

TESE DE DOUTORADO Nº 147

**TRATAMENTO DE DESCONTINUIDADE  
DE MATERIAL NO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO**

**Werley Gomes Facco**

DATA DA DEFESA: 05/10/2012

**Universidade Federal de Minas Gerais**

**Escola de Engenharia**

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica**

**TRATAMENTO DE DESCONTINUIDADE DE MATERIAL NO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO**

Werley Gomes Facco

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Elson José da Silva

Co-Orientador: Prof. Ricardo Luiz da Silva Adriano

Belo Horizonte - MG

Outubro de 2012

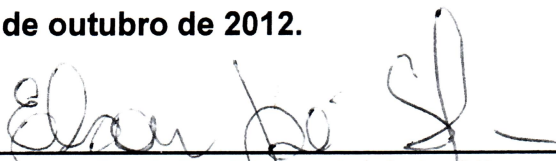
**"Tratamento de Descontinuidade de Material no Método dos Elementos Finitos Generalizado"**

**Werley Gomes Facco**

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 05 de outubro de 2012.

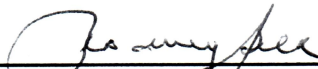
Por:



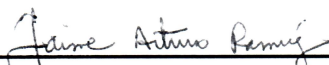
**Prof. Dr. Elson José da Silva**  
DEE (UFMG) - Orientador



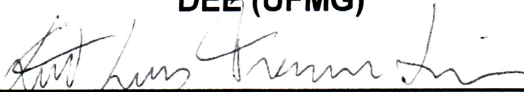
**Prof. Dr. Ricardo Luiz da Silva Adriano**  
DEE (UFMG) - Co-orientador



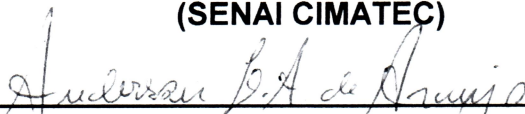
**Prof. Dr. Rodney Rezende Saldanha**  
DEE (UFMG)



**Prof. Dr. Jaime Arturo Ramirez**  
DEE (UFMG)



**Prof. Dr. Xisto Lucas Travassos Junior**  
(SENAI CIMATEC)



**Prof. Dr. Anderson Luis Albuquerque de Araujo**  
Matemática (UFV)

# Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Albertino e Edite, pelo apoio, compreensão, carinho e pelos conselhos nas horas difíceis.

A minha esposa, Fernanda, pelo incentivo e paciência durante esta caminhada.

Aos meus filhos, Yasmim e Estevão, pela compreensão, carinho e solidariedade nas horas difíceis.

Aos meus irmãos, sobrinhos e cunhados pelos constantes incentivos.

# Agradecimentos

À Deus, pela vida, pela graça e misericórdia diárias.

À minha família por todo amor, paciência e apoio.

Ao meu Orientador e Co-Orientador: professores Elson José Silva e Ricardo Luiz da Silva Adriano, pela orientação, atenção, paciência e carinho com que conduziu e orientou este trabalho. Agradeço à grandiosa e oportuna colaboração e demonstro aqui, com estas palavras, o meu mais profundo respeito, carinho e admiração.

Aos colaboradores e professores do PPGEE - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFMG, em especial a Anete Vidal de Freitas Vieira, Arlete Vidal de Freitas, dos quais recebi absoluto apoio e incentivo.

Aos meus queridos amigos Alex S. de Moura, Naísses Z. Lima e Bernadete Maria De Mendonça Neta pelo apoio nos assuntos técnicos de maneira geral, assim como pela sincera amizade.

À UFVJM, pela aprovação do meu afastamento para capacitação e a importante oportunidade de desenvolvimento e aplicação desse trabalho.

Ao IFES, pelo apoio dado na fase final da minha capacitação.

A minha esposa Fernanda L. S. Facco e meus queridos filhos Yasmin L. S. Facco e Estevão L. S. Facco, pelo apoio, carinho, atenção e paciência durante minha dedicação aos estudos.

# Resumo

O estudo das "Formulações Não-Convencionais do Método de Elementos", se baseia em abordagens alternativas ao Método de Elementos Finitos, entre elas os Métodos Sem-Malha e o Método de Elementos Finitos Generalizados. O Método de Elementos Finitos Generalizados compartilham importantes características dos métodos sem malhas. As suas funções de aproximação atreladas aos pontos nodais, são enriquecidas de modo análogo ao refinamento  $p$  realizado no Método das Nuvens  $hp$ . O Método de Elementos Finitos apresenta bons resultados para problemas de propagação de onda com domínio eletricamente pequeno e problemas envolvendo descontinuidade, porém em geral demanda elevado custo computacional para atingir uma melhor precisão em seus resultados, exemplo disto são os problemas de propagação de ondas em domínio eletricamente grandes. Fica então claro a existência da demanda por metodologias e ferramentas para análise e verificação para estes casos de problemas em eletromagnetismo. Nesta tese, os problemas de propagação de ondas eletromagnéticas, modelados pela equação de Helmholtz escalar bidimensional, serão resolvidos numericamente por meio do Método dos Elementos Finitos Generalizado. Para gerar o espaço do Método de Elementos Finitos Generalizados, as funções de ondas planas foram usadas para enriquecer o espaço dos Elementos Finitos. O enriquecimento do espaço de aproximação por meio destas funções permite reduzir efeitos de poluição de erro devido ao número de onda elevado e torna possível obter uma solução precisa para o problema com um número bem inferior de graus de liberdade em comparação com o Método de Elemento Finito clássico.

Em problemas onde o domínio é formado por regiões de diferentes materiais, os espaços de funções do MEFG apresentam descontinuidade. Usualmente o tratamento de descontinuidade é feito através dos Multiplicadores de Lagrange. No entanto, esta abordagem conduz a sistemas matriciais mal condicionados e não positivos definidos. Tal fato, impõe severas restrições sobre qual o método a ser utilizado para resolver o sistema. As principais contribuições apresentadas

nesta tese estão relacionadas ao tratamento de descontinuidade para o Método de Elementos Finitos Generalizados.

Uma novidade apresentada nesta tese é a eliminação dos Multiplicadores de Lagrange utilizando uma abordagem baseada no Mortar Element Method. Esta abordagem, tem como vantagem, o fato de gerar sistemas matriciais que preservam a esparsidade do sistema com dimensões bem menores que o sistema resultante dos Multiplicadores de Lagrange. Além disso, o sistema gerado pelo Mortar Element Method é positivo definido. Tal método se mostrou tão preciso quanto o Multiplicadores de Lagrange e com um custo computacional inferior.

Outra contribuição importante deste trabalho, também ligada ao tratamento de descontinuidade, foi a de estender a formulação do Método de Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento por ondas planas para incorporar sub-domínios não conformes separados por interfaces seccionalmente lineares ou curvilíneas. Tal análise é feita decompondo o domínio global do problema em subdomínios e em seguida realiza-se a análise em cada um destes subdomínios. Para garantir as condições de continuidades entre os subdomínios, propõe-se uma abordagem realizada por meio dos Multiplicadores de Lagrange e uma outra por meio do Mortar Element Method. Para que tais restrições de interface entre os subdomínios fiquem corretas, dois esquemas especiais de integração foram propostos: um para o caso linear e outro para o caso curvilíneo. Os resultados numéricos demonstram a eficiência das técnicas propostas. Problemas onde a solução analítica é conhecida ou onde a solução é obtida pelo Método de Elementos Finitos são apresentados com o intuito de mostrar a eficiência de cada uma das técnicas propostas. Por fim, a convergência do método também é apresentada como uma função do número de direções de ondas planas.

**Palavras-chave:** Métodos de Elementos Finitos, Método de Elementos Finitos Generalizados, Métodos de Elementos Finitos Estendidos, Método de Partição da Unidade, Método de Partição da Unidade Elemento Finito, Partição da Unidade, Métodos Sem-Malha, Método das Nuvens *hp*.

# Abstract

The study of "Non-Conventional Element Method Formulations" is based on alternative approaches to the Finite Element Method including the Meshless Methods and the Generalized Finite Element Method. The Generalized Finite Element Method has important characteristics in common with Meshless Methods. Its approximating functions linked to the nodal points are enriched in a similar manner to the  $p$  refinement performed in the  $hp$ -clouds. The Finite Element Method, gives good results for wave propagation problems with small electric domain and problems with discontinuity, however it generally demands high computational cost to achieve a better accuracy in its results, for example, solving wave propagation problems with bigger electric domain. Then, it becomes clear that there is a demand for methodologies and tools for analysis and verification of these cases of electromagnetism problems. In this thesis, electromagnetic wave propagation problems modeled by bi two dimensional scalar Helmholtz equation are numerically solved by the Generalized Finite Element Method. In order to generate the Generalized Finite Element Method space, plane wave functions were used to enrich the Finite Element space. The enrichment of the approximation space through these functions allows reducing the effects of error pollution generated by the high wave number. It makes possible to obtain a solution with high accuracy for the problem using a reduced number of degrees of freedom in comparison to the classic Finite Element method.

In problems where the domain is composed of regions with different media, the function space of Generalized Finite Element Method presents discontinuity. The usual form to treat this discontinuity is to use the Lagrange Multipliers to enforce the interface conditions. However, this approach leads to ill conditioned and non positive definite matrix systems, that impose severe restrictions over what method should be used to solve the system. The main contributions presented in this thesis are related to the treatment of this discontinuity for the Generalized Finite Element Method.



---

The novelty presented in this thesis is the replacement of the Lagrange Multipliers by an approach based in the Mortar Element Method, this procedure has the advantage of generating a matrix that preserve the sparsity of the system with a much smaller dimensions than the systems obtained by Lagrange Multipliers. Additionally, the resulting matrix is and positive definite. This method showed to be as precise as the Lagrange Multipliers with less computational cost.

Another important contribution of this work, also connected to the treatment of discontinuity, was to extend the formulation of Generalized Finite Element Method with enrichment by plane waves to incorporate nonconforming subdomains separated by linear or curve piecewise interfaces. This analysis is made decomposing the global domain of the problem into subdomains and then it is performed an analysis in each of these subdomain. In order to ensure the conditions of continuity between these subdomains, it is proposed an approach performed by Lagrange Multipliers and another by Mortar Element Method. Two special integration schemes were proposed. To ensure the continuity between the subdomains one for the linear case and other for the curve case. The numerical results demonstrates the efficiency of the proposed techniques. Problems where the analytical solution is known or where the solution is obtained by the Finite Element Method are presented in order de show the efficiency of each proposed technique. Finally, the convergence of the method is also presented as a function of the number of the plane wave directions.

**KEYWORDS:** Finite Element Method, Generalized Finite Element Method, Extended Finite Element Methods, Partition of Unity Method, Method of Partition of Unity Finite Element, Partition of Unity, Meshless Methods, *hp*-Clouds method.

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação e Estado da Técnica . . . . .	1
1.2 Metas e principais contribuições . . . . .	7
1.3 Esboço do Trabalho . . . . .	8
<b>2 Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG)</b>	<b>10</b>
2.1 Partição da Unidade PU . . . . .	11
2.2 Enriquecimento da Partição da Unidade . . . . .	12
2.3 Funções de Enriquecimento . . . . .	13
2.4 Espaço de Aproximação no MEFG . . . . .	14
2.5 Formulação do Elemento Finito no MEFG . . . . .	16
2.5.1 Elemento sem Enriquecimento . . . . .	16
2.5.2 Elemento com Enriquecimento . . . . .	20
<b>3 Enriquecimento por Ondas planas</b>	<b>23</b>
3.1 Formulação do Problema . . . . .	23
3.2 O espaço de funções MEFG . . . . .	25
3.3 Resultados e discussão . . . . .	27
3.3.1 Onda Plana no Espaço Livre . . . . .	27
3.3.1.1 $q$ - convergência do MEFG . . . . .	29
3.3.2 Espalhamento de um cilindro condutor circular . . . . .	32
<b>4 Tratamento de Descontinuidade de Materiais no MEFG</b>	<b>38</b>

4.1	Formulação do Problema . . . . .	39
4.2	Continuidade entre os subdomínios . . . . .	40
4.2.1	Multiplicador de Lagrange . . . . .	40
4.2.2	Extensão do Mortar Element Method para MEFG . . . . .	43
4.3	Resultados e discussão . . . . .	45
4.3.1	Problema de propagação de onda . . . . .	45
4.3.1.1	MEFG com ML . . . . .	46
4.3.1.2	MEFG com MEM . . . . .	47
4.3.2	Guia de placas paralelas . . . . .	48
4.3.2.1	MEFG com ML . . . . .	49
4.3.2.2	MEFG com MEM . . . . .	50
4.3.3	Problema de espalhamento eletromagnético . . . . .	51
4.3.3.1	MEFG com ML . . . . .	54
4.3.3.2	MEFG com MEM . . . . .	54
4.3.3.3	$q$ - convergência do MEFG com o MEM e ML . . . . .	55
4.4	Aplicação . . . . .	58
4.4.1	Coluna de concreto cilíndrica . . . . .	58
4.4.2	MEFG com ML . . . . .	60
4.4.3	MEFG com MEM . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Tratamento de Descontinuidade de Materiais no NC-MEFG</b>	<b>64</b>
5.1	Formulação do Problema . . . . .	64
5.1.1	ML para malhas Não-Conformes . . . . .	65
5.1.2	Construção das matrizes $\mathbf{C}_a$ e $\mathbf{C}_b$ para interfaces lineares . . . . .	67
5.1.2.1	Procedimento de integração, interface linear . . . . .	68
5.1.3	Construção das matrizes $\mathbf{C}_a$ e $\mathbf{C}_b$ para interfaces curvilíneas . . . . .	70
5.1.3.1	Procedimento de integração, interface curvilínea . . . . .	71
5.2	Resultados e discussão . . . . .	72
5.2.1	Problema de propagação de onda com interface linear . . . . .	72
5.2.1.1	NC-MEFG com ML . . . . .	73
5.2.1.2	NC-MEFG com MEM . . . . .	73
5.2.1.3	$q$ - convergência do NC-MEFG com o MEM e ML . . . . .	74
5.2.2	Guia de placas paralelas com interface linear . . . . .	75
5.2.2.1	NC-MEFG com ML . . . . .	75
5.2.2.2	NC-MEFG com MEM . . . . .	75
5.2.3	Problema de espalhamento eletromagnético com interface curva . . . . .	77

---

5.2.3.1	NC-MEFG com ML . . . . .	78
5.2.3.2	NC-MEFG com MEM . . . . .	78
5.2.3.3	$q$ - convergência do NC-MEFG com o MEM e ML . . . . .	78
5.3	Aplicação . . . . .	81
5.3.1	Coluna de concreto cilíndrica . . . . .	81
5.3.2	NC-MEFG com ML . . . . .	81
5.3.3	NC-MEFG com MEM . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>84</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>89</b>

# Lista de Figuras

2.1	Partição da Unidade e <i>região de influência</i> $\omega_j$ do nó $x_j$ . . . . .	11
2.2	Função de forma do MEFG usando uma função de enriquecimento. . . . .	13
2.3	Representação 1D das funções PU e diferentes aproximações locais. . . . .	15
2.4	Domínio $\Omega$ com condições de contorno . . . . .	17
2.5	Mudança de coordenadas. . . . .	18
2.6	Elemento finito triangular com os três nós enriquecidos. . . . .	21
3.1	Domínio $\Omega$ com fronteira interior $\Gamma_1$ e fronteira exterior $\Gamma_2$ . . . . .	24
3.2	Exemplos das direções de onda utilizados em uma <i>região de influência</i> $\omega_i$ . . . . .	25
3.3	Domínio Computacional $\Omega$ e malha triangular. . . . .	27
3.4	Parte real da solução do problema de propagação de onda, $q = 12, 14, 16, 18$ . . . . .	28
3.5	Parte Imag. da solução do problema de propagação de onda, $q = 12, 14, 16, 18$ . . . . .	29
3.6	Solução do problema de propagação de onda com MEF, $h_1 = \frac{1}{10}\lambda$ . . . . .	30
3.7	Solução do problema de propagação de onda com MEF, $h_2 = \frac{1}{15}\lambda$ . . . . .	30
3.8	$q$ -convergência da solução MEFG, $Re(u)$ para as malhas A, B e C. . . . .	31
3.9	$q$ -convergência da solução MEFG, $Im(u)$ para as malhas A, B e C. . . . .	32
3.10	Erro relativo da solução MEFG $u$ para malha A versus pontos de Gauss. . . . .	33
3.11	Amplitudes para cada direção de onda . . . . .	33
3.12	Condicionamento do sistema no MEFG para a malha A versus $q$ . . . . .	34
3.13	Domínio computacional $\Omega$ e malha triangular . . . . .	34
3.14	Solução para o problema de espalhamento eletromagnético, como MEFG . . . . .	36
3.15	Campo magnético total em torno do cilindro para o MEFG . . . . .	36
3.16	Real e Imaginária $q$ -convergência no MEFG, com a malha Fig.3.13b. . . . .	37
4.1	Subdomínios $\Omega_a$ e $\Omega_b$ com interface comum $\Gamma$ . . . . .	39
4.2	Domínio computacional $\Omega$ e Malha triangular . . . . .	45
4.3	Solução do problema de propagação de onda, MEFG com ML e $h = 0.6\lambda_a$ . . . . .	46
4.4	Solução da problema de propagação de onda, MEFG com ML e $h = 1.1\lambda_a$ . . . . .	47

---

4.5	Solução do problema de propagação de onda, MEFG com MEM e $h = 0.6\lambda_a$	48
4.6	Solução da problema de propagação de onda, MEFG com MEM e $h = 1.1\lambda_a$	48
4.7	Haste dielétrica inserida em um guia de ondas de placas paralelas . . . . .	49
4.8	Solução para o problema do guia de placas paralelas . . . . .	50
4.9	Linhas equipotenciais . . . . .	50
4.10	Solução para problema do guia de placas paralelas . . . . .	51
4.11	Linhas equipotenciais . . . . .	51
4.12	Domínio Computacional $\Omega$ e malha triangular . . . . .	52
4.13	Solução para o problema de espalhamento eletromagnético, MEFG com ML	54
4.14	Solução para o problema de espalhamento eletromagnético,MEFG com MEM	55
4.15	Real e imaginária $q$ -convergência no MEFG com MEM e ML. . . . .	56
4.16	Campo magnético total em torno do cilindro, $q = 10$ , $\epsilon = 1.9\%$ . . . . .	56
4.17	Vistas dos termos diferentes de zero para o MEM e para o ML. . . . .	57
4.18	Número de interações versus erro relativo no MEFG com o MEM e ML. . . . .	57
4.19	Domínio Computacional $\Omega$ , coluna de concreto . . . . .	59
4.20	Malha triangular conforme - MEFG . . . . .	60
4.21	Solução para o problema da coluna de concreto em 2D . . . . .	61
4.22	Solução para o problema da coluna de concreto em 2D . . . . .	61
4.23	$h$ -convergência da solução do MEF . . . . .	62
4.24	$q$ -convergência da solução do MEFG . . . . .	62
4.25	Campo Magnético total, para MEFG com MEM, $h = \frac{1}{3}\lambda_0$ e $q = 8$ . . . . .	63
4.26	Campo Magnético total, para MEF com $h = 0.02\lambda_0$ . . . . .	63
5.1	Interface linear entre duas malhas não-conformes . . . . .	65
5.2	Transformação isoparamétrica dos segmentos de interseção em $\Gamma$ . . . . .	68
5.3	Interface curvilínea entre duas malhas não-conformes . . . . .	71
5.4	Malha triangular não-conforme . . . . .	73
5.5	Solução do problema de propagação de onda, NC-MEFG com ML . . . . .	74
5.6	Solução do problema de propagação de onda, NC-MEFG com MEM . . . . .	74
5.7	Real e imaginária $q$ -convergência da solução do NC-MEFG com MEM e ML. . . . .	75
5.8	Solução problema do guia de onda de placas paralelas . . . . .	76
5.9	Linhas equipotenciais . . . . .	76
5.10	Solução do problema do guia de placas paralelas . . . . .	77
5.11	Linhas equipotenciais . . . . .	77
5.12	A malha triangular utilizada nos cálculos. . . . .	78
5.13	Solução para o problema de espalhamento eletromagnético, NC-MEFG-ML . . . . .	79

5.14	Solução para o problema de espalhamento eletromagnético, NC-MEFG-MEM .	79
5.15	Real e imaginária $q$ -convergência da solução do NC-MEFG com MEM e ML.	80
5.16	Vistas dos termos diferentes de zero para os métodos MEM e para o ML. . . .	80
5.17	Malha triangular não conforme . . . . .	81
5.18	Solução para o problema da coluna de concreto em 2D . . . . .	82
5.19	Solução para o problema da coluna de concreto em 2D . . . . .	82
5.20	Real e imaginária $q$ -convergência da solução do NC-MEFG com MEM e ML.	83
5.21	Campo Magnético total, para NC-MEFG . . . . .	83

# Lista de Símbolos

$\epsilon$	Erro relativo
$\lambda$	Vetor com os coeficientes do ML
$\varphi$	Curva parametrizada
$\chi_j$	Espaços de aproximações locais
$\epsilon_{r_a}$	Permissividade relativa em $\Omega_a$
$\epsilon_{r_b}$	Permissividade relativa em $\Omega_b$
$\epsilon_r$	Permissividade relativa do meio
$\Gamma$	Interface entre meios
$\Gamma_1$ e $\Gamma_2$	Fronteiras
$\Gamma_{h_a}$	Triangulação de $\Omega_a$ sobre $\Gamma$
$\Gamma_{h_b}$	Triangulação de $\Omega_b$ sobre $\Gamma$
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange
$\lambda_0$	Comprimento de onda no espaço livre
$\lambda_a$	Comprimento de onda no domínio $\Omega_a$
$\lambda_b$	Comprimento de onda no domínio $\Omega_b$
$C_a^{loc}$	Matrizes locais calculada para as integrais de linhas sobre $\Gamma$
$C_b^{loc}$	Matrizes locais calculada para as integrais de linhas sobre $\Gamma$
$C_{al}$	Matriz calculada para as integrais de linhas sobre $\Gamma$ na direção $l$



$C_a$ e $C_b$	Matriz do sistema linear discretizado sobre $\Gamma$
$C_{bl}$	Matriz calculada para as integrais de linhas sobre $\Gamma$ na direção $l$
$E$	Vetor com os graus de liberdade do campo
$f$	Vetor $n \cdot q \times 1$ do sistema linear discretizado
$H$	Matriz relacionada a interface $\Gamma$
$H_l$	Matriz ponte entre $C_{al}$ e $C_{bl}$
$Id$	Matriz identidade
$J_n$	Primeira função de Bessel de ordem $n$
$M$	Matriz $n \cdot q \times n \cdot q$ do sistema linear discretizado
$P$	Vetor com as oscilações das novas funções de forma
$Q$	Vetor com as oscilações das novas funções de forma em $\Gamma$
$u$	Vetor com os graus de liberdade
$u_a^0$	Vetores com os graus de liberdade fora de $\Gamma$ em $\Omega_a$
$u_b^0$	Vetores com os graus de liberdade fora de $\Gamma$ em $\Omega_b$
$u_a^\Gamma$	Vetores com os graus de liberdade relativos aos nós de $\Gamma$
$u_b^\Gamma$	Vetores com os graus de liberdade relativos aos nós de $\Gamma$
$Y_n$	Segunda função de Bessel de ordem $n$
$\mu_{r_a}$	Permeabilidade relativa em $\Omega_a$
$\mu_{r_b}$	Permeabilidade relativa em $\Omega_b$
$\Omega$	Domínio
$\Omega_a$	Subdomínios
$\Omega_b$	Subdomínios
$\Omega_e$	Elemento triangular
$\omega_j$	<i>Região de influência</i>

$\Phi$	Vetor com o valores da funções de forma nodais
$\phi_i^j$	Função de aproximação enriquecidas
$\psi$	Função de enriquecimento
$\psi_l^{u_i}$	Função de enriquecimento no nó $i$
<b>B</b>	Matriz obtida com MEF para elemento físico
<b>B*</b>	Matriz obtida com MEF para elemento de referência
<b>B<sub>e</sub>*</b>	Matriz obtida com MEFG para elemento de referência
<b>B<sub>e</sub></b>	Matriz obtida com MEFG para elemento físico
<b>C<sub>n</sub></b>	Coberturas abertas
<b>H</b>	Inversa da matriz Jacobiana
<b>J</b>	Matriz Jacobiana
$\varphi_j$	Função partição da unidade
$\tilde{\mathbf{H}}$	Matriz de acoplamento global
$B$	Forma Bilinear
$b_l^{u_i}$	Parâmetros adicionais devido ao enriquecimento
$f$	frequência
$g_1$ e $g_2$	funções de condições de contorno
$h$	Tamanho da malha
$h_a$	Tamanho da malha em $\Omega_a$
$h_b$	Tamanho da malha em $\Omega_b$
$I$	Intervalo fechado
$I(j)$	Conjunto de índices
$k$	Número de onda
$k_1, k_2$	Constantes

$k_a$	Número de onda em $\Omega_a$
$k_b$	Número de onda em $\Omega_b$
$K_e$	Matriz de rigidez local
$L$	Forma linear
$n^\Gamma$	Número de nós em $\Gamma$
$n_a^\Gamma$	Número de nós em $\Gamma_{h_a}$
$n_b^\Gamma$	Número de nós em $\Gamma_{h_b}$
$P_{il}^e$	Funções de forma enriquecidas
$q$	Número de funções de enriquecimento
$S_e$	Espaço das funções de enriquecimento
$U$	Vetor com os graus de liberdade
$u^{enr}$	Aproximação pelas funções de enriquecimento
$u^h$	Aproximação da solução $u$
$U_e^{k,q}$	Espaço local de combinações lineares de ondas planas
$u^{MEF}$	Aproximação pelo MEF
$u_a$	Solução aproximada do campo em $\Omega_a$
$u_b$	Solução aproximada do campo em $\Omega_b$
$u_I$	Campo incidente
$u_s$	Campo espalhada
$v$	funções de tese
$W_{local}^{k,q}$	Espaço da funções de onda plana
$w_k^l$	Funções de ondas planas

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação e Estado da Técnica

A equação bidimensional (2-D) de Helmholtz aparece em uma variedade de fenômenos físicos e aplicações da engenharia, tais como *radiação acústica* e *propagação de ondas eletromagnéticas*. No eletromagnetismo, a equação de Helmholtz, muitas vezes aparece como a equação governante para problemas de *guia de onda* e espalhamento bidimensional. Vários pesquisadores, têm se dedicado ao desenvolvimento de métodos eficientes para análise de problemas de *propagação de ondas eletromagnéticas*. Dentre os diversos *métodos numéricos* o Método de Elementos Finitos (MEF), disponível através de diversos *SOFTWARES* comerciais, [1, 2] se apresenta como um dos mais utilizados para resolver esta equação, solucionar problemas de eletromagnetismo e de várias outras áreas dada sua simplicidade e capacidade de proporcionar soluções próximas da solução analítica, [3, 4, 5]. Apesar disso, o MEF, conforme Belytschko, Lu e Gu [6], pode apresentar algumas limitações como:

- o custo computacional da geração de malha de elementos, fato ainda mais notável na análise de estruturas tridimensionais;
- o refinamento do tipo  $h$  (introdução de novos pontos nodais no domínio) numa região exige a construção de uma nova malha de elementos finitos;
- repetitiva e custosa alteração da malha necessária na simulação de singularidades ou problemas com características especiais, de forma a se evitar a ocorrência de elementos distorcidos;

- Sensibilidade à distorção dos elementos;
- O emprego de funções polinomiais para a construção da aproximação da solução exige um grande refinamento da cobertura em problemas que contenham singularidade ou quando se pretende obter uma boa aproximação envolvendo problemas de propagação de ondas em domínios eletricamente grandes, o que eleva o custo computacional;
- Perda de precisão nos níveis superiores de derivadas da aproximação, é o caso, principalmente de problemas que envolvam regiões com singularidade.

