UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

Platonismo e Naturalismo em Matemática: Os Axiomas da Teoria dos Conjuntos

Ronaldo Pimentel

Belo Horizonte
Junho
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

Platonismo e Naturalismo em Matemática: Os Axiomas da Teoria dos Conjuntos

Ronaldo Pimentel

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais, perante a banca de examinadores abaixo, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Lógica e Filosofia da Ciência.

Banca Examinadora

Dr. Túlio Roberto Xavier de Aguiar – UFMG – Orientador

Dr. Abílio Rodrigues Filho – UFMG

Dr. Sérgio Ricardo Neves de Miranda – UFOP

Dissertação defendida e APROVADA, com a nota NOVENTA E CINCO (95) pela Banca Examinadora constituída pelos Professores:

Túlio R. X. Aguiar

Prof. Dr. Túlio Roberto Xavier de Aguiar (Orientador) – UFMG

Prof. Dr. Sérgio Ricardo Neves de Miranda– UFOP

Prof. Dr. Abílio Azambuja Rodrigues Filho – UFMG

Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas
Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte, 25 de junho de 2010.

Platonismo e Naturalismo em Matemática: Os Axiomas da Teoria dos Conjuntos

Ronaldo Pimentel

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Lógica e Filosofia da Ciência.

Prof. Dr. Túlio Roberto Xavier de Aguiar

Orientador

Prof. Dr. Rodrigo Antônio de Paiva Duarte

Coordenador do Curso de Pós-graduação em Filosofia

Ao meu pai, Pedro Pimentel Filho (*in memorian*).

O Fim do Infinito

Fixo um ponto no horizonte,

caminho na sua direção,

primeiro, lentamente,

depois, apressadamente.

Rapidamente, o meu ponto fixo,

aproxima-se de mim,

assustadoramente veloz,

paro.

Ele continua a aproximar-se de mim.

Recuo,

recuo.

Inexplicavelmente, a distância que nos separa,

diminui.

O meu ponto no horizonte, infinito,

está à distância da minha mão estendida.

Posso tocar-lhe. Posso senti-lo aproximar.

Assusto-me. Tão perto?

O meu ponto no horizonte toca-me.

Sinto-o.

É o fim do infinito!

Selma Santos

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, por tudo que eu sou, pela esperança, pela fé e pelo que tenho conquistado.

Ao meu adorado pai, Pedro Pimentel Filho, (*in memoriam*) pelo carinho, simplicidade e dedicação. Não existe ensinamento melhor do que o seu exemplo de vida. Certamente, sua presença estará comigo, em meu coração, até o dia em que nos encontraremos novamente, quando então permaneceremos juntos para sempre.

À minha adorada mãe Maria do Carmo Pimentel, e à minha família, pelo incentivo e amor incondicional.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq pela bolsa de Mestrado.

Ao Prof. Túlio Roberto Xavier de Aguiar pela orientação, confiança, amizade e importância para a conclusão deste Trabalho.

Aos funcionários da Pós-graduação em Filosofia, em especial à secretária Andréia pela simpatia, presença agradável e por ser muito prestativa.

Aos meus amigos de pós-graduação, pela convivência diária.

Aos meus amigos que fiz em Belo Horizonte nesse percurso acadêmico. Eles me ajudaram a perceber que, em momentos difíceis, sempre há uma luz no fim do túnel.

Aos funcionários da biblioteca da FAFICH, pelo apoio na busca de livros fora da UFMG.

Aos professores da Pós-graduação, pelos ensinamentos durante o curso de Mestrado.

RESUMO

A demonstração é a principal atividade de um matemático. Na matemática, a maioria das proposições que são aceitas como verdadeiras possui uma demonstração, em outras palavras, é um teorema. Mas uma demonstração necessita dos axiomas para iniciar o processo demonstrativo. Na teoria de conjuntos ocorre o mesmo processo, uma vez que a teoria de conjuntos é uma teoria formal. Um axioma da teoria de conjuntos pode não ser demonstrado, mas é aceito como verdadeiro. Ou é simplesmente aceito. Este trabalho avalia os processos pelos quais os axiomas da teoria de conjuntos são aceitos, ou justificados pelo platonismo e o naturalismo na matemática. Nesse contexto, este trabalho inicia com a descrição de um estudo de caso, que são os raciocínios não-construtivos e a noção de existência na teoria de conjuntos. Escolhemos, para iniciar a nossa análise filosófica, o platonismo na matemática, que considera a existência de objetos matemáticos num contexto metafísico. Analisamos aqui o platonismo na matemática de Gödel e o problema epistemológico contido nesse platonismo colocado num argumento com viés da teoria causal do conhecimento. Com a impossibilidade de existir uma justificação dos axiomas da teoria e conjuntos com uma base na metafísica, através da intuição intelectual, o problema de justificar os axiomas da teoria de conjuntos persiste. O problema é encontrar uma justificação dos axiomas da teoria de conjuntos conveniente com o afazer matemático. Apresentamos, então, o naturalismo na matemática de Maddy como uma solução plausível com a prática matemática para a justificação dos axiomas da teoria de conjuntos, o que constitui um abandono do platonismo na matemática a favor de uma epistemologia matemática condizente com o cotidiano matemático.

Palavras-chave: Conjuntos, Platonismo, Naturalismo, Demonstração, Intuição.

ABSTRACT

Working with demonstrations is the main activity of a mathematician. In mathematics, most propositions accepted as true ones are liable to demonstration, in other words, they are seen as theorems. But a demonstration needs axioms to start the proving process. The same process occurs in the Set Theory, since the Set Theory is a formal theory. A set theoretic axiom can not be demonstrated, but it is accepted as true. Or it is simply accepted. This work evaluates the processes by which the axioms of Set Theory are accepted, or justified by Platonism and Naturalism in Mathematics. In this context, this work begins with a description of case studies, namely the non-constructive reasonings and the notion of existence in Set Theory. To begin with our philosophical analysis we have chosen Platonism in Mathematics, which considers the existence of mathematical objects in a metaphysical context. We analyze Gödel's Platonism in Mathematics and the epistemological problem it has, which is placed in an argument with a causal theory of knowledge bias. With the impossibility to have a justification for the axioms of the Set Theory based on metaphysics, through an intellectual intuition, the problem of justification for the set theoretical axioms remains. The problem is to find a justification for the set theoretical axioms appropriate for mathematical affairs. Therefore, we present Maddy's Mathematical Naturalism as a plausible solution to the mathematical practice for the justification of the axioms of the Set Theory, which constitutes a neglecting of Mathematical Platonism, in favor of a mathematical epistemology suitable for mathematical everyday use.

Key words: Sets, Platonism, Naturalism, Demonstration, Intuition.

Sumário

Introdução

O processo de demonstração em matemática é um procedimento característico dessa atividade. A matemática é um conjunto de demonstrações. O principal trabalho do matemático é demonstrar teoremas. A maioria das proposições que são aceitas como verdadeiras são demonstradas. Esse processo possui três componentes. Os axiomas, as regras de inferência e os teoremas. Ao aplicar as regras de inferência num axioma, produzimos um teorema, que é aceito como verdadeiro porque foi demonstrado.

Uma demonstração possui um início e um fim. O início de uma demonstração se dá pelos axiomas, o fim é o teorema a ser demonstrado ao qual chegamos pela aplicação das regras de inferência. O que foi demonstrado é uma verdade demonstrada. O axioma é o início de uma demonstração. O axioma é uma verdade aceita sem demonstração, porque toda demonstração parte de um ponto inicial. Nesse sentido, o objetivo dessa pesquisa é apresentar os métodos pelos quais um axioma é aceito como verdadeiro, ou simplesmente aceito.

Vamos analisar aqui os axiomas da teoria de conjuntos de Zermelo e Fraenkel (ZF) com o axioma da escolha (ZFC). Essa teoria de conjuntos é aceita como uma teoria padrão na matemática quando o assunto é conjuntos. A escolha da teoria de conjuntos como estudo de caso é bem frutífero. Qualquer teoria sobre a verdade, sintática ou semântica, depende de noções de teoria de conjuntos. Ora, se essas teorias da verdade dependem da teoria de conjuntos, então elas não podem aferir a verdade dos axiomas da teoria de conjuntos. Portanto, vamos investigar os métodos possíveis de aferir a verdade de um axioma na teoria de conjuntos que não sejam nem sintático e nem semântico.

A definição de um axioma no platonismo defendido por Gödel é que é uma verdade evidente para o entendimento e, portanto, deve ser aceito como verdadeiro. Porém, essa visão tem sido criticada desde então. Um matemático não tem como característica de sua profissão a necessidade de permanecer em seu gabinete escrevendo no papel as evidências matemáticas que se apresentam à sua intuição intelectual.

Como resposta a essa definição de axioma contida no platonismo, apresentamos o naturalismo na matemática de uma filósofa recente, Penelope Maddy. Para Maddy, os axiomas da matemática podem ser aceitos como verdadeiros porque produzem teoremas matemáticos úteis. Ou eles podem ser simplesmente aceitos pelos matemáticos por conta das suas conseqüências.

O objetivo dessa pesquisa é, portanto, apresentar, um modo de justificação dos axiomas da teoria de conjuntos em conformidade com o cotidiano matemático. Encontramos a solução desse problema no recente naturalismo de Maddy, e que constitui um abandono da noção tradicional de platonismo, já que a prática matemática não envolve o platonismo na matemática.

A nossa pesquisa será teórico-descritiva. Procura-se, numa pesquisa teórico-descritiva, organizar as informações disponíveis a respeito de um problema. Descrevemos nessa pesquisa a teoria de conjuntos, o platonismo e o naturalismo, com o objetivo de investigar a noção de axioma subjacente nas duas ultimas posições.

No primeiro capítulo realizamos a apresentação da teoria de conjuntos. Apresentamos a noção de infinito de Dedekind, a Hipótese do contínuo de Cantor, a hierarquia cumulativa, os axiomas da teoria de conjuntos de Zermelo e Fraenkel e a idéia de demonstração de existência não-construtiva. Analisamos a noção de existência nos axiomas da teoria de conjuntos como o axioma do conjunto vazio, o axioma da separação, o axioma do conjunto potência, o axioma da infinidade e o axioma da escolha, assim como a noção de existência de um infinito atual contida implicitamente no princípio da indução completa da aritmética. O objetivo desse capítulo é apresentar métodos não-construtivos na teoria de conjuntos que se relacionam com a noção de existência na matemática.

Esses tópicos serão utilizados como um estudo de caso para os capítulos restantes. Para o platonismo, temos como decorrência da noção de existência contida nas proposições e métodos matemáticos, a idéia de que esses objetos realmente existem, num sentido mais metafísico do que propriamente matemático.

No segundo capítulo, apresentamos a caracterização do platonismo na matemática de Gödel. Focalizamos, nesse capítulo, o método que Gödel postula para o acesso aos objetos matemáticos abstratos, que é a intuição matemática juntamente com os seus objetos matemáticos abstratos. Mostramos que o platonismo na matemática de Gödel é criticado com os argumentos que possuem um viés pela teoria causal do conhecimento. Não é possível confirmar a verdade dos axiomas da teoria de conjuntos a partir do acesso a objetos matemáticos abstratos porque simplesmente não mantemos relação causal com eles.

No terceiro capítulo, apresentamos o Naturalismo de Maddy. Introduzimos como a solução naturalista a exclusão de entidades metafísicas nas metodologias matemáticas. Porque a filosofia segunda (naturalismo) não tem como afirmar a existência dessas entidades. Maddy chega a essa conclusão após uma reflexão sobre o mundo KF-estruturado (Kant-Frege), que não suporta a existência de objetos modelados pelas teorias matemáticas, tais como o conjunto de todos os números naturais.

Os objetos matemáticos são uma idealização teórica. Como somos produto de um mundo KF-estruturado, porque vivemos num mundo altamente KF-estruturado, os objetos que conhecemos nesse mundo certamente não são os objetos que são tratados pelas teorias matemáticas. Com isso, partimos para a solução de Maddy para a justificação dos axiomas da teoria de conjuntos, que acreditamos ser a mais congênere à prática matemática, sem apelos empíricos ou metafísicos.

Novamente, tratamos todos os axiomas da teoria de conjuntos de Zermelo e Fraenkel pelo método de Maddy, que são o axioma da extensionalidade, o axioma do conjunto vazio, o axioma da separação, o axioma do conjunto potência, o axioma da infinidade, o axioma da escolha e o axioma da substituição. Acrescentamos também uma reflexão naturalista a respeito da hipótese do contínuo, que envolve a questão de novos candidatos a axiomas para a teoria de conjuntos. Com isso, esperamos ter mostrado que a opção naturalista de justificação dos axiomas da teoria de conjuntos de Zermelo e Frankel é a mais afinada com a prática da matemática. Por fim, concluímos a pesquisa, com uma conciliação da interpretação de Parsons do termo "intuição" com o naturalismo na matemática de Maddy.

CAPÍTULO 1. Raciocínios Não-construtivos na Teoria de Conjuntos

1.1. Introdução

Neste capítulo, vamos apresentar um pequeno histórico da teoria de conjuntos, a hipótese do contínuo de Cantor, o infinito de Dedekind, os axiomas da teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel e a concepção iterativa de conjuntos[1]. O objetivo desse capítulo é mostrar o caráter não-construtivo desses raciocínios e teorias matemáticas.

Uma demonstração é não-construtiva quando faz uso de axiomas que afirmam a existência de um objeto matemático. É um exemplo de axioma que declara a existência de objetos o axioma da infinidade: “Existe um conjunto infinito”. Uma demonstração é não-construtiva quando também faz uso do terceiro excluído[2]. Outro exemplo de demonstração não-construtiva consiste em demonstrar por absurdo, ou seja, se é contraditório afirmar que determinado objeto matemático não existe, então a afirmação de que o objeto em questão existe é verdadeira.

No caso da Hipótese do Contínuo de Cantor, o raciocínio consiste em realizar uma demonstração por absurdo da existência de conjuntos não-enumeráveis e, ainda, na a noção de infinito atual implícita na definição de infinito de Dedekind.

Essas ferramentas serão necessárias para apontarmos as motivações filosóficas contidas nos próximos capítulos, que, no caso, são o platonismo na matemática de Gödel e o naturalismo na matemática de Maddy. A análise desse tipo de demonstração é importante para a noção de existência na matemática e para os critérios de aceitação dos axiomas da teoria de conjuntos.

---

[1] A concepção iterativa também é conhecida como hierarquia cumulativa.

[2] O terceiro excluído afirma que para qualquer sentença p $p \vee \neg p$ necessariamente é verdadeira.

1.2. Histórico da teoria de conjuntos

Um dos campos de estudo da teoria de conjuntos é o infinito. A sua proximidade com a filosofia reside na idéia do infinito e também nas questões de fundamentos dos axiomas dessa teoria. O infinito já era tratado pelo filósofo grego Zenão de Eléia em 450 a.C. e Aristóteles, em 350 a.C., na Física, mostra que o espaço contínuo não pode ser composto de infinitas partes discretas. Um espaço contínuo composto de infinitas partes discretas é chamado de infinito atual, é como se fosse uma linha contínua que contém infinitos pontos. Para Aristóteles, o espaço contínuo não pode ser concebido como uma espécie de infinito atual, já que isso leva aos paradoxos do movimento de Zenão.

A idéia de infinito é incorporada por Bolzano em 1847[3] à incipiente teoria de conjuntos e é conhecida hoje como infinito de Dedekind. A noção de infinito de Dedekind depende da noção de parte própria de um conjunto. Dizemos que um conjunto y é parte própria de outro conjunto x quando y é subconjunto de x; e y é diferente do conjunto x. Por exemplo, o conjunto dos números pares é subconjunto dos números inteiros e é diferente do conjunto dos números inteiros, por isso, o conjunto dos números pares é parte própria do conjunto dos números inteiros. Segundo essa noção de infinito, um conjunto é infinito quando pelo menos uma das partes próprias de um conjunto está em correlação um-a-um com todos os elementos do conjunto. Um exemplo simples dessa concepção de infinito está no fato de os inteiros pares estarem em correspondência biunívoca com conjunto dos inteiros.

Cantor, de 1814 a 1897, realizou importantes descobertas na teoria de conjuntos. Entre as descobertas de Cantor está a hipótese do contínuo, que estabelece a cardinalidade do conjunto dos reais por uma conjectura. A teoria de conjuntos introduzida por Cantor

[3] Observação: Para uma referência completa aos artigos e às datas citadas nessa seção, cf. Tiles, (1990).

trouxe para a matemática a idéia de infinito atual. O infinito aqui é visto de uma perspectiva específica, é como se fosse um objeto que contém um limite que estabelece seu termo. Essa concepção de infinito de Cantor é conhecida como finitismo cantoriano.

O artigo de Cantor de 1874 é o início da teoria de conjuntos. Nesse artigo, Cantor mostra que os números naturais não podem ser colocados em correspondência com os números reais e que há mais números reais do que números naturais. Isso significa que a linha reta não é enumerável. Em 1878, Cantor mostra como isso é possível utilizando o método da diagonal. Em 1883, Cantor publica um artigo sobre a aritmética dos números transfinitos. Na aritmética transfinita, a utilização de operações como a adição e multiplicação são aplicadas em conjuntos com cardinalidade infinita.

Em 1899, Peano introduz o símbolo de pertença ε utilizado para indicar que um objeto pertence a um conjunto. A relação de pertença é a mais básica das relações entre conjuntos. As demais relações da teoria dependem da noção de pertença. Por exemplo: Se *a* e *b* são conjuntos, e *b* contém *a*, então todos os elementos de *a* pertencem ao conjunto *b*.

A partir de 1897, uma série de paradoxos na teoria de conjuntos foi encontrada. O primeiro deles foi o paradoxo de Burali Forti, com respeito ao bom ordenamento dos conjuntos. Um ordinal de um conjunto sempre excede os ordinais dos subconjuntos desse conjunto. Se o conjunto de todos os ordinais é bem ordenado, então possui um ordinal[4]. Se

---

[4] Vamos introduzir aqui a definição de ordinal. Informalmente, ordinal indica a posição de um elemento num dado conjunto. Como por exemplo, o primeiro elemento do conjunto, o segundo, o terceiro, etc. Seguindo a definição de Russell (1981), ordinal é aquele conjunto que possui o primeiro elemento. Na notação que estamos utilizando para conjuntos nesse trabalho, o primeiro elemento de um conjunto bem-ordenado pertence a todos os outros subconjuntos desse conjunto. Por exemplo, se o primeiro elemento é ø, e os subconjuntos seguintes são {ø}, {ø, {ø}}, ... vemos que o primeiro elemento pertence ao segundo subconjunto e ao terceiro e assim por diante. O segundo elemento pertence ao terceiro porém não pertence ao primeiro e, respectivamente, o terceiro elemento pertencerá ao quarto subconjunto mas não ao primeiro nem ao segundo e assim por diante. A definição de ordinal é diferente da definição de cardinal. A cardinalidade de um conjunto diz respeito a sua magnitude. Um conjunto pode ter 5 elementos, mas quando dizemos que esse conjunto tem 5 elementos não estamos preocupados com a posição desses elementos no conjunto, estamos preocupados apenas com a magnitude.

o conjunto possui um ordinal, esse ordinal não pode ser um ordinal, porque todo ordinal excede os ordinais dos subconjuntos desse conjunto.

Cantor, em 1899, descobriu um paradoxo a respeito da cardinalidade de todos os conjuntos. Se o conjunto dos cardinais possui um cardinal, então esse cardinal deve pertencer ao conjunto dos cardinais, portanto, o conjunto dos cardinais é maior do que o seu próprio cardinal. Esses paradoxos, o de Burali Forti e o de Cantor, têm como característica o uso da noção de totalidade. A utilização de uma totalidade em algo que está na sua própria definição gera um círculo vicioso.

Em 1902, Russel descobre um paradoxo referente ao conjunto definido como não contendo ele mesmo como elemento. Russel e Whitehead tentam livrar a matemática dos paradoxos, que até então haviam surgido na teoria de conjuntos, nos três volumes dos *Principia Mathematica* publicados entre 1910 e 1913. Nessa tentativa, é introduzida a teoria dos tipos lógicos. A teoria dos tipos lógicos obedece ao princípio do círculo vicioso, que veremos a seguir.

A primeira axiomatização da teoria bem sucedida é feita por Zermelo em 1908. A interpretação desses axiomas pela concepção iterativa evita os paradoxos contidos na teoria de conjuntos de natureza extensional[5]. Segue-se então várias tentativas de axiomatização da teoria feitas por Fraenkel, von Neumann, Bernays e Gödel, cada uma com suas peculiaridades como a utilização de representações diferentes para os conjuntos ou a introdução de objetos diferentes de conjuntos na teoria; por exemplo, classes próprias para evitar paradoxos com respeito a todos os conjuntos. Quando uma propriedade é aplicada a todos os conjuntos, isso é feito com o uso da classe própria, que não é um conjunto e, portanto, livra os conjuntos dos paradoxos.

---

[5] Uma coleção possui extensionalidade se e somente se pode ser operacionalizada por meios matemáticos. Consideramos, nesse trabalho, os paradoxos da teoria de conjuntos como paradoxos extensionais.

Em 1940 e 1963, questões sobre a independência do axioma da escolha e da hipótese do contínuo[6] são respondidas respectivamente por Gödel e Cohen. Gödel estabeleceu que o axioma da escolha e a hipótese do contínuo não é refutável pelos axiomas restantes da teoria de conjuntos.

Cohen estabeleceu definitivamente a independência do axioma da escolha e da hipótese do contínuo. A origem do axioma da escolha ainda é fonte de investigações entre os estudiosos dos fundamentos da matemática. A hipótese do contínuo de Cantor permanece até hoje sem uma demonstração ou refutação, mas a utilização de sua afirmação ou negação produzem teoremas importantes para a matemática.

Com respeito ao uso da teoria de conjuntos nos fundamentos da matemática, não é o caso que essa ciência se reduza a teoria de conjuntos; porém, toda teoria matemática como a álgebra, a geometria ou a aritmética, por exemplo, podem ser representadas em termos de teoria de conjuntos. Conjuntos podem representar qualquer coisa, como números, pontos, de funções, ovos, etc.

As questões estudadas em teoria de conjuntos, portanto, são questões de fundamentos da matemática. Agora, com respeito os campos mais fundamentais da teoria de conjuntos, as linhas investigativas mais importantes são a teoria de modelos, a teoria dos grandes cardinais e teoria de conjuntos descritiva. A teoria de modelos possibilitou a demonstração da independência do axioma da escolha e da hipótese do Contínuo por Gödel e Cohen. A teoria dos grandes cardinais estuda as propriedades dos conjuntos contidos em hierarquias infinitas. A teoria descritiva de conjuntos estuda as propriedades dos números reais definíveis e problemas indecidíveis na teoria axiomática de conjuntos.

