

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

Extensão para Controle *On-line* por Atributo com  
Erros de Classificação: Intervalo de Inspeção  
Variável, Amostragem Não-unitária, Horizonte  
Finito e Infinito.

**Lupércio França Bessegato**

Tese de doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Estatística.

Orientador: Prof. Roberto da Costa Quinino

Co-orientador: Prof. Luiz Henrique Duczmal

Belo Horizonte, Dezembro de 2009.

Dedico este trabalho aos meus pais e agradeço por não terem me dado as respostas, mas sim, a liberdade de sempre questionar.

# Agradecimentos

Agradeço ao professor Roberto da Costa Quinino pela orientação e pela paciência no decorrer de todo o trabalho; ao professor Luiz Henrique Duczmal, pela atenção e pelas constantes lições de otimismo; ao professor Gregorio Saravia Atuncar por ter me encorajado a perseverar na vida acadêmica; à minha irmã, Lenise, pelas horas dedicadas a ouvir e a aconselhar; a Dora, cuja hora de conversa semanal me garantiu equilíbrio para pensar e para decidir e a Lolange, amiga recente, que produziu noites musicais realmente inspiradoras.

Agradeço também aos professores e funcionários do Departamento de Estatística pelo incentivo constante e pelos maravilhosos anos de convivência acadêmica e profissional. Aos funcionários da Biblioteca do ICEX, em especial a Belkiz e a Irenquer, que forneceram apoio fundamental ao desenvolvimento do trabalho.

*Sinto-me nascido a cada momento  
Para a eterna novidade do mundo.*

**Fernando Pessoa**

# Resumo

Taguchi et al. (1989) propuseram planejamento econômico de controle *on-line* por atributos que consiste inspecionar um único item a cada  $m$  itens produzidos. Em cada inspeção, decide-se sobre o estado do processo de produção. Caso o item inspecionado seja declarado não-conforme, supõe-se que o processo esteja fora de controle, ajustando-o imediatamente para reconduzi-lo a sua condição inicial. São propostas estratégias econômicas que estendem o modelo através da incorporação das seguintes características: intervalo de inspeção variável, amostra não-unitária, tamanho de amostra variável e decisões não-dicotômicas. Finalmente, estuda-se metodologia de planejamento econômico para o caso de horizonte finito de produção. Considera-se que o sistema de classificação é imperfeito. Em todos os modelos propostos, são estabelecidas as expressões do custo médio por item produzido para determinação dos parâmetros de planejamento ótimos. Exemplos numéricos ilustram o processo de decisão dos modelos propostos.

**Palavras-chave:** Amostra não-unitária. Cadeias de Markov. Controle *on-line* de processos por atributos. Erros de classificação. Intervalo de inspeção variável. Planejamento econômico. Produção de pequeno lote.

# Abstract

Taguchi et al. (1989) proposed an on-line process control for attribute procedure which consists in inspecting a single item at a fixed sampling interval. Based on the result of each inspection, it is decided whether the process conforming fraction has changed or not. If an inspected item is declared non-conforming, it supposes that the production process is out-of-control and the process is adjusted to put it back to its initial condition. This paper studies economic policies that extend Taguchi's model paradigms. These proposals use the following: variable sampling interval, non-unitary sampling, variable sampling size and 3-level decisions. Finally, it studies a economic design for short-run production. It is considered that the classification system is imperfect. The average cost expression for each proposed model is established in order to determine the optimal design parameter set. The decision process of the proposed models are illustrated by numerical examples.

**Keywords:** on-line process control for attributes, economic design, misclassification errors, Markov chain, variable sampling interval, non-unitary sample, short-run production.

# Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
Notação	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Controle estatístico de processo . . . . .	1
1.2 Modelos econômicos para controle <i>on-line</i> de processos . . . . .	4
1.3 Modelo de Taguchi para controle <i>on-line</i> de processos por atributos . . . . .	5
1.3.1 Caso I . . . . .	6
1.3.2 Caso II . . . . .	7
1.4 Modelo proposto por Nayebpour e Woodall (1993) . . . . .	7
1.5 Controle <i>on-line</i> por Atributos com Erros de Classificação . . . . .	8
1.6 Objetivos propostos . . . . .	10
<b>2 Controle <i>On-line</i> com Intervalo de Amostragem Variável</b>	<b>12</b>
2.1 Modelo probabilístico . . . . .	14
2.2 A cadeia de Markov . . . . .	17
2.3 Distribuição estacionária da cadeia . . . . .	21
2.4 Custos dos estados da cadeia . . . . .	23
2.4.1 Custo dos estados (0, 0) e (0, 1): . . . . .	24
2.4.2 Custo dos estados (1, 0) e (1, 1): . . . . .	26
2.4.3 Custo dos estados (2, 0) e (2, 1) . . . . .	27
2.5 Custo médio da produção . . . . .	27
2.6 Aplicação numérica e análise de sensibilidade . . . . .	31
2.6.1 O impacto dos erros de classificação, de $\pi$ e de $p_2$ . . . . .	32
2.6.2 Os componentes de custo e a otimização . . . . .	34
2.7 Inspeção com medidas repetidas . . . . .	35
2.7.1 Modelo probabilístico . . . . .	37
2.7.2 Custos médios dos estados da cadeia de Markov . . . . .	38
2.7.3 Aplicação numérica . . . . .	41
2.8 Comentários adicionais . . . . .	42

<b>3</b>	<b>Controle <i>On-line</i> com Amostra Não-unitária</b>	<b>44</b>
3.1	Modelo probabilístico . . . . .	47
3.2	A cadeia de Markov . . . . .	50
3.3	Custos dos estados da cadeia . . . . .	56
3.3.1	Custo dos estados (0, 0) e (0, 1): . . . . .	57
3.3.2	Custo dos estados (1, 0) e (1, 1): . . . . .	60
3.3.3	Custo dos estados (2, 0) e (2, 1): . . . . .	61
3.3.4	Custo dos estados (3, 0) e (3, 1): . . . . .	64
3.4	Custo médio da produção . . . . .	65
3.5	Aplicação numérica . . . . .	66
3.6	Controle <i>on-line</i> com amostra não-unitária e intervalo de amostragem variável . . . . .	67
3.6.1	A cadeia de Markov . . . . .	68
3.6.2	Distribuição estacionária da cadeia . . . . .	71
3.6.3	Custos dos estados da cadeia de Markov . . . . .	73
3.6.4	Custo médio da produção . . . . .	75
3.6.5	Aplicação numérica . . . . .	76
3.7	Comentários adicionais . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Generalização do Modelo de Controle <i>On-line</i></b>	<b>78</b>
4.1	A cadeia de Markov . . . . .	82
4.2	Distribuição invariante . . . . .	88
4.3	Custos dos estados da cadeia . . . . .	90
4.3.1	Custo dos estados (0, 0), (0, 1) e (0, 2) . . . . .	91
4.3.2	Custo dos estados (1, 0), (1, 1) e (1, 2) . . . . .	92
4.3.3	Custo dos estados (2, 0), (2, 1) e (2, 2) . . . . .	94
4.3.4	Custo dos estados (3, 0), (3, 1) e (3, 2) . . . . .	96
4.4	Custo médio da produção . . . . .	98
4.5	Aplicação numérica . . . . .	99
4.6	Otimização por algoritmo genético . . . . .	100
4.7	Comentários adicionais . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Controle <i>On-line</i> para Horizonte Finito</b>	<b>104</b>
5.1	A cadeia de Markov . . . . .	106
5.2	Distribuição de probabilidade da cadeia . . . . .	109
5.3	Custos médios do sistema de controle . . . . .	110
5.3.1	Custo dos estados (0, 0) e (0, 1): . . . . .	111
5.3.2	Custo dos estados (1, 0) e (1, 1): . . . . .	112
5.3.3	Custo dos estados (2, 0) e (2, 1): . . . . .	113
5.3.4	Custo do resíduo . . . . .	114
5.4	Custo médio da produção . . . . .	115
5.5	Aplicação numérica e análise de sensibilidade . . . . .	121
5.5.1	Impacto dos erros de classificação, de $\pi$ e de $p_2$ . . . . .	122



---

5.5.2 Os componentes de custo . . . . .	124
5.6 Comentários adicionais . . . . .	124
<b>6 Conclusões e Pesquisa Futura</b>	<b>126</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>130</b>
<b>A <i>Scripts</i> Desenvolvidos</b>	<b>136</b>

# Lista de Figuras

2.1	Intervalo de inspeção variável: fluxograma do sistema de controle . . . . .	15
2.2	Intervalo de inspeção variável: diagrama dos estados da cadeia . . . . .	18
2.3	Intervalo de inspeção variável: exemplo numérico . . . . .	32
2.4	Intervalo de inspeção variável: análise de sensibilidade do custo unitário . . . . .	33
2.5	Intervalo de inspeção variável: comportamento inspeção com classificações repetidas	41
3.1	Amostra não-unitária: fluxograma do sistema de controle . . . . .	46
3.2	Amostra não-unitária: exemplo de ciclo de monitoramento . . . . .	47
3.3	Amostra não unitária: diagrama dos estados da cadeia . . . . .	51
3.4	Amostra não-unitária: exemplo numérico . . . . .	67
3.5	Amostra não-unitária e intervalo de inspeção variável: fluxograma do sistema de controle . . . . .	69
4.1	Modelo generalizado: fluxograma do sistema de controle . . . . .	81
5.1	Horizonte finito de produção: fluxograma do sistema de controle . . . . .	106
5.2	Horizonte finito de produção: diagrama dos estados da cadeia. . . . .	107
5.3	Horizonte finito de produção: exemplo numérico . . . . .	121
5.4	Horizonte finito de produção: comparação abordagens finita e infinita . . . . .	122
5.5	Horizonte finito de produção: análise de sensibilidade a parâmetros do processo . . .	123
5.6	Horizonte finito de produção: análise de sensibilidade aos erros de classificação . . .	123
5.7	Horizonte finito de produção: influência de erros de componentes de custo . . . . .	124

# Lista de Tabelas

- 2.1 Intervalo de inspeção variável: influência de erros de componentes de custo . . . . . 35
- 2.2 Intervalo de inspeção variável: parâmetros de planejamento de inspeção com medidas repetidas . . . . . 42

# Índice de Funções e Notações mais Utilizadas

Números em itálico indicam o número da página da primeira utilização da notação; números entre parênteses indicam numeração da equação definidora de função.

## Letras latinas

$a$	quantidade mínima de declarações de conformidade em inspeção para decidir-se pela não intervenção no processo, 35
$a_1(s_0)$	parâmetro de planejamento estabelecido por $s_0$ , referindo-se à menor quantidade de itens declarados conformes para se tomar a decisão $s = 1$ , 79
$a_2(s_0)$	parâmetro de planejamento estabelecido por $s_0$ , referindo-se à menor quantidade de itens declarados conformes para se tomar a decisão $s = 2$ , 79
$b_i(x, y)$	probabilidade de variável aleatória binomial $(x, y)$ assumir o valor $i$ (2.27), 36
$B_i(x, y)$	probabilidade de variável aleatória binomial $(x, y)$ assumir valores maiores ou iguais a $i$ (2.27), 36
$c_a$	custo de ajuste do processo, 23
$c_{insp}$	custo de uma classificação do item inspecionado, 23
$C(\mathbf{x})$	custo do sistema de controle por item enviado ao mercado, em função dos parâmetros de otimização $\mathbf{x}$ , 31
$c_{nc}$	custo de envio de item não-conforme ao mercado, 23
$c_{s-c}$	custo de descarte de item conforme, 23
$c_{s-nc}$	custo de descarte de item não-conforme, 23
$d$	quantidade de itens produzidos entre a coleta de itens sucessivos, 45
$E$	espaço de estados da cadeia de Markov, 17
$\mathbf{I}$	matriz identidade, 21
$L$	comprimento do primeiro ciclo de monitoramento após ajuste, 13
$m$	intervalo entre inspeções, 13
$m_{res}$	quantidade residual de itens necessários para conclusão de produção de pequeno lote, 105
$m(s_0)$	parâmetro de planejamento estabelecido por $s_0$ , referindo-se à quantidade de itens produzidos antes do início da inspeção, 79
$N$	quantidade de inspeções para produção de pequeno lote, 105
$n$	tamanho de amostra, 45

$n(s_0)$	parâmetro de planejamento estabelecido por $s_0$ , referindo-se ao tamanho da amostra, 79
$O$	conjunto de parâmetros de otimização, 98
$\mathbf{P}$	matriz de probabilidades de transição da cadeia de Markov, 18
$p_1$	fração de itens conformes produzidos com o processo operando sob controle, 13
$p_2$	fração de itens conformes produzidos com o processo operando fora de controle, 13
$p_A$	probabilidade de não se intervir no processo, dado que a produção opera sob controle, 16
$p_D$	probabilidade de não se intervir no processo, dado que a produção opera fora de controle, 17
$p_x(w, s)$	probabilidade de intervalo de amostragem do ciclo corrente ter comprimento $x$ , dado que seu estado é $(w, s)$ , 21
$q_x(t)$	probabilidade de o estado do processo se modificar exatamente no $t$ -ésimo dentre $x$ itens produzidos, dado que ocorra mudança de estado durante sua produção, $1 \leq t \leq x$ , 26
$R$	quantidade de itens produzidos durante coleta de amostra, 45
$r$	quantidade de repetições independentes de classificação de item sob inspeção, 35
$R(s_0)$	quantidade de itens produzidos durante amostragem, calculada em função de $s_0$ , 79
$s$	segundo elemento do par ordenado que representa o estado da cadeia de Markov, associado à decisão decorrente da inspeção do ciclo de monitoramento, 17
$S$	variável aleatória associada à decisão sobre intervenção no processo, relacionada com o estado da cadeia de Markov de ciclo, 22
$s_0$	decisão tomada no instante inicial do ciclo, 79
$T$	variável aleatória associada à quantidade de itens produzidas em ciclo, 27
$\mathbf{U}$	matriz dos autovalores à esquerda da matriz de probabilidades de transição $\mathbf{P}$ , 117
$\mathbf{V}$	matriz dos autovalores à direita da matriz de probabilidades de transição $\mathbf{P}$ , 116
$\mathbf{u}_i$	autovetor à esquerda de $\mathbf{P}$ associado ao autovalor $\lambda_i$ , 117
$\mathbf{v}_i$	auto-vetor à direita de $\mathbf{P}$ associado ao autovalor $\lambda_i$ , 117
$w$	primeiro elemento do par ordenado que representa o estado da cadeia de Markov, associado à situação do processo de produção, 17
$W$	variável aleatória associada à situação do processo de produção, relacionada com o estado da cadeia de Markov de ciclo, 22
$X$	variável aleatória indicadora da real condição de conformidade de item, 15
$Y$	(a) variável aleatória indicadora de resultado de classificação de item, 15
$Z$	(a) variável aleatória indicadora de situação do processo no instante de produção de item, 15
$Z_0$	(a) variável aleatória associada à situação do processo no instante inicial do ciclo, 18

### Letras Gregas

$\alpha$	probabilidade de classificar como não-conforme item realmente conforme, 13
$\boldsymbol{\alpha}_k$	vetor que denota a distribuição de probabilidade dos estados da cadeia do $k$ -ésimo ciclo de monitoramento, 109
$\alpha_k(w, s)$	probabilidade de o estado do $k$ -ésimo ciclo de monitoramento ser $(w, s)$ , 109
$\beta$	probabilidade de classificar como conforme item realmente não-conforme, 13
$\eta_x(w, s)$	quantidade esperada de itens descartados e realmente no estado $x$ , 63
$\eta_x(w, s s_0)$	quantidade esperada de itens descartados e realmente no estado $x$ , com tamanho amostral estabelecido pela decisão $s_0$ , 95
$\theta(w, s)$	custo esperado relacionado ao item inspecionado de ciclo cujo estado é $(w, s)$ , 24
$\vartheta(w, s)$	custo médio de inspeção dos itens da amostra do estado $(w, s)$ , 90
$\mathbf{\Lambda}$	matriz diagonal com os autovalores da matriz de probabilidades de transição $\mathbf{P}$ , 116
$\lambda_i$	$i$ -ésimo autovalor da matriz de probabilidades de transição $\mathbf{P}$ , 116
$\mu$	custo médio do monitoramento da produção do lote, 116
$\mu_k$	custo médio do $k$ -ésimo ciclo de monitoramento, 115
$\mu_{res}$	custo médio do sistema de controle associado ao resíduo, 116
$\nu(w, s)$	quantidade esperada de itens não-conformes produzidos e enviados ao mercado durante amostragem, 62
$\nu(w, s s_0)$	quantidade esperada de itens não-conformes produzidos e enviados ao mercado durante amostragem, com tamanho amostral definido por $s_0$ , 94
$\xi(w, s)$	custo esperado de envio de itens defeituosos ao mercado de ciclo cujo estado é $(w, s)$ , 24
$\boldsymbol{\pi}$	vetor coluna das probabilidades da distribuição invariante da cadeia de Markov, 21
$\pi$	probabilidade de mudança de estado do processo em cada item produzido (parâmetro da distribuição geométrica), 13
$\pi(w, s)$	elemento do vetor da distribuição invariante da cadeia relacionado com o estado $(w, s)$ , 21
$\tau$	tamanho de lote para produção e envio ao mercado, 105
$\Phi$	variável aleatória associada ao custo do sistema de controle de ciclo, 27
$\phi(w, s)$	custo esperado do sistema de controle de ciclo cujo estado é $(w, s)$ , 23
$\phi_{res}(w, s)$	custo esperado do resíduo quando $(w, s)$ for o estado da última inspeção, 114
$\boldsymbol{\phi}$	vetor dos custos esperados por estado, 111
$\boldsymbol{\phi}_{res}$	vetor dos custos médios do resíduo por estado, 115
$\varphi(w, s)$	custo de ajuste do processo de produção de ciclo cujo estado é $(w, s)$ , 24

### Outros Símbolos

$0$	parâmetro ótimo, 31
$\mathbf{0}$	vetor coluna nulo, 21
$1_{\{(w,s)\}}(j)$	variável aleatória indicadora de $(w, s)$ ser o estado da cadeia de Markov no $j$ -ésimo ciclo de inspeção, 28
$1_{\{L\}}(j)$	variável aleatória indicadora de ocorrência de ajuste na $(j - 1)$ -ésima inspeção, 28

$\lceil x \rceil$	menor inteiro maior ou igual a $x$ , <i>61</i>
$\lfloor x \rfloor$	maior inteiro menor ou igual a $x$ , <i>105</i>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Controle estatístico de processo

Em geral, espera-se que um processo de produção seja estável ou replicável, ou seja, que ele tenha capacidade de operar com pequena variabilidade em torno de dimensões-alvo das características de qualidade do produto. O controle estatístico do processo (CEP) é uma poderosa coleção de ferramentas de resolução de problemas que são importantes para se alcançar a estabilidade do processo e a melhoria de sua capacidade, através da redução de variabilidade. O CEP constrói um ambiente para a implementação da melhoria contínua na qualidade e na produtividade de um sistema de produção. Assim, a aplicação rotineira das ferramentas do CEP direciona a organização para a obtenção de seus objetivos de melhoria de qualidade.

Das ferramentas de CEP, o gráfico de controle de Shewhart é, provavelmente, a mais utilizada. Ele foi desenvolvido nos anos 20 pelo Dr. Walter A. Shewhart, do Bell Telephone Laboratories. A operação dos gráficos de controle consiste na coleta periódica de itens produzidos, analisando-os de acordo com alguma característica de interesse. Os valores observados em cada amostra são registrados graficamente em função do instante da amostragem.

Uma quantidade de variabilidade inerente ao processo de produção sempre estará presente como o efeito acumulado de muitas causas pequenas, em essência, inevitáveis, denominadas causas aleatórias da variação. Diz-se que um processo está sob controle estatístico quando apresenta apenas essa variabilidade natural ou “ruído de fundo”. Há outros tipos de variabilidade que podem estar



presentes na saída de um processo que são geralmente maiores quando comparados com o ruído de fundo, representando um nível inadequado de seu desempenho. Denominam-se “causas atribuíveis” as fontes de variabilidade que não fazem parte do padrão de causas aleatórias e o processo que opera em sua presença é considerado fora de controle. Um dos objetivos do controle estatístico é a diminuição de variabilidade do processo, através da detecção da ocorrência de causas atribuíveis às mudanças do processo, de modo que elas sejam investigadas e corrigidas de maneira a minimizar a produção de unidades não-conformes.

Um gráfico de controle típico é uma representação gráfica de uma característica de qualidade, medida ou calculada a partir de uma amostra *versus* o número da amostra ou o tempo. A característica de qualidade pode ser um atributo ou uma variável. O gráfico contém uma linha central (LC), representando o valor médio da característica de qualidade, e duas outras linhas horizontais, chamadas limite superior de controle (LSC) e limite inferior de controle (LIC). Escolhe-se amplitude do intervalo entre LSC e LIC de maneira que, quando o processo estiver operando sob controle, praticamente todos os pontos amostrais estejam em seu interior. Enquanto os pontos amostrais estiverem dentro dos limites de controle, não é necessária nenhuma ação, considerando-se que o processo esteja controlado. Entretanto, a ocorrência de um ponto fora desses limites é interpretada como evidência de que o processo está fora de controle, exigindo a descoberta e a eliminação da causa ou causas atribuíveis responsáveis por essa ocorrência.

Em essência, o gráfico de controle pode ser entendido como um teste da hipótese de que o processo está sob controle estatístico. Um ponto localizado fora dos limites de controle equivale à rejeição da hipótese de controle estatístico e, dentro dos limites de controle equivale a não rejeitar essa hipótese.

Os gráficos de controle podem ser classificados em dois tipos. Se a característica da qualidade pode ser expressa como número em alguma escala contínua de medida, ela é geralmente denominada variável. Nesse caso, os gráficos de controle são chamados de *gráficos de controle para variáveis*, sendo conveniente descrever a característica de qualidade com uma medida de tendência central e uma medida de variabilidade. Os gráficos de controle para variáveis mais usuais são o gráfico de controle para a média amostral ( $\bar{X}$ ) e para amplitude amostral ( $R$ ). Muitas características de

qualidade não são medidas em uma escala contínua ou mesmo em uma escala quantitativa. Nesses casos, pode-se julgar cada unidade do produto como conforme ou não-conforme, no caso de ela possuir ou não certos atributos. Os gráficos de controle para tais características da qualidade são denominados *gráficos de controle para atributos*.

Um fator importante no uso do gráfico de controle é seu planejamento, ou seja, a seleção do tamanho da amostra, dos limites de controle e da frequência da amostragem. Pode-se usar considerações estatísticas para esse planejamento, estabelecendo as seguintes medidas de seu desempenho: a probabilidade de concluir-se pelo descontrole do processo quando ele estiver realmente sob controle (erro tipo I); a probabilidade de se concluir pela estabilidade do processo, quando de fato ele estiver descontrolado (erro tipo II), habilidade de o gráfico de controle detectar mudanças de diferentes magnitudes no processo (poder do gráfico de controle). Os critérios estatísticos estão fundamentalmente associados à probabilidade de falso alarme ou à quantidade de amostragens entre a ocorrência e a detecção de desvio de característica de interesse do processo. Esses procedimentos geralmente consideram o fator custo apenas de uma maneira implícita.

Pode-se, entretanto, planejar os gráficos de controle sob um ponto de vista econômico, considerando explicitamente os seguintes componentes do custo de operação do sistema de controle: custo da amostragem, custo das perdas pela fabricação de produtos defeituosos, custos das investigações de sinais de fora de controle. Nessa abordagem, buscam-se valores dos parâmetros do gráfico de controle que minimizem uma função objetivo associada aos custos de operação.

Para a formulação de um modelo econômico de planejamento de gráfico de controle são necessárias algumas suposições sobre o comportamento do processo. Em geral, supõe-se que o processo seja caracterizado por um único estado sob controle, por exemplo, quando a característica da qualidade é um atributo, o estado de controle poderá ser representado pela fração de não-conformes produzida quando não estiverem presentes quaisquer causas atribuíveis. O processo pode ter mais de um estado fora de controle, associando-se, em geral, cada um deles a um tipo particular de causa atribuível. É costume supor que as causas atribuíveis ocorram de acordo com um processo de Poisson, implicando que o tempo de permanência do processo controlado seja aleatoriamente distribuído de

acordo com uma variável aleatória exponencial. Similarmente, no caso de produção considerada em tempo discreto, pode-se supor um tempo aleatório de processo estável modelado de acordo com uma distribuição geométrica. Essas suposições permitem uma simplificação considerável na modelagem econômica e em algumas situações resultam em estruturas de modelos de cadeia de Markov (Montgomery, 2004). Outra suposição importante é a de que o processo não seja autocorretivo, isto é, uma vez ocorrida uma transição para estado fora de controle, o processo retorna à situação de estabilidade apenas através de uma intervenção gerencial.

Originalmente, o planejamento de gráfico de controle baseava-se em aspectos estritamente estatísticos até que Duncan (1956) propôs empregar critérios econômicos para planejamento de gráficos de controle, integrando-os aos aspectos estatísticos do processo. Seu objetivo foi minimizar o custo total do processo considerando todos os custos envolvidos em seu monitoramento através de um gráfico de  $\bar{X}$ .

## 1.2 Modelos econômicos para controle *on-line* de processos

No final da década de 80, Taguchi et al. (1989) propuseram um método econômico para monitorar em tempo real características da qualidade, tanto de variáveis, quanto de atributos. Esse método é conhecido como modelo de Taguchi para controle *on-line* de processos. Seu objetivo é determinar o intervalo ótimo de inspeção, minimizando o custo por item em um ciclo de produção. Seu método, embora semelhante aos métodos econômicos desenvolvidos para gráficos de controle *np*, considera inspeções de apenas um item, ou seja, em seu modelo o tamanho da amostra ( $n$ ) é sempre igual a um. Outra diferença é que não se assume uma distribuição de probabilidade para o tempo até o processo sair de controle.

O procedimento consiste em retirar um único item da linha de produção a cada intervalo fixo de  $m$  itens produzidos. Se o item for não-conforme, no caso de atributo, pára-se o processo para investigação e ajuste. Ainda de acordo com Taguchi, este sistema de controle *on-line* deve ser empregado de maneira que os valores alvos desejados da característica de qualidade possam ser

economicamente controlados. O problema consiste em determinar o intervalo ótimo  $m$  e, no caso de controle de variáveis, o intervalo entre os limites de controle ( $2d$ ), tal que se minimize o custo médio do sistema de controle. A proposição de monitoramento de processo de Taguchi foi criticada em função de suposições implícitas e de aproximações empregadas. Nayebpour e Woodall (1993) apontam que as estratégias propostas por Taguchi et al. (1989) são intimamente relacionadas com o planejamento econômico de gráficos  $np$ , desenvolvido por muitos autores, tais como: Montgomery et al. (1975), Gibra (1978) e Williams et al. (1985). A diferença entre esses métodos de planejamento econômico e o de controle *on-line* é que Taguchi et al. (1989) não assumem explicitamente um mecanismo específico para o tempo de falha do processo, ou seja, sobre a distribuição subjacente ao intervalo de tempo anterior à mudança de estado do processo.

O planejamento econômico de sistema de controle *on-line* foi também estudado por Adams e Woodall (1989), Srivastava e Wu (1991, 1995, 1994, 1996, 1997, 1999), Box e Kramer (1992), Box e Luceno (1994), Chou e Wang (1996), Nandi e Sreehari (1997, 1999), Wang e Yue (2001). Esse tipo de procedimento é empregado em situações tais como: processo automático de solda, produção de semi-condutores, diodos e placas de circuito impresso e em processos químicos. Em geral, ele pode ser utilizado em processos que empregam algum tipo de controle automático com observações individuais.

### 1.3 Modelo de Taguchi para controle *on-line* de processos por atributos

Considere agora um processo produtivo em que é preciso manter a qualidade dos itens produzidos, satisfazendo condições especificadas. Supõe-se que os itens produzidos são inspecionados periodicamente e, caso sejam encontrados itens não-conformes, o processo é interrompido e ajustado. Após o ajuste, o processo retorna imediatamente a operar em suas condições iniciais de estabilidade e se inicia um novo ciclo.

Taguchi et al. (1989) propuseram um planejamento econômico para monitorar esse tipo de processo

considerando duas situações:

1. a mudança de 0% de defeitos para 100% de defeitos;
2. a mudança de 0% de defeitos para  $\pi\%$  de defeitos.

O método consiste em minimizar o custo esperado por item produzido, através da determinação do intervalo de inspeção ótimo ( $m^0$ ). Para esse cálculo, são fixados o custo de inspeção, o custo de produção de um item defeituoso e o custo de ajuste do processo.

### 1.3.1 Caso I

O ciclo de produção inicia-se com uma fração de defeitos igual a zero e, em algum instante aleatório, muda para uma fração de 100% de defeitos. Os itens são produzidos independentemente e, a cada  $m$  produzidos, inspeciona-se o último deles. Além disso, supõe-se que durante a inspeção o processo continua. Se o item examinado for conforme, a produção continua, caso contrário, interrompe-se a produção para se ajustar o processo. Entre o início da amostragem e a parada do processo são produzidos alguns itens, representando-se esse atraso por  $l$ . Após a parada, o processo volta a ter fração de defeitos igual a zero e o ciclo descrito se repete.

A função custo  $L$  proposta por Taguchi é:

$$L = \frac{C_i}{m} + \left( \frac{m+1}{2} + l \right) \frac{C_d}{\bar{u}} + \frac{C_a}{\bar{u}} \quad (1.1)$$

em que  $C_i$  é o custo de inspeção,  $C_d$ , o custo de um item defeituoso,  $C_a$ , o custo de ajuste do processo,  $\bar{u}$ , o número médio de itens produzidos entre ajustes e  $l$ , o número de itens produzidos entre a inspeção e a parada para ajuste do processo. Considerando-se desprezíveis a dependência entre  $\bar{u}$  e  $m$  e a influência de  $l$  e  $C_a$  no custo, ou seja,  $\bar{u} \gg l$  e  $C_d \gg \frac{C_a}{\bar{u}}$ , Taguchi derivou (1.1) em relação a  $m$ , obtendo a expressão do intervalo ótimo entre inspeções:

$$m^0 = \sqrt{\frac{2\bar{u}C_i}{C_d}} \quad (1.2)$$

Note que  $m^0$  não depende de  $l$  nem de  $C_a$ . Taguchi sugeriu que se as condições estabelecidas para a obtenção de (1.2) não forem satisfeitas, deve-se substituir  $\bar{u}$  por  $\bar{u} + \frac{m}{2}$  em (1.1). Utilizou-se aproximação por séries para se obter o intervalo ótimo que resultou:

$$m^0 = \sqrt{\frac{2(\bar{u} + l)C_i}{C_d - \frac{C_a}{\bar{u}}}} \quad (1.3)$$

### 1.3.2 Caso II

Nesta situação, a fração de defeituosos do processo muda de 0% para  $\pi\%$ . Taguchi introduz o componente de custo  $C_D$ , custo de um item defeituoso não identificado que segue para as próximas etapas do processo e redefine  $C_d$  como o custo do item defeituoso que é detectado, sendo  $C_D \gg C_d$ . Considerando as suposições utilizadas no Caso I, a expressão do intervalo ótimo entre inspeções é dada por:

$$m^0 = \sqrt{\frac{2(\bar{u} + l)C_i}{C_D - \frac{C_a}{\bar{u}}}} \quad (1.4)$$

Ressaltam-se como características importantes do modelo, a mudança da qualidade do processo de um alto nível de qualidade constante, para um baixo nível de qualidade, também constante e a obtenção da estratégia ótima com base exclusivamente em critérios econômicos. Além disso, as expressões (1.2), (1.3) e (1.4) demonstram uma grande virtude do modelo de Taguchi que é a simplicidade. São as suposições adotadas para a obtenção destas expressões que abrem espaço para os trabalhos subseqüentes.

## 1.4 Modelo proposto por Nayebpour e Woodall (1993)

Em trabalhos posteriores, foram questionados principalmente dois aspectos do modelo de Taguchi:

- ausência de um modelo probabilístico formal para o tempo de espera até o processo sair de controle;
- as suposições simplificadoras adotadas na obtenção das expressões de  $m^0$ .

O trabalho de Nayebpour e Woodall (1993) é a principal referência crítica. Eles apresentaram o modelo para controle *on-line* de atributos e assumem que a mudança do processo para a situação fora de controle ocorre segundo uma distribuição geométrica de parâmetro  $\pi$ . Define-se um ciclo de produção como o período de tempo, medido em unidades produzidas, entre o início do processo, ou após qualquer ajuste, até a identificação e remoção de causa atribuível, com o ajuste do processo e conseqüente retorno à situação de controle. Modela-se a seqüência de produção, controle e ajuste, com seus custos contabilizados a cada ciclo, de acordo com a Teoria da Renovação (ver Ross, 2003), oferecendo para o custo por ciclo a expressão abaixo:

$$E(L) = \frac{E(C)}{E(T)} \quad (1.5)$$

em que  $C$ ,  $T$  e  $L$  são variáveis aleatórias associadas respectivamente ao custo por ciclo, ao comprimento do ciclo e ao custo por item produzido.

Nayebpour e Woodall (1993) empregaram os mesmos componentes de custo do modelo de Taguchi nas situações apresentadas como Caso I e Caso II. Com as considerações probabilísticas introduzidas não se pode obter uma expressão explícita para o intervalo ótimo entre inspeções ( $m^0$ ), demandando pesquisa computacional na determinação do valor de minimização da função de custo decorrente de (1.5). Os autores verificaram que o Caso II apresenta a maior discrepância entre as modelagens, considerado o custo médio por item produzido. Montgomery (2004) recomenda que algum tipo de restrição estatística seja associado ao modelo econômico, sem contudo considerá-lo em seu modelo. Os autores sugerem aumentar a freqüência de inspeção caso a probabilidade de itens defeituosos esteja acima de valor aceitável, no intervalo de inspeção considerado.

## 1.5 Controle *on-line* por Atributos com Erros de Classificação

Borges et al. (2001) estudaram o efeito dos erros de classificação no modelo de Taguchi. Os autores consideraram a probabilidade de classificar um item conforme como defeituoso ( $\alpha$ ) e a probabilidade

de classificar um item não-conforme como conforme ( $\beta$ ), concluindo que mesmo valores pequenos (da ordem de 1%) comprometem a determinação do intervalo ótimo entre inspeções, alterando o custo e a política ótima de inspeção. É um resultado justificável, já que a decisão de ajustar o processo é tomada com base na classificação de um único item. Para citar alguns outros exemplos, os erros de classificação associados ao controle de qualidade são abordados também em Johnson et al. (1991), Ranjan et al. (2003) e Wang (2007).

Há situações em que o item examinado é classificado repetida e independentemente  $r$  vezes e, em cada classificação, ele é avaliado como conforme ou não conforme. Esse procedimento é denominado classificações repetidas em um sistema de inspeção. Alguns autores propuseram seu uso empregando critérios diferenciados na classificação final do item inspecionado. Esse procedimento é proposto em Greenberg e Stokes (1995), admitindo-se apenas a existência do erro tipo I na determinação do número ótimo de classificações repetidas. Em Quinino e Suyama (2002), são realizadas  $r$  classificações repetidas no item inspecionado, que é declarado conforme se forem observadas pelo menos  $a$  classificações conformes. Os parâmetros  $a$  e  $r$  são determinados segundo uma abordagem econômica. Em Quinino e Ho (2004), os itens são examinados repetidamente até observar  $a$  classificações conformes e o item é declarado conforme ou  $b$  classificações não conformes, declarando-se o item não conforme. Para outros resultados, o procedimento de classificações repetidas continua. Adota-se abordagem econômica para determinação dos valores ótimos dos parâmetros  $a$  e  $b$ . Tais trabalhos não consideram, entretanto, a mudança da fração de itens conformes durante a produção. Trindade et al. (2007a) consideraram situações de inspeção em que é possível e viável economicamente a realização de testes independentes no item inspecionado e verificaram que a introdução desse procedimento pode reduzir o impacto dos erros de classificação. O modelo por atributos construído considera um sistema de classificação imperfeito, em que o item inspecionado é classificado independentemente  $r$  vezes, com a decisão final sobre o item sendo tomada com base nos resultados de classificação mais freqüente. A estratégia ótima consiste na minimização do custo médio do sistema de controle, através da determinação dos valores ótimos do intervalo entre inspeções ( $m$ ), do número de classificações repetidas ( $r$ ) e do número mínimo de classificações conformes, dentre as  $r$ , para julgar o item conforme ( $w$ ). O estudo efetuado introduziu o uso de cadeia de Markov para estados discretos



na modelagem. Entretanto essa proposta pode efetuar classificações desnecessárias na tomada de decisão sobre o item inspecionado. Quinino et al. (2010) propõem um procedimento sequencial de medidas repetidas, no sentido em que se classifica repetidamente o item inspecionado até serem observadas  $a$  classificações conformes ou  $b$ , não-conformes. O primeiro evento que ocorrer determina a classificação final do item em exame.

Em situações práticas, a redução do nível de qualidade pode continuar após a ocorrência de uma causa especial e o emprego exclusivo de critério econômico pode resultar em uma proporção alta de itens não-conformes enviados ao consumidor. Montgomery (Montgomery, 2004) sugere que funções de custo em processos de controle econômico devem ser otimizados através de restrição adequada de algum critério de desempenho estatístico. Saniga (1989) sugere o uso de restrições estatísticas em análises econômicas, para superar os problemas discutidos por Woodall (1986, 1987). Nayebpour e Woodall (1993) recomendam o aumento da frequência de amostragem se a fração esperada de itens defeituosos for inaceitavelmente alta para o intervalo de amostragem economicamente ótimo.

Estimativas viesadas dos parâmetros do processo e dos componentes de custo podem levar a perdas econômicas. Dasgupta e Mandal (2008) propuseram uma metodologia com abordagem Bayesiana para a estimação dos parâmetros probabilísticos do modelo de controle proposto por Nayebpour e Woodall (1993). O procedimento estima o parâmetro da distribuição geométrica do tempo de falha do processo e da fração de defeituosos após a mudança de estado do processo, aproveitando-se da disponibilidade de conhecimento especializado na operação do processo em monitoramento.

## 1.6 Objetivos propostos

A proposta deste trabalho é desenvolver modelos de controle *on-line* por atributos, com sistema de classificação imperfeito, em situações que o instante de mudança de estado do processo segue uma distribuição geométrica. Como o processo de produção ocorre em tempo discreto, utiliza-se a abordagem de cadeias de Markov em tempo discreto para estabelecer modelos probabilísticos e de custo. Os seguintes paradigmas clássicos do controle *on-line* de Taguchi para atributos foram

estendidos: intervalo de amostragem fixo, amostra unitária, horizonte finito, decisão dicotômica.

No Capítulo 2 é apresentado um planejamento econômico de sistema de controle em que o intervalo entre inspeções pode assumir dois valores,  $L$  e  $m$ , dependendo do resultado da última inspeção. O único item da amostra pode ser classificado repetidas vezes. Nesse sentido, o modelo generaliza o proposto por Trindade et al. (2007a).

A utilização de amostras de tamanho não-unitário ( $n \geq 1$ ) em controle *on-line* por atributos é desenvolvida no Capítulo 3. O modelo supõe uma única classificação do item inspecionado e considera que, durante a coleta de dois itens consecutivos, são produzidos  $d - 1$  itens que não serão inspecionados,  $d \geq 1$ . O modelo é uma generalização do sistema de controle proposto por Borges et al. (2001). Seu comportamento também é estudado se adotado intervalo de amostragem variável ( $L$  e  $m$ ).

O Capítulo 4 trata de sistema de controle de produção com horizonte infinito, com três níveis de decisão possíveis durante inspeção de amostra não-unitária. O modelo algébrico desenvolvido incorpora três valores de intervalo de amostragem e três tamanhos amostrais. É uma generalização do modelo proposto por Borges et al. (2001) e daqueles apresentados nos Capítulos 2 e 3. Os resultados preliminares indicam sua viabilidade de uso, com a possibilidade de utilização de um algoritmo genético para a otimização da função de custo unitário.

O Capítulo 5 apresenta um sistema de controle *on-line* por atributos da produção de pequeno lote, no sentido em que não se produza uma quantidade suficientemente grande de itens que assegure um horizonte infinito de produção. O sistema de controle proposto é uma generalização daquele apresentado por Borges et al. (2001).

O Capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho e indica algumas sugestões para continuidade desta pesquisa.

## Capítulo 2

# Controle *On-line* com Intervalo de Amostragem Variável

Seja um processo que produz itens individuais e independentes a cada unidade de tempo. Ele inicia-se operando sob controle e passa à condição fora de controle, em algum instante aleatório, devido a causa especial. No caso contínuo, a duração do processo sob controle é geralmente modelada por uma distribuição exponencial. A distribuição geométrica comporta-se de maneira similar à distribuição exponencial, mas é tipicamente usada no caso discreto, em que a duração é medida através do número de itens produzidos antes da mudança de estado do processo. Acompanhando artigos anteriores (Nayebpour e Woodall, 1993; Nandi e Sreehari, 1999; Jiang e Tsui, 2000; Borges et al., 2001; Ho et al., 2007; Trindade et al., 2007b; Dasgupta e Mandal, 2008; Ding e Gong, 2008), este trabalho utiliza uma distribuição geométrica com parâmetro  $\pi$ ,  $0 < \pi < 1$ , para descrever o tempo de falha do processo. Para garantir que a produção opere sob controle, a regra de monitoramento estabelece as situações em que se ajusta o processo, assegurando seu retorno à condição inicial. Os tempos entre ajustes sucessivos serão denominados ciclos de regeneração que são independentes entre si. A seqüência dos ciclos de regeneração constituem um processo de renovação. O objetivo é o estudo do comportamento assintótico desse processo, primordialmente o custo unitário por item produzido e enviado ao mercado. Apresenta-se a seguir proposta de controle *on-line* de processo por atributos, com erros de classificação que considera um tempo de espera até a primeira inspeção após ajuste ( $L$ ) maior que os demais intervalos entre inspeções ( $m$ ). No contexto desse trabalho, essa estratégia de monitoramento é denominada controle *on-line* por atributo com intervalo de

amostragem variável. Detalham-se abaixo suas hipóteses:

1. O processo de produção pode se encontrar em duas situações:
  - processo sob controle, quando a proporção de itens conformes produzidos é  $p_1$ ;
  - processo fora de controle, quando a proporção de itens conformes produzidos é  $p_2$ ; $p_1$  e  $p_2$  são constantes, com  $p_2 < p_1$ ;
2. O tempo de falha do processo segue uma distribuição geométrica com parâmetro  $\pi$ ;
3. Após a mudança de estado do processo, a proporção de itens conformes diminui de  $p_1$  para  $p_2$ ;
4. A proporção de itens conformes retorna a seu valor inicial,  $p_1$ , apenas após uma intervenção para ajuste do processo;
5. Para o monitoramento do processo, inspeciona-se um único item de acordo com o seguinte critério para sua coleta:
  - a primeira inspeção ocorre após a produção de  $L$  itens,  $L \geq m$ ;
  - após essa primeira inspeção, verifica-se um único item a cada  $m$  itens produzidos;
  - se a peça inspecionada for classificada como não-conforme, o processo é considerado fora de controle, sendo instantaneamente paralisado e ajustado para retornar ao estado de produção sob controle, após o que se produz novamente uma seqüência inicial de  $L$  até a próxima inspeção, repetindo-se o procedimento.
6. Os itens inspecionados são descartados;
7. O item é submetido a uma única classificação, cujo tempo de execução é considerado desprezível;
8. A inspeção está sujeita a erros de classificação, sendo  $\alpha$  a probabilidade de se classificar como não-conforme um item inspecionado realmente conforme e  $\beta$ , de classificar como conforme um item inspecionado realmente não-conforme;

9. O processo de produção é declarado fora de controle sempre que o item inspecionado for declarado não-conforme. Nesse caso, o processo é ajustado e a inspeção subsequente ocorrerá após a produção de  $L$  itens;
10. Caso o item inspecionado seja classificado como conforme, não se intervém no processo e a próxima inspeção ocorrerá após a produção de  $m$  itens.

Esta abordagem poderá resultar em um custo médio do sistema de controle por item produzido menor que aquele obtido ao empregar-se, um intervalo entre inspeções fixo ( $m$ ), como utilizado nos artigos citados anteriormente. A idéia básica é que, após um ajuste, o processo certamente se inicia sob controle e seria mais econômico e razoável esperar mais tempo para executar a primeira inspeção. Dessa maneira, ela é efetuada somente após a produção de  $L$  itens. Além disso, quando o item inspecionado é declarado conforme, decidindo-se pela não intervenção no processo, há uma incerteza de que o processo poderia estar fora de controle, mesmo que o item sob inspeção seja realmente conforme, que levaria a inspecionar em um intervalo de tempo menor que  $L$ . A figura 2.1 apresenta o fluxograma do sistema de monitoramento e das regras de decisão do método proposto, cujos passos estão descritos a seguir:

- (i) O processo inicia e inspeciona-se o  $L$ -ésimo item produzido;
- (ii) Se o item inspecionado é não-conforme, o processo é ajustado, retornando-se ao passo (i);
- (iii) Se o item inspecionado é conforme, a produção prossegue e inspeciona-se o  $m$ -ésimo item produzido. Esse monitoramento continua até se observar um item não-conforme. Nesse caso, retorna-se ao passo (i).

O período de tempo entre duas inspeções sucessivas será denominado ciclo de monitoramento (ou ciclo de inspeção ou simplesmente ciclo), diferenciando-o do ciclo de regeneração citado anteriormente.

