)} &= \left\{ (P_i(t-1) - C_i(t)) \left(P_j(t-1)\Delta_{P_iA_j} + A_j(t-1)\Delta_P \right) \right. \\
&+ P_i(t-1) \left[\left(P_j(t-1) - C_j(t) - A_j(t-1) \right) \Delta_{P_iA_j} \right. \\
&+ \left(P_j(t-1)\Delta_A + A_j(t-1)\Delta_{A_iP_j} \right) \\
&\left. \left. - \left(P_j(t-1)\Delta_{A_j} + A_j(t-1)\Delta_{P_j} \right) \right] \right\} \times \left\{ P_i(t-1) \left(P_j(t-1)\Delta_A + A_j(t-1)\Delta_{A_iP_j} \right) \right. \\
&\left. + A_i(t-1) \left(P_j(t-1)\Delta_{P_iA_j} + A_j(t-1)\Delta_P \right) \right\}^{-1}
\end{aligned}$$

Equação 46 - Decisão ótima de investimento em propaganda em equilíbrio Nash de preço e investimento em propaganda simultaneamente

Para:

$$\begin{aligned}
\Delta_A &= \left(\beta_{A_i}\beta_{A_j} - \beta_{A_{ij}}\beta_{A_{ji}} \right) & \Delta_{P_iA_j} &= \left(\beta_{P_i}\beta_{A_j} - \beta_{P_{ij}}\beta_{A_{ji}} \right) & \Delta_{A_j} &= \left(\beta_{A_j} + \beta_{A_{ji}} \right) \\
\Delta_P &= \left(\beta_{P_i}\beta_{P_j} - \beta_{P_{ij}}\beta_{P_{ji}} \right) & \Delta_{P_jA_{ji}} &= \left(\beta_{P_j}\beta_{A_{ji}} - \beta_{A_j}\beta_{P_{ji}} \right) & \Delta_{P_j} &= \left(\beta_{P_j} + \beta_{P_{ji}} \right) \\
\Delta_{A_iP_j} &= \left(\beta_{A_i}\beta_{P_j} - \beta_{A_{ij}}\beta_{P_{ji}} \right) & \Delta_{P_jA_{ij}} &= \left(\beta_{P_j}\beta_{A_{ij}} - \beta_{A_j}\beta_{P_{ji}} \right)
\end{aligned}$$

4.1.5.2 Resultados Analíticos

A interpretação da solução do sistema de equações que representa o equilíbrio de preço e propaganda simultaneamente proporciona uma das principais

contribuições do presente trabalho. Resultado obtido tem relevância prática, além de merecer destaque por ser contra intuitivo.

4.1.5.2.1 Teorema 1

Considere um processo de difusão da inovação de uma categoria de novos produtos, no qual duas empresas competem entre si em decisões de preço e propaganda. A estratégia ótima das empresas é autodestrutiva no sentido de que as decisões ótimas de preço e propaganda anulam a margem das empresas e interrompem o crescimento do nível de vendas de seus produtos no mercado. A consequência prática é que as empresas irão atuar priorizando uma das duas decisões.

4.1.5.2.2 Prova

1) **Lucro nulo:** Deve-se substituir $P_i^{**}(t)$ e $A_i^{**}(t)$, dados pela Equação 45 e Equação 46 respectivamente, na equação do lucro (Equação 22):

$$\begin{aligned} \Pi_i(t) = & \left\{ P_i(t-1) \left\{ C_i(t) \left[P_j(t-1)\Delta_A + A_j(t-1)\Delta_{A_iP_j} \right] \right. \right. \\ & + A_i(t-1) \left[A_j(t-1) \left(\Delta_P + \Delta_{A_iP_j} - \Delta_{P_jA_{ji}} - \beta_{P_{ji}} - \beta_{P_j} \right) \right. \\ & \left. \left. + \Delta_{P_jA_{ji}} \left(P_j(t-1) - C_j(t) \right) + P_j(t-1) \left(\Delta_A + \Delta_{P_iA_j} - \beta_{A_j} - \beta_{A_{ji}} \right) \right] \right\} \\ & - A_j(t-1) \left\{ \left(P_i(t-1) - C_i(t) \right) \left(P_j(t-1)\Delta_{P_iA_j} + A_j(t-1)\Delta_P \right) \right. \\ & \left. + P_i(t-1) \left[\left(P_j(t-1) - C_j(t) - A_j(t-1) \right) \Delta_{P_iA_j} \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(P_j(t-1)\Delta_A + A_j(t-1)\Delta_{A_iP_j} \right) - \left(P_j(t-1)\Delta_{A_j} + A_j(t-1)\Delta_{P_j} \right) \right] \right\} \times \left\{ P_i(t-1) \right. \\ & \left. - 1 \right\} \left(P_j(t-1)\Delta_A + A_j(t-1)\Delta_{A_iP_j} \right) \\ & + A_i(t-1) \left(P_j(t-1)\Delta_{P_iA_j} + A_j(t-1)\Delta_P \right) \}^{-1} - C_i(t) \end{aligned}$$

Após manipulação algébrica dos termos pode-se demonstrar que:

$$P_i^{**}(t) - A_i^{**}(t) = C_i(t) \quad \text{e} \quad \Pi_i(t) = 0$$

Isso demonstra que, para que para quaisquer coeficientes de inovação, imitação, impacto de preço e impacto de propaganda, a empresa definirá o preço e a propaganda de modo a zerar seus lucros.

- 2) **Difusão interrompida:** Deve-se substituir $P_i^{**}(t)$, $P_j^{**}(t)$, $A_i^{**}(t)$ e $A_j^{**}(t)$, dados pela Equação 45 e Equação 46 e suas análogas, respectivamente, na equação do coeficiente do *mix de marketing* $x_i(t)$ (Equação 40). Após manipulação dos termos é simples demonstrar que:

$$x_i(t) = 0$$

Isso demonstra que, para que para quaisquer coeficientes de inovação, imitação, impacto de preço e impacto de propaganda, a empresa definirá o preço e a propaganda de modo interromper o processo de difusão de seu produto e do seu concorrente.