---

[6] A hipótese do continuo de Cantor e o Axioma da Escolha serão tratados no decorrer da dissertação. São considerados independentes porque não podem ser nem demonstrados nem refutados a partir da teoria de conjuntos existente.

Na filosofia da matemática, um dos campos investigativos para a teoria dos conjuntos está relacionado à aceitação da verdade dos seus axiomas. A verdade desses axiomas não é de natureza formal, já que qualquer teoria formal sobre a verdade, sintática ou semântica, depende de uma de teoria de conjuntos. Outro estudo importante na filosofia da matemática diz respeito à ontologia, se conjuntos infinitos existem assim como os finitos ou se são ficções ou se possuem possibilidade de existência.

1.3. A Hipótese do Contínuo de Cantor

A melhor representação do conjunto contínuo está na reta ou a semi-reta contínua composta de infinitos pontos. A hipótese do contínuo CH nasce da idéia de determinar o tamanho real do conjunto contínuo. Nas palavras de Gödel: *"O problema do contínuo de Cantor é simplesmente a questão: Quantos pontos existem numa linha reta no espaço euclidiano? Em outros termos, a questão é: Quantos diferentes conjuntos de inteiros devem existir?"* Gödel (1947, pág. 516).

A linha reta, ou uma semi-reta, representa geometricamente o conjunto dos números reais. Também é admitido como uma representação do contínuo o conjunto formado por todas as funções sobre os números naturais, que é o conjunto de todos os subconjuntos dos números inteiros.

Cantor mostrou que há conjuntos que possuem correlação biunívoca com a sua parte própria. Vamos exemplificar essa situação com o conjunto dos números naturais e uma parte própria desse conjunto, que é o conjunto dos números pares:

Dado o conjunto dos números naturais:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10...\}$$

E o conjunto dos números pares:

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...\}$$

Eles estão em correlação biunívoca:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & ... \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & ... \end{array}$$

Esse caso mostra que o procedimento está relacionado com a própria definição de infinito Dedekind, que diz que um conjunto é infinito se está em relação biunívoca com a sua parte própria. Se não houver uma correlação biunívoca como essa descrita aqui, o conjunto não é infinito. O conjunto é um infinito enumerável se puder ser posto em relação biunívoca com os números naturais. Isso ocorre também com o conjunto dos números inteiros e dos números racionais, que podem ser postos em correlação biunívoca com os números naturais. Vamos mostrar como isso ocorre a seguir.

Admita que o conjunto abaixo represente o conjunto dos números inteiros:

$$\{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Para facilitar, vamos retirar o 0:

$$\{\ldots -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$$

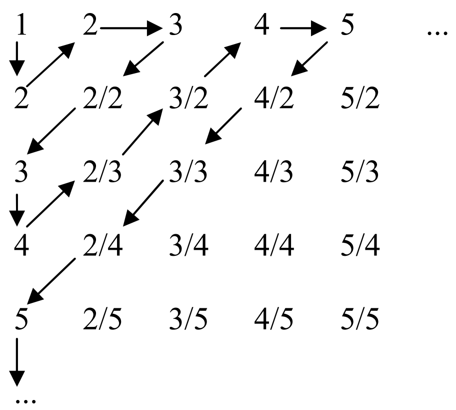
E vamos reorganizar o conjunto de modo a termos um número inteiro positivo seguido de seu valor correspondente negativo:

$$\{1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$$

A correlação biunícova com os naturais ocorre da seguinte maneira:

1	2	3	4	5	6	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	-1	2	-2	3	-3	...

Os números racionais são frações de números inteiros. Nesse caso, o procedimento de correlacionamento segue uma matriz infinita, que exibe a formação dos números racionais. Nessa matriz, o encontro entre uma linha e uma coluna produz uma fração que é um número pertencente aos números racionais:



Realizamos agora um procedimento de zigue-zague na matriz da seguinte maneira: iniciamos pelo 1, descemos uma linha, seguimos uma diagonal ascendente e chegamos na próxima coluna, avançamos à direita e descemos na diagonal. Vamos tomar parte da seqüência do exemplo acima:

$$\{1, 2, 2, 3, 2/2, 3, 4, 2/3, 3/2, 4, 5, 4/2, 3/3, 2/4, 5, ...\}$$

Agora, retiramos os números repetidos ou que representam a mesma quantidade:

$$\{1, 2, 3, 4, 2/3, 3/2, 5, 2/4, ...\}$$

Sabendo que existem números racionais negativos, colocamos cada número seguido de seu valor negativo:

$$\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 2/3, -2/3, 3/2, -3/2, 5, -5, 2/4, -2/4, ...\}$$

E em seguida colocamos esse conjunto em relação biunívoca com os números naturais:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	2/3	-2/3	3/2	-3/2	...

Portanto, assim como os números inteiros, os números racionais são enumeráveis. Vamos ver agora como Cantor mostrou que os números reais não são enumeráveis.

Cantor mostrou a impossibilidade do conjunto dos números reais serem colocados em uma correspondência um-a-um com os números naturais. O procedimento realizado por Cantor para mostrar essa impossibilidade é conhecido como argumento da diagonal. Vamos representar como acontece essa situação, primeiro, com os subconjuntos dos números naturais. O procedimento seguinte segue o raciocínio de Kleene (1967).

Deixe-nos tomar a seguinte função em números naturais em que o valor se alterna entre 0 e 1.

$$\varphi(x) = 1 \text{ se } \varphi_x(x) = 0$$

$$= 0 \text{ se } \varphi_x(x) = 1$$

Essa função opera uma troca de valores numa função e, por isso, é uma diagonal. Para cada função em que o valor é 0, o valor é trocado para 1. Para cada função em que o valor é 1, o valor é trocado para 0.

Essa função chama-se função característica de um subconjunto dos números naturais. Quando o valor da função é 1, indica que o número que é argumento da função é elemento do determinado conjunto.

A matriz infinita seguinte descreve os subconjuntos dos números naturais. Para cada elemento pertencente ao conjunto descrito na linha, o valor correspondente na matriz será 0. Se o número não pertence ao conjunto descrito na linha da matriz, o valor

será 1. A primeira linha da matriz representa o conjunto dos números naturais. A primeira coluna, os conjuntos descritos logo a seguir e o restante informa se o número indicado na primeira linha pertence ou não ao conjunto indicado na primeira coluna:

$C_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ conjunto dos números naturais

$C_1 = \{0, 2, 4, ...\}$ números pares

$C_2 = \{0, 1, 4, ...\}$ números quadrados

$C_3 = \{2, 3, ...\}$ números primos

$C_4 = \{\}$ conjunto vazio

...

	0	1	2	3	4	...
C_0	0	0	0	0	0	...
C_1	0	1	0	1	0	...
C_2	1	0	1	1	0	...
C_3	1	1	0	0	1	...
C_4	0	1	1	1	1	...
...						

O conjunto representado pela seta representa a função característica que foi introduzida acima. Esse conjunto é subconjunto dos números naturais. O conjunto possui os seguintes elementos: $C = \{1, 2, 4, ...\}$ já que forma a seqüência 01101...; 0 não é elemento de C, já que $\varphi(0) = 0$, 1 é membro, já que $\varphi(1) = 1$ e assim por diante. 1 é membro de C mas não é membro de C_1. 2 é membro de C, porém não é membro de C_2. 3 é membro de C_3 mas não é membro de C e assim por diante onde quer que a diagonal formada pelo conjunto C passe na matriz.

Admita agora que os conjuntos apresentados na primeira coluna da matriz são subconjuntos enumeráveis dos naturais. Portanto, o conjunto C não é um conjunto enumerável, pois se posto em uma linha da matriz, a diagonal onde passa o conjunto C acusaria um paradoxo ao encontrar uma linha correspondente ao próprio conjunto, em que um número qualquer seria membro de C se e somente se não for membro de C, se seguirmos o raciocínio dado pela formação do conjunto C.

Portanto, todos os subconjuntos do conjunto dos números naturais não formam um conjunto enumerável. Dito de outro modo, o conjunto de todas as funções sobre os números naturais não é enumerável.

Agora vamos apresentar um exemplo de matriz infinita que mostra que os números reais não são enumeráveis. O procedimento é o mesmo que mostra que todos os conjuntos dos números naturais não são enumeráveis, porque utiliza o argumento da diagonal de Cantor. Essa matriz representa os números reais que estão contidos no intervalo entre 0 e 1. A primeira coluna da matriz indica a enumeração dos números reais contidos em cada linha da matriz. A segunda coluna da matriz é "0," para indicar que o número está no intervalo real entre 0 e 1. Cada coluna da matriz depois da segunda coluna indica um número decimal referente ao número real da linha. A terceira coluna da matriz indica o primeiro número decimal, o que é representado pelo índice na variável x_1, por exemplo. Como esse é o primeiro número decimal do primeiro número real da matriz, indicamos que esse número pertence ao primeiro número real pelo exponencial que aparece na variável. No nosso exemplo é: x_1^1. Outro exemplo: x_3^4 x é o terceiro número decimal do quarto número real que aparece na matriz.

$$
\begin{array}{llllllll}
1 & 0, & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 & x_5^1 & \ldots \\
2 & 0, & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & \ldots \\
3 & 0, & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 & \ldots \\
4 & 0, & x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 & \ldots \\
5 & 0, & x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 & x_4^5 & x_5^5 & \ldots \\
\ldots & \ldots & & & & & &
\end{array}
$$

Essa matriz não é capaz de enumerar todos os números reais existentes no intervalo entre 0 e 1 porque há a possibilidade de haver um número real $r = 0, y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5 \ldots$ em que cada valor decimal que aparece para cada y_n difere dos valores decimais que aparecem em x_n, como segue na seta diagonal que define esse número. Desse modo, haverá sempre mais números reais além daqueles que foram enumerados.

Conjuntos que possuem uma correlação biunívoca com os números naturais são tão infinitos quanto os números naturais em relação à cardinalidade, ou seja, estão no mesmo nível de infinito em relação ao ordinal e em relação à cardinalidade. Mas isso é impossível em relação aos números reais.

A impossibilidade está no fato de haver mais números reais do que números naturais, assim, a cardinalidade dos números naturais é menor que a cardinalidade dos números reais. Consideramos o conjunto dos números reais o conjunto contínuo. O conjunto dos números reais possui a cardinalidade maior que a dos naturais e todo conjunto enumerável possui uma cardinalidade igual ou menor que a todo o conjunto dos números naturais.

Cantor mostrou que o conjunto correspondente a todos os conjuntos de ordinais não é enumerável. Estamos referindo aqui à operação conjunto-potência. Nessa operação, consideramos a existência de um conjunto que abrange todos os subconjuntos possíveis de serem formulados num único conjunto. Assim, o conjunto-potência dos ordinais finitos, os números naturais, não é enumerável, porque é maior do que a infinidade desses ordinais.

À cardinalidade do conjunto dos ordinais enumeráveis Cantor denominou $\aleph_0$. Esse conjunto não é diferente do conjunto dos números naturais; e também, Cantor estabeleceu um segundo nível na hierarquia dos cardinais, $\aleph_1$ para a cardinalidade do primeiro conjunto ordinal não enumerável.

Indo além, estabeleceu numa hierarquia transfinita, o conjunto $\aleph_2$ correspondendo à cardinalidade de todos os conjuntos ordinais não contáveis do primeiro nível e assim por diante. Nessa hierarquia, portanto, temos uma seqüência da seguinte maneira:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots$$

Onde cada nível de $\aleph$ corresponde a um número cardinal transfinito.

Ao supor que o conjunto-potência dos ordinais finitos é a cardinalidade dos reais, que não há nenhum conjunto de cardinalidade maior que $\aleph_0$ e menor que $\aleph_1$ e que a cardinalidade dos reais é imediatamente posterior à da hierarquia dos ordinais finitos, Cantor estabeleceu que a hipótese do contínuo CH, que é:

$$\aleph_1 = 2^{\aleph 0}$$

A hipótese do contínuo de Cantor é um tipo de proposição indemonstrável nos axiomas de teoria de conjuntos. A falta de demonstração da hipótese do contínuo está na base da incompletude inerente da teoria de conjuntos que é a incapacidade de axiomatizar o conceito geral de conjunto. O conceito de conjunto nunca será descrito totalmente e exatamente de modo a exaurir esse conceito. Vamos descrever a seguir a hierarquia cumulativa, que pode nos dar uma idéia da hierarquia dos $\aleph$.

1.4. A Hierarquia Cumulativa

Os paradoxos de Burali-Forti, de Cantor e o paradoxo de Russell mostram a existência de conjuntos que são mal-fundados. Esses conjuntos são aqueles que são elementos de si mesmos.

No caso do paradoxo de Russell, defina um conjunto que não pertença a si mesmo e que é elemento de si mesmo e terá um paradoxo. Vamos mostrar, primeiro, como essa situação ocorre no paradoxo do barbeiro. Imagine uma cidade em que os homens são divididos da seguinte maneira: Um único barbeiro, os que barbeiam a si próprios e os que não barbeiam a si próprios. Os que não barbeiam a si próprios necessitam de um barbeiro para se barbearem e o barbeiro, único na cidade, obedece à seguinte regra: Ele barbeia os homens da cidade que não barbeiam a si próprios. Daí fica a dúvida: o barbeiro barbeia a si mesmo? Ora, é certo que o barbeiro barbeia alguém que não barbeia a si mesmo. Como a cidade possui somente um barbeiro, se ele é um homem que barbeia a si próprio, porque ele é o único barbeiro da cidade, portanto ele não se barbeia, já que o barbeiro barbeia homens que não barbeiam a si próprios. Note a circularidade quando o barbeiro tem que referir a si mesmo ao se barbear, o que gera o paradoxo contido na própria definição do barbeiro. Se o barbeiro não se barbeia, então ele necessita de um barbeiro para se barbear. Então, ele barbeará a si mesmo, já que é o único barbeiro da cidade. Novamente, ele não barbeia a si próprio ao se barbear. Note a circularidade viciosa quando é possível ao barbeiro referir a si próprio. O mesmo ocorre quando um conjunto pertence a si próprio, como veremos abeixo.

Vamos mostrar como essa situação de circularidade ocorre a partir do princípio da compreensão, quando uma função define um conjunto:

$$(1)\ \mathrm{E}y(x)\ (x\varepsilon y \leftrightarrow \varphi(x)) \text{ – Princípio da Compreensão}$$

Introduzimos agora uma função que define o conjunto que não pertence a si mesmo:

$$(2)\ \varphi(x) \equiv_{\mathrm{Def}} \neg(x\varepsilon x) \text{ – Definição}$$

Realizamos a substituição em (1) pela definição (2):

$$(3)\ \mathrm{E}y(x)(x\varepsilon y \leftrightarrow \neg(x\varepsilon x)) \text{ – 1,2 \#[} \varphi(x) \text{ // } \neg(x\varepsilon x)]$$

Agora podemos instanciar os quantificadores pela mesma constante *a*:

$$(4)\ (x)(x\varepsilon a \leftrightarrow \neg(x\varepsilon x)) \text{ – (3) I.E.[} y \text{ // } a]$$

$$(5)\ a\varepsilon a \leftrightarrow \neg(a\varepsilon a) \text{ – (4) I.U.[} x \text{ // } a]$$

E, portanto, temos o paradoxo de Russell. O paradoxo de Russell pode ser derivado de uma teoria de conjuntos que contenha o princípio da compreensão, ou seja, da teoria ingênua de conjuntos, onde conjuntos podem pertencer a si próprios.

Em relação a conjuntos que são definidos por totalidades, como as que fundamentam os paradoxos de Burali-Forti e de Cantor, elas podem ser definidas e aplicadas a conjuntos que pertencem a si mesmos. Essas totalidades são inconsistentes.

Zermelo em 1930 introduz um universo V bem fundamentado dos conjuntos que evitam esses tipos de paradoxos. Um conjunto é possível de ser definido se todos os seus membros são dados anteriormente a esse conjunto. Por isso, um conjunto não está contido entre os seus membros, já que não é definido entre os seus membros.

Para exemplificar a hierarquia cumulativa, vamos iniciar com um exemplo simples. Ao adicionar mais uma moeda num cofre, uma iteração está sendo realizada. Isso pode ser feito várias vezes e da mesma maneira. No exemplo de iteração do cofre, o conjunto novamente formado contém o conjunto anteriormente dado, o que garante o caráter indutivo da iteração.

A relação mais básica existente em teoria de conjuntos é útil na hierarquia cumulativa. Essa relação é a de pertença e relaciona dois conjuntos. Dado um conjunto a e um conjunto b qualquer, representamos a relação de a pertencer a b por $a\varepsilon b$.

A concepção iterativa funciona através de estágios de formação de conjuntos a partir de seus elementos. Hipoteticamente, temos três estágios de formação de conjuntos V_x, V_y e V_z dispostos iterativamente numa seqüência. Temos dois conjuntos, x e y. x aparece primeiro no estágio de formação V_x; y, no estágio V_y. V_y aparece logo depois de V_x. Então $x\varepsilon y$.

Um conjunto z está no estágio de formação V_z, todos os conjuntos que estão em estágios de formação anteriores também estão contidos em z. Se V_z é posterior a todos os estágios de formação descritos no parágrafo anterior, x e y estão no conjunto do estágio de formação V_z ou aparecem num estágio de formação anterior e pertencente também a z (Cf.

Maddy, 1990). No caso de o estágio de formação de x ou y estar no mesmo estágio de formação de V_z, então eles são o mesmo conjunto, ou seja, $x = y = z$.

Consideremos o conjunto vazio o símbolo ø. Curiosamente, por motivos de formalismo matemático, esse é o único *elemento* que há na teoria de conjuntos. Isso é um processo de idealização matemática. Nenhum elemento concreto pode fundamentar a teoria de conjuntos já que os conjuntos de cardinalidade infinita não podem ser instanciados concretamente. Não há infinitos ovos no mundo nem infinitos grãos de areia. Portanto, objetos não são elementos na teoria pura de conjuntos.

A teoria de conjuntos contida na interpretação da hierarquia cumulativa introduz um conceito de conjunto bem específico, aquele em que a sua formação depende de todos os membros anteriores. Portanto, o estágio inicial V_0 dessa teoria é o vazio, ø.

$$V_0 = ø$$

Os estágios posteriores dependerão da utilização da operação de coletar todos os membros anteriores num único conjunto, ou coletar todos os subconjuntos num único conjunto. Avançamos na hierarquia se o objeto inicial é coletado por um conjunto no próximo estágio e é formado um conjunto cuja cardinalidade consiste em conter um único elemento. Isso é representado da seguinte maneira para o estágio seguinte ao estágio inicial:

$$V_1 = \{ø\}$$

Até aqui, temos dois estágios V_0 e V_1 cujos conjuntos são respectivamente ø e {ø}. Ao coletá-los num próximo conjunto, teremos {ø, {ø}} e temos o próximo estágio na hierarquia cumulativa. Consideramos esse, o estágio V_2.

Considere que cada conjunto desses representa um número. ø representa o 0, {ø} representa o 1, {ø, {ø}} representa o 2 e assim por diante. Nesse caso, ao realizar a operação de somar +1 a um número inteiro, que começa do ø, no estágio inicial V_0, é adicionado um novo estágio de acordo com a operação de colecionar todos os conjuntos anteriores num único conjunto.

Os conjuntos descritos no parágrafo anterior são os ordinais finitos. O conjunto de todos os ordinais finitos é representado como sendo um ordinal-limite ou ω. A definição de um ordinal limite é que nenhum ordinal finito é capaz de alcançar um ordinal-limite, já que todo ordinal finito está sob o ordinal-limite. Isso evita que um ordinal finito venha a representar um ordinal infinito e assim termos um paradoxo. Também, a noção de limite nos permite iterar a operação de colecionar o conjunto do ordinal-limite em outro conjunto e assim termos um novo conjunto ordinal-limite além de ω. A noção de limite introduzida aqui está de acordo com a noção de infinito atual, já que introduz um termo num conjunto infinito, que é o conjunto de todos os ordinais finitos ω. O ordinal-limite está no estágio V_ω.

Todos os subconjuntos de ordinais enumeráveis estão no estágio $V_{\omega+1}$; $V_{\omega+2}$ é a iteração da operação de colecionar todos os subconjuntos de ω+1 e o processo vai sendo iterado ao infinito. Essa caracterização somente é possível se o ordinal-limite é considerado um objeto infinito completado e a iteração é novamente realizada, que é uma utilização metodológica do finitismo cantoriano.

Para cada ordinal, associamos uma cardinalidade. Os ordinais limite que descrevemos anteriormente possuem uma cardinalidade infinita e, portanto, são associados à hierarquia os ℵ. $\aleph_0$ para o primeiro nível de ordinal limite, $\aleph_1$ para o segundo nível e assim por diante. O que temos é uma hierarquia transfinita assim como imaginou Cantor, o que dá sentido à hipótese do Contínuo. Mas, além disso, a hierarquia cumulativa tem como finalidade prover uma interpretação para os axiomas usuais da teoria de conjuntos, como os axiomas de Zermelo e Fraenkel.

1.5. Axiomas de Zermelo e Fraenkel

Os seguintes axiomas são os axiomas da teoria de conjuntos de Zermelo e Fraenkel, que é conhecida como a teoria de conjuntos usual ou padrão. Eles são proposições formadas numa lógica de primeira ordem. Os quantificadores incidem sobre objetos, como conjuntos. As letras gregas maiúsculas introduzem os predicados sobre conjuntos e as letras gregas minúsculas introduzem as funções sobre conjuntos. A relação de pertença ε é um predicado relacional para conjuntos.

Axioma da extensionalidade: $(x)(y)(z)((z\varepsilon x \leftrightarrow z\varepsilon y) \rightarrow x=y)$

Axioma do conjunto vazio: $(\mathrm{E}y)(x)\neg x\varepsilon y$

Axioma da paridade: $(z)(w)(\mathrm{E}y)(x)(x\varepsilon y \leftrightarrow (x=z \text{ v } x=w))$

Axioma da união: $(z)(\mathrm{E}y)(x)(x\varepsilon y \leftrightarrow (\mathrm{E}w)(x\varepsilon w \ \&\ w\varepsilon z))$

Axioma do conjunto-potência: $(z)(\mathrm{E}y)(x)(x\varepsilon y \leftrightarrow (w)(w\varepsilon x \rightarrow w\varepsilon z))$

Axioma da infinidade: $(\mathrm{E}y)((\mathrm{E}x)\ (x\varepsilon y \ \&\ (z)\neg z\varepsilon \mathrm{y})\ \&$
$(x)\ (x\varepsilon y \rightarrow (\mathrm{E}z)(z\varepsilon y\ \&$
$(w)(w\varepsilon z \leftrightarrow (w\varepsilon x \text{ v } w = x)))))$

Axioma da separação: $(z)(\mathrm{E}y)(x)(x\varepsilon y \leftrightarrow (x\varepsilon z \ \&\ \Phi))$

Axioma da regularidade: $(\mathrm{E}x)\Phi \rightarrow (\mathrm{E}x)(\Phi \,\&\, (y)(y\varepsilon x \rightarrow \neg\Psi))$

Axioma da substituição: $(z)(\mathrm{E}y)(x)(x\varepsilon y \rightarrow (\mathrm{E}w)(w\varepsilon z \,\&\, \varphi(w) = x))$

Axioma da escolha: "Todo conjunto não-vazio possui uma função de escolha."