## 2.1 Modelo probabilístico

Associam-se três variáveis aleatórias ao item sob inspeção:

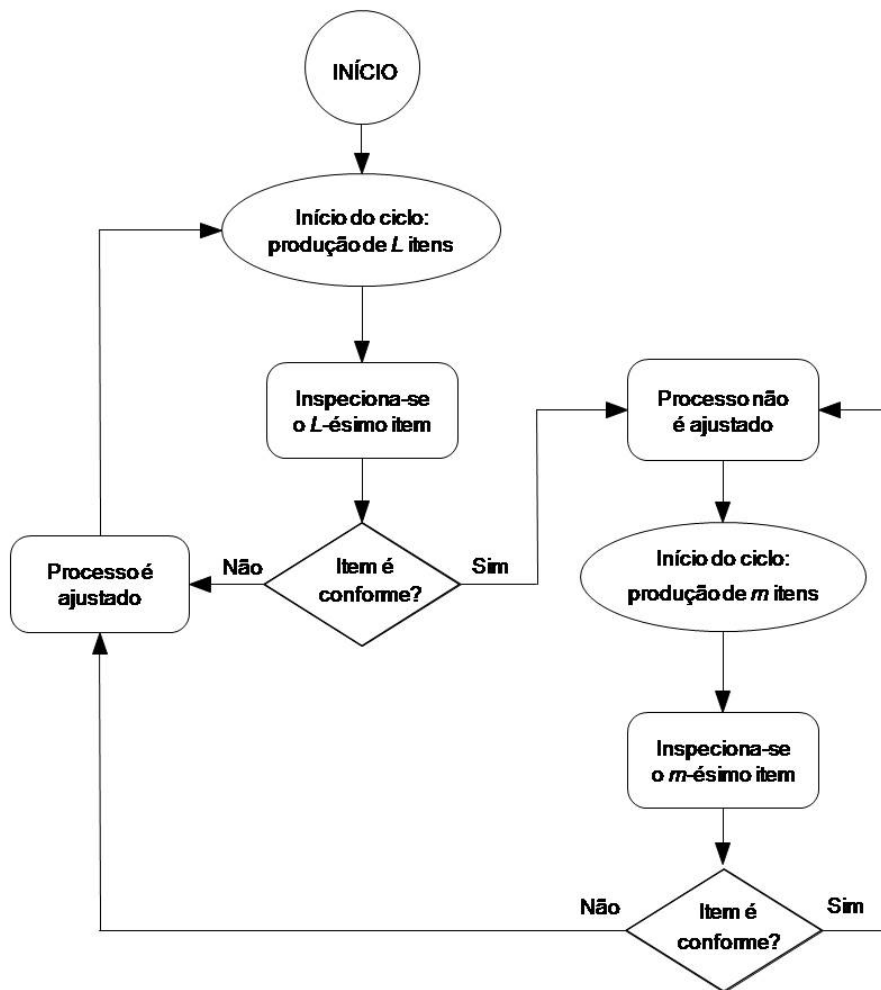


Figura 2.1: Fluxograma do processo (intervenção e controle).

- $X$  é a variável aleatória indicadora da real condição de conformidade do item, não sendo observável ( $X = 1$ , item conforme;  $X = 0$ , item não-conforme);
- $Y$  é a variável aleatória indicadora do resultado da classificação do item ( $Y = 1$ , classificação conforme;  $Y = 0$ , classificação não-conforme);
- $Z$  é a variável aleatória indicadora da situação do processo no instante de produção do item ( $Z = 1$ , processo de produção sob controle;  $Z = 0$ , processo de produção fora de controle).

As variáveis aleatórias  $X$  e  $Z$  não são observáveis. Têm-se que:

$$P\{X = 1|Z = 1\} = p_1 \quad (2.1a)$$

$$P\{X = 1|Z = 0\} = p_2. \quad (2.1b)$$

Por outro lado, a probabilidade de um item ser declarado conforme, dado que ele seja realmente conforme é:

$$P\{Y = 1|X = 1\} = 1 - \alpha \quad (2.2)$$

e, a probabilidade de um item realmente não-conforme ser declarado conforme é:

$$P\{Y = 1|X = 0\} = \beta. \quad (2.3)$$

Assim, caso o processo de produção esteja sob controle, a probabilidade de não se ajustar o processo é:

$$\begin{aligned} P\{Y = 1|Z = 1\} &= \sum_{i=0}^1 P\{Y = 1, X = i|Z = 1\} \\ &= \sum_{i=0}^1 P\{X = i|Z = 1\} P\{Y = 1|X = i, Z = 1\} \\ &= p_1(1 - \alpha) + (1 - p_1)\beta \end{aligned}$$

Similarmente, quando o processo de produção estiver fora de controle, de (2.1b), (2.2) e (2.3), tem-se que:

$$P\{Y = 1|Z = 0\} = p_2(1 - \alpha) + (1 - p_2)\beta$$

A partir deste ponto, convencionamos que:

$$p_A = P\{Y = 1|Z = 1\} = p_1(1 - \alpha) + (1 - p_1)\beta \quad (2.4)$$

e

$$p_D = P\{Y = 1|Z = 0\} = p_2(1 - \alpha) + (1 - p_2)\beta. \quad (2.5)$$

## 2.2 A cadeia de Markov

O processo de produção, o monitoramento e a regra de decisão sobre o ajuste em cada ciclo de inspeção podem ser modelados como uma cadeia de Markov em tempo discreto, em que cada passo da cadeia representa um ciclo. Os estados da cadeia descrevem as várias combinações da situação do processo ao final de um ciclo e da conseqüente decisão. Um par ordenado  $(w, s)$  representa o estado no qual  $w$  relaciona-se com as situações possíveis de mudança do estado do processo e  $s$ , a decisão sobre o ajuste. O espaço de estados da cadeia é finito e é dado por:

$$E = \{(w, s); w = 0, 1, 2 \text{ e } s = 0, 1\} \quad (2.6)$$

em que:

- $w = 0$ , o processo está sob controle até o final do ciclo corrente;  $w = 1$ , ao final do ciclo, o processo de produção está fora de controle e a mudança de estado ocorreu durante o ciclo corrente;  $w = 2$ , ao final do ciclo, o processo está fora de controle e a mudança de estado ocorreu antes do início do ciclo corrente;
- $s = 1$ , decide-se não ajustar o processo de produção e  $s = 0$ , intervém-se no processo para ajustá-lo.

A Figura 2.2 relaciona o processo de produção aos estados da cadeia.

As probabilidades de transição entre os estados são denotadas por  $P_{(w_{i-1}, s_{i-1}), (w_i, s_i)}$  em que  $(w_i, s_i)$  é o estado da cadeia no  $i$ -ésimo ciclo de monitoramento. Para ilustrar,  $P_{(1,1),(2,0)}$  representa a probabilidade de que o processo seja ajustado no ciclo corrente [estado:(2,0)], dado que ocorreu mudança do processo no ciclo imediatamente anterior, sem que tenha ocorrido intervenção no processo ao final da inspeção [estado (1,1)].



A matriz de probabilidades de transição  $\mathbf{P}$  é:

$$\begin{bmatrix} P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} \\ P_{(0,1),(0,0)} & P_{(0,1),(0,1)} & P_{(0,1),(1,0)} & P_{(0,1),(1,1)} & P_{(0,1),(2,0)} & P_{(0,1),(2,1)} \\ P_{(1,0),(0,0)} & P_{(1,0),(0,1)} & P_{(1,0),(1,0)} & P_{(1,0),(1,1)} & P_{(1,0),(2,0)} & P_{(1,0),(2,1)} \\ P_{(1,1),(0,0)} & P_{(1,1),(0,1)} & P_{(1,1),(1,0)} & P_{(1,1),(1,1)} & P_{(1,1),(2,0)} & P_{(1,1),(2,1)} \\ P_{(2,0),(0,0)} & P_{(2,0),(0,1)} & P_{(2,0),(1,0)} & P_{(2,0),(1,1)} & P_{(2,0),(2,0)} & P_{(2,0),(2,1)} \\ P_{(2,1),(0,0)} & P_{(2,1),(0,1)} & P_{(2,1),(1,0)} & P_{(2,1),(1,1)} & P_{(2,1),(2,0)} & P_{(2,1),(2,1)} \end{bmatrix}$$

Após um ajuste ( $s = 0$ ), o processo de produção retorna à sua condição inicial, operando sob

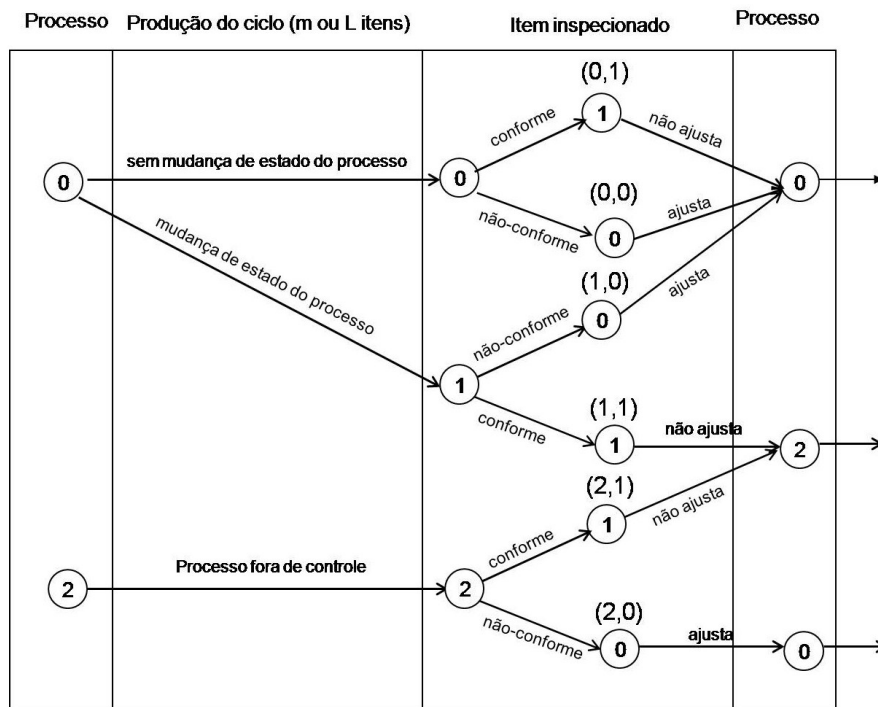


Figura 2.2: Diagrama do processo de monitoramento.

controle. Assim, são possíveis transições apenas para os estados indexados por  $w = 0$  ou  $w = 1$ , em ciclos de comprimento  $L$ . A probabilidade de o processo permanecer sob controle no ciclo corrente é:

$$P \{Z_1 = 1, Z_2 = 1, \dots, Z_L = 1 | Z_0 = 1\} = (1 - \pi)^L$$

onde  $Z_0$  representa a situação do processo produtivo no instante zero. Empregando a expressão (2.4), as probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2$ , para os estados  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$  são, respectivamente:

$$P_{(w,0),(0,0)} = (1 - \pi)^L(1 - p_A) \quad (2.7)$$

e

$$P_{(w,0),(0,1)} = (1 - \pi)^L p_A.$$

Por sua vez, a probabilidade de ocorrer uma mudança na fração de itens conformes no ciclo subsequente a um ajuste é  $1 - (1 - \pi)^L$ . Associando-a à expressão (2.5), obtemos as probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2$ , para os estados  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ , que são respectivamente:

$$P_{(w,0),(1,0)} = [1 - (1 - \pi)^L] (1 - p_D)$$

e

$$P_{(w,0),(1,1)} = [1 - (1 - \pi)^L] p_D.$$

Além disso, imediatamente após ajuste do processo, não são possíveis transições para estados em que  $w = 2$ . Assim,

$$P_{(w,0),(2,s)} = 0, \text{ para } w = 0, 1, 2; s = 0, 1.$$

A partir do estado  $(0, 1)$ , em que o processo está sob controle e o item inspecionado é declarado conforme, são possíveis transições para os estados  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ , em ciclo de comprimento  $m$ . Nesse caso, a probabilidade de o processo continuar operando sob controle é  $(1 - \pi)^m$ . Usando (2.4), as probabilidades de transição do estado  $(0, 1)$  para os estados  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$  são, respectivamente:

$$P_{(0,1),(0,0)} = (1 - \pi)^m(1 - p_A)$$

e

$$P_{(0,1),(0,1)} = (1 - \pi)^m p_A.$$

A probabilidade de mudança de estado do processo no ciclo corrente é  $1 - (1 - \pi)^m$ . Usando (2.5), as probabilidades de transição para os estados  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$  são, respectivamente:

$$P_{(0,1),(1,0)} = [1 - (1 - \pi)^m] (1 - p_D)$$

e

$$P_{(0,1),(1,1)} = [1 - (1 - \pi)^m] p_D.$$

Similarmente aos casos anteriores, não são possíveis as transições do estado  $(0, 1)$  para os estados  $(2, 0)$  e  $(2, 1)$ , ou seja:

$$P_{(0,1),(2,s)} = 0, \text{ para } s = 0, 1.$$

Para se atingir os estados  $(2, 0)$  e  $(2, 1)$  é necessário que, no ciclo anterior, o processo esteja fora de controle, ( $w > 0$ ), e que o item inspecionado seja declarado conforme ( $s = 1$ ). Assim, para  $w = 1, 2$ , têm-se que:

$$P_{(w,1),(2,0)} = 1 - p_D$$

e

$$P_{(w,1),(2,1)} = p_D.$$

Conseqüentemente, não são possíveis outras transições que não essas, a partir de estados em que  $w > 0$  e  $s = 1$ . Assim:

$$P_{(w,1),(0,s)} = P_{(w,1),(1,s)} = 0, \text{ para } w = 1, 2; s = 0, 1.$$

Introduzindo as probabilidades acima, a matriz  $\mathbf{P}$  é reescrita como:

$$\begin{bmatrix} P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,1),(0,0)} & P_{(0,1),(0,1)} & P_{(0,1),(1,0)} & P_{(0,1),(1,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(2,0)} & P_{(1,1),(2,1)} \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(2,0)} & P_{(1,1),(2,1)} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

### 2.3 Distribuição estacionária da cadeia

A matriz de transição  $\mathbf{P}$  é irredutível e aperiódica, podendo-se obter sua distribuição invariante, denotada pelo vetor:

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi(w, s); w = 0, 1, 2; s = 0, 1]', \text{ com } \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) = 1. \quad (2.9)$$

A probabilidade  $\pi(w, s)$  pode ser vista como a proporção de tempo que o sistema de produção visita o estado  $(w, s)$ , após um número suficientemente grande de inspeções.

O vetor  $\boldsymbol{\pi}$  é a solução do sistema de equações lineares  $\boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{\pi}' \mathbf{P}$  que pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}' (\mathbf{P} - \mathbf{I}) &= \mathbf{0}', \text{ ou} \\ (\mathbf{P}' - \mathbf{I}) \boldsymbol{\pi} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.10)$$

em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade,  $\mathbf{0}$ , o vetor nulo e  $\mathbf{P}'$  é a transposta de  $\mathbf{P}$ .

Portanto, o vetor  $\boldsymbol{\pi}$  pode ser obtido a partir da resolução do sistema linear (2.10) com a restrição dada em (2.9). Pela dimensão do sistema, a solução pode ser rapidamente obtida utilizando-se de técnica numérica disponível.

Além disso, é necessária a determinação da proporção de ciclos de comprimento  $L$  ou  $m$ , de cada estado da cadeia de Markov, para um número suficientemente grande de inspeções. Sejam  $p_L(w, s)$ ,

a probabilidade de o intervalo de amostragem ter comprimento  $L$ , dado que o estado seja  $(w, s)$  e  $p_m(w, s)$ , se o ciclo de monitoramento tiver comprimento  $m$ , com  $p_m(w, s) = 1 - p_L(w, s)$ .

O comprimento do intervalo de amostragem é  $L$  apenas quando se decide intervir no processo no ciclo imediatamente anterior. Essa situação corresponde às linhas da matriz  $\mathbf{P}$ , com  $s = 0$ . Por exemplo,  $p_L(0, 0)$  denota a probabilidade de o ciclo corrente ter comprimento  $L$ , dado que seu estado é  $(0, 0)$ . É necessário que o último item inspecionado tenha sido declarado não-conforme, ou seja,  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(2, 0)$  são os possíveis estados do ciclo de monitoramento imediatamente anterior. Especificamente:

$$p_L(0, 0) = \sum_{k=0}^2 P \{ (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k, 0) | (W_i, S_i) = (0, 0) \}, \quad (2.11)$$

em que  $(W_i, S_i)$  é a variável aleatória associada ao estado da cadeia de Markov da  $i$ -ésima inspeção. Aplicando o teorema de Bayes no segundo termo de (2.11) obtém-se:

$$\frac{\sum_{k=0}^2 P \{ (W_i, S_i) = (0, 0) | (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k, 0) \} P \{ (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k, 0) \}}{P \{ (W_i, S_i) = (0, 0) \}} \quad (2.12)$$

onde  $P \{ (W_i, S_i) = (0, 0) | (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k, 0) \}$  é a probabilidade de transição  $P_{(k,0),(0,0)}$ ,  $k = 0, 1, 2$ , dada por (2.7). Das propriedades da distribuição estacionária, tem-se que:

$$P \{ (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k, 0) \} = P \{ (W_i, S_i) = (k, 0) \} = \pi(k, 0)$$

Dessa maneira, segue de (2.12) que:

$$p_L(0, 0) = \frac{[\pi_{(0,0)} + \pi_{(1,0)} + \pi_{(2,0)}] P_{(0,0),(0,0)}}{\pi_{(0,0)}}$$

De maneira similar, obtêm-se os demais valores de  $p_L(w, s)$ :

$$\begin{aligned}
p_L(0, 1) &= \frac{[\pi(0,0) + \pi(1,0) + \pi(2,0)] P_{(0,0),(0,1)}}{\pi(0,1)} \\
p_L(1, 0) &= \frac{[\pi(0,0) + \pi(1,0) + \pi(2,0)] P_{(0,0),(1,0)}}{\pi(1,0)} \\
p_L(1, 1) &= \frac{[\pi(0,0) + \pi(1,0) + \pi(2,0)] P_{(0,0),(1,1)}}{\pi(1,1)} \\
p_L(2, 0) &= p_L(2, 1) = 0
\end{aligned}$$

## 2.4 Custos dos estados da cadeia

A estrutura de custo considerada é similar àquela adotada por Trindade et al. (2007a) e em trabalhos anteriores. Consideram três componentes de custo: inspeção, ajuste e envio de item não-conforme ao mercado. Adotamos a seguinte notação:

$c_{insp}$ , é o custo de classificação de um item inspecionado;

$c_{nc}$ , é o custo de item defeituoso que segue para o consumidor final ou para as próximas etapas do processo;

$c_{s-nc}$ , é o custo de descartar item não-conforme;

$c_{s-c}$ , é o custo de descartar item conforme;

$c_a$ , é o custo de ajustar o processo.

Os componentes  $c_{s-nc}$  e  $c_{s-c}$  são usados nas situações em que os itens descartados são submetidos a processo de reaproveitamento com custos diferenciados entre itens conformes e não-conformes. No caso de os itens inspecionados serem simplesmente descartados, deve-se utilizar o custo unitário de produção, desconsiderado o sistema de controle.

A expressão geral do custo esperado de cada estado  $(w, s)$ ,  $w = 0, 1, 2$  e  $s = 0, 1$  é dada por:

$$\phi(w, s) = c_{insp} + \xi(w, s) + \theta(w, s) + \varphi(w, s)$$

em que:

$c_{insp}$ , é o custo da única classificação do item inspecionado e está presente em todos os estados da cadeia;

$\xi(w, s)$ , é o custo esperado por ciclo referente aos itens não-conformes dentre os  $m - 1$  ou  $L - 1$  itens não inspecionados que são enviados ao mercado ou às próximas etapas da produção;

$\theta(w, s)$ , é o custo esperado por ciclo relacionado ao item inspecionado, descartado;

$\varphi(w, s)$ , é o custo de ajuste do processo de produção por ciclo. Para  $\forall w \in E$ , tem-se que:

$$\varphi(w, s) = \begin{cases} c_a, & \text{se } s = 0 \\ 0, & \text{se } s = 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

#### 2.4.1 Custo dos estados $(0, 0)$ e $(0, 1)$ :

Quando o processo alcança o estado  $(0, 1)$ , ele opera sob controle. O comprimento do ciclo depende da decisão de ajustar ou não o processo no ciclo imediatamente anterior. O número esperado de itens não inspecionados defeituosos por ciclo é  $p_m(0, 1)(m - 1)(1 - p_1) + p_L(0, 1)(L - 1)(1 - p_1)$ . Seu custo esperado é:

$$\xi(0, 1) = c_{nc} \{p_m(0, 1)(m - 1)(1 - p_1) + p_L(0, 1)(L - 1)(1 - p_1)\} \quad (2.14)$$

O item inspecionado é classificado como conforme, mas, devido aos erros de classificação, ele pode ser realmente conforme ou não-conforme. A probabilidade de o item inspecionado, declarado conforme, ser realmente conforme é:

$$\begin{aligned} P\{X = 1|Y = 1, Z = 1\} &= \frac{P\{X = 1, Y = 1|Z = 1\}}{P\{Y = 1|Z = 1\}} \\ &= \frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

e de ser realmente não-conforme é:

$$P\{X = 0|Y = 1, Z = 1\} = \frac{(1 - p_1)\beta}{p_A}. \quad (2.16)$$

O custo médio relacionado a esse descarte é:

$$\theta(0, 1) = c_{s-c} \frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A} + c_{s-nc} \frac{(1 - p_1)\beta}{p_A}. \quad (2.17)$$

Associando com a expressão (2.13), obtém-se o custo médio do sistema de controle do estado (0, 1):

$$\phi(0, 1) = c_{insp} + \xi(0, 1) + \theta(0, 1)$$

Para o estado (0, 0), todos os itens são produzidos com o processo sob controle, assim o número esperado de itens não-conformes enviados ao mercado é similar àquele calculado para o estado (0, 1), conseqüentemente:

$$\xi(0, 0) = c_{nc} \{p_m(0, 0) (m - 1)(1 - p_1) + p_L(0, 0) (L - 1)(1 - p_1)\} \quad (2.18)$$

Dado que o item inspecionado é classificado como não-conforme, as probabilidades de o item inspecionado ser realmente conforme, ou realmente não-conforme, são, respectivamente:

$$P\{X = 1|Y = 0, Z = 1\} = \frac{p_1\alpha}{1 - p_A},$$

e

$$P\{X = 0|Y = 0, Z = 1\} = \frac{(1 - p_1)\beta}{1 - p_A}.$$

O custo médio do descarte do item inspecionado é:

$$\theta(0, 0) = c_{s-c} \frac{p_1\alpha}{1 - p_A} + c_{s-nc} \frac{(1 - p_1)(1 - \beta)}{1 - p_A} \quad (2.19)$$

Considerando-se também (2.13), tem-se que o custo médio do sistema de controle neste estado é:



$$\phi(0, 0) = c_{insp} + \xi(0, 0) + \theta(0, 0) + c_a$$

### 2.4.2 Custo dos estados (1, 0) e (1, 1):

Quando a fração de conformidade se modifica durante o ciclo corrente, pelo menos o item inspecionado é produzido com o processo fora de controle. O ponto de mudança pode ocorrer em qualquer instante entre o primeiro e o último item produzido durante o ciclo. Em ciclos com intervalo entre amostragens de comprimento  $m$ , a probabilidade de a mudança de estado ocorrer no instante  $t$  é dado por:

$$q_m(t) = \frac{(1 - \pi)^{t-1} \pi}{1 - (1 - \pi)^m}, \quad t = 1, \dots, m.$$

Analogamente, quando o intervalo entre inspeções tem comprimento  $L$ , esta probabilidade é:

$$q_L(t) = \frac{(1 - \pi)^{t-1} \pi}{1 - (1 - \pi)^L}, \quad t = 1, \dots, L.$$

Portanto, para os estados em que  $w = 1$ , o custo médio relacionado com os itens não-conformes enviados ao mercado é:

$$\begin{aligned} \xi(1, s) = c_{nc} \left\{ p_m(1, s) \sum_{t=1}^m q_m(t) [(t-1)(1-p_1) + (m-t)(1-p_2)] + \right. \\ \left. + p_L(1, s) \sum_{t=1}^L q_L(t) [(t-1)(1-p_1) + (L-t)(1-p_2)] \right\} \quad s = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

O custo médio de descarte do item inspecionado dos estados (1, 0) e (1, 1) são similares, respectivamente, à (2.19) e à (2.17), exceto pela fração de conformidade do processo de produção que diminui para  $p_2$ . Esses custos são dados, respectivamente, por:

$$\theta(1, 0) = c_{s.c} \frac{p_2 \alpha}{1 - p_D} + c_{s.nc} \frac{(1 - p_2)(1 - \beta)}{1 - p_D},$$

e

$$\theta(1, 1) = c_{s-c} \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} + c_{s-nc} \frac{(1-p_2)\beta}{p_D}.$$

Os custos esperados do sistema de controle dos estados (1, 0) e (1, 1) são respectivamente:

$$\phi(1, 0) = c_{insp} + \xi(1, 0) + \theta(1, 0) + c_a,$$

e

$$\phi(1, 1) = c_{insp} + \xi(1, 1) + \theta(1, 1)$$

### 2.4.3 Custo dos estados (2, 0) e (2, 1)

Neste caso, os custos médios são similares àqueles apresentado na subseção 2.4.1, mas com o processo de produção que opera fora de controle desde ciclos anteriores. O comprimento do ciclo é fixo e igual a  $m$ . Assim, os custos esperados relacionados ao estado (2, 0) são:

$$\begin{aligned} \xi(2, 0) &= c_{nc}(1-p_2)(m-1) \\ \theta(2, 0) &= c_{s-c} \frac{p_2\alpha}{1-p_D} + c_{s-nc} \frac{(1-p_2)(1-\beta)}{1-p_D} \\ \phi(2, 0) &= c_{insp} + \xi(2, 0) + \theta(2, 0) + c_a, \end{aligned}$$

e, para o estado (2, 1), são:

$$\begin{aligned} \xi(2, 1) &= \xi(2, 0) \\ \theta(2, 1) &= c_{s-c} \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} + c_{s-nc} \frac{(1-p_2)\beta}{p_D} \\ \phi(2, 1) &= c_{insp} + \xi(2, 1) + \theta(2, 1). \end{aligned}$$

## 2.5 Custo médio da produção

Seja o processo de renovação  $\{N(t), t \geq 0\}$  que conta a quantidade de ajustes do processo até a produção do  $t$ -ésimo item. Considere  $\Phi_i^*$  e  $T_i^*$ ,  $i \geq 1$ , variáveis aleatórias associadas, respectivamente,

ao custo e à quantidade de itens produzidos no  $i$ -ésimo ciclo de regeneração do processo.  $\{\Phi_i^*\}_{i \geq 1}$  e  $\{T_i^*\}_{i \geq 1}$  são seqüências de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com esperanças finitas  $E(\Phi^*)$  e  $E(T^*)$ , respectivamente. Define-se:

$$\Phi^*(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \Phi_i^*.$$

Pelo Teorema da Renovação, tem-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi^*(t)}{t} = \frac{E(\Phi^*)}{E(T^*)}$$

ou seja, após um número suficientemente grande de itens produzidos, o custo médio do sistema de controle por item enviado ao mercado é igual à razão entre o custo médio do sistema de controle e a quantidade média de itens enviados ao mercado, por ciclo de regeneração.

Considere agora as variáveis aleatórias  $\Phi_j$  e  $T_j$ ,  $j \geq 1$  associadas, respectivamente, ao custo e à quantidade de itens produzidos no  $j$ -ésimo ciclo de monitoramento do processo. A esperança de  $\Phi_j$  condicionada ao estado da cadeia de Markov da  $j$ -ésima inspeção é:

$$E[\Phi_j | (W_j, S_j)] = \sum_{(w,s) \in E} \phi(w, s) 1_{\{(w,s)\}}(j)$$

em que  $1_{\{(w,s)\}}(j)$  é a variável aleatória indicadora de a cadeia atingir o estado  $(w, s)$  na  $j$ -ésima inspeção. Assim, a cada estado da cadeia de Markov está associada uma seqüência de variáveis aleatórias condicionalmente independentes e identicamente distribuídas.

Por sua vez, a quantidade de itens enviados ao mercado no  $j$ -ésimo ciclo de inspeção é:

$$T_j = m - 1 + (L - m)1_{\{L\}}(j), \quad (2.21)$$

em que  $1_{\{L\}}(j)$  é a variável aleatória indicadora da ocorrência de ajuste na  $(j - 1)$ -ésima inspeção.

Seja  $h$  a quantidade de inspeções até a ocorrência do  $k$ -ésimo ajuste,  $h \geq k$ . O custo total após  $k$  ajustes é a soma dos custos das  $h$  inspeções realizadas, ou seja:

$$\sum_{i=1}^k \Phi_i^* = \sum_{j=1}^h \Phi_j \quad (2.22)$$

e, igualmente:

$$\sum_{i=1}^k T_i^* = \sum_{j=1}^h T_j \quad (2.23)$$

Como  $k \leq h$ , então  $k \rightarrow \infty \Rightarrow h \rightarrow \infty$  e das equações (2.22) e (2.23), tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{E(\Phi^*)}{E(T^*)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k \Phi_i^*}{\sum_{i=1}^k T_i^*} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^h \Phi_j}{\sum_{j=1}^h T_j} \\ &= \frac{\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h \Phi_j}{\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h T_j} \end{aligned}$$

De (2.21) e expressando  $\Phi_j$  como:

$$\sum_{(w,s) \in E} \Phi_j 1_{\{(w,s)\}}(j),$$

obtem-se:

$$\frac{E(\Phi^*)}{E(T^*)} = \frac{\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h \sum_{(w,s) \in E} \Phi_j 1_{\{(w,s)\}}(j)}{\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h [m - 1 + (L - m) 1_{\{L\}}(j)]}. \quad (2.24)$$

Desenvolve-se o numerador de (2.24) como:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{(w,s) \in E} \frac{\sum_{j=1}^h \Phi_j 1_{\{(w,s)\}}(j)}{h(w,s)} \frac{h(w,s)}{h},$$

em que

$$h(w, s) = \sum_{j=1}^h 1_{\{(w,s)\}}(j)$$

é a quantidade de vezes que a cadeia alcançou o estado  $(w, s)$  durante as  $h$  inspeções. Dado o estado  $(w, s)$ ,  $\Phi_j$  é uma seqüência de  $h(w, s)$  variáveis aleatórias condicionalmente independentes e identicamente distribuídas. A aplicação da Lei dos Grandes Números leva a:

$$\frac{\sum_{j=1}^h \Phi_j 1_{\{(w,s)\}}(j)}{h(w, s)} \rightarrow E [\Phi_j | 1_{\{(w,s)\}} = 1] = \phi(w, s),$$

para  $h \rightarrow \infty$ .

Por sua vez, pelo Teorema Ergódico tem-se que, quando  $h \rightarrow \infty$ :

$$\frac{h(w, s)}{h} \rightarrow \pi(w, s),$$

e

$$\frac{\sum_{j=1}^h [m - 1 + (L - m)1_{\{L\}}(j)]}{h} \rightarrow m - 1 + (L - m) \sum_{w=0}^2 \pi(w, 0).$$

Assim,

$$\frac{E(\Phi^*)}{E(T^*)} = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \phi(w, s) \pi(w, s)}{m - 1 + (L - m) \sum_{w=0}^2 \pi(w, 0)}. \quad (2.25)$$

O numerador de (2.25) é o custo médio do sistema de controle por ciclo de monitoramento:

$$E(\Phi) = \sum_{(w,s) \in E} \phi(w, s) \pi(w, s).$$

O denominador, por sua vez, é a quantidade média de itens enviados ao consumidor por ciclo de monitoramento e pode ser expresso como:

$$E(T) = \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) [(L - 1)p_L(w, s) + (m - 1)p_m(w, s)]$$

Assim, para uma quantidade suficientemente grande de itens produzidos, o custo médio do sistema de controle, por item enviado ao mercado é:

$$\begin{aligned} C(m, L) &= \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) \phi(w, s)}{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) [(L-1)p_L(w, s) + (m-1)p_m(w, s)]} \\ &= \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) [c_{insp} + \xi(w, s) + \theta(w, s) + \varphi(w, s)]}{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) [(L-1)p_L(w, s) + (m-1)p_m(w, s)]} \end{aligned}$$

A determinação dos intervalos amostrais  $m$  e  $L$  tais que minimizem  $C(m, L)$  é a solução do problema, expressa como:

$$(m^0, L^0) = \arg \min_{(m,L)} C(m, L)$$

## 2.6 Aplicação numérica e análise de sensibilidade

O exemplo descrito nesta seção baseia-se em Trindade et al. (2007b), Nandi e Sreehari (1999), Taguchi et al. (1989) e em casos reais relatados em Dasgupta (2003) e Taguchi et al. (2004). A motivação dessa escolha é sua simplicidade e sua facilidade de adequação a outras aplicações. Outros exemplos podem incluir aplicações em manutenção preventiva na produção de semicondutores, produção de diodos em placas de circuito impressas e em processos químicos. Geralmente, o procedimento discutido aqui pode melhorar processos de alta qualidade que empregam algum tipo de controle automático através da coleta de observações individuais.

A fabricação de circuitos integrados de alto volume apresenta dificuldades com o processo de solda, tais como insuficiência ou excesso de solda, projeção de solda ou posicionamento incorreto de dispositivo ou filete. Dados históricos permitem adotar, em um processo de solda,  $p_1 = 0,999$  como a probabilidade de conformidade do processo sob controle, podendo-se usar uma distribuição geométrica com parâmetro  $\pi = 0,0001$  para descrever a mudança de estado do processo, operando fora de controle, com fração de conformidade  $p_2 = 0,95$ . O sistema automático de inspeção por raio X instalado na linha de produção é imperfeito, assumindo-se os erros de inspeção  $\alpha = \beta = 0,01$ . Os componentes de custo são estimados em  $c_{insp} = \$0,25$ ,  $c_{nc} = \$20$ ,  $c_{s_{nc}} = \$2$ ,  $c_{s_c} = \$2$  e  $c_a = \$100$ .

Desenvolveu-se um programa em Matlab<sup>®</sup> para calcular os valores ótimos (ver Apêndice A). O objetivo é encontrar os valores ótimos de  $m$  e  $L$ .

A figura 2.3 mostra as curvas do custo esperado versus o intervalo de amostragem  $m$  para  $L = 50$ ,  $L = 51$ ,  $L = 896$  e  $L = 2000$ . A melhor política de controle é  $m^0 = 41$  e  $L^0 = 896$  implicando um custo unitário de \$0,16231. Caso seja utilizado o intervalo fixo entre inspeções ( $m$ ), conforme proposto em artigos anteriores, tais como, Nayeypour e Woodall (1993), Borges et al. (2001), Trindade et al. (2007b), Ho et al. (2007), o intervalo de amostragem ótimo é  $m^0 = 51$ , que fornece um custo médio de \$0,17046 por unidade, portanto 5,02% maior que o proposto neste trabalho.

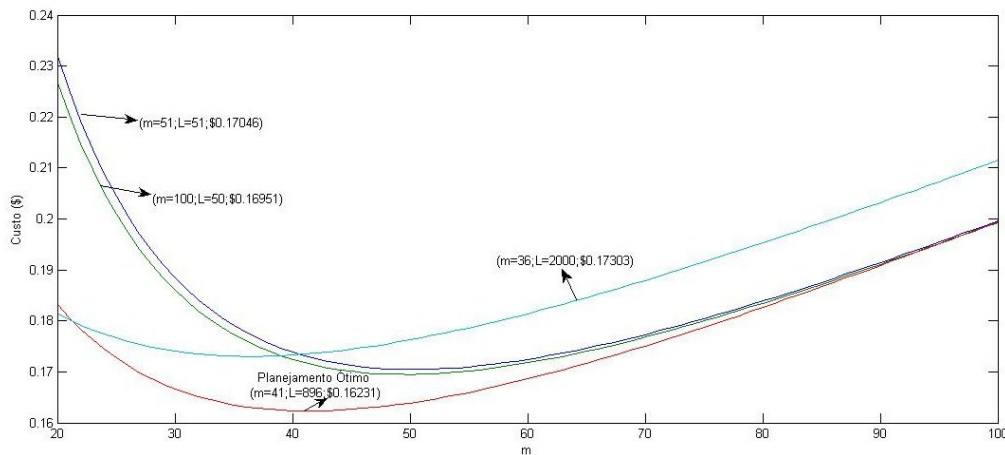


Figura 2.3: Gráficos do custo médio *vs.*  $m$  e  $L$ .

### 2.6.1 O impacto dos erros de classificação, de $\pi$ e de $p_2$

Para verificação da sensibilidade dos resultados, analisou-se o comportamento dos valores ótimos relativos ao sistema de monitoramento, variando-se um parâmetro do modelo de cada vez, em um intervalo arbitrariamente grande, mantendo-se os demais valores constantes e iguais àqueles descritos no exemplo numérico apresentado no início desta seção. A figura 2.4 ilustra a influência dos erros de classificação, de  $\pi$  e de  $p_2$  sobre os valores ótimos de  $m$ ,  $L$  e do custo.

A redução da fração de itens conformes produzidos com o processo de produção fora de controle ( $p_2$ )

resulta em uma aproximação entre os valores ótimos de  $L$  e  $m$ , como ilustrado na Figura 2.4. Esse resultado salienta que a política de controle proposta neste trabalho apresenta melhores resultados quando  $p_2$  não é muito menor que  $p_1 \approx 1$ , como exigido por processos de alta qualidade. Essa observação é razoável já que, quando  $p_2 \rightarrow 0$ , diminui-se a incerteza de a classificação do item inspecionado indicar o real estado do processo de produção.

Como observado na Figura 2.4, um aumento de  $\pi$  leva a uma redução dos intervalos de amostragem

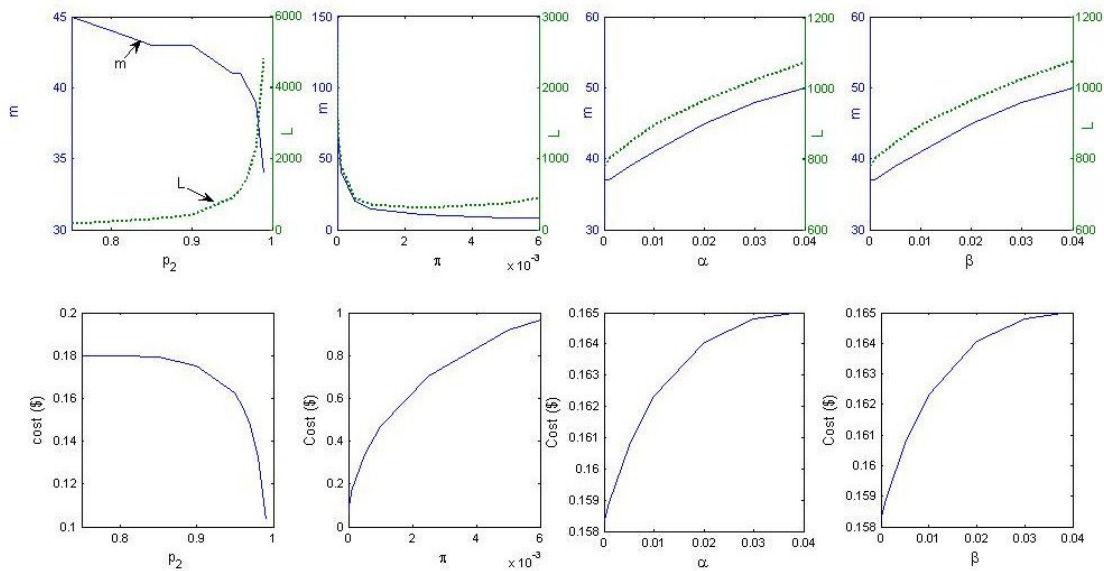


Figura 2.4: Gráficos do custo e valores ótimos de  $m$  e  $L$  vs.  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\pi$  e  $p_2$ .

( $L^0$  e  $m^0$ ), implicando, assim, maior tempo com o processo de produção sob controle. Entretanto, o grau de complexidade de entendimento da situação é maior, pois ajustes mais freqüentes podem ser mais dispendiosos que o custo de enviar itens não-conformes ao mercado, principalmente se o custo do ajuste é alto. Ao contrário do que seria esperado, pode ser mais econômico uma política de controle com uma freqüência menor de inspeções (aumento do intervalo entre inspeções).

Na análise de sensibilidade dos erros de classificação (Fig. 2.4), percebe-se que com o crescimento da probabilidade de erro de classificação, aumentam os valores ótimos de  $L$  e  $m$ . Quanto maior o erro de classificação, mais alta a probabilidade de equívoco. Assim, os valores maiores de  $L$  e



$m$  ajudam a diminuir a taxa de itens mal classificados, ou seja, diminui a quantidade de ajustes desnecessários por unidade.

## 2.6.2 Os componentes de custo e a otimização

De acordo com Dasgupta (2003), a estimação dos componentes de custo é uma tarefa difícil e pode-se esperar que nunca seja precisa. Assim, é importante avaliar o impacto dos erros nas estimativas dos componentes de custo ( $c_{insp}$ ,  $c_a$ ,  $c_{s-c} = c_{s-nc}$  e  $c_{nc}$ ) utilizados na determinação do planejamento econômico. Foi desenvolvido um experimento balanceado, em que cada custo (para inspecionar, para ajustar, para descartar ou para enviar itens não-conformes ao mercado) assume sete níveis: o *caso padrão*,  $\pm 5\%$ ,  $\pm 10\%$  e  $\pm 15\%$ . Os custos do *caso padrão* referem-se àqueles utilizados no exemplo numérico. Além disso, é importante medir o impacto, em termos de custos relativos, dos planejamentos em que os parâmetros ótimos, isto é,  $m^0 = 41$  e  $L^0 = 896$  são obtidos através de componentes de custo estimados incorretamente. A diferença relativa percentual entre os custos correto e incorreto é dada por:

$$\frac{\text{valor correto} - \text{valor incorreto}}{\text{valor correto}} \times 100, \quad (2.26)$$

sendo calculada para os níveis de 5%, 10% e 15% dos erros dos componentes de custo. Para o nível de 5%, a diferença relativa máxima é 0,14%, para o nível de 10%, é 0,50% e, finalmente, para o nível de 15% é 1,1%. A grandeza dos parâmetros ótimos é similar àquelas obtidas no *caso padrão*.

Esse resultado, portanto, permite confirmar a robustez da política ótima do *caso padrão*, em termos de custos médios, considerados certos intervalos de erros na estimação dos componentes de custo. A Tabela 2.6.2 apresenta a diferença relativa do custo, assim como os valores máximo e mínimo dos intervalos entre inspeções  $m$  e  $L$ , obtidos quando os custos assumem valores em níveis de diferentes amplitudes.

Tabela 2.1: Custo relativo; Valores máximo e mínimo de  $L^0$  e  $m^0$  versus diferentes intervalos de custo

Erro no custo	Custo Relativo (%)	Min. e Max. de $L^0$	Min. e Máx. de $m^0$
$\pm 5\%$	0,14	840; 942	39; 44
$\pm 10\%$	0,50	803; 988	37; 46
$\pm 15\%$	1,10	752; 1051	36; 48

## 2.7 Inspeção com medidas repetidas

Uma maneira possível para reduzir o custo médio é considerar a realização de classificações repetidas e independentes do item inspecionado. Greenberg e Stokes (1995), Trindade et al. (2007a), Ding e Gong (2008), Quinino et al. (2010) demonstram que classificações repetidas podem produzir ganhos quando o sistema de classificação é imperfeito. Considere as hipóteses 1 a 4 e 6 do modelo de controle *on-line* por atributos apresentado no início deste capítulo (pág. 13) e acrescidas das suposições listadas abaixo:

- O item inspecionado pode ser submetido a  $r$  classificações independentes, sendo classificado em cada uma delas como conforme ou não-conforme;
- O processo de produção é declarado fora de controle sempre que a quantidade de classificações conformes for menor que  $a$ ,  $1 \leq a \leq r$ . Nesse caso, o processo é ajustado e a inspeção subsequente ocorre após a produção de  $L$  itens;
- Se a quantidade de classificações conformes for maior ou igual  $a$ , não se intervém no processo e a próxima inspeção se dá após a produção de  $m$  itens.
- Despreza-se o tempo necessário para as classificações;

As variáveis aleatórias associadas ao item inspecionado são aquelas definidas no início da seção 2.1 (pág. 14), considerando entretanto a variável  $Y$  indexada a cada classificação do item sob inspeção. Assim, as probabilidades de a  $j$ -ésima classificação ser conforme, dado que o item inspecionado seja realmente conforme ou não-conforme, são, respectivamente:

$$P\{Y_j = 1|X = 1\} = 1 - \alpha$$

e

$$P\{Y_j = 1|X = 0\} = \beta$$

A partir deste ponto, adotaremos a notação abaixo indicada:

$$\begin{aligned} b_i(y, x) &= \binom{y}{i} x^i (1-x)^{(y-i)} \\ B_j(y, x) &= \sum_{i=j}^y \binom{y}{i} x^i (1-x)^{(y-i)}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

com  $\binom{y}{i} = 0$ , quando  $i > y$ . O processo de produção será instantaneamente paralisado e ajustado sempre que a quantidade de classificações conforme do item sob inspeção for menor que  $a$ ,  $1 \leq a \leq r$ , ou seja, quando:

$$\sum_{j=1}^r Y_j < a.$$

As  $r$  classificações são independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma Bernoulli. Assim, se o item em inspeção for realmente conforme:

$$\sum_{j=1}^r Y_j \sim \text{binomial}(r, 1 - \alpha),$$

e caso ele seja não-conforme:

$$\sum_{j=1}^r Y_j \sim \text{binomial}(r, \beta).$$

Dessa maneira, a probabilidade de a classificação final ser conforme, dado que o item inspecionado seja realmente conforme é:

$$P\left\{\sum_{j=1}^r Y_j \geq a|X = 1\right\} = B_a(r, 1 - \alpha), \quad (2.28)$$

e, quando o item inspecionado for realmente não-conforme, essa probabilidade é:

$$P\left\{\sum_{j=1}^r Y_j \geq a|X = 0\right\} = B_a(r, \beta), \quad (2.29)$$

onde  $\sum_{j=1}^r Y_j$  é a quantidade de classificações conforme durante a inspeção do item.

### 2.7.1 Modelo probabilístico

Associando-se (2.1a), (2.28) e (2.29), obtém-se a probabilidade de não se ajustar o processo, dado que ele esteja sob controle:

$$\begin{aligned}
 P\left\{\sum_{j=1}^r Y_j \geq a | Z = 1\right\} &= \sum_{i=0}^1 P\left\{\sum_{j=1}^r Y_j \geq a, X = i | Z = 1\right\} \\
 &= \sum_{i=0}^1 P\{X = i | Z = 1\} P\left\{\sum_{j=1}^r Y_j \geq a | X = i, Z = 1\right\} \\
 &= \sum_{i=0}^1 P\{X = i | Z = 1\} P\left\{\sum_{j=1}^r Y_j \geq a | X = i\right\} \\
 &= (1 - p_1) B_a(r, \beta) + p_1 B_a(r, 1 - \alpha)
 \end{aligned}$$

Analogamente, quando o processo de produção estiver fora de controle, de (2.1b), (2.28) e (2.29), tem-se:

$$P\left\{\sum_{j=1}^r Y_j \geq a | Z = 0\right\} = p_2 B_a(r, 1 - \alpha) + (1 - p_2) B_a(r, \beta).$$

Utilizando a convenção estabelecida na Seção 2.1 (pág. 16), estabelece-se que, a partir deste ponto:

$$p_A = p_1 B_a(r, 1 - \alpha) + (1 - p_1) B_a(r, \beta) \tag{2.30}$$

e

$$p_D = p_2 B_a(r, 1 - \alpha) + (1 - p_2) B_a(r, \beta). \tag{2.31}$$

A cadeia de Markov que modela o sistema de controle do processo de produção tem espaço de estados dado por (2.6) e matriz de transição  $\mathbf{P}$  (2.8), com probabilidades de transição fornecidas pelas expressões obtidas na Seção 2.2, utilizando-se os termos  $p_A$  e  $p_D$  de (2.30) e (2.31), respectivamente.

