

Universidade Federal de Minas Gerais

ALAN ALCIDES VIANA

**LOCALIZAÇÃO DE CONCENTRADORES
ORIENTADA A CUSTOS COM ECONOMIA
DE ESCALA VARIÁVEL**

Belo Horizonte
2009

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção
Escola de Engenharia
Universidade Federal de Minas Gerais**

**Localização de Concentradores Orientada a Custos
com Economia de Escala Variável**

Por:
Alan Alcides Viana

Orientador:
Gilberto de Miranda Júnior

Belo Horizonte
Março de 2009

AGRADECIMENTOS

- Ao professor Gilberto de Miranda Júnior pela orientação, os conselhos e a sabedoria, que tanto me ajudaram.
- À minha família, principalmente meus pais, que sempre me incentivaram na busca pelo melhor.
- À minha companheira Flávia, pelo amor e a compreensão, imensuráveis.
- A todos meus amigos e companheiros de trabalho.
- A todos os professores do PPGEF, pelos conhecimentos adquiridos ao longo de minha jornada.
- A CAPES, pelo incentivo financeiro concedido.

*“Na matemática você não
entende as coisas.
Você simplesmente se
acostuma com elas.”*

-Johann Von Neumann

RESUMO

O presente trabalho discute uma nova abordagem para o Problema de Localização de Concentradores. O objetivo é determinar, em uma dada rede, a instalação e a localização de concentradores e o fluxo de mercadorias (bens de consumo, passageiros, transmissão de dados) e a fim de suprir a demanda de um determinado conjunto de localizações, a partir de um conjunto de distribuidores, com o menor custo possível.

Os concentradores atuam como centros de transbordo que conectam diversas localidades. Desse modo, quando uma quantidade significativa de mercadorias passa por um par de concentradores, promovem-se economias em seus custos de transporte. É preciso enfatizar que a instalação destes concentradores é uma decisão estratégica de extrema importância, dado que seu custo é, geralmente, de uma ordem de grandeza maior que quaisquer outros custos existentes na rede.

Outro importante fator a ser observado é o nível de serviço requerido. Quando orientada a custos, necessita-se explorar as economias proporcionadas pelos centros de transbordo. Se orientada a serviço, conta a agilidade e a comodidade com que as mercadorias são transportadas. Neste trabalho, a proposta é buscar a eficiência global em uma rede, explorando ao máximo sua estrutura logística, com flexibilidade para escolher rotas que não passem por concentradores.

Um novo modelo de programação linear inteira mista foi criado para descrever o problema em questão, sendo este de difícil resolução. Com o intuito de resolvê-lo em tempo computacionalmente viável, aplicou-se a técnica de Decomposição de Benders, um algoritmo de projeção, que, em outros trabalhos, obteve sucesso na resolução de Problemas de Localização de Concentradores.

Palavras-Chave: Localização de Concentradores, Decomposição de Benders, Programação Linear Inteira Mista.

ABSTRACT

The present work shows a new approach for Hub Location Problems. Our goal is to determinate, in a given network, the installation and the location of the hubs and the commodities flow (consumer goods, digital data transmission, passengers) to supply the demand of a set of locations, by a set of distribution sites, with the lowest cost possible.

The hub structure acts like transshipment centers that connects several places. So, when a significant quantity of fluxes passes through a couple of hubs, scale economies arises in the transport cost. It is important to underline that the hub installation is a strategic decision of extreme significance, because its costs, generally, are much bigger than any other costs in the network.

Another important factor to be observed is the required service level. When the network is cost driven, there is a need to explore the scale economies provided by the inter-hub connection. If service driven, matters the agility and the comfort that the commodities are transported. In this work, the proposition is to bring global efficiency in the network, exploring to the maximum its logistic structure, with flexibility to choose other routes that doesn't pass through hubs.

A new mixed integer linear programming model is introduced to describe problem in subject, remembering that it is a hard problem to solve. Motivated by solving it in a computational feasible time we applied the Benders Decomposition algorithm, that has a good behavior solving Hub Location Problems in other works.

Keywords: Hub Location, Benders Decomposition, Mixed Integer Linear Programming.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS.....	i
RESUMO.....	iii
ABSTRACT.....	iv
SUMÁRIO.....	v
LISTA DE FIGURAS.....	vii
LISTA DE TABELAS.....	viii
LISTA DE SIGLAS.....	ix
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 2 - REVISÃO DA LITERATURA.....	3
2.1. Decomposição de Benders.....	3
2.2. Aceleração da Técnica de Decomposição de Benders.....	6
2.3. Problemas de Localização de Concentradores.....	7
<i>2.4.1. Benders Decomposition for the uncapacitated multiple allocation hub location problem</i>	
<i>2.4.2. Benders Decomposition for Hub Location Problems with Economies of Scale</i>	
<i>2.4.3. Multiple Allocation Hub-And-Spoke Network Design under Hub Congestion</i>	
<i>2.4.4. Outras Formulações e Técnicas de Resolução para o Problema de Localização de Concentradores</i>	
2.4. Conjunto Côncavo de Funções Lineares e Economias de Escala.....	19
CAPÍTULO 3 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	21
3.1. Definição do Modelo Matemático.....	24

CAPÍTULO 4 - MÉTODOS DE RESOLUÇÃO	28
4.1. Decomposição de Benders	28
4.1.1. <i>Introdução do Subproblema</i>	
4.1.2. <i>Corte de Benders</i>	
4.1.3. <i>Problema Mestre</i>	
4.1.4. <i>Algoritmo de Benders</i>	
4.2. Aceleração do Algoritmo Proposto	33
CAPÍTULO 5 - EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	35
5.1. Comparação entre Formulações	36
5.2. Testes	39
5.2.1. <i>Instâncias CAB</i>	
5.2.2. <i>Instâncias AP</i>	
5.2.3. <i>Observações Gerais</i>	
CONCLUSÃO	45
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	46

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Desenho de uma rede tributária/suporte.....	16
Figura 2: Exemplos de conexões em redes.	17
Figura 3: Níveis de desconto e conjunto côncavo de funções lineares.....	20
Figura 4: Conexão direta.....	21
Figura 5: Conexão através de um concentrador.....	21
Figura 6: Conexão inter-concentradores.....	22
Figura 7: Funções dos níveis de desconto.....	22
Figura 8: Desenho UMAHLP.....	37
Figura 9: Desenho PLC-1.....	38

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Funções de Fator de Desconto.....	35
Tabela 2: Comparação das soluções entre formulações.....	36
Tabela 3: Resultados Computacionais das Instâncias CAB	40
Tabela 4: Resultados Computacionais das Instâncias AP	41
Tabela 5: Variação no número máximo de iterações X tempo total.....	44

LISTA DE SIGLAS

AP – *Australian Post*

CAB – *Civil Aeronautics Board*

CB – Corte de Benders

LI – Limite Inferior

LS – Limite Superior

PLC – Problema de Localização de Concentradores

PLIM – Programação Linear Inteira Mista

PM – Problema Mestre

SP – Subproblema

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O Problema de Localização de Concentradores (**PLC**) tem grande aplicação no âmbito da Engenharia Industrial, em especial em áreas como telecomunicações, aeronáutica e logística. Tal fato faz com que este seja um problema cada vez mais pesquisado, principalmente no campo da Pesquisa Operacional e da Otimização Combinatória, onde vários estudos já foram desenvolvidos. GOLDBARG & LUNA [11] consideram o problema como um dos mais importantes na área computacional.

No entanto, os trabalhos desenvolvidos até o presente momento, tratam o problema sob a perspectiva de dois níveis de serviço: Orientados a custo e orientados a serviço. Nos orientados a custos, as mercadorias transportadas aproveitam as conexões inter-concentradores a fim de obter maiores economias, até atingir seu destino final. Nos orientados a serviço, evitam-se as escalas, isto é, as mercadorias tendem a minimizar a utilização das conexões inter-concentradores até cumprir seu destino. Em ambos os casos existe a necessidade de que os fluxos sejam roteirizados através de, no mínimo, um par de concentradores.

A motivação do presente trabalho deu-se a partir da necessidade de criar uma estrutura mais flexível que possibilite habilitar rotas alternativas, não necessariamente ligadas por pares de concentradores. Desse modo surge um terceiro nível de serviço: O totalmente orientado a custos. Nele, esperar-se encontrar uma rede mista, composta por fluxos que utilizem ou não as conexões entre pares de concentradores. Com o este novo nível de serviço pode-se traçar uma estratégia menos dispendiosa que aquela somente orientada a custos, aproveitando-se as vantagens logísticas de determinadas regiões.

Como objetivo geral, será apresentado uma nova formulação para o modelo de localização de concentradores. Nesta nova formulação será definido um novo nível de serviço capaz de promover maiores economias no transporte de mercadorias, explorando a estrutura de custos da rede. Como características do novo modelo têm-se:

- A inexistência de limitações quanto à capacidade de transporte de mercadorias.
- Descontos em escala para mercadorias que são transportados através de conexões entre pares de concentradores.
- Somente um tipo de mercadoria é transportado na rede.
- Todas as localizações são candidatas a possíveis concentradores.
- Não há transporte de mercadorias de uma localidade para ela mesma.

Esta dissertação busca desenvolver uma nova abordagem que minimize os custos de transporte de mercadorias e da instalação de concentradores, evidenciando sua localização. Além do objetivo geral, anteriormente definido, esperar-se:

- Desenvolver uma nova formulação de programação linear inteira mista para o **PLC**.
- Criar uma ferramenta estratégica de tomada de decisão.
- Desenvolver um método computacionalmente eficiente para a resolução do problema proposto.
- Testar instâncias conhecidas na literatura a fim de comprovar a eficácia do modelo produzido.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

Esta revisão tem como objetivo caracterizar e contextualizar os principais **PLCs** e suas características. Também apresenta as principais técnicas aplicadas na resolução deste tipo de problema.

2.1. DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

A Decomposição de Benders é um algoritmo para resolver problemas em larga escala através de uma técnica de projeção, também conhecida como particionamento. Foi introduzida por J. F. Benders em seu artigo “*Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems*” (ver BENDERS [1]) e, desde então, vem sendo utilizada na Otimização Combinatória para resolver problemas de larga escala com variáveis complicantes.

A técnica consiste, basicamente, de separar o problema em duas versões mais simples: Um problema inteiro, chamado de Problema Mestre e um problema linear, chamado de Subproblema. O **PM** é a versão relaxada do problema original com um conjunto de variáveis inteiras e suas restrições associadas. Já o **SP** é um problema com os valores das variáveis inteiras temporariamente fixadas pelo **PM**.

GEOFFRION [9] apresentou a uma versão generalizada da Decomposição de Benders. Neste artigo são identificadas as principais conveniências em se resolver o problema por esta técnica. São elas:

1. Os cálculos podem ser amplamente descentralizados e feitos em paralelo para cada **SP** menor e independente;
2. As não-convexidades podem ser tratadas separadamente da parte convexa do problema;

3. Podem-se utilizar algoritmos eficientes, tais como o SIMPLEX, na resolução do **SP**.

O autor descreve ainda, neste artigo, o teorema de projeção, o qual viabiliza o particionamento de problemas.

Para o sucesso computacional da Decomposição de Benders, são necessários três requisitos básicos:

1. O número de variáveis inteiras deve ser muito menor que o número de variáveis contínuas;
2. O **SP** deve ser de fácil resolução;
3. O problema deve apresentar uma estrutura de variáveis, chamada bloco-diagonal.

MARTIN [23] descreve de forma simples o algoritmo este algoritmo.

Seja o **PM**:

Minimize Z_0

Sujeito a

$$z_0 \geq f^T y + (u^i)^T (b - By), i = 1, \dots, q$$

$$0 \geq (u^i)^T (b - By), \quad i = q + 1, \dots, r$$

$$y \in Y$$

Onde q é o número de pontos extremos e r o número de raios extremos.

E o **SP**:

$$\text{Maximize} \quad f^T \bar{y} + (b - B\bar{y})u$$

Sujeito a

$$A^T u \leq c$$

$$u \geq 0$$

Podemos escrever o algoritmo de Benders da seguinte forma:

Algoritmo de Benders

Passo 1: Encontre o $\bar{y} \in Y$ e faça o limite superior $UB \leftarrow \infty$ e o limite inferior $LB \leftarrow -\infty$.

Passo 2: Para o \bar{y} corrente resolva o **SP**. Se ele for inviável encerre. Se o **SP** for ilimitado, gere uma direção extrema u^i . Se o **SP** tiver solução ótima, encontre o ponto extremo u^i . Quando uma solução ótima é encontrada, faça $UB \leftarrow \min \{UB, f^T \bar{y} + (b - B\bar{y})u^i\}$ desde que se encontre uma nova solução viável. Se $UB - LB < \epsilon$ encerre, senão, vá ao passo 3.

Passo 3: Se u^i é um ponto extremo, adicione a restrição, chamada de Corte de Benders $z_0 \geq f^T y + (u^i)^T (b - By)$ ao **PM** relaxado. Se u^i é um raio extremo para o **SP** ilimitado, adicione $(u^i)^T (b - By) \leq 0$ ao **PM** relaxado. Re-otimize o **PM** e obtenha uma nova solução \bar{y} . Se em algum ponto o **PM** tornar-se inviável encerre; o problema é inviável.