A teoria de conjuntos sem o axioma da escolha e o axioma da substituição é a teoria de conjuntos de Zermelo, e é indicada pela letra Z. A adição do axioma da substituição, mas sem o axioma da escolha é a teoria de conjuntos de Zermelo e Fraenkel, indicada por ZF. ZF juntamente com o axioma da escolha é conhecida como ZFC.

Cada axioma dessa teoria pode ser interpretado no universo *V* da hierarquia cumulativa, menos o axioma da escolha e o da substituição. Boolos, (1971) exibe como os axiomas da teoria de conjuntos ZF podem ser derivados a partir da concepção iterativa, mas primeiro exibe uma lista de axiomas a respeito da concepção iterativa e as suas leis de formação e daí deriva os axiomas de Z.

Esses axiomas têm a finalidade de deixar claro uma extensão da estrutura da concepção iterativa com respeito às leis de formação de conjuntos nas hierarquias. Vamos utilizar as idéias de Boolos com respeito à derivação dos axiomas da teoria de conjuntos, mas não vamos utilizar os axiomas que dizem respeito à estrutura da hierarquia cumulativa, o que pode ser conferido em seu artigo.

Axioma da extensionalidade: $(x)(y)(z)((z\varepsilon x \leftrightarrow z\varepsilon y) \rightarrow x=y)$

Esse axioma estabelece a igualdade entre dois conjuntos que possuem os mesmos elementos. Gödel considera esse axioma um marco epistemológico na teoria de conjuntos, que exibe a diferença entre conjunto e qualquer outro tipo de coleção. A extensão é a única característica que um conjunto pode ter ao invés de outros tipos de coleção como, por exemplo, um conceito, que não possui extensão apenas. A extensão possibilita a operacionalização matemática da coleção. Os demais axiomas podem ser interpretados a partir da concepção iterativa

Axioma do conjunto vazio: $(\mathrm{E}y)(x)\neg x\varepsilon y$

Esse axioma afirma a existência de algo que não possui membros. É o axioma que exibe aquilo que não contém nada e, portanto, é o vazio. Esse axioma define o primeiro estágio da hierarquia cumulativa, ou seja, é o seu ponto de partida e pode ser substituído a qualquer momento pelo símbolo que denota esse estágio que é o ø. Esse é o único elemento reconhecido para os conjuntos restantes.

Na concepção iterativa nenhum conjunto é formado além do que seja anterior aos seus membros na hierarquia. Assim, há algo anterior a um conjunto que não seja um conjunto, o que vem anteriormente a um conjunto são seus elementos e todo conjunto possui um elemento. Assim, há um elemento inicial e esse elemento é o conjunto vazio.

Axioma da paridade: $(z)(w)(\mathrm{E}y)(x)(x\varepsilon y \leftrightarrow (x=z \vee x=w))$

Significa que para qualquer dois conjuntos, distintos ou não, um deles é membro de outro conjunto. A explicação para isso é que cada estágio da hierarquia cumulativa forma um conjunto com os subconjuntos de um conjunto imediatamente anterior.

Sendo assim, temos, por exemplo, três estágios distintos V_a, V_b e V_c que correspondem a conjuntos distintos formados nos pontos especificados por esses estágios na hierarquia cumulativa. Por exemplo, são formados um estágio após o outro, na seguinte seqüência:

$$V_a \leq V_b < V_c$$

V_c é um estágio que está posterior a V_a e a V_b, sendo que V_a e V_b podem estar no mesmo lugar na hierarquia ou em pontos distintos. V_a e V_b correspondem respectivamente aos estágios onde os conjuntos z e w foram formados e V_c ao estágio de formação do conjunto y. Se V_a e V_b ocupam o mesmo lugar, então, se houver um conjunto de todos os conjuntos que os recolha como elemento, produzirá o mesmo conjunto e, portanto, ambos pertencem a esse conjunto.

Exemplo:

(i) z e w são formados no estágio inicial, portanto, são o ø. Então, havendo um próximo estágio, então, esse estágio colherá esses dois conjuntos: {ø}.

(ii) Se z e w são formados em estágios distintos, em que z é formado no estágio inicial ø e w no próximo estágio {ø}, o valor da variável x pode ser ou de z ou de w. Portanto, havendo um próximo estágio V_c além de w, então, o conjunto formado nesse estágio colherá esses dois conjuntos: {ø, {ø}}, sendo que o conjunto formado no estágio V_c é o que é representado pela variável y.

Axioma da união: $(z)(\mathrm{E}y)(x)(x\varepsilon y \leftrightarrow (\mathrm{E}w)(x\varepsilon w \,\&\, w\varepsilon z))$

Esse axioma significa que existe um conjunto y cujos elementos são todos os elementos do conjunto z. z está em algum estágio da hierarquia, sendo que esse estágio, se não for V_0, então é o conjunto de todos os conjuntos dados anteriormente a esse estágio. Assim, os elementos de z foram formados em estágios anteriores ao do estágio do conjunto z. O mesmo se aplica aos conjuntos que compõem z, ou seja, são formados pela mesma operação, que também contêm membros. Ao retornar na hierarquia a partir de z, encontramos todos os membros de z e os membros dos membros de z, que é o que afirma o axioma da união.

Axioma do conjunto-potência: $(z)(\mathrm{E}y)(x)(x\varepsilon y \leftrightarrow (w)(w\varepsilon x \rightarrow w\varepsilon z))$

Esse axioma significa que para cada conjunto z há um conjunto cujos elementos são os seus subconjuntos. Vamos admitir três estágios distintos na hierarquia. V_a, V_b, V_c, sendo que os conjuntos formados nesses estágios são a, b e c e acontece que o conjunto a é anterior na formação ao conjunto b e o mesmo em relação à b e c respectivamente, só que c é formado imediatamente depois de b na hierarquia, o que não precisa ocorrer necessariamente com a. a, pela descrição da hierarquia, pertence a b pela própria formação de b que é o conjunto de todos os conjuntos anteriores. O mesmo ocorrendo com c, já que c contém b; e b é o conjunto de todos os conjuntos anteriores a c.

Axioma da infinidade

$(\mathrm{E}y)((\mathrm{E}x)\ (x\varepsilon y\ \&\ (z)\neg z\varepsilon y)\ \&\ (x)\ (x\varepsilon y \rightarrow (\mathrm{E}z)(z\varepsilon y\ \&\ (w)(w\varepsilon z \leftrightarrow (w\varepsilon x \vee w = x)))))$ Significa que existe um conjunto que contém o vazio e o sucessor de qualquer conjunto. A cláusula de especificação, nesse axioma, que indica que o conjunto infinito contém o vazio é indicada por:

$$...(\mathrm{E}x)\ (x\varepsilon y\ \&\ (z)\neg z\varepsilon y)...$$

Ela indica que há um conjunto x ao qual nenhum outro conjunto z venha a pertencer a esse conjunto. A cláusula de especificação que mostra que esse conjunto contém o sucessor de qualquer outro conjunto é indicada por:

$$...(x)\ (x\varepsilon y \rightarrow (\mathrm{E}z)(z\varepsilon y\ \&\ (w)(w\varepsilon z \leftrightarrow (w\varepsilon x \vee w = x))))$$

Ela indica que qualquer conjunto w será ou um subconjunto de um conjunto y quando w=x ou será subconjunto de um subconjunto conjunto de y quando $w\varepsilon x$. Esse conjunto, que qualquer conjunto é seu elemento, pode existir já que não acarreta nenhum problema para a relação de pertença. Considerado como um limite, a sua descrição pode ser feita da seguinte maneira: salvo o conjunto vazio, sempre é possível retirar um subconjunto que pertença a esse conjunto e, desse subconjunto, outro subconjunto pode ser retirado e o raciocínio se aplica a esse último subconjunto.

Axioma da separação $(z)(\mathrm{E}y)(x)(x\varepsilon y \leftrightarrow (x\varepsilon z \ \& \ \Phi))$

Esse axioma afirma a existência de um conjunto no domínio da função proposicional Φ, onde y não ocorre livre, que torna essa proposição verdadeira. Qualquer conjunto da hierarquia cumulativa pode ser definido por uma função proposicional, desde que exista uma função proposicional que descreva esse determinado conjunto e esse conjunto seja subconjunto de um conjunto já dado pela hierarquia cumulativa, essa limitação imposta pela existência de um conjunto ao qual o domínio da função seja um subconjunto evita que caiamos no paradoxo contido no princípio da compreensão.

Axioma da regularidade $(\mathrm{E}x)\Phi \rightarrow (\mathrm{E}x)(\Phi \ \& \ (y)(y\varepsilon x \rightarrow \neg\Psi))$

Nesse axioma, tomar em Φ a ocorrência da variável x mas não da variável y. Ψ contém a variável y e é como se fosse a negação de Φ. Num estágio V qualquer da hierarquia, existirá um conjunto ao qual o predicado Φ se aplica; em estágios anteriores a Φ, o predicado não se aplica, o que é especificado por ¬Ψ no axioma. Isso impede, por exemplo, que um conjunto que esteja num estágio V_i seja descrito por um conjunto num estágio anterior ou igual a V_i e, portanto, não caímos no círculo vicioso. Esses dois últimos axiomas são um passo atrás em direção ao desastre dos paradoxos.

Boolos, (1971) afirma que o *axioma da substituição* $(z)(\mathrm{E}y)(x)(x\varepsilon y \rightarrow (\mathrm{E}w)(w\varepsilon z \ \& \ \varphi(w) = x))$ – não pode ser derivado da concepção iterativa. Isso ocorre porque nem todos os conjuntos dispostos na hierarquia cumulativa podem ser definidos por meio de uma função.

Axioma da escolha: "Todo conjunto não-vazio possui uma função de escolha."

Segundo esse axioma, há uma função que seleciona somente um único elemento de cada conjunto pertencente um conjunto não-vazio. Vamos ilustrar como isso acontece com um exemplo. Representamos a seguir o conjunto dos ordinais enumeráveis:

{ø, {ø}, {ø, {ø}}, {ø, {ø}, {ø, {ø}}}, {ø, {ø}, {ø, {ø}}, {ø, {ø}, {ø, {ø}}}}, ...}

E agora definimos uma função φ. Essa função seleciona o último elemento de cada conjunto pertencente ao conjunto representado acima. A função somente pode ser aplicada a partir do segundo elemento, já que se restringe a não ser aplicada ao conjunto vazio. A função retorna o seguinte conjunto, no nosso exemplo:

{ ø , {ø}, {ø, {ø}}, {ø, {ø}, {ø, {ø}}}, ...}

Sendo ø para {ø}; {ø} para {ø, {ø}}; {ø, {ø}} para {ø, {ø}, {ø, {ø}}} e assim por diante. A função tem como imagem, novamente, um ordinal. O axioma da escolha não pode ser derivado da hierarquia cumulativa. Cf. Boolos, (1971), já que não há como saber todas as funções escolha de todos os conjuntos dessa hierarquia.

Russell, (1981) afirma que o axioma da escolha é necessário para selecionar um sapato de cada par de sapatos, numa coleção infinita de sapatos, por exemplo, o sapato direito de cada par. A função escolha dessa seleção seria: "selecione o pé direito de cada par de sapatos nesse conjunto de pares de sapatos". Mas imagine que haja um conjunto de pares de meias e que a função escolha fosse selecionar a meia direita de cada par, essa seleção não seria possível de ser feita, uma vez que é impossível distinguir a meia direita da meia esquerda. Porém, o axioma da escolha afirma que há uma função escolha para a coleção das meias.

Caso semelhante acontece com o seguinte exemplo de números reais. Imagine que temos um conjunto infinito de intervalos reais que são limitados, inferiormente[7], por um número *n* e, superiormente[8], pelo sucessor do número *n*+1. Agora defina a função escolha "selecione o menor número de cada intervalo real, desde que não seja o seu limite inferior", essa função não pode ser aplicada, uma vez que no intervalo real haverá sempre um número menor que o escolhido que converge ao limite inferior. Do mesmo modo que o exemplo das meias, o axioma da escolha afirma que existe uma função escolha para cada conjunto de intervalos desse conjunto, porém, não sabemos qual.

1.6. Considerações Finais: Sobre as Motivações Não-construtivas

A hipótese do contínuo de Cantor, a hierarquia cumulativa, o infinito de Dedekind e os axiomas de ZFC podem ser interpretados como contendo raciocínios não-construtivos.

Segundo Lourenço (2008), o conceito de construtividade necessita de algumas especificações. Vamos listar a restrição ao conceito e existência, ao terceiro excluído e à demonstração por absurdo. Por exemplo, o conceito de existência (uma proposição com um quantificador existencial) é excluído das demonstrações construtivas. O conceito de existência é admitido sob a circunstância de um objeto ter a sua existência demonstrada. Ora, como temos visto, na teoria de conjuntos, a existência do objeto é postulada no axioma como a existência do conjunto vazio, do conjunto infinito e da função de escolha.

Lourenço (2008) afirma que num sistema estritamente construtivo, não há a possibilidade de haver o terceiro excluído, uma vez que admitida a não-demonstração da

[7] Ou seja, o primeiro ponto limite onde começa o intervalo real.
[8] Ou seja, o último ponto limite do intervalo real, o seu fim.

proposição, a sua negação seja verdadeira, já que para admitir que a negação da proposição, essa deveria ser demonstrada.

Não é assim que funciona no caso de uma demonstração por absurdo. E é por isso que esse tipo de demonstração deve ser evitado no sistema construtivo. No caso da hipótese do contínuo de Cantor, o raciocínio é não-construtivo por se tratar de uma demonstração de existência de conjuntos não-enumeráveis, como afirmamos na introdução. O tipo de demonstração de existência aqui é por absurdo. Se o conjunto não existe, o conjunto é não-enumerável, então, é possível derivar uma contradição. Esse é o procedimento realizado para a demonstração não-construtiva de existência de um objeto matemático: é acrescentada uma negação da existência do objeto, por exemplo, negar que não é um conjunto não-enumerável, e, portanto, chega-se a um absurdo.

A idéia de que um infinito potencial pressupõe o infinito atual também aparece no infinito de Dedekind. Nessa noção de infinito, o conjunto deve estar numa relação de bijeção de seus elementos com elementos de sua parte própria. É pressuposto que a relação se estabeleça para todo o conjunto e, portanto, para um nível de infinito completado. O uso do infinito atual como uma entidade completada faz parte da matemática não-construtiva.

Um exemplo de infinito completado que se associa ao infinito de Dedekind da matemática clássica é a que está implícita no axioma da indução completa da aritmética, uma vez que as propriedades descritas por uma instância desse axioma se aplicam a uma totalidade completada:

$$[\mathrm{P}(0) \;\&\; (\mathrm{P}(x)\&\mathrm{P}(\mathrm{S}(x)))] \rightarrow (x)\mathrm{P}(x)$$

Aqui a noção de infinito atual acontece quando é inferido um predicado para todos os números naturais, sendo que a propriedade foi satisfeita pelo 0, um número natural qualquer e o seu sucessor na seqüência dos números naturais. Há a pressuposição de que há o conjunto de todos os números naturais.

Outro exemplo de uso não-construtivo de linguagem está nas definições não construtivas, são aquelas que pressupõem o objeto que está sendo descrito. Um exemplo disso ocorre na hierarquia cumulativa. Isso provê uma noção realista da concepção iterativa de conjuntos. Na hierarquia cumulativa, a estrutura não-construtiva aparece se considerarmos que a formação de um conjunto depende da existência dos conjuntos que são formados anteriormente.

No caso da hierarquia cumulativa, do estágio do ordinal-limite em diante, as totalidades infinitas são consideradas como completadas. Nesse caso, a existência de um próximo nível é possível, já que a totalidade posterior coleciona a anterior como um objeto. Ao iniciar com os ordinais finitos, a descrição de qualquer conjunto é possível, num determinado estágio, através da utilização da operação de colecionar num conjunto imediatamente posterior todos os subconjuntos posteriores e assim gerando o próximo estágio da hierarquia A existência desses conjuntos infinitos, assim como uma operação que elabora uma seqüência de conjuntos finitos, somente é possível se são considerados entidades completadas, mesmo que sejam conjuntos com cardinalidade infinita.

A estrutura dos axiomas de ZFC também é não-construtiva. Se esses axiomas possuem uma motivação na hierarquia cumulativa, então eles devem pressupor a existência do conjunto, assim como ocorre nas regras de formação desses conjuntos. O *axioma do conjunto vazio* pressupõe a existência desse objeto. O *axioma da separação* indica como uma função define um conjunto desde que exista um conjunto em que o conjunto definido pela função é um subconjunto e nisso é que constitui o seu caráter não-construtivo. A função pode ser tanto uma verificação nesse universo como uma seleção arbitrária de um conjunto. Cf. Parsons (1977).

Segundo o *axioma do conjunto potência*, todos os subconjuntos de um conjunto podem ser coletados num único conjunto, que, obviamente, é maior do que o conjunto original, o que lhe confere a não-construtividade está no fato de que esses subconjuntos formam um novo objeto. Esse axioma não mostra nenhum modo específico de conseguir uma multiplicidade, o que lhe retira a arbitrariedade de considerar somente conjuntos que podem ser ordenados, mas descreve todas as multiplicidades possíveis de serem conseguidas a partir de um conjunto dado, como se os subconjuntos possíveis de um dado conjunto também fossem um dado a ser descrito.

Esse axioma possui um forte apelo à intuição como idealização na filosofia da matemática em níveis transfinitos. Se o axioma for aplicado em um conjunto infinito, o conjunto de todos os conjuntos desse infinito deverá ter a cardinalidade infinita maior que o conjunto anterior, daí a sua idealização, já que esses conjuntos não são instanciados fisicamente.

O *axioma da infinidade* descreve um conjunto infinito do qual um subconjunto pode ser retirado indefinidamente. A característica da existência desse tipo de conjunto remete às propriedades do infinito atual e do tipo de existência desse conjunto. Um conjunto que possui um limite, como se fosse finito, mas que ainda assim é infinito. Aqui, o infinito assume as características de um objeto.

O *axioma da escolha* assume a existência de uma função escolha para todo conjunto, uma função que implica no ordenamento de qualquer conjunto. A declaração da existência desse tipo de função associa o axioma da escolha é um caráter realista da matemática clássica. Ao considerar esses raciocínios discutidos acima como não-construtivos, agora podemos partir para o platonismo na matemática.

CAPÍTULO 2. Platonismo na Matemática de Gödel

2.1. Introdução

Nesse capítulo, vamos descrever o platonismo na matemática de Gödel e associá-lo às motivações não-construtivas introduzidas no capítulo anterior. Vamos mostrar a diferença entre o platonismo ontológico e o platonismo mitológico. Consideramos o platonismo na matemática de Gödel como platonismo ontológico. Introduziremos o princípio do círculo vicioso como uma defesa da matemática não-construtiva. Mostraremos como que o realismo conceitual e a intuição matemática estão presentes na filosofia da matemática de Gödel e as críticas ao platonismo ontológico realizadas sobre um viés da teoria causal do conhecimento, que nega a existência de objetos matemáticos abstratos fora do espaço e do tempo.

2.2. O Platonismo Ontológico versus Platonismo Mitológico

Para explicar o platonismo ontológico, temos que entender o realismo na matemática, que pode assumir vários significados. O significado mais comum e popularmente conhecido como "platonismo" é a crença de que existem objetos não espaço-temporais e que não são construções mentais. O platonismo na matemática, tanto o ontológico quanto o mitológico, são um tipo de realismo.

O platonismo de Gödel, por exemplo – que pode também ser denominado como realismo conceitual – é um exemplo de realismo na matemática com respeito às idéias gerais de um objeto matemático. O platonismo de Gödel também é caracterizado pelo objetivismo, que é a concepção de que as proposições com respeito aos objetos matemáticos são necessariamente ou verdadeiras ou falsas[9].

O platonismo de Gödel é classificado por Chihara, (1973) como *platonismo ontológico*, que assume as duas características acima. No caso do platonismo ontológico, o único meio de obter teorias matemáticas é acreditar na existência de objetos matemáticos assim como existem os objetos no espaço e no tempo. Porém, os objetos matemáticos não estão localizados nem no espaço e nem no tempo.

As teorias matemáticas, segundo Gödel, são como as teorias físicas, mas descrevem outro tipo de realidade. Esse tipo de analogia aparece em Gödel, (1944) ao comentar a lógica matemática de Russell. A analogia é entre o universo da matemática e o mundo das experiências espaço-temporais:

> A analogia entre a matemática e uma ciência da natureza é ainda aumentada por Russell num dos seus primeiros escritos. Russell compara os axiomas da lógica e da matemática com as leis da natureza e a evidência lógica com a percepção dos sentidos, de modo que os axiomas não precisam ser necessariamente evidentes, mas antes a sua justificação reside (exatamente com em física) no fato de tornarem possível que se deduzam estas "percepções dos sentidos"; o que evidentemente não excluiria que também tivessem uma espécie de plausibilidade intrínseca semelhante à que existe em física. Eu julgo (desde que se entenda "evidência" num sentido suficientemente estrito) que esta opinião tem sido amplamente justificada pelos desenvolvimentos posteriores e é de se esperar que ainda seja mais justificável no futuro. Gödel (1944, pág. 128)

Na filosofia da matemática de Gödel, as proposições matemáticas aparecem como descrições de uma realidade. O uso dessas descrições tem como finalidade, em Gödel (1944), evitar o colapso intensional, que é reduzir as proposições matemáticas que dizem coisas diferentes com respeito a esse universo à outra proposição com o mesmo valor de verdade, porque sentenças diferentes podem indicar coisas diferentes além do valor de verdade. Um exemplo disso é que as sentenças diferentes introduzem pensamentos

---

[9] O objetivismo não implica o platonismo na matemática e nem o platonismo implica no objetivismo. A teoria matemática que nega alguma instância do terceiro excluído não é uma teoria objetivista.

diferentes. Além da intensionalidade, uma defesa da matemática realista por Gödel pode partir do princípio do círculo vicioso, que veremos mais adiante nesse capítulo.

Ao contrário do platonismo ontológico, teorias matemáticas que aceitam a existência de objetos matemáticos como um mecanismo de bom funcionamento para a teoria, mas não se comprometem com a existência desses objetos fora dessa teoria, fazem parte do *platonismo mitológico*.

