

Universidade Federal de Minas Gerais

GISELE TESSARI SANTOS

---

**APLICAÇÃO DE UM MÉTODO ADAPTATIVO TEMPORAL DE  
FUNÇÕES DE BASE RADIAL À SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE  
BLACK-SCHOLES**

---

Belo Horizonte

2008

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção**  
**Escola de Engenharia**  
**Universidade Federal de Minas Gerais**

**Aplicação de um Método Adaptativo Temporal de Funções de Base  
Radial à Solução da Equação de Black-Scholes**

POR:  
GISELE TESSARI SANTOS

Dissertação de mestrado submetida à banca examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Orientador: Professor Maurício Cardoso de Souza  
Co-orientador: Professor Mauri Fortes

Belo Horizonte  
Fevereiro de 2008

## **AGRADECIMENTOS**

Registro, aqui, meus agradecimentos às pessoas que me apoiaram e contribuíram na concretização deste trabalho e deste processo de aprendizado.

Agradeço aos meus orientadores, Prof. Dr. Mauri Fortes e Prof. Dr. Maurício Cardoso de Souza, pela orientação, dedicação, apoio e confiança.

À minha família, em especial aos meus queridos pais e ao meu querido irmão, pelo incentivo, amor incondicional e por sempre estarem presente e acreditarem em mim.

Ao André, sempre ao meu lado, pelo amor, carinho e compreensão.

Aos meus amigos e colegas de mestrado pela amizade e companheirismo em todos os momentos.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais pelos conhecimentos transmitidos nas disciplinas cursadas.

À CAPES pela bolsa concedida, que foi fundamental para a realização deste trabalho.

“Toda a educação científica que não se inicia com a Matemática é, naturalmente, imperfeita na sua base”.

Auguste Conté

## RESUMO

Muitos problemas de engenharia financeira envolvem equações não-lineares com condições de contorno não-lineares ou dependentes do tempo. Apesar de soluções analíticas disponíveis, várias formas clássicas e modificadas da conhecida equação de Black-Scholes (BS) requerem soluções numéricas rápidas e acuradas. Este trabalho introduz o método de função de base radial (FBR) aplicado à solução da equação BS com condições de contorno não-lineares relacionadas a opções de barreira dependentes da trajetória. Explora-se, também, o método difusional para solucionar equações advectivo-difusivas quanto à sua efetividade para solucionar equações BS. Utilizam-se e comparam-se, em todo o trabalho, a efetividade de funções de base radial Cúbica e Thin-Plate Spline (TPS), quando aplicadas à solução de problemas de opções de barreiras. Os resultados numéricos, quando comparados com as soluções analíticas, permitem afirmar que o método FBR é muito preciso e fácil de programar. Ao se aplicar o método FBR, o método difusional leva aos mesmos resultados que aqueles obtidos pelo uso da formulação clássica da equação de Black-Scholes. Adicionalmente, implementa-se um esquema adaptativo no tempo tendo por base algoritmos preditivos e corretivos disponíveis, associados ao método adaptativo no tempo para equações diferenciais ordinárias de Bixler (1989). Os métodos adaptativos no tempo mostraram-se eficientes quer em termos de rapidez (número de iterações necessárias para atingir o tempo final requerido de simulação) quanto em termos de acurácia ou exatidão. Na realidade, o uso de adaptatividade associada aos erros de truncamento numérico da ordem de  $10^{-7}$ , no caso de opções de compra, e de  $10^{-5}$  e  $10^{-4}$  para opções de barreira levou a excelentes resultados. O trabalho mostra uma série de curvas que refletem a dependência do erro numérico relativo de predição em função do método de integração, passo inicial de tempo, tamanho das malhas de preços de ativos, erro de truncamento especificado e valor máximo dos ativos que permite simular condições de contorno equivalente a  $S = \infty$ . No caso de opções de compra, o método baseado na FBR Cúbica adaptativa mostrou-se mais eficiente que o baseado na FBR TPS adaptativa; enquanto no caso de opções de barreiras, ambos os métodos levaram a, essencialmente, resultados equivalentes. A técnica adaptativa no tempo aplicada à solução da equação de Black-Scholes permite economias consideráveis de tempo de execução; de fato, o número de

iterações temporais requerido para atingir o tempo final de simulação desejado, sob uma dada acurácia, pode ser 500 vezes menor que quando não se usa adaptatividade; a economia depende do tipo do problema.

**Palavras-Chave:** engenharia financeira; Black-Scholes; funções de base radial; método difusional; método adaptativo; opções de barreira.

## ABSTRACT

A large number of financial engineering problems involve non-linear equations with non-linear or time-dependent boundary conditions. Despite available analytical solutions, many classical and modified forms of the well-known Black-Scholes (BS) equation require fast and accurate numerical solutions. This work introduces the radial basis function (RBF) method as applied to the solution of the BS equation with non-linear boundary conditions, related to path-dependent barrier options. Furthermore, the diffusional method for solving advective-diffusive equations is explored as to its effectiveness to solve BS equations. Cubic and Thin-Plate Spline (TPS) radial basis functions were employed and compared one against the other as to their effectiveness to solve barrier option problems. The numerical results, when compared against analytical solutions, allow affirming that the RBF method is very accurate and easy to be implemented. When the RBF method is applied, the diffusional method leads to the same results as those obtained from the classical formulation of Black-Scholes equation. Furthermore, a time adaptive scheme was implemented, based on available predictive and corrective algorithms associated with Bixler's (1989) time adaptive ordinary differential equation solver. The time adaptive methodology showed itself to be highly efficient, when efficiency is defined both in terms of computing speed (number of time steps required to reach solutions at a desired simulation time) and in terms of accuracy or precision. Actually, the use of adaptiveness associated to numerical truncation errors of the order of  $10^{-7}$ , in the case of call options, and  $10^{-5}$  to  $10^{-4}$  when barrier options were considered, led to excellent results. This work shows a series of graphs reflecting the dependence of the numerical error with the integration method, initial time step, underlying asset value, specified truncation error and maximum stock value for implementing boundary conditions. In the case of call option simulations, the Cubic RBF method was more efficient than the TPS one, while in the case of barrier options, both methods led to essentially equivalent results. The time adaptive technique applied to the solution of Black-Scholes equation allows considerable computer processing efficiency; indeed, the number of time steps required to reach a final desired simulation

time, under a given required accuracy, can be 500 times smaller than when no adaptiveness is used; the economy is problem dependent.

**Key-Words:** financial engineering; Black-Scholes; radial basis functions; diffusional method; adaptive method; barrier options.

# SUMÁRIO

<b>AGRADECIMENTOS</b> .....	<b>I</b>
<b>RESUMO</b> .....	<b>III</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>V</b>
<b>SUMÁRIO</b> .....	<b>VII</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	<b>IX</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	<b>XII</b>
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1. ATIVOS DERIVADOS .....	1
1.2. OPÇÕES DE BARREIRAS .....	2
1.3. EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES .....	3
1.4. OBJETIVOS GERAIS .....	5
1.5. OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	5
<b>2. FUNÇÕES DE BASE RADIAL PARA SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE OPÇÕES COM BARREIRAS</b> .....	<b>7</b>
2.1. FORMA CLÁSSICA E DIFUSIONAL DA EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES.....	8
2.2. PRINCIPAIS OPÇÕES DE BARREIRAS .....	10
2.3. FUNÇÃO DE BASE RADIAL .....	12
2.3.1. <i>Aplicações de Funções de Base Radial à equação de Black-Scholes original</i> .....	13
2.3.2. <i>Aplicações das Funções de Base Radial à forma difusional da equação de Black-Scholes</i> 14	
2.4. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	15
2.4.1. <i>Análise de erro dos resultados de simulação dos métodos FBR aplicados a opções de barreiras Up-and-Out, UAO</i> .....	18
2.4.2. <i>Análises de erro dos resultados de simulação dos métodos FBR aplicados a opções de barreiras Down-and-Out, DAO</i> .....	22
2.5. CONCLUSÃO.....	25
<b>3. AVALIAÇÃO DE METODOLOGIA ADAPTATIVA NO TEMPO, EMPREGANDO FUNÇÕES DE BASE RADIAL, PARA PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES DE BARREIRAS</b> .....	<b>27</b>
3.1. O MÉTODO ADAPTATIVO NO TEMPO PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS (EDO) .....	29
3.2. O MÉTODO ADAPTATIVO NO TEMPO PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS (EDP) .....	33
3.3. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	34
3.3.1. <i>Análise de erro dos resultados de simulação dos métodos FBR adaptativos aplicados a opções de compra</i> .....	38

3.3.2. Análise de erro dos resultados de simulação dos métodos FBR adaptativos aplicados a barreiras Up-and-Out, UAO.....	42
3.3.3. Análise de erro dos resultados de simulação dos métodos FBR adaptativos aplicados a barreiras Down-and-Out, DAO.....	46
3.3.4. Análise da eficiência do método adaptativo para solução de Black-Scholes.....	50
3.4. CONCLUSÕES .....	54
<b>4. CONCLUSÕES GERAIS.....</b>	<b>56</b>
<b>REFÊRENCIAS .....</b>	<b>58</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>62</b>
ANEXO I. TABELAS DO MÉTODO DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL (FBR) CÚBICA E TPS APLICADO À SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFUSIONAL DE BLACK-SCHOLES PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OPÇÕES DE COMPRA E BARREIRAS. ....	
1.1. Opções de Compra.....	62
1.2. Opções de Barreira Up-and-Out.....	64
1.3. Opções de Barreira Down-and-Out.....	66
ANEXO II. TABELAS DO MÉTODO DE SOLUÇÃO ADAPTATIVA TEMPORAL DA EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES, APLICADO, JUNTO COM A TÉCNICA DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL (FBR) CÚBICA E TPS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OPÇÕES DE COMPRA E BARREIRAS. ....	
II.1 Opções de Compra.....	68
II.2 Opções de Barreira Up-and-Out.....	70
II.3 Opções de Barreira Down-and-Out.....	72
ANEXO III. PROGRAMA COMPUTACIONAL INERENTE À SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES ADAPTATIVA NO TEMPO, APLICADO, JUNTO COM O MÉTODO DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL CÚBICA PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OPÇÃO DE COMPRA. ....	
	74

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1. VALORES SIMULADOS DA FBR CÚBICA E TPS DE UMA OPÇÃO DE COMPRA COMPARADOS AOS VALORES DA SOLUÇÃO ANALÍTICA E DA FUNÇÃO DE PAGAMENTO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%$ . . 16	16
FIGURA 2.2. VALORES SIMULADOS DA FBR CÚBICA E TPS DE UMA OPÇÃO DE BARREIRA UP-AND-OUT, COM BARREIRA EM $S = 90$ , COMPARADOS AOS VALORES DA SOLUÇÃO ANALÍTICA E DA FUNÇÃO DE PAGAMENTO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%$ ..... 17	17
FIGURA 2.3. VALORES SIMULADOS DA FBR CÚBICA E TPS DE UMA OPÇÃO DE BARREIRA DOWN-AND-OUT, COM BARREIRA EM $S = 40$ , COMPARADOS AOS VALORES DA SOLUÇÃO ANALÍTICA E DA FUNÇÃO DE PAGAMENTO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%$ ..... 18	18
FIGURA 2.4. ERRO RELATIVO DE VALORES PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA UP-AND-OUT FBR NO VALOR DE EXERCÍCIO DO ATIVO (%), EM FUNÇÃO DO VALOR DE $\theta$ DE INTEGRAÇÃO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%$ ,..... 19	19
FIGURA 2.5. ERRO RELATIVO DE VALORES PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA UP-AND-OUT FBR NO VALOR DE EXERCÍCIO DO ATIVO (%) EM FUNÇÃO DO MÁXIMO VALOR SIMULADO DO ATIVO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%$ ,..... 20	20
FIGURA 2.6. ERRO RELATIVO DE VALORES PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA UP-AND-OUT FBR NO VALOR DE EXERCÍCIO DO ATIVO (%) EM FUNÇÃO DO PASSO DE TEMPO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%, N = 40, S_{MAX} = 100$ E $\theta = 1$ PARA FBR CÚBICA E FBR TPS. .... 21	21
FIGURA 2.7. ERRO RELATIVO DE VALORES PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA UP-AND-OUT FBR NO VALOR DE EXERCÍCIO DO ATIVO (%) EM FUNÇÃO DO TAMANHO DA MALHA; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%$ , ..... 21	21
FIGURA 2.8. ERRO RELATIVO DE VALORES PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA DOWN-AND-OUT FBR NO VALOR DE EXERCÍCIO DO ATIVO (%) EM FUNÇÃO DO VALOR - $\theta$ DE INTEGRAÇÃO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%$ ,..... 22	22
FIGURA 2.9. ERRO RELATIVO DE VALORES PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA DOWN-AND-OUT FBR NO VALOR DE EXERCÍCIO DO ATIVO (%) EM FUNÇÃO DO MÁXIMO VALOR SIMULADO DO ATIVO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%$ ,..... 23	23
FIGURA 2.10. ERRO RELATIVO DE VALORES PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA DOWN-AND-OUT FBR NO VALOR DE EXERCÍCIO DO ATIVO (%) EM FUNÇÃO DO PASSO DE TEMPO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%, N = 112, S_{MAX} = 100$ E $\theta = 1$ PARA FBR CÚBICA E FBR TPS. .... 24	24
FIGURA 2.11. ERRO RELATIVO DE VALORES PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA DOWN-AND-OUT FBR NO VALOR DE EXERCÍCIO DO ATIVO (%) EM FUNÇÃO DO TAMANHO DA MALHA; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%$ ,..... 24	24
FIGURA 3.1. ERROS DA SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO $\dot{y} = -y$ PELO MÉTODO DE BIXLER, PARA $\epsilon = 1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-5}$ E $1 \times 10^{-7}$ , TEMPO FINAL DE SIMULAÇÃO = 5 E $\Delta t$ (INICIAL) = 0,00001..... 32	32
FIGURA 3.2. TAMANHO DO PASSO DE TEMPO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO $\dot{y} = -y$ , PELO MÉTODO DE BIXLER, PARA $\epsilon = 1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-5}$ E $1 \times 10^{-7}$ , TEMPO FINAL DE SIMULAÇÃO = 5 E $\Delta t$ (INICIAL) = 0,00001. .... 33	33

FIGURA 3.3. VALORES SIMULADOS DA FBR CÚBICA E TPS ADAPTATIVA DE UMA OPÇÃO DE COMPRA COMPARADOS AOS VALORES DA SOLUÇÃO ANALÍTICA E DA FUNÇÃO DE PAGAMENTO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%$ .....	36
FIGURA 3.4. VALORES SIMULADOS DA FBR CÚBICA E TPS ADAPTATIVA DE UMA OPÇÃO DE BARREIRA UP-AND-OUT, COM BARREIRA EM $S = 90$ , COMPARADOS AOS VALORES DA SOLUÇÃO ANALÍTICA E DA FUNÇÃO DE PAGAMENTO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%$ .....	37
FIGURA 3.5. VALORES SIMULADOS DA FBR CÚBICA E TPS ADAPTATIVA DE UMA OPÇÃO DE BARREIRA DOWN-AND-OUT, COM BARREIRA EM $S = 40$ , COMPARADOS AOS VALORES DA SOLUÇÃO ANALÍTICA E DA FUNÇÃO DE PAGAMENTO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%$ .....	37
FIGURA 3.6. ERRO RELATIVO DE VALORES PREDITOS DE OPÇÃO DE COMPRA FBR EM FUNÇÃO DO VALOR- $\theta$ DE INTEGRAÇÃO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%, \Delta T$ INICIAL = 0,001, $N = 112, S_{MAX} = 80, EE = 1 \times 10^{-7}$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA.....	38
FIGURA 3.7. ERRO RELATIVO DOS VALORES PREDITOS DE OPÇÃO DE COMPRA FBR EM FUNÇÃO DO MÁXIMO VALOR SIMULADO DO ATIVO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%, \Delta T$ INICIAL = 0,001, $\Delta S = 0,714, \theta = 0,5, EE = 1 \times 10^{-7}$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA .....	39
FIGURA 3.8. ERRO RELATIVO DE VALORES PREDITOS DE OPÇÃO DE COMPRA FBR EM FUNÇÃO DO PASSO DE TEMPO INICIAL; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%, N = 112, S_{MAX} = 80, \theta = 0,5, EE = 1 \times 10^{-7}$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA.....	40
FIGURA 3.9. ERRO RELATIVO DE VALORES PREDITOS DE OPÇÃO DE COMPRA FBR EM FUNÇÃO DO TAMANHO DA MALHA; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%, \Delta T$ INICIAL = 0,001, $S_{MAX} = 80, \theta = 0,5, EE = 1 \times 10^{-7}$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA. ....	41
FIGURA 3.10. ERRO RELATIVO DE VALORES PREDITOS DE OPÇÃO DE COMPRA FBR EM FUNÇÃO DO ERRO DE TRUNCAMENTO (EE); $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%, \Delta T$ INICIAL = 0,001, $N = 112, S_{MAX} = 80, \theta = 0,5$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA. ....	42
FIGURA 3.11. ERRO RELATIVO DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA UP-AND-OUT FBR EM FUNÇÃO DO VALOR- $\theta$ DE INTEGRAÇÃO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%, \Delta T$ INICIAL = 0,001, $N = 100, S_{MAX} = 250, EE = 1 \times 10^{-4}$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA. ....	43
FIGURA 3.12. ERRO RELATIVO DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA UP-AND-OUT FBR EM FUNÇÃO DO MÁXIMO VALOR SIMULADO DO ATIVO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%, \Delta T$ INICIAL = 0,001, $\Delta S = 2,5, \theta = 1, EE = 1 \times 10^{-4}$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA. ....	44
FIGURA 3.13. ERRO RELATIVO DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA UP-AND-OUT FBR EM FUNÇÃO DO PASSO DE TEMPO INICIAL; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%, N = 100, S_{MAX} = 250, \theta = 1, EE = 1 \times 10^{-4}$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA. ....	44
FIGURA 3.14. ERRO RELATIVO DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA UP-AND-OUT FBR EM FUNÇÃO DO TAMANHO DA MALHA; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%, \Delta T$ INICIAL = 0,001, $S_{MAX} = 250, \theta = 1, EE = 1 \times 10^{-4}$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA. ....	45
FIGURA 3.15. ERRO RELATIVO DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA UP-AND-OUT FBR EM FUNÇÃO DO ERRO DE TRUNCAMENTO; $E = 50, T = 1, \sigma = 20\%, r = 5\%, \Delta T$ INICIAL = 0,001, $N = 112, S_{MAX} = 250, \theta = 1$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA. ....	46

FIGURA 3.16. ERRO RELATIVO DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA DOWN-AND-OUT FBR EM FUNÇÃO DO VALOR - $\theta$ DE INTEGRAÇÃO; $E = 50$ , $T = 1$ , $\sigma = 20\%$ , $r = 5\%$ , $\Delta T$ INICIAL = 0,01, $N = 112$ , $S_{MAX} = 100$ , $EE = 1 \times 10^{-5}$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA. ....	47
FIGURA 3.17. ERRO RELATIVO DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA DOWN-AND-OUT FBR EM FUNÇÃO DO MÁXIMO VALOR SIMULADO DO ATIVO; $E = 50$ , $T = 1$ , $\sigma = 20\%$ , $r = 5\%$ , $\Delta T$ INICIAL = 0,01, $\Delta S = 0,893$ , $\theta = 1$ , $EE = 1 \times 10^{-5}$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA. ....	48
FIGURA 3.18. ERRO RELATIVO DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA DOWN-AND-OUT FBR EM FUNÇÃO DO PASSO DE TEMPO INICIAL; $E = 50$ , $T = 1$ , $\sigma = 20\%$ , $r = 5\%$ , $N = 112$ , $S_{MAX} = 100$ , $\theta = 1$ , $EE = 1 \times 10^{-5}$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA.....	48
FIGURA 3.19. ERRO RELATIVO DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA DOWN-AND-OUT FBR EM FUNÇÃO DO TAMANHO DA MALHA; $E = 50$ , $T = 1$ , $\sigma = 20\%$ , $r = 5\%$ , $\Delta T$ INICIAL = 0,01, $S_{MAX} = 100$ , $\theta = 1$ , $EE = 1 \times 10^{-5}$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA.....	49
FIGURA 3.20. ERRO RELATIVO DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA DOWN-AND-OUT FBR EM FUNÇÃO DO ERRO DE TRUNCAMENTO; $E = 50$ , $T = 1$ , $\sigma = 20\%$ , $r = 5\%$ , $\Delta T$ INICIAL = 0,01, $N = 112$ , $S_{MAX} = 100$ , $\theta = 1$ PARA FBR CÚBICA ADAPTATIVA E FBR TPS ADAPTATIVA. ....	49

## LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1. CARACTERIZAÇÃO DAS OPÇÕES DE BARREIRAS .....	11
TABELA 3.1. NÚMERO DE ITERAÇÕES E ERROS RELATIVOS DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE COMPRA FBR EM FUNÇÃO DO PASSO DE TEMPO INICIAL ( $\Delta T$ ) E DO ERRO DE TRUNCAMENTO; $E = 50$ , $T = 1$ , $\sigma = 20\%$ , $r = 5\%$ , $N = 112$ , $S_{MAX} = 80$ , $\theta = 0,5$ PARA A FBR CÚBICA ADAPTATIVA E NÃO ADAPTATIVA.....	51
TABELA 3.2. NÚMERO DE ITERAÇÕES E ERROS RELATIVOS DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE COMPRA FBR EM FUNÇÃO DO PASSO DE TEMPO INICIAL ( $\Delta T$ ) E DO ERRO DE TRUNCAMENTO; $E = 50$ , $T = 1$ , $\sigma = 20\%$ , $r = 5\%$ , $N = 112$ , $S_{MAX} = 80$ , $\theta = 0,5$ PARA A FBR TPS ADAPTATIVA E NÃO ADAPTATIVA. ....	52
TABELA 3.3. NÚMERO DE ITERAÇÕES E ERROS RELATIVOS DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA UP-AND-OUT FBR EM FUNÇÃO DO PASSO DE TEMPO INICIAL ( $\Delta T$ ); $E = 50$ , $T = 1$ , $\sigma = 20\%$ , $r = 5\%$ , $N$ $= 100$ , $S_{MAX} = 250$ , $\theta = 1$ , $EE = 1 \times 10^{-4}$ PARA A FBR CÚBICA ADAPTATIVA E NÃO ADAPTATIVA. ....	52
TABELA 3.4. NÚMERO DE ITERAÇÕES E ERROS RELATIVOS DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA UP-AND-OUT FBR EM FUNÇÃO DO PASSO DE TEMPO INICIAL ( $\Delta T$ ); $E = 50$ , $T = 1$ , $\sigma = 20\%$ , $r = 5\%$ , $N$ $= 100$ , $S_{MAX} = 250$ , $\theta = 1$ , $EE = 1 \times 10^{-4}$ PARA A FBR TPS ADAPTATIVA E NÃO ADAPTATIVA.....	53
TABELA 3.5. NÚMERO DE ITERAÇÕES E ERROS RELATIVOS DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA DOWN-AND-OUT FBR EM FUNÇÃO DO PASSO DE TEMPO INICIAL ( $\Delta T$ ); $E = 50$ , $T = 1$ , $\sigma = 20\%$ , $r =$ $5\%$ , $N = 112$ , $S_{MAX} = 100$ , $\theta = 1$ , $EE = 1 \times 10^{-5}$ PARA A FBR CÚBICA ADAPTATIVA E NÃO ADAPTATIVA. ....	53
TABELA 3.6. NÚMERO DE ITERAÇÕES E ERROS RELATIVOS DE PREÇOS PREDITOS DE OPÇÃO DE BARREIRA DOWN-AND-OUT FBR EM FUNÇÃO DO PASSO DE TEMPO INICIAL ( $\Delta T$ ); $E = 50$ , $T = 1$ , $\sigma = 20\%$ , $r =$ $5\%$ , $N = 112$ , $S_{MAX} = 100$ , $\theta = 1$ , $EE = 1 \times 10^{-5}$ PARA A FBR TPS ADAPTATIVA E NÃO ADAPTATIVA. ....	54
TABELA I.1. EFEITO DE TAMANHOS DE PASSOS DE TEMPO E DE MALHA SOBRE OS VALORES NUMÉRICOS (FBR CÚBICA) DE OPÇÕES DE COMPRA EM $T=1$ . VALOR EXATO= 5,2253.....	62
TABELA I.2. EFEITO DE TAMANHOS DE PASSOS DE TEMPO E DE MALHA SOBRE OS VALORES NUMÉRICOS (FBR TPS) DE OPÇÕES DE COMPRA EM $T=1$ . VALOR EXATO= 5,2253. ....	63
TABELA I.3. EFEITO DE TAMANHOS DE PASSOS DE TEMPO E DE MALHA SOBRE OS VALORES NUMÉRICOS (FBR CÚBICA) DE OPÇÕES DE BARREIRA UP-AND-OUT ( $S_{UAO}=90$ ) EM $T=1$ . VALOR EXATO= 4,9869. .....	64
TABELA I.4. EFEITO DE TAMANHOS DE PASSOS DE TEMPO E DE MALHA SOBRE OS VALORES NUMÉRICOS (FBR TPS) DE OPÇÕES DE BARREIRA UP-AND-OUT ( $S_{UAO}=90$ ) EM $T=1$ . VALOR EXATO= 4,9869. ....	65
TABELA I.5. EFEITO DE TAMANHOS DE PASSOS DE TEMPO E DE MALHA SOBRE OS VALORES NUMÉRICOS (FBR CÚBICA) DE OPÇÕES DE BARREIRA DOWN-AND-OUT ( $S_{DAO}=40$ ) EM $T=1$ . VALOR EXATO= 5,176. ....	66
TABELA I.6. EFEITO DE TAMANHOS DE PASSOS DE TEMPO E DE MALHA SOBRE OS VALORES NUMÉRICOS (FBR TPS) DE OPÇÕES DE BARREIRA DOWN-AND-OUT ( $S_{DAO}=40$ ) EM $T=1$ . VALOR EXATO= 5,176.67	
TABELA II.1. EFEITO DE TAMANHOS DE PASSOS DE TEMPO E DE MALHA SOBRE OS VALORES NUMÉRICOS (FBR CÚBICA) DE OPÇÕES DE COMPRA EM $T=1$ . VALOR EXATO= 5,2253.....	68
TABELA II.2. EFEITO DE TAMANHOS DE PASSOS DE TEMPO E DE MALHA SOBRE OS VALORES NUMÉRICOS (FBR TPS) DE OPÇÕES DE COMPRA EM $T=1$ . VALOR EXATO= 5,2253. ....	69

TABELA II.3. EFEITO DE TAMANHOS DE PASSOS DE TEMPO E DE MALHA SOBRE OS VALORES NUMÉRICOS (FBR CÚBICA) DE OPÇÕES DE BARREIRA UP-AND-OUT (SUAO=90) EM T=1. VALOR EXATO= 4,9869. .....	70
TABELA II.4. EFEITO DE TAMANHOS DE PASSOS DE TEMPO E DE MALHA SOBRE OS VALORES NUMÉRICOS (FBR TPS) DE OPÇÕES DE BARREIRA UP-AND-OUT (SUAO=90) EM T=1. VALOR EXATO= 4,9869. ....	71
TABELA II.5. EFEITO DE TAMANHOS DE PASSOS DE TEMPO E DE MALHA SOBRE OS VALORES NUMÉRICOS (FBR CÚBICA) DE OPÇÕES DE BARREIRA DOWN-AND-OUT (SDAO=40) EM T=1. VALOR EXATO= 5,176. ....	72
TABELA II.6. EFEITO DE TAMANHOS DE PASSOS DE TEMPO E DE MALHA SOBRE OS VALORES NUMÉRICOS (FBR TPS) DE OPÇÕES DE BARREIRA DOWN-AND-OUT (SDAO=40) EM T=1. VALOR EXATO= 5,176.73	

# 1. INTRODUÇÃO

A Engenharia Financeira envolve projetos, desenvolvimento e implementação de processos e instrumentos financeiros inovadores e a elaboração de soluções eficazes para problemas na área financeira. A teoria financeira é um dos campos de pesquisa mais ativos na matemática aplicada moderna. Durante os últimos 20 anos, a área de finanças computacionais tem atraído muitos matemáticos, físicos e engenheiros para trabalhar com uma variedade de questões teóricas interessantes relacionadas, principalmente, à precificação de ativos. Avaliar um ativo significa determinar seu preço de mercado justo e racional, prever qual será este preço em diversos tempos futuros e como ele se modifica de acordo com outros preços. A avaliação de ativos pode ser difícil por duas razões principais: primeiro, porque a função de pagamento do ativo ou de seu derivativo pode variar estocasticamente de forma complexa e segundo, porque o ambiente de mercado competitivo tem que ser considerado (BARUCCI et al., 1996).

## 1.1. Ativos Derivados

A Engenharia Financeira tem como principal enfoque o estudo dos Ativos Derivados, uma vez que tal classe de instrumentos permite melhorar a alocação de riscos e reduzir a probabilidade de choques financeiros prejudicarem certas instituições, a economia global ou a economia de apenas um país (BANKS, 1993). Derivativo é um instrumento financeiro cujo valor depende do valor de outras, mais básicas, variáveis subjacentes. Os tipos básicos de derivativos incluem futuros, opções e contratos a termo (*forwards*). Entretanto, além dos tipos básicos, existem muitos outros tipos de derivativos conhecidos como derivativos exóticos (NAOR, 2006). O estudo de Ativos Derivados requer a utilização de uma modelagem matemática complexa e de computadores altamente velozes (RUBINSTEIN, 1992; NEFTCI, 2000; WILMOTT et al., 1995; CLEWLOW & STRICKLAN, 1998), dado o grande número de informações que é incorporado aos modelos inerentes de predição para avaliar lucros, perdas ou reversões de operações e a verdadeira transformação verificada no mundo dos negócios decorrente da globalização dos mercados financeiros mundiais (MARSHALL & BANSAL, 1993; SMITHSON et al., 1995).

A engenharia financeira permite estruturar uma solução para o principal problema dos modelos de operações financeiras: a volatilidade. A expressão solução estruturada significa que o engenheiro financeiro irá, muito provavelmente, isolar e examinar minuciosamente cada uma das variáveis do fluxo de dados, as informações e os riscos do mercado *cash* objeto a fim de encontrar os fatores que o tornaram volátil (CAMPBELL et al., 1997; BERNANKE & GETLER, 1999). Entretanto, seu pressuposto básico é que, sendo a ausência de certeza antes regra que exceção, as decisões devem ser tomadas considerando-se que as condições futuras podem alterar profundamente as condições iniciais de deliberação.