Por isto, durante as últimas décadas, muitos esforços têm sido direcionados na tentativa de criar métodos numéricos *não-convencionais* que combinem boa capacidade de aproximação com baixo custo computacional para análise de *problemas eletromagnéticos*. Como o caso do *refinamento  $p$*  do MEF, que permite aumentar a precisão da solução aproximada sem a necessidade de refinamento da malha, porém exige a determinação de novas funções de forma de grau mais elevado a cada etapa. Além disso, o mal condicionamento de funções de ordem elevada é relatado por alguns autores, [7, 8].

Uma alternativa que surgiu nos últimos anos e que é uma das principais fontes de estudo deste trabalho são os métodos baseados no enriquecimento da Partição da Unidade (PU) pela adição de funções não necessariamente polinomiais, relacionadas à solução da equação diferencial do problema.

Destes métodos destacam-se o Método dos Modos Admissíveis (MMA) [8, 9], o Método Composto (MC) [10, 11, 12], o MEF  $p$ -Fourier e MEF Fourier [13]. Estes métodos são basicamente uma combinação do MEF com a precisão das soluções analíticas. Cada um deles é obtido utilizando o elemento convencional do MEF, com o conjunto de funções de forma enriquecidas pela adição de funções não polinomiais relacionadas às soluções analíticas do problema. Um exemplo é o MC, que é uma nova variação do MEF proposta por Zeng em [10, 11, 12] para análise de vibrações em estruturas. Este método combina o MEF convencional com a Teoria Clássica, TC, que por sua vez apresenta a solução para a equação diferencial que rege o problema. Em geral, a solução para esta categoria de equações é obtida através de séries. A limitação desta abordagem diz respeito a dificuldade e a complexidade de se obter solução para condições de contorno diversas.

Tipos de refinamentos deste método:

- Refinamento  $h$ : é semelhante a abordagem de análise no MEF, onde utiliza-se uma sequência de malhas com o mesmo tipo de elemento e o tamanho deste diminui uniformemente;
- Refinamento  $c$ : corresponde ao aumento do número de funções de interpolação, através da inclusão de novos termos da série correspondentes à solução da TC.

Estes métodos permitem a imposição das condições de contorno de forma simples, utilizando os mesmos procedimentos do MEF, e têm se mostrado mais precisos e com menor custo computacional do que o refinamento  $h$  do MEF convencional na análise de problemas. No entanto, as funções da TC devem satisfazer certas condições de contorno específicas, de forma a não alterar o valor da aproximação nodal obtido pelo MEF.

Em 1996 foi desenvolvido o Método da Partição da Unidade (MPU) [14, 15], como uma técnica otimizada de enriquecimento. Atualmente o conceito de aproximação pela PU é usado em vários sentidos, segundo nomes diferentes: Método de Elementos Finito Estendidos, MEFE [16, 17], o Método de elementos Finitos sem Malha [18], o Método de Esferas Finitas [19] e o Método das Nuvens HP(Hp-Clouds) [20, 21]. Estes métodos diferem basicamente no tipo das funções que são usadas para formar a partição da unidade e na escolha de espaços locais de funções de enriquecimento.

A partir do MPU surgiram diversos métodos também baseados na PU, entre eles o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), que a princípio foi referenciado como MPU [14, 15, 22], e só mais tarde foi formalmente apresentado como MEFG em [23, 24].

A base do subespaço de aproximações locais do MPU, é constituída por funções PU e suas combinações com funções de enriquecimento que não são necessariamente polinomiais mas que refletem informações disponíveis a priori sobre a solução da equação diferencial. Esta metodologia garante boa aproximação local e global. Sua principal vantagem é:

- Flexibilidade na construção do seu espaço de aproximação, através de funções de enriquecimento que venham a refletir o comportamento local da solução da equação diferencial com a regularidade desejada e refinamentos locais facilmente implementados.

Entretanto, o MPU apresenta alguns desafios que compreendem:

- Escolha adequada do espaço de funções de aproximação local;
- Imposição das condições de contorno essenciais, uma vez que os graus de liberdade utilizados não correspondem diretamente aos graus de liberdade nodais do MEF;
- Construção adequada do esquema de integração dos coeficientes das matrizes do sistema resultante.
- Mal condicionamento dos sistemas de equações;
- Tratamento de descontinuidade na solução ou no domínio computacional.

O MEFE e o MEFG são métodos basicamente idênticos: O nome MEFG, foi adotado pelo grupo da universidade do Texas [22, 15, 20] em 1995-1996 e o MEFE foi dado pelo grupo da escola Northwestern [25, 26] em 1999. MEFE foi desenvolvido para tratar descontinuidades, tais como fissuras e usado enriquecimentos locais. Os primeiros trabalhos no MEFG envolvem o enriquecimentos globais do espaço de aproximação. No entanto, já em 2000, o enriquecimento local foi utilizado em singularidades do tipo cantos afinados [27]. Estes métodos que envolvem funções de enriquecimento são aplicados em problemas com singularidades em cantos, camadas de fronteira, e melhores aproximações para as equações de Laplace e Helmholtz.

MEFE/MEFG pode ser usado com malhas estruturadas e não estruturadas. Malhas estruturadas são atraentes para muitos estudos na ciência de materiais onde o objetivo é o de determinar as propriedades de uma célula unitária do material. Por outro lado, embora alguns métodos em desenvolvimento atualmente, sejam capazes de tratar geometrias complexas com malhas estruturadas [28], malhas desestruturada tendem a ser amplamente utilizado na análise de estruturas e componentes de engenharia, uma vez que é frequentemente desejável que a malha seja conforme com as fronteiras externas do componente.

Em [29], Alves e Rosi usaram uma extensão do Método da Partição da Unidade Elemento Finito, MPUEF e procedimentos numéricos para resolver problemas de plasticidade. A proposta do método é baseada no Métodos Mínimos Quadrados Móveis, MMQM e também é capaz de resolver esta classe problemas com singularidade.

Bacuta e Sun em [30] buscaram encontrar estratégias para escolher conjuntos de funções PU ótimas ou quase-ótimas na resolução de problemas elípticos em malhas não congruentes.

Várias pesquisas em especial na Engenharia Mecânica comprovam a eficiência do MEFG baseado na PU para resolver problemas, como análise de trincas [31] e plasticidade [32], entre outros.

Usando uma malha cartesiana Strouboulis, Babuška e Hidajat apresentaram em [33, 34] a eficiência do MEFG com o enriquecimento por ondas planas para tratar problemas de espalhamento de ondas planas incidentes em cilindros circulares.

As principais idéias e a formulação do MEFG foram apresentadas em [35, 22, 24]. Para problemas que são governados pela equação de Helmholtz, os trabalhos de [36, 33, 34] utilizaram o MEFG com malhas de elementos finitos e o enriquecimento dado pelas funções de ondas planas ou as funções de Hankel na construção da base de funções de aproximação local. Nestes trabalhos, problemas de propagação de onda e de multi espalhamento são utilizados para validar o MEFG.

Ao se fazer uso das funções de forma padrão do MEF como PU no MEFG obtém-se uma vantagem útil na aplicação de ambas as condições de contorno de Neumann e condições de contorno mistos, pois o procedimento para impor tais condições de contorno é tão simples como o que é feito no método MEF padrão [2, 1]. Esta é uma vantagem particular, considerando as dificuldades que muitos procedimentos do tipo sem malha encontram na implementação destas condições de contorno. Por outro lado, pode-se notar que praticamente não existem estudos disponíveis que apresentem propostas naturais para garantir as condições de contorno de Dirichlet no MEFG.

Lu e Shanker em [37] exploraram a aplicabilidade do MEFG para sistema de Helmholtz em duas dimensões e investigaram métodos necessários para impor diferentes condições de con-



torno. Eles concluíram, que para fazer esse método realmente aplicável a uma ampla classe de problemas em eletromagnetismo, é necessário o uso funções de forma vetoriais. Além disso, um outro desafio está relacionado ao desenvolvimento de técnicas para incorporar condições de interface entre materiais.

Um dos principais desafios dos métodos de elementos finitos com enriquecimento é saber como escolher funções de enriquecimento que capturam a natureza da solução das equações. Em [38] apropriadas decomposições ortogonais são usadas no MEFG para definir as funções formas enriquecidas. Em nossos estudos, onde o objetivo é resolver o problema de Helmholtz, estaremos a princípio, usando as funções de ondas planas para construir o espaço de aproximação local enriquecido e em seguida queremos propor novas funções de enriquecimento para construir este espaço.

No MEFG, em geral utiliza-se nos cálculos dos coeficientes do sistemas integração numérica. Ortiz e Sanchez tomando como base o método de integração desenvolvido por eles próprios para ondas de difração [39], apresentaram em [40] contribuições relacionadas ao cálculo de integrais. Tal método, foi estendido em [40] para combinar ondas de refração e difração de alta frequência, obtendo uma economia drástica no número de operações para um determinado erro em comparação com o métodos de integração numérica padrão.

O MEFG aplicado a problemas de espalhamento de ondas usado por vários autores, em especial para tratar com a equação de Helmholtz têm sido muito bem sucedidos, em termos de reduções drásticas do número de graus de liberdade no modelo numérico. No entanto, a maior parte deles não são diretamente aplicáveis aos problemas envolvendo diferentes tipos de materiais. Em [41] foi desenvolvido um método baseado no Multiplicador de Lagrange (ML) para lidar com problemas homogêneo por partes nas diferentes, regiões do domínio computacional do problema. Neste caso, o ML é usados para garantir as condições de continuidade entre estas regiões. O tratamento de problemas com interface de materiais é um aspecto de contribuição importante. Usando o MEF aliado a técnicas como ML [42] e Método de elementos Mortar, MEM [42, 43] é possível garantir a continuidade entre os diferentes meios.

Rochus e Rixen em [44] mostraram a eficiência do MEFE que tem por característica principal o enriquecimento local, em tratar de problemas com singularidade local. Podemos dizer que este método é um caso particular do MEFG. Funções de enriquecimento foram construídas levando em conta a singularidade local do problema, uma delas foi baseada no conceito de

função enriquecimento dado em [45] e a outra foi feita por meio de sucessivas transformações de coordenadas para elementos cortados pela singularidade, chamados de elementos estendidos. Devido a sua versatilidade o MEFG vem sendo empregado em problemas caracterizados por descontinuidades, singularidades, deformações localizadas e geometrias complexas, simplificando a solução, por exemplo, de problemas que envolvem propagação de trinca [46]. Aqui também é importante dizer que o sistema de equações resultante do MEFG em geral é mal condicionado, [41, 47] e este é outro ponto de investigação pouco explorado.

Outras características importantes do MEFG:

Características oriundas do MEF:

- Simplicidade na geração da PU devido à utilização da interpolação lagrangiana;
- A discretização do domínio em elementos finitos é a mesma usada para a integração numérica;
- Existe uma gama enorme de códigos para o MEF que podem ser utilizados para a implementação do MEFG

Características oriundas dos métodos sem malha:

- Permite um enriquecimento optando-se por funções que melhor representam o comportamento da solução exata do problema, possibilitando uma melhor taxa de convergência da solução;
- Maior facilidade de refinamento  $p$ , acrescentando novos parâmetros aos nós já existentes
- Possibilidade de enriquecer a aproximação em apenas uma região delimitada do domínio global sem comprometimento da conformidade entre os elementos.

## 1.2 Metas e principais contribuições

Dentre os vários desafios apresentados, optou-se por ampliar as técnicas de tratamento de interface de materiais no MEFG. A primeira contribuição deste trabalho está relacionada ao

mal condicionamento do sistema de equações em [41]. O Mortar Element Method (MEM) [48, 42, 43] tipicamente usado no MEF teve sua principal idéia estendida para o MEFG no tratamento de problemas de propagação e espalhamento de ondas com descontinuidade de materiais. Neste caso, obteve-se resultados com a mesma precisão do MEFG com ML e uma considerável redução no número de graus de liberdade. Além disso, o sistema resultante é esparso e positivo definido [47] e por conseguinte, pode ser eficientemente resolvido por uma grande variedade de métodos.

Em problemas onde o domínio é composto por diferentes materiais, o espaço do MEFG não coincide nas interfaces entre os diferentes meios, o que leva a uma descontinuidade devida a mudança no número de onda. A solução usual consiste em introduzir ML para impor as condições de interface [49, 41, 47]. No entanto, caso o domínio global seja bastante complexo, mesmo com tais técnicas podem tornar-se inviáveis usando MEFG [50]. Neste contexto, técnicas não conforme que venham garantir com eficiência as condições de interface, sem sacrificar a precisão do MEFG, podem ser úteis para viabilizar o uso de malhas independentes especialmente em regiões onde a geometria do problema exige maiores cuidados. Tais abordagens, permitem modelar cada sub-região independentemente.

Motivados pelos trabalhos desenvolvidos para o MEF não conforme [51, 50, 43] foi possível estender as idéias do MEFG com ML [41, 47] para o que chamou-se de não conforme MEFG (NC-MEFG), mantendo o mesmo nível de precisão do MEFG conforme. Problemas com interfaces lineares ou seccionalmente lineares podem agora serem tratados usando malhas independentes em sub-regiões do domínio computacional usando toda a formulação original do MEFG. Além disso, foi também possível dentro NC-MEFG usar a extensão MEM [47] para garantir as condições de continuidade na interface entre as malhas não conforme, com os mesmos resultados obtidos no MEFG. Motivados pelos trabalhos [52, 53] e utilizando esquemas de integração especiais e mapeamentos a abordagem não conforme do MEFG pode então ser ampliada a problemas onde a interface entre os meios é curvilínea e parametrizável.

### 1.3 Esboço do Trabalho

Após esta introdução, será feita uma revisão do MEFG no Capítulo 2. Aqui serão apresentados os principais conceitos e a formulação do MEFG. O MEFG com enriquecimento por funções de onda planas e malhas triangulares, será apresentado e analisado no Capítulo 3. Para o

enriquecimento com funções de ondas planas será utilizado o método de integração de Gauss de alta ordem no cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez do MEFG.

O tratamento de descontinuidade no MEFG com as abordagens do ML e do MEM, será apresentado e analisado no Capítulo 4. As duas abordagens serão confrontadas quando aplicadas a problemas de propagação e espalhamento de ondas. Por outro lado, no Capítulo 5, será apresentado e analisado NC-MEFG com enriquecimento por funções de ondas planas, considerando interfaces lineares ou seccionalmente lineares e interface curvilíneas. Pretende-se na seção de resultados comprovar a eficiência do NC-MEFG com o ML e o MEM comparado aos resultados obtidos pelo MEFG com o ML e o MEM.

## Capítulo 2

# Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG)

Neste capítulo, é apresentado a base teórica do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) mostrando que este pode ser interpretado como uma generalização do Método dos Elementos Finitos Clássicos (MEF) através de conceitos extraídos das formulações sem malha [54].

O MEFG baseia-se nas metodologias que constroem o espaço de aproximação por enriquecimento explícito da PU, pode também ser visto como uma extensão do MEF, o que entre outras coisas, torna possível obter solução precisa dos problemas definidos em domínios complexos. Esta metodologia foi desenvolvida simultaneamente por Melenk e Babuška [14], no artigo *The Partition of Unity Method (PUM)* e por Duarte e Oden [20], com o nome *hp-Clouds* ambos possuem como principal característica a capacidade de incluir ao espaço de aproximação, informações sobre a equação diferencial parcial a ser resolvida [55]. Utilizando os conceitos do PUM e do Método de Nuvens *hp* gera-se uma malha que serve apenas para definir uma PU e um domínio onde será utilizado a integração numérica. Uma vez definida a PU realiza-se então o enriquecimento das funções de forma, responsáveis pela qualidade das metodologias que constroem o espaço de aproximação por enriquecimento da PU. O elo entre as metodologias supracitadas foi apresentado no trabalho de [54] e depois consolidada no trabalho de [56]. Assim como no PUM e no *Método das Nuvens hp*, o espaço de aproximação do MEFG é formado pelo produto da PU, por funções de enriquecimento que apresentam boas propriedades de aproximação. O que difere um método do outro é o tipo de função de enriquecimento que será utilizado. A principal característica dos Métodos da Partição da Unidade é sua habilidade

em utilizar conhecimento a priori sobre a solução de um problema na forma das suas funções de enriquecimento.

## 2.1 Partição da Unidade PU

Tendo em vista que o MEFG possui características do Método das *Nuvens hp*, ressalta-se o conceito de *nuvem* ou *região de influência*  $\omega_j$  de um dado nó. Neste trabalho, dado um domínio, as nuvens nodais são definidas pelos conjuntos de elementos que compartilham um nó em comum. A Fig.2.1 ilustra este conceito com elementos triangulares atrelados ao nó  $x_j$  de uma malha regular de elementos finitos triangulares que cobre o domínio  $\Omega$ .

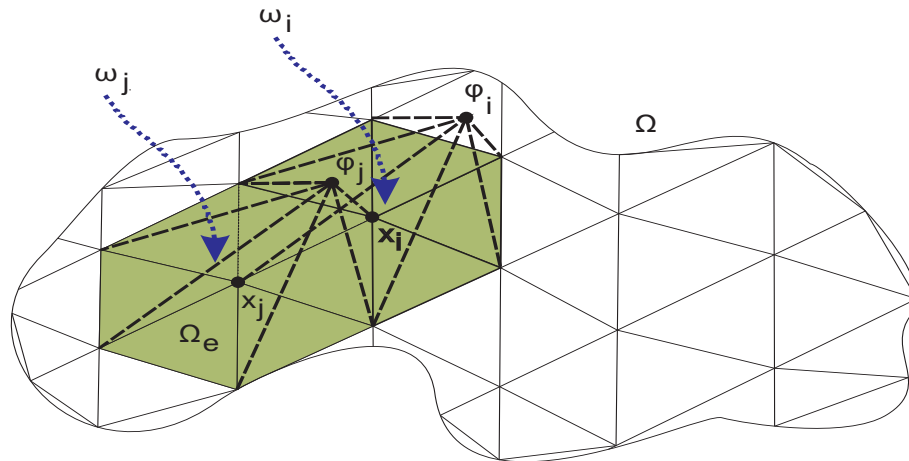


Figura 2.1: Partição da Unidade e *região de influência*  $\omega_j$  do nó  $x_j$ .

Um outro conceito importante na construção das funções de forma do MEFG é o de PU [57]. A PU em um domínio  $\Omega$ , é um conjunto de funções cujo somatório corresponde a 1, isto é,

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j(x) = 1, \forall x \in \Omega, \quad (2.1)$$

onde  $n$  corresponde ao número de pontos nodais. Formalmente, o conjunto de funções de  $\varphi_j$  definidas na *região de influência*  $\omega_j$  que contêm o ponto  $x_j$ , constitui uma PU caso satisfaça a condição dada pela Equação (2.1) e as seguintes outras condições:

- Estas funções pertencem ao conjunto de funções para as quais  $\omega_j$  é um suporte compacto, isto é, as funções  $\varphi_j$  e suas derivadas assumem valores não-nulos somente no interior da região  $\omega_j$ ;

- $\varphi_j(x) \geq 0$  em  $\Omega$  e
- Todo subconjunto compacto de  $\Omega$  intercepta apenas um número finito de suportes de  $\omega_j$ .

Da Equação (2.1), obtém-se uma nova equação conhecida como propriedade de reprodução de funções, fundamental na construção das funções de formas de vários métodos

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j(x) \psi(x) = \psi(x), \forall x \in \Omega, \quad (2.2)$$

onde  $\psi(x)$  pode ser chamada de função de enriquecimento.

A principal diferença entre o MEFG e os métodos sem malha que utilizam a PU, é que a PU do MEFG pode ser construída utilizando as mesmas funções de forma do MEF convencional, visto que as funções lagrangeanas também formam uma PU, pois elas satisfazem a Equação (2.1). Portanto a implementação do MEFG é muito semelhante a do MEF tradicional, diferenciando-se apenas na definição das funções de forma. Tal fato, facilita muito a estratégia de integração em comparação com os métodos sem malha [58]. Neste trabalho o MEFG foi implementado usando as funções de forma nodais de primeira ordem clássicas do MEF, como PU.

## 2.2 Enriquecimento da Partição da Unidade

Na Fig. 2.2, encontram-se representados a PU de ordem 1 (função bi-linear) geradora de uma aproximação  $C^0$ , uma função especial arbitrária e o resultado do produto entre essas duas funções. O enriquecimento é realizado em cada *região de influência*  $\omega_j$ , mediante o produto da PU associada a cada nó base, por funções de enriquecimento com características de boa representatividade da função solução. A última apresenta as características de aproximação da função especial e herda o suporte compacto da PU. Dessa forma, consegue-se, que a aproximação global, obtida em um dado elemento pela combinação das funções produtos relativas a cada nó, seja construída sem perda de continuidade (no caso do tipo  $C^0$ ) entre os elementos, que, portanto, permanecem conformes.

Considere então, o conjunto das funções  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , subordinada à coberturas abertas  $\mathbf{C}_n = \{\omega_j\}_{j=1}^n$  do domínio  $\Omega$ .

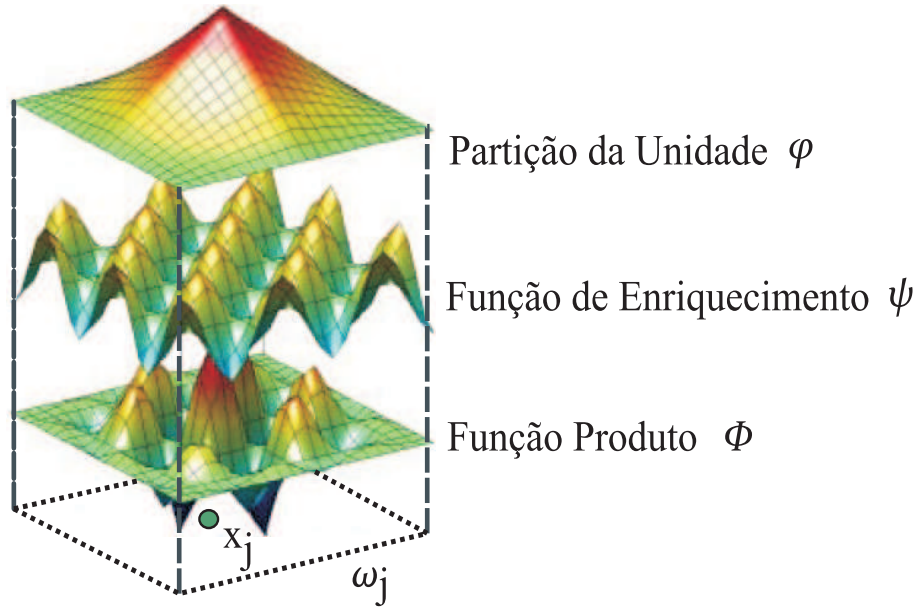


Figura 2.2: Função de forma do MEFG usando uma função de enriquecimento.

Seja  $\chi_j(\omega_j) = \text{span} \{ \psi_{ij} \}_{i \in I(j)}$  os espaços locais definidos em uma base para  $\omega_j$ , onde  $I(j)$  são conjuntos de índices relacionados ao número de funções adicionadas a cada nó de índice  $j$  e  $\{ \psi_{ij} \}_{i \in I(j)}$  uma base para o espaço  $\chi_j(\omega_j)$ . Funções  $\psi_{ij}$  são as chamadas funções de enriquecimento ou funções de aproximação locais.

As funções de aproximação associadas a um nó  $x_j$  são então definidas por:

$$\phi_i^j = \varphi_j \psi_{ij}, i \in I(j). \quad (2.3)$$

Observa-se então que diferentes escolhas são possíveis para as funções de enriquecimento e cada qual conduzirá a diferentes classes de funções de aproximação. Neste trabalho, para enriquecer o espaço de elementos finitos, será usado uma das soluções analíticas da equação de Helmholtz homogêneas, isto é, as ondas planas.

## 2.3 Funções de Enriquecimento

Pode-se dizer que a seleção de funções de enriquecimento para um determinado espaço local, depende da característica da solução do problema que se deseja aproximar sobre este domínio. Em problemas com características especiais ou onde o domínio é composto por diferentes tipos materiais, o que provoca uma descontinuidade, sabe-se que o uso de funções suaves,



implica em aproximações não satisfatórias. Para estes casos, funções de enriquecimento locais com características de boa representatividade da função solução podem melhorar a precisão da aproximação da solução do problema estudado. Sendo assim, o comportamento da solução do problema pode ser então aproximado de forma local em virtude da sua descontinuidade ou de sua característica especial e de forma global independentemente. O comportamento global pode ser representado por uma função contínua. Por outro lado, especificamente para problemas com características especiais ou descontinuidade, a aproximação local é feita com o uso de funções de enriquecimento que possam representar tais características locais da solução ou da descontinuidade introduzida na geometria do problema. A escolha das funções de enriquecimento é sem dúvida um importante ponto de investigação, porém, não foi o foco deste trabalho. Maiores detalhes a respeito de funções de enriquecimento especiais e estratégia de enriquecimento utilizados no MEFG podem ser encontrados em [59, 60, 61, 62]. Nestes trabalhos funções especiais que representam bem as características locais de singularidades são utilizadas como funções de enriquecimento no MEFG/MEFE para resolver problemas, por exemplo, problemas de fissuras. As principais contribuições deste trabalho estão diretamente ligadas ao desenvolvimento para o MEFG de métodos capazes de garantir a continuidade para problemas com diferentes tipos de materiais.

A Fig. 2.3 ilustra o conceito de enriquecimento no MEFG unidimensional. A função a ser aproximada pelo MEFG, poder ser uma função com gradientes fortes, quinas ou um salto. Cada uma destas características locais podem ter uma correspondência física. Um exemplo disto são os problemas cujo o domínio é composto por diferentes materiais. Na análise global, muitos autores utilizam o ML para assegurar as restrições de interface. O estudo e desenvolvimento de métodos que garantam as condições de interface em domínios conformes e não conformes, também são considerados pontos importantes a serem trabalhados.