Com respeito ao *platonismo mitológico*, a teoria matemática pode ser objetivista, mas não se compromete com a existência de objetos matemáticos. O caso em que há a crença em objetos matemáticos abstratos aqui apenas ocorre numa ligação entre essa crença e a linguagem matemática. A linguagem matemática é objetivista e realista, mas efetivamente não se liga a crença em nenhum objeto metafísico.

Aqui temos um exemplo de uma teoria que se adéqua ao platonismo mitológico. Tome uma história que é contada tradicionalmente há muitos anos sobre a existência de algo e que é incorporada pelo imaginário popular de uma determinada cultura sobre esse objeto, e, nesse caso, a existência do objeto não é questionada. A cultura sobre a existência do objeto é passada por meio de livros, professores e a internet, mas a situação que podemos denominar "batismo inicial" do objeto não é encontrada. Se essa é a situação do platonismo mitológico, o seu domínio visa unicamente uma estratégia de linguagem matemática.

Alguns raciocínios matemáticos que assumem o objetivismo, o infinito atual, o princípio da indução completa e a demonstração da existência por absurdo podem implicar somente em uma ficção estratégica enquanto que de outro lado também pode implicar na existência de objetos matemáticos abstratos enquanto vistas pelo aspecto do platonismo ontológico.

A pressuposição desses objetos para a elaboração da teoria matemática é uma característica do platonismo ontológico de Gödel e é onde reside a principal crítica ao seu platonismo.

O platonismo ontológico, portanto, acredita na existência de objetos, como a crença em objetos infinitos[10]. O *platonismo mitológico* acredita na possibilidade da redução dos objetos do platonismo ontológico, pois eles não são entidades essenciais[11], e transformam esses objetos em pura ficção. Nessa ficção, o objeto existe na linguagem e não fora dela. Quando o matemático faz uso da noção de existência, está aplicando essa existência a uma estrutura de linguagem.

A diferença que é levada em conta nessas duas correntes principais está no uso que é feito da linguagem, como por exemplo, é feito nas expressões universais, ou que dizem respeito a um objeto infinito. Para o platonista ontológico, seus objetos existem fora da linguagem em que eles são expressos. Para o platonista mitológico, essas entidades são apenas expressões da linguagem.

O caso em que um objeto é construído, mas que não leva em consideração o objetivismo é o intuicionismo. Nessa filosofia da matemática as coisas são reconhecidas como existindo a partir da construção, por exemplo, a partir de uma demonstração.

A demonstração é um meio de obter a existência do objeto, e de prover o valor de verdade das sentenças. Nesse caso, uma sentença com um quantificador existencial tem que ser verdadeira se puder ser demonstrada. A demonstração de uma sentença provê a

[10] Para exemplificar o que é um objeto infinito, temos que ter em mente que o matemático realista acredita que conjuntos existem. Os conjuntos são, nesse caso, objetos e por isso estão de acordo com o realismo. Se o conjunto é uma espécie de conjunto infinito, então o objeto em questão é infinito. O conjunto de todos os números naturais é um objeto infinito nessa concepção. Mas como todos os objetos do mundo da experiência são finitos, essa categoria de objetos existe fora do espaço e do tempo.

[11] No caso das entidades essenciais e a existência dessas entidades, a crença na sua existência é mantida pelo platonista ontológico. Um conjunto, por exemplo, é uma entidade essencial. Essas entidades essenciais existem de forma independente da linguagem matemática e da mente do matemático e são somente descritas. Mas para o platonista mitológico, não há entidades essenciais. Admitimos essas entidades para o bom funcionamento da teoria e nada mais. A existência da entidade é puramente pragmática e não tem sentido algum fora da linguagem e, portanto, podem ser reduzidas aos termos lingüísticos que a elas referem.

verdade de uma sentença a partir do sentido de todas as sentenças anteriores que foram utilizadas para a sua demonstração.

Porém, o platonista ontológico utiliza a demonstração e outros meios para obter o valor de verdade de uma sentença. Os sentidos das proposições se relacionam aos *fatos*, primeiramente, e depois a uma demonstração. Já que a sentença descreve uma situação e não constrói o seu próprio sentido ou os objetos que procura tratar.

Ao contrário do intuicionista, o platonista não reconhece a equivalência entre demonstração de uma proposição e a verdade dessa proposição. As proposições podem ser verdadeiras, mas também podem ser indemonstráveis, o que não ocorre para um intuicionista, que vê a relação de equivalência entre verdade e demonstrabilidade. Independentemente de demonstração, uma proposição pode ser verdadeira, por sua evidência, pela sua obviedade, ou por qualquer outra razão aceita pelo platonista.

A verdade para o platonista é mais geral do que a demonstração. Para esses platonistas, conhecer a verdade de uma proposição implica em conhecer o sentido de uma proposição e seu sentido não é dado nessa concepção de demonstração. Assim, podem existir proposições verdadeiras, mas que não são demonstráveis. A verdade da proposição, nesse caso, não está ligada ao uso que dela é feito, como é o caso que ocorre com o intuicionista. Na teoria dos números, exemplo de proposição que não foi demonstrada ainda e que é considerada verdadeira é a conjectura de Goldbach[12]. Na teoria de conjuntos, um exemplo de sentença indecidível é a hipótese do contínuo.

Para o platonista ontológico, a matemática possui um conjunto de axiomas sobre o qual é construída e esses axiomas tratam de objetos abstratos que existem independentemente da mente, do espaço e do tempo. No platonismo ontológico, a

[12] A conjectura de Goldbach afirma que qualquer número par i é a soma de dos números $n+m$ sendo n e m números primos. Segundo MADDY, 2007, a conjectura permanece não-demonstrada até o presente momento.

matemática não funciona por convenções, mas por fatos independentes de convenções arbitrárias. Os teoremas da matemática exibem fatos e os fatos guardam algum conteúdo. Fatos que não são demonstrados são reconhecidos por intuição dos objetos sobre os quais as proposições relatam alguma relação ou propriedade. A intuição pode ser um tipo de experiência de idealização ou, ainda, num segundo sentido, algo que apenas é utilizado para se referir a sentenças indemonstráveis, sem compromisso ontológico, como veremos adiante.

2.3 A Intuição Matemática

Parsons (1975) em uma nota explica a diferença entre dois tipos de intuição, mas que geralmente podem ser confundidas entre si. Um primeiro caso de intuição ocorre quando há sentenças indemonstradas num sistema formal, mas que são aceitas como verdadeiras nesse sistema sem haver qualquer possibilidade de demonstração. Outro caso é a idealização. A idealização ocorre quando, por exemplo, há a aplicação arbitrária de um raciocínio que diz respeito a casos finitos para casos infinitos, por exemplo. O salto para casos infinitos é o que ocorre na intuição por idealização, no platonismo de Gödel, esse tipo de intuição está associada à existência de objetos abstratos. Um caso típico de idealização consiste em considerar a existência de conjuntos infinitos metafisicamente.

A intuição, enquanto é realizada no aspecto do mundo da experiência, é associada a objetos pequenos e limitados e nesse caso estamos nos referindo a objetos que podem ser instanciados a coleções de coisas contidas no mundo físico ou até mesmo a conjuntos de coisas que estão no nosso campo visual. Essa intuição, a intuição concreta ou sensível torna possível retirar conjuntos finitos do mundo físico. Se existe alguma intuição no pensamento matemático, a intuição concreta possui pouca utilidade nesse campo.

A intuição concreta é a base da intuição matemática enquanto idealização. O platonismo ontológico como o de Gödel considera idéias como existindo objetivamente, portanto, a intuição enquanto idealização pode consistir numa experiência com idéias, sendo que a idéia que essa intuição acessa é também objetiva.

Nesse caso, a idealização ocorre sobre entidades unicamente abstratas como conjuntos infinitos ou objetos de natureza matemática como os conjuntos puros. Objetos infinitos se existem, não se instanciam em entidades físicas. Esse é o caso da intuição enquanto idealização.

A intuição de objetos infinitos abstratos é um tipo de projeção. É comum relacionar a existência da intuição intelectual com a existência de objetos matemáticos infinitos. Aqui, a noção de conjuntos físicos finitos e conhecidos facilmente é ultrapassada pela idealização, ou seja, de conjuntos infinitos ou intuição de objetos de natureza matemática.

Partir para o infinito é realizar um salto, e que envolve a idealização. Essa intuição idealizada não está ligada a fatos físicos e é por isso que é abstrata. A intuição leva ao entendimento de conceitos porque se trata do conhecimento de conceitos abstratos ou ainda conceitos transfinitos[13]. A intuição tem o poder de nos dar o conjunto de acordo com a sua extensão de objetos, de modo a se tornar mais fácil perceber isso pelos conjuntos de origem física; nesse aspecto temos a percepção do conjunto.

A seguinte citação de Gödel exemplifica como a intuição intelectual se liga ao infinito:

> Chegar à totalidade dos inteiros envolve um salto. Notar que isso pressupõe uma intuição infinita [idealizada] . No segundo salto consideramos não somente os inteiros, mas também o processo de selecionar os inteiros como dados na intuição. “Dado em intuição” aqui significa [uma idealização da] intuição concreta. Cada seleção dá um subconjunto como um objeto. Ao tomar todos os modos possíveis de levar elementos para fora [da totalidade dos inteiros] pode ser pensado como um

[13] Um exemplo de conceito transfinito é o conceito de conjunto. Conjuntos que estão em níveis de infinitos são conjuntos com cardinalidade transfinita. Como esses conjuntos ainda fazem parte da idéia geral de conjunto, ou do conceito de conjunto, então o conceito de conjunto é transfinito.

> *método* de produzir esses objetos. O que é dado é uma análise psicológica, o ponto é se produz uma convicção objetiva. Esse é o início da análise [do conceito de conjunto].[14]

A intuição tem ainda uma relação com a verdade das proposições da linguagem. As verdades mais básicas de uma teoria dependem da intuição para serem justificadas. Nesse caso, segundo Parsons (1975), estamos diante de outro tipo de intuição que já não é uma idealização, e sim de outro tipo.

Para Gödel, a verdade das proposições na matemática é aceita pelos conceitos ocorrendo na proposição, ou seja, pelo sentido dos termos contidos na proposição, portanto, por um tipo de intuição enquanto idealização, já que o entendimento de um conceito, ou uma idéia, ocorre por meio da intuição.

É suposto que a intuição tem o poder de mostrar a verdade dos axiomas, uma vez que a admissibilidade desses axiomas depende da verdade das proposições envolvidas. A intuição é utilizada para obter experiências com conceitos matemáticos abstratos ou idéias matemáticas como, por exemplo, é o caso do conceito de "conjunto infinito".

Intuição enquanto idealização não é uma convenção. E, se forem introduzidas convenções nas teorias matemáticas, serão aceitas juntamente com a intuição matemática, e, ainda, se for introduzido nas teorias matemáticas sentenças empíricas, serão aceitas ainda juntas com a intuição matemática. Convenções sobre uso são vazias de conteúdo se a sua adição não acrescenta nenhum conteúdo à teoria que está sendo tratada.

Uma sentença geral na matemática implica uma relação com os objetos em que ela trata. Uma ciência como a matemática é objetiva e possui seus objetos específicos. A interpretação da matemática por leis sintáticas implica que os símbolos introduzem um conceito através daquela simbologia. Diferentes símbolos introduzem diferentes conceitos.

[14] Gödel, *apud* Wang, (1996, pág. 220). Tradução nossa. Textos em colchetes introduzidos por Wang.

Mas isso não implica que a ciência matemática não necessite de algo que seja introduzido por meio de definições.

Essas características do pensamento de Gödel mostram que ele defende abertamente o realismo na matemática, ou o realismo conceitual. Em um argumento, com o uso dos teoremas da incompletude, Gödel alega que se a matemática é uma construção, então não deveriam existir sentenças indemonstradas nela, já que o construtor deve conhecer todas as propriedades e comportamentos daquilo que foi construído por ele.

Como isso não ocorre, porque há relações entre inteiros que não são demonstradas ou ainda níveis de transfinito que para serem descritos corretamente necessitam de novos axiomas para a teoria de conjuntos, por exemplo, então isso *"deveria forçar algum ponto de vista realista sobre nós ainda que certos outros ingredientes da matemática fossem nossa própria criação."* Gödel (*1951).

Algo que rege a intuição é o próprio afazer do matemático, de se debruçar sobre um problema e procurar uma solução inusitada ou chegar a um resultado indemonstrável de acordo com a linguagem que o circunda. Essa característica da intuição impede que ela seja algo imediato, mas, num contexto de descoberta matemática, precisa ser cultivada.

2.4. O Princípio do Círculo Vicioso

O princípio do círculo vicioso tem a finalidade de limitar as teorias construtivas com respeito à matemática. Uma conseqüência desse princípio é que toda teoria construtiva é paradoxal, se ela trata de coleções infinitas completadas. A interpretação de conjuntos pela concepção iterativa está de acordo com o princípio do círculo vicioso e assim é possível conseguir uma visão realista sobre essa interpretação[15].

O princípio do círculo vicioso afirma que *"nenhuma totalidade pode conter membros definíveis somente em termos dessa totalidade".* Cf. Parsons, (1990). Se o matemático constrói a teoria sem pressupor o objeto, então pode cair em um círculo vicioso. Ao construir proposições em que a totalidade dos objetos é construída há então o círculo vicioso.

Em relação ao platonismo, o princípio do círculo vicioso tem como conseqüência a noção de que os objetos matemáticos não são construídos, ou ainda, que não há a construção de um tipo de demonstração para todos os objetos matemáticos. Se toda entidade matemática pode vir a ser construída dentro de um sistema, então não há nenhum método para obter determinados objetos que não sejam apenas aqueles que já estão postos dentro do sistema, uma vez que uma totalidade construída nesse sistema estaria dada anteriormente às entidades matemáticas, por exemplo, a totalidade de todos os objetos matemáticos.

Uma situação dessas ocorre se for o caso de os *Principia Mathematica* construir toda a matemática através de demonstrações, o que é impossibilitado pelos teoremas de incompletude de Gödel. A existência de métodos construtivos como o formalismo existente na elaboração de sistemas axiomáticos deve levar em conta então uma incompletude inerente, se estiverem tratando de teorias com conteúdo matemático como números ou conjuntos.

---

[15] Cf. Boolos, (1973). Parsons, (1975) argumenta que o realismo da concepção iterativa de conjuntos segundo o realismo de Wang, por exemplo, diz que se um conjunto pode ser formado num determinado estágio da hierarquia, então o conjunto existe nesse determinado estágio. Na existência desse conjunto, então o que temos é um modo de percorrer a hierarquia e não uma criação sucessiva de estágios. Para Parsons, a existência de um estágio de formação na hierarquia é *possível* a partir de um procedimento de formação. A idéia de Parsons não acarreta em prejuízo para a visão realista da concepção iterativa de conjuntos.

O princípio do círculo vicioso, com a associação da intensionalidade das proposições matemáticas, tem a conseqüência de que a matemática realista não pode ser reduzida a um tipo de construtivismo. É impossível a um sistema matemático ser definido como a totalidade de todas as proposições verdadeiras. A esse respeito, indaga Gödel:

> Portanto, alguém tem que ter cuidado ao entender claramente o sentido desse estado de coisas. Significa que nenhum sistema bem-definido de axiomas correto pode conter tudo que é próprio da matemática? Significa se por matemática própria é entendido o sistema de todas as proposições demonstráveis. (...) Evidentemente nenhum sistema bem-definido de axiomas corretos pode compreender toda matemática objetiva, desde que a proposição que afirma a consistência do sistema é verdadeira, mas não demonstrável no sistema. Gödel, (*1951, pág. 11)

Estão livres do princípio do círculo vicioso também, as demonstrações matemáticas de existência do objeto sem haver uma prova da construção do objeto. Isso ocorre em demonstrações matemáticas em que é utilizada a redução ao absurdo. Uma demonstração desse tipo está baseada em noções não construtivas de existência. Escreve Gödel que:

> Sob os axiomas de nossos sistemas somos autorizados, e.g., a formar uma proposição que diz “Há um inteiro que tem certa propriedade P”, e embora podemos não ter meios de dizer que um inteiro existe ou não, aplicamos a lei do terceiro excluído a essa proposição, justamente como se em algum domínio objetivo de idéias essa questão foi resolvida independentemente de qualquer conhecimento humano. (...) podemos sempre provar a existência de inteiros com uma dada propriedade sem ninguém ser capaz de nomear esse inteiro (...). Gödel, (*1933o, pág. 16)

Esse é o procedimento realizado para a demonstração não-construtiva de existência de um objeto matemático. Vimos no primeiro capítulo como esse procedimento é realizado para demonstrar que o conjunto contínuo não é enumerável e que há conjuntos maiores que o dos números naturais; se acrescentada uma negação da existência do objeto a esse tipo de raciocínio e chegarmos a um absurdo, então o objeto existe.

Outro exemplo de uso não-construtivo de linguagem está nas definições não construtivas, são aquelas que pressupõem o objeto que está sendo descrito. Um exemplo disso ocorre nas hierarquias da concepção iterativa de conjuntos. Isso provê uma noção realista da concepção iterativa de conjuntos.

Com respeito à aceitação da noção de existência na matemática, o princípio do círculo vicioso não tem utilidade, o uso de definições que pressupõem a existência dos objetos definidos é uma característica de teorias matemáticas que lidam com a existência de coleções infinitas. Portanto, a hierarquia cumulativa, em sua interpretação não-construtiva, não está sob as restrições do princípio do círculo vicioso.

No caso da hierarquia cumulativa, os conjuntos com a cardinalidade infinita são considerados como completados, o que não há nenhum problema em relação ao círculo vicioso. Nesse caso, a existência de um próximo nível é possível, já que a totalidade posterior coleciona a anterior como um objeto. Vejamos o que Gödel diz a respeito da hierarquia cumulativa:

> (...) iniciamos com inteiros, isto é, conjuntos finitos de uma categoria especial, temos primeiramente os conjuntos de inteiros e os axiomas referindo a eles (axiomas de primeiro nível), então os conjuntos de conjuntos de inteiros com seus axiomas (axiomas de segundo nível), e assim por diante para qualquer iteração finita da operação "conjunto de". Em seguida temos o conjunto de todos esses conjuntos de ordem finita. Mas agora temos que trabalhar com conjuntos na maneira exatamente que trabalhamos com conjuntos de inteiros antes, isto é, considerar subconjuntos deles (isto é, os conjuntos de ordem ω) e formular axiomas sobre a sua existência. Eventualmente esse procedimento pode ser iterado além de ω, de fato, ir além de qualquer número transfinito ordinal. (...) agora, podemos iterar essa nova operação de novo até o transfinito. Gödel, (*1951, pág. 3-4).

A suposta existência desses conjuntos transfinitos, assim como uma operação que elabora uma seqüência de conjuntos finitos, somente é possível se são considerados entidades completadas, mesmo que sejam conjuntos com cardinalidade infinita.

A concepção realista de Gödel está de acordo com a hierarquia cumulativa, que mostra a existência de objetos matemáticos através de estágios posteriores somente se um estágio anterior imediatamente a este está presente ou há a presença de um nível inicial previamente dado onde ocorre um tipo de iteração.

A hierarquia cumulativa para a teoria de conjuntos livrou-a do círculo vicioso e também do princípio do círculo vicioso. Cf. Gödel (1944). A restrição imposta pelo princípio do círculo vicioso é aplicada somente a teorias matemáticas baseadas em definições construtivas. Os estágios de formação de conjuntos na concepção iterativa não se baseiam em definições construtivas, portanto, não estão sob o princípio do círculo vicioso e nem sob os paradoxos da extensionalidade[16] gerados pela não observação desse princípio.

Assim, o conceito matemático de conjunto não está sob nenhum paradoxo extensional. Paradoxos que venham a ocorrer em teoria de conjuntos são de caráter epistemológico e não de caráter matemático, o que não impede a operacionalização desse conceito. A crença em objetos matemáticos abstratos passa então a ter algum sentido perante esses fatos à medida que descrições que estão livres do princípio do círculo vicioso são consistentes.

Isso ocorre porque cada estágio da hierarquia cumulativa não pode conter como seu constituinte seu próprio estágio. Um estágio depende da extensão do estágio anterior. Assim, o universo cumulativo dos conjuntos não está sob o perigo da auto-referência. A fundamentação de um estágio de hierarquia cumulativa está nos estágios anteriores e nunca aparece num estágio anterior ou do mesmo nível.

É um exemplo de circulo vicioso o conjunto que contém como subconjunto ele mesmo. Nesse caso, a totalidade está sendo definida em termos dessa totalidade porque a hierarquia do conjunto está dada dentro do próprio conjunto, portanto, há um paradoxo extensional se for definido um conjunto que não contém a si mesmo como membro, já que uma definição que não obedece ao princípio do círculo vicioso isso pode ocorrer.

[16] Os paradoxos que consideramos como extensionais foram descritos no capítulo 1: O paradoxo de Burali-Forti, de Cantor e o de Russell.

Essas caracterizações com respeito aos raciocínios e métodos matemáticos levam a um tipo de realismo na matemática, já que são as bases para as demonstrações não-construtivas. A crença em entidades matemáticas abstratas aparece também quando são consideradas as proposições indecidíveis na matemática como, por exemplo, a hipótese do contínuo de Cantor que envolve o infinito atual. Ao levar em conta a concepção iterativa, esse problema ganha um sentido na própria estrutura da hierarquia.

Como descrito acima, a hierarquia cumulativa dos conjuntos é o modo pelo qual a descrição de conjuntos transfinitos é realizada, esses que são os objetos da teoria de conjuntos abstratos, e por isso perdem a conexão com o mundo físico, daí, uma filosofia realista da matemática como a de Gödel encontra soluções no platonismo para a existência objetiva de conceitos transfinitos e a sua intuição. O conceito de conjunto é transfinito porque está ligado à interpretação da concepção iterativa de conjuntos. E é dependente da descrição desses objetos a decisão da hipótese do contínuo CH. Afirma Gödel que:

> Porém, apesar do afastamento da experiência sensível, devemos ter alguma coisa como uma percepção também dos objetos da teoria dos conjuntos, como é visto pelo fato que os axiomas se forçam sobre nós como sendo verdadeiros. Eu não vejo nenhuma razão em porque ter pouca confiança nesse tipo de percepção, i.e., na intuição matemática, que na percepção dos sentidos, que nos induz a construir teorias físicas e a esperar que percepções dos sentidos futuras irão confirmá-las, e, ainda, acreditar que uma questão não demonstrável agora possui um sentido e será demonstrada no futuro. (...) Que novas intuições matemáticas levam a uma decisão de tais problemas como a hipótese do contínuo de Cantor são perfeitamente possíveis (...). (Gödel (1964, pág. 271)).