Por sua vez, as expressões desenvolvidas na Seção 2.3 são utilizadas para se obter, para todo estado

$(w, s) \in E$ , os elementos da distribuição estacionária,  $\pi(w, s)$  e as probabilidades de o ciclo ter comprimento  $L$ , condicionadas ao estado  $(w, s)$ ,  $p_L^{(w,s)}$ .

### 2.7.2 Custos médios dos estados da cadeia de Markov

A estrutura de custos do modelo com medidas repetidas é aquela apresentada na Seção 2.4 e a expressão do custo esperado de cada estado  $(w, s) \in E$  é:

$$\phi(w, s) = r c_{insp} + \xi(w, s) + \theta(w, s) + \varphi(w, s),$$

em que  $r c_{insp}$  é o custo de realizar  $r$  classificações por item inspecionado, estando presente em todos os estados da cadeia.

As expressões dos componentes de custo dos estados são aquelas apresentadas na Seção 2.4, com exceção das relacionadas com o descarte do item inspecionado, já que são diferentes as probabilidades condicionadas utilizadas em seu cálculo. Nos estados em que  $w = 0$ , o item inspecionado é produzido com o processo sob controle e a probabilidade de o item inspecionado ser realmente conforme, dado que ele tenha sido declarado conforme, é:

$$\begin{aligned} P\left\{X = 1 \mid \sum_{j=1}^r Y_j \geq a, Z = 1\right\} &= \frac{p_1 B_a(r, 1 - \alpha)}{p_1 B_a(r, 1 - \alpha) + (1 - p_1) B_a(r, \beta)} \\ &= \frac{p_1 B_a(r, 1 - \alpha)}{p_A}, \end{aligned}$$

e a probabilidade de o item inspecionado ser realmente conforme, dado que tenha sido declarado não-conforme, é:

$$P\left\{X = 1 \mid \sum_{j=1}^r Y_j < a, Z = 1\right\} = \frac{p_1 [1 - B_a(r, 1 - \alpha)]}{1 - p_A}.$$

Os custos de descarte relacionado ao item inspecionado dos estados  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$  são, respectivamente:

$$\theta(0, 0) = c_{s.c} \frac{p_1 [1 - B_a(r, 1 - \alpha)]}{1 - p_A} + c_{s.nc} \frac{(1 - p_1) [1 - B_a(r, \beta)]}{1 - p_A}$$

e

$$\theta(0, 1) = c_{s.c} \frac{p_1 B_a(r, 1 - \alpha)}{p_A} + c_{s.nc} \frac{(1 - p_1) B_a(r, \beta)}{p_A}.$$

As expressões de  $\xi(0, 0)$  e  $\xi(0, 1)$  são dadas, respectivamente, por (2.18) e (2.14). Além disso, de (2.13), têm-se que  $\varphi(0, 0) = c_a$  e  $\varphi(0, 1) = 0$ . Assim, o custo médio do sistema de controle dos estados  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$  são, respectivamente:

$$\phi(0, 0) = r c_{insp} + \xi(0, 0) + \theta(0, 0) + c_a$$

e

$$\phi(0, 1) = r c_{insp} + \xi(0, 1) + \theta(0, 1).$$

Nos demais estados ( $w = 1, 2$ ), o item inspecionado é produzido com o processo fora de controle. A probabilidade de o item inspecionado ser realmente conforme, dado que ele tenha sido declarado conforme, é:

$$P\left\{X = 1 \mid \sum_{j=1}^r Y_j \geq a, Z = 0\right\} = \frac{p_2 B_a(r, 1 - \alpha)}{p_D}.$$

Por sua vez, a probabilidade de o item inspecionado ser realmente conforme, dado que tenha sido declarado não-conforme, é:

$$P\left\{X = 1 \mid \sum_{j=1}^r Y_j < a, Z = 0\right\} = \frac{p_2 [1 - B_a(r, 1 - \alpha)]}{1 - p_D}.$$

Assim, os custos de descarte do item inspecionado dos estados  $(w, 0)$  e  $(w, 1)$ ,  $w = 1, 2$  são, respectivamente:

$$\theta(w, 0) = c_{s.c} \frac{p_2 [1 - B_a(r, 1 - \alpha)]}{1 - p_D} + c_{s.nc} \frac{(1 - p_2) [1 - B_a(r, \beta)]}{1 - p_D}$$

e

$$\theta(w, 1) = c_{s.c} \frac{p_2 B_a(r, 1 - \alpha)}{p_D} + c_{s.nc} \frac{(1 - p_2) B_a(r, \beta)}{p_D}$$

Associando as expressões anteriores com (2.20) e (2.13), obtêm-se os custos médios do sistema de controle dos estados (1, 0) e (1, 1), que são, respectivamente:

$$\phi(1, 0) = rc_{insp} + \xi(1, 0) + \theta(1, 0) + c_a$$

$$\phi(1, 1) = rc_{insp} + \xi(1, 1) + \theta(1, 1).$$

Analogamente, tomando-se  $\xi(2, 0) = \xi(2, 1)$ , dado pela expressão (2.21), obtêm-se os custos médios do sistema de controle dos estados (2, 0) e (2, 1), que são, respectivamente:

$$\phi(2, 0) = rc_{insp} + \xi(2, 0) + \theta(2, 0) + c_a$$

$$\phi(2, 1) = rc_{insp} + \xi(2, 1) + \theta(2, 1).$$

Com os comentários apresentados na Seção 2.5, tem-se que, para um grande número de inspeções, o custo médio por item produzido e enviado ao consumidor ( $C(m, L, r, a)$ ) é a razão do custo esperado por ciclo de inspeção,  $E(\Phi)$ , e a quantidade média de itens enviados ao mercado por ciclo de inspeção,  $E(T)$ , expresso como:

$$C(m, L, r, a) = \frac{E(\Phi)}{E(T)} = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) \phi(w, s)}{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) [(L-1)p_L(w, s) + (m-1)p_m(w, s)]}.$$

A determinação dos valores dos comprimentos  $m$  e  $L$  do intervalo de amostragem, da quantidade de classificações repetidas,  $r$  e do critério mínimo para declaração de conformidade do item,  $a$ , de maneira a minimizar  $C(m, L, r, a)$  é a solução do problema:

$$(m^0, L^0, r^0, a^0) = \arg \min_{(m, L, r, a)} C(m, L, r, a).$$

Os parâmetros ótimos são encontrados computacionalmente através de busca exaustiva.

### 2.7.3 Aplicação numérica

Para ilustrar o procedimento proposto, considera-se o exemplo numérico analisado na Seção 2.6. São mantidos os mesmos valores dos parâmetros probabilísticos do processo e dos componentes de custo, conforme detalhado na página 32. Calculam-se os parâmetros de otimização por busca direta, mediante código desenvolvido para Matlab<sup>®</sup> (ver Apêndice A). O objetivo é encontrar os valores ótimos de  $m$ ,  $L$ ,  $r$  e  $a$  que determinam a política mais econômica. A melhor estratégia de controle permanece inalterada, apontando os valores de  $m^0 = 41$ ,  $L^0 = 896$ ,  $r^0 = 1$  e  $a^0 = 1$ , resultando um custo unitário de \$0,16231, ou seja, nesse caso, a inspeção com medidas repetidas não contribui para reduzir os custos.

Os valores acima podem ser alterados, dependendo da combinação entre os parâmetros probabi-

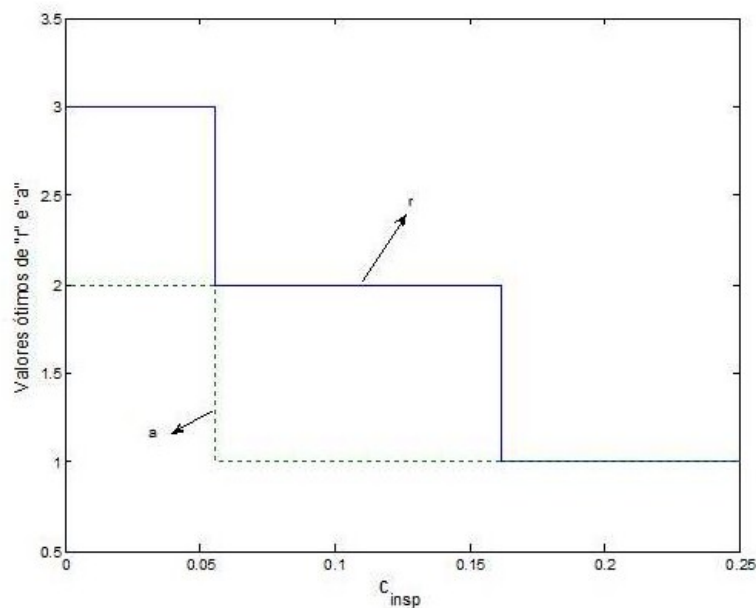


Figura 2.5: Valores ótimos de  $r$  e  $a$  vs.  $c_{insp}$ .

lísticos e os componentes de custo. Trindade et al. (2007a) apontam que, em linhas gerais, quanto menor for o custo de uma inspeção ( $c_{insp}$ ) e quanto maior a incidência dos erros de classificação  $\alpha$  e  $\beta$ , maior será a diferença observada entre o modelo de classificação única e a estratégia obtida com o uso de classificações repetidas.



A figura 2.5 mostra o gráfico dos valores ótimos de  $r$  e  $a$  versus o custo de inspeção  $c_{insp}$ . Observa-se que a diminuição do custo de inspeção favorece a realização da política de classificações repetidas.

Tabela 2.2: Parâmetros de planejamento ótimos para diferentes valores de  $c_{insp}$

$c_{insp}$	$m^0$	$L^0$	$r^0$	$a^0$	$C^0$ (\$)
0	35	735	21	11	0,151188
0,02	36	744	3	2	0,153051
0,07	36	766	2	1	0,156159
0,12	37	779	2	1	0,158755
0,15	36	799	2	1	0,160271

Na Tabela 2.2, detalham-se os parâmetros de planejamento econômico ótimos ( $m^0$ ,  $L^0$ ,  $r^0$  e  $a^0$ ) e o correspondente custo unitário do sistema de controle, para alguns valores de custo de inspeção ( $c_{insp}$ ) das regiões da Figura 2.5 em que as classificações repetidas contribuem para reduzir o custo ( $r^0 > 1$ ). Em todos os casos, verifica-se que  $m^0 \ll L^0$ , indicação de que o atraso para realização da primeira inspeção após ajuste é significativo na minimização do custo unitário médio do sistema de controle.

## 2.8 Comentários adicionais

Em trabalhos anteriores relacionados com o assunto, são apresentados planejamentos econômicos ótimos do procedimento *on-line* de Taguchi, para monitoramento de atributo de qualidade, com e sem erros de classificação, nos quais o intervalo de amostragem é fixo. Neste trabalho, propõem-se dois intervalos de amostragem. O maior deles é usado após ajuste do sistema de produção. O menor deles é empregado quando a inspeção não sinaliza a mudança do estado do processo de produção, isto é, quando o item é declarado conforme. Os resultados das Seções 2.6 e 2.7.3 indicam que essa nova abordagem pode reduzir o custo médio por item produzido e enviado ao consumidor.

Processos de alta qualidade podem se beneficiar com essa proposta já que a fração de conformidade do processo fora de controle,  $p_2$ , é também muito alta. Outro ponto a salientar é a simplicidade do método, mesmo para sistemas não automáticos. Os dois passos são: quando o item inspecionado é

declarado não-conforme, o processo é ajustado e a próxima inspeção se dá após a produção de  $L$  itens; se o item inspecionado é classificado conforme, a próxima inspeção ocorre após a produção de  $m$  itens. Por sua vez, o uso de classificações repetidas amplia a possibilidade de aplicação da política de controle com intervalo de inspeção variável.

## Capítulo 3

# Controle *On-line* com Amostra Não-unitária

O método de controle *on-line* desenvolvido por Taguchi et al. (1989) relaciona-se com os trabalhos sobre planejamento econômico de gráficos de controle  $np$  propostos por Gibra (1978) e Nandi (1990). No entanto, duas importantes diferenças entre eles podem ser apontadas. A primeira é que, na proposta de Taguchi, o custo de enviar os itens para o consumidor é maior que o custo de produzir e detectar itens não-conformes. De acordo com Nayebpour e Woodall (1993), essa suposição realista de dois custos distintos de defeituosos, em sua abordagem econômica, não é encontrada nos modelos econômicos para planejamento de cartas  $np$  existentes. A segunda diferença é que a existência de erros de classificação no sistema de inspeção não foi considerada no planejamento de cartas  $np$ . Propõe-se neste capítulo um sistema de controle *on-line* por atributos, sujeito a erros de classificação, no qual as decisões sobre a situação do processo baseiam-se em amostras de tamanho  $n \geq 1$ , classificando-se cada item uma única vez como conforme ou não-conforme. Um sistema de monitoramento com essas características recolhe uma quantidade maior de informações do processo do que aquelas obtidas pelos modelos citados anteriormente, os quais utilizam amostras de tamanho unitário. No modelo proposto, a decisão de intervenção no processo é mais precisa, podendo resultar em redução no custo do sistema de controle, dependendo das especificidades de seus parâmetros. É considerada também a impossibilidade de se coletar seqüencialmente vários itens. Essa restrição é incorporada ao modelo considerando-se que entre a coleta de dois itens sucessivos, são produzidos  $d - 1$  itens que não serão inspecionados,  $d \geq 1$ . São estabelecidas abaixo as suposições do modelo,

complementadas pelas hipóteses 1, 2, 3, 4, 6, 7 e 8, listadas na página 13 do capítulo 2:

- Para monitoramento do processo, inspecionam-se os elementos de uma amostra sistemática de tamanho  $n \geq 1$ , cuja coleta obedece às seguintes regras:
  - O primeiro elemento da amostra é o  $(m + 1)$ -ésimo item produzido após a conclusão da última inspeção;
  - Os demais  $n - 1$  elementos amostrais são coletados a cada  $d$  itens produzidos,  $d \geq 1$ , considerado fixo já que seu valor reflete restrição física do sistema de controle;
  - Produzem-se  $R$  itens durante a coleta da amostra, por ciclo,  $R = (n - 1)d + 1$ ,  $R \geq n$ ;
- O processo de produção é considerado como fora de controle caso a quantidade de itens amostrais declarados conformes seja menor que  $a$ ,  $1 \leq a \leq n$ ;
- Assim que o processo for considerado fora de controle, ele é paralisado instantaneamente e ajustado para retornar à sua condição inicial.

Denomina-se ciclo de monitoramento, ou simplesmente ciclo, o intervalo entre amostragens sucessivas. Em cada ciclo, são produzidos  $m + R$  itens, em que:

- $m$  é a quantidade de itens produzidos antes da amostragem, intervalo que denominaremos fase inicial do ciclo;
- $R$  é a quantidade de itens produzidos durante a fase de inspeção do ciclo, ou seja, durante a coleta da amostra.

O fluxograma do sistema de controle (Fig. 3.1) segue os seguintes passos:

- (i) O processo de produção inicia-se sob controle;
- (ii) Produzem-se  $m$  itens durante a fase inicial do ciclo de monitoramento;
- (iii) Produz-se e inspeciona-se o primeiro dos  $R$  itens fabricados durante a fase de amostragem do ciclo de monitoramento;

- (iv) Produzem-se  $d$  itens, inspecionando-se o último deles. Essa operação é repetida  $(n - 1)$  vezes, até a amostra estar completa;
- (v) Se a quantidade de itens inspecionados como conformes for menor que  $a$ , o processo de produção é ajustado, retornando-se ao passo (i), caso contrário, inicia-se imediatamente o próximo ciclo de monitoramento [passo (ii)].

Quando a amostra for unitária ( $n = 1$ ), tem-se o modelo de Taguchi, conforme a extensão proposta por Borges et al. (2001).

Figura 3.2 exemplifica o modelo proposto. Em cada ciclo são produzidos  $m = 12$  itens antes do

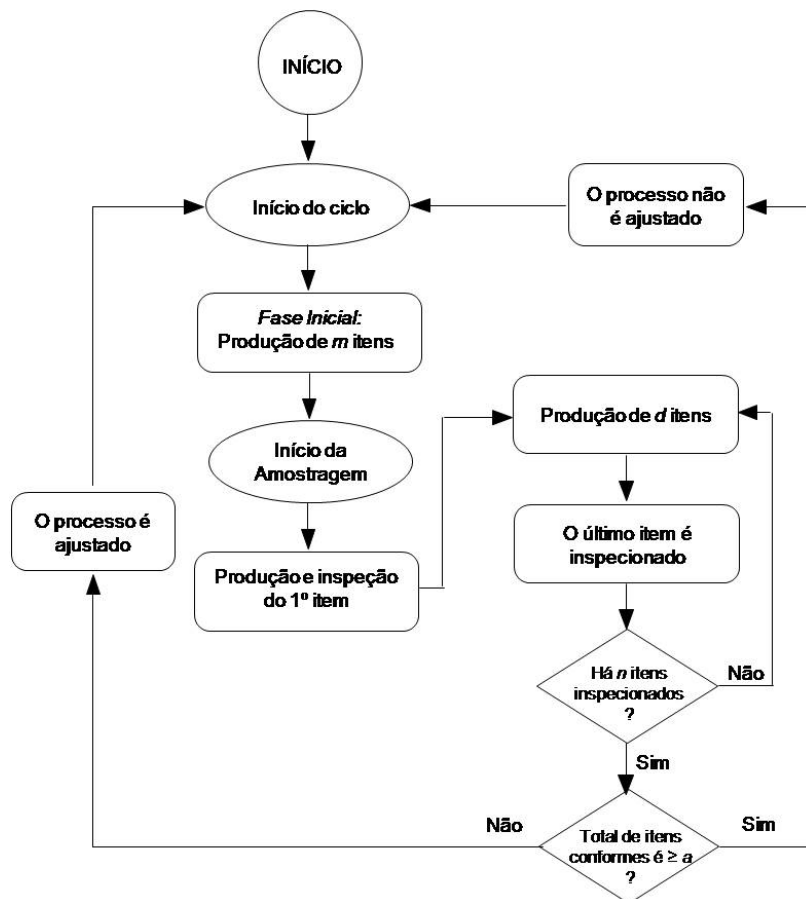


Figura 3.1: Fluxograma do processo (intervenção e controle).

início da coleta da amostra de tamanho  $n = 4$ , com um passo  $d = 3$  entre a coleta de cada item.

Durante todo o ciclo de monitoramento, são produzidos 22 itens.

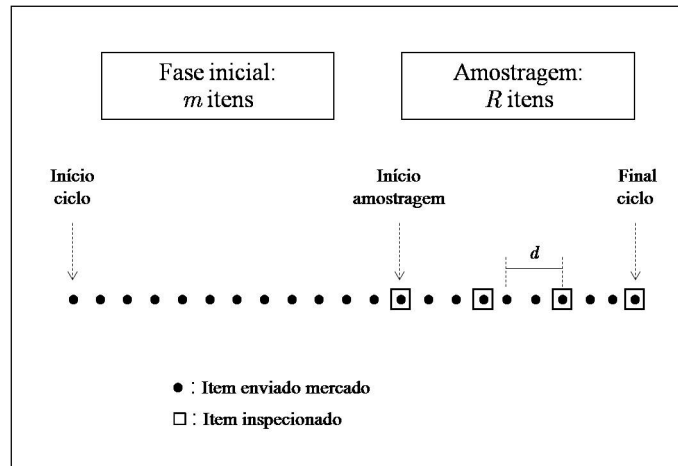


Figura 3.2: Diagrama do ciclo de monitoramento.

### 3.1 Modelo probabilístico

Mantém-se a notação do capítulo anterior na construção do modelo probabilístico, associando-se três variáveis aleatórias ao  $i$ -ésimo item inspecionado da amostra:

- $X_i$  é a variável aleatória indicadora da real condição de conformidade do item ( $X_i = 1$ , item conforme;  $X_i = 0$ , item não-conforme);
- $Y_i$  é a variável aleatória indicadora do resultado da classificação do item inspecionado ( $Y_i = 1$ , item declarado conforme;  $Y_i = 0$ , item declarado não-conforme);
- $Z_i$  é a variável aleatória indicadora da situação do processo no instante de produção do item ( $Z_i = 1$ , processo de produção sob controle;  $Z_i = 0$ , processo de produção fora de controle).

Salienta-se que as variáveis aleatórias  $X_i$  e  $Z_i$  não são observáveis.

Têm-se que:

$$\begin{aligned} P\{X_i = 1|Z_i = 1\} &= p_1 \\ P\{X_i = 1|Z_i = 0\} &= p_2. \end{aligned}$$

A probabilidade de um item ser declarado conforme, dado que ele seja realmente conforme, para para  $i = 1, \dots, n$  é:

$$P\{Y_i = 1|X = 1, Z_i = j\} = 1 - \alpha,$$

e a probabilidade de um item realmente não-conforme ser declarado conforme é:

$$P\{Y_i = 1|X_i = 0, Z_i = j\} = \beta.$$

Têm-se também que dado  $X_i, Y_i$  é condicionalmente independente de  $Z_i$ .

Dessa maneira, se o processo de produção estiver sob controle, a probabilidade de um item ser declarado conforme é:

$$\begin{aligned} p_A &= P\{Y_i = 1|Z_i = 1\} \\ &= \sum_{j=0}^1 P\{Y_i = 1, X_i = j|Z_i = 1\} \\ &= \sum_{j=0}^1 P\{Y_i = 1|X_i = j, Z_i = 1\} P\{X_i = j|Z_i = 1\} \\ &= p_1(1 - \alpha) + (1 - p_1)\beta. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Similarmente, quando o processo de produção estiver fora de controle, tem-se que:

$$p_D = P\{Y_i = 1|Z_i = 0\} = p_2(1 - \alpha) + (1 - p_2)\beta. \tag{3.2}$$

O processo de produção será instantaneamente paralisado e ajustado sempre que a quantidade de itens classificados como conformes na amostra for menor que  $a$ ,  $1 \leq a \leq n$ , ou seja, quando:

$$\sum_{i=1}^n Y_i < a,$$

salientando-se que as classificações dos itens inspecionados são independentes.

Quando toda a amostra for produzida com o processo sob controle, a seqüência  $\{Y_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , é identicamente distribuída de acordo com uma Bernoulli de parâmetro  $p_A$ , ou seja:

$$\sum_{i=1}^n Y_i \sim \text{binomial}(n, p_A)$$

Nessa situação, a probabilidade de não se intervir no processo é:

$$P \left\{ \sum_{i=1}^n Y_i \geq a \mid Z_1 = 1, \dots, Z_n = 1 \right\} = B_a(n, p_A) \quad (3.3)$$

Caso toda a amostra seja produzida com o processo fora de controle, a seqüência  $\{Y_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , é distribuída de acordo com uma Bernoulli de parâmetro  $p_D$ , ou seja:

$$\sum_{i=1}^n Y_i \sim \text{binomial}(n, p_D),$$

e a probabilidade de não se ajustar o processo é:

$$P \left\{ \sum_{i=1}^n Y_i \geq a \mid Z_1 = 0, \dots, Z_n = 0 \right\} = B_a(n, p_D) \quad (3.4)$$

Quando a mudança de estado do processo ocorre durante a coleta da amostra, a distribuição da seqüência  $\{Y_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , é uma mistura dos modelos binomiais acima. Sua formulação algébrica é descrita adiante.



### 3.2 A cadeia de Markov

A cadeia de Markov que modela o sistema de monitoramento do processo de produção tem espaço de estados finito, dado por:

$$E = \{(w, s); w = 0, 1, 2, 3 \text{ e } s = 0, 1\}$$

Cada estado é representado por um par ordenado  $(w, s)$ , em que  $w$  relaciona-se com as situações de mudança na proporção de itens conformes produzidos pelo processo, em que:

- $w = 0$ , o processo de produção mantém-se sob controle até o final do ciclo corrente, ou seja, não ocorre mudança na proporção de itens conformes produzidos desde a última intervenção no processo;
- $w = 1$ , há mudança no estado do processo durante a produção dos  $m$  primeiros itens do ciclo corrente (fase inicial). Toda a amostragem ocorre com a produção operando fora de controle;
- $w = 2$ , ocorre mudança de estado do processo durante a coleta da amostra do ciclo corrente ( $R$  últimos itens do ciclo). Nessa situação, toda a fase inicial do ciclo corrente se dá com a produção operando sob controle. No final do ciclo o processo se encontra fora de controle e a mudança de estado do processo ocorreu durante a coleta da amostra, ou seja, durante a produção dos últimos  $R$  elementos produzidos no ciclo; e
- $w = 3$ , a produção opera fora de controle durante todo o ciclo corrente e a mudança de estado do processo ocorreu no ciclo anterior.

Por sua vez,  $s$  indica a decisão de não se ajustar o processo ao final do ciclo corrente, ou seja,  $s = 1$ , decide-se não intervir no processo de produção e  $s = 0$  intervém-se no processo para ajustá-lo. A Figura 3.3 relaciona o processo de produção aos estados da cadeia.

A notação das probabilidades de transição é aquela adotada no capítulo anterior. Para ilustrar,  $P_{(2,1),(3,0)}$  representa a probabilidade de transição de um ciclo em que houve mudança de estado do processo durante a amostragem, tendo-se decidido por não intervir no processo [estado  $(2, 1)$ ], para

um ciclo em que se decidiu pelo ajuste e que foi iniciado com o processo fora de controle, decidindo-se pelo ajuste no final do ciclo [estado (3,0)]. Apresentamos abaixo a matriz de probabilidades de transição **P**:

$$\begin{bmatrix}
 P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & P_{(0,0),(3,0)} & P_{(0,0),(3,1)} \\
 P_{(0,1),(0,0)} & P_{(0,1),(0,1)} & P_{(0,1),(1,0)} & P_{(0,1),(1,1)} & P_{(0,1),(2,0)} & P_{(0,1),(2,1)} & P_{(0,1),(3,0)} & P_{(0,1),(3,1)} \\
 P_{(1,0),(0,0)} & P_{(1,0),(0,1)} & P_{(1,0),(1,0)} & P_{(1,0),(1,1)} & P_{(1,0),(2,0)} & P_{(1,0),(2,1)} & P_{(1,0),(3,0)} & P_{(1,0),(3,1)} \\
 P_{(1,1),(0,0)} & P_{(1,1),(0,1)} & P_{(1,1),(1,0)} & P_{(1,1),(1,1)} & P_{(1,1),(2,0)} & P_{(1,1),(2,1)} & P_{(1,1),(3,0)} & P_{(1,1),(3,1)} \\
 P_{(2,0),(0,0)} & P_{(2,0),(0,1)} & P_{(2,0),(1,0)} & P_{(2,0),(1,1)} & P_{(2,0),(2,0)} & P_{(2,0),(2,1)} & P_{(2,0),(3,0)} & P_{(2,0),(3,1)} \\
 P_{(2,1),(0,0)} & P_{(2,1),(0,1)} & P_{(2,1),(1,0)} & P_{(2,1),(1,1)} & P_{(2,1),(2,0)} & P_{(2,1),(2,1)} & P_{(2,1),(3,0)} & P_{(2,1),(3,1)} \\
 P_{(3,0),(0,0)} & P_{(3,0),(0,1)} & P_{(3,0),(1,0)} & P_{(3,0),(1,1)} & P_{(3,0),(2,0)} & P_{(3,0),(2,1)} & P_{(3,0),(3,0)} & P_{(3,0),(3,1)} \\
 P_{(3,1),(0,0)} & P_{(3,1),(0,1)} & P_{(3,1),(1,0)} & P_{(3,1),(1,1)} & P_{(3,1),(2,0)} & P_{(3,1),(2,1)} & P_{(3,1),(3,0)} & P_{(3,1),(3,1)}
 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

A intervenção no processo garante o retorno da produção à sua condição inicial de operação sob

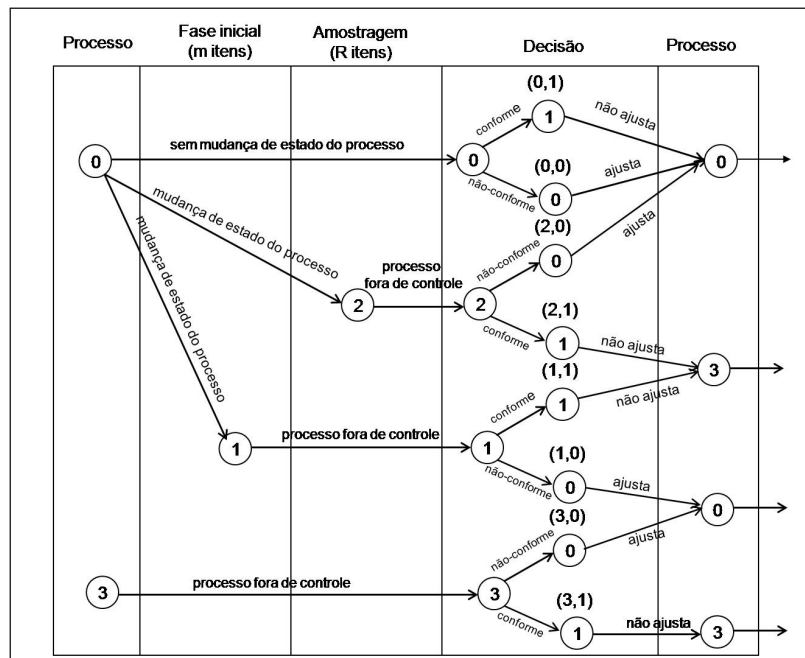


Figura 3.3: Diagrama do processo de monitoramento.

controle. São possíveis transições para os estados indexados por  $w = 0$ ,  $w = 1$  ou  $w = 2$ . A

probabilidade de o processo permanecer sob controle no ciclo corrente é:

$$P\{Z_1 = 1, Z_2 = 1, \dots, Z_{m+R} = 1 | Z_0 = 1\} = (1 - \pi)^{m+R}$$

onde  $Z_0$  representa a situação do processo produtivo no instante inicial. Empregando a expressão (3.3), as probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$ , para os estados  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$  são, respectivamente:

$$P_{(w,0),(0,0)} = (1 - \pi)^{m+R} [1 - B_a(n, p_A)], \quad (3.6)$$

e

$$P_{(w,0),(0,1)} = (1 - \pi)^{m+R} B_a(n, p_A). \quad (3.7)$$

Por outro lado, a probabilidade de ocorrer uma mudança da fração de itens conformes na fase inicial do ciclo subsequente a um ajuste é:

$$1 - (1 - \pi)^m.$$

Associando-a à expressão (3.4), obtém-se as probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$ , para os estados  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ , que são respectivamente:

$$P_{(w,0),(1,0)} = [1 - (1 - \pi)^m] [1 - B_a(n, p_D)],$$

e

$$P_{(w,0),(1,1)} = [1 - (1 - \pi)^m] B_a(n, p_D).$$

Após um ajuste no processo, distinguem-se duas situações para as transições para estados em que  $w = 2$ :

- A mudança de estado do processo ocorre no primeiro item inspecionado e toda a amostra é coletada com a produção fora de controle. Então  $\sum_{i=1}^n Y_i \sim \text{binomial}(n, p_D)$  ;
- A mudança de estado do processo ocorre em algum instante após a coleta do primeiro item da amostra. Há  $k$  itens inspecionados que são produzidos com o processo sob controle,  $1 \leq k \leq n - 1$ . O restante da amostra ( $n - k > 0$ ) provém do processo operando fora de controle.

A quantidade de itens declarados conformes durante a inspeção é distribuída de acordo com uma mistura de modelos binomiais, com diferentes probabilidades de sucesso. Têm-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k Y_i &\sim \text{binomial}(k, p_A), \text{ e} \\ \sum_{i=k+1}^n Y_i &\sim \text{binomial}(n - k, p_D) \end{aligned} \quad (3.8)$$

A probabilidade de a mudança de estado ocorrer exatamente no primeiro item inspecionado é:

$$(1 - \pi)^m \pi, \quad (3.9)$$

e, dado que ela ocorra, a probabilidade de não se intervir no processo é:

$$P \left\{ \sum_{i=1}^n Y_i \geq a \mid Z_m = 1, Z_{m+1} = 0 \right\} = \sum_{j=a}^n b_j(n, p_D) = B_a(n, p_D) \quad (3.10)$$

Por outro lado, a probabilidade de a mudança de estado ocorrer entre a  $k$ -ésima e a  $(k + 1)$ -ésima inspeções é:

$$(1 - \pi)^{m+(k-1)d+1} [1 - (1 - \pi)^d]. \quad (3.11)$$

A probabilidade de classificarem-se  $j$  itens como conformes pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} P \left\{ \sum_{i=1}^n Y_i = j \right\} &= \sum_{u=0}^k P \left\{ \sum_{i=1}^k Y_i = u, \sum_{i=k+1}^n Y_i = j - u \right\} \\ &= \sum_{u=0}^k P \left\{ \sum_{i=1}^k Y_i = u \right\} P \left\{ \sum_{i=k+1}^n Y_i = j - u \right\}, \end{aligned}$$

em que  $u$  é a quantidade de itens inspecionados declarados conformes e produzidos com o processo ainda sob controle, que associada à (3.8), obtém-se:

$$P \left\{ \sum_{i=1}^n Y_i = j \mid Z_k = 1, Z_{k+1} = 0, w = 2 \right\} = \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) b_{j-u}(n - k, p_D).$$

Empregando (3.11), a probabilidade de  $j$  itens serem declarados conformes e de ocorrer mudança de estado do processo entre a  $k$ -ésima e a  $(k + 1)$ -ésima inspeções é:

$$P \left\{ \sum_{i=1}^n Y_i = j, Z_k = 1, Z_{k+1} = 0 | w = 2 \right\} = (1 - \pi)^{m+(k-1)d+1} [1 - (1 - \pi)^d] \times \\ \times \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) b_{j-u}(n - k, p_D). \quad (3.12)$$

De (3.9) e (3.10) e generalizando-se (3.12) para todos os valores possíveis de  $k$ ,  $1 \leq k < n$ , obtém-se as probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$  para os estados  $(2, 1)$  e  $(2, 0)$ , que são, respectivamente:

$$P_{(w,0),(2,1)} = (1 - \pi)^m \left\{ \pi B_a(n, p_D) + (1 - \pi) [1 - (1 - \pi)^d] \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) \sum_{j=a}^n b_{j-u}(n - k, p_D) \right\} \quad (3.13)$$

e

$$P_{(w,0),(2,0)} = (1 - \pi)^m \left\{ \pi [1 - B_a(n, p_D)] + (1 - \pi) [1 - (1 - \pi)^d] \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) \sum_{j=0}^{a-1} b_{j-u}(n - k, p_D) \right\}.$$

A probabilidade de ocorrer mudança de estado do processo durante a coleta da amostra é:

$$P_{(0,0),(2,1)} + P_{(0,0),(2,0)} = (1 - \pi)^m [1 - (1 - \pi)^R].$$

Além disso, nas situações em que o processo é ajustado, não são possíveis transições para estados em que  $w = 3$ . Assim,

$$P_{(w,0),(3,s)} = 0, \quad \text{para } w = 0, 1, 2, 3; s = 0, 1.$$

A partir do estado  $(0, 1)$ , em que o processo está sob controle e decide-se não intervir no processo, são possíveis transições para os estados  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 0)$  e  $(2, 1)$ , aplicando-se os resultados anteriores, ou seja:

$$P_{(0,1),(w,s)} = P_{(0,0),(w,s)}, \quad \forall (w, s) \in E.$$

Para se atingir os estados  $(3, 0)$  e  $(3, 1)$  é necessário que, no ciclo anterior, a produção opere fora de controle ( $w > 0$ ) e que não tenha ocorrido intervenção no processo ( $s = 1$ ). As probabilidades de transição para esses estados, para  $w = 1, 2, 3$ , são respectivamente:

$$P_{(w,1),(3,0)} = 1 - B_a(n, p_D)$$

e

$$P_{(w,1),(3,1)} = B_a(n, p_D).$$

Não são possíveis outras transições que não essas a partir dos estados em que  $w > 0$  e  $s = 1$ , logo:

$$P_{(w,1),(0,s)} = P_{(w,1),(1,s)} = P_{(w,1),(2,s)} = 0, \text{ para } w = 1, 2, 3; s = 0, 1.$$

Introduzindo as probabilidades acima, a matriz  $\mathbf{P}$  é reescrita como:

$$\begin{bmatrix} P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(3,0)} & P_{(1,1),(3,1)} \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(3,0)} & P_{(1,1),(3,1)} \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(3,0)} & P_{(1,1),(3,1)} \end{bmatrix}$$

A matriz de transição  $\mathbf{P}$  é irredutível e aperiódica, possuindo uma distribuição estacionária denotada pelo vetor:

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi(w, s); w = 0, 1, 2, 3; s = 0, 1]', \text{ com } \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) = 1. \quad (3.14)$$

O vetor  $\boldsymbol{\pi}$  é obtido a partir da resolução do sistema linear expresso em (2.10), com a restrição dada em (3.14).

### 3.3 Custos dos estados da cadeia

A estrutura de custo considerada é similar àquela utilizada no capítulo anterior, adotando-se a notação detalhada no início da Seção 2.4 (pág. 23).

A expressão geral do custo de cada estado  $(w, s)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$  e  $s = 0, 1$  é dada por:

$$\phi(w, s) = nc_{insp} + \xi(w, s) + \theta(w, s) + \varphi(w, s) \quad (3.15)$$

em que:

$nc_{insp}$ , é o custo de realizar  $n$  classificações por amostra e está presente em todos os estados da cadeia;

$\xi(w, s)$ , é o custo esperado por ciclo referente aos itens não-conformes dentre os  $m + R - n$  itens não inspecionados que são enviados ao mercado;

$\theta(w, s)$ , é o custo esperado por ciclo relacionado aos itens inspecionados, descartados;

$\varphi(w, s)$ , é o custo de ajuste do processo de produção por ciclo. A expressão (2.13) é válida para qualquer  $w$ .

### 3.3.1 Custo dos estados $(0, 0)$ e $(0, 1)$ :

O processo opera sob controle quando ele alcança estados em que  $w = 0$ . O número esperado de itens não inspecionados defeituosos por ciclo é:  $(1 - p_1)(m + R - n)$ . Seu custo esperado é:

$$\xi(0, s) = c_{nc}(1 - p_1)(m + R - n), \quad s = 0, 1. \quad (3.16)$$

Devido aos erros de classificação, um item classificado como conforme pode ser realmente conforme ou não-conforme. A probabilidade de o  $k$ -ésimo item inspecionado ser realmente conforme,  $1 \leq k \leq n$ , dado que tenha sido declarado conforme, é:

$$P\{X_k = 1 | Y_k = 1, Z_k = 1\} = \frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A}$$

e de ser realmente conforme, dado que tenha sido declarado não-conforme, é:

$$P\{X_k = 1 | Y_k = 0, Z_k = 1\} = \frac{p_1\alpha}{1 - p_A}.$$

Para o estado  $(0, 1)$ , o número esperado de itens inspecionados e descartados que são realmente conformes é:

$$\begin{aligned} E \left[ \sum_{k=1}^n X_k \mid \sum_{j=1}^n Y_j \geq a, Z_1 = \dots = Z_n = 1 \right] &= \\ &= \sum_{k=1}^n E \left[ X_k, \mid \sum_{j=1}^n Y_j \geq a, Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right] \\ &= \sum_{k=1}^n P \left\{ X_k = 1 \mid \sum_{j=1}^n Y_j \geq a, Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n P \left\{ X_k = 1, \sum_{j=1}^n Y_j \geq a \mid Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\}}{P \left\{ \sum_{j=1}^n Y_j \geq a \mid Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n P \left\{ X_k = 1, \sum_{j=1}^n Y_j \geq a \mid Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\}}{B_a(n, p_A)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$



Condicionando o numerador da expressão (3.17) à quantidade  $i$  de itens declarados conformes, tem-se:

$$\begin{aligned}
& P \left\{ X_k = 1, \sum_{j=1}^n Y_j \geq a \mid Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\} = \\
&= \sum_{i=a}^n P \left\{ X_k = 1, \sum_{j=1}^n Y_j = i \mid Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\} \\
&= \sum_{i=a}^n P \left\{ X_k = 1 \mid \sum_{j=1}^n Y_j = i, Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\} \times \\
&\quad \times P \left\{ \sum_{j=1}^n Y_j = i \mid Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\} \\
&= \sum_{i=a}^n \left[ P \left\{ X_k = 1 \mid Y_k = 1, \sum_{j=1}^n Y_j = i, Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\} \times \right. \\
&\quad \times P \left\{ Y_k = 1 \mid \sum_{j=1}^n Y_j = i, Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\} + \\
&\quad \left. + P \left\{ X_k = 1 \mid Y_k = 0, \sum_{j=1}^n Y_j = i, Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\} \times \right. \\
&\quad \left. \times P \left\{ Y_k = 0 \mid \sum_{j=1}^n Y_j = i, Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\} \right] \times \\
&\quad \times P \left\{ \sum_{j=1}^n Y_j = i \mid Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\} \\
&= \sum_{i=a}^n \left[ P \left\{ X_k = 1 \mid Y_k = 1, Z_k = 1 \right\} \frac{i}{n} + P \left\{ X_k = 1 \mid Y_k = 0, Z_k = 1 \right\} \frac{n-i}{n} \right] \times \\
&\quad \times P \left\{ \sum_{j=1}^n Y_j = i \mid Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\} \\
&= \sum_{i=a}^n \left[ \frac{p_1(1-\alpha)}{p_A} \frac{i}{n} + \frac{p_1\alpha}{1-p_A} \frac{n-i}{n} \right] b_i(n, p_A),
\end{aligned}$$

e, dessa maneira:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n P \left\{ X_k = 1, \sum_{j=1}^n Y_j \geq a \mid Z_j = 1, j = 1, \dots, n \right\} &= \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=a}^n \left[ \frac{p_1(1-\alpha)}{p_A} \frac{i}{n} + \frac{p_1\alpha}{1-p_A} \frac{n-i}{n} \right] b_i(n, p_A) \\
 &= \sum_{i=a}^n \left[ \frac{p_1(1-\alpha)}{p_A} i + \frac{p_1\alpha}{1-p_A} (n-i) \right] b_i(n, p_A) \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

De (3.18) e (3.17), o número esperado de itens realmente conforme e descartados durante a inspeção no estado  $(0, 1)$  é:

$$\begin{aligned}
 E \left[ \sum_{k=1}^n X_k \mid \sum_{j=1}^n Y_j \geq a, Z_1 = \dots = Z_n = 1 \right] &= \sum_{i=a}^n \left[ \frac{p_1(1-\alpha)}{p_A} i + \frac{p_1\alpha}{1-p_A} (n-i) \right] \times \\
 &\quad \times b_i(n, p_A) \frac{1}{B_a(n, p_A)}.
 \end{aligned}$$

O número esperado de itens realmente defeituosos, inspecionados e descartados é:

$$n - E \left[ \sum_{k=1}^n X_k \mid \sum_{j=1}^n Y_j \geq a, Z_1 = \dots = Z_n = 1 \right].$$

Assim, o custo relacionado aos descartes no estado  $(0, 1)$  é:

$$\theta(0, 1) = \frac{(c_{s.c} - c_{s.nc})}{B_a(n, p_A)} \sum_{i=a}^n \left[ \frac{p_1(1-\alpha)}{p_A} i + \frac{p_1\alpha}{1-p_A} (n-i) \right] b_i(n, p_A) + n c_{s.nc}. \tag{3.19}$$

Empregando a expressão (2.13), o custo médio do sistema de controle do estado  $(0, 1)$  é:

$$\phi(0, 1) = n c_{insp} + \xi(0, 1) + \theta(0, 1).$$

Há ajuste no estado  $(0, 0)$ , ou seja,  $\sum_{j=1}^n Y_j < a$ . O custo médio dos descartes é:

$$\theta(0, 0) = \frac{(c_{s.c} - c_{s.nc})}{1 - B_a(n, p_A)} \sum_{i=0}^{a-1} \left[ \frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A} i + \frac{p_1 \alpha}{1 - p_A} (n - i) \right] b_i(n, p_A) + n c_{s.nc}. \quad (3.20)$$

Associando-a à (2.13) e (3.16), obtém-se o custo médio de controle do estado (0, 0):

$$\phi(0, 0) = n c_{insp} + \xi(0, 0) + \theta(0, 0) + c_a.$$

### 3.3.2 Custo dos estados (1, 0) e (1, 1):

Quando há mudança do estado do processo durante a fase inicial do ciclo corrente, o ponto de modificação da fração de conformidade pode ocorrer em qualquer instante entre o primeiro e o  $m$ -ésimo item produzido durante o ciclo. A probabilidade de a mudança de estado ocorrer no instante  $t$  é:

$$q_m(t) = \frac{(1 - \pi)^{t-1} \pi}{1 - (1 - \pi)^m}, \quad t = 1, \dots, m. \quad (3.21)$$

O número esperado de itens não-conformes produzidos na fase inicial do ciclo é:

$$\sum_{t=1}^m q_m(t) [(t - 1)(1 - p_1) + (m - t + 1)(1 - p_2)].$$

Por outro lado, durante a coleta da amostra, o número esperado de itens defeituosos não inspecionados é  $(1 - p_2)(R - n)$ , já que toda a inspeção ocorre com a produção fora de controle. Assim, o custo médio de itens não-conformes enviados ao mercado nos estado em que  $w = 1$ , para  $s = 0, 1$ , é:

$$\xi(1, s) = c_{nc} \left\{ \sum_{t=1}^m q_m(t) [(t - 1)(1 - p_1) + (m - t + 1)(1 - p_2)] + (1 - p_2)(R - n) \right\}.$$

Os custos médios de descarte dos itens inspecionados dos estados (1, 0) e (1, 1) são similares, respectivamente, à (3.20) e (3.19), exceto pela probabilidade de classificar um item como conforme, que diminui para  $p_D$ . Esses custos são, respectivamente:

$$\theta(1, 0) = \frac{(c_{s.c} - c_{s.nc})}{1 - B_a(n, p_D)} \sum_{i=0}^{a-1} \left[ \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} i + \frac{p_2 \alpha}{1 - p_D} (n - i) \right] b_i(n, p_D) + n c_{s.nc}, \quad (3.22)$$

e

$$\theta(1,1) = \frac{(c_{s.c} - c_{s.nc})}{B_a(n, p_D)} \sum_{i=a}^n \left[ \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} i + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n-i) \right] b_i(n, p_D) + n c_{s.nc}. \quad (3.23)$$

Os custos médios do sistema de controle dos estados (1, 0) e (1, 1) são respectivamente:

$$\phi(1,0) = n c_{insp} + \xi(1,0) + \theta(1,0) + c_a$$

e

$$\phi(1,1) = n c_{insp} + \xi(1,1) + \theta(1,1).$$

### 3.3.3 Custo dos estados (2, 0) e (2, 1):

Quando a proporção de itens conformes do processo se modifica durante a coleta da amostra do ciclo corrente, pelo menos um dos itens inspecionados é produzido com o processo fora de controle. O instante da mudança se dá em um dos  $R$  itens produzidos no final do ciclo. A probabilidade de a mudança de estado ocorrer no  $t$ -ésimo item produzido na fase de inspeção do ciclo, dado que ela ocorra durante a amostragem é:

$$q_R(t) = \frac{(1-\pi)^{t-1}\pi}{1-(1-\pi)^R}, \quad t = 1, \dots, R,$$

e a quantidade de itens inspecionados antes da mudança de estado ( $k$ ) é:

$$k = \begin{cases} \left\lceil \frac{t-1}{d} \right\rceil & , n > 1 \\ 0 & , n = 1, \end{cases} \quad (3.24)$$

em que  $\lceil x \rceil$  é o menor inteiro maior ou igual a  $x$ . O número esperado de itens não-conformes produzidos e enviados ao mercado durante a coleta da amostra,  $\nu(2, s)$ ,  $s = 0, 1$ , é:

$$\nu(2, s) = \begin{cases} \sum_{t=1}^R q_R(t) \left\{ [t - (k + 1)](1 - p_1) + [R - n - (t - (k + 1))](1 - p_2) \right\}, & \text{se } n > 1 \\ 0, & \text{se } n = 1. \end{cases} \quad (3.25)$$

Durante a fase inicial do ciclo, o processo está sob controle e o número esperado de itens defeituosos produzidos é  $(1 - p_1)m$ . O custo médio de envio de itens não-conformes ao mercado é:

$$\xi(2, s) = c_{nc} [m(1 - p_1) + \nu(2, s)], \quad s = 0, 1. \quad (3.26)$$

Dado que o estado do ciclo seja  $(2, 1)$ , a probabilidade de a mudança de estado ocorrer exatamente no primeiro item inspecionado é:

$$\frac{(1 - \pi)^m}{P_{(0,0),(2,1)}}.$$

Nessa situação, todos os itens inspecionados são produzidos com o processo de produção fora de controle e o custo médio de descarte dos itens realmente conformes é:

$$c_{sc} \sum_{j=a}^n \left[ \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} j + \frac{p_2}{1 - p_D} (n - j) \right] b_j(n, p_D).$$

Por sua vez, dado que, durante a amostragem, ocorra mudança de estado do processo e decida-se por seu ajuste, a probabilidade de ela ocorrer após a coleta de  $k$  itens da amostra,  $1 \leq k \leq n - 1$ , em um instante qualquer até a produção do  $(k + 1)$ -ésimo elemento amostral, é:

$$\frac{(1 - \pi)^{m+(k-1)d+1} [1 - (1 - \pi)^d]}{P_{(0,0),(2,1)}}.$$

Nesse caso, os itens da amostra são coletados em situações distintas de operação e as quantidades de itens declarados conformes antes e depois da mudança de estado têm distribuições de probabilidade diferentes (3.8). Com as mesmas considerações adotadas no desenvolvimento da expressão (3.12), obtém-se a quantidade média de itens descartados realmente conformes, que é:

$$\sum_{u=0}^k \sum_{j=a}^n \left[ \frac{p_1(1-\alpha)}{p_A} u + \frac{p_1\alpha}{1-p_A} (k-u) + \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} (j-u) + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n-k-j+u) \right] b_u(k, p_A) b_{j-u}(n-k, p_D),$$

em que  $u$  é a quantidade de itens declarados conformes, produzidos com o processo sob controle e  $j$  conta as classificações de conformidade durante toda a amostragem, com  $a \leq i + j \leq n$ .