## 2.4 Espaço de Aproximação no MEFG

As funções  $\psi_{ij}$  são a princípio, arbitrárias podendo formar conjuntos de monômios completos ou não, ou mesmo ser definidas a partir de um conhecimento *a priori* da solução. São aproximações locais que devem representar bem a solução sobre o suporte a elas associado. Uma vez que a PU permite que as funções introduzidas possam ser reproduzidas a partir de combinações lineares das funções de aproximação definidas pela Equação (2.3), tem-se:

$$\{\psi_{ij}, \psi_{ij+1}\}_{i \in I(j)} \in \langle S_e \rangle, \quad (2.4)$$

onde  $S_e$  representa o espaço das funções definidas na Equação (2.3) no elemento  $\Omega_e$ .

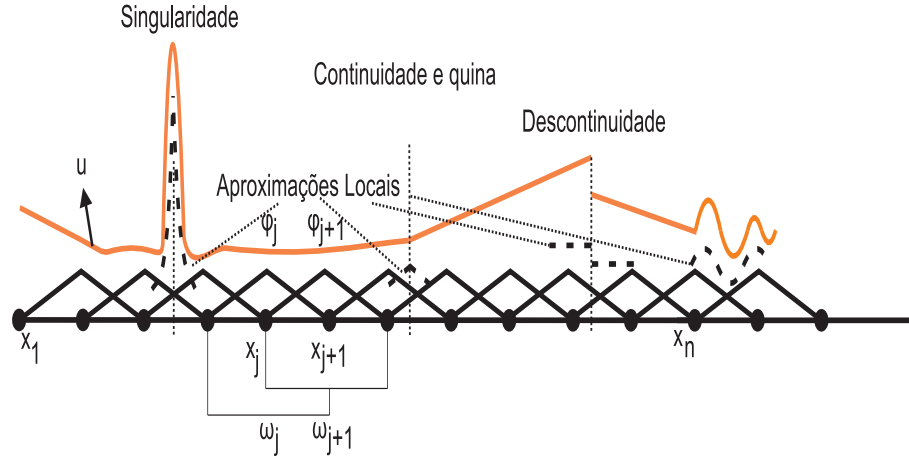


Figura 2.3: Representação 1D das funções PU e diferentes aproximações locais.

Utiliza-se, então, a PU para construir espaços de aproximação local, cujas funções podem ser reproduzidas em cada elemento como parte da aproximação global. Dessa forma, pode-se definir o espaço de aproximação para o MEFG:

$$\left\{ \{\varphi_j(x)\}_{j=1}^n \cup \{\varphi_j(x)\psi_{ij}(x)\}_{j=1}^n, i \in I(j) \right\}, \quad (2.5)$$

que será utilizado para construir a aproximação no MEFG:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) \left\{ u_j + \sum_{i=1}^{q_j} \psi_{ij}(x) b_{ij} \right\} = u^{MEF}(x) + u^{enr}(x) = \Phi^T U, \quad (2.6)$$

onde  $q_j$  representa o número de funções de enriquecimento  $\psi_{ij}$  utilizadas em cada nó,  $u^{MEF}$  é a aproximação clássica do MEF,  $u^{enr}$  é o enriquecimento da PU e

$$U^T = \left[ u_1 \quad b_{11} \quad \dots \quad b_{1q_1} \quad \dots \quad u_n \quad b_{n1} \quad \dots \quad b_{nq_n} \right] \quad (2.7)$$

$$\Phi^T = \left[ \varphi_1 \quad \psi_{11}\varphi_1 \quad \dots \quad \psi_{1q_1}\varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_n \quad \psi_{n1}\varphi_n \quad \dots \quad \psi_{nq_n}\varphi_n \right]. \quad (2.8)$$

Pela maneira com que se realiza o enriquecimento, pode-se observar que caso as funções de enriquecimento  $\psi_{ij}$  utilizadas sejam todas polinomiais, chega-se a uma aproximação sem *costura* [58], isto é, não há necessidade de estabelecer condições de restrição que garantam a continuidade dos campos aproximadores entre cada elemento, como ocorre no MEF hierárquico, [63].

Um problema proveniente dessa estratégia de enriquecimento é a possibilidade de se obter um espaço (Equação (2.5)) formando um conjunto de funções linearmente dependentes, [58].

Em geral, isto ocorre basicamente em virtude do uso de monômios para enriquecer uma PU polinomial. Isto não acontece no Método das Nuvens *hp*, em que a PU é construída por funções não polinomiais, ou polinomiais por setores. Como consequência imediata desse fato é que o sistema de equações gerado passa a apresentar uma matriz de rigidez semi-definida positiva. Tal problema pode ser contornado empregando-se as estratégias numéricas sugeridas em [64], entre elas um método iterativo conhecido como procedimento de Babuška [65] em que se produz uma pequena perturbação na matriz de rigidez e através de um procedimento iterativo, corrige-se a solução aproximada obtida para o novo sistema de equações.

A possibilidade de obter uma matriz de rigidez singular, comparado ao potencial do MEFG, a facilidade com que se realiza o enriquecimento e a possibilidade de introduzir novas funções na aproximação conforme o tipo de aplicação desejada é um preço razoável a ser pago para o uso do MEFG. Conclui-se portanto, que é vantajoso e eficiente aplicar o MEFG em problemas com domínio complexos, com singularidades, como no caso de meios com presença de descontinuidades. Sendo assim, torna-se possível a utilização da técnica de enriquecimento da aproximação em uma sub-região do domínio computacional de interesse, em substituição ao refinamento de malhas, típico do MEF clássico. Tal procedimento garante um ganho substancial no que diz respeito à rapidez da análise e qualidade de resposta se comparado à aproximação com bases polinomiais do MEF.

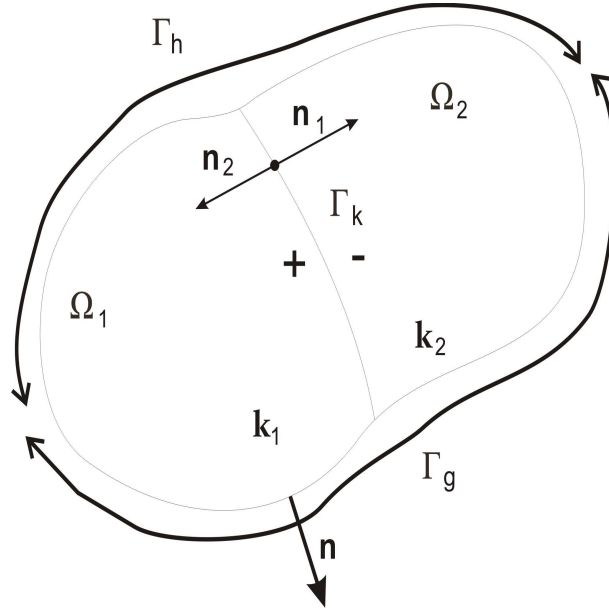
## 2.5 Formulação do Elemento Finito no MEFG

Dada a característica de definição das *nuvens* ou *região de influência*  $\omega_j$  no MEFG, as funções de forma do método podem ser construídas observando-se diretamente os elementos finitos. Nesse sentido toda a estrutura original do MEF clássico pode ser aproveitada.

No que segue, expõem-se as equações para a montagem do elemento sem enriquecimento e com enriquecimento. Para isto considera-se a forma forte generalizada para problemas estáticos 2D. O elemento finito utilizado neste trabalho é triangular linear em duas dimensões.

### 2.5.1 Elemento sem Enriquecimento

Dada um domínio  $\Omega$ , Fig.2.4, a função fonte  $f$ , os parâmetros de contorno  $g$  e  $h$  e as constantes  $k_1$  e  $k_2$ .


 Figura 2.4: Domínio  $\Omega$  com condições de contorno

O campo  $u : \Omega \rightarrow \Re$  satisfaz a equação de Poisson bidimensional

$$\nabla \cdot (k \nabla u) = f \quad \text{em } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (2.9)$$

$$u = g \quad \text{em } \Gamma_g \quad \textit{Dirichlet} \quad (2.10)$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h \quad \text{em } \Gamma_h \quad \textit{Neumann} \quad (2.11)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_1} = k_2 \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_2} \quad \text{em } \Gamma_k \quad \textit{Interface} \quad (2.12)$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados juntamente com o teorema da divergência, obtém-se a forma fraca

$$\int_{\Omega} k \nabla u \nabla v d\Omega = - \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma} v k \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma, \quad (2.13)$$

onde  $v$  é a função teste.

Para facilitar o equacionamento, será introduzido uma mudança de variável Equação (2.14), correspondente a uma transformação isoparamétrica do espaço físico  $(X, Y)$  e  $(\xi, \eta)$ , Fig. 2.5

$$\begin{aligned} x &= N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 \\ y &= N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3, \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  são as funções de forma do elemento finito triangular atreladas a cada nó, Equação (2.15).

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi - \eta \\ N_2 &= \xi \\ N_3 &= \eta. \end{aligned} \quad (2.15)$$

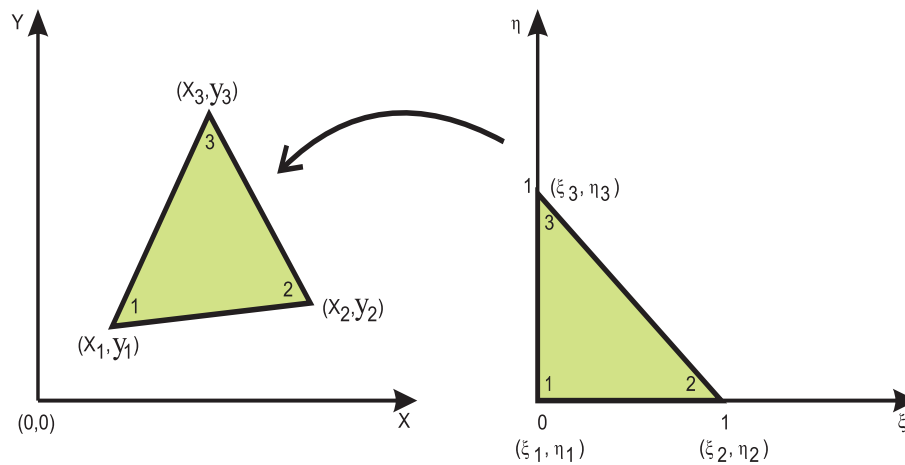


Figura 2.5: Mudança de coordenadas.

Assim, de acordo com a formulação isoparamétrica, a aproximação da solução  $u$  num ponto qualquer do elemento pode ser representada matricialmente por:

$$\mathbf{u}^h = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

onde  $u_i$ , são os graus de liberdade do nó  $i$ . Segue então que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{u}^h = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{u}^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

onde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Para que sejam utilizadas coordenadas  $(\xi, \eta)$  do elemento de referência, é necessário recorrer à regra da cadeia. De onde chega-se em

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

é a matriz Jacobiana, responsável pela transformação das coordenadas locais pelas coordenadas globais.

Novamente, utilizando a Equação (2.16) e explicitando as derivadas de  $\mathbf{u}^h$  em relação a  $x$  e a  $y$ , chega-se em:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

onde  $\mathbf{H}$  é definida como a matriz inversa da matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Da Equação (2.16) tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^* \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

onde

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Das Equações (2.19) e (2.25) resulta uma relação entre as matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{B}^*$  dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{H} \mathbf{B}^*. \quad (2.26)$$

A matriz de rigidez do elemento finito triangular é representada por:

$$K_e = \int \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T k \mathbf{B} dx dy, \quad (2.27)$$

Usando a mudança de variáveis definidas em Equação (2.14) chegamos em:

$$K_e = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (\mathbf{B}^*)^T k \mathbf{B}^* |\mathbf{J}| d\xi d\eta, \quad (2.28)$$

com

$$dx dy = |\mathbf{J}| d\xi d\eta. \quad (2.29)$$

## 2.5.2 Elemento com Enriquecimento

Para a formulação com o enriquecimento devido ao MEFM, considere o elemento finito triangular com os três nós enriquecidos Fig. 2.6.

A aproximação local da solução  $u$  relativa ao elemento triangular  $e$ , Fig. 2.6 é dada por:

$$u^h = \sum_{i=1}^3 N_i \left( u_i + \sum_{l=1}^{q(i)} \psi_l^{u_i} b_l^{u_i} \right), \quad (2.30)$$

onde

- $\psi_l^{u_i}$  é a função enriquecedora  $l$  do nó  $i$ ;

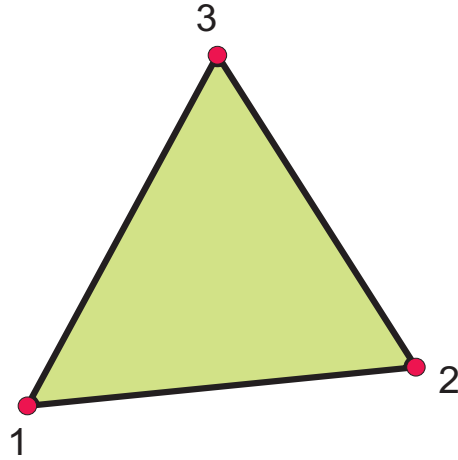


Figura 2.6: Elemento finito triangular com os três nós enriquecidos.

- $q$  é o número de funções enriquecedoras e
- $b_l^{u_i}$  é o parâmetro adicional  $l$  devido ao enriquecimento do nó  $i$ .

A forma matricial da Equação (2.30) de um nó arbitrário  $i$  pode ser representada por:

$$\mathbf{u}^h = \begin{bmatrix} N_1 & N_1\psi_1^{u_1} \cdots N_1\psi_q^{u_1} & N_2 & N_2\psi_1^{u_2} \cdots N_2\psi_q^{u_2} & N_3 & N_3\psi_1^{u_3} \cdots N_3\psi_q^{u_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ b_1^{u_1} \\ \vdots \\ b_q^{u_1} \\ u_2 \\ b_1^{u_2} \\ \vdots \\ b_q^{u_2} \\ u_3 \\ b_1^{u_3} \\ \vdots \\ b_q^{u_3} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$



Da Equação (2.30), obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_e \begin{bmatrix} u_1 \\ b_1^{u_1} \\ \vdots \\ b_q^{u_1} \\ u_2 \\ b_1^{u_2} \\ \vdots \\ b_q^{u_2} \\ u_3 \\ b_1^{u_3} \\ \vdots \\ b_q^{u_3} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

onde  $\mathbf{B}_e$  (matriz  $\mathbf{B}$  enriquecida)

$$\mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \dots \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \psi_1^{u_i} + N_i \frac{\partial \psi_1^{u_i}}{\partial x} & \dots \frac{\partial N_i}{\partial x} \psi_q^{u_i} + N_i \frac{\partial \psi_q^{u_i}}{\partial x} & \dots \\ \dots \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \psi_1^{u_i} + N_i \frac{\partial \psi_1^{u_i}}{\partial y} & \dots \frac{\partial N_i}{\partial y} \psi_q^{u_i} + N_i \frac{\partial \psi_q^{u_i}}{\partial y} & \dots \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Analogamente, temos a matriz  $\mathbf{B}_e^*$ , matriz  $\mathbf{B}^*$  enriquecida,

$$\mathbf{B}_e^* = \begin{bmatrix} \dots \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \psi_1^{u_i} + N_i \frac{\partial \psi_1^{u_i}}{\partial \xi} & \dots \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \psi_q^{u_i} + N_i \frac{\partial \psi_q^{u_i}}{\partial \xi} & \dots \\ \dots \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \psi_1^{u_i} + N_i \frac{\partial \psi_1^{u_i}}{\partial \eta} & \dots \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \psi_q^{u_i} + N_i \frac{\partial \psi_q^{u_i}}{\partial \eta} & \dots \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

A matriz de rigidez do elemento finito triangular enriquecido é representada também pela Equação (2.28). Numa malha de elementos finitos, a matriz de rigidez nodais devem ser formadas pela contribuição de cada elemento, lembrando que os graus de liberdades adicionais devem ser considerados no sistema resultante.

Com objetivo de avaliar e entender melhor o MEFG, no próximo capítulo as funções de ondas planas que são soluções particulares da equação de Helmholtz serão utilizadas para enriquecer as funções de forma lineares do MEF. Dessa forma, ficará definido o espaço de aproximação do MEFG e problemas envolvendo propagação e espalhamento de ondas serão resolvidos para validar o método. Além disto, algumas conclusões e observações também serão apresentadas.

# Capítulo 3

## Enriquecimento por Ondas planas

Muitos autores utilizam o MEFG para resolver a equação de Helmholtz, devido a sua capacidade de capturar grandes comprimentos de onda por espaçamento nodal em 2D e 3D. Tal abordagem baseia-se no enriquecimento do espaço de solução por soluções analíticas da equação de Helmholtz. Estas são geralmente sob a forma de ondas planas ou através das funções de Bessel. Neste capítulo, será abordado o método dos elementos finitos generalizados para a equação de Helmholtz. As funções de ondas planas serão usadas para enriquecer as funções de forma do elemento finito em cada vértice de uma malha triangular que cobre o domínio computacional com o suporte da PU. A precisão e a eficácia dos MEFG são determinadas comparando-se os resultados numéricos a problemas selecionados com solução analítica disponível ou comparando ao melhor resultado obtido pelo MEF.

### 3.1 Formulação do Problema

Considere o domínio limitado mostrado pela Fig.3.1. O campo  $u$  que independe do tempo satisfaz a equação de Helmholtz bidimensional

$$(\nabla^2 + k^2) u = 0 \quad em \quad \Omega, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} = g_1 \quad em \quad \Gamma_1 \quad (3.2)$$

e a condição de contorno de Robin

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_2} + jku = g_2 \quad em \quad \Gamma_2, \quad (3.3)$$

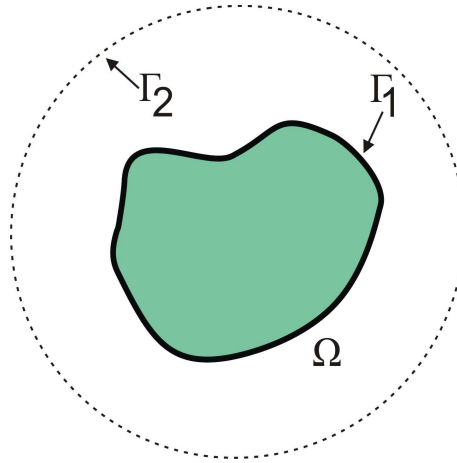


Figura 3.1: Domínio  $\Omega$  com fronteira interior  $\Gamma_1$  e fronteira exterior  $\Gamma_2$

onde  $k$  é o número de onda relacionado com o comprimento de onda  $\lambda$  por  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano,  $\Omega$  é o domínio bidimensional estudado,  $g_1$  e  $g_2$  correspondem as condições de contorno,  $j$  é o número complexo imaginário ( $j^2 = -1$ ) e  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  são as normais para fora à fronteira  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente. Aplicando o método dos resíduos ponderados, obtém-se a equação integral governante do elemento finito dada por:

$$\int_{\Omega} v (\nabla^2 u + k^2 u) d\Omega = 0, \quad (3.4)$$

$v$  é a função teste. Com o primeiro teorema de Green's chega-se a forma fraca

$$B(u, v) = L(v), \quad (3.5)$$

onde

$$B(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - k^2 uv) d\Omega + jk \int_{\Gamma_2} uv d\Gamma, \quad (3.6)$$

e

$$L(v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} g_i v d\Gamma, \quad (3.7)$$

$\nabla$  é o operador nabla.

O domínio computacional é coberto por uma malha de elemento finitos, com  $n$  nós. Em cada elemento o campo é aproximado usando funções de forma polinomiais  $N_i$  e os seus valores nodais  $u_i$ .

$$u^h = \sum_{i=1}^n N_i u_i. \quad (3.8)$$

Em seguida, o campo em cada nó  $i$  é expandido em termos de  $q$  incógnitas  $u_{il}$  relativas a  $q$  funções de ondas planas em diferentes direções

$$u_i = \sum_{l=1}^q \exp(jk\xi_l \cdot \mathbf{r})u_{il}, \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vector de posição. As funções de ondas planas são escolhidos para serem uniformemente distribuído, de modo que, considera-se  $\xi_l = (\cos\alpha_l, \sin\alpha_l)$ , com  $\alpha_l = \frac{2\pi l}{q}$ ,  $l = 1, \dots, q$ . O campo  $u^h$  aproximado é então dado por:

$$u^h = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^q N_i \exp(jk\xi_l \cdot \mathbf{r})u_{il}. \quad (3.10)$$

A Fig.3.2 descreve as direções de onda utilizados para  $q = 2, 4, 6, 8$  e  $10$  em uma *região de influência* típica  $\omega_i$ .

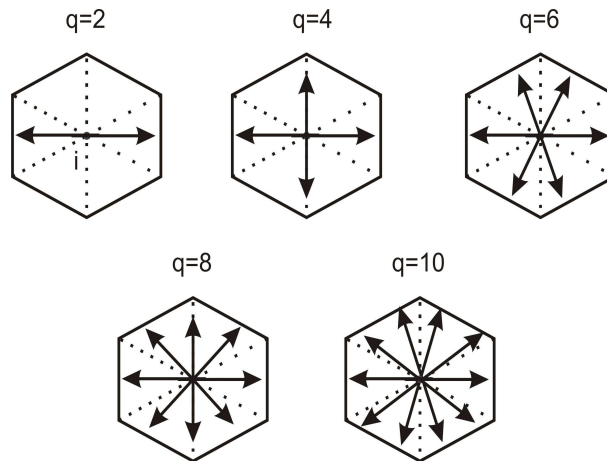


Figura 3.2: Exemplos das direções de onda utilizados em uma *região de influência*  $\omega_i$

## 3.2 O espaço de funções MEFG

De acordo com a Equação (3.10), para construir o espaço de funções do MEFG, basta combinar as clássicas funções de forma nodais do MEF,  $N_i$ , com as funções de ondas planas em diferentes direções [33] em cada nó. Localmente pode-se dizer que para cada elemento  $e$ , o espaço local de combinações lineares de ondas planas com  $\xi_l$  direções, é dado por

$$U_e^{k,q} = \left\{ u^h = \sum_{i=1}^{n_e} N_i^e u_i \mid u_i \in W_{local}^{k,q,e} \right\}, \quad (3.11)$$

onde

$$W_{local}^{k,q} = span \left\{ w_k^l = exp(jk\xi_l \cdot \mathbf{r}) \right\}. \quad (3.12)$$

Neste caso, as novas funções de forma enriquecidas  $P_{il}^e = N_i^e w_k^l$  geram o espaço das funções de aproximação do MEFG. Então, como na Equação (3.10) o campo aproximado  $u^h$  em função das novas funções de forma é dado por

$$u^h = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^q N_i w_k^l u_{il} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}. \quad (3.13)$$

Sabe-se que em geral o MEF quando aplicado ao problema de Helmholtz exige malhas refinadas, o que não é o caso do MEFG que depende de uma malha apenas para cobrir o domínio do problema. Sendo assim, entende-se que parte da aproximação vinda do MEF não traz grande contribuições a aproximação do MEFG para o problema de Helmholtz. Por este motivo o campo aproximado dado pela Equação (3.10) não leva em consideração a aproximação do MEF apresentado nas Equações (2.6) e (2.30).

As derivadas globais das novas funções de forma são dadas por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_{il}}{\partial x} \\ \frac{\partial P_{il}}{\partial y} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} + jk N_i \begin{bmatrix} \cos \alpha_l \\ \sin \alpha_l \end{bmatrix} \right\} w_k^l. \quad (3.14)$$

As funções de teste  $v$ , são também escolhidas a partir das novas funções de forma enriquecidas  $P_{il}$ . Segue que as Equação de Galerkin (3.6) podem ser escritas na forma matricial

$$\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.15)$$

onde

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} (\nabla P^T \nabla P - k^2 P^T P) d\Omega + jk \int_{\Gamma} P^T P d\Gamma, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} P^T g_i d\Gamma. \quad (3.17)$$

O sistema resultante tem dimensões  $n \cdot q \times n \cdot q$ . As integrais das Equações (3.16) e (3.17) são realizadas por meio de integração de Gauss-Legendre de alta ordem, isto se faz necessário devido ao comportamento oscilatório dos integrandos. O número de pontos de integração depende do número de comprimentos de onda contidos por espaçamento nodal.

### 3.3 Resultados e discussão

No que segue, vamos apresentar e analisar os resultados computacionais obtidos, utilizando MEFG com enriquecimento por ondas planas para resolver um problema de propagação de onda em um domínio quadrado e em seguida um problema de espalhamento eletromagnético ambos em duas dimensões. Para visualização dos resultados, usou-se o software MATLAB [66] versão R2008a.

#### 3.3.1 Onda Plana no Espaço Livre

Como um primeiro exemplo, considera-se a excitação transversal do campo elétrico  $TE_z$  e desejamos encontrar a componente  $z$  do campo magnético que satisfaz a equação de Helmholtz no domínio quadrado  $\Omega = \{(x, y) | -5 \leq x, y \leq 5\}$ , Fig.3.3 e a condição Robin na fronteira artificial  $\Gamma$  formada pelos lados do quadrado é dada por:

$$g(x) = \begin{cases} jk(1 + \cos\theta_I)u_I, & \text{em } \{(-5, y) | -5 \leq y \leq 5\} \\ jk(1 - \cos\theta_I)u_I, & \text{em } \{(5, y) | -5 \leq y \leq 5\} \\ jk(1 + \sin\theta_I)u_I, & \text{em } \{(x, -5) | -5 \leq x \leq 5\} \\ jk(1 - \sin\theta_I)u_I, & \text{em } \{(x, 5) | -5 \leq x \leq 5\}, \end{cases} \quad (3.18)$$

onde  $u_I$  é o campo magnético da onda plana incidente. O problema será resolvido usando o MEFG com enriquecimento por funções de ondas planas em diferentes direções.

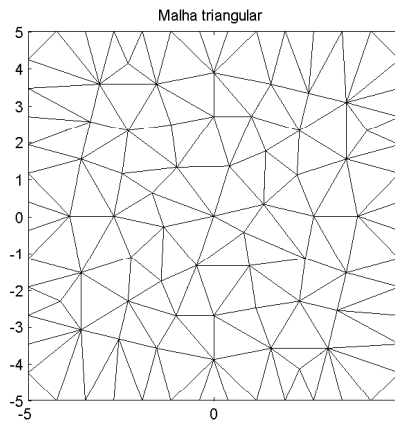


Figura 3.3: Domínio Computacional  $\Omega$  e malha triangular.

A malha triangular de tamanho  $h_A = 1.1\lambda$  usada para resolver o problema apresentado na Fig.3.3 é composta de 152 elementos, 102 nós e 254 arestas. Para avaliar os coeficientes do

sistema linear dado pela Equação (3.15) foi empregado o método de integração de Gauss-Legendre, com 64 pontos dentro de cada triângulo e 6 ao longo de cada aresta da fronteira  $\Gamma$ .