Devemos levar em conta aqui um realismo unido à intuição enquanto idealização. Vamos explorar aqui essa interpretação, que está de acordo com o realismo de Gödel.

O conceito de conjunto introduzido pela concepção iterativa é importante para a verdade ou falsidade de CH. A hipótese do contínuo depende da relação estrutural entre as hierarquias e seus estágios. A possibilidade de verdade ou falsidade da hipótese do contínuo tem a sua razão de ser, se for levado em conta que no primeiro nível de ordinal limite temos a cardinalidade $\aleph_0$, e que a hipótese do contínuo diz respeito ao segundo nível do ordinal limite e o $\aleph_1$, as propriedades estruturais desse nível apareceriam no próximo nível da hierarquia, cujos axiomas correspondentes poderiam ser capazes de demonstrar a verdade ou falsidade da hipótese do contínuo.

Direcionados para o domínio que diz respeito a essas hierarquias, a exploração das propriedades e relações dos conjuntos nelas existentes está na intuição enquanto idealização cuja clarificação do sentido do conceito de conjunto infinito levaria a axiomas que descrevam essas hierarquias mais altas da concepção iterativa. A clarificação de sentidos dos conceitos é o contato por intuição com esses conceitos ou idéias. Ao entrar em contato com essas idéias temos a idealização.

Se a hipótese do contínuo de Cantor for realmente verdadeira, as funções de emparelhamento para o nível de $\aleph_1$ apareceriam no nível $\aleph_2$ de ordinais correspondentes na hierarquia, com a busca de novos axiomas sobre esses níveis. E se for falsa, isso não ocorreria. A busca de novos axiomas está em relação com intuição conceitual ou análise conceitual do conceito de conjunto infinito. Assim como os axiomas da teoria de conjuntos de ZF depende da concepção iterativa.

Se existir uma demonstração de CH, ela dependerá da descoberta de novos axiomas nessa concepção que descreva os níveis mais altos da hierarquia cumulativa, ou a CH poderá ser refutada por axiomas que descrevam esses níveis mais altos ou, ainda, o conceito de conjunto descrito nessa hierarquia está equivocado em relação à CH e, portanto, a hipótese do contínuo não pode ser nem demonstrada nem refutada nessa concepção. A hipótese do contínuo de Cantor também pode ser não demonstrada porque ela é um erro ou um pseudo-problema.

Gödel acreditava que a hipótese do contínuo de Cantor viria a ser refutada, uma vez que as descobertas matemáticas recentes não implicam a hipótese do contínuo de Cantor.

Como isso ocorre, Gödel acreditava na descoberta de um axioma que refutasse a hipótese do contínuo ou ainda em algo que haveria de estar errado no conceito de conjunto, como, por exemplo, o conceito de conjunto descrito na hierarquia cumulativa poderia não ser uma boa descrição para o conceito de conjunto infinito.

Novamente, a descoberta de novos axiomas nos traz a uma situação da intuição matemática por idealização, ou seja, explorar o sentido do termo ou a idéia geral do termo "conjunto". O sentido dos termos em teoria de conjuntos quando interpretados têm a ver com a intuição matemática assim como os termos da geometria têm a ver com os objetos físicos quando eles são interpretados. Como a hipótese do contínuo trata de objetos abstratos uma vez que são transfinitos, não há nenhuma conexão direta com o mundo físico.

Introduzida essa discussão, podemos falar da intuição matemática juntamente com o realismo conceitual. Intuição matemática não é ter um conhecimento imediato. Como é uma intuição de algo que já existe, não criamos os objetos aos quais estamos percebendo, nesse caso, estamos apenas combinando e reproduzindo os acontecimentos matemáticos.

2.5. O Realismo Conceitual

Em relação à ontologia de Gödel, além da existência de conjuntos como entidades matemáticas, Gödel acreditava na existência de classes e de conceitos. A existência de números parece ser problemática, já que eles podem ser representados por conjuntos. Eles podem ser considerados como propriedades de conjuntos segundo Maddy (1990).

A existência de classes possui um efeito quase pragmático. Uma classe própria é uma coleção que não é um conjunto. A classe própria impede, por exemplo, falarmos do conjunto de todos os conjuntos. Todos os conjuntos formam uma classe própria para que não caia em paradoxo a definição usual de conjunto.

O universo dos conjuntos é uma classe própria para impedir o seguinte paradoxo: Imagine que o conjunto U é o conjunto de todos os conjuntos existentes, nesse caso, o universo de todos os conjuntos é um conjunto. Como temos visto, a operação conjunto-potência produz um conjunto de cardinalidade maior que o conjunto a qual foi aplicada. Portanto, se aplicarmos a operação de conjunto-potência em U, teremos um conjunto com cardinalidade maior do que U, mas se U é o conjunto de todos os conjuntos, então não suporta o conjunto referente ao seu próprio conjunto-potência. Se U é o conjunto de todos os conjuntos, então existe um conjunto que não está no conjunto de todos os conjuntos e o conjunto-potência de U não é um conjunto. Para evitar isso, é introduzida a noção de classe própria. Cf. Mortari, (2001).

Por isso, o universo dos conjuntos é uma classe própria. Na linguagem de Cantor, uma classe própria forma uma coleção que é inconsistente justamente por conta da situação descrita acima. Por ser inconsistente, não pertence ao universo dos conjuntos já que os conjuntos são coleções consistentes. Cf. Dauben, (1990).

Se referirmos ao conjunto de todos os conjuntos por meio de um conjunto, o uso da operação conjunto-potência levaria à formação de um conjunto maior do que o referido no estágio posterior. Há uma classe de todos os conjuntos para evitar esses paradoxos. Classes também possuem extensionalidade semelhante à de conjuntos. A teoria de conjuntos de Gödel contém axiomas de classes que as diferencia dos conjuntos. Todo conjunto forma uma classe, porém, o contrário não ocorre. As classes, portanto, tem como função impedir a existência de conjuntos que levem a paradoxos.

O conceito em Gödel aparece como uma *idéia geral* com respeito a algum objeto ou operação no pensamento matemático. Quando o conceito aparece na linguagem, vem como um sentido na proposição. Os conceitos são todos abstratos porque são objetos ou idéias objetivas, que não são acessíveis pela experiência. O conceito deve ser abstrato porque lida com questões envolvendo puramente o pensamento ou o ato mental voltado para o objeto. Também, porque o conceito mostra como lidamos com objetos tanto infinitos como finitos.

O conceito é uma *idéia* e termina por existir independentemente do pensamento. Temos que observar que o conceito pode ser visto como uma idéia criada, como no caso do conceito de conjunto. O conceito de conjunto introduzido na hierarquia cumulativa é um conceito bem específico. Enquanto idéia criada ou desenvolvida, o conceito não pode ser simplesmente um objeto, mas é algo que foi objetivado. Esse fenômeno se dá pelo processo da intuição enquanto idealização.

Há conceitos que são *transfinitos.* Um exemplo desse conceito é o conceito geral de conjunto contido na hierarquia cumulativa. O conceito de conjunto está em hierarquia cumulativa à medida que a operação "conjunto de" corresponde à aplicação da idéia ou conceito de *conjunto*. O conceito geral de conjunto é transfinito porque a hierarquia cumulativa é infinitamente iterada, sendo que cada estágio corresponde a uma instanciação da idéia de conjunto onde foi realizada a operação "conjunto de".

No caso de aceitar que há conceitos que são transfinitos, aqueles em que a possibilidade de aplicação nunca será exaurida, temos como exemplo desse conceito o de conjunto. No caso do conceito de conjunto, exibe a inexauribilidade das teorias matemáticas, já que pode haver uma infinidade de axiomas da teoria de conjuntos que se aplicam ao conceito geral de conjunto. A percepção do conceito é como a dos sentidos, que percebe objetos e as relações entre os objetos pela intuição.

O conceito é um tipo de idéia ou uma idéia geral. Um conceito matemático está relacionado a fatos matemáticos se estamos partindo a noção de que conceitos existem. As descobertas matemáticas dependem da análise conceitual. A partir da análise mais detalhada das idéias contidas na matemática.

Temos como representação do conceito de conjunto a concepção iterativa. Dessa concepção é possível descrever alguns axiomas da teoria de conjuntos de forma a justificá-los. Novos axiomas dependem do entendimento ou analiticidade do conceito de conjunto expresso através das hierarquias da concepção iterativa. Porém, ser analítico pode aparecer em dois sentidos nos textos de Gödel.

Isso ocorre em proposições do tipo $x = x$, em expressões de definições explícitas ou em tautologias. Esse tipo de analiticidade é o mais comum em toda teoria matemática que assume o princípio de substituição *salva veritate*, e não pressupõe nenhuma discussão epistemológica envolvendo a natureza da idéia por trás do termo e sim com respeito à noção de preservação da verdade.

Porém, Gödel não considera a analiticidade somente como uma mera representação de uma tautologia ou por meios de definições explícitas. A analiticade aparece também como a descrição do conceito. A noção de analítico aqui em Gödel quer dizer que há relações matemáticas que não são tautológicas, ao contrário das que admitem o princípio de substituição *salva veritate*. Escreve Gödel com respeito à analiticidade:

> É verdade que esses axiomas são válidos mantendo o sentido do termo "conjunto" – alguém deve ainda dizer que eles expressam o verdadeiro sentido do termo "conjunto" – e portanto eles devem ser chamados analíticos; logo, o termo "tautológico", que é vazio de conteúdo, para eles está inteiramente fora de lugar, porque ainda a asserção da existência de um conceito de conjunto satisfazendo esses axiomas (ou a consistência desses axiomas) está longe de ser vazia e que isso não pode ser demonstrado sem de novo usar o conceito de conjunto em si, ou algum outro conceito abstrato de natureza similar. (Gödel (*1951, pág. 32)).

As relações consideradas como analíticas não são tautológicas e validam os axiomas porque um axioma envolve o conceito do qual se trata e expressam o sentido verdadeiro do termo que expressa o conceito. Os axiomas não são simples tautologias, mas contém o sentido de “conjunto” com algum conteúdo satisfatório.

Os conceitos levam a uma experiência mental enquanto pensamos através deles e os julgamentos realizados que envolvem esses conceitos expressam aspectos desses conceitos ou as relações que eles mantêm com outros conceitos. A análise conceitual por trás do conceito se relaciona com a discussão a respeito do sentido do conceito. Toda a discussão sobre o seu sentido revela seu conteúdo intuitivo e o seu conteúdo demonstrativo.

Sentenças que envolvem conceitos matemáticos não estão relacionadas somente a regras ou demonstrações, mas possuem algo “de fato” sendo descrito nessas proposições. As proposições matemáticas possuem um conteúdo que é conceitual. Para Gödel, o que torna uma teoria matemática verdadeira são os conceitos que nela ocorre. Há conceitos matemáticos que possuem referência junto à realidade física e as suas combinações entre objetos, esses conceitos possuem a característica de realizar uma descrição das estruturas físicas, isso faz com que conceitos de conteúdo formal sejam adequados à realidade física e vice-versa.

Há um tipo, então, de conteúdo intuitivo na matemática clássica. O conteúdo intuitivo que pode ser expresso como um fato psicológico e que afeta os nossos pensamentos. Ao discutir o *sentido* por trás do conceito, estão sendo discutidas as experiências mentais e seus padrões ao entrar em contato com o conceito pelo seu conhecimento direto. Com respeito ao conceito de conjunto consiste no ato de, resumidamente, “coletar objetos num objeto”, e esse é o sentido básico do conceito de conjunto e as possibilidades de realizar essa coleção são expressas na hierarquia cumulativa. Por isso, cada nível da hierarquia corresponde à aplicação do conceito – ou operação – “conjunto de” sobre um objeto sendo que leva imediatamente à noção de “coletar objetos num objeto”.

A fundamentação de Gödel dos axiomas da teoria de conjuntos exige uma descrição do conceito geral de conjunto, à medida que é possível descrever de modo exato esse conceito em concepção iterativa, se torna mais convincente a aceitação dos axiomas da teoria de conjuntos como sendo verdades não demonstradas que formam um conjunto consistente de sentenças. Uma explicação do conceito de conjunto exige uma explicação de como a mente funciona na presença desse conceito ou como essa idéia afeta o funcionamento mental que culmina em um conjunto e também na teoria de conjuntos.

Devemos notar que a nossa mente possui um comportamento básico, que consiste em diferenciar a unidade da pluralidade, ou seja, a diferença entre um e muitos, sendo que o que está em muitos também pode ser visto como uma unidade, que coleta a multiplicidade na unidade. Isso baseia uma realidade fundamental para a teoria de conjuntos:

> Um conjunto é uma unidade na qual os elementos são os constituintes. É uma propriedade fundamental da mente compreender multiplicidades em unidades. Conjuntos são multiplicidades que também são unidades. Uma multiplicidade é o oposto de uma unidade. Como pode qualquer coisa ser uno e múltiplo? Porém um conjunto é somente isso. É um fato aparentemente contraditório que conjuntos existem. É surpreendente o fato que multiplicidades são também unidades sem levar a contradições: esse é o principal fato da matemática. Pensando [uma pluralidade] junto como uma trivialidade: e isso parece explicar por que não temos contradição. Mas "muitas coisas para uma" está longe do trivial. Gödel, *apud*, Wang (1996, pág. 254). Tradução nossa. Texto em colchetes introduzido por Wang.

Temos aqui uma descrição do conceito de conjunto, que consiste em colecionar várias coisas numa única coisa, mas como isso é uma operação, que aparece como algo que sempre pode ser feito, dado um objeto, então é um tipo de objeto que pertence ao nível mais alto dos objetos abstratos, que são as idéias ou os conceitos. Essa é a idéia fundamental da concepção iterativa de conjuntos.

Entre os objetos que são as idéias e os objetos físicos se encontram os conjuntos, que consiste na realização da operação de colecionar tudo numa única coisa. Por isso, há o conceito que leva à ação mental de produzir um conjunto através de uma relação entre os objetos e o produto dessa operação é o conjunto, que está entre o conceito e o mundo físico.

Em Gödel, os conjuntos possuem existência entre o físico e o ideal. Em relação aos conjuntos finitos, a relação com o mundo físico é possível de ser notada, já que temos a capacidade de colecionar vários objetos e dizer que esses objetos formam um conjunto, mas não somente um agregado de coisas. Assim, conjuntos estão entre o físico e o abstrato porque também dependem de aspectos físicos pra existirem.

Mas no caso de conjuntos infinitos, um tipo de idealização é necessário e aqui o espaço de discussão é estritamente teórico e diz respeito também às hierarquias mais elevadas da concepção iterativa. Nesse campo de descobertas de conjuntos infinitos e suas relações mais básicas entra a intuição intelectual de Gödel. Essas descobertas com respeito a esses conjuntos dependem de um conceito bem específico de conjunto contido na concepção iterativa. Esse conceito funciona como uma *idéia reguladora* para esses conjuntos.

A investigação com respeito ao aparecimento do conceito a partir da manipulação do objeto à linguagem como experiência de pensamento aparece em Gödel (*1961) em que há uma divisão entre uma realidade empírica e uma realidade abstrata. De um lado, há o conhecimento abstrato e não-sensível que implica no racionalismo, platonismo na matemática e no idealismo e do outro, há o lado do conhecimento que leva em conta fatos relacionados à experiência sensível.

Segundo Gödel, *"(...)a verdade está no meio ou consiste de uma combinação das duas concepções."* (Gödel (*1961, pág. 7)). No mesmo texto, Gödel afirma ser um preconceito de o pensamento contemporâneo pensar na matemática como algum tipo de jogo meramente lingüístico sem levar em conta aspectos dela que se relacionam à sua aplicação no mundo ou aos supostos objetos matemáticos. Defendido o realismo também está defendida aí a idéia de que há a necessidade de se cultivar os conceitos dos objetos pelos quais são construídas as teorias matemáticas com respeito a outros objetos matemáticos.

A clarificação dos conceitos pela analiticidade ou a busca do sentido é também a clarificação dos sentidos e possui uma fundamentação fenomenológica. Consiste em *"focalizar mais exatamente sobre os conceitos concernidos por direcionar nossa atenção de um certo modo, nomeadamente, para nossos próprios atos no uso desses conceitos, nos nossos poderes em executar atos, etc."* (Gödel (*1961, pág. 8)), e que nada mais é do que um *apriorismo*. Uma vez formada a idéia do objeto na mente, a investigação teórica sobre o objeto é realizada em torno dessa idéia. Uma consideração a respeito de como é formulado um conceito aparece quando Gödel vê a possibilidade de um estudo baseado no desenvolvimento mental de uma criança.

Esse desenvolvimento é dividido em duas partes. Uma está relacionada ao desenvolvimento dos órgãos sensório-motores e a outra parte está ligada à linguagem e ao entendimento dessa linguagem. O desenvolvimento da linguagem aparece quando a criança passa a entender os conceitos básicos sob os quais estão baseados os objetos pelos quais os órgãos sensório-motores estiveram em contato.

Passar de uma fase para outra exige avanços em estados de consciência cada vez mais abstratos e isso consiste em atingir estados de consciência distintos, sempre em graus mais elevados. Na criança, o grau mais elevado da consciência é atingido quando é possível a ela aprender a utilizar palavras, entender e realizar inferências lógicas com base no uso de palavras.

O que a criança realizava *empiricamente* antes de atingir o grau de consciência da linguagem está nos graus mais baixos da consciência, e consiste na manipulação de objetos que ajudam na formulação das idéias dos objetos manipulados. Com o aparecimento do uso da linguagem pela criança, o desenvolvimento das primeiras atividades leva a um grande desenvolvimento das atividades que antes eram realizadas num sentido pré-teórico e passa a ter um sentido mais abstrato.

Também, o mesmo acontecendo em relação às ciências abstratas. A linguagem leva ao desenvolvimento dessas ciências. Essas considerações a respeito da elaboração do desenvolvimento da criança ajudam a entender o realismo conceitual a partir do nascimento dos conceitos ou da organização das idéias a partir de algo empiricamente dado para o campo teórico, o que leva ao desenvolvimento de teorias somente relacionadas ao conceito. E, também, à relação entre o conceito e a linguagem. Veremos agora a relação do conceito de conjunto, contido na concepção iterativa, com os axiomas da teoria de conjuntos.

2.6. Justificação Intrínseca e Extrínseca dos Axiomas da Teoria de Conjuntos

A utilização da justificação de axiomas aparece relacionada à analiticidade em Gödel. E é algo que é necessário porque há casos na matemática em que as sentenças não são demonstradas a partir dos axiomas ou ainda os axiomas são indemonstráveis. Sistemas axiomáticos que possuem sentenças indecidíveis são aqueles que não são completos. Quando um sistema axiomático é incompleto, e que possui sentenças indecidíveis e não simplesmente indecidíveis no sistema que está sendo tratado, ou seja, quando há uma sentença não demonstrada em qualquer sistema, isso exibe a inexauribilidade na matemática, ou seja, a incapacidade de realizar demonstrações de todas as sentenças verdadeiras. A respeito disso, escreve Gödel:

> O fenômeno da inexauribilidade da matemática, claro, sempre está presente de alguma forma, não importa o ponto de vista que é tratado. Então, eu devo explicar isso do ponto de vista mais simples e natural, que toma a matemática como ela é, sem cortá-la por qualquer criticismo. Por esse ponto de vista, toda a matemática é redutível a teoria abstrata de conjuntos. (...) Então o problema posto é o da axiomatização da teoria de conjuntos. Agora, se alguém ataca esse problema, o resultado é um pouco diferente pelo que alguém deveria esperar. Ao invés de terminar com um número finito de axiomas, como na geometria, alguém está se deparando com uma série finita de axiomas, que pode ser estendida mais e mais, sem qualquer fim sendo visível e, aparentemente, sem qualquer possibilidade de compreender todos esses axiomas numa lei finita produzindo-os. (Gödel (*1951, pág. 2)).

Admitimos aqui que a realidade dos objetos denominados conjuntos é expressa na concepção iterativa e que o conceito de conjunto também é expresso nessa concepção a partir do processo de formação dos conjuntos como foi descrito acima. As leis mais fundamentais da teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel são representadas por axiomas. Outros fatos com respeito aos conjuntos são expressos por meio de teoremas. Esses são os componentes básicos de uma teoria matemática, que tem como finalidade básica a construção de demonstrações.

A prática da demonstração de proposições através de sistemas formais é muito importante. Na sistematização de uma determinada área da matemática – de uma teoria – é obtido um sistema axiomático, e, por conseguinte, um sistema formal utilizado para essas demonstrações. Portanto, a noção de sistema formal depende da noção de sistema axiomático.

Gödel acredita que os axiomas precisam ser um tipo de proposição que, além de ser sem demonstração, precisam ser evidentes e corretas. Cf. Gödel (*1951). A discussão em torno da sistematização de teorias matemáticas envolve entender como que os matemáticos chegaram aos axiomas da teoria que então está sendo sistematizada. Esse processo é a justificação dos axiomas de uma teoria, e eles podem ser justificados de várias formas. Cf. Maddy (1988). Na justificação dos axiomas, uma pergunta importante diz respeito à como que os matemáticos crêem num determinado axioma. Esse caso é como se fosse uma crença justificada e não envolve necessariamente uma demonstração. Esse tipo de explicação está contido na análise do conceito de conjunto. Esse é o exemplo da justificação intrínseca.

Com respeito a esse tipo de problema, Gödel (*1951) acredita que a justificação dos axiomas da teoria de conjuntos encontra-se numa situação extremamente insatisfatória. Isso ocorre quando é atribuído sentido aos símbolos dos axiomas. O problema deixa e existir quando os axiomas são considerados somente como um jogo de símbolos.

Nesse sentido, nos encontramos em duas situações diferentes com respeito à apreensão das teorias na matemática e que envolvem o processo de justificação. As formas que são realizadas as justificações dos axiomas de um sistema axiomático são denominadas intrínsecas e extrínsecas.

Os modos de justificações intrínsecas que afirmam que um axioma é verdadeiro se aproximam do realismo conceitual, porque a crença depende do sentido do termo que está sendo empregado na justificação ou da analiticidade. Se o termo lingüístico é uma proposição, os conceitos ou idéias ali representados de uma forma articulados são esclarecidos através do sentido da proposição. A investigação pelo sentido por traz de um conceito ou idéia envolvido na proposição se dá por análise conceitual.

Gödel (*1951) estabelece, com respeito aos axiomas que não podem ter a demonstração estabelecida, que ou são implicados como diretamente verdadeiros ou são aceitos como hipóteses físicas que possuem aplicações bem sucedidas:

> Para esses axiomas não existe nenhuma fundamentação racional (e não meramente prática) exceto se ou que eles podem diretamente ser implicados ser verdadeiros (ou proposições implicam eles) (pertencendo ao sentido dos termos ou por uma intuição dos objetos caindo sob eles), ou que eles são assumidos (como hipóteses físicas) sobre as bases de argumentos indutivos, e.g., o sucesso deles nas aplicações. GÖDEL (*1943/9, pág. 37).