De uma forma geral, encontramos a aplicação de Benders no campo da Otimização Combinatória e da Pesquisa Operacional. GEOFFRION & GRAVES [10] exemplificam o sucesso da técnica em um problema de Projeto de Redes Não-Capacitadas. MIRANDA [25] utiliza a técnica para a resolução de problemas de Projeto de Redes *Multicasting*. CANTO [5] utiliza a Decomposição de Benders em um problema de Seqüenciamento de Manutenções Preventivas. PAPADAKOS [27] utiliza um método de aceleração da geração de colunas, juntamente a técnica de Benders para o Seqüenciamento de Linhas Aéreas. CAMARGO et al. [2] resolvem o Problema de Múltipla Alocação de Concentradores Não-Capacitados com três variações da técnica, sendo uma delas um algoritmo de múltiplos cortes de Benders. CAMARGO et al. [3] mostram um exemplo da Decomposição de Benders Generalizada em um modelo de Múltipla Alocação de Concentradores sob Congestionamento. CAMARGO et al. [4] aplicam com sucesso a Decomposição de Benders para a resolução de um **PLC** com

economias de escala. Estas três últimas obras, devido a relevância para o desenvolvimento do presente trabalho, serão detalhadas ainda neste capítulo.

Assim, percebe-se que a Decomposição de Benders é uma técnica robusta para lidar com vários tipos de problemas que tenham variáveis complicantes.

2.2. ACELERAÇÃO DA TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

MAGNANTI & WONG [22] notaram que, com Subproblemas degenerados de Benders, cortes de diferentes forças poderiam ser realizados. Então, criaram um problema que insere o corte mais forte possível. No entanto, notou-se que o programa que gera tais cortes dependia dos *core points* do **SP** e do **PM** de Benders. É importante destacar que, no que concerne a dependência dos *core points*, em muitos problemas, há dificuldade em encontrá-los.

PAPADAKOS [26] notou que esta dependência poderia piorar muito o desempenho do algoritmo e, motivado por isto, desenvolveu um algoritmo melhorado a partir do daquele proposto por Magnanti e Wong, para ajudar o algoritmo de Benders a estar mais perto do ótimo nas primeiras iterações. Nele, eliminam-se os problemas ilimitados, gerando cortes mais robustos e, desse modo, pode-se obter um programa independente da solução do **SP**.

O algoritmo proposto para a aceleração do problema é demonstrado abaixo:

Algoritmo Independente de Magnanti-Wong

$$P \leftarrow R \leftarrow \emptyset, LS \leftarrow \infty$$

M-W: Encontre um ponto *Magnanti-Wong* \mathbf{y}_0 .

Use \mathbf{y}_0 para resolver o problema independente de *Magnanti-Wong*

$$P \leftarrow P \cup \{\bar{\mathbf{u}}\}.$$

PM: Resolva o problema mestre de Benders.

Se inviável, então retorne *inviável*.

SP: Use $\bar{\mathbf{y}}$ para resolver o subproblema dual

Se o subproblema dual for ilimitado
Então $R \leftarrow R \cup \{\bar{\mathbf{u}}\}$, vá para **M-W**.
 $LS \leftarrow \min\{LS, c(\bar{\mathbf{y}}) + z(\bar{\mathbf{u}})\}$, $LI \leftarrow c(\bar{\mathbf{y}}) + \bar{z}$.
Se $LS - LI > \epsilon$ então vá para **M-W**.
Retorne $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$.

P e R são o número de pontos extremos e o número de raios extremos, respectivamente. LS e LI são os limites superior e inferior, respectivamente. Com o algoritmo descrito acima, tem-se uma aceleração do algoritmo de Benders em uma fase denominada pré-processamento que, basicamente, reduz o número de cortes realizados pelo mesmo, dado que são introduzidos cortes mais profundos na nesta etapa do programa.

2.3. PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO DE CONCENTRADORES

Os **PLCs** tratam basicamente de redes com tráfego concentrado em um ou mais concentradores, que funcionam como centros de transbordo, distribuindo fluxos entre múltiplos pares origem-destino.

Na maioria dos problemas a arquitetura da rede é do tipo *hub-and-spoke* (concentra e distribui), que são sistemas de conexões arranjados como raios de um círculo, no qual todos os tráfegos se movem através desses raios, tendo como concentrador o seu centro e como localidades, seu perímetro.

O problema surgiu com o trabalho de O`KELLY [28] *The location of interacting hub facilities*. Esta obra lhe rendeu novas linhas de pesquisa além de vários artigos publicados. Contudo, em uma literatura mais atual, percebem-se evoluções do modelo juntamente a novas técnicas de resolução.

2.3.1. Benders Decomposition for the Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location Problem

O problema proposto por HAMACHER et al. [12] traz um modelo de localização de concentradores com as seguintes definições:

- Seja N um conjunto de nodos;
- Seja K um conjunto de possíveis candidatos a concentradores ($K \subseteq N$);
- w_{ij} é a demanda de i para j ;
- a_k é o custo fixo de instalação do concentrador k ;
- c_{ijkm} é o custo de transporte por unidade de fluxo. Este custo é ajustado por um fator de desconto fixo $0 < \alpha < 1$ entre os concentradores k e m ;
- y_k é a variável de decisão instalação de um concentrador no candidato k ;
- x_{ijkm} é o fluxo de i para j passando pelos concentradores k e m .

A formulação do modelo UMAHLP (*uncapacitated multiple allocation hub location problem*) ficou como se segue abaixo:

$$\text{Minimizar } \sum_k a_k y_k + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m c_{ijkm} x_{ijkm}$$

Sujeito a

$$\sum_{m|m \neq k} x_{ijmk} + \sum_m x_{ijkm} \leq w_{ij} y_k \quad \forall i, j \in N, k \in K$$

$$\sum_k \sum_m x_{ijkm} = w_{ij} \quad \forall i, j \in N$$

$$x_{ijkm} \geq 0 \quad \forall i, j \in N, k, m \in K$$

$$y_k \in \{0,1\} \quad \forall k \in K$$

A partir desta formulação, percebe-se que, se todos os concentradores forem candidatos, existem $n^4 - n^2$ variáveis de fluxo, comparadas ao número de variáveis inteiras n . Também, pela inexistência de restrições de capacidade, ambos os nodos e arcos, do modelo acima têm solução viável para uma dada estrutura fixada de concentradores. A partir destas idéias CAMARGO et al. [2] utilizam as técnicas de Decomposição de Benders para resolvê-lo. São apresentadas no artigo três variações da técnica de projeção:

Problema Mestre

$$\text{Minimizar } \varphi + \sum_k a_k y_k$$

Sujeito a

$$\varphi + \sum_i \sum_j (w_{ij} \sum_k y_k u_{ijk}^H) \geq \sum_i \sum_j w_{ij} \alpha_{ij}^H$$

$$\sum_k y_k \geq 1$$

$$\varphi \geq 0$$

$$y_k \in \{0,1\}, \quad \forall k \in K$$

Subproblema

$$\text{Maximizar } \sum_i \sum_j w_{ij} \alpha_{ij} - \sum_k y_k^H u_{ijk}$$

Sujeito a

$$a_{ij} - u_{ijk} - u_{ijm} \leq c_{ijkm} \quad \forall i, j \in N, k \neq m, k, m \in K$$

$$a_{ij} - u_{ijk} \leq c_{ijkk} \quad \forall i, j \in N, m \in K$$

$$u_{ijk} \geq 0 \quad \forall i, j \in N, k \in K$$

$$\alpha_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j \in N$$

1- Benders Clássico

Após a definição do **PM** e da dualização do **SP** (ver CAMARGO et al. [2]) temos:

Passo 1: Faça $LS = +\infty$, $LI = 0$.

Passo 2: Se $LI = LS$, pare. O problema obteve a solução ótima do problema original.

Passo 3: Resolva o **PM**, obtendo Z_{MP}^* e os valores ótimos das variáveis inteiras y_k .

Passo 4: Faça $LI = Z_{MP}^*$ e atualize y_k no novo **SP**.

Passo 5: Resolva o **SP**.

Passo 6: Adicione um novo corte de Benders ao **PM**.

Passo 7: Se $Z_{SP}^* + \sum_k a_k y_k < LS$, faça $LS = Z_{SP}^* + \sum_k a_k y_k$. Vá ao **passo 2**.

2- Algoritmo de Benders com Cortes Múltiplos

Aqui os autores constroem um algoritmo que decompõe o **SP** atual em pequenos subproblemas, para cada par $i - j$. Uma nova formulação do corte de Benders é feita (ver CAMARGO et al. [2]). Assim, o novo algoritmo fica:

Passo 1: Faça $LS = +\infty$, $LI = 0$.

Passo 2: Se $LI = LS$, pare. O problema obteve a solução ótima do problema original.

Passo 3: Resolva o novo **PM**, obtendo Z_{MP}^* e os valores ótimos das variáveis inteiras y_k .

Passo 4: Faça $LI = Z_{MP}^*$ e atualize y_k no **SP**.

Passo 5: Resolva o **SP**.

Passo 6: Adicione um conjunto de restrições ao novo **PM**.

Passo 7: Se $Z_{SP}^* + \sum_k a_k y_k < LS$, faça $LS = Z_{SP}^* + \sum_k a_k y_k$. Vá ao **passo 2**.

3- Algoritmo de Benders Modificado

Por fim os autores constroem uma versão modificada do algoritmo de Benders, baseada no algoritmo de distribuição de commodities de GEOFFRION & GRAVES

[10], que mostra que o **PM** não necessita ser resolvido até o ótimo. Ele pode parar quando a primeira melhor solução viável, melhor que a solução corrente até então encontrada é alcançada. Desse modo temos (ver CAMARGO et al. [2]):

Passo 1: Faça $LS = +\infty$.

Passo 2: Resolva o **MP** modificado. Se a solução é inviável, pare. A melhor solução corrente é a ε -ótima solução. Senão, Pegue os valores ótimos das variáveis inteiras y_k .

Passo 3: Atualize os valores de y_k no novo **SP**.

Passo 4: Resolva o novo **SP**.

Passo 5: Adicione um novo corte de Benders ao **PM**.

Passo 6: Atualize o LS se necessário, mantendo a melhor solução corrente. Vá ao **passo 2**.

Neste artigo foi evidenciado que os três algoritmos foram aptos para resolver instâncias grandes, mostrando-se eficiente em todos os casos. Outro fator importante é o ganho percebido sobre os métodos exatos, até então utilizados para resolver o problema.

2.3.2. Benders Decomposition for Hub Location Problems with Economies of Scale

O'KELLY & BRYAN [29] perceberam que o modelo proposto com fator constante de desconto ($0 < \alpha < 1$) tratava-se apenas de uma simplificação da realidade. Desse modo, os autores propuseram o modelo FLOWLOC, utilizando no lugar da constante fixa de custos, uma função linear côncava. Esta função tem a capacidade de oferecer diferentes níveis de desconto, conforme o nível de tráfego entre concentradores. Com ela foi possível introduzir o conceito de economias em escala no modelo proposto. Entende-se por economias em escala, no problema em questão, uma relação entre o aumento de descontos e o volume do fluxo que passa por uma conexão inter-concentradores, isto é, quanto maior o número de unidades de fluxo passando por uma determinada conexão, maior o desconto oferecido pela mesma.

A partir desta obra, CAMARGO et al. [4] construíram uma nova formulação mais justa do modelo para resolver o problema. Ela pode ser entendida como uma formulação de descontos em múltiplos níveis. Neste modelo tem-se um novo conjunto de variáveis que analisam os custos de tráfego, separadamente. Na primeira variável (\dot{x}_{ikmj}^l) tem-se uma parcela do fluxo, onde a origem i vai ao destino j através dos concentradores k e m ($k \neq m$) usando um nível de desconto l . A outra parcela (\bar{x}_{ikj}) constitui o fluxo de i para j utilizando somente o concentrador k . O modelo é apresentado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & \sum_k a_k y_k + \sum_i \sum_k \sum_l \sum_m \sum_j w_{ij} (c_{ik} + \alpha_{km}^l c_{km} + c_{mj}) \dot{x}_{ikmj}^l + \\ & \sum_i \sum_j \sum_k w_{ij} (c_{ik} + c_{kj}) \bar{x}_{ikj} + \sum_k \sum_l \sum_m b_{km}^l c_{km} z_{km}^l \end{aligned} \quad (1)$$

Sujeito a

$$\sum_l \sum_m \dot{x}_{ikmj}^l + \sum_l \sum_m \dot{x}_{imkj}^l + \bar{x}_{ikj} \leq y_k \quad \forall i, k, j \quad (2)$$

$$\sum_k \sum_l \sum_m \dot{x}_{ikmj}^l + \sum_k \bar{x}_{ikj} = 1 \quad \forall i, j \quad (3)$$

$$\sum_l z_{km}^l \leq y_k \quad \forall k, m \quad (4)$$

$$\sum_l z_{km}^l \leq y_m \quad \forall k, m \quad (5)$$

$$\sum_l z_{ij}^l \geq y_i + y_j - 1 \quad \forall i, j \quad (6)$$

$$z_{ij}^l \leq \dot{x}_{iij}^l \quad \forall i, j, l \quad (7)$$

$$\dot{x}_{ikmj}^l \leq z_{km}^l \quad \forall i, k, m, j, l \quad (8)$$

$$\dot{x}_{ikmj}^l \geq 0 \quad \forall i, k, m, j, l \quad (9)$$

$$\bar{x}_{ikj} \geq 0 \quad \forall i, k, j \quad (10)$$

$$z_{km}^l \in \{0,1\} \quad \forall k, m, l \quad (11)$$

$$y_k \in \{0,1\} \quad \forall k \quad (12)$$

Sendo,

- a_k é o custo de instalação do concentrador;
- w_{ij} é a demanda de i para j ;
- c_{ik}, c_{mj} e c_{km} são, respectivamente, os custos de transporte entre os trechos sem conexão inter-concentradores ($i \rightarrow k$) e ($m \rightarrow j$), e os trechos com a conexão ($k \rightarrow m$);
- α_{km}^l é o fator de desconto em um trecho $k \rightarrow m$;
- b_{km}^l é o intercepto da função linear de custo;
- y_k é a variável de decisão binária que representa 1, se o concentrador é instalado no candidato k , 0 caso contrário;
- z_{km}^l é a variável de decisão binária que representa 1, se a conexão $k - m$ utiliza uma faixa de desconto l , 0 caso contrário;
- \bar{x}_{ikmj}^l e \bar{x}_{ikj} são variáveis que representam a ativação de uma rota $i \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow j$ ou $i \rightarrow k \rightarrow j$, respectivamente.