## **1.2. Opções de Barreiras**

Dentro do estudo dos ativos derivados, a principal preocupação da engenharia financeira é determinar o valor de uma opção (GOTO et al., 2007). Um contrato de opção, no mundo financeiro, é o direito, mas não a obrigação, de comprar (para uma opção de compra) ou de vender (para uma opção de venda) um ativo (ex. ações de uma corporação, commodities como grão, moeda estrangeira, etc.) a um preço fixo (preço de exercício) em certa data no futuro (MEYER, 1998; HULL, 2005; WILMOTT, 2007).

Existem dois tipos básicos de opções: a americana e a européia. A opção americana pode ser exercida a qualquer momento entre a data de compra e a data de vencimento (expiração) da opção. Em contrapartida, a opção européia só pode ser exercida na data de vencimento da opção (GOTO et al., 2007).

Uma opção exótica é uma opção com características mais complexas que as opções básicas, americanas e européias. Um tipo de opção exótica é a opção asiática. A opção asiática é uma opção tal que seu valor de pagamento (*payoff*) está ligado ao valor médio de um ativo antes da data de vencimento. Por exemplo: um banco pode vender a uma empresa importadora o direito de comprar dólares durante certo período (ou em um número preestabelecido de operações) a um preço médio predeterminado.

Desde o final da década de 1980, têm-se utilizado amplamente opções de barreira para hedging (garantia contra risco de aplicação) e investimentos em bolsas estrangeiras,

mercado de balcão, mercado de ativos e de commodities (HUI, 1997). Elas são comumente comercializadas como derivativos do tipo exótico. Opções de barreira são ativadas (knock-ins) ou terminadas (knock-outs) se uma barreira específica é atingida antes da data de vencimento (FUSAI et al., 2006). Opções de barreira européias são opções dependentes do caminho; a existência da opção depende do fato de o preço do ativo subjacente atingir o nível da barreira durante a vida da opção (HUI, 1997). Vários artigos lidaram com a precificação de opções de barreira com propostas de um grande número de técnicas de precificação (FUSAI et al., 2006). A não linearidade associada a opções de barreiras européias é tratada neste trabalho.

### **1.3. Equação de Black-Scholes**

O Prêmio Nobel em Ciências Econômicas de 1997 foi concedido a Robert C. Merton e Myron S. Scholes que, em colaboração com Fischer Black, desenvolveram a fórmula pioneira para avaliação de opções de ação que ficou conhecida como equação de Black-Scholes. Esta metodologia pavimentou o caminho para avaliação econômica em muitas áreas (SVERIGES RISK BANK, 1997). Os modelos mais importantes de engenharia financeira têm por base as equações de Black-Scholes e são usados para prever a rentabilidade de opções financeiras e, portanto, auxiliam nos processos de tomada de decisão (BLACK & SCHOLES, 1973; COX & RUBINSTEIN, 1985; HULL, 2005). Somente contratos simples de mercado de ações podem ser tratados ou resolvidos de forma semiquantitativa. A equação básica de Black-Scholes (BS) é uma equação hiperbólica parabólica linear com parâmetros e variáveis estocásticas e determinísticas. Apesar de sua significância, a equação BS sofreu inúmeras modificações a fim de se adaptar às opções financeiras disponíveis (AMSTER et al., 2003; WILMOTT, 2007); sob essas modificações, a equação BS pode se tornar altamente não linear. Esta dissertação dirigirá-se às condições de contorno não lineares do tipo barreira associadas à equação clássica de BS.

Dada a sua complexidade, a equação de Black-Scholes possui soluções analíticas somente para algumas condições de contorno ou iniciais aplicáveis a operações financeiras simples (WILMOTT, 1998). Há, portanto, necessidade de soluções numéricas confiáveis, para condições mais complexas.

Por outro lado, soluções numéricas da equação de BS têm sido de grande interesse devido, por um lado, ao interesse prático e, por outro, à forma da equação diferencial parcial associada, cujas soluções numéricas são geralmente instáveis e sem exatidão. O problema é devido à descontinuidade da função em torno do preço de exercício. Embora a modelagem possa ser feita de forma mais ou menos correta, à medida que o valor da opção converge ao valor real, mesmo quando se aumenta o refinamento da malha, encontram-se soluções não convergentes para as opções associadas. A lenta ou ausência de convergência é consequência de descontinuidade da função de pagamento (*Payoff function*) (KOC, BOZTOSUN E BOZTOSUN, 2003).

A equação convectivo-difusiva é a base de vários fenômenos físicos e seu uso também se espalhou para economia, previsão financeira e outros campos, incluindo a equação de Black & Scholes. Muitos métodos numéricos têm sido introduzidos para modelar com exatidão a interação entre os processos convectivos e difusivos. Os métodos mais comuns são os de diferenças finitas, elementos finitos e elementos de contorno que são originados de esquemas de interpolação local e requerem o emprego de malhas. Soluções de diferenças finitas e elementos finitos para equação convectivo-difusiva apresentam problemas numéricos de oscilação e amortecimento (MURPHY & PRENTER, 1985; LEE et al., 1987; ZIENKIEWICZ & TAYLOR, 1991; HOFFMAN, 1992; WILMOTT et al., 1995; WILMOTT, 1998; TOMAS III & YALAMANCHILI, 2001; BOZTOSUN & CHARAFI, 2002; AMSTER et al., 2003). Mais recentemente, o método de funções de base radial, FBR, sustenta ser relativamente livre desses problemas (BOZTOSUN & CHARAFI, 2002). Fortes (1997) e Fortes & Ferreira (1998; 1999) propuseram o método difusional para solucionar numericamente equações convectivo-difusivas. O método é de aplicação simples e mostrou um desempenho muito melhor na solução de problemas práticos e *benchmarks* (padrões) que as técnicas de diferenças finitas comumente empregadas (assim como métodos de diferenças finitas implícitas; ver HOFFMAN, 1992). Tomas III & Yalamanchili (2001) aplicaram o método de elementos finitos (FEM) à familiar equação diferencial de Black-Scholes para precificar opções de venda europeia e opções de barreira discreta. Os autores citam que o FEM permite construção de malha não uniforme e avaliação direta de derivativo.

Não há uma definição clara sobre os métodos mais apropriados para resolver as diversas formas da equação de BS, sob as diversas condições de contorno e temporais existentes em problemas práticos de finanças. O problema se complica ainda mais, pois o método deve ser eficiente em termos de tempo de processamento da solução; de fato, num dia de mercado de capitais, pode-se ter a necessidade de executar o software de solução centenas de vezes, ou seja, sempre que houver oscilação da bolsa que envolva a opção sob análise. Portanto, o método utilizado deve ser computacionalmente eficiente, ou seja, deve ser rápido e acurado. Assim, este trabalho visa apresentar o desenvolvimento de uma técnica adaptativa no tempo usando o método de funções de base radial (FBR) que possibilite soluções eficientes da equação de Black-Scholes, usando como *benchmark* soluções analíticas disponíveis para problemas de opções dependentes do caminho temporal.

#### **1.4. Objetivos Gerais**

Essa dissertação tem como objetivo geral apresentar uma abordagem da função de base radial, com foco nas funções Cúbica e Thin-Plate Spline (TPS), para solucionar a condição de salto dependente do tempo (barreira) associada à equação de Black-Scholes clássica e difusional. Além disso, este trabalho visa apresentar uma técnica adaptativa, ou seja, com controle automático do passo de tempo e de erro, para o método FBR que possibilite uma análise eficiente de opções dependentes do caminho, com referência particular às opções de barreira.

#### **1.5. Objetivos Específicos**

Os objetivos específicos desta dissertação são:

1. Efetuar um estudo detalhado do comportamento das soluções numéricas da equação de Black-Scholes aplicadas a opções de compra e de barreiras dependentes da trajetória temporal dos ativos:
  - a. Por meio de funções de base radial (FBR) Cúbica e TPS
  - b. Por meio do formato clássico da equação BS e do formato via método difusional.

2. Implementar um método simples e eficiente de solução adaptativa temporal de equações diferenciais parciais, aplicado, junto com a técnica de FBR para a solução de problemas de opções que envolvam barreira.
3. Efetuar uma análise paramétrica, por meio de testes de sensibilidade, para os métodos e problemas propostos em 1 e 2 acima.

Esta dissertação estrutura-se em dois capítulos. No capítulo 2, apresenta-se uma abordagem da função de base radial, com foco nas funções Cúbica e TPS, para solucionar a condição de salto dependente do tempo (barreira) associada à equação de Black-Scholes clássica e difusional. No capítulo 3, apresenta-se uma técnica adaptativa para o método FBR que possibilita uma análise eficiente de opções dependentes do caminho, com referência particular às opções de barreira. A dissertação termina com as observações conclusivas. Ressalta-se que tanto no capítulo 2 como no capítulo 3 há um item de Resultados e Discussão, e Conclusões.

## 2. FUNÇÕES DE BASE RADIAL PARA SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE OPÇÕES COM BARREIRAS

Embora os métodos tradicionais de elementos finitos e diferenças finitas possam ser aplicados às equações de Black-Scholes, recentemente, houve um esforço considerável para o desenvolvimento de métodos livres de malha, devido à complexidade da geração das malhas (BOZTOSUN & CHARAFI, 2002; BROWN et al., 2005). O método de funções de base radial não requer malhas; assim, além de evitar o complicado problema de geração de malhas, o método é independente da dimensão espacial e pode ser facilmente estendido para solucionar problemas de muitas dimensões (ZHANG, 2006). FBRs utilizam combinações lineares da função de base  $\phi(\mathbf{r})$  dependente do vetor  $\mathbf{r}$ , expandida sobre um dado centro de dados dispersos  $S_i \in \mathcal{R}^d$ ,  $i=1, \dots, N$  para aproximar uma função desconhecida  $V(S,t)$ . O método FBR gera, então, um sistema de equações lineares, que pode ser resolvido para obter a solução atualizada no plano de tempo  $n+1$ , a partir de soluções anteriores conhecidas. Tem-se usado FBRs para problemas de interpolação assim como para solucionar numericamente equações diferenciais parciais (BROWN et al., 2005). Koc et al. (2003) foi um dos primeiros autores a apresentar métodos FBR para a solução numérica da equação de Black-Scholes. Eles avaliaram a capacidade preditiva de quatro funções de base radial: Cúbica, Thin-Plate Spline (TPS), Multiquadrática (MQ) e Gaussiana. Entretanto, eles não analisaram a capacidade preditiva do método FBR para problemas que envolvem condições de contorno não-lineares. A acurácia das funções de base radial MQ e Gaussiana depende do parâmetro de forma  $c$  da função de base radial que só pode ser otimizado em uma abordagem empírica (RIPPA, 1999). Um artigo recente de Goto et al. (2007) mostra que a abordagem empírica para obter este parâmetro de forma pode ser equivocada ou requerer conhecimento prévio de soluções analíticas. Assim, esse trabalho tem como objetivo analisar funções de base radial que não dependem de avaliações de funções de forma empírica que conduzam a erros numéricos aceitáveis.

Fortes (1997) e Fortes & Ferreira (1998; 1999) propuseram o método difusional para solucionar numericamente equações convectivo-difusivas. Basicamente, o método transforma a equação diferencial parcial hiperbólica parabólica original em uma equação diferencial parcial parabólica. O método é de aplicação simples e mostrou um desempenho

muito melhor na solução de problemas práticos e *benchmarks* (padrões) que as técnicas de diferenças finitas comumente empregadas (assim como métodos de diferenças finitas implícitas; ver HOFFMAN, 1992). Em artigos recentes o método de diferenças finitas difusional foi aplicado para analisar derivativos em engenharia financeira, com atenção especial para a equação de opção de compra de Black-Scholes (FORTES et al., 2000-a; FORTES et al., 2000-b; FORTES et al., 2005).

Esse capítulo tem como objetivo geral apresentar uma abordagem da função de base radial, com foco nas funções Cúbicas e TPS, para solucionar a condição de barreira dependente do tempo associada à equação de Black-Scholes. Mais especificamente, esse capítulo apresenta: uma análise comparativa entre a abordagem clássica e a difusional da solução numérica da equação de Black-Scholes; modelagem completa de opções de compra e opções de barreiras e respectivas soluções numéricas por meio de funções de base radial Cúbica e TPS; validação dos resultados das soluções numéricas por meio de soluções analíticas disponíveis; uma análise de sensibilidade (paramétrica) que incluirá o efeito da malhas numéricas associadas, ou seja, o efeito do método de discretização espacial e temporal do preço da ação e do valor máximo da ação requeridos para se atingir uma determinada precisão; e critério para otimização das soluções numéricas das equações de BS via método FBR.

Este capítulo é estruturado como segue. Na seção 2.1, apresentam-se a forma clássica e difusional da equação de Black-Scholes. Na seção seguinte, descrevem-se os principais aspectos de opções de barreiras. Na seção 2.3, introduz-se o método de função de base radial para ambas as equações de BS. Os resultados são relatados na seção 2.4. O capítulo termina com observações conclusivas.

## **2.1. Forma clássica e difusional da equação de Black-Scholes**

O modelo matemático, amplamente aceito, para avaliação do valor temporal de uma opção  $V(S,t)$ , é a equação de Black-Scholes. Ela tem por base um modelo estocástico para o comportamento do preço  $S$  do ativo subjacente, cuja solução leva ao preço corrente  $V(S, \tau)$  de uma opção que expira no tempo final  $T$  (MEYER, 1998). A forma **clássica** da equação básica de Black-Scholes ou BS é (WILMOTT, 1998):

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2.1)$$

em que  $V$ ,  $\tau$ ,  $\sigma$ ,  $S$  e  $r$  são, respectivamente, o valor da opção, tempo, volatilidade, preço da ação (ativo subjacente – variável estocástica), e taxa de juros livre de risco.

Neste trabalho, propõe-se resolver a equação de BS para, dentre outras opções, **opções de compra** com a seguinte função de pagamento, isto é, o valor de uma opção de compra no vencimento ( $\tau = T$ ), num mundo neutro ao risco:

$$V(S, T) = \text{Payoff}(S, T) = \max(S - E, 0) \quad (2.2)$$

em que  $E$  é o valor (preço) de exercício do ativo, ou seja, seu valor em  $\tau = T$ . As respectivas condições de contorno são:

$$V(0, \tau) = 0; \quad V(\infty, \tau) = S - Ee^{-r(T-\tau)} \quad (2.3)$$

Deve-se notar que este não é um problema de valor inicial, visto que a função de pagamento é dada em  $t = T$ . A fim de se transformar este problema num problema de valor de condição inicial deve-se fazer  $t = T - \tau$ , assim a equação clássica acima se torna

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS \frac{\partial V}{\partial S} + rV = 0 \quad (2.4)$$

A forma **difusional** de BS da equação acima é a forma que elimina o termo convectivo, ou seja, o termo de primeira derivada ( $rS \frac{\partial V}{\partial S}$ ). O termo convectivo é bem conhecido por gerar soluções falsas (artificiais) em soluções numéricas de equações diferenciais parciais (ZIENKIEWICZ & TAYLOR, 1991; HOFFMAN, 1992; FORTES, 1997). Fortes (1997) mostrou que, eliminando o termo convectivo, a equação difusional resultante pode ser facilmente calculada por qualquer esquema numérico e, assim, levar a soluções, altamente acuradas da equação convectivo-difusiva. Aqui, a motivação é analisar a utilidade do

método difusional ao se usar o método FBR. A fim de colocar a equação (2.4) na forma difusional, usa-se a identidade

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS \frac{\partial V}{\partial S} = A \frac{\partial}{\partial S} \left( B \frac{\partial V}{\partial S} \right) \quad (2.5)$$

Comparando o lado direito da equação (2.5) com seu lado esquerdo, por meio de manipulações algébricas, chega-se a:

$$B = \frac{B_0}{C_0} \frac{S^{\frac{2r}{\sigma^2}}}{S^{\frac{2r}{\sigma^2}}} \quad (2.6)$$

E

$$A = -\frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S^2}{C_0 S^{\frac{2r}{\sigma^2}}} \quad (2.7)$$

Substituindo os valores de A e B nas equações (2.5 e 2.4), obtém-se a forma *difusional* da equação de Black-Scholes:

$$\frac{2S^{\frac{2r}{\sigma^2}-2}}{\sigma^2} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial S} \left( S^{\frac{2r}{\sigma^2}} \frac{\partial V}{\partial S} \right) + \frac{2S^{\frac{2r}{\sigma^2}-2}}{\sigma^2} rV = 0 \quad (2.8)$$

As condições iniciais e de contorno são:

$$V(S,0) = \text{Payoff}(S,0) = \max(S-E, 0); \quad V(0, t) = 0; \quad V(\infty, t) = S - Ee^{-rt} \quad (2.9)$$

## 2.2. Principais Opções de Barreiras

Existem muitos tipos de opções, que abrangem desde as formas mais comuns como as Européias, Americanas e Asiáticas, até as formas especializadas como as opções exóticas. Opções de barreiras são opções altamente usadas que permitem ao comprador reduzir seu risco. O valor de opções de barreira está associado a um retorno (pagamento) que depende

do ativo associado,  $S$ , e pode atingir um nível específico de valor antes do vencimento. Existem dois tipos principais de opções de barreira (WILMOTT, 1998):

- A **opção out** que só paga se o nível,  $S_u$ , não for atingido. Se a barreira for atingida então a opção é dita ter **knocked out**.
- A **opção in** que paga contanto que o nível  $S_d$  seja alcançado antes do vencimento. Se a barreira for alcançada então a opção é dita ter **knocked in**.

A opção de barreira pode também ser caracterizada pela posição da barreira em relação ao valor inicial do ativo subjacente:

- Se a barreira está acima do valor inicial da ação, tem-se uma opção **up**.
- Se a barreira está abaixo do valor inicial da ação, tem-se uma opção **down**.

As principais condições de contorno para as opções de barreiras mais comuns são apresentadas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1. Caracterização das opções de barreiras

Opção de barreira	Nível de barreira	Solução envolve	Condição de contorno	Se não atingida
Up-and-Out	$S = S_u$	$0 \leq S \leq S_u$	$V(S_u, t) = 0$ for $t < T$	$V(S, T) = \max(S - E, 0)$
Up-and-In	$S = S_u$	$S_u \leq S \leq \infty$	$V(S_u, t) = \max(S - E, 0)$	$V(S, T) = 0$
Down-and-Out	$S = S_d$	$S_d \leq S < \infty$	$V(S_d, t) = 0$	$V(S, T) = \max(S - E, 0)$
Down-and-In	$S = S_d$	$0 \leq S \leq S_d$	$V(S_d, t) = \max(S - E, 0)$	$V(S, T) = 0$

Assim, para uma opção de barreira Up-and-Out, a opção termina, isto é, seu valor é zero, se o preço do ativo subjacente ( $S$ ) atingir a barreira superior ( $S_u$ ) antes do vencimento, ( $V(S_u, t) = 0$  for  $t < T$ ). Caso contrário, a opção é ativada, ou seja, seu valor é igual ao de uma opção de compra européia ordinária, ( $V(S, T) = \max(S - E, 0)$ ).

É importante notar que, para opções de compra simples, as condições de contorno são  $V(S, T) = \max(S - E, 0)$  para  $0 \leq S < \infty$ . Soluções analíticas para opções de compra e barreiras podem ser encontradas Wilmott (1998, 2007).

### 2.3. Função de Base Radial

Ao usar FBRs utilizam-se combinações lineares de uma função de base  $\phi(\mathbf{r})$  de uma variável, expandida sobre um dado centro de dados dispersos  $S_i \in \mathcal{R}^d$ ,  $i=1, \dots, N$  para aproximar uma função desconhecida  $V(S, t)$  por

$$V(S, t) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(t) \phi(\|\mathbf{S} - \mathbf{S}_j\|) \quad (2.10)$$

em que  $r_j = \|\mathbf{S} - \mathbf{S}_j\|$  é a norma Euclideana e  $\lambda_j$  são os coeficientes a serem determinados.

Funções de base radial usuais são (KOC et al., 2003):

$$\text{Thin-Plate Spline, TPS: } \phi(r_j) = r_j^4 \log(r_j) \quad (2.11)$$

$$\text{Multiquadrática, MQ: } \phi(r_j) = \sqrt{c^2 + r_j^2} \quad (2.12)$$

$$\text{Cúbica: } \phi(r_j) = r_j^3 \quad (2.13)$$

$$\text{Gaussiana: } \phi(r_j) = e^{-c^2 r_j^2} \quad (2.14)$$

Deve-se notar que os pontos de malha, aqui definidos por  $r_j$ , não requerem nenhuma regra formal, exceto a definição de quais são os contornos (limites). O método, então, não requer malhas, ou seja, é “sem malha”. Adicionalmente, além da extensão óbvia para muitas dimensões, o método só requer a colocação de pontos em contornos (limites) importantes. Nenhuma regra para malhas é necessária e nela se situa a importância do método de colocação de função de base radial ao contrário de outros métodos numéricos.

Neste trabalho, utilizam-se somente as FBRs Cúbica e TPS, devido à sua simplicidade e acurácia provada para outros tipos de problemas (BOZTOSUN & CHARAFI, 2002; GOTO et al., 2007).

### 2.3.1. Aplicações de Funções de Base Radial à equação de Black-Scholes original

Como se mostra abaixo, a metodologia de FBR para obter a solução numérica da equação de BS requer a discretização da equação original (2.1). Desse modo, a equação de Black-Scholes original mostrada acima, equação (2.1), pode ser discretizada usando o método ponderado de  $\theta$ :

$$\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} = f(S, t) \approx (1 - \theta) \cdot f(S_t, t) + \theta \cdot f(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t) \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq 1 \quad (2.15)$$

Então, a forma discretizada da equação (2.1) se torna:

$$\begin{aligned} V(S, t) - V(S, t + \Delta t) + \Delta t(1 - \theta) \cdot \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \nabla^2 V(S, t) + rS \nabla V(S, t) - rV(S, t) \right] + \\ + \Delta t \theta \cdot \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \nabla^2 V(S, t + \Delta t) + rS \nabla V(S, t + \Delta t) - rV(S, t + \Delta t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ou

$$\begin{aligned} V(S, t^n) \cdot \left[ 1 + \Delta t(1 - \theta) \cdot \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \nabla^2 + rS \nabla - r \right) \right] + \\ + V(S, t^n + \Delta t) \cdot \left[ -1 + \Delta t \theta \cdot \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \nabla^2 + rS \nabla - r \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nesta equação,  $n$  indica o  $n$ -ésimo plano de tempo. Por definição  $V(S, t^n) = V^n$  e  $V(S, t^n + \Delta t) = V^{n+1}$ ; assim, pode-se escrever a equação anterior na forma:

$$\left[ 1 - \alpha \cdot \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \nabla^2 + rS \nabla - r \right) \right] \cdot V^{n+1} = \left[ 1 + \beta \cdot \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \nabla^2 + rS \nabla - r \right) \right] \cdot V^n \quad (2.18)$$

em que  $\alpha = \theta \Delta t$ ,  $\beta = (1 - \theta) \Delta t$ ,  $\nabla = \frac{\partial}{\partial S}$  and  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial S^2}$ . E, agora, definindo os dois novos operadores,  $H_+$  e  $H_-$  por:

$$H_+ = 1 - \alpha \cdot \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \nabla^2 + rS \nabla - r \right), \quad H_- = 1 + \beta \cdot \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \nabla^2 + rS \nabla - r \right) \quad (2.19)$$

a equação (2.17) se torna:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} H_+ \phi(\mathbf{S}_{ij}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n H_- \phi(\mathbf{S}_{ij}) \quad \text{para } i = 1 \dots N \quad (2.20)$$

A equação (2.20) gera um sistema de equações lineares, que pode ser resolvido para obter os coeficientes desconhecidos,  $\lambda_j^{n+1}$ , a partir dos valores conhecidos de  $\lambda_j^n$  no passo de tempo anterior. A partir deste ponto, eles podem ser transformados em  $V(\mathbf{S}, t)$  pela equação (2.10).

### 2.3.2. Aplicações das Funções de Base Radial à forma difusional da equação de Black-Scholes

Após manipulações algébricas, a equação (2.8), desenvolvida pelo método ponderado em  $\theta$ , leva a:

$$\left[ \frac{2S^{\frac{2r}{\sigma^2}-2}}{\sigma^2} - \alpha \left( \nabla S^{\frac{2r}{\sigma^2}} \nabla - \frac{2S^{\frac{2r}{\sigma^2}-2}}{\sigma^2} r \right) \right] V^{n+1} = \left[ \frac{2S^{\frac{2r}{\sigma^2}-2}}{\sigma^2} + \beta \left( \nabla S^{\frac{2r}{\sigma^2}} \nabla - \frac{2S^{\frac{2r}{\sigma^2}-2}}{\sigma^2} r \right) \right] V^n \quad (2.21)$$

Os operadores  $H_+$  e  $H_-$  são, agora, definidos por:

$$H_+ = \left[ \frac{2S^{\frac{2r}{\sigma^2}-2}}{\sigma^2} - \alpha \left( \nabla S^{\frac{2r}{\sigma^2}} \nabla - \frac{2S^{\frac{2r}{\sigma^2}-2}}{\sigma^2} r \right) \right], \quad H_- = \left[ \frac{2S^{\frac{2r}{\sigma^2}-2}}{\sigma^2} + \beta \left( \nabla S^{\frac{2r}{\sigma^2}} \nabla - \frac{2S^{\frac{2r}{\sigma^2}-2}}{\sigma^2} r \right) \right] \quad (2.22)$$

Finalmente, os novos operadores  $H_+$  e  $H_-$ , quando aplicados a equação (2.20), geram outro sistema de equações lineares FBR equivalente à forma discretizada da equação (2.8).

## 2.4. Resultados e Discussão

Os resultados a serem mostrados foram obtidos via Mathcad, um programa que permite a solução de problemas matemáticos numéricos e simbólicos. Os resultados obtidos tiveram por base os seguintes dados de entrada

- Preço de exercício do ativo:  $E = 50$
- Volatilidade do ativo objeto:  $\sigma = 20\%$
- Taxa de juros neutro ao risco:  $r = 5\%$
- Prazo para vencimento:  $T = 1$
- Preço exato (analítico) da opção de compra = 5,225.

Neste trabalho, consideram-se somente barreiras Up-and-Out (UAO) e Down-and-Out (DAO), dado o fato que suas soluções permitem obter imediatamente soluções para as outras duas opções de barreira (ver WILMOTT, 1998, para detalhes). Para estas opções:

- Preço da barreira Up-and-Out = 90; respectivo preço (prêmio) da opção (solução analítica) = 4,9869.
- Preço da barreira Down-and-Out = 40; respectivo preço da opção = 5,176.

O número total de malhas do valor da ação é  $N$ ; o tamanho da malha,  $\Delta S$ , é definido por  $\Delta S = S/N$ . Analogamente, o número total de passos de tempo é  $N_t$ , enquanto o passo de tempo,  $\Delta t$ , é definido por  $\Delta t = T/N_t$ . O método (implícito ou explícito) é definido pelo valor de  $\theta$ .

Nesta dissertação, o erro numérico relativo do valor da opção refere-se ao valor predito da opção no valor de preço de exercício ( $S = E = 50$ ) e é definido por:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \text{Erro numérico relativo do preço da opção (\%)} = \\ &= \frac{\text{Valor da opção numérica} - \text{Valor da solução analítica}}{\text{Valor da solução analítica}} \times 100\% \quad (2.23) \end{aligned}$$

Muitos problemas requerem que se especifique  $V(\infty, t)$ ; em termos computacionais, há que se escolher um valor de  $S$  máximo para que o valor associado de  $V$  aproxime-se do valor

correto de  $V(\infty, t)$ . Assim, quanto menor for o valor aceitável de  $S_{\max}$  menor será o número de pontos (ou malhas) a ser usado e maior a eficiência computacional.

Pode-se melhorar a acurácia da solução de diferenças finitas da equação de BS se o método difusional substituir a abordagem clássica (FORTES et al., 2005). Entretanto, ao se considerarem FBR, os resultados numéricos foram idênticos, isto é, a forma clássica e difusional da equação de Black-Scholes levaram aos mesmos resultados. Então, esse fato não será mostrado nas figuras e discussões que virão.

A Figura 2.1 mostra que o emprego de funções de base radial Cúbica e TPS leva a excelentes aproximações. Obtém-se a Figura 2.1 ao se tomarem  $N_t = 100$  passos de tempo,  $N = 112$  malhas e  $\Delta S = 0,714$ , com um valor superior de  $S$  igual a 80 e  $\theta$  igual 0,5. No caso da FBR Cúbica, o erro relativo do preço da opção (em  $E = 50$ ) foi 0,00039%, enquanto que no caso da FBR TPS, o erro relativo foi 0,019%.

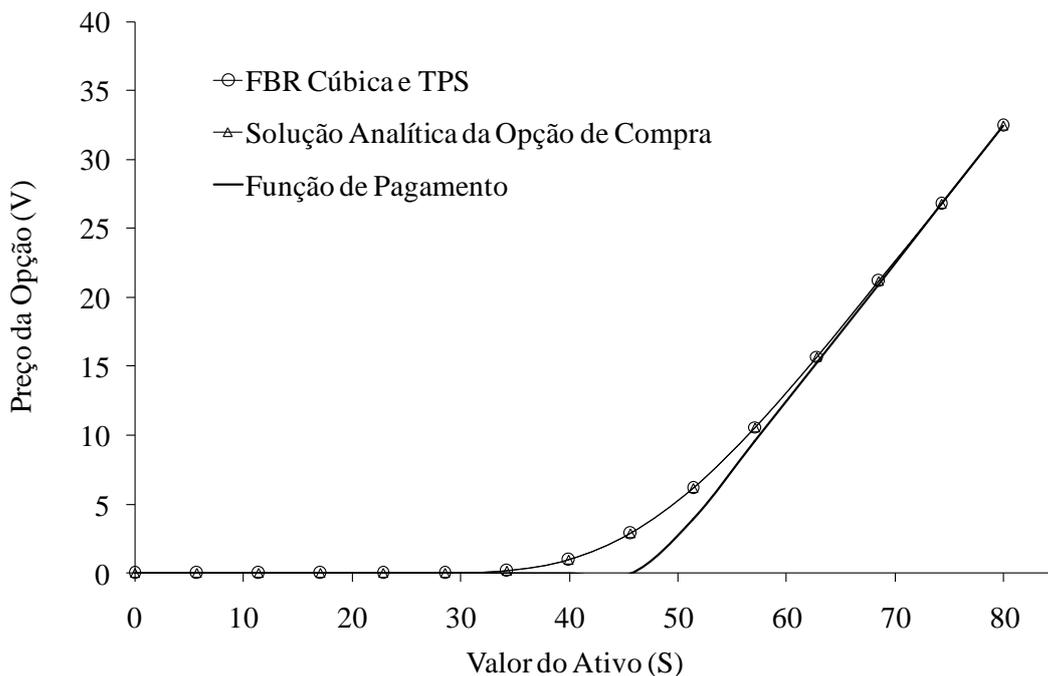


Figura 2.1. Valores simulados da FBR Cúbica e TPS de uma opção de compra comparados aos valores da solução analítica e da função de pagamento;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ .

