Paulo Roberto Santos Casaca

Otimismo e Pessimismo em Escolha Sob Incerteza

Belo Horizonte, MG
UFMG/Cedeplar
2010

Paulo Roberto Santos Casaca

Otimismo e Pessimismo em Escolha sob Incerteza

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado em Economia do Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Economia.

Orientador: José Heleno Faro

Belo Horizonte, MG
Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional
Faculdade de Ciências Econômicas - UFMG
2010

Ficha Catalográfica

C334o
2010

Casaca, Paulo Roberto Santos, 1984-
Otimismo e pessimismo em escolha sob incerteza / Paulo Roberto Santos Casaca. - 2010.
58 f.

Orientador: José Heleno Faro.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional.
Inclui bibliografia.

1. Microeconomia - Teses. 2. Economia - Teses. I. Faro, José Heleno. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional. III. Título.

CDD: 330

Elaborada pela biblioteca da FACE/UFMG – NMM029/2012

Universidade Federal de Minas Gerais | Faculdade de Ciências Econômicas |
Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional |

Cedeplar

Curso de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE **PAULO ROBERTO SANTOS CASACA** Nº. REGISTRO 2008663110. Às dez horas e trinta minutos do dia três do mês de dezembro de dois mil e dez, reuniu-se *na Faculdade de Ciências Econômicas* da Universidade Federal de Minas Gerais a Comissão Examinadora de DISSERTAÇÃO, indicada "ad referendum" pelo Colegiado do Curso em 03/11/2010, para julgar, em exame final, o trabalho final intitulado **"Otimismo e pessimismo em escolhas sob incerteza"** requisito final para a obtenção do Grau de *Mestre em Economia,* área de concentração em Economia. Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, Prof. José Heleno Faro, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares do Trabalho Final, passou a palavra ao candidato, para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa do candidato. Logo após, a Comissão se reuniu, sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. A Comissão Aprovou o candidato por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora. Belo Horizonte, 03 de dezembro de 2010.

Prof. José Heleno Faro
(Orientador) (CEDEPLAR/FACE/UFMG)

Profa. Mônica Viegas Andrade
(CEDEPLAR/FACE/UFMG)

Prof. Gil Riella
(UnB)

Prof. Frederico Gonzaga Jayme Júnior
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Economia

Um horizonte, — a saudade
Do que não há de voltar;
Outro horizonte, — a esperança
Dos tempos que hão de chegar;
No presente, — sempre escuro, —
Vive a alma ambiciosa
Na ilusão voluptuosa
Do passado e do futuro.

(Machado de Assis – Dois Horizontes)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar, à minha mãe, Beth, pelo apoio incondicional às minhas pretensões profissionais, apesar de todas as dificuldades vividas, mas sempre ultrapassadas. Sem esse apoio hoje, indubitavelmente, eu não estaria escrevendo este agradecimento. Ela é a maior vitoriosa deste titulo que agora recebo.

Gostaria de agradecer também ao meu orientador, José Heleno Faro, pela paciência e por todo conhecimento e companheirismo dedicado na elaboração desta dissertação. Ganhei não apenas um orientador de mestrado, mas um grande professor e amigo que mudou por completo minhas indagações acadêmicas e me apresentou um novo "mundo" de possibilidades de estudo, que pretendo levar adiante.

Agradeço também aos professores do Cedeplar, com o qual tive contato durante o mestrado, em especial, aos que compuseram a banca de defesa, Mônica Viegas Andrade e Gil Riella, que fizeram sólidas contribuições a esta dissertação.

À minha família que tanto me apoiou nestes anos intensos de mestrado. Meus primos Daniel, Patrícia, Fabiana, Geraldo e Pedrinho, meus tios Wágner e Márcia, que sempre estão a postos, seja nas dificuldades, seja nas alegrias.

Aos meus amigos de república, Arthur, Jarbas, João, Fabrício, Xambim e Barbudinho, que aguentaram meu humor durante estes anos. Agradeço também aos colegas e amigos feitos no Cedeplar, pelo companheirismo no sofrimento conjunto e pela diversão nos churrascos, botecos e congressos destes anos.

Aos colegas da Gerência de Economia e Finanças da FIEMG, local onde fui trabalhar enquanto elaborava a dissertação. Agradeço especialmente ao Guilherme, pela paciência e pelo apoio nos momentos quando tinha que me ausentar para escrever e estudar.

Por fim, gostaria também de agradecer á todos os professores e colegas que tive na minha formação, desde as escolas em Mogi Mirim, onde cursei o ensino básico até a UFV que me deu a formação e o bacharelado em Ciências Econômicas.

Abstract

This paper provides an axiomatic foundation for preferences with uncertainty attitudes that the decision maker might be optimistic or pessimistic. Our main goal is to characterize preference relations $\succsim$ like in Anscombe and Aumann (1963) represented by the functional,

$$V(f) = \min_{p \in C} \int_A u(f)\ dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} u(f)\ dp$$

where f is an act, u is a von Neumann-Morgenstern utility over outcomes, C is a nonempty, convex and (weak*) compact subset of probabilities measures, and A is a referential event that identifies the separation between optimistic and pessimistic attitudes towards ambiguity. In addition to the usual assumptions on the preference relation as transitivity, completeness, non-degeneracy, continuity, monotonicity and certainty independence, we assume one key condition namely event-dependence, that insure the existence of a neutral event A in which the decision maker is pessimistic about bets in favor of sub-events of A and optimistic about bets against A. This preference generalizes the well known Maxmin Expected Utility Theory proposed by Gilboa and Schmeidler (1989), and provides a novel model capturing both uncertainty averse and uncertainty seeking attitudes.

Keywords: Uncertainty Attitudes, Ambiguity Aversion, Competence

Resumo

Este trabalho apresenta uma fundamentação axiomática para escolhas sob incerteza onde o agente pode ser otimista ou pessimista. O principal objetivo deste trabalho é caracterizar relações de preferências $\succsim$ a lá Anscombe e Aumann (1963) representada pelo funcional,

$$V(f) = \min_{p \in C} \int_A u(f)\ dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} u(f)\ dp$$

onde f é um ato, u é uma utilidade do tipo von Neumann e Morgenstern sobre resultados, C é um conjunto de probabilidades não vazio, convexo (fechado*) e compacto e A é um evento referencial que identifica a separação entre atitudes otimistas e pessimistas. Além das hipóteses usuais de uma preferência, como transitividade, completude, não degeneração, continuidade, monotonicidade e independência com respeito à certeza, o trabalho apresenta mais uma condição chave, chamada de evento-dependência, que assegura a existência de um evento A neutro, na qual o agente seja pessimista sobre apostas relacionadas à subeventos de A e otimistas com relação a apostas no conjunto A complementar. A preferência generaliza a Utilidade Esperada Maxmin proposta por Gilboa e Schmeidler (1989) e propõe um novo modelo que capture tanto atitudes avessas à incerteza quanto propensas à incerteza.

Palavras-chave: Escolha sob Incerteza, Aversão à Ambiguidade, Competência.

1 Introdução

Recentemente a teoria econômica vem incorporando desenvolvimentos importantes realizados no corpo da teoria da escolha sob incerteza. Mais precisamente, a distinção entre risco e incerteza, como proposta desde Knight (1921), vem contribuindo para o desenvolvimento de novas análises de questões dentro da teoria econômica, onde fatores que não podem ser perfeitamente antecipados pelos agentes são cruciais.

De fato, tais modelos incorporam a possibilidade de um conhecimento vago, ou ambíguo, com respeito ao modelo probabilístico que governa um dado fenômeno. Consequentemente, a atitude que os agentes apresentam frente à ambiguidade é um ponto fundamental de tais estudos.

Os primeiros modelos inspirados no trabalho seminal de Ellsberg (1961) destacaram-se por uma atitude negativa ou pessimista frente à ambiguidade. Este tipo de comportamento incorpora a possibilidade de algum tipo de repulsão ou aversão às escolhas em ambientes ambíguos, ou seja, os agentes preferem determinar suas escolhas em ambientes que associam chances bem especificadas em detrimento de situações onde as probabilidades são vagas.

Neste contexto, destacam-se importantes trabalhos como Gilboa e Schmeidler (1989) e Schmeidler (1989). O primeiro captura ambiguidade como conjunto de probabilidades onde os agentes baseiam suas decisões na probabilidade mais desfavorável à decisão em questão. Já o segundo também tem como possibilidade a captura de aversão à ambiguidade através de um conjunto de probabilidades em um caso especial de convexidade da probabilidade não aditiva, que caracteriza o modelo.

Todavia, alguns especialistas em escolha expuseram, através de experimentos, que nem sempre o agente terá um comportamento pessimista diante de um ambiente incerto. Heat e Tversky (1991) mostraram que, quando o agente se julga competente em uma loteria incerta, como jogos de dardos, ele preferirá esta a um jogo de chances equiprováveis, como um jogo de roleta, por exemplo. Mesmo Ellsberg em sua tese de doutorado, vale frisar, levantou a possibilidade de um comportamento otimista.

Num modelo que busca combinar uma atitude que misture pontos de vista pessimistas, como o identificado por Ellsberg, e otimistas, identificado por Heat e Tversky, se destaca Ghirardato et al (2004). Este modelo busca ponderar o comportamento do agente entre atitudes de pessimismo e otimismo, o que pode ser considerado como uma expansão do resultado principal de Gilboa e Schmeidler (1989), acrescentando neste o peso de um julgamento otimista no processo decisório.

A partir de considerações semelhantes, este trabalho se propõe a estudar a possibilidade de o agente se mostrar pessimista ou otimista em um ambiente de escolha sob incerteza Contudo, o processo no qual se define a atitude frente à escolha é diferente de Ghirardato et al (2004). Com o intuito de esclarecer o contexto onde se insere o modelo principal deste trabalho, serão apresentados abaixo três exemplos de situações onde o tomador de decisão age de forma a resultar no padrão de comportamento aqui estudado.

1.1 Exemplo 1: Expertise em futebol

É oferecida uma aposta a um comentarista esportivo especialista em futebol sul-americano. É momento de quartas de final na Copa do Mundo onde estão presentes quatro times sul-americanos e quatro europeus. Ele deverá apostar em quem será o campeão da Copa. O fato de o comentarista ser um especialista sobre futebol sul-americano, e não se considerar um grande conhecedor do futebol europeu, faz dele "otimista" em seu acerto ao apontar como campeão uma seleção sul-americana, e "pessimista" ao apontar como campeã uma seleção européia.

Devido ao retrospecto de campeões mundiais, o comentarista considera que são equivalentes as chances de cada continente ficar com a taça, ou seja, as chances de o campeão ser um time europeu ou sul-americano são de 50%.

Vale ressaltar, portanto, que como não é possível determinar claramente uma probabilidade para cada seleção ser campeã, os possíveis resultados da loteria são ambíguos, permitindo que o comentarista aja conforme suas crenças acerca da possibilidade de resultado que envolve cada seleção.

Este contexto esclarece como um indivíduo, perante uma decisão, pode se mostrar otimista ou pessimista dependendo do evento. Já o próximo exemplo mostra como o agente pode se comportar de acordo com o padrão de comportamento analisado neste trabalho diante de um ambiente incerto onde um profissional precisa tomar uma decisão.

1.2 Exemplo 2: Expertise médica

Um médico pneumologista recebe um paciente portando certo tipo de doença a ser diagnosticada. Antes de realizar qualquer exame, ele levantará algumas hipóteses a fim de nortear os procedimentos posteriores. Embora, sua especialidade seja problemas respiratórios, a doença pode ser de ordem cardíaca, por exemplo.

Ao diagnosticar o tipo de doença do paciente, o médico terá de levar em consideração que ela pode ser de ordem respiratória ou não. Sem poder lançar mão de exames de imediato, evidentemente seu diagnóstico envolverá certo grau de incerteza, de tal forma que ele não possa determinar o tipo de doença precisamente.

Embora a determinação da doença seja realmente ambígua, o pneumologista considera que as chances do problema ser de ordem respiratória são de 70%, em consequência da frequência com que aparecem pacientes com problemas relacionados a outras especialidades.

Como resultado do diagnóstico, o médico presumirá uma possível doença respiratória da qual ele se mostra "otimista" com seu acerto. Já para o caso do problema ser cardíaco, embora ele seja capaz de inferir sobre algum tipo de doença, devido ao seu "pessimismo" em realmente acertar o prognóstico, ele indicará um especialista para o caso.

Pode-se considerar que um processo de decisão deste tipo não precisa ser necessariamente divulgado para o paciente. Essa linha de raciocínio pode ser realizada intrinsecamente, onde o resultado final seja a indicação de exames respiratórios e a indicação de outro especialista. Isto não impede o médico de agir conforme este padrão de decisão.

No próximo exemplo, o ambiente também é profissional, mas o agente reage de acordo com seu possível ganho futuro no mercado financeiro.

1.3 Exemplo 3: Expertise financeira

Um corretor de bolsa de valores, especialista em empresas de tecnologia, é contratado por uma corretora que gerencia fundos que investe em ações de empresas de capital aberto. Dada sua especialidade, é natural supor que o corretor se sentirá mais a vontade em manipular ações de empresas de tecnologia, do que de empresas de outros setores. Nesse sentido, ele evidentemente esperará obter maior sucesso ao negociar ativos do setor de sua especialidade, mostrando propensão à incerteza, do que ao negociar ações de empresas na qual ele não tenha tanto conhecimento. Ao negociar ativos dessas empresas, o corretor se mostra avesso à incerteza. Ressalta-se, neste caso, que se trata de uma escolha sob incerteza justamente por ser uma "aposta" com relação ao preço futuro das ações no mercado financeiro, algo muito pouco razoável de analisar através de probabilidades objetivas.

Em todos os três exemplos, é possível identificar certa similaridade entre as situações. Existe um agente (comentarista, pneumologista e corretor) que precisa tomar uma decisão em um ambiente que envolva incerteza (jogo de futebol, diagnóstico médico e compra e venda de ações futuras).

Partindo desse ponto e usando o terceiro exemplo como base, é possível identificar outras características que sugerem modelar uma preferência que reflita o comportamento deste tipo de agente.

Antes de o corretor tomar suas decisões de compra e venda de ações, ele precisa identificar em que tipo de evento ele as tomará, ou seja, sobre qual setor ele irá transacionar o ativo. Foi proposto a ele uma aposta na qual ele deverá apontar a empresa de melhor desempenho dentre um grupo de 10 ativos associados à empresas de tecnologia e commodities. O corretor sabe que, em geral, cerca de 30% das vezes o melhor desempenho está associado à uma empresa do setor tecnológico. Todavia, não é clara probabilidade de cada ativo em específico apresentar o melhor desempenho. Neste caso, os estados da natureza podem ser descritos pela performance dos ativos, e, por conta de seu diferente comportamento perante a incerteza no investimento, ele as dividirá em dois grupos: as empresas do setor de tecnologia e as de commodities. Com relação ao primeiro grupo, ele é propenso à incerteza ou otimista, e com relação ao outro grupo, ele é avesso à incerteza ou pessimista. Por fim, ele define como seu objetivo primordial ao tomar suas decisões, a maximização dos ganhos financeiros ao comprar e vender ações na bolsa.

Logo, seja S o conjunto de estados da natureza, ou o desempenho dos ativos que compõem as decisões de investimento do corretor. Seja A o conjunto de todas as empresas onde o corretor não seja especialista em investimento e A^c todas as empresas em que o corretor tenha um substancial conhecimento para comercializar ativos, ou seja, as empresas do setor de tecnologia. Como o preço futuro da ação é incerto, o investidor usará suas crenças para tomar uma decisão. Ao tomar sua decisão, o comportamento do investidor se dá como se este tivesse em mente uma família de distribuições de probabilidades onde ele daria uma probabilidade relativamente alta para seu acerto, quando envolvesse uma empresa de tecnologia, e uma probabilidade relativamente pequena para seu acerto, quando envolvesse empresas de outros setores. Vale ressaltar que, embora ele tenha crenças diferentes para diferentes eventos, o seu objetivo é o mesmo em todos os casos, maximizar seus ganhos nas transações. Além disso, não há incerteza na separação dos eventos onde o agente é otimista e pessimista.

Dessa forma, pode-se escrever matematicamente que, dado uma escolha f, que relaciona cenários s pertencentes ao conjunto S a consequências x pertencentes ao conjunto X, o corretor tomará sua decisão conforme o funcional abaixo:

$$V(f) = \min_{p \in C} \int_A u(f)\ dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} u(f)\ dp$$

onde $u(\cdot)$ seja sua função de utilidade que relaciona as consequências à números reais e as variáveis A e A^c os eventos onde o agente se mostra avesso e propenso à incerteza, respectivamente. A união destes dois eventos corresponde ao conjunto de estados da natureza.

Neste representação, C corresponde ao conjunto de probabilidades que caracteriza a crença do agente. O comportamento pessimista consiste em dar um peso maior à pior probabilidade do conjunto de probabilidades e associa esta ponderação na determinação da utilidade esperada. No mesmo sentido, o comportamento otimista pondera um peso maior "à melhor" probabilidade do conjunto C.

Com respeito à organização desta dissertação, ela está dividida em mais 4 seções. Na próxima seção, serão introduzidas as notações e resultados básicos que serão utilizados no restante do trabalho. Na seção 3, uma breve revisão teórica da literatura na qual se baseia este estudo. A seção 4 contém a parte técnica do modelo, isto é, os axiomas e o teorema principal desta classe de preferência. Na seção 5, são realizados alguns exercícios de aplicação desta modelagem e na seção 6 as considerações finais. Por fim, a prova do teorema será apresentada no anexo.

2 Notações e Resultados Básicos

Considere o conjunto S como estado da natureza, o conjunto X como espaço de consequências e uma $\sigma-$álgebra Σ de subconjuntos de S chamado de eventos. Com base no contexto clássico de Anscombe Aumann (1963), pode-se escrever uma função $f : S \to X$ onde, sendo $\mathcal{F}$ o conjunto de todos os atos f simples e Σ-mensuráveis. Ainda, pode-se tomar o espaço de consequências de tal forma que se tenha,

$$X := \left\{ x : Z \to [0,1]\,,\ \text{com } x\,(z) \neq 0 \text{ para finitos } z's \in Z \text{ e } \sum_{x \in X} x\,(z) = 1 \right\}$$

onde Z é o conjunto de possíveis resultados. Cada elemento x é interpretado como uma loteria objetiva. Este conjunto desempenhará papel fundamental na discussão sobre risco na Revisão Teórica.

Ademais, para $f, g \in \mathcal{F}$ e $A \in \Sigma$, fAg denota o ato que entrega $f\,(s)$ para $s \in A$ e $g\,(s)$ para $s \in A^c \equiv S \backslash A$.

Seja também $B_0\,(S, \Sigma)$ o espaço vetorial de todas as funções $a : S \to \mathbb{R}$ simples que sejam Σ-mensuráveis. A norma em $B_0\,(S, \Sigma)$ é dado por $\|a\|_\infty = \sup_{s \in S} |a\,(s)|$ e também pode-se definir o espaço de *Banach* $\Sigma-$mensuráveis por $B\,(S, \Sigma) = \overline{B_0\,(S, \Sigma)}^{\|\cdot\|_\infty}$, isto é, $B\,(S, \Sigma)$ pode ser caracterizado como o limite uniforme das combinações lineares finitas de funções em B_0[1]. Dadas $f \in \mathcal{F}$ e a função $u : X \to \mathbb{R}$, $u\,(f)$ é uma função em $B_0\,(S, \Sigma)$ definida por $u\,(f)\,(s) = u\,(f\,(s))$ para todo $s \in S$.