4.1.5.2.3 Interpretação e Implicações Gerenciais

A partir do teorema apresentado e de sua prova, pode-se afirmar que a busca pela otimização simultânea de decisões de preço e propaganda é prejudicial à

empresa e ao processo de difusão de uma nova categoria de produtos. Do ponto de vista gerencial, a alternativa mais interessante é pré-definir uma das variáveis (a que tenha menor impacto nas vendas) e otimizar a outra variável de decisão em função da variável pré-definida.

4.1.5.3 Exemplo Numérico – dados ilustrativos

Para ilustrar essa última situação de Equilíbrio Nash foram utilizados os mesmos coeficientes do equilíbrio de preço e propaganda dos exemplos anteriores (ver Tabela 1 e Tabela 12).

Em relação ao custo das empresas, o mesmo valor fixo e arbitrário dos exemplos anteriores foi mantido, já que a idéia é apenas representar o funcionamento do modelo. Em relação ao preço no instante inicial, $t = 0$, o valor arbitrário de \$ 1.000 foi pré-definido assim como nos casos anteriores de equilíbrio de preço. Já a decisão inicial de propaganda foi definida como \$ 200 para cada empresa.

Também como nos exemplos anteriores, a empresa i possui coeficientes de preço, propaganda, inovação e imitação maiores que os da empresa j , o que ilustra certa vantagem competitiva.

Com as informações apresentadas buscou-se projetar o processo decisório para todo o ciclo de vida do produto até que $F(t) = 100\%$, ou seja, até que todo o mercado seja atingido. Entretanto, ao contrário dos casos anteriores, viu-se que a combinação ótima de decisões de preço e propaganda anula o processo de difusão. Isso porque a combinação ótima de preço e propaganda das duas empresas anula o termo $x(t)$, o qual multiplica a equação de difusão.

Além de impactar negativamente o processo de difusão, para qualquer período, a decisão de preço é exatamente a decisão unitária de propaganda

somada ao custo unitário. Ou seja, a empresa, na busca por maximizar sua fatia de mercado, reduz sua lucratividade a zero, como demonstrado na seção anterior.

Esse resultado é similar ao definido pelo modelo de Bertrand, segundo o qual duas empresas com produtos homogêneos reduzem os preços até zerar a margem de lucro. O que difere ambos os modelos é que no presente trabalho, ao contrário do modelo de Bertrand, os produtos não são perfeitamente homogêneos. Além disso, no modelo proposto duas variáveis de decisão são consideradas, enquanto apenas uma é considerada no modelo de Bertrand.

Do mesmo modo que prejudica a margem de lucro das empresas, esse nível de competição se mostra tão predatório que age contra o processo de difusão das empresas. Isso ocorre porque, na ânsia de obter maior fatia de mercado, as empresas acabam agindo contra a evolução das vendas da concorrente, impedindo a difusão do novo produto.

A tabela abaixo demonstra a dinâmica de decisão de preço e propaganda das empresas:

Período	$P_i(t)$	$P_j(t)$	$\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)}$	$\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)}$	$A_i(t)$	$A_j(t)$	$\frac{A_i(t)}{A_i(t-1)}$	$\frac{A_j(t)}{A_j(t-1)}$
0	\$1.000	\$1.000	-	-	\$200	\$200	-	-
1	\$3.716	\$4.002	3,716	4,002	\$3.560	\$3.802	35,597	19,008
2	\$5.496	\$6.340	1,479	1,584	\$5.323	\$6.140	1,495	1,615

Tabela 16 - Decisões ótimas de preço e propaganda do caso de Equilíbrio Nash de preço e propaganda simultaneamente

É interessante notar que tanto os preços definidos pelas empresas, quanto as despesas com propaganda crescem significativamente período a período. Nesse caso nota-se que, ao invés de o preço e a propaganda estabilizarem em um patamar de equilíbrio, as variações de preço e propaganda atingem o equilíbrio.

Mais especificamente, para a empresa i , tanto a variação ótima de preço quanto a variação ótima de propaganda se estabilizam em 1,48, aproximadamente, o que representa um crescimento de quase 50% em cada período de decisão. No caso da empresa j , esse valor fica em torno de 1,58 para as variações de preço e propaganda, o que representa crescimento de quase 60% por período.

4.1.5.3.1 Interpretação do modelo

Pela análise anterior, é evidente que essa dinâmica de precificação e de investimento em propaganda acaba se distanciando da realidade devido ao crescimento excessivo de ambas variáveis. Dessa forma, fica claro que as empresas não devem buscar a otimização do investimento em propaganda e do preço do produto simultaneamente já que isso interrompe o processo de difusão do novo produto, além de zerar a margem de lucro. Assim como apresentado anteriormente, a opção mais interessante é pré-definir uma das variáveis (a que tenha menor impacto nas vendas) e calcular a decisão ótima da outra variável de decisão em função da variável conhecida.

5 Conclusão

No presente trabalho foi analisado o problema de análise do processo de difusão da inovação em um oligopólio, considerando competição por preço e/ou propaganda. Decisões em um duopólio foram investigadas meticulosamente tanto do ponto de vista teórico, quanto com um exemplo empírico.

Foi proposto um modelo de difusão baseado no Generalized Bass Model - GBM (BASS, KRISHNAN & JAIN 1994). A principal contribuição do trabalho é considerar um mercado oligopolista no qual a ação dos concorrentes impacta o nível de vendas de determinada empresa.

A partir desse modelo foram calculadas as estratégias ótimas de preço e propaganda considerando um mercado duopolista. Como as decisões ótimas de cada empresa eram função das decisões da concorrente, foi calculado o equilíbrio Nash considerando diferentes cenários competitivos: competição por preço desconsiderando a propaganda, competição por preço com a propaganda conhecida, competição por propaganda com preço conhecido e competição por preço e propaganda. Nas três primeiras situações foi possível calcular tanto a estratégia ótima utilizada, seja ela de precificação ou investimento em propaganda. Entretanto, na situação em que a empresa busca simultaneamente decisões ótimas de preço e propaganda, resultados menos intuitivos, porém interessantes, foram obtidos.