As Fig. 3.4 e Fig. 3.5 mostram respectivamente a parte real e imaginária do campo magnético analítico e aproximado numericamente pelo MEFG com  $q = 12, 14, 16, 18$  direções de ondas planas na linha  $C_x = \{(x, y) | y = 0, -5 \leq x \leq 5\}$ . Note que, para  $q = 12$  e  $q = 14$  os erros são manifestos na amplitude da solução aproximada. Por outro lado, para  $q \geq 16$  os erros nas aproximações são reduzidos de forma satisfatória. Os resultados são obtidos usando uma onda plana incidente com ângulo incidente  $\theta_I = 15^\circ$  e número de onda  $k = 2\pi$ .

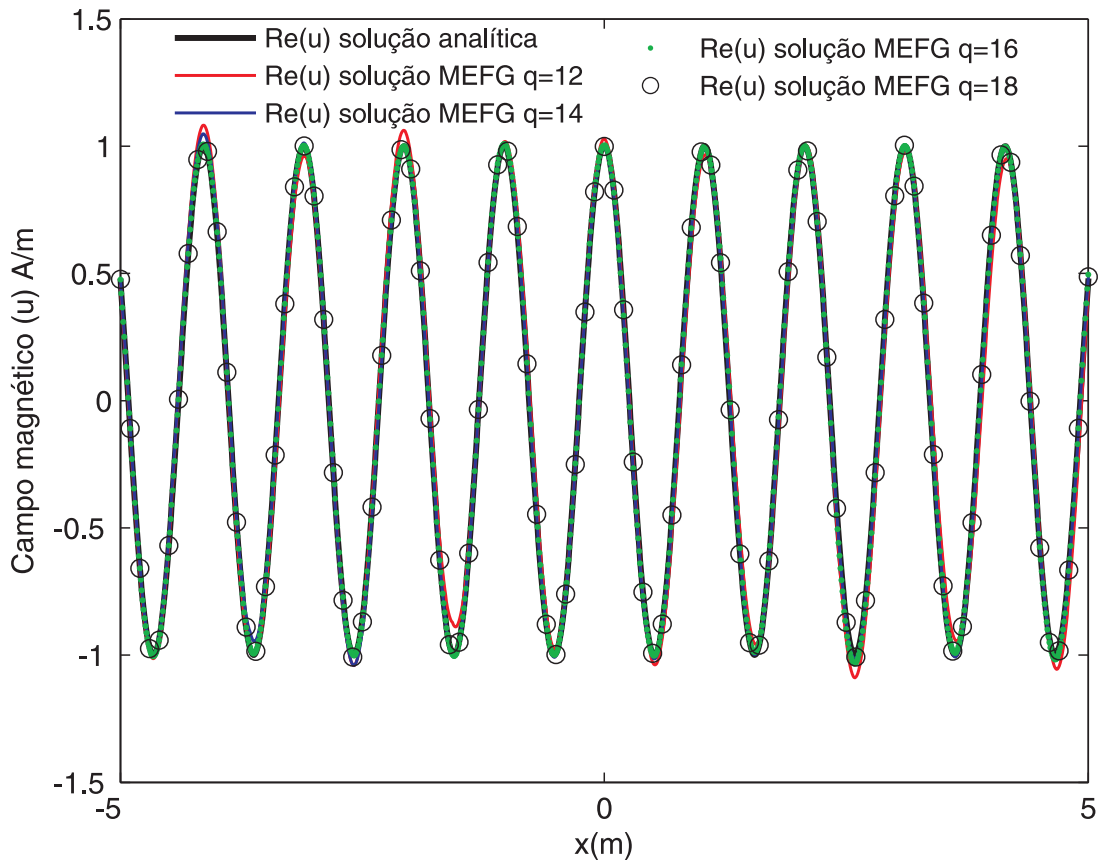


Figura 3.4: Parte real do campo magnético analítico e aproximado numericamente pelo MEFG ao longo de  $C_x$ , com  $\theta_I = 15^\circ$ ,  $h_A = 1.1\lambda$  e  $q = 12, 14, 16, 18$ .

Estes resultados apontam para a robustez do MEFG que com apenas  $18 * 102 = 1.836$  graus de liberdade, reduziu drasticamente os erros na aproximação. As Figuras 3.6 e 3.7 mostram respectivamente a parte real e imaginária do campo magnético analítico e aproximado

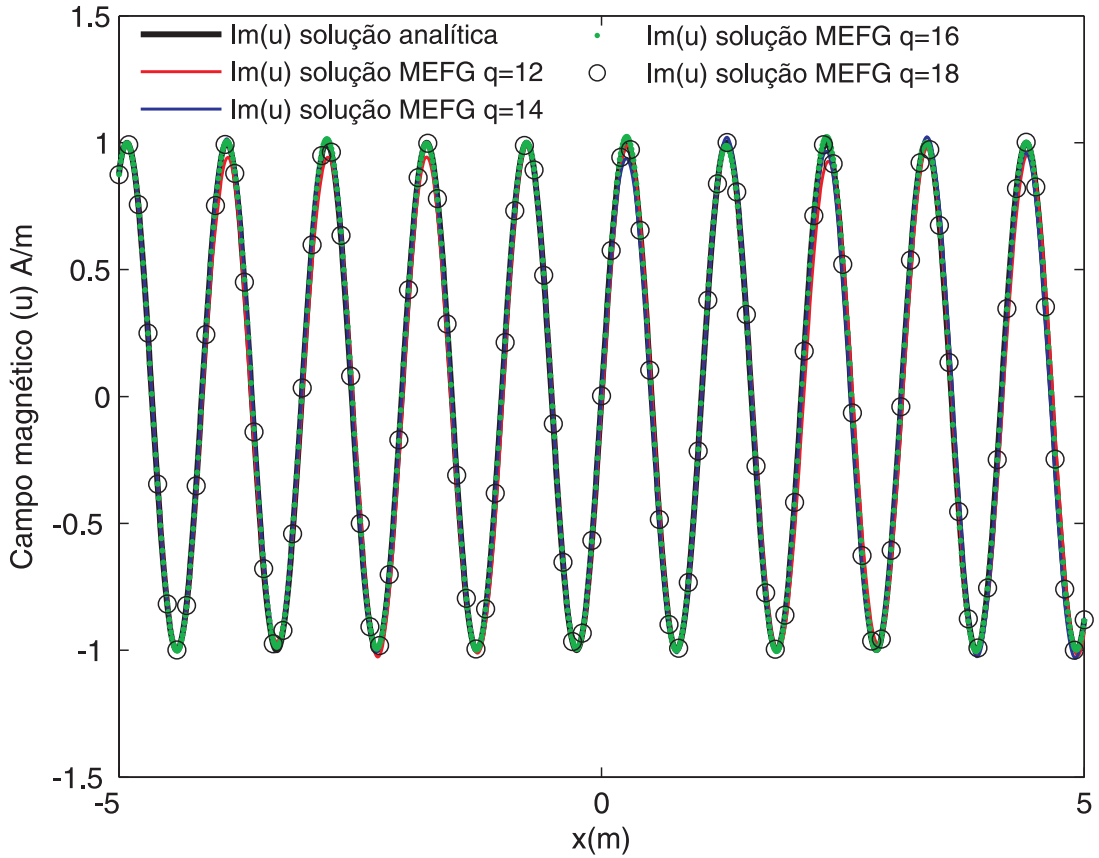


Figura 3.5: Parte imaginária do campo magnético analítico e aproximado numericamente pelo MEFG ao longo de  $C_x$ , com  $\theta_I = 15^\circ$ ,  $h_A = 1.1\lambda$  e  $q = 12, 14, 16, 18$ .

numericamente pelo MEF para uma malha de tamanho  $h_1 = \frac{1}{10}\lambda$ , com 9.988 nós e para uma outra malha mais refinada de tamanho  $h_2 = \frac{1}{15}\lambda$ , com 23.010 nós. Note-se que apesar do MEF utilizar números de graus de liberdade bem superiores ao usado no MEFG os resultados alcançados apresentam erros absolutos médios para a parte real e imaginária da aproximação numérica pelo MEF de 0.3375 e de 0.3495 para a malha de tamanho  $h_1$  e de 0.1584 e de 0.1558 para a malha de tamanho  $h_2$ , estão bem distantes do esperado. O erro é manifestado através de um atraso de fase.

### 3.3.1.1 $q$ - convergência do MEFG

Para analisar a convergência do MEFG a precisão do modelo é medida pelo erro na norma  $L_2(\Omega)$  definido em todo o domínio computacional por

$$\epsilon = \frac{\|u_{ana} - u_{num}\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_{ana}\|_{L^2(\Omega)}}. \quad (3.19)$$



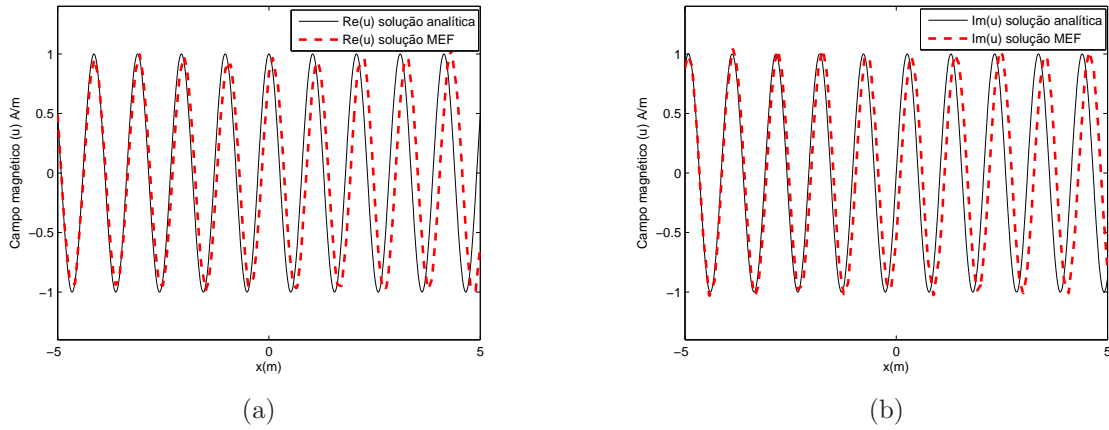


Figura 3.6: Campo magnético analítico e aproximado numericamente pelo MEF ao longo de  $C_x$ , com  $\theta_I = 15^\circ$ , e  $h_1 = \frac{1}{10}\lambda$ . (a) Parte real. (b) Parte Imaginária.

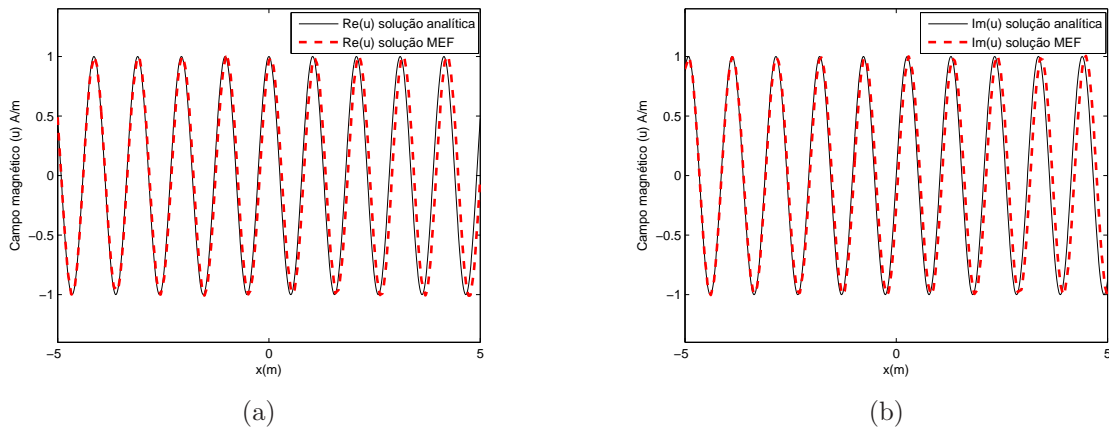
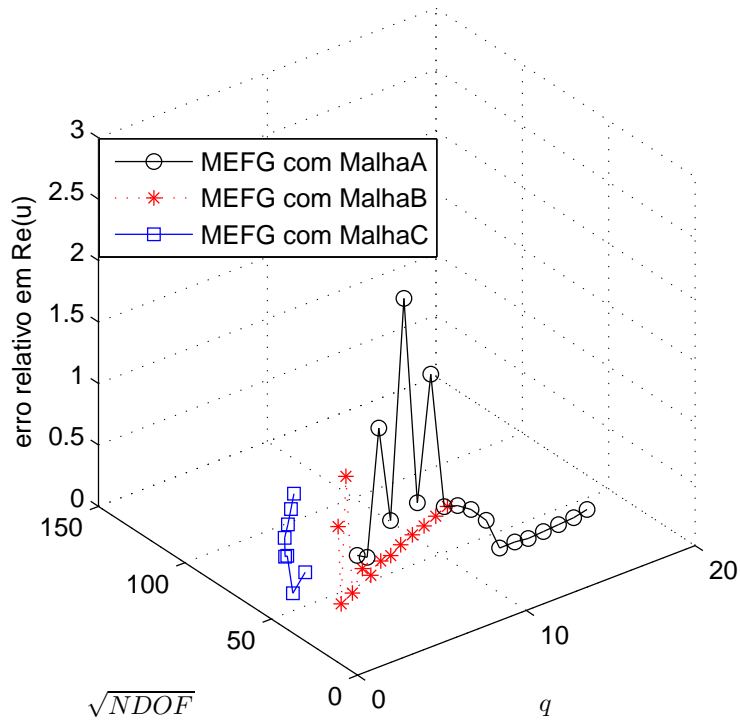


Figura 3.7: Campo magnético analítico e aproximado numericamente pelo MEF ao longo de  $C_x$ , com  $\theta_I = 15^\circ$ , e  $h_2 = \frac{1}{15}\lambda$ . (a) Parte real. (b) Parte Imaginária.

Além da malha triangular, Fig. 3.3 foram utilizadas na análise de convergência do MEFG outras duas malhas triangulares de tamanhos  $h_B = \frac{1}{2}\lambda$  e  $h_C = \frac{1}{4}\lambda$ , com 441 e 1.664 nós, respectivamente. As Figuras 3.8 e 3.9 apresentam os gráficos de  $q$ -convergência do MEFG, parte real e imaginária, respectivamente. Como esperado pode-se ver as características de convergência do método descrito, que usando a primeira malha atinge boas taxas de convergências para  $q \geq 16$ , e esta taxa de convergência vai melhorando para malhas mais refinadas. Apesar da taxa de convergência no MEFG melhorar a medida que diminui-se o tamanho da malha utilizada, nota-se que o número de graus de liberdade aumenta consideravelmente em função do número de direções de ondas  $q$ , o que leva a acreditar que no MEFG, vale mais a

pena manter uma malha pequena ao exemplo da malha de tamanho  $h_A = 1.1\lambda$  e variar os valores de  $q$  no enriquecimento.

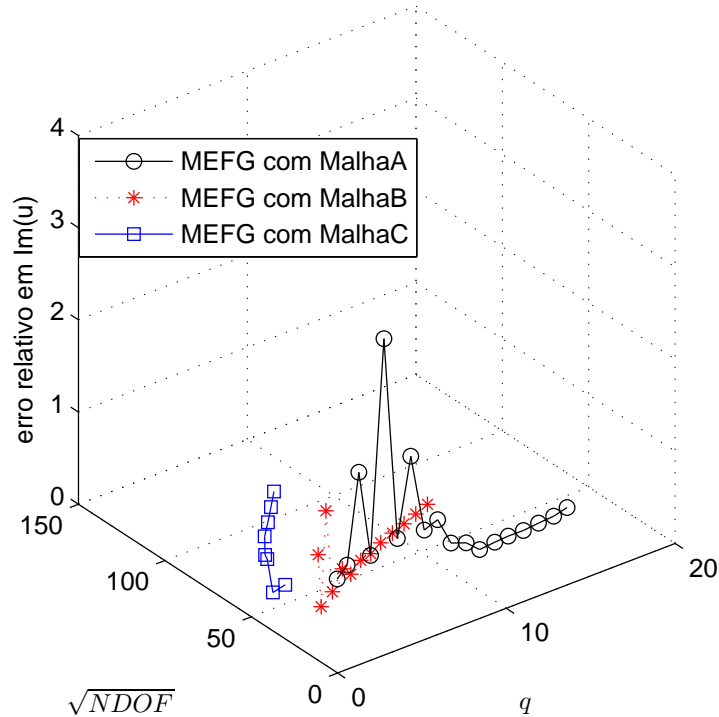


(a)

Figura 3.8:  $q$ -convergência da solução MEFG  $Re(u)$  para as malhas A, B e C..

Um aspecto importante na implementação do MEFG é a integração numérica da forma fraca, visto que ela proporciona impacto na construção da matriz global como também na precisão dos resultados. A Fig. 3.10, mostra o efeito do número de Gauss na precisão dos resultados. Nota-se que a partir de 60 pontos de Gauss o erro na aproximação numérica pelo MEFG tende a se estabilizar. Levando em conta o tamanho da malha usada que foi  $h_a = 1.1\lambda$ , adotou-se 8 pontos de Gauss por comprimento de onda em cada direção.

De acordo com as Figuras 3.11a e 3.11b que avaliam a amplitude em cada uma das dezoito direções de ondas usadas no enriquecimento, a maior amplitude aconteceu próxima da direção de propagação da onda, ou seja, para a primeira e última direção de onda plana. No entanto, de maneira geral, não se sabe a priori quais são as direções que otimizam a aproximação no MEFG. Este fato pode ter ocorrido devido ao tipo de problema que foi resolvido, um problema de propagação de onda no espaço livre.



(a)

Figura 3.9:  $q$ -convergência da solução MEFG  $Im(u)$  para as malhas A, B e C..

Com relação ao mal condicionamento previsto para o sistema resultante no MEFG a Fig. 3.12 mostra que tais sistemas no MEFG com a malha A são mal condicionadas, podendo inclusive apresentar sistema singulares que é o que ocorreu para  $q = 14$  e  $q = 18$  direções de ondas planas. O mal condicionamento foi calculado usando a função *cond* do Matlab induzida pela norma euclidiana.

### 3.3.2 Espalhamento de um cilindro condutor circular

Assume-se, para este teste que o obstáculo de fronteira  $\Gamma_1$  é delimitada por uma fronteira artificial suave  $\Gamma_2$  e que o domínio anular  $\Omega$  entre  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  é definido pela presença de um único meio, Fig.3.13a. Especificamente, considera-se a excitação transversal do campo elétrico  $TE_z$  e deseja-se encontrar a componente em  $z$  do campo magnético que satisfaz a equação de Helmholtz no domínio  $\Omega$ . Na fronteira  $\Gamma_1$  impõe-se a condição de contorno de Neumann homogênea. Por outro lado, se  $\Gamma_2$  for suficientemente afastada do espalhador, o campo magnético  $u$  em  $\Gamma_2$  comporta-se como  $exp(jkr)/\sqrt{r}$ . Neste caso, para impor a condição de

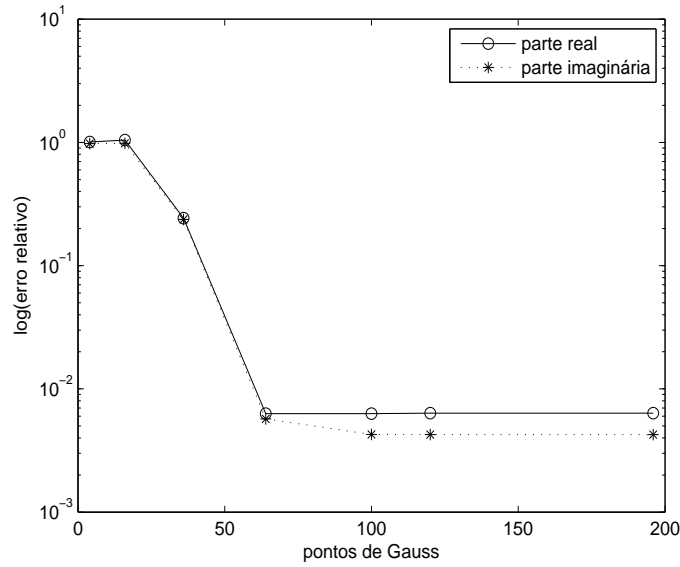


Figura 3.10: Erro relativo da solução MFG  $u$  para malha A versus pontos de Gauss.

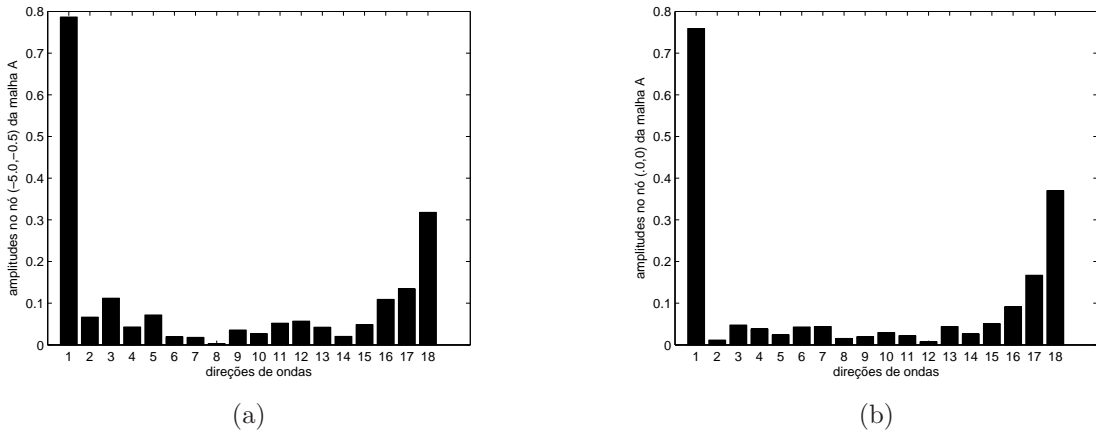


Figura 3.11: Amplitudes para cada direção de onda. (a) Amplitudes em cada uma das dezoito direções de ondas no nó  $(-5.0, -0.5)$ , com  $\theta_I = 15^\circ$ , e  $h_A$ . (b) Amplitudes em cada uma das dezoito direções de ondas no nó  $(0, 0)$ , com  $\theta_I = 15^\circ$  e  $h_A$ .

radiação de Sommerfeld sobre  $\Gamma_2$  será usado neste trabalho a condição de absorção (ABC) de primeira ordem proposta por Bayliss and Turkel [67], dada por:

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{u_s}{2r} - jku_s = 0 \quad \text{para } r = r_2. \quad (3.20)$$

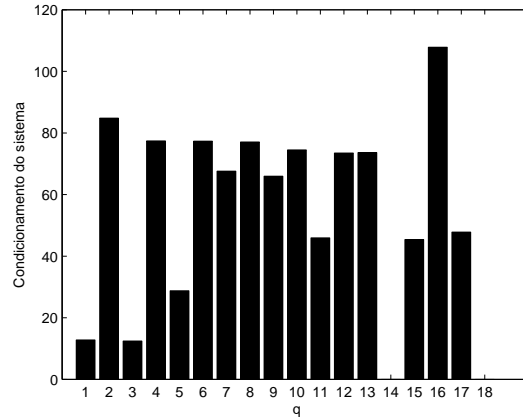


Figura 3.12: Condicionamento do sistema no MEFG para a malha A versus  $q$ .

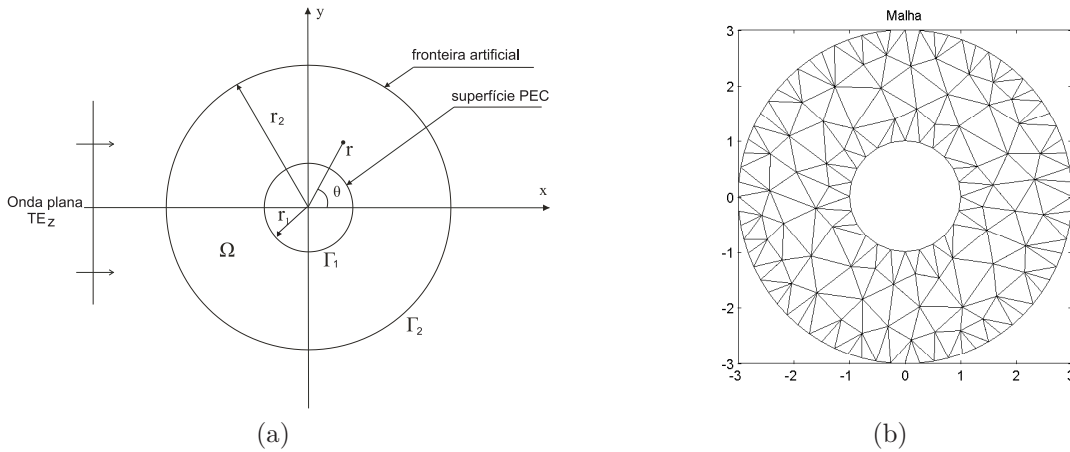


Figura 3.13: Domínio computacional e malha triangular. (a) Domínio Computacional  $\Omega$  entre a superfície PEC  $\Gamma_1$  e a fronteira artificial  $\Gamma_2$  e (b) A malha triangular utilizada nos cálculos.

Uma solução para este problema foi desenvolvida em termos de uma série de funções de Bessel [41]

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \mathbf{J}_n(kr) + B_n \mathbf{Y}_n(kr)] \cos(n\theta), \quad (3.21)$$

onde  $\mathbf{J}_n$  e  $\mathbf{Y}_n$  são as primeiras e segundas funções de Bessel de ordem  $n$ . Os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  são determinados por meio das seguintes condições de contorno:

- Condição de contorno Neumann sobre o espalhador:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{para } r = r_1. \quad (3.22)$$

- Dado que  $u = u_s + u_I$ , chega-se com a Equação (3.20) em:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{1}{2r} - jk\right)u = \frac{\partial u_I}{\partial r} + \left(\frac{1}{2r} - jk\right)u_I. \quad (3.23)$$

Uma vez os que os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  podem ser determinados por truncamento na ordem nos índices  $n$ , a solução analítica expressa em (3.21) pode ser avaliada em todo o domínio  $\Omega$ .

O problema de espalhamento a ser resolvido usando MEEG é expresso pelo sistema dado na Equação (3.15) onde

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} (\nabla P^T \nabla P - k^2 P^T P) d\Omega + \int_{\Gamma} P^T \left(\frac{1}{2r} - jk\right) P d\Gamma, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Gamma} P^T \left[\frac{1}{2r} + (\cos\theta - 1)jk\right] \exp(jkr\cos\theta) d\Gamma. \quad (3.25)$$

Os dados a seguir são usados nos cálculos:

- Raio da superfície PEC  $\Gamma_1$ ,  $r_1 = 1.0\lambda$ ;
- Raio da fronteira artificial  $\Gamma_2$ ,  $r_2 = 3.0\lambda$ ;
- Número de onda  $k = 2\pi$ ;
- tamanho da malha  $h = 1.0\lambda$ .