A preferência de um tomador de decisão são dadas por uma relação binária $\succsim$ em $\mathcal{F}$, na qual os componentes simétricos e assimétricos são denotados, respectivamente, por $\sim$ e $\succ$:

$$\begin{aligned} \sim \ &:= \{(x, y) \in \succsim \wedge\, (y, x) \in \succsim\} \\ \succ \ &:= \{(x, y) \in \succsim \wedge\, (y, x) \notin \succsim\} \end{aligned}$$

Se $f \in \mathcal{F}$, um elemento $c_f \in X$ é um *equivalente certo* de f se $c_f \in \{x \in X : x \sim f\}$.

Além disso, Δ é o conjunto de todas as probabilidades sobre (S, Σ) e dada $a \in B$ e $p \in \Delta$, na qual $\int a\ dp$ denota a integral de a com respeito a p (Dunford e Schwartz, 1957, cap. 3).

Uma função $v : \Sigma \to [0,1]$ é dita uma probabilidade não aditiva ou uma capacidade se: *(i)* $v\,(\emptyset) = 0$ e $v\,(S) = 1$; e *(ii)* Para todo $A, B \in \Sigma$, tal que $v\,(A) \leq v\,(B)$ se $A \subset B$. Duas condições adicionais podem ser impostas à capacidade dependendo de sua utilização no modelo. A capacidade v é convexa se, $v\,(A \cup B) + v\,(A \cap B) \geq v\,(A) + v\,(B)$. Similarmente, a capacidade v é côncava se $v\,(A \cup B) + v\,(A \cap B) \leq v\,(A) + v\,(B)$. No terceiro capítulo, será visto que uma capacidade convexa pode

[1]Para maiores detalhes, ver Dunford e Schwartz (1988, pág. 240).

corresponder à aversão à incerteza e uma capacidade côncava à propensão à incerteza[2]. A partir da capacidade v, sua conjugada $\bar{v}$ pode ser definida como $\bar{v}(A) = 1 - v(A^c)$ para todo $A \in \Sigma$.

Ainda, Dow e Werlang (1992), apresentam como um conceito que pretende medir aversão à incerteza através da seguinte definição:

Dado um evento $A \in \Sigma$, e uma capacidade v, a relação,

$$c(v, A) = 1 - v(A) - v(A^c)$$

onde $c(v, P)$ pode ser considerado como um índice de aversão à incerteza. Este índice mensura o tamanho da "perda" do montante de probabilidade, capturado pela aversão à incerteza.

Dada uma função $a : S \to \mathbb{R}$, $\Sigma-$mensurável e limitada, a Integral *Choquet* de a com respeito à capacidade v pode ser escrita como,

$$(C)\int a\ dv := \int_{-\infty}^{0} (v(a \geq t) - 1)\ dt + \int_{0}^{\infty} v(a \geq t)\ dt$$

onde a integral à direita é dada no sentido usual de *Lebesgue.*

Note que, se $v = p$, onde p é uma probabilidade, como a esperança de a é dada por,

$$Ea = \int_{0}^{\infty} (1 - F(a))\ da - \int_{-\infty}^{0} F(a)\ da,$$

onde $F(t) = p(a \leq t)$, obtém-se que[3],

$$\begin{aligned} Ea &= \int_{0}^{\infty} (1 - p(a \leq t))\ dt - \int_{-\infty}^{0} p(a \leq t)\ dt \\ &= \int_{0}^{\infty} p(a > t)\ dt - \int_{-\infty}^{0} (1 - p(a > t))\ dt. \\ &= (C)\int a\ dp.^{4} \end{aligned}$$

Outro conceito importante no estudo da Integral de *Choquet* é chamado de *core.* O core de uma capacidade v pode ser escrito como,

$$core(v) := \{p : \Sigma \to [0,1] / p \text{ é uma probabilidade tal que } p \geq v \text{ em } \Sigma\}.$$

Nas próximas seções, essas ferramentas serão muito utilizadas e seus conceitos e definições são imperativos para a compreensão do trabalho como um todo.

[2]Para maiores detalhes sobre a correspondência entre capacidades convexas e aversão à incerteza, ver Gilboa e Schmeidler (1989), Schmeidler (1986) e Shafer (1976).

[3]Para maiores detalhes, ver Dow e Werlang (1992, p. 203).

3 Revisão Teórica

Esta seção tem por objetivo agrupar os principais conceitos e trabalhos prévios que serviram como base ou se relacionaram de alguma forma com o modelo aqui proposto. Primeiramente, será apresentado o resultado clássico de Debreu num contexto abstrato. Em seguida, a abordagem da teoria de von Neumann e Morgenstern sobre escolha de loterias, ou seja, num contexto onde as probabilidades são tratadas como objetivas.

Também será discutida a abordagem subjetivista, através do pioneirismo de Savage e será mostrada com maiores detalhes a abordagem de Anscombe e Aumann. Depois da apresentação dos modelos clássicos, serão discutidos suas limitações através do paradoxo de Ellsberg e os modelos de escolha sob incerteza que surgiram mais recentemente.

Por fim, será conceituada a hipótese de competência proposta por Heat e Tversky e algumas aplicações dos modelos de escolha sob incerteza.

3.1 Debreu: Escolhas em um contexto abstrato

Debreu (1954) desenvolveu uma estrutura axiomática para embasar um teorema que discorre sobre a possibilidade de a preferência de um tomador de decisão ser representada através de uma função de utilidade contínua.

Primeiramente, define-se um conjunto de escolha X caracterizado matematicamente por ser munido de uma topologia[5]. Ao determinar o espaço de escolhas, considera-se uma relação binária $\succsim \subseteq X \times X$, onde o tomador de decisão compara x e y de forma que, $x \succsim y$ significa que x é *pelo menos tão bom quanto* y.

Para fundamentar o comportamento da decisão baseada em preferências, são definidas algumas propriedades lógicas, chamadas de axiomas.

Neste sentido, a preferência pode apresentar as seguintes propriedades,

(a) Ordem Fraca:

a1 Para todo $x,\ y \in X$: $x \succsim y$ ou $y \succsim x$.(Completude).

a2 Para todo $x,\ y,\ w \in X$: Se $x \succsim y$ e $y \succsim w$, então $x \succsim w$. (Transitividade).

O axioma *a1* significa que entre quaisquer duas alternativas pertencentes ao conjunto de escolha o tomador de decisão consegue elencar sua preferência. Já *a2* se refere a um requerimento clássico de racionalidade que, assumindo completude, impede ciclos na preferência estrita $\succ$ do tipo: $x \succ y \succ w \succ x$.

[5]Uma topologia τ em um conjunto X é qualquer família de subconjuntos de X que cumprir as seguintes hipóteses:

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. $\{E_i\}_{i \in I} \subset \tau \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} E_i \in \tau$, I arbitrário;
3. $E_1, E_2 \in \tau \Longrightarrow E_1 \cap E_2 \in \tau$.

(b) Continuidade:

Para todo $x \in X$, $\{z \in X : z \succeq x\}$ e $\{z \in X : x \succeq z\}$ são fechados em X.

Este axioma é mais técnico. Ele supõe que os conjuntos de contorno superiores e inferiores acima representem matematicamente um conjunto fechado. Neste contexto, por exemplo, tomando uma sequência de comparações $x_n \succsim x$ para todo n, se x_n converge para $\bar{x}$ então $\bar{x} \succsim x$.

Assim, respeitando os axiomas acima, pode-se escrever o seguinte teorema:

Teorema 1

Seja $\succsim$ uma ordem fraca e contínua sobre um conjunto de escolha X (um espaço topológico conexo[6] e separável[7], e.g., $X = \mathbb{R}'$). Então existe uma função (utilidade) contínua $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo $x, y \in X$

$$x \succsim y \iff u(x) \geq u(y)$$

Vale ressaltar que a recíproca é verdadeira. Ainda, a função u é única a menos de uma transformação monótona crescente.

3.2 Teoria da utilidade esperada

A forma específica como é dada a estrutura da formalização de Debreu é importante para algumas aplicações mais voltadas, por exemplo, para a área de equilíbrio geral já que, neste caso, o mais importante são as propriedades da função utilidade, por exemplo, monotonicidade, convexidade, dentre outras.

Todavia, quando se trata de escolha sob incerteza, a identificação de como o gosto e a incerteza condicionam a escolha é um ponto crucial. Portanto, a função de utilidade precisa representar essas características de alguma forma. O modelo de utilidade esperada de von Neumann e Morgenstern (vNM) forneceu um importante resultado para preferências sobre loterias objetivas.

O modelo é especialmente caracterizado por uma fundamentação axiomática de um funcional de utilidade esperada. Além dos axiomas descritos acima, esta utilidade também tem como premissa a lógica de independência.

Considere um conjunto Z de possíveis resultados e X sendo o conjunto de distribuições de probabilidade com suporte finito sobre Z, como definido na seção de Notações e Resultados Básicos. Com base nestes conceitos, segue os axiomas,

(c) Independência:

[6] O conjunto X é conexo quando a única cisão possível para X é a trivial. Uma cisão trivial é do tipo $X = A \cup B$ onde $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

[7] X é separável se existe $\lambda \subset X$ tal que λ é enumerável e $\bar{\lambda} = X$, onde $\bar{\lambda}$ é o fecho de λ.

Para todo x, y e $w \in X$, e para todo α em $(0,1)$: $x \sim y$ se, e somente se,

$$\alpha x + (1-\alpha) w \sim \alpha y + (1-\alpha) w.$$

Este axioma garante que a relação de preferência entre loterias, estabelecida *a priori*, não é alterada quando ocorre a mistura as mesmas com outra loteria.

Além disso, este modelo assume como hipótese uma característica de continuidade diferente do teorema de Debreu.

(d) continuidade:

Para todo x, y e $w \in X$, $\{\alpha \in [0,1] : \alpha x + (1-\alpha) y \succsim w\}$ e $\{\alpha \in [0,1] : w \succsim \alpha x + (1-\alpha) y\}$ são fechados em $[0,1]$.

Assim como o axioma de continuidade para o teorema de Debreu, este também impede inconsistência com base nos parâmetros acima determinados. O diferencial aqui é o conjunto fechado onde a relação é estabelecida. Neste caso, ao invés de ser no conjunto X, é no intervalo $[0,1]$.

Dessa forma, o teorema de von Neumann e Morgenstern pode ser escrito como:

Teorema 2

Seja uma relação binária $\succsim$ definida sobre X. Uma condição necessária e suficiente para que $\succsim$ satisfaça os axiomas *(a)*, *(c)* e *(d)*, é que exista uma função afim $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que, para todo x, $y \in X$, onde,

$$x \succsim y \iff u(x) \geq u(y)$$

Ainda, u é única a menos de uma transformação do tipo $u \longmapsto au + b$; $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

Ademais, u ser uma função afim, quer dizer que para todo $\lambda \in [0,1]$,

$$u(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda u(x) + (1-\lambda) u(y)$$

ou seja, a utilidade de uma combinação convexa de loterias é igual à combinação convexa as utilidades as mesmas loterias. Assim, pode-se escrever que para todo $x \in X$:

$$u(x) = \sum_{z \in Z} x(z) u(z),$$

pois,

$$x = \sum_{z \in Z} x(z) \delta_z,$$

onde $u(z) := u(\delta_z)$ e δ_z denota a loteria que entrega o prêmio $z \in Z$ com probabilidade igual a 1.

Este modelo foi importante por avançar na fundamentação matemática da escolha do agente, através da regra da utilidade esperada. Entretanto, algumas críticas surgiram em torno da validade do axioma de independência e a plausibilidade da utilização de probabilidades objetivas na tomada de decisão.

Allais (1953) contestou a extensão da aplicação da utilidade esperada através da aplicação de exemplos baseados em escolha de loterias. Obteve como principal resultado uma inconsistência matemática sobre a lógica da independência das loterias. Seus exemplos se basearam em um ambiente de escolha sob risco e elucidou a fragilidade do axioma de independência perante escolhas que não respeite a propriedade de linearidade nas probabilidades, condição fundamental para a teoria da utilidade esperada, derivada do axioma de independência[8]. Posteriormente, Savage (1954) refinou a idéia de um modelo de decisão utilizando o conceito de probabilidade subjetiva em sua fundamentação.

A fim de caracterizar o modelo de utilidade esperada subjetiva, a próxima subseção definirá as principais ferramentas dessa fundamentação.

3.3 Elementos preliminares de Probabilidade Subjetiva

Segue abaixo uma breve descrição dos principais conceitos utilizados na estrutura dos próximos modelos a serem apresentados. Além dos elementos serem comuns na Teoria da Decisão, eles são também muito utilizados em outras áreas como Teoria dos Jogos, por exemplo.

3.3.1 Probabilidade

Probabilidade pode ser considerado como a forma pela qual se possa mensurar a possibiliade de ocorrência de um ou mais resultados ou consequência. O conceito de probabilidade ganhou ao longo do tempo uma série de interpretações[9]. A mais antiga, denotada como visão clássica, é ligada à Laplace (1951)[10]. Ela diz que a probabilidade particular de um evento é o número de resultados igualmente prováveis que levam a este evento, dividido pelo número total de resultados igualmente prováveis. Dois princípios embasam essa argumentação:

- Princípio da razão suficiente: A simetria física significa igualdade de probabilidades e;

- Princípio da razão insuficiente: Caso não seja possível afirmar qual resultado é mais provável de ocorrer, então as probabilidades são iguais.

[8] Para maiores detalhes, ver Kahneman e Tversky (1979).
[9] Para maiores detalhes, ver Kyburg e Smokler (1964) e Oakes (1986).
[10] A primeira edição foi publicada em 1795.

As principais críticas à visão clássica têm relação com a interpretação de "simetria" neste contexto e sobre a latente ocorrência de exemplos contra-intuitivos ao princípio da razão insuficiente.

Outras interpretações sobre probabilidade surgiram. A abordagem Frequentista considera que a probabilidade de um evento significa um grande (potencialmente infinito) número de ocorrências repetidas. Esta definição foi a base para o desenvolvimento dos métodos estatísticos conhecidos como Teste de Hipótese.

Outra abordagem, chamada de Lógica, foi desenvolvida em Keynes (1921). A probabilidade é derivada de afirmações e demonstrações e pode ser deduzida do verdadeiro valor das premissas da afirmação que se está inferindo. Surowik (2002) destaca que esta definição pode ser obscura, caso não seja claro o valor lógico das premissas.

Segundo Hamouda e Rowley (1996), até meados da década de 20, a probabilidade não era geralmente tratada como um objeto matemático. Kolmogorov (1956)[11] foi o responsável por dar o primeiro tratamento teórico mensurável para a probabilidade. Através de sua fundamentação, o conceito se tornou mais claro e aplicável a fenômenos estudados nas ciências exatas.

Dentre diversas ramificações da probabilidade, a mais simples e utilizada de forma recorrente é a Probabilidade Objetiva. Pode-se dizer que uma probabilidade é dita objetiva quando interpretada como um modelo de eventos com frequências relativas, ou como um limite assintótico de frequências relativas quando o número de observações cresce.

Por outro lado, Ramsey (1931) e de Finetti (1937) e, posteriormente, Savage (1954), desenvolveram outro tipo de probabilidade conhecida como Probabilidade Subjetiva. Assim, uma probabilidade é dita subjetiva quando for interpretada como uma mensuração de graus de crenças. Wallsten (1990) caracteriza crença como uma ação de obediência a certas leis, embora o termo "probabilidade subjetiva" seja usado de forma mais abrangente.

A natureza subjetiva da probabilidade reside em situações onde os agentes com o mesmo conjunto de informações definem diferentes probabilidades para as mesmas consequências. O exemplo clássico é uma corrida de cavalos. Em geral, os apostadores têm as mesmas informações sobre os cavalos, a pista e os jóqueis. Entretanto, mesmo assim os indivíduos fazem diferentes apostas sobre o cavalo vencedor, o que não pode ser explicado por diferenças na aversão ao risco, mas somente por diferenças nas crenças. Isto leva à simples conclusão de que existam crenças pessoais em relação ao resultado da corrida.

Praticamente todo o arcabouço teórico de decisão tem a probabilidade como instrumento básico de recorrente utilização.

[11] A primeira edição foi publicada em 1933.

3.3.2 Estados da Natureza

Estados da Natureza é uma definição muito usada também em Teoria dos Jogos. Este termo tem por objetivo dimensionar o contexto onde o agente se insere e toma sua decisão. Suponha que um agente possa estar em dúvida sobre:

1. Se seu time de futebol ganhará o jogo do fim de semana

2. Qual time será campeão do campeonato nacional

3. Qual jogador será o artilheiro do campeonato do próximo ano.

Os estados da natureza podem oferecer uma quantidade finita ou infinita de descrições. No primeiro exemplo, existem três descrições possíveis para este estado: ganhar, empatar e perder. A definição destes estados impede qualquer outra descrição. Já no segundo exemplo, o número de descrições é maior, ou seja, o número de times a disputar o campeonato. No último exemplo, nota-se que o número de descrições é infinito, pois, se não é possível obter informações sobre quais jogadores serão inscritos para o campeonato do próximo ano, o número de jogadores passíveis de serem artilheiros é indefinido.

A dimensão dos estados da natureza fornece o grau de incerteza presente no ambiente decisório. Entretanto, em um ambiente incerto, um maior o número de descrições, não necessariamente implicará em maior um grau de ambiguidade. Para Savage (1954), o arcabouço matemático e filosófico sugere que a incerteza não pode ser removida sem alterar a universalidade do estado da natureza.

Formalmente, o conjunto de estados da natureza será descrito por S.

3.3.3 Eventos

Evento pode ser denominado como sendo uma coleção de estados da natureza. Assim, ele pode caracterizar um conjunto de estados da natureza através de algum critério arbitrário. Por exemplo, empate entre os times de futebol é um evento do estado da natureza do item 1. Pode-se também denominar como evento, a possibilidade de o time campeão estar localizado na região norte do país. Neste caso, o evento é um conjunto de estados da natureza (cada time localizado na região norte) determinado por um critério exógeno.

Na mesma lógica, um evento pode ser a vitória **ou** a derrota **ou** o empate do time no fim de semana. Neste caso, este evento é chamado de *evento universal*, pois ele engloba todos os elementos do estado da natureza do item 1 da subseção anterior. Por outro lado, o evento onde ocorram tanto vitória quanto empate no jogo é chamado de *evento vago* ou *nulo,* pois ele não obtém nenhum elemento dos estados da natureza.

Isto porque é impossível a ocorrência de uma vitória e um empate simultaneamente no jogo.

O conjunto de eventos é descrito pela $\sigma-$álgebra (de subconjuntos) Σ em S..