Os principais resultados deste equilíbrio mostraram que, na ânsia de aumentar sua fatia de mercado, as empresas zeram a margem de lucro, alterando o preço e a propaganda de forma que a diferença entre o preço unitário e o investimento unitário em propaganda seja o custo unitário. Essa decisão é radical não apenas no sentido de zerar a lucratividade das empresas. Ela também interrompe o processo de difusão da inovação anulando o aumento do nível de vendas das empresas. Com esses resultados, foi possível concluir que as empresas não devem buscar decisões ótimas de preço e propaganda simultaneamente, mas sim, tomar fixa uma dessas variáveis e escolher o ótimo da outra variável como função da primeira.

Com o intuito de validar o modelo do ponto de vista prático, um caso real foi analisado e, a partir desse foi possível demonstrar não apenas que o modelo consegue prever bem as dinâmicas do processo de difusão da inovação, como também as vantagens econômicas de sua utilização no processo de tomada de decisão.

Em relação a pesquisas futuras, o principal foco é a estimativa dos coeficientes de inovação e imitação para esse novo modelo, bem como os parâmetros que representam o impacto das variações de preço e propaganda no processo de difusão. Além disso, há a possibilidade de análise de mercados oligopolistas com mais de dois competidores, análise do equilíbrio em mercados em que há um competidor com o papel de líder e outro(s) como seguidor (es). Outro tema relacionado à pesquisa é a definição do preço de lançamento de novos produtos, já que o presente trabalho contempla a tomada de decisão de preço ao longo do ciclo de vida dado um preço de lançamento. Esta limitação é parcialmente atacada na pesquisa, dado que decisões míopes são consideradas e um novo preço pode sempre ser calculado com base em decisões anteriores. De toda forma, a definição do preço de lançamento de novos produtos é ponto a ser abordado em pesquisas futuras.

6 ANEXOS

6.1 ANEXO I – Decisão ótima de preço

Para calcular a decisão ótima do preço, o primeiro passo é calcular a derivada do lucro, dado pela Equação 30, em relação ao preço. Para tanto, deve-se agrupar os termos que dependem e não dependem de $P_i(t)$. Assim, a Equação 30 pode ser reescrita como:

$$\Pi_i(t) = \max[u_i(t)x_i(t)(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))]$$

Separando a equação em termos para facilitar o cálculo, têm-se os termos $u_i(t)$, o qual não contém o termo $P_i(t)$ e é dado pela Equação 31, $x_i(t)$, dado pela Equação 29 e $(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))$. Utilizando a regra do produto, tem-se:

$$\begin{aligned} \partial \frac{\Pi_i(t)}{P_i(t)} = & \left[\partial \frac{u_i(t)}{P_i(t)} \times x_i(t) \times (P_i(t) - C_i(t) - A_i(t)) \right] \\ & + \left[\partial \frac{x_i(t)}{P_i(t)} \times u_i(t) \times (P_i(t) - C_i(t) - A_i(t)) \right] \\ & + \left[\partial \frac{(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))}{P_i(t)} \times u_i(t) \times x_i(t) \right] \end{aligned}$$

Equação 47 - Regra da cadeia para a derivada do lucro em relação ao preço

Como:

$$\partial \frac{u_i(t)}{P_i(t)} = 0 \quad ; \quad \partial \frac{x_i(t)}{P_i(t)} = \frac{\beta_{P_i}}{P_i(t-1)} \quad \text{e} \quad \partial \frac{(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))}{P_i(t)} = 1$$

A Equação 47 deve ser reescrita como:

$$\partial \frac{\Pi_i(t)}{P_i(t)} = 0 + \left[\frac{\beta_{P_i}}{P_i(t-1)} \times u_i(t) \times (P_i(t) - C_i(t) - A_i(t)) \right] + [1 \times u_i(t) \times x_i(t)]$$

Ou

$$\partial \frac{\Pi_i(t)}{P_i(t)} = u_i(t) \left[\frac{\beta_{P_i}(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))}{P_i(t-1)} + x_i(t) \right]$$

Equação 48 - Derivada do lucro da empresa i em relação ao preço no instante t

O lucro atinge seu máximo quando $\partial \frac{\Pi_i(t)}{P_i(t)} = 0$. Assim, deve-se encontrar o $P_i(t)$ que atende a essa condição. A seguinte equação deve ser resolvida para a obtenção desse valor:

$$\left[\frac{\beta_{P_i}(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))}{P_i(t-1)} + x_i(t) \right] = 0$$

Equação 49 - Cálculo do valor ótimo de preço da empresa i no instante t

Reescrevendo a Equação 49 considerando termo $x_i(t)$ para o cenário de dois competidores com tomada de decisão discreta, tem-se

$$\frac{\beta_{P_i}(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))}{P_i(t-1)} + 1 + \left[\frac{P_i(t) - P_i(t-1)}{P_i(t-1)} \right] \beta_{P_i} + \left[\frac{A_i(t) - A_i(t-1)}{A_i(t-1)} \right] \beta_{A_i} - \left\{ \left[\frac{P_j(t) - P_j(t-1)}{P_j(t-1)} \right] \beta_{P_{ji}} + \left[\frac{A_j(t) - A_j(t-1)}{A_j(t-1)} \right] \beta_{A_{ji}} \right\} = 0$$

Resolvendo a Equação 49 para $P_i(t)$ tem-se:

$$\begin{aligned}
P_i(t)^* = \frac{1}{2} & \left\{ C_i(t) + A_i(t) \right. \\
& + P_i(t-1) \left(1 - \frac{1}{\beta_{P_i}} + \frac{\beta_{A_i}}{\beta_{P_i}} - \frac{\beta_{A_{ji}}}{\beta_{P_i}} - \frac{\beta_{P_{ji}}}{\beta_{P_i}} - \frac{\beta_{A_i} A_i(t)}{\beta_{P_i} A_i(t-1)} + \frac{\beta_{A_{ji}} A_j(t)}{\beta_{P_i} A_j(t-1)} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\beta_{P_{ji}} P_j(t)}{\beta_{P_i} P_j(t-1)} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Rearranjando a equação acima, chega-se à equação Equação 33:

$$\begin{aligned}
P_i(t)^* = P_i(t-1) & \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{C_i(t) + A_i(t)}{P_i(t-1)} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\beta_{P_i}} \left[-\beta_{A_i} \left(\frac{A_i(t)}{A_i(t-1)} - 1 \right) + \beta_{A_{ji}} \left(\frac{A_j(t)}{A_j(t-1)} - 1 \right) + \beta_{P_{ji}} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\}
\end{aligned}$$