O domínio computacional  $\Omega$  foi discretizado em 224 elementos, 160 nós e 384 arestas, como mostra a Fig.3.13b. Para este exemplo, foram usados os mesmo números de nós de Gauss-Legendre, usados no primeiro exemplo.

As Fig. 3.14a e Fig. 3.14b mostram a parte real e imaginária do campo magnético analítico e aproximado numericamente na linha  $C_y = \{(x, y) | x = 0, -3 \leq y \leq -1, 1 \leq y \leq 3\}$ , respectivamente. O campo magnético calculado através do MEEG, com  $q = 6$  direções de ondas planas, fornece uma excelente aproximação à solução analítica da Equação 3.21. Observa-se que os erros absoluto médio das partes real e imaginária são 0.0040 e 0.0072, respectivamente. Para valores de  $q$  menores que seis direções de onda, os resultados obtidos não foram satisfatórios.

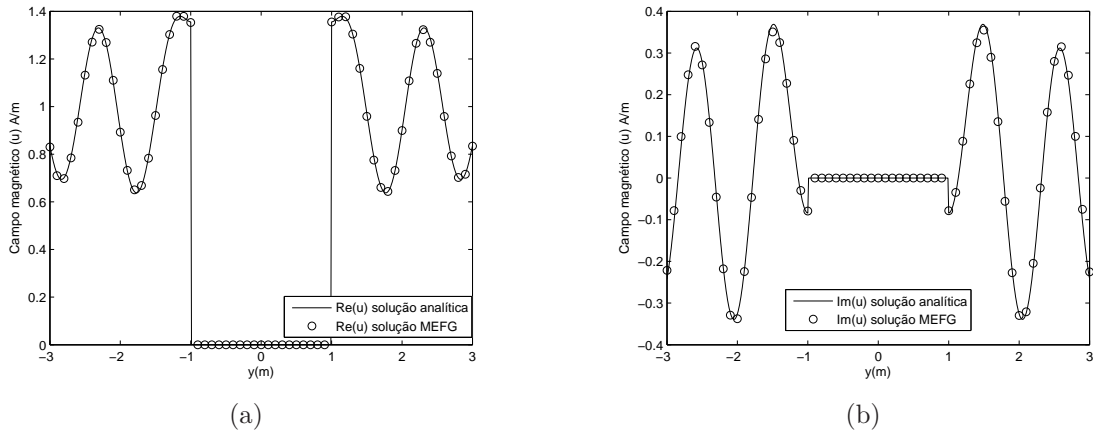


Figura 3.14: Campo magnético para o MEFG, ao longo de  $C_y$ , com  $q = 6$  e  $h = 1.0\lambda$ . (a) Parte real. (b) Parte Imaginária.

As Fig. 3.15a e 3.15b mostram a distribuição do campo magnético total em torno do cilindro de difração. Os resultados numéricos para o MEFG, com  $q = 6$  são relatados na metade inferior da superfície Fig. 3.13 e os resultados analíticos são mostrados na outra metade.

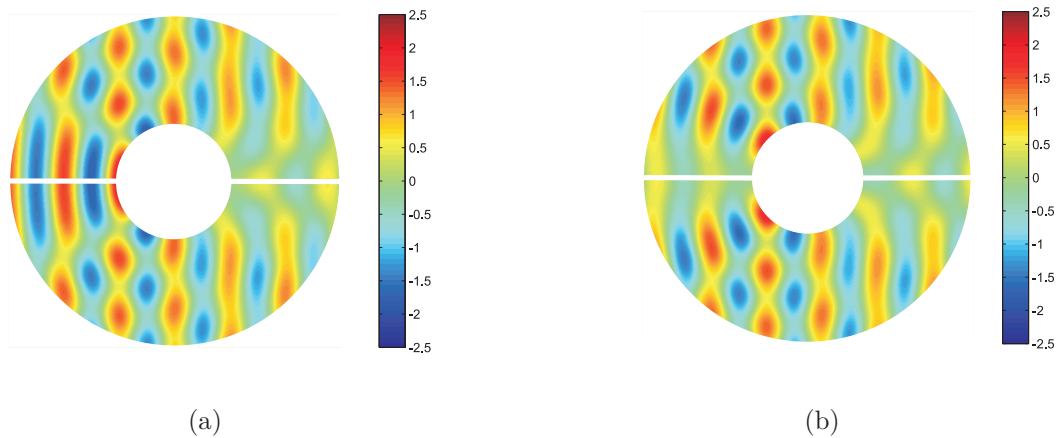


Figura 3.15: Campo magnético total em torno do cilindro para o MEFG, com  $q = 6$  e  $h = 1.0\lambda$ . (a) Parte real. (b) Parte Imaginária.

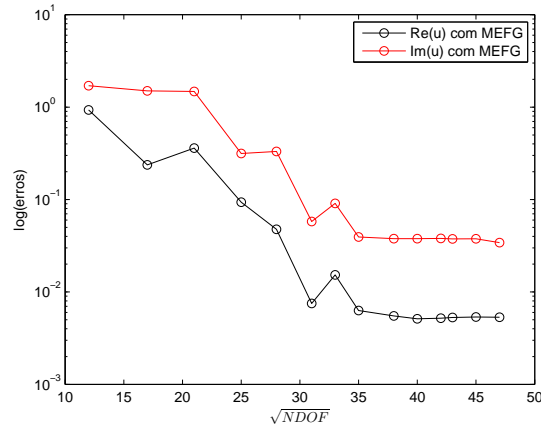


Figura 3.16: Real e Imaginária  $q$ -convergência no MEFG, com a malha Fig.3.13b.

Considerando que  $\sqrt{NDOF}$  é igual a raiz quadrada do número de graus de liberdade  $n \cdot q$ , a Fig. 3.16 mostra a  $q$ -convergência da parte real e imaginária do campo magnético aproximado ao longo de  $C_y$ , pelo MEFG, com  $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ . Para obter resultados precisos foram necessário um mínimo de 6 direções de onda que resulta em  $(6 \times 160) = 960$  graus de liberdade.

Como esperado, a aproximação para o MEFG com enriquecimento por ondas planas, mesmo utilizando um número de graus de liberdade por comprimento inferior ao usado pelo MEF, fornece bons resultados de convergência. Neste caso, pode dizer que o MEFG se qualifica como uma boa ferramenta na resolução de problemas de propagação e espalhamento de ondas.

Na sequência deste trabalho, será introduzido ao domínio computacional  $\Omega$  uma interface entre os diferentes materiais. No caso do MEFG, técnicas de tratamento de descontinuidades serão apresentadas e confrontadas, para garantir a continuidade de campo entre os diferentes meios.



## Capítulo 4

# Tratamento de Descontinuidade de Materiais no MEFG

Como vimos no capítulo anterior o MEFG com enriquecimento por ondas planas se mostrou adequado para lidar com os problemas de propagação de ondas onde o MEF clássico pode exigir uma malha excessivamente refinada [33, 62, 37]. Usando o MEF para resolver a equação de Helmholtz é comum fazer uso de malhas com uma resolução mínima de dez ou quinze pontos nodais por comprimento de onda. No entanto, como pode ser visto no primeiro exemplo da Seção 3.3 que isto ainda pode não ser suficiente. Com o uso de funções de ondas planas como funções de enriquecimento é possível obter em geral resultados precisos com tamanho da malha maior do que um comprimento de onda. Tal fato reduz significativamente o número de incógnitas do sistema resultante a ser resolvido. Em problemas onde o domínio é formado por regiões de diferentes materiais, os espaços de funções do MEFG diferem nas interfaces entre os diferentes meios. A solução usual para isto, é introduzir o ML para forçar as condições de interface. No entanto, este método conduz a sistemas matriciais mal condicionados e não positivos definidos o que impõe severas restrições sobre o método para resolver o sistema de equações [49, 41]. Em [42, 43] os autores mostraram a vantagem ao se utilizar o Mortar Element Method (MEM) para garantir as condições de interface no MEF, e neste caso a matriz resultante é definida positiva. No presente capítulo, serão apresentados as questões do ML e uma abordagem que pode ser interpretada como uma extensão do MEM para MEFG para lidar com descontinuidades em domínios homogêneos por partes [47].

## 4.1 Formulação do Problema

Considerem um domínio  $\Omega$  que é decomposto em dois subdomínios  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$  conectados por uma interface  $\Gamma$ , como mostra a Fig.4.1 e uma malha conforme que cobre o domínio  $\Omega$ , com  $n_a$  nós em  $\Omega_a$  e  $n_b$  nós em  $\Omega_b$ .

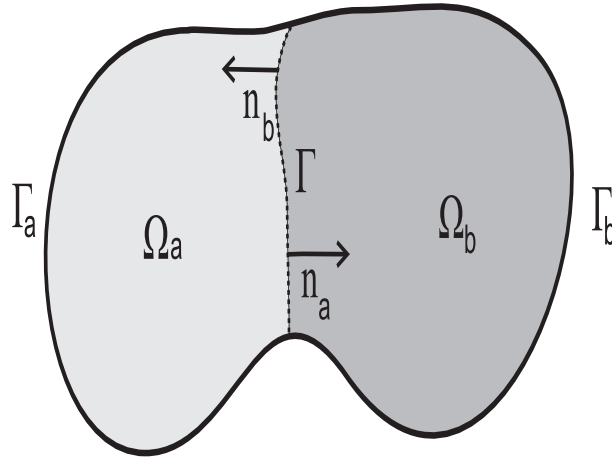


Figura 4.1: Subdomínios  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$  com interface comum  $\Gamma$

Para cada sub-domínio, a formulação do problema obedece a formulação dada na Seção 3.1 e Seção 3.2. Neste caso, temos das Equações (3.6) e (3.7) que a forma fraca para o problema de dois meios é dada por

$$B_a(u, v) = \frac{1}{\alpha_a} \left[ \int_{\Omega_a} (\nabla u_a \nabla v_a - k_a^2 u_a v_a) d\Omega + jk_a \int_{\Gamma_a} u_a v_a d\Gamma \right] - \int_{\Gamma} v_a \frac{1}{\alpha_a} \frac{\partial u_a}{\partial n_a} d\Gamma \quad (4.1)$$

e

$$L_a(v) = \frac{1}{\alpha_a} \left[ \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} g_i^a v_a d\Gamma \right], \quad (4.2)$$

$$B_b(u, v) = \frac{1}{\alpha_b} \left[ \int_{\Omega_b} (\nabla u_b \nabla v_b - k_b^2 u_b v_b) d\Omega + jk_b \int_{\Gamma_b} u_b v_b d\Gamma \right] - \int_{\Gamma} v_b \frac{1}{\alpha_b} \frac{\partial u_b}{\partial n_b} d\Gamma \quad (4.3)$$

e

$$L_b(v) = \frac{1}{\alpha_b} \left[ \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} g_i^b v_b d\Gamma \right], \quad (4.4)$$

onde  $u_a$  e  $u_b$  são as  $z$ -componentes do campo elétrico ou magnético,  $v_a$  e  $v_b$  são as funções de teste e  $\alpha_a$  e  $\alpha_b$  representam a permissividade relativa (na formulação do campo magnético)

ou a permeabilidade (na formulação do campo eléctrico) sobre  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$ , respectivamente. Os números de ondas  $k_a$  e  $k_b$  são constantes em cada subdomínio. As funções  $g_1^a$ ,  $g_1^b$  e  $g_2^a$ ,  $g_2^b$  em  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_b$  provêm das condição de contorno de Neumann Equação (3.2) e da condição de contorno de Robin Equação (3.3) usada para truncar o domínio, respectivamente.

## 4.2 Continuidade entre os subdomínios

Agora pretende-se garantir as restrições ao longo da interface  $\Gamma$ . Uma vez que o número de onda é um atributo de cada região nossa formulação deve ser capaz de lidar com diferenças de velocidade quando os subdomínios são conectados.

### 4.2.1 Multiplicador de Lagrange

Em geral, para forçar a continuidade da componente tangencial dos campos, usa-se o ML, de forma que, a integral de contorno sobre  $\Gamma$  nas Equações (4.1) e (4.3) é avaliada com

$$\lambda = -\frac{1}{\alpha_a} \frac{\partial u_a}{\partial n_a} = \frac{1}{\alpha_b} \frac{\partial u_b}{\partial n_b}. \quad (4.5)$$

Substituindo a Equação (4.5) nas Equações (4.1) e (4.3) tem-se uma formulação mista

$$B_a(u, v) = \frac{1}{\alpha_a} \left[ \int_{\Omega_a} (\nabla u_a \nabla v_a - k_a^2 u_a v_a) d\Omega + jk_a \int_{\Gamma_a} u_a v_a d\Gamma \right] - \int_{\Gamma} v_a \lambda d\Gamma, \quad (4.6)$$

$$B_b(u, v) = \frac{1}{\alpha_b} \left[ \int_{\Omega_b} (\nabla u_b \nabla v_b - k_b^2 u_b v_b) d\Omega + jk_b \int_{\Gamma_b} u_b v_b d\Gamma \right] + \int_{\Gamma} v_b \lambda d\Gamma. \quad (4.7)$$

Agora, o objetivo é encontrar  $u$  e  $\lambda$ . Observe que a continuidade do campo na interface não foi garantida ainda. Será imposta no sentido fraco por

$$\int_{\Gamma} (u_b - u_a) v_c d\Gamma = 0, \quad (4.8)$$

onde  $v_c$  é a função de teste em  $\Gamma$ .

Levando em consideração que no método desenvolvido por Farhat [68], os multiplicadores de Lagrange são aproximados por funções oscilatórias com o número de onda do problema de Helmholtz, a discretização do ML usada neste trabalho será a mesma do campo  $u$  Equação (3.13). No entanto, neste caso, os elementos de aresta correspondente aos multiplicadores Lagrange estão no limite entre dois elementos com números de onda diferentes  $k_a$  e  $k_b$ , o que

força a optar por um dos dois valores na discretização do ML. Sem perda de generalidade, optou-se por utilizar o maior dos números de onda na interpolação de  $\lambda$ .

De acordo com [43], se a numeração dos nós em cada domínio é feita de forma que os que pertencem à interface  $\Gamma$  são contados primeiros, então a discretização do ML é dada por

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n^\Gamma} \sum_{l=1}^q N_j w_k^l \lambda_{jl} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\lambda}, \quad (4.9)$$

onde  $n^\Gamma$  é o número de nó ao longo da interface  $\Gamma$ ,  $k = \max(k_a, k_b)$ ,  $\lambda_{jl}$  são os multiplicadores de Lagrange para o nó  $j \in \Gamma$  na direção  $\boldsymbol{\xi}_l$ .

Usando a aproximação do ML  $\lambda$  dada pela Equação (4.9) e escrevendo a aproximação da função de teste em  $\Omega_a$  como

$$v_a = N_i^a w_{k_a}^l, i \in \Omega_a, \quad (4.10)$$

o último termo no lado esquerdo da Equação (4.6) pode ser reescrita, lembrando que  $N_i^a w_{k_a}^l |_\Gamma = 0$  para  $i > n^\Gamma$

$$\int_\Gamma v_a \lambda d\Gamma = \sum_{j=1}^{n^\Gamma} \sum_{l=1}^q \int_\Gamma N_i^a w_{k_a}^l |_\Gamma N_j w_k^l |_\Gamma d\Gamma \lambda_{jl} \quad (4.11)$$

ou na forma matricial

$$\mathbf{C}_a \boldsymbol{\lambda}, \quad (4.12)$$

onde

$$\mathbf{C}_a = \int_\Gamma \mathbf{P}_a^T \mathbf{Q} d\Gamma, \quad (4.13)$$

$\mathbf{C}_a$ ,  $\mathbf{P}_a$  e  $\mathbf{Q}$  são matrizes de dimensão  $n^\Gamma \cdot q \times n^\Gamma \cdot q$ .

Analogamente, usando a aproximação do ML  $\lambda$  e escrevendo a aproximação da função de teste em  $\Omega_b$  como

$$v_b = N_i^b w_{k_b}^l, i \in \Omega_b, \quad (4.14)$$

o último termo do lado esquerdo da Equação (4.7) torna-se

$$\int_\Gamma v_b \lambda d\Gamma = \sum_{j=1}^{n^\Gamma} \sum_{l=1}^q \int_\Gamma N_i^b w_{k_b}^l |_\Gamma N_j w_k^l |_\Gamma d\Gamma \lambda_{jl}. \quad (4.15)$$

ou na forma matricial

$$\mathbf{C}_b \boldsymbol{\lambda}, \quad (4.16)$$

onde

$$\mathbf{C}_b = \int_{\Gamma} \mathbf{P}_b^T \mathbf{Q} d\Gamma, \quad (4.17)$$

$\mathbf{C}_b$ ,  $\mathbf{P}_b$  e  $\mathbf{Q}$  são matrizes de dimensão  $n^{\Gamma} \cdot q \times n^{\Gamma} \cdot q$ .

Se a mesma aproximação do multiplicador Lagrange  $\lambda$  é usada para a representação da função de teste  $v_c$  na Equação (4.8), tem-se

$$v_c = N_i w_k^l, i = 1, \dots, n^{\Gamma}. \quad (4.18)$$

Usando a Equação (4.18) e a aproximação do campo  $u_a$  e  $u_b$ , ambos extraídas da Equação (3.13)

$$\int_{\Gamma} u_a v_c d\Gamma = \sum_{j=1}^{n^{\Gamma}} \sum_{l=1}^q \int_{\Gamma} N_i^a w_{k_a}^l |_{\Gamma} N_j w_k^l |_{\Gamma} d\Gamma \lambda_{jl}, \quad (4.19)$$

$$\int_{\Gamma} u_b v_c d\Gamma = \sum_{j=1}^{n^{\Gamma}} \sum_{l=1}^q \int_{\Gamma} N_i^b w_{k_b}^l |_{\Gamma} N_j w_k^l |_{\Gamma} d\Gamma \lambda_{jl}, \quad (4.20)$$

ou

$$\mathbf{C}_a^T \mathbf{u}_a^{\Gamma}, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{C}_b^T \mathbf{u}_b^{\Gamma}. \quad (4.22)$$

Finalmente, o sistema simétrico em bloco é obtido:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & \cdot & \mathbf{0} & \cdot & -\mathbf{C}_a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{M}_b & \cdot & \mathbf{C}_b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\mathbf{C}_a^T & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{C}_b^T & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a^{\Gamma} \\ \mathbf{u}_a^0 \\ \dots \\ \mathbf{u}_b^{\Gamma} \\ \mathbf{u}_b^0 \\ \dots \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \dots \\ \mathbf{f}_b \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

onde  $\mathbf{M}_a$ ,  $\mathbf{M}_b$ ,  $\mathbf{f}_a$  e  $\mathbf{f}_b$  são as matrizes de rigidez e vetores fonte do MEEG para cada subdomínio.  $\mathbf{u}_a^{\Gamma}$  e  $\mathbf{u}_b^{\Gamma}$  são os vetores com os graus de liberdade relativos aos nós da interface  $\Gamma$ , enquanto  $\mathbf{u}_a^0$  e  $\mathbf{u}_b^0$  são os fora de  $\Gamma$  em  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$ , respectivamente.

### 4.2.2 Extensão do Mortar Element Method para MEFG

Em [43] os autores propuseram uma técnica com base no MEM para impor restrições de continuidade no MEF clássico. Neste trabalho as matrizes de acoplamento dos subdomínios que aparecem no sistema final do ML para MEF são utilizadas para construir o sistema final do MEM. O MEM considera duas malhas independentes que estão ligadas por uma interface e que são condensadas independentemente como no MEF, o que significa dizer que em geral os nós da interface entre os dois subdomínios para cada uma das malhas não são necessariamente os mesmos. Considera-se uma destas malhas escrava e a outra mestre. A base do MEM é encontrada em [69] onde o vetor com os graus de liberdade da interface escrava é função do vetor com os graus de liberdade da interface mestre e pode ser expresso por

$$\mathbf{u}_a^\Gamma = \mathbf{H}\mathbf{u}_b^\Gamma, \quad (4.24)$$

onde

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}_a^{-1}\mathbf{C}_b. \quad (4.25)$$

Com as condições de mortar dadas pelas Equações (4.24) e (4.25) relacionada ao ML, o sistema resultante do MEF usando o ML pode ser transformado em um sistema esparso e positivo definido (4.32). Nota-se que tal abordagem, poderia então, ser usado no MEFG com o ML que apresentou problemas de condicionamento do sistema resultante. A princípio, pensou-se em usar as Equações (4.24) e (4.25) diretamente como é feito em [43] e chegar no sistema final do MEFG com MEM. Tal estratégia não foi possível pois as matrizes  $\mathbf{C}_a$  e  $\mathbf{C}_b$  do MEFG em geral não admitem inversa e isto é uma exigência do MEM de acordo com a Equação (4.25). Para evitar a singularidade das matrizes  $\mathbf{C}_a$  e  $\mathbf{C}_b$  do MEFG, foi utilizado uma estratégia para cada direção onda plana dada por:

$$\begin{bmatrix} u_a^\Gamma(l) \\ u_a^\Gamma(l+q) \\ u_a^\Gamma(l+2q) \\ \dots \\ u_a^\Gamma(l+(n^\Gamma-1)q) \end{bmatrix} = \mathbf{H}_l \begin{bmatrix} u_b^\Gamma(l) \\ u_b^\Gamma(l+q) \\ u_b^\Gamma(l+2q) \\ \dots \\ u_b^\Gamma(l+(n^\Gamma-1)q) \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

onde

$$\mathbf{H}_l = \mathbf{C}_{al}^{-1}\mathbf{C}_{bl}, \quad (4.27)$$

$C_{al}$  e  $C_{bl}$  podem ser calculadas por integrais de linha ao longo de  $\Gamma$

$$C_{al}(I, J) = \int_{\Gamma} N_I^a w_{k_a}^l N_J w_k^l d\Gamma \quad (4.28)$$

$$C_{bl}(I, J) = \int_{\Gamma} N_J^b w_{k_b}^l N_I w_k^l d\Gamma. \quad (4.29)$$

Note-se que agora para cada direção de onda existe a inversa da matriz  $C_{al}$  que é requerida. Este fato não introduz sobrecarga significativa no tempo total para resolver o problema, visto que a dimensão  $n^\Gamma \times n^\Gamma$  da matriz  $C_{al}$  quase diagonal, depende diretamente do número de nós da interface. Esse número é minimizado no MEFG, pois o mesmo permite o uso de malhas menos densas que o MEF tradicional.

As matrizes  $\mathbf{H}_l$  são combinadas de acordo com a direção de onda em cada nó da interface  $\Gamma$  e é então possível encontrar a matriz relacionada à interface dada pela Equação (4.24)

Usando a condição dada pela Equação (4.24), temos que os graus de liberdade ao longo de todo o domínio  $\Omega = \Omega_a \cup \Omega_b$  podem ser ligados como segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_a^\Gamma \\ \mathbf{u}_a^0 \\ \mathbf{u}_b^\Gamma \\ \mathbf{u}_b^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Id} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Id} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a^0 \\ \mathbf{u}_b^\Gamma \\ \mathbf{u}_b^0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

que pode ser expresso por

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.31)$$

onde  $\tilde{\mathbf{H}}$  é a matriz de acoplamento global e  $\mathbf{Id}$  é a matriz identidade.

Aplicando a matriz de acoplamento no sistema do MEFG  $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{F}$ , obtém-se

$$\tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{F}. \quad (4.32)$$

Para obter a condição Hermitiana, o sistema final é multiplicado previamente pelo conjugado da matriz dos coeficientes. Então, o sistema resultante passa a ser esparso e positivo definido, podendo ser resolvido por meio de vários métodos iterativos [70].

## 4.3 Resultados e discussão

Nesta seção, serão apresentados e analisados os resultados computacionais obtidos usando as abordagens do ML e do MEM para forçar a condição de interface no MEFG.

### 4.3.1 Problema de propagação de onda

Seja  $\Omega = \Omega_a \cup \Omega_b$  um domínio quadrado, definido pela presença de dois meios, onde a interface encontra-se na linha  $x = 0$ , conforme mostrado na Fig. 4.2a. Neste primeiro exemplo, considera-se a excitação transversal do campo elétrico  $TE_z$  e desejamos encontrar a componente  $z$  do campo magnético que satisfaz a equação de Helmholtz no domínio computacional  $\Omega$  e a condição Robin nas fronteiras  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_b$  formadas pelos lados do quadrado. O problema será resolvido usando o MEFG.

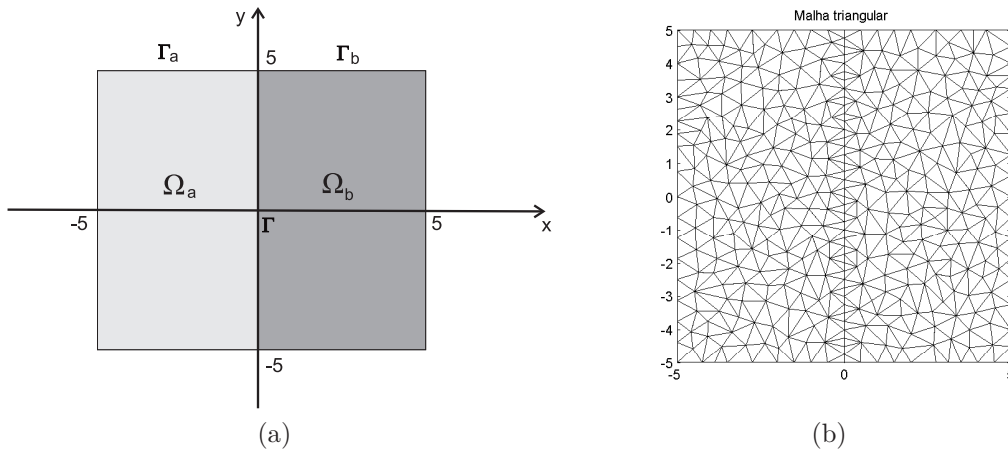


Figura 4.2: Domínio computacional e Malha triangular. (a) Subdomínios  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$  com interface comum  $\Gamma$ , (b) Malha triangular.

Os seguintes dados são aplicados nos cálculos:

- onda incidente de amplitude unitária com ângulo incidente  $\theta_I = 15^\circ$ ;
- número de ondas  $k_a = 2\pi$  e  $k_b = \pi$ ;
- $h = 0.6\lambda_a$ .