A partir desta nova formulação, os autores utilizaram a técnica de Decomposição de Benders para resolver o problema, obtendo bons resultados, tanto da qualidade dos *GAPs*, como em tempo computacional.

Outro ponto importante discutido neste artigo são os níveis de serviço oferecidos para o transporte. O modelo acima descrito é endereçado a uma versão orientada a custos, isto é, são exploradas as economias em escala que acontecem quando grandes quantidades de fluxo passam por uma conexão inter-concentradores. Geralmente, este tipo de nível de serviço é comum para passageiros de classe econômica ou mercadorias de baixo valor agregado. Por outro lado, quando os autores modificam o esquema de decomposição, precificando as variáveis duais provenientes da restrição (8), cria-se uma

estrutura orientada a serviços. Estas variáveis duais são custos compulsórios pagos para desviar o custo para uma rota direta, porém mais cara. Geralmente este tipo de nível de serviço está ligado a passageiros de classe executiva ou mercadorias perecíveis ou sensíveis e de alto valor.

2.3.3. Multiple Allocation Hub-And-Spoke Network Design under Hub Congestion

Neste artigo dá-se um exemplo de uma formulação de programação não-linear inteira mista para modelar congestionamentos através de uma função de custos linear convexa, que cresce exponencialmente quanto maior o fluxo que passa através dos concentradores. Esta função de congestionamento convexa é uma determinante na utilização da capacidade dos concentradores e tem sido amplamente usada como custo de atraso. A formulação abaixo representada baseia-se no modelo inicialmente proposto por HAMACHER et al. [12].

$$\text{Minimizar } \sum_k [a_k y_k + \tau_k(g_k)] + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m c_{ijkm} x_{ijkm} \quad (1)$$

Sujeito a

$$\sum_i \sum_j \sum_m x_{ijkm} + \sum_i \sum_j \sum_{m \neq k} x_{ijmk} = g_k \quad \forall k \in K \quad (2)$$

$$\sum_k \sum_m x_{ijkm} = w_{ij} \quad \forall i, j \in N \quad (3)$$

$$\sum_m x_{ijkm} + \sum_{m \neq k} x_{ijmk} \leq w_{ij} y_k \quad \forall i, j \in N, k \in K \quad (4)$$

$$x_{ijkm} \geq 0 \quad \forall i, j \in N, k, m \in K \quad (5)$$

$$g_k \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (6)$$

$$y_k \in \{0,1\} \quad \forall k \in K \quad (7)$$

Onde:

- $\tau_k(g_k)$: Função não-linear de custo de congestão em um concentrador k ;
- y_k : Variável binária que representa 1, caso o concentrador k esta instalado. 0, caso contrário;
- x_{ijkm} : é o fluxo da origem i ao destino j passando pelos concentradores k e m ;
- a_k : custo de instalação do concentrador k ;
- w_{ij} : demanda de uma mercadoria de i para j .

A função objetivo (1) minimiza os custos totais de transporte, instalação e de congestionamento. A restrição (2) determina o fluxo que passa através do concentrador k . A restrição (3) garante que o fluxo para cada par $i - j$, seja roteirizado por um par de concentradores. A restrição (4) garante que o fluxo nos concentradores só ocorre se eles já estiverem instalados. CAMARGO et al. [3] resolvem o problema utilizando a Decomposição de Benders Generalizada, obtendo resultados significativos.

2.3.4. Outras Formulações e Técnicas de Resolução para o Problema de Localização de Concentradores

A literatura dos **PLCs** conta com várias contribuições. O'KELLY et al. [30] desenvolveram modelos de alocação de concentradores, tanto múltipla quanto simples: Na alocação múltipla, pode-se interagir através de um par de nodos para selecionar a rota com custo mais eficiente através dos concentradores. Na alocação simples, todos os fluxos de, e para, qualquer nodo não-concentrador deve passar pelo concentrador ao qual foi alocado. Os autores utilizam dois métodos exatos de solução (heurísticas) chamados MAXFLO e ALLFLO. No primeiro, faz-se a designação de um nodo para o concentrador que possui fluxo máximo. No segundo, aloca-se um nodo a um concentrador de forma a minimizar seu custo de transporte total.

KLINCEWICZ [15] descreve um algoritmo baseado em técnicas de dualização dentro de um esquema *branch-and-bound* para resolver um problema de localização de concentradores não-capacitado (UHLP).

O'KELLY [31] discute vários tipos de modelos relacionados com localização de concentradores em redes. Neste artigo são apresentadas também particularidades que dificultam a modelagem de problemas do tipo *hub-and-spoke*. Uma atenção especial é dada ao sistema de transporte aéreo de passageiros, onde a instalação de novos aeroportos pode interferir nas taxas cobradas nas passagens. Outro ponto abordado é o frete que, diferentemente do transporte de passageiros, faz o uso dos concentradores como estratégia de transporte de materiais, sendo, às vezes, sensível ao tempo.

KLINCEWICZ [16] mostra uma revisão de alguns algoritmos para resolver problemas que integram redes com sistema tributário, aplicável a conexão entre nodos e redes de suporte, referentes a conexões inter-concentradores, a partir da literatura das áreas envolvidas. Também explica as possíveis configurações das redes tributárias. São elas:

- (A) Estrela - onde todos os nodos se conectam a um único concentrador;
- (B) Anel - onde o trafego viaja através de um anel em duas direções;
- (C) Caminho - onde os nodos são conectados por um simples caminho;
- (D) Árvore - onde uma estrutura com ramos é percorrida.

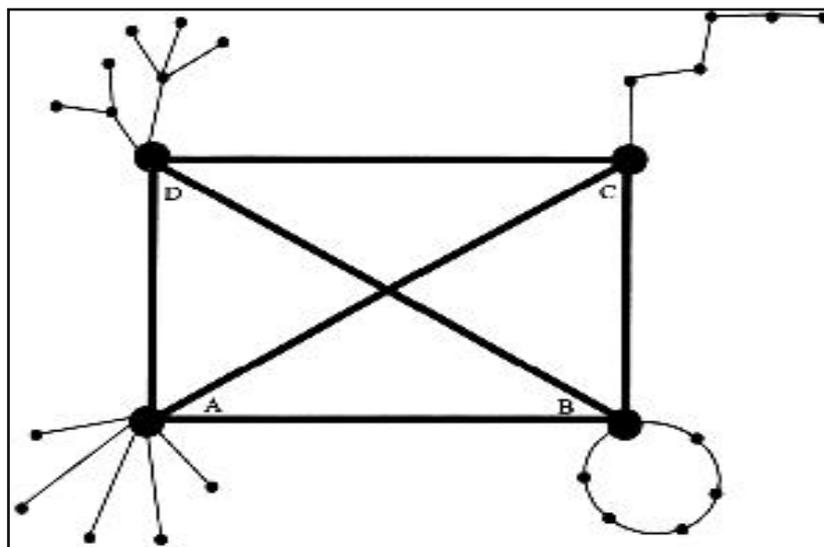


Figura 1: Desenho de uma rede tributária/suporte. **Fonte:** Klinecicz (1998)

LEDERER & NAMBIMADOM [20] descrevem outros tipos de redes para projeto de aeroportos. Estas redes mostram como se comportam os fluxos das aeronaves.

- (1) Rede direta: Todos os destinos estão diretamente conectados a uma origem comum. Neste caso os aviões viajam e deixam seus passageiros em seus destinos, voltam para pegar passageiros e viajam para um próximo destino.
- (2) Rede *Hub-and-Spoke*: Neste tipo de rede há um intercâmbio de fluxos. Dessa forma os aviões chegam ao concentrador, esperam os passageiros trocarem de aviões e partem para seus destinos.
- (3) Rede *Tour*: Seguem uma rota planejada até o último destino e depois retornam a origem.
- (4) Rede *Sub-Tour*: há um conjunto de rotas planejadas que tem como ponto de encontro um concentrador. A partir deste, podem seguir um novo *tour*.

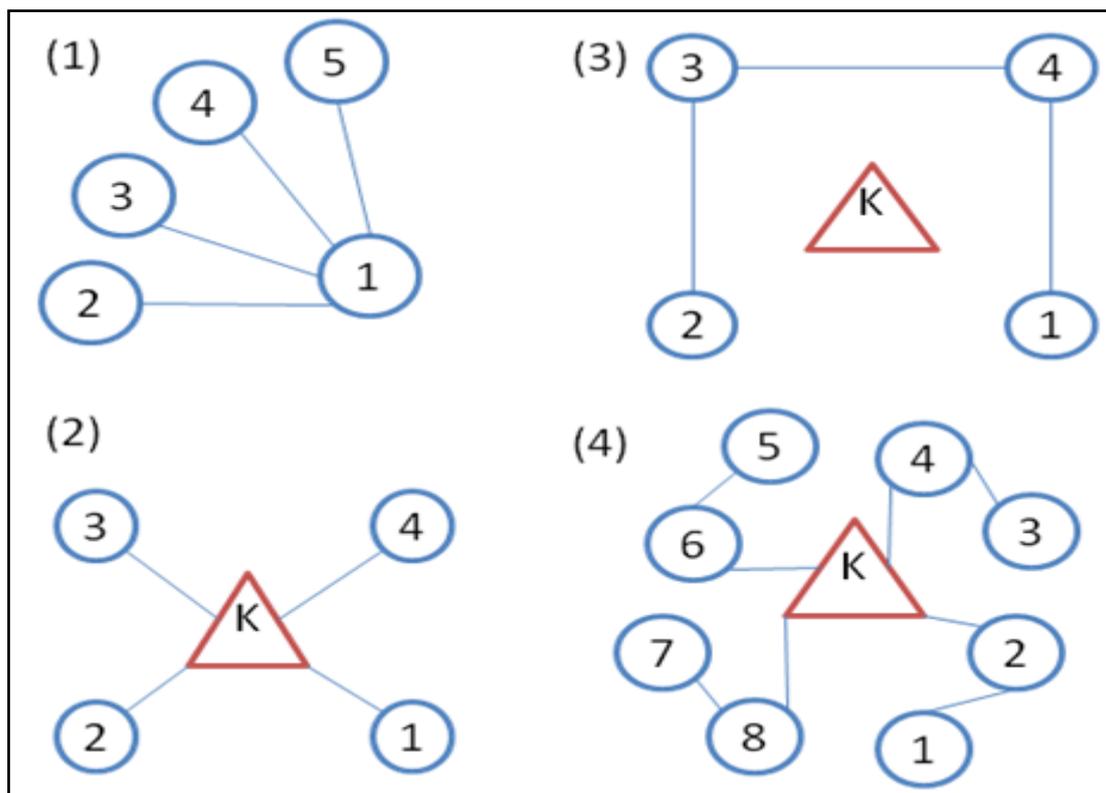


Figura 2: Exemplos de conexões em redes. (1) Rede direta; (2) Rede *Hub-and-Spoke*; (3) Rede *Tour*; (4) Rede *Sub-Tour*. **Fonte:** LEDERER & NAMBIMADOM [20]

KRISHNAMOORTHY et al. [18] apresentaram novas formulações e soluções aproximadas para o problema de localização de concentradores capacitados com alocação múltipla. O método de solução trata-se de uma heurística que, num estágio inicial, resolve o problema como se ele fosse não-capacitado, através de um algoritmo de caminho mais curto entre todos os pares. Se as restrições de capacidade estão satisfeitas tem-se uma solução viável para o problema e este valor é armazenado. Caso contrário, faz-se um novo roteiro do fluxo excedente. KRISHNAMOORTHY et al. [19] também desenvolveram procedimentos de pré-processamento e inserção de restrições mais justas para a resolução de **PLCs**.

HAMACHER et al. [13] analisam a viabilidade de um determinado poliedro no **PLC** não-capacitado. A partir de algumas classes de facetas deste poliedro, determina-se um procedimento para apará-las. Este procedimento torna apto determinar uma nova classe de facetas que podem ser introduzidas para obter uma formulação mais justa do problema.