Sejam  $\eta_c(2, 1)$  e  $\eta_{nc}(2, 1)$ , respectivamente, a quantidade média de itens inspecionados e descartados realmente conformes e realmente não-conformes. Considerando-se todas as possibilidades de coletar elementos amostrais com o processo sob controle, tem-se:

$$\begin{aligned} \eta_c(2, 1) = & \frac{(1-\pi)^m}{P_{(0,0),(2,1)}} \left\{ \pi \sum_{j=a}^n \left[ \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} j + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n-j) \right] b_j(n, p_D) + \right. \\ & + (1-\pi) \left[ 1 - (1-\pi)^d \right] \sum_{k=1}^{n-1} (1-\pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k \sum_{j=a}^n \left[ \frac{p_1(1-\alpha)}{p_A} u + \right. \\ & + \frac{p_1\alpha}{1-p_A} (k-u) + \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} (j-u) + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n-k-j+u) \left. \right] \times \\ & \left. \times b_u(k, p_A) b_{j-u}(n-k, p_D) \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

A quantidade média de itens inspecionados e descartados realmente não-conformes é calculada por  $\eta_{nc}(2, 1) = n - \eta_c(2, 1)$ . O custo médio de descarte dos itens inspecionados do estado  $(2, 1)$  é:

$$\theta(2, 1) = (c_{s-c} - c_{s-nc}) \eta_c(2, 1) + n c_{s-nc}. \quad (3.28)$$

Empregando (2.13), obtém-se o custo esperado do sistema de controle do estado  $(2, 1)$ :

$$\phi(2, 1) = n c_{insp} + \xi(2, 1) + \theta(2, 1).$$

Sejam:  $\eta_c(2, 0)$ , a quantidade média de itens descartados realmente conformes do estado  $(2, 0)$  e  $\eta_{nc}(2, 0)$ , realmente não-conformes. A expressão de  $\eta_c(2, 0)$  é similar a (3.27), considerando-se porém que  $\sum_{j=1}^n Y_j < a$ . Tem-se assim que:

$$\begin{aligned} \eta_c(2, 0) = & \frac{(1 - \pi)^m}{P_{(0,0),(2,0)}} \left\{ \pi \sum_{j=0}^{a-1} \left[ \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} j + \frac{p_2\alpha}{1 - p_D} (n - j) \right] b_j(n, p_D) + \right. \\ & + (1 - \pi) \left[ 1 - (1 - \pi)^d \right] \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k \sum_{j=0}^{a-1} \left[ \frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A} u + \right. \\ & + \frac{p_1\alpha}{1 - p_A} (k - u) + \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} (j - u) + \frac{p_2\alpha}{1 - p_D} (n - k - j + u) \left. \right] \times \\ & \left. \times b_u(k, p_A) b_{j-u}(n - k, p_D) \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

A quantidade média de itens realmente não-conformes, inspecionados e descartados, é  $\eta_{nc}(2, 0) = n - \eta_c(2, 0)$ . O custo médio de descarte do estado  $(2, 0)$  é:

$$\theta(2, 0) = (c_{s,c} - c_{s,nc}) \eta_c(2, 0) + n c_{s,nc}. \quad (3.30)$$

Considerando-se (2.13) e (3.26), tem-se o custo esperado do sistema de controle do estado  $(2, 0)$ :

$$\phi(2, 0) = n c_{insp} + \xi(2, 0) + \theta(2, 0) + c_a.$$

### 3.3.4 Custo dos estados $(3, 0)$ e $(3, 1)$ :

Os custos médios dos estados  $(3, 1)$  e  $(3, 0)$  são similares àqueles apresentados na Seção 3.3.1, mas com o processo de produção operando fora de controle desde o ciclo anterior. Assim, os custos médios relacionados ao estado  $(3, 0)$  são:

$$\xi(3, 0) = c_{nc}(1 - p_2)(m + R - n), \quad (3.31a)$$

$$\theta(3, 0) = \frac{(c_{s-c} - c_{s-nc})}{1 - B_a(n, p_D)} \sum_{i=0}^{a-1} \left[ \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} i + \frac{p_2\alpha}{1 - p_D} (n - i) \right] b_i(n, p_D) + n c_{s-nc}, \quad (3.31b)$$

$$\phi(3, 0) = n c_{insp} + \xi(3, 0) + \theta(3, 0) + c_a \quad (3.31c)$$

e, para o estado (3, 1), são:

$$\xi(3, 1) = c_{nc}(1 - p_2)(m + R - n) \quad (3.32a)$$

$$\theta(3, 1) = \frac{(c_{s-c} - c_{s-nc})}{B_a(n, p_D)} \sum_{i=a}^n \left[ \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} i + \frac{p_2\alpha}{1 - p_D} (n - i) \right] b_i(n, p_D) + n c_{s-nc}, \quad (3.32b)$$

$$\phi(3, 1) = n c_{insp} + \xi(3, 1) + \theta(3, 1). \quad (3.32c)$$

### 3.4 Custo médio da produção

O custo esperado por ciclo de inspeção pode ser calculado em termos dos estados da cadeia de Markov, sendo dado por:

$$E(\Phi) = \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) \phi(w, s). \quad (3.33)$$

Com as considerações da Seção 2.5, podemos afirmar que, para uma quantidade suficientemente grande de itens produzidos, o custo médio por item enviado ao mercado  $[C(m, n, a)]$  é a razão do custo esperado do sistema de controle por ciclo de inspeção (3.33) e  $m + R - n$ , a quantidade de itens enviados ao mercado em cada ciclo. Logo,

$$\begin{aligned} C(m, n, a) &= \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) \phi(w, s)}{m + R - n} \\ &= \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) [n c_{insp} + \xi(w, s) + \theta(w, s) + \varphi(w, s)]}{m + R - n}. \end{aligned}$$



A determinação dos valores de  $m$ ,  $n$  e  $a$  de maneira a minimizar  $C(m, n, a)$  é a solução do problema:

$$(m^0, n^0, a^0) = \arg \min_{(m, n, a)} C(m, n, a).$$

Como nos casos precedentes, os parâmetros ótimos são encontrados através de busca exaustiva.

### 3.5 Aplicação numérica

A metodologia proposta é aplicada no exemplo numérico (*caso padrão*) detalhado na Seção 2.6, conservando-se os valores dos componentes de custo e dos parâmetros probabilísticos do processo. São os seguintes os parâmetros de otimização da função de custo unitário: o intervalo entre amostragens,  $m$ , o tamanho amostral,  $n$  e a quantidade mínima de itens conformes para se considerar o processo de produção sob controle,  $a$ . Eles são encontrados por busca direta, por rotina desenvolvida para Matlab<sup>©</sup> (ver Apêndice A). O parâmetro fixo do sistema de coleta amostral adotado é  $d = 1$ . A figura 3.4 mostra as curvas do custo esperado *versus* o tamanho da amostra,  $n$ , o critério de decisão  $a$  e o intervalo entre amostragens,  $m$ . Salienta-se que, para um  $m$  fixo, o custo considerado no gráfico refere-se sempre ao menor valor encontrado na busca. Por exemplo, para  $m = 160$ , os parâmetros  $n = a = 3$  correspondem ao custo \$0,170650, que é o menor possível para esse valor de  $m$ . A melhor política é  $m^0 = 197$ ,  $n^0 = 4$  e  $a^0 = 4$ , correspondendo a um custo unitário de \$0,17028. A quantidade mínima de itens conformes para decidir-se pela não intervenção no processo ( $a$ ) é o próprio tamanho amostral. Esse fato é esperado, em vista de serem elevados os valores da fração de conformidade antes e depois da mudança de estado do processo ( $p_1$  e  $p_2$ ), o que induziria uma grande parcela de itens amostrais conformes para assegurar-se que o processo de produção permanece sob controle. A política ótima conforme o proposto por Borges et al. (2001) (inspeção unitária a intervalos fixos) aponta  $m^0 = 51$ , que conduz a um custo médio de \$0,17048 por unidade. Esse valor é muito próximo, portanto, daquele obtido pela estratégia de controle proposta neste trabalho.

O comportamento do procedimento em estudo é analisado em exemplo semelhante ao relatado em

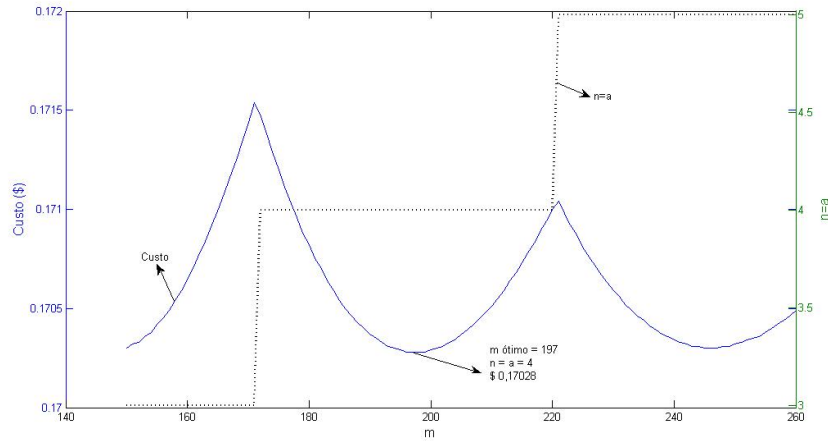


Figura 3.4: Gráfico do custo esperado *vs m e n*.

Taguchi et al. (2004). Considera-se que, em um instante aleatório, a fração de conformidade do processo diminui para  $p_2 = 0.50$ . O custo do ajuste do processo é  $c_a = 1000$ . Os demais parâmetros probabilísticos e componentes de custo são mantidos iguais a seus correspondentes no exemplo numérico detalhado no início da Seção 2.6. A política ótima de controle obtida é  $m^0 = 135$ ,  $n^0 = 5$  e  $a^0 = 4$ , implicando um custo unitário de \$0,315924. Caso seja utilizada a estratégia de amostra unitária a intervalo fixos (Borges et al., 2001), o intervalo ótimo é  $m^0 = 97$ , que oferece um custo médio de \$0,39842 por unidade, 26,1% maior que o proposto neste trabalho.

Observa-se que custos de inspeção mais elevados, em processos de produção com possibilidade de operação com diminuição significativa da fração de conformidade do processo, aparentemente favorecem a política de amostras não-unitárias.

### 3.6 Controle *on-line* com amostra não-unitária e intervalo de amostragem variável

O modelo ora em estudo pode ser estendido através de procedimento similar àquele proposto no Capítulo 2. Assim, no início da produção ou imediatamente após ajustes no processo, produzem-se  $L$  itens na fase inicial do ciclo de monitoramento, cujo comprimento final é  $L + R$ . Os ciclos

subseqüentes à decisão de não se intervir no processo, por sua vez, têm comprimento  $m + R$ . Essa regra para estabelecimento da fase inicial do ciclo é a única exceção às hipóteses do modelo detalhadas no início do presente capítulo (pág. 45). O fluxograma do sistema de controle do processo (Fig. 3.5) está resumido a seguir:

- (1) O processo de produção inicia-se sob controle;
- (2) Produzem-se  $L$  itens durante a fase inicial do ciclo de monitoramento;
- (3) Produz-se e inspeciona-se o primeiro dos  $R$  itens fabricados durante a coleta da amostra;
- (4) Produzem-se  $d$  itens, inspecionando-se o último deles. Essa operação é repetida  $(n - 1)$  vezes, até a conclusão da amostragem;
- (5) Se a quantidade de itens inspecionados declarados conformes for menor que  $a$ , o processo é ajustado, retornando ao passo (1);
- (6) Caso contrário, decide-se pela não intervenção no processo e inicia-se o próximo ciclo de monitoramento, com a produção de  $m$  itens durante a fase inicial do ciclo, após a qual procede-se à coleta da amostra [passo (3)].

### 3.6.1 A cadeia de Markov

O processo de produção é modelado através de uma cadeia de Markov. Seus estados são aqueles definidos na Seção 3.2, cuja matriz de probabilidades de transição é  $\mathbf{P}$  (3.5). As expressões (3.1) e (3.2) fornecem respectivamente os valores de  $p_A$  e  $p_D$ .

As transições após intervenção no processo,  $w = 0$ , sempre se dão através de ciclos de comprimento  $L + R$ . As probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$ , para os estados  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$  são similares respectivamente à (3.6) e (3.7), com exceção do comprimento da fase inicial do ciclo,  $L$ . Têm-se assim que:

$$P_{(w,0),(0,0)} = (1 - \pi)^{L+R} [1 - B_a(n, p_A)] \quad (3.34)$$

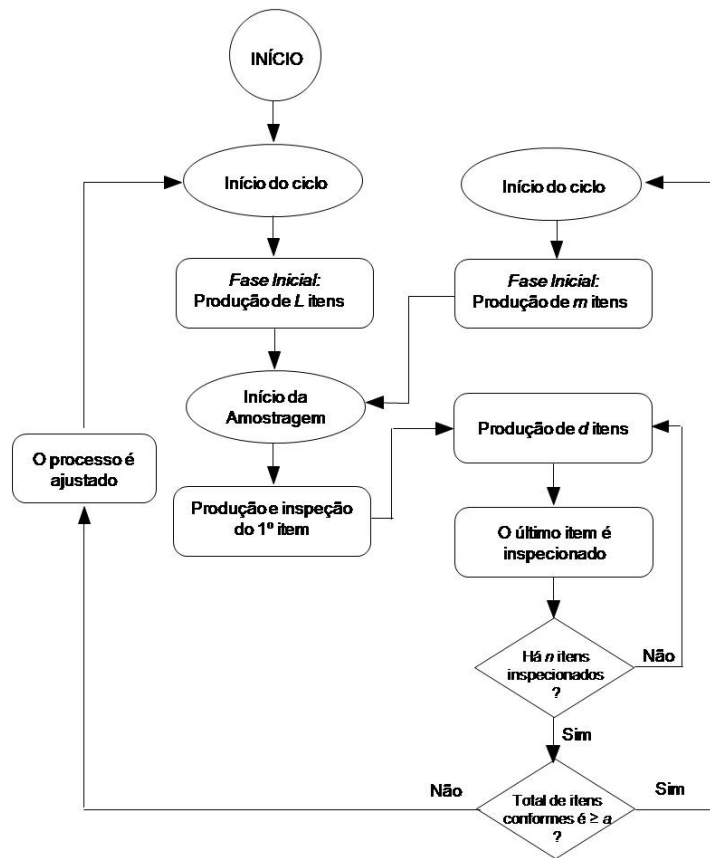


Figura 3.5: Fluxograma do processo (intervenção e controle).

e

$$P_{(w,0),(0,1)} = (1 - \pi)^{L+R} B_a(n, p_A).$$

A probabilidade de pelo menos um dos  $L$  primeiros itens do ciclo ser produzido com a produção operando sob controle é  $1 - (1 - \pi)^L$ . As probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$ , para estados em que há mudança na situação de controle do processo na fase inicial do ciclo ( $w = 1$ ) são dadas por:

$$P_{(w,0),(1,0)} = [1 - (1 - \pi)^L] [1 - B_a(n, p_D)]$$

e

$$P_{(w,0),(1,1)} = [1 - (1 - \pi)^L] B_a(n, p_D).$$

A probabilidade de ocorrer mudança de estado do processo durante a coleta de amostra de ciclo imediatamente após ajuste ( $w = 2$ ) é:

$$(1 - \pi)^L [1 - (1 - \pi)^R].$$

A mudança de estado do processo pode ocorrer exatamente no primeiro item inspecionado ou em algum instante após a coleta do primeiro elemento amostral. A probabilidade de a mudança de estado ocorrer exatamente no primeiro item inspecionado é:

$$(1 - \pi)^L \pi$$

e a probabilidade de que  $k$  itens inspecionados sejam produzidos com o processo sob controle, dado que houve mudança na condição de operação da produção durante a amostragem, é:

$$(1 - \pi)^{L+(k-1)d+1} [1 - (1 - \pi)^d]. \quad (3.35)$$

Assim, a expressão da probabilidade de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$  é similar à (3.13), sendo dada por:

$$P_{(w,0),(2,1)} = (1 - \pi)^L \left\{ \pi B_a(n, p_D) + (1 - \pi) [1 - (1 - \pi)^d] \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) \sum_{j=a}^n b_{j-u}(n - k, p_D) \right\}. \quad (3.36)$$

Considerando-se (3.35) e (3.36), tem-se que:

$$P_{(w,0),(2,0)} = (1 - \pi)^L [1 - (1 - \pi)^R] - P_{(w,0),(2,1)}.$$

Após ajuste do processo, não são possíveis transições para os estados da cadeia em que o ciclo inicia-se com a produção já operando fora de controle ( $w = 3$ ), assim:

$$P_{(w,0),(3,0)} = P_{(w,0),(3,1)} = 0.$$

As expressões das probabilidades de transição a partir do estado  $(0, 1)$ , são similares às descritas acima, considerando-se entretanto que, nesse caso, os ciclos de monitoramento têm comprimento  $m + R$ . Dessa maneira, têm-se que:

$$\begin{aligned} P_{(0,1),(0,0)} &= (1 - \pi)^{m+R} [1 - B_a(n, p_A)], \\ P_{(0,1),(0,1)} &= (1 - \pi)^{m+R} B_a(n, p_A), \\ P_{(0,1),(1,0)} &= [1 - (1 - \pi)^m] [1 - B_a(n, p_D)], \\ P_{(0,1),(1,1)} &= [1 - (1 - \pi)^m] B_a(n, p_D), \\ P_{(0,1),(2,1)} &= (1 - \pi)^m \left\{ \pi B_a(n, p_D) + (1 - \pi) [1 - (1 - \pi)^d] \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) \sum_{j=a}^n b_{j-u}(n - k, p_D) \right\}, \\ P_{(0,0),(2,0)} &= (1 - \pi)^m [1 - (1 - \pi)^R] - P_{(0,1),(2,1)}, \\ P_{(0,1),(3,0)} &= P_{(w,0),(3,1)} = 0. \end{aligned}$$

A partir dos estados  $(w, 1)$ ,  $w > 0$ , são possíveis transições apenas para estados em que o processo está fora de controle desde o instante inicial do ciclo, que tem comprimento  $m + R$ . Assim:

$$\begin{aligned} P_{(w,1),(3,0)} &= 1 - B_a(n, p_D), \\ P_{(w,1),(3,1)} &= B_a(n, p_D) \quad \text{e} \\ P_{(w,1),(v,0)} &= P_{(w,1),(v,1)} = 0, \text{ para } v = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

### 3.6.2 Distribuição estacionária da cadeia

Conhecida a distribuição estacionária da cadeia,  $\boldsymbol{\pi}$ , dada por (3.14), pode-se determinar a probabilidade de o ciclo corrente iniciar-se imediatamente após um ajuste, ou seja, a probabilidade de

o ciclo corrente ter comprimento  $L + R$ . Sejam  $p_L(w, s)$  a probabilidade de o estado  $(w, s)$  ter comprimento  $L + R$  e  $p_m(w, s)$ , comprimento  $m + R$ ,  $p_m(w, s) = 1 - p_L(w, s)$ . O ciclo corrente tem comprimento  $L + R$  apenas se o processo sofreu um ajuste no ciclo imediatamente anterior, correspondendo às linhas da matriz  $\mathbf{P}$  em que  $s = 0$ . Empregando-se a distribuição estacionária da cadeia, determinam-se os valores de  $P_L(w, s)$ . Por exemplo,  $p_L(0, 0)$  denota a probabilidade de o estado corrente ser  $(0, 0)$  em um ciclo de comprimento  $L + R$ . Nesse caso, é necessário que tenha ocorrido um ajuste ao final do ciclo anterior, isto é, os estados possíveis no ciclo anterior devem ser  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$  ou  $(3, 0)$ , ou seja:

$$p_L(0, 0) = \sum_{k=0}^3 P \{ (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k, 0) | (W_i, S_i) = (0, 0) \}.$$

Pelo teorema de Bayes, tem-se que:

$$p_L(0, 0) = \frac{\sum_{k=0}^3 P \{ (W_i, S_i) = (0, 0) | (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k, 0) \} P \{ (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k, 0) \}}{P \{ (W_i, S_i) = (0, 0) \}}, \quad (3.37)$$

em que,  $P \{ (W_i, S_i) = (0, 0) | (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k, 0) \}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  são as probabilidades de transição da cadeia, denotadas por  $P_{(k,0),(0,0)}$ . De (3.34) tem-se que:

$$P_{(0,0),(0,0)} = P_{(1,0),(0,0)} = P_{(2,0),(0,0)} = P_{(3,0),(0,0)}.$$

Por sua vez, pelas propriedades da distribuição estacionária da cadeia, tem-se que:

$$P \{ (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k, 0) \} = P \{ (W_i, S_i) = (k, 0) \} = \pi(k, 0).$$

A expressão (3.37) torna-se então:

$$p_L(0, 0) = \frac{P_{(0,0),(0,0)} \sum_{k=0}^3 \pi(k, 0)}{\pi(0, 0)}.$$

Generalizando-se, os valores de  $p_L(w, s)$  podem ser obtidos por:

$$p_L(w, s) = \frac{P_{(0,0),(w,s)} \sum_{k=0}^3 \pi(k, 0)}{\pi(w, s)}.$$

Salienta-se que  $p_L(3, 0) = p_L(3, 1) = 0$ .

### 3.6.3 Custos dos estados da cadeia de Markov

A estrutura de custos é a mesma daquela apresentada na Seção 3.3, com a expressão geral do custo esperado de cada estado dada por (3.15). Os componentes de custo que têm expressão diferente ao calculado na Seção 3.3 são aqueles referentes aos custos de envio de itens não-conformes ao mercado, já que consideram em seu cálculo o comprimento da fase inicial do ciclo.

Nos estados em que  $w = 0$ , todo o ciclo transcorre com o processo sob controle. O número esperado de itens não inspecionados e não-conformes é:

$$[m p_m(0, s) + L p_L(0, s) + R - n] (1 - p_1), \quad s = 0, 1.$$

O custo esperado de itens não-conformes enviados ao mercado é:

$$\xi(0, s) = c_{nc} [m p_m(0, s) + L p_L(0, s) + R - n] (1 - p_1),$$

para  $s = 0, 1$ . As expressões de  $\theta(0, 0)$  e  $\theta(0, 1)$  são dadas, respectivamente, por (3.20) e (3.19). Associadas à (2.13), têm-se:

$$\phi(0, 0) = n c_{insp} + \xi(0, 0) + \theta(0, 0) + c_a$$

e

$$\phi(0, 1) = n c_{insp} + \xi(0, 1) + \theta(0, 1).$$

No caso em que  $w = 1$ , a mudança de estado do processo ocorre em algum instante entre o primeiro e o último item produzidos na fase inicial do ciclo. Nos ciclos de comprimento  $m + R$ , a probabilidade



de a mudança de estado ocorrer no instante  $t$  é dada pela por  $q_m(t)$  (3.21). Similarmente, quando o comprimento da fase inicial do ciclo é  $L$ , essa probabilidade é dada por:

$$q_L(t) = \frac{(1 - \pi)^{t-1} \pi}{1 - (1 - \pi)^L}, \quad t = 1, \dots, L.$$

Assim, para os estados  $(1, s)$ ,  $s = 0, 1$ , o custo médio relacionado aos itens não-conformes enviados ao cliente é:

$$\begin{aligned} \xi(1, s) = c_{nc} \left\{ p_m(1, s) \sum_{t=1}^m q_m(t) [(t-1)(1-p_1) + (m-t+1)(1-p_2)] + \right. \\ \left. + p_L(1, s) \sum_{t=1}^L q_L(t) [(t-1)(1-p_1) + (L-t+1)(1-p_2)] + \right. \\ \left. + (1-p_2)(R-n) \right\}, \quad s = 0, 1. \end{aligned}$$

Os valores de  $\theta(1, 0)$  e  $\theta(1, 1)$  são calculados, respectivamente, através das expressões (3.22) e (3.23), que, associadas à (2.13), levam a:

$$\phi(1, 0) = n c_{insp} + \xi(1, 0) + \theta(1, 0) + c_a$$

e

$$\phi(1, 1) = n c_{insp} + \xi(1, 1) + \theta(1, 1).$$

Quando a mudança de estado do processo ocorre durante a amostragem ( $w = 2$ ), toda a fase inicial do ciclo ocorre com o processo de produção sob controle. O custo esperado de itens não-conformes enviados ao mercado do estado  $(2, s)$ ,  $s = 0, 1$ , é:

$$\xi(2, s) = c_{nc} [(m p_m(2, s) + L p_L(2, s)) (1 - p_1) + \nu(2, s)],$$

com  $\nu(2, s)$  dado por (3.25). As expressões (3.30) e (3.28) fornecem, respectivamente,  $\theta(2, 0)$  e  $\theta(2, 1)$ . Empregando (2.13) têm-se:

$$\phi(2, 0) = n c_{insp} + \xi(2, 0) + \theta(2, 0) + c_a$$

e

$$\phi(2, 1) = n c_{insp} + \xi(2, 1) + \theta(2, 1).$$

Por fim, nas situações em que o processo de produção opera fora de controle desde ciclos anteriores ( $w = 3$ ), o comprimento do ciclo é fixo e igual a  $m + R$ . Os componentes dos custos médios  $\phi(3, 0)$  e  $\phi(3, 1)$  são dados respectivamente por (3.31c) e (3.32c).

### 3.6.4 Custo médio da produção

Para uma quantidade suficientemente grande de itens produzidos, o custo esperado por ciclo de monitoramento é dado por:

$$E(\Phi) = \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) \phi(w, s),$$

a quantidade média de itens produzidos e enviados ao mercado por ciclo é:

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) [(L + R - n) p_L(w, s) + (m + R - n) p_m(w, s)] \\ &= m + R - n + (L - m) \sum_{w=0}^3 \pi(w, 0) \end{aligned}$$

e, por sua vez, com as considerações expostas na Seção 2.5, o custo médio por item produzido e enviado ao mercado é a razão entre o custo médio e a quantidade média de itens produzidos e enviados ao mercado, por ciclo entre amostragens, ou seja:

$$C(m, L, n, a) = \frac{E(\Phi)}{E(T)} = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) \phi(w, s)}{m + R - n + (L - m) \sum_{w=0}^3 \pi(w, 0)}.$$

A determinação dos valores de  $m$ ,  $n$  e  $a$  de maneira a minimizar  $C(m, n, a)$  é a solução do problema:

$$(m^0, L^0, n^0, a^0) = \arg \min_{(m, L, n, a)} C(m, L, n, a),$$

que são também obtidos através de busca exaustiva.

### 3.6.5 Aplicação numérica

Retoma-se o exemplo numérico analisado na Seção 2.6 (*caso padrão*), mantendo-se os mesmos valores dos componentes de custo e dos parâmetros probabilísticos do processo. Adota-se  $d = 1$ . Os parâmetros de otimização são os seguintes: os intervalos entre amostragens,  $m$  e  $L$ , o tamanho amostral,  $n$  e a quantidade mínima de elementos amostrais declarados conformes para não se intervir no processo,  $a$ . Os valores ótimos são calculados por busca exaustiva, em rotina desenvolvida em Matlab<sup>©</sup> (ver Apêndice A). Os parâmetros de planejamento da melhor política de controle são  $m^0 = 41$ ,  $L^0 = 896$ ,  $n^0 = 1$  e  $a^0 = 1$ , importando custo unitário de \$0,16231. Essa é a mesma política obtida na Seção 2.6, ou seja, refere-se à estratégia de intervalo variável com amostra unitária.

Aplica-se o procedimento proposto no exemplo introduzido na página 66, da Seção 3.5 ( $p_2 = 0,50$  e  $c_a = 1000$ ). A política ótima de monitoramento é  $m^0 = 135$ ,  $L^0 = 169$ ,  $n^0 = 5$  e  $a^0 = 4$ , correspondendo a um custo unitário de \$0,315862. O valor encontrado é aproximadamente igual ao obtido com intervalo de amostragem fixo e amostra não-unitária (0,315924). Do resultado, observa-se que o tamanho amostral não-unitário tende a diminuir a influência do intervalo de amostragem variável ( $L \approx m$ ).

## 3.7 Comentários adicionais

Trabalhos anteriores relacionados com controle *on-line* para atributos, com ou sem erros de classificação, apresentam planejamentos econômicos ótimos em que se inspeciona um único item a intervalos fixos. Nesse trabalho, propõe-se amostras não-unitárias em que é possível considerar incapacidade física do sistema para coletar peças consecutivamente. O modelo desenvolvido é uma

generalização do sistema de controle a intervalos de amostragem variáveis, analisado no Capítulo 2.

Os resultados das Seções 3.5 e 3.6.5 indicam que há situações para as quais essa estratégia de controle pode reduzir o custo esperado por item produzido e enviado ao mercado.

## Capítulo 4

# Generalização do Modelo de Controle *On-line*

A abordagem usual de um planejamento econômico é desenvolver um modelo de custo para um tipo particular de processo de produção, determinando então os parâmetros ótimos que minimizam o custo esperado por item produzido. A política de amostragem da maioria desses modelos consideram tamanho amostral e intervalo de amostragem fixos, que são referidos na literatura como política de intervalo de amostragem fixo. Há várias propostas de modificação na política de amostragem de cartas de controle, através da adoção de intervalo de amostragem variável, tamanho amostral variável, ou ambos. O objetivo é melhorar a política tradicional e, na literatura de controle de qualidade, encontram-se várias comparações entre planejamentos de cartas de controle com parâmetros fixos ou variáveis (Reynolds Jr et al., 1988; Cui e Reynolds Jr, 1988; Reynolds Jr, 1989; Parkhideh e Case, 1989; Runger e Pignatiello Jr, 1991; Costa, 1994; Baxley Jr, 1995; Reynolds Jr, 1996; Costa, 1997; Ohta e Rahim, 1997; Costa, 1999). Esses autores mostram que cartas de controle operando com uma política de parâmetros variáveis apresentam um desempenho melhor quando comparado com a política de parâmetros fixos, na medida em que eles, em geral, têm uma resposta rápida à mudança do processo. Costa e Rahim (2001) propõem uma política econômica de monitoramento de carta de controle  $\bar{X}$  em que os parâmetros de planejamento – o tamanho amostral  $n$ , o intervalo entre amostragens  $h$  e o coeficiente dos limites de controle  $k$  – variam entre dois valores, como uma função da informação mais recente do processo.

Neste capítulo é proposta uma política de monitoramento *on-line* por atributos em que o intervalo

de amostragem e o tamanho da amostra são variáveis. Seja  $s_0$  a decisão tomada no instante inicial do ciclo, decorrente do resultado da inspeção de cada amostra. Há três níveis de decisão,  $s_0 = 0, 1, 2$  que se baseiam na quantidade de itens declarados conformes durante a amostragem.  $s_0$  estabelece os parâmetros de planejamento do próximo ciclo. São eles o intervalo até o início da próxima amostragem  $[m(s_0)]$ , o tamanho da amostra  $[n(s_0)]$  e as quantidades de itens conformes que delimitam os três níveis de decisão  $[a_1(s_0)$  e  $a_2(s_0)]$ .

As suposições do modelo encontram-se estabelecidas abaixo. Elas são complementadas pelas hipóteses 1, 2, 3, 4, 6, 7 e 8, página 13 do Capítulo 2. Seja o ciclo corrente, com parâmetros de planejamento estabelecidos pela decisão  $s_0$ , tomada no final do ciclo anterior:

1. Produzem-se  $m(s_0)$  itens antes da coleta do início da amostragem;
2. A amostra é composta de  $n(s_0)$  itens,  $n(s_0) \geq 1$ ;
3. A amostra é sistemática, produzindo-se  $(d + 1)$  itens para coletar 2 elementos amostrais consecutivos,  $d \geq 1$  para  $n > 1$  e  $d = 0$ , se  $n = 1$ ;
4. Durante cada amostragem, são produzidos  $R(s_0)$  itens,  $R(s_0) = [n(s_0) - 1]d + 1$ ;
5. A decisão tomada no final da amostragem ( $s_0$ ) baseia-se na quantidade de itens classificados como conformes. Estão disponíveis três decisões que estão delimitadas por  $a_1(s_0)$  e  $a_2(s_0)$ ,  $1 \leq a_1(s_0) \leq a_2(s_0) \leq n(s_0)$ ;
6. A decisão  $s_0$  estabelece os seguintes parâmetros do próximo ciclo: a quantidade de itens a serem produzidos antes do início da amostragem  $[m(s_0)]$ , o tamanho da amostra  $[n(s_0)]$  e os delimitadores dos níveis de decisão  $[a_1(s_0)$  e  $a_2(s_0)]$ ;
7. As decisões possíveis de serem tomadas no ciclo corrente ( $s$ ), são as seguintes:
  - $s = 0$ , se a quantidade de itens declarados conformes for menor que  $a_1(s_0)$ . O processo é paralisado e ajustado. No próximo ciclo, serão produzidos  $m(0)$  itens antes do início da amostragem (fase inicial do ciclo) e  $R(0)$ , durante a coleta da amostra, que conterá  $n(0)$  elementos. Os critérios definidores da próxima decisão serão  $a_1(0)$  e  $a_2(0)$ ;

- $s = 1$ , se a quantidade de itens declarados conformes for maior ou igual a  $a_1(s_0)$  e menor que  $a_2(s_0)$ . O processo não é ajustado. A próxima amostra terá  $n(1)$  elementos, produzindo-se  $m(1)$  itens antes de sua coleta e  $R(1)$  durante a amostragem. Os critérios definidores da próxima decisão serão  $a_1(1)$  e  $a_2(1)$ ;
- $s = 2$ , se a quantidade de itens declarados conformes for maior ou igual a  $a_2(s_0)$ . O processo não é ajustado. A próxima amostra será composta por  $n(2)$  elementos. Produzem-se  $m(2)$  itens na fase inicial do próximo ciclo e  $R(2)$  durante a próxima amostragem. Os critérios definidores da próxima decisão serão  $a_1(2)$  e  $a_2(2)$ .

O fluxograma do sistema de controle (Fig. 4.1) segue os seguintes passos:

- (i) O processo de produção inicia-se sob controle;
- (ii) Produzem-se  $m(0)$  itens durante a fase inicial do ciclo de monitoramento;
- (iii) Inspeccionam-se  $n(0)$  elementos amostrais, produzindo-se  $R(0)$  itens durante a coleta da amostra;
- (iv) O processo é ajustado se a quantidade de itens classificados como conforme for menor que  $a_1(0)$ , retornando-se ao passo (i);
- (v) Se a quantidade de itens declarados conformes for maior ou igual a  $a_2(0)$ , passa-se ao passo (x);
- (vi) Produzem-se  $m(1)$  itens durante a fase inicial do ciclo;
- (vii) Inspeccionam-se  $n(1)$  elementos amostrais, produzindo-se  $R(1)$  itens durante a amostragem;
- (viii) Se a quantidade de itens classificados como conforme for menor que  $a_1(1)$ , o processo é ajustado, retornando-se ao passo (i);
- (ix) Se a quantidade de itens declarados conformes for menor que  $a_2(1)$ , retorna-se ao passo (vi);
- (x) Produzem-se  $m(2)$  itens durante a fase inicial do ciclo;

- (xi) Inspecciona-se amostra de tamanho  $n(2)$ , produzindo-se  $R(2)$  itens durante sua coleta;
- (xii) Se a quantidade de itens declarados conformes for menor que  $a_1(2)$ , o processo é ajustado, retornando-se ao passo (i);
- (xiii) Se a quantidade de itens classificados como conforme for menor que  $a_2(2)$ , retorna-se ao passo (vi);
- (xiv) Retorna-se ao passo (x).

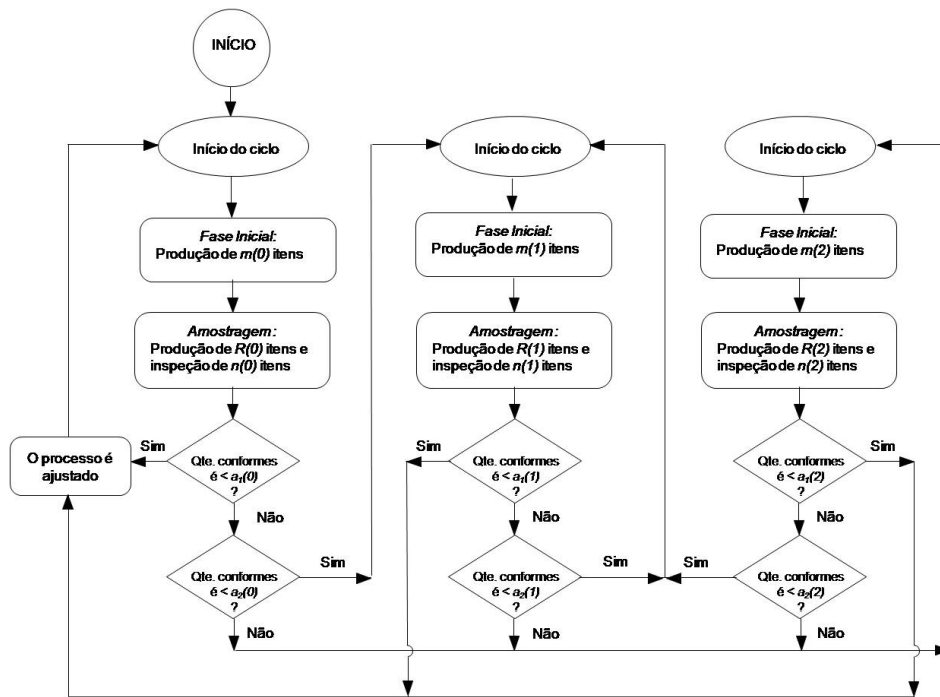


Figura 4.1: Fluxograma do processo (intervenção e controle).

O modelo é uma generalização dos sistemas de controle *on-line* propostos nos Capítulos 2 e 3. Se são possíveis apenas duas decisões: intervir ou não intervir no processo, então  $a_1(s_0) = a_2(s_0)$ . No caso do modelo proposto no Capítulo 2, têm-se:  $m(0) = L$ ,  $m(1) = m(2) = m$ ,  $n(0) = n(1) = n(2) = 1$  e  $a_1(0) = a_2(0) = a_1(1) = a_2(1) = a_1(2) = a_2(2) = 1$ . Para o sistema de monitoramento apresentado no Capítulo 3, têm-se:  $m(0) = m(1) = m(2) = m$ ,  $n(0) = n(1) = n(2) = n$  e  $a_1(0) = a_2(0) =$



$a_1(1) = a_2(1) = a_1(2) = a_2(2) = a$ . Na Seção 3.6 (pág. 67), esses valores são alterados para  $m(0) = L$  e  $m(1) = m(2) = m$ .

## 4.1 A cadeia de Markov

Adota-se a mesma notação do Capítulo 3, associando-se as variáveis aleatórias  $X_i$ ,  $Y_i$  e  $Z_i$  a cada item inspecionado (pág. 47). As classificações dos itens inspecionados são independentes e o tamanho amostral do ciclo corrente,  $n(s_0)$ , é estabelecido pela última decisão ( $s_0$ ). Quando toda a amostra for produzida com o processo sob controle, a seqüência  $\{Y_i\}, i = 1, \dots, n(s_0)$  é identicamente distribuída de acordo com uma Bernoulli de parâmetro  $p_A$  (3.1). A distribuição da quantidade de itens declarados conformes na amostragem é:

$$\sum_{i=1}^{n(s_0)} Y_i \sim \text{binomial}(n(s_0), p_A). \quad (4.1)$$

Assim, a probabilidade de ajustar o processo no ciclo corrente (decisão  $s = 0$ ) é:

$$P \left\{ \sum_{i=1}^{n(s_0)} Y_i < a_1(s_0) \mid Z_1 = \dots = Z_{n(s_0)} = 1 \right\} = 1 - B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_A), \quad (4.2)$$

a probabilidade de ser tomada a decisão  $s = 1$  é:

$$P \left\{ a_1(s_0) \leq \sum_{i=1}^{n(s_0)} Y_i < a_2(s_0) \mid Z_1 = \dots = Z_{n(s_0)} = 1 \right\} = B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_A) - B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_A), \quad (4.3)$$

e, de se adotar a decisão  $s = 2$ :

$$P \left\{ \sum_{i=1}^{n(s_0)} Y_i \geq a_2(s_0) \mid Z_1 = \dots = Z_{n(s_0)} = 1 \right\} = B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_A). \quad (4.4)$$

Caso toda a amostragem ocorra com o processo fora de controle, a distribuição da quantidade de itens classificados como conforme na amostra é:

$$\sum_{i=1}^{n(s_0)} Y_i \sim \text{binomial}(n(s_0), p_D), \quad (4.5)$$

em que  $p_D$  (3.2) é a probabilidade de se declarar um item conforme, dado que o processo esteja sob controle. Nesse caso, a probabilidade de a decisão ser  $s = 0$  é:

$$P \left\{ \sum_{i=1}^{n(s_0)} Y_i < a_1(s_0) \mid Z_1 = \dots = Z_{n(s_0)} = 0 \right\} = 1 - B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_D), \quad (4.6)$$

a probabilidade de ser tomada a decisão  $s = 1$  é:

$$P \left\{ a_1(s_0) \leq \sum_{i=1}^{n(s_0)} Y_i < a_2(s_0) \mid Z_1 = \dots = Z_{n(s_0)} = 0 \right\} = B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_D) - B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_D), \quad (4.7)$$

e, de se adotar a decisão  $s = 2$ :

$$P \left\{ \sum_{i=1}^{n(s_0)} Y_i \geq a_2(s_0) \mid Z_1 = \dots = Z_{n(s_0)} = 0 \right\} = B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_D). \quad (4.8)$$

Quando a mudança de estado do processo ocorre durante a amostragem, a distribuição da quantidade de itens classificados como conforme é uma mistura dos modelos binomiais (4.1) e (4.5).