A malha usada para resolver o problema, apresentado na Fig.4.2b, é composta de 643 elementos, 1.002 arestas e 360 nós. Sendo que destes nós, 41 estão sobre a interface  $\Gamma$ . Adicionalmente, optou-se também por avaliar o desempenho do MEFG com ML e com MEM usando uma malha de tamanho  $h = 1.1\lambda_a$  igual ao da malha usada no primeiro exemplo da Seção 3.3. Esta malha é composta de 164 elementos, 265 arestas e 102 nós. Apenas 11 do total de nós da malha estão sobre a interface  $\Gamma$ . Para avaliar os coeficientes do sistema linear dado pela Equação (3.15) foi empregado o método de integração de Gauss-Legendre, com 64 pontos dentro de cada triângulo e 6 ao longo das aresta.

#### 4.3.1.1 MEFG com ML

As Fig. 4.3a e Fig. 4.3b respectivamente mostram a parte real e imaginária do campo magnético analítico e aproximado numericamente pelo MEFG com o ML e  $q = 12$  diferentes direções de ondas planas na linha  $C_x = \{(x, y)|y = 0, -5 \leq x \leq 5\}$ , os erros absolutos médios encontrados para a parte real e imaginária do campo magnético são respectivamente 0.0082 e 0.0094. Os resultados são obtidos usando uma onda plana incidente com ângulo incidente  $\theta_I = 15^\circ$ . Note que o sistema resultante do MEFG de dimensão igual a  $12 \times (360 + 2 \times 41) = 5.304$  é mal condicionamento (o número de condição é de ordem  $10^{20}$ ), não é positivo definido e possui 427.536 elementos não nulos. Para obter a convergência foi utilizado o método do gradiente biconjugado.

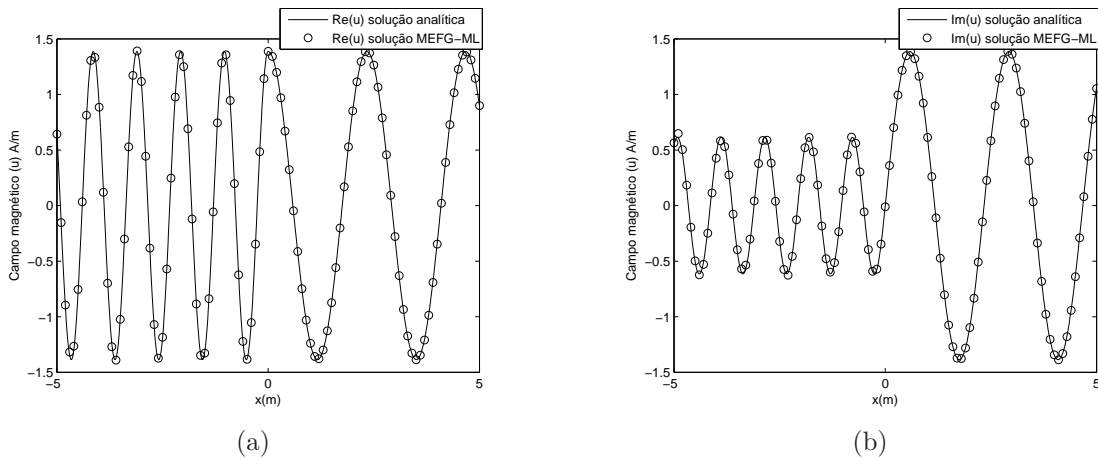


Figura 4.3: Campo magnético para MEFG com ML, ao longo de  $C_x$ , com  $\theta_I = 15^\circ$ ,  $h = 0.6\lambda_a$  e  $q = 12$ . (a) Parte Real. (b) Parte Imaginária.

Por outro lado, nota-se nas Fig. 4.4a e Fig. 4.4b que a aproximação dada pelo MEFG com ML já não apresenta boas características de convergência quando aplicada a malha de tamanho

$h = 1.1\lambda_a$  e  $q = 12$ . Mesmo aumentando o número de direções de ondas a aproximação neste caso continua não apresentando boas características de convergência. Conclui-se que isto se deve principalmente a pequena quantidade de nós usada na discretização da interface  $\Gamma$ .

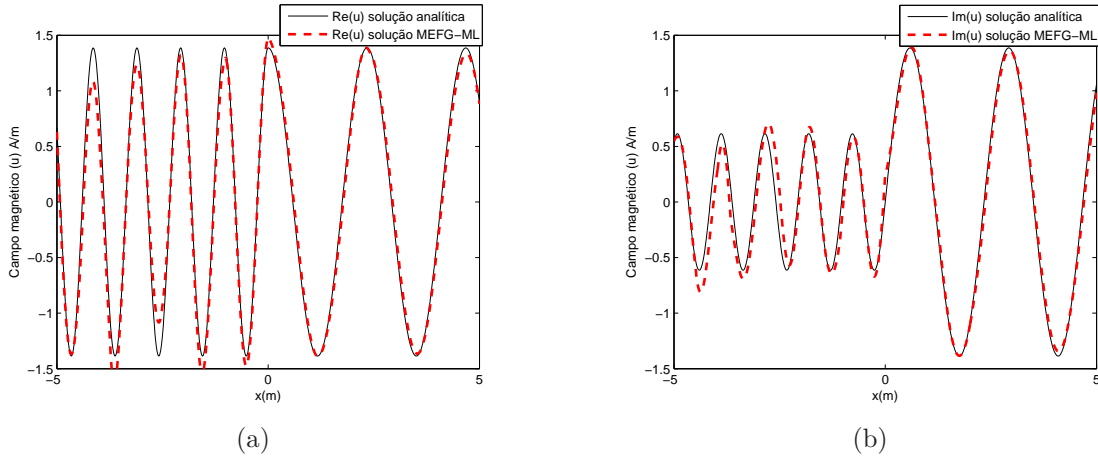


Figura 4.4: Campo magnético para MEFG com ML, ao longo de  $C_x$ , com  $\theta_I = 15^\circ$ ,  $h = 1.1\lambda_a$  e  $q = 12$ . (a) Parte real. (b) Parte Imaginária.

#### 4.3.1.2 MEFG com MEM

A parte real e imaginária da solução deste primeiro exemplo, considerando o MEFG com MEM e  $q = 12$  direções de ondas planas é mostrado nas Fig. 4.5a e Fig. 4.5b, através das quais também é possível observar que a solução do campo magnético obtida por este método é tão precisa quanto a do MEFG com ML. Os erros absolutos médios para a parte real e imaginária neste caso, foram de 0.0079 e 0.0092, respectivamente. Apesar do MEFG com MEM ter utilizado a mesma malha e o mesmo número de direções de ondas que MEFG com ML, o seu sistema resultante apresentou uma dimensão igual  $12 \times 360 = 4.320$  bem inferior ao sistema do ML. O número de elementos não nulos do sistema é igual a 783.936, quase duas vezes mais que o ML. Além disto, o sistema final é esparso e quando multiplicado pelo conjugado da matriz dos coeficientes fica positivo definido o que facilita a escolha do método de resolução do sistema. Nota-se que o tempo de cálculo dos sistemas resultantes do MEFG com o ML e com o MEM são praticamente os mesmos, o que muda consideravelmente é o tempo para resolver o sistema. Em todos os testes o tempo com o MEM é bem inferior ao ML. Tal fato, se dá em função das características de cada um deles.

Semelhante ao ocorrido com o MEFG com ML, nota-se pelas Fig. 4.6a e Fig. 4.6b que a aproximação dada pelo MEFG usando o MEM também não apresenta boas características de convergência quando utiliza-se a malha de tamanho  $h = 1.1\lambda_a$  e  $q = 12$  direções de ondas.

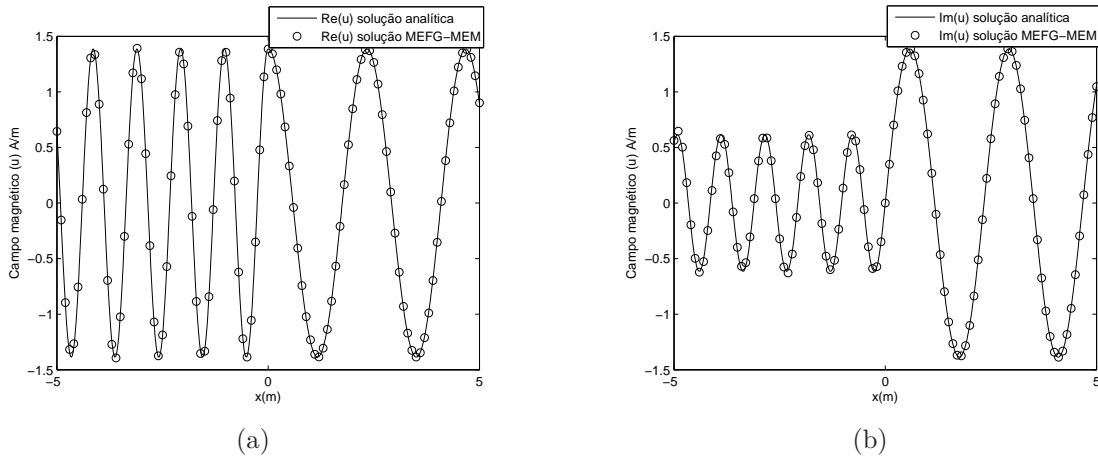


Figura 4.5: Campo magnético para MEFG com MEM, ao longo de  $C_x$ , com  $\theta_I = 15^\circ$ ,  $h = 0.6\lambda_a$  e  $q = 12$ . (a) Parte real. (b) Parte Imaginária.

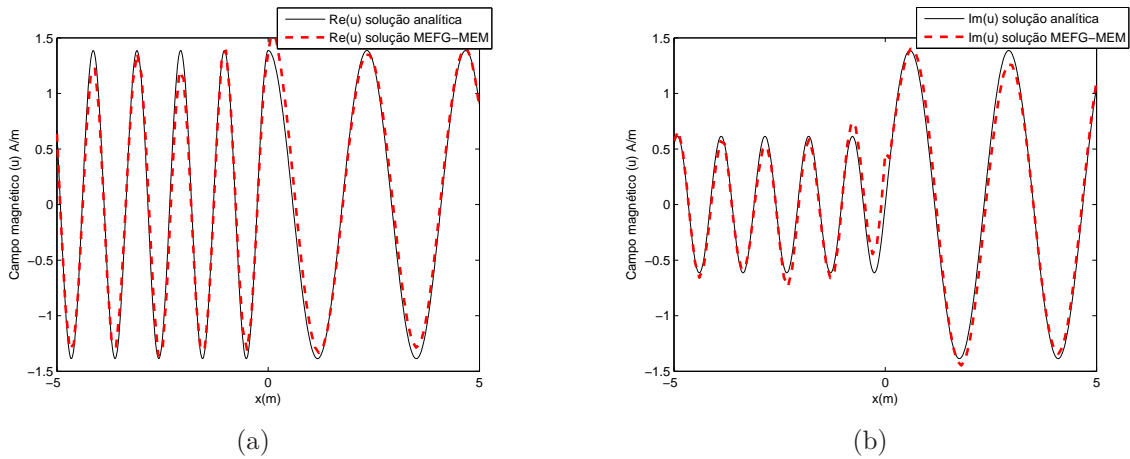


Figura 4.6: Campo magnético para MEFG com MEM, ao longo de  $C_x$ , com  $\theta_I = 15^\circ$ ,  $h = 1.1\lambda_a$  e  $q = 12$ . (a) Parte real. (b) Parte Imaginária.

### 4.3.2 Guia de placas paralelas

Este exemplo é caracterizado por uma descontinuidade em um guia de onda de placas paralelas. A geometria do problema é ilustrada na Fig. 4.7, onde a onda no guia propaga da esquerda para a direita. Devido à descontinuidade, quer geométrica, ou material, ou ambos, apenas uma parte da onda incidente pode passar pela descontinuidade e continuar a propagar ao longo do guia de ondas. A outra parte da onda incidente será refletida, propagando na direção oposta. Neste exemplo, será considerado a excitação transversal do campo elétrico  $TE_z$  e deseja-se encontrar a componente  $z$  do campo magnético que satisfaz a equação de Helmholtz no domínio computacional, onde uma haste dielétrica retangular está inserida no guia. A condição Robin é imposta nos lados  $AB$  e  $CD$  enquanto a condição de Neumann

homogêneo é imposta nos lados  $AC$  e  $BD$ , veja Fig. 4.7. O domínio computacional do problema foi discretizado por uma malha triangular de elementos finitos de tamanho  $h_a = h_b = 0.1\lambda_0$ , composta de 449 elementos, 714 arestas e 266 nós. Sendo que destes nós, 44 estão sobre a interface  $\Gamma$ . Para validar os resultados obtidos com o MEFG, usou-se os resultados obtidos com MEF com uma malha de tamanho  $h = 0.01\lambda_0$  com 4.448 elementos, 2.387 nós e 6.834 arestas.

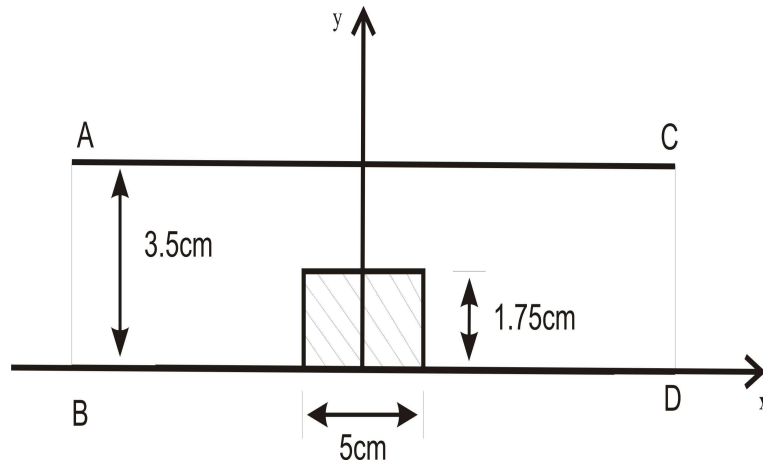


Figura 4.7: Haste dielétrica inserida em um guia de ondas de placas paralelas

#### 4.3.2.1 MEFG com ML

As Fig. 4.8a e Fig. 4.8b mostram respectivamente a parte real e imaginária do campo magnético aproximado numericamente pelo MEF e pelo MEFG com o ML e  $q = 4$  diferentes direções de ondas planas na linha  $C_x = \{(x, y) | y = 0, -20 \leq x \leq 20\}$ . O número de graus de liberdade para obter este resultados foi de  $4 \times (266 + 2 \times 44) = 1.416$ . Como esperado, mesmo fazendo uso do ML para garantir a continuidade do campo na interface entre os diferentes materiais, o número de graus de liberdade usado na aproximação pelo MEFG diminuiu consideravelmente, chegando quase que a metade do número de graus de liberdade utilizado pela aproximação feita como o MEF. A Fig. 4.9 apresenta as linhas equipotenciais da parte real e imaginária do campo magnético aproximado pelo MEFG com o ML. Nota-se que a frente de onda atinge a haste dielétrica retangular e uma parte dela atravessa a descontinuidade e continua a propagar ao longo do guia de onda. A outra parte da onda incidente é refletida e propaga na direção contrária. Os resultados são obtidos usando uma onda plana incidente com ângulo incidente  $\theta_I = 0^\circ$ ,  $\lambda_0 = 10\text{cm}$   $\epsilon_r = 4.0 - 1.0j$ .

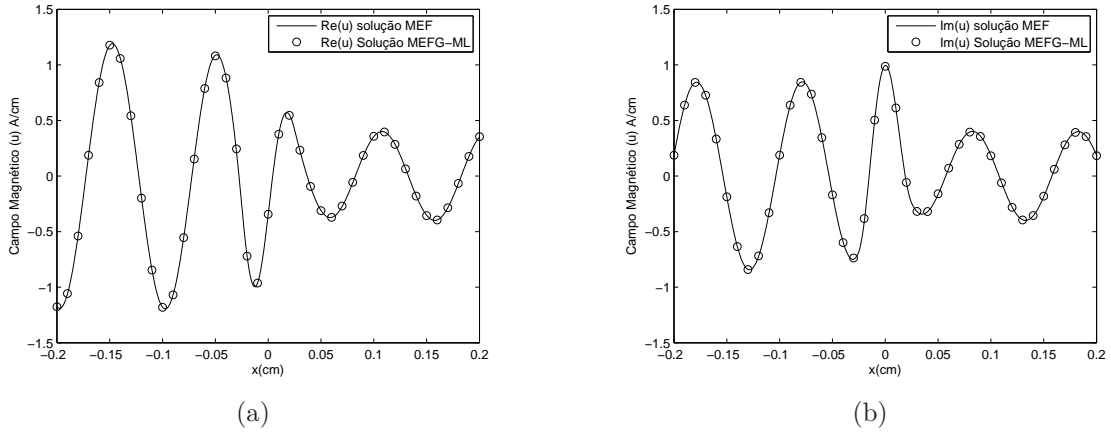


Figura 4.8: Campo magnético para MEFG com ML versus MEF, ao longo de  $C_x$ , com  $\theta_I = 0^\circ$ ,  $h_a = h_b = 0.1\lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 10\text{cm}$ ,  $\epsilon_r = 4.0 - 1.0j$  e  $q = 4$ . (a) Parte real. (b) Parte imaginária.

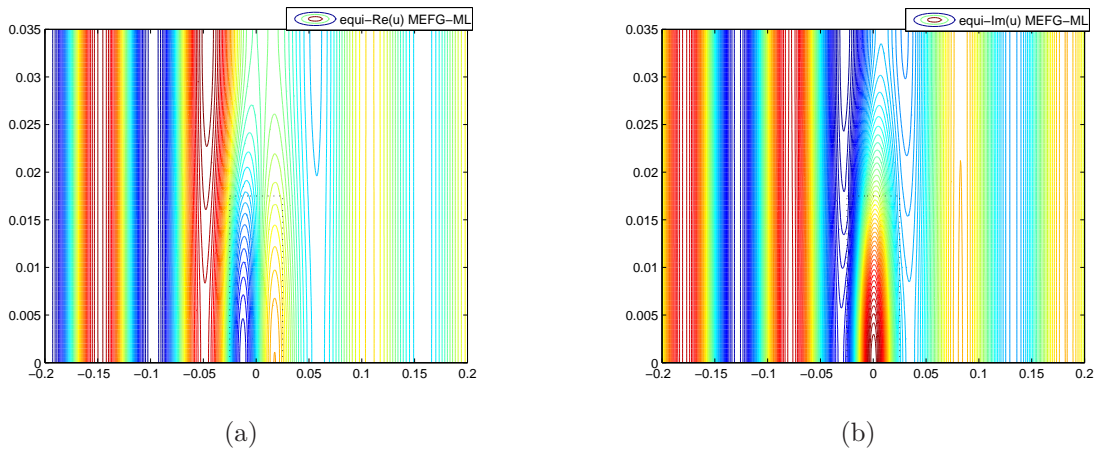


Figura 4.9: Linhas equipotenciais do campo magnético para MEFG com ML,  $\theta_I = 0^\circ$ ,  $h_a = h_b = 0.1\lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 10\text{cm}$ ,  $\epsilon_r = 4.0 - 1.0j$  e  $q = 4$ . (a) Parte real. (b) Parte imaginária.

#### 4.3.2.2 MEFG com MEM

Os resultados apresentados nas Fig. 4.10a e Fig. 4.10b mostram que a solução do campo magnético obtida pelo MEFG com MEM e  $q = 4$  diferentes direções de ondas planas na linha  $C_x$  é tão precisa quanto a do MEFG com ML. O mesmo ocorre com as linhas equipotenciais, de acordo com a Fig. 4.11. Nota-se que o número de graus de liberdade do MEFG com o MEM é igual a  $4 \times 266 = 1.064$ , inferior aos utilizados pelo ML.

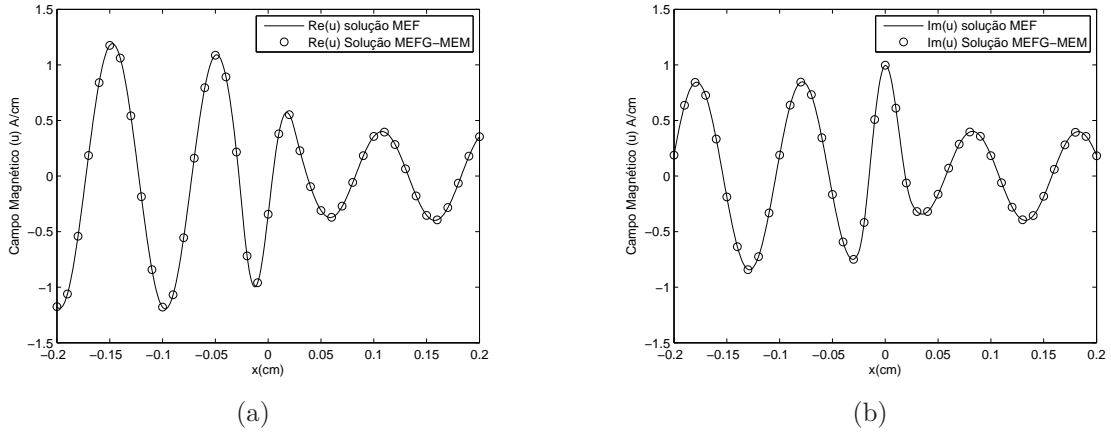


Figura 4.10: Campo magnético para MEFG com MEM versus MEF, ao longo de  $C_x$ ,  $\theta_I = 0^\circ$ ,  $h_a = h_b = 0.1\lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 10\text{cm}$ ,  $\epsilon_r = 4.0 - 1.0j$  e  $q = 4$ . (a) Parte real. (b) Parte imaginária.

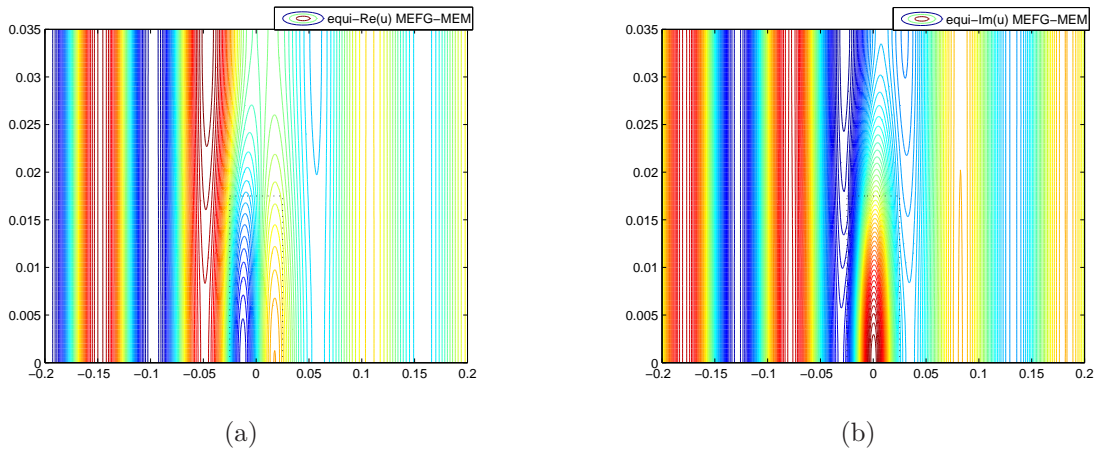


Figura 4.11: Linhas equipotenciais do campo magnético para MEFG com MEM,  $\theta_I = 0^\circ$ ,  $h_a = h_b = 0.1\lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 10\text{cm}$ ,  $\epsilon_r = 4.0 - 1.0j$  e  $q = 4$ . (a) Parte real. (b) Parte imaginária.

### 4.3.3 Problema de espalhamento eletromagnético

Neste exemplo, pretende-se resolver um problema de espalhamento eletromagnético de onda plana em um cilindro condutor 4.12a. Especificamente, considera-se a excitação transversal do campo elétrico  $TE_z$  e deseja-se encontrar a componente em  $z$  do campo magnético que satisfaz a equação de Helmholtz no domínio  $\Omega$ . Na fronteira  $\Gamma_a$  impõem-se a condição de contorno de Neumann homogênea e especifica-se uma condição de contorno absorvente (ABC) para impor a condição de radiação de Sommerfeld em  $\Gamma_b$ .

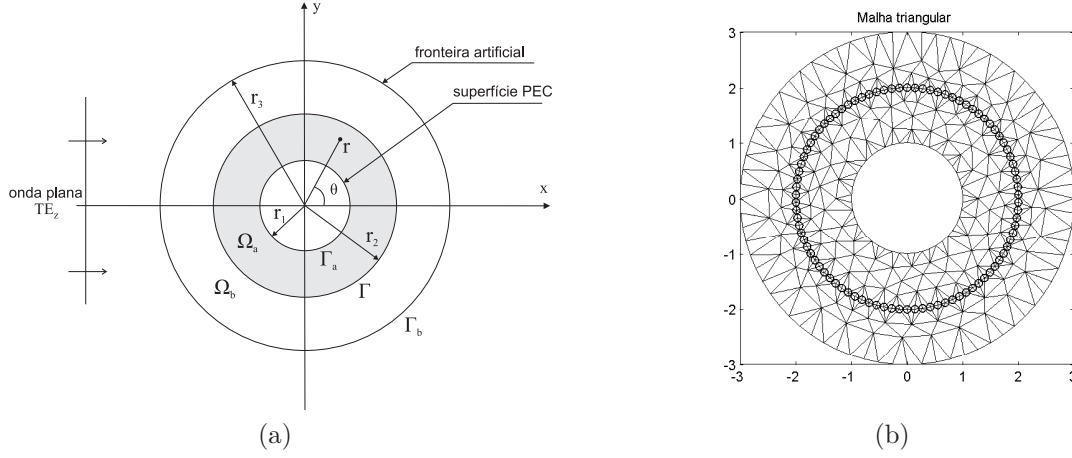


Figura 4.12: Domínio computacional e malha triangular. (a) Domínio computacional  $\Omega$  entre a superfície PEC (condutor perfeito) e a fronteira artificial  $\Gamma_b$  e (b) A malha triangular utilizada nos cálculos.