MARTÍN et al. [24] apresentam novas formulações para o modelo de localização de concentradores de múltipla alocação. Nesta obra o autor realiza um pré-processamento dos parâmetros do modelo para analisar variáveis que possuem custos pouco competitivos. Uma comparação é realizada entre os custos C_{ijkm} , C_{ijmk} , C_{ijkk} e C_{ijmm} , de modo a escolher o custo mínimo ente estes valores. Desse modo as variáveis X_{ijkm} com $C_{ijkm} > \bar{C}_{ijkm}$ sempre terão valor 0.

RODRIGUEZ et al. [32] mostra um **PLC**, que se encontram sob restrições de capacidade, para transporte de cargas. Para resolvê-lo, utiliza o algoritmo *Simulated Annealing*. Este algoritmo consiste de duas partes fundamentais: na primeira, uma solução inicial é determinada e na segunda, melhora-se esta solução.

GALEREH & NICKEL [8] estudaram uma nova abordagem para o problema de localização de concentradores, direcionada ao planejamento transporte público. Foram introduzidas novas classes de desigualdades válidas, utilizando algumas variantes da Decomposição de Benders, inclusive sua versão acelerada, para sua resolução. Além deste método, também foi utilizada uma heurística de Busca Gulosa na Vizinhança. Ambos métodos apresentaram-se eficientes na resolução do problema.

2.4. CONJUNTO CÔNCAVO DE FUNÇÕES LINEARES E ECONOMIAS DE ESCALA

Economia de escala é um tipo de desconto progressivo, onde processos são organizados de modo a alcançar a máxima utilização de seus fatores produtivos envolvidos, buscando como resultado baixos custos, à medida que se aumentam a o número de unidades produzidas.

Para se obter uma maior aproximação da realidade, as economias de escala são introduzidas nos problemas, para traduzir o custo-benefício de se investir em uma ampliação de um processo produtivo e obter custos unitários mais baratos ou manter uma estrutura mais modesta, com valor unitário mais caro. Isto ocorre em grande parte dos serviços de transporte, em pacotes promocionais de agências de turismo ou mesmo nas vendas por atacado.

Nos problemas de **PLIM**, as economias de escala são modeladas através de um conjunto côncavo de funções lineares. À medida que tem-se necessidade de um maior número de unidades de uma determinada mercadoria a serem produzidas, uma nova função de custos, com menor inclinação, é ativada, através de uma variável binária, proporcionando um menor custo unitário. Esta inclinação diminui a uma taxa previamente estipulada, até um determinado nível máximo de desconto.

No trabalho de KIMMS [14] são verificadas as abordagens mais comuns para representar as economias de escala em **PLC**, através de uma revisão bibliográfica de várias obras a respeito do assunto. Neste trabalho o autor cita outros autores (O’KELLY & BRIAN [29] e KLINCEWICZ [17]) que julgam que a simplificação do custo de transporte inter-concentradores e a presunção de que eles sejam fluxos independentes implica no erro do calculo total da rede, bem como o erro na seleção da alocação e localização dos concentradores.

O conceito de conjunto côncavo de funções de custo lineares já foi utilizado em outras obras como “*Variable disaggregation in Network Flow Problems with Piecewise Linear Costs*” (CROXTON et al. [6]), onde os autores estudam uma relaxação de um problema linear inteiro misto para problemas de fluxo em rede multi-mercadorias. Na rede, o

conjunto côncavo de funções lineares funciona como incrementos na capacidade de fluxo de um determinado arco e suas correspondentes economias de escala.

Abaixo temos um desenho esquemático com as faixas de custo em uma conexão inter-concentradores.

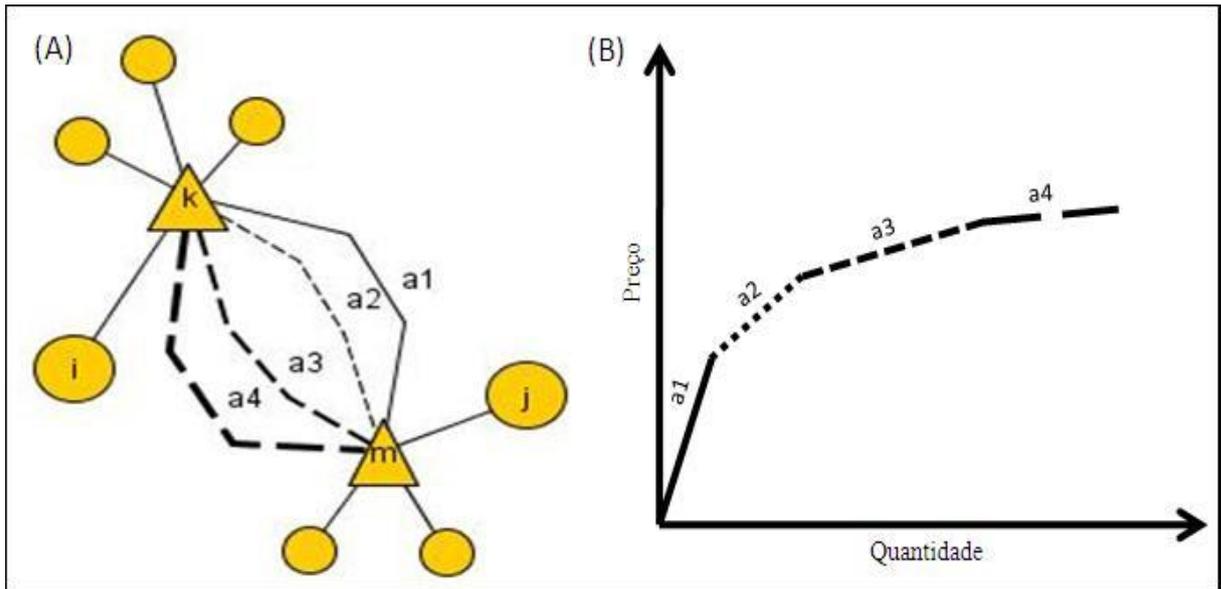


Figura 3: (A) Níveis de desconto na conexão de um par de concentradores. (B) Conjunto côncavo de funções lineares. **Fonte:** Elaboração Própria

No desenho percebe-se que, cada uma das conexões a_1 , a_2 , a_3 e a_4 , representam diferentes níveis de desconto em uma conexão inter-concentradores. Pelo gráfico percebe-se que, aumentando a quantidade de unidades que passam pela conexão, promove-se uma inclinação negativa na função linear, que representa o decréscimo do custo unitário do transporte de mercadorias. Para ativar uma nova faixa de custos, é necessário pagar uma taxa de instalação, que ocorre no intercepto de duas funções e será explicado detalhadamente no capítulo 3.

CAPÍTULO 3

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O Problema de Localização de Concentradores Orientado a Custos com Economia de Escala Variável (**PLC-1**) pode ser definido da seguinte forma:

Seja N um conjunto de nodos que trocam fluxos entre si. Seja K um conjunto de possíveis localidades candidatas a concentradores, sendo que $K \equiv N$. Seja L um conjunto de funções lineares de custo, onde cada $l \in L$ é uma faixa de custo, formando um conjunto côncavo de funções lineares. A cada candidato $k \in K$, associa-se um custo a_k^l , sendo l uma nova faixa de custo associada. Para cada par i, j ($i, j \in N | i \neq j$) temos $w_{ij} > 0$ unidades de fluxo a serem demandadas de uma origem i para um destino j . Este transporte pode ser realizado de três possíveis maneiras:

1. Diretamente de um nodo i para um nodo j



Figura 4: Conexão direta. **Fonte:** Elaboração própria

2. Através de um concentrador k

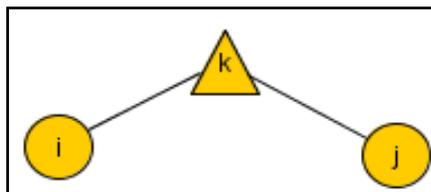


Figura 5: Conexão através de um concentrador. **Fonte:** Elaboração própria

3. Através de uma conexão inter-concentradores $k - m$

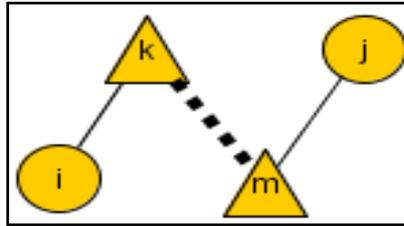


Figura 6: Conexão inter-concentradores. **Fonte:** Elaboração própria

Os custos associados ao transporte de cada unidade de fluxo são dados por c_{km} associado a um fator de desconto α^l , que reflete as economias de escala mencionadas anteriormente. Após um dado limite θ^l de unidades de fluxo, uma nova função linear deve ser ativada para o propósito de economias em escala. Desse modo, a cada nova função linear l , deve-se calcular seu novo custo de intercepto $c_{km}\beta^l$, resguardando os valores dos descontos previamente estabelecidos. Desse modo, temos que o intercepto β^l da nova função é calculado da seguinte forma: se $l = 1$, então o valor de $\beta^l = 0$. Senão, $l > 1$, então temos que $\beta^l = (\alpha^{l-1} - \alpha^l)\theta^l + \beta^{l-1}$. A Figura X ilustra melhor este fato.

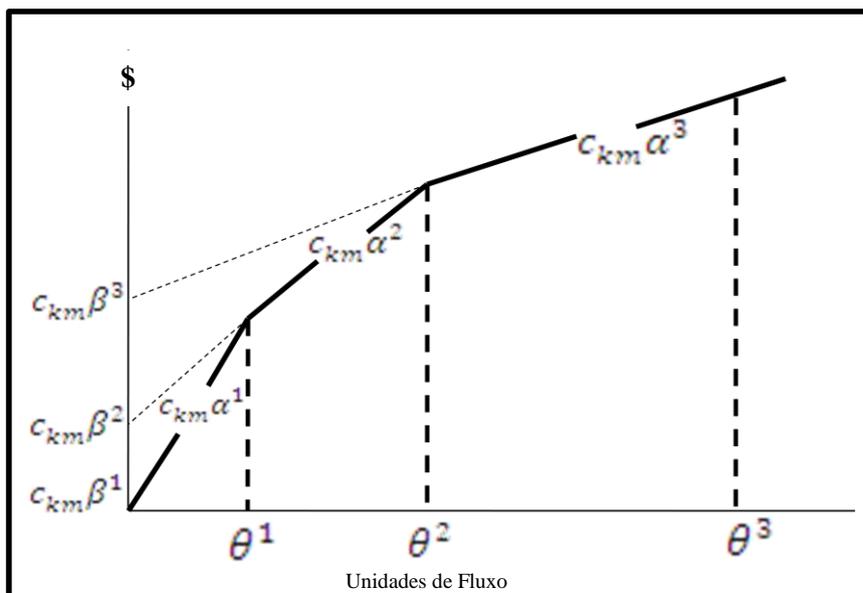


Figura 7: Funções dos níveis de desconto. **Fonte:** Elaboração própria

A variável linear x_{ijkm}^l , quando acionada ($x_{ijkm}^l = 1$), implica no transporte de toda demanda w_{ij} utilizando a rota $i - j - k - m$ com uma função linear de custo l . A variável binária y_k^l que incorre um custo de instalação a_k^l para cada concentrador k e para cada função de custos l , caso $y_k^l = 1$ e 0, caso contrário. Enfim, temos a variável binária $z_{km}^l = 1$, quando o intercepto $c_{km}\beta^l$ está ativado em uma conexão inter-concentrador, sendo 0, caso contrário. Pode ser interpretada como a expansão do terminal instalado, incorrendo seu respectivo custo. É importante frisar que nenhuma solução com mais de um nível de capacidade instalado é ótima no problema proposto. Podemos ver esta prova abaixo:

Proposição:

Nenhuma solução com mais de um nível de capacidade instalado por arco é ótima, a menos que um dos $(n-1)$ dos níveis instalados tenham custo de instalação nulo.

Prova:

Seja S uma solução do modelo proposto com mais de um nível de capacidade instalado para um mesmo arco. Seja $c(S)$ o custo total associado a essa solução. Se todos os custos de instalação de capacidade são estritamente positivos então, para aquele arco, é possível construir uma solução S' tal que $c(S') < c(S)$, com apenas um nível de capacidade instalado. Essa afirmação é válida uma vez que o fluxo inter-hub se dará pelo caminho de menor custo, o nível de capacidade instalado que oferecer maior economia de escala, e que S' reduz todos os custos de instalação aferidos em S a apenas um. A única exceção ocorre se os níveis de capacidade instalados adicionalmente em S tiverem custo de instalação nulo, caso em que S e S' seriam soluções de mesmo custo.

3.1. DEFINIÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Nesta seção, descreve-se o modelo, bem como seus parâmetros, variáveis de decisão, restrições e função objetivo.

Parâmetros

- N : Conjunto de localidades.
- K : Conjunto de candidatos a concentrador ($K \equiv N$).
- L : Conjunto de funções de custo lineares.
- a_k^l : Custo de instalação do concentrador k com a função de custo l .
- c_{km} : Custo de transporte de um nodo k para um nodo m .
- α^l : Fator de desconto de uma função de custo l .
- β^l : Valor do intercepto de uma função de custo l .
- θ^l : Limite de unidades de fluxo em uma função de custo l .
- w_{ij} : Mercadorias demandadas de uma origem i para um destino j .