3.3.4 Consequência e Ato

Toda tomada de decisão é feita através de um ato escolhido antes da resolução da incerteza, e gera uma consequência *ex post* determinada pela resolução da incerteza. Estes conceitos, embora sejam formalmente caracterizados matematicamente, tem uma definição simples graças à frequência com que são utilizados socialmente. Savage (1954) define consequência como sendo tudo aquilo que possa acontecer com o agente. Ele ainda ressalta que a consequência poderia apropriadamente ser chamada de *estados pessoais*, em oposição aos estados da natureza.

O ato é uma função que liga estados da natureza às consequências. Sua determinação obviamente está relacionada à ação realizada pelo tomador de decisões. Além disso, dois atos que levam a mesma consequência em todo estado da natureza, não podem ser considerados como distintos. Um ato, portanto, é identificado por suas possíveis consequências.

Formalmente, um ato será denotado por f e o conjunto de atos por $\mathcal{F}$. Uma consequência será denotada por x e seu conjunto X. O ato é uma aplicação do tipo $f : S \to X$.

3.4 Utilidade esperada subjetiva

Com base no conceito de probabilidade subjetiva preconizado por Ramsey (1931) e de Finetti (1937), Savage (1954) desenvolve um novo modelo de utilidade esperada, chamado de Utilidade Esperada Subjetiva (SEU)[12]. O grande avanço desta abordagem é o fato de um mecanismo randômico objetivo (loterias) *a priori* se tornar dispensável, diferentemente da utilidade esperada de vNM.

Seja $\mathcal{L}$ um espaço de escolha onde,

$$\mathcal{L} = \{f : S \to X/f \text{ é simples e } \Sigma\text{-mensurável}\},$$

onde X não apresenta nenhuma estrutura especial, como imposto nas discussões do modelo de vNM.

A partir deste espaço de escolha, o autor estabelece uma relação de preferência $\succsim$ que satisfaça um conjunto de axiomas pré-estabelecidos.

[12] A sigla advém da expressão usual em inglês: *Subjective Expected Utility*.

Dessa forma, a existência de uma função utilidade $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada e uma única probabilidade finitamente aditiva $p : \Sigma \longrightarrow [0, 1]$, é condição necessária e suficiente para que os axiomas referendem o modelo. Assim, pode-se escrever tal relação:

$$f \succsim g \iff \int_S uof \; dp \geq \int_S uog \; dp$$

Por fim, vale ressaltar que os axiomas do modelo de Savage impõem que o espaço de estado S seja infinito e que a probabilidade finitamente aditiva obtida na representação não contenha átomos[13].

Posteriormente, Anscombe e Aumann (1963) também modelaram uma relação de preferências baseado na existência de probabilidades subjetivas. Embora o resultado seja similar ao modelo de Savage (1954), o processo analítico é menos complexo por utilizar como espaço de consequências o conjunto de escolhas dado na teoria de vNM.

Assim, considere o conjunto X definido na seção 2. O diferencial, neste caso é o fato de haver um ato $f : S \rightarrow X$ que associa cada estado da natureza a um resultado aleatório, onde a distribuição seja exógena ou objetiva. Em resumo, a consequência é uma loteria do tipo vNM e os atos são de caráter subjetivo, chamado comumente de atos do tipo de "loterias de cavalo" e as consequências são do tipo "loterias de roletas". Isto significa que um dado ato $f : S \rightarrow X$, liga cada estado da natureza $s \in S$ à mesma consequência $x \in X$.

A estrutura axiomática do modelo é descrita abaixo.

A1. Ordem Fraca não Degenerada:

(a) Para todo f e g em $\mathcal{F}$: $f \succsim g$ ou $g \succsim f$.(Completude)

(b) Para todo f, g e h em $\mathcal{F}$: Se $f \succsim g$ e $g \succsim h$, então $f \succsim h$. (Transitividade)

(c) Existem f e g em $\mathcal{F}$, tal que $f \succ g$.

A2. Independência:

Para todo x, y e $w \in \mathcal{F}$, e para todo α em $(0, 1)$: $x \sim y$ se, e somente se,

$$\alpha x + (1 - \alpha) w \sim \alpha y + (1 - \alpha) w.$$

A3. Continuidade:

Para todo x, y e $w \in X$, $\{\alpha \in [0, 1] : \alpha x + (1 - \alpha) y \succsim w\}$ e $\{\alpha \in [0, 1] : w \succsim \alpha x + (1 - \alpha) y\}$ são fechados em $[0, 1]$.

A4 Monotonicidade

[13]Dada uma probabilidade P, um átomo é um evento que não admite um subevento distinto que tenha menor probabilidade positiva. Assim, seja um evento mensurável E e F onde $F \subset E$. O evento E é um átomo se, e somente se, $P(F) = P(E)$ ou $P(F) = 0$, qualquer que seja $F \subset E$ com $F \in \Sigma$.

Para todo $f,\ g \in \mathcal{F}$: se $f(s) \succsim g(s)$, para todo $s \in S$ então $f \succsim g$.

Este axioma é importante para caracterizar a relação de preferência entre os atos \para cada estado da natureza.

Teorema 3

Seja uma relação de preferências $\succsim$ sobre $\mathcal{F}$ que satisfaça os axiomas *A1* - *A4*. Então existe uma probabilidade finitamente aditiva p sobre Σ e uma função afim u sobre X a valores reais, tal que, para todo par de atos $f,\ g \in \mathcal{F}$:

$$f \succsim g \iff \int_S uof\ dp \geq \int_S uog\ dp.$$

Portanto, se existir uma probabilidade p e uma função afim u como acima descritos, esta relação de preferências irá satisfazer os axiomas acima mencionados. Por fim, a função é única a menos de uma transformação linear do tipo $u \longmapsto au + b$; $a > 0$ e $b \in R$.

3.5 Paradoxo de Ellsberg

Em geral, estes modelos clássicos de utilidade, não padeciam de grandes deficiências teóricas ou descritivas, ressaltadas na literatura da época. Entretanto, em 1961, Ellsberg publicou um trabalho seminal onde uma série de experimentos comportamentais refutava o resultado da utilidade esperada nos moldes de Savage e Anscombe e Aumann. Restringindo o acesso às probabilidades na tomada de decisão, Ellsberg trás a tona o conceito de incerteza e ambiguidade. Seu experimento mais clássico consiste em uma urna que contém 90 bolas, sendo 30 vermelhas e 60 pretas ou amarelas. O participante deve ordenar um conjunto de apostas baseadas na retirada aleatória de uma bola de tal urna. As apostas estão descritas na Tabela 1, abaixo.

Tabela 1: Sistema de premiação do experimento.

	V	P	A
f_V	1	0	0
f_A	0	0	1
f_{VP}	1	1	0
f_{PA}	0	1	1

A variável f é um ato que representa uma aposta na retirada de uma determinada bola. As letras V, P e A representam as cores vermelha, preta e amarela, respectivamente. Os subscritos nos atos representam a cor da bola apostada. Duas cores como subscrito de um ato representam uma aposta conjunta em duas bolas de cores diferentes. Se o agente acertar a aposta, ele tem direito a um prêmio, representado por 1 na tabela, caso contrário não ganha nada, representado por 0. Ou seja, se o agente apostar f_V ele ganha se sair a bola vermelha e perde caso saia uma das outras bolas.

O experimento mostrou que os jogadores preferem apostar na bola vermelha a apostar na bola amarela, ou seja, $f_V \succ f_A$. Observou-se também que ao escolher duas bolas para uma aposta simultânea, os agentes preferem apostar em bolas pretas e amarelas a apostar em vermelhas e pretas. Mais especificamente, ao adicionar a bola preta nas apostas anteriores, a preferência passa a ser, $f_{VP} \prec f_{AP}$.

A probabilidade de se retirar uma bola vermelha da urna é de $\frac{1}{3}$. Já a probabilidade associada às bolas pretas e amarelas varia entre 0 e $\frac{2}{3}$. Neste caso, pode-se escrever a probabilidade das bolas vermelha, amarela e preta como sendo $\frac{1}{3}, \beta, \frac{2}{3} - \beta$, respectivamente. De acordo com a SEU, como $f_V \succ f_A$, então,

$$\beta < \frac{1}{3}.$$

Da mesma forma, se $f_{VP} \prec f_{AP}$ logo,

$$\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \beta\right) < \frac{2}{3},$$

e, portanto,

$$\beta > \frac{1}{3}.$$

Isto leva à uma inconsistência no modelo SEU, já que a mesma probabilidade não pode ser maior que $\frac{1}{3}$ para o primeiro caso e menor que $\frac{1}{3}$ para o segundo caso, ou seja, uma contradição.

Isto ocorre, pois os agentes geralmente preferem apostar nas bolas vermelhas em detrimento das demais, pois a probabilidade associada à sua escolha é clara $\frac{1}{3}$. Já a probabilidade das outras bolas é vaga, pois varia no intervalo $\left[0, \frac{2}{3}\right]$. Quando a bola preta é incluída nas apostas, a probabilidade de se tirar uma vermelha ou preta está entre $\frac{1}{3}$ e 1, e a probabilidade de tirar uma bola amarela ou preta passa a ser $\frac{2}{3}$. Dessa forma, observa-se que ao adicionar a possibilidade de se retirar a bola preta, a situação onde a probabilidade era clara (apostar na bola vermelha) passa a ser vaga e a situação onde a probabilidade era vaga (apostar na bola amarela) passa a ser clara.

Portanto, este experimento expõe as limitações da utilidade esperada subjetiva perante à situações onde a probabilidade não é bem definida. Isto porque a preferência se altera ao realizar a mesma modificação nas loterias da primeira aposta, o que invalida a hipótese de independência. É intuitivo que, ao adicionar a bola preta nas apostas anteriores, os apostadores preferirão apostar em bolas amarelas e pretas a apostar em bolas vermelhas e pretas. Vale ressaltar que esta predileção indica que os apostadores são avessos à incerteza e, por conseguinte, significa que preferem apostar no cenário onde a probabilidade é explícita.

O principal resultado deste experimento é que os agentes que apresentam este tipo de preferência evitam situações onde as probabilidades não são claras o bastante. Este comportamento revela aversão à incerteza. Nestas situações, onde a incerteza influencia na tomada de decisão do agente, as teorias de utilidade esperada apresentadas até agora, não são consistentes.

3.6 Escolha sob Incerteza

A identificação do comportamento de aversão à incerteza, revelado nos experimentos de Ellsberg, mostraram a incapacidade dos modelos de escolha clássicos em suportar este tipo de comportamento. Com isso, o conceito de ambiguidade e a atitude do tomador de decisão, perante este fenômeno, ganharam importância na literatura da Teoria da Decisão.

Ellsberg (1961), por exemplo, caracteriza ambiguidade como uma qualidade dependendo do tipo, montante, confiabilidade e "unanimidade" da informação. Já em relação à atitude ambiguidade, Rode et al. (1999) atribuem este comportamento à fatores cognitivos e motivacionais. Frisch e Baron (1988) identificam aversão à ambiguidade como lacunas de conhecimento sobre alguns aspectos de uma estrutura estocástica de um problema que não é conhecido, mas que poderia ser.

3.6.1 Utilidade esperada de *Choquet*

Levando em consideração a possibilidade de o tomador de decisão agir em um ambiente ambíguo, cujas probabilidades não são claras, como em Ellsberg (1961), Schmeidler (1989) fundamenta um modelo chamado de Utilidade Esperada de *Choquet* (CEU)[14] de preferências que responde a este tipo de fenômeno.

Para lidar com ambigüidade, ou incerteza como caracterizada por Knight, Schmeidler utilizou probabilidades não aditivas para fundamentar sua preferência, a fim de tratar matematicamente o comportamento do tomador de decisão diante de ambientes incertos.

No conceito clássico, a hipótese de aditividade diz que a soma das probabilidades é igual a probabilidade da soma. Formalmente, suponha dois eventos A e B que possuam possibilidades de ocorrência associadas a $p(A)$ e $p(B)$. A aditividade nas probabilidades diz que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Para caracterizar probabilidades vagas, comuns em ambientes ambíguos, Schmeidler utilizou probabilidades não aditivas (ou capacidades), onde a incerteza fosse caracter-

[14] A sigla advém do inglês: *Choquet Expected Utility*.

izada pela relação $p(A \cup B) + p(A \cap B) \neq p(A) + p(B)$. A sensibilidade do tomador de decisão perante ambiguidade remete a um tipo distinto de relação entre as probabilidades, como se pode ver abaixo:

$$\begin{aligned} p(A \cup B) + p(A \cap B) &= p(A) + p(B) \text{ (Neutro à Incerteza)} \\ p(A \cup B) + p(A \cap B) &> p(A) + p(B) \text{ (Avesso à Incerteza)} \\ p(A \cup B) + p(A \cap B) &< p(A) + p(B) \text{ (Propenso à Incerteza)} \end{aligned}$$

Além disso, a estrutura axiomática do modelo decisório teria de ser alterada para construir essa preferência. Os axiomas de ordem fraca não degenerada, continuidade e monotonicidade são os mesmos utilizados nos modelos clássicos de Savage (1954) e Anscombe e Aumann (1963). Já o axioma de independência, violado nos experimentos de Ellsberg, foi substituído pelo axioma de independência comonotônica. Este axioma é menos restritivo que o tradicional, pois é construído com base na definição de atos comonotônicos, como mostrado abaixo:

Definição 1

Dois atos f e g em $\mathcal{F}$ serão comonotônicos se, dados s e t em S, $f(s) \succ f(t)$, se, e somente se, $g(s) \succ g(t)$. Mais especificamente, se f e g são atos como definido acima e u é uma função de utilidade sobre X, então f e g são comonotônicos se, e somente se, $(u(f(s)) - u(f(t)))(u(g(s)) - u(g(t))) \geq 0$ para todo s e t em S.

Dessa forma, é possível escrever o axioma abaixo:

A.2b Independência Comonotônica

Para todo conjunto de atos, f, g e h em $\mathcal{F}$, dois a dois comonotônicos, e para todo α em $]0,1[$: $f \sim g$ implica $\alpha f + (1-\alpha)h \sim \alpha g + (1-\alpha)h$.

Como o axioma restringe que apenas os pares comonotônicos sejam independentes, esta condição é claramente menos restritiva que a condição de independência utilizada no SEU. Gilboa e Schmeidler (1989) ressaltam que, diferentemente do axioma de independência clássico, este possibilita inclusive a ocorrência de *hedging*.

Com base nesta estrutura axiomática, Schmeidler desenvolve uma nova classe de preferências através do teorema descrito abaixo:

Teorema 4

Suponha que uma preferência sobre $\mathcal{F}$ satisfaça os axiomas *A1, A2b, A3* e *A4*. Então existe uma única capacidade v sobre Σ e uma função afim u sobre X, a valores reais, tal que, para todo par de atos f e g em $\mathcal{F}$:

$$f \succsim g \Leftrightarrow (C)\int_S uof\,dv \geq (C)\int_S uog\,dv$$

Ainda, se existem v e u como acima, então a relação de preferência induzida satisfaz os axiomas *A1, A2b, A3* e *A4*. Finalmente, a função é única a menos de uma transformação do tipo $u \mapsto au + b$, com $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

Nesta preferência, Schmeidler utiliza a Integral de *Choquet*. O intuito é facilitar a utilização de probabilidades não aditivas na representação. Tecnicamente, a integral de *Choquet* permite que, dadas as funções $a, b : S \to \mathbb{R}$ e $v : \Sigma \to [0, 1]$, se possa escrever que,

$$(C)\int_S (a+b)\, dv \neq (C)\int_S a\, dv + (C)\int_S b\, dv,$$

tornando possível a construção da representação matemática da preferência descrita no Teorema 4. A idéia de utilização da probabilidade não aditiva inviabiliza a utilização da integral no sentido de *Lebesgue*, já que sua configuração não permite a existência da desigualdade acima, necessária para a determinação da aversão à incerteza no modelo. Neste sentido, a integral de *Choquet* que é uma generalização da integral de *Lebesgue*, extende as possibilidades de comportamentos frente à incerteza.

Embora o modelo principal não enfatize o comportamento do tomador de decisão, o autor define aversão à incerteza através da convexidade da capacidade na preferência.

Ademais, utilizando capacidades convexas, é possível obter uma representação onde a utilidade de um ato seja o mínimo entre os valores calculados com base nas probabilidades dadas pelo $core(v)$. Neste caso, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 1:

Dada uma preferência nas condições do teorema de Schmeidler, são equivalentes:

(a) $\succsim$ revela aversão à incerteza[15];

(b) A capacidade v obtida na representação é convexa;

(c) Para todo $f \in \mathcal{F}$, $I(f) = \min\limits_{p \in core(v)} \int uof\, dp$,

(d) Para todo $f, g \in \mathcal{F}$, $I(f + g) \geq I(f) + I(g)$

3.6.2 Utilidade Esperada Maxmin

Gilboa e Schmeidler (1989) resolveram o paradoxo de Ellsberg, como um fenômeno de aversão à incerteza tomando explicitamente tal hipótese no modelo de preferências, chamados de Utilidade Esperada Maxmin (MEU)[16].

Então, baseados em um ambiente incerto e onde os indivíduos se comportam com aversão a tal incerteza, Gilboa e Schmeidler fundamentaram um conjunto de axiomas que dê suporte ao modelo decisório a fim de captar esse padrão de comportamento.

[15] Como definido no axioma A5*, da próxima subseção.

[16] A sigla advém do inglês: *Maxmin Expected Utility.*

Além dos axiomas já conhecidos, como ordem fraca não degenerada, continuidade e monotonicidade, os autores propuseram mais dois axiomas que definem aversão à incerteza e independência com respeito à certeza.

Estes dois últimos axiomas caracterizam a singularidade desta preferência. São descritos abaixo como:

A2c. Independência com respeito à certeza (certainty-independence):
Para todo $f, g \in \mathcal{F}, x \in X$ e $\alpha \in (0,1)$:

$$f \sim g \Rightarrow \alpha f + (1-\alpha)x \sim \alpha g + (1-\alpha)x$$

Este axioma é claramente menos restritivo que os axiomas de independência tradicional e independência comonotônica. Agora a mistura é realizada com um terceiro ato que precisa ser apenas um ato constante, isto é, uma consequência. Este axioma é menos restritivo justamente por necessitar de uma condição mais simples que os axiomas anteriores.

Tanto neste axioma quanto no axioma de independência comonotônica, a possibilidade de *hedging* é enfatizada. Esta condição é importante para o caso de aversão à incerteza, definida no axioma abaixo. Por fim, diferentemente do axioma *A2a*, o paradoxo de Ellsberg não invalida o axioma *A2c*, justamente por permitir que o agente não seja apenas neutro à incerteza.

A5. Aversão à Incerteza:*
A preferência revela *aversão à incerteza*, quando, para todo $f, g \in \mathcal{F}$ e $\alpha \in [0,1]$:

$$f \sim g \Rightarrow \alpha f + (1-\alpha)g \succsim f$$

O axioma de aversão à incerteza assume intuitivamente que, entre dois atos indiferentes, o agente prefere a mistura destes atos a um deles apenas. De forma genérica, esta relação mostra que, em ambientes onde não se possa especificar muito bem a probabilidade dos resultados, os indivíduos preferem mitigar a incerteza diversificando a aposta a escolher apenas um ato.