Uma solução para este problema foi desenvolvido em termos de uma série funções de Bessel [41], onde os campos nas regiões  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$  são dadas, respectivamente, por

$$u_a = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \mathbf{J}_n(k_a r) + B_n \mathbf{Y}_n(k_a r)] \cos n\theta. \quad (4.33)$$

e

$$u_b = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \mathbf{J}_n(k_b r) + D_n \mathbf{Y}_n(k_b r)] \cos n\theta. \quad (4.34)$$

onde  $\mathbf{J}_n$  e  $\mathbf{Y}_n$  são as primeiras e segundas funções de Bessel de ordem  $n$ . Os coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  e  $D_n$  são determinados por meio das seguintes condições de contorno:

- Condição de contorno Neumann sobre o espalhador:

$$\frac{\partial u_a}{\partial r} = 0 \quad \text{para } r = r_1. \quad (4.35)$$

- Continuidade do campo na interface  $\Gamma$

$$u_a = u_b \quad \text{para } r = r_2. \quad (4.36)$$

- Continuidade da componente tangencial do campo na interface  $\Gamma$

$$\frac{1}{k_a^2} \frac{\partial u_a}{\partial r} = \frac{1}{k_b^2} \frac{\partial u_b}{\partial r}. \quad (4.37)$$

- Sobre a fronteira  $\Gamma_b$  o campo magnético  $u$  comporta-se como  $exp(jk_b r)/\sqrt{r}$ , isto só é verdade em  $\Gamma_b$  suficientemente longe do espalhado. Portanto, uma forma simples para a condição de absorção (ABC) é dada por

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{u_s}{2r} - jk_b u_s = 0 \quad \text{para } r = r_3. \quad (4.38)$$

Dado  $u_b = u_s + u_I$ , onde  $u_I$  é o campo magnético da onda plana incidente, chegamos em:

$$\frac{\partial u_b}{\partial r} + \left( \frac{1}{2r} - jk_b \right) u_b = \frac{\partial u_I}{\partial r} + \left( \frac{1}{2r} - jk_b \right) u_I. \quad (4.39)$$

Uma vez que os coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  e  $D_n$  podem ser determinado por truncamento na ordem nos índices  $n$ , a solução analítica expressa pelas Equações (4.33) e (4.34) pode ser avaliada em todo o domínio  $\Omega$ .

O problema de espalhamento a ser resolvido usando MEFG é expresso pelo sistema dado na Equação (4.23) onde

$$\mathbf{M}_a = \int_{\Omega_a} (\nabla P_a^T \nabla P_a - k_a^2 P_a^T P_a) d\Omega, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{M}_b = \int_{\Omega_b} (\nabla P_b^T \nabla P_b - k_b^2 P_b^T P_b) d\Omega + \int_{\Gamma_b} P_b^T \left( \frac{1}{2r} - jk_b \right) P_b d\Gamma, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{C}_a = k_a^2 \int_{\Gamma} P_a^T Q d\Omega, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{C}_b = k_b^2 \int_{\Gamma} P_b^T Q d\Omega, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{f}_a = 0, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{f}_b = \int_{\Gamma_b} P_b^T \left[ \frac{1}{2r} + (\cos\theta - 1)jk_b \right] exp(jk_b r \cos\theta) d\Gamma. \quad (4.45)$$

Os seguintes dados são utilizados nos cálculos:

- Raio da superfície PEC  $\Gamma_a$ ,  $r_1 = 1.0\lambda_a$ ;
- Raio da interface dielétrica  $\Gamma$ ,  $r_2 = 2.0\lambda_a$ ;
- Raio da fronteira artificial  $\Gamma_b$ ,  $r_3 = 3.0\lambda_a$ ;



- Números de ondas  $k_a = 2\pi$  e  $k_b = \pi$ ;
- tamanho da malha  $h = 1.0\lambda_a$ .

Os comprimentos de raio são normalizados pelo comprimento de onda no subdomínio  $\Gamma_a$ . O domínio computacional  $\Omega$  foi discretizado em 588 elementos triangulares, resultando em 941 arestas e 353 nós. Destes nós, 90 estão na interface  $\Gamma$ , como mostra a Fig. 4.12b. Para este exemplo, foram usados os mesmo números de nós de Gauss-Legendre, usados nos exemplos anteriores.

#### 4.3.3.1 MFG com ML

A Fig. 4.13a e Fig. 4.13b mostram respectivamente a parte real e imaginária do campo magnético analítico e aproximado numericamente na linha  $C_y = \{(x, y) | x = 0, -3 \leq y \leq -1, 1 \leq y \leq 3\}$ . O campo magnético calculado através do MFG, com  $q = 6$  direções de ondas planas, fornece uma excelente aproximação à solução analítica, Equações (4.33) e (4.34). Note-se que os erros absoluto das partes real e imaginária são iguais a 0.0027 e 0.0015, respectivamente.

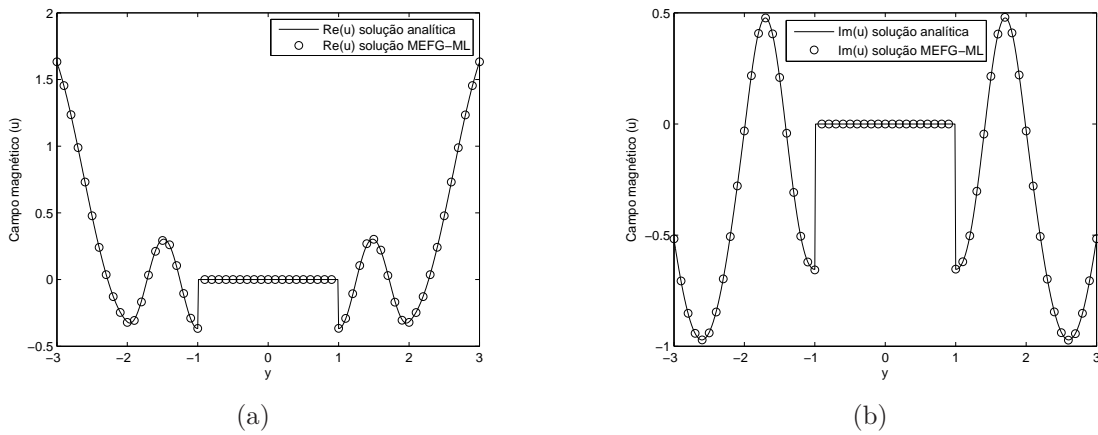


Figura 4.13: Campo magnético para o MFG com ML, ao longo da reta  $C_y$ , com  $h = 1.0\lambda_a$  e  $q = 6$ . (a) Parte real. (b) Parte imaginária.

#### 4.3.3.2 MFG com MEM

A solução do problema considerando o MFG com MEM e  $q = 6$  direções de ondas planas é apresentado nas Fig. 4.14a e Fig. 4.14b, através das quais observa-se que a solução obtida para o campo magnético por este método é tão precisa quanto a do MFG com ML. Os erros

absolutos da parte real e imaginária foram de 0.0024 e 0.0016 ao longo de  $C_y$ , respectivamente.

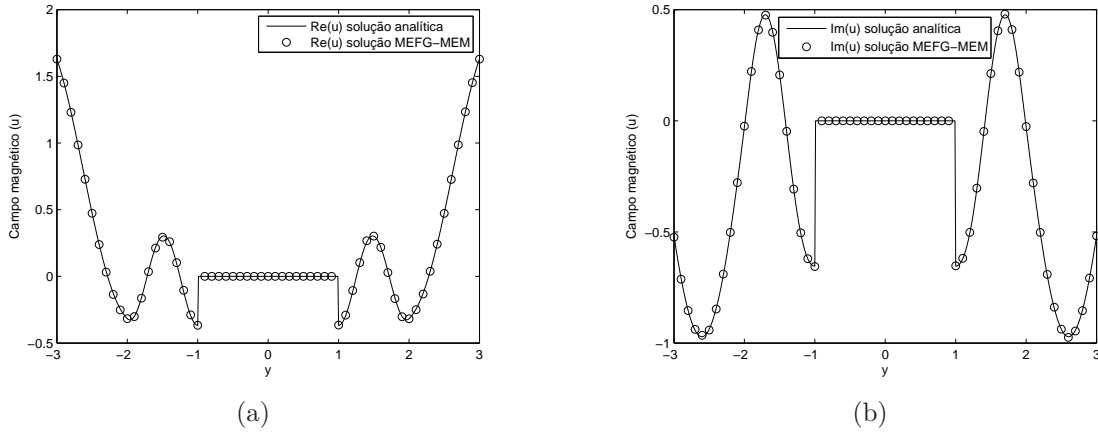


Figura 4.14: Campo magnético para o MEFG com MEM, ao longo da reta  $C_y$ , com  $h = 1.0\lambda_a$  e  $q = 6$ . (a) Parte real. (b) Parte imaginária.

#### 4.3.3.3 $q$ -convergência do MEFG com o MEM e ML

A Fig. 4.15 mostra a  $q$ -convergência das partes real e imaginária da solução do campo magnético ao longo da linha  $C_y$  pelo MEFG com MEM e ML,  $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ , utilizando a malha Fig 4.12b de tamanho  $h = 1.0\lambda_a$ . Para obter resultados precisos, foram necessários um mínimo de 6 direções de onda, ou seja,  $6 \times 353 = 2.118$  graus de liberdade no MEM e  $6 \times (353 + 2 \times 90) = 3.198$  para ML. Note-se que a abordagem utilizada para forçar a continuidade na interface  $\Gamma$  não afeta a convergência.

Fig. 4.16 mostra a distribuição do campo magnético total em torno do cilindro de difração aproximada usando o MEFG com o MEM, (à esquerda) parte real, (à direita) parte imaginária. Os resultados numéricos obtidos utilizando  $q = 6$  direções de ondas são mostrados na metade inferior da superfície da malha Fig 4.12b e os resultados analíticos são mostrados na outra metade. O campo é suavemente transmitido para o interior do segundo meio.

Os padrões de matriz mostrado na Fig. 4.17 são obtidos para a malha Fig 4.12b de tamanho  $h = 1.0\lambda_a$  com seis direções de ondas planas, (à esquerda) MEFG com o MEM, (à direita) MEFG com o ML. Estes padrões revelam que apesar da dimensão do sistema resultante do MEM ser menor que a dimensão do sistema resultante do ML, o seu número de elementos não nulos é cerca de quatro vezes maior. Fato que acredita-se ter relação direta com a

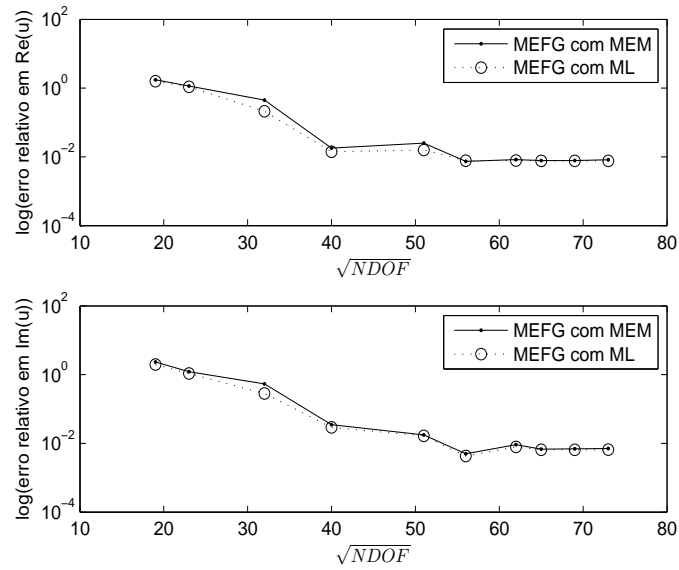


Figura 4.15: Real e imaginária  $q$ —convergência no MEFG com MEM e ML.

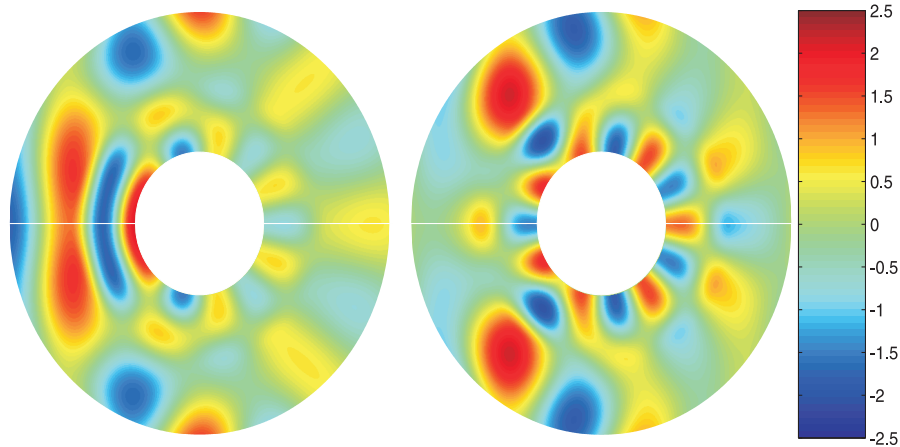


Figura 4.16: Campo magnético total em torno do cilindro,  $q = 10$ ,  $\epsilon = 1.9\%$ .

dimensão das matrizes  $C_a$  e  $C_b$ . Ao multiplicar o sistema resultante do MEM pelo conjugado da matriz dos coeficientes, obtém-se a condição Hermitiana. Neste caso, o sistema final pode ser resolvido por meio de vários métodos, visto que ele é esparso e positivo definido. Neste trabalho, para resolver o sistema resultante do MEFG com o MEM foi utilizado a função `mrdivide` (`\`) do Matlab. Por outro lado, o sistema resultante para ML é mal condicionado (o número de condição é de ordem  $10^{28}$ ) e para obter convergência, foi utilizado o método do gradiente biconjugado com 30.666 iterações. As boas características do MEFG com o MEM ficam também evidentes quando o seu sistema resultante é resolvido pelo mesmo método utilizado para resolver o sistema resultante do MEFG com ML. De acordo com a Fig. 4.18 o

erro relativo em função do número de iterações da aproximação do MEFG com o MEM em geral se mantém inferior ao erro da aproximação do MEFG com o ML. Além disso, a solução encontrada utilizando o método do gradiente biconjugado para o MEM e para o ML, é a que apresentou o menor erro relativo após o número total de iterações independentemente da tolerância definida. Nota-se também que o MEM requer uma inversão de matriz para cada direção de onda, nos nós da interface, então ele exige um custo computacional um pouco maior para obter o sistema final. No entanto, o sistema final do MEFG com MEM devido as suas boas características é muito mais rápido de ser resolvido que o sistema final do MEFG com ML.

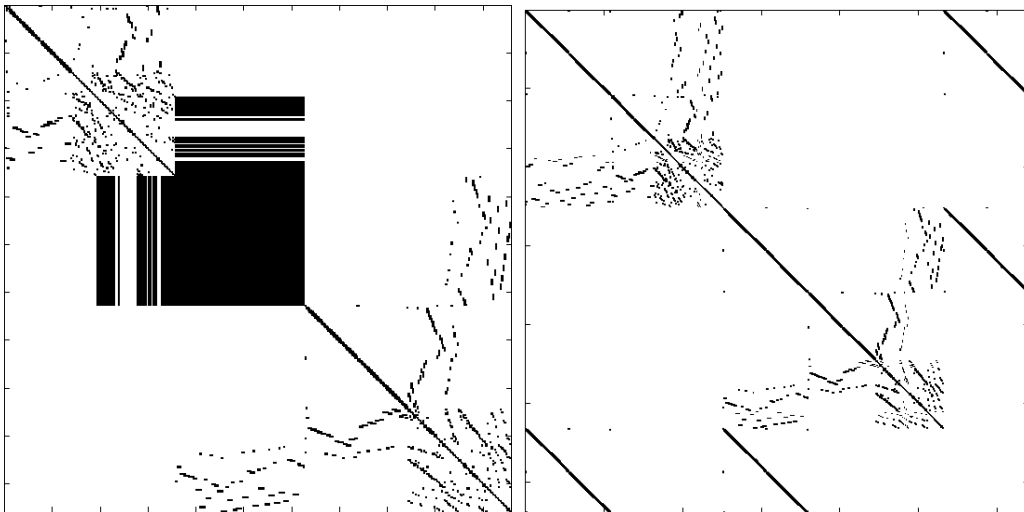


Figura 4.17: Vistas dos termos diferentes de zero para o MEM e para o ML.

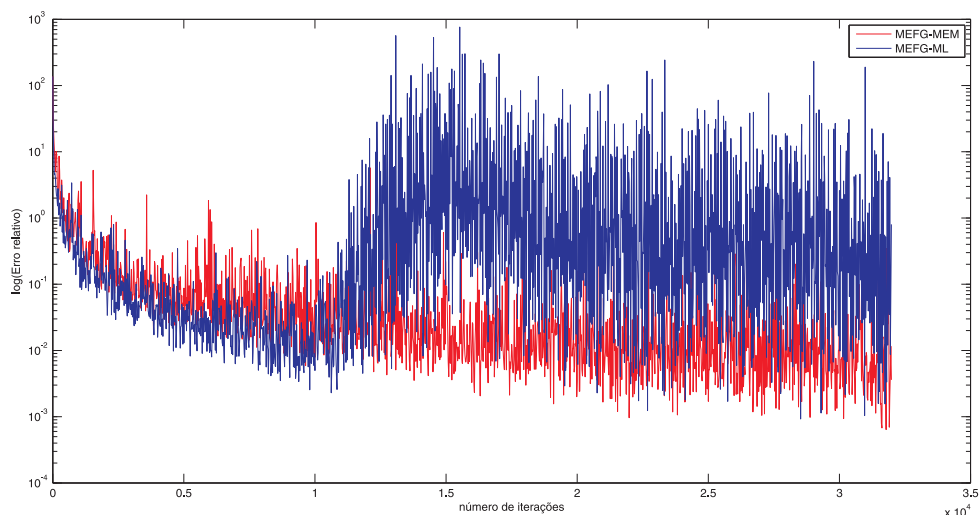


Figura 4.18: Número de interações versus erro relativo no MEFG com o MEM e ML.

Nos resultados apresentados usando o MEFG com ênfase em métodos para garantir as condições de interface foi possível mostrar que o ML pode ser computacionalmente exigente uma vez que leva a sistemas mal condicionados. Uma nova abordagem com base no MEM foi proposta para o MEFG e sua principal vantagem é de proporcionar um sistema esparso e positivo definido, o que facilita a escolha do método de resolução do sistema final. As duas abordagens são conceitualmente equivalentes e apresentaram taxa de convergências muito próximas.

## 4.4 Aplicação

Nesta seção as formulações propostas para o tratamento de descontinuidade no MEFG conforme serão aplicadas a um problema de propagação de onda em uma coluna circular de concreto em 2D, com variações na constituição do material. Os resultados são comparados com os obtidos utilizando o Método dos Elementos Finitos com elementos triangulares de primeira ordem.

### 4.4.1 Coluna de concreto cilíndrica

Esta aplicação desenvolvida destina-se, à solução de um problema em duas dimensões com diferentes materiais separados por um interface circular. Considera-se como domínio computacional  $\Omega$  uma coluna de concreto circular, Fig. 4.19, delimitada por uma fronteira artificial suave  $\Gamma_a$  e contendo no seu interior quatro vergalhões de fronteira  $\Gamma_b$ . O domínio computacional entre  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_b$  é definido pela presença de dois materiais cuja interface é  $\Gamma$ . A aproximação obtida pelo MEFG com ML e com MEM serão verificada junto a solução aproximada obtida utilizando o MEF. Devido ao custo computacional para aproximar a solução pelo MEF, na análise que segue, será considerado apenas a região do domínio computacional  $\Omega$  localizada nos primeiros e segundo quadrante, veja Fig. 4.19.

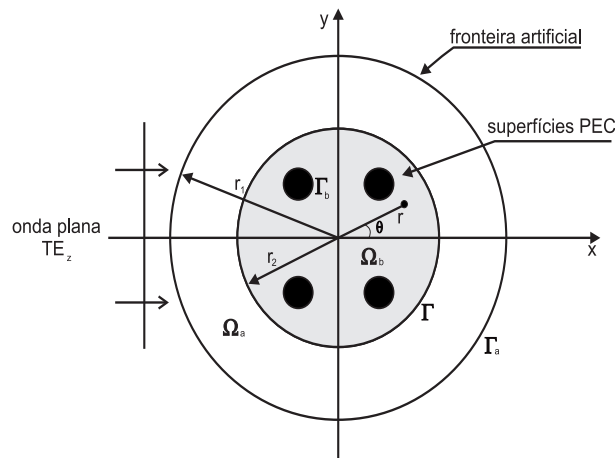


Figura 4.19: Domínio Computacional  $\Omega$ , coluna de concreto

Os seguintes dados são utilizados nos cálculos:

- frequência,  $f = 2GHz$ ;
- comprimento de onda no espaço livre,  $\lambda_0 = 0,15m$ ;
- Raio dos vergalhões  $\Gamma_b, \frac{\lambda_0}{3}$ ;
- Raio da fronteira artificial  $\Gamma_a, r_1 = 3.5\lambda_0$ ;
- Raio da interface da coluna de concreto,  $r_2 = 2.5\lambda_0$ ;
- permissividade relativa em  $\Omega_a, \epsilon_{r_a} = 1$
- permissividade relativa em  $\Omega_b, \epsilon_{r_b} = 6.5 - 0.43i, [71]$ ;
- permeabilidade relativa em  $\Omega_a, \mu_{r_a} = 1$ ;
- permeabilidade relativa em  $\Omega_b, \mu_{r_b} = 1$ ;

O domínio computacional  $\Omega$  foi discretizado por uma malha conforme da tamanho  $h = \frac{1}{3}\lambda_0$ , contendo 1.059 elementos triangulares, 1.662 arestas e 602 nós. Destes nós, 121 estão na interface  $\Gamma$ , como mostra a Fig. 4.20. Para validar os resultados obtidos com o MEFG, foi utilizado os resultados obtidos com a melhor solução do MEF para uma malha de tamanho  $h = 0.02\lambda_0$  composta de 94.537 elementos, 47.787 nós e 142.325 arestas. Para esta aplicação foi também empregado o método de integração de Gauss-Legendre, com 64 pontos no interior de cada triângulo e 6 ao longo de cada aresta da fronteira  $\Gamma$ .

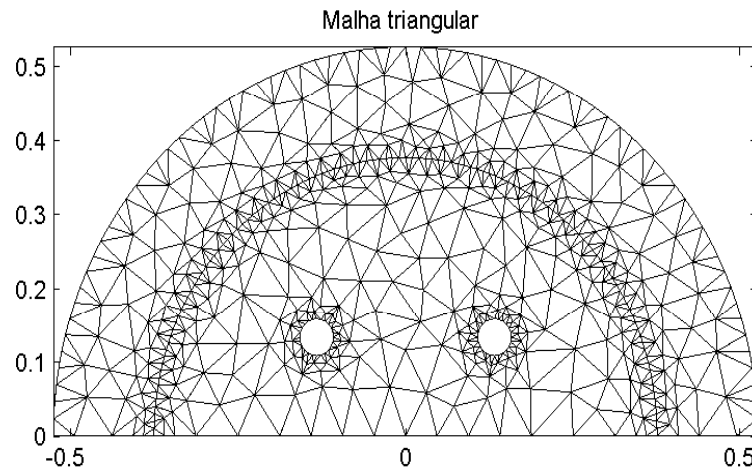


Figura 4.20: Malha triangular conforme - MEFG

#### 4.4.2 MEFG com ML

A Fig. 4.21 mostra a parte real e imaginária do campo magnético aproximado numericamente pelo MEF e pelo MEFG com o ML e  $q = 8$  diferentes direções de ondas planas ao longo da semicircunferência de raio  $r = 3.5\lambda_0$ . O campo magnético calculado pelo MEFG, com  $q = 8$  direções de ondas planas comparado com a aproximação encontrada pelo MEF se mostrou satisfatório e com boas taxas de convergência, Fig. 4.24.

#### 4.4.3 MEFG com MEM

A solução do problema considerando o MEFG com MEM e  $q = 8$  direções de ondas planas é apresentado na Fig. 4.22. A solução obtida para o campo magnético pelo MEFG com MEM e comparada com aproximação numérica dada pelo MEF se mostrou ser tão precisa quanto a do MEFG com ML e com um custo computacional menor.

As Fig. 4.23 e Fig. 4.24 mostram respectivamente a partes real e imaginária da  $h$ -convergência da solução do campo magnético pelo MEF e a  $q$ -convergência da solução do campo magnético pelo MEFG ao longo da semicircunferência de raio  $r = 3.5\lambda_0$  com

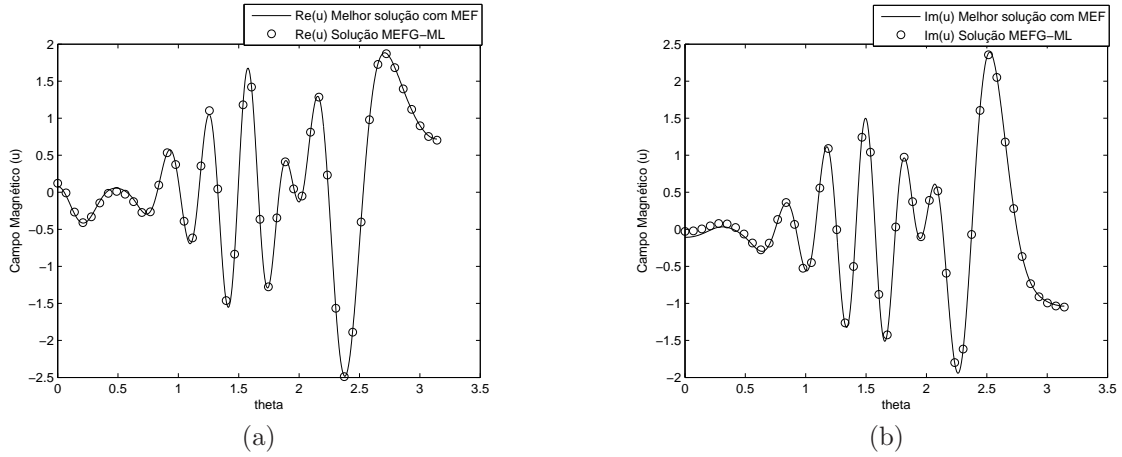


Figura 4.21: Campo magnético aproximado numericamente pelo MEF, com  $h = 0.02\lambda_0$  e pelo MEFG com o ML,  $h = \frac{1}{3}\lambda_0$  e  $q = 8$  diferentes direções de ondas planas ao longo da semicircunferência de raio  $r = 3.5\lambda_0$ . (a) Parte Real. (b) Parte Imaginária.