Ou, ainda, pela Equação 41 que representa a variação ótima do preço no instante t .

$$\begin{aligned}
\frac{P_i^{max}(t)}{P_i(t-1)} = \frac{1}{2} & \left\{ 1 + \frac{C_i(t) + A_i(t)}{P_i(t-1)} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\beta_{P_i}} \left[-\beta_{A_i} \left(\frac{A_i(t)}{A_i(t-1)} - 1 \right) + \beta_{A_{ji}} \left(\frac{A_j(t)}{A_j(t-1)} - 1 \right) + \beta_{P_{ji}} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\}
\end{aligned}$$

6.2 ANEXO II – Decisão ótima de investimento em propaganda

Para calcular a decisão ótima de investimento em propaganda, o primeiro passo é calcular a derivada do lucro, dado pela Equação 30, em relação ao investimento unitário em propaganda. Para tanto, deve-se agrupar os termos que dependem e não dependem de $A_i(t)$. Assim, a Equação 30 pode ser reescrita como:

$$\Pi_i(t) = \max[u_i(t)x_i(t)(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))]$$

Separando a equação em termos para facilitar o cálculo, têm-se os termos $u_i(t)$, o qual não contém o termo $A_i(t)$ e é dado pela Equação 31, $x_i(t)$, dado pela Equação 29 e $(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))$. Utilizando a regra do produto, tem-se:

$$\begin{aligned} \partial \frac{\Pi_i(t)}{A_i(t)} = & \left[\partial \frac{u_i(t)}{A_i(t)} \times x_i(t) \times (P_i(t) - C_i(t) - A_i(t)) \right] \\ & + \left[\partial \frac{x_i(t)}{A_i(t)} \times u_i(t) \times (P_i(t) - C_i(t) - A_i(t)) \right] \\ & + \left[\partial \frac{(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))}{A_i(t)} \times u_i(t) \times x_i(t) \right] \end{aligned}$$

Equação 50 - Regra da cadeia para a derivada do lucro em relação ao investimento em propaganda

Como:

$$\partial \frac{u_i(t)}{A_i(t)} = 0 \ ; \ \partial \frac{x_i(t)}{A_i(t)} = \frac{\beta_{A_i}}{A_i(t-1)} \ \text{e} \ \partial \frac{(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))}{A_i(t)} = -1$$

A Equação 50 deve ser reescrita como:

$$\partial \frac{\Pi_i(t)}{A_i(t)} = 0 + \left[\frac{\beta_{A_i}}{A_i(t-1)} \times u_i(t) \times (P_i(t) - C_i(t) - A_i(t)) \right] + [-1 \times u_i(t) \times x_i(t)]$$

Ou

$$\partial \frac{\Pi_i(t)}{A_i(t)} = u_i(t) \left[\frac{\beta_{A_i}(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))}{A_i(t-1)} - x_i(t) \right]$$

Equação 51 - Derivada do lucro em relação ao investimento em propaganda

O lucro atinge seu máximo quando $\partial \frac{\Pi_i(t)}{A_i(t)} = 0$. Assim, deve-se encontrar o $A_i(t)$ que atende a essa condição. A seguinte equação deve ser resolvida para a obtenção desse valor:

$$\left[\frac{\beta_{A_i}(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))}{A_i(t-1)} - x_i(t) \right] = 0$$

Equação 52 - Cálculo do valor ótimo de preço da empresa i no instante t

Reescrevendo a Equação 52 considerando termo $x_i(t)$ para o cenário de dois competidores com tomada de decisão discreta, tem-se

$$\frac{\beta_{A_i}(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))}{A_i(t-1)} - \left\{ 1 + \left[\frac{P_i(t) - P_i(t-1)}{P_i(t-1)} \right] \beta_{P_i} + \left[\frac{A_i(t) - A_i(t-1)}{A_i(t-1)} \right] \beta_{A_i} - \left\{ \left[\frac{P_j(t) - P_j(t-1)}{P_j(t-1)} \right] \beta_{P_{ji}} + \left[\frac{A_j(t) - A_j(t-1)}{A_j(t-1)} \right] \beta_{A_{ji}} \right\} \right\} = 0$$

Resolvendo a Equação 52 para $A_i(t)$ tem-se:

$$\begin{aligned}
A_i(t)^* = & \frac{1}{2} \left\{ P_i(t) - C_i(t) \right. \\
& + A_i(t-1) \left(1 - \frac{1}{\beta_{A_i}} - \frac{\beta_{A_{ji}}}{\beta_{A_i}} + \frac{\beta_{P_i}}{\beta_{A_i}} - \frac{\beta_{P_{ji}}}{\beta_{A_i}} - \frac{\beta_{P_i} P_i(t)}{\beta_{A_i} P_i(t-1)} + \frac{\beta_{A_{ji}} A_j(t)}{\beta_{A_i} A_j(t-1)} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\beta_{P_{ji}} P_j(t)}{\beta_{A_i} P_j(t-1)} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Rearranjando a equação acima, chega-se à Equação 34:

$$\begin{aligned}
A_i(t)^* = & A_i(t-1) \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{P_i(t) - C_i(t)}{A_i(t-1)} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\beta_{A_i}} \left[-\beta_{P_i} \left(\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} - 1 \right) + \beta_{A_{ji}} \left(\frac{A_j(t)}{A_j(t-1)} - 1 \right) + \beta_{P_{ji}} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\}
\end{aligned}$$

6.3 ANEXO III – Decisão ótima de preço para a função lucro sem propaganda

Para calcular a decisão ótima do preço, o primeiro passo é calcular a derivada do lucro, dado pela Equação 35, em relação ao preço. Para tanto, deve-se agrupar os termos que dependem e não dependem de $P_i(t)$. Assim, a Equação 35 pode ser reescrita como:

$$\Pi_i(t) = \max[u_i(t)x_i(t)(P_i(t) - C_i(t))]$$

Separando a equação em termos para facilitar o cálculo, têm-se os termos $u_i(t)$, o qual não contém o termo $P_i(t)$ e é dado pela Equação 31, $x_i(t)$, dado pela Equação 36 e $(P_i(t) - C_i(t))$. Utilizando a regra do produto, tem-se:

$$\frac{\partial \Pi_i(t)}{\partial P_i(t)} = 0 \left[\partial \frac{u_i(t)}{P_i(t)} \times x_i(t) \times (P_i(t) - C_i(t)) \right] + \left[\partial \frac{x_i(t)}{P_i(t)} \times u_i(t) \times (P_i(t) - C_i(t)) \right] \\ + \left[\partial \frac{(P_i(t) - C_i(t))}{P_i(t)} \times u_i(t) \times x_i(t) \right]$$