Dessa forma, Gilboa e Schmeidler (1989) introduzem aversão à incerteza em sua classe de preferência através do seguinte teorema,

Teorema 6

Seja $\succsim$ uma relação binária sobre $\mathcal{F}$, são equivalentes:

(a) A relação $\succsim$ satisfaz os axiomas *A1, A2c, A3, A4* e *A5**;

(b) Existe uma função afim $u : X \to R$ e um único conjunto C não vazio, convexo e fechado (*fraco**) de probabilidades finitamente aditivas sobre Σ tal que, para todo

$f, g \in \mathcal{F}$:

$$f \succsim g \Leftrightarrow \min_{p \in C} \int u(f)\, dp \geq \min_{p \in C} \int u(g)\, dp$$

Ainda, a função é única a menos de uma transformação do tipo $u \mapsto au+b$, com $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

O conjunto de probabilidades C representa a crença de ambiguidade percebida pelo tomador de decisão. Isto significa que em uma ambiente incerto, onde não há uma formalização clara na definição das probabilidades associadas a cada resultado, cada agente tem suas crenças representadas por um conjunto de probabilidades. O componente *min* caracteriza a aversão à incerteza, pois leva o agente a tomar o mínimo de seu conjunto de probabilidades.

O CEU pode ser considerado como um caso especial do MEU quando seu o conjunto de capacidades é convexo.

Essa classe de preferência foi um importante avanço na literatura por levar em consideração atitudes pessimistas em ambientes incertos onde probabilidades objetivas não capturam bem o fenômeno em questão. Este comportamento é muito recorrente na sociedade. Vale frisar que, embora a atitude seja pessimista, o tomador de decisão continua a ter como objetivo maximizar sua utilidade.

Entretanto, outro comportamento comum, não representado pela preferência acima, é a possibilidade de o indivíduo ser otimista com relação à sua escolha. Alguns exemplos foram dados na introdução e estão amplamente relacionados a situações onde o indivíduo se sente competente para tal.

Neste sentido, baseado em experimentos comportamentais, Heath e Tversky (1991) denominaram esta atitude como Hipótese da Competência, que será discutido à seguir.

3.6.3 Hipótese de Competência

Heath e Tversky (1991) introduzem e analisam a hipótese de competência realizando uma série de experimentos. Esta idéia advém da disposição de um tomador de decisão em apostar num evento incerto onde este não dependa apenas das probabilidades estimadas de sucesso e da precisão desta estimação. O conhecimento geral do apostador e sua compreensão do contexto também influenciam sua decisão. Dessa forma, a hipótese de competência considera que os agentes preferem apostar em certos cenários onde se consideram instruídos ou competentes em detrimento, por exemplo, de eventos onde os resultados são equiprováveis. Em um jogo de loteria, por exemplo, tanto o sucesso quanto a falha é atribuído primordialmente à sorte. Entretanto, quando a aposta é relacionada a um jogo que envolva habilidade a situação é diferente. Se o jogador tem um conhecimento relativamente limitado sobre a situação, a falha é atribuída à ignorância e o sucesso é atribuído à sorte. Entretanto, se ele se considera plenamente competente, o sucesso é atribuído ao conhecimento e a falha ao azar.

Rothbart e Snyder (1970) testaram se as pessoas preferiam apostar em um dado antes ou depois dele ser jogado. Os resultados mostraram que as pessoas que preferem apostar antes do dado ser jogado se consideram mais confiantes em sua aposta do que as pessoas que preferem apostar depois do dado ser jogado. O primeiro grupo apostou mais dinheiro no jogo que o último grupo. Os autores interpretaram este resultado à idéia de uma ilusão de controle, isto é, as pessoas que apostavam antes do dado ser jogado, acreditavam exercer algum controle sobre a jogada, e para isto, não há uma explicação plausível. Portanto, é possível enumerar três aspectos que confirmam a Hipótese da Competência, a saber:

1. Preferência por apostar na urna onde a proporção das bolas é conhecida (Paradoxo de Ellsberg);

2. Preferência em apostar em jogos que envolvam habilidade ou conhecimento do que em jogos que envolvam apenas chances probabilísticas; e

3. Preferência em apostar em eventos futuros do que em eventos passados (experimento do dado).

Por fim, a hipótese da competência mostra que pode ocorrer uma discrepância de julgamento onde a preferência em apostar em um evento em detrimento ao outro mesmo que o último seja tão provável quanto o primeiro. Evidentemente, esta hipótese pode mostrar que os indivíduos aparentam ser mais otimistas ao apostar em eventos onde este se julgue mais competente e pessimista ao apostar em eventos em que se julgue ignorante e suas probabilidades sejam desconhecidas.

Esta hipótese corrobora a possibilidade de o tomador de decisão também ser propenso à ambiguidade, atitude esta que se opõe ao comportamento padrão desenhado nos modelos CEU e MEU.

Com base no modelo de Hurwicz[17], conhecido como α-pessimismo, Ghirardato et al (2002, 2004) foram os primeiros à incorporar o comportamento pessimista e otimista em uma classe de preferências.

3.6.4 Utilidade Esperada Alfa Maxmin

Com o intuito de modelar a possibilidade de o tomador de decisões ser avesso ou propenso à ambigüidade, Ghirardato et al (2004) desenvolveram uma nova classe de preferências, chamadas de α-MEU. O modelo é proposto como uma generalização da Utilidade Esperada Maxmin. Como consequência, o suporte axiomático é análogo ao

[17] Segundo Ghirardato et al. (2002), a axiomatização original de Hurwicz nunca chegou a ser publicada.

Gilboa e Schmeidler (1989), exceto pelo axioma de aversão à incerteza, que não é utilizado nesta estrutura.

Portanto, com base no modelo de Gilboa e Schmeidler (1989), os autores apresentaram uma classe de preferências que satisfazem os axiomas *A1, A2c, A3 e A4*. Esta classe de preferências tem o seguinte formato:

$$f \succsim g \text{ se, e somente se } J(f) \geq J(g) \text{ para todo } f, g \in \mathcal{F}$$

onde,

$$J(f) = a([f]) \min_{P \in C} \int u(f)\, dP + (1 - a([f])) \max_{P \in C} \int u(f)\, dP.$$

O conjunto de probabilidades C é não vazio, (fraco*), compacto e convexo em Σ, e u uma função afim não constante tal que $u : X \to \mathbb{R}$. A variável a é uma função com valores em $[0, 1]$. Por fim, a relação binária $\succcurlyeq$ está representada pelo funcional $J : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$.

Embora o teorema acima seja teorica e intuitivamente interessante, a aplicação de seu resultado é complexa e de difícil assimilação. Por conseguinte, os autores apresentam um caso especial para esta preferência onde sua aplicação é aparentemente mais palatável.

Com uma condição adicional, esta preferência pode ser reescrita como abaixo,

$$f \succsim g \text{ se, e somente se, } J(f) \geq J(g) \text{ para todo } f, g \in \mathcal{F}$$

onde,

$$J(f) = \alpha \min_{P \in C} \int_S u(f)\, dP + (1 - \alpha) \max_{P \in C} \int_S u(f)\, dP.$$

Esta relação binária $\succsim$ satisfaz os mesmos axiomas da preferência mais geral. O conjunto de probabilidades C é não vazio, (fraco*), compacto e convexo em Σ, u é uma função afim não constante tal que $u : X \to \mathbb{R}$ e $\alpha \in [0, 1]$. Aqui também a relação binária $\succcurlyeq$ está representada pelo funcional $J : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$.

O funcional acima é conhecido como α-MEU. Ele é um caso especial do teorema principal de Ghirardato et al (2004), pois basta considerar a função $a([f])$[18], como uma constante $\alpha \in [0, 1]$. Vale ressaltar também que o α–MEU é uma generalização do MEU por dar um grau de ponderação para o pessimismo na preferência.

Interessante observar que no modelo α-MEU, o tomador de decisão em geral não é propenso e nem avesso à incerteza, mas sua preferência é representável por um funcional que é uma combinação de ambos.

[18] O ato f mantém a definição da seção 2.

Posteriormente, Eichberger et al (2009) mostraram que, em estados de espaços finitos, o modelo α-MEU somente satisfaz os axiomas se, e somente se $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$. Este resultado restringe a principal contribuição do modelo, que seria uma possível ponderação entre aversão e propensão à incerteza do agente. Ou seja, a possibilidade de tomar uma combinação entre o mínimo e o máximo do conjunto de probabilidades é inconsistente. Finalmente, o que restou ao modelo é a possibilidade de o tomador de decisão ser do tipo maxmin, quando $\alpha = 1$ ou maxmax, quando $\alpha = 0$.

3.6.5 Aplicações de aversão à ambiguidade em modelos de finanças

Depois da difusão dos modelos clássicos de utilidade esperada, que levam em consideração aversão à incerteza, como o CEU e o MEU, alguns modelos de finanças foram adaptados para tratar este tipo de questão. A reação do tomador de decisão no modelo de finanças ao se deparar com incerteza é diferente de quando se depara com risco. Este comportamento procurou ser explorado em trabalhos como Dow e Werlang (1992), Epstein (2000), Epstein e Wang (1994, 1995) e Mukerji e Tallon (2001, 2003).

Dow e Werlang (1992) exploram um modelo onde o agente opera em um mercado com dois períodos determinado por preços de ações exógenos. O tomador de decisão, agindo conforme o CEU começa em uma posição ausente de incerteza onde ele escolherá se assumirá ou não uma posição de compra e venda em relação a um ativo. Dessa forma, em um ambiente ambíguo, representado por capacidades sobre o retorno da ação, haverá um intervalo de preços na qual o agente não assegurará nem posição de venda nem de compra. Vale frisar que o tamanho deste intervalo de preços dependerá da percepção de incerteza do agente e de seu comportamento com relação ao fenômeno, ou seja, sua aversão à incerteza. Mukerji e Tallon (2003) também identificaram um intervalo de preços onde o agente avesso à incerteza não assume posição de compra e venda. Neste trabalho, os autores generalizaram o resultado de Dow e Werlang (1992) sem lançar mão de uma forma paramétrica de preferência.

Epstein e Wang (1994) exploram um modelo de múltiplos ativos em um horizonte infinito de tempo. Neste modelo, os autores analisam as condições para a existência de um conjunto de preços de ações que suportam uma posição ótima que não seja restrita àquelas onde não haja incerteza. Um importante resultado é que o equilíbrio pode ser indeterminado. Utilizando como preferência padrão para o tomador de decisão a preferência MEU, essa indeterminação pode levar a um processo particular de precificação e a uma maior volatilidade no mercado. Por conta disso, com a presença de incerteza, a volatilidade do preço intertemporal pode ser grande. Ademais, de acordo com Epstein e Wang (1995), com descontinuidade nos preços dos ativos o efeito poderia ser ainda maior, o que levaria à "booms" e "crashes".

Mukerji e Tallon (2001) identificam as condições nas quais agentes avessos à ambiguidade geram um equilíbrio sem troca na economia e as oportunidades de divisão de riscos são previamente determinadas. Os autores identificaram como necessárias as seguintes condições:

1. Existência de estados da natureza, na qual o retorno do ativo varie e a dotação do agente se mantém idêntica. Esta condição resulta em uma situação onde o risco relacionado ao retorno do ativo é "idiossincrático" com respeito à incerteza da renda corrente do agente.

2. O risco relacionado ao retorno do ativo é percebido como ambíguo.

Sob tais condições, mesmo em mercados completos, onde montantes monetários podem circular sem restrições, as alocações finais e o *hedging* será sub-ótimo. Di Mauro (2008) ressalta que, neste caso, aversão à ambiguidade acaba gerando uma forma de "mercados incompletos".

4 Axiomas e Teorema Principal

Após uma breve apresentação da evolução da teoria na qual se baseia este trabalho, será dada, a seguir, as bases técnicas para o desenvolvimento do modelo que responde as indagações teóricas e empíricas.

Com o intuito de situar este trabalho na evolução histórica do tema, a modelagem a partir daqui, segue com o interesse de contribuir teoricamente ao propor um modo que permita atitudes frente à ambiguidade ainda não capturadas pelas representações presentes na área.

Partindo da mesma presuposição, o desenho da preferência aqui será tanto tecnicamente quanto teoricamente diferente, i.e., utilizamos uma coleção de eventos exogenamente especificados que defina onde o tomador de decisão será propenso ou avesso à incerteza.

Neste sentido, com base no modelo proposto à frente, será discutido os exemplos da introdução.

A classe de preferências proposta neste trabalho é caracterizada pelas propriedades descritas nos axiomas abaixo.

4.1 Axiomas

A1 Ordem Fraca não Degenerada:

A1a (Completude) Para todo f e g em $\mathcal{F}$: $f \succsim g$ ou $g \succsim f$.

A1b (Transitividade) Para todo f, g e h em $\mathcal{F}$: Se $f \succsim g$ e $g \succsim h$, então $f \succsim h$.

A1c (Não Degeneração) Existem f e g em $\mathcal{F}$, tal que $f \succ g$.

A2c Independência com Respeito à Certeza: Para todo f, g em $\mathcal{F}$, $x \in X$ e para todo α em $(0,1)$:

$f \sim g$ implica $\alpha f + (1-\alpha)\, x \sim \alpha g + (1-\alpha)\, x$.

A3 Continuidade: Para todo f, g e h em $\mathcal{F}$, os conjuntos:

$\{\alpha \in [0,1] : \alpha f + (1-\alpha)\, g \succsim h\}$ e $\{\alpha \in [0,1] : h \succsim \alpha f + (1-\alpha)\, g\}$ são fechados em $[0,1]$.

A4 Monotonicidade: Para todo f e g em $\mathcal{F}$:

Se $f(s) \succsim g(s)$ para todo $s \in S$, então $f \succsim g$.

A5 Evento-Dependência: Existem $A \in \Sigma$, tal que, para todo f e g em $\mathcal{F}$, $x, y \in X$, e $\alpha \in (0,1)$:

A5a (Aversão) se $fAx \sim gAx$, então $\alpha fAx + (1-\alpha)\, gAx \succsim fAx$;

A5b (Propensão) se $fA^c x \sim gA^c x$, então $fA^c x \succsim \alpha fA^c x + (1-\alpha)\, gA^c x$;

A5c (Separação) existe $\bar{x} \in X$ tal que, se $x \sim fA\bar{x}$ e $y \sim \bar{x}Af$, então $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \sim \frac{1}{2}fA\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{x}Af$.

Os axiomas de ordem fraca não degenerada, continuidade e monotonicidade e são os mesmos utilizados para a formalização do teorema de Anscombe-Aumann e inspirados por aqueles utilizados na fundamentação da utilidade esperada de vNM. Já o axioma de Independência com Respeito à Certeza é o mesmo utilizado no modelo de preferências de Gilboa e Schmeidler (1989). Como já foi dito na seção anterior, este enfraquece o axioma de independência utilizado em Anscombe-Aumann (1963), por não utilizar um ato arbitrário, mas somente um terceiro ato "constante". Este axioma permite a possibilidade de *hedging*, o que não era possível no axioma de independência tradicional. Além disso, o paradoxo de Ellsberg viola o axioma de independência clássico por inverter a preferência entre duas apostas quando acrescentada uma terceira aposta. Por exemplo, o experimento mostrou que os agentes preferem apostar na bola vermelha à bola amarela. Entretanto, ao "acrescentar" a bola preta na aposta, os agentes preferirão apostar na bola amarela e preta a apostar na bola vermelha e preta.

A situação descrita no parágrafo anterior viola o axioma de independência do modelo de utilidade esperada, mas não viola o axioma de independência com respeito à certeza, pois este último necessita apenas de um resultado que mantenha a relação de preferência original.

Já o axioma *A5* aparenta similaridade com o axioma de aversão à incerteza em Gilboa e Schmeidler (1989). No entanto, ele particiona o espaço de eventos S de tal forma que os eventos são divididos em duas coleções determinadas por A, onde o agente apresenta distintas atitudes frente à incerteza. Restrito a A e seus subeventos, o agente apresenta um comportamento de aversão à incerteza, enquanto que, para A^c, e seus subeventos, o agente apresenta um comportamento de propensão à incerteza. Vale ressaltar que, se $A = S$ então o axioma *A5a* equivale ao axioma *A5**.

O axioma *A5c* assume a existência de uma consequência referencial $\bar{x}$, de modo que dado qualquer ato f e os atos induzidos $f_1 := fA\bar{x}$ e $f_2 := \bar{x}Af$ vale que a média dos equivalentes certos de f_1 e f_2 é indiferente à média de f_1 e f_2. É possível notar que esta propriedade é válida no SEU para quaisquer par de atos $f, g \in \mathcal{F}$: se $\succsim$ é uma preferência SEU, então

$$\left[x \sim f \text{ e } y \sim g \Longrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \sim \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g\right].$$

4.2 Teorema Principal

Seja $\succsim$ uma relação binária em $\mathcal{F}$. As seguintes condições são equivalentes:

(1) A relação de preferência $\succsim$ satisfaz os axiomas *A1* - *A5*;

(2) Existe uma única função afim não constante $u : X \to \mathbb{R}$ do tipo vNM sobre as consequências, onde $0 \in u(X)$ e um conjunto C não vazio, fechado (fraco*) e convexo de probabilidades finitamente aditivas em Σ e um evento não ambíguo $A \in \Sigma$ com respeito a C, tal que:

$f \succsim g$ se, e somente se,

$$\min_{p \in C} \int_A u(f)\ dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} u(f)\ dp \geq \min_{p \in C} \int_A u(g)\ dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} u(g)\ dp$$

onde f e g em $\mathcal{F}$.

Este teorema define comportamentos em situações de escolha como as descritas na introdução. O evento A, que aparece na representação, é não ambíguo com respeito à C no sentido de que, para todo $p, p' \in C$, $p(A) = p'(A)$. No caso do comentarista de futebol, ele tomará suas decisões de aposta com base neste modelo. O evento referencial A, que corresponde aos times europeus no torneio, é não ambíguo, pois ele considera que a ocorrência deste evento é de 50%. Consequentemente, seu complementar A^c, ou seja, os times sul-americanos que completam a configuração das quartas de finais, também tem probabilidade equivalente.

O interessante é que para cada estado da natureza ou subevento do evento referencial, as probabilidades de ocorrência não são objetivas. Por exemplo, o comentarista não consegue definir uma probabilidade clara para o caso de o Brasil ser campeão mundial. Como o comentarista é avesso à incerteza com respeito a A e seus subeventos, ele tomará o mínino do conjunto de probabilidades que maximiza a utilidade de sua escolha. No caso deste exemplo, o comentarista dará um peso relativamente maior à sua menor possibilidade de acerto, dado que ele não se considera competente ao indicar um time europeu para ser campeão. Este comportamento é representado na preferência pelo componente que toma o mínimo do conjunto de probabilidades. Já com respeito ao evento complementar A^c e seus subeventos, o comentarista dará um peso relativamente maior à probabilidade para o seu acerto, dado que ele se considera competente para julgar qual time sul-americano poderia ser campeão. Este comportamento é descrito no componente da preferência que toma o máximo do conjunto de probabilidades.