E com respeito à fundamentação desses axiomas, escreve Gödel:

> Pois esse conteúdo, de acordo com o platonismo, consiste em relações entre conceitos ou outros objetos abstratos que subsistem independentemente de nossas sensações, porém eles são percebidos num tipo especial de experiência e também em conjunção com certas leis da natureza universalmente aceitas (...) eles ainda têm conseqüências verificáveis pela percepção dos sentidos (*Idem*).

Na classificação das justificações entre intrínsecas e extrínsecas de Maddy, as justificações intrínsecas estão relacionadas à análise conceitual. A análise do sentido do termo ou conceito “conjunto” ou ainda “conjunto infinito” está relacionada à justificação intrínseca. A análise da operação “conjunto de” introduz o conceito específico de conjunto contido na hierarquia cumulativa.

As justificações extrínsecas não se relacionam à análise conceitual, são como as hipóteses indutivas da primeira citação da página anterior. As justificações extrínsecas são pragmáticas, o matemático crê que um determinado axioma é verdadeiro porque o axioma introduzido foi capaz de demonstrar um teorema ou unir várias demonstrações numa única e simples demonstração. Nesse caso, o axioma é introduzido de modo análogo que é introduzido uma definição explícita. A finalidade desse tipo de axioma justificado extrinsecamente é obter sucesso nas demonstrações.

Como temos visto, segundo o platonismo de Gödel, os axiomas da teoria de conjuntos são decorrência da análise do conceito de conjunto contido na concepção iterativa a partir da estrutura contida nessa concepção. Mas o conceito de conjunto nunca será descrito de modo completo, é o que ocorre, por exemplo, com a hipótese do contínuo de Cantor, que não é demonstrada por esses axiomas, mas uma boa teoria de conjuntos que se utilize do conceito de conjunto contido da concepção iterativa deve ter ferramentas necessárias para a descoberta de novos axiomas e assim demonstrar sentenças indecidíveis. Por isso, o conceito de conjunto, diferentemente de um conceito totalmente descrito de modo exato, ou seja, exaurido numa teoria, nunca possui uma descrição completa por meio de uma linguagem, porque sempre novos axiomas podem surgir com respeito a trechos não explorados da hierarquia cumulativa.

A concepção de que o conceito de conjunto não é totalmente descrito por uma linguagem é explicada em Gödel (1947) e em Gödel (1974). À medida que a aproximação do conceito é possível, é possível analisar logicamente as estruturas contidas no conteúdo, e daí a possibilidade de produção de uma axiomatização. Mas como o conceito transfinito está em hierarquia cumulativa, nunca será descrito completamente, haverá sempre um estágio posterior de alcance ainda maior nessa estrutura. Esses conjuntos são acessados somente através de experiências de pensamento e, portanto, são abstratos. Por isso, afastados da experiência sensível.

O platonismo admite que há fatos a serem descobertos fora da experiência sensível. Alguns desses fatos não são demonstrados por teoremas de uma teoria matemática. Estamos chamando de fatos as relações estruturais contidas nos estágios de hierarquia da concepção iterativa. Tais problemas se tornariam um teorema da matemática, se não for aceito como uma solução adicionar uma sentença indemonstrável como um axioma da teoria. No caso de Gödel, a solução desses problemas envolve a intuição de novos fatos básicos com respeito às teorias matemáticas com o uso da analiticidade, como temos mostrado para os axiomas de ZF.

Para Gödel, há ainda a possibilidade de existência de justificações extrínsecas para os axiomas da teoria de conjuntos. Um caso desses é do axioma da escolha. É um tipo de axioma que é introduzido somente para facilitar demonstrações matemáticas, como por exemplo, unir várias demonstrações numa única demonstração. Vamos ver, de modo mais exato, no que consiste uma justificação extrínseca os axiomas da teoria de conjuntos no próximo capítulo. Antes, teremos que passar pelas críticas ao platonismo ontológico de Gödel.

2.7. Considerações Finais: Críticas ao Platonismo Ontológico

O problema de um platonismo na matemática como o de Gödel é o conhecimento de objetos não contidos nem no espaço e nem no tempo e a crença de uma verdade justificada por meio de contato com esses objetos. Um lado desse problema, ainda, diz respeito à existência de objetos que representam entidades abstratas infinitas e completadas, que não podem influenciar causalmente no nosso conhecimento e nem nos acontecimentos físicos que são as bases de nossas crenças sobre o mundo. Dado que não podemos ter acesso ou contato com esses objetos, ainda mais se forem considerados infinitos, então a crença nesses objetos está seriamente abalada.

A crítica feita, com respeito à existência desses objetos, é que nosso conhecimento se dá somente em relação a coisas que nos influenciam causalmente, e que acreditamos, numa proposição verdadeira, porque há uma influência ou relação causal entre a coisa e o nosso modo de conhecer. Uma crença justificada como verdadeira a respeito de um estado de coisas ou objeto depende da percepção do objeto. Essa é uma crítica que tem como viés uma teoria causal do conhecimento, que está elaborada no texto de Benacerraf (1973).

Uma posição crítica em relação à intuição matemática está relacionada ao *apriorismo* desse tipo de acesso epistêmico, o problema está no dito de Gödel de que "*os axiomas se forçam sobre nós como sendo verdadeiros*" (Gödel, (1947 pág. 271)). Se esses axiomas estão sendo apreendidos por uma intuição matemática a priori com respeito à estrutura da concepção iterativa, então estamos caracterizando aqui um infalibilismo nos aspectos *a priori*.

O problema, nesse caso, é que as crenças adquiridas e justificadas por meios não demonstrativos podem ser falsas (Cf. Jeshion (2000)). Também, a intuição matemática está envolvida no problema da conexão causal entre a realidade matemática e os mecanismos de crença e aceitação de uma verdade pelo sujeito conhecedor matemático. Steiner (1973) mostra que uma conexão causal é impossível no platonismo porque esses fatos abstratos são *"incapazes de influenciar o curso dos eventos."* (*Op. Cit.* pág. 61). Assim, a matemática que trata de supostos objetos abstratos não possui uma boa justificação se pensarmos que as crenças em sentenças que mantemos como verdadeiras dependem de algo que não está nem no espaço e nem no tempo.

Para Benacerraff, uma epistemologia com respeito aos objetos matemáticos deve levar em conta como somos levados a acreditar que uma teoria matemática é verdadeira. Gödel afirma que os axiomas da matemática se forçam sobre nós como sendo verdadeiros. Isso se dá pelo fato de não ser possível acreditar que um determinado axioma matemático é falso.

Naturalmente que essa convicção de Gödel se baseia numa justificação da verdade dos axiomas das teorias matemáticas e que é um meio extremamente duvidoso para se obter uma justificação desse tipo. Mas o problema por trás de uma justificação como essa é que os objetos matemáticos abstratos estão num lugar isolado do mundo físico em que vivemos e levamos a nossa vida. Se os objetos matemáticos não estão presentes como entidades físicas, então não afetam o curso das nossas vidas e nem as nossas crenças.

Uma crença justificada como verdadeira deve ter uma teoria da percepção convincente por trás. O platonismo de Gödel não possui um tipo de justificação de crenças convincentes em relação a um determinado axioma de uma teoria matemática porque objetos matemáticos abstratos contidos fora do espaço e do tempo não são capazes de nos afetar.

Portanto, o platonismo na matemática de Gödel falha na sua suposição de que as crenças de que um axioma se força sobre nós como sendo verdadeiros. Com essas críticas a respeito do realismo conceitual, o problema consiste em conciliar a visão de Gödel com a teoria causal do conhecimento, onde o conhecedor tem contato com o objeto que está conhecendo. Uma vez realizado isso, será possível pensar de que modo o conceito se relaciona conosco, já que somos nós que os criamos e somos nós que os utilizamos.

Mas dizer que os axiomas se forçam sobre nós como sendo verdadeiros, sendo que eles são indemonstráveis, e sem admitir qualquer compromisso ontológico, o que temos é somente um modo de dizer que esses axiomas não são demonstráveis e nada mais, como é o caso dos axiomas da teoria de conjuntos, que não podem ser demonstrados e somente aceitos como verdadeiros, já que uma teoria sintática e semântica da linguagem dependem da teoria de conjuntos. Isso pode ocorrer mesmo com as motivações não-construtivas da teoria discutidas no primeiro capítulo. Iremos explorar a justificação extrínseca dos axiomas no próximo capítulo.

CAPÍTULO 3. Metodologia Matemática Naturalista

3.1. Introdução

Neste capítulo, vamos descrever o desenvolvimento mais recente do naturalismo na matemática de Maddy, especialmente o naturalismo contido em Maddy (1997) e Maddy (2007). Mostraremos como Maddy parte de um mundo KF-estruturado (Kant-Frege). O mundo KF-estruturado possui uma estrutura lógica que segue os princípios kantianos de obtenção de conhecimento do mundo através de um mecanismo cognitivo, mas que os conceitos podem ser substituídos por predicados da lógica clássica, assim como ocorre na lógica de Frege. As relações dessa estrutura mostram o modo pelo qual conhecemos os objetos, atribuímos propriedades a eles no mundo e relacionamos aos fatos. O objetivo dessa descrição é chegar à metodologia matemática de meios e fins criada por Maddy, resultante da limitação da estrutura de um mundo KF. O mundo KF-estruturado não consegue dar conta das idealizações matemáticas, como a estruturação de conjuntos infinitos. Nessa metodologia matemática, vamos aplicar os textos de Maddy com respeito à justificação dos axiomas de modo a confirmá-la na prática matemática ordinária, privilegiando a justificação extrínseca. Mas primeiro, vamos descrever como elaboramos conhecimento matemático antes mesmo de adquirirmos competências lingüísticas, através de experimentos vindos da psicologia cognitiva estudados por Maddy.

3.2. A lógica Rudimentar de um Mundo KF-estruturado

Vamos descrever aqui uma lógica rudimentar, portanto, não é uma lógica puramente formal, do mundo no qual a filosofia segunda acredita que habitamos. A filosofia segunda é a própria filosofia naturalista. Ela aparece em Maddy (2007). A filosofia segunda surge em contraposição à filosofia primeira de Descartes.

Para Descartes, a filosofia estava antes da ciência em termos de prioridade porque a filosofia postulava o método científico e fundamentava toda a ciência. A filosofia segunda inverte a ordem, porque é uma filosofia nascida da ciência e na filosofia segunda, a ciência procura seus próprios fundamentos. Seu discurso metodológico é científico e, portanto, a filosofia deve vir depois que a ciência está acabada e sem apelos ao ceticismo ou à metafísica. A filosofia segunda é uma nativa da linguagem científica porque surge dentro do meio científico.

A filosofia segunda não é uma filosofia cética e nem está estruturada numa dúvida metódica. Um tipo de ceticismo pode ser o de não acreditar que existem objetos. Ora, isso não ocorre à filosofia segunda porque, pelos estudos recentes da psicologia cognitiva, está provado que desde criança somos capazes de identificar e classificar os objetos ao nosso redor. Portanto, não há dúvida metódica, como em Descartes, a respeito da não existência dos objetos ou mesmo do mundo ao nosso redor.

Por ser naturalista, a filosofia segunda está ligada às raízes desse pensamento. No naturalismo, a força do entendimento humano, e a natureza das idéias, estão baseadas nas operações de raciocínio. Na lógica elas possuem o seu fim. A lógica introduz os princípios e operações da razão e a natureza das idéias.

Nossa conexão com o mundo deve resultar que acreditamos em objetos e também acreditamos em verdades lógico-matemáticas; e tudo isso a partir da nossa maquinaria cognitiva adquirida através da pressão evolucionária. Isso indicará como funciona o nosso estado de crenças quando estamos em contato com o mundo e, principalmente, a conexão entre esses estados de crença no mundo e a linguagem.

A filosofia segunda parte de uma "regra" metodológica para a investigação. Essa regra consiste em considerar que, por sermos humanos e vivermos no mundo, portanto, somos parte do mundo. Se existe uma lógica subjacente no funcionamento do mundo, então devemos "funcionar" de acordo com essa lógica subjacente porque somos configurados de acordo com esse mundo. Portanto, seres humanos acreditam em verdades lógicas porque seus mecanismos cognitivos permitem representar aspectos do mundo. Nas palavras de Maddy, *"(...) humanos são desse modo porque o mundo é desse modo."* Maddy (2007, pág. 228).

O mundo que Maddy está tratando é o mundo KF-estruturado (Kant-Frege) por uma lógica rudimentar. Enquanto uma estrutura kantiana, esse mundo participa também da revolução copernicana defendida por Kant. Para Kant, não são os objetos que regulam o nosso entendimento, mas o nosso entendimento que regula o conhecimento dos objetos. Isso se dá porque possuímos em nossa cognição os conceitos, que se relacionam com os objetos e produzem o conhecimento no mundo. E também, não ultrapassamos os limites da experiência sensível para a geração de conhecimento. Ao mesmo tempo, ocorre que a lógica que usamos para construir o nosso conhecimento é a lógica subjacente ao mundo KF-estruturado.

A contribuição de Frege para o mundo KF-estruturado está na introdução da notação da lógica moderna em detrimento da notação aristotélica. Enquanto que na lógica aristotélica era privilegiada a estrutura gramatical entre sujeito e predicado, Frege introduz a noção de conceito e objeto sendo que esse primeiro pode ser um predicado relacional para dois ou mais objetos.

Vamos descrever aqui uma linguagem em que a lógica rudimentar do mundo KF-estruturado pode ser expressa. *a*, *b*, *c*, ... representam objetos. *x*, *y*, *z*, ... são variáveis. P, Q, ... são propriedades. R, S, ... são relações. &, v, ¬, ... são operadores lógicos. *p, q, r,* ... são proposições. Além disso, temos os quantificadores existencial e universal. Temos também relações de conseqüência entre fatos, ou seja, relações de causa e efeito. Em alguns casos, a relação entre o objeto e o predicado é indeterminada, ou seja, além do objeto poder ser P ou ¬P, pode ocorrer alguma vagueza representada por indetP, em que não sabemos se o objeto tem ou não tem a propriedade[17]. Nesse caso, há um *gap* de valor de verdade. Os operadores lógicos estão regidos pelos seguintes estados possíveis:

Negação:

$\neg p$ se p é falso. Caso contrário, indet.p.

Conjunção:

Se p é indeterminado e q é indeterminado, então $(p\&q)$ é indeterminado. Se p e q são verdadeiros, então $(p\&q)$ é verdadeira. Em outro caso, a conjunção é falsa.

Disjunção:

$\neg(p\mathrm{v}q)$ se ambos são falsos.

Indet$(p\mathrm{v}q)$ se ambos são indeterminados. Em outro caso, são verdadeiros.

Condicional:

$\neg(p\rightarrow q)$ Se p é verdadeiro ou indeterminado e q é falso; Indet$(p\rightarrow q)$ se Indet(q); caso contrário, $(p\rightarrow q)$.

Caso geral do quantificador universal:

Quando todos os objetos caem sob um predicado P, então $(x)\mathrm{P}x$ será verdadeiro. Se, pelo menos um dos objetos é indeterminado sob o predicado P, ou seja, indetP, então indet$(x)\mathrm{P}x$, em outra situação, a quantificação será falsa.

Caso geral do quantificador existencial:

Quando pelo menos um objeto cai sob o predicado P, então $(\mathrm{E}x)\mathrm{P}x$ será verdadeiro. Quando pelo menos um objeto cai sob o predicado P, e outro objeto é indeterminado, então

[17] Acontece aqui um problema epistêmico: Não é possível estabelecer de modo exato a extensão de uma propriedade aplicada a um objeto.

$(Ex)Px$ será verdadeiro. Quando todos os objetos são indet-P, então, indet-$(Ex)Px$. Para qualquer outra situação, $\neg(Ex)Px$.

Regra de inferência:

De *p*; e se *p* então *q*; infira *q*.

No mundo KF-estruturado, algumas propriedades não podem ser aplicadas aos objetos de modo exato, porque o mundo é vago, de acordo com os modos que elaboramos conhecimento sobre o mundo. Alguns eventos no mundo estão em relação de conseqüência uns com os outros. Por essas considerações, a lógica rudimentar apresentada aqui é verdadeira para o mundo porque o mundo é um mundo KF-estruturado. Segundo Maddy, os seres humanos acreditam nas simples verdades da lógica rudimentar porque seus mecanismos cognitivos mais primitivos permitem representar o mundo KF-estruturado. E os mecanismos cognitivos são assim porque eles estão no mundo KF.

3.3. Os Mecanismos Cognitivos e o Mundo KF-estruturado

Partimos, agora, de algumas afirmações para relacionarmos o mundo KF-estruturado com a nossa maquinaria cognitiva. (1) O mundo possui vários objetos de tamanho médio. (2) *Hipótese empírica*: o mundo consiste de objetos coerentes que se movem como unidades ao longo do espaço e do tempo. (3) Esses objetos contidos no mundo macroscópico possuem propriedades e relações porque são distinguíveis entre si. (4) Os objetos estão em relações de dependência porque estão em relações causais entre si. (5) O mundo não possui uma delimitação exata, por isso a indeterminâcia. (6) Há indeterminância tanto no mundo quanto na linguagem que é usada para falar dele.

Definimos aqui um universo bem delimitado do mundo KF-estruturado, que é o mundo dos objetos de tamanho médio visíveis a olho nu. Átomos não fazem parte do mundo KF-estruturado nem objetos muito distantes. Agora, vamos explorar o modo pelo qual a cognição se relaciona com a estrutura lógica subjacente ao mundo KF. Essa exploração de estudos sobre psicologia cognitiva tem como intenção mostrar que podemos aprender matemática finita porque nossas estruturas cognitivas são configuradas para isso. Porém, vamos ver mais a frente que a psicologia cognitiva não dá conta de explicar como é possível elaborar matemática infinita.

3.3.1. Os Objetos

Devemos mostrar como os adultos chegam à noção de um objeto. Maddy parte para uma análise dos estudos de oclusão de objetos do campo visual de crianças. Esses estudos são recentes e analisam a habituação e o olhar preferencial das crianças. Um adulto ou criança está habituado a um estímulo quando a resposta a um determinado estímulo possui a intensidade diminuída. O olhar preferencial está ligado à habituação, pois ele depende da intensidade do estímulo, o olhar preferencial é direcionado àquilo que mais é estimulado no campo visual.

Um exemplo disso ocorre quando uma criança olha para um objeto e passa muito tempo apreciando esse objeto. À medida que o objeto é apresentado à criança, o tempo de apreciação desse objeto diminui. Daí, um estímulo novo exige um tempo maior no olhar e, portanto, da habituação. Maddy, descreve experimentos realizados em crianças por Spelke et al. (1985). Num experimento com crianças de 15 meses de idade, uma tela é colocada em um eixo que a faz girar até 180^{o} como uma porta fixada numa dobradiça.

Quando a tela é girada a 180^{o}, uma pequena caixa aparece no local onde estava a tela anteriormente. Quando a tela volta à sua posição original, espera-se que ela não descreva novamente um arco de 180^{o}, uma vez que o objeto, pelo seu volume, deverá impedir a tela de voltar à sua posição original. Mas a tela descreve o movimento, completando o arco de 180°. Isso faz com que a criança tenha um tempo de olhar para a situação maior, já que a situação parece inconsistente com o fato de haver um objeto ali e ela não está habituada com isso.

Com isso, Maddy conclui que a criança consegue ver o objeto como uma unidade individual estável, separando a caixa como uma unidade individual do resto dos objetos presentes. Isso constitui o fenômeno psicológico da inidividuação do objeto. Assim, a criança consegue separar um objeto do outro.

Ao citar Spelke et al. (1998)[18], Maddy afirma que há uma classe de objetos chamado Spelke, pela característica de individuação desses objetos pelas crianças. Esses objetos são os que estão presentes no mundo KF-estrututrado. Uma criança percebe o limite de um objeto em relação a outro porque, ou vê um *gap* entre um objeto e outro no espaço ou os objetos possuem cores ou texturas diferentes, ou realizam movimentos diferentes. Algumas vezes elas podem inclusive ver a diferença entre dois objetos contíguos e estacionários.

Crianças percebem objetos Spelke como uma região da matéria conectada e limitada, mesmo que esteja em movimento. A identificação, que é o reconhecimento de que um objeto é o mesmo após a sua oclusão e aparição no campo visual, e precedem o uso da linguagem. Na idade adulta, esse sistema persiste. Porém, adultos possuem dois sistemas de individuação do objeto. Um sistema chamado *análogo*, ou um sistema que identifica multiplicidades e realiza contagens, que será explicado mais a frente, e um sistema primitivo, o sistema buscador de objetos, que identifica os objetos Spelke. Portanto, o sistema primitivo é o sistema infantil de identificação dos objetos Spelke.

[18] Observação: As referências completas dos artigos citados nesse capítulo, encontram-se em Maddy, (2007), Maddy (1988) e em Maddy (1997).

Veremos que relação esses sistemas mantêm entre si para gerarem uma aritmética rudimentar, na seção 3.5 desse capítulo.

3.3.2. Propriedades, Relações e Conseqüências

Reconhecer propriedades como ‘é pato’, ‘é bola’, para Maddy, são competências infantis. Para comprovar isso, Maddy cita um estudo realizado em crianças em fase de habituação com o objeto. Nesse segundo experimento, realizado por Cohen et al. (1983), foram utilizadas crianças de 7 meses. Foi mostrado a elas repetidamente uma série de figuras de animais. Num grupo, foi mostrada a foto de um animal particular. Outro grupo viu diferentes animais por fotos repetidamente. Nesse caso, todos sofreram a habituação por meio das fotos. Depois de sofrerem a habituação, mostraram a elas duas figuras distintas. Uma do animal e, outra, de um chocalho. O primeiro grupo olhou de modo igual para ambas as fotos. Nesse caso, discriminaram facilmente o animal visto do objeto apresentado na outra figura. Isso ocorre pelo padrão visual dos objetos.

O segundo grupo se identificou mais com a figura do chocalho, o que mostra que as crianças são capazes de diferenciar e classificar objetos. Crianças novas já apresentam a capacidade de coletar em classes os objetos de acordo com o padrão visual, conclui Maddy. Além desses experimentos, Maddy cita outros que confirmam que crianças conseguem realizar combinações de propriedades como a conjunção e a disjunção. Por exemplo, essas propriedades podem ser úteis para as crianças diferenciarem homens de mulheres.