Variáveis de decisão

- x_{ijkm}^l : igual a 1 caso o fluxo demandado siga a rota $i - j - k - m$ através de uma função de custo l ; 0 caso contrário.
- y_k^l : igual a 1 caso o concentrador esteja instalado em um candidato k utilizando a função de custo l ; 0 caso contrário.
- z_{km}^l : igual a 1 caso a função de custo l esteja instalada a conexão inter-concentradores $k - m$; 0 caso contrário.

Modelo Matemático

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z = & \sum_k^N \sum_l^L a_k^l y_k^l + \sum_{i \neq j}^N \sum_j^N \sum_l^L \sum_{\substack{k \neq m \\ k \neq j}}^N \sum_m^N w_{ij} c_{km} \alpha^l x_{ijkm}^l + \\ & \sum_l^L \sum_{\substack{k \\ k \neq m}}^N \sum_m^N c_{km} \beta^l z_{km}^l \end{aligned} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_l^L \sum_{\substack{k \\ k \neq m \\ k \neq j}}^N x_{ijkm}^l \leq \sum_l^L y_m^l \quad \forall i, j, m \in N; i \neq j, m \neq i, m \neq j \quad (2)$$

$$\sum_l^L \sum_{\substack{m \\ m \neq k \\ m \neq i}}^N x_{ijkm}^l \leq \sum_l^L y_k^l \quad \forall i, j, k \in N; i \neq j, k \neq i, k \neq j \quad (3)$$

$$\sum_l^L \sum_{m \neq i}^N x_{ijim}^l = 1 \quad \forall i, j \in N; i \neq j \quad (4)$$

$$\sum_l^L \sum_{\substack{k \\ k \neq j}}^N x_{ijkj}^l = 1 \quad \forall i, j \in N; i \neq j \quad (5)$$

$$\sum_l^L \sum_{\substack{k \\ m \neq k \\ k \neq j}}^N x_{ijkm}^l = \sum_l^L \sum_{\substack{k \\ m \neq k \\ k \neq i}}^N x_{ijmk}^l \quad \forall i, j, m \in N; i \neq j, m \neq i, m \neq j \quad (6)$$

$$z_{km}^l \leq y_k^h \quad \forall k, m \in N; \forall h, l \in L; k \neq m, h > 1, l > 1 \quad (7)$$

$$z_{km}^l \leq y_m^h \quad \forall k, m \in N; \forall h, l \in L; k \neq m, h > 1, l > 1 \quad (8)$$

$$\sum_l^L y_k^l \leq 1 \quad \forall k \in N \quad (9)$$

$$x_{ijkm}^l \leq z_{km}^l \quad \forall i, j, k, m \in N; \forall l \in L; i \neq j, k \neq m, m \neq i, k \neq j \quad (10)$$

$$z_{km}^1 = 1 \quad \forall k, m \in N; k \neq m \quad (11)$$

$$x_{ijkm}^l \geq 0 \quad \forall i, j, k, m \in N; \forall l \in L; i \neq j, k \neq m, m \neq i, k \neq j \quad (12)$$

$$z_{km}^l \in \{0,1\} \quad \forall k, m \in N; \forall l \in L; k \neq m \quad (13)$$

$$y_k^l \in \{0,1\} \quad \forall k \in N; \forall l \in L \quad (14)$$

Função Objetivo

A função objetivo (1) minimiza os custos de instalação dos concentradores, o custo de transporte das unidades de fluxo e o custo de instalação de uma nova função de custo.

Restrições

- As restrições (2) e (3) garantem que somente haverá fluxo em uma determinada rota que passe pelos concentradores $k - m$, se os mesmos estiverem instalados.
- As restrições (4) e (5) são restrições clássicas do problema de caminho mínimo (ver MAGNANTI[21]).
- A restrição (6) garante que os fluxos passem tanto no sentido $k - m$, quanto no sentido $m - k$ caso um par de concentradores já esteja instalado.
- As restrições (7) e (8) garantem que uma determinada função de custo somente será instalada caso haja uma conexão inter-concentradores correspondente, já instalada.
- A restrição (9) garante que, no máximo, uma função de custo pode ser instalada para cada concentrador.
- A restrição (10) garante que somente haverá fluxo em um determinado arco caso haja uma função linear estiver instalada.
- A restrição (11) garante que todas as funções de desconto no nível 1 estejam instaladas.

- A restrição (12) corresponde à restrição de não-negatividade da variável x_{ijkm}^l .
- As restrições (13) e (14) restringem, respectivamente, as variáveis inteiras z_{km}^l e y_k^l a adotarem valores 0 ou 1.

É importante ressaltar que não há restrições que limitem os fluxos somente a conexões inter-concentradores. Esta é a principal característica que permite uma estrutura totalmente orientada a custos.

Deste modo, fica assim definido o modelo do problema de Localização de Concentradores Totalmente Orientado a Custos, com Economias de Escala Variáveis.

CAPÍTULO 4

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

O modelo descrito no capítulo anterior trata-se de um modelo de **PLIM**. Observando a formulação proposta percebe-se que há qn^2 variáveis inteiras e $q(n^4 - n^3)$ variáveis contínuas, onde $q = |L|$. Dado o elevado número de variáveis do modelo, sua tendência é tornar-se computacionalmente inviável, à medida que as instâncias ficam maiores, elevando o tempo de processamento a uma escala exponencial. Tal problema pode ser classificado como um problema *np – completo*.

4.1. DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

Como observado na literatura, problemas de localização de concentradores foram resolvidos por diversos autores através de métodos exatos. Contudo, percebe-se um ganho quando a Decomposição de Benders é utilizada, mostrando-se um método muito eficiente para sua solução, tanto em tempo computacional. Motivado por isso, apresenta-se abaixo um esquema de Decomposição de Benders para resolução do **PLC-1**. O intuito é particionar o problema em dois problemas, mais fáceis que o problema original: um **PM** inteiro e um **SP** de fácil resolução.

4.1.1. Introdução do Subproblema

Inicialmente fixam-se os vetores de variáveis inteiras $z = z^q$ e $y = y^q$ na iteração q para garantir a viabilidade do problema (1)-(14). Assim, obtermos o seguinte problema linear:

$$\text{Minimizar } \sum_{\substack{i \\ i \neq j}}^N \sum_j^N \sum_l^L \sum_{\substack{k \\ k \neq m \\ k \neq j}}^N \sum_{\substack{m \\ m \neq i}}^N w_{ij} c_{km} \alpha^l x_{ijkm}^l + \pi^q + \delta^q \quad (15)$$

Sujeito a:

$$\sum_l^L \sum_{\substack{k \\ k \neq m \\ k \neq j}}^N x_{ijkm}^l \leq \sum_l^L (y_m^l)^q \quad \forall i, j, m \in N; i \neq j, m \neq i, m \neq j \quad (16)$$

$$\sum_l^L \sum_{\substack{m \\ m \neq k \\ m \neq i}}^N x_{ijkm}^l \leq \sum_l^L (y_k^l)^q \quad \forall i, j, k \in N; i \neq j, k \neq i, k \neq j \quad (17)$$

$$\sum_l^L \sum_{\substack{m \\ m \neq i}}^N x_{ijim}^l = 1 \quad \forall i, j \in N; i \neq j \quad (18)$$

$$\sum_l^L \sum_{\substack{k \\ k \neq j}}^N x_{ijkj}^l = 1 \quad \forall i, j \in N; i \neq j \quad (19)$$

$$\sum_l^L \sum_{\substack{k \\ m \neq k \\ k \neq j}}^N x_{ijkm}^l = \sum_l^L \sum_{\substack{k \\ m \neq k \\ k \neq i}}^N x_{ijmk}^l \quad \forall i, j, m \in N; i \neq j, m \neq i, m \neq j \quad (20)$$

$$x_{ijkm}^l \leq (z_{km}^l)^q \quad \forall i, j, k, m \in N; \forall l \in L; i \neq j, k \neq m, m \neq i, k \neq j \quad (21)$$

$$x_{ijkm}^l \geq 0 \quad \forall i, j, k, m \in N; \forall l \in L; i \neq j, k \neq m, m \neq i, k \neq j \quad (22)$$

Onde π^q e δ^q são os custos de instalação dos concentradores e instalação das funções de custo.

Após este passo, deriva-se o problema dual do modelo (15)-(22), associando as variáveis duais $\mu 1_{ijm}$ e $\mu 2_{ijm}$ às restrições (16) e (17), as variáveis $\rho 1_{ij}$ e $\rho 2_{ij}$ às restrições (18) e (19), a variável γ_{ijm} à restrição (20) e a variável s_{ijkm}^l à restrição (21).

Isto serve para que o problema seja parametrizado com relação às variáveis inteiras. Desse modo, na iteração q , tem-se o seguinte **SP** dual:

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar } W = & \sum_{i \neq j}^N \sum_j^N \rho_{1ij} + \sum_{i \neq j}^N \sum_j^N \rho_{2ij} - \sum_{i \neq j}^N \sum_j^N \sum_l^L \sum_{\substack{k \neq m \\ k \neq j}}^N \sum_{\substack{m \neq i \\ m \neq j}}^N s_{ijkm}^l [z_{km}^l]^q - \\
& \sum_{i \neq j}^N \sum_j^N \sum_{\substack{m \neq i \\ m \neq j}}^N \mu_{1ijk} \left(\sum_l^L [y_m^l]^q \right) - \sum_{i \neq j}^N \sum_j^N \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}}^N \mu_{2ijk} \left(\sum_l^L [y_k^l]^q \right) \quad (23)
\end{aligned}$$

Sujeito a:

$$\rho_{1ij} + \rho_{2ij} - s_{ijij}^l \leq w_{ij} c_{ij} \alpha^l \quad \forall i, j \in N, l \in L; i \neq j \quad (24)$$

$$\rho_{1ij} + \gamma_{ijm} - \mu_{1ijm} - s_{ijim}^l \leq w_{ij} c_{im} \alpha^l \quad \forall i, j, m \in N, l \in L; i \neq j, m \neq i, m \neq j \quad (25)$$

$$\rho_{2ij} + \gamma_{ijk} - \mu_{2ijk} - s_{ijkj}^l \leq w_{ij} c_{kj} \alpha^l \quad \forall i, j, k \in N, l \in L; i \neq j, k \neq i, k \neq j \quad (26)$$

$$\gamma_{ijm} - \gamma_{ijk} - \mu_{1ijm} - \mu_{2ijk} - s_{ijkm}^l \leq w_{ij} c_{km} \alpha^l \quad \forall i, j, k, m \in N, l \in L; i \neq j, k \neq i, k \neq j, k \neq m, m \neq i, m \neq j \quad (27)$$

$$\rho_{1ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j \in N \quad (28)$$

$$\rho_{2ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j \in N \quad (29)$$

$$\mu_{1ijk} \geq 0 \quad \forall i, j, k \in N \quad (30)$$

$$\mu_{2ijm} \geq 0 \quad \forall i, j, m \in N \quad (31)$$

$$\gamma_{ijk} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j, k \in N \quad (32)$$

$$s_{ijkm}^l \geq 0 \quad \forall i, j, k, m \in N, l \in L \quad (33)$$

4.1.2. Corte de Benders

Nota-se que o **SP** dual (23)-(33) é um problema linear. Da função objetivo dual (23) formula-se uma restrição conhecida como Corte de Benders (**CB**):

$$\begin{aligned} \varphi + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{j \\ m \neq i \\ m \neq j}}^N \sum_{\substack{m \\ m \neq i \\ m \neq j}}^N (\mu 1_{ijk})^q \left(\sum_l^L y_m^l \right) + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{j \\ k \neq i \\ k \neq j}}^N \sum_{\substack{k \\ k \neq i \\ k \neq j}}^N (\mu 2_{ijm})^q \left(\sum_l^L y_k^l \right) + \\ \sum_{\substack{i \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{j \\ k \neq m \\ k \neq j}}^N \sum_{\substack{l}}^L \sum_{\substack{k \\ k \neq m \\ k \neq j}}^N \sum_{\substack{m \\ m \neq i \\ m \neq j}}^N (s_{ijkm}^l)^q z_{km}^l \geq \sum_{\substack{i \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{j}}^N (\rho 1_{ij})^q + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{j}}^N (\rho 2_{ij})^q \end{aligned} \quad (34)$$

Nela os parâmetros $(\mu 1_{ijk})^q$, $(\mu 2_{ijm})^q$, $(s_{ijkm}^l)^q$, $(\rho 1_{ij})^q$ e $(\rho 2_{ij})^q$ são os valores ótimos das variáveis duais associadas na iteração q e φ é uma variável contínua que serve como um estimador de custos.