O sistema de controle do processo de produção é modelado através de uma cadeia de Markov com espaço de estados finito, dado por:

$$E = \{(w, s); w = 0, 1, 2, 3 \text{ e } s = 0, 1, 2\}.$$

Cada estado é representado por um par ordenado  $(w, s)$ .  $w$  relaciona-se com as situações de mudança na fração de itens conformes do processo. Os valores assumidos por  $w$  são aqueles descritos na

Seção 3.2 (pág. 50).  $s$  relaciona-se com a decisão sobre o ajuste do processo e com os valores dos parâmetros de planejamento do próximo ciclo. Dependendo da quantidade de itens declarados conformes durante a amostragem,  $s$  pode assumir os seguintes valores:

- $s = 0$ , se  $\sum_{i=1}^{n(s_0)} Y_i < a_1(s_0)$ . Ajusta-se o processo e serão produzidos  $m(0)$  itens na fase inicial do próximo ciclo. Sua amostra conterà  $n(0)$  itens e os critérios delimitadores da próxima decisão serão  $a_1(0)$  e  $a_2(0)$ .
- $s = 1$ , se  $a_1(s_0) \leq \sum_{i=1}^{n(s_0)} Y_i < a_2(s_0)$ . A amostra do próximo ciclo será composta por  $n(1)$  elementos, os critérios delimitadores da próxima decisão serão  $a_1(1)$  e  $a_2(1)$  e serão produzidos  $m(1)$  itens antes da próxima amostragem.
- $s = 2$ , se  $\sum_{i=1}^{n(s_0)} Y_i \geq a_2(s_0)$ . A fase inicial do próximo ciclo terá comprimento  $m(2)$  e sua amostra terá tamanho  $n(2)$ . Os critérios delimitadores da próxima decisão serão  $a_1(2)$  e  $a_2(2)$ ;

A matriz de probabilidades de transição  $\mathbf{P}$  é:

$$\mathbf{P} = \left( P_{(w_{i-1}, s_{i-1}), (w_i, s_i)} \right)_{12 \times 12}, \quad \forall (w_i, s_i) \in E, \quad (4.9)$$

em que  $(w_i, s_i)$  é o estado da cadeia no  $i$ -ésimo ciclo de monitoramento. Após um ajuste ( $s_0 = 0$ ), o processo de produção retorna à sua condição inicial de operação sob controle, sendo possíveis transições para estados indexados por  $w = 0$ ,  $w = 1$  ou  $w = 2$ . A probabilidade de o processo permanecer sob controle no ciclo corrente é:

$$(1 - \pi)^{m(0)+R(0)}.$$

Empregando as expressões (4.2), (4.3) e (4.4), as probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$  para os estados  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(0, 2)$ , são respectivamente:

$$P_{(w,0),(0,0)} = (1 - \pi)^{m(0)+R(0)} [1 - B_{a_1(0)}(n(0), p_A)],$$

$$P_{(w,0),(0,1)} = (1 - \pi)^{m(0)+R(0)} [B_{a_1(0)}(n(0), p_A) - B_{a_2(0)}(n(0), p_A)]$$

e

$$P_{(w,0),(0,2)} = (1 - \pi)^{m(0)+R(0)} B_{a_2(0)}(n(0), p_A).$$

A probabilidade de ocorrer uma mudança de estado durante a fase inicial do ciclo imediatamente após ajuste é:

$$1 - (1 - \pi)^{m(0)}.$$

Empregando as expressões (4.6), (4.7) e (4.8), obtêm-se as probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$  para os estados  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(1, 2)$ , que são respectivamente:

$$P_{(w,0),(1,0)} = [1 - (1 - \pi)^{m(0)}] [1 - B_{a_1(0)}(n(0), p_D)],$$

$$P_{(w,0),(1,1)} = [1 - (1 - \pi)^{m(0)}] [B_{a_1(0)}(n(0), p_D) - B_{a_2(0)}(n(0), p_D)]$$

e

$$P_{(w,0),(1,2)} = [1 - (1 - \pi)^{m(0)}] B_{a_2(0)}(n(0), p_D).$$

A probabilidade de modificação na fração de itens conformes durante a amostragem do ciclo subsequente a ajuste é:

$$(1 - \pi)^{m(0)} [1 - (1 - \pi)^{R(0)}].$$

Com as considerações apresentadas no desenvolvimento de (3.13) e (3.36), pode-se afirmar que a probabilidade de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$  para os estados  $(2, 0)$ ,  $(2, 1)$  e  $(2, 2)$  são respectivamente:

$$P_{(w,0),(2,0)} = (1 - \pi)^{m(0)} \left\{ \pi [1 - B_{a_1(0)}(n(0), p_D)] + (1 - \pi) [1 - (1 - \pi)^d] \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{n(0)-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) \sum_{j=0}^{a_1(0)-1} b_{j-u}(n(0) - k, p_D) \right\},$$

$$P_{(w,0),(2,1)} = (1 - \pi)^{m(0)} \left\{ \pi [B_{a_1(0)}(n(0), p_D) - B_{a_2(0)}(n(0), p_D)] + (1 - \pi) [1 - (1 - \pi)^d] \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{n(0)-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) \sum_{j=a_1(0)}^{a_2(0)-1} b_{j-u}(n(0) - k, p_D) \right\}$$

e

$$P_{(w,0),(2,2)} = (1 - \pi)^{m(0)} \left\{ \pi B_{a_2(0)}(n(0), p_D) + (1 - \pi) [1 - (1 - \pi)^d] \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{n(0)-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) \sum_{j=a_2(0)}^{n(0)} b_{j-u}(n(0) - k, p_D) \right\}.$$

Após ajuste do processo, são impossíveis transições para estados da cadeia em que o processo de produção encontra-se fora de controle desde ciclos anteriores ( $w = 3$ ). Dessa maneira:

$$P_{(w,0),(3,0)} = P_{(w,0),(3,1)} = P_{(w,0),(3,2)} = 0.$$

As expressões das probabilidades de transições a partir dos estados  $(0, 1)$  e  $(0, 2)$  são análogas às transições desde os estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$ , exceto pelos parâmetros de planejamento do ciclo, estabelecidos pelo resultado da última inspeção ( $s_0 = 1$  ou  $s_0 = 2$ ). As probabilidades de transição a partir dos estados  $(0, s_0)$ ,  $s_0 = 1, 2$  para os estados  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(0, 2)$  são, respectivamente:

$$P_{(0,s_0),(0,0)} = (1 - \pi)^{m(s_0)+R(s_0)} [1 - B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_A)], \\ P_{(0,s_0),(0,1)} = (1 - \pi)^{m(s_0)+R(s_0)} [B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_A) - B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_A)]$$

e

$$P_{(0,s_0),(0,2)} = (1 - \pi)^{m(s_0)+R(s_0)} B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_A).$$

As probabilidades de transição de  $(0, s_0)$ ,  $s_0 = 1, 2$  para os estados  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(1, 2)$  são:

$$P_{(0,s_0),(1,0)} = [1 - (1 - \pi)^{m(s_0)}] [1 - B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_D)],$$

$$P_{(0,s_0),(1,1)} = [1 - (1 - \pi)^{m(s_0)}] [B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_D) - B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_D)]$$

e

$$P_{(0,s_0),(1,2)} = [1 - (1 - \pi)^{m(s_0)}] B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_D).$$

As transições de  $(0, s_0)$  para os estados  $(2, 0)$ ,  $(2, 1)$  e  $(2, 2)$  têm probabilidades dadas por:

$$P_{(0,s_0),(2,0)} = (1 - \pi)^{m(s_0)} \left\{ \pi [1 - B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_D)] + (1 - \pi) [1 - (1 - \pi)^d] \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=1}^{n(s_0)-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) \sum_{j=0}^{a_1(s_0)-1} b_{j-u}(n(s_0) - k, p_D) \right\},$$

$$P_{(0,s_0),(2,1)} = (1 - \pi)^{m(s_0)} \left\{ \pi [B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_D) - B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_D)] + (1 - \pi) [1 - (1 - \pi)^d] \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=1}^{n(s_0)-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) \sum_{j=a_1(s_0)}^{a_2(s_0)-1} b_{j-u}(n(s_0) - k, p_D) \right\}$$

e

$$P_{(0,s_0),(2,2)} = (1 - \pi)^{m(s_0)} \left\{ \pi B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_D) + (1 - \pi) [1 - (1 - \pi)^d] \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=1}^{n(s_0)-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) \sum_{j=a_2(0)}^{n(s_0)} b_{j-u}(n(s_0) - k, p_D) \right\},$$

tendo-se ainda que:

$$P_{(0,s_0),(3,0)} = P_{(0,s_0),(3,1)} = P_{(0,s_0),(3,2)} = 0.$$

A partir dos estados  $(w, s)$ ,  $w > 0$ ,  $s_0 = 1, 2$  não são possíveis transições para estados que não são iniciados sob controle. Assim:

$$P_{(w,s_0),(3,0)} = 1 - B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_D),$$

$$P_{(w,s_0),(3,1)} = B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_D) - B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_D)$$

e

$$P_{(w,s_0),(3,2)} = B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_D).$$

Com:

$$P_{(w,s_0),(0,s)} = P_{(w,s_0),(1,s)} = P_{(w,s_0),(2,s)} = 0, \text{ para, } s = 1, 2.$$

## 4.2 Distribuição invariante

A matriz de probabilidades de transição  $\mathbf{P}$  possui uma distribuição invariante denotada pelo vetor:

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi(w, s); w = 0, 1, 2, 3; s = 0, 1, 2]'$$

Ela é calculada pelo procedimento descrito na Seção 2.10. Conhecido  $\boldsymbol{\pi}$ , determina-se a probabilidade de cada decisão ter precedido o ciclo atual. Seja  $p_{s_0}(w, s)$  a probabilidade de o estado  $(w, s)$  ter ciclo com parâmetros estabelecidos pela decisão  $s_0$ . Por exemplo,  $p_0(w, s)$  denota a probabilidade de o ciclo corrente ter comprimento  $m(0) + R(0)$ , dado que seu estado seja  $(w, s)$ ,  $\forall (w, s) \in E$ , ou seja:

$$p_0(w, s) = \sum_{k=0}^3 P \{ (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k, 0) | (W_i, S_i) = (w, s) \}.$$

Pelo teorema de Bayes, tem-se:

$$\begin{aligned} p_0(w, s) &= \frac{\sum_{k=0}^3 P \{ (W_i, S_i) = (w, s) | (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k, 0) \} P \{ (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k, 0) \}}{P \{ (W_i, S_i) = (w, s) \}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^3 P_{(k,0),(w,s)} \pi(k, 0)}{\pi(w, s)} \end{aligned}$$

Da matriz  $\mathbf{P}$ , verifica-se que todas as linhas correspondentes à  $s_0 = 0$  são iguais, ou seja:

$$P_{(0,0),(w,s)} = P_{(1,0),(w,s)} = P_{(2,0),(w,s)} = P_{(3,0),(w,s)},$$

então:

$$p_0(w, s) = \frac{P_{(0,0),(w,s)} \sum_{k=0}^3 \pi(k, 0)}{\pi(w, s)}. \quad (4.10)$$

Não é possível alcançar os estados  $(3, s)$ ,  $s = 0, 1, 2$  após um ajuste do processo (decisão  $s_0 = 0$ ), assim:

$$p_0(3, s) = 0, \quad s = 0, 1, 2 \quad (4.11)$$

De maneira similar, dado o estado do ciclo corrente ser  $(w, s)$ , a probabilidade de a decisão anterior ser  $s_0 = 1$  é:

$$p_1(w, s) = \frac{\sum_{k=0}^3 P_{(k,1),(w,s)} \pi(k, 1)}{\pi(w, s)}, \quad \forall (w, s) \in E.$$

Da matriz  $\mathbf{P}$  (4.9), têm-se, para  $s = 0, 1, 2$ :

$$p_1(w, s) = \begin{cases} \frac{P_{(0,1),(w,s)} \pi(0, 1)}{\pi(w, s)} & , \quad w \neq 3 \\ \frac{P_{(1,1),(3,s)} \sum_{k=1}^3 \pi(k, 1)}{\pi(3, s)} & , \quad w = 3. \end{cases} \quad (4.12)$$

Por outro lado, a probabilidade de a decisão anterior ser  $s_0 = 2$ , dado ser  $(w, s)$  o estado do ciclo corrente, é:

$$p_2(w, s) = \frac{\sum_{k=0}^3 P_{(k,2),(w,s)} \pi(k, 2)}{\pi(w, s)}, \quad \forall (w, s) \in E,$$

ou seja, para  $s = 0, 1, 2$ :

$$p_2(w, s) = \begin{cases} \frac{P_{(0,2),(w,s)} \pi(0, 2)}{\pi(w, s)} & , \quad w \neq 3 \\ \frac{P_{(1,2),(3,s)} \sum_{k=1}^3 \pi(k, 2)}{\pi(3, s)} & , \quad w = 3. \end{cases} \quad (4.13)$$



### 4.3 Custos dos estados da cadeia

A estrutura de custo é a mesma dos capítulos anteriores, cujos componentes são detalhados no início da Seção 2.4 (pág. 24). A expressão geral do custo de cada estado  $(w, s)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$  e  $s = 0, 1, 2$  é:

$$\phi(w, s) = \vartheta(w, s) + \xi(w, s) + \theta(w, s) + \varphi(w, s)$$

em que:

$\vartheta(w, s)$ , é o custo esperado para classificar os elementos amostrais de cada ciclo;

$\xi(w, s)$ , é o custo esperado por ciclo referente aos itens não-conformes e não inspecionados que são enviados ao mercado;

$\theta(w, s)$ , é o custo esperado por ciclo relacionado ao descarte dos itens inspecionados;

$\varphi(w, s)$ , é o custo de ajuste do processo de produção por ciclo. Para  $\forall w \in E$ , tem-se que:

$$\varphi(w, s) = \begin{cases} c_a, & \text{se } s = 0 \\ 0, & \text{se } s = 1, 2. \end{cases} \quad (4.14)$$

O tamanho da amostra depende da decisão tomada no ciclo imediatamente anterior. Para o estado  $(w, s)$ , o número esperado de itens inspecionados é:

$$\sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(w, s) n(s_0).$$

Assim, para  $\forall(w, s) \in E$ , o custo médio de classificação dos itens inspecionados por amostra do estado  $(w, s)$  é:

$$\vartheta(w, s) = c_{insp} \sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(w, s) n(s_0). \quad (4.15)$$

### 4.3.1 Custo dos estados $(0, 0)$ , $(0, 1)$ e $(0, 2)$

O processo opera sob controle quando ele alcança estados em que  $w = 0$ . O tamanho da produção depende dos parâmetros de planejamento estabelecidos pelo resultado da inspeção do ciclo imediatamente anterior, ou seja, dada a decisão  $s_0$ , são enviados ao mercado  $m(s_0) + R(s_0) - n(s_0)$  itens. Dado  $w = 0$ , o número esperado de itens defeituosos não descartados em estados  $(0, s)$ ,  $s = 0, 1, 2$  é:

$$(1 - p_1) \sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(0, s) [m(s_0) + R(s_0) - n(s_0)].$$

O custo de itens não-conformes enviados ao mercado é:

$$\xi(0, s) = c_{nc}(1 - p_1) \sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(0, s) [m(s_0) + R(s_0) - n(s_0)].$$

Dado  $s_0$ , o custo médio relacionado ao descarte dos itens inspecionados no estado  $(0, 0)$  é obtido por (3.20), substituindo os parâmetros de planejamento  $n$  por  $n(s_0)$  e  $a$  por  $a_1(s_0)$ . Associando-a às expressões (4.10), (4.12) e (4.13) tem-se:

$$\begin{aligned} \theta(0, 0) = \sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(0, 0) & \left\{ \frac{(c_{s.c} - c_{s.nc})}{1 - B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_A)} \sum_{i=0}^{a_1(s_0)-1} \left[ \frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A} i + \frac{p_1\alpha}{1 - p_A} (n(s_0) - i) \right] \times \right. \\ & \left. \times b_i(n(s_0), p_A) + n(s_0) c_{s.nc} \right\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Obtém-se de maneira análoga o custo esperado relacionado ao descarte dos itens inspecionados dos estados  $(0, 1)$  e  $(0, 2)$ , que são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \theta(0, 1) = \sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(0, 1) & \left\{ \frac{(c_{s.c} - c_{s.nc})}{B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_A) - B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_A)} \sum_{i=a_1(s_0)}^{a_2(s_0)-1} \left[ \frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A} i + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{p_1\alpha}{1 - p_A} (n(s_0) - i) \right] b_i(n(s_0), p_A) + n(s_0) c_{s.nc} \right\}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

e

$$\theta(0, 2) = \sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(0, 2) \left\{ \frac{(c_{s_c} - c_{s_{nc}})}{B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_A)} \sum_{i=a_2(s_0)}^{n(s_0)} \left[ \frac{p_1(1-\alpha)}{p_A} i + \frac{p_1\alpha}{1-p_A} (n(s_0) - i) \right] \times \right. \\ \left. \times b_i(n(s_0), p_A) + n(s_0) c_{s_{nc}} \right\}. \quad (4.18)$$

Associadas a (4.14) e (4.15), têm-se:

$$\begin{aligned} \phi(0, 0) &= \vartheta(0, 0) + \xi(0, 0) + \theta(0, 0) + c_a, \\ \phi(0, 1) &= \vartheta(0, 1) + \xi(0, 1) + \theta(0, 1) \quad \text{e} \\ \phi(0, 2) &= \vartheta(0, 2) + \xi(0, 2) + \theta(0, 2). \end{aligned}$$

### 4.3.2 Custo dos estados (1, 0), (1, 1) e (1, 2)

No caso em que  $w = 1$ , a mudança de estado do processo ocorre em algum instante entre o primeiro e o último itens produzidos na fase inicial do ciclo, que tem comprimento variável. A probabilidade de a mudança de estado ocorrer no instante  $t$ , para fase inicial do ciclo estabelecida pela decisão  $s_0$ , é:

$$q_{m(s_0)}(t) = \frac{(1-\pi)^{t-1}\pi}{1-(1-\pi)^{m(s_0)}}, \quad t = 1, \dots, m(s_0),$$

e o número esperado de itens não-conformes produzidos na fase inicial do ciclo é:

$$\sum_{t=1}^{m(s_0)} q_{m(s_0)}(t) [(t-1)(1-p_1) + (m(s_0) - t + 1)(1-p_2)].$$

Considerando todas as decisões  $s_0$  possíveis, o custo esperado dos itens não-conformes enviados ao mercado nos estados (1,  $s$ ),  $s = 0, 1, 2$ , é:

$$\begin{aligned} \xi(1, s) &= c_{nc} \sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(1, s) \sum_{t=1}^{m(s_0)} \left\{ q_{m(s_0)}(t) [(t-1)(1-p_1) + (m(s_0) - t + 1)(1-p_2)] + \right. \\ &\quad \left. + (1-p_2) [R(s_0) - n(s_0)] \right\}. \end{aligned}$$

Os custos médios de descarte dos itens inspecionados dos estados (1, 0), (1, 1) e (1, 2) são similares, respectivamente, a (4.16), (4.17) e (4.18), exceto pela probabilidade de declarar um item conforme, que reduz-se à  $p_D$ . Esses custos são respectivamente:

$$\theta(1, 0) = \sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(1, 0) \left\{ \frac{(c_{s.c} - c_{s.nc})}{1 - B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_D)} \sum_{i=0}^{a_1(s_0)-1} \left[ \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} i + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n(s_0) - i) \right] \times \right. \\ \left. \times b_i(n(s_0), p_D) + n(s_0) c_{s.nc} \right\},$$

$$\theta(1, 1) = \sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(1, 1) \left\{ \frac{(c_{s.c} - c_{s.nc})}{B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_D) - B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_D)} \sum_{i=a_1(s_0)}^{a_2(s_0)-1} \left[ \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} i + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n(s_0) - i) \right] b_i(n(s_0), p_D) + n(s_0) c_{s.nc} \right\}$$

e

$$\theta(1, 2) = \sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(1, 2) \left\{ \frac{(c_{s.c} - c_{s.nc})}{B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_D)} \sum_{i=a_2(s_0)}^{n(s_0)} \left[ \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} i + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n(s_0) - i) \right] \times \right. \\ \left. \times b_i(n(s_0), p_D) + n(s_0) c_{s.nc} \right\}.$$

Associando-as a (4.14) e (4.15), obtêm-se os custos médios do sistema de controle dos estados (1, 0), (1, 1) e (1, 2), que são, respectivamente:

$$\phi(1, 0) = \vartheta(1, 0) + \xi(1, 0) + \theta(1, 0) + c_a,$$

$$\phi(1, 1) = \vartheta(1, 1) + \xi(1, 1) + \theta(1, 1) \quad \text{e}$$

$$\phi(1, 2) = \vartheta(1, 2) + \xi(1, 2) + \theta(1, 2).$$

### 4.3.3 Custo dos estados $(2, 0)$ , $(2, 1)$ e $(2, 2)$

Quando a fração de itens conformes do processo se modifica durante a amostragem ( $w = 2$ ), a produção de pelo menos um dos itens da amostra ocorre com o processo operando fora de controle. O tamanho da amostra é variável e depende da decisão do ciclo anterior,  $s_0$ . Dado que a decisão anterior tenha sido  $s_0$ , a probabilidade de a mudança de estado ocorrer no  $t$ -ésimo item produzido durante a coleta da amostra é:

$$q_{R(s_0)}(t) = \frac{(1 - \pi)^{t-1} \pi}{1 - (1 - \pi)^{R(s_0)}}, \quad t = 1, \dots, R(s_0).$$

Conhecido o instante  $t$ , obtém-se a quantidade de itens inspecionados antes da mudança de estado ( $k$ ) através da expressão (3.24). Analogamente à (3.25) e considerando que o tamanho da amostra tenha sido estabelecido pela decisão  $s_0$ , a quantidade de itens não-conformes produzidos durante a amostragem é:

$$\nu(2, s|s_0) = \begin{cases} \sum_{t=1}^{R(s_0)} q_{R(s_0)}(t) \left\{ [t - (k + 1)](1 - p_1) + [R(s_0) - n(s_0) - (t - (k + 1))](1 - p_2) \right\}, & \text{se } n(s_0) > 1 \\ 0, & \text{se } n(s_0) = 1. \end{cases}$$

Durante a fase inicial do ciclo, a produção opera sob controle e, dada a decisão  $s_0$ , a quantidade esperada de itens defeituosos é  $m(s_0)(1 - p_1)$ . Consideradas todas as decisões  $s_0$ , obtém-se o custo esperado dos itens não-conformes enviados ao cliente dos estados  $(2, s)$ :

$$\xi(2, s) = c_{nc} \sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(2, s) [m(0)(1 - p_1) + \nu(2, s|s_0)], \quad s = 0, 1, 2.$$

Para tamanho da amostra igual  $n(s_0)$ , a quantidade de itens inspecionados realmente conformes do estado  $(2, 0)$ , denotada por  $\eta_c(2, 0|s_0)$ , é obtida através de expressão similar a (3.29), ou seja:

$$\begin{aligned}
\eta_c(2, 0|s_0) &= \frac{(1-\pi)^{m(s_0)}}{P_{(0,s_0),(2,0)}} \left\{ \pi \sum_{j=0}^{a_1(s_0)-1} \left[ \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} j + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n(s_0) - j) \right] b_j(n(s_0), p_D) + \right. \\
&+ (1-\pi) [1 - (1-\pi)^d] \sum_{k=1}^{n(s_0)-1} (1-\pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k \sum_{j=0}^{a_1(s_0)-1} \left[ \frac{p_1(1-\alpha)}{p_A} u + \right. \\
&+ \left. \frac{p_1\alpha}{1-p_A} (k-u) + \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} (j-u) + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n(s_0) - k - j + u) \right] \times \\
&\left. \times b_u(k, p_A) b_{j-u}(n(s_0) - k, p_D) \right\}.
\end{aligned}$$

Por analogia, as quantidades esperadas de itens inspecionados realmente conformes dos estados (2, 1) e (2, 2), dado que a amostra tenha  $n(s_0)$  elementos, são, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\eta_c(2, 1|s_0) &= \frac{(1-\pi)^{m(s_0)}}{P_{(0,s_0),(2,1)}} \left\{ \pi \sum_{j=a_1(s_0)}^{a_2(s_0)-1} \left[ \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} j + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n(s_0) - j) \right] b_j(n(s_0), p_D) + \right. \\
&+ (1-\pi) [1 - (1-\pi)^d] \sum_{k=1}^{n(s_0)-1} (1-\pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k \sum_{j=a_1(s_0)}^{a_2(s_0)-1} \left[ \frac{p_1(1-\alpha)}{p_A} u + \right. \\
&+ \left. \frac{p_1\alpha}{1-p_A} (k-u) + \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} (j-u) + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n(s_0) - k - j + u) \right] \times \\
&\left. \times b_u(k, p_A) b_{j-u}(n(s_0) - k, p_D) \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \eta_c(2, 2|s_0) = & \frac{(1-\pi)^{m(s_0)}}{P_{(0,s_0),(2,2)}} \left\{ \pi \sum_{j=a_2(s_0)}^{n(s_0)} \left[ \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} j + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n(s_0) - j) \right] b_j(n(s_0), p_D) + \right. \\
 & + (1-\pi) \left[ 1 - (1-\pi)^d \right] \sum_{k=1}^{n(s_0)-1} (1-\pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k \sum_{j=a_2(s_0)}^{n(s_0)} \left[ \frac{p_1(1-\alpha)}{p_A} u + \right. \\
 & + \frac{p_1\alpha}{1-p_A} (k-u) + \frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} (j-u) + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n(s_0) - k - j + u) \left. \right] \times \\
 & \left. \times b_u(k, p_A) b_{j-u}(n(s_0) - k, p_D) \right\}.
 \end{aligned}$$

Por sua vez, dada uma amostra de tamanho  $n(s_0)$ , a quantidade de itens inspecionados realmente não-conformes, denotada por  $\eta_c(2, s|s_0)$ , é:

$$\eta_{nc}(2, s|s_0) = n(s_0) - \eta_c(2, s|s_0), \quad s = 0, 1, 2.$$

Considerando todos os tamanhos amostrais  $n(s_0)$ , o custo médio de descarte dos estados  $(2, s)$ ,  $s = 0, 1, 2$  é:

$$\theta(2, s) = \sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(2, s) [(\eta_c(2, s|s_0) c_{s,c} + \eta_{nc}(2, s|s_0) c_{s,nc})].$$

O custo médio do sistema de controle dos estados  $(2, 0)$ ,  $(2, 1)$  e  $(2, 2)$  são, respectivamente:

$$\phi(2, 0) = \vartheta(2, 0) + \xi(2, 0) + \theta(2, 0) + c_a,$$

$$\phi(2, 1) = \vartheta(2, 1) + \xi(2, 1) + \theta(2, 1) \quad \text{e}$$

$$\phi(2, 2) = \vartheta(2, 2) + \xi(2, 2) + \theta(2, 2).$$

#### 4.3.4 Custo dos estados $(3, 0)$ , $(3, 1)$ e $(3, 2)$

Os custos médios dos estados  $(3, 0)$ ,  $(3, 1)$  e  $(3, 2)$  são similares àqueles apresentados na Seção 4.3.1, exceto pelo fato de a produção operar fora de controle desde algum ciclo anterior. De (4.11), tem-se

que  $p_0(3, s) = 0$ ,  $s = 0, 1, 2$ . Assim, o custo médio relacionado ao envio de itens não-conformes ao mercado é:

$$\xi(3, s) = c_{nc}(1 - p_2) \sum_{s_0=1}^2 p_{s_0}(3, s) [m(s_0) + R(s_0) - n(s_0)], \quad s = 0, 1, 2.$$

O custo de descarte dos itens inspecionados dos estados (3, 0), (3, 1) e (3, 2) são, respectivamente:

$$\theta(3, 0) = \sum_{s_0=1}^2 p_{s_0}(3, 0) \left\{ \frac{(c_{s,c} - c_{s,nc})}{1 - B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_D)} \sum_{i=0}^{a_1(s_0)-1} \left[ \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} i + \frac{p_2\alpha}{1 - p_D} (n(s_0) - i) \right] \times \right. \\ \left. \times b_i(n(s_0), p_D) + n(s_0) c_{s,nc} \right\},$$

$$\theta(3, 1) = \sum_{s_0=1}^2 p_{s_0}(3, 1) \left\{ \frac{(c_{s,c} - c_{s,nc})}{B_{a_1(s_0)}(n(s_0), p_D) - B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_D)} \sum_{i=a_1(s_0)}^{a_2(s_0)-1} \left[ \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} i + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{p_2\alpha}{1 - p_D} (n(s_0) - i) \right] b_i(n(s_0), p_D) + n(s_0) c_{s,nc} \right\},$$

e:

$$\theta(3, 2) = \sum_{s_0=1}^2 p_{s_0}(3, 2) \left\{ \frac{(c_{s,c} - c_{s,nc})}{B_{a_2(s_0)}(n(s_0), p_D)} \sum_{i=a_2(s_0)}^{n(s_0)} \left[ \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} i + \frac{p_2\alpha}{1 - p_D} (n(s_0) - i) \right] \times \right. \\ \left. \times b_i(n(s_0), p_D) + n(s_0) c_{s,nc} \right\}.$$

O custo médio do sistema de controle dos estados (3, 0), (3, 1) e (3, 2) são, respectivamente:

$$\phi(3, 0) = \vartheta(3, 0) + \xi(3, 0) + \theta(3, 0) + c_a,$$

$$\phi(3, 1) = \vartheta(3, 1) + \xi(3, 1) + \theta(3, 1) \quad e$$

$$\phi(3, 2) = \vartheta(3, 2) + \xi(3, 2) + \theta(3, 2).$$



## 4.4 Custo médio da produção

Para uma quantidade suficientemente grande de inspeções, o custo esperado por ciclo de monitoramento é:

$$E(\Phi) = \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) \phi(w, s),$$

e a quantidade média de itens enviadas ao mercado por ciclo é:

$$E(T) = \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) \sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(w, s) [m(s_0) + R(s_0) - n(s_0)].$$

Com as considerações expostas na Seção 2.5, pode-se afirmar que o custo médio por item produzido e enviado ao mercado é a razão entre o custo médio e a quantidade média de itens enviados ao mercado, por ciclo entre amostragens:

$$C(O) = \frac{E(\Phi)}{E(T)} = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) \phi(w, s)}{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) \sum_{s_0=0}^2 p_{s_0}(w, s) [m(s_0) + R(s_0) - n(s_0)]}, \quad (4.19)$$

em que  $O$  é o conjunto de parâmetros de otimização:

$$O = \{m(0), n(0), a_1(0), a_2(0), m(1), n(1), a_1(1), a_2(1), m(2), n(2), a_1(2), a_2(2)\}.$$

A determinação dos valores de  $O$  que minimizam  $C(O)$  é a solução do problema:

$$O^0 = \arg \min_O C(O), \quad (4.20)$$

com:

$$O^0 = \{m^0(0), n^0(0), a_1^0(0), a_2^0(0), m^0(1), n^0(1), a_1^0(1), a_2^0(1), m^0(2), n^0(2), a_1^0(2), a_2^0(2)\}.$$

As próximas seções remetem a procedimentos computacionais que possam solucionar esse problema de otimização.

## 4.5 Aplicação numérica

Retorna-se ao exemplo introduzido na página 66 da Seção 3.5 (parâmetros do processo e componentes de custo iguais aos do *caso padrão*, exceto por  $p_2 = 0,50$  e  $c_a = 1000$ ). É elevado o custo computacional de procedimento de busca exaustiva para determinação da solução ótima da função de custo unitário, já que são doze os parâmetros de otimização. Com o intuito de explorar o problema, são gerados aleatoriamente 100.000 conjuntos de parâmetros, verificando-se o valor da função objetivo para cada um deles. Os valores de cada parâmetro são escolhidos ao acaso em um intervalo arbitrariamente grande. A única restrição imposta é que  $a_1(s_0) \leq a_2(s_0) \leq n(s_0)$ . *Script* desenvolvido em Matlab<sup>®</sup> gera os conjuntos candidatos à solução e avalia a função de custo unitário para cada um deles (ver Apêndice A).

A melhor dentre as soluções apresenta o seguinte conjunto de parâmetros de planejamento:  $m(0) = 15$ ,  $n(0) = 8$ ,  $a_1(0) = 6$ ,  $a_2(0) = 7$ ,  $m(1) = 5$ ,  $n(1) = 8$ ,  $a_1(1) = 7$ ,  $a_2(1) = 8$ ,  $m(2) = 112$ ,  $n(2) = 3$ ,  $a_1(2) = 2$ ,  $a_2(2) = 3$ , implicando um custo unitário de \$0,269988. Verifica-se que, para o mesmo exemplo, o custo unitário ótimo para o modelo proposto na Seção 3.6 (pág. 76) é \$0,315862 por unidade, com parâmetros de planejamento da política de monitoramento dados por:  $m^0 = 135$ ,  $L^0 = 169$ ,  $n^0 = 5$  e  $a^0 = 4$ . Esse custo é 17% maior que o valor encontrado através do modelo ora em estudo. Salienta-se que não se considera que a solução apresentada seja a solução ótima.

Tendo em vista que o objetivo foi explorar preliminarmente o procedimento proposto, entende-se que possam existir soluções melhores. Sugere-se o aprimoramento da busca por meio de algoritmo genético, visando estimar com precisão a solução ótima do problema.

## 4.6 Otimização por algoritmo genético

É computacionalmente intensa a busca dos parâmetros ótimos de planejamento que solucionem o modelo de custo (4.20), podendo tornar-se inviável rapidamente dado o efeito multiplicativo da busca de doze variáveis de decisão. Uma alternativa de melhoria da solução apresentada na aplicação numérica é o uso do algoritmo genético. A aplicação de algoritmos genéticos como ferramenta de otimização em controle estatístico de qualidade pode ser encontrada em Chatterjee e Laudatto (1997), Carlyle et al. (2000), Aparisi e García-Díaz (2004, 2007). Chen (2003) utiliza algoritmos genéticos, ao invés de método convencional para resolver um modelo de planejamento econômico-estatístico para carta de controle  $\bar{X}$  com tamanho amostral fixo e intervalo de amostragem variável.

Algoritmos genéticos (Goldberg, 1989), são técnicas de busca e otimização motivadas pelo processo de seleção natural em sistemas biológicos. As seguintes características os distinguem de outros procedimentos de busca:

1. Consideram simultaneamente muitos pontos no espaço de busca, ao invés de um único ponto;
2. Trabalham diretamente com seqüências de caracteres que representam o conjunto de parâmetros, não com os próprios parâmetros;
3. Usam regras probabilísticas para guiar sua busca.

Procura-se reduzir a probabilidade de os algoritmos genéticos convergirem para um ótimo local, pois eles consideram simultaneamente muitos pontos no espaço de busca. Em uma busca convencional, baseada em uma regra de decisão determinística, considera-se um único ponto, que pode não ser confiável em um espaço multimodal. Um algoritmo genético é definido como qualquer algoritmo que é essencialmente estruturado como:

- Um conjunto de  $N$  pontos correntes, candidatos à solução, é mantido constante em cada passo do algoritmo, ao invés da maioria dos algoritmos que mantêm apenas um único ponto corrente candidato a solução. A cada iteração, todo o conjunto é atualizado. Esse conjunto é denominado *população*, por analogia com uma população de espécie biológica, que evolui

de acordo com as leis de seleção natural. Cada ponto candidato a solução na população é chamado *indivíduo*.

- Em cada passo do procedimento, o algoritmo aplica as seguintes *operações genéticas* aos indivíduos da população, todas análogas a correspondentes biológicos:

**Mutação:** Alguns indivíduos escolhidos aleatoriamente da população recebem algumas perturbações aleatórias;

**Cruzamento:** Escolhe-se ao acaso pares de indivíduos da população e combinam-se algumas características de cada par de indivíduos (*pais*), de maneira a gerar um novo conjunto de indivíduos (*filhotes* ou *criança*);

**Seleção:** Após a mutação e cruzamento, escolhe-se uma nova população, através de um procedimento que seleciona  $N$  indivíduos dentre os cruzamentos, dos resultados da mutação e da população original. Esse procedimento tem um componente estocástico, mas atribui uma probabilidade de escolha maior aos indivíduos com melhor função objetivo. O resultado desse procedimento é uma nova população que estará sujeita às mesmas operações na próxima iteração.

A mutação introduz um tipo de caminho aleatório aos indivíduos: um indivíduo que sofreu mutação durante várias iterações sucessivas seguiria um processo Markoviano. O cruzamento promove uma exploração adicional da região já amostrada pelos dois indivíduos pais. A seleção introduz alguma direção à busca, eliminando os resultados intermediários que não apresentam boas características, mantendo os promissores. A seleção guia a busca em novas regiões, efetuados principalmente através da mutação e em regiões já amostradas, primordialmente através dos cruzamentos.

Essa estrutura geral conduz algoritmos de otimização que estão disponíveis para uma extensa classe de funções. Não é necessária nenhuma hipótese de diferenciabilidade, convexidade, continuidade ou unimodalidade. Além disso, a função pode estar definida em espaços contínuos, discretos ou mesmo em situações de natureza híbrida. A única hipótese implícita é que a função deveria ter algum tipo de “tendência global” que poderia ser delineada a partir de amostras tomadas de uma região do

espaço da variável de otimização. Se essa “tendência global” existe, espera-se que ela seja capturada pelo algoritmo genético, levando a estimativas razoáveis da função objetivo, sem necessitar de uma “busca exaustiva”.

Há um grande número conhecido de diferentes algoritmos genéticos e supõe-se que é muito grande o número de outros algoritmos com mesma abordagem, já que a operação genética pode ser estruturada de muitas maneiras diferentes e ela pode ser formada por qualquer combinação de operadores. Entretanto, sabe-se que alguns algoritmos genéticos são melhores que outros sob o ponto de vista da confiabilidade da solução e do custo computacional do procedimento (Takahashi et al., 2003). Em particular, para problemas de natureza combinatória, tem-se estabelecido que algoritmos que empregam operadores específicos de cruzamento e mutação podem ser muito mais eficientes que algoritmos genéticos de natureza geral (Carrano et al., 2006). Isso deve-se ao fato de que cruzamentos e mutações “cegos” que seriam efetuados pelo operador de natureza geral teriam uma grande probabilidade de gerar indivíduos inviáveis, já que a maioria das combinações das variáveis seriam geralmente inviáveis. Operadores específicos são ajustados de maneira a preservar a viabilidade, promovendo apenas os indivíduos viáveis, através da incorporação de regras específicas que definam as combinações válidas de variáveis no problema de interesse específico (veja Duczmal et al., 2007, 2008).

Na aplicação dos algoritmos genéticos para encontrar os parâmetros de planejamento ótimos, adota-se uma codificação decimal dos indivíduos (cada indivíduo é uma seqüência decimal):

$$(m(0), n(0), a_1(0), a_2(0), m(1), n(1), a_1(1), a_2(1), m(2), n(2), a_1(2), a_2(2)),$$

que representa uma possível solução do problema de planejamento econômico. O valor da função objetivo de cada indivíduo é avaliado pelo custo esperado do sistema de controle por item produzido,  $C(0)$  (4.19), baseada na estratégia elitista mencionada anteriormente – sobrevive o indivíduo com o melhor ajuste. Persegue-se a evolução de uma população de  $N$  indivíduos. A condição de parada é alcançada quando o número de gerações é suficientemente grande ou quando um valor de ajuste

satisfatório é obtido.

## 4.7 Comentários adicionais

O modelo de controle *on-line* por atributos desenvolvido neste capítulo generaliza os procedimentos apresentados nos Capítulos 2 e 3. Considera também, três níveis de decisão em cada inspeção. A metodologia flexibiliza a modelagem ao ampliar os parâmetros de otimização da função de custo unitário, aumentando as possibilidades de sua aplicação.

A implementação do algoritmo genético e o estudo de seu desempenho na localização dos parâmetros de planejamento ótimos poderão viabilizar a elaboração de modelos mais complexos e mais eficazes na busca por planejamentos econômicos que levem a menores custos unitários de controle da produção.

## Capítulo 5

# Controle *On-line* para Horizonte Finito

Na abordagem de controle de qualidade *on-line*, alguns dos pontos comuns apontados por Taguchi et al. (1989), Nayeypour e Woodall (1993), Srivastava e Wu (1991, 1995), Trindade et al. (2007b), Ho et al. (2007) são: base econômica para a obtenção dos planejamentos econômicos ótimos e modelagem baseada na hipótese de uma produção de horizonte infinito (*long-run production*). Entretanto, em muitas situações práticas a produção é de pequenos lotes ou de horizonte finito (*short-run production*). Hillier (1969) aponta a necessidade de carta de controle de horizonte finito durante a inicialização de novos processos, durante o reinício de processo que retorna à situação de controle estatístico e para processos cuja produção não é suficientemente grande para o uso das cartas de controle convencionais. Castillo et al. (1996) classificam em dois tipos as produções de horizonte finito: repetitivo, em que a produção é repetitiva e são fabricados muitos lotes de pequeno tamanho de partes similares, na mesma máquina, sem operações significativas de reajuste dos equipamentos, e, não repetitivo, que requer ajustes completamente distintos dos equipamentos, com a finalidade de produzir lotes diferentes. O primeiro pode ser encontrado em processos ajustados à produção *just-in-time* e o segundo, em produções customizadas, tal como processo de manufatura *job shop*. Aplicação do controle estatístico de qualidade na produção de pequenos lotes pode ser encontrada em Hillier (1964, 1967, 1969), Yang e Hillier (1970), Quesenberry (1991a,b,c). Ho e Trindade (2009) apresentam uma ampla revisão do tema e propõem um modelo de planejamento econômico para carta  $\bar{X}$  de processo de produção com horizonte finito. Akamine e de Borges (2004) estudam a produção de pequenos lotes, no contexto do Caso I de controle on-line por atributo apresentado por Taguchi et al. (1989).

Neste capítulo, propõe-se um sistema de controle *on-line* por atributo sujeito a erros de classificação, em que o processo de produção opera durante um espaço de tempo finito, com a finalidade de enviar ao mercado lote composto de  $\tau$  itens,  $\tau < \infty$ . Um dos objetivos é conhecer a consequência do uso de parâmetros de planejamento de controle *on-line* de horizonte infinito, no monitoramento de atributos de processos de produção de pequeno lote. O modelo probabilístico do sistema de controle do processo de produção adota as hipóteses 1, 2, 3, 4, 6, 7 e 8, da Seção 2 (pág. 13), complementadas com as suposições detalhadas a seguir:

- O monitoramento do processo se dá mediante a inspeção de um único item a cada  $m$  peças produzidas,  $m \leq \tau$ ;
- Caso o item inspecionado seja declarado não-conforme, o processo de produção é considerado fora de controle e é imediatamente ajustado;
- Durante a fabricação do lote de tamanho  $\tau$ , realizam-se  $N$  inspeções para monitoramento do processo de produção,

$$N = \left\lfloor \frac{\tau}{m-1} \right\rfloor,$$

em que  $\lfloor x \rfloor = \max \{N \in \mathbb{Z} \mid N \leq x\}$ ;

- Após  $N$  inspeções, fabrica-se a quantidade de itens necessária para completar  $\tau$ , concluindo-se então a fabricação do lote. Essa quantidade é denominada resíduo, denotando-a por  $m_{res}$ :

$$m_{res} = \tau - N(m-1).$$

O fluxograma do monitoramento do processo (Fig. 5.1) segue os seguintes passos:

- (i) O processo de produção inicia-se sob controle;
- (ii) Produzem-se  $m$  itens durante o ciclo de monitoramento;
- (iii) Se o item inspecionado for declarado não-conforme, o processo de produção é ajustado, retornando ao passo (i), caso contrário, inicia-se imediatamente o próximo ciclo de monitoramento [passo (ii)];



(iv) Após  $N$  inspeções, a produção do lote poderá continuar até completar  $\tau$  e então é encerrada.

Verifica-se que quando  $\tau$  for muito grande, os resultados aproximam-se daqueles obtidos pelo modelo proposto por Borges et al. (2001).

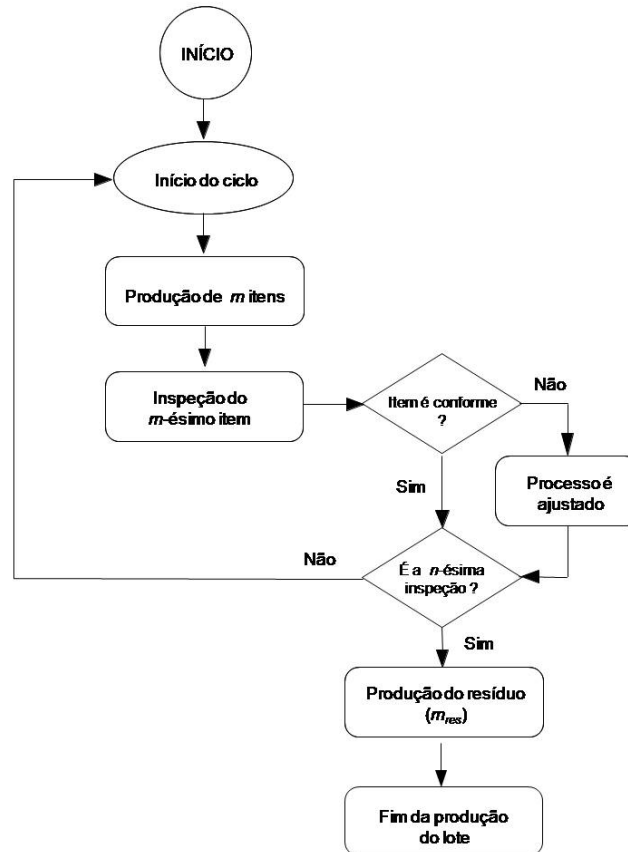


Figura 5.1: Fluxograma do processo (intervenção e controle).

## 5.1 A cadeia de Markov

Adota-se a notação apresentada na Seção 2.1, pág. 14, associando-se três variáveis aleatórias ao item inspecionado,  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . A probabilidade de não se intervir na operação ( $Y = 1$ ), dado que o item inspecionado seja produzido com o processo sob controle ( $Z = 1$ ), é  $p_A$  (2.4) e, com o processo fora de controle ( $Z = 0$ ), é  $p_D$  (2.5). O sistema de controle do processo de produção é modelado

através de uma cadeia de Markov com espaço de estados finito, dado por  $E$  (2.6). Cada estado é representado por um par ordenado  $(w, s)$ , em que  $w$  refere-se à condição de operação da produção e  $s$ , à decisão sobre a intervenção no processo.  $w$  e  $s$  assumem os valores detalhados na página 2.2 da Seção 2.2. A figura 5.2 relaciona o processo de produção aos estados da cadeia.