A conjunção é uma combinação que crianças de 7 a 10 meses conseguem fazer, assim como criar padrões diversos e perceber que algo cai ou não numa determinada classe de objetos. Por exemplo, ao ver que algo é um cavalo, esse objeto deverá ter quatro patas e uma crina. Ou ainda, o que tem quatro patas pode ser ou um cavalo ou um elefante. E, por fim, crianças de 10 meses, pelos experimentos citados por Maddy, percebem relações causais no mundo por meio da contigüidade de eventos no tempo. Portanto, o mundo-KF é detectado e representado cedo por crianças com o desenvolvimento normal sem treino ou experiência excessiva; e sem o uso da linguagem escrita.

Maddy conclui que:

> (1') a lógica rudimentar é verdadeira no mundo à medida que o mundo é um mundo-KF, em muitas mas não em todas as considerações o é, (2') seres humanos acreditam em verdades simples da lógica rudimentar porque seus mecanismos cognitivos mais primitivos permitam à elas detectar e representar estruturas-KF no mundo, e (3') os mecanismos cognitivos primitivos dos seres humanos são desse modo porque vivemos num mundo extensamente KF e interagem quase que exclusivamente com essas estruturas KF. Maddy (2007, Pág. 271).

Como essa estrutura-KF é inata a nós, ela nos é concedida *a priori*. E ao mesmo tempo em que é empírica, porque podemos detectá-la facilmente, ela não é empírica porque somos parte dela. Nossas crenças em verdades lógicas dependem dessa estrutura. A lógica rudimentar é parte de nossas habilidades de perceber e é confirmada empiricamente. Num sentido, essa lógica rudimentar é também contingente, já que está sujeita à revisão. Devemos ressaltar, ainda, que a lógica rudimentar é apenas uma estrutura de representação do funcionamento do mundo que seleciona parte do mundo para tentar descrever.

3.4. Aritmética num Mundo KF-estruturado e a Limitação dessa Estrutura

Maddy mostra que alguns enunciados da aritmética são válidos na lógica rudimentar, mas não todos. Da proposição de que há duas maçãs na mesa e mais duas laranjas na mesma mesa, é possível inferir que há quatro objetos na mesa sendo duas maçãs e duas laranjas. Multiplicações entre números inteiros e exponenciações também são válidas na lógica do mundo KF-estruturado, segundo Maddy, porque essas operações podem ser reduzidas a relações e ser inferidas dessa lógica. Portanto, a adição e a multiplicação entre quantidades finitas fazem parte do mundo KF-estruturado.

Se essas operações são realizadas numa lógica do mundo KF-estruturado, então a cognição pode também ser estendida à aritmética elementar. Numa experiência feita por Wynn (1992), com crianças de 5 meses, havia uma tela que abaixava na frente de um objeto escondendo-o do campo visual a criança. Quando a tela levantou, havia dois objetos no campo visual da criança e, quando a tela abaixou e levantou novamente, havia somente um objeto no campo visual. Nesse caso, as crianças olharam mais demoradamente para o cenário montado depois que um objeto ficou oculto ao seu campo visual do que quando havia dois objetos no cenário. Isso ocorreu porque eles esperavam ver dois objetos.

Maddy conclui que o objeto sumindo e aparecendo no campo visual estimula o sistema de busca do objeto pela criança, ao mesmo tempo em que estimula a manipulação de quantidades de objetos que aparecem em seu campo visual. Isso indica uma disposição infantil à contagem. Porém, o sistema de procura de objetos Spelke por crianças permite a elas manter a busca de uma quantidade pequena de objetos e que possuem formas concisas; ele funciona com, no máximo, três objetos.

Unido a esse sistema, é acionado um sistema cujo funcionamento é como se fosse de um modelo acumulador de contagem. Nesse sistema, o cérebro realiza um ciclo determinado de estímulos cumulativos que depois é liberado, como se uma válvula fosse aberta, representando o fim de uma contagem. Esse sistema chamado de *análogo* é responsável pela numeração rudimentar, enquanto que o sistema de busca de objetos leva em conta somente a forma, o tamanho, a textura, etc. O sistema de busca de objetos, portanto, é responsável pela representação da forma dos objetos, enquanto que o sistema *análogo* é responsável pela habilidade de discriminar valores cardinais de modo mais eficiente que o sistema buscador de objetos.

Para passar desses dois sistemas rudimentares para um sistema aritmético, primeiro, há a necessidade de passar do sistema de busca de objetos para o sistema análogo e, assim, atingir uma aritmética rudimentar. Spelke fala como que as crianças transitam do sistema de busca para o sistema análogo. As crianças relacionam a palavra um para o caso em que só há um objeto em cena. Do mesmo modo, elas associam as palavras numéricas com as cardinalidades do sistema análogo, ou seja, elas aprendem que as palavras que representam números podem ser aplicadas no caso em que há um conjunto em cena.

O próximo passo consiste em aprender sobre uma cardinalidade cada vez maior. Algo como associar a palavra dois somente quando há dois objetos em cena, a palavra três quando há três objetos em cena e assim por diante. Nesse ponto, há uma conexão entre o sistema de busca de objetos e a numeração. No processo de numeração estão reunidas as palavras que representam números, o sistema análogo e processos cognitivos aliados.

Realizada a conexão, há um procedimento de indução. As crianças facilmente movem de um a dois, de dois a três, de três a quatro e assim por diante. O processo de generalização consiste na descoberta de que há uma conexão entre a palavra que representa o número com o processo de selecionar mais um objeto para o conjunto, que leva a uma cardinalidade maior que o conjunto anterior e nesse novo conjunto criado, a palavra precedente não se associa mais.

Há uma combinação das representações entre a contagem e a palavra número, o que gera um novo sistema de conhecimento através das representações numéricas. Esse processo para Maddy é cultural:

> Então é um artefato lingüístico e cultural – o sistema de palavras de números e o procedimento de contar – que permite à criança combinar para ela dois sistemas representacionais diferentes para formar a representação precisa de valores numéricos. Maddy (2007, pág. 325 – 326).

O sistema de busca de objetos e o sistema *análogo* continuam existindo na idade adulta. Porém, para o adulto, a linguagem possui papel preponderante na manipulação de números grandes. O que nos resta agora é concluir o raciocínio de Maddy a respeito de cardinalidades infinitas. Vejamos o que ela própria diz a respeito:

> A descoberta chave da criança é que mover um passo além das palavras de números corresponde a adicionar mais um objeto a uma matriz, a idéia, em outras palavras, da função sucessor. Nesse ponto, as crianças sempre se engajam em estender recitações da seqüência de palavras de números, desenvolvendo o sentido de que novas palavras podem sempre ser geradas, e é uma convicção lingüística que aparentemente origina a figura familiar da seqüência de números naturais: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... Nem o buscador lógico de objetos nem o mecanismo análogo de aproximação – isto é, nenhum dos detectores desenvolvidos pelas pressões evolucionárias e/ou experiências prematuras – incluem ainda implicitamente a idéia de extensão indefinida. O '...' aparentemente desenvolvido pelos resultados não formam qualquer insight no mundo, mas da convicção que nós nunca vamos esgotar as palavras de números; essa idéia matemática sem fundamento parece ser essencialmente lingüística – nem lógica, nem empírica. (Maddy (2007, pág. 327)).

Uma parte da teoria dos números é representada pela lógica do mundo KF-estruturado. Como temos visto, essa parte diz respeito às relações finitas dos números inteiros. Porém, temos todo o restante da aritmética que não pode ser estruturada nesse mundo porque a aritmética é um discurso que diz respeito a *todos* os números naturais e, portanto, que diz respeito a um conjunto infinito. A teoria dos números é a investigação matemática a respeito da seqüência dos números naturais, é o modelo padrão da aritmética e incorpora a idéia lingüística de '...'.

Na teoria dos números, estamos no campo da linguagem. E nessa linguagem, há a substituição da linguagem vaga vinda de uma lógica rudimentar por *"(...) um modelo idealizado de palavras e leis recursivas que deve de fato gerar longas expressões indefinidas, mas que o faz somente em virtude da matematização (...)".* Maddy (2007, pág. 327).

Como os dois detectores não apreendem a estrutura de '...' portanto, ele não pode existir em nenhum lugar do mundo KF-estruturado. A idéia de '...' é uma idealização matemática. Por ser uma idealização, não afeta as suas aplicações idealizadas no mundo KF-estruturado. A matemática vai além da lógica rudimentar e da aritmética ratificada pela lógica do mundo KF-estruturado e, portanto, não pode ser decorrência do mundo conhecido.

A lógica rudimentar não é a lógica clássica. A passagem para a lógica clássica se dá por um processo de idealização. Ao eliminar a vagueza e os *gaps* de valores de verdade, o que temos é a lógica clássica e todas as inferências e equivalências dessa lógica sem restrições. Assim, toda tautologia clássica será válida. Essa ferramenta também é utilizada na modelagem matemática dos números inteiros e teoria de conjuntos.

Temos aqui uma caracterização do pensamento matemático não ligado à estrutura do mundo em que vivemos e, como Maddy quer liberar a matemática de qualquer pensamento metafísico, então a matemática possui certa liberdade ontológica e de aplicação. Escreve Maddy que *"os matemáticos se libertaram da necessidade de aplicação, afirmando a liberdade deles de perseguir seus próprios objetivos, ao investigar quaisquer estruturas matemáticas que eles achem frutíferas e interessantes."* (Maddy (2007, pág. 345)).

Agora, podemos explorar o que Maddy tem a dizer sobre a existência ou não de objetos matemáticos abstratos. Maddy considera a metafísica uma mera "distração" do verdadeiro trabalho matemático. É um adorno que pode ser abandonado. Isso acontece com o platonismo de Gödel. A situação do platonista ontológico é tão dramática que, ao mesmo tempo em que ele postula entidades matemáticas abstratas de vários tipos, ele não consegue descrever como é que acessamos essas entidades com um único exemplo de um matemático que conseguiu, na prática, ter acesso a entidades matemáticas abstratas. Essa situação é comparada com aquela em que a astrologia descreve quando há anjos que intervêm a favor de nosso destino, mas que não influenciam de maneira alguma causalmente nas nossas vidas práticas.

Não há objetos abstratos em matemática, do mesmo modo que não podemos confiar nos anjos para trazer a pessoa amada de volta porque anjos não têm existência comprovada. Para ser comprovado que um anjo existe alguém deveria ser capaz de ver e sentir um anjo. Como isso não ocorre então a existência de um anjo não é comprovada. Da mesma maneira, para comprovar que um objeto matemático existe, é necessário acessá-lo através dos sentidos, porém, essa situação não ocorre e, portanto, não podemos comprovar a existência de um objeto matemático. Para a filosofia segunda, o estudo dessas entidades tem o seu valor, mas não como um método matemático, e sim como um objeto de estudo da antropologia, psicologia, da biologia ou da ciência da religião, por exemplo. Segundo Maddy, a metodologia estritamente matemática se baseia nos meios e fins, esses são os métodos efetivos da matemática concreta.

3.5. A Filosofia Naturalista da Matemática

Vamos apresentar aqui algumas posições da filosofia segunda a respeito da filosofia da matemática. A filosofia segunda parte da idéia de que há objetos no mundo, como mostramos acima. Portanto, a filosofia segunda é o ponto de partida do naturalismo.

Ao contrário da filosofia primeira, a filosofia segunda propõe que acreditamos nos objetos, estamos no mundo das coisas e nos estruturamos cognitivamente nesse mundo. Na filosofia segunda, não utilizamos de um método filosófico anterior à ciência. Na verdade, é a ciência que vai nos oferecer as bases para a nossa filosofia. Esse é o principal motivo pelo qual chamamos o naturalismo de Maddy de filosofia segunda.

A filosofia segunda rejeita o platonismo ontológico. Retiradas as características metafísicas e epistemológicas do pensamento matemático, somente resta à filosofia segunda a metodologia matemática para basear a sua filosofia da matemática. Nessa metodologia, a filosofia segunda transita entre duas posições. Essas posições metodológicas são o realismo fraco e o arealismo.

Temos visto que ao partir de um mundo KF-estruturado, não é possível dizer que o mundo possui estruturas infinitas. Se a teoria dos números possui em sua totalidade um objeto de estudo, por exemplo, um conjunto infinito regido pela função sucessor, ele não pode ser encontrado no mundo físico. Introduzido o '...' ou simplesmente o infinito, estamos no campo a matemática abstrata.

Para Maddy, questões de ontologia e epistemologia são irrelevantes para a matemática. Como a metafísica não faz parte da matemática, ela possui uma autonomia metodológica. Portanto, a noção de existência em matemática possui um sentido, para Maddy, bastante específico. Vamos mostrar como isso acontece em teoria de conjuntos. Escreve Maddy que *"A Teoria de Conjuntos é sempre vista como uma teoria essencialmente 'realista' ou 'platonista', como se uma metafísica de abstratos existindo objetivamente é certamente pressuposta em seus axiomas e teoremas."* Maddy (2007, pág. 363). Alguns exemplos são bem explícitos de como isso acontece, como descrito no primeiro capítulo desse trabalho a respeito das declarações de existência nos axiomas de ZFC.

O axioma da infinidade afirma que existe um conjunto infinito. O axioma da escolha afirma que existe uma função escolha para cada conjunto, mas não introduz nenhum método de construção dessa função. O terceiro excluído – ou o objetivismo, como escrito no segundo capítulo – e a noção de que os conjuntos dependem de seus elementos é parte do uso de raciocínios não-construtivos.

As crenças anteriores são crenças metodológicas do platonista ontológico, também a filosofia segunda não dispensa essas crenças em sua versão do realismo fraco. As crenças do próximo parágrafo são metafísicas e trazem dificuldades epistemológicas para o platonista ontológico e não são crenças da filosofia segunda.

Os conjuntos são vistos como existindo independentemente do pensamento humano, independente de uma intuição estruturada no mundo KF. Para Gödel, uma vez que é aceito que a hierarquia cumulativa descreve um universo consistente, assim como os axiomas da teoria de conjuntos são consistentes entre si, então eles descrevem uma realidade bem determinada. Ao mesmo tempo, vimos no segundo capítulo que Gödel defende um realismo conceitual, já que os axiomas da teoria de conjuntos descrevem o conceito de conjunto e eles seguem desse conceito.

É rejeitada pela filosofia segunda a existência metafísica e objetiva de conjuntos, a favor de uma hierarquia de teoria de conjuntos estruturada, já que o platonismo ontológico – chamado de realismo robusto por Maddy – não é um bom padrão de filosofia da matemática e a sua metodologia. A argumentação do realista robusto para a justificação de axiomas da teoria de conjuntos é que, uma vez que temos uma realidade objetiva, ou um conceito objetivo ou estrutura objetiva, os axiomas devem ser verdadeiros nessa estrutura objetiva e, por uma questão de derivação lógica, os teoremas devem preservar a verdade desses axiomas. Desse modo, o realista robusto está introduzindo a metafísica na teoria de conjuntos. A filosofia segunda é a favor de abandonar o realismo robusto e partir para um realismo fraco. Somente assim será atingido um estudo científico da atividade matemática.

Para a filosofia segunda do realismo fraco, há conjuntos. Essa mesma afirmativa pode ser feita pelo realista robusto, mas a filosofia segunda faz uma ressalva. É possível afirmar que há conjuntos “profissionalmente falando”, ou seja, a afirmação somente pode ser feita aplicando métodos e princípios matemáticos da teoria de conjuntos. Isso livra a filosofia segunda das intrigas metafísicas e epistemológicas do realismo robusto.

Uma vez que é possível afirmar que “há conjuntos” num aspecto estritamente matemático, questões metafísicas envolvendo relações causais entre os conjuntos e nós, que são desastrosas para o realista robusto, são simplesmente evitadas. A afirmação de que “há um conjunto com tais e tais propriedades e com tais e tais relações” é uma afirmação virtual de existência. Portanto, tudo que queremos saber sobre os conjuntos está contido na teoria de conjuntos, ela nos afirma tudo sobre seu objeto de estudo.

A metafísica não ajuda a entender os conjuntos, nem a epistemologia pode ajudar a entender os conjuntos*: “A Teoria de Conjuntos, de novo, nos diz tudo que há para conhecer sobre conjuntos, e não diz nada sobre estarem relacionados causalmente com qualquer coisa, então eles não estão [causalmente relacionados com nada].”* Maddy (2007, pág. 368). Texto nosso em colchetes.

A teoria de conjuntos descrita no primeiro capítulo não diz que conjuntos possuem massa. Portanto, eles não interagem causalmente conosco. A teoria de conjuntos não diz que conjuntos estão localizados no espaço, nem que eles possuem algum fim no tempo. Assim, eles não existem objetivamente. *“Em suma, conjuntos são tomados como tendo as propriedades postas neles pela teoria de conjuntos (...)”*. (Maddy (2007, pág. 369)) e, então, *“Não há nada mais a ser dito sobre eles.”* (*Idem*).

O realismo fraco é o calcanhar de Aquiles do realismo robusto porque tem como conseqüência a impossibilidade de haver uma relação causal com os objetos matemáticos ou fatos matemáticos. E, *“conjuntos somente são o tipo de coisa que pode ser conhecida por aplicação cuidadosa dos métodos da teoria de conjuntos.”* (*Idem*).

O tribunal para a existência de conjuntos é o próprio afazer matemático e, por isso, não possui um compromisso com nada que esteja fora da matemática. “Conjuntos” referem de um modo bem específico. Há fatos sobre conjuntos, mas tudo isso acontece dentro de uma linguagem matemática. A justificação dos axiomas da teoria de conjuntos pode acontecer dentro da linguagem matemática e o seu próprio afazer. Isso não necessita de um apelo a uma realidade fora do espaço e do tempo. Um axioma, para ser aceito como verdadeiro, necessita passar por critérios práticos internos à matemática. A matemática, portanto, é autora de suas próprias verdades.

Agora, podemos dar um passo na investigação nas opções possíveis deixadas à filosofia segunda. A filosofia segunda considera que há um arealismo na metodologia matemática. A posição arealista não considera que é possível imputar uma verdade a uma proposição matemática, isso ocorre porque o arealismo acredita que é muita pretensão da matemática imputar uma verdade sendo que os conjuntos, para o arealismo, nem existem. E se as proposições matemáticas não referem, então não podem ter a verdade aferida. O arealismo também acredita que não é possível falarmos que há conjuntos de modo algum. Isso ocorre porque não podemos comprovar que os conjuntos existem. Portanto, a posição quase pragmática do realismo fraco de assumir que conjuntos existem dentro do afazer matemático não é o suficiente.

A filosofia segunda é capaz de assumir as duas posições, porque o realismo fraco é uma apuração do arealismo. Se o arealismo é uma espécie de jogo de linguagem na matemática, o realismo fraco é um jogo de linguagem que assume a existência de objetos matemáticos e da verdade matemática por motivos do afazer matemático.

Nas questões metodológicas, a existência e a verdade podem ser excluídas, como se fossem puro adorno. Em suma, para Maddy, o trabalho do matemático não nos força a adentrar na filosofia. Devemos analisar a prática matemática do dia-a-dia e assim trazer as questões para o contexto em que realmente foram criadas.

Como resultado disso, eliminamos o que os filósofos têm a dizer sobre a matemática e a sua prática e assim separar o que é realmente feito na matemática do discurso vazio. O erro a ser retirado do tratamento filosófico é o platonismo, que estuda as entidades não espaço-temporais e afirma que a matemática é um discurso sobre entidades.

O interesse da matemática pura é simplesmente solucionar as questões com boas respostas. Um teorema deve ser assumido porque é capaz de reunir resultados prévios. Um objeto matemático pode ser assumido como existindo porque isso resultará numa teoria rica em seus resultados. Um axioma é assumido porque demonstra um teorema importante e gera novos resultados.

Objetos matemáticos abstratos, portanto, podem ser introduzidos apenas para o sucesso da teoria matemática em questão, como por exemplo, introduzir classes para obter uma teoria dos números reais satisfatória. Portanto, a metodologia matemática própria da filosofia segunda consiste na aplicação da noção de que por um determinado meio, conseguimos chegar a um fim. Mesmo que esse meio determine a existência de objetos abstratos, desde que limitados à adequação teórica.

3.6. Considerações Finais: O Naturalismo e a Justificação dos Axiomas

No capítulo anterior, apresentamos as justificações intrínsecas e extrínsecas dos axiomas da teoria de conjuntos. Mostramos que o platonismo na matemática admite que os axiomas possuem justificação intrínseca porque eles são justificados pela intuição matemática. Porém, temos mostrado também que a intuição matemática do platonismo ontológico é falha e não há nenhum exemplo na matemática que a comprove. Um meio de refutação desse platonismo é por meio da teoria causal do conhecimento.

Agora, vamos retornar à classificação da justificação como intrínseca e extrínseca novamente. Uma justificação intrínseca parte do conceito de conjunto. Por exemplo, uma justificação é intrínseca, para Maddy, se o axioma convém ao conceito de conjunto que está descrevendo.

Um exemplo de conceito de conjunto é o conceito de conjunto da concepção iterativa de conjuntos. As derivações dos axiomas da teoria de conjuntos realizadas por Boolos e descrita no primeiro capítulo desse trabalho são justificações intrínsecas porque partem do conceito de conjunto introduzido na concepção iterativa de conjuntos, ou na hierarquia cumulativa.

Essas justificações como intrínsecas podem ser questionadas. Vamos aplicar aqui uma hipótese naturalista. Digamos que a hierarquia cumulativa foi introduzida para evitar a formação de conjuntos paradoxais como o conjunto que levou ao paradoxo de Russell. Ora, se isso que realmente acontece, então, a hierarquia cumulativa foi introduzida com um objetivo matemático bem específico, que é delimitar conjuntos mal-fundados de conjuntos bem-fundados. Portanto, os axiomas da teoria de conjuntos introduzidos por uma derivação da concepção iterativa possuem uma justificação extrínseca. A conseqüência da hierarquia cumulativa é apresentar um universo cumulativo de conjuntos consistente.

A justificação extrínseca trabalha em termos das conseqüências que um axioma produz ou de adequação teórica, como evitar o aparecimento de paradoxos. Maddy (1988) e Maddy (1997), ao listar os axiomas e as suas justificações, utiliza as idéias de Boolos (1971) e de Fraenkel et al.(1973). Maddy utiliza também as idéias de justificação de Zermelo (1908b) e Zermelo (1930). As justificações de Fraenkel et al.(1973) são todas extrínsecas. De uma maneira geral, elas se comportam de acordo com a hipótese naturalista que aplicamos à concepção iterativa de Boolos, ou seja, a idéia é que os axiomas evitam paradoxos, ou seja, a produção de teoremas que afirmam a existência de conjuntos patológicos, já que eles respeitam o Princípio de Limitação de Tamanho.