Da mesma forma, no exemplo do pneumologista, o evento de referência é o órgão de origem da doença, ou seja, A corresponde por doenças cardíacas e seu complementar A^c por doenças respiratórias. Devido à frequência com que aparece pacientes com problemas cardíacos em sua clínica, o especialista aponta uma probabilidade de 70% para o problema ser cardíaco, o que também caracteriza um $p(A)$ não ambíguo. Embora ele consiga inferir sobre a região da doença através de probabilidades objetivas, a doença em si é incerta. Assim, o médico dará uma maior ponderação para seu acerto da doença quando relacionada ao sistema respiratório e subestimará sua possibilidade através de uma menor ponderação de acerto para uma doença cardíaca, definindo, assim, os componentes de otimismo e pessimismo da preferência.

No terceiro exemplo, o evento referencial do agente é o setor da empresa em que ele comercializará o ativo. Neste caso, dado que ele tomará decisões de investimento com relação às dez empresas mais valorizadas do dia anterior, é natural para ele considerar que 30% das empresas que figuram entre as dez mais valorizadas sejam de seu setor de especialidade, ou seja, tecnologia. Então A representa as empresas que não são do setor de tecnologia, e A^c as empresas que são do setor de tecnologia. Embora ele saiba a probabilidade de empresas de tecnologia que figuram entre as dez melhores, ele considera como incerto o preço da ação no final do dia. Dada sua especialidade, o corretor dará uma maior ponderação para sua aposta em relação aos preços das ações de tecnologia, mais uma vez representados pelo componente $\max_{p\in C} \int_{A^c} u(f)\ dp$ e dará uma menor ponderação para seu acerto, no caso das outras empresas, denotados na representação por $\min_{p\in C} \int_A u(f)\ dp$.

A fim de garantir que f é um ato não ambíguo, uma observação mais técnica pode ser feita a partir do Teorema Principal:

Dado o ato,

$$f(s) := (xAy)(s) = \begin{cases} x, & s \in A \\ y, & s \notin A \end{cases},$$

tem-se

$$J(f) = u(x)\, p(A) + u(y)\, p(A^c) \text{ para todo } p \in C.$$

Este resultado é importante para mostrar que, em atos onde as utilidades têm probabilidades constantes, nãohá incerteza como correspondência, mostrando que situações onde não há ambiguidade no ato são casos especiais do teorema.

Com base neste teorema, é possível, em alguns casos, modelar esta representação utilizando capacidades. Para utilizar tais probabilidades, é necessário utilizar o axioma *A2b* (Independência Comonotônica) em substituição ao axioma *A5c*. O primeiro exemplo na próxima seção ilustra essa possibilidade.

4.3 Casos Especiais

4.3.1 Integral de *Choquet*

A partir do teorema principal, um exemplo interessante surge quando o conjunto C é dado pelo *core* de uma capacidade convexa v, isto é, $C = core(v)$.

Neste caso,

$$J(f) = \min_{p \in core(v)} \int_A u(f)\ dp + \max_{p \in core(v)} \int_{A^c} u(f)\ dp,$$

e por Schmeidler (1986),

$$J(f) = \int_A u(f)\ dv + \int_{A^c} u(f)\ d\bar{v}$$

onde $\bar{v}$ é a conjugada de v.

Um exemplo interessante ocorre quando v é uma capacidade do tipo $\varepsilon-$*contamination*. De fato, neste caso, existe $q \in \Delta$ e $\varepsilon \in (0,1)$ tal que

$$v(E) = \begin{cases} (1-\varepsilon)\, q(E), & E \neq S \\ 1, & E = S \end{cases}$$

note que,

$$v(E) = \begin{cases} (1-\varepsilon)\, q(E) + \varepsilon, & E \neq \emptyset \\ 0, & E = \emptyset. \end{cases}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} core(v) &= \{(1-\varepsilon)\, q + \varepsilon p : p \in \Delta\} \\ &= 1 - \varepsilon \{q\} + \varepsilon \Delta. \end{aligned}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} J(f) &= \int_A u(f)\ dv + \int_{A^c} u(f)\ d\bar{v} \\ &= (1-\varepsilon) \int_A u(f)\ dp + \varepsilon \min_{s \in S} \{u(f)(s)\, \mathbf{1}_A(s)\} \\ &\quad + (1-\varepsilon) \int_{A^c} u(f)\ dp + \varepsilon \max_{s \in S} \{u(f)(s)\, \mathbf{1}_{A^c}(s)\} \end{aligned}$$

rearranjando,

$$J(f) = (1-\varepsilon) \int u(f)\, dp + \varepsilon \left(\min_{s \in S} \{u(f)(s)\, \mathbf{1}_A(s)\} + \max_{s \in S} \{u(f)(s)\, \mathbf{1}_{A^c}(s)\} \right).$$

Além disso, se existir $\bar{s} \in A$ tal que $u(f(\hat{s})) < 0$ e existir $\hat{s} \in A^c$ tal que $u(f(\hat{s})) > 0$, então a representação pode ser escrita como,

$$J(f) = (1-\varepsilon) \int u(f)\ dp + \varepsilon \left(\min_{s \in A} u(f(s)) + \max_{s \in A^c} u(f(s)) \right).$$

4.3.2 Inércia de Dow e Werlang

Dow e Werlang (1992) aplicam o conceito de capacidades convexas em um modelo de finanças com intuito de mostrar a possibilidade de inércia. Os autores mostram que, quando os atos envolvem incerteza, então existe a possibilidade de os tomadores de decisão no mercado financeiro não assumirem uma posição de compra e nem de venda, caracterizando inércia.

Então, em um mercado financeiro, denote o ganho esperado para uma posição de compra futura por $V(X)$. Denote também o ganho esperado para o agente adotar uma posição de venda futura por $-V(-X)$. A inércia é caracterizada, neste caso, se

$$V(X) < -V(-X).$$

Esta condição pode ser entendida como a existência da possibilidade de o agente não executar nem uma posição de compra nem de venda. Por exemplo, seja q o preço à vista do ativo, tal que,

$$V(X) < q < -V(-X),$$

então o agente não assumirá nenhuma posição.

Essa inércia pode gerar uma situação de *status quo* com respeito à certeza, onde qualquer movimento de compra ou venda para o agente pode piorar sua situação atual[19].

A utilização do MEU como um exemplo de preferência em Dow e Werlang (1992) motivou o desenvolvimento prévio deste exemplo de aplicação para a preferência aqui estudada. Segue abaixo um exemplo onde o investidor é neutro ao risco, isto é, X é a função identidade.

Neste sentido, o *payoff ex ante* da posição de compra do agente pode ser escrita como,

$$V(X) = \min_{p \in C} \int_A X \, dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} X \, dp$$

onde o agente é avesso à incerteza a lá Gilboa e Schmeidler para o evento A e seus subeventos e propenso à incerteza para o complementar A^c e seus subeventos.

Já o ganho *ex ante* esperado para a posição de venda é dado por

$$-V(-X) = \max_{p \in C} \int_A X \, dp + \min_{p \in C} \int_{A^c} X \, dp.$$

Dessa forma haverá inércia, caso,

$$\min_{p \in C} \int_A X \, dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} X \, dp < \max_{p \in C} \int_A X \, dp + \min_{p \in C} \int_{A^c} X \, dp.$$

[19] Para maiores detalhes sobre *status quo*, ver Bewley (2002).

Reescrevendo,

$$\max_{p\in C}\int_{A^c} X\ dp - \min_{p\in C}\int_{A^c} X\ dp < \max_{p\in C}\int_{A} X\ dp - \min_{p\in C}\int_{A} X\ dp.$$

A inércia será caracterizada caso a diferença entre o máximo e o mínimo da utilidade esperada quando o agente for avesso à incerteza for maior que a esta diferença quando o agente for propenso à incerteza.

Esta idéia se mostra intuitivamente crível para a existência de inércia. É factível admitir que, quando a variabilidade da utilidade esperada é maior para eventos onde o agente é pessimista do que quando ele for otimista, ele poderá não assumir nenhuma posição caso o preço do ativo esteja em tal intervalo.

4.4 Partições

Um outro caso especial aparece quando o agente conhece a probabilidade de uma família (partição) de eventos e considera todas as probabilidades que sejam consistentes com tal informação parcial[20].

Neste modelo, existe $q \in \Delta$, e $u : X \to \mathbb{R}$ tal que,

$$V(f) = \sum_{k=1}^{K_1} q(B_k) \min_{s\in B_k} u(f(s)) + \sum_{k=K_1+1}^{K} q(B_k) \max_{s\in B_k} u(f(s))$$

onde $A = \bigcup_{k=1}^{K_1} B_k$ e $A^c = \bigcup_{k=K_1+1}^{K} B_k$, para $1 < K_1 < K$. Além disso, $B_j \cap B_i = \emptyset$, para todo $i, j \in \{1, ..., K\}$ com $i \neq j$.

Note que,

$$C = \{p \in \Delta : p(B_k) = q(B_k),\ \forall k \in \{1, ..., K\}\}$$

e assim,

$$V(f) = \min_{p\in C_1}\int_A u(f)\ dp + \max_{p\in C_2}\int_{A^c} u(f)\ dp.$$

Mas, como as partições A e A^c estão divididas nos intervalos $\{1, ..., K_1\}$ e $\{K+1, ..., K\}$, respectivamente, é possível usar o conjunto C em $V(f)$. Dessa forma, o funcional pode ser escrito como na forma original presente no Teorema Principal.

$$V(f) = \min_{p\in C}\int_A u(f)\ dp + \max_{p\in C}\int_{A^c} u(f)\ dp.$$

[20]Para maiores detalhes, ver Lehrer (2007).

5 Considerações Finais

Este trabalho se propôs a desenvolver uma base axiomática a fim de se obter uma classe de preferência que admita distintas atitudes frente à incerteza.

No capítulo introdutório o tema de escolha sob incerteza foi contextualizado e logo após foram apresentados três exemplos motivadores que tinham o intuito de mostrar o potencial realístico do modelo. No capítulo posterior, uma sintética revisão teórica foi realizada, onde o principal objetivo era mostrar todo o arcabouço teórico que levou à construção desta classe de preferência. Após a apresentação do teorema principal, alguns casos especiais e exemplos foram suscitados a fim de mostrar o potencial de aplicação do modelo.

A fundamentação teórica utilizada é muito próxima do MEU, a partir da existência de um evento referencial que possa ser explorado determinadamente. Por exemplo, nos casos discutidos na introdução a distinção entre os eventos onde o tomador de decisão é pessimista e onde ele é otimista é muito clara. Esta condição de exogeneidade do evento referencial torna a possibilidade de um experimento do modelo viável.

A representação por si só não apresenta grandes dificuldades técnicas adicionais em relação ao MEU, o que sugere um potencial similar de aplicações às questões de teoria econômica que incorpore tanto pessimismo quanto a hipótese de competência que referenda o otimismo.

Vale ressaltar que este modelo trata do tema de escolha sob incerteza de forma inédita na literatura. Esta característica fornece ao modelo um grande potencial de aplicações em diversos temas ligados não apenas à Ciência Econômica, mas também às Ciências Sociais e Psicologia, por exemplo.

Essa dissertação motiva como trabalhos futuros a aplicação desta preferência de forma mais aprofundada em Teoria dos Jogos e Finanças. No sentido teórico, a aplicação de dinâmica nesta preferência aparenta trazer resultados interessantes, principalmente como continuação da interpretação do processo de inércia da seção 4.3.2.

6 Anexo

Prova do Teorema Principal

A prova deste Teorema será divida em duas partes. Na primeira, será mostrado que os axiomas são necessários para o resultado. Na segunda, o objetivo é mostrar que estes axiomas também são suficientes.

6.1 Primeira Parte

A primeira parte será dividida por axiomas.

Axioma A1

É bem conhecido que se uma preferência $\succsim$ admite representação J, então $\succsim$ é completa e transitiva. Ainda, como u é uma função não constante, então existe $x, y \in X$ tal que $u(x) \neq u(y)$. Sem perda de generalidade, $u(x) > u(y)$ implica que $x \succ y$, ou seja, a preferência é não degenerada.

Axioma A2c

O axioma de independência com respeito à certeza, diz que, para todo f, g em $\mathcal{F}$, $x \in X$ e para todo α em $(0,1)$ se $f \sim g$, isto implica que $\alpha f + (1-\alpha)x \sim \alpha g + (1-\alpha)x$. Neste sentido, se $f \sim g$ então $J(f) = J(g)$. Pela hipótese, tem-se que

$$J(f) = \min_{p \in C} \int_A u(f)\ dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} u(f)\ dp.$$

Como $J(x) = u(x)$, então $J(\alpha f + (1-\alpha)x) =$ $\min_{p \in C} \int_A (\alpha u(f) + (1-\alpha)u(x))\, dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} (\alpha u(f) + (1-\alpha)u(x))\, dp$. Note que $\int_A u(x)\, dp = u(x)\, p(A)$, o que permite escrever

$$\begin{aligned} J(\alpha f + (1-\alpha)x) &= \min_{p \in C} \left[\alpha \int_A u(f)\, dp + (1-\alpha)u(x)\, p(A)\right] + \\ &\quad \max_{p \in C} \left[\alpha \int_{A^c} u(f)\, dp + (1-\alpha)u(x)\, p(A^c)\right] \end{aligned}$$

como o evento A é não ambíguo, ou seja, $p(A)$ não varia em $p \in C$, então,

$$\begin{aligned} J(\alpha f + (1-\alpha)x) &= \left[\min_{p \in C} \alpha \int_A u(f)\, dp\right] + (1-\alpha)u(x)\, p(A) + \\ &\quad \left[\max_{p \in C} \alpha \int_{A^c} u(f)\, dp\right] + (1-\alpha)u(x)\, p(A^c) \\ J(\alpha f + (1-\alpha)x) &= \alpha \left[\min_{p \in C} \int_A u(f)\ dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} u(f)\ dp\right] + \\ &\quad (1-\alpha)u(x)\,(p(A) + p(A^c)). \end{aligned}$$

Assim, $J(\alpha f + (1-\alpha)x) = \alpha J(f) + (1-\alpha)u(x)$.

Partindo do pressuposto de que $J(f) = J(g)$, logo, é possível escrever

$$J(\alpha f + (1-\alpha)x) = \alpha J(g) + (1-\alpha)u(x).$$

Seguindo o processo inverso do que foi feito até aqui, então

$$\begin{aligned}
\alpha J(g) + (1-\alpha)u(x) &= \alpha\left[\min_{p\in C}\int_A u(g)\ dp + \max_{p\in C}\int_{A^c} u(g)\ dp\right] + \\
&\quad (1-\alpha)u(x)(p(A) + p(A^c)) \\
\alpha J(g) + (1-\alpha)u(x) &= \left[\min_{p\in C}\alpha\int_A u(g)\,dp\right] + (1-\alpha)u(x)p(A) + \\
&\quad \left[\max_{p\in C}\alpha\int_{A^c} u(g)\,dp\right] + (1-\alpha)u(x)p(A^c) \\
&\overset{(A \text{ é não ambíguo})}{=} \min_{p\in C}\left[\alpha\int_A u(g)\,dp + (1-\alpha)u(x)p(A)\right] + \\
&\quad \max_{p\in C}\left[\alpha\int_{A^c} u(g)\,dp + (1-\alpha)u(x)p(A^c)\right] \\
\alpha J(g) + (1-\alpha)u(x) &= \min_{p\in C}\int_A (\alpha u(g) + (1-\alpha)u(x))\,dp + \\
&\quad \max_{p\in C}\int_{A^c} (\alpha u(g) + (1-\alpha)u(x))\,dp \\
\alpha J(g) + (1-\alpha)u(x) &= J(\alpha g + (1-\alpha)x).
\end{aligned}$$

Axioma A3

Sejam f, g e $h \in \mathcal{F}$ e $(\alpha_n)_n$ uma sequência em $[0,1]$, que converge para α, tal que $\alpha_n f + (1-\alpha_n)g \succsim h$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $\succsim$ é representada por J, esta hipótese garante que

$$J(\alpha_n f + (1-\alpha_n)g) \geq J(h).$$

Ainda, aplicando este funcional na preferência, tem-se,

$$\begin{aligned}
J(\alpha_n f + (1-\alpha_n)g) &= \min_{p\in C}\int_A [\alpha_n u(f) + (1-\alpha_n)u(g)]\,dp + \\
&\quad \max_{p\in C}\int_{A^c} [\alpha_n u(f) + (1-\alpha_n)u(g)]\,dp \\
J(\alpha_n f + (1-\alpha_n)g) &= \min_{p\in C}\int_S [\alpha_n u(f)\mathbf{1}_A + (1-\alpha_n)u(g)\mathbf{1}_A]\ dp + \\
&\quad \max_{p\in C}\int_S [\alpha_n u(f)\mathbf{1}_{A^c} + (1-\alpha_n)u(g)\mathbf{1}_{A^c}]\ dp.
\end{aligned}$$

É bem conhecido que os funcionais

$$\begin{aligned} V_1(a) &= \min_{p\in C}\int_S a\,dp,\ \ a\in B(S,\Sigma)\ \text{e} \\ V_2(a) &= \max_{p\in C}\int_S a\,dp,\ \ a\in B(S,\Sigma), \end{aligned}$$

são contínuos[21].

É possível notar também que para todo $n\in\mathbb{N}$, e para todo $E\in\Sigma$,

$$[\alpha_n u(f)\,\mathbf{1}_E + (1-\alpha_n)\,u(g)\,\mathbf{1}_E]\in B(S,\Sigma)$$

converge (na norma $\|\cdot\|_\infty$) para

$$\alpha u(f)\,\mathbf{1}_E + (1-\alpha)\,u(g)\,\mathbf{1}_E.$$

Logo, para todo $i=1,2,$

$$V_i([\alpha_n u(f)\,\mathbf{1}_E + (1-\alpha_n)\,u(g)\,\mathbf{1}_E])$$

converge para

$$V_i([\alpha u(f)\,\mathbf{1}_E + (1-\alpha)\,u(g)\,\mathbf{1}_E]).$$

Dessa forma, pode-se escrever que,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} J(\alpha_n f + (1-\alpha_n)\,g) &= \min_{p\in C}\int_S [\alpha_n u(f)\,\mathbf{1}_A + (1-\alpha_n)\,u(g)\,\mathbf{1}_A]\ dp + \\ &\quad \max_{p\in C}\int_S [\alpha_n u(f)\,\mathbf{1}_{A^c} + (1-\alpha_n)\,u(g)\,\mathbf{1}_{A^c}]\ dp \\ &= J(\alpha f + (1-\alpha)\,g). \end{aligned}$$

Assim, tem-se que

$$J(\alpha_n f + (1-\alpha_n)\,g) \geq J(h)\ \ \forall n \text{ e}$$

$$J(\alpha_n f + (1-\alpha_n)\,g) \xrightarrow{n} J(\alpha f + (1-\alpha)\,g)$$

portanto, $J(\alpha f + (1-\alpha)\,g) \geq J(h)$.

Como J é uma representação de $\succsim$,

$$\alpha f + (1-\alpha)\,g \succsim h.$$

Argumento similar prova que o conjunto $\{\alpha : h \succsim \alpha f + (1-\alpha)\,g\}$ é fechado.

[21] Ver, por exemplo, Gilboa e Schmeidler (1989).