As probabilidades de transição entre os estados são denotadas por  $P_{(w_{i-1}, s_{i-1}), (w_i, s_i)}$ , em que  $(w_i, s_i)$  é o estado da cadeia no  $i$ -ésimo ciclo de monitoramento. A matriz de probabilidades de transição é:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}
 P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} \\
 P_{(0,1),(0,0)} & P_{(0,1),(0,1)} & P_{(0,1),(1,0)} & P_{(0,1),(1,1)} & P_{(0,1),(2,0)} & P_{(0,1),(2,1)} \\
 P_{(1,0),(0,0)} & P_{(1,0),(0,1)} & P_{(1,0),(1,0)} & P_{(1,0),(1,1)} & P_{(1,0),(2,0)} & P_{(1,0),(2,1)} \\
 P_{(1,1),(0,0)} & P_{(1,1),(0,1)} & P_{(1,1),(1,0)} & P_{(1,1),(1,1)} & P_{(1,1),(2,0)} & P_{(1,1),(2,1)} \\
 P_{(2,0),(0,0)} & P_{(2,0),(0,1)} & P_{(2,0),(1,0)} & P_{(2,0),(1,1)} & P_{(2,0),(2,0)} & P_{(2,0),(2,1)} \\
 P_{(2,1),(0,0)} & P_{(2,1),(0,1)} & P_{(2,1),(1,0)} & P_{(2,1),(1,1)} & P_{(2,1),(2,0)} & P_{(2,1),(2,1)}
 \end{bmatrix}$$

O processo retorna à sua condição inicial, operando sob controle, sempre que ocorre um ajuste

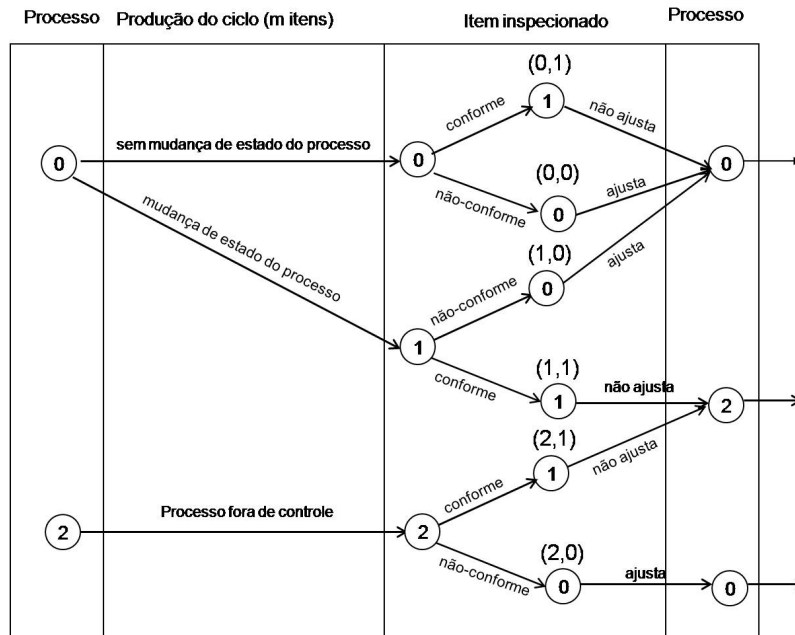


Figura 5.2: Horizonte finito de produção: diagrama dos estados da cadeia.

( $s = 0$ ). Nesse caso são possíveis transições para os estados em que  $w = 0$  ou  $w = 1$ . A probabilidade de o processo permanecer sob controle no ciclo corrente é:

$$P\{Z_1 = 1, Z_2 = 1, \dots, Z_m = 1 | Z_0 = 1\} = (1 - \pi)^m, \quad (5.1)$$

onde  $Z_0$  representa a situação do processo de produção no instante zero. Associando as expressões (5.1) e (2.4), obtêm-se as probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2$ , para os estados  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$ :

$$P_{(w,0),(0,0)} = (1 - \pi)^m(1 - p_A)$$

e

$$P_{(w,0),(0,1)} = (1 - \pi)^m p_A.$$

A probabilidade de ocorrer mudança de estado do processo em ciclo subsequente a ajuste é:

$$1 - (1 - \pi)^m.$$

Associando-a à expressão (2.5), obtêm-se as probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2$ , para os estados  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ , que são, respectivamente:

$$P_{(w,0),(1,0)} = [1 - (1 - \pi)^m](1 - p_D)$$

e

$$P_{(w,0),(1,1)} = [1 - (1 - \pi)^m] p_D.$$

Imediatamente após uma intervenção no processo, não são possíveis transições para estados em que  $w = 2$ , ou seja:

$$P_{(w,0),(2,s)} = 0, \quad \text{para } w = 0, 1, 2; s = 0, 1.$$

Os mesmos resultados se aplicam à linha da matriz  $\mathbf{P}$  correspondente ao estado  $(0, 1)$ , já que também se referem a transições para estados cujos ciclos são iniciados com o processo sob controle, ou seja:

$$P_{(0,1),(w,s)} = P_{(0,0),(w,s)}, \quad \text{para } w = 0, 1, 2; s = 0, 1.$$

Para que os estados  $(2, 0)$  e  $(2, 1)$  sejam visitados é necessário que o processo esteja fora de controle no ciclo anterior ( $w > 0$ ) e que o item inspecionado seja declarado conforme ( $s = 1$ ). Assim, para  $w = 1, 2$  e  $s = 0, 1$ , têm-se:

$$P_{(w,1),(2,0)} = 1 - p_D$$

e

$$P_{(w,1),(2,1)} = p_D.$$

A matriz  $\mathbf{P}$  é reescrita como:

$$\begin{bmatrix} P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(2,0)} & P_{(1,1),(2,1)} \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(2,0)} & P_{(1,1),(2,1)} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

## 5.2 Distribuição de probabilidade da cadeia

Seja  $(W_k, S_k)$  o vetor aleatório associado ao estado da cadeia no  $k$ -ésimo ciclo de monitoramento após o início da fabricação do lote.  $\alpha_k(w, s)$  denota a probabilidade de a cadeia estar no estado  $(w, s)$  no instante da  $k$ -ésima inspeção, ou seja,

$$\alpha_k(w, s) = P\{(W_k, S_k) = (w, s)\}.$$

A distribuição de probabilidade dos estados da cadeia nesse instante é denotada pelo vetor  $\boldsymbol{\alpha}_k$  :

$$\boldsymbol{\alpha}_k = [\alpha_k(w, s); (w, s) \in E]'. \quad (5.3)$$

O início de fabricação do lote se dá com o processo sob controle e a distribuição de probabilidade dos estados da cadeia no primeiro ciclo de monitoramento da produção,  $\alpha_1$ , é então a linha da matriz de probabilidades de transição  $\mathbf{P}$  (5.2) correspondente aos estados  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  ou  $(2, 0)$ . Arbitra-se que, no instante inicial do processo de fabricação, o estado da cadeia é  $(0, 0)$ , ou seja,

$$\alpha_0 = [1, 0, 0, 0, 0, 0]' .$$

Do teorema de Bayes, têm-se que  $\alpha'_k = \alpha'_{k-1} \mathbf{P}^k$ . A iteração dessa igualdade leva a:

$$\alpha'_k = \alpha'_0 \mathbf{P}^k . \quad (5.4)$$

A matriz  $\mathbf{P}^k$  é denominada matriz de transição em  $k$ -passos (Brémaud, 1999), pois seu termo geral é:

$$P_{(w_i, s_i), (w_j, s_j)}^{(k)} = P\{W_{m+k} = w_j, S_{m+k} = s_j | W_m = w_i, S_m = s_i\} .$$

A expressão (5.4) permite a obtenção da distribuição de probabilidade dos estados da cadeia ao final de cada uma das  $N$  inspeções efetuadas durante a fabricação do lote.

A matriz de probabilidades de transição  $\mathbf{P}$  é recorrente e possui uma distribuição invariante denotada pelo vetor:

$$\pi = [\pi(w, s); w = 0, 1, 2; s = 0, 1]' , \text{ com } \sum_{(w, s) \in E} \pi(w, s) = 1 , \quad (5.5)$$

tal que  $\pi' = \pi' \mathbf{P}$ . A probabilidade  $\pi(w, s)$  pode ser considerada como a proporção de tempo que o sistema de controle da produção visita o estado  $(w, s)$  após um número suficientemente grande de inspeções.

### 5.3 Custos médios do sistema de controle

A estrutura de custo do modelo é a mesma dos capítulos anteriores. Os parâmetros de custo estão detalhados no início da Seção 2.4 (pág. 24). A expressão geral do custo médio de cada estado  $(w, s)$ ,

$w = 0, 1, 2$  e  $s = 0, 1$  é:

$$\phi(w, s) = c_{insp} + \xi(w, s) + \theta(w, s) + \varphi(w, s),$$

em que:

$c_{insp}$ , é o custo de classificar o item inspecionado e está presente em todos os estados da cadeia;

$\xi(w, s)$ , é o custo esperado por ciclo referente aos itens não-conformes dentre os  $m - 1$  itens não inspecionados que são enviados ao mercado;

$\theta(w, s)$ , é o custo esperado por ciclo relacionado ao descarte do item inspecionado;

$\varphi(w, s)$ , é o custo de ajuste do processo de produção por ciclo. A expressão (2.13) é válida para  $\forall w \in E$ .

O vetor dos custos esperados por estado é:

$$\phi = [\phi(w, s); w = 0, 1, 2; s = 0, 1]'. \quad (5.6)$$

### 5.3.1 Custo dos estados $(0, 0)$ e $(0, 1)$ :

Ao visitar os estados  $(0, 0)$  ou  $(0, 1)$ , o processo opera sob controle. O número esperado de itens defeituosos não inspecionados por ciclo é  $(m - 1)(1 - p_1)$ . Seu custo esperado é:

$$\xi(0, s) = c_{nc}(1 - p_1)(m - 1), \quad s = 0, 1.$$

Devido aos erros de classificação, o item inspecionado classificado como conforme pode ser realmente conforme ou não-conforme. As probabilidades de o item inspecionado ser realmente conforme ou não-conforme são dadas, respectivamente, por (2.15) e (2.16). O custo médio e relacionado a esse descarte é:

$$\theta(0, 1) = c_{s-c} \frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A} + c_{s-nc} \frac{(1 - p_1)\beta}{p_A}. \quad (5.7)$$

De maneira similar, o custo médio do descarte do item inspecionado classificado como não-conforme é:

$$\theta(0,0) = c_{s.c} \frac{p_1 \alpha}{1 - p_A} + c_{s.nc} \frac{(1 - p_1)(1 - \beta)}{1 - p_A}. \quad (5.8)$$

Associando-se (2.13) com as expressões anteriores, obtêm-se o custo esperado do sistema de controle dos estados (0,0) e (0,1), que são, respectivamente:

$$\phi(0,0) = c_{insp} + \xi(0,0) + \theta(0,0) + c_a$$

e

$$\phi(0,1) = c_{insp} + \xi(0,1) + \theta(0,1).$$

### 5.3.2 Custo dos estados (1,0) e (1,1):

Quando o estado do processo se modifica durante o ciclo corrente, o instante da mudança pode ser durante a produção de qualquer dos itens produzidos durante o ciclo. A probabilidade de a mudança de estado ocorrer no  $t$ -ésimo item produzido é:

$$q_m(t) = \frac{(1 - \pi)^{t-1} \pi}{1 - (1 - \pi)^m}, \quad t = 1, \dots, m.$$

O custo médio dos itens defeituosos enviados ao mercado é:

$$\xi(1,s) = c_{nc} \sum_{t=1}^m q_m(t) [(t-1)(1-p_1) + (m-t)(1-p_2)], \quad \text{para } s = 0, 1.$$

Os custos médios de descarte do item inspecionado dos estados (1,0) e (1,1) são similares, respectivamente, a (5.8) e (5.7), exceto pelo estado do processo estar necessariamente fora de controle no instante da inspeção. Esses custos são:

$$\theta(1,0) = c_{s.c} \frac{p_2 \alpha}{1 - p_D} + c_{s.nc} \frac{(1 - p_2)(1 - \beta)}{1 - p_D}$$

e

$$\theta(1, 1) = c_{s\_c} \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} + c_{s\_nc} \frac{(1 - p_2)\beta}{p_D}.$$

Os custos médios do sistema de controle desses estados são dados por:

$$\phi(1, 0) = c_{insp} + \xi(1, 0) + \theta(1, 0) + c_a$$

e

$$\phi(1, 1) = c_{insp} + \xi(1, 1) + \theta(1, 1).$$

### 5.3.3 Custo dos estados (2, 0) e (2, 1):

Os custos desses estados são similares àqueles determinados na seção 5.3.1, mas com a produção operando fora de controle durante todo o ciclo. Os custos médios associados com o estado (2, 0) são:

$$\begin{aligned} \xi(2, 0) &= c_{nc}(1 - p_2)(m - 1), \\ \theta(2, 0) &= c_{s\_c} \frac{p_2\alpha}{1 - p_D} + c_{s\_nc} \frac{(1 - p_2)(1 - \beta)}{1 - p_D}, \\ \phi(2, 0) &= c_{insp} + \xi(2, 0) + \theta(2, 0) + c_a \end{aligned}$$

e, para o estado (2, 1), são:

$$\begin{aligned} \xi(2, 1) &= \xi(2, 0), \\ \theta(2, 1) &= c_{s\_c} \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} + c_{s\_nc} \frac{(1 - p_2)\beta}{p_D}, \\ \phi(2, 1) &= c_{insp} + \xi(2, 1) + \theta(2, 1). \end{aligned}$$



### 5.3.4 Custo do resíduo

Após a  $N$ -ésima inspeção, pode ser necessária a produção de uma quantidade residual de itens ( $m_{res}$ ) para concluir a fabricação do lote, com:

$$m_{res} = \tau - N(m - 1), \quad 0 \leq m_{res} < m - 1.$$

O custo do sistema de controle relacionado com o resíduo restringe-se ao custo de envio de itens não-conformes ao mercado, já que a  $N$ -ésima é a última das inspeções. Seja  $\phi_{res}(w, s)$  o custo médio do resíduo, dado que o estado da  $N$ -ésima inspeção é  $(w, s)$ . Quando o processo visita os estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2$ , no último ciclo de monitoramento, a produção estará operando sob controle no início da fabricação do resíduo. A quantidade esperada de itens não-conformes enviada ao mercado é:

$$m_{res}(1 - p_1)(1 - \pi)^{m_{res}} + \sum_{t=1}^{m_{res}} (1 - \pi)^{t-1} \pi [(t - 1)(1 - p_1) + (m_{res} - t + 1)(1 - p_2)]. \quad (5.9)$$

A segunda parcela de (5.9) refere-se ao número médio de itens não-conformes enviados ao mercado caso haja mudança de estado do processo durante a produção do resíduo e, a primeira parcela, caso o processo permaneça operando sob controle até a produção do último item do lote. O custo do resíduo para os estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2$  é:

$$\phi_{res}(w, 0) = c_{nc} \left\{ m_{res}(1 - p_1)(1 - \pi)^{m_{res}} + \sum_{t=1}^{m_{res}} (1 - \pi)^{t-1} \pi [(t - 1)(1 - p_1) + (m_{res} - t + 1)(1 - p_2)] \right\}. \quad (5.10)$$

O mesmo valor se aplica ao estado  $(0, 1)$ , já que o processo também está sob controle no instante inicial da fabricação do resíduo. Assim:

$$\phi_{res}(0, 1) = \phi_{res}(w, 0), \quad w = 0, 1, 2.$$

Se o processo atinge os estados  $(w, 1)$ ,  $w > 0$ , na  $N$ -ésima inspeção, então a produção opera fora de controle durante a fabricação de todo o resíduo. O custo esperado é:

$$\phi_{res}(w, 1) = c_{nc}(1 - p_2) m_{res}.$$

O vetor dos custos médios do resíduo por estado é denotado por:

$$\boldsymbol{\phi}_{res} = [\phi_{res}(w, s), (w, s) \in E]'. \quad (5.11)$$

## 5.4 Custo médio da produção

Seja  $\Phi_k$  a variável aleatória associada ao custo do sistema de controle durante o  $k$ -ésimo ciclo de monitoramento do processo de produção. Conhecido o estado do  $k$ -ésimo ciclo, a esperança de  $\Phi_k$  é:

$$E[\Phi_k | (W_k, S_k)] = \sum_{(w,s) \in E} \phi(w, s) 1_{\{(w,s)\}}(k),$$

em que  $1_{\{(w,s)\}}(k)$  é a indicadora de a cadeia visitar o estado  $(w, s)$  na  $k$ -ésima inspeção. O custo médio do  $k$ -ésimo ciclo,  $\mu_k$  é:

$$\begin{aligned} \mu_k &= E(\Phi_k) = E\{E[\Phi_k | W_k, S_k]\} \\ &= E\left[\sum_{(w,s) \in E} \phi(w, s) 1_{\{(w,s)\}}(k)\right] \\ &= \sum_{(w,s) \in E} \phi(w, s) E[1_{\{(w,s)\}}(k)] \\ &= \sum_{(w,s) \in E} \phi(w, s) P\{1_{\{(w,s)\}}(k)\} \\ &= \sum_{(w,s) \in E} \phi(w, s) \alpha_k(w, s). \end{aligned}$$

De (5.3) e (5.6), tem-se que:

$$\mu_k = \alpha'_k \phi, \quad (5.12)$$

e, de (5.11), obtém-se o custo médio do sistema de controle associado ao resíduo:

$$\mu_{res} = \alpha'_N \phi_{res}.$$

O custo do monitoramento do processo de produção do lote é:

$$\Phi = \Phi_1 + \dots + \Phi_N,$$

cujos custo esperado é:

$$\mu = E(\Phi) = E\left(\sum_{k=1}^N \Phi_k\right) = \sum_{k=1}^N \mu_k. \quad (5.13)$$

Assim, o custo médio total do sistema de controle do lote é dado por:

$$\mu + \mu_{res}. \quad (5.14)$$

De (5.4) e (5.12) tem-se que:

$$\mu = \sum_{k=1}^N \alpha'_k \mathbf{P}^k \phi = \alpha'_0 \left(\sum_{k=1}^N \mathbf{P}^k\right) \phi. \quad (5.15)$$

Verifica-se que a matriz  $\mathbf{P}$  é diagonalizável, existindo, portanto, a matriz  $\mathbf{\Gamma}$ , não singular, tal que:

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}^{-1} = \mathbf{\Lambda},$$

onde  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$  é uma matriz diagonal de ordem 6, com os autovalores de  $\mathbf{P}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ , como os elementos de sua diagonal principal.

A matriz  $\mathbf{V}$ , tal que  $\mathbf{P} \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}$ , é a matriz dos autovetores à direita de  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{\Gamma}^{-1}$ , cuja  $i$ -

ésima coluna é  $\mathbf{v}_i$ , o autovetor à direita de  $\mathbf{P}$  associado ao autovalor  $\lambda_i$ . Por sua vez, a matriz dos autovetores à esquerda de  $\mathbf{P}$  é  $\mathbf{U} = \mathbf{\Gamma}'$ , de maneira que  $\mathbf{U}'\mathbf{P} = \mathbf{U}'\mathbf{\Gamma}$ . A  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{U}'$  é  $\mathbf{u}'_i$ , o autovetor à esquerda de  $\mathbf{P}$ , associado ao autovalor  $\lambda_i$ , com  $\mathbf{u}'_i\mathbf{v}_i = 1$ . Assim, tem-se que  $\mathbf{P} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}'$  e que:

$$\mathbf{P}^k = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{U}'. \quad (5.16)$$

Por outro lado, a matriz  $\mathbf{P}$  é estocástica, finita, irredutível e aperiódica e, portanto, ergódica. Do teorema de Perron-Frobenius (Brémaud, 1999) tem-se que:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, \text{ com multiplicidade algébrica e geométrica } 1; \\ \lambda_1 &> |\lambda_i|, \quad i = 2, \dots, 6 \quad \text{e} \\ \mathbf{v}_1\mathbf{u}'_1 &= \mathbf{1}\mathbf{\pi}' = \mathbf{\Pi}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

em que  $\mathbf{1}$  é o vetor unitário de ordem 6 e  $\mathbf{\pi}$  é a distribuição estacionária da cadeia, obtida em (5.5). Além disso, verifica-se algebricamente, para  $\mathbf{P}$ , que:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= (1 - \pi)^m p_D, \text{ e} \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

logo:

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(1, \lambda_2, 0, 0, 0, 0).$$

Associando (5.15) e (5.16), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mu &= \boldsymbol{\alpha}'_0 \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{U}' \right) \boldsymbol{\phi} \\ &= \boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{V} \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{\Lambda}^k \right) \mathbf{U}' \boldsymbol{\phi} \\ &= \boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{V} \text{diag} \left( N, \sum_{k=1}^N \lambda_2^k, 0, 0, 0, 0 \right) \mathbf{U}' \boldsymbol{\phi}, \end{aligned}$$

com

$$\sum_{k=1}^N \lambda_2^k = \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_2} (1 - \lambda_2^N). \quad (5.19)$$

No modelo proposto:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_1 \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}'_2 \mathbf{v}_2 = 1 \\ \mathbf{u}'_1 \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}'_2 \mathbf{v}_1 = 0 \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0, \end{aligned}$$

as quais, associadas a (5.17) e (5.18), permitem a decomposição espectral de (5.16):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^k &= \sum_{i=1}^6 \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{u}'_i \\ &= \mathbf{v}_1 \mathbf{u}'_1 + \lambda_2^k \mathbf{v}_2 \mathbf{u}'_2 \\ &= \mathbf{\Pi} + \lambda_2^k \mathbf{v}_2 \mathbf{u}'_2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Substituindo (5.20) em (5.15), obtém-se :

$$\begin{aligned} \mu &= \boldsymbol{\alpha}'_0 \sum_{k=1}^N (\mathbf{\Pi} + \lambda_2^k \mathbf{v}_2 \mathbf{u}'_2) \boldsymbol{\phi} \\ &= \boldsymbol{\alpha}'_0 \left( N \mathbf{\Pi} + \sum_{k=1}^N \lambda_2^k \mathbf{v}_2 \mathbf{u}'_2 \right) \boldsymbol{\phi} \\ &= \boldsymbol{\alpha}'_0 \left( N \mathbf{\Pi} + \sum_{k=1}^N \lambda_2^k \mathbf{v}_2 \mathbf{u}'_2 \right) \boldsymbol{\phi} \end{aligned}$$

e, por fim, de (5.19), tem-se que:

$$\mu = \boldsymbol{\alpha}'_0 \left[ N \mathbf{\Pi} + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_2} (1 - \lambda_2^N) \mathbf{v}_2 \mathbf{u}'_2 \right] \boldsymbol{\phi}.$$

O custo médio do sistema de controle por item produzido é a razão entre o custo médio total do sistema de controle do lote,  $\mu + \mu_{res}$  (5.14) e a quantidade de itens produzidos e enviados ao mercado,

$\tau$ . É uma função de  $m$ , expressa por:

$$\begin{aligned} C(m) &= \frac{\mu + \mu_{res}}{\tau} \\ &= \frac{\boldsymbol{\alpha}'_0 \left[ N \boldsymbol{\Pi} + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} (1 - \lambda_2^N) \mathbf{v}_2 \mathbf{u}'_2 \right] \boldsymbol{\phi} + \mu_{res}}{\tau}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

A determinação do valor do intervalo entre inspeções,  $m$ , de maneira a minimizar  $C(m)$  é a solução do problema:

$$m^0 = \arg \min_m C(m). \quad (5.22)$$

É difícil obter uma expressão fechada para (5.22), assim os parâmetros ótimos são encontrados computacionalmente através de busca exaustiva. Salienta-se que o resultado (5.21) alivia sobremaneira o trabalho computacional de busca, haja vista ser uma simplificação de (5.15), que é fundamentalmente uma série de potências de matrizes.

De (5.21), verifica-se que, quando  $\tau \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\mu_{res}}{\tau} \rightarrow 0, \quad \frac{\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} (1 - \lambda_2^N)}{\tau} \rightarrow 0, \quad \frac{\tau}{N} \rightarrow (m - 1)$$

e, como  $\boldsymbol{\alpha}'_0 \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\pi}' \boldsymbol{\phi}$ ,  $C(m) \rightarrow \frac{\boldsymbol{\pi}' \boldsymbol{\phi}}{m-1}$ , que é a função de otimização do modelo de planejamento econômico para controle *on-line* por atributo, proposto por Borges et al. (2001).

Seja  $\sum_{k=1}^N 1_{\{(w,s)\}}(k)$  a quantidade de vezes que o processo visita o estado  $(w, s)$ , então:

$$\sum_{(w,s) \in E} \sum_{k=1}^N 1_{\{(w,s)\}}(k) = N,$$

com

$$E [1_{\{(w,s)\}}(k)] = \alpha_k(w, s).$$

O tempo médio de visita ao estado  $(w, s)$  durante os  $N$  ciclos de monitoramento é:

$$\bar{\alpha}(w, s) = E \left[ \frac{\sum_{k=1}^N 1_{\{(w,s)\}}(k)}{N} \right] = \frac{\sum_{k=1}^N E [1_{\{(w,s)\}}(k)]}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N \alpha_k(w, s)}{N}.$$

Associando-a com (5.12) e (5.13) tem-se que:

$$\frac{\mu}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N \alpha'_k \phi}{N} = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \sum_{k=1}^N \alpha_k(w, s) \phi(w, s)}{N} = \sum_{(w,s) \in E} \bar{\alpha}(w, s) \phi(w, s),$$

que é uma expressão similar àquela obtida no caso de horizonte infinito, em que o custo médio por ciclo é:

$$\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) \phi(w, s),$$

em que  $\pi(w, s)$  é a probabilidade invariante do estado  $(w, s)$  (5.5).

Dependendo dos componentes de custo e dos parâmetros probabilísticos do processo, é possível que a política mais econômica seja não implantar um sistema de monitoramento da produção de pequeno lote. Nessa estratégia de não realizar nenhuma inspeção, o único componente de custo a ser considerado é o referente ao envio de itens defeituosos ao mercado. Sua expressão é similar a (5.10), exceto pelo comprimento do único ciclo de processo que é  $\tau$ . O custo esperado da produção de todo o lote sem monitoramento do processo é:

$$\phi_\tau = c_{nc} \left\{ \tau (1 - p_1) (1 - \pi)^\tau + \sum_{t=1}^{\tau} (1 - \pi)^{t-1} \pi [(t - 1)(1 - p_1) + (\tau - t + 1)(1 - p_2)] \right\}.$$

A busca dos parâmetros ótimos da função objetivo (5.22) é delimitada pelo o custo unitário dessa política que é o máximo custo médio por item produzido admissível, ou seja:

$$C_{max} = \frac{\phi_\tau}{\tau}.$$

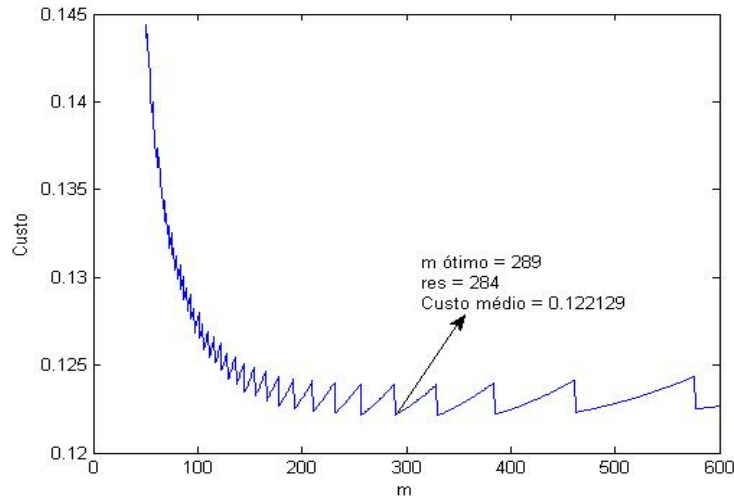


Figura 5.3: Gráfico do custo esperado *vs.*  $m$ .

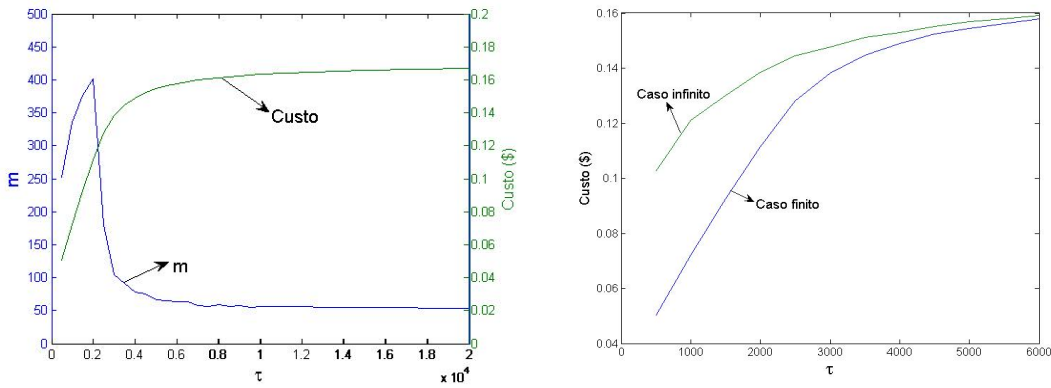
## 5.5 Aplicação numérica e análise de sensibilidade

Retoma-se o exemplo numérico denominado *caso padrão*, enunciado no início da Seção 2.6 (pág. 31). Adota-se  $p_1 = 0,999$  como probabilidade de conformidade no processo de soldagem sob controle. A mudança para um estado fora-de-controle ( $p_2 = 0,95$ ) pode ser descrita por uma distribuição geométrica com parâmetro  $\pi = 0,0001$ . O sistema de inspeção automático, por raio X, instalado na linha de produção é imperfeito, assumindo-se erros de classificação ( $\alpha = \beta = 0,01$ ). Os componentes de custo estimados são  $c_{insp} = \$0,25$ ,  $c_{nc} = \$20$ ,  $c_a = \$100$  e  $c_{s_c} = c_{s_c} = \$2$ . Deseja-se produzir  $\tau = 2300$  circuitos integrados. Os valores ótimos são calculados por busca direta, através de *script* desenvolvido para Matlab<sup>©</sup> (ver Apêndice A). O objetivo é calcular o valor ótimo de  $m$ . A figura 5.3 mostra o gráfico do custo esperado *versus* o intervalo de amostragem  $m$ . A política mais econômica é  $m^0 = 289$ , com resíduo  $m_{res} = 284$ , resultando um custo médio por unidade de  $\$0,1221$ . Caso se adote a solução de horizonte infinito para o sistema de monitoramento, de acordo com os modelos propostos por Nayebpour e Woodall (1993), Borges et al. (2001), Trindade et al. (2007a), Ho et al. (2007) o valor ótimo de  $m$  é igual a 51. A utilização desse valor leva a um custo médio de  $\$0,1444$ , ou seja, aproximadamente 15% maior que o valor ótimo considerando a dimensão do lote.

As figuras 5.4(a) e 5.4(b) corroboram que a política de inspeção ( $m$ ) pode ser consideravelmente



diferente da abordagem para horizonte infinito ( $m = 51$ ) neste exemplo. Como esperado, quando  $\tau$  cresce, a diferença entre a abordagem finita e infinita é cada vez menor. De (5.21), prova-se que  $\alpha'_0 v_2 u'_2 \phi$  é sempre menor ou igual a zero, implicando assim ser o custo do caso finito menor ou igual ao custo do caso infinito, para  $\forall \tau < \infty$ .



(a) Abordagem finita: custo e  $m$  vs.  $\tau$ .

(b) Abordagens finita e infinita: custo vs.  $\tau$ .

Figura 5.4: Gráficos do custo médio vs.  $\tau$ .

### 5.5.1 Impacto dos erros de classificação, de $\pi$ e de $p_2$

Na análise de sensibilidade, estuda-se a influência de cada parâmetro no custo médio unitário, variando-o em um intervalo arbitrariamente grande, mantendo-se os valores dos demais parâmetros iguais àqueles apresentados no início desta seção. As figuras 5.5(a) e 5.5(b) apresentam os gráficos dos valores ótimos do custo médio e de  $m$ , variando um único parâmetro probabilístico do processo ( $p_2$  ou  $\pi$ ). Uma redução na fração de itens conformes da produção operando fora de controle ( $p_2$ ) resulta em uma diminuição do valor de  $m$ , como ilustrado em 5.5(a). Observa-se também que a diminuição de  $p_2$  tende a diminuir o custo médio, o que é oposto ao que se poderia esperar. Entretanto, devido aos erros de classificação, uma redução de  $p_2$  diminui a probabilidade de classificar a peça inspecionada como conforme, quando ela é realmente não-conforme. Esse fato implica o aumento da possibilidade de realização dos ajustes necessários, diminuindo, dessa maneira, a quantidade média de peças não conformes enviadas ao mercado. Um aumento de  $\pi$  (Fig. 5.5(b)) gera uma redução no intervalo de amostragem  $m$  de tal forma a antecipar a necessidade de ajuste.

Na análise de sensibilidade dos erros de classificação  $\alpha$  e  $\beta$ , observa-se que o valor ótimo de  $m$

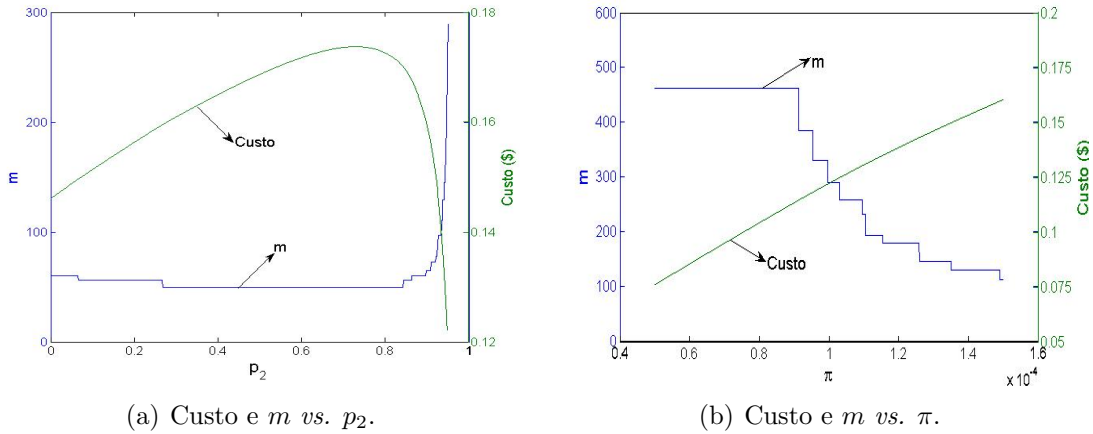


Figura 5.5: Gráficos custo médio *vs.* parâmetros probabilísticos.

aumenta com o crescimento desses erros. Entretanto, como observado nas figuras 5.6(a) e 5.6(b), o crescimento de  $\alpha$  altera de maneira mais significativa a política ótima de  $m$ , do que a alteração produzida pela variação de  $\beta$ . O valor ótimo de  $m$  variou entre 178 e 462 (apresentando oito valores diferentes) para a alteração de  $\alpha$  entre 0,0001 e 0,05. Para o mesmo intervalo de variação,  $\beta$  apresentou apenas os valores 289 e 330 para  $m^0$ . Tal fato sugere um impacto maior do erro  $\alpha$ .

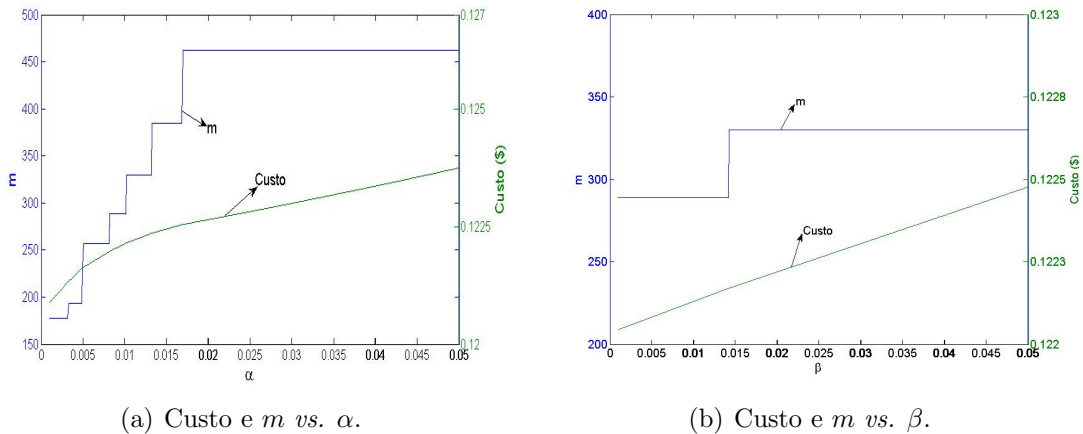


Figura 5.6: Gráficos custo médio *versus* erros de classificação.

### 5.5.2 Os componentes de custo

É importante avaliar o impacto dos erros na estimação dos componentes de custo ( $c_{insp}$ ,  $c_{nc}$  e  $c_a$ ) no planejamento da política ótima. Um planejamento balanceado é desenvolvido nos moldes daquele descrito na Seção 2.6.2. Os custos utilizados são os descritos no exemplo em estudo. Além disso, é importante medir o impacto relativo (2.26) quando o parâmetro ótimo ( $m^0 = 289$ ) é usado equivocadamente em uma situação com erros nos custos. Por exemplo, se os componentes de custo forem 5% superiores, o valor de  $m^0$  é 257, com custo médio de \$0,13369. Caso seja usado  $m = 289$ , o custo médio passa a ser 0,13337; 0,06% maior que o custo ótimo de \$0,13369. A figura 5.7 ilustra o percentual de acréscimo decorrente do uso da política  $m = 289$  nas situações em que possa existir erros de até 15%. Observa-se que os erros não ultrapassam 1%, indicando que essa faixa de variação de erros para os componentes de custo ( $c_{insp}$ ,  $c_{nc}$  e  $c_a$ ) não implica grandes alterações nos resultados ótimos, quando se adota a política  $m = 289$ .

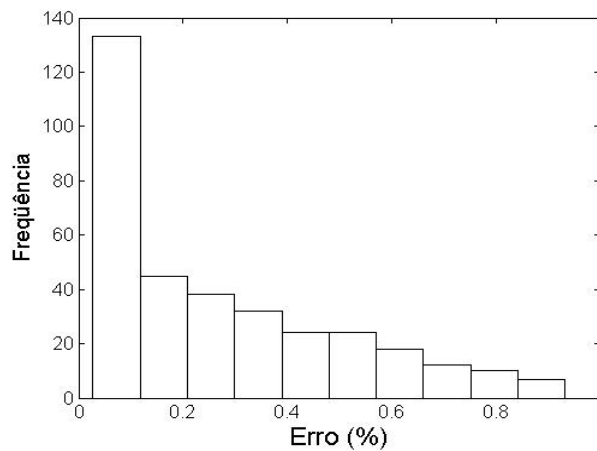


Figura 5.7: Percentual de acréscimo do uso equivocado de  $m^0 = 289$ .

## 5.6 Comentários adicionais

O exemplo numérico ilustra a proposta de planejamento econômico de controle por atributo da produção de pequeno lote, que depende bastante do custo de não-conformidade. A principal conclusão é que pode não ser razoável a aplicação da política ótima para horizonte infinito no caso

da produção de pequeno lote. O custo unitário do sistema de controle mostrou-se 15% superior à resposta ótima do caso finito. Coerentemente, os valores de custo unitário das abordagens finita e infinita convergem quando a dimensão do lote aumenta. A utilização do método proposto pode gerar sensível economia.

# Capítulo 6

## Conclusões e Pesquisa Futura

A proposta inicial deste trabalho foi o desenvolvimento de sistemas de controle *on-line* por atributo, em presença de erros de classificação. Utilizaram-se cadeias de Markov em tempo discreto para a modelagem probabilística. Em todos os modelos propostos, o espaço de estados foi representado por um par ordenado  $(w, s)$ ,  $w$ , associado à situação do processo de produção e  $s$ , associado à decisão decorrente da inspeção. Além disso, considerou-se também que a proporção de itens conformes do processo de produção muda de  $p_1$  para  $p_2$  em um instante aleatório, cuja distribuição subjacente é geométrica de parâmetro  $\pi$ .

No Capítulo 2, apresentou-se um sistema de controle com intervalo de inspeção variável, modelado através de uma cadeia de Markov com seis estados. Em trabalhos anteriores relacionados ao assunto (Taguchi et al., 1989; Nayebpour e Woodall, 1993; Borges et al., 2001; Ho et al., 2007; Trindade et al., 2007a; Ho et al., 2007; Ding e Gong, 2008; Quinino et al., 2010) são apresentados planejamentos econômicos ótimos com intervalo fixo entre inspeções. Os resultados mostraram que processos de alta qualidade podem ser beneficiados por esse sistema de monitoramento. Outro ponto a salientar é a simplicidade do método, mesmo que aplicado em sistemas não-automáticos.

A contribuição do Capítulo 3 consistiu essencialmente na adoção de inspeção de amostra não-unitária. O modelo proposto para o sistema de controle incorpora a coleta intercalada de itens para inspeção. Os resultados indicam situações que justificam o uso desse sistema de monitoramento. Analisa-se também o comportamento do modelo ao combinar esse tipo de amostragem com intervalo de inspeção variável.

Introduz-se, no Capítulo 4, decisão em três níveis que, por sua vez, estabelece distintos tamanhos amostrais e intervalos de amostragens. A modelagem algébrica mais complexa leva à necessidade de ferramenta computacional de otimização mais eficaz que o procedimento de busca direta. Sugere-se o uso de algoritmo genético, amplamente usado em aplicação em controle de qualidade. O modelo é uma generalização dos sistemas propostos nos Capítulos 2 e 3, flexibilizando as possibilidades de modelagem em situações reais.

No Capítulo 5, propõe-se um modelo de sistema de controle *on-line* para a produção de pequenos lotes. O desenvolvimento matricial da função de custo unitário alivia potenciais problemas computacionais por busca exaustiva que possam ocorrer. O exemplo numérico aplicado à situação de processo de alta qualidade aponta a conveniência de adoção do procedimento proposto, já que há situações em que o uso da política ótima para horizonte infinito pode não ser razoável. O modelo é uma generalização da abordagem tradicional de controle on-line por atributos, demonstrando-se que os resultados convergem para valores grandes de  $\tau$ .

São apresentadas a seguir algumas das possibilidades para continuidade da presente pesquisa:

- Trindade (2008) propõe modelo de controle *on-line* por atributo que considera o resultado das últimas  $h$  inspeções, com o objetivo de incorporar informações disponíveis ao processo de tomada de decisão. Um passo natural à pesquisa desenvolvida é incluir informações passadas no modelo geral apresentado no Capítulo 4;
- Acompanhando estudos anteriores, este trabalho utiliza uma distribuição geométrica para descrever o tempo de falha do processo. Como alternativa para prosseguimento da pesquisa, podem ser consideradas outras distribuições subjacentes ao mecanismo de falha do processo. Uma candidata natural é a distribuição de Weibull discreta (Nakagawa e Osaki, 1975; Nakagawa, 2005; Rinne, 2008), pois ela pode tomar uma variedade de formas, mimetizando o comportamento de outras distribuições. Comparada à distribuição geométrica, a Weibull discreta é mais flexível, permitindo modelar situações com taxa de falha crescente ou decrescente. Salienta-se que a distribuição geométrica é um caso particular da Weibull discreta.

- Nos sistemas de controle *on-line* propostos, o custo esperado por item produzido não depende apenas dos componentes de custo envolvidos, mas também dos valores dos parâmetros dos modelos probabilísticos subjacentes, quais sejam, o parâmetro da distribuição do tempo de falha do processo ( $\pi$ ) e a proporção de itens conformes após a mudança de estado do processo ( $p_2$ ). Entretanto, esses valores são geralmente desconhecidos e estimativas viciadas de  $\pi$  e  $p_2$  podem conduzir a perdas econômicas. Dasgupta e Mandal (2008) propuseram procedimento para estimação dos parâmetros probabilísticos do modelo de controle *on-line* desenvolvido por Nayebpour e Woodall (1993). Um dos caminhos viáveis para a continuidade da pesquisa é o desenvolvimento de metodologia de estimação dos valores de  $\pi$  e  $p_2$  dos modelos propostos neste trabalho, considerando-se, nesses casos, os erros de classificação. É conveniente verificar-se a adequação de modelagem através de modelos de Markov ocultos (*Hidden Markov Models*);
- Keats et al. (1997), Pignatiello e Tsai (1988), Linderman e Choo (2002), Vommi e Seetala (2007) propõem procedimentos de planejamento econômico robusto de gráficos de controle. Outra alternativa para prosseguimento da pesquisa é o desenvolvimento de procedimentos de planejamentos robustos aos modelos propostos de maneira a considerar a imprecisão dos parâmetros do processo na busca do melhor conjunto de parâmetros de planejamento. É razoável estudar-se a possibilidade de uso de algoritmos genéticos como procedimento computacional de busca e otimização;
- Um dos problemas na utilização do planejamento econômico de gráficos de controle é não considerar seu desempenho estatístico (Woodall, 1986). Saniga (1989) propõe um modelo econômico limitado por alguma restrição estatística, denominando-o planejamento econômico-estatístico. Nayebpour e Woodall (1993) sugerem aumentar a frequência de inspeção caso a probabilidade de itens defeituosos esteja acima de valor aceitável, no intervalo de inspeção considerado. Montgomery e Woodall (1997) mencionam que a tendência em modelagem econômica e planejamento para gráficos de controle é incorporar restrições estatísticas. Montgomery (2004) recomenda que algum tipo de restrição estatística seja associado à estratégia econômica. Chen (2003) propõe planejamento econômico-estatístico de cartas de controle  $\bar{X}$  com intervalos de

amostragem variável. A presente pesquisa pode incorporar restrições estatísticas ao modelo geral de planejamento econômico de controle *on-line* por atributos, proposto no Capítulo 4, de maneira a ampliar as possibilidades de utilização dos sistemas de monitoramento discutidos.



# Referências Bibliográficas

- Adams, B. M. e Woodall, W. H. (1989). An analysis of Taguchi's on-line process-control procedure under a random-walk model. *Technometrics*, 31(4):401 – 413.
- Akamine, C. T. e Borges, W. S. (2004). Procedimento Taguchi *on-line* para atributos para produção em pequenos lotes. In *Anais do XXIV Encontro Nacional de Engenharia de Produção*, volume 1, pages 1643–1649, Florianópolis, SC.
- Aparisi, F. e García-Díaz, J. C. (2004). Optimization of univariate and multivariate exponentially weighted moving-average control charts using genetic algorithms. *Computers & Operations Research*, 31:1437 – 1454.
- Aparisi, F. e García-Díaz, J. C. (2007). Design and optimization of EWMA control charts for in-control indifference, and out-of-control regions. *Computers & Operations Research*, 34:2096 – 2108.
- Baxley Jr, R. V. (1995). An application of variable sampling interval control charts. *Journal of Quality Technology*, 27(4):275–282.
- Borges, W., Ho, L. L. e Turnes, O. (2001). An analysis of Taguchi's on-line quality monitoring procedure for attributes with diagnosis errors. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 17(3):261 – 276.
- Box, G. E. P. e Kramer, T. (1992). Statistical process monitoring and feedback adjustment - a discussion. *Technometrics*, 34:251 – 285.
- Box, G. E. P. e Luceno, A. (1994). Selection of sampling interval and action limit for discrete feedback adjustment. *Technometrics*, 36:369 – 378.
- Brémaud, P. (1999). *Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues*. Springer-Verlag, New York.
- Carlyle, W. M., Montgomery, D. C. e Runger, G. C. (2000). Optimization problems and methods in quality control and improvement. *Journal of Quality Technology*, 32(1):1–17.
- Carrano, E. G., Soares, L. A. E., Takahashi, R. H. C., Saldanha, R. R. e Neto, O. M. (2006). Electric distribution network multiobjective design using a problem-specific genetic algorithm. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 21(2):995 – 1005.