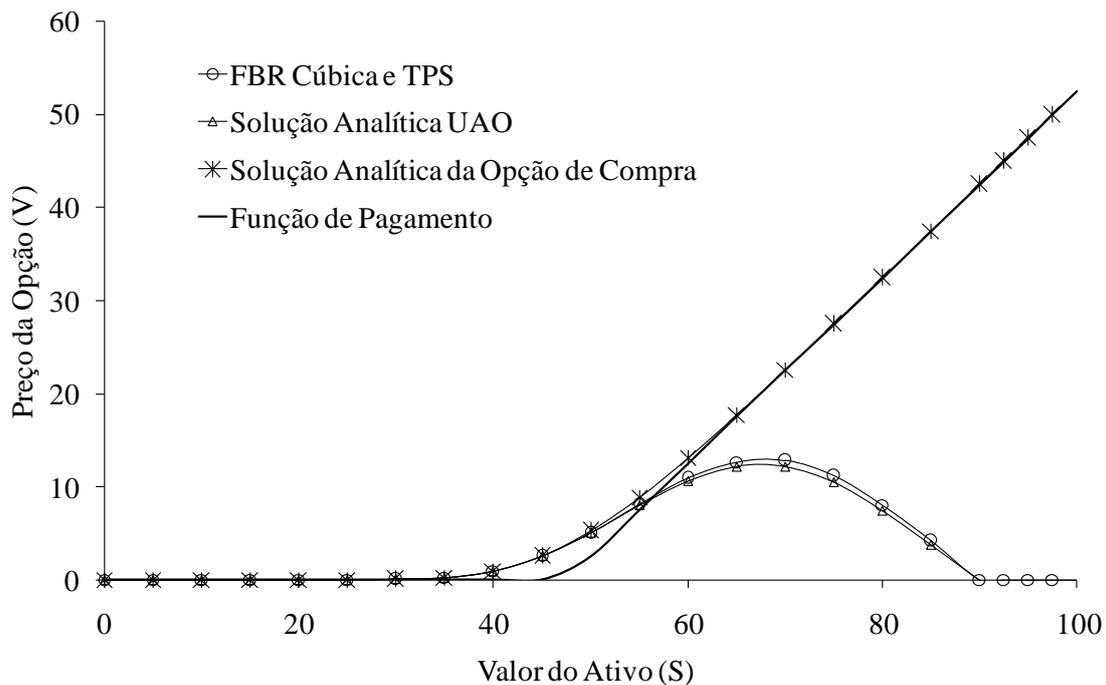


Figura 2.2. Valores simulados da FBR Cúbica e TPS de uma opção de barreira Up-and-Out, com barreira em  $S = 90$ , comparados aos valores da solução analítica e da função de pagamento;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ .

A Figura 2.2 refere-se aos dados obtidos quando do emprego de opções de barreira Up-and-Out. Nota-se que se podem obter soluções acuradas pelo uso de funções de base radial Cúbica e TPS. A Figura 2.2 foi obtida ao se tomarem 100 passos de tempo,  $N = 112$  malhas e  $\Delta S = 0,893$ , com um valor superior de  $S$  igual a 100 e  $\theta$  igual a 1. No caso da FBR Cúbica, o erro relativo do preço da opção (em  $E = 50$ ) foi 1,15%, enquanto que no caso da FBR TPS, o erro relativo foi 1,12%. Observa-se a influência da condição de contorno dependente do tempo altamente não-linear pelo aumento dos erros relativos comparados aos erros associados à condição de contorno moderadamente não-linear das opções de compra (Figura 2.1). O comportamento da curva da opção de barreira Up-and-Out é diferente do comportamento da curva de opção de compra devido a suas condições iniciais e de contorno que também são diferentes. As condições iniciais e de contorno da opção de barreira Up-and-Out são dadas na Tabela 2.1.

A Figura 2.3 mostra novamente que o emprego de funções de base radial Cúbica e TPS leva a resultados acurados, quando aplicado à solução de opções de barreira Down-and-Out (DAO). Obtém-se a Figura 2.3 ao se tomarem 100 passos de tempo,  $N = 112$  malhas e

$\Delta S = 0,714$ , com um valor superior de  $S$  igual a 80 e  $\theta$  igual a 1. No caso da FBR Cúbica, o erro relativo do preço da opção (em  $E = 50$ ) foi 0,38%, enquanto que no caso da FBR TPS, o erro relativo foi 0,36%.

Assim, como principal conclusão, pode-se afirmar que, a um nível de erro relativo inferior a 1,3%, ou 0,013 (decimal), o método FBR é muito acurado. Mostra-se abaixo discussões adicionais sobre processos de otimização de erros.

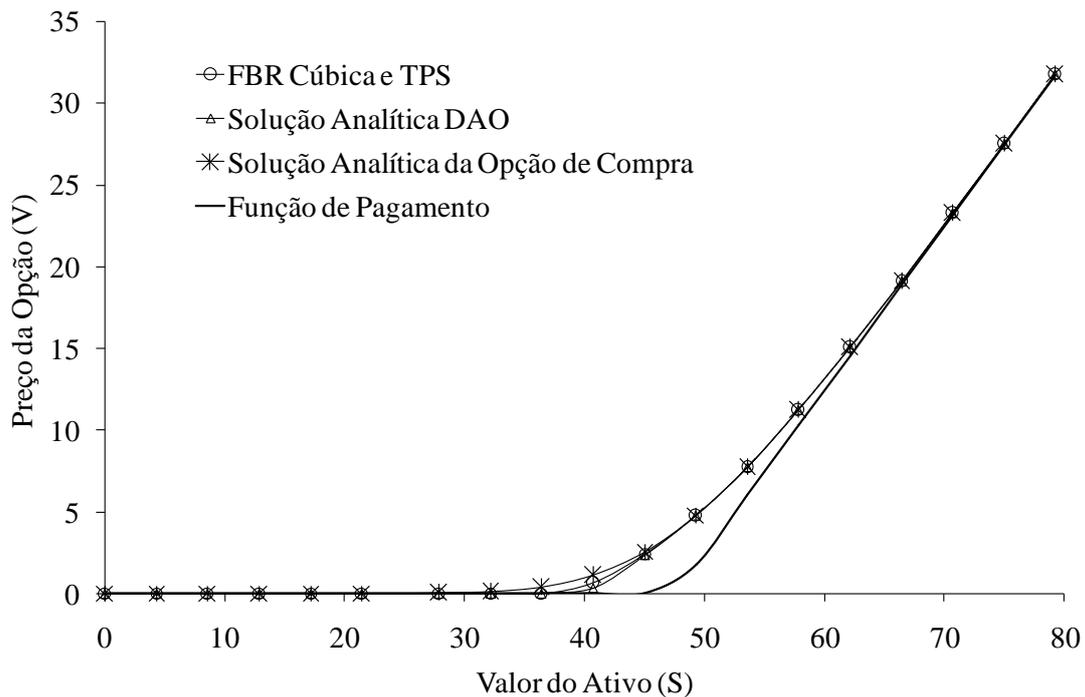


Figura 2.3. Valores simulados da FBR Cúbica e TPS de uma opção de barreira Down-and-Out, com barreira em  $S = 40$ , comparados aos valores da solução analítica e da função de pagamento;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ .

#### 2.4.1. Análise de erro dos resultados de simulação dos métodos FBR aplicados a opções de barreiras Up-and-Out, UAO

Erros associados a ambas as FBRs Cúbica e TPS são mostrados nas Figuras 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 e 2.11.

A Figura 2.4 mostra o efeito do esquema de integração. Como pode ser notado, é aconselhável usar  $\theta \geq 0,25$ , como uma regra, para FBR Cúbica; valores menores de  $\theta$

podem levar a divergência. A FBR TPS não está sujeita a divergência, mesmo para condição de solução explícita ( $\theta = 0$ ). Obtêm-se os erros relativos na Figura 2.4 sujeitando ambas as FBRs Cúbica e TPS aos mesmos parâmetros de simulação. Não se tentou otimizar o nível de erro; entretanto os resultados mostram que quanto maior o valor de  $\theta$ , menor o erro.

Visualiza-se o efeito do máximo valor simulado do ativo ( $S_{\max}$ ) na Figura 2.5. Nota-se que as FBRs Cúbica e TPS apresentam níveis de erro aproximados e estáveis se  $S_{\max}$  fica maior que 100. Então, os resultados sugerem que se devem usar malhas tal que  $S_{\max} \geq 2E$ .

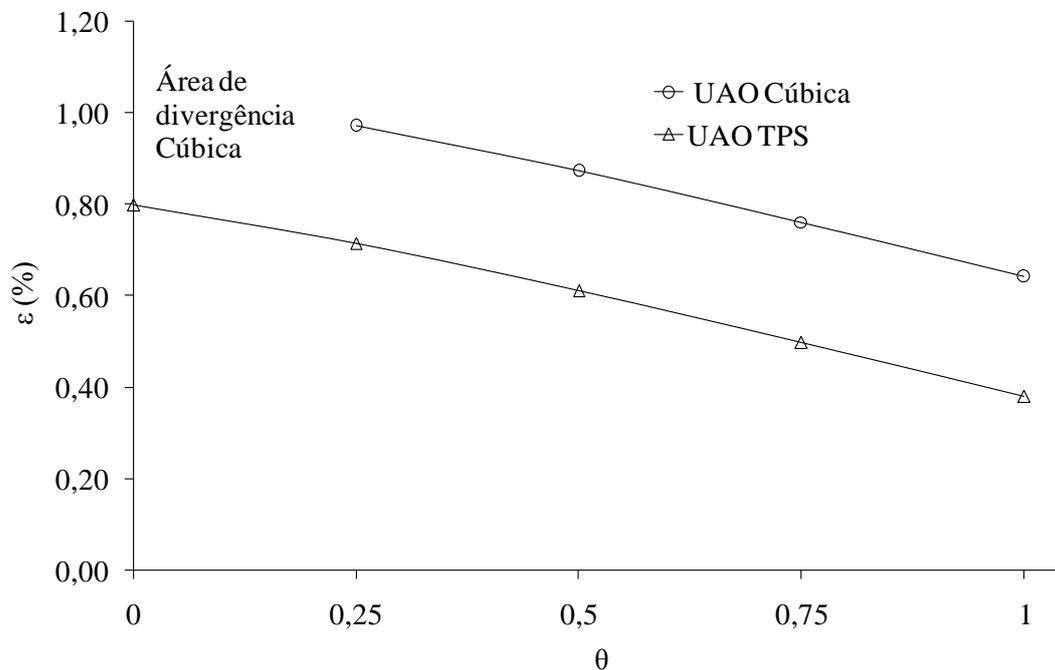


Figura 2.4. Erro relativo de valores preditos de opção de barreira Up-and-Out FBR no valor de exercício do ativo (%), em função do valor de  $\theta$  de integração;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N_t = 100$ ,  $N = 40$ ,  $S_{\max} = 100$  para FBR Cúbica e FBR TPS.

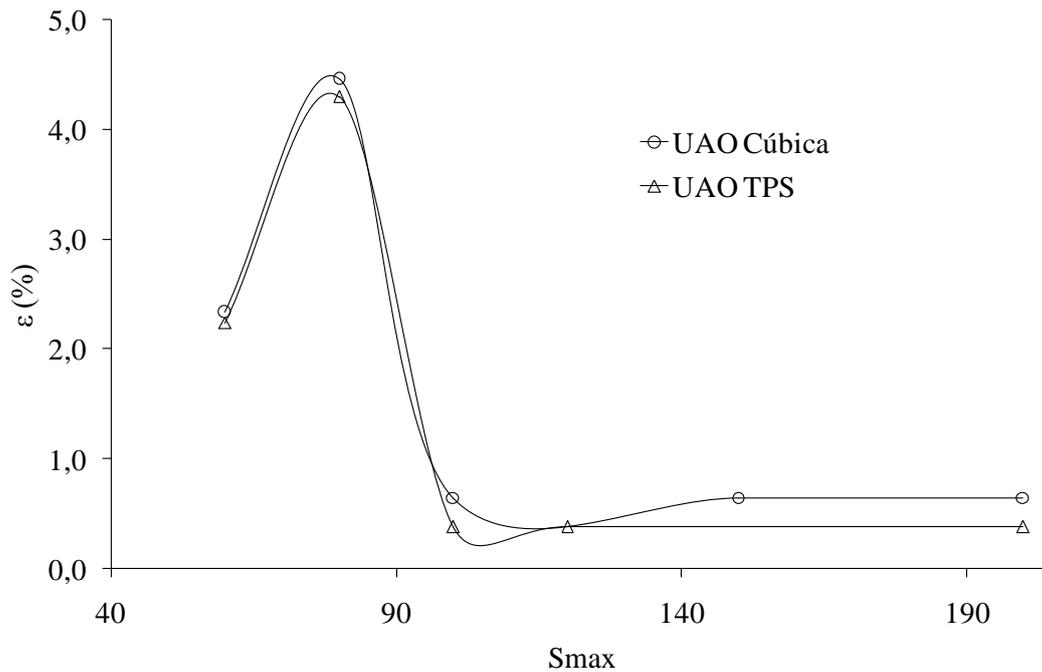


Figura 2.5. Erro relativo de valores preditos de opção de barreira Up-and-Out FBR no valor de exercício do ativo (%) em função do máximo valor simulado do ativo;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N_t = 100$ ,  $\theta = 1$  e  $\Delta S = 2,5$  para FBR Cúbica e FBR TPS.

A Figura 2.6 mostra que o passo de tempo deve, em termos práticos, ser igual a ou menor que 0,1, quando se empregam FBRs. A Figura 2.7 mostra que a precisão de ambas as FBRs Cúbica e TPS não dependem muito do tamanho da malha. A Figura 2.7 mostra que a curva de erros em função do tamanho da malha usada apresenta um mínimo; assim, o ponto ótimo de tamanho de malha pode ser obtido, de forma aproximada, por busca simples do ponto de mínimo. Não se constatou uma diferença apreciável entre os métodos que empregam FBR Cúbica e TPS. Mas, a respeito dessas duas figuras pode-se concluir que a FBR TPS leva a resultados ligeiramente melhores que a FBR Cúbica.

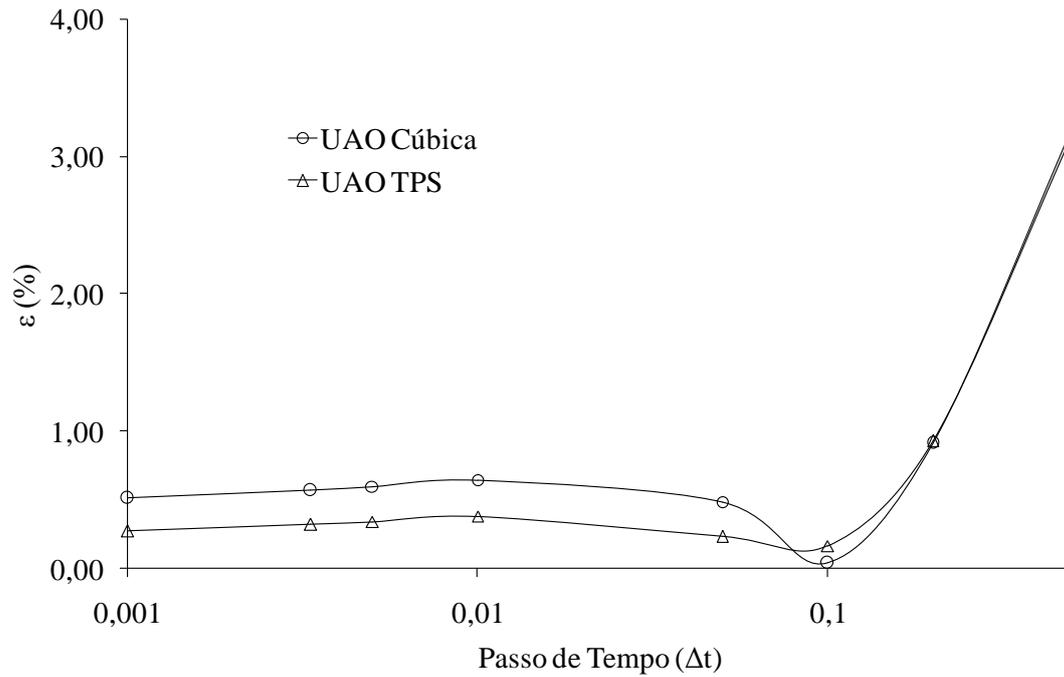


Figura 2.6. Erro relativo de valores preditos de opção de barreira Up-and-Out FBR no valor de exercício do ativo (%) em função do passo de tempo;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N = 40$ ,  $S_{max} = 100$  e  $\theta = 1$  para FBR Cúbica e FBR TPS.

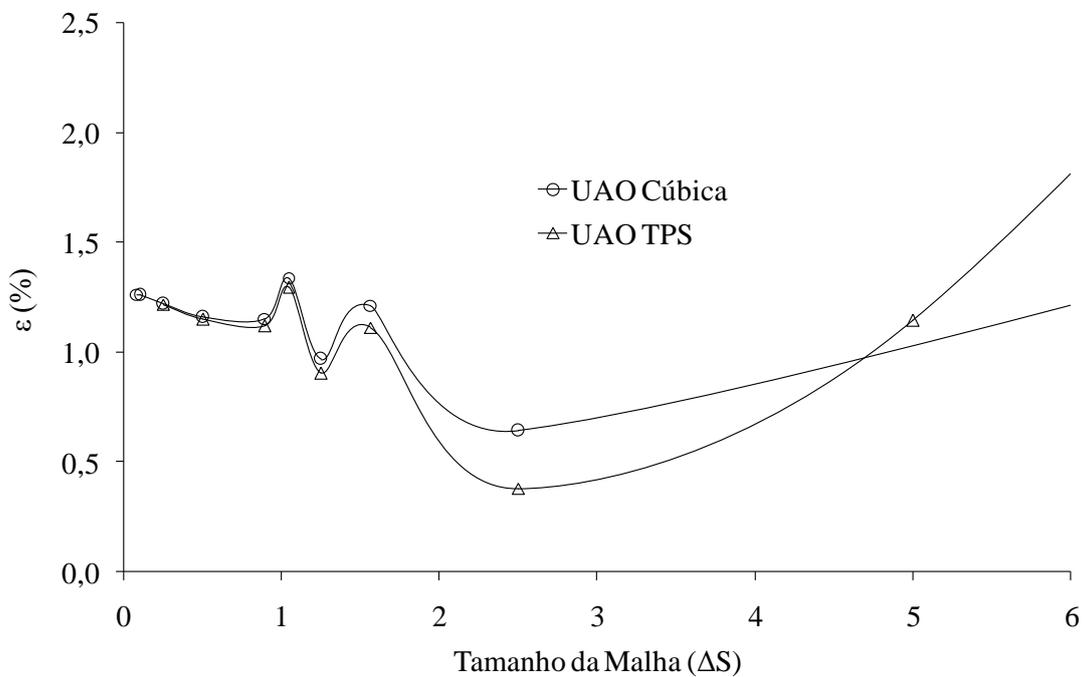


Figura 2.7. Erro relativo de valores preditos de opção de barreira Up-and-Out FBR no valor de exercício do ativo (%) em função do tamanho da malha;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N_t = 100$ ,  $S_{max} = 100$  e  $\theta = 1$  para FBR Cúbica e FBR TPS.

### 2.4.2. Análises de erro dos resultados de simulação dos métodos FBR aplicados a opções de barreiras Down-and-Out, DAO

A Figura 2.8 mostra o efeito do esquema de integração. Pode-se notar que, diferentemente do problema UAO, é aconselhável usar  $\theta \geq 0,5$ , para ambas as FBRs Cúbica e TPS; valores menores de  $\theta$  levam à divergência. Na Figura 2.8 obtêm-se os erros relativos sujeitando ambas as FBRs Cúbica e TPS aos mesmos parâmetros de simulação. Novamente, não se procurou otimizar o nível de erro, entretanto os resultados mostram que quanto maior o valor de  $\theta$ , menor o erro. Os erros relativos associados à DAO (Figura 2.8) são menores que os associados à UAO (Figura 2.4).

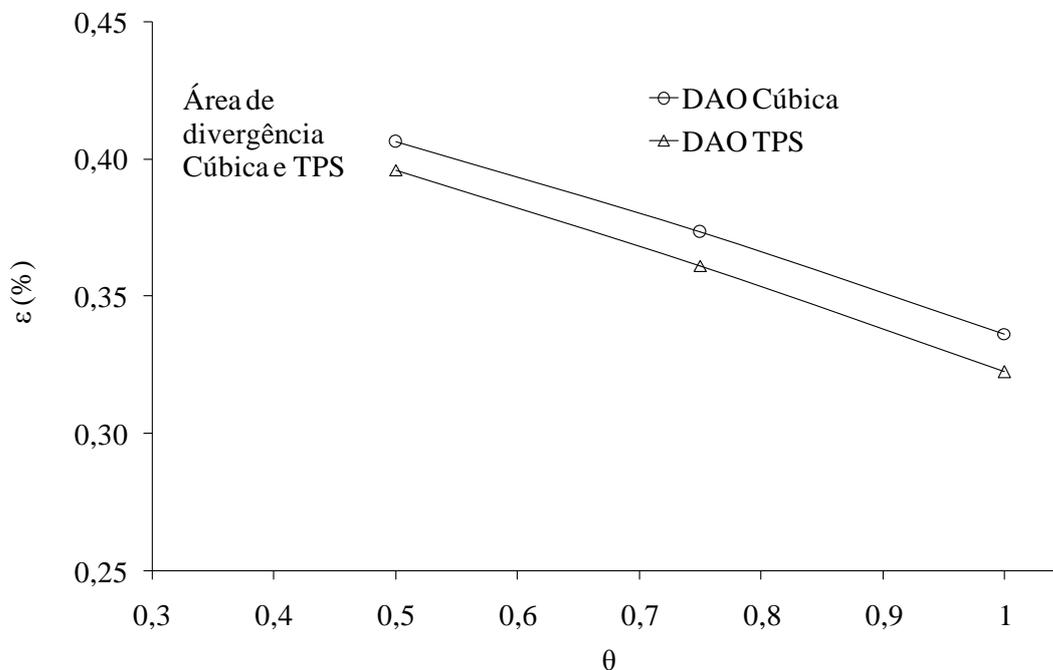


Figura 2.8. Erro relativo de valores preditos de opção de barreira Down-and-Out FBR no valor de exercício do ativo (%) em função do valor de  $\theta$  de integração;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N_t = 100$ ,  $N = 112$ ,  $S_{\max} = 100$  para FBR Cúbica e FBR TPS.

Pode-se visualizar o efeito do máximo valor simulado do ativo ( $S_{\max}$ ) na Figura 2.9. As FBRs Cúbica e TPS apresentam níveis de erros aproximados e estáveis conforme  $S_{\max}$  fica maior que 90. Portanto, os resultados sugerem, novamente, usar uma malha prática tal que,  $S_{\max}$  seja, aproximadamente, maior ou igual a  $2E$ . Os erros relativos à DAO são inferiores em relação aos associados às soluções de barreiras UAO.

No caso de barreiras DAO, a Figura 2.10 mostra que o passo de tempo deve, em termos práticos, ser igual a ou menor que 0,1, quando se empregam FBRs. A Figura 2.11 mostra que ambas as FBR Cúbica e FBR TPS não dependem muito do tamanho da malha e levam a aproximadamente os mesmos resultados quando se considera o tamanho da malha. É aconselhável usar tamanho da malha maior que 0,5 para FBR TPS visto que ela diverge para valores menores de  $\Delta S$ . Os erros relativos associados são menores que no caso das soluções UAO.

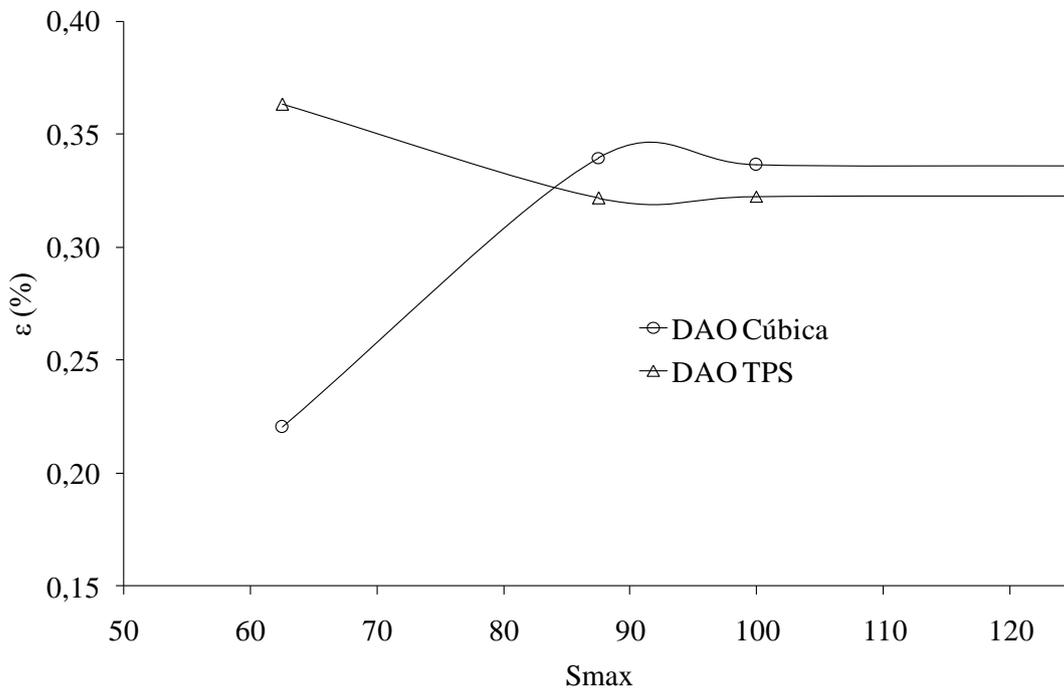


Figura 2.9. Erro relativo de valores preditos de opção de barreira Down-and-Out FBR no valor de exercício do ativo (%) em função do máximo valor simulado do ativo;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N_t = 100$ ,  $\theta = 1$  e  $\Delta S = 0,893$  para FBR Cúbica e FBR TPS.

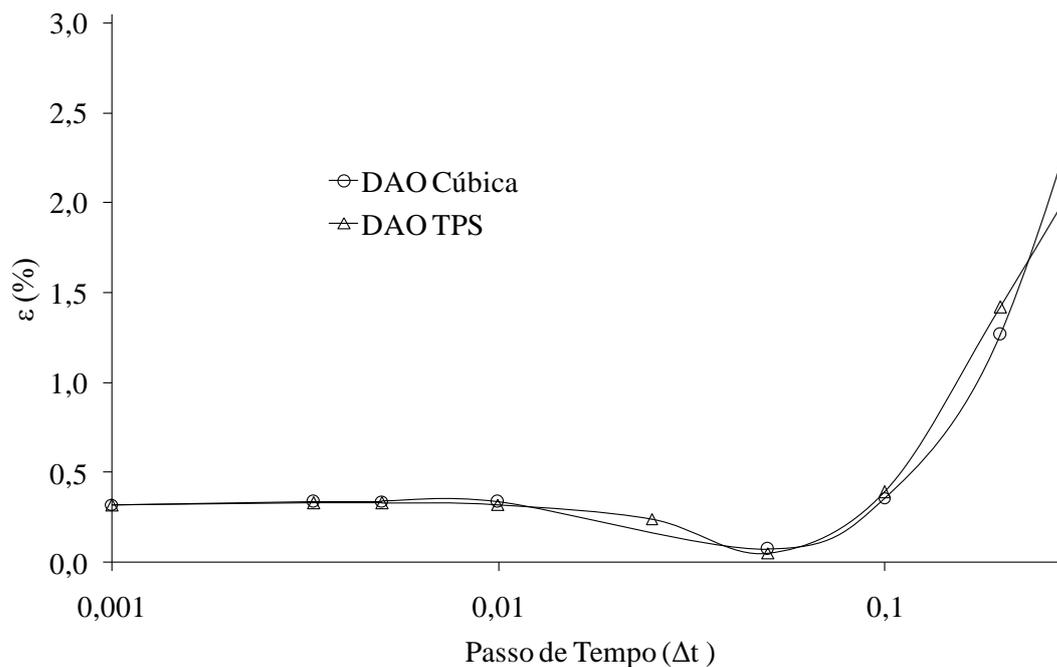


Figura 2.10. Erro relativo de valores preditos de opção de barreira Down-and-Out FBR no valor de exercício do ativo (%) em função do passo de tempo;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N = 112$ ,  $S_{max} = 100$  e  $\theta = 1$  para FBR Cúbica e FBR TPS.

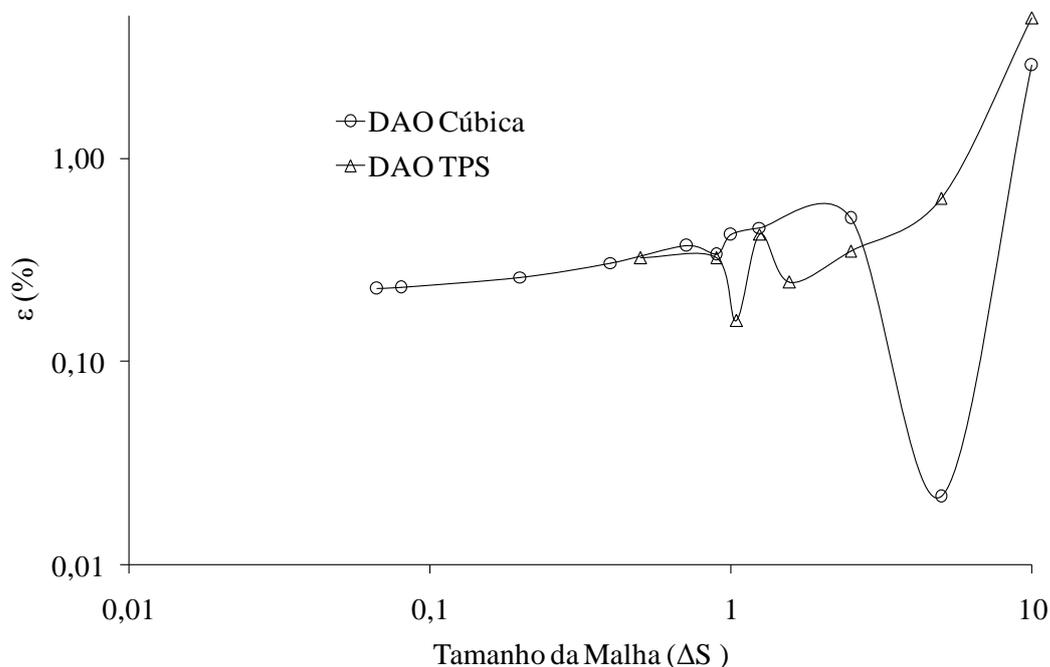


Figura 2.11. Erro relativo de valores preditos de opção de barreira Down-and-Out FBR no valor de exercício do ativo (%) em função do tamanho da malha;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N_t = 100$ ,  $S_{max} = 100$  e  $\theta = 1$  para FBR Cúbica e FBR TPS.