Axioma A4

Pelo axioma de monotonicidade, dados $f, g \in \mathcal{F}$, se para todo $s \in S$ é possível dizer que $f(s) \succsim g(s)$, então $f \succsim g$.

Sejam $f, g \in \mathcal{F}$. Supondo que para todo $s \in S$ $f(s) \succsim g(s)$ como u representa $\succsim$ restrita a X, $u(f(s)) \geq u(g(s))$ para todo $s \in S$. Logo, dado $E \in \Sigma$ para todo $p \in C$, tem-se que $\int_E u(f)\, dp \geq \int_E u(g)\, dp$. Ainda, das desigualdades anteriores obtém-se que,

$$\begin{aligned}
\min_{p \in C} \int_A u(f)\, dp &\geq \min_{p \in C} \int_A u(g)\, dp \text{ e} \\
\max_{p \in C} \int_{A^c} u(f)\, dp &\geq \max_{p \in C} \int_{A^c} u(g)\, dp \\
\min_{p \in C} \int_A u(f)\ dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} u(f)\ dp &\geq \min_{p \in C} \int_A u(g)\ dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} u(g)\ dp.
\end{aligned}$$

Com isso, pode-se concluir que $J(f) \geq J(g)$, ou seja, $f \succsim g$.

Axioma A5

Parte *A5a*: Supondo $fAx \sim gAx$, tem-se que $J(fAx) = J(gAx)$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\min_{p \in C} \int_A u(f)\, dp + u(x)\, p(A^c) &= \min_{p \in C} \int_A u(g)\, dp + u(x)\, p(A^c) \\
\min_{p \in C} \int_S u(f)\, \mathbf{1}_A dp &= \min_{p \in C} \int_S u(g)\, \mathbf{1}_A dp.
\end{aligned}$$

Dado que A é não ambíguo, nota-se que

$$\begin{aligned}
J(\alpha fAx + (1-\alpha)\, gAx) &= \min_{p \in C} \int_A (\alpha u(fAx) + (1-\alpha)\, u(gAx))\, dp + \\
&\quad u(x)\, p(A^c) \\
J(\alpha fAx + (1-\alpha)\, gAx) &= \min_{p \in C} \int_A (\alpha u(f) + (1-\alpha)\, u(g))\, dp + \\
&\quad u(x)\, p(A^c)\,.
\end{aligned}$$

A partir da relação $\min(a+b) \geq \min a + \min b$, pode-se escrever que

$$\begin{aligned}
&\min_{p \in C} \int_S (\alpha u(f)\, \mathbf{1}_A + (1-\alpha)\, u(g)\, \mathbf{1}_A)\, dp + \\
u(x)\, p(A^c) \geq\ &\alpha \min_{p \in C} \int_A u(f)\, dp + \\
&(1-\alpha) \min_{p \in C} \int_A u(g)\, dp + u(x)\, p(A^c)\,,
\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} J(\alpha fAx + (1-\alpha) gAx) &\geq \alpha \min_{p\in C} \int_A u(f)\, dp + \\ & (1-\alpha) \min_{p\in C} \int_A u(g)\, dp + u(x)\, p(A^c) \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} & \alpha \min_{p\in C} \int_A u(f)\, dp + \\ (1-\alpha) \min_{p\in C} \int_A u(g)\, dp + u(x)\, p(A^c) &= \min_{p\in C} \int_A u(f)\, dp + u(x)\, p(A^c) \\ &= J(fAx). \end{aligned}$$

Isto é,

$$J(\alpha fAx + (1-\alpha) gAx) \geq J(fAx)$$

ou seja,

$$\alpha fAx + (1-\alpha) gAx \succsim fAx.$$

Parte *A5b*: Supondo $fA^cx \sim gA^cx$, tem-se que $J(fA^cx) = J(gA^cx)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \max_{p\in C} \int_A u(f)\, dp + u(x)\, p(A) &= \max_{p\in C} \int_A u(g)\, dp + \\ & u(x)\, p(A) \\ \max_{p\in C} \int_S u(f)\, \mathbf{1}_A dp &= \max_{p\in C} \int_S u(g)\, \mathbf{1}_A dp. \end{aligned}$$

Dado que A é não ambíguo, nota-se que

$$\begin{aligned} J(\alpha fA^cx + (1-\alpha) gA^cx) &= \max_{p\in C} \int_{A^c} (\alpha u(fA^cx) + (1-\alpha)\, u(gA^cx))\, dp + \\ & u(x)\, p(A) \\ J(\alpha fA^cx + (1-\alpha) gA^cx) &= \max_{p\in C} \int_{A^c} (\alpha u(f) + (1-\alpha)\, u(g))\, dp + \\ & u(x)\, p(A). \end{aligned}$$

Assim como na demonstração acima, existe uma relação onde $\max(a+b) \leq \max a +$

$\max b$, pode-se escrever que

$$\begin{aligned}
& \max_{p\in C}\int_S \left(\alpha u(f)\,\mathbf{1}_{A^c}+(1-\alpha)\,u(g)\,\mathbf{1}_{A^c}\right)dp+ \\
u(x)\,p(A) \quad \leq \quad & \alpha\max_{p\in C}\int_{A^c}u(f)\,dp+ \\
& (1-\alpha)\min_{p\in C}\int_{A^c}u(g)\,dp+u(x)\,p(A)\,,
\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
J\left(\alpha fA^cx+(1-\alpha)\,gA^cx\right) \quad \leq \quad & \alpha\max_{p\in C}\int_{A^c}u(f)\,dp+ \\
& (1-\alpha)\max_{p\in C}\int_{A^c}u(g)\,dp+u(x)\,p(A)
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
& \alpha\max_{p\in C}\int_{A^c}u(f)\,dp+ \\
(1-\alpha)\max_{p\in C}\int_{A^c}u(g)\,dp+u(x)\,p(A) \quad = \quad & \max_{p\in C}\int_{A^c}u(f)\,dp+u(x)\,p(A) \\
& \alpha\max_{p\in C}\int_{A^c}u(f)\,dp+ \\
(1-\alpha)\max_{p\in C}\int_{A^c}u(g)\,dp+u(x)\,p(A) \quad = \quad & J\left(fA^cx\right).
\end{aligned}$$

Isto é,

$$J\left(\alpha fA^cx+(1-\alpha)\,gA^cx\right)\leq J\left(fA^cx\right)$$

ou seja,

$$\alpha fA^cx+(1-\alpha)\,gA^cx\precsim fA^cx.$$

Parte $A5c$: Como $0\in u(x)$, existe $\bar{x}\in X$ tal que $u(\bar{x})=0$.
Agora, dados $f\in\mathcal{F}$ e $x,y\in X$ tal que $x\sim fA\bar{x}$ e $y\sim\bar{x}Af$.
Obtém-se, do fato de J representar $\succsim$,

$$\begin{aligned}
u(x) &= \min_{p\in C}\int_A u(f)\,dp+u(\bar{x})\,p(A^c) \\
u(x) &= \min_{p\in C}\int_A u(f)\,dp \text{ e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(y) &= \max_{p\in C}\int_{A^c}u(f)\,dp+u(\bar{x})\,p(A) \\
u(x) &= \max_{p\in C}\int_{A^c}u(f)\,dp.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
J\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right) &= \frac{1}{2}u(x)+\frac{1}{2}u(y) \\
J\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right) &= \frac{1}{2}\min_{p\in C}\int_A u(f)\,dp+\frac{1}{2}\max_{p\in C}\int_{A^c} u(f)\,dp \\
J\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right) &= \min_{p\in C}\int_A \left(\frac{1}{2}u(fA\bar{x})+\frac{1}{2}u(\bar{x}Af)\right)dp+ \\
&\quad \max_{p\in C}\int_{A^c}\left(\frac{1}{2}u(fA\bar{x})+\frac{1}{2}u(\bar{x}Af)\right)dp \\
J\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right) &= J\left(\frac{1}{2}fA\bar{x}+\frac{1}{2}\bar{x}Af\right),
\end{aligned}$$

logo,

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\sim\frac{1}{2}fA\bar{x}+\frac{1}{2}\bar{x}Af.$$

Observação: Note que para todo $s\in S$,

$$\frac{1}{2}f(s)\,A\bar{x}+\frac{1}{2}\bar{x}Af(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}f(s)+\frac{1}{2}\bar{x}, & S\in A\\ \frac{1}{2}\bar{x}+\frac{1}{2}f(s) & S\in A^c\end{cases}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}fA\bar{x}+\frac{1}{2}\bar{x}Af=\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}\bar{x}.$$

Dessa forma, o Axioma $A.5c$ pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\sim\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}\bar{x}.$$

Isto basta para provar que os axiomas são necessários para a preferência aqui estudada.

6.2 Segunda Parte

Dada $\succsim\subset\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ cumprindo *A1* - *A5*, primeiro deve-se encontrar uma representação $J:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ para $\succsim$, isto é,

$$f\succsim g\Leftrightarrow J(f)\geq J(g)$$

Note que por *A1, A2 e A3*, a preferência $\succsim|x\times x$ restrita às consequências satisfaz as condições para a existência de uma função afim e não constante

$$u:X\to\mathbb{R}$$

tal que, para todo $x, y \in X$,

$$x \succsim y \Longleftrightarrow u(x) \geq u(y).$$

Isso é consequência das condições dadas por Hernstein e Milnor (1953) e von Neumann e Morgenstern (1944). Ademais, é possível supor que $0 \in int(u(x))$.

Lema 1: Para todo $f \in \mathcal{F}$, existe $x_f \in X$ tal que $f \sim x_f$.

Este lema garante a existência de um equivalente certo (x_f) para o ato f. Além disso, como um ato gera um conjunto limitado $\{u(f(s)) : s \in S\}$ (pois f é simples) então existe $x, y \in X$ tal que $x \succsim f \succsim y$, ou seja, $x \succsim f(s) \succsim y$, para todo $s \in S$.

Prova:

Definindo os conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{\alpha \in [0,1] : \alpha x + (1-\alpha) y \succsim f\} \\ B &= \{\alpha \in [0,1] : f \succsim \alpha x + (1-\alpha) y\} \end{aligned}$$

é verdade que $A \cup B = [0,1]$.

De fato, como $A \cap B \subset [0,1]$, seja $\theta \in [0,1]$, se $\theta \notin A$, então

$$\neg(\theta x + (1-\theta) y \succsim f).$$

Como $\succsim$ é completa, então $f \succ \theta x + (1-\theta) y$, isto é, $\theta \in B$.

Analogamente, se $\theta \notin B$ então $\theta \in A$.

Antes de prosseguir, recorde que, seja $M = A \cup B$, os conjuntos A, B formam uma cisão de M se A e B forem abertos e disjuntos. M é conexo quando a única cisão possível para M é a trivial[22].

Resultado 1: Para todo A, B, tal que A e B são fechados, não vazios e $A \cup B = M$, então $A \cap B \neq \emptyset$.

Observe que,

$$\begin{aligned} A &= \{\alpha : \alpha x + (1-\alpha) y \succsim f\} \text{ e} \\ B &= \{\alpha : f \succsim \alpha x + (1-\alpha) y\} \end{aligned}$$

são fechados, pois $\succsim$ é contínua. Ademais, os conjuntos $A, B \neq \emptyset$, pois $1 \in A$ e $0 \in B$. Como $[0,1]$ é conexo e $A \cup B = [0,1]$, então $A \cap B \neq .\emptyset$ pelo resultado comentado.

[22]Uma cisão trivial é do tipo $M = A \cup B$ onde $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. De acordo com Lima (1993), a única cisão admitida por um conjunto conexo é a cisão trivial.

Isto é, existe $\bar{\alpha} \in [0,1]$, tal que

$$x_f \equiv \bar{\alpha} x + (1 - \bar{\alpha}) y \sim f.$$

Ou seja, para todo f, existe um $x_f \in X$, tal que $x_f \sim f$, o que basta para provar o *Lema 1.*

Agora, seja $J : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ em que para cada $f \in \mathcal{F}$, $J(f) := u(x_f)$, onde x_f é o equivalente certo de f. Ainda, $B_0(S, \Sigma, u(X)) = \{u \circ f : f \in \mathcal{F}\}$[23].

O funcional J definido como $J : f \rightarrow J(f) = u(x_f)$ o que permite definir $I : B_0(u(X)) \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que, se $a = u \circ f$, então $I(a) = J(f)$.

Note que, I está bem definido sobre $B_0(u(X))$: dado um a tal que $a = u \circ f$ e $a = u \circ g$, logo $u(f(s)) = u(f(s))$, para todo $s \in S$. Pelo axioma de monotonicidade, $f(s) \sim g(s)$ para todo S implica $f \sim g$. Portanto, $x_f \sim x_g$, que leva a $J(f) = J(g)$.

Lema 2: Seja I definido sobre $B_0(u(X))$ a partir do funcional J que representa $\succsim$. Então I pode ser estendido para $B_0(\Sigma)$, satisfazendo:

I.1. I é normalizado, isto é, para todo $k \in u(x)$,

$$I(k\mathbf{1}_s) = k.$$

I.2. I é monótono:

$$a \geq b \Longrightarrow I(a) \geq I(b).$$

I.3. I é constante aditivo: Para todo $a \in B_0(u(X))$ e para todo k tal que $a + k\mathbf{1}_s \in B_0(u(X))$.

$$I(a + k) = I(a) + k.$$

I.4 I é positivamente homogêneo, ou seja, para todo $k > 0$,

$$I(ka) = kI(a).$$

I.5 Existe $A \in \Sigma$ tal que, para todo $a, b \in B_0(u(X))$, tal que,

I.5a $I(aA0 + bA0) \geq I(aA0) + I(bA0);$

I.5b $I(0Aa + 0Ab) \leq I(0Aa) + I(0Ab);$

I.5c $I(a) = I(aA0) + I(0Aa).$

Prova:

I.1 Seja $k \in u(X)$, então existe algum $x \in X$ tal que $k = u(x)$ e $I(k\mathbf{1}_s) = I(u(x)\mathbf{1}_s) = u(x) = k$.

I.2 Se $a = u(f)$ e $b = u(g) \in B_0(u(X))$ e $a \geq b$, então $u(f(s)) \geq u(g(s))$ para todo $s \in S$. Dessa forma, por monotonicidade tem-se que $f \succsim g$, isto é, $J(f) \geq J(g)$.

[23] Para maiores detalhes, Macheronni, Marinacci e Rusticinni (2006, pág. 1478).

Isto leva à relação $I(a) = I(u(f)) = J(f) \geq J(g) = I(u(g)) = I(b)$.

I.3 Por homogeneidade, é possível assumir, sem perda de generalidade, que $2a$ e $2k\mathbf{1}_s \in B_0(u(X))$. Seja $\beta = I(2a) = 2I(a)$ e $u(f) = 2a$ para todo $f \in \mathcal{F}$, tomando $y, z \in X$ onde $u(y) = \beta\mathbf{1}_s$ e $u(z) = 2k\mathbf{1}_s$. Se $f \sim y$, pelo axioma *A5c*, tem-se que,

$$\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}z \sim \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z.$$

Logo,

$$I(a + k\mathbf{1}_s) = I(\beta\mathbf{1}_s + k\mathbf{1}_s) = \frac{1}{2}\beta + k = I(a) + k$$

portanto, I é constante aditivo.

I.4 é positivamente homogêneo. Seja $a = \alpha b$ onde $a, b \in B_0(u(X))$ e $\alpha \in [0, 1]$. Seja $g \in \mathcal{F}$ satisfazendo $u(g) = b$ e defina $f = \alpha g + (1-\alpha)z$, com $z \in X$ e $u(z) = 0$. Então $u(f) = \alpha u(g) + (1-\alpha)u(z) = \alpha b = a$, então $I(a) = J(f)$. Pelo axioma *A5c*, $ax_g + (1-\alpha)z \sim \alpha g(1-\alpha)z = f$, logo,

$$\begin{aligned} J(f) &= J(ax_g + (1-\alpha)z) \\ J(f) &= \alpha J(x_g) + (1-\alpha)J(z) \\ J(f) &= \alpha J(x_g). \end{aligned}$$

Portanto, pode-se escrever,

$$I(\alpha b) = I(a) = J(f) = \alpha J(x_g) = \alpha I(b).$$

I.5a Seja $a, b \in B_0(u(X))$. Sem perda de generalidade, para provar este item, basta mostrar que,

$$I\left(\frac{1}{2}aA0 + \frac{1}{2}bA0\right) \geq \frac{1}{2}I(aA0) + \frac{1}{2}I(bA0).$$

Dados $f, g \in \mathcal{F}$ tais que $u(fA\bar{x}) = aA0$ e $u(gA\bar{x}) = bA0$. Se $I(aA0) = I(bA0)$, por aversão à ambiguidade[24], pode-se escrever que,

$$I\left(\frac{1}{2}aA0 + \frac{1}{2}bA0\right) \geq I(aA0) = \frac{1}{2}I(aA0) + \frac{1}{2}I(bA0).$$

Agora, no caso de $I(aA0) > I(bA0)$, deixe $k = I(aA0) - I(bA0)$. Define-se $c = bA0 + k\mathbf{1}_s$, onde, pela independência com respeito à certeza, tem-se que $I(c) = I(bA0) + k = I(aA0)$. Aplicando mais uma vez este axioma e o conceito de aversão à

[24]Neste caso, $\frac{1}{2}fA\bar{x} + \frac{1}{2}gA\bar{x} \succsim fA\bar{x}$.

incerteza, obtém-se,

$$\begin{aligned}I\left(\frac{1}{2}aA0+\frac{1}{2}bA0\right)+\frac{1}{2}k &= I\left(\frac{1}{2}aA0+\frac{1}{2}c\right)\geq\frac{1}{2}I\left(aA0\right)+\frac{1}{2}I\left(c\right)=\frac{1}{2}I\left(bA0\right)+\frac{1}{2}k\\ \frac{1}{2}I\left(bA0\right)+\frac{1}{2}k &= I\left(\frac{1}{2}aA0+\frac{1}{2}bA0\right)\geq\frac{1}{2}I\left(aA0\right)+\frac{1}{2}I\left(bA0\right).\end{aligned}$$

I.5b Seja $a, b \in B_0(u(X))$. Sem perda de generalidade, para provar este item, basta mostrar que,

$$I\left(\frac{1}{2}0Aa+\frac{1}{2}0Ab\right)\geq\frac{1}{2}I\left(0Aa\right)+\frac{1}{2}I\left(0Ab\right)$$

Dados $f, g \in \mathcal{F}$ tais que $u(\bar{x}Af) = 0Aa$ e $u(\bar{x}Ag) = 0Ab$. Se $I(0Aa) = I(0Ab)$, por propensão à incerteza[25], pode-se escrever

$$I\left(\frac{1}{2}0Aa+\frac{1}{2}bA0\right)\leq I\left(0Aa\right)=\frac{1}{2}I\left(0Aa\right)+\frac{1}{2}I\left(bA0\right).$$

Agora, no caso de $I(0Aa) > I(0Ab)$, deixe $k = I(0Aa) - I(0Ab)$. Define-se $c = 0Ab + k\mathbf{1}_s$, onde, pela independência com respeito à certeza, tem-se que $I(c) = I(0Ab) + k = I(0Aa)$. Aplicando mais uma vez este axioma e o conceito de propensão à incerteza, obtém-se,

$$\begin{aligned}I\left(\frac{1}{2}0Aa+\frac{1}{2}0Ab\right)+\frac{1}{2}k &= I\left(\frac{1}{2}0Aa+\frac{1}{2}c\right)\leq\frac{1}{2}I\left(0Aa\right)+\frac{1}{2}I\left(c\right)=\frac{1}{2}I\left(0Ab\right)+\frac{1}{2}k\\ \frac{1}{2}I\left(0Ab\right)+\frac{1}{2}k &= I\left(\frac{1}{2}0Aa+\frac{1}{2}0Ab\right)\leq\frac{1}{2}I\left(0Aa\right)+\frac{1}{2}I\left(0Ab\right).\end{aligned}$$

I.5c Mostrar que $I(a) = I(aA0) + I(0Aa)$.