- Castillo, E. D., Grayson, J. M., Montgomery, D. C. e Runger, G. C. (1996). A review of statistical process control techniques for short run manufacturing systems. *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 25(11):2723–2737.
- Chatterjee, S. e Laudatto, M. (1997). Genetic algorithms in statistics: procedures and applications. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 26(4):1617–1630.
- Chen, Y. K. (2003). An evolutionary economic-statistical design for VSI X control charts under non-normality. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 22(7):602–610.
- Chou, S. e Wang, M. C. (1996). Taguchi’s method and empirical procedure for on-line process control. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 25(2):301 – 320.
- Costa, A. F. B. (1994).  $\bar{X}$  charts with variable sample size. *Journal of Quality Technology*, 26(3):155–163.
- Costa, A. F. B. (1997).  $\bar{X}$  chart with variable sample size and sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 29(2):197–204.
- Costa, A. F. B. (1999).  $\bar{X}$  charts with variable parameters. *Journal of Quality Technology*, 31(4):408–446.
- Costa, A. F. B. e Rahim, M. A. (2001). Economic design of  $\bar{X}$  charts with variable parameters: the Markov chain approach. *Journal of Applied Statistics*, 28(7):875–885.
- Cui, R.-Q. e Reynolds Jr, M. R. (1988).  $\bar{X}$  chart with runs and variable sampling intervals. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 17(3):1073 – 1093.
- Dasgupta, T. (2003). An economic inspection interval for control of defective items in a hot rolling mill. *Journal of Applied Statistics*, 30(3):273 – 282.
- Dasgupta, T. e Mandal, A. (2008). Estimation of process parameters to determine the optimum diagnosis interval for control of defective items . *Technometrics*, 50(2):167 – 181.
- Ding, J. e Gong, L. (2008). The effect of testing equipment shift on optimal decisions in a repetitive testing process. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 186(1):330 – 350.
- Duczmal, L., Cançado, A. L. F., Takahashi, R. H. C. e Bessegato, L. F. (2007). A genetic algorithm for irregularly shaped spatial scan statistics. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(1):43 – 52.
- Duczmal, L. H., Cançado, A. L. F., Takahashi, R. H. C. e Bessegato, L. F. (2008). A comparison of simulated annealing, elliptic and genetic algorithms for finding irregularly shaped spatial clusters. In Kordik, V., editor, *Simulated Annealing*. I-Tech Education and Publishing, Vienna.
- Duncan, A. J. (1956). The economic design of  $\bar{X}$  charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51:228 – 242.

- Gibra, I. N. (1978). Economically optimal determination of the parameters of np-control charts. *Journal of Quality Technology*, 10:12 – 19.
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley, Reading, MA.
- Greenberg, B. S. e Stokes, S. L. (1995). Repetitive testing in the presence of inspection errors. *Technometrics*, 37:102 – 111.
- Hillier, F. S. (1964).  $\bar{X}$  chart control limits based on a small number of subgroups. *Industrial Quality Control*, 20(8):24–29.
- Hillier, F. S. (1967). Small sample probability limits for the range chart. *Journal of the American Statistical Association*, 62(320):1488–1493.
- Hillier, F. S. (1969).  $\bar{X}$  and  $\bar{R}$  chart control limits based on a small number of subgroups. *Journal of Quality Technology*, 1(1):17– 26.
- Ho, L. L., Medeiros, P. G. e Borges, W. S. (2007). An alternative model for on-line quality monitoring for variables. *International Journal of Production Economics*, 107(1):202 – 222.
- Ho, L. L. e Trindade, A. L. G. (2009). Economic design of an  $\bar{X}$  chart for short-run production. *International Journal of Production Economics*, 120(2):613–624.
- Jiang, W. e Tsui, K. L. (2000). An economic model for integrated APC and SPC control charts. *IIE Transactions*, 32(6):505–513.
- Johnson, N. L., Kotz, S. e Wu, X. (1991). *Inspection Errors for Attributes in Quality Control*. Chapman and Hall, London.
- Keats, J. B., Del Castillo, E., Collani, E. e Saniga, E. M. (1997). Economic modeling for statistical process control: a discussion on statistically-based process monitoring and control. *Journal of Quality Technology*, 29(2):144 – 147.
- Linderman, K. e Choo, A. S. (2002). Robust economic control chart design. *IIE Transactions*, 34(12):1069–1078.
- Montgomery, D. C. (2004). *Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade*. LTC, Rio de Janeiro, 4 edition.
- Montgomery, D. C., Heikes, R. G. e Mance, J. F. (1975). Economic design of fraction defective control charts. *Management Science*, 21(11):1272 – 1284.
- Montgomery, D. C. e Woodall, W. H. (1997). A discussion on statistically-based process monitoring and control. *Journal of Quality Technology*, 29(2):121–121.
- Nakagawa, T. (2005). *Maintenance Theory of Reliability*. Springer.

- Nakagawa, T. e Osaki, S. (1975). The discrete Weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, 24(5):300–301.
- Nandi, S. N. (1990). Economic design of np-control charts. *Journal of the Indian Statistical Association*, 28:81–85.
- Nandi, S. N. e Sreehari, M. (1997). Economy based on-line quality control method for attributes. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, 59:384 – 395.
- Nandi, S. N. e Sreehari, M. (1999). Some improvements in Taguchi's economic method allowing continued quality deterioration in production process. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 28(5):1169 – 1181.
- Nayebpour, M. R. e Woodall, W. H. (1993). An analysis of Taguchi's on-line quality-monitoring procedures for attributes. *Technometrics*, 35(1):53 – 60.
- Ohta, H. e Rahim, M. A. (1997). A dynamic economic model for an  $\bar{X}$ -control chart design. *IIE Transactions*, 29(6):481–486.
- Parkhideh, B. e Case, K. E. (1989). The economic design of a dynamic  $\bar{X}$ -control chart. *IIE Transactions*, 21(4):313–323.
- Pignatiello, J. J. e Tsai, A. (1988). Optimal economic design of control charts when cost model parameters are not precisely known. *IIE Transactions*, 20(1):103–110.
- Quesenberry, C. P. (1991a). SPC Q charts for a binomial parameter p: short or long runs. *Journal of Quality Technology*, 23(3):239–246.
- Quesenberry, C. P. (1991b). SPC Q charts for a Poisson parameter lambda: short or long runs. *Journal of Quality Technology*, 23(4):296–303.
- Quesenberry, C. P. (1991c). SPC Q charts for start-up processes and short or long runs. *Journal of Quality Technology*, 23(3):213–224.
- Quinino, R. e Ho, L. L. (2004). Repetitive tests as an economic alternative procedure to control attributes with diagnosis errors. *European Journal of Operation Research*, 155:209 – 225.
- Quinino, R. e Suyama, E. (2002). Número ótimo de classificações independentes com erro na avaliação da conformidade de produtos. *Pesquisa Operacional*, 22:1 – 8.
- Quinino, R. C., Colin, E. C. e Ho, L. L. (2010). Diagnostic errors and repetitive sequential classification in on-line process control by attributes. *European Journal of Operation Research*, 201(1):231–238.
- Ranjan, P., Xie, M. e Goh, T. N. (2003). Optimal control limits for CCC charts in the presence of inspection errors. *Quality and Reliability Engineering International*, 19:149 – 160.

- Reynolds Jr, M. R. (1989). Optimal variable sampling interval control charts. *Sequential Analysis*, 8(4):361–379.
- Reynolds Jr, M. R. (1996). Variable-sampling-interval control charts with sampling at fixed times. *IIE transactions*, 28(6):497–510.
- Reynolds Jr, M. R., Amin, R. W., Arnold, J. C. e Nachlas, J. A. (1988).  $\bar{X}$  charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, 30(2):181–192.
- Rinne, H. (2008). *The Weibull Distribution: A Handbook*. Chapman & Hall/CRC.
- Ross, S. M. (2003). *Introduction to Probability Models*. Academic Press, San Diego, 8 edition.
- Runger, G. C. e Pignatiello Jr, J. J. (1991). Adaptive sampling for process control. *Journal of Quality Technology*, 23(2):135–155.
- Saniga, E. M. (1989). Economic statistical control-chart designs with an application to  $\bar{X}$  and  $R$  charts. *Technometrics*, 31(3):313–320.
- Srivastava, M. S. e Wu, Y. (1991). A second order approximation to Taguchi's et al.'s on-line control procedure. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 20(7):2149 – 2168.
- Srivastava, M. S. e Wu, Y. (1994). On-line control procedures under the random-walk model with measurement error and attribute observations. *The Canadian Journal of Statistics*, 22(3):377 – 386.
- Srivastava, M. S. e Wu, Y. (1995). An improved version of Taguchi's on-line control procedure. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 43(1-2):133 – 145.
- Srivastava, M. S. e Wu, Y. (1996). Economical quality control procedures based on symmetric random walk model. *Statistica Sinica*, 6:389 – 402.
- Srivastava, M. S. e Wu, Y. (1997). On-line quality control procedures for a random walk model with measurement error. *Sequential Analysis*, 16:93 – 105.
- Srivastava, M. S. e Wu, Y. (1999). Economical process adjustment with measurement error. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 28(3-4):989–1003.
- Taguchi, G., Chowdhury, S. e Wu, Y. (2004). *Taguchi's Quality Engineering Handbook*. John Wiley & Sons, Inc, New Jersey.
- Taguchi, G., Elsayed, E. A. e Hsiang, T. (1989). *Quality Engineering in Production Systems*. McGraw-Hill, New York.
- Takahashi, R. H. C., Vasconcelos, J. A., Ramirez, J. A. e Krahenbuhl, L. (2003). A multiobjective methodology for evaluating genetic operators. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39(3):1321 – 1324.

- Trindade, A. L. G. (2008). *Contribuições para o controle on-line de processos por atributos*. Tese de doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Trindade, A. L. G., Ho, L. L. e Quinino, R. C. (2007a). Controle on-line por atributos com erros de classificação: uma abordagem econômica com classificações repetidas. *Pesquisa Operacional*, 27:105 – 116.
- Trindade, A. L. G., Ho, L. L. e Quinino, R. C. (2007b). Monitoring process for attributes with quality deterioration and diagnosis errors. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 23:339 – 358.
- Vommi, V. B. e Seetala, M. S. N. (2007). A new approach to robust economic design of control charts. *Applied Soft Computing Journal*, 7(1):211–228.
- Wang, C.-H. (2007). Economic off-line quality control strategy with two types of inspection errors. *European Journal of Operational Research*, 179:148 – 159.
- Wang, M. C. e Yue, J. (2001). Economic design of process adjustment for on-line control. *International Journal of Production Research*, 29(5):805 – 823.
- Williams, W. W., Looney, S. W. e Peters, M. H. (1985). Use of curtailed sampling plans in the economic design of np-control charts. *Technometrics*, 27(1):57 – 63.
- Woodall, W. H. (1986). Weaknesses of economic design of control charts (Letter to the Editor). *Technometrics*, 28:408 – 410.
- Woodall, W. H. (1987). Conflicts between Deming's philosophy and the economic design of control charts. In Lenz, H. J., Wetherill, G. B. e Wilrich, P. T., editors, *Frontiers in Statistical Quality Control*. Physica-Verlag, Heidelberg.
- Yang, C. H. e Hillier, F. S. (1970). Mean and variance control chart limits based on a small number of subgroups. *Journal of Quality Technology*, 2(1):9–16.

# Apêndice A

## *Scripts* Desenvolvidos

Os *scripts* `func_mL`, `func_n` e `func_tau` são apresentados neste apêndice, todos desenvolvidos em Matlab<sup>©</sup> (versão 7.0 ou superior), referem-se à rotina de busca dos parâmetros ótimos e cálculo do custo unitário da política ótima dos modelos propostos, respectivamente, nos Capítulos 2, 3 e 5. O *script* `func_geral` é rotina de exploração de soluções para o problema de otimização 4.

As variáveis de entrada recorrentes em cada rotina são: `c_i`, `c_nc`, `c_a`, `c_snc` e `c_sc`, referentes, respectivamente, aos componentes de custo  $c_{insp}$ ,  $c_a$ ,  $c_{nc}$ ,  $c_{s_{nc}}$  e  $c_{s_c}$ , conforme detalhado na Seção `sec:custos:mL`, além de: `p1`, `p2`, `pe`, `alfa` e `beta` que correspondem, respectivamente, aos parâmetros probabilísticos do processo  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ . `m_min` e `m_max`, `Lmin` e `Lmax`, `Nmin` e `Nmax` e `amin` e `amax`, no modelo aplicável, referem-se, respectivamente, à região de busca desejada dos parâmetros de planejamento  $m$ ,  $L$ ,  $n$  e  $a$ .

Em todas as rotinas, são os seguintes os valores recorrentes de saída: `valor`, `motimo`, `Lotimo`, `Notimo`, `aotimo` que fornecem respectivamente:  $C^0$ ,  $m^0$ ,  $L^0$ ,  $n^0$ ,  $a^0$ . Os resultados da busca dos *scripts* `func_mL`, `func_n` e `func_tau` são armazenados, respectivamente, nos arquivos: `VIni.txt`, `Vmod_pL.txt` e `VFinito.txt`.

```

1 % Script de busca parametros otimos planejamento economico
2 % Modelo controle on-line com intervalo inspecao variavel
3 % Extensao Controle on-line Atributo c/ Erros Classificacao
4 % Tese - Doutorado em Estatistica
5 % Doutorando: Lupericio Franca Bessegato
6 % Orientador: Roberto Costa Quinino
7 % Co-orientador: Luiz Henrique Duczmal
8 %
9 % Versao: 15/11/2009
10 %
11 % =====
12 clear all;
13
14 % Parametros do probabilisticos do processo
15
16 p1 = 0.999;      % Fracao de conformes processo sob controle
17 p2 = 0.95;      % Fracao de conformes processo fora controle
18 pe = 0.0001;    % Probabilidade ocorrencia shift processo
19 alfa = 0.01;    % Probabilidade classificacao nao cfe item cfe
20 beta = 0.01;    % Probabilidade classificacao cfe item nao-cfe
21
22 % Componentes de custo
23
24 c_i = 0.25;     % Custo inspecao
25 c_nc = 20;     % Custo envio de nao-conformidade
26 c_a = 100;     % Custo ajuste
27 c_snc = 2;     % Custo item nao-cfe inspecionado/descartado
28 c_sc = 2;     % Custo item cfe inspecionado/descartado
29
30 % Parametros da simulacao
31
32 mmin = 2;      % Itens produzidos entre inspecoes sucessivas
33 mmax = 100;
34
35 Lmin = 100;    % Tamanho sequencia itens classificados cfe
36 Lmax = 200;    % ate ajuste do processo
37
38
39 % Calculo de quantidades que nao dependem de m ou de L
40 q = 1 - pe;
41 % Nomenclatura
42
43 % p(decisao dada a situacao do processo de producao
44 % 1 - producao sob controle; 0 - producao fora controle
45 % 1 - julgamento conforme; 0 - julgamento nao cfe;
46
47 % Probabilidades dado producao sob controle
48

```



```

49     % Prob inspecao cfe, dado producao sob controle
50     p11 = (p1*(1-alfa)+(1-p1)*beta);
51     p10 = 1- p11;
52
53     % Probabilidades da situacao do item inspecionado
54
55     % Nomenclatura
56
57     % p(estado real do item dada a decisao situacao producao
58     % 1 - producao sob controle; 0 - producao fora de controle
59     % 1 - julgamento cfe; 0 - julgamento nao cfe;
60     % c: situacao real - cfe; n: situacao real - nao cfe
61
62     % Prob item cfe dado inspecao cfe e producao sob controle
63     p11c = p1*(1-alfa)/p11;
64
65     % Prob item nao cfe dado inspecao cfe e producao controle
66     p11n = 1 - p11c;
67
68     % Prob item cfe dado inspecao nao cfe e producao controle
69     p10c = p1*alfa/p10;
70
71     % Prob item nao cfe dado insp. nao cfe e producao controle
72     p10n = 1 - p10c;
73
74     % Probabilidades dado producao fora controle
75
76     % Prob inspecao cfe, dado producao fora controle
77     p21 = (p2*(1-alfa)+(1-p2)*beta);
78     p20 = 1 - p21;
79     a5 = p20;
80     a6 = p21;
81
82     % Probabilidades da situacao do item inspecionado
83
84     % Prob item cfe dado insp. cfe e producao fora controle
85     p21c = (p2*(1-alfa))/p21;
86
87     % Prob item nao cfe dado insp. cfe e prod. fora controle
88     p21n = 1 - p01c;
89
90     % Prob item cfe dado insp. nao cfe e prod. fora controle
91     p20c = (p20*alfa)/p20;
92
93     % Prob item nao cfe dado insp. nao cfe e prod. fora cont.
94     p20n = 1 - p20c;
95
96     % _____
97     % Custos de descarte (independem de m e L)

```

```

98      % -----
99
100     % custo descarte em insp. cfe de prod.o sob controle
101     descarte_11 = c_sc*p11c + c_snc*p11n;
102
103     % custo descarte em insp. cfe de producao sob controle
104     descarte_10 = c_sc*p10c + c_snc*p10n;
105
106     % custo descarte em insp. cfe de producao fora cont.
107     descarte_21 = c_sc*p21c + c_snc*p21n;
108
109     % custo descarte em insp. nao cfe de producao fora cont.
110     descarte_20 = c_sc*p20c + c_snc*p20n;
111
112
113     % Variaveis do modelo computacional
114     time=clock;
115     time(4:5)
116
117     P = sparse(8,8);
118     contador = 1;
119     Custo = zeros(1,8);
120     for m = mmin:1:mmax           % Intervalos entre inspecoes
121
122         % Probabilidades dependentes de m
123         est1 = q^m;
124         est0 = 1 - est1;
125         a7 = est0 * p20;
126         a8 = est0 * p21;
127         a9 = est1 * p10;
128         a10 = est1 * p11;
129
130     % -----
131     %           Matriz de probabilidades de transicao - parcial
132     % -----
133
134     % Carregamento Probabilidades a5 e a6
135
136     vetor    = [a5 a6];
137     linhas   = [2 4];
138     colunas  = [3 4];
139     tamanho  = size(linhas,2); % qte de linhas insercao
140     parcial  = ones(tamanho,1)*vetor;
141     P(linhas, colunas) = parcial;
142
143     % Carregamento Probabilidades a7, a8, a9 e a10
144
145     vetor    = [a7 a8 a9 a10];
146     linhas   = [6 8];

```

```

147     colunas = [3 4 7 8];
148     tamanho = size(linhas,2); % qte de linhas insercao
149     parcial = ones(tamanho,1)*vetor;
150     P(linhas, colunas) = parcial;
151
152     % -----
153     %     Custos dependentes de m
154     % -----
155
156     % custo de envio ao mercado de item nao conforme
157     mercado_l = c_nc*(m-1)*(1-p1);
158
159     % Estado (1,0)
160     pos = 7;
161     mercado = mercado_l;
162     mercado_vet(pos)=mercado;
163     descarte = descarte_l0;
164     Custo(pos) = c_i + descarte + mercado + c_a;
165
166     % Estado (1,1)
167     pos = 8;
168     mercado = mercado_l;
169     mercado_vet(pos)=mercado;
170     descarte = descarte_l1;
171     Custo(pos) = c_i + descarte + mercado;
172
173
174     % Calculo Parcial custo mercado producao fora controle
175
176
177     vt=(1:m);
178     % probabilidade de shift instante t dado shift
179     pt = q.^(vt-1)*pe./est0;
180     vet_soma_pt = pt.*((vt-1)*(1-p1)+(m - vt)*(1-p2));
181     % Esperanca dos itens enviados ao mercado, dado shift
182     soma_pt = sum(vet_soma_pt);
183
184     % Esperanca de custo mercado dado shift em ciclo atual
185     shift_neste = c_nc*soma_pt;
186     % Esperanca de custo mercado dado shift ciclo anterior
187     shift_antes = c_nc*(m-1)*(1-p2);
188
189     for L = Lmin:1:Lmax      % Sequencia de conformes
190
191     % Probabilidades dependentes de L
192     estL1 = q^L;
193     estL0 = 1 - estL1;
194
195     a1 = estL0*p20;

```

```

196         a2 = estL0*p21;
197         a3 = estL1*p10;
198         a4 = estL1*p11;
199
200     % -----
201     %         Matriz de probabilidades de transicao - final
202     % -----
203     % Carregamento Probabilidades a1, a2, a3 e a4
204
205     vetor    = [a1 a2 a3 a4];
206     linhas   = [1 3 5 7];
207     colunas  = [ 1 2 5 6 ];
208     tamanho  = size(linhas,2); % qte de linhas insercao
209     parcial  = ones(tamanho,1)*vetor;
210     P(linhas, colunas) = parcial;
211
212     % -----
213     %         Distribuicao Invariante
214     % -----
215     % Usando o primeiro autovetor da esquerda
216     sigma = 'LR';
217     opts.disp = 0; % nao apresenta informacao aprox.
218     [auto_vet, auto_val] = eigs(P.',1,sigma, opts);
219     invariante = auto_vet/sum(auto_vet);
220
221     % -----
222     %         Probabilidades de Shift
223     % -----
224
225     % indices estados producao fora controle
226     ind_lin = [2 4]; ind_col = [1 2 3 4];
227     % Matriz calculo probab. mudanca de status por estado
228     Pshift = P(ind_lin,ind_col);
229             % Probabilidade 1st. shift = 1-VPshift
230     VPEshift = invariante+eps;
231     prob_antes = VPEshift(ind_lin)'.*...
232     Pshift ./ VPEshift(ind_col)';
233
234
235     % -----
236     %         Custos dependentes L e distribuicao invariante
237     % -----
238
239     % Estado (0,0)
240     pos = 3;
241     mercado = prob_antes (pos) * shift_antes + ...
242     (1-prob_antes (pos)) * shift_neste;
243     mercado_vet (pos)=mercado;
244     mercado00=mercado

```

```

245         descarte = descarte_20;
246         Custo(pos) = c_i + descarte + mercado + c_a;
247
248     % Estado (0,1)
249         pos = 4;
250         mercado = prob_antes (pos) * shift_antes + ...
251             (1-prob_antes(pos)) * shift_neste;
252         mercado_vet (pos)=mercado;
253         mercado01=mercado
254         descarte = descarte_21;
255         Custo(pos) = c_i + descarte + mercado;
256
257     % Custos nos estados do primeiro ciclo (L)
258
259         vl=(1:L);
260     % probabilidade de shift pos. 1 dado shift
261         pl = q.^(vl-1)*pe./estL0;
262         vet_soma_pl = pl.*((vl-1)*(1-p1)+...
263             (L - vl)*(1-p2));
264     % Esperanca custo mercado dado shift 1st. ciclo
265         soma_pl = sum(vet_soma_pl);
266
267     % Estado (0,L0)
268         pos = 1;
269
270         descarte     = descarte_20;
271         mercado = c_nc * soma_pl;
272         mercado_vet (pos)=mercado;
273         Custo(pos) = c_i + c_a + descarte + mercado;
274
275     % Estado (0,L1)
276         pos = 2;
277
278         descarte     = descarte_21;
279         mercado = c_nc * soma_pl;
280         mercado_vet (pos)=mercado;
281         Custo(pos) = c_i + descarte + mercado ;
282
283     % Estado (1,L0)
284         pos = 5;
285
286         descarte = descarte_10;
287         mercado = c_nc * (L -1) * (1-p1);
288         mercado_vet (pos)=mercado;
289         Custo(pos) = c_i + c_a + descarte + mercado;
290
291     % Estado (1,L1)
292         pos = 6;
293

```

```

294         descarte      = descarte_l1;
295         mercado       = c_nc * (L - 1) * (1-p1);
296         mercado_vet(pos)=mercado;
297         Custo(pos)    = c_i + descarte + mercado;
298
299         % -----
300         % Calculo Custo Medio por unidade para L fixo
301         % -----
302
303         % Itens produzidos associados a cada estado
304
305         Item = [(L-1) (L-1) m-1 m-1 ...
306                (L-1) (L-1) m-1 m-1];
307         % Qte media itens produzidos entre ajustes sucessivos
308         ItemMedio = Item*invariante;
309         % Custo medio entre ajustes sucessivos
310         CustoMedio = Custo*invariante;
311         % Custo medio por unidade
312         Custo_pu = CustoMedio/ItemMedio;
313         MM(contador) = m;
314         ML(contador) = L;
315         MC(contador) = Custo_pu;
316         contador = contador + 1;
317     %
318     end % for L
319     m
320 end % for m
321 [valor,y] = min(MC);
322 moptimum = MM(y);
323 Loptimum = ML(y);
324
325 VIni = [MM', ML', MC'];
326
327 save VIniR2.txt -ascii VIni
328
329 time=clock;
330 time(4:5)
331
332 fprintf('%60s\n','*****');
333 fprintf('%60s\n','      Valores Otimos no Monitoramento      ');
334 fprintf('%50s\n','*****');
335 fprintf('%2s\n',' ');
336 fprintf('%24s\t %5.0f\t %2s\t %5.0f\n','m otimo = ',moptimum);
337 fprintf('%24s\t %5.0f\t \n','Comprimento da Sequencia(L)=',...
338         Loptimum);
339 fprintf('%33s\t %4.6f\t \n','Custo medio p/ item produzido=',...
340         valor);
341 fprintf('%5s\t %2.1f\t %1s\t %4i \n','Lmax = ',k_L, ' x ',...
342         moptimum);

```

```
343 fprintf('%60s\n', '*****');
```

```

1  % Script de busca parametros otimos planejamento economico
2  % Modelo controle on-line com amostra nao-unitaria
3  % Extensao Controle on-line Atributo c/ Erros Classificacao
4  % Tese - Doutorado em Estatistica
5  % Doutorando: Lupericio Franca Bessegato
6  % Orientador: Roberto Costa Quinino
7  % Co-orientador: Luiz Henrique Duczmal
8  %
9  % Versao: 15/11/2009
10 %
11 % =====
12 clear all;
13
14 % Parametros do probabilisticos do processo
15
16 p1 = 0.999;      % Fracao de conformes processo sob controle
17 p2 = 0.95;      % Fracao de conformes processo fora controle
18 pe = 0.0001;   % Probabilidade ocorrencia shift processo
19 alfa = 0.01;   % Probabilidade classificacao nao cfe item cfe
20 beta = 0.01;   % Probabilidade classificacao cfe item nao-cfe
21
22 % Componentes de custo
23
24 c_i   = 0.25;   % Custo inspecao
25 c_nc  = 20;    % Custo envio de nao-conformidade
26 c_a   = 100;   % Custo ajuste
27 c_snc = 2;     % Custo item nao-cfe inspecionado/descartado
28 c_sc  = 2;     % Custo item cfe inspecionado/descartado
29
30 % Parametros da simulacao
31
32 d0 = 3;        % producao entre itens inspecionados
33                % d = d0 ≥1, para n>1, d=0 para n = 1
34
35 N_min = 1;     % tamanho amostra
36 N_max = 1;     % 1 ≤ N ≤ m
37
38
39 a_min = 1;     % qte. minimo itens classificados conformes
40 a_max = 10;    % 1 ≤ a ≤ N
41
42 mmin = 2;     % Itens produzidos entre inspecoes sucessivas
43 mmax = 100;
44
45 Lmin = 100;   % Tamanho sequencia itens classificados cfes
46 Lmax = 200;   % ate ajuste do processo
47
48 % -----

```



```

49 % Calculo de quantidades que nao dependem de m ou de L
50 % -----
51     q = 1 - pe;
52
53
54
55 % -----
56 % Probabilidades dado producao sob controle
57 % -----
58
59 % Prob inspecao cfe, dado producao sob controle
60     pA = (p1*(1-alfa)+(1-p1)*beta);
61     p10 = 1- pA;
62
63     % Probabilidades da situacao do item inspecionado
64
65     % Nomenclatura
66
67     % p(decisao dada a situacao do processo de producao
68     % 1 - producao sob controle; 0 - producao fora controle
69     % 1 - julgamento conforme; 0 - julgamento nao cfe;
70     % c: situacao real - cfe; n: situacao real - nao cfe
71
72     % Prob item cfe dado inspecao cfe e producao sob controle
73     p11c = p1*(1-alfa)/pA;
74     % Prob item nao cfe dado inspecao cfe e producao controle
75     p11n = 1 - p11c;
76     % Prob item cfe dado inspecao nao cfe e producao controle
77     p10c = p1*alfa/(1-pA);
78     % Prob item nao cfe dado insp. nao cfe producao controle
79     p10n = 1 - p10c;
80
81 % -----
82 % Probabilidades dado producao fora controle
83 % -----
84
85 % Prob inspecao cfe, dado producao fora controle
86     pD = (p2*(1-alfa)+(1-p2)*beta);
87     p00 = 1 - pD;
88
89     % Probabilidades da situacao do item inspecionado
90
91     % Prob item cfe dado insp. cfe e producao fora controle
92     p21c = (p2*(1-alfa))/pD;
93     % Prob item nao cfe dado insp. cfe e prod. fora controle
94     p21n = 1 - p21c;
95     % Prob item cfe dado insp. nao cfe e prod. fora controle
96     p20c = (p2*alfa)/(1-pD);
97     % Prob item nao cfe dado insp. nao cfe e prod. fora cont.

```

```

98         p20n = 1 - p20c;
99
100
101         % -----
102         % Probabilidades entre itens inspecionados
103         % -----
104
105     % Variaveis do modelo computacional
106
107     time=clock;
108     time(4:5)
109     contador = 1;
110
111     for m = m_min :1: m_max
112         m
113
114         % Custos Mercado Parcial – Nao depende de L, N ou a
115
116         % ----- Ciclo comprimento m -----
117
118         vet_m=(1:m);
119         % probabilidade de shift instante t dado shift
120         q_m = q.^(vet_m - 1)*pe./(1 - q^m);
121         vet_soma_qm = q_m.*((vet_m - 1)*(1-p1)+...
122             (m - vet_m + 1)*(1-p2));
123         % Esperanca dos itens enviados ao mercado, dado shift
124         soma_qm = sum(vet_soma_qm);
125
126         L_f = max(m,L_min); % impede L_min < m
127         for L = L_f:1:L_max
128
129             % Custos Mercado Parcial – Nao depende de N ou a
130
131             % ----- Ciclo comprimento L -----
132
133             vet_L=(1:L);
134             % probabilidade de de shift instante t dado shift
135             q_L = q.^(vet_L - 1)*pe./(1 - q^L);
136
137             vet_soma_qL = q_L.*((vet_L - 1)*(1-p1)+...
138                 (L - vet_L + 1)*(1-p2));
139             % Esperanca dos itens enviados ao mercado, dado shift
140             soma_qL = sum(vet_soma_qL);
141
142             N_f = min(m,N_max); % impede N > m
143             for N = N_min:1:N_f
144
145                 % Transformar d = 0 (n=1) e d = d (n>1).
146

```

```

147         compatibilizador = ceil((N-1)/N); % 0 para n=1;
148                                         % 1 para n>1.
149         d = d0 * compatibilizador;      % d=0, se n=1
150                                         % d=d, se n>1
151
152     % — Quantidade de itens produzidos amostragem
153     erre = (N-1)*d+1;
154
155     % Qte nao cfe mercado – shift durante amostragem
156
157     soma_k = 0;
158     nu_2s = 0;
159     if N >1
160         vetor_r = (1 : erre);
161         % Probabilidade shift item r
162         q_R = q.^(vetor_r-1)*pe./(1-q^erre);
163         % Qte inspecoes sob controle
164         vetor_k = ceil((vetor_r-1)/d);
165         % Qte enviada mercado sob controle
166         qte_in = (vetor_r-(vetor_k+1));
167         % Qte enviada mercado fora controle
168         qte_out = (erre - N) - qte_in ;
169         termo_k =q_R.*(qte_in * (1-p1) + ...
170             qte_out*(1-p2));
171         nu_2s = sum(termo_k);
172     end % if
173
174     a_f = min(N,a_max); % impede a > n;
175     for a = a_min:1:a_f
176
177         % ——— Probabilidades NAO Ajustar Processo
178
179         vetor_0 = 0:a-1;
180         vetor_a = a:N;
181
182         vetor_Ba_pA = binopdf(vetor_a,N,pA);
183         vetor_Ba_pD = binopdf(vetor_a,N,pD);
184
185         vetor_B0_pA = binopdf(vetor_0,N,pA);
186         vetor_B0_pD = binopdf(vetor_0,N,pD);
187
188         % toda a amostra coletada sob controle
189         Ba_pA = sum(vetor_Ba_pA);
190         % toda a amostra coletada fora controle
191         Ba_pD = sum(vetor_Ba_pD);
192
193     % ———Transicao apos ajuste
194
195     Pw0_00 = q^(L + erre)*(1-Ba_pA);

```

```

196         Pw0_01 = q^(L + erre)*(Ba_pA);
197         Pw0_10 = (1 - q^L)*(1-Ba_pD);
198         Pw0_11 = (1 - q^L)*(Ba_pD);
199
200         % ----- Transicao sob controle sem ajuste
201
202         P01_00 = q^(m + erre)*(1-Ba_pA);
203         P01_01 = q^(m + erre)*(Ba_pA);
204         P01_10 = (1 - q^m)*(1-Ba_pD);
205         P01_11 = (1 - q^m)*(Ba_pD);
206
207         % ----- Transicao fora de controle
208
209         Pw1_30 = 1 - Ba_pD;
210         Pw1_31 = Ba_pD;
211
212         % ----- Transicao shift amostragem
213
214         flag = min(1,N-1);
215         prob_resto_21 = 0;
216         prob_resto_20 = 0;
217         cfe_resto_21 = 0;
218         cfe_resto_20 = 0;
219
220         while flag == 1;
221
222             soma_prob_k_21 = 0;
223             soma_cfe_k_21 = 0;
224             soma_ncfe_k_21 = 0;
225
226             soma_prob_k_20 = 0;
227             soma_cfe_k_20 = 0;
228             soma_ncfe_k_20 = 0;
229
230             for k=1:N-1
231
232                 soma_prob_u_21 = 0;
233                 soma_cfe_u_21 = 0;
234                 soma_ncfe_u_21 = 0;
235
236                 soma_prob_u_20 = 0;
237                 soma_cfe_u_20 = 0;
238                 soma_ncfe_u_20 = 0;
239
240                 for u=0:k;
241
242                     % ----- Estado (2,1) -----
243
244                     vet_prob_j_21 = binopdf(...

```

```

245         vetor_a - u, N-k,pD);
246 soma_prob_j_21 = sum(...
247     vet_prob_j_21);
248
249 vet_cfe_j_21 = (p11c*u + ...
250     p10c*(k -u)+p21c*(...
251     vetor_a- u)+p20c*(N-k...
252     -vetor_a+u)).*binopdf(...
253     vetor_a-u,N-k,pD);
254 soma_cfe_j_21 = sum(...
255     vet_cfe_j_21);
256
257     % ----- Estado (2,0) -----
258
259 vet_prob_j_20 = binopdf(...
260     vetor_0 - u, N-k,pD);
261 soma_prob_j_20 = sum(...
262     vet_prob_j_20);
263
264 vet_cfe_j_20 = (p11c*u + ...
265     p10c*(k -u) + p21c*...
266     (vetor_0 - u) + p20c*...
267     (N - k - vetor_0 +u)).*...
268     binopdf(vetor_0-u,N-k,pD);
269 soma_cfe_j_20 = sum(...
270     vet_cfe_j_20);q
271
272 prob_u = binopdf(u,k,pA);
273
274     % ----- Estado (2,1) -----
275
276 prob_u_j_21= prob_u *...
277     soma_prob_j_21;
278 soma_prob_u_21 = ...
279     soma_prob_u_21+prob_u_j_21;
280
281 cfe_u_j_21 = soma_cfe_j_21*...
282     prob_u;
283 soma_cfe_u_21 = ...
284     soma_cfe_u_21+cfe_u_j_21;
285
286     % ----- Estado (2,0) -----
287
288 prob_u_j_20= prob_u * ...
289     soma_prob_j_20;
290 soma_prob_u_20 = ...
291     soma_prob_u_20+prob_u_j_20;
292
293 cfe_u_j_20 = soma_cfe_j_20*...

```

```

294         prob_u;
295         soma_cfe_u_20 = ...
296             soma_cfe_u_20+cfe_u_j_20;
297
298     end % for u
299
300     prob_k = q^((k-1)*d);
301
302         % ----- Estado (2,1) -----
303
304     prob_k_u_21 = prob_k * ...
305         soma_prob_u_21;
306     soma_prob_k_21 = ...
307         soma_prob_k_21 + prob_k_u_21;
308
309     cfe_k_u_21 = prob_k * ...
310         soma_cfe_u_21;
311     soma_cfe_k_21 = soma_cfe_k_21 +...
312         cfe_k_u_21;
313
314         % ----- Estado (2,0) -----
315
316     prob_k_u_20 = prob_k * ...
317         soma_prob_u_20;
318     soma_prob_k_20=soma_prob_k_20+...
319         prob_k_u_20;
320
321     cfe_k_u_20 = prob_k * ...
322         soma_cfe_u_20;
323     soma_cfe_k_20 = soma_cfe_k_20 +...
324         cfe_k_u_20;
325
326     end % for k
327
328     flag=0;
329     prob_resto_21 = (q * (1 - q^d)) * ...
330         soma_prob_k_21;
331     prob_resto_20 = (q * (1 - q^d)) * ...
332         soma_prob_k_20;
333     cfe_resto_21 = (q*(1-q^d))*soma_cfe_k_21;
334     cfe_resto_20 = (q*(1-q^d))*soma_cfe_k_20;
335     end %while flag
336
337         % Probabilidades Estados (2,0) e (2,1)
338
339     prob_la_21 = pe * Ba_pD;
340
341
342     Pw0_21 = q^L*(prob_la_21+prob_resto_21);

```

```

343         P01_21 = q^m*(prob_1a_21+prob_resto_21);
344
345         prob_1a_20 = pe *(1- Ba_pD);
346
347         Pw0_20 = q^L*(prob_1a_20+prob_resto_20);
348         P01_20 = q^m*(prob_1a_20+prob_resto_20);
349
350     % Qte. Esperada Realmente Conformes/Nao-cfes
351
352         % ----- Estado (2,1) -----
353
354         cfe_1a_21 = sum((p21c*vetor_a +p20c*(N-...
355             vetor_a)).*binopdf(vetor_a,N,pD))*pe;
356
357         cfe_21 = ((1-pe)^L/Pw0_21)*(cfe_1a_21+ ...
358             cfe_resto_21);
359         ncf_21 = N - cfe_21;
360
361         % ----- Estado (2,0) -----
362
363         cfe_1a_20 = sum((p21c*vetor_0+p20c*(N -...
364             vetor_0)).*binopdf(vetor_0,N,pD))*pe;
365
366         cfe_20 = ((1-pe)^L/Pw0_20)*(cfe_1a_20 +...
367             cfe_resto_20);
368         ncf_20 = N - cfe_20;
369
370     % -----
371     % Matriz de Transicao
372     % -----
373
374     P = sparse(8,8);
375
376         % linhas: (0,0), (1,0), (2,0), (3,0)
377
378     vetor = [Pw0_00, Pw0_01, Pw0_10, ...
379         Pw0_11, Pw0_20, Pw0_21];
380     linhas = [1, 3, 5, 7];
381     colunas = [1:6];
382     tamanho = size(linhas,2); % qte de linhas
383     parcial_16 = ones(tamanho,1)*vetor;
384     P(linhas, colunas) = parcial_16;
385
386         % linha (0,1)
387
388     P(2,1:6)=[P01_00, P01_01, P01_10,...
389         P01_11,P01_20,P01_21];
390
391         % linhas (1,1), (2,1), (3,1)

```

```

392
393         vetor = [Pw1_30, Pw1_31];
394         linhas = [4, 6, 8];
395         colunas= [7, 8];
396         tamanho = size(linhas,2);% qte de linhas
397         parcial_78 = ones(tamanho,1)*vetor;
398         P(linhas, colunas) = parcial_78;
399
400         % -----
401         %           Distribuicao Invariante
402         % -----
403
404         A = transpose(P) - eye(8);
405         A(8, :) = ones(1, 8);
406         B = zeros(8, 1);
407         B(8,1) = 1;
408         invariante = A\B;
409
410         % -----
411         %           Probabilidades de Comprimento de Ciclo
412         % -----
413
414         soma_pi0 = [1 0 1 0 1 0 1 0]*invariante;
415
416         %soma probabilidades estados s=0
417         P_L = P(1,:) * soma_pi0 ./ (invariante'+eps);
418
419         pL_00 = P_L(1);
420         pL_01 = P_L(2);
421         pL_10 = P_L(3);
422         pL_11 = P_L(4);
423         pL_20 = P_L(5);
424         pL_21 = P_L(6);
425
426         % -----
427         %           Custos dos Estados
428         % -----
429
430         % Estado (0,0)
431
432         % ----- Mercado -----
433
434         mercado_00 = c_nc*((1-pL_00)*m + ...
435         pL_00*L + erre - N)*(1-p1);
436
437         % ----- Descarte -----
438
439         vetor=vetor_0;
440         vet_scrap_00c =(vetor * p1*(1-alfa)...

```



```

441         /pA + (N-vetor)*p1*alfa/(1-pA))...
442         .* vetor_B0_pA;
443     cfe_00 = sum(vet_scrap_00c)/...
444         sum(vetor_B0_pA);
445     ncfe_00 = N - cfe_00;
446
447     descarte_00=cfe_00*c_sc+ncfe_00*c_snc;
448
449     % ----- Custo Estado (0,0)
450
451     ajuste_00 = c_a;
452     custo_00 = N*c_i + mercado_00 +...
453         descarte_00 + ajuste_00;
454
455     % Estado (0,1)
456
457     % ----- Mercado -----
458
459     mercado_01 = c_nc*((1-pL_01)*m +...
460         pL_01*L + erre - N)*(1-p1);
461
462     % ----- Descarte -----
463
464     vetor=vetor_a;
465     vet_scrap_01c = (vetor*p1*(1-alfa)/...
466         pA + (N-vetor)*p1*alfa/(1-pA))...
467         .* vetor_Ba_pA;
468     cfe_01 = sum(vet_scrap_01c)/Ba_pA;
469     ncfe_01 = N - cfe_01;
470
471     descarte_01=cfe_01*c_sc+ncfe_01*c_snc;
472
473     % ----- Custo Estado (0,1)
474
475     ajuste_01 = 0;
476     custo_01 = N*c_i + mercado_01 + ...
477         descarte_01 +ajuste_01;
478
479     % Estado (1,0)
480
481     % ----- Mercado -----
482
483     mercado_10=c_nc*(soma_qm*(1-pL_10)...
484         + soma_qL*pL_10+(erre-N)*(1-p2));
485
486     % ----- Descarte -----
487
488     vetor=vetor_0;
489     vet_scrap_10c = (vetor*p2*(1-alfa)/...