## 2.5. Conclusões

Este capítulo apresenta a modelagem e análise detalhada da equação de Black-Scholes, ambas nas versões clássica e difusional, usando funções de base radial. A fim de assegurar a extensão de aplicabilidade do método FBR, soluções numéricas foram comparadas às soluções analíticas para a opção clássica de compra e para os problemas de condições de contorno não-lineares, como definidos pelas opções de barreira dependentes do caminho. Adicionalmente, efetuou-se uma análise considerando os principais parâmetros envolvidos na modelagem a fim de se estabelecer uma maneira conveniente de alcançar soluções acuradas por meio do uso do método FBR.

As principais conclusões são:

1. Não existe diferença notável entre soluções obtidas por meio das formas clássica e difusional da equação de BS.
2. Como procedimento geral, o tamanho da malha para os problemas analisados deve ser diminuído a partir de uma malha grosseira inicial, a fim de se obter soluções aproximadas razoáveis; a não-linearidade impede afirmar que menores tamanhos de malha do valor da ação levarão, necessariamente, a menores erros relativos. Entretanto, sempre se obtiveram resultados estáveis e acurados. O emprego de malhas muito pequenas pode levar a divergência.
3. Métodos de integração no tempo simples implícito com  $\theta \geq 0,5$  levam a soluções estáveis.
4. A condição de contorno do valor da opção no infinito requer a especificação adequada de  $S_{\max}$ , ou seja, o seu valor tal que  $V(t, \infty) \approx V(t, S_{\max})$ . Os dados numéricos permitem afirmar que, ao se definir  $S_{\max} = 2E$  obtiveram-se excelentes resultados, sem a necessidade de uso excessivo de malhas.
5. Os tamanhos do passo de tempo devem ser diminuídos até atingir a convergência desejada dos resultados numéricos. Novamente, como na conclusão 2, acima, deve-se esperar pequenas flutuações.
6. Os resultados da opção de compra são simples de implementar e, devido a obtenção de resultados muito acurados, estes não foram sujeitos a análise detalhada. Opções de barreiras, por outro lado, requereram uma análise mais detalhada.

Portanto, os resultados permitem concluir que os métodos FBR Cúbico e TPS são satisfatórios para modelar e analisar a equação de Black-Scholes sob condições de contorno dependentes do tempo não-linear.

### **3. AVALIAÇÃO DE METODOLOGIA ADAPTATIVA NO TEMPO, EMPREGANDO FUNÇÕES DE BASE RADIAL, PARA PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES DE BARREIRAS**

Muitos métodos numéricos transformam equações diferenciais parciais (EDP) em um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDO) que devem ser solucionadas eficientemente (FORTES & FERREIRA, 1999; SARRA, 2005). Um método de solução de EDO é dito adaptativo quando, por meio de um controle interno do erro numérico, seu passo de tempo é automaticamente ajustado, de modo a satisfazer a acurácia (exatidão), previamente definida pelo usuário. As vantagens dos métodos adaptativos são, exatamente, o fornecimento de estimativas dos erros numéricos e a economia de tempo computacional e de armazenamento para uma mesma acurácia da solução (LÖTSTEDT et al., 2007; FORTES & FERREIRA, 1999). Existem algoritmos sofisticados, principalmente comerciais, que utilizam técnicas adaptativas para solução de problemas não-lineares de valor inicial, tais como os disponíveis em pacotes como o Matlab, Mathcad e Mathematica. Kovalov et al. (2007) propuseram um método adaptativo para o problema de precificação de opções americanas de multi-ativos de acordo com a estrutura de Black-Scholes-Merton. Eles converteram a EDP não-linear à forma variacional (fracas), discretizaram a formulação fracas espacialmente pelo método de elementos finitos de Galerkin para obter um sistema de EDOs, e integraram o sistema de EDOs resultante no tempo com o resolvidor SUNDIALS de ordem variável adaptativa e tamanho do passo variável. Já Lötstedt et al. (2007) solucionaram numericamente a equação de Black-Scholes multi-dimensional para a opção de compra europeia. Eles também utilizaram um método adaptativo. A equação foi discretizada pelo método de diferenças finitas em uma rede cartesiana. A rede foi, então, ajustada dinamicamente no espaço e no tempo para satisfazer um limite no erro global. Ambos os métodos de Kovalov et al. (2007) e de Lötstedt et al. (2007) requerem o estabelecimento de malhas e dependem da faixa de valores dos parâmetros envolvidos na equação diferencial parcial em estudo (HOFFMAN, 1992).

Há dois passos importantes na solução numérica EDPs dependentes do tempo. O primeiro passo é a discretização espacial e o segundo é o avanço da solução da condição inicial até o plano de tempo desejado. Todos os métodos de integração temporal apresentam vantagens e desvantagens (WANXIE et al., 1998). De particular importância para esta dissertação,

Gresho et al. (1980) propuseram um integrador adaptativo implícito no tempo, fundamentado no preditor de Adams-Bashforth (ABP), de segunda ordem, tendo como corretora a regra do trapézio. O ABP necessita da avaliação de taxas de variação, obtidas através das sucessivas aplicações da regra do trapézio. O corretor utilizado é a regra do trapézio, que não é dissipativa, é incondicionalmente estável e possui uma acurácia de segunda ordem. Bixler (1989) alterou o integrador de Gresho et al. (1980) incorporando três modificações: 1. a forma dos gêmeos de uma perna só (one-leg twins) da regra do trapézio substituiu a regra do trapézio como corretor, levando, assim, a uma maior acurácia na estimativa do erro de truncamento temporal local; 2. para maior estabilidade do preditor mudaram-se as expressões usadas na avaliação das taxas de variação; e 3. a fórmula utilizada para prever o avanço no tempo foi revista para se ajustar ao novo corretor. Fortes & Ferreira (1999) apresentaram uma modificação do método de Gresho et al. (1980) e Bixler (1989), que utiliza a técnica do preditor de Adams-Bashforth associada a um método de Euler explícito, e a aplicaram, com sucesso, na solução de problemas de convecção-difusão por elementos finitos.

Os objetivos deste capítulo são: implantar o método de Bixler, modificado por Fortes (1997) e Fortes & Ferreira (1999) associado ao método de funções de base radiais, de forma a permitir a solução de equações diferenciais parciais parabólico-hiperbólicas; analisar a acurácia das soluções numéricas, quando o método for aplicado à solução da equação de Black-Scholes; analisar a acurácia de funções Cúbicas e TPS (Thin-Plate Spline) quando usadas como funções de base radial na solução da equação BS; efetuar testes de sensibilidade que envolvam todos os parâmetros que definem a equação BS; e aplicar o método proposto à solução da equação BS sob condições de contorno não lineares, dependentes do tempo.

O capítulo 3 é estruturado como segue. Na seção 3.1, apresenta-se o método adaptativo no tempo para solução de equações diferenciais ordinárias (EDO). Na seção seguinte, descreve-se o método adaptativo no tempo para solução de equações diferenciais parciais (EDP). Os resultados são mostrados na seção 3.3. O capítulo termina com observações conclusivas.

### 3.1.O Método adaptativo no tempo para solução de equações diferenciais ordinárias (EDO)

O método adaptativo usado neste capítulo relaciona-se, em sua base, a problemas de valor inicial, ou seja, a problemas que envolvem equações diferenciais de primeira ordem, geralmente não lineares, com condições iniciais, da forma:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (3.1)$$

em que  $t$  é a variável independente (muitas vezes,  $t$  refere-se ao tempo) e  $y$  é a variável dependente; o subscrito 0 refere-se a valores iniciais. Há um grande número de soluções analíticas para equações diferenciais ordinárias. Entretanto, a maior parte dos problemas práticos envolve problemas não lineares complexos, para os quais não há soluções analíticas. Um método adaptativo de solução da equação (3.1) permite obter aproximações numéricas para a solução exata, dentro de erros pré-especificados pelo usuário, com intervalos de tempo gerados automaticamente, sempre mantendo os erros dentro da faixa desejada.

Dentre os inúmeros métodos computacionais para solução adaptativa no tempo de EDOs (HOFFMAN. 1992), pela simplicidade e eficiência computacional, optou-se, neste trabalho, por utilizar o método de Bixler (BIXLER, 1989). O método de Bixler (1989) consiste em uma adaptação do método inicialmente proposto por Gresho et al. (1980) e utiliza um corretor designado por gêmeos de uma perna só (GUPS). O Esquema de Bixler (1989) consiste basicamente em:

1. utilizar o preditor de Adams-Bashforth, de acurácia de segunda ordem:

$$y_{n+1}^p = y_n + \frac{\Delta t_n}{2} \left[ \left( 2 + \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}} \right) \dot{y}_n - \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}} \dot{y}_{n-1} \right] \quad (3.2)$$

em que o sobrescrito p refere-se ao valor predito e as derivadas (taxas de variação),  $\dot{y}_{n-1}$  e  $\dot{y}_n$ , no plano temporal n-1 e n são aproximadas respectivamente por:

$$\dot{y}_{n-1} = \frac{\Delta t_{n-2}}{\Delta t_{n-1} + \Delta t_{n-2}} \left( \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t_{n-1}} \right) + \frac{\Delta t_{n-1}}{\Delta t_{n-1} + \Delta t_{n-2}} \left( \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\Delta t_{n-2}} \right) \quad (3.3)$$

e a regra do trapézio:

$$\dot{y}_n = \frac{2}{\Delta t_{n-1}} (y_n - y_{n-1}) \dot{y}_{n-1} \quad (3.4)$$

2. utilizar, como corretor, a regra dos gêmeos de uma perna só:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t_n} = f \left( \frac{y_{n+1} + y_n}{2}, \frac{t_{n+1} + t_n}{2} \right) \quad (3.5)$$

3. prever o tamanho do avanço no tempo por meio da expressão:

$$\Delta t_{n+1} = \Delta t_n \left( \frac{\varepsilon}{|d_{n+1}|} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.6)$$

em que  $\varepsilon$  é o erro de truncamento temporal local e  $d_{n+1}$  é proporcional à diferença entre a solução correta e a exata e é definida por:

$$d_{n+1} = \frac{0,25}{2,25 + 3\Delta t_{n-1} / \Delta t_n} (y_{n+1} - y_{n+1}^p) \quad (3.7)$$

4. fazendo o sobrescrito E se referir à solução exata, o erro de truncamento temporal local relativo à equação diferencial ordinária (3.1) pode ser obtido pela expansão da equação (3.2) por meio da série de Taylor, pela expressão (GRESHO et al., 1980):

$$y_{n+1} - y_{n+1}^E = \frac{1}{12} \Delta t_n^3 \ddot{f}(y, t) + O(\Delta t^4) \quad (3.8)$$

Similarmente, o erro de truncamento local para a equação (3.5) é dado por Bixler (1989):

$$y_{n+1} - y_{n+1}^E = \frac{0.25}{12} \Delta t_n^3 \ddot{f}(y, t) + O(\Delta t^4) \quad (3.9)$$

A combinação das duas equações (3.6-3.7) permite obter o tamanho do avanço no tempo pela equação (3.6). Deve-se notar que o Esquema de Bixler requer três soluções precedentes. O avanço temporal adaptativo ocorre a partir do quarto passo de tempo. Fortes & Ferreira (1999) propuseram uma nova modificação no modelo acima, aplicável a soluções de equações convectivo-difusivas; esta metodologia foi seguida neste trabalho e será relatada no próximo item.

#### *Exemplo de aplicação e eficiência computacional do Método adaptativo de Bixler*

A fim de exemplificar o esquema de Bixler mostrado acima, apresenta-se um exemplo de um problema *benchmark* rígido resolvido por meio do esquema de Bixler, com respectiva solução analítica. A equação rígida a ser resolvida é:

$$\dot{y} = -y \quad (3.10)$$

cuja solução analítica é:

$$y = e^{-t} \quad (3.11)$$

O desempenho do esquema de Bixler é mostrado nas figuras 3.1 e 3.2. Os resultados obtidos tiveram por base os seguintes dados de entrada: erro de truncamento ( $\epsilon\epsilon$ ) da ordem de  $10^{-3}$ ,  $10^{-5}$  e  $10^{-7}$ , tempo final de simulação igual a 5 e passo de tempo inicial ( $\Delta t$ ) igual a 0,00001 ( $1 \times 10^{-5}$ ). O número total de iterações (passos de tempo) é n.

As Figuras 3.1 e 3.2 referem-se aos resultados de simulação do problema *benchmark* proposto. Na figura 3.1, nota-se que os erros máximos das soluções mantiveram-se da ordem de  $10^{-3}$  e  $10^{-5}$ , respectivamente, como tinham sido definidos previamente. Entretanto, quando foi requerido o erro de truncamento da ordem de  $10^{-7}$ , o erro máximo da solução foi da ordem de  $10^{-6}$ , ou seja, a solução não manteve o erro de truncamento requerido anteriormente. Isso ocorreu devido à grande precisão desejada. A figura 3.2 mostra como o passo de tempo aumenta exponencialmente quando se usa o método adaptativo proposto para os erros de truncamento da ordem de  $10^{-3}$ ,  $10^{-5}$  e  $10^{-7}$ .

As duas figuras mostram o número de iterações (n) necessárias para atingir o tempo de simulação final igual a 5 com erro de truncamento desejado da ordem de  $10^{-3}$ ,  $10^{-5}$  e  $10^{-7}$ . Observa-se que quando o erro de truncamento requerido foi da ordem de  $10^{-3}$ , necessitaram-se de apenas 21 iterações para atingir o tempo de simulação final por meio do método adaptativo no tempo de Bixler ao invés de 500.000 iterações que seriam necessária ao usar um método numérico não adaptativo. Quando o erro de truncamento desejado foi da ordem de  $10^{-5}$ , foram necessárias apenas 70 iterações para atingir o tempo de simulação final por meio do método adaptativo de Bixler ao invés de serem necessárias 500.000 iterações por meio de um método numérico não adaptativo. E, por último, quando o erro de truncamento desejado foi da ordem de  $10^{-7}$ , necessitaram-se de 296 iterações por meio do método adaptativo de Bixler ao invés de 500.000 iterações por meio de um método numérico não adaptativo. Portanto, pode-se constatar a eficiência computacional do esquema adaptativo de Bixler o que motivou a utilização do mesmo neste trabalho.

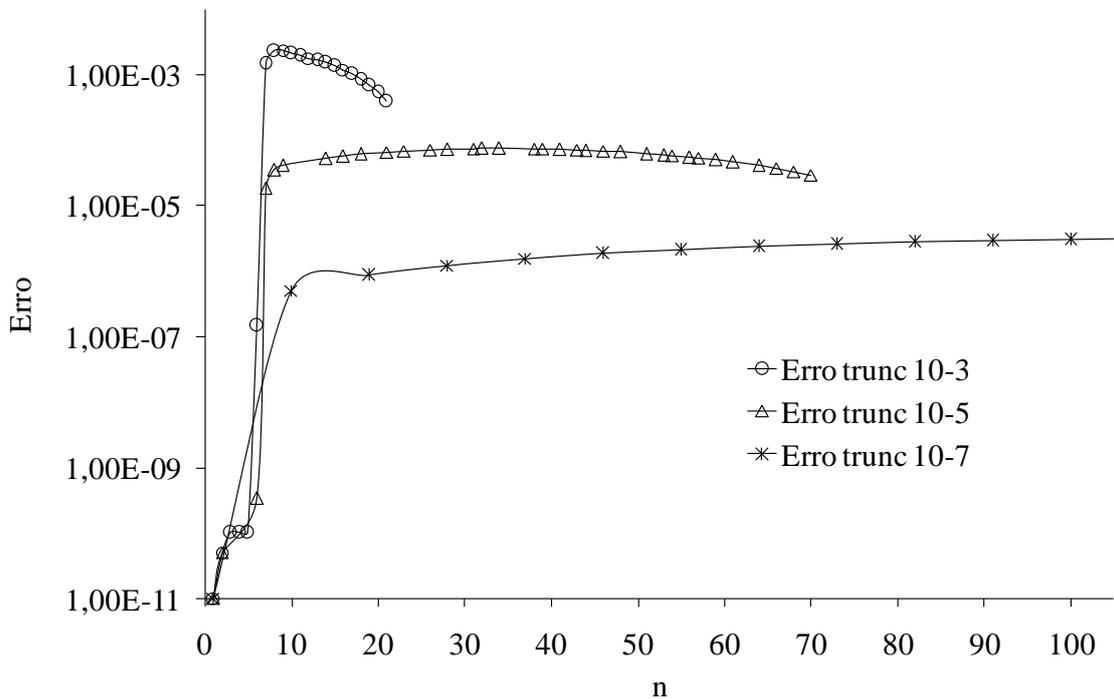


Figura 3.1. Erros da solução numérica da Equação  $\dot{y} = -y$  pelo método de Bixler, para  $\epsilon = 1 \times 10^{-3}$ ,  $1 \times 10^{-5}$  e  $1 \times 10^{-7}$ , tempo final de simulação = 5 e  $\Delta t$  (inicial) = 0,00001.

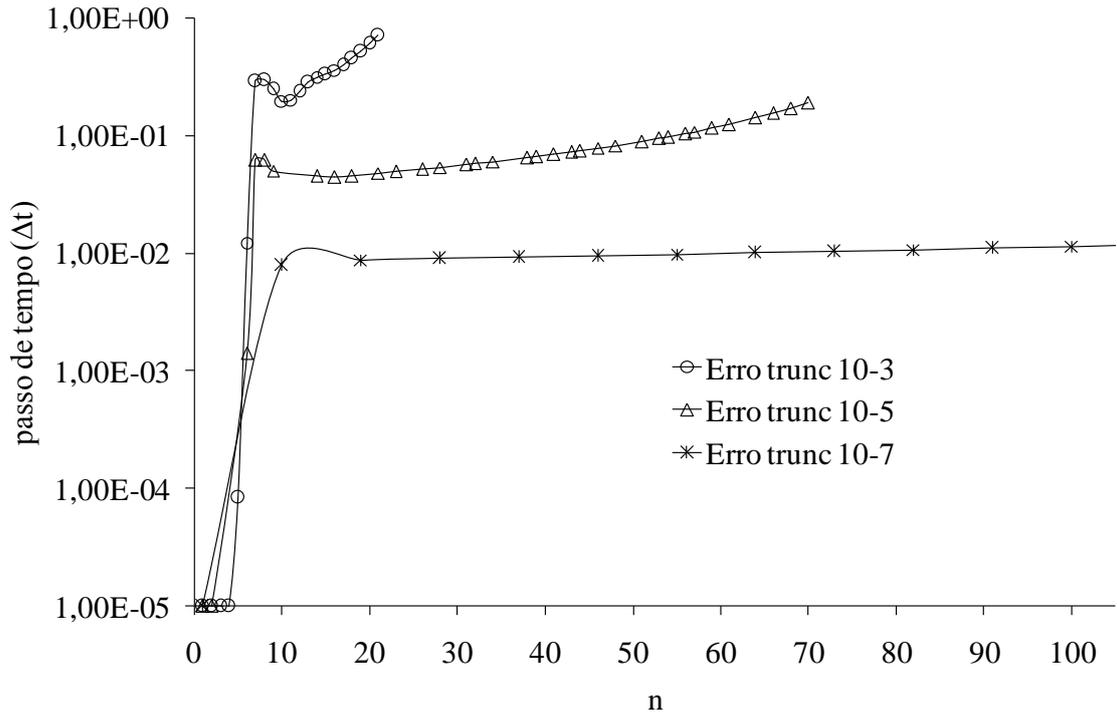


Figura 3.2. Tamanho do passo de tempo da solução numérica da Equação  $\dot{y} = -y$ , pelo método de Bixler, para  $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$ ,  $1 \times 10^{-5}$  e  $1 \times 10^{-7}$ , tempo final de simulação = 5 e  $\Delta t$  (inicial) = 0,00001.

### 3.2. O Método adaptativo no tempo para solução de equações diferenciais parciais (EDP)

O método adaptativo usado neste capítulo teve por base a metodologia de Bixler modificada por Fortes & Ferreira (1999) e a inclusão das funções de base radial, aplicadas à equação de Black-Scholes. O método consistiu nos seguintes passos:

1. Discretizar a equação de BS usando FBR, para obter, o sistema de equações abaixo, definido no capítulo anterior:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \mathbf{H}_+ \phi(\mathbf{S}_{ij}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \mathbf{H}_- \phi(\mathbf{S}_{ij}) \quad \text{para } i = 1 \dots N \quad (3.12)$$

2. Usar o método de Euler ( $\theta = 0$ ) para obter as duas primeiras soluções não adaptativas, por meio da equação anterior.

3. Obter os valores preditos usando as equações (3.2-3.4) e usando as soluções nos tempos anteriores.
4. Ao invés de usar a equação de Bixler ou de GLS (equação 3.5), resolver a equação (3.12), item 1, como corretora; Fortes & Ferreira (1999) mostraram que esta aproximação é totalmente adequada à solução de problemas convectivo-difusivos.
5. Usar as equações (3.6 e 3.7) para definir o novo passo de tempo, dentro do erro de truncamento estabelecido.
6. Iterar, a partir do item 3, até o tempo final de simulação desejado.

### 3.3. Resultados e Discussão

Para efeito de simulação e análise, utilizaram-se dados semelhantes aos disponíveis na literatura e plausíveis de solução analítica. Assim, os resultados obtidos tiveram por base os seguintes dados de entrada:

- Preço de exercício do ativo:  $E = 50$
- Volatilidade do ativo objeto:  $\sigma = 20\%$
- Taxa de juros neutro ao risco:  $r = 5\%$
- Prazo para vencimento:  $T = 1$
- Preço exato (analítico) da opção de compra = 5,225.

Neste trabalho, consideram-se somente barreiras Up-and-Out (UAO) e Down-and-Out (DAO), visto que as soluções associadas a elas permitem obter imediatamente soluções para as outras duas opções de barreira (ver WILMOTT, 1998, para detalhes). Para estas opções, com os dados de entrada citados, tem-se que:

- Preço da barreira Up-and-Out = 90; respectivo preço (prêmio) da opção (solução analítica) = 4,9869.
- Preço da barreira Down-and-Out = 40; respectivo preço da opção = 5,176.

Seja  $N$  o número total de malhas (grades) que cobre os valores do ativo, em intervalo aceitável; o tamanho da malha,  $\Delta S$ , é definido por  $\Delta S = S/N$ . O tamanho do passo de tempo inicial é  $\Delta t$ , o erro numérico de truncamento é  $\epsilon\epsilon$  e o método (implícito ou explícito) é definido pelo valor de  $\theta$ . O número total de iterações (passos de tempo) é importante, pois,

quando se utiliza o método adaptativo, ele define a eficiência computacional (rapidez) do método.

Nesta dissertação, o erro numérico relativo do valor da opção refere-se ao valor predito da opção no valor de preço de exercício ( $S = E = 50$ ) e é definido por:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \text{Erro numérico relativo do preço da opção (\%)} = \\ &= \frac{\text{Valor numérico da opção} - \text{Valor da solução analítica}}{\text{Valor da solução analítica}} \times 100\% \end{aligned} \quad (3.13)$$

Muitos problemas requerem que se especifique  $V(\infty, t)$ ; em termos computacionais há que se escolher um valor de  $S$  máximo para que o valor associado de  $V$  aproxime-se do valor correto de  $V(\infty, t)$ . Assim, quanto menor for o valor aceitável de  $S_{\max}$  menor será o número de pontos (ou malhas) a ser usado e maior a eficiência computacional.

Neste trabalho, a terminologia usada para se referir ao método baseado na FBR Cúbica adaptativa e ao método baseado na FBR TPS adaptativa foi FBR Cúbica adaptativa (FBR Cúbica Adap) e FBR TPS adaptativa (FBR TPS Adap), respectivamente.

No caso de opções de compra, a Figura 3.3 mostra que, no caso de soluções adaptativas, o emprego de funções de base radial Cúbica e TPS conduz a excelentes resultados quando se tomaram o  $\Delta t$  inicial igual a 0,001, erro de truncamento  $\varepsilon\varepsilon$  igual a  $1 \times 10^{-7}$ ,  $N = 112$  malhas,  $\Delta S = 0,714$ , com um valor superior de  $S$  igual a 80 e  $\theta$  igual a 0,5. No caso da FBR Cúbica, o erro relativo do preço da opção (em  $E = 50$ ) foi 0,0000164% com 120 passos de tempo, enquanto no caso da FBR TPS, o erro relativo foi 0,0183% com 150 passos de tempo.

A Figura 3.4 refere-se aos dados obtidos quando do emprego de opções de barreiras Up-and-Out (UAO). Observa-se que se podem obter soluções adaptativas acuradas pelo uso das funções de base radial Cúbica e TPS. A Figura 3.4 foi obtida com  $\Delta t$  inicial igual a 0,001,  $\varepsilon\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ ,  $N = 100$  malhas e  $\Delta S = 2,5$ , com o valor superior de  $S$  igual a 250 e  $\theta$  igual 1. No caso da FBR Cúbica adaptativa, o erro relativo do preço da opção (em  $E = 50$ ) foi 0,105% com 80 passos de tempo, enquanto no caso da FBR TPS adaptativa, o erro relativo foi 0,107% com 85 passos de tempo. Portanto, ambos os métodos, cúbico e TPS levaram a essencialmente os mesmos resultados. A influência da condição de contorno

dependente do tempo altamente não-linear pode ser notada pelo aumento dos erros relativos, quando comparados aos erros associados à condição de contorno moderadamente não-linear das opções de compra (Figura 3.3).

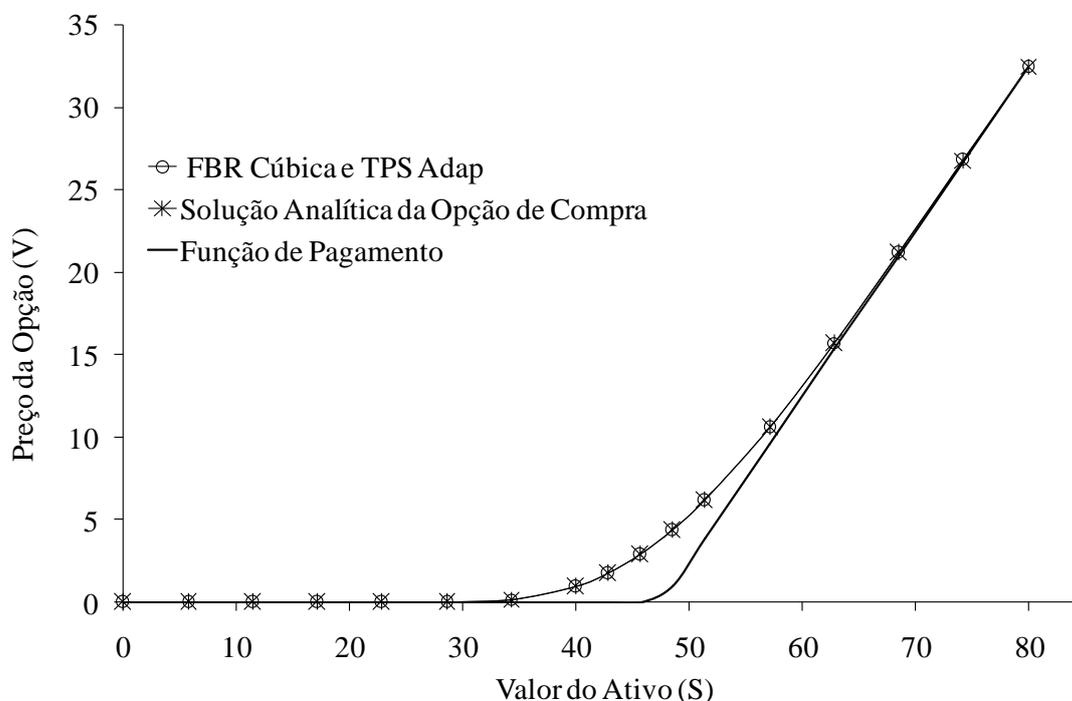


Figura 3.3. Valores simulados da FBR Cúbica e TPS adaptativa de uma opção de compra comparados aos valores da solução analítica e da função de pagamento;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ .

A Figura 3.5 também mostra que se podem obter resultados acurados pelo emprego de funções de base radial Cúbica e TPS adaptativa, quando aplicadas para resolver opções de barreira Down-and-Out (DAO). A Figura 3.5 foi obtida ao se tomarem o  $\Delta t$  inicial igual a 0,01,  $\epsilon\epsilon = 1 \times 10^{-5}$ ,  $N = 112$  malhas e  $\Delta S = 0,893$ , com o valor superior de  $S$  igual a 100 e  $\theta$  igual 1. No caso da FBR Cúbica adaptativa, o erro relativo do preço da opção (em  $E = 50$ ) foi 0,0301% com 25 passos de tempo, enquanto no caso da FBR TPS adaptativa, o erro relativo foi 0,179% com 40 passos de tempo.

Pode-se, portanto, afirmar que, em um nível de erro relativo inferior a 0,20%, ou 0,0020 (decimal), que o método FBR adaptativo é muito acurado. Deve-se notar que os métodos adaptativos estudados foram mais eficientes que a solução não adaptativa por requererem números de iterações substancialmente inferiores aos da solução não adaptativa.