Seja $a \in B_0(u(X))$ onde $a = u(f)$. Adicionalmente, a pode ser escrito como,

$$a = u\left(\alpha f + (1-\alpha)\bar{x}\right). \qquad (1)$$

[25]Neste caso, $\frac{1}{2}\bar{x}Af + \frac{1}{2}\bar{x}Ag \precsim \bar{x}Af$.

De acordo com a relação 1, também pode ser escrito,

$$\begin{aligned}
I(a) &= J(u(\alpha f + (1-\alpha)\bar{x})) \\
I(a) &= J\left(u\left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\bar{x}\right)\right) \\
I(a) &= J\left(\frac{1}{2}x_{fA\bar{x}} + \frac{1}{2}x_{\bar{x}Af}\right) \\
I(a) &= \frac{1}{2}u(x_{fA\bar{x}}) + \frac{1}{2}u(x_{\bar{x}Af}) \\
I(a) &= \frac{1}{2}J(fA\bar{x}) + \frac{1}{2}J(\bar{x}Af) \\
I(a) &= \frac{1}{2}I(aA0) + \frac{1}{2}I(aA0).
\end{aligned}$$

Isto prova o Lema 2.

Gilboa e Schmeidler (1989) mostraram um Lema[26] que existe uma única extensão contínua de I para $B(S,\Sigma)$. Esta extensão também é válida para o funcional desenvolvido neste trabalho, pois para o resultado é necessário que o funcional seja monotônico, constante aditivo e positivamente homogêneo. Além disso, esta extensão satisfaz as propriedades *I.1 - I.5.* descritas no Lema 1.

O próximo Lema estabelece a relação entre o funcional I dadas suas propriedades e um conjunto de probabilidades que permite o funcional ser escrito como no Teorema 1.

Lema 3: O funcional $I : B(S,\Sigma) \to \mathbb{R}$ cumpre *I.1 - I.5*, se, e somente se, existe um conjunto $C \subset \Delta$ fechado (fraco*), convexo e não vazio e existe um evento referencial não ambíguo $A \in \Sigma$ para todo $p \in C$, tal que,

$$I(a) = \min_{p \in C} \int_A a \; dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} a \; dp.$$

Prova:

Inicialmente é preciso mostrar que se $I(a) = \min_{p\in C} \int_A a \; dp + \max_{p\in C} \int_{A^c} a \; dp$ então I cumpre *I1 - I5*:

O funcional $I(a)$ é normalizado se, e somente se, $I(\mathbf{1}_s) = 1$. Portanto,

$$I(\mathbf{1}_s) = \min_{p\in C} p(A) + \max_{p\in C} p(A^c)$$

se A é não ambíguo, então, para todo $q \in C$,

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{1}_s) &= q(A) + q(A^c) \\
I(\mathbf{1}_s) &= 1.
\end{aligned}$$

[26]Para maiores detalhes sobre a extensão e sua demonstração, ver Lema 3.4, p.147.

Este será positivamente homogêneo se, e somente se, $I(ka) = kI(a)$. Assim,

$$\begin{aligned}
I(ka) &= \min_{p\in C}\int_A ka\ dp + \max_{p\in C}\int_{A^c} ka\ dp \\
I(ka) &= \min_{p\in C} k\int_A a\ dp + \max_{p\in C} k\int_{A^c} a\ dp \\
I(ka) &= k\min_{p\in C}\int_A a\ dp + k\max_{p\in C}\int_{A^c} a\ dp \\
I(ka) &= k\left(\min_{p\in C}\int_A a\ dp + \max_{p\in C}\int_{A^c} a\ dp\right) \\
I(ka) &= kI(a).
\end{aligned}$$

Será constante aditivo se, e somente se, $I(a + k\mathbf{1}_s) = I(a) + k\mathbf{1}_s$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
I(a + k\mathbf{1}_s) &= \min_{p\in C}\int_A (a+k)\ dp + \max_{p\in C}\int_{A^c} (a+k)\ dp \\
I(a + k\mathbf{1}_s) &= \left(\min_{p\in C}\int_A a\ dp + kp(A)\right) + \left(\max_{p\in C}\int_{A^c} a\ dp + kp(A^c)\right).
\end{aligned}$$

Mais uma vez, se A é não ambíguo,

$$\begin{aligned}
I(a + k\mathbf{1}_s) &= \min_{p\in C}\int_A a\ dp + kp(A) + \max_{p\in C}\int_{A^c} a\ dp + kp(A^c) \\
I(a + k\mathbf{1}_s) &= \min_{p\in C}\int_A a\ dp + \max_{p\in C}\int_{A^c} a\ dp + k(p(A) + p(A^c)).
\end{aligned}$$

Como $p(A) + p(A^c) = 1$,

$$\begin{aligned}
I(a + k\mathbf{1}_s) &= \min_{p\in C}\int_A a\ dp + \max_{p\in C}\int_{A^c} a\ dp + k\mathbf{1}_s \\
I(a + k\mathbf{1}_s) &= I(a) + k\mathbf{1}_s.
\end{aligned}$$

O próximo passo é mostrar que $I(a) = I(aA0) + I(0Aa)$. Tem-se que,

$$\begin{aligned}
I(aA0) &= \min_{p\in C}\int_A aA0\ dp + \max_{p\in C}\int_{A^c} aA0\ dp \\
I(0Aa) &= \min_{p\in C}\int_A 0Aa\ dp + \max_{p\in C}\int_{A^c} aA0\ dp.
\end{aligned}$$

Como $\max_{p\in C}\int_{A^c} aA0\ dp = 0$ e $\min_{p\in C}\int_A 0Aa\ dp = 0$,

$$\begin{aligned}
I(aA0) &= \min_{p\in C}\int_A aA0\ dp \\
I(0Aa) &= \max_{p\in C}\int_{A^c} aA0\ dp.
\end{aligned}$$

Somando os dois termos, então,

$$\begin{aligned}
I(aA0) + I(0Aa) &= \min_{p\in C} \int_A aA0 \; dp + \max_{p\in C} \int_{A^c} aA0 \; dp \\
I(aA0) + I(0Aa) &= I(a).
\end{aligned}$$

O funcional é monótono se, e somente se, $a \geq b$, então $I(a) \geq I(b)$. Então, como $a \geq b$ implica que $a(s) \geq b(s)$ para todo $s \in S$, pode-se escrever que para qualquer evento $E \in \Sigma$,

$$\int_E a \; dp \geq \int_E b \; dp$$

Tomando $E = A$ para todo $p \in C$. Assim, a partir desta desigualdade,

$$\min_{p\in C} \int_A a \; dp \geq \min_{p\in C} \int_A b \; dp \tag{2}$$

e, analogamente, para $E = A^c$

$$\max_{p\in C} \int_{A^c} a \; dp \geq \max_{p\in C} \int_{A^c} b \; dp. \tag{3}$$

Agora, somando 2 e 3, tem-se,

$$\begin{aligned}
\min_{p\in C} \int_A a \; dp + \max_{p\in C} \int_{A^c} a \; dp &\geq \min_{p\in C} \int_A b \; dp + \max_{p\in C} \int_{A^c} b \; dp \\
I(a) &\geq I(b).
\end{aligned}$$

O funcional cumpre *I5a*, se, e somente se,

$$I(aA0 + bA0) \geq I(aA0) + I(bA0).$$

Portanto, pode-se escrever que

$$\begin{aligned}
I(aA0 + bA0) &\geq \min_{p\in C} \int_A (aA0 + bA0) \; dp + \\
&\quad \max_{p\in C} \int_{A^c} (aA0 + bA0) \; dp \\
I(aA0) + I(bA0) &\geq \min_{p\in C} \int_A aA0 \; dp + \max_{p\in C} \int_{A^c} aA0 \; dp + \\
&\quad \min_{p\in C} \int_A bA0 \; dp + \max_{p\in C} \int_{A^c} bA0 \; dp.
\end{aligned}$$

Como $\max_{p\in C} \int_{A^c} (aA0 + bA0) = \max_{p\in C} \int_{A^c} aA0\ dp = \max_{p\in C} \int_{A^c} bA0\ dp = 0$,

$$\begin{aligned} I\left(aA0 + bA0\right) &\geq \min_{p\in C} \int_A \left(aA0 + bA0\right)\ dp \\ I\left(aA0\right) + I\left(bA0\right) &\geq \min_{p\in C} \int_A aA0\ dp + \min_{p\in C} \int_A bA0\ dp. \end{aligned}$$

Dado que $\min\left(x+y\right) \geq \min\left(x\right) + \min\left(y\right)$, pode-se concluir que

$$I\left(aA0 + bA0\right) \geq I\left(aA0\right) + I\left(bA0\right).$$

O funcional cumpre *I5b*, se, e somente se,

$$I\left(0Aa + 0Ab\right) \leq I\left(0Aa\right) + I\left(0Ab\right).$$

Portanto, pode-se escrever que

$$\begin{aligned} I\left(0Aa + 0Ab\right) &\leq \min_{p\in C} \int_A \left(0Aa + 0Ab\right)\ dp + \\ &\quad \max_{p\in C} \int_{A^c} \left(0Aa + 0Ab\right)\ dp \\ I\left(0Aa\right) + I\left(0Ab\right) &\leq \min_{p\in C} \int_A 0Aa\ dp + \max_{p\in C} \int_{A^c} 0Aa\ dp + \\ &\quad \min_{p\in C} \int_A 0Ab\ dp + \max_{p\in C} \int_{A^c} 0Ab\ dp. \end{aligned}$$

Como $\min_{p\in C} \int_{A^c} (0Aa + 0Ab) = \min_{p\in C} \int_{A^c} 0Aa\ dp = \min_{p\in C} \int_{A^c} 0Ab\ dp = 0$,

$$\begin{aligned} I\left(0Aa + bA0\right) &\leq \max_{p\in C} \int_A \left(0Aa + bA0\right)\ dp \\ I\left(0Aa\right) + I\left(bA0\right) &\leq \max_{p\in C} \int_A 0Aa\ dp + \max_{p\in C} \int_A bA0\ dp. \end{aligned}$$

Dado que $\max\left(x+y\right) \leq \max\left(x\right) + \max\left(y\right)$, pode-se concluir que,

$$I\left(oAa + 0Ab\right) \leq I\left(0Aa\right) + I\left(0Ab\right).$$

Até aqui, foi mostrado que *I1* - *I5* é necessário para o funcional I. Agora a segunda parte será mostrar que, além de necessária, as propriedades são suficientes.

Claramente, o conjunto A é escolhido a partir da propriedade *I5*.

Agora, é necessário definir agora os seguintes conjuntos,

$$
\begin{aligned}
B_A &: = \{bAk : b \in B,\ k \in \mathbb{R}\} \\
B_{A^c} &: = \{bA^ck : b \in B,\ k \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

Ressalta-se, por sua vez, que os conjuntos definidos acima são subespaços vetoriais de $B(S, \Sigma)$. Isto ficará claro mais adiante.

Agora, pode-se restringir aos funcionais,

$$
\begin{aligned}
I_1 &: B_A \rightarrow \mathbb{R} \\
&\quad a \longmapsto I_1(a) = I(a)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
I_2 &: B_{A^c} \rightarrow \mathbb{R} \\
&\quad a \longmapsto I_2(a) = I(a).
\end{aligned}
$$

Note que I_1 e I_2 são monótonos, positivamente homogêneos, constante aditivos e normalizados. A diferença entre eles reside no fato de I_1 ser superaditivo e I_2 ser subaditivo em seus respectivos domínios.

Antes de tentar aplicar os resultados clássicos de Gilboa e Schmeidler (1989) para tais tipos de funcionais, a descrição dos duais de B_A e B_{A^c} não é imediata. Para contornar tal dificuldade, considere o seguinte caminho:

Primeiramente, dado A, note que,

$$
\Sigma_A := \{E \in \Sigma : \text{ se } E \neq \emptyset \text{ e } E \neq S \text{ então } E \subseteq A \text{ ou } E \cap A^c = A^c\}
$$

é uma σ-álgebra.

Proposição 1: Σ_A é uma $\sigma-$álgebra.

Prova: Por definição, Σ_A deve cumprir três propriedades para ser uma $\sigma-$álgebra, a saber:

1. $\emptyset, S \in \Sigma_A$;
2. Se $E \in \Sigma_A$, então $E^c \in \Sigma_A$.
3. Dado $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $E_n \in \Sigma_A$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma_A$.

Claramente, $\emptyset, S \in \Sigma_A$ pois $\emptyset \subseteq A$ e $S \cap A^c = A^c$. Isto prova que Σ_A cumpre a primeira propriedade.

Agora, dado $E \in \Sigma_A$, sabe-se que $E \subseteq A$ ou $E \cap A^c = A^c$.

Primeiro, se $E \subseteq A$ então $E^c \cap A^c = A^c$. De fato, $E^c \cap A^c \subseteq A^c$ e se $s \in A^c$, então como $E \subseteq A$ vale que $s \in E^c$, o que leva a $s \in E^c \cap A^c$, isto é, $A^c \subseteq E^c \cap A^c$, ou seja, $E^c \cap A^c = A^c$.

Agora, se $E \cap A^c = A^c$, dado $s \in E^c$, logo $s \notin A^c$, pois em caso contrário poderia ser escrito que $s \notin E \cap A^c$ e $s \in A^c$, o que contraria $E \cap A^c = A^c$.

Logo, para todo $s \in E^c$, vale que $s \in A$, ou seja, $E^c \subseteq A$. Isto mostra que a segunda condição está satisfeita.

Para provar a terceira condição, pode-se partir da seguinte relação. Se para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subseteq A$, evidentemente $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq A$ e, neste caso, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma_A$.

Agora, suponha que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $E_n \nsubseteq A$, ou seja, $E_n \cap A^c \neq \emptyset$.

Basta mostrar que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap A^c = A^c.$$

De fato, pode ser escrita a seguinte relação,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \left(\bigcup_{n:E_n \subseteq A}^{\infty} E_n\right) \cup \left(\bigcup_{n:E_n \nsubseteq A}^{\infty} E_n\right)$$

logo,

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cap A^c &= \left[\left(\bigcup_{n:E_n \subseteq A}^{\infty} E_n\right) \cup \left(\bigcup_{n:E_n \nsubseteq A}^{\infty} E_n\right)\right] \cap A^c \\
\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cap A^c &= \left[\bigcup_{n:E_n \subseteq A}^{\infty} E_n \cap A^c\right] \cup \left[\bigcup_{n:E_n \nsubseteq A}^{\infty} E_n \cap A^c\right].
\end{aligned}$$

Como $\bigcup\limits_{n:E_n \subseteq A}^{\infty} E_n \cap A^c = 0$, tem-se que,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cap A^c = \left[\bigcup_{n:E_n \nsubseteq A}^{\infty} E_n \cap A^c\right] = \bigcup A^c = A^c.$$

Isto mostra que a terceira condição também está satisfeita. Portanto, está provado que Σ_A é uma $\sigma-$álgebra.

Ainda falta estabelecer uma relação importante para os espaços vetoriais aqui utilizados.

Dessa forma, o próximo passo é estabelecer as seguintes relações, considere os espaços $B(S, \Sigma_A)$, $B(S, \Sigma_{A^c})$.

Um fato interessante é que

$$\begin{aligned} B(S,\Sigma_A) &= B_A(S,\Sigma) \\ B(S,\Sigma_{A^c}) &= B_{A^c}(S,\Sigma) \end{aligned}$$

como mostra a proposição abaixo.

Proposição 2: $B_A(S,\Sigma) = B(S,\Sigma_A)$.

Prova: Primeiro, segue a prova de que todo elemento em $B_A(S,\Sigma)$ pertence também a $B(S,\Sigma_A)$.

Seja $b \in B_A(S,\Sigma)$, ou seja, existe $a \in B(S,\Sigma)$ e $k \in \mathbb{R}$ tal que $b = aAk$.

Claramente, b é limitado, pois a é limitado e $k \in \mathbb{R}$.

Agora é imperativo mostrar que aAk é Σ_A-mensurável. Ou seja, para todo $r \in \mathbb{R}$, o conjunto $a^{-1}((r,+\infty)) \in \Sigma_A$[27].

Por contradição, se existe $r_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a^{-1}((r,+\infty)) \notin \Sigma_A$, logo $a^{-1}((r,+\infty)) \nsubseteq A$ ou $a^{-1}((r,+\infty)) \cap A^c \subsetneq A^c$. Ou seja, $a^{-1}((r,+\infty)) \cap A^c \neq \emptyset$ e $a^{-1}((r,+\infty)) \cap A^c \subsetneq A^c$.

De outro modo, $0 \neq \{s \in A^c : a(s) > r_0\} \subsetneq A^c$.

Assim, existe $\hat{s} \in A^c$ tal que $a(\hat{s}) > r_0$, pois $a^{-1}((r,+\infty)) \cap A^c \neq \emptyset$, por outro lado, como $a^{-1}((r,+\infty)) \cap A^c \neq A^c$, tem-se que existe $\tilde{s} \in A^c$ tal que $a(\tilde{s}) \leq r_0$. Isso leva à conclusão de que a não é uma função constante em A^c, um absurdo, e portanto, todo elemento em $B_A(S,\Sigma)$ está contido em $B(S,\Sigma_A)$.

Agora a segunda parte é mostrar que todo elemento em $B(S,\Sigma_A)$ está contido em $B_A(S,\Sigma)$.

Seja $a \in B(S,\Sigma_A)$. Para provar esta segunda parte, basta mostrar que a é uma função constante em A^c. Suponha que não, ou seja, existem $\tilde{r},\hat{r} \in \mathbb{R}$ e $\tilde{s},\hat{s} \in A^c$ tal que

$$a(\tilde{s}) = \tilde{r} > a(\hat{s}) = \hat{r}.$$

Tem-se que $\{s \in S : a(s) > \hat{r}\} \in \Sigma_A$, e também que $\hat{s} \notin \{s \in S : a(s) > \hat{r}\}$ o que leva à seguinte relação:

$$\{s \in S : a(s) > \hat{r}\} \cap A^c \neq A^c$$

que é uma contradição, pois

$$\{s \in S : a(s) > \hat{r}\} \in \Sigma_A \text{ e } \Sigma.$$

Logo, $a(A^c) = \{k\}$, com $k \in \mathbb{R}$.