4.1.3. Problema Mestre

A partir do **CB** pode-se construir o **PM**, que fica da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } Z = \varphi + \sum_k^N \sum_l^L a_k^l y_k^l + \sum_l^L \sum_{\substack{k \\ k \neq m}}^N \sum_m^N c_{km} \beta^l z_{km}^l \quad (35)$$

Sujeito a:

$$\varphi + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{j \\ m \neq i \\ m \neq j}}^N \sum_{\substack{m \\ m \neq i \\ m \neq j}}^N (\mu 1_{ijk})^q \left(\sum_l^L y_m^l \right) + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{j \\ k \neq i \\ k \neq j}}^N \sum_{\substack{k \\ k \neq i \\ k \neq j}}^N (\mu 2_{ijm})^q \left(\sum_l^L y_k^l \right) +$$

$$\sum_{\substack{i \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^N \sum_l^L \sum_{\substack{k \\ k \neq m \\ k \neq j}}^N \sum_{\substack{m \\ m \neq i}}^N (s_{ijkm}^l)^q z_{km}^l \geq \sum_{\substack{i \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^N (\rho 1_{ij})^q + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^N (\rho 2_{ij})^q \quad (36)$$

$$z_{km}^l \leq y_k^h \quad \forall k, m \in N; \forall h, l \in L; k \neq m, h > 1, l > 1 \quad (37)$$

$$z_{km}^l \leq y_m^h \quad \forall k, m \in N; \forall h, l \in L; k \neq m, h > 1, l > 1 \quad (38)$$

$$\sum_l^L y_k^l \leq 1 \quad \forall k \in N \quad (39)$$

$$z_{km}^1 = 1 \quad \forall k, m \in N; k \neq m \quad (40)$$

$$z_{km}^l \in \{0,1\} \quad \forall k, m \in N; \forall l \in L; k \neq m \quad (41)$$

$$y_k^l \in \{0,1\} \quad \forall k \in N; \forall l \in L \quad (42)$$

$$\varphi \geq 0 \quad (43)$$

4.1.4. Algoritmo de Benders

A partir da decomposição em **PM** e **SP**, define-se o algoritmo clássico de Benders, que fora baseado nos algoritmos de MARTIN [23] e CAMARGO et al. [2]. A partir destas idéias, o Algoritmo Clássico de Benders fica formalizado, sendo os valores de z_{PM}^* e z_{SP}^* , são, respectivamente, os valores ótimos da solução corrente do **PM** e do **SP**; \bar{y}_k^l e \bar{z}_{km}^l são parâmetros do Subproblema que recebem os valores ótimos das variáveis inteiras y_k^l e z_{km}^l , a cada iteração.

Algoritmo Clássico de Benders:

Passo 1: Faça $LS = +\infty$ e $LI = 0$.

Passo 2: Se $LI = LS$, **PARE**. A solução obtida é ótima.

Passo 3: Resolva o **PM** (35)-(43), obtendo o valor de z_{PM}^* e os valores ótimo das variáveis inteiras y_k^l e z_{km}^l .

Passo 4: Faça $LI = z_{PM}^*, \bar{y}_k^l = y_k^l$ e $\bar{z}_{km}^l = z_{km}^l$.

Passo 5: Resolva o **SP** (23)-(33).

Passo 6: Adicione o novo **CB** ao **PM** (35)-(36) utilizando (34).

Passo 7: Se $z_{SP}^* + \sum_k^N \sum_l^L a_k^l y_k^l + \sum_l^L \sum_{k \neq m}^N c_{km} \beta^l z_{km}^l < LS$, faça $LS = z_{SP}^* + \sum_k^N \sum_l^L a_k^l y_k^l + \sum_l^L \sum_{k \neq m}^N c_{km} \beta^l z_{km}^l$. Volte ao **Passo 2**.

4.2. ACELERAÇÃO DO ALGORITMO PROPOSTO

A partir das idéias propostas por PAPADAKOS [26], podem-se perceber ganhos em tempo computacional, quando uma fase de pré-processamento é inserida. Nesta fase de busca-se, através da identificação dos *core points*, gerar cortes mais profundos para que, ao iniciar o algoritmo de Decomposição de Benders, tenhamos um bom **LI**. Tal fato pode ser caracterizado como uma aceleração no algoritmo de projeção de Benders.

Para aceleração do algoritmo proposto na seção 4.1.4 utilizam-se tais idéias. Define-se inicialmente o número máximo de iterações (**IT**) que o pré-processamento deve rodar. Após isto define-se um valor real ω entre 0 e 1, que representa um fração que, ao ser multiplicado pelas variáveis binárias, corresponde a um *core point*. A fase de pré-processamento envolve ainda a relaxação linear das variáveis binárias do problema.

Um fato relevante é a calibração, tanto do número máximo de iterações, como o valor de ω . Estes valores influem diretamente no desempenho geral do algoritmo. Um valor muito grande para **IT** pode ocasionar incrementos insignificantes no **LI** do problema e, possivelmente ocasionar um maior gasto de tempo computacional nesta fase. O valor de ω pode também pode fazer a diferença entre um bom *core point*, ou não.

Fica então definida a fase de pré-processamento do modelo:

Pré-processamento

Passo 1: Defina $\mathbf{IT} \in \mathbb{N}^+$ e $\omega \in \mathbb{R}$, tal que $0 < \omega < 1$;

Passo 2: Faça $y_k^l \rightarrow \ddot{y}_k^l$ e $z_{km}^l \rightarrow \ddot{z}_{km}^l$;

Passo 3: Repita até $\mathbf{NI} = \mathbf{IT}$

- Resolva o Algoritmo de Clássico de Benders com o **PM** linearmente relaxado, utilizando as variáveis lineares \ddot{y}_k^l e \ddot{z}_{km}^l e o *core point* ω ;
- Atualize o $\mathbf{LI} = z_{PM}^*$
- $\mathbf{NI} = \mathbf{NI} + 1$;

Passo 4: Faça $\ddot{y}_k^l \rightarrow y_k^l$ e $\ddot{z}_{km}^l \rightarrow z_{km}^l$

Algoritmo Clássico de Benders:

Resolva o Algoritmo Clássico de Benders utilizando o *core point* ω .

$\ddot{y}_k^l > 0$ e $\ddot{z}_{km}^l > 0$, são as variáveis lineares correspondentes as variáveis inteiras y_k^l e z_{km}^l , respectivamente. \mathbf{NI} é o número corrente de iteração do pré-processamento.

Desse modo, espera-se um ganho computacional ao executar a etapa de pré-processamento, desde que os valores acima citados sejam ajustados conforme a instância a ser testada.

CAPÍTULO 5

EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Os testes computacionais realizados utilizam dois conjuntos de instâncias, conhecidos por estudiosos dos **PLCs**. O primeiro conjunto foi obtido pela *Civil Aeronautics Board* (**CAB**), que trata problemas baseados no transporte aéreo de passageiros no ano de 1970. O segundo é o *Australian Post* (**AP**), introduzido por ERNST & KRISHNAMOORTHY [7]. Ambos vêm sendo utilizados desde então nos principais estudos desenvolvidos nesta área.

O conjunto de dados **CAB** podem gerar instâncias de até $n = 25$ nodos, já o **AP** pode gerar instâncias de $n = 50$ nodos. Estes dados foram preparados para seguir economias de escala semelhantes aos propostos por KLINCEWICZ [17], que sugere três diferentes níveis de desconto – sutis, medianos e agressivos. Estes dados estão representados conforme a tabela abaixo:

Tabela 1: Funções de Fator de Desconto.

Fluxo Total em $k - m$ (x1000)	Funções 1 Fator de Desconto	Funções 2 Fator de Desconto	Funções 3 Fator de Desconto
$0 \leq f_{km}^1 \leq 50$	1,0	1,0	0,8
$50 \leq f_{km}^2 \leq 100$	0,9	0,8	0,6
$100 \leq f_{km}^3 \leq 200$	0,8	0,6	0,4
$200 \leq f_{km}^4$	0,7	0,4	0,2

Fonte: KLINCEWICZ [17]

Todos os testes foram realizados em um computador Intel Core 2 Quad 6600, 2,4 GHz, com memória RAM de 4 Gb, rodando o sistema operacional Windows.

A Decomposição de Benders foi implementada em C++ utilizando o programa ILOG-CPLEX 9.0 para resolver a programação matemática envolvida.

5.1. COMPARAÇÃO ENTRE FORMULAÇÕES

Inicialmente, a proposta é fazer uma comparação visual entre as redes resultantes do modelo do problema **PLC-1** e o modelo *Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location Problem* (UMAHLP) proposto por HAMACHER [12].

Para esta comparação entre os modelos foi utilizada a instância que possui um número de nodos $n = 10$, pertencente à base de dados **AP**. A única alteração nos parâmetros de entrada foram para aproximar os custos de desconto fixos do **UMAHLP** com as economias de escala inseridas no **PLC-1**. O critério adotado para esta aproximação foi a obtenção de sua média aritmética a partir da primeira função do fator de desconto e, após este cálculo, aplicá-la a todas as conexões $k - m$ no **UMAHLP**.

Após a resolução desta instância, encontraram-se os seguintes resultados:

Tabela 2: Comparação das soluções entre formulações

Problema	Número de concentradores instalados	Solução Ótima	Concentradores Instalados	Função do Fator de Desconto ativada
PLC-1	4	47694,1	4	4*
UMAHLP	9	47635,6	9	**

*Todos os concentradores utilizaram a quarta função do fator de descontos.

**O valor para o UMAHLP foi fixado em 0.85 (média aritmética das Funções 1 em fator de desconto)

Desse modo, o grafo dos problemas apresentados fica da seguinte forma:

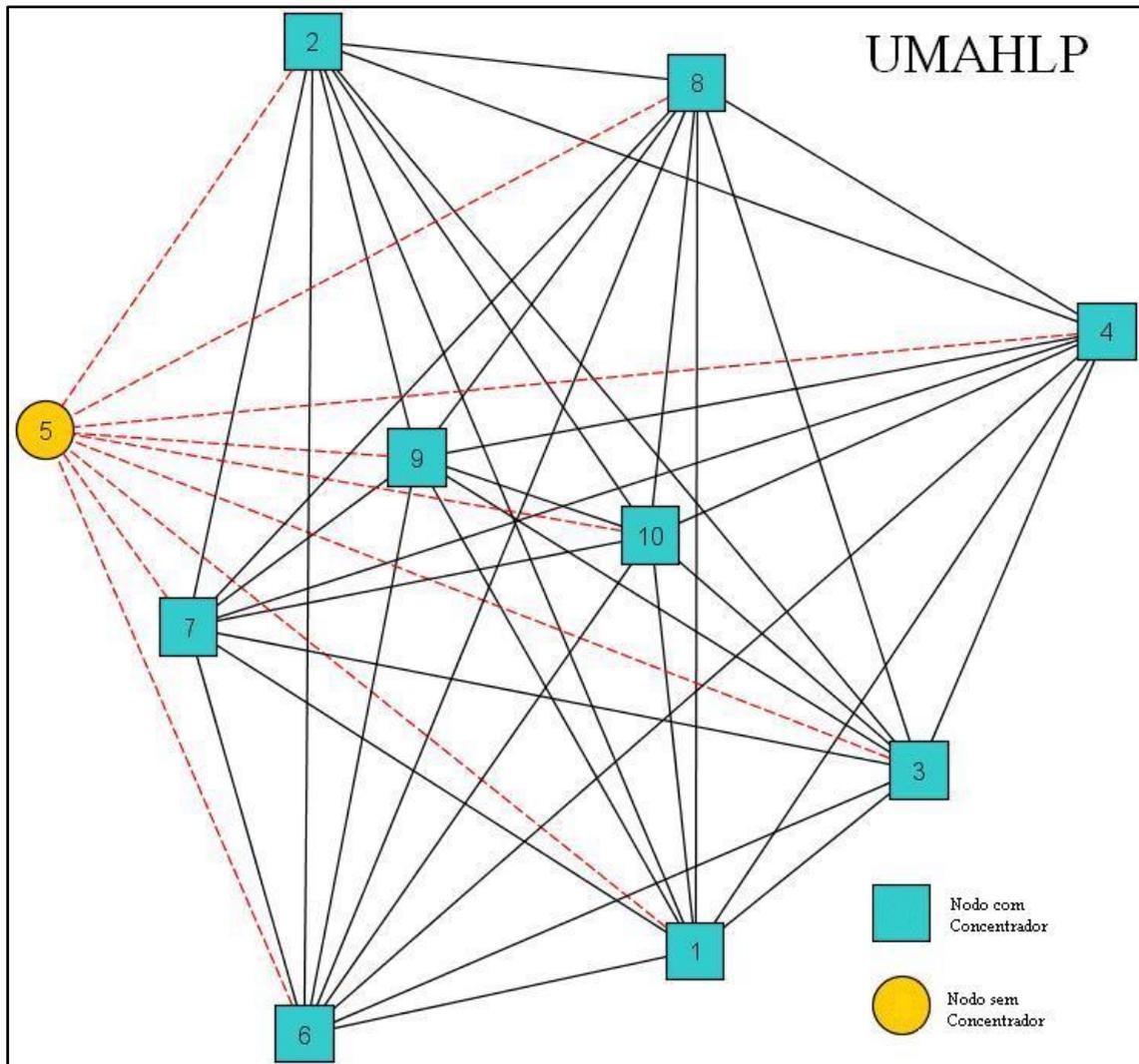


Figura 8: Desenho esquemático do grafo resultante da resolução do UMAHLP. **Fonte:** Elaboração própria.