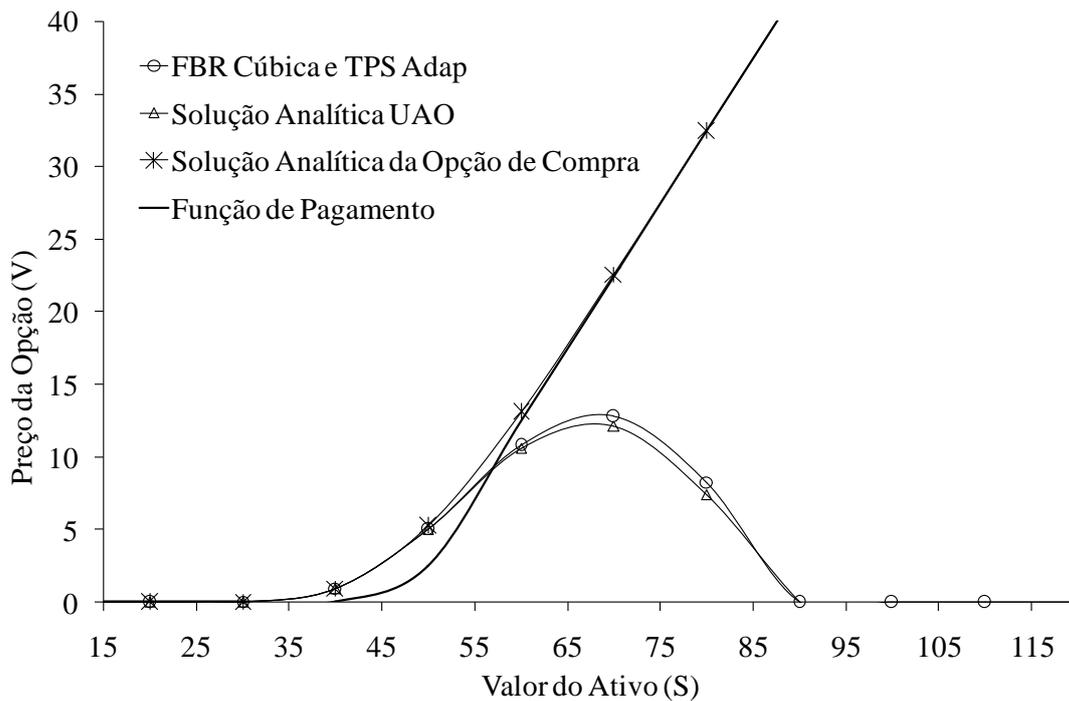


Figura 3.4. Valores simulados da FBR Cúbica e TPS adaptativa de uma opção de barreira Up-and-Out, com barreira em  $S = 90$ , comparados aos valores da solução analítica e da função de pagamento;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ .

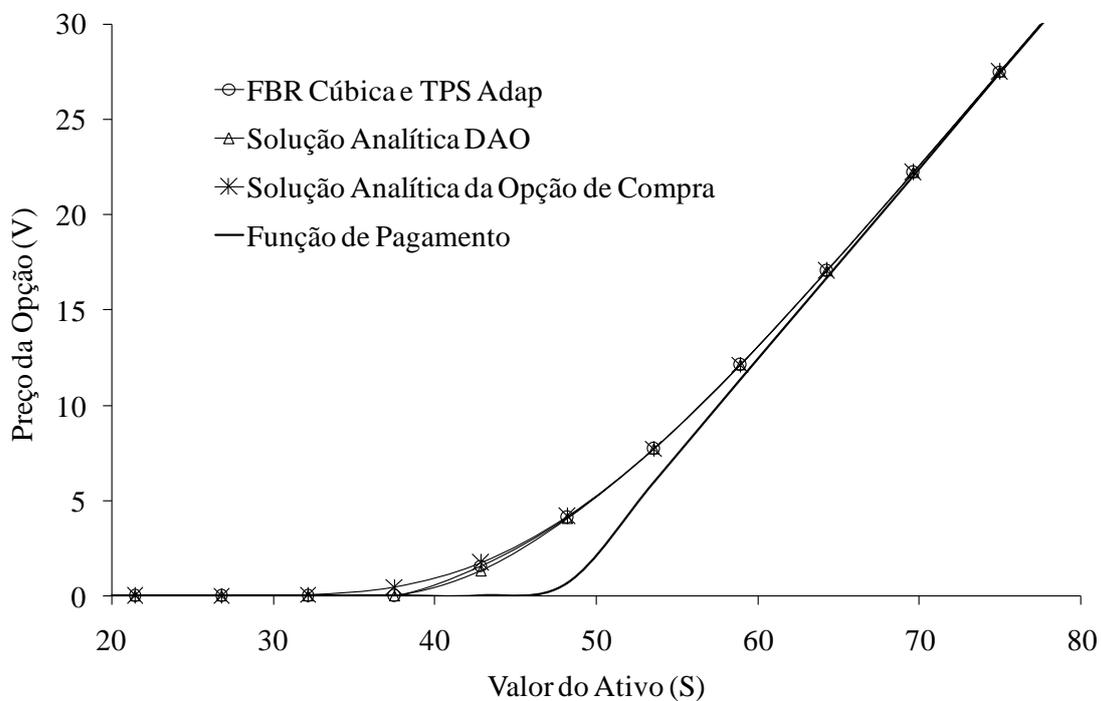


Figura 3.5. Valores simulados da FBR Cúbica e TPS adaptativa de uma opção de barreira Down-and-Out, com barreira em  $S = 40$ , comparados aos valores da solução analítica e da função de pagamento;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ .

### 3.3.1. Análise de erro dos resultados de simulação dos métodos FBR adaptativos aplicados a opções de compra

A Figura 3.6 mostra o efeito do esquema de integração sobre o erro de predição do método adaptativo. Como se pode observar, as FBRs Cúbica e TPS adaptativas não estão sujeitas a divergência, mesmo para condição de solução explícita ( $\theta = 0$ ), apesar do grande número de iterações de 882 e 749 para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa, respectivamente. Este grande número de iterações pode ser justificado pela tentativa de ajuste do passo de tempo à acurácia pretendida ( $1 \times 10^{-7}$ ). A melhor solução para FBR Cúbica adaptativa é obtida com  $\theta = 0,5$  (método de Crank-Nicholson). Já para a FBR TPS adaptativa a melhor solução é obtida quando  $\theta = 0,25$ . Os erros relativos na Figura 3.6 foram obtidos sujeitando as FBRs Cúbica e TPS adaptativas aos mesmos parâmetros de simulação. Não se tentou otimizar o nível de erro; entretanto, os resultados mostram que há um valor de  $\theta$  para cada FBR adaptativa para o qual o erro relativo é mínimo.

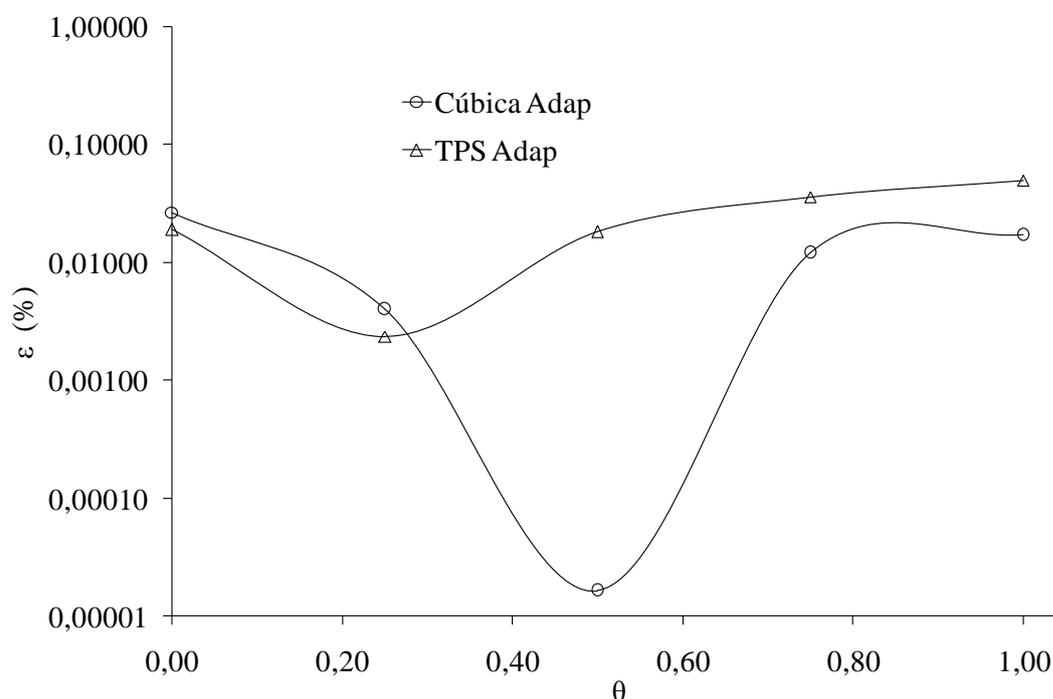


Figura 3.6. Erro relativo de valores preditos de opção de compra FBR em função do valor- $\theta$  de integração;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $\Delta t$  inicial = 0,001,  $N = 112$ ,  $S_{max} = 80$ ,  $\varepsilon\varepsilon = 1 \times 10^{-7}$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

O efeito do máximo valor simulado do ativo ( $S_{\max}$ ) pode ser visualizado na Figura 3.7. Como se pode observar, o método que emprega FBR Cúbica adaptativa, em geral, apresenta níveis de erro levemente inferiores à FBR TPS adaptativa. Para ambas FBRs adaptativas, abaixo de  $S_{\max} = 80$  a solução não é muito acurada, pois o valor do ativo subjacente ( $S$ ) está próximo do valor de exercício do ativo,  $E = 50$ ; este fato justifica também o grande número de iterações (884) da FBR Cúbica adaptativa. Tanto para a FBR Cúbica adaptativa quanto para a FBR TPS adaptativa, os níveis de erro são estáveis à medida que  $S_{\max}$  fica maior que 100. Então, os resultados sugerem utilizar uma malha tal que  $S_{\max} \geq 2E$ .

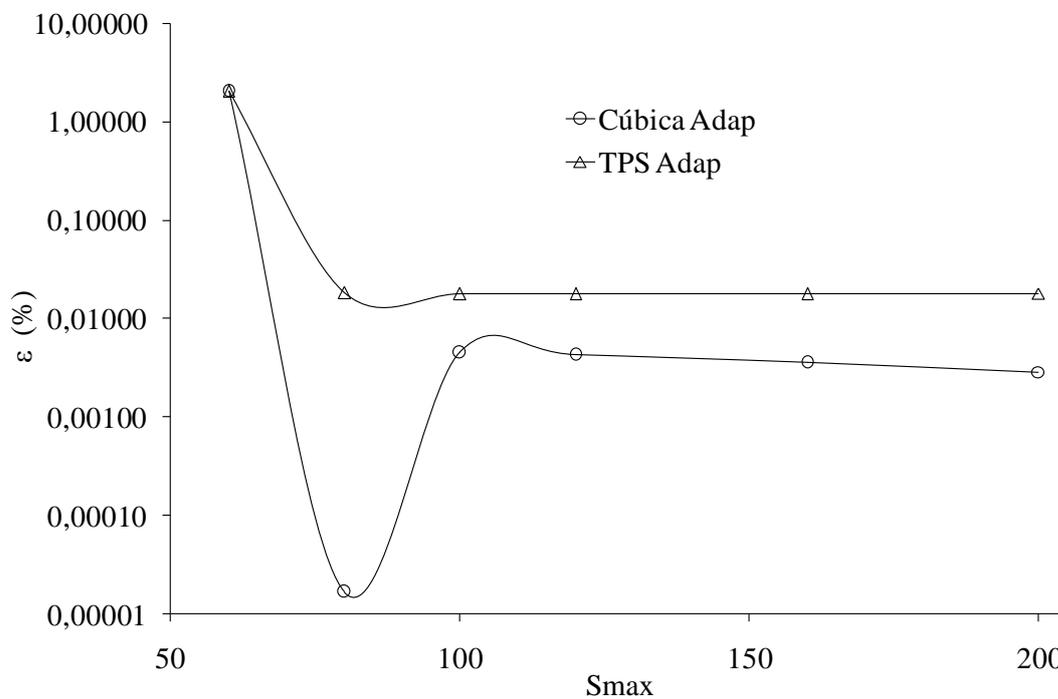


Figura 3.7. Erro relativo dos valores preditos de opção de compra FBR em função do máximo valor simulado do ativo;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $\Delta t$  inicial = 0,001,  $\Delta S = 0,714$ ,  $\theta = 0,5$ ,  $\epsilon\epsilon = 1 \times 10^{-7}$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

A Figura 3.8 mostra que o passo de tempo inicial ( $\Delta t$ ) é fundamental para a FBR Cúbica adaptativa. Pequenos valores de  $\Delta t$  levam a resultados muito precisos. O grande número de iterações de 646 e 678 para um  $\Delta t = 0,1$  e  $\Delta t = 0,05$ , respectivamente, é justificado pela tentativa de ajuste do passo de tempo à acurácia pretendida ( $1 \times 10^{-7}$ ). A partir de um  $\Delta t$  inferior a 0,01, os resultados são coerentes e precisos. Já os níveis de erro, para FBR TPS adaptativa, são estáveis e, portanto, independentes do passo de tempo inicial. A respeito

desta figura, pode-se concluir que a FBR Cúbica adaptativa leva a resultados melhores que a FBR TPS adaptativa.

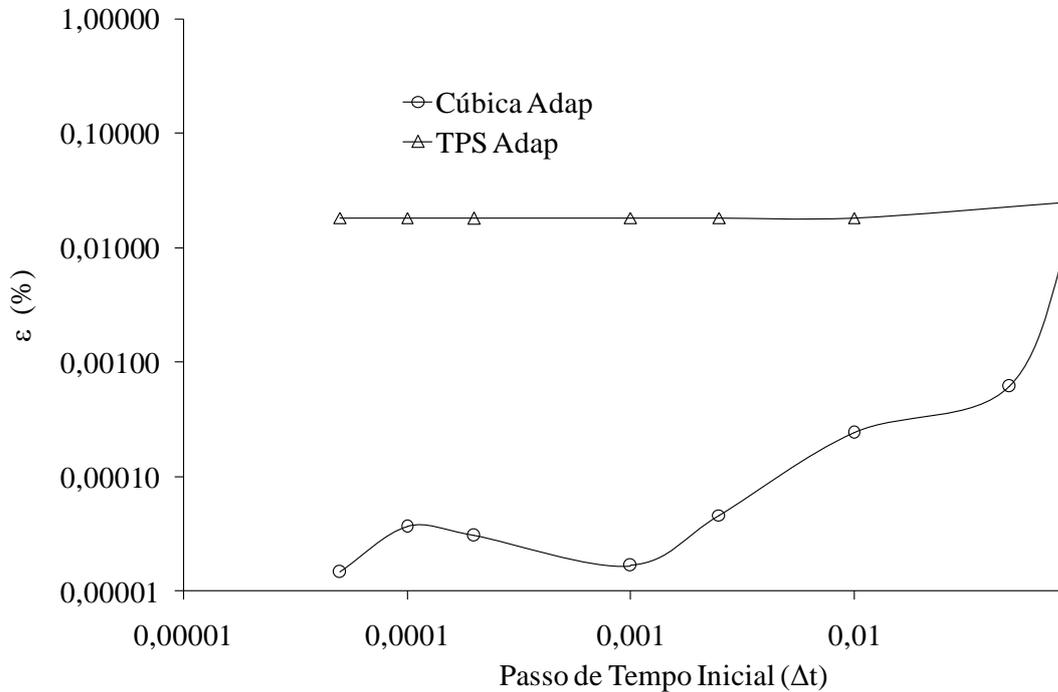


Figura 3.8. Erro relativo de valores preditos de opção de compra FBR em função do passo de tempo inicial;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N = 112$ ,  $S_{max} = 80$ ,  $\theta = 0,5$ ,  $\varepsilon\varepsilon = 1 \times 10^{-7}$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

A Figura 3.9 mostra o efeito do tamanho da malha,  $\Delta S$  sobre a capacidade preditiva do modelo adaptativo. Melhorias em  $\Delta S$  poderiam ser obtidas reduzindo-se o  $\Delta t$  inicial. Esse fato somado à tentativa de ajuste do passo de tempo e à acurácia pretendida ( $1 \times 10^{-7}$ ) justifica o alto número de iterações necessárias pela FBR Cúbica adaptativa (397) e FBR TPS adaptativa (847) para um  $\Delta S$  pequeno igual a 0,2. Em geral, deve-se reduzir o  $\Delta t$  inicial ao se reduzir o tamanho da malha ( $\Delta S$ ). Quanto à FBR Cúbica adaptativa, a flutuação que ocorre no gráfico de  $\Delta S$  é devida à condição específica de  $\Delta S = 0,714$ ,  $\Delta t$  inicial = 0,001 e erro de truncamento =  $1 \times 10^{-7}$  em que o erro é ótimo (erro = 0,0000164%). Para  $\Delta S \geq 1$ , conforme se aumenta o tamanho da malha o erro relativo também aumenta para as FBRs Cúbica e TPS adaptativas. A FBR Cúbica adaptativa leva a resultados levemente melhores que a FBR TPS adaptativa.

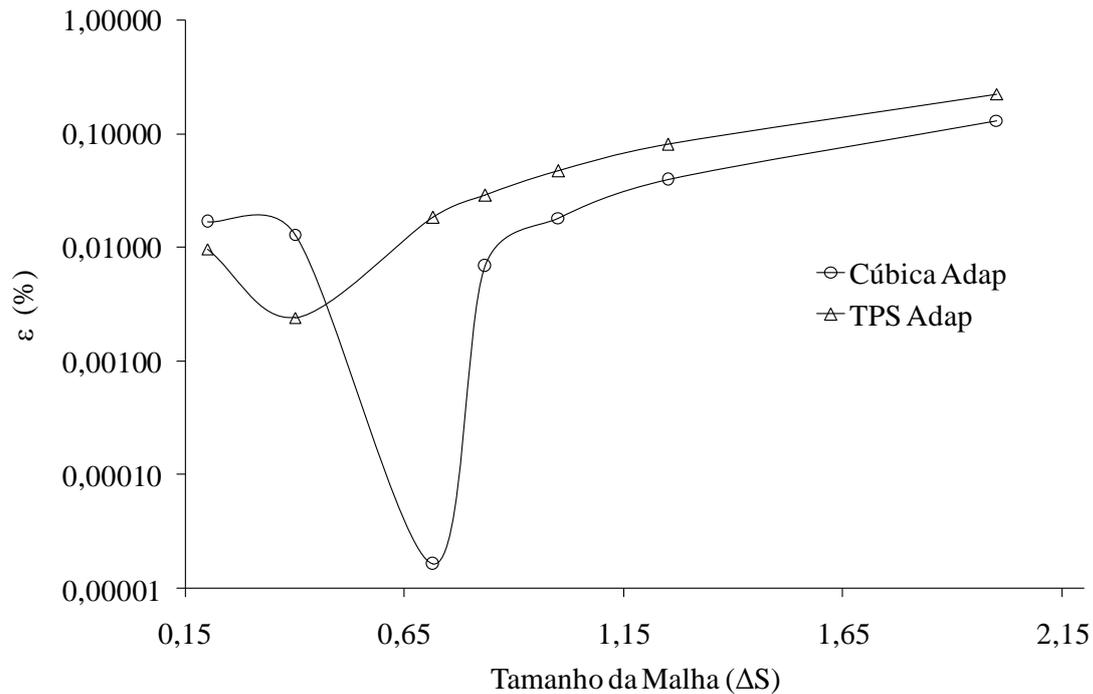


Figura 3.9. Erro relativo de valores preditos de opção de compra FBR em função do tamanho da malha;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $\Delta t$  inicial = 0,001,  $S_{max} = 80$ ,  $\theta = 0,5$ ,  $\varepsilon\varepsilon = 1 \times 10^{-7}$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

A influência do erro de truncamento sobre o desempenho dos métodos adaptativos é mostrada na Figura 3.10. Observa-se que o erro de truncamento não é um fator crítico para a FBR TPS adaptativa, já que seu erro relativo é estável conforme se varia  $\varepsilon\varepsilon$ . No que diz respeito à FBR Cúbica adaptativa, o erro de truncamento é um fator importante a ser avaliado. À medida que se diminui o erro de truncamento até  $1 \times 10^{-7}$ , melhora-se a exatidão. De acordo com os valores simulados, obteve-se um erro mínimo para  $\varepsilon\varepsilon = 1 \times 10^{-7}$ . Para uma precisão muito grande,  $\varepsilon\varepsilon = 1 \times 10^{-8}$ , o número de iterações também foi grande para a FBR Cúbica adaptativa (1577) e para a FBR TPS adaptativa (369).

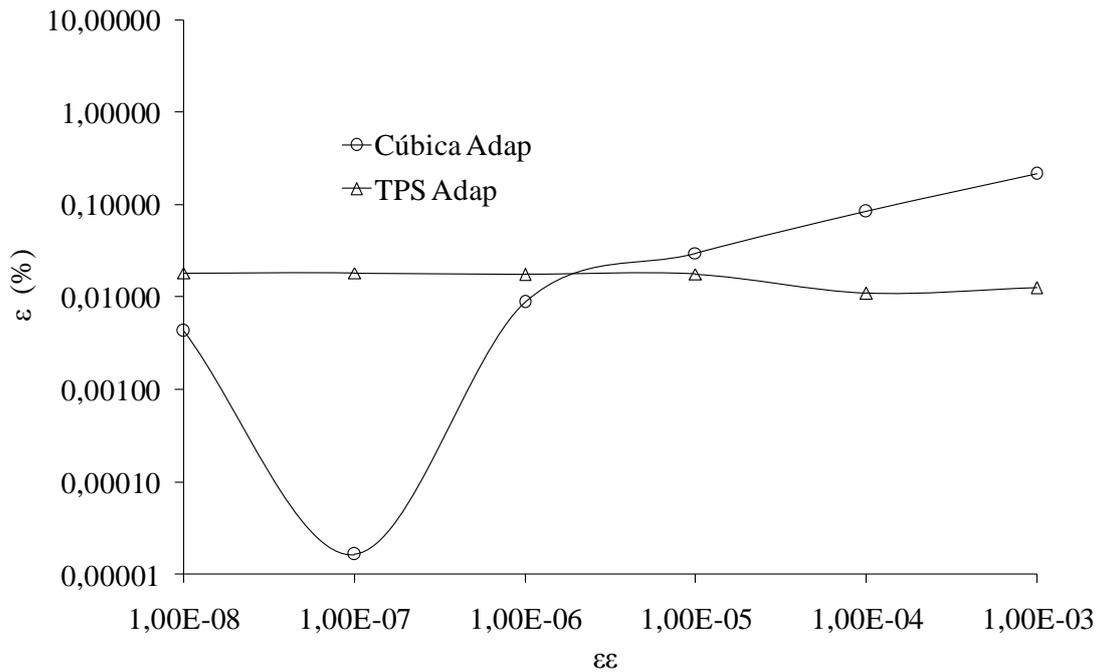


Figura 3.10. Erro relativo de valores preditos de opção de compra FBR em função do erro de truncamento ( $\epsilon\epsilon$ );  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $\Delta t$  inicial = 0,001,  $N = 112$ ,  $S_{\max} = 80$ ,  $\theta = 0,5$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

### 3.3.2. Análise de erro dos resultados de simulação dos métodos FBR adaptativos aplicados a barreiras Up-and-Out, UAO

A Figura 3.11 mostra o efeito do esquema de integração,  $\theta$ . Como se pode observar, conforme o valor de  $\theta$  aumenta, ou seja, a solução torna-se implícita, o erro relativo diminui para ambas as funções de base radial adaptativas, Cúbica e TPS. Ambas as funções também não divergem mesmo quando  $\theta$  é igual 0. Não se tentou otimizar o nível de erro. Os erros relativos na Figura 3.11 foram obtidos sujeitando a FBR Cúbica adaptativa e a FBR TPS adaptativa aos mesmos parâmetros de simulação.

O efeito do máximo valor simulado do ativo ( $S_{\max}$ ) pode ser visto na Figura 3.12. Observa-se que, em geral, a FBR TPS adaptativa apresenta melhores resultados que a FBR Cúbica adaptativa. A FBR Cúbica adaptativa torna-se estável conforme  $S_{\max}$  fica maior que 100. Assim, sugere-se usar uma malha tal que  $S_{\max} \geq 2E$ . A FBR TPS adaptativa apresenta uma maior variação tendo seus melhores resultados quando  $100 \leq S_{\max} \leq 150$ . Tanto para FBR Cúbica adaptativa quanto para FBR TPS adaptativa o maior número de iterações foi em

torno de 115 iterações, para  $S_{\max} = 100$  e  $S_{\max} = 150$ . Para  $S_{\max}$  abaixo de 80, a solução não é muito acurada para ambas as funções de base radial, pois este valor está próximo do valor de exercício ( $E = 50$ ).

A Figura 3.13 mostra que o passo de tempo inicial, em termos práticos, deve ser igual a ou menor que 0,005, quando se usam FBRs adaptativas. Novamente, em geral, a FBR TPS adaptativa possui melhores erros relativos que a FBR Cúbica adaptativa. Ambas as funções adaptativas tornam-se estáveis abaixo de  $\Delta t$  inicial = 0,001.

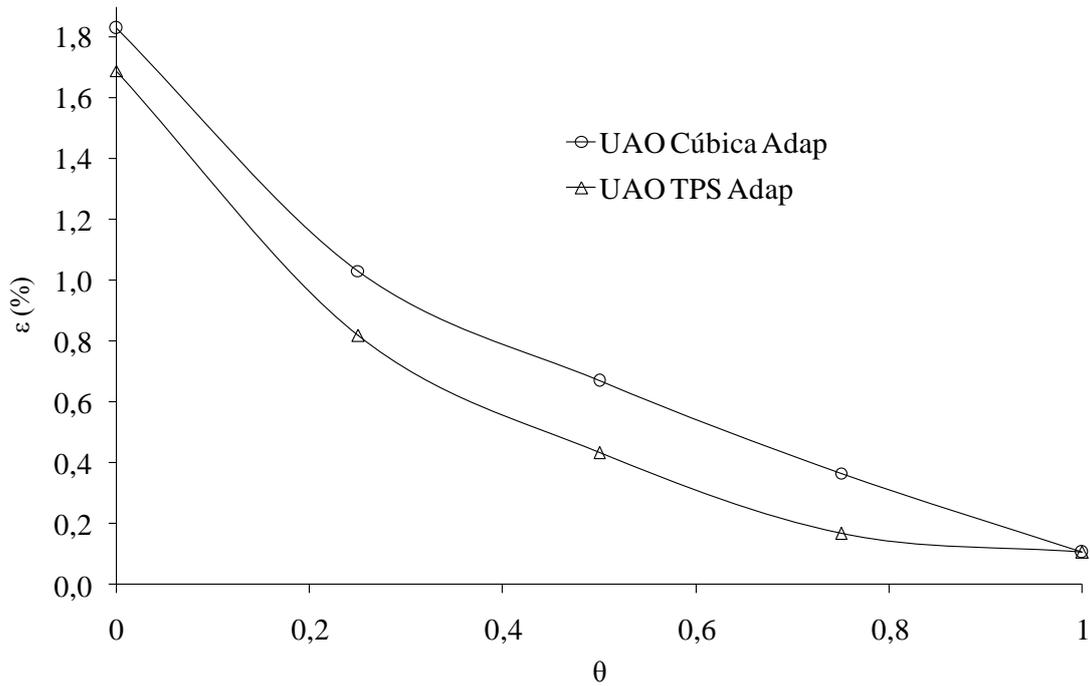


Figura 3.11. Erro relativo de preços preditos de opção de barreira Up-and-Out FBR em função do valor-  $\theta$  de integração;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $\Delta t$  inicial = 0,001,  $N = 100$ ,  $S_{\max} = 250$ ,  $\epsilon\epsilon = 1 \times 10^{-4}$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

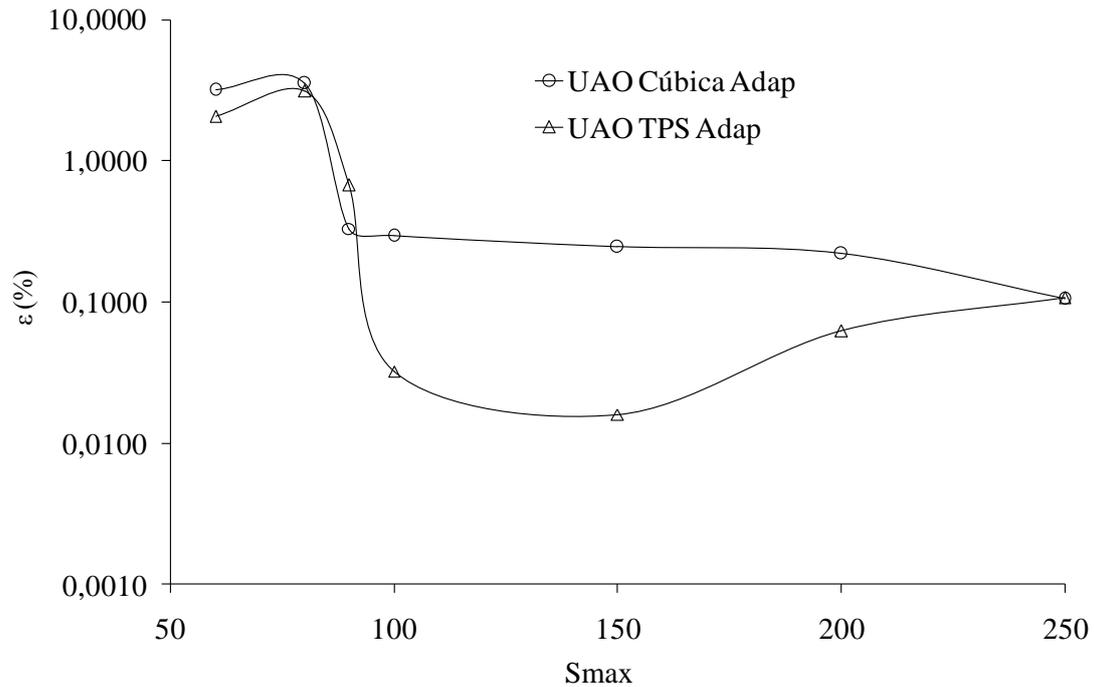


Figura 3.12. Erro relativo de preços preditos de opção de barreira Up-and-Out FBR em função do máximo valor simulado do ativo;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $\Delta t$  inicial = 0,001,  $\Delta S = 2,5$ ,  $\theta = 1$ ,  $\varepsilon\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

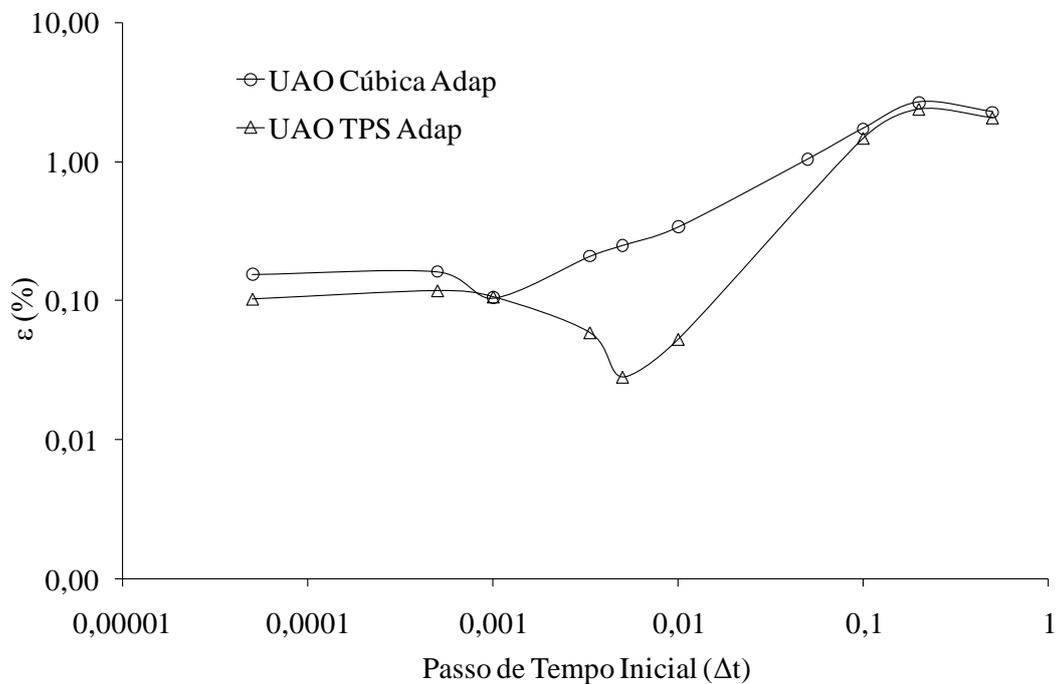


Figura 3.13. Erro relativo de preços preditos de opção de barreira Up-and-Out FBR em função do passo de tempo inicial;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N = 100$ ,  $S_{max} = 250$ ,  $\theta = 1$ ,  $\varepsilon\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

A Figura 3.14 mostra que a FBR Cúbica adaptativa e a FBR TPS adaptativa, não são muito sensíveis ao tamanho da malha e levam, aproximadamente, aos mesmos resultados. Melhorias em  $\Delta S$  poderiam ser obtidas reduzindo-se o  $\Delta t$  inicial.