Equação 53 - Regra da cadeia para derivada do lucro em relação ao preço desconsiderando a propaganda

Como:

$$\partial \frac{u_i(t)}{P_i(t)} = 0 ; \partial \frac{x_i(t)}{P_i(t)} = \frac{\beta_{P_i}}{P_i(t-1)} \text{ e } \partial \frac{(P_i(t) - C_i(t))}{P_i(t)} = 1$$

A Equação 53 deve ser reescrita como:

$$\partial \frac{\Pi_i(t)}{P_i(t)} = 0 + \left[\frac{\beta_{P_i}}{P_i(t-1)} \times u_i(t) \times (P_i(t) - C_i(t)) \right] + [1 \times u_i(t) \times x_i(t)]$$

Ou

$$\partial \frac{\Pi_i(t)}{P_i(t)} = u_i(t) \left[\frac{\beta_{P_i}(P_i(t) - C_i(t))}{P_i(t-1)} + x_i(t) \right] \frac{\partial^2 \Pi_i(t)}{\partial P_i(t)^2}$$

Equação 54 - Derivada do lucro da empresa i em relação ao preço no instante t para o caso sem propaganda

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \Pi_i(t)}{\partial P_i(t)^2} - \varepsilon & \frac{\partial^2 \Pi_i(t)}{\partial P_i(t) \partial A_i(t)} \\ \frac{\partial^2 \Pi_i(t)}{\partial P_i(t) \partial A_i(t)} & \frac{\partial^2 \Pi_i(t)}{\partial A_i(t)^2} - \varepsilon \end{array} \right] \frac{\partial^2 \Pi_i(t)}{\partial P_i(t)^2} = \frac{2\beta_{P_i} u_i(t)}{P_i(t-1)} \frac{\partial^2 \Pi_i(t)}{\partial A_i(t)^2} = -\frac{2\beta_{A_i} u_i(t)}{A_i(t-1)} \frac{\partial^2 \Pi_i(t)}{\partial P_i(t) \partial A_i(t)} = \frac{\beta_{A_i} u_i(t)}{A_i(t-1)} - \frac{\beta_{P_i} u_i(t)}{P_i(t-1)}$$

O lucro atinge seu máximo quando $\frac{\partial \Pi_i(t)}{\partial P_i(t)} = 0$. Assim, deve-se encontrar o $P_i(t)$ que

atende a essa condição. A seguinte equação deve ser resolvida para a obtenção

desse valor:

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi_i(t)}{\partial P_i(t)^2} - \varepsilon \right) \left(\frac{\partial^2 \Pi_i(t)}{\partial A_i(t)^2} - \varepsilon \right) - \left(\frac{\partial^2 \Pi_i(t)}{\partial P_i(t) \partial A_i(t)} \right)^2$$

$$\left(\frac{2\beta_{P_i} u_i(t)}{P_i(t-1)} - \varepsilon \right) \left(-\frac{2\beta_{A_i} u_i(t)}{A_i(t-1)} - \varepsilon \right) - \left(\frac{\beta_{A_i} u_i(t)}{A_i(t-1)} - \frac{\beta_{P_i} u_i(t)}{P_i(t-1)} \right)^2$$

$$\left[\frac{\beta_{P_i}(P_i(t) - C_i(t) - A_i(t))}{P_i(t-1)} + x_i(t) \right] = 0$$

Equação 55 - Cálculo do valor ótimo de preço da empresa i no instante t para o caso sem propaganda

Reescrevendo a Equação 55 considerando termo $x_i(t)$ para o cenário de dois competidores com tomada de decisão discreta e desconsiderando o investimento em propaganda, tem-se

$$\frac{\beta_{P_i}(P_i(t) - C_i(t))}{P_i(t-1)} + 1 + \left[\frac{P_i(t) - P_i(t-1)}{P_i(t-1)} \right] \beta_{P_i} - \left[\frac{P_j(t) - P_j(t-1)}{P_j(t-1)} \right] \beta_{P_{ji}} = 0$$

Resolvendo a Equação 55 para $P_i(t)$ tem-se:

$$P_i(t)^* = \frac{1}{2} \left\{ C_i(t) + P_i(t-1) \left(1 - \frac{1}{\beta_{P_i}} - \frac{\beta_{P_{ji}}}{\beta_{P_i}} - \frac{\beta_{A_i} A_i(t)}{\beta_{P_i} A_i(t-1)} + \frac{\beta_{P_{ji}} P_j(t)}{\beta_{P_i} P_j(t-1)} \right) \right\}$$

Rearranjando a equação acima, chega-se à Equação 37:

$$\frac{P_i^*(t)}{P_i(t-1)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{C_i(t)}{P_i(t-1)} + 1 + \frac{1}{\beta_{P_i}} \left[\beta_{P_{ji}} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\}$$

6.4 ANEXO IV - Cálculo do equilíbrio de preço para o caso em que a propaganda é desconsiderada

O preço ótimo da empresa i é dado por:

$$\frac{P_i^*(t)}{P_i(t-1)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{C_i(t)}{P_i(t-1)} + 1 + \frac{1}{\beta_{P_i}} \left[\beta_{P_{ji}} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\}$$

Substituindo a equação da empresa j , análoga à Equação 37 da empresa i , tem-se a variação ótima do preço em equilíbrio para o cenário sem propaganda:

$$\begin{aligned} \frac{P_i^*(t)}{P_i(t-1)} = \frac{1}{2} & \left\{ \frac{C_i(t)}{P_i(t-1)} + 1 \right. \\ & + \frac{1}{\beta_{P_i}} \left[\beta_{P_{ji}} \left(\left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{C_j(t)}{P_j(t-1)} + 1 + \frac{1}{\beta_{P_j}} \left[\beta_{P_{ij}} \left(\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\} \right) - 1 \right) \right. \\ & \left. \left. - 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