Pode-se observar na figura 8 que vários concentradores foram instalados. Tal fato acontece devido a potencial economia criada nos fluxos inter-concentradores. Perceba que somente o nó 5 não possui um concentrador instalado. A rede proposta nesta solução não se aplica as práticas realizadas atualmente. Tomando como exemplo o setor do transporte aéreo seria como ter aeroportos de grande capacidade em 90% das capitais de um país.

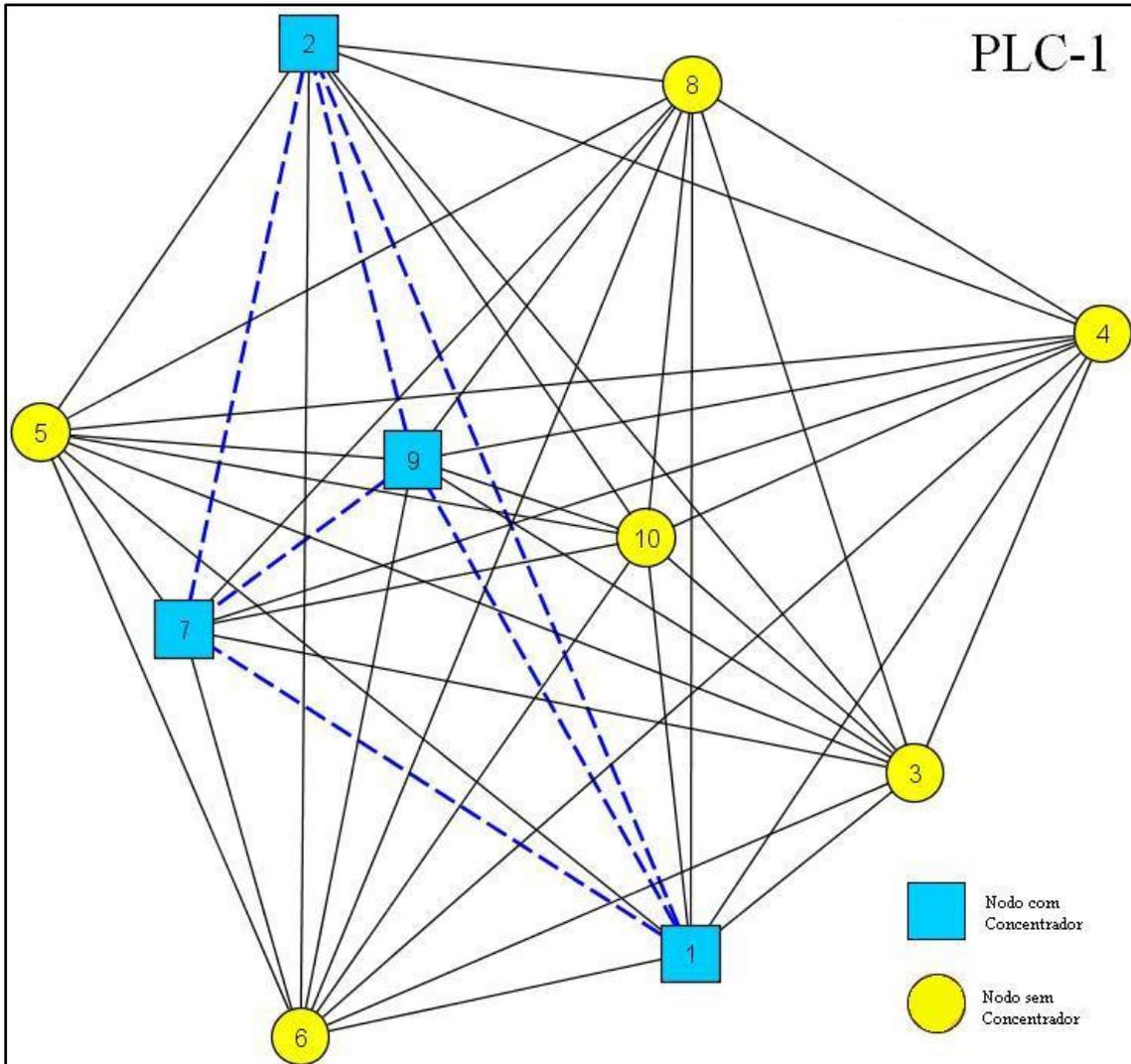


Figura 9: Desenho esquemático do grafo resultante da resolução do **PLC-1**. **Fonte:** Elaboração Própria.

Na figura 9 percebe-se que somente quatro concentradores foram instalados. Nota-se que variação do preço de instalação dos concentradores, bem como o valor pago pelo aumento de sua capacidade, influi diretamente nas decisões tomadas pelo modelo. Desta forma, a análise do custo-benefício fica mais clara que aquela proposta no modelo anterior. Foram obtidas, nesta solução, economias de escala ativadas no maior nível de desconto possível (ver tabela 2).

5.2. TESTES

A seguir serão apresentados os testes computacionais para o problema **PLC-1**. Para estes, será utilizando o Algoritmo Clássico de Benders descrito na seção 4.2, ficando a critério do usuário definir o número de iterações que a etapa de pré-processamento, bem como os *core points*. Em termos de tempo computacional, estes valores influem diretamente no desempenho global do algoritmo.

O intuito destes testes é encontrar um valor ótimo para o problema, que representaria a decisão estratégica adotada pelo tomador de decisão.

Os dados de saída do problema são:

- Arquivos de dados – Corresponde ao nome da instância testada. Seu nome diz respeito a qual a organização proporcionou os dados, seguido do número de nodos que esta possui. Após o hífen, temos a função de descontos que foi associada às conexões inter-concentradores.
- Solução Ótima – expressa o valor do custo mínimo encontrado na resolução do problema;
- Número de iterações do pré-processamento (**IT**) – Valor estipulado pelo usuário do número máximo de iterações que a fase de pré-processamento irá rodar;
- Tempo de Aquecimento (**TA**) – Representa o valor em segundos gastos na fase de pré-processamento do modelo;
- Tempo Gasto com o Subproblema (**TS**) – É o valor do tempo em segundos que corresponde ao somatório de todos os tempos gastos na resolução dos Subproblemas;
- Tempo Gasto com o Problema Mestre (**TM**) – É o valor do tempo em segundos que corresponde ao somatório de todos os tempos gastos na resolução dos Problemas Mestres;
- Tempo Total (**TT**) – Tempo total em segundos gasto na resolução do problema. É o somatório dos tempos **TA**, **TS** e **TM**.

É importante ressaltar o fato de que todos as instâncias foram reestruturadas para instalar um número de concentradores entre, no mínimo, 2 e, no máximo, 6. Este fato é relevante no que tange a uma maior aproximação à realidade. Esta reestruturação é feita através de um reajuste dos custos de instalação dos concentradores e pode ser realizada antes de cada teste, conforme definido no código implementado.

5.2.1. Instâncias CAB

Na tabela 3 são apresentados os resultados das instâncias da CAB.

Tabela 3: Resultados Computacionais das Instâncias CAB.

ARQUIVO DE DADOS	IT	TA	TS	TM	TT	SOLUÇÃO ÓTIMA
CAB10-F1	5	1,21	2,44	6,36	10,06	61841,63
CAB10-F2	5	1,25	6,69	67,30	75,09	61094,56
CAB10-F3	10	2,56	3,69	20,63	26,91	61094,56
CAB15-F1	15	4,22	4,06	61,38	69,70	209218,68
CAB15-F2	15	19,28	0,78	7,64	27,72	181206,61
CAB15-F3	20	27,88	5,49	398,16	431,58	128897,88
CAB20-F1	0	0	7,70	843,65	851,35	500690,64
CAB20-F2	4	48,32	5,38	715,08	768,78	483921,85
CAB20-F3	4	49,05	3,99	700,92	753,96	475192,67
CAB25-F1	0	0	21,12	538,21	559,33	782413,13
CAB25-F2	0	0	4,58	524,28	528,86	763155,69
CAB25-F3	4	93,55	9,72	448,63	551,90	749221,84

De acordo com os resultados pode-se perceber que, com um número de nodos de até 25, não há valores de tempo total computacional que exceda 1 hora. Em todas as instâncias o valor ótimo da solução foi encontrado. Nota-se que à medida que maiores descontos

são providos, menores são os valores encontrados na solução ótima, indicando a eficiência gerada a partir da instalação das funções de desconto.

5.2.2. Instâncias AP

Na tabela 4 são apresentados os resultados das instâncias da **AP**.

Tabela 4: Resultados Computacionais das Instâncias **AP**.

ARQUIVO DE DADOS	IT	TA	TS	TM	TT	SOLUÇÃO ÓTIMA
AP10-F1	5	0,98	2,09	16,88	20,46	4784
AP10-F2	10	2,10	0,19	0,39	2,68	4512
AP10-F2	10	1,84	0,17	0,02	2,03	3836
AP20-F1	14	59,77	3,97	0,27	64,05	7775
AP20-F2	14	59,72	25,47	7,52	92,98	7073
AP20-F3	14	59,83	3,95	1,86	65,69	6238
AP30-F1	0	0	7,86	746,21	754,07	162005
AP30-F2	4	153,29	8,63	639,90	801,82	144538
AP30-F3	4	144,71	7,97	743,53	896,21	138547
AP40-F1	0	0	18,85	1827,96	1846,81	253114
AP40-F2	5	812,35	17,19	1173,39	2002,93	212358
AP40-F3	3	592,27	19,81	1305,79	1917,87	197829

Em geral, também foram obtidos bons tempos computacionais, de acordo com o tamanho do problema resolvido, para as instâncias **AP**. De acordo com a tabela 4 pode-se observar que, até um número nodos igual a 40, o problema foi resolvido em seu valor ótimo com menos de 1 hora de processamento. Também nestes arquivos acompanhamos a tendência de decréscimo de custos, já que novas funções de desconto foram inseridas.

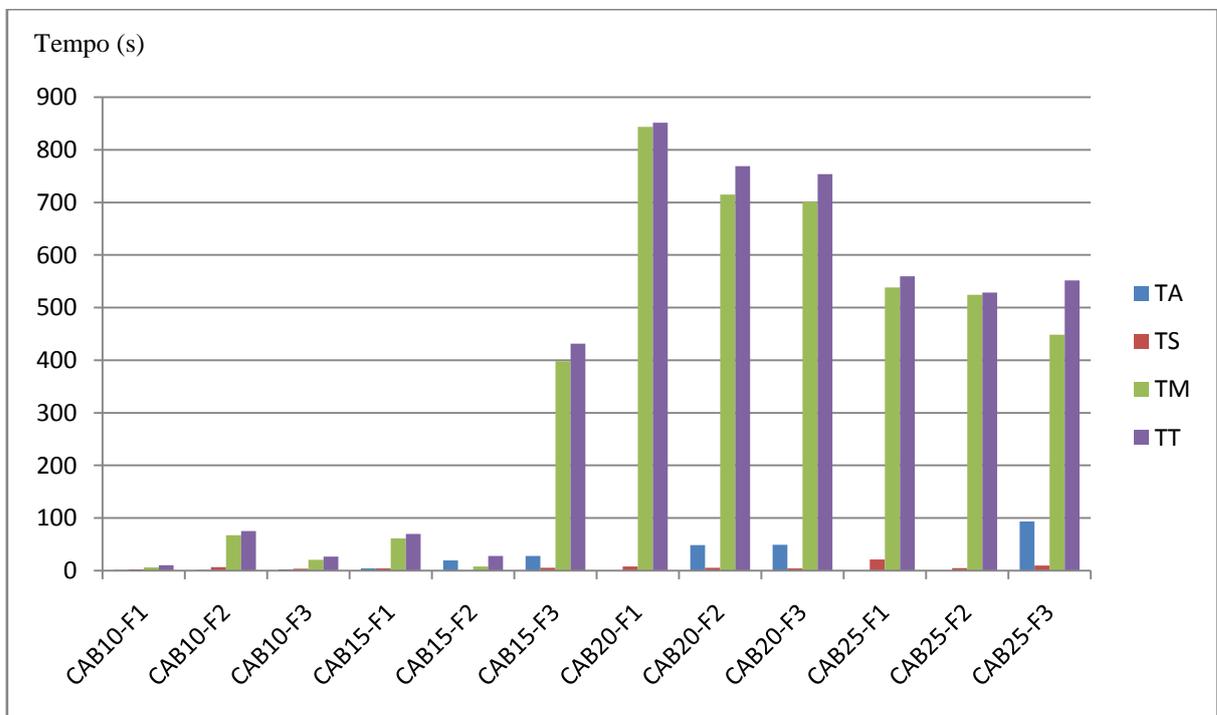
5.2.3. Observações Gerais

Conforme demonstrado nos resultados das seções 5.2.1 e 5.2.2 o desempenho geral do algoritmo apresentado foi bastante razoável, tendo em vista o volume de informações processadas.