A influência do erro de truncamento é mostrada na Figura 3.15. À medida que se aumenta o erro de truncamento até  $1 \times 10^{-4}$ , melhora-se a exatidão para ambas as FBRs adaptativas. Conforme se diminui o erro de truncamento aumenta-se o número de iterações, também para ambas as funções. Para erros de truncamento numéricos muito pequenos,  $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$  e  $\epsilon = 1 \times 10^{-7}$ , o número de iterações também foi grande para a FBR Cúbica adaptativa (1427 e 2998, respectivamente) e para a FBR TPS adaptativa (1587 e 2998, respectivamente), fato que levou a erros relativos muito altos.

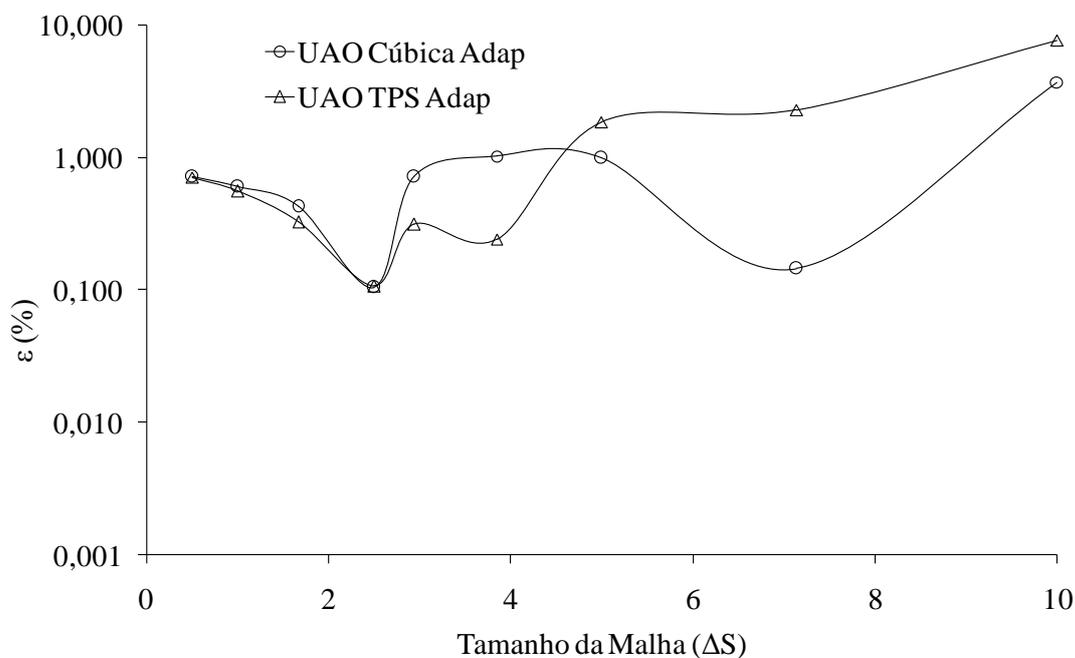


Figura 3.14. Erro relativo de preços preditos de opção de barreira Up-and-Out FBR em função do tamanho da malha;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $\Delta t$  inicial = 0,001,  $S_{max} = 250$ ,  $\theta = 1$ ,  $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

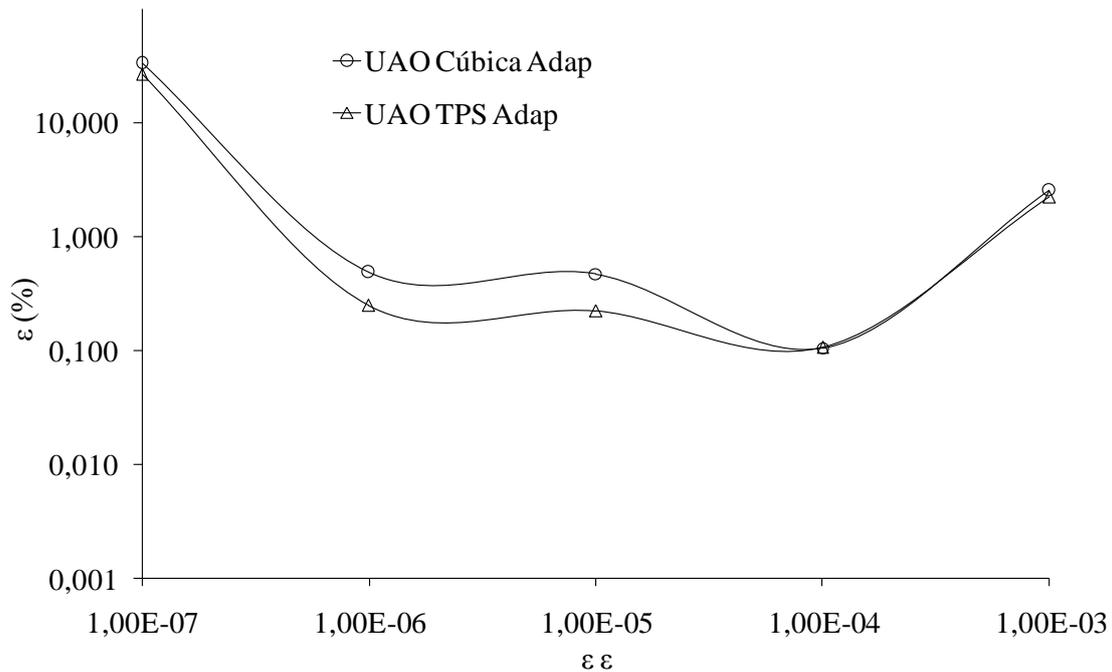


Figura 3.15. Erro relativo de preços preditos de opção de barreira Up-and-Out FBR em função do erro de truncamento;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $\Delta t$  inicial = 0,001,  $N = 112$ ,  $S_{max} = 250$ ,  $\theta = 1$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

### 3.3.3. Análise de erro dos resultados de simulação dos métodos FBR adaptativos aplicados a barreiras Down-and-Out, DAO

O efeito do esquema de integração sobre a exatidão dos métodos FBR adaptativos temporais é mostrado na Figura 3.16. Como se pode observar, da mesma maneira que no caso dos problemas de barreiras UAO, ambas as funções não estão sujeitas à divergência mesmo quando  $\theta$  é igual 0 (condição de solução explícita). Entretanto, para esta condição, o número de iterações é muito maior para FBR Cúbica adaptativa (696) e para a FBR TPS adaptativa (688). Não se tentou otimizar o nível de erro, apesar de o erro relativo ser menor para as duas funções adaptativas quando  $\theta = 1$ . Os erros relativos na Figura 3.16 foram obtidos sujeitando a FBR Cúbica adaptativa e a FBR TPS adaptativa aos mesmos parâmetros de simulação. Os erros relativos associados à barreira DAO (Figura 3.16) são ligeiramente menores que os associados à UAO (Figura 3.11).

A Figura 3.17 mostra o efeito de variação do máximo valor simulado do ativo sobre a exatidão dos dados numéricos resultantes. As FBRs Cúbica e TPS adaptativas apresentam

erros relativos aproximados e não dependem muito do máximo valor simulado do ativo. Para  $S_{\max}$  próximo de 60, o número de iterações é maior para ambas as funções de base radial, pois este valor está próximo do valor de exercício ( $E = 50$ ).

No caso de barreiras DAO, a Figura 3.18 mostra que o passo de tempo inicial, em termos práticos, deve ser igual ou menor que 0,1, quando se usa FBR adaptativa no tempo. O número de iterações não variou muito, conforme a variação do passo de tempo inicial para ambas as FBRs adaptativas: o número de iterações da FBR Cúbica adaptativa variou entre 17 e 31 e o número de iterações da FBR TPS adaptativa variou entre 35 e 40.

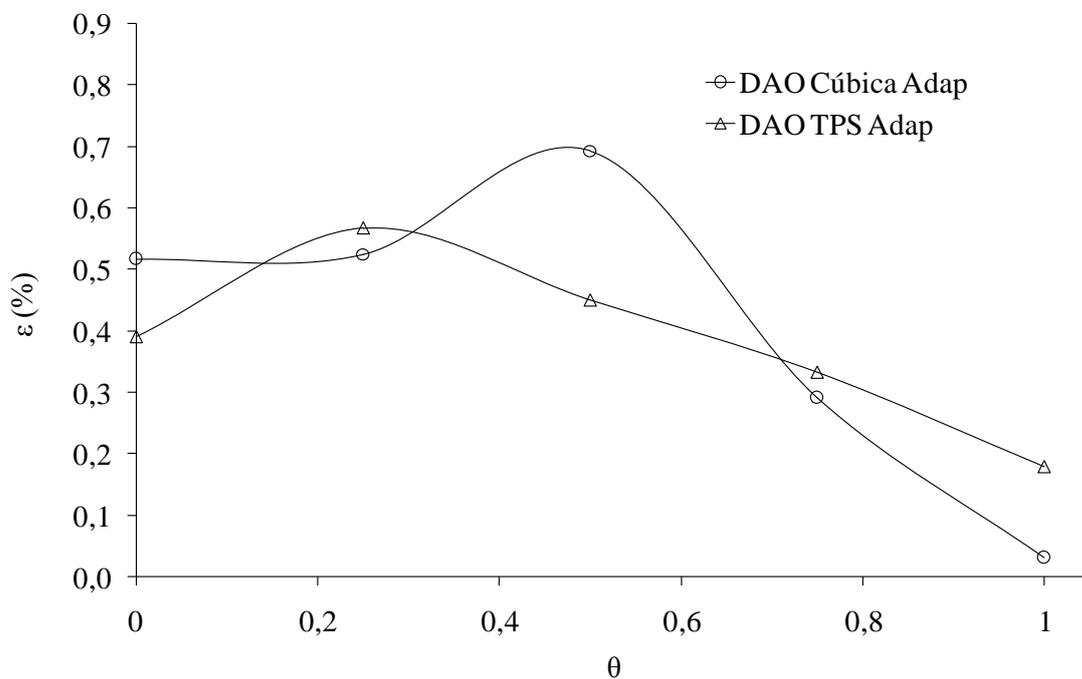


Figura 3.16. Erro relativo de preços preditos de opção de barreira Down-and-Out FBR em função do valor -  $\theta$  de integração;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $\Delta t$  inicial = 0,01,  $N = 112$ ,  $S_{\max} = 100$ ,  $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

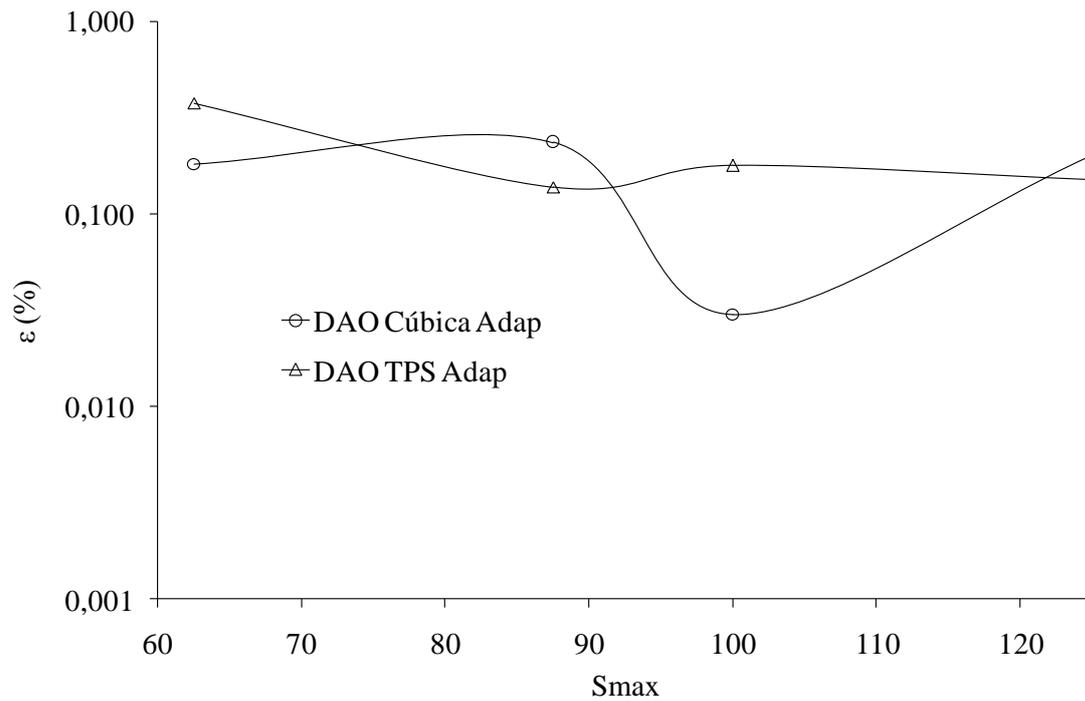


Figura 3.17. Erro relativo de preços preditos de opção de barreira Down-and-Out FBR em função do máximo valor simulado do ativo;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $\Delta t$  inicial = 0,01,  $\Delta S = 0,893$ ,  $\theta = 1$ ,  $\epsilon\epsilon = 1 \times 10^{-5}$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

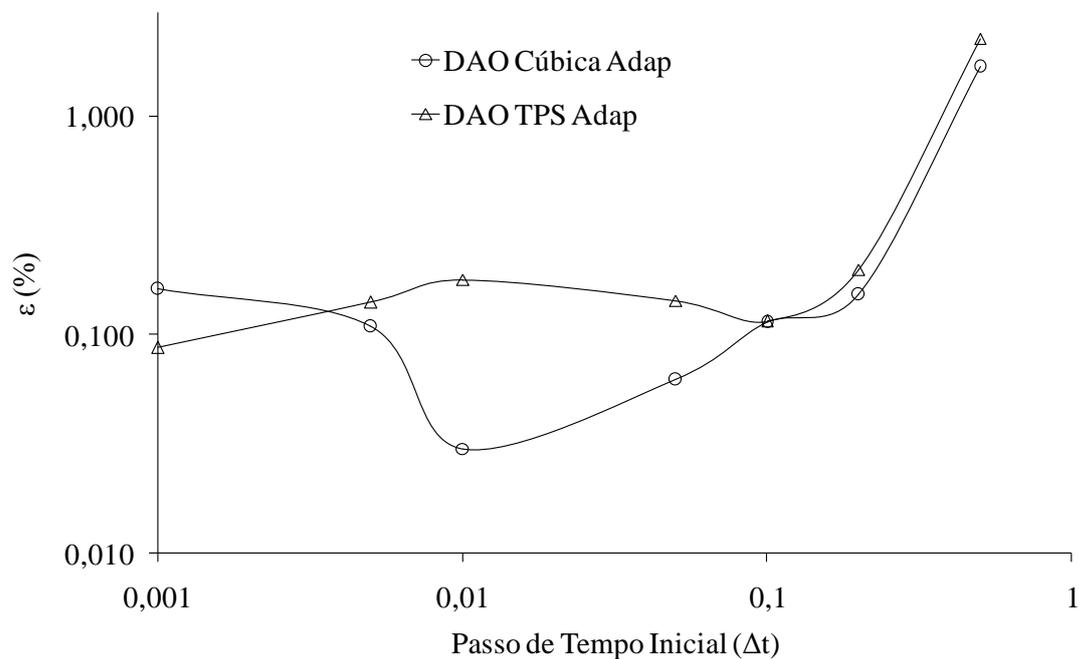


Figura 3.18. Erro relativo de preços preditos de opção de barreira Down-and-Out FBR em função do passo de tempo inicial;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N = 112$ ,  $S_{max} = 100$ ,  $\theta = 1$ ,  $\epsilon\epsilon = 1 \times 10^{-5}$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

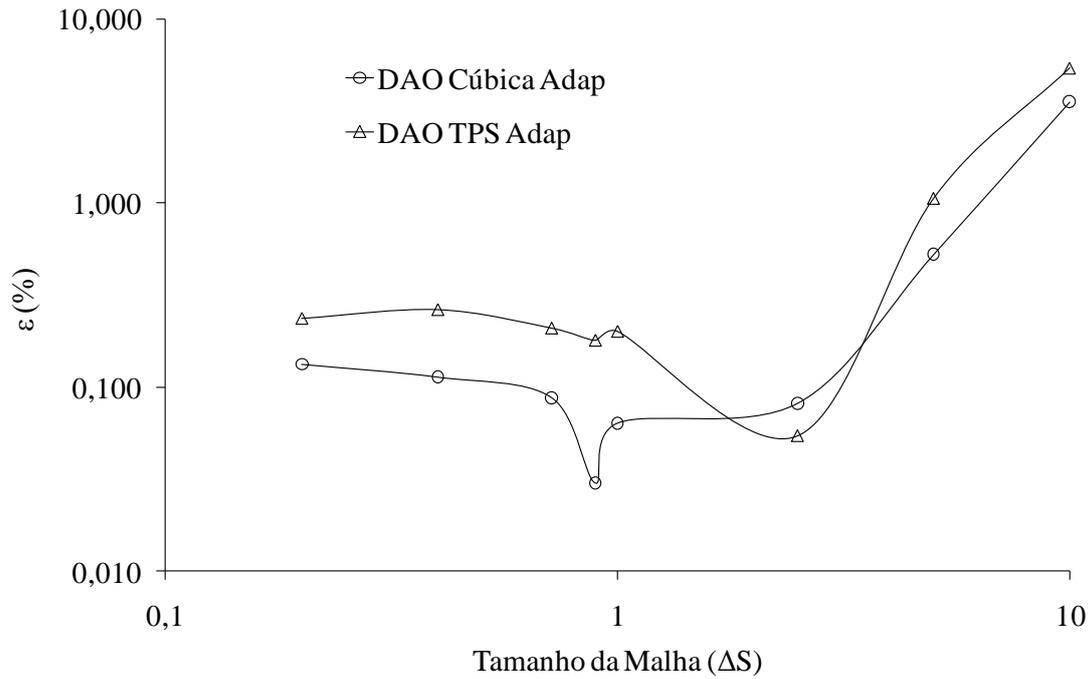


Figura 3.19. Erro relativo de preços preditos de opção de barreira Down-and-Out FBR em função do tamanho da malha;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $\Delta t$  inicial = 0,01,  $S_{max} = 100$ ,  $\theta = 1$ ,  $\varepsilon\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

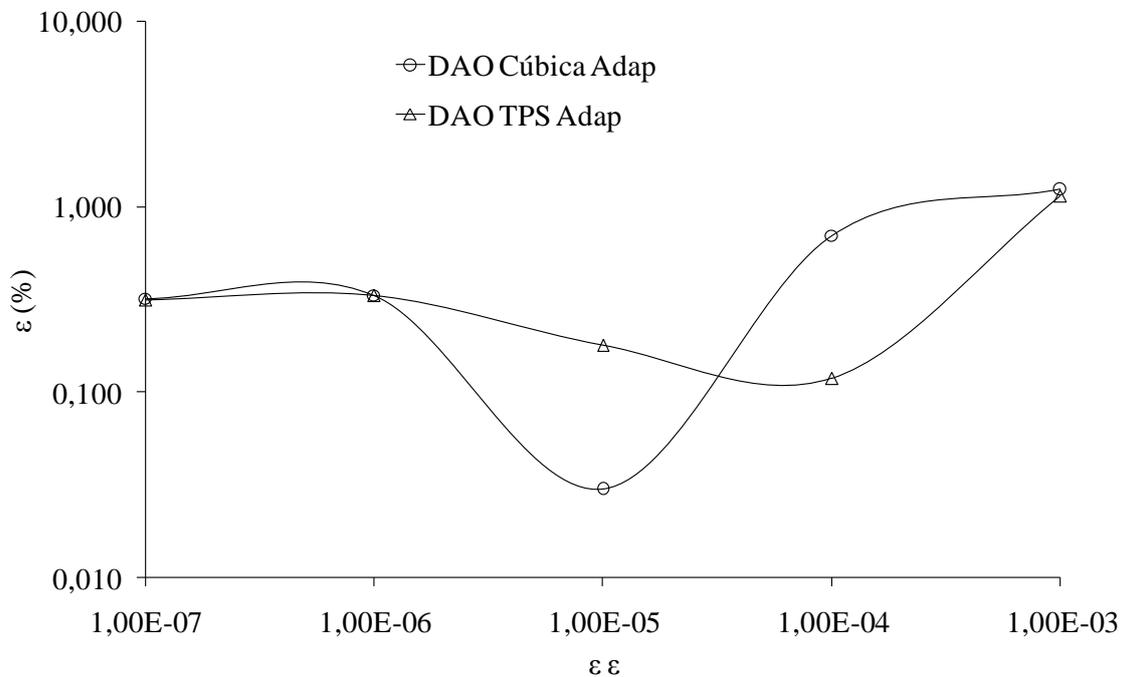


Figura 3.20. Erro relativo de preços preditos de opção de barreira Down-and-Out FBR em função do erro de truncamento;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $\Delta t$  inicial = 0,01,  $N = 112$ ,  $S_{max} = 100$ ,  $\theta = 1$  para FBR Cúbica adaptativa e FBR TPS adaptativa.

A Figura 3.19 mostra a influência do tamanho da malha. Em geral, para se obterem menores erros relativos, as diminuições de  $\Delta S$  deveriam se associar a diminuições dos valores de  $\Delta t$ . Para  $\Delta S \geq 2,5$ , conforme se aumenta o tamanho da malha, o erro relativo também aumenta para as FBRs Cúbica e TPS adaptativas. E, abaixo de  $\Delta S = 0,714$ , ambas as funções adaptativas tornam-se estáveis. Observa-se que, em geral, a FBR Cúbica adaptativa apresenta melhores resultados que a FBR TPS adaptativa. O maior número de iterações ocorre, para as duas funções, quando o tamanho da malha é muito pequeno ( $\Delta S = 0,2$ ).

O efeito do erro de truncamento pode ser visto na figura 3.20. À medida que se diminuiu o erro de truncamento até  $1 \times 10^{-5}$ , melhora-se a exatidão para a FBR Cúbica adaptativa. No caso da FBR TPS adaptativa, a melhora de exatidão é pequena. Para um erro de truncamento maior que  $1 \times 10^{-4}$ , a exatidão piora para ambas as funções. Conforme se diminui o erro de truncamento aumenta-se o número de iterações, também para ambas as funções. Para uma precisão muito grande,  $\varepsilon\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$  e  $\varepsilon\varepsilon = 1 \times 10^{-7}$ , o número de iterações também é grande para a FBR Cúbica adaptativa (180 e 815, respectivamente) e para a FBR TPS adaptativa (144 e 664, respectivamente). Entretanto, os números requeridos de iterações são menores para barreiras DAO que para barreiras UAO, para um mesmo erro relativo numérico.

#### **3.3.4. Análise da eficiência do método adaptativo para solução de Black-Scholes**

As tabelas abaixo mostram o número total de iterações (passos de tempo) necessário para atingir o tempo final de simulação ( $T=1$ ) pelos métodos adaptativos e pelos métodos não adaptativos, utilizados no capítulo 2, para solução de opções de compra e barreiras. Adicionalmente, mostram-se os erros relativos obtidos por meio destes métodos.

Observa-se na Tabela 3.1 que o método baseado na FBR Cúbica adaptativa apresenta erros relativos menores que os erros apresentados pelo método não adaptativo para solução de opção de compra, quando o erro de truncamento requerido foi da ordem de  $10^{-7}$ . Deve-se observar também que, mesmo com a grande precisão desejada, o número de iterações do método adaptativo foi, em geral, menor que o número de iterações necessário para o

método não adaptativo. Em contrapartida, quando se reduz a precisão desejada para ordem de  $10^{-5}$  e  $10^{-3}$ , há um aumento nos respectivos erros relativos apresentados pelo método adaptativo. Entretanto, o número de iterações necessário para atingir o tempo final de simulação pelo método adaptativo reduz significativamente de acordo com a redução do erro de truncamento previamente definido, ficando bem inferior ao número de iterações necessário pelo método não adaptativo.

Na Tabela 3.2 nota-se que o método baseado na FBR TPS adaptativa apresenta, em geral, número de iterações menor que o apresentado pelo método não adaptativo para solução de opção de compra, mesmo quando o erro de truncamento requerido foi da ordem de  $10^{-7}$ . Quando se reduz a precisão desejada para as ordens de  $10^{-5}$  e  $10^{-3}$ , respectivamente, a diferença entre o número de iterações necessário para atingir o tempo final de simulação desses dois métodos fica ainda mais evidente. A respeito dos erros relativos, o método adaptativo com erro de truncamento requerido da ordem de  $10^{-7}$  e  $10^{-5}$  apresenta erros similares aos do método não adaptativo. Mas, quando a precisão desejada é da ordem de  $10^{-3}$ , o método adaptativo apresenta melhores erros relativos que o método não adaptativo.

Tabela 3.1. Número de iterações e erros relativos de preços preditos de opção de compra FBR em função do passo de tempo inicial ( $\Delta t$ ) e do erro de truncamento;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N = 112$ ,  $S_{max} = 80$ ,  $\theta = 0,5$  para a FBR Cúbica adaptativa e não adaptativa.

$\Delta t$ inicial	Erro de truncamento definido para o Método Adaptativo	Número de Iterações		Erro (%)	
		Método Não Adaptativo	Método Adaptativo	Método Não Adaptativo	Método Adaptativo
0,01	1,00E-07	100	110	0,000390	0,000241
	1,00E-05		29		0,02997
	1,00E-03		12		0,0784
0,001	1,00E-07	1000	120	0,00606	0,0000164
	1,00E-05		33		0,0300
	1,00E-03		12		0,217
0,0001	1,00E-07	10000	128	0,00667	0,0000362
	1,00E-05		35		0,0312
	1,00E-03		14		0,187

Tabela 3.2. Número de iterações e erros relativos de preços preditos de opção de compra FBR em função do passo de tempo inicial ( $\Delta t$ ) e do erro de truncamento;  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N = 112$ ,  $S_{max} = 80$ ,  $\theta = 0,5$  para a FBR TPS adaptativa e não adaptativa.

$\Delta t$ inicial	Erro de truncamento definido para o Método Adaptativo	Número de Iterações		Erro (%)	
		Método Não Adaptativo	Método Adaptativo	Método Não Adaptativo	Método Adaptativo
0,01	1,00E-07	100	134	0,0188	0,0183
	1,00E-05		68		0,0185
	1,00E-03		30		0,00247
0,001	1,00E-07	1000	150	0,0180	0,0183
	1,00E-05		59		0,0177
	1,00E-03		31		0,0125
0,0001	1,00E-07	10000	151	0,0179	0,0183
	1,00E-05		62		0,0182
	1,00E-03		33		0,0126

Observa-se nas Tabelas 3.3 e 3.4 que os métodos baseados nas FBRs Cúbica e TPS adaptativas para solução de opção de barreira Up-and-Out apresentam erros relativos menores que os apresentados pelos métodos não adaptativos, quando o erro de truncamento previamente definido foi da ordem de  $10^{-4}$ . Em relação ao número de iterações necessário para atingir o tempo final de simulação, nota-se que os métodos adaptativos requerem um número de iterações consideravelmente menor que os métodos não adaptativos. Portanto, constata-se que os métodos adaptativos são mais eficientes computacionalmente que os métodos não adaptativos para solução de opções de barreira Up-and-Out.

Tabela 3.3. Número de iterações e erros relativos de preços preditos de opção de barreira Up-and-Out FBR em função do passo de tempo inicial ( $\Delta t$ );  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N = 100$ ,  $S_{max} = 250$ ,  $\theta = 1$ ,  $\epsilon\epsilon = 1 \times 10^{-4}$  para a FBR Cúbica adaptativa e não adaptativa.

$\Delta t$ inicial	Erro de truncamento definido para o Método Adaptativo	Número de Iterações		Erro (%)	
		Método Não Adaptativo	Método Adaptativo	Método Não Adaptativo	Método Adaptativo
0,01	1,00E-04	100	94	0,643	0,339
0,001	1,00E-04	1000	80	0,511	0,105
0,0001	1,00E-04	10000	94	0,479	0,185

Tabela 3.4. Número de iterações e erros relativos de preços preditos de opção de barreira Up-and-Out FBR em função do passo de tempo inicial ( $\Delta t$ );  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N = 100$ ,  $S_{max} = 250$ ,  $\theta = 1$ ,  $\epsilon\epsilon = 1 \times 10^{-4}$  para a FBR TPS adaptativa e não adaptativa.