```

```

490         pD + (N-vetor)*p2*alfa/(1-pD))...
491         .* vetor_B0_pD;
492     cfe_10 = sum(vet_scrap_10c)/...
493         sum(vetor_B0_pD);
494     ncfe_10 = N - cfe_10;
495
496     descarte_10=cfe_10*c_sc+ncfe_10*c_snc;
497
498     % ----- Custo Estado (1,0) -----
499
500     ajuste_10 = c_a;
501     custo_10 = N*c_i + mercado_10 + ...
502         descarte_10 +ajuste_10;
503
504     % Estado (1,1)
505
506     % ----- Mercado -----
507
508     mercado_11=c_nc*(soma_qm*(1-pL_11)+...
509         soma_qL*pL_11+(erre - N)*(1-p2));
510
511     % ----- Descarte -----
512
513     vetor=vetor_a;
514     vet_scrap_11c=(vetor*p2*(1-alfa)/...
515         pD + (N-vetor)*p2*alfa/(1-pD))...
516         .* vetor_Ba_pD;
517     cfe_11 = sum(vet_scrap_11c)/Ba_pD;
518     ncfe_11 = N - cfe_11;
519
520     descarte_11=cfe_11*c_sc+ncfe_11*c_snc;
521
522     % ----- Custo Estado (1,1)
523
524     ajuste_11 = 0;
525     custo_11 = N*c_i + mercado_11 + ...
526         descarte_11 +ajuste_11;
527
528     % Estado (2,0)
529
530
531     mercado_20 = c_nc*((m*(1-pL_20)+ ...
532         L*pL_20)*(1-p1) + nu_2s);
533     descarte_20=cfe_20*c_sc+ncfe_20*c_snc;
534     ajuste_20 = c_a;
535
536     custo_20 = N*c_i + mercado_20 +...
537         descarte_20 +ajuste_20;
538

```

```

539         % Estado (2,1)
540
541         mercado_21 = c_nc*( (m*(1-pL_21)+...
542             L*pL_21)*(1-p1) + nu_2s);
543         descarte_21=cfe_21*c_sc+ncfe_21*c_snc;
544         ajuste_21 = 0;
545
546         custo_21 = N*c_i + mercado_21 +...
547             descarte_21 +ajuste_21;
548
549         % Estado (3,0)
550
551         % ----- Mercado -----
552
553         mercado_30=c_nc*(m + erre - N)*(1-p2);
554
555         % ----- Custo Estado (3,0) -----
556
557         descarte_30= descarte_10;
558         ajuste_30 = c_a;
559         custo_30 = N*c_i + mercado_30 +...
560             descarte_30 +ajuste_30;
561
562         % Estado (3,1)
563
564         % ----- Mercado -----
565
566         mercado_31 = mercado_30;
567
568         % ----- Custo Estado (3,1) -----
569
570         descarte_31= descarte_11;
571         ajuste_31 = 0;
572         custo_31 = N*c_i + mercado_31 + ...
573             descarte_31 +ajuste_31;
574
575         % ----- Vetor de Custos -----
576
577         Custo=[custo_00,custo_01,custo_10,...
578             custo_11,custo_20,custo_21,...
579             custo_30,custo_31];
580
581         % -----
582         % Calculo Custo Medio por Unidade
583         % -----
584
585         % Qte media itens produzidos entre ajustes
586         ItemMedio = m + (erre-N) + (L-m)*soma_pi0;
587         % soma_pi0:prob.estados s=0

```

```

588         % Custo medio entre ajustes sucessivos
589         CustoMedio = Custo*invariante;
590         % Custo medio por unidade
591         Custo_pu = CustoMedio/ItemMedio;
592         MM(contador) = m;
593         ML(contador) = L;
594         MN(contador) = N;
595         MA(contador) = a;
596         MC(contador) = Custo_pu;
597
598         contador = contador + 1;
599     end % for a
600 end % for N
601 end % for L
602 end % for m
603
604 [valor,y] = min(MC);
605 motimo = MM(y);
606 Lotimo = ML(y);
607 Notimo = MN(y);
608 Aotimo = MA(y);
609
610 VMod_pL = [MM', ML', MN', MA', MC'];
611
612 save VMod_pL.txt -ascii VMod_pL
613
614 time=clock;
615 time(4:5)
616
617 fprintf('%60s\n','*****');
618 fprintf('%60s\n','    Valores Otimos no Monitoramento    ');
619 fprintf('%50s\n','*****');
620 fprintf('%2s\n',' ');
621 fprintf('%24s\t %5.0f\t %2s\t','m otimo = ',motimo);
622 fprintf('%24s\t %5.0f\t \n','L otimo = ',Lotimo);
623 fprintf('%24s\t %5.0f\t %2s\t','Tamanho amostra (N)=',Notimo);
624 fprintf('%33s\t %5.0f\t \n','Criterio p/ ajuste(a)=',Aotimo);
625 fprintf('%24s\t%4.6f\t%2s\t%5.0f\n','Custo unitario=',valor);
626 fprintf('%2s\n',' ');
627 fprintf('%60s\n','*****');

```

```

1 % Script de busca parametros otimos planejamento economico
2 % Modelo controle on-line com horizonte finito
3 % Extensao Controle on-line Atributo c/ Erros Classificacao
4 % Tese - Doutorado em Estatistica
5 % Doutorando: Lupericio Franca Bessegato
6 % Orientador: Roberto Costa Quinino
7 % Co-orientador: Luiz Henrique Duczmal
8 %
9 % Versao: 15/11/2009
10 %
11 % =====
12 clear all;
13
14 % Parametros do probabilisticos do processo
15
16 p1 = 0.999;      % Fracao de conformes processo sob controle
17 p2 = 0.95;      % Fracao de conformes processo fora controle
18 pe = 0.0001;   % Probabilidade ocorrencia shift processo
19 alfa = 0.01;   % Probabilidade classificacao nao cfe item cfe
20 beta = 0.01;   % Probabilidade classificacao cfe item nao-cfe
21
22 % Componentes de custo
23
24 c_i   = 0.25;   % Custo inspecao
25 c_nc  = 20;    % Custo envio de nao-conformidade
26 c_a   = 100;   % Custo ajuste
27 c_snc = 2;     % Custo item nao-cfe inspecionado/descartado
28 c_sc  = 2;     % Custo item cfe inspecionado/descartado
29
30 % Parametros da simulacao
31
32 tau = 2300;    % Lote a ser fabricado e enviado ao mercado
33                % d = d0 ≥ 1 (n > 1), d=0 (n = 1)
34
35 m_min =2;     % producao entre inspecoes
36 m_max =tau;
37
38
39
40 % -----
41 % Calculo de quantidades que nao dependem de m ou de L
42 % -----
43
44     alfa0 = ([0 1 0 0 0 0])';
45
46     q = 1 - pe;
47
48     % Nomenclatura

```

```

49
50 % p(decisao dada a situacao do processo de producao
51 % 1 - producao sob controle; 0 - producao fora de controle
52 % 1 - julgamento conforme; 0 - julgamento nao conforme;
53
54 % -----
55 % Probabilidades dado producao sob controle
56 % -----
57
58 % Prob inspecao cfe, dado producao sob controle
59 pA = (p1*(1-alfa)+(1-p1)*beta);
60 p10 = 1- pA;
61
62 % Probabilidades da situacao do item inspecionado
63
64 % Nomenclatura
65
66 % p(decisao dada a situacao do processo de producao
67 % 1 - producao sob controle; 0 - producao fora controle
68 % 1 - julgamento conforme; 0 - julgamento nao cfe;
69 % c: situacao real - cfe; n: situacao real - nao cfe
70
71 % Prob item cfe dado inspecao cfe e producao sob controle
72 p11c = p1*(1-alfa)/pA;
73 % Prob item nao cfe dado inspecao cfe e producao controle
74 p11n = 1 - p11c;
75 % Prob item cfe dado inspecao nao cfe e producao controle
76 p10c = p1*alfa/(1-pA);
77 % Prob item nao cfe dado insp. nao cfe producao controle
78 p10n = 1 - p10c;
79
80 % -----
81 % Probabilidades dado producao fora controle
82 % -----
83
84 % Prob inspecao cfe, dado producao fora controle
85 pD = (p2*(1-alfa)+(1-p2)*beta);
86 p00 = 1 - pD;
87
88 % Probabilidades da situacao do item inspecionado
89
90 % Prob item cfe dado insp. cfe e producao fora controle
91 p21c = (p2*(1-alfa))/pD;
92 % Prob item nao cfe dado insp. cfe e prod. fora controle
93 p21n = 1 - p21c;
94 % Prob item cfe dado insp. nao cfe e prod. fora controle
95 p20c = (p2*alfa)/(1-pD);
96 % Prob item nao cfe dado insp. nao cfe e prod. fora cont.
97 p20n = 1 - p20c;

```

```

98
99     time=clock;
100     time(4:5)
101     contador = 1;
102
103     for m = m_min:1:m_max
104         m;
105         N = ceil(tau/(m-1)); % Qte inspecoes
106
107         % -----
108         %             Probabilidades dependentes de m
109         % -----
110
111
112         % ----- Durante fase inicial do ciclo -----
113         p1_m = q^m;           % Nao ocorrer shift ciclo
114         p2_m = 1 - p1_m;     % Ocorrer shift ciclo
115
116         % ----- Shift instante t do ciclo -----
117         vetor_t = (1:m);
118         q_m = q.^(vetor_t-1)*pe./p2_m;
119
120         % -----
121         %             Probabilidades de transicao
122         % -----
123
124         P00_00 = p1_m * (1-pA);
125         P00_01 = p1_m * pA;
126         P00_10 = p2_m * (1-pD);
127         P00_11 = p2_m * pD;
128         P11_20 = 1 - pD;
129         P11_21 = pD;
130
131         % -----
132         %             Matriz de Transicao
133         % -----
134         P = sparse(6,6);
135
136         % colunas de 1 a 4
137
138         colunas = 1:4;
139         linhas = [1 2 3 5 ];
140         vetor = [P00_00, P00_01, P00_10, P00_11 ];
141         tamanho = size(linhas,2);
142         parcial_14 = ones(tamanho,1)*vetor;
143         P(linhas,colunas)=parcial_14;
144
145         % colunas 5 e 6
146

```

```

147     colunas = [5,6];
148     linhas  = [4 6];
149     vetor   = [P11_20, P11_21 ];
150     tamanho = size(linhas,2);
151     parcial_56 = ones(tamanho,1)*vetor;
152     P(linhas,colunas)=parcial_56;
153
154     % -----
155     %           Custos dos Estados
156     % -----
157
158     % ----- Estados (0,0) e (0,1)
159
160     mercado_00 = c_nc * (m - 1)*(1 - p1);
161     descarte_00 = c_sc * p10c + c_snc * p10n;
162     ajuste_00 = c_a;
163     Phi_00 = c_i+mercado_00+descarte_00+ajuste_00;
164
165     mercado_01 = mercado_00;
166     descarte_01 = c_sc * p11c + c_snc * p11n;
167     ajuste_01 = 0;
168     Phi_01 = c_i + mercado_01 + descarte_01;
169
170     % ----- Estados (1,0) e (1,1)
171
172     mercado_10 = c_nc*sum(q_m.*((vetor_t-1)*...
173         (1-p1)+(m-vetor_t)*(1-p2)));
174     descarte_10 = c_sc * p20c + c_snc * p20n;
175     ajuste_10 = c_a;
176     Phi_10 = c_i + mercado_10 + descarte_10 + ...
177         ajuste_10;
178
179     mercado_11 = mercado_10;
180     descarte_11 = c_sc * p21c + c_snc * p21n;
181     ajuste_11 = 0;
182     Phi_11 = c_i + mercado_11 + descarte_11;
183
184     % ----- Estados (2,0) e (2,1)
185
186     mercado_20 = c_nc * (m - 1)*(1 - p2);
187     descarte_20 = c_sc * p20c + c_snc * p20n;
188     ajuste_20 = c_a;
189     Phi_20 = c_i + mercado_20 + descarte_20 + ...
190         ajuste_20;
191
192     mercado_21 = mercado_20;
193     descarte_21 = c_sc * p21c + c_snc * p21n;
194     ajuste_21 = 0;
195     Phi_21 = c_i + mercado_21 + descarte_21;

```



```

196
197     % ----- Vetor de Custo -----
198
199     Phi = [Phi_00; Phi_01; Phi_10; Phi_11;...
200           Phi_20; Phi_21];
201
202     % -----
203     %           Decomposicao de P
204     % -----
205     lambda2=q^m*pD;
206
207     % ----- Autovalores e Autovetores a direita -----
208
209     [V,Lambda]=eigs(P);
210     v1=V(:,1);
211     v2=V(:,2);
212     lambda22=Lambda(2,2);
213
214     % ----- Autovetores a esquerda -----
215
216     sigma = 'LR';
217
218     opts.disp = 0; %nao apresenta informe aprox.
219     [U, Lambda_esq] = eigs(P.',2,sigma, opts);...
220     U = conj(U);
221     [lambda_esq,ind_esq]=sort(diag(Lambda_esq),...
222     'descend');
223     u1 = U(:,ind_esq(1));
224     u2 = U(:,ind_esq(2));
225
226     invariante = u1/sum(u1);
227
228     % -----
229     %           Distribuicao Invariante
230     % -----
231
232     A = transpose(P) - eye(6);
233     A(6, :) = ones(1, 6);
234     B = zeros(6, 1);
235     B(6,1) = 1;
236     invariante_alt = A\B;
237
238     % -----
239     %           Custos Totais
240     % -----
241
242     % ----- Custo Total Medio dos N primeiras inspecoes
243
244     prod_int_1 = dot(v1,u1);

```

```

245         prod_int_2 = dot(v2,u2);
246         mat_1=v1*u1'/prod_int_1;
247         mat_2=v2*u2'/prod_int_2;
248         sum_lambda2=(lambda2/(1-lambda2))*(1-lambda2^N);
249
250         EV_n = alfa0'*(N*mat_1 + sum_lambda2*mat_2)*Phi;
251
252
253         % ----- Custo Total Medio -----
254
255         qte_estoque = N*(m-1) - tau;
256
257         EV = EV_n;
258
259
260         % -----
261         % Calculo Custo Medio por unidade
262         % -----
263
264         % Qte de itens enviados ao mercado
265         qte_itens = N*(m-1); %tau
266         % Custo medio por unidade enviada ao mercado
267         Custo_pu = EV/qte_itens;
268
269         MM(contador) = m;
270         MC(contador) = Custo_pu;
271         contador = contador + 1;
272     end %for m
273
274     [valor,y] = min(MC);
275     motimo = MM(y);
276     VFinito = [MM', MC'];
277     save VFinito.txt -ascii VFinito
278     plot(MM,MC);
279
280     Notimo=ceil(tau/motimo);
281     diferenca = Notimo*(motimo-1) - tau;
282
283     time=clock;
284     time(4:5)
285
286
287     fprintf('%60s\n','*****');
288     fprintf('%60s\n','      Valores Otimos no Monitoramento      ');
289     fprintf('%50s\n','*****');
290     fprintf('%2s\n',' ');
291     fprintf('%24s\t %5.0f\t %2s\t %5.0f \n','m otimo = ',motimo);
292     fprintf('%24s\t %5.0f\t \n','Qte inspecoes = ',Notimo);
293     fprintf('%24s\t %5.0f\t %2s\t %5.0f\n','Producao a maior = ',...

```

```
294     diferenca);
295 fprintf('%33s\t %4.6f\t \n', 'Custo medio unitario = ', valor);
296 fprintf('%2s\n', ' ');
297 fprintf('%60s\n', '*****');
```

```
1 % Script de busca parametros otimos planejamento economico
2 % Modelo generalizado de controle on-line
3 % Extensao Controle on-line Atributo c/ Erros Classificacao
4 % Tese - Doutorado em Estatistica
5 % Doutorando: Lupericio Franca Bessegato
6 % Orientador: Roberto Costa Quinino
7 % Co-orientador: Luiz Henrique Duczmal
8 %
9 % Versao: 15/11/2009
10 %
11 % =====
12
13 clear all
14
15 % Geracao de combinacoes aleatorias de candidatos a parametros
16
17
18 corridas=100000; % Qte inicial de candidatos
19
20     % Regiao de pesquisa do espaco parametrico
21
22 m1min=2;
23 m1max=400;
24
25 m2min=2;
26 m2max=400;
27
28 m3min=2;
29 m3max=400;
30
31
32 n1min=2;
33 n1max=12;
34
35 n2min=2;
36 n2max=12;
37
38 n3min=2;
39 n3max=12;
40
41     % Geracao aleatoria dos parametros
42
43 bm1=random('unif',m1min,m1max,1,corridas);
44 bm1=round(bm1);
45
46 bm2=random('unif',m2min,m2max,1,corridas);
47 bm2=round(bm2);
48
```

```
49 bm3=random('unif',m3min,m3max,1,corridas);
50 bm3=round(bm3);
51
52
53 bn1=random('unif',n1min,n1max,1,corridas);
54 bn1=round(bn1);
55
56 bn2=random('unif',n2min,n2max,1,corridas);
57 bn2=round(bn2);
58
59 bn3=random('unif',n3min,n3max,1,corridas);
60 bn3=round(bn3);
61
62 ba10=random('unif',n1min,n1max,1,corridas);
63 ba10=round(ba10);
64
65 ba20=random('unif',n1min,n1max,1,corridas);
66 ba20=round(ba20);
67
68 ba11=random('unif',n1min,n1max,1,corridas);
69 ba11=round(ba11);
70
71 ba21=random('unif',n1min,n1max,1,corridas);
72 ba21=round(ba21);
73
74 ba12=random('unif',n1min,n1max,1,corridas);
75 ba12=round(ba12);
76
77 ba22=random('unif',n1min,n1max,1,corridas);
78 ba22=round(ba22);
79
80 % Parametros do probabilisticos do processo
81
82 p1 = 0.999;      % Fracao de conformes processo sob controle
83 p2 = 0.50;      % Fracao de conformes processo fora controle
84 pe = 0.0001;   % Probabilidade ocorrencia shift processo
85 alfa = 0.01;   % Probabilidade classificacao nao cfe item cfe
86 beta = 0.01;   % Probabilidade classificacao cfe item nao-cfe
87
88 % Componentes de custo
89
90 c_i  = 0.25;    % Custo inspecao
91 c_nc = 20;      % Custo envio de nao-conformidade
92 c_a  = 1000;    % Custo ajuste
93 c_snc = 2;     % Custo item nao-cfe inspecionado/descartado
94 c_sc = 2;      % Custo item cfe inspecionado/descartado
95
96 % Parametros da simulacao
97
```

```
198 d = 1;           % producao entre itens inspecionados
199                 % d = d0 ≥ 1, para n>1, d=0 para n = 1
200
201 for cc=1:corridas
202     m1=bm1(cc);
203     m2=bm2(cc);
204     m3=bm3(cc);
205     n1=bn1(cc);
206     n2=bn2(cc);
207     n3=bn3(cc);
208     a10=ba10(cc);
209     a20=ba20(cc);
210     a11=ba11(cc);
211     a21=ba21(cc);
212     a12=ba12(cc);
213     a22=ba22(cc);
214
215     if a10>n1
216         a10=n1;
217         ba10(cc)=n1;
218     end
219     if a20>n1
220         a20=n1;
221         ba20(cc)=n1;
222     end
223
224     if a11>n2
225         a11=n2;
226         ba11(cc)=n2;
227
228     end
229     if a21>n2
230         a21=n1;
231         ba21(cc)=n2;
232     end
233
234     if a12>n3
235         a12=n3;
236         ba12(cc)=n3;
237     end
238     if a22>n3
239         a22=n3;
240         ba22(cc)=n3;
241     end
242
243     % —— Conversao nomenclatura p/ calculo funcao objetivo
244
245     m0 = m1;           % Itens produzidos fase inicial
246     N0 = n1;           % Tamanho amostra
```

```

147     a0 = a10;      % Qte minima p/ decisao 1
148     b0 = a20;      % Qte minima p/ decisao 2
149
150     % Parametros estabelecidos pela decisao um
151
152     m1 = m2;      % Itens produzidos fase inicial
153     N1 = n2;      % Tamanho amostra
154     a1 = a11;      % Qte minima p/ decisao 1
155     b1 = a21;      % Qte minima p/ decisao 2
156
157     % Parametros estabelecidos pela decisao dois
158
159     m2 = m3;      % Itens produzidos fase inicial
160     N2 = n3;      % Tamanho amostra
161     a2 = a12;      % Qte minima p/ decisao 1
162     b2 = a22;      % Qte minima p/ decisao 2
163
164 % Quantidades que nao dependem dos parametros planejamento
165
166     q = 1 - pe;
167
168     % -----
169     % Probabilidades dado producao sob controle
170     % -----
171
172     % Prob inspecao cfe, dado producao sob controle
173     pA = (p1*(1-alfa)+(1-p1)*beta);
174
175     % -----
176     % Probabilidades dado producao fora controle
177     % -----
178
179     % Prob inspecao cfe, dado producao fora controle
180     pD = (p2*(1-alfa)+(1-p2)*beta);
181
182 % =====
183 %                               Calculo da Funcao Objetivo
184 % =====
185
186 % --- Ciclo posterior a decisao s0 = 0 ---
187
188     % Compatibilizacao de d
189
190     compatibilizador = ceil((N0-1)/N0);
191     d0 = d * compatibilizador;      % d0=0, se n0=1
192                                     % d0=d, se n0>1
193
194     % Quantidade de itens produzidos amostragem
195     R0 = (N0-1)*d0+1;

```

```

196
197     % Decisoes s=0, s=1 e s=2
198     vet_s0_0 = 0 : (a0-1);
199     vet_s1_0 = a0 : b0-1;
200     vet_s2_0 = b0 : N0;
201
202     % Probabilidades decisoes (s): in-control
203     vet_Ps0_pA_0 = binopdf(vet_s0_0,N0,pA);
204     vet_Ps1_pA_0 = binopdf(vet_s1_0,N0,pA);
205     vet_Ps2_pA_0 = binopdf(vet_s2_0,N0,pA);
206
207     Ps0_pA_0 = sum(vet_Ps0_pA_0);
208     Ps1_pA_0 = sum(vet_Ps1_pA_0);
209     Ps2_pA_0 = sum(vet_Ps2_pA_0);
210
211     % Probabilidades decisoes (s): out-of-control
212     vet_Ps0_pD_0 = binopdf(vet_s0_0,N0,pD);
213     vet_Ps1_pD_0 = binopdf(vet_s1_0,N0,pD);
214     vet_Ps2_pD_0 = binopdf(vet_s2_0,N0,pD);
215
216     Ps0_pD_0 = sum(vet_Ps0_pD_0);
217     Ps1_pD_0 = sum(vet_Ps1_pD_0);
218     Ps2_pD_0 = sum(vet_Ps2_pD_0);
219
220     % Probabilidades de transicao apos decisao 0
221
222     % sem shift
223
224     Pw0_00 = (1-pe)^(m0 + R0) * Ps0_pA_0;
225     Pw0_01 = (1-pe)^(m0 + R0) * Ps1_pA_0;
226     Pw0_02 = (1-pe)^(m0 + R0) * Ps2_pA_0;
227
228
229     % shift durante fase inicial
230
231     Pw0_10 = (1-(1-pe)^m0) * Ps0_pD_0;
232     Pw0_11 = (1-(1-pe)^m0) * Ps1_pD_0;
233     Pw0_12 = (1-(1-pe)^m0) * Ps2_pD_0;
234
235
236     % shift durante amostragem
237
238     % shift apos primeira coleta
239
240     flag0 = min(1, N0-1);
241     prob_resto0_20 = 0;
242     prob_resto0_21 = 0;
243     prob_resto0_22 = 0;
244

```



```

245     while flag0 == 1
246
247         soma_prob0_k_20 = 0;
248         soma_prob0_k_21 = 0;
249         soma_prob0_k_22 = 0;
250
251         for k = 1:1:(N0-1)
252
253             soma_prob0_u_20 = 0;
254             soma_prob0_u_21 = 0;
255             soma_prob0_u_22 = 0;
256
257             for u = 0:1:k
258
259                 prob_u = binopdf(u,k,pA);
260
261                 vet_prob0_j_20= binopdf(vet_s0_0-u,...
262                     N0-k, pD);
263                 vet_prob0_j_21= binopdf(vet_s1_0-u,...
264                     N0-k, pD);
265                 vet_prob0_j_22= binopdf(vet_s2_0-u,...
266                     N0-k, pD);
267
268                 soma_prob0_j_20 = sum(vet_prob0_j_20);
269                 soma_prob0_j_21 = sum(vet_prob0_j_21);
270                 soma_prob0_j_22 = sum(vet_prob0_j_22);
271
272                 soma_prob0_u_20 = soma_prob0_u_20 +...
273                     soma_prob0_j_20*prob_u;
274                 soma_prob0_u_21 = soma_prob0_u_21 +...
275                     soma_prob0_j_21*prob_u;
276                 soma_prob0_u_22 = soma_prob0_u_22 +...
277                     soma_prob0_j_22*prob_u;
278
279             end % for u
280
281             prob_k = (1-pe)^((k-1)*d0);
282
283             soma_prob0_k_20 = soma_prob0_k_20 + ...
284                 soma_prob0_u_20*prob_k;
285             soma_prob0_k_21 = soma_prob0_k_21 + ...
286                 soma_prob0_u_21*prob_k;
287             soma_prob0_k_22 = soma_prob0_k_22 + ...
288                 soma_prob0_u_22*prob_k;
289
290         end % for k
291         flag0 = 0;
292
293     prob_resto0_20 = (1-pe)*(1-(1-pe)^d0)*...

```

```

294         soma_prob0_k_20;
295         prob_resto0_21 = (1-pe)*(1-(1-pe)^d0)*...
296         soma_prob0_k_21;
297         prob_resto0_22 = (1-pe)*(1-(1-pe)^d0)*...
298         soma_prob0_k_22;
299
300     end % while flag0
301
302     prob0_1a_20 = pe*Ps0_pD_0;
303     prob0_1a_21 = pe*Ps1_pD_0;
304     prob0_1a_22 = pe*Ps2_pD_0;
305
306     Pw0_20 = (1-pe)^m0*(prob0_1a_20 + prob_resto0_20);
307     Pw0_21 = (1-pe)^m0*(prob0_1a_21 + prob_resto0_21);
308     Pw0_22 = (1-pe)^m0*(prob0_1a_22 + prob_resto0_22);
309
310 % — Ciclo posterior a decisao s0 = 1 —
311
312 % Compatibilizacao de d
313
314     compatibilizador = ceil((N1-1)/N1);
315     d1 = d * compatibilizador;           % d1=0, se n1=1
316                                         % d1=d, se n1>1
317
318 % Quantidade de itens produzidos amostragem
319     R1 = (N1-1)*d1+1;
320
321 % Decisoes s=0, s=1 e s=2
322     vet_s0_1 = 0 : (a1-1);
323     vet_s1_1 = a1 : b1-1;
324     vet_s2_1 = b1 : N1;
325
326 % Probabilidades decisoes (s): in-control
327     vet_Ps0_pA_1 = binopdf(vet_s0_1,N1,pA);
328     vet_Ps1_pA_1 = binopdf(vet_s1_1,N1,pA);
329     vet_Ps2_pA_1 = binopdf(vet_s2_1,N1,pA);
330
331     Ps0_pA_1 = sum(vet_Ps0_pA_1);
332     Ps1_pA_1 = sum(vet_Ps1_pA_1);
333     Ps2_pA_1 = sum(vet_Ps2_pA_1);
334
335 % Probabilidades decisoes (s): out-of-control
336     vet_Ps0_pD_1 = binopdf(vet_s0_1,N1,pD);
337     vet_Ps1_pD_1 = binopdf(vet_s1_1,N1,pD);
338     vet_Ps2_pD_1 = binopdf(vet_s2_1,N1,pD);
339
340     Ps0_pD_1 = sum(vet_Ps0_pD_1);
341     Ps1_pD_1 = sum(vet_Ps1_pD_1);
342     Ps2_pD_1 = sum(vet_Ps2_pD_1);

```

```

343
344     % Probabilidades de transicao apos decisao 0
345
346     % sem shift
347
348     P01_00 = (1-pe)^(m1 + R1) * Ps0_pA_1;
349     P01_01 = (1-pe)^(m1 + R1) * Ps1_pA_1;
350     P01_02 = (1-pe)^(m1 + R1) * Ps2_pA_1;
351
352
353     % shift durante fase inicial
354
355     P01_10 = (1-(1-pe)^m1) * Ps0_pD_1;
356     P01_11 = (1-(1-pe)^m1) * Ps1_pD_1;
357     P01_12 = (1-(1-pe)^m1) * Ps2_pD_1;
358
359
360     % shift durante amostragem
361
362     % shift apos primeira coleta
363
364     flag1 = min(1, N1-1);
365     prob_resto1_20 = 0;
366     prob_resto1_21 = 0;
367     prob_resto1_22 = 0;
368
369     while flag1 == 1
370
371         soma_prob1_k_20 = 0;
372         soma_prob1_k_21 = 0;
373         soma_prob1_k_22 = 0;
374
375         for k = 1:1:(N1-1)
376
377             soma_prob1_u_20 = 0;
378             soma_prob1_u_21 = 0;
379             soma_prob1_u_22 = 0;
380
381             for u = 0:1:k
382
383                 prob_u = binopdf(u,k,pA);
384
385                 vet_prob1_j_20= binopdf(vet_s0_1-u,...
386                     N1-k, pD);
387                 vet_prob1_j_21= binopdf(vet_s1_1-u,...
388                     N1-k, pD);
389                 vet_prob1_j_22= binopdf(vet_s2_1-u,...
390                     N1-k, pD);
391

```

```

392         soma_prob1_j_20 = sum(vet_prob1_j_20);
393         soma_prob1_j_21 = sum(vet_prob1_j_21);
394         soma_prob1_j_22 = sum(vet_prob1_j_22);
395
396         soma_prob1_u_20 = soma_prob1_u_20 + ...
397             soma_prob1_j_20*prob_u;
398         soma_prob1_u_21 = soma_prob1_u_21 + ...
399             soma_prob1_j_21*prob_u;
400         soma_prob1_u_22 = soma_prob1_u_22 + ...
401             soma_prob1_j_22*prob_u;
402
403     end % for u
404
405     prob_k = (1-pe)^((k-1)*d1);
406
407     soma_prob1_k_20 = soma_prob1_k_20 + ...
408         soma_prob1_u_20*prob_k;
409     soma_prob1_k_21 = soma_prob1_k_21 + ...
410         soma_prob1_u_21*prob_k;
411     soma_prob1_k_22 = soma_prob1_k_22 + ...
412         soma_prob1_u_22*prob_k;
413
414     end % for k
415     flag1 = 0;
416
417     prob_resto1_20 = (1-pe)*(1-(1-pe)^d1)* ...
418         soma_prob1_k_20;
419     prob_resto1_21 = (1-pe)*(1-(1-pe)^d1)* ...
420         soma_prob1_k_21;
421     prob_resto1_22 = (1-pe)*(1-(1-pe)^d1)* ...
422         soma_prob1_k_22;
423
424     end % while flag1
425
426     probl_1a_20 = pe*Ps0_pD_1;
427     probl_1a_21 = pe*Ps1_pD_1;
428     probl_1a_22 = pe*Ps2_pD_1;
429
430     P01_20 = (1-pe)^m1*(probl_1a_20 + prob_resto1_20);
431     P01_21 = (1-pe)^m1*(probl_1a_21 + prob_resto1_21);
432     P01_22 = (1-pe)^m1*(probl_1a_22 + prob_resto1_22);
433
434     Pw1_30 = Ps0_pD_1;
435     Pw1_31 = Ps1_pD_1;
436     Pw1_32 = Ps2_pD_1;
437
438     % —— Ciclo posterior a decisao s0 = 2 ——
439
440     % Compatibilizacao de d

```

```

441     compatibilizador = ceil((N2-1)/N2);
442     d2= d * compatibilizador;           % d2=0, se n2=1
443                                         % d2=d, se n2>1
444
445     % Quantidade de itens produzidos amostragem
446     R2 = (N2-1)*d2+1;
447
448     % Decisoes s=0, s=1 e s=2
449     vet_s0_2 = 0 : (a2-1);
450     vet_s1_2 = a2 : b2-1;
451     vet_s2_2 = b2 : N2;
452
453     % Probabilidades decisoes (s): in-control
454     vet_Ps0_pA_2 = binopdf(vet_s0_2,N2,pA);
455     vet_Ps1_pA_2 = binopdf(vet_s1_2,N2,pA);
456     vet_Ps2_pA_2 = binopdf(vet_s2_2,N2,pA);
457
458     Ps0_pA_2 = sum(vet_Ps0_pA_2);
459     Ps1_pA_2 = sum(vet_Ps1_pA_2);
460     Ps2_pA_2 = sum(vet_Ps2_pA_2);
461
462     % Probabilidades decisoes (s): out-of-control
463     vet_Ps0_pD_2 = binopdf(vet_s0_2,N2,pD);
464     vet_Ps1_pD_2 = binopdf(vet_s1_2,N2,pD);
465     vet_Ps2_pD_2 = binopdf(vet_s2_2,N2,pD);
466
467     Ps0_pD_2 = sum(vet_Ps0_pD_2);
468     Ps1_pD_2 = sum(vet_Ps1_pD_2);
469     Ps2_pD_2 = sum(vet_Ps2_pD_2);
470
471     % Probabilidades de transicao apos decisao 0
472
473     % sem shift
474
475     P02_00 = (1-pe)^(m2 + R2) * Ps0_pA_2;
476     P02_01 = (1-pe)^(m2 + R2) * Ps1_pA_2;
477     P02_02 = (1-pe)^(m2 + R2) * Ps2_pA_2;
478
479     % shift durante fase inicial
480
481     P02_10 = (1-(1-pe)^m2) * Ps0_pD_2;
482     P02_11 = (1-(1-pe)^m2) * Ps1_pD_2;
483     P02_12 = (1-(1-pe)^m2) * Ps2_pD_2;
484
485     % shift durante amostragem
486
487     % shift apos primeira coleta
488
489     flag2 = min(1, N2-1);

```

```

490     prob_resto2_20 = 0;
491     prob_resto2_21 = 0;
492     prob_resto2_22 = 0;
493
494     while flag2 == 1
495
496         soma_prob2_k_20 = 0;
497         soma_prob2_k_21 = 0;
498         soma_prob2_k_22 = 0;
499
500         for k = 1:1:(N2-1)
501
502             soma_prob2_u_20 = 0;
503             soma_prob2_u_21 = 0;
504             soma_prob2_u_22 = 0;
505
506             for u = 0:1:k
507
508                 prob_u = binopdf(u,k,pA);
509
510                 vet_prob2_j_20= binopdf(vet_s0_2-u,...
511                     N2-k, pD);
512                 vet_prob2_j_21= binopdf(vet_s1_2-u,...
513                     N2-k, pD);
514                 vet_prob2_j_22= binopdf(vet_s2_2-u,...
515                     N2-k, pD);
516
517                 soma_prob2_j_20 = sum(vet_prob2_j_20);
518                 soma_prob2_j_21 = sum(vet_prob2_j_21);
519                 soma_prob2_j_22 = sum(vet_prob2_j_22);
520
521                 soma_prob2_u_20 = soma_prob2_u_20 +...
522                     soma_prob2_j_20*prob_u;
523                 soma_prob2_u_21 = soma_prob2_u_21 +...
524                     soma_prob2_j_21*prob_u;
525                 soma_prob2_u_22 = soma_prob2_u_22 +...
526                     soma_prob2_j_22*prob_u;
527
528             end % for u
529
530             prob_k = (1-pe)^((k-1)*d2);
531
532             soma_prob2_k_20 = soma_prob2_k_20 + ...
533                 soma_prob2_u_20*prob_k;
534             soma_prob2_k_21 = soma_prob2_k_21 + ...
535                 soma_prob2_u_21*prob_k;
536             soma_prob2_k_22 = soma_prob2_k_22 + ...
537                 soma_prob2_u_22*prob_k;
538

```

```

539         end % for k
540         flag2 = 0;
541
542         prob_resto2_20 = (1-pe)*(1-(1-pe)^d2)* ...
543             soma_prob2_k_20;
544         prob_resto2_21 = (1-pe)*(1-(1-pe)^d2)* ...
545             soma_prob2_k_21;
546         prob_resto2_22 = (1-pe)*(1-(1-pe)^d2)* ...
547             soma_prob2_k_22;
548
549     end % while flag2
550
551     prob2_1a_20 = pe*Ps0_pD_2;
552     prob2_1a_21 = pe*Ps1_pD_2;
553     prob2_1a_22 = pe*Ps2_pD_2;
554
555     P02_20 = (1-pe)^m2*(prob2_1a_20 + prob_resto2_20);
556     P02_21 = (1-pe)^m2*(prob2_1a_21 + prob_resto2_21);
557     P02_22 = (1-pe)^m2*(prob2_1a_22 + prob_resto2_22);
558
559     Pw2_30 = Ps0_pD_2;
560     Pw2_31 = Ps1_pD_2;
561     Pw2_32 = Ps2_pD_2;
562
563
564 % -----
565 %           Matriz de Transicao
566 % -----
567
568 P = sparse(12,12);
569
570     % Transicoes apos decisao 0:(0,0), (1,0), (2,0), (3,0)
571     % linhas 1, 4, 7, 10
572
573     vetor = [Pw0_00, Pw0_01, Pw0_02, Pw0_10, Pw0_11, ...
574             Pw0_12, Pw0_20, Pw0_21, Pw0_22];
575     linhas = [1, 4, 7, 10];
576     colunas = [1:9];
577     tamanho = size(linhas,2); % qte de linhas para insercao
578     parcial_19 = ones(tamanho,1)*vetor;
579     P(linhas, colunas) = parcial_19;
580
581
582     % Transicao apos estados (0,1) e (0,2):
583
584     P(2,1:9) = [P01_00, P01_01, P01_02, P01_10, P01_11, ...
585             P01_12, P01_20, P01_21, P01_22];
586     P(3,1:9) = [P02_00, P02_01, P02_02, P02_10, P02_11, ...
587             P02_12, P02_20, P02_21, P02_22];

```

```

588
589     % Transicoes para estados 1, 2 e 3 apos decisao 1
590
591     vetor = [Pw1_30, Pw1_31, Pw1_32];
592     linhas = [5, 8, 11];
593     colunas = [10, 11, 12];
594     tamanho = size(linhas,2); % qte de linhas para insercao
595     parcial_1012 = ones(tamanho,1)*vetor;
596     P(linhas, colunas) = parcial_1012;
597
598     % Transicoes para estados 1, 2 e 3 apos decisao 2
599
600     vetor = [Pw2_30, Pw2_31, Pw2_32];
601     linhas = [6, 9, 12];
602     colunas = [10, 11, 12];
603     tamanho = size(linhas,2); % qte de linhas para insercao
604     parcial_1012 = ones(tamanho,1)*vetor;
605     P(linhas, colunas) = parcial_1012;
606
607 % -----
608 %           Distribuicao Invariante
609 % -----
610
611     A = transpose(P) - eye(12);
612     A(12, :) = ones(1, 12);
613     B = zeros(12, 1);
614     B(12,1) = 1;
615     invariante = A\B;
616     invariante=abs(invariante);
617
618 % -----
619 %           Probabilidades Comprimento de Ciclo
620 % -----
621
622     s0 = [1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 ];
623     s1 = [0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 ];
624     s2 = [0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 ];
625     s = [s0', s1', s2'];
626
627     Pi = [invariante,invariante,invariante];
628
629     direito = Pi .* s;
630     esquerdo = P'*direito;
631
632     % matriz com p-so(w,s)
633     % so: linha, (w,s): coluna
634     P_ms0 = esquerdo./(Pi+eps^2);
635
636 % -----

```



```

637 %           Custos dos Estados
638 % -----
639
640 % ----- Custos Inspecao -----
641
642 N = [N0, N1, N2]';
643 qte_media = P_ms0*N;
644 inspecao = qte_media*c_i;
645
646 inspecao_00 = inspecao(1);
647 inspecao_01 = inspecao(2);
648 inspecao_02 = inspecao(3);
649 inspecao_10 = inspecao(4);
650 inspecao_11 = inspecao(5);
651 inspecao_12 = inspecao(6);
652 inspecao_20 = inspecao(7);
653 inspecao_21 = inspecao(8);
654 inspecao_22 = inspecao(9);
655 inspecao_30 = inspecao(10);
656 inspecao_31 = inspecao(11);
657 inspecao_32 = inspecao(12);
658
659 % ----- Custos Inspecao -----
660
661 descarte_00 = (P_ms0(1,1)*N0 + P_ms0(1,2)*N1+ ...
662             P_ms0(1,3)*N2)*c_sc;
663 descarte_01 = (P_ms0(2,1)*N0 + P_ms0(2,2)*N1+ ...
664             P_ms0(2,3)*N2)*c_sc;
665 descarte_02 = (P_ms0(3,1)*N0 + P_ms0(3,2)*N1+ ...
666             P_ms0(3,3)*N2)*c_sc;
667 descarte_10 = (P_ms0(4,1)*N0 + P_ms0(4,2)*N1+ ...
668             P_ms0(4,3)*N2)*c_sc;
669 descarte_11 = (P_ms0(5,1)*N0 + P_ms0(5,2)*N1+ ...
670             P_ms0(5,3)*N2)*c_sc;
671 descarte_12 = (P_ms0(6,1)*N0 + P_ms0(6,2)*N1+ ...
672             P_ms0(6,3)*N2)*c_sc;
673 descarte_20 = (P_ms0(7,1)*N0 + P_ms0(7,2)*N1+ ...
674             P_ms0(7,3)*N2)*c_sc;
675 descarte_21 = (P_ms0(8,1)*N0 + P_ms0(8,2)*N1+ ...
676             P_ms0(8,3)*N2)*c_sc;
677 descarte_22 = (P_ms0(9,1)*N0 + P_ms0(9,2)*N1+ ...
678             P_ms0(9,3)*N2)*c_sc;
679 descarte_30 = (P_ms0(10,1)*N0 + P_ms0(10,2)*N1+ ...
680             P_ms0(10,3)*N2)*c_sc;
681 descarte_31 = (P_ms0(11,1)*N0 + P_ms0(11,2)*N1+ ...
682             P_ms0(11,3)*N2)*c_sc;
683 descarte_32 = (P_ms0(12,1)*N0 + P_ms0(12,2)*N1+ ...
684             P_ms0(12,3)*N2)*c_sc;
685

```

```

686 % —— Custos Envio Mercado ——
687
688 % —— Estados (0,s0) ——
689 producao_00 = P_ms0(1,1)*(m0 + R0 - N0) + P_ms0(1,2)*...
690 (m1 + R1 - N1) + P_ms0(1,3)*(m2 + R2 - N2);
691 mercado_00 = producao_00 * (1 - p1) * c_nc;
692
693 producao_01 = P_ms0(2,1)*(m0 + R0 - N0) + P_ms0(2,2)*...
694 (m1 + R1 - N1) + P_ms0(2,3)*(m2 + R2 - N2);
695 mercado_01 = producao_01 * (1 - p1) * c_nc;
696
697 producao_02 = P_ms0(3,1)*(m0 + R0 - N0) + P_ms0(3,2)*...
698 (m1 + R1 - N1) + P_ms0(3,3)*(m2 + R2 - N2);
699 mercado_02 = producao_02 * (1 - p1) * c_nc;
700
701 % —— Estados (1,s0) ——
702
703 vet_m0 = (1:m0);
704 vet_m1 = (1:m1);
705 vet_m2 = (1:m2);
706
707 % Probabilidade de shift instante t dado shift
708
709 q_m0 = (1-pe).^(vet_m0 - 1)*pe./(1 - (1-pe)^m0);
710 q_m1 = (1-pe).^(vet_m1 - 1)*pe./(1 - (1-pe)^m1);
711 q_m2 = (1-pe).^(vet_m2 - 1)*pe./(1 - (1-pe)^m2);
712
713 vet_soma_qm0 = q_m0.*((vet_m0 - 1)*(1-p1)+(m0 - ...
714 vet_m0 + 1)*(1-p2));
715 vet_soma_qm1 = q_m1.*((vet_m1 - 1)*(1-p1)+(m1 - ...
716 vet_m1 + 1)*(1-p2));
717 vet_soma_qm2 = q_m2.*((vet_m2 - 1)*(1-p1)+(m2 - ...
718 vet_m2 + 1)*(1-p2));
719
720 % Esperanca itens enviados ao mercado
721
722 soma_qm0 = sum(vet_soma_qm0);
723 soma_qm1 = sum(vet_soma_qm1);
724 soma_qm2 = sum(vet_soma_qm2);
725
726 mercado_10 = c_nc*(P_ms0(4,1)*(soma_qm0 + (R0 - N0)*...
727 (1-p2)) + P_ms0(4,2)*(soma_qm1 + (R1 - N1)*(1-p2))...
728 + P_ms0(4,3)*(soma_qm2 + (R2 - N2)*(1-p2)));
729 mercado_11 = c_nc*(P_ms0(5,1)*(soma_qm0 + (R0 - N0)*...
730 (1-p2)) + P_ms0(5,2)*(soma_qm1 + (R1 - N1)*(1-p2))...
731 + P_ms0(5,3)*(soma_qm2 + (R2 - N2)*(1-p2)));
732 mercado_12 = c_nc*(P_ms0(6,1)*(soma_qm0 + (R0 - N0)*...
733 (1-p2)) + P_ms0(6,2)*(soma_qm1 + (R1 - N1)*(1-p2))...
734 + P_ms0(6,3)*(soma_qm2 + (R2 - N2)*(1-p2)));

```

```

735
736     % —— Estados (2,s0) ——
737
738     producao_20 = P_ms0(7,1)*(m0 + R0 - N0) + P_ms0(7,2)*...
739         (m1 + R1 - N1) + P_ms0(7,3)*(m2 + R2 - N2);
740     mercado_20 = producao_20 * (1 - p1) * c_nc;
741
742     producao_21 = P_ms0(8,1)*(m0 + R0 - N0) + P_ms0(8,2)*...
743         (m1 + R1 - N1) + P_ms0(8,3)*(m2 + R2 - N2);
744     mercado_21 = producao_21 * (1 - p1) * c_nc;
745
746     producao_22 = P_ms0(9,1)*(m0 + R0 - N0) + P_ms0(9,2)*...
747         (m1 + R1 - N1) + P_ms0(9,3)*(m2 + R2 - N2);
748     mercado_22 = producao_22 * (1 - p1) * c_nc;
749
750     % —— Estados (3,s0) ——
751
752     producao_30=P_ms0(10,1)*(m0 + R0 - N0) + P_ms0(10,2)*...
753         (m1 + R1 - N1) + P_ms0(10,3)*(m2 + R2 - N2);
754     mercado_30 = producao_30 * (1 - p2) * c_nc;
755
756     producao_31=P_ms0(11,1)*(m0 + R0 - N0) + P_ms0(11,2)*...
757         (m1 + R1 - N1) + P_ms0(11,3)*(m2 + R2 - N2);
758     mercado_31 = producao_31 * (1 - p2) * c_nc;
759
760     producao_32=P_ms0(12,1)*(m0 + R0 - N0) + P_ms0(12,2)*...
761         (m1 + R1 - N1) + P_ms0(12,3)*(m2 + R2 - N2);
762     mercado_32 = producao_32 * (1 - p2) * c_nc;
763
764     % —— Custos medios por estado ——
765
766     custo_00 = inspecao_00 + mercado_00 + descarte_00 + c_a;
767     custo_01 = inspecao_01 + mercado_01 + descarte_01;
768     custo_02 = inspecao_02 + mercado_02 + descarte_02;
769
770     custo_10 = inspecao_10 + mercado_10 + descarte_10 + c_a;
771     custo_11 = inspecao_11 + mercado_11 + descarte_11;
772     custo_12 = inspecao_12 + mercado_12 + descarte_12;
773
774     custo_20 = inspecao_20 + mercado_20 + descarte_20 + c_a;
775     custo_21 = inspecao_21 + mercado_21 + descarte_21;
776     custo_22 = inspecao_22 + mercado_22 + descarte_22;
777
778     custo_30 = inspecao_30 + mercado_30 + descarte_30 + c_a;
779     custo_31 = inspecao_31 + mercado_31 + descarte_31;
780     custo_32 = inspecao_32 + mercado_32 + descarte_32;
781
782     Custo=[custo_00,custo_01,custo_02,custo_10,custo_11, ...
783         custo_12, custo_20, custo_21, custo_22, custo_30,...

```

```
784         custo_31, custo_32];
785
786 % -----
787 %           Custo Unitario
788 % -----
789
790     vet_item = [m0+R0-N0, m1+R1-N1, m2+R2-N2];
791     Item= [vet_item, vet_item, vet_item, vet_item];
792     ItemMedio = Item*invariante;
793     CustoMedio = Custo*invariante;
794     Custo_pu = CustoMedio/ItemMedio;
795
796
797
798 % =====
799
800     %compatibilizacao;
801
802     CustoR(cc)=Custo_pu;
803 end
804
805 [customin, posmin]=min (CustoR)
806
807     m10=bm1 (posmin)
808     m20=bm2 (posmin)
809     m30=bm3 (posmin)
810     n10=bn1 (posmin)
811     n20=bn2 (posmin)
812     n30=bn3 (posmin)
813     a100=ba10 (posmin)
814     a200=ba20 (posmin)
815     a110=ba11 (posmin)
816     a210=ba21 (posmin)
817     a120=ba12 (posmin)
818     a220=ba22 (posmin)
```