[27]Ver Isnard, 2007, pág. 57.

Deste modo,

$$a = bAk$$

para algum $b \in B(S,\Sigma)$, o que é $\Sigma-$mensurável, pois $a \in B(S,\Sigma_A) \subseteq B(S,\Sigma)$ e $A \in \Sigma$. Isto prova que os espaços são iguais.

Vale ressaltar que os conjuntos $B_A(S,\Sigma)$ e $B(S,\Sigma_A)$ também podem ser definidos como,

$$B_A(S,\Sigma), := \{a \in B(S,\Sigma) : \ a \text{ é constante em } A^c\}$$

ou seja, são espaços onde os elementos são constantes em A^c. A lógica é a mesma, porém inversa, para os espaços $B_{A^c}(S,\Sigma)$.

Por fim, fica evidente que $B_A(S,\Sigma) = B(S,\Sigma_A) \subseteq B(S,\Sigma)$.

Dessa forma, tem-se, $I_1 : B(S,\Sigma_A) \to \mathbb{R}$ e $I_1 : B(S,\Sigma_{A^c}) \to \mathbb{R}$ com as propriedades já descritas.

Além disso,

$$\begin{aligned} B_A(S,\Sigma)^* &= B(S,\Sigma_A)^* = ba(S,\Sigma_A), \\ B_{A^c}(S,\Sigma)^* &= B(S,\Sigma_{A^c})^* = ba(S,\Sigma_{A^c}). \end{aligned}$$

Logo $I_1 : B(S,\Sigma_A) \to \mathbb{R}$ cumpre as condições do lema principal em Gilboa e Schmeidler (1989) e, portanto, existe $C_1 \subset ba^1(S,\Sigma_A)$ tal que para todo $a \in B(S,\Sigma_A)$, onde[28]

$$I_1(a) = \min_{p \in C_1} \int_S a \, dp.$$

Analogamente, para $I_2 : B(S,\Sigma_{A^c}) \to \mathbb{R}$, vale a versão subaditiva de Gilboa e Schmeidler (1989), onde existe $C_2 \subset ba^1(S,\Sigma_{A^c})$ tal que para todo $b \in B(S,\Sigma_{A^c})$, onde

$$I_2(b) = \min_{p \in C_2} \int_S b \, dp.$$

Em particular, dado $a \in B(S,\Sigma)$ tem-se $aA0 \in B(S,\Sigma_A)$ e $0Aa \in B(S,\Sigma_{A^c})$. Por conseguinte,

$$I_1(aA0) + I_2(0Aa) = \min_{p \in C_1} \int_A a \, dp + \max_{p \in C_2} \int_{A^c} a \, dp.$$

Agora, por *I5c*,

$$I(a) = I(aA0) + I(0Aa) = I_1(aA0) + I_2(0Aa) = \min_{p \in C_1} \int_A a \, dp + \max_{p \in C_2} \int_{A^c} a \, dp.$$

[28] Dada uma $\sigma-$álgebra $\tilde{\Sigma}$ sobre S, $ba^1(S,\Sigma)$ denota a família de todas as medidas de probabilidades sobre $\tilde{\Sigma}$.

Até aqui, está provado que, dado $a = aA0 + 0Aa$, tem-se que,

$$I(a) = \min_{p \in C_1} \int_A a \, dp + \max_{p \in C_2} \int_{A^c} a \, dp$$

onde $C_1 \subseteq ba^1(S, \Sigma_A) =: \Delta_A$ e $C_2 \subseteq ba^1(S, \Sigma_{A^c}) =: \Delta_{A^c}$.

A partir disto, ainda resta construir um certo conjunto de probabilidades $C \in \Delta$ onde $C \subset ba(S, \Sigma)$ tal que,

$$I(a) = \min_{p \in C} \int_A a \, dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} a \, dp.$$

Para tal, começa-se com a seguinte proposição.

Lema 4: É verdade que,

$$\Sigma_B \cap \Sigma_{B^c} = \{\emptyset, S, B, B^c\}.$$

Prova: A intersecção do conjunto Σ_B com seu complementar Σ_{B^c}, pode ser reescrita como,

$$\Sigma_B \cap \Sigma_{B^c} = \{E \in \Sigma : [E \subseteq B \text{ ou } E \cap B^c = B^c] \text{ e } [E \subseteq B^c \text{ ou } E \cap B = B]\}.$$

Esta relação apresenta quatro possíveis soluções:

$$\Sigma_B \cap \Sigma_{B^c} = \begin{array}{l} \{E \in \Sigma : [E \subseteq B \text{ e } E \subseteq B^c] \text{ ou } [E \subseteq B \text{ e } E \cap B = B] \text{ ou} \\ [E \subseteq B^c \text{ e } E \cap B^c = B^c] \text{ ou } [E \cap B^c = B^c \text{ e } E \cap B = B]\}. \end{array}$$

Assim, se $E \in \Sigma$ é tal que $[E \subseteq B \text{ e } E \subseteq B^c]$, claramente $E = \emptyset$. Se $E \in \Sigma$ é tal que $[E \subseteq B \text{ e } E \cap B = B]$, então $E = B$. Se $E \in \Sigma$ é tal que $[E \subseteq B^c \text{ e } E \cap B^c = B^c]$, $E = B^c$. E, por fim, se $E \in \Sigma$ é tal que
$[E \cap B^c = B^c \text{ e } E \cap B = B]$, então $E = S$. Isto prova que $\Sigma_B \cap \Sigma_{B^c} = \{\emptyset, S, B, B^c\}$.

A partir da proposição acima, é possível notar que I_1 e I_2 sobre $B(S, \Sigma_A) \cap B(S, \Sigma_{A^c})$ coincidem. Daí tem-se que,

$$\begin{aligned} I_1(1A0) &= I_2(1A0) \\ I_1(0A1) &= I_2(0A1). \end{aligned}$$

Em consequência,

$$\begin{aligned}
\min_{p\in C_1} p(A) &= \max_{q\in C_2} q(A)\,, \text{ e}\\
\min_{p\in C_1} p(A^c) &= \max_{q\in C_2} q(A^c)\,, \text{ ou seja,}\\
\max_{p\in C_1} p(A) &= \min_{q\in C_2} q(A)\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\min_{p\in C_1} p(A) \leq \max_{p\in C_1} p(A) = \min_{q\in C_2} q(A) \leq \max_{q\in C_2} q(A) = \min_{p\in C_1} p(A)$. Logo, todos os componentes são iguais.

Dessa forma, A é não ambíguo com respeito a C_1 e não ambíguo com respeito a C_2, e ainda existe $r \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\begin{cases} \forall p, p' \in C_1,\, p(A) = p'(A) = r \text{ e}\\ \forall q, q' \in C_1,\, q(A) = q'(A) = r. \end{cases}$$

Agora definindo o conjunto

$$C = \{p \in \Delta : \exists p_1 \in C_1,\ \exists p_2 \in C_2 \text{ tal que } p|_{\Sigma_A} = p_1 \text{ e } p|_{\Sigma_{A^c}} = p_2\}\,.$$

Para $E \in \Sigma_A \cap \Sigma_{A^c}$, E também é não ambíguo com respeito a C.

Observe que C é convexo. De fato, para $p, q \in C$, existe $p_1, q_1 \in C_1$ e existe $p_2, q_2 \in C_2$ tal que $p|_{\Sigma_A} = p_1$, $p|_{\Sigma_{A^c}} = p_2$, $q|_{\Sigma_A} = q_1$, e $q|_{\Sigma_{A^c}} = q_2$.

Portanto, $\alpha p + (1-\alpha)\,q$, com $\alpha\,[0,1]$, é tal que $[\alpha p + (1-\alpha)\,q]\,|_{\Sigma_A} =$
$[\alpha p_1 + (1-\alpha)\,q_1] \in C_1$ pois C_1 é convexo.

Da mesma forma, $[\alpha p + (1-\alpha)\,q]\,|_{\Sigma_{A^c}} = [\alpha p_2 + (1-\alpha)\,q_2] \in C_2$ pois C_2 é convexo. Logo C é convexo[29].

Falta ainda mostrar que C é um conjunto fechado (fraco*).

Dada uma rede $\{p^\alpha\}$ tal que $p^\alpha \in C$, para todo α e $p^\alpha \xrightarrow{*} p$ é necessário mostrar que $p \in C$. Tem-se que $p^\alpha \xrightarrow{*} p \overset{(\text{def.})}{\Longleftrightarrow} \forall a \in B(S, \Sigma)$,

$$\int a \; dp^\alpha \to \int a \; dp.$$

Como $p^\alpha \in C$, para todo α, então dado α, existem $p_1^\alpha \in C_1$ e $p_2^\alpha \in C_2$ tal que $p^\alpha|_{\Sigma_A} = p_1^\alpha$ e $p^\alpha|_{\Sigma_{A^c}} = p_2^\alpha$. Logo, para todo $a \in B(S, \Sigma_A) \subseteq B(S, \Sigma)$,

$$\int a \; dp^\alpha \to \int a \; dp.$$

Em particular,

$$\int_A a \; dp^\alpha \to \int_A a \; dp$$

[29] Claramente $C \neq \emptyset$. Basta escolher $p_1 \in C_1$ e $p_2 \in C_2$ e definir p sobre Σ por $p|_{\Sigma_A} = p_1$ e $p|_{\Sigma_{A^c}} = p_2$.

e portanto,

$$\int_A a\ dp_1^{\alpha} \to \int_A a\ dp|_{\Sigma_A},$$

isto é, $p_1^{\alpha} \xrightarrow{*} p|_{\Sigma_A}$, como C_1 é fechado, $p|_{\Sigma_A} \in C_1$.

Analogamente, para todo $a \in B\left(S, \Sigma_{A^c}\right)$

$$\int a\ dp^{\alpha} \to \int a\ dp,$$

em particular,

$$\int_A a\ dp^{\alpha} \to \int_A a\ dp.$$

Isto é,

$$\int_A a\ dp^{\alpha} \to \int_A a\ dp|_{\Sigma_{A^c}},$$

ou seja, $p_2^{\alpha} \xrightarrow{*} p|_{\Sigma_{A^c}}$. Como C_2 é fechado $p|_{\Sigma_{A^c}} \in C_2$.

Em suma, $p^{\alpha} \xrightarrow{*} p$ com $p|_{\Sigma_A} \in C_1$ e $p|_{\Sigma_{A^c}} \in C_2$, ou seja, $p \in C$, o que mostra que C é fechado (fraco*).

Agora note que para um dado $a \in B_0\left(S, \Sigma_A\right)$, $a = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{E_i} + k\mathbf{1}_{A^c}$ onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $E_i \in \Sigma_A$ tem-se que $\left(E_i\right)_{i-1}^{N}$ é uma partição de A.

Logo, para todo $p_1 \in C_1$,

$$\int a\ dp_1 = \sum_{i-1}^{N} \alpha_i p_1\left(E_1\right) + kp_1\left(A^c\right)$$

e para todo $p \in C$ há um correspondente $p_1 \in C_1$ com $p|_{\Sigma_A} = p_1$ de modo que pode-se escrever

$$\int a\ dp_1 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i p\left(E_1\right) + kp\left(A^c\right) = \int a\ dp.$$

Logo, $\min_{p_1 \in C_1} \int a\ dp_1 = \min_{p \in C} \int a\ dp$. Se $a \notin B_0\left(S, \Sigma_A\right)$, é possível concluir que existe uma sequência $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_0$ tal que $a_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\infty}} a$.

Assim, dado $p \in C$ existe $p_1 \in C_1$ tal que $p|_{\Sigma_A} = p_1$ e daí,

$$\int a\ dp = \lim_{n \to \infty} \int a_n\ dp = \lim_{n \to \infty} \int a_n\ dp_1 = \int a\ dp_1.$$

O procedimento é análogo para $a \in B\left(S, \Sigma_{A^c}\right)$. Então, é possível obter que $I\left(a\right) = \min_{p \in C} \int_A a\ dp + \max_{p \in C} \int_{A^c} a\ dp$

Isto conclui a prova do Teorema 1.

7 Referências

ALLAIS, M. Le comportement de Fhomme rationel devant le risque, critique des postulates et axiomes de l'ecole americaine. **Econometrica.** 21,503-546. 1953.

ANSCOMBE, F. J., AUMANN. R. J. A definition of subjective probability. **Annals of Mathematical Statistics**, 34, p. 199-205. 1963.

BEWLEY, T. F. Knightian Decision Theory. Part I. **Decisions in Economics and Finance**, Vol. 25, p. 79-110. 2002.

CHOQUET, G. Theory of capacities. **Annales de l'Institut Fourier 5**, p.131-295. 1955.

COHEN, J., HANSEL, M. Preferences for different combinations of chance and skill in gambling. **Nature**, 183, p.841-843. 1959.

de FINETTI, B. La Prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives. Annales de l'Institut Henri Poincaré. 7, p.1-68. 1937. Traduzido em KYBURG, H. E., SMOKLER, H. E. **Studies in Subjective Probability.** New York: Wiley. 1964. 203p.

DEBREU, G. Representation of a preference ordering by a numerical functions. In: THRALL, R., COOMBS, C., DAVIS, R. (Orgs.). **Decision Processes.** Nova York; John Wiley and Sons. 1954. p.159-166.

di MAURO, C. Uncertainty aversion vs. competence: an experimental market study. **Theory and Decision.** 64, p.301–331. 2008.

DOW, J., WERLANG S. R. C. Uncertainty aversion, risk aersion, and the optimal choice of portfolio. **Econometrica**, 60 (1), p.197-204. 1992.

DUNFORD, N., SCHWARTZ, J. T. **Linear Operators, Part 1: General Theory.** Wiley Classics Library Edition (Publicado em 1988). 1957. 872p.

EICHBERGER, J., GRANT, J. S., David KELSEY, D., Gleb A. KOSHEVOY, G. A. The -MEU model: A comment. **University of Exeter.** Working Paper. 2009.

ELLSBERG, D. Risk, ambiguity and the Savage axioms. **Quartely Journal of Economics**, 75, p.643-669. 1961.

EPSTEIN, L. G., WANG, T. Intertemporal asset pricing under Knightian uncertainty. **Econometrica.** 62, 283–322. 1994.

EPSTEIN, L. G., WANG, T. Uncertainty, Risk-Neutral Measures and Security Price Booms and Crashes. **Journal of Economic Theory.** 67. 40-80. 1995.

EPSTEIN, L. G. Are probabilities used in markets? **Journal of Economic Theory.** 91, 86–90. 2000.

FRISCH, D., BARON, J. Ambiguity and rationality. **Journal of Behavioral Decision Making** 1, 149–157. 1988.

GILBOA, I., SCHMEIDLER D. Maxmin expected utility with a non-unique prior. **Journal of Mathematical Economics**, 18, p.141-153. 1989.

GHIRARDATO, P., MARINACCI, M. Ambiguity made precise: A comparative foundation. **Journal of Economic Theory**, 102, p.251-289. 2002.

GHIRARDATO, P., MACCHERONI, F., MARINACCI, M. Differentiating ambiguity and ambiguity attitude. **Journal of Economic Theory**, 118, p.133-173. 2004.

HAMOUDA, O., ROWLEY, R. **Probability and Economics.** London, Routledge, 1996. 208p.

HEATH, C., TVERSKY, A. Preference and belief: Ambiguity and Competence in Choice under Uncertainty. **Journal of Risk and Uncertainty**, 4, p.5-28. 1991.

HERNSTEIN, N., MILNOR, J. An axiomatic approach to measurable utility. **Econometrica** 21, 291-297. 1953.

HOWELL, W. Uncertainty from internal and external sources: A clear case of overconfidence. **Journal of Experimental Psychology**, 89 (2), p.240-243. 1971.

ISNARD, C. **Introdução à Medida e Integração.** 1 ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2007. 314p.

JAMES, B. R. **Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário.** 2 ed. Rio de Janeiro, IMPA. 2004. 299p.

KAHNEMAN, D., TVERSKY, A. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. **Econometrica** 47, p.263-291. 1979.

KEYNES, J. M. **A treatise on probability.** London: Macmillan, 1921. 494p.

KNIGHT, F. **Risks, Uncertainty and Profit.** Boston: Houghton-Mi- in. 1921. 232p.

KOLMOGOROV, A. N. Foundations of the Theory of Probability. Chelsea Publishing Co., New York. 1956. 84p.

KYBURG, H. E., SMOKLER, H. E. **Studies in Subjective Probability.** New York: Wiley. 1964. 203p.

LAPLACE, R. S. **A philosophical essay on probabilities.** (F. W. Truscott & F. L. Emory, Trans.). New York: Dover. (Primeira publicação em 1814). 1951. 110p.

LEHRER, E. Partially-specified probabilities: decisions and games. **mimeo**. Tel-Aviv University. p.1-38. 2007.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos.** Projeto Euclides, IMPA, CNPQ, Rio de Janeiro, 2003. 299p.

MACCHERONI, F., M. MARINACCI, M., RUSTICHINI A. Ambiguity aversion, Robustness and the variational representation of preferences. **Econometrica**, 74 (6), p.1447-1498. 2006.

MUKERJI, S., TALLON, J.M. Ambiguity aversion and incompleteness of financial markets. **Review of Economic Studies.** 68, 883–904. 2001.

MUKERJI, S., TALLON, J.M. Ellsberg's two-color experiment, portfolio inertia and ambiguity. **Journal of Mathematical Economics.** 39, p.299–315. 2003.

OAKES, M. **Statistical inference: A commentary for the social and behavioral sciences.** New York: Wiley. 1986. 196p.

RAMSEY, F. P. **Truth and Probability.** The Foundation of Mathematics and Other Logical Essays. New York, Harcourt, Brace and Co. 1931. 284p.

RIGOTTI, L., RYAN, M., VAITHIANATHAN, R. Optimism and firm formation. **Economic Theory**. p.01-38, 2009.

RODE, C., COSMIDES, L., HELL, W., TOOBY, J. When and why do people avoid unknown probabilities in decision under uncertainty? Testing some predictions from optimal foraging theory. **Cognition.** 72, 269–304. 1999.

ROTHBART, M.; SNYDER, M. Confidence in the prediction and postdiction of an uncertain outcome. **Canadian Journal of Behavioral Science**, 2 (1), p.38-43. 1970.

SHAFER, G. **A Mathematical Theory of Evidence.** Princeton: Princeton University Press. 1976. 297p.

SAVAGE, L. J. **The Foundations of Statistics**. Wiley, New York. 1954. 310p.

SCHMEIDLER, D. Integral representation without additivity. **Proceedings of the American Mathematical Society** 97 (2), 255, 261. 1986

SCHMEIDLER, D. Subjective probability and expected utility theory without additivity. **Econometrica,** 57, 571-587. 1989.

SUROWIK, D. Leonard Savage's Mathematical Theory of Decision. **Studies in Logic, Grammar and Rhetoric.** 5, (18). 2002.

von NEUMANN, J., MORGENSTERN, O. **Theory of Games and Economic Behavior.** Princeton: Princeton University Press. 1947. 776p.

WALLSTEN, T. S. The costs and benefits of vague information. In: HOGARTH, R. M. (Org.). **Insight in Decision Making.** Chicago: University of Chicago Press. cap.2. 1990.