$\Delta t$ inicial	Erro de truncamento definido para o Método Adaptativo	Número de Iterações		Erro (%)	
		Método Não Adaptativo	Método Adaptativo	Método Não Adaptativo	Método Adaptativo
0,01	1,00E-04	100	88	0,379	0,053
0,001	1,00E-04	1000	85	0,268	0,107
0,0001	1,00E-04	10000	88	0,242	0,118

Nas Tabelas 3.5 e 3.6 pode-se observar que os erros relativos dos métodos baseados nas FBRs Cúbica e TPS adaptativas para solução de opções de barreira Down-and-Out são menores que os erros dos métodos não adaptativos, quando o erro de truncamento requerido foi da ordem de  $10^{-5}$ . O número de iterações necessário para os métodos adaptativos também foi bem menor que para os não adaptativos. Assim, pode-se dizer que os métodos adaptativos são mais eficientes que os não adaptativos na solução de opções de barreira Down-and-Out.

Tabela 3.5. Número de iterações e erros relativos de preços preditos de opção de barreira Down-and-Out FBR em função do passo de tempo inicial ( $\Delta t$ );  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N = 112$ ,  $S_{max} = 100$ ,  $\theta = 1$ ,  $\epsilon\epsilon = 1 \times 10^{-5}$  para a FBR Cúbica adaptativa e não adaptativa.

$\Delta t$ inicial	Erro de truncamento definido para o Método Adaptativo	Número de Iterações		Erro (%)	
		Método Não Adaptativo	Método Adaptativo	Método Não Adaptativo	Método Adaptativo
0,01	1,00E-05	100	25	0,336	0,0301
0,001	1,00E-05	1000	27	0,321	0,162
0,0001	1,00E-05	10000	30	0,310	0,094

Tabela 3.6. Número de iterações e erros relativos de preços preditos de opção de barreira Down-and-Out FBR em função do passo de tempo inicial ( $\Delta t$ );  $E = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 5\%$ ,  $N = 112$ ,  $S_{max} = 100$ ,  $\theta = 1$ ,  $\epsilon\epsilon = 1 \times 10^{-5}$  para a FBR TPS adaptativa e não adaptativa.

$\Delta t$ inicial	Erro de truncamento definido para o Método Adaptativo	Número de Iterações		Erro (%)	
		Método Não Adaptativo	Método Adaptativo	Método Não Adaptativo	Método Adaptativo
0,01	1,00E-05	100	40	0,323	0,179
0,001	1,00E-05	1000	40	0,318	0,0878
0,0001	1,00E-05	10000	42	0,310	0,109

### 3.4. Conclusões

1. Os métodos adaptativos no tempo que empregam funções de base radial mostraram-se eficientes quer em termos de rapidez (número de iterações necessárias para atingir o tempo final requerido de simulação) quanto em termos de acurácia ou exatidão. A efetividade dependeu do problema associado à equação de Black-Scholes, em estudo.
2. O trabalho mostra uma série de curvas que refletem a dependência do erro numérico relativo de predição em função dos principais parâmetros que afetam as simulações:
  - a. Método de integração
  - b. Passo inicial de tempo
  - c. Tamanho das malhas de preços de ativos
  - d. Erro de truncamento especificado
  - e. Valor máximo dos ativos que permite simular condições de contorno equivalente a  $S = \infty$ .
3. No caso de opções de compra, o método baseado na FBR Cúbica adaptativa mostrou-se mais eficiente que o baseado na FBR TPS adaptativa, pois levou a menor erro relativo do preço da opção (em  $E = 50$ ), ou seja, 0,0000164%, exigindo um menor número de passos de tempo, 120, enquanto que a FBR TPS adaptativa levou a erro relativo foi 0,0183% com 150 passos de tempo.
4. No caso de opções de barreiras pode-se afirmar que, em termos gerais:
  - Para ambos os tipos de barreira estudados, UAO e DAO, deve-se empregar o método implícito de integração.

- Os passos iniciais de tempo devem ser inferiores a 0,005.
  - Para fins de simulação o valor máximo do ativo deve ser, no mínimo, igual a duas vezes o preço de exercício.
  - O tamanho ótimo de malhas depende do valor especificado de  $\Delta t$ ; os erros relativos de predição podem ser reduzidos ao se balancear o tamanho inicial do passo de tempo com o tamanho da malha; em outras palavras, ao se reduzir o tamanho da malha, deve-se reduzir o passo inicial de tempo.
  - Em geral, baixos valores de erros de truncamento especificados levam a baixos erros relativos de predição; mas, como compromisso entre exatidão e número de iterações requerido para atingir o tempo final (prazo de exercício), os dados sugerem que se usem erros de truncamento entre  $10^{-4}$  e  $10^{-6}$ .
5. Ambos os métodos de FBR levam a erros relativos da mesma ordem de grandeza, quando se trata dos problemas de barreira.

## 4. CONCLUSÕES GERAIS

Neste trabalho, apresentaram-se testes diversos e abrangentes de simulação, que tiveram por meta analisar os métodos numéricos baseados em funções de base radial Cúbica e TPS, adaptativos e não adaptativos para solução de problemas de equações diferenciais parciais convectivo-difusivas. A avaliação da acurácia dos métodos teve por base soluções analíticas de problemas *benchmark* envolvendo a equação de Black-Scholes.

As soluções numéricas permitem afirmar que:

1. Os métodos de funções de base radial Cúbica e TPS, adaptativo e não adaptativo, levaram a resultados acurados e rápidos, quando aplicados a problemas do tipo Baunilha clássica (opções de compra) e a problemas de condições de contorno não-lineares (opções de barreira dependentes do caminho). Entretanto, o método adaptativo mostrou-se mais eficiente computacionalmente e acurado, na solução de opções de barreiras e em alguns casos de opção de compra, que o método não adaptativo. Portanto, recomenda-se empregar o método adaptativo na solução da equação clássica e/ou difusional de Black-Scholes.
2. Soluções obtidas por meio da forma difusional da equação de Black-Scholes não mostraram diferença notável quando comparadas a forma clássica de BS.
3. Os resultados da opção de compra são simples de implementar. No caso do método FBR adaptativo, fez-se uma análise detalhada dos resultados deste tipo de opção. Opções de barreiras, requereram uma análise mais detalhada quando solucionadas por ambos os métodos FBR, adaptativo e não adaptativo.
4. As soluções referentes ao problema de barreiras, que envolvem condições temporais não-lineares e complexas, e ao problema de opção de compra, o problema mais simples de Black-Scholes, permitem afirmar que:
  - a. O tamanho da malha deve ser reduzido a partir de uma malha grosseira inicial, a fim de se obterem soluções numéricas aceitáveis. O tamanho ótimo da malha está relacionado ao tamanho do passo de tempo; logo, ao se reduzir o tamanho da malha é aconselhável que se reduza o tamanho do passo de tempo tanto para o método FBR adaptativo como para o não adaptativo.

- b. Para opção de compra e os dois tipos de opções de barreira, aqui estudados, UAO e DAO, e para ambos os métodos, adaptativo e não adaptativo, deve-se empregar o método de integração no tempo implícito, ou seja, com valor de  $\theta \geq 0,5$ . A exceção ocorreu apenas quando foi utilizado o método FBR TPS adaptativo na solução de opção de compra para o qual se pode usar o método de integração no tempo explícito, ou seja,  $\theta = 0,25$ .
- c. Os dados numéricos sugerem que se empregue, heurísticamente, para efeitos computacionais,  $S_{max} = 2E$ .
- d. Os tamanhos do passo de tempo devem ser diminuídos até atingir a convergência desejada dos resultados numéricos. Esperam-se pequenas flutuações. Em geral, ao se usar o método não adaptativo, o passo de tempo deve ser inferior a 0,1 para os dois tipos de barreiras; já ao usar-se o método adaptativo, o passo de tempo inicial deve ser inferior a 0,005 para barreiras e inferior a 0,0025 para opção de compra.
- e. No caso do método adaptativo, quando se diminui o erro de truncamento definido pelo usuário, tende-se a diminuir também o erro relativo da solução. Entretanto, a imposição de uma alta precisão, como, por exemplo, da ordem de  $10^{-7}$ , pode levar a um grande número de iterações, fato não desejável. Logo, a fim de manter um compromisso entre rapidez de solução e exatidão é aconselhável usar erros de truncamento na faixa de  $10^{-4}$  a  $10^{-6}$ .

Como conclusão final, os resultados permitem afirmar que os métodos FBR Cúbico e TPS, adaptativo e não adaptativo são satisfatórios para modelar e analisar as diversas formas da equação de Black-Scholes, mesmo sob condições de contorno dependentes do tempo não-lineares (barreiras). Deve-se mencionar que a adaptatividade levou a uma redução apreciável do número de passos de tempo e dos erros relativos na solução de opções de barreiras.

## REFÊRENCIAS

AMSTER, P.; AVERBUJ, C.G.; MARIANI, M.C. (2003). Stationary solutions for two nonlinear Black–Scholes type equations. *Applied Numerical Mathematics*, v. 47, pp.275–280.

BANKS, E. (1993). *The Credit Risk of Complex Derivatives (Finance and Capital Markets Series)*. Palgrave Macmillan. 232 p.

BARUCCI, E.; LANDI, L.; CHERUBINI, U. (1996). Computational methods in finance: option pricing. *Computational Science & Engineering*, v.3, pp. 66-80.

BERNANKE, B.; GERTLER, M. (1999). Monetary policy and asset price volatility. *Federal Reserve Bank of Kansas City Economic Review*, Fourth Quarter, pp. 17–51.

BIXLER, N. (1989). An improved time integrator for finite element analysis. *Communications in Applied Numerical Methods*, v.5, pp. 69-78.

BLACK, F.; SCHOLES, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, v. 81, pp. 637-654.

BOZTOSUN, I.; CHARAFI, A. (2002). An analysis of the linear advection–diffusion equation using mesh-free and mesh-dependent methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 26, pp. 889–895.

BROWN, D; LING, L; KANSA, E.; LEVESLEY, J. (2005). On approximate cardinal preconditioning methods for solving PDEs with radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.29, pp. 343–353.

CAMPBELL, J. Y.; LO, A. W.; MACKINLAY, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton: Princeton University Press. 320 p.

CLEWLOW, L.; STRICKLAN, C. (1998). *Implementing Derivatives Models*. England: John Wiley & Sons Ltd.

COX, J.; RUBINSTEIN, M. (1985). *Options Markets*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

FORTES, M. (1997). The diffusional method for convection-diffusion equations: finite element one-dimensional solutions. *Numerical Methods in Thermal Problems*, v.10, pp.57-68.

- FORTES, M.; FERREIRA, W.R. (1998). Finite volume approach to transport equations by the diffusional method. In: SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, 3., 1998. Ouro Preto. Anais ... v. 1, p. 443-452.
- FORTES, M.; FERREIRA, W.R. (1999). The one-dimensional transient diffusional method: finite element adaptive solutions to convection-diffusion problems. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 38, pp. 780-796.
- FORTES, M.; FERREIRA, W.R.; MAFFIA, T.B.; CARVALHO, C.M.F. (2000-a). The diffusional finite element method applied to the analysis of derivatives in financial engineering. In: SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, Ouro Preto. Anais ... v. 1, p. 595-602.
- FORTES, M.; FERREIRA, W.R.; MAFFIA, T.B.; CARVALHO, C.M.F. (2000-b). The diffusional finite element method applied to the analysis of financial options. *Reuna*, v.11, pp. 96-103.
- FORTES, M.; FERREIRA, W. R.; BARI, M. L.; YOSHITAKE, M. (2005). The Diffusional Method Applied to Financial Engineering. In: XXIX ENANPAD, 2005, Brasília. Anais do ENANPAD, v. CD-ROM.
- FUSAI, G.; ABRAHAMS, I. D.; SGARRA, C. (2006). An exact analytical solution for discrete barrier options. *Finance and Stochastics*, v. 10, pp. 1–26.
- GOTO, Y.; FEI, Z.; KAN, S.; KITA, E. (2007). Options valuation by using radial basis function approximation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.31, pp. 836-843.
- GRESHO, P.M.; LEE, R.L.; SANI, R.L. (1980). *On the time dependent solution of the incompressible Navier-Stokes equation in two and three dimensions*. In: RECENT ADVANCES IN NUMERICAL METHODS IN FLUIDS, v. 1, Swansea: Pineridge Press, pp. 27-79.
- HOFFMAN, D. (1992) *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. New York: McGraw-Hill.
- HUI, C. H. (1997). Time-dependent barrier option values. *The Journal of Futures Markets*, v. 17, pp. 667-688.
- HULL, J. (2005). *Options, Futures and other Derivatives Securities*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

- KOC, M. B.; BOZTOSUN, I.; BOZTOSUN, D. (2003). On the numerical solution of Black-Scholes equation. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON MESHFREE METHODS. Lisbon, Anais..., CD-ROM, Portugal, 6p., 2003.
- KOVALOV, P.; LINETSKY, V.; MARCOZZI, M. (2007). Pricing multi-asset American options: a finite element method-of-lines with smooth penalty. *Journal of Scientific Computing*, v. 33, pp. 209-237.
- LEE, H. W.; PERAIRE, J.; ZIENKIEWICZ, O. C. (1987). The characteristic Galerkin method for advection-dominated problems: An assessment. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 61, pp. 359-369.
- LÖTSTEDT, P.; PERSSON, J.; SYDOW, L. V.; TYSK, J. (2007). Space-time adaptive finite difference method for European multi-asset options. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 53, pp. 1159–1180.
- MARSHALL, J. F.; BANSAL, V. K. (1993). *Financial Engineering*. Miami: Kolb Publishing Co.
- MEYER, G. H. (1998). The numerical valuation of options with underlying jumps. *Acta Math. Univ. Comenianae*, v. 67, pp. 69-82.
- MURPHY, D.; PRENTER, P.M. (1985). Higher order methods for convection-diffusion problems. *Computers and Fluids*, v.13, pp.157-176.
- NAOR, N. (2006). Reporting on financial derivatives – A law and economics perspectives. *European Journal of Law and Economics*, v. 21, pp. 285-314.
- NEFTCI, S. N. (2000). *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. 2 ed. San Diego: Academic Press. 527 p.
- RIPPA, S. (1999). An algorithm for selecting a good value for the parameter  $c$  in radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, v. 11, pp. 193–210.
- RUBINSTEIN, M. (1992). Merton Miller's financial innovations and market volatility. *Journal of Finance*, v. 47, pp. 819-823.
- SARRA, S. A. (2005). Adaptive radial basis function methods for time dependent partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, v. 54, pp. 79–94.

SMITHSON, C. W.; SMITH, C. W. JR.; WILFORD, D. S. (1995). *Managing Financial Risk: A Guide to Derivative Products, Financial Engineering, and Value Maximization*. New York: Irwin.

SVERIGES RISKBANK PRIZE IN ECONOMIC SCIENCE IN MEMORY OF ALFRED NOBEL 1997 [on line]. (1997), atualizado em 14/10/1997. Disponível em: [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/economics/laureates/1997/press.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1997/press.html)

TOMAS III, M. J.; YALAMANCHILI, K. K. (2001). An application of finite elements to option pricing. *The Journal of Futures Markets*, v. 21, pp. 19-42.

WANXIE, Z.; ZHUANG, X.; ZHU, J. A (1998). Self-adaptive time integration algorithm for solving partial differential equations. *Applied mathematics and Computation*, v. 89, pp. 295-312.

WILMOTT, P.; HOWISON, S.; DEWYNNE, J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press.

WILMOTT, P. (1998). *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*. New York: John Wiley & Sons.

WILMOTT, P. (2007). *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*, New York: John Wiley & Sons.

ZHANG, Y. (2006). Solve partial differential equations by two or more radial basis functions. *Applied Mathematics and Computation*, v.181, pp. 793–801.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. (1991). *The Finite Element Method*. New York: McGraw Hill, v. II.

## ANEXOS

**Anexo I. Tabelas do método de Funções de Base Radial (FBR) Cúbica e TPS aplicado à solução da equação difusional de Black-Scholes para a solução de problemas de opções de compra e barreiras.**

### I.1. Opções de Compra

Tabela I.1. Efeito de tamanhos de passos de tempo e de malha sobre os valores numéricos (FBR Cúbica) de opções de compra em  $T=1$ . Valor exato= 5,2253.

Teste	$\Delta t$	$\Delta S$	Tipo de solução: RBF cubic dif., $\theta$	Valor da Opção para $S = 50$	Número de		S max	Erro (%)
					Passos de Tempo	Malhas		
1	0,01	0,714	0,5	5,123	100	84	60	1,96
2	0,01	0,714	0,5	5,225	100	112	80	0,000390
3	0,01	0,714	0,5	5,225	100	140	100	0,00542
4	0,01	0,714	0,5	5,225	100	168	120	0,00556
5	0,01	0,714	0,5	5,225	100	224	160	0,00557
6	0,01	0,714	0,5	5,225	100	280	200	0,00557
7	0,01	0,714	0,25	Divergiu	100	112	80	Divergiu
8	0,01	0,714	0,5	5,225	100	112	80	0,000390
9	0,01	0,714	0,75	5,223	100	112	80	0,0463
10	0,01	0,714	1	5,220	100	112	80	0,0930
11	0,5	0,714	0,5	4,801	2	112	80	8,113
12	0,2	0,714	0,5	5,420	5	112	80	3,719
13	0,1	0,714	0,5	5,159	10	112	80	1,262
14	0,05	0,714	0,5	5,214	20	112	80	0,209
15	0,01	0,714	0,5	5,225	100	112	80	0,000390
16	0,005	0,714	0,5	5,225	200	112	80	0,00325
17	0,003333	0,714	0,5	5,225	300	112	80	0,00443
18	0,001	0,714	0,5	5,225	1000	112	80	0,00606
19	0,01	2	0,5	5,219	100	40	80	0,130
20	0,01	1,250	0,5	5,223	100	64	80	0,03882
21	0,01	1	0,5	5,224	100	80	80	0,01783
22	0,01	0,833	0,5	5,225	100	96	80	0,0065
23	0,01	0,714	0,5	5,225	100	112	80	0,000390
24	0,01	0,4	0,5	5,226	100	200	80	0,0133
25	0,01	0,2	0,5	5,226	100	400	80	0,00458

Tabela I.2. Efeito de tamanhos de passos de tempo e de malha sobre os valores numéricos (FBR TPS) de opções de compra em T=1. Valor exato= 5,2253.

Teste	$\Delta t$	$\Delta S$	Tipo de solução: RBF TPS Dif., $\theta$	Valor da Opção para S = 50	Número de		S max	Erro (%)
					Passos de Tempo	Malhas		
1	0,00333	0,5	0,5	0,000	300	200	100	100,000
2	0,00333	0,5	0,75	5,224	300	200	100	0,0193
3	0,00333	0,5	1	5,223	300	200	100	0,0361
4	0,01	0,5	0,75	6,250	100	200	100	19,611
5	0,005	0,5	0,75	5,224	200	200	100	0,0276
6	0,00333	0,5	0,75	5,224	300	200	100	0,0193
7	0,0025	0,5	0,75	5,225	400	200	100	0,0151
8	0,002	0,5	0,75	5,225	500	200	100	0,0126
9	0,0017	0,5	0,75	5,225	600	200	100	0,0109
10	0,0014	0,5	0,75	5,225	700	200	100	0,0097
11	0,0013	0,5	0,75	5,225	800	200	100	0,00883
12	0,001	0,5	0,75	5,225	1000	200	100	0,00757
13	0,0008	0,5	0,75	5,225	1200	200	100	0,00674
14	0,002	0,5	0,75	5,118	500	120	60	2,049
15	0,002	0,5	0,75	5,225	500	160	80	0,0129
16	0,002	0,5	0,75	5,225	500	200	100	0,01260
17	0,002	0,5	0,75	5,225	500	240	120	0,01259
18	0,002	0,5	0,75	5,225	500	320	160	0,01259
19	0,002	0,5	0,75	5,225	500	360	180	0,01258
20	0,002	0,5	0,75	5,225	500	400	200	0,01080
21	0,002	0,5	0,75	Divergiu	500	480	240	Divergiu
22	0,002	0,167	0,75	Divergiu	500	720	120	Divergiu
23	0,002	0,2	0,75	Divergiu	500	600	120	Divergiu
24	0,002	0,286	0,75	Divergiu	500	420	120	Divergiu
25	0,002	0,4	0,75	5,225	500	300	120	0,00726
26	0,002	0,5	0,75	5,225	500	240	120	0,0126
27	0,002	0,667	0,75	5,224	500	180	120	0,0241
28	0,002	1	0,75	5,222	500	120	120	0,0570
29	0,002	1,43	0,75	5,219	500	84	120	0,118
30	0,002	2	0,75	5,213	500	60	120	0,234

## I.2. Opções de Barreira Up-and-Out

Tabela I.3. Efeito de tamanhos de passos de tempo e de malha sobre os valores numéricos (FBR Cúbica) de opções de barreira Up-and-Out (Suao=90) em T=1. Valor exato= 4,9869.

Teste	$\Delta t$	$\Delta S$	Tipo de solução: RBF cubic dif., $\theta$	Valor da Opção para S = 50	Número de		S max	Erro (%)
					Passos de Tempo	Malhas		
	0,01	2,500	0	Divergiu	100	40	100	Divergiu
1	0,01	2,500	0,25	50,353	100	40	100	0,972
2	0,01	2,500	0,5	0,485	100	40	100	0,873
3	0,01	2,500	0,75	5,025	100	40	100	0,761
4	0,01	2,500	1	5,019	100	40	100	0,643
5	0,01	2,500	1	5,103	100	24	60	2,336
6	0,01	2,500	1	5,209	100	32	80	4,458
7	0,01	2,500	1	5,019	100	40	100	0,643
8	0,01	2,500	1	5,019	100	60	150	0,643
9	0,01	2,500	1	5,019	100	80	200	0,643
10	0,5	2,500	1	4,827	2	40	100	3,213
11	0,2	2,500	1	4,941	5	40	100	0,914
12	0,1	2,500	1	4,989	10	40	100	0,036
13	0,05	2,500	1	5,011	20	40	100	0,483
14	0,01	2,500	1	5,019	100	40	100	0,643
15	0,005	2,500	1	5,017	200	40	100	0,597
16	0,0033	2,500	1	5,015	300	40	100	0,569
17	0,001	2,500	1	5,012	1000	40	100	0,511
18	0,01	10	1	4,889	100	10	100	1,959
19	0,01	2,5	1	5,019	100	40	100	0,643
20	0,01	1,563	1	5,047	100	64	100	1,212
21	0,01	1,25	1	5,035	100	80	100	0,968
22	0,01	1,042	1	5,054	100	96	100	1,338
23	0,01	0,893	1	5,044	100	112	100	1,152
24	0,01	0,5	1	5,045	100	200	100	1,159
25	0,01	0,25	1	5,048	100	400	100	1,222
26	0,01	0,1	1	5,050	100	1000	100	1,259
27	0,01	0,0833	1	5,050	100	1200	100	1,263

Tabela I.4. Efeito de tamanhos de passos de tempo e de malha sobre os valores numéricos (FBR TPS) de opções de barreira Up-and-Out (Suao=90) em T=1. Valor exato= 4,9869.

Teste	$\Delta t$	$\Delta S$	Tipo de solução: RBF TPS dif., $\theta$	Valor da Opção para S = 50	Número de		S max	Erro (%)
					Passos de Tempo	Malhas		
1	0,01	2,500	0	5,027	100	40	100	0,7989
2	0,01	2,500	0,25	5,023	100	40	100	0,7143
3	0,01	2,500	0,5	5,017	100	40	100	0,611
4	0,01	2,500	0,75	5,012	100	40	100	0,498
5	0,01	2,500	1	5,006	100	40	100	0,379
6	0,01	2,500	1	5,099	100	24	60	2,239
7	0,01	2,500	1	5,201	100	32	80	4,298
8	0,01	2,500	1	5,006	100	40	100	0,379
9	0,01	2,500	1	5,006	100	48	120	0,379
10	0,01	2,500	1	5,006	100	80	200	0,379
11	0,5	2,500	1	4,829	2	40	100	3,164
12	0,2	2,500	1	4,940	5	40	100	0,931
13	0,1	2,500	1	4,979	10	40	100	0,162
14	0,05	2,500	1	4,998	20	40	100	0,228
15	0,01	2,500	1	5,006	100	40	100	0,379
16	0,005	2,500	1	5,004	200	40	100	0,340
17	0,0033	2,500	1	5,003	300	40	100	0,316
18	0,001	2,500	1	5,000	1000	40	100	0,268
19	0,01	10	1	4,744	100	10	100	4,864
20	0,01	5	1	4,930	100	20	100	1,146
21	0,01	2,5	1	5,006	100	40	100	0,379
22	0,01	1,563	1	5,042	100	64	100	1,112
23	0,01	1,25	1	5,032	100	80	100	0,905
24	0,01	1,042	1	5,051	100	96	100	1,294
25	0,01	0,893	1	5,043	100	112	100	1,120
26	0,01	0,5	1	5,044	100	200	100	1,149
27	0,01	0,25	1	5,048	100	400	100	1,218

### I.3. Opções de Barreira Down-and-Out

Tabela I.5. Efeito de tamanhos de passos de tempo e de malha sobre os valores numéricos (FBR Cúbica) de opções de barreira Down-and-Out ( $S_{dao}=40$ ) em  $T=1$ . Valor exato= 5,176.

Teste	$\Delta t$	$\Delta S$	Tipo de solução: RBF cubic dif., $\theta$	Valor da Opção para $S = 50$	Número de		S max	Erro (%)
					Passos de Tempo	Malhas		
1	0,01	0,893	0,25	Divergiu	100	112	100	Divergiu
2	0,01	0,893	0,5	5,197	100	112	100	0,406
3	0,01	0,893	0,75	5,195	100	112	100	0,374
4	0,01	0,893	1	5,193	100	112	100	0,336
5	0,01	0,893	1	5,164	100	70	62,5	0,220
6	0,01	0,893	1	5,193	100	98	87,5	0,340
7	0,01	0,893	1	5,193	100	112	100	0,336
8	0,01	0,893	1	5,193	100	140	125	0,336
9	0,5	0,893	1	4,975	2	112	100	3,872
10	0,2	0,893	1	5,110	5	112	100	1,269
11	0,1	0,893	1	5,157	10	112	100	0,359
12	0,05	0,893	1	5,180	20	112	100	0,075
13	0,01	0,893	1	5,193	100	112	100	0,336
14	0,005	0,893	1	5,193	200	112	100	0,341
15	0,0033	0,893	1	5,193	300	112	100	0,337
16	0,001	0,893	1	5,192	1000	112	100	0,321
17	0,01	10	1	5,027	100	10	100	2,875
18	0,01	5	1	5,175	100	20	100	0,022
19	0,01	2,5	1	5,202	100	40	100	0,507
20	0,01	1,250	1	5,199	100	80	100	0,456
21	0,01	1	1	5,197	100	100	100	0,420
22	0,01	0,893	1	5,193	100	112	100	0,336
23	0,01	0,714	1	5,195	100	140	100	0,369
24	0,01	0,4	1	5,192	100	250	100	0,305
25	0,01	0,2	1	5,189	100	500	100	0,260
26	0,01	0,08	1	5,188	100	1250	100	0,231
27	0,01	0,0667	1	5,188	100	1500	100	0,228

Tabela I.6. Efeito de tamanhos de passos de tempo e de malha sobre os valores numéricos (FBR TPS) de opções de barreira Down-and-Out (Sdao=40) em T=1. Valor exato= 5,176.

Teste	$\Delta t$	$\Delta S$	Tipo de solução: RBF TPS dif., $\theta$	Valor da Opção para S = 50	Número de		S max	Erro (%)
					Passos de Tempo	Malhas		
1	0,01	0,893	0	Divergiu	100	112	100	Divergiu
2	0,01	0,893	0,25	Divergiu	100	112	100	Divergiu
3	0,01	0,893	0,5	5,196	100	112	100	0,396
4	0,01	0,893	0,75	5,194	100	112	100	0,361
5	0,01	0,893	1	5,192	100	112	100	0,323
6	0,01	0,893	1	5,157	100	70	62,5	0,363
7	0,01	0,893	1	5,192	100	98	87,5	0,322
8	0,01	0,893	1	5,192	100	112	100	0,323
9	0,01	0,893	1	5,192	100	140	125	0,323
10	0,5	0,893	1	5,029	2	112	100	2,844
11	0,2	0,893	1	5,102	5	112	100	1,420
12	0,1	0,893	1	5,155	10	112	100	0,391
13	0,05	0,893	1	5,178	20	112	100	0,052
14	0,025	0,893	1	5,188	40	112	100	0,243
15	0,01	0,893	1	5,192	100	112	100	0,323
16	0,005	0,893	1	5,193	200	112	100	0,331
17	0,0033	0,893	1	5,193	300	112	100	0,329
18	0,001	0,893	1	5,192	1000	112	100	0,318
19	0,01	10	1	4,923	100	10	100	4,889
20	0,01	5	1	5,143	100	20	100	0,635
21	0,01	2,5	1	5,194	100	40	100	0,348
22	0,01	1,563	1	5,188	100	64	100	0,245
23	0,01	1,25	1	5,198	100	80	100	0,422
24	0,01	1,042	1	5,184	100	96	100	0,159
25	0,01	0,893	1	5,192	100	112	100	0,323
26	0,01	0,5	1	5,192	100	200	100	0,323
27	0,01	0,25	1	Divergiu	100	400	100	Divergiu

**Anexo II. Tabelas do método de solução adaptativa temporal da equação de Black-Scholes, aplicado, junto com a técnica de Funções de Base Radial (FBR) Cúbica e TPS para a solução de problemas de opções de compra e barreiras.**

**II.1 Opções de Compra**

Tabela II.1. Efeito de tamanhos de passos de tempo e de malha sobre os valores numéricos (FBR Cúbica) de opções de compra em  $T=1$ . Valor exato= 5,2253.