Simplificando a equação acima, chega-se à Equação 38, dada por:

$$\begin{aligned} P_i^*(t) = \frac{1}{k} & \left\{ 2\beta_{P_i}\beta_{P_j}(C_i(t)) \right. \\ & \left. + P_i(t-1) \left[2\beta_{P_j}(\beta_{P_i} - \beta_{P_{ji}} - 1) + \beta_{P_{ji}}(-\beta_{P_{ij}} - 1) + \frac{C_j(t)\beta_{P_j}\beta_{P_{ji}}}{P_j(t-1)} \right] \right\} \end{aligned}$$

Para: $k = 4\beta_{P_i}\beta_{P_j} - \beta_{P_{ij}}\beta_{P_{ji}}$

Rearranjando os, a Equação 38 pode ser reescrita através da Equação 39:

$$\frac{P_i^*(t)}{P_i(t-1)} = \frac{1}{k} \left\{ \beta_{P_j} \left(2\beta_{P_i} \frac{C_i(t)}{P_i(t-1)} + \beta_{P_{ji}} \frac{C_j(t)}{P_j(t-1)} \right) + \Delta_P + \beta_{P_i}\beta_{P_j} - 2\beta_{P_j} - \beta_{P_{ji}} - \beta_{P_j}\beta_{P_{ji}} \right\}$$

Para: $\Delta_P = (\beta_{P_i} \beta_{P_j} - \beta_{P_{ij}} \beta_{P_{ji}})$

6.5 ANEXO V - Cálculo de equilíbrio de preços considerando o investimento em propaganda conhecido

Para se chegar ao equilíbrio de preço considerando o investimento em propaganda conhecido, deve-se substituir a equação de preço ótimo da empresa j , dada por:

$$\frac{P_j^{max}(t)}{P_j(t-1)} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{C_j(t) + A_j(t)}{P_j(t-1)} + \frac{1}{\beta_{P_j}} \left[-\beta_{A_j} \left(\frac{A_j(t)}{A_j(t-1)} - 1 \right) + \beta_{A_{ij}} \left(\frac{A_i(t)}{A_i(t-1)} - 1 \right) + \beta_{P_{ij}} \left(\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\}$$

Em sua análoga para a empresa i , dada pela Equação 41. Assim, chega-se à seguinte equação:

6.6 ANEXO VII- Cálculo de equilíbrio de investimento em propaganda considerando o preço conhecido

Para se chegar ao equilíbrio de investimento em propaganda considerando o preço dado pelo mercado, deve-se substituir a equação de investimento ótimo da empresa j , dada por:

$$\frac{A_j^{max}(t)}{A_j(t-1)} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{P_j(t) - C_j(t)}{A_j(t-1)} + \frac{1}{\beta_{A_j}} \left[-\beta_{P_i} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) + \beta_{A_{ij}} \left(\frac{A_i(t)}{A_i(t-1)} - 1 \right) + \beta_{P_{ij}} \left(\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right\}$$

Em sua análoga para a empresa i , dada pela Equação 43. Assim, chega-se à seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{A_i^{max}(t)}{A_i(t-1)} &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{P_i(t) - C_i(t)}{A_i(t-1)} \right. \\ &+ \frac{1}{\beta_{A_i}} \left[-\beta_{P_i} \left(\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} - 1 \right) \right. \\ &+ \beta_{A_{ji}} \left(\frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{P_j(t) - C_j(t)}{A_j(t-1)} \right. \right. \\ &+ \frac{1}{\beta_{A_j}} \left[-\beta_{P_i} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) + \beta_{A_{ij}} \left(\frac{A_i(t)}{A_i(t-1)} - 1 \right) + \beta_{P_{ij}} \left(\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \right. \\ &\left. \left. - 1 \right) + \beta_{P_{ji}} \left(\frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1 \right) - 1 \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

Que, após simplificações, pode ser reescrita como a Equação 44, dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_i^*(t) = \frac{1}{w} & \left\{ 2\beta_{A_i}\beta_{A_j} [P_i(t) - C_i(t)] \right. \\
& + A_i(t-1) \left[2\beta_{A_j} (\beta_{P_i} + \beta_{A_i} - \beta_{P_{ji}} - 1) \right. \\
& + \beta_{A_{ji}} (\beta_{P_j} - \beta_{P_{ij}} - \beta_{A_{ij}} - \beta_{A_j} - 1) - \frac{C_j(t)\beta_{A_j}\beta_{A_{ji}}}{A_j(t-1)} \\
& + \frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} (\beta_{P_{ij}}\beta_{A_{ji}} - 2\beta_{P_i}\beta_{A_j}) + \frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} (2\beta_{P_{ji}}\beta_{A_j} - \beta_{A_{ji}}\beta_{P_j}) \\
& \left. \left. + \frac{P_j(t)\beta_{A_j}\beta_{A_{ji}}}{A_j(t-1)} + \frac{P_j(t)A_i(t-1)}{w} \left(\frac{2\beta_{P_{ji}}\beta_{A_j} - \beta_{A_{ji}}\beta_{P_j}}{P_j(t-1)} + \frac{\beta_{A_j}\beta_{A_{ji}}}{A_j(t-1)} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Para: $w = 4\beta_{A_i}\beta_{A_j} - \beta_{A_{ij}}\beta_{A_{ji}}$

7 Bibliografia

ARON, D & BURNSTEIN, D 2003, *Broadband Adoption in the United States: An Empirical Analysis (working paper)*, viewed Outubro 2008, <[SSRN: http://ssrn.com/abstract=386100](http://ssrn.com/abstract=386100)>.

AT&T 2008, *AT&T Website*, viewed Fevereiro 2009, <<http://www.att.com/gen/investor-relations?pid=5711>>.

BASS, F 1969, 'A new product growth model for consumer durables', *Management Science*, 1969, pp. 215-227.

BASS, F 1980, 'The relationship between diffusion rates, experience curves, and demand elasticities for consumer durable technological innovations', *Journal of Business*, 1980, p. 51– 67.

BASS, F & BULTEZ, A 1982, 'A note on optimal strategic pricing of technological innovations', *Marketing Science*, 1982, p. 371– 378.