O Princípio de Limitação de Tamanho delimita o escopo da manipulação matemática. Há conjuntos que são possíveis de serem manipulados matematicamente. Esses conjuntos são "pequenos". Há conjuntos "grandes" que ultrapassam o princípio de limitação de tamanho. Esses conjuntos não podem ser manipulados matematicamente porque a tentativa de manipulação deles por uma operação matemática gera algum tipo de paradoxo. O conjunto de todos os conjuntos não obedece ao princípio de limitação de tamanho.

Temos visto que conjuntos possuem ordinais, ou seja, são passíveis de numeração e também possuem cardinalidade, ou seja, a magnitude do conjunto pode ser dada. Conjuntos pertencentes à hierarquia dos $\aleph$'s também possuem o seu ordinal. Porém, há uma categoria de conjuntos além da hierarquia dos $\aleph$'s. Os conjuntos que vão até a hierarquia dos $\aleph$'s não podem sofrer a manipulação matemática.

Nos conjuntos que são manipulados pela matemática, podemos aplicar os axiomas da teoria de conjuntos, ou ainda demonstrar bom-ordenamento desses conjuntos, por exemplo. Os conjuntos que estão além da hierarquia dos $\aleph$'s possuem uma cardinalidade absoluta e, portanto, não são passíveis de manipulação matemática. Se manipularmos um conjunto com cardinalidade absoluta pela matemática, então caímos em paradoxo.

Se um conjunto tem cardinalidade transfinita e possui um cardinal, então esse cardinal está na hierarquia dos $\aleph$'s. Caso contrário, se o conjunto não possui uma cardinalidade na hierarquia dos $\aleph$'s, então esse conjunto é um absoluto. Agora, definimos um conjunto como sendo "grande" aquele que é absoluto. Consideramos como absoluta qualquer coleção que leve a um paradoxo. Cf. Hallet, (1984). Portanto, para o princípio de limitação de tamanho, os axiomas devem lidar com conjuntos "pequenos".

Com essas ressalvas, podemos descrever como são justificados os axiomas segundo Maddy (1988) e Maddy (1997). A descrição desses axiomas encontra-se no primeiro capítulo desse Trabalho. O que vamos apresentar a seguir são as suas justificações.

Axioma da extensionalidade: Na teoria de conjuntos de Zermelo, ele é apenas enunciado, mas não justificado. Boolos o define como sendo o único axioma da lista que é analítico e, por isso, isso tem uma justificação intrínseca. Mas seria de se esperar que esse axioma possuísse somente justificações intrínsecas se não fosse possível considerar que esse axioma produz conseqüências. Fraenkel et al. (1973) afirma que esse axioma simplifica os conjuntos para possibilidade de manipulação matemática. Portanto, ele possui uma justificação extrínseca, já que ele introduz os conjuntos no universo de coisas que são manipuláveis por operações matemáticas.

Axioma do conjunto vazio: Esse axioma ajuda na exclusão de conjuntos paradoxais e está no início da hierarquia. Para Zermelo, o vazio é um conjunto fictício, e é adicionado somente por conveniência. Para Maddy, isso é uma justificação puramente extrínseca, que torna a teoria "mais funcional". Fraenkel et al. afirma que um individual é necessário para construir conjuntos e, portanto, isso é uma justificação extrínseca.

Um exemplo que mostra que esse axioma é extrínseco está na seguinte situação: A intersecção de dois conjuntos disjuntos é vazia. Portanto, precisamos de algo na teoria de conjuntos para representar essa situação, e somente poderia ser o vazio. Outra justificação extrínseca, segundo o nosso exercício naturalista, é que esse axioma pode seguir também da concepção iterativa de conjuntos, que deve começar por algo que não seja um conjunto no estágio inicial.

Axioma da paridade e da união: A justificação extrínseca de Maddy para o axioma da paridade é que ele não leva a contradições. Fraenkel et al. (1973) afirma que o conjunto par formado pela operação desse axioma é de tamanho modesto, visto que é um conjunto com apenas dois membros dados anteriormente. O axioma da união não introduz arbitrariamente o conjunto união, porque é o conjunto formado de um conjunto já dado. Como é formado por um conjunto já dado, não gera um conjunto "tão grande", portanto, obedecem ao princípio de limitação de tamanho e não introduz nenhum paradoxo na teoria de conjuntos.

Axioma da Separação: Zermelo argumenta que esse axioma evita a formação de conjuntos paradoxais, como o conjunto que é formado por uma função, e que dá origem ao paradoxo de Russell. Para Fraenkel et al. (1973), isso consiste na aplicação do princípio de limitação de tamanho, já que o conjunto definido é menor que o conjunto existente de onde foi tirado, portanto, o conjunto é de tamanho "modesto" e, sendo assim, não introduz nenhum paradoxo na teoria.

Axioma da Infinidade: Tem uma justificação puramente extrínseca por Fraenkel et al. (1973) porque há a indispensabilidade de conjuntos infinitos para a introdução da noção do conjunto de todos os números naturais ou para tratar dos números reais. Portanto, é necessário a adição de um axioma que garanta a existência de um conjunto infinito. Pela descrição da concepção iterativa, há pelo menos um estágio depois de todos os estágios finitos e isso implica no axioma da infinidade. Como a teoria precisa de um conjunto infinito, esse axioma possui uma justificação extrínseca.

Axioma do conjunto-potência: A justificação extrínseca é que a existência de conjuntos contínuos depende da noção de que é possível aplicar o conjunto potência a um conjunto infinito. Tal conjunto resultante é de tamanho "modesto" porque novamente podemos aplicar o conjunto potência num conjunto gerado por essa aplicação, sem cair em nenhum paradoxo.

Axioma da escolha: A justificação intrínseca dada por Maddy desse axioma é questionável. Zermelo afirma que esse axioma foi introduzido porque inconscientemente os matemáticos estavam utilizando esse axioma, implicitamente em suas demonstrações. Segundo Maddy, isso é o suficiente para justificarmos esse axioma como intrínseco ao conceito de conjunto. Se esse axioma foi utilizado inconscientemente por cientistas antes da sua postulação, então isso constitui uma justificação extrínseca desse axioma. Já que ele se tornou necessário para formalizar todas as demonstrações anteriores que dele precisavam. Uma justificação extrínseca interessante é que ele permitiu a Zermelo derivar a sua versão do teorema do bom-ordenamento, que afirma que todo conjunto possui um ordinal.

Axioma da substituição: Segundo Maddy (2007), esse axioma é necessário para demonstrar a existência de números cardinais como $\aleph_\omega$, apresentados na teoria informal de conjuntos.

Dada a seqüência:

$$\{N, P(N), P(P(N)), ...\}$$

Que pode ser representada segundo a cardinalidade do seguinte modo:

$$\{\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, ...\}$$

Ele é o único capaz de realizar a seguinte transição:

$$\aleph_\omega$$

Z não possui uma fundamentação forte o suficiente para expressar a existência desses cardinais. Esse axioma permite a demonstração do teorema do bom-ordenamento de

Cantor, ele afirma que "Todo conjunto pode ser posto em correspondência um-a-um com algum ordinal." Esse teorema é mais robusto que o teorema do bom ordenamento de Zermelo. O primeiro teorema foi demonstrado por von Newmann. Boolos afirma que esse axioma possui várias conseqüências desejáveis em matemática e, portanto, isso já é uma justificação extrínseca.

Axioma da Regularidade: Esse axioma retira a possibilidade de existir algum conjunto patológico o bastante para derivar o paradoxo de Russell. Portanto, é um axioma que possui uma justificação extrínseca. Não basta somente termos o axioma da separação para essa situação. O axioma da separação é uma versão corrigida do princípio da compreensão da teoria ingênua de conjuntos, que como vimos, leva ao paradoxo de Russell. Já esse axioma deixa explícito que o universo cumulativo não é auto-referente.

Encerramos aqui a série de justificação dos axiomas da teoria de conjuntos. Todos possuem justificações extrínsecas e, pela característica dessa justificação, se encaixam na metodologia de meios e fins da filosofia segunda.

Dado a característica da filosofia naturalista em considerar como metodologia matemática somente o que pode ter meios e fins, vamos mostrar o que diz a filosofia segunda a respeito da hipótese do contínuo. O problema é se a hipótese do contínuo deve ser decidida ou se ela deve ser refutada ou ainda se as respostas às questões de independência são o ponto final da história. Se a hipótese do contínuo deve ser aceita, CH, ou negada, ¬CH.

Ao levar em conta que a filosofia segunda se interessa por raciocínios que funcionam basicamente sobre a idéia de meios e fins, por que considerar que não é necessário decidir CH? Simplesmente ocorre que ZFC possui modelos que satisfazem CH assim como possui modelos que não satisfazem CH. Mas se for postulado que CH ou ¬CH e assim um objetivo matemático for atingido, então os dois casos são válidos. Apesar disso, a pesquisa por axiomas que decidam CH também é importante para a filósofa segunda, visto que no naturalismo, assim como no platonismo, uma boa teoria de conjuntos deve ser aquela capaz de prover os meios para a busca e axiomas para a decisão ou refutação de CH. Portanto, vimos mais uma vez a aplicação da metodologia por meios e fins da filósofa segunda e que conclui a nossa descrição do naturalismo na matemática.

Conclusão

Nessa pesquisa, introduzimos alguns conceitos e técnicas provenientes da teoria de conjuntos cujo objetivo foi esclarecer que a noção de existência faz parte da prática matemática. Essa noção aparece na definição de infinito, nas demonstrações não-construtivas e nos axiomas da teoria de conjuntos de Zermelo e Fraenkel. Portanto, a matemática trabalha com entidades teóricas, pelas características de seu próprio afazer.

Mostramos que o platonismo na matemática estende a noção de existência na matemática para a metafísica e que além das próprias entidades que a matemática afirma existirem, como os conjuntos, o platonista ontológico afirma que existem também outros tipos de coleções como classes e conceitos. Como exemplo do platonismo ontológico, introduzimos o pensamento de Gödel. Mostramos ainda, que o platonismo mitológico pode ser entendido como outro tipo de realismo, uma espécie de realismo ficcional.

Segundo Gödel, a aferição de verdade dos axiomas da teoria de conjuntos se dá pela intuição matemática, que corresponde à intuição de objetos matemáticos abstratos, como a intuição do conceito de conjuntos ou ainda a intuição de conjuntos que não podem ser instanciados no mundo empírico. Chamamos essa intuição de intuição enquanto idealização. Porém, ressaltamos que essa intuição por idealização se liga a objetos matemáticos abstratos, ou seja, é incluída nela um componente metafísico.

Pela definição de intuição de Parsons, há dois tipos de intuição. A intuição enquanto idealização e a intuição quando no caso ocorre a aceitação de verdades de sentenças que são meramente indecidíveis. Ora, no caso de Gödel, o que prevalece é a intuição enquanto idealização. Mostramos que a intuição enquanto idealização de Gödel é um tipo de justificação intrínseca dos axiomas da teoria de conjuntos. E que, ainda, Gödel afirma que esse tipo de intuição nos força a aceitar que os axiomas da teoria de conjuntos são verdadeiros.

Essa relação que Gödel estabelece entre a aceitação da verdade dos axiomas como forçadas sobre nós porque descreve um universo consistente de conjuntos sofre as críticas de Steiner e Benacerraf, que mostramos no final do segundo capítulo. Ora, a afirmação de que os axiomas se forçam sobre nós como sendo verdadeiros estabelece uma relação causal entre a realidade que esses axiomas descrevem e o conhecedor matemático. Uma vez que esses objetos matemáticos descritos pelos axiomas não estão contidos no espaço e no tempo, então não há como haver esse tipo de relação; por isso, os críticos do platonismo usam de um argumento com o viés da teoria causal do conhecimento.

Se não é possível uma intuição enquanto idealização como a descrita por Parsons na medida em que essa intuição se relaciona com os objetos matemáticos abstratos não espaciais e nem temporais, ainda nos resta ver se a intuição enquanto aceitação da verdade dos axiomas da teoria de conjuntos simplesmente porque são indecidíveis é possível de ser mantida.

Introduzimos o pensamento naturalista de Maddy na nossa discussão. No naturalismo, há a crença metodológica que nascemos num mundo e que o mundo à nossa volta determina a lógica do nosso entendimento. Maddy introduz a lógica rudimentar que sustenta um mundo KF-estruturado. Ora, como vivemos num mundo altamente KF-estruturado, nossa maquinaria cognitiva deve obedecer às regras dessa estrutura lógica, o que Maddy mostra com os experimentos realizados com as crianças com menos de um ano de idade e que não foram ainda alfabetizadas.

Porém, o mundo KF-estruturado é matematicamente limitado. Nesse ponto, a filosofia segunda não tem como inferir a existência de objetos matemáticos abstratos a partir do mundo KF-estruturado e assume uma posição perante a filosofia da matemática conhecida como realismo fraco/arealismo. A filosofia segunda transita entre o realismo fraco e o arealismo sem prejuízo à sua metodologia da matemática. O realismo fraco é um tipo de platonismo mitológico. A existência de objetos matemáticos abstratos é estratégica e não está ligada à metafísica e sim é uma questão de existência ligada puramente à prática matemática.

No arealismo, a afirmação de que existem objetos matemáticos, mesmo que estratégica, não pode ser sustentada, muito menos a verdade das proposições matemáticas. O arealismo não tem condições de afirmar que objetos matemáticos não existem. Como não há como obter qualquer afirmação sobre objetos, não há como estabelecer referência a objetos, portanto, não há como estabelecer a verdade das proposições matemáticas. Se não podemos estabelecer a verdade dos axiomas, não podemos aceitar os axiomas como verdadeiros, mas somente *aceitar* os axiomas. O realismo fraco é uma elaboração em cima do arealismo que introduz as entidades e a verdade com o objetivo de prover uma prática matemática conveniente.

Nessa ontologia a respeito dos objetos matemáticos abstratos, introduzimos a metodologia matemática da filosofia segunda. Sua metodologia é baseada na noção de que a prática matemática se dá por meios e fins. Um axioma é introduzido por possuir um determinado fim, que é a demonstração de um determinado teorema, por exemplo.

Se a filosofia naturalista está em sua fase de realismo fraco, então ela afirma que, por certas circunstâncias, o axioma é aceito como verdadeiro e o objeto matemático existe de forma conveniente para a teoria. Se a filosofia naturalista está na sua fase arealista, ela afirma que o axioma foi simplesmente *aceito* por circunstâncias e teorias específicas. Por fim, mostramos como que os axiomas podem ser justificados extrinsecamente, numa visão naturalista da matemática e, se aplicarmos uma hipótese naturalista que transforma as justificações intrínsecas dos axiomas através da concepção iterativa em justificações extrínsecas, o que termos é que todos os axiomas da matemática possuem uma justificação extrínseca, ou seja, por meios e fins.

Agora, podemos retornar à classificação de Parsons da intuição matemática. Segundo Parsons, a intuição matemática possui duas classificações. Uma enquanto idealização, que mostramos ser plausível com o pensamento de Gödel e a outra, que é simplesmente afirmar que uma sentença é indecidível.

O que podemos concluir do ponto de vista do naturalismo de Maddy a respeito da intuição matemática de Parsons é que esse naturalismo admite os dois tipos de intuição. Enquanto idealização, porque os axiomas da teoria de conjuntos são idealizações a respeito da estrutura geral de conjuntos de cardinalidade tanto finita quanto infinita e, também, enquanto sentenças meramente indecidíveis, já que os axiomas da teoria de conjuntos não possuem nenhuma demonstração. Aqui, portanto, a noção de idealização deve ser mudada, não estamos querendo dizer que em Maddy há um acesso a objetos matemáticos abstratos, mas que o processo de idealização é puramente circunscrito a introduzir elementos impossíveis de serem instanciados na realidade, mas que se adéquam ao funcionamento da matemática, ou seja, são entidades puramente teóricas.

O matemático que introduz elementos teóricos novos não necessita de fazer uso da intuição enquanto idealização de objetos matemáticos abstratos. Basta, nesse caso, que o matemático possua uma expertise matemática bem desenvolvida, que é o desenvolvimento do seu “faro” a parir de anos de estudos da matemática. Com isso, ele conseguirá fazer asserções matemáticas indemonstráveis cada vez mais certas, assim como o virtuoso, que aperfeiçoa as suas ações cada vez mais que age e reflete sobre as suas ações e tende a agir de acordo com aquilo que acha certo.

Isso não implica de modo algum que a intuição matemática será totalmente infalível. Ela é sujeita a falhas e qualquer asserção matemática tem que estar sujeita a testes como a possibilidade de derivação de paradoxos. Mostramos aqui que as asserções matemáticas indemonstráveis da teoria de conjuntos podem ser confrontadas com universos consistentes como a hierarquia cumulativa ou podem ser feitas segundo a idéia reguladora contida dentro do princípio de limitação de tamanho, que são ferramentas que evitam paradoxos.

A definição de intuição que estamos tratando aqui não nos leva ao platonismo ontológico. A segunda definição de intuição pode ser utilizada na fase de arealista da filosofia segunda. A segunda definição afirma que a sentença é *intuída* porque não é demonstrável. Afirmar que uma sentença foi intuída por não ser demonstrada não acarreta nenhum prejuízo para a sua metodologia naturalista da matemática. Portanto, somente por uma questão de interpretação da palavra "intuição" introduzida por Parsons, afirmamos que é plausível falar de intuição na filosofia naturalista da matemática sem nenhum apelo metafísico ou epistemológico.

Bibliografia

ALMEIDA, J. M. “Semântica de Traduções Possíveis”, Dissertação de Mestrado, CLE, Unicamp, 1999

BENACERRAF, P. “Mathematical Truth”, 1973 , The Journal of Philosophy, 70: 661-679

BOOLOS, G. “The Iterative Concept of Set” *in* “The Journal of Philosophy”, Vol. 68, No. 8, 1971

BRANQUINHO, J., et. al. “Enciclopédia de Termos Lógico-Filosóficos”, São Paulo, Martins Fontes, 2006

CHIHARA, C. S., “Ontology and Vicious-Circle Principle”, New York, Cornell University Press, 1973

DAUBEN, J. W. “Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite”, New Jersey: Princeton University Press, 1990

DUMMET, M. “Truth and Others Enigmas”, Cambridge Mass: Harvard University Press, 1978

DUMMETT, M. “Platonism”, 1967, *in* DUMMETT, M. “Truth and Others Enigmas”

DUMMETT, M. “Realism”, 1967, *in* DUMMETT, M. “Truth and Others Enigmas”

FØLLESDAL, D. “Introductory Note to *1961/?” *in* FEFERMAN, S. (Editor-in-chief) “Kurt Gödel: Collected Works. Unpublished Essays and Lectures” Vol. III, New York, Oxford University Press, 1995

GÖDEL, K. “O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo”, Lisboa, Fundação Calouste Gulbekian, 1979

GÖDEL, K. “A Lógica Matemática de Russell”, 1944, *in* GÖDEL, K. “O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo”, Lisboa, Fundação Calouste Gulbekian, 1979

GÖDEL, K. “Collected Works”, Vol. I, New York, Oxford University Press, 1986

GÖDEL, K. “Collected Works”, Vol. II, New York, Oxford University Press, 1990

GÖDEL, K. “Collected Works”, Vol. III, New York, Oxford University Press, 1995

GÖDEL, K. “What is Cantor’s Continuum Problem?”, 1947, *in* GÖDEL, K. “Collected Works”, Vol. II,1990, New York, Oxford University Press

GÖDEL, K. “What is Cantor’s Continuum Problem?”, 1964, *in* GÖDEL, K. “Collected Works” , Vol. II, 1990, New York, Oxford University Press

GÖDEL, K. "Russell's Mathematical Logic", 1944, *in* GÖDEL, K. "Collected Works", 1990, Vol. II, New York, Oxford University Press

GÖDEL, K. "Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications", *1951, *in* FEFERMAN, S. (Ed.) "Kurt Gödel: Collected Works – Unpublished essays and lectures" New York, Oxford University Press, 1995

GÖDEL, K. "The Modern Development of the Foundations of Mathematics in the Light of Philosophy", *in* FEFERMAN, S. (editor-in-chief) "Kurt Gödel:Collected Works – Unpublished Essays and Lectures", vol. III, 1995, New York, Oxford University Press

HALLET, M. "Cantorian Set Theory and Limitation of Size", New York, Oxford University Press, 1984

JECH, T. "Set Theory" http://plato.stanford.edu/entries/set-theory/, consulta em 23/02/2010

JECH, T. "Basic Set Theory" http://plato.stanford.edu/entries/set-theory/primer.html, consulta em 23/02/2010

JESHION, R. "On the Obvious", *in* "Philosophy and Phenomenological Research", Vol. LX, No. 2, 2000

KLEENE, S. C., "Mathematical Logic", New York: Wiley, 1967

LOURENÇO, M. S. "O que foi o construtivismo stricto sensu de Gödel?", 2008, http://www.fl.ul.pt/pessoais/mslourenco Consulta em 17/03/2010

MADDY, P. "Realism in Mathematics", New York, Oxford University Press, 1990

MADDY, P. "Second Philosophy: A Naturalistic Method", New York, Oxford University Press, 2007

MADDY, P. "Naturalism in Mathematics", New York, Oxford University Press, 1997

MADDY, P. "Believing the Axioms I" *in* "The Journal of Symbolic Logic", Vol. 53, Nº 2, Jun. 1988, pág. 481-511

MORTARI, C. A. "Introdução à Lógica", São Paulo, Ed. Unesp, 2001

O'CONNOR, J. J. & ROBERTSON, E. F., "A History of Set Theory" http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Beginnings_of_set_theory.html Consulta em 21/01/2010

PARSONS, C. "Introductory Note to 1944" in GÖDEL, K. "Collected Works", Vol. II, New York, Oxford University Press, 1990

PARSONS, C. "Mathematics in Philosophy: Selected Essays", New York: Ithaca, 1983

PARSONS, C. “What Is the Iterative Conception of Set?”, 1975, *in* PARSONS, C. “Mathematics in Philosophy: Selected Essays”, New York: Ithaca, 1983 pág. 268

PARSONS, C. “Sets and Classes”, 1974, *in* PARSONS, C. “Mathematics in Philosophy: Selected Essays”, New York: Ithaca, 1983 pág. 209

RUSSELL, B. “Introdução à Filosofia Matemática”, Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor, 1981

STEINER, M, “Platonism and the Causal Theory of Knowledge”, *in* “The Journal of Philosophy”, Vol. LXX, No. 3, 1973

TILES, M. “The Philosophy of Set Theory: An Historical Introduction to Cantor’s Paradise”, 1990, New York, Dover Publications

van HEIJENOORT, J. “From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879 – 1931”, Cambridge Mass., Harvard University Press, 1967

WANG, H. “A Logical Journey: From Gödel to Philosophy”, Cambridge-Mass., MIT Press, 1996

WANG, H. “From Mathematics to Philosophy”, New York, Humanities Press, 1974a