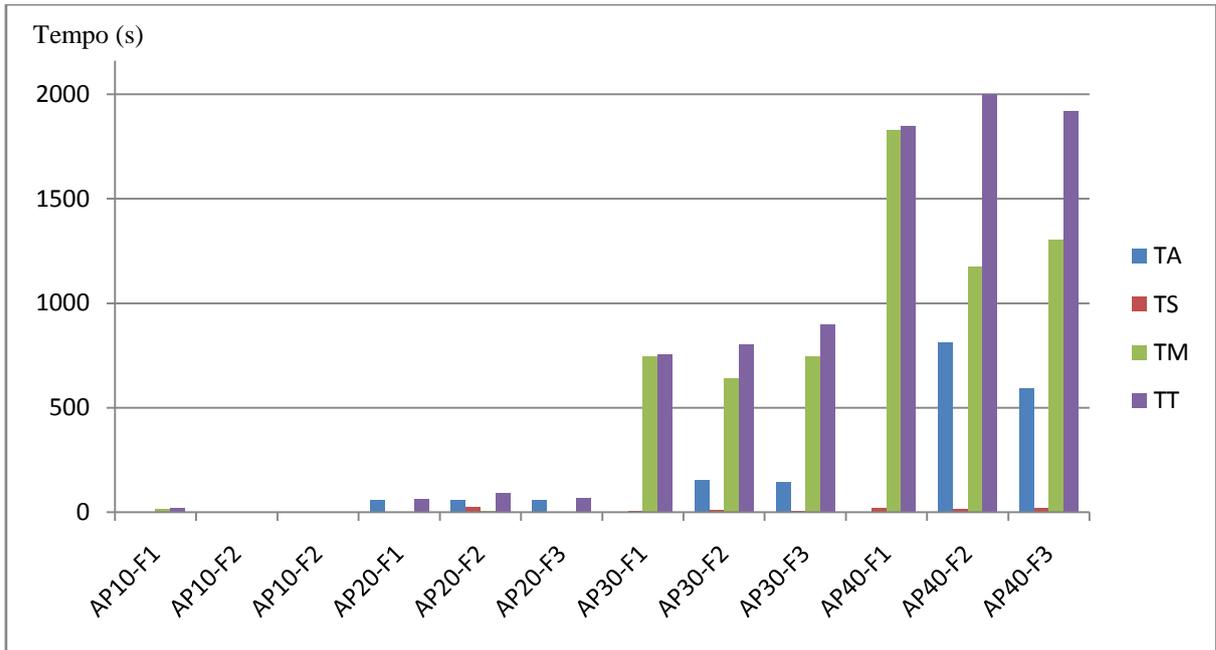
Ajustes como número máximo de iterações do pré-processamento, bem como uma boa definição dos *core points* foram condições necessárias para um bom desempenho do mesmo. Pode-se perceber que algumas instâncias dispensam a fase de pré-processamento, contudo, em sua maioria, esta seria indispensável para obtermos o valor da solução ótima.

Outro fator importante é que, em geral, os tempos do **PM** inteiro são responsáveis por grande parte da resolução do problema. Abaixo são apresentados os gráficos relativos aos tempos computacionais gastos em cada instância.

Tempo computacional das instâncias CAB



Tempo computacional das instâncias AP



Pode-se perceber que, tanto os tempos associados ao pré-processamento, como aos subproblemas, são muito baixos se comparados ao tempo total; tal comportamento é dado ao fato de tratarem-se de problemas lineares, nestas respectivas fases da resolução.

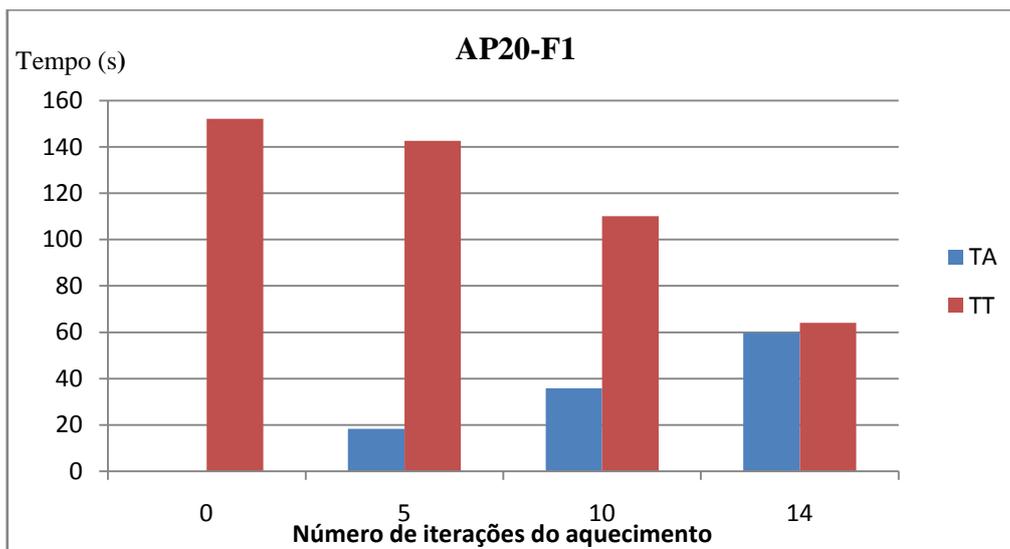
Enfim, para exemplificar a diferença gerada no tempo computacional a medida que o número máximo de iterações da etapa de pré-processamento é aumentado. Apresentam-se os tempos relativos ao tempo de aquecimento e ao tempo total gastos para rodar o problema na tabela abaixo:

Tabela 5: Variação no número máximo de iterações X tempo total

ARQUIVO DE DADOS	IT	TA	TT
AP20-F1	0	0	152,08
	5	18,38	142,63
	10	35,89	110,18
	14	59,77	64,05

Neste gráfico abaixo notamos o ganho, em tempo computacional, ao aumentar o número de iterações do pré-processamento.

Comparação entre os tempos de aquecimento e tempos totais.



CONCLUSÃO

Findado o presente trabalho, espera-se ter apresentado um modelo matemático inédito, capaz de representar um novo problema de localização de concentradores que proporciona flexibilidade nos projetos de redes logísticas com concentradores de fluxo. Sendo o modelo em questão totalmente orientado a custos, explora-se a estrutura da rede de forma a criar rotas que independem da instalação de concentradores, fato que o diferencia frente a outros modelos apresentados até então.

Outra importante característica é a associação dos descontos progressivos com utilização das comunicações inter-concentradores; esta distinção permite traçar uma rede mais fiel ao sistema de custeio de transportes encontrado nos padrões atuais.

Para resolução deste problema utilizou-se a Decomposição de Benders, técnica que vem sendo amplamente utilizada nesta classe de problemas. Mais uma vez, o algoritmo de Benders mostrou-se uma técnica eficiente para resolução de problemas de localização de concentradores. Através dos resultados apresentados no capítulo 5, constatou-se que problemas de até 40 nodos foram resolvidos com menos de 1 hora de processamento, tempo bastante razoável tratando-se de decisões estratégicas de tamanha magnitude.

Outra importante técnica apresentada para aumentar a velocidade de resolução do problema é o pré-processamento do modelo. De um modo geral, a etapa de pré-processamento foi capaz de acelerar o problema, desde que seu número máximo de iterações e seus *core points* fossem calibrados adequadamente.

Em linhas gerais, o modelo em questão está apto a resolver problemas ligados a transporte de aéreo de passageiros, transporte de mercadorias e transmissão de dados, tendo como foco a decisão de instalação dos concentradores de fluxo, que exigem grandes quantidades de recursos a serem geridos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BENDERS, J. F. Partitioning Procedures for Solving Mixed-Integer Programming Problems. **Numerisch Mathematik**, 1962:4, p. 238-252.
- [2] CAMARGO, R. S.; MIRANDA Jr., G.; LUNA H. P. L. Benders Decomposition for the Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location Problem. **Computers and Operations Research**, 2008:35, p. 1047-1064.
- [3] CAMARGO, R. S.; MIRANDA Jr., G.; FERREIRA, R. P. M.; LUNA H. P. L. Multiple Allocation Hub-and-Spoke Network Design Under Hub Congestion. **Computers and Operations Research**, 2008.
- [4] CAMARGO, R. S.; MIRANDA Jr., G.; LUNA H. P. L. Benders Decomposition for Hub Location Problem with Economies of Scale. **Transportation Science**, 2008.
- [5] CANTO, S. P. Application of Benders Decomposition to Power Plant Preventive Maintenance Scheduling. **European Journal of Operations Research**, 2006.
- [6] CROXTON, L. K.; GENDRON, B.; MAGNANTI, T. L. Variable Disaggregation in Network Flow Problems with Piecewise Linear Costs. **Operations Research**, 2007, vol. 55, n. 1, p. 146-157.
- [7] ERNST, A. T.; KRISHNAMOORTHY, M. Efficient Algorithms for the Uncapacitated Single Allocation p-Hub Median Problem. **Location Science**, 1996:4, p. 139-154.
- [8] GALEREH, S.; NICKEL, S. New Approaches to Hub Location Problems in Public Transport Planning. **Institut für Techno und Wirtschaftsmathematik (ITWM)**, 2008, n.133.
- [9] GEOFFRION, A. M. Generalized Benders Decomposition. **Journal of Optimization Theory and Applications**, 1972, vol. 10, n. 4, p. 237-260.

- [10] GEOFFRION, A. M.; GRAVES, G. W. Multicommodity Distribution System Design by Benders Decomposition. **Management Science**, 1974, vol. 20, n. 5, p. 822-844.
- [11] GOLDBARG, M. C.; LUNA H. P. L. **Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos**. Editora Campus, 2005, p. 425.
- [12] HAMACHER, H. W.; LABBÉ M.; NICKEL, S.; SONNEBORN, T. Polyhedral Properties of the Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location Problem. Technical report 20, **Institut für Techno und Wirtschaftsmathematik (ITWM)**, 2000.
- [13] HAMACHER, H. W.; LABBÉ M.; NICKEL, S.; SONNEBORN, T. Adapting Polyhedral Properties from Facility to Hub Location Problems. **Discrete Applied Mathematics**, 2004:145, p. 104-116.
- [14] KIMMS, A. Economies of Scale in Hub & Spoke Network Design Models: We Have it All Wrong. **Perspectives on Operations Research**, 2006, p. 293-317.
- [15] KLINCEWICZ, J. G. A Dual Algorithm for the Uncapacitated Hub Location Problem. **Location Science**, 1996, vol. 4, n. 3, p. 173-184.
- [16] KLINCEWICZ, J. G. Hub Location in Backbone/Tributary Network Design: A Review. **Location Science**, 1998:6, 307-335.
- [17] KLINCEWICZ, J. G. Enumeration and Search Procedures for a Hub Location Problem with Economies of Scale. **Annals of Operations Research**, 2002:110, p. 107-122.
- [18] KRISHNAMOORTHY, M.; EBERY, J.; ERNST, A.; BOLAND, N. The Capacitated Multiple Allocation Hub Location Problem: Formulations and Algorithms. **European Journal of Operations Research**, 2000:120, p. 614-631.
- [19] KRISHNAMOORTHY, M.; EBERY, J.; ERNST, A.; BOLAND, N. Preprocessing and Cutting for Multiple Allocation Hub Location Problems. **European Journal of Operations Research**, 2004:155, p. 638-653.

- [20] LEDERER, P. J.; NAMBIMADOM, R. S. Airline Network Design. **Operations Research**, 1998, vol. 46, n. 6, p. 785-804.
- [21] MAGNANTI, T. L.; AHUJA, R. K.; ORLIN, T. B. **Network Flows: Theory, Algorithms and Applications**. Prentice Hall, 1993, p. 4-8.
- [22] MAGNANTI, T. L.; WONG, R. Accelerating Benders Decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria. **Operations Research**, 1981:29, n. 3, p. 464-484.
- [23] MARTIN, R. K. **Large Scale Linear and Integer Optimization: A Unified Approach**. Kluwer Academic Publishers, 1999, p. 350-353.
- [24] MARTÍN, A.; CÁNOVAS, L.; LANDETE, M. New Formulations for the Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location Problem. **European Journal of Operations Research**, 2006:172, p. 274-292.
- [25] MIRANDA Jr., G. **Localização de Servidores e Projeto de Redes com Custos de Interdependência e Congestionamento**. Tese de Doutorado em Ciências da Computação, UFMG, 2004.
- [26] PAPADAKOS, N. Practical Enhancements to the Magnanti-Wong Method. **Operations Research**, 2008:36, p. 444-449.
- [27] PAPADAKOS, N. Integrated Airline Schedule. **Computers and Operations Research**, 2009:36, p. 176-195.
- [28] O'KELLY, M. E. The Location of Interacting Hub Facilities. **Transportation Science**, 1986:20, p. 92-106.
- [29] O'KELLY, M. E.; BRYAN, D. L. Hub Location with Flow Economies of Scale. **Transportation Research**, 1998:32, vol. 8, p. 605-616.
- [30] O'KELLY, M. E.; BRYAN, D. L.; SKORIN-KAPOV, D.; SKORIN-KAPOV, J. Hub Network Design with Single and Multiple Allocation: A Computational Study. **Location Science**, 1996, vol. 4, n. 3, p. 125-138.

[31] O'KELLY, M. E. A Geographer's Analysis of Hub-and-Spoke Networks. **Journal of Transport Geography**, 1998, vol. 6, n. 3, p. 171-186.

[32] RODRÍGUEZ, V.; ALVAREZ, M. J.; BARCOS, L. Hub Location under Capacity Constraints. **Transportation Research**, 2007:43, p.495-505.