BASS, F, KRISHNAN, T & JAIN, D 1994, 'Why the Bass Model fits without decision variables', *Marketing Science*, Verão 1994, pp. 203-223.

BAYUS, BL, JAIN, S & RAO, A 1997, 'Too little, too early: introduction timing and new product performance in the Personal Digital Assistant Industry', *Journal of Marketing Research*, 1997, pp. 50-63.

BERTSEKAS, D 1999, *Nonlinear Programming*, Athena Scientific, Belmont.

BNET 2002, *AT&T Broadband to Raise Fee for High-Speed Internet Service - 2002*, viewed Fevereiro 2009, <<http://resources.bnet.com/topic/at%2526t+broadband+and+high-speed+internet.html>>.

Boston Consulting Group 2007, *Innovation 2007: A BCG Senior Management Survey*, viewed Fevereiro 2009, <http://www.bcg.com/publications/files/Innovation_Aug_2007.pdf>.

BRONSON, R 1985, *Pesquisa Operacional*, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo.

Business Week 2002, *Behind the High-Speed Slowdown - 2002*, viewed Fevereiro 2008, <http://www.businessweek.com/technology/tc_special/02broadband.htm>.

CARPENTER, GS & NAKAMOTO, K 1990, 'Competitive strategies for late entry into a market with dominant brand', *Management Science*, 1990, pp. 2368-1278.

CHATTERJEE, R, ELIASHBERG, J & RAO, VR 2000, 'Dynamic models incorporating competition', in *New-product diffusion models*, Springer, New York.

CHRISTENSEN, CM 1997, *The innovator's dilemma*, Harvard Business School Press, Boston.

CNET 2003, *AT&T teams with Covad to offer broadband - 2003*, viewed Fevereiro 2009, <http://news.cnet.com/ATT-teams-with-Covad-to-offer-broadband/2100-1034_3-5057823.html>.

- CNET 2005, *Comcast expected to raise broadband speed - 2005*, viewed Fevereiro 2009, <http://news.cnet.com/Comcast-expected-to-raise-broadband-speeds/2100-1034_3-5537139.html>.
- COMCAST 2008, *Comcast Corporate Overview*, viewed Fevereiro 2008, <<http://www.comcast.com/corporate/about/pressroom/corporateoverview/corporateoverview.html>>.
- COPELAND, T, KOLLER, T & MURRIN, J 2005, *Valuation: measuring and managing the value of companies*, Wiley & Sons, New York.
- CRAINER, S 1996, *Key Management Ideas: Thinkers That Changed the Management World*, Financial Times/Prentice Hall, Glasgow.
- DAVIS, M 1970, *Teoria dos jogos: Uma introdução não técnica*, Cultrix, São Paulo.
- DOCKNER, E & JORGENSEN, S 1992, 'New-products advertising in Dynamics Oligopolies', *Methods and Models of Operations Research*, 1992, pp. 459-473.
- ERICKSON, GM 1993, 'Offensive and defensive marketing: closed-loop duopoly strategies', *Marketing Letters*, 1993, pp. 285-295.
- ERICKSON, GM 1995a, 'Advertising strategies in a dynamic duopoly', *Journal of Marketing Research*, pp. 233-237.
- ERICKSON, G 1995b, 'Invited Review - Differential game models of advertising competition', *European Journal of Operational Research*, pp. 431-438.
- FIANI, R 2004, *Teoria dos Jogos*, Elsevier, Rio de Janeiro.
- FRUCHTER, GE & KALISH, S 1997, 'Closed-loop advertising strategies in a duopoly"', *Management Science*, 1997, pp. 54-63.
- GUPTA, CM & Di BENEDETTO, A 2007, 'Optimal pricing and advertising strategy for introducing a new business product with threat of competitive entry', *Industrial Marketing Management*, 2007, p. 540-548.
- HAUSER, J, G.J., T & GRIFFIN, A 2006, 'Research on innovation: a review and agenda for Marketing Science', *Marketing Science*, 2006, pp. 687-717.
- HORSKY, D 1990, 'A diffusion model incorporating product benefits, price, income and information', *Marketing Science*, 1990, p. 342-365.
- HORSKY, D & SIMON, L 1983, 'Advertising and the diffusion of new products', *Marketing Science*, 1983, p. 1- 17.
- HUCHZERMEIER, A & LOCH., CH 2001, 'Project management under risk: using the real options approach to evaluate flexibility in R&D', *Management Science*, 2001, pp. 85-101.

- ISP 2002, *Juno Broadband Enters Comcast Country - 2002*, viewed Fevereiro 2009, <http://www.isp-planet.com/news/2002/untd_020531.html>.
- JAIN, D & RAO, R 1990, 'Effect of price on the demand for durables: Modeling, estimation, and findings', *Journal of Business and Economic Statistics*, 1990, pp. 163-170.
- JIANG, Z, BASS, F & BASS, P 2006, 'The virtual Bass model and the left-hand truncation bias in diffusion of innovation studies', *International Journal of Research in Marketing*, 2006, pp. 93-106.
- KALISH, S 1985, 'A new product adoption model with price, advertising and uncertainty', *Management Science*, 1985, p. 1569–1585.
- KALISH, S, MAHAJAN, V & MULLER, E 1995, 'Waterfall and sprinkler new-product strategies in competitive global markets', *International Journal of Research in Marketing*, 1995, pp. 105-119.
- KAMAKURA, W & BALASUBRAMANIAN, S 1988, 'Long-term view of the diffusion of durables', *International Journal of Research in Marketing*, 1988, p. 1–13.
- KAUFFMAN, RJTA 2005, 'International diffusion of digital mobile technology: a coupled-hazard state-based approach', *Information Technology and Management*, 2005, pp. 253-292.
- KIM, NB & SRIVASTAVA, RK 1999, 'A simultaneous model for innovative product category sales diffusion and competitive dynamics', *International Journal of Research in Marketing*, 1999, pp. 95-111.
- KREPS, D 1990, *Game Theory and Economic Modeling*, Oxford University Press, Oxford.
- KRIDER, RE & WEINBERG, CB 1998, 'Competitive dynamics and the introduction of new products: the motion picture timing game', *Journal of Marketing Research*, 1998, pp. 1-15.
- KRISHNAN, TV, BASS, F & JAIN, DC 1999, 'Optimal pricing strategy for new products', *Management Science*, 1999, pp. 1650-1663.
- KRISHNAN, TV, BASS, F & KUMAR, V 2000, 'The impact of late entrant on the diffusion of a new product / service', *Journal of Marketing Research*, 2000, pp. 269-278.
- KRISHNAN, TV & JAIN, DC 2006, 'Optimal dynamic advertising policy for new products', *Management Science*, 2006, pp. 1957-1969.
- KUPFER, D & HASENCLEVER, L 2002, *Economia Industrial: Fundamentos Teóricos e práticas no Brasil*, Campus, Rio de Janeiro.
- LEHMANN, DR & ESTEBAN-BRAVO, M 2006, 'When giving some away makes sense to jump-start the diffusion process', *Marketing Letters*, 2006, pp. 243-254.
- LOCH, C & HUBERMAN, B 1999, 'A punctuated-equilibrium model of technology diffusion', *Management Science*, 1999, p. 160.