Teste	$\Delta t$ inicial	$\Delta S$	Tipo de solução: RBF Adap cubic, $\theta$	Erro de truncamento	Valor da Opção para $S = 50$	Número de		S max	Erro (%)
						Passos de Tempo (iterações)	Malhas		
1	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,119	884	84	60	2,04
2	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	120	112	80	0,0000164
3	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	100	140	100	0,00447
4	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	88	168	120	0,00422
5	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	74	224	160	0,00354
6	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	66	280	200	0,00284
7	0,001	0,714	0	1,00E-07	5,227	882	112	80	0,02647
8	0,001	0,714	0,25	1,00E-07	5,226	608	112	80	0,0040168
9	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	120	112	80	0,0000164
10	0,001	0,714	0,75	1,00E-07	5,225	851	112	80	0,0120
11	0,001	0,714	1	1,00E-07	5,224	968	112	80	0,0171
12	0,1	0,714	0,5	1,00E-07	5,226	646	112	80	0,02092
13	0,05	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	678	112	80	0,000615
14	0,01	0,714	0,5	1,00E-07	4,396	110	112	80	0,000241
15	0,0025	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	114	112	80	0,000046
16	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	120	112	80	0,0000164
17	0,0002	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	127	112	80	0,00003
18	0,0001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	128	112	80	0,00004
19	0,00005	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	128	112	80	0,000014
20	0,001	2	0,5	1,00E-07	5,219	116	40	80	0,131
21	0,001	1,250	0,5	1,00E-07	5,223	119	64	80	0,03925
22	0,001	1	0,5	1,00E-07	5,224	120	80	80	0,01824
23	0,001	0,833	0,5	1,00E-07	5,225	120	96	80	0,0068
24	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	120	112	80	0,0000164
25	0,001	0,4	0,5	1,00E-07	5,226	121	200	80	0,0130
26	0,001	0,2	0,5	1,00E-07	5,226	397	400	80	0,01687
27	0,001	0,714	0,5	1,00E-03	5,237	12	112	80	0,21742
28	0,001	0,714	0,5	1,00E-04	5,230	19	112	80	0,08507
29	0,001	0,714	0,5	1,00E-05	5,227	33	112	80	0,03000
30	0,001	0,714	0,5	1,00E-06	5,226	61	112	80	0,00887
31	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	120	112	80	0,0000164
32	0,001	0,714	0,5	1,00E-08	4,450	1577	112	80	0,00432

Tabela II.2. Efeito de tamanhos de passos de tempo e de malha sobre os valores numéricos (FBR TPS) de opções de compra em T=1. Valor exato= 5,2253.

Teste	$\Delta t$ inicial	$\Delta S$	Tipo de solução: RBF TPS Adap, $\theta$	Erro de truncamento	Valor da Opção para S = 50	Número de		S max	Erro (%)
						Passos de Tempo (iterações)	Malhas		
1	0,001	0,714	0	1,00E-07	5,226	749	112	80	0,0190
2	0,001	0,714	0,25	1,00E-07	5,225	447	112	80	0,00236
3	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	150	112	80	0,0183
4	0,001	0,714	0,75	1,00E-07	5,223	342	112	80	0,0359
5	0,001	0,714	1	1,00E-07	5,223	389	112	80	0,0497
6	0,1	0,714	0,5	1,00E-07	5,224	109	112	80	0,0257
7	0,01	0,714	0,5	1,00E-07	5,224	134	112	80	0,0183
8	0,0025	0,714	0,5	1,00E-07	5,224	140	112	80	0,0183
9	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	150	112	80	0,0183
10	0,0002	0,714	0,5	1,00E-07	5,224	150	112	80	0,0182
11	0,0001	0,714	0,5	1,00E-07	5,224	151	112	80	0,0183
12	0,00005	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	155	112	80	0,0183
13	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,118	349	84	60	2,046
14	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	150	112	80	0,0183
15	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,224	230	140	100	0,0178
16	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,224	258	168	120	0,0178
17	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,224	340	224	160	0,0179
18	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,224	411	280	200	0,0179
19	0,001	2	0,5	1,00E-07	5,214	113	40	80	0,2238
20	0,001	1,25	0,5	1,00E-07	5,221	117	64	80	0,0804
21	0,001	1	0,5	1,00E-07	5,223	118	80	80	0,0471
22	0,001	0,833	0,5	1,00E-07	5,224	119	96	80	0,0290
23	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	150	112	80	0,0183
24	0,001	0,4	0,5	1,00E-07	5,225	353	200	80	0,00241
25	0,001	0,2	0,5	1,00E-07	5,226	847	400	80	0,00973
26	0,001	0,714	0,5	1,00E-03	5,226	31	112	80	0,0125
27	0,001	0,714	0,5	1,00E-04	5,225	35	112	80	0,0110
28	0,001	0,714	0,5	1,00E-05	5,224	59	112	80	0,0177
29	0,001	0,714	0,5	1,00E-06	5,224	75	112	80	0,0175
30	0,001	0,714	0,5	1,00E-07	5,225	150	112	80	0,0183
31	0,001	0,714	0,5	1,00E-08	5,224	369	112	80	0,0183

## II.2 Opções de Barreira Up-and-Out

Tabela II.3. Efeito de tamanhos de passos de tempo e de malha sobre os valores numéricos (FBR Cúbica) de opções de barreira Up-and-Out (Suao=90) em T=1. Valor exato= 4,9869.

Teste	$\Delta t$ inicial	$\Delta S$	Tipo de solução: RBF Cúb Adap, $\theta$	Erro de truncamento	Valor da Opção para S = 50	Número de		S max	Erro (%)
						Passos de Tempo (iterações)	Malhas		
1	0,001	2,500	0	1,00E-04	5,0781	85	100	250	1,830
2	0,001	2,500	0,25	1,00E-04	5,0383	67	100	250	1,032
3	0,001	2,500	0,5	1,00E-04	5,0202	72	100	250	0,668
4	0,001	2,500	0,75	1,00E-04	5,0051	85	100	250	0,366
5	0,001	2,500	1	1,00E-04	4,992	80	100	250	0,105
6	0,001	2,500	1	1,00E-04	5,145	25	24	60	3,177
7	0,001	2,500	1	1,00E-04	5,163	18	32	80	3,524
8	0,001	2,500	1	1,00E-04	4,9704	57	36	90	0,330
9	0,001	2,500	1	1,00E-04	5,0016	133	40	100	0,295
10	0,001	2,500	1	1,00E-04	4,999	115	60	150	0,246
11	0,001	2,500	1	1,00E-04	4,998	96	80	200	0,220
12	0,001	2,500	1	1,00E-04	4,992	80	100	250	0,105
13	0,5	2,500	1	1,00E-04	5,101	52	100	250	2,283
14	0,2	2,500	1	1,00E-04	5,121	73	100	250	2,683
15	0,1	2,500	1	1,00E-04	5,074	83	100	250	1,739
16	0,05	2,500	1	1,00E-04	5,039	86	100	250	1,042
17	0,01	2,500	1	1,00E-04	5,004	94	100	250	0,339
18	0,005	2,500	1	1,00E-04	4,999	96	100	250	0,250
19	0,00333	2,500	1	1,00E-04	4,997	97	100	250	0,209
20	0,001	2,500	1	1,00E-04	4,992	80	100	250	0,105
21	0,0005	2,500	1	1,00E-04	4,995	92	100	250	0,162
22	0,00005	2,500	1	1,00E-04	4,995	95	100	250	0,155
23	0,001	10	1	1,00E-04	4,803	34	25	250	3,687
24	0,001	7,142857	1	1,00E-04	4,980	47	35	250	0,144
25	0,001	5	1	1,00E-04	4,938	52	50	250	0,986
26	0,001	3,846154	1	1,00E-04	5,038	77	65	250	1,022
27	0,001	2,941176	1	1,00E-04	5,023	83	85	250	0,718
28	0,001	2,500	1	1,00E-04	4,992	80	100	250	0,105
29	0,001	1,666667	1	1,00E-04	5,008	118	150	250	0,428
30	0,001	1,000	1	1,00E-04	5,017	138	250	250	0,598
31	0,001	0,5	1	1,00E-04	5,023	157	500	250	0,715
32	0,001	2,5	1	1,00E-03	4,860	26	100	250	2,543
33	0,001	2,5	1	1,00E-04	4,992	80	100	250	0,105
34	0,001	2,5	1	1,00E-05	5,0103	448	100	250	0,471
35	0,001	2,5	1	1,00E-06	5,0111	1587	100	250	0,487
36	0,001	2,5	1	1,00E-07	3,3327	2998	100	250	33,170

Tabela II.4. Efeito de tamanhos de passos de tempo e de malha sobre os valores numéricos (FBR TPS) de opções de barreira Up-and-Out (Suao=90) em T=1. Valor exato= 4,9869.

Teste	$\Delta t$ inicial	$\Delta S$	Tipo de solução: RBF TPS Adap. $\theta$	Erro de truncamento	Valor da Opção para S = 50	Número de		S max	Erro (%)
						Passos de Tempo (iterações)	Malhas		
1	0,001	2,500	0	1,00E-04	5,071	76	100	250	1,690
2	0,001	2,500	0,25	1,00E-04	5,028	63	100	250	0,819
3	0,001	2,500	0,5	1,00E-04	5,009	71	100	250	0,434
4	0,001	2,500	0,75	1,00E-04	4,995	76	100	250	0,166
5	0,001	2,500	1	1,00E-04	4,982	85	100	250	0,107
6	0,001	2,500	1	1,00E-04	5,090	24	24	60	2,063
7	0,001	2,500	1	1,00E-04	5,142	17	32	80	3,119
8	1,001	2,500	1	1,00E-04	4,953	57	36	90	0,673
9	0,001	2,500	1	1,00E-04	4,989	124	40	100	0,0322
10	0,001	2,500	1	1,00E-04	4,986	105	60	150	0,0160
11	0,001	2,500	1	1,00E-04	4,984	95	80	200	0,0622
12	0,001	2,500	1	1,00E-04	4,982	85	100	250	0,107
13	0,5	2,500	1	1,00E-04	5,090	48	100	250	2,0731
14	0,2	2,500	1	1,00E-04	5,106	63	100	250	2,393
15	0,1	2,500	1	1,00E-04	5,061	74	100	250	1,480
16	0,01	2,500	1	1,00E-04	4,990	88	100	250	0,053
17	0,005	2,500	1	1,00E-04	4,985	89	100	250	0,0282
18	0,00333	2,500	1	1,00E-04	4,984	90	100	250	0,0589
19	0,001	2,500	1	1,00E-04	4,982	85	100	250	0,107
20	0,0005	2,500	1	1,00E-04	4,981	81	100	250	0,118
21	0,00005	2,500	1	1,00E-04	4,982	86	100	250	0,103
22	0,001	10	1	1,00E-04	4,603	30	25	250	7,693
23	0,001	7,143	1	1,00E-04	4,873	43	35	250	2,284
24	0,001	5,0	1	1,00E-04	4,895	54	50	250	1,847
25	0,001	3,846	1	1,00E-04	4,999	60	65	250	0,242
26	0,001	2,941	1	1,00E-04	5,002	79	85	250	0,312
27	0,001	2,5	1	1,00E-04	4,982	85	100	250	0,107
28	0,001	1,667	1	1,00E-04	5,003	107	150	250	0,325
29	0,001	1,0	1	1,00E-04	5,015	132	250	250	0,560
30	0,001	0,5	1	1,00E-04	5,022	154	500	250	0,709
31	0,001	2,500	1	1,00E-03	4,876	26	100	250	2,218
32	0,001	2,500	1	1,00E-04	4,982	85	100	250	0,107
33	0,001	2,500	1	1,00E-05	4,998	397	100	250	0,223
34	0,001	2,500	1	1,00E-06	4,999	1427	100	250	0,249
35	0,001	2,500	1	1,00E-07	3,654	2998	100	250	26,722

## II.3 Opções de Barreira Down-and-Out

Tabela II.5. Efeito de tamanhos de passos de tempo e de malha sobre os valores numéricos (FBR Cúbica) de opções de barreira Down-and-Out ( $S_{dao}=40$ ) em  $T=1$ . Valor exato= 5,176.

Teste	$\Delta t$ inicial	$\Delta S$	Tipo de solução: RBF Cúb adap. $\theta$	Erro de truncamento	Valor da Opção para $S = 50$	Número de		S max	Erro (%)
						Passos de Tempo (iterações)	Malhas		
1	0,01	0,893	0	1,00E-05	5,202	696	112	100	0,517
2	0,01	0,893	0,25	1,00E-05	5,203	145	112	100	0,525
3	0,01	0,893	0,5	1,00E-05	5,212	24	112	100	0,694
4	0,01	0,893	0,75	1,00E-05	5,191	23	112	100	0,291
5	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,177	25	112	100	0,0301
6	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,166	102	70	62,5	0,182
7	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,188	39	98	87,5	0,235
8	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,177	25	112	100	0,0301
9	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,165	20	140	125	0,202
10	0,5	0,893	1	1,00E-05	5,088	17	112	100	1,690
11	0,2	0,893	1	1,00E-05	5,168	27	112	100	0,153
12	0,1	0,893	1	1,00E-05	5,182	31	112	100	0,115
13	0,05	0,893	1	1,00E-05	5,179	26	112	100	0,062
14	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,177	25	112	100	0,0301
15	0,005	0,893	1	1,00E-05	5,181	30	112	100	0,110
16	0,001	0,893	1	1,00E-05	5,167	27	112	100	0,162
17	0,01	10	1	1,00E-05	4,991	21	10	100	3,575
18	0,01	5	1	1,00E-05	5,148	26	20	100	0,528
19	0,01	2,5	1	1,00E-05	5,180	27	40	100	0,082
20	0,01	1	1	1,00E-05	5,179	26	100	100	0,064
21	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,177	25	112	100	0,0301
22	0,01	0,714	1	1,00E-05	5,180	27	140	100	0,088
23	0,01	0,4	1	1,00E-05	5,182	29	250	100	0,114
24	0,01	0,2	1	1,00E-05	5,183	34	500	100	0,133
26	0,01	0,893	1	1,00E-03	5,111	9	112	100	1,244
27	0,01	0,893	1	1,00E-04	5,139	13	112	100	0,703
28	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,177	25	112	100	0,0301
29	0,01	0,893	1	1,00E-06	5,193	180	112	100	0,334
30	0,01	0,893	1	1,00E-07	5,192	815	112	100	0,321

Tabela II.6. Efeito de tamanhos de passos de tempo e de malha sobre os valores numéricos (FBR TPS) de opções de barreira Down-and-Out (Sdao=40) em T=1. Valor exato= 5,176.

Teste	$\Delta t$ inicial	$\Delta S$	Tipo de solução: RBF TPS Adap, $\theta$	Erro de truncamento	Valor da Opção para S = 50	Número de		S max	Erro (%)
						Passos de Tempo (iterações)	Malhas		
1	0,01	0,893	0	1,00E-05	5,196	688	112	100	0,390
2	0,01	0,893	0,25	1,00E-05	5,205	113	112	100	0,568
3	0,01	0,893	0,5	1,00E-05	5,199	79	112	100	0,451
4	0,01	0,893	0,75	1,00E-05	5,193	48	112	100	0,332
5	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,185	40	112	100	0,179
6	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,156	64	70	62,5	0,377
7	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,183	38	98	87,5	0,138
8	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,185	40	112	100	0,179
9	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,184	44	140	125	0,150
10	0,5	0,893	1	1,00E-05	5,058	35	112	100	2,279
11	0,2	0,893	1	1,00E-05	5,165	38	112	100	0,199
12	0,1	0,893	1	1,00E-05	5,182	40	112	100	0,116
13	0,05	0,893	1	1,00E-05	5,183	40	112	100	0,144
14	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,185	40	112	100	0,179
15	0,005	0,893	1	1,00E-05	5,183	38	112	100	0,141
16	0,001	0,893	1	1,00E-05	5,180	40	112	100	0,0878
17	0,01	10	1	1,00E-05	4,894	23	10	100	5,441
18	0,01	5	1	1,00E-05	5,121	27	20	100	1,062
19	0,01	2,5	1	1,00E-05	5,179	32	40	100	0,054
20	0,01	1,0	1	1,00E-05	5,186	37	100	100	0,200
21	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,185	40	112	100	0,179
22	0,01	0,714	1	1,00E-05	5,187	47	140	100	0,209
23	0,01	0,4	1	1,00E-05	5,189	94	250	100	0,263
24	0,01	0,2	1	1,00E-05	5,188	166	500	100	0,236
25	0,01	0,893	1	1,00E-03	5,117	9	112	100	1,141
26	0,01	0,893	1	1,00E-04	5,170	25	112	100	0,119
27	0,01	0,893	1	1,00E-05	5,185	40	112	100	0,179
28	0,01	0,893	1	1,00E-06	5,193	144	112	100	0,333
29	0,01	0,893	1	1,00E-07	5,192	664	112	100	0,315

**Anexo III. Programa computacional inerente à solução da equação de Black-Scholes adaptativa no tempo, aplicado, junto com o método de Funções de Base Radial Cúbica para a solução de problemas de opção de compra.**

**Dados de entrada:**

Volatilidade:  $\sigma := 0.2$  Taxa de juros:  $r := 0.05$   
 Tempo final:  $T := 1$  Número de malhas:  $N := 112$   
 Preço de Exercício do ativo:  $E := 50$   $\Delta t$  inicial:  $\Delta t := 0.001$   
 Valor máximo do ativo:  $S_{max} := 80$  Crank-Nicholson:  $\theta := 0.5$   
 Erro de Truncamento:  $\varepsilon := 1 \cdot 10^{-7}$

method := "Δt const"

$\Delta t = 0.001$

method := "MBA"

$$\Delta S := \frac{S_{max}}{N}$$

$$\Delta S = 0.714$$

$$\frac{E}{\Delta S} = 70$$

S :=  $\left\{ \begin{array}{l} SS_1 \leftarrow 0.001 \\ \text{for } i \in 2..N + 1 \\ \quad SS_i \leftarrow SS_{i-1} + \Delta S \\ SS \end{array} \right.$

$\phi := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N + 1 \\ \quad \text{for } j \in 1..N + 1 \\ \quad \quad \phi_{i,j} \leftarrow \left| S_i - S_j \right|^3 \\ \phi \end{array} \right.$

Hright(dta) :=  $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \leftarrow \theta \cdot dta \\ \beta \leftarrow (1 - \theta) \cdot dta \\ \text{for } i \in 1..N + 1 \\ \quad \text{for } j \in 1..N + 1 \\ \quad \quad \text{if } S_i \neq S_j \\ \quad \quad \quad \left[ \begin{array}{l} HH_{1,j} \leftarrow 1 + \beta \cdot \left[ 3 \cdot \sigma^2 \cdot \frac{|S_i|^2}{(S_i - S_j)^2} + 3 \cdot r \cdot \frac{S_i}{S_i - S_j} - r \right] \\ HH_{1,j} \leftarrow HH_{1,j} \cdot |S_i - S_j|^3 \\ HH_{1,j} \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad HH \end{array} \right.$

```

Hleft(dta) :=
  α ← θ · dta
  β ← (1 - θ) · dta
  for i ∈ 1..N + 1
    for j ∈ 1..N + 1
      if Si ≠ Sj
        HHi,j ← 1 - α · [ 3 · σ2 ·  $\frac{|S_i|^2}{|S_i - S_j|^2}$  + 3 · r ·  $\frac{S_i}{S_i - S_j}$  - r ]
        HHi,j ← HHi,j · ||Si - Sj||3
      HHi,j ← 0 otherwise
  HH

```

**Vp<sub>i</sub>** *retorna os valores preditos das variáveis dependentes, por meio do esquema de Adams-Bashforth, como sugerido por Bixler!*

```

Vpr(Va, V1, V2, dtt, dtt1, dtt2, n) :=
  Vpred ← Va if n < 4
  for i ∈ 1..N + 1
    VL1 ←  $\frac{dtt2}{(dtt1 + dtt2) \cdot dtt1} \cdot (Va_i - V1_i) + \frac{dtt1}{(dtt1 + dtt2) \cdot dtt2} \cdot (V1_i - V2_i)$ 
    VL1 ←  $\frac{2}{dtt1} \cdot (Va_i - V1_i) - VL_1$ 
    Vpred1 ←  $Va_i + \frac{dtt}{2} \cdot \left[ \left( 2 + \frac{dtt}{dtt1} \right) \cdot VL_1 - \frac{dtt}{dtt1} \cdot VL_{1_i} \right]$ 
    Vm1 ←  $\frac{Vpred_1 + Va_i}{2}$ 
  Vpred

```

**delta** retorna o valor do próximo passo de tempo, satisfazendo o erro de truncamento, como proposto por Bixler!

```

delta( $\phi_a$ ,  $\phi_{pr}$ , dtt, dtt1) :=
|  $\beta \leftarrow 1.0$ 
|  $aux \leftarrow \frac{\beta}{2 + \beta + 3 \cdot \frac{dtt1}{dtt}}$ 
|  $ddelta \leftarrow 10^{20}$ 
|  $\phi_{max} \leftarrow 0$ 
|  $dmed \leftarrow 0$ 
| for  $i \in 1..N + 1$ 
|   |  $dmed \leftarrow dmed + |\phi_{a_i} - \phi_{pr_i}|^2$ 
|   |  $\phi_{max} \leftarrow |\phi_{a_i}|$  if  $|\phi_{a_i}| > \phi_{max}$ 
|   |
|   |  $dmed \leftarrow aux \cdot \frac{\sqrt{\frac{dmed}{N + 1}}}{\phi_{max}}$ 
|   |
|   |  $ddelta \leftarrow dtt \cdot \left( \frac{\varepsilon}{dmed} \right)^{\frac{1}{3}}$ 
|   |
|   |  $ddelta$ 

```

### Condições de contorno:

Nota1 :  $V(0,t) = 0$ ;  $V(\infty,t) = S - E e^{-r \cdot t}$ ;  $f(0,t) = 0$ ;  $f(100,t) = 100 - E \exp(-r \cdot t)$

Nota2 : Condições de Contorno devem ser impostas na subrotina Fi a A, abaixo, por meio dos coeficientes a. Ver condição inicial abaixo:

$VBC1(time) := C$

$VBC2(time) := \max\left(S_{N+1} - E \cdot e^{-r \cdot time}, 0\right)$

Vinicial :=  $\left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N + 1 \\ \left| \begin{array}{l} V_i \leftarrow 0 \text{ if } S_i < E \\ V_i \leftarrow S_i - E \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \left| V \end{array} \right.$

```

Vfinal := | V1a ← Vinicial
          | V2a ← Vinicial
          | Va ← Vinicial
          | Vpred ← Vinicial
          | dta ← Δt
          | dt1a ← Δt
          | dt2a ← Δt
          | time ← 0
          | flag_end ← 0
          | "Note: the number of times steps is restricted to a maximum of 1000! Change if necessary"
          | λ ← lsolve(φ, Vinicial)
          | for i ∈ 2..N + 2
          |   | Vprov1,i ← Si-1
          |   | Vprov2,i ← Viniciali-1
          | Vprov1,1 ← "Perfil"
          | for it ∈ 3..3000
          |   | Vpred ← Vpr(Va, V1a, V2a, dta, dt1a, dt2a, it) if it ≥ 3 ∧ method = "MBA"
          |   | Vprovit,1 ← Vprovit-1,1 + dta
          |   | time ← Vprovit,1
          |   | C ← Hright(dta)·λ
          |   | λ ← lsolve(Hleft(dta), C)
          |   | VV ← φ·λ
          |   | VV1 ← 0
          |   | VVN+1 ← max(SN+1 - E·e-r·time, 0)
          |   | for j ∈ 2..N + 2
          |   |   | Vprovit,j ← VVj-1
          |   | Vprovit,N+3 ← it
          |   | λ ← lsolve(φ, VV)
          |   | V2a ← V1a
          |   | V1a ← Va
          |   | Va ← VV
          |   | dtt ← dta
          |   | dtt ← delta(Va, Vpred, dta, dt1a) if it ≥ 3 ∧ method = "MBA"
          |   | dt2a ← dt1a
          |   | dt1a ← dta
          |   | dta ← dtt
          |   | break if flag_end = 1
          |   | if (time + dta) ≥ T
          |   |   | dta ← T - time
          |   |   | flag_end ← 1
          | Vprov

```

	1	2	3	4	5
1	"Perfil"	$1 \cdot 10^{-3}$	0.715	1.43	2.144
2	0	0	0	0	0
3	$1 \cdot 10^{-3}$	0	$2.268 \cdot 10^{-9}$	$-5.582 \cdot 10^{-9}$	$4.072 \cdot 10^{-9}$
4	$1.124 \cdot 10^{-3}$	0	$2.563 \cdot 10^{-9}$	$-6.283 \cdot 10^{-9}$	$4.593 \cdot 10^{-9}$
5	$1.177 \cdot 10^{-3}$	0	$2.688 \cdot 10^{-9}$	$-6.558 \cdot 10^{-9}$	$4.826 \cdot 10^{-9}$
6	$1.243 \cdot 10^{-3}$	0	$2.855 \cdot 10^{-9}$	$-6.927 \cdot 10^{-9}$	$5.097 \cdot 10^{-9}$
7	$1.405 \cdot 10^{-3}$	0	$3.256 \cdot 10^{-9}$	$-7.854 \cdot 10^{-9}$	$5.759 \cdot 10^{-9}$
8	$1.626 \cdot 10^{-3}$	0	$3.787 \cdot 10^{-9}$	$-9.091 \cdot 10^{-9}$	$6.655 \cdot 10^{-9}$
9	$1.858 \cdot 10^{-3}$	0	$4.33 \cdot 10^{-9}$	$-1.041 \cdot 10^{-8}$	$7.587 \cdot 10^{-9}$
10	$2.081 \cdot 10^{-3}$	0	$4.846 \cdot 10^{-9}$	$-1.167 \cdot 10^{-8}$	$8.479 \cdot 10^{-9}$
11	$2.305 \cdot 10^{-3}$	0	$5.369 \cdot 10^{-9}$	$-1.293 \cdot 10^{-8}$	$9.373 \cdot 10^{-9}$
12	$2.544 \cdot 10^{-3}$	0	$5.918 \cdot 10^{-9}$	$-1.428 \cdot 10^{-8}$	$1.033 \cdot 10^{-8}$
13	$2.806 \cdot 10^{-3}$	0	$6.53 \cdot 10^{-9}$	$-1.575 \cdot 10^{-8}$	$1.137 \cdot 10^{-8}$
14	$3.091 \cdot 10^{-3}$	0	$7.187 \cdot 10^{-9}$	$-1.735 \cdot 10^{-8}$	$1.251 \cdot 10^{-8}$
15	$3.398 \cdot 10^{-3}$	0	$7.9 \cdot 10^{-9}$	$-1.907 \cdot 10^{-8}$	$1.374 \cdot 10^{-8}$
16	$3.729 \cdot 10^{-3}$	0	$8.664 \cdot 10^{-9}$	$-2.092 \cdot 10^{-8}$	...

$tt_x := V_{final}^{(1)}$  tempo em função da posição na matrix j  $rows(tt_x) = 122$

$ij_{tx} := V_{final}^{(N+3)}$  valor da linha associada ao tempo

Entre o tempo aproximado para a solução desejada:  $tt := T$

$ta_{assoc}$  e  $ia_{assoc}$  são, respectivamente, o tempo de simulação associado a  $tt$  ou o mais próximo superior a ele a o número da linha.

$ta_{assoc}(tt) := \begin{cases} \text{for } i \in 2.. rows(tt_x) \\ \text{break if } tt_x \geq tt \\ tt_x \end{cases}$ 

 $ia_{assoc}(tt) := \begin{cases} \text{for } i \in 2.. rows(tt_x) \\ \text{break if } tt_x \geq tt \\ ij_{tx} \end{cases}$

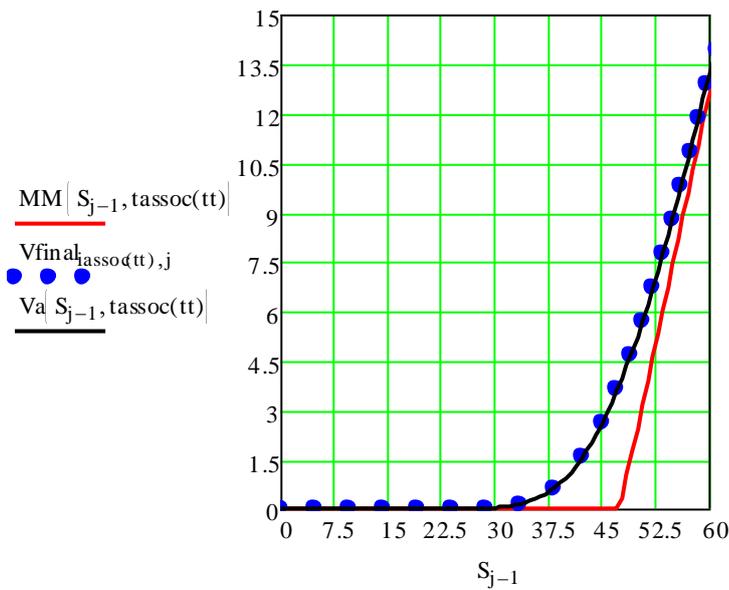
$ta_{assoc}(tt) = 1$   $ia_{assoc}(tt) = 122$

Valor analítico da opção de compra =  $V(S, \tau)$ ; Payoff function =  $MM(S, T)$

$$Va(SS, \tau) := \begin{cases} Sx \leftarrow 0.0001 & \text{if } SS \leq 0 \\ Sx \leftarrow SS & \text{otherwise} \\ d1 \leftarrow \frac{\ln\left(\frac{Sx}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2\right) \cdot \tau}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}} \\ d2 \leftarrow d1 - \sigma \cdot \sqrt{\tau} \\ VV \leftarrow Sx \cdot \text{cnorm}(d1) - E \cdot \text{cnorm}(d2) \cdot e^{-r \cdot \tau} \end{cases}$$

$$MM(Sx, \tau) := \text{if}(Sx \geq E \exp(-r \tau), Sx - E \exp(-r \tau), 0)$$

$$j := 2..N + 2$$



tt = 1    method = "MBA"

$$\text{Error}(a, b) := \left| \frac{a - b}{a} \right| \quad \frac{E}{\Delta S} = 70$$

$$Va(E, T) = 5.2253$$

$$V_{\text{final}}|_{\text{tassoc}(tt), \frac{E}{\Delta S} + 2} = 5.2253$$

$$a := Va(E, T)$$

$$b := V_{\text{final}}|_{\text{tassoc}(tt), \frac{E}{\Delta S} + 2}$$

$$\text{Error}(a, b) = 0.0000164\%$$

$i := 3..rows(Vfinal)$

Delta :=  $\left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 3..rows(Vfinal) - 1 \\ dt_{i-2} \leftarrow Vfinal_{i,1} - Vfinal_{i-1,1} \\ dt \end{array} \right.$