- MAHAJAN, V & MULLER, E 1996, 'Timing, diffusion, and substitution of successive generations of technological innovations: The IBM mainframe case', *Technological Forecasting and Social Change*, 1996, p. 109– 132.
- MAHAJAN, V, MULLER, E & WIND, Y 2000, 'New-product diffusion models: from theory to practice', in *New-product diffusion models*, Springer, New York.
- MAHAJAN, V & PETERSON, RA 1978, 'Innovation diffusion in a dynamic potential adapter population', *Management Science*, 1978, p. 1589–1597.
- MARN, MP, ROEGNER, EV & ZAWADA, CC 2003, 'Pricing New Products', *The McKinsey Quarterly*, 2003, pp. 40-49.
- McKinsey&Company 2008, 'How companies respond to competitors: a McKinsey Global Survey', *McKinsey Quarterly*, 2008.
- MEADE, N & ISLAM, T 2006, 'Modelling and forecasting the diffusion of innovation – A 25-year review', *International Journal of Forecasting*, 2006, p. 519– 545.
- MULLER, E, PERES, R & MAHAJAN, V 2007, 'Innovation diffusion and new product growth: beyond a theory of communications', (*Working Paper*), April 2007.
- NASH, J 1950a, 'The Bargaining Problem', *Econometrica*, , 1950a, pp. 155-162.
- NASH, J 1950b, 'Equilibrium Points in n-Person Games', *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1950b, pp. 48-49.
- NASH, J 1951, 'Non-Cooperative Games', *Annals of Mathematics*, 1951, pp. 286-295.
- OECD 2008a, *Broadband Growth and Policies in OECD Countries*, viewed Janeiro 2009, <www.oecd.org/sti/ict/broadband/growth>.
- OECD 2008b, *OECD Broadband Portal*, viewed Fevereiro 2009, <http://www.oecd.org/document/54/0,3343,en_2649_34225_38690102_1_1_1_1,00.html>.
- OSBORNE, M & RUBINSTEIN, A 1994, *A Course in Game Theory*, MIT Press, Boston.
- PARKER, P 1992, 'Price elasticity dynamics over the product life cycles', *Journal of Marketing Research*, 1992, p. 358–367.
- PINDYCK, R & RUBINFELD, D 2000, *MICROECONOMICS*, Prentice Hall, New Jersey.
- PUTSIS, WPSV 2000, 'Estimation techniques for macro diffusion models', in *New Product Diffusion Models*, Kluwer Academic Publishers, New York.
- RASMUSSEN, E 2006, *Games and Information: An Introduction to Game Theory*, Basil Blackwell, Oxford.
- ROBINSON, B & LAKHANI, C 1975, 'Dynamic pricing models for new product planning', *Management Science*, 1975, p. 1113– 1122.

ROEGNER, EV, SEIFERT, T & SWINFORD, DD 2001, 'Putting a price on solutions', *The McKinsey Quarterly*, 2001.

ROGERS, E 1962, *Diffusion of Innovations*, The Free Press, New York.

SANTIAGO, LP & VAKILI, P 2005, 'On the value of flexibility in R&D projects', *Management Science*, 2005, pp. 1206-1218.

SAVAGE, S & WALDMAN, D 2005, 'Broadband Internet access, awareness, and use: Analysis of United States household data', *Telecommunications Policy*, 2005, pp. 615-633.

SHANE, S & ULRICH, K 2004, 'Technological innovation, product development, and entrepreneurship', *Management Science*, 2004, pp. 113-144.

SHAPLEY, L 1953a, 'Open Questions', *Report of an Informal Conference on the Theory of n-Person Games*, Princeton Mathematics mimeo, 1953a, p. 15.

SHAPLEY, L 1953b, 'A Value for n-Person Games', *Kuhn & Tucker*, 1953b, pp. 307-317.

SRINIVASAN, SV & MASON, C 1986, 'Nonlinear least squares estimation of new product diffusion models', *Marketing Science*, 1986, p. 169-178.

The Economist 2007, 'Something new under the sun. A Special report on innovation.'

THOMAS, LA 1999, 'Incumbent firms' response to entry: Price, advertising, and new product introduction', *International Journal of Industrial Organization*, 1999, p. 527-555.

THOMSON, G & TENG, J 1984, 'Optimal pricing and advertising policies for new product oligopoly models', *Marketing Science*, 1984, p. 148-168.

TUCKER, A 1950 - não publicado, 'A Two-Person Dilemma', Stanford University.

URBAN, G & HAUSER, J 1993, *Design and Marketing of New Products*, Prentice Hall, New Jersey.

VAN DEN BULTE, C & STREMERSCHE, S 2004, 'Social Contagion and income heterogeneity in new product diffusion: a meta-analytic test', *Marketing Science*, 2004, pp. 530-544.

VAN PUTTEN, A & MACMILLAN, I 2004, 'Making real options really work', *Harvard Business Review*, December 2004, pp. 134-141.

VON NEUMANN, J & MORGENSTERN, O 1944, *The Theory of Games in Economic Behavior*, Wiley, New York.

Washington Post 2003, *Comcast Bundles TV, Internet to Keep Customers - 2003*, viewed Fevereiro 2009, <<http://www.washingtonpost.com/wp-dyn/articles/A28826-2003Mar25.html>>.