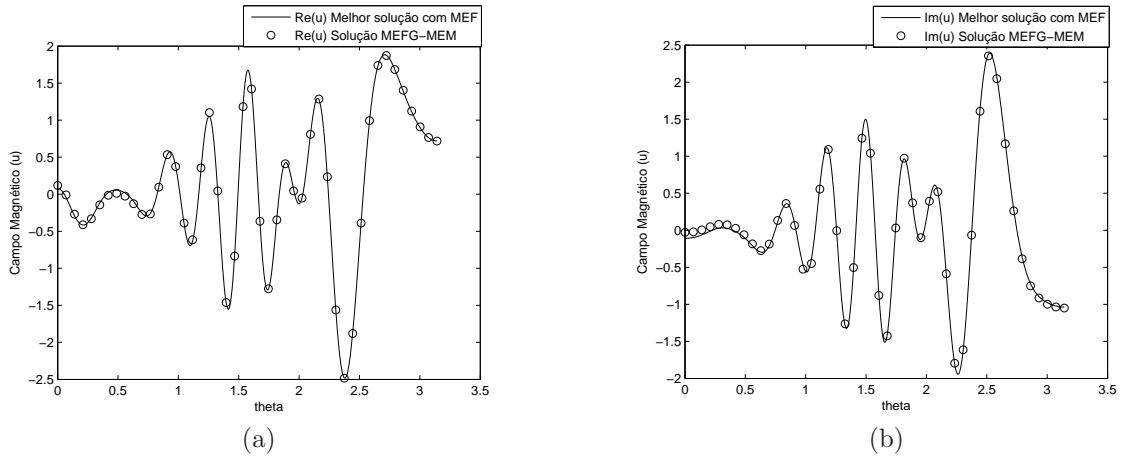
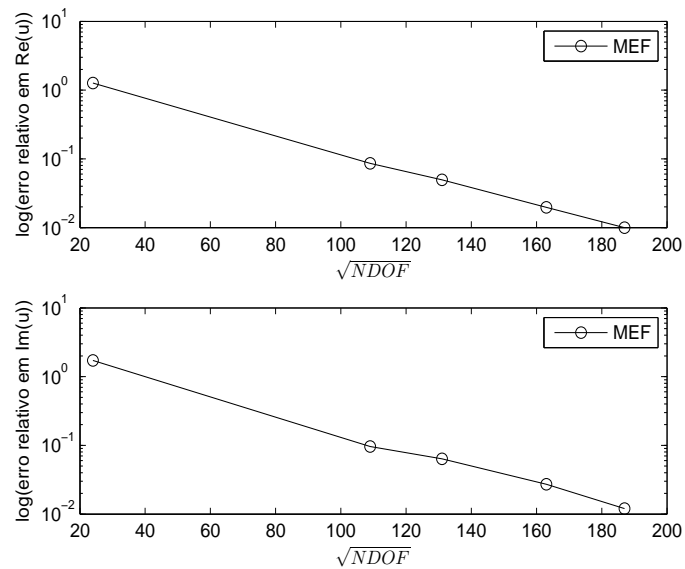
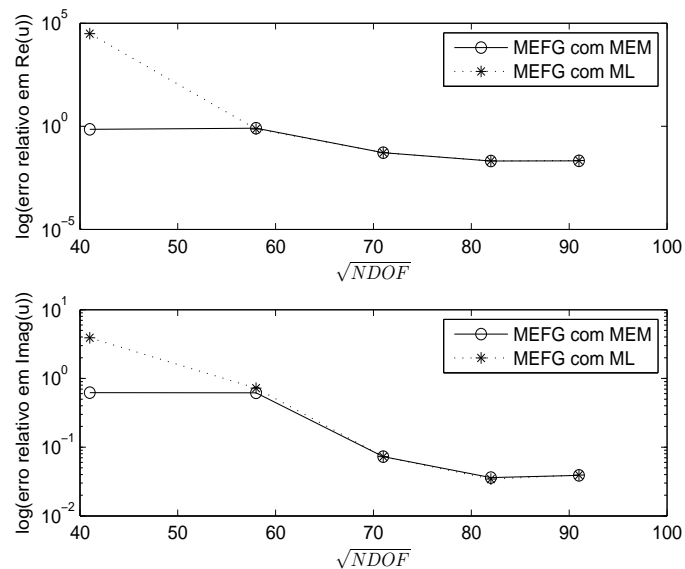


Figura 4.22: Campo magnético aproximado numericamente pelo MEF, com  $h = 0.02\lambda_0$  e pelo MEFG com o MEM,  $h = \frac{1}{3}\lambda_0$  e  $q = 8$  diferentes direções de ondas planas ao longo da semicircunferência de raio  $r = 3.5\lambda_0$ . (a) Parte Real. (b) Parte Imaginária.

MEM e ML,  $q = 2, 4, 6, 8, 10$ . Para obter bons resultados, foram necessários com o MEF, cerca de 40.000 graus de liberdade, com MEFG um mínimo de 8 direções de onda, o que equivale a  $8 \times 602 = 4.816$  grau de liberdade no MEM e  $8 \times (602 + 2 \times 121) = 6.752$  para ML. Note-se que a abordagem utilizada para forçar a continuidade na interface quando aplicada a este problema preserva as características de convergência. O mal condicionamento do sistema resultante do MEFG com ML é de ordem  $10^{21}$  e para obter a convergência foi utilizado o método do gradiente biconjugado.



Figura 4.23:  $h$ -convergência da solução do MEFFigura 4.24:  $q$ -convergência da solução do MEFG

A distribuição do campo magnético total aproximado usando o MEFG com o MEM é apresentado na Fig. 4.25, (à esquerda) parte real, (à direita) parte imaginária. Os resultados numéricos obtidos utilizando  $q = 8$  direções de ondas são muito próximos dos resultados obtidos com MEF, Fig. 4.26.

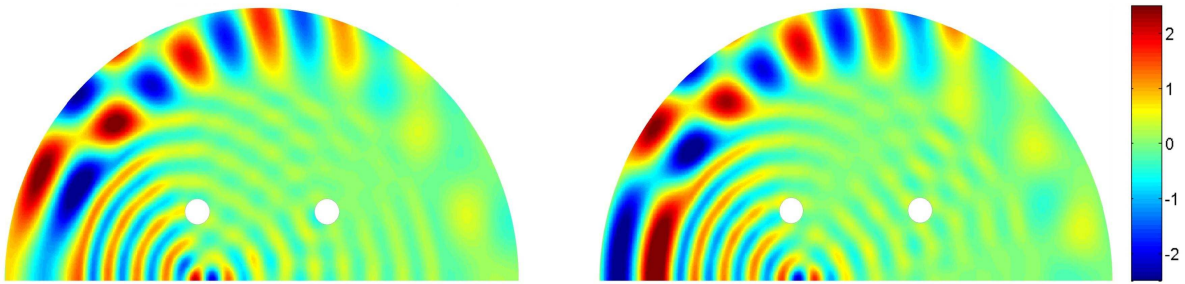


Figura 4.25: Campo Magnético total, para MEFG com MEM,  $h = \frac{1}{3}\lambda_0$  e  $q = 8$

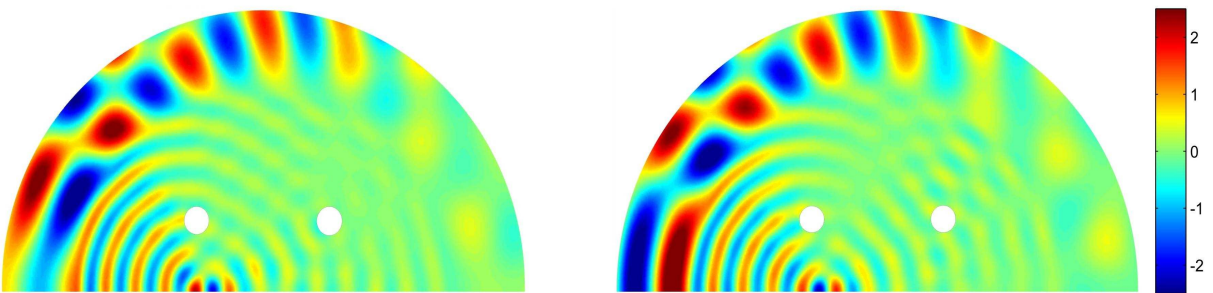


Figura 4.26: Campo Magnético total, para MEF com  $h = 0.02\lambda_0$

Técnicas capazes de incorporar subdomínios não-conformes que são separados por interfaces lineares ou curvilíneas são muito bem explorado no tradicional MEF, no entanto, no MEFG tal abordagem não é realizada. O que se pretende com o próximo capítulo desta tese, é apresentar formulações necessárias para resolver problemas onde os subdomínios no MEFG são não-conformes. Todos os exemplos e aplicação resolvidos no MEFG com malhas conformes, serão agora resolvidos e confrontados com não-conforme MEFG.

# Capítulo 5

## Tratamento de Descontinuidade de Materiais no NC-MEFG

No que segue, a formulação apresentada para o MEFG com enriquecimento por onda plana nos Capítulo 3 e Capítulo 4 para resolver a equação de Helmholtz escalar com sub-domínios conformes será estendido para incorporar sub-domínios não-conformes que são separados por interfaces seccionalmente lineares ou curvilíneas. A técnica não-conforme pode ser usada para forçar a condição de interface melhorando a eficiência do método, sem sacrificar a precisão. Ela permite modelar cada sub-região independentemente. Além disso, também pode-se impor refinamento seletivo apenas nos sub-domínios onde for necessário. Daí, os elementos finitos podem ser construídos em cada região com a maior regularidade possível, sem ter que levar em conta a correspondência entre os diferentes níveis de refinamento. Além disso, o uso de métodos não-conformes fornecem um caminho natural para lidar com arquitetura de computação paralela [50] tratando independente com cada subdomínios.

### 5.1 Formulação do Problema

Dado o domínio computacional  $\Omega$ , Fig.4.1, considera-se duas malhas independentes que cobrem os subdomínios e que são conectados por um interface  $\Gamma$ , como apresentado na Fig.5.1.

As malhas destes subdomínios são geradas independentemente. Consequentemente, os pontos em  $\Gamma$  obtidos a partir da malha que cobre a região  $\Omega_a$  não necessariamente coincidentes com os pontos obtidos a partir da malha que cobre a região  $\Omega_b$ . O MEFG é aplicado à formulação dada na Seção 4.1, sendo que o objetivo agora é continuar garantindo as condições de continuidade

na interface  $\Gamma$ , mesmo sabendo que a triangulação de  $\Omega_a$  sobre  $\Gamma$ ,  $\Gamma_{h_a}$  não é necessariamente a mesma para  $\Omega_b$ ,  $\Gamma_{h_b}$ , onde  $h_a$  e  $h_b$  são os tamanhos das malhas, Fig.5.1. Embora a formulação apresentada aqui seja desenvolvida para garantir a continuidade na interface entre apenas dois subdomínios, os resultados obtidos podem, sem perda de generalidade, serem estendidos para um número arbitrário de subdomínios.

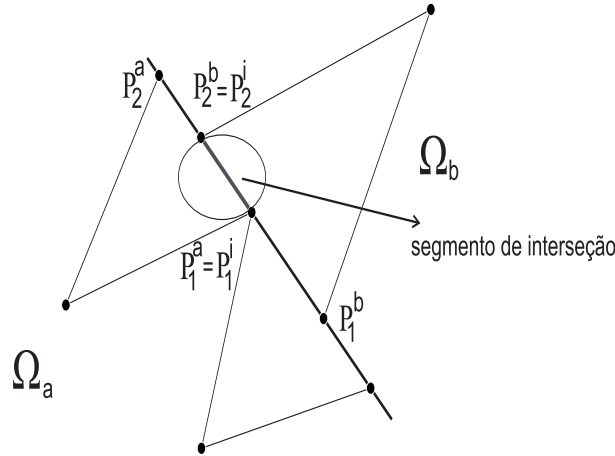


Figura 5.1: Interface linear entre duas malhas não-conformes

### 5.1.1 ML para malhas Não-Conformes

O objetivo desta seção é descrever as adaptações necessárias a técnica apresentada na Seção 4.2 para assim garantir as condições de continuidade na interface  $\Gamma$  para a triangulação não conforme. Neste caso, a técnica que foi apresentada seria então um caso particular para malhas conformes da formulação que segue.

Conforme [43], se a numeração dos nós em cada domínio é feita de forma que os que pertencem à interface  $\Gamma$  tomam os primeiros lugares e se o mesmo espaço discreto da solução aproximada  $u_a$  em  $\Omega_a$  ou  $u_b$  em  $\Omega_b$  é usado para a discretização do ML  $\lambda$ , Equação (4.5), chegamos em

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n_a^\Gamma} \sum_{l=1}^q N_j^a w_k^l \lambda_{jl} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\lambda}. \quad (5.1)$$

ou

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n_b^\Gamma} \sum_{l=1}^q N_j^b w_k^l \lambda_{jl} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\lambda}. \quad (5.2)$$

onde  $n_a^\Gamma$  e  $n_b^\Gamma$  são os números de nós pertencentes  $\Gamma_{h_a}$  e  $\Gamma_{h_b}$ , respectivamente.

Como as malhas usadas na discretização dos subdomínios  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$ , no Capítulo 4, são conformes, os nós na interface  $\Gamma$  são os mesmos para ambos os subdomínios. Neste caso,

$$N_j^a|_{\Gamma} = N_j^b|_{\Gamma} \quad (5.3)$$

e as Equações (5.1) e (5.2) são idênticas. Daqui em diante, considera-se que os nós da discretização de  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$  sobre a interface  $\Gamma$  não são necessariamente os mesmos e a Equação (5.3) não se aplica. Então, o ML  $\lambda$  é aproximado usando uma das abordagens apresentadas pelas Equações (5.1) ou (5.2). Neste sentido, o NC-MEFG pode ser visto como uma extensão do método apresentado no Capítulo 4 para malhas não conformes. Sem perda de generalidade o ML pode ser baseado nos nós da interface  $\Gamma_{h_a}$  ou  $\Gamma_{h_b}$ . Escolhendo a Equação (5.1) para representar o ML e escrevendo a aproximação da função de teste em  $\Omega_a$  pela Equação 4.10 chegamos aos mesmos resultados apresentados na Seção 4.2.1 pelas Equações (4.11), (4.12) e (4.13).

Entretanto, usando a Equação (5.1) e a aproximação da função de teste em  $\Omega_b$  dada por

$$v_b = N_i^b w_{k_b}^l, i \in \Omega_b, \quad (5.4)$$

o último termo do lado esquerdo da Equação (4.7) torna-se

$$\int_{\Gamma} v_b \lambda d\Gamma = \sum_{j=1}^{n_b^{\Gamma}} \sum_{l=1}^q \int_{\Gamma} N_i^b w_{k_b}^l|_{\Gamma} N_j^a w_k^l|_{\Gamma} d\Gamma \lambda_{jl} \quad (5.5)$$

ou na forma matricial

$$\mathbf{C}_b \boldsymbol{\lambda} \quad (5.6)$$

onde

$$\mathbf{C}_b = \int_{\Gamma} \mathbf{P}_b^T \mathbf{Q} d\Gamma \quad (5.7)$$

$\mathbf{C}_b$  é uma matriz  $n_b^{\Gamma} \cdot q \times n_a^{\Gamma} \cdot q$  e  $\mathbf{P}_b$  é uma matriz de dimensão  $n_b^{\Gamma} \cdot q \times n_b^{\Gamma} \cdot q$ . Note-se que na Equação (4.17), a matriz  $\mathbf{C}_b$  é quadrada, mas que aqui este não será o caso. Além disso, como pode ser visto na Fig.(5.1) os nós utilizados para interpolar as funções de teste e o ML  $\lambda$  não são necessariamente definidos na mesma aresta. Conseqüentemente, um esquema especial de integração local será necessário para construir a matriz global  $\mathbf{C}_b$ .

Se a mesma aproximação do multiplicador Lagrange  $\lambda$  é usada para a representação da função de teste  $v_c$ , Equação (4.8), tem-se

$$v_c = N_i^a w_k^l, i = 1, \dots, n_a^{\Gamma}. \quad (5.8)$$

Usando a Equação (5.8) e a aproximação do campo  $u_a$  e  $u_b$ , ambas extraídas da Equação (3.13), chega-se em

$$\int_{\Gamma} u_a v_c d\Gamma = \sum_{j=1}^{n_a^{\Gamma}} \sum_{l=1}^q \int_{\Gamma} N_i^a w_{k_a}^l |_{\Gamma} N_j^a w_k^l |_{\Gamma} d\Gamma \lambda_{jl} \quad (5.9)$$

$$\int_{\Gamma} u_b v_c d\Gamma = \sum_{j=1}^{n_b^{\Gamma}} \sum_{l=1}^q \int_{\Gamma} N_i^a w_{k_b}^l |_{\Gamma} N_j^b w_k^l |_{\Gamma} d\Gamma \lambda_{jl} \quad (5.10)$$

ou

$$\mathbf{C}_a^T \mathbf{u}_a^{\Gamma} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{C}_b^T \mathbf{u}_b^{\Gamma}. \quad (5.12)$$

Por fim, fica determinado novamente o sistema simétrico em bloco para o NC-MEFG com ML dado pela Equação (4.23).

Na Seção 5.1.2, será apresentado a formulação específica, proposta neste trabalho para tratar problemas onde a interface entre os diferentes meios será considerada seccionalmente linear, veja Fig.5.1. Em seguida na Seção 5.1.3 tal formulação será estendido para o caso de interface curvilínea, veja Fig.5.3.

### 5.1.2 Construção das matrizes $\mathbf{C}_a$ e $\mathbf{C}_b$ para interfaces lineares

A construção das matrizes  $\mathbf{C}_a$  e  $\mathbf{C}_b$  será feita por assemblagem de matrizes locais calculadas sobre as arestas da interface  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_b$  [42]. Como apresentado na Fig.5.1 para a construção de tais matrizes locais serão utilizados mapeamentos entre as arestas do espaço físico e a aresta de referência. Para tanto, considerem a aresta  $S_a = P_1^a P_2^a$  de  $\Gamma_{h_a}$ , a aresta  $S_b = P_2^b P_1^b$  de  $\Gamma_{h_b}$ , ambas relacionadas a discretização da interface física do problema  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_b$ . Defina por  $S_i = P_1^i P_2^i$  a interseção entre os segmentos  $S_a$  e  $S_b$ . Considere também duas mudanças de variáveis **1** e **2** entre as arestas  $S_a$  e  $S_b$  dos elementos físicos e a aresta do elemento de referência e outras duas mudanças de variáveis **3** e **4** devidas a aresta de interseção  $S_i$ .

As matrizes locais usadas na construção da matriz  $\mathbf{C}_a$  e  $\mathbf{C}_b$  são dadas pelas seguintes equações:

$$\mathbf{C}_a^{loc} = \int_{S_a} \mathbf{P}_a^T(X, Y) \mathbf{Q}(X, Y) d\Gamma \quad (5.13)$$

e

$$\mathbf{C}_b^{loc} = \int_{S_b} \mathbf{P}_b^T(X, Y) \mathbf{Q}(X, Y) d\Gamma \quad (5.14)$$

Como a interpolação dos valores nodais e as funções de teste são completamente definidas em  $S_a$ , a integração na Equação (5.13) pode ser realizada de forma independente, sobre cada extremidade de  $\Gamma_{h_a}$ . Por outro lado, como mostrado pelo segmento de interseção em  $\Gamma$ , veja Fig.5.1, a interpolação dos valores nodais e das funções de testes, Equação (5.14), não são definidas em uma mesma aresta. Isso faz com que o processo de integração se torne um pouco mais complexo. No que segue, será apresentado quatro sucessivas mudanças de variáveis correspondendo a quatro transformações isoparamétricas do espaço físico: a primeira entre  $(X, Y)$  e  $\xi_a$ , a segunda entre  $(X, Y)$  e  $\xi_b$  e a terceira e quarta entre  $\xi_a$ ,  $\xi_b$  e  $\eta$ , Fig.5.2 que serão usadas para calcular as integrais nas Equações (5.13) e (5.14)

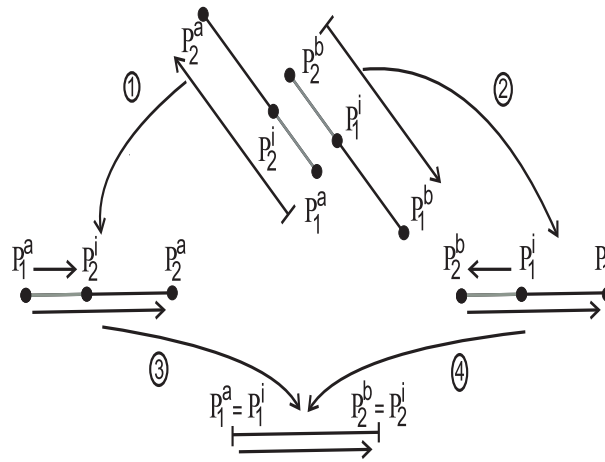


Figura 5.2: Transformação isoparamétrica dos segmentos de interseção em  $\Gamma$

### 5.1.2.1 Procedimento de integração, interface linear

Primeiramente, considere a aresta  $S_a = P_1^a P_2^a$  em  $\Gamma_{h_a}$ , Fig.5.1, a primeira mudança de variável como esboçado em Fig.5.2, é dada pelas seguintes relações:

$$\begin{cases} X = N_1^a X_{P_1^a} + N_2^a X_{P_2^a}, \\ Y = N_1^a Y_{P_1^a} + N_2^a Y_{P_2^a} \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\begin{cases} N_1^a = 1 - \xi_a \\ N_2^a = \xi_a. \end{cases} \quad (5.16)$$

No espaço  $\xi_a$ , a posição dos pontos  $P_1^i = P_1^a$  e  $P_2^i$  são:

$$\xi_{aP_1^i} = 0, \quad \xi_{aP_2^i} = \frac{X - X_{P_1^a}}{X_{P_2^a} - X_{P_1^a}}. \quad (5.17)$$

Em seguida, consideramos a aresta  $S_b = P_2^b P_1^b$  em  $\Gamma_{h_b}$ , Fig.5.1, a segunda mudança de variável é dada pelas seguintes relações:

$$\begin{cases} X = N_1^b X_{P_2^b} + N_2^b X_{P_1^b}, \\ Y = N_1^b Y_{P_2^b} + N_2^b Y_{P_1^b} \end{cases} \quad (5.18)$$

$$\begin{cases} N_1^b = 1 - \xi_b \\ N_2^b = \xi_b. \end{cases} \quad (5.19)$$

No espaço  $\xi_b$ , a posição dos pontos  $P_2^i = P_2^b$  e  $P_1^i$  são:

$$\xi_{bP_2^i} = 0, \quad \xi_{bP_1^i} = \frac{X - X_{P_2^b}}{X_{P_1^b} - X_{P_2^b}}. \quad (5.20)$$

Finalmente, para o segmento de interseção  $S_i = P_1^i P_2^i$  entre  $S_a$  e  $S_b$  arestas de  $\Gamma$ , veja Fig.5.1, considera-se as seguintes mudanças de variáveis, como esboçado na Fig.5.2:

$$\begin{cases} \xi_a = M_1 \xi_{aP_1^i} + M_2 \xi_{aP_2^i}, \\ \xi_b = M_1 \xi_{bP_1^i} + M_2 \xi_{bP_2^i} \end{cases} \quad (5.21)$$

$$\begin{cases} M_1 = 1 - \eta \\ M_2 = \eta. \end{cases} \quad (5.22)$$

Tendo em vista que os valores nodais e as funções de teste são completamente definidas em  $S_a$ , apenas a primeira mudança de variável é necessária para avaliar a Equação (5.13). Usando a Equação (5.15), as arestas na Equação (5.13) podem ser mapeadas no elemento de referência como no caso conforme.

$$\mathbf{C}_a^{loc} = \int_0^1 \mathbf{P}_a^T(\xi_a) \mathbf{Q}(\xi_a) |J_a| d\xi \quad (5.23)$$

onde  $J_a$  é o Jacobiano de mudança de variável dado pela Equação (5.15).

No entanto, devido à incompatibilidade entre as arestas sobre  $\Gamma$ , todas as quatro mudanças são necessários para avaliar  $\mathbf{C}_b^{loc}$ , resultando em:

$$\mathbf{C}_b^{loc} = \int_0^1 \mathbf{P}_b^T(\eta) \mathbf{Q}(\eta) |J_b| d\eta \quad (5.24)$$

onde  $J_b$  é o Jacobiano de mudança de variável dado pelas Equações (5.18) e (5.21), Fig.5.2. Note-se que se  $S_a = S_b$  o mapeamento reduz ao caso conforme. Além disso, a Equação 5.24



foi obtida assumindo que  $S_a$  e  $S_b$  são colineares. Isto reforça que  $\Gamma$  deve ser uma interface linear por partes.

Na seção seguinte, será apresentado uma abordagem para o NC-MEFG com enriquecimento por ondas planas onde a interface entre os diferentes meios é curvilínea. Tal análise pretende ampliar as idéias dadas nas seções anteriores estendendo-as a outra classe de problemas. Novamente, para garantir as condições de interface, um esquema especial de integração será proposto.

### 5.1.3 Construção das matrizes $C_a$ e $C_b$ para interfaces curvilíneas

Usando malhas não-conformes, considere uma triangulação de  $\Omega_a$  de tamanho  $h_a$  sobre  $\Gamma$ ,  $\Gamma_{h_a}$  não necessariamente a mesma triangulação para  $\Omega_b$  sobre  $\Gamma$  de tamanho  $h_b$ ,  $\Gamma_{h_b}$ . Consequentemente, a interseção entre as duas triangulações não fica bem definida, veja Fig.5.3. Observa-se também que para interfaces curvilíneas, quando o tamanho das malhas aumentam, a diferença entre  $\Gamma_{h_a}$  e  $\Gamma_{h_b}$  também aumenta. Uma primeira idéia então, seria usar a formulação da Seção 5.1.2, aproximando a interface curvilínea  $\Gamma$  por segmentos de retas, ou seja, projeta-se os nós de  $\Gamma_{h_a}$  sobre  $\Gamma_{h_b}$ , ou o contrário, aproxima-se a interface  $\Gamma$  por apenas uma das duas discretizações,  $\Gamma_{h_a}$  ou  $\Gamma_{h_b}$ . No entanto, tal estratégia, para evitar possíveis erros de aproximação, oriundos do tratamento de interface, exigiria uma maior discretização dos subdomínio  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$  [52] e isto não vai de encontro a uma das principais características do MEFG que é a de trabalhar com malhas de elementos grandes e fixas. Para este tipo de malha, a diferença entre  $\Gamma_{h_a}$  sobre  $\Gamma_{h_b}$  introduz significativamente erros ao avaliar as integrais decorrentes do ML ao longo das arestas das malhas sobre  $\Gamma$  [52]. Diante disto, a proposta que segue como uma das principais contribuições deste trabalho é estender as formulações conhecidas do MEM [72] e [73] utilizada no tradicional MEF para garantir a continuidade nas interfaces entre os diferentes meios e que foram generalizadas para o caso de interfaces curvilíneas e triangulação não correspondentes em [52]. Nestes trabalhos duas abordagens são confrontadas. Uma delas segue a idéia de aproximar  $\Gamma$  por apenas uma das duas discretizações,  $\Gamma_{h_a}$  ou  $\Gamma_{h_b}$  já a outra trabalha com curvas parametrizáveis, onde é possível definir o segmento interseção entre as arestas. Sabe-se que a primeira destas duas abordagens não é viável para no NC-MEFG em virtude do tamanho das malhas utilizadas. Por outro lado, a idéia de parametrizar a interface entre os meios foi fundamental no processo de estender as formulações do MEM para o NC-MEFG.

5.1.3.1 Procedimento de integração, interface curvilínea

Suponha que a interface curvilínea  $\Gamma$ , Fig.5.3 seja suave, i.e., que admite uma parametrização suave ( $C^2$  é suficiente) dada em termos da parametrização

$$\varphi \in C^2(I, \Omega), \tag{5.25}$$

onde  $I = [a, b]$  é um intervalo fechado, não necessariamente o intervalo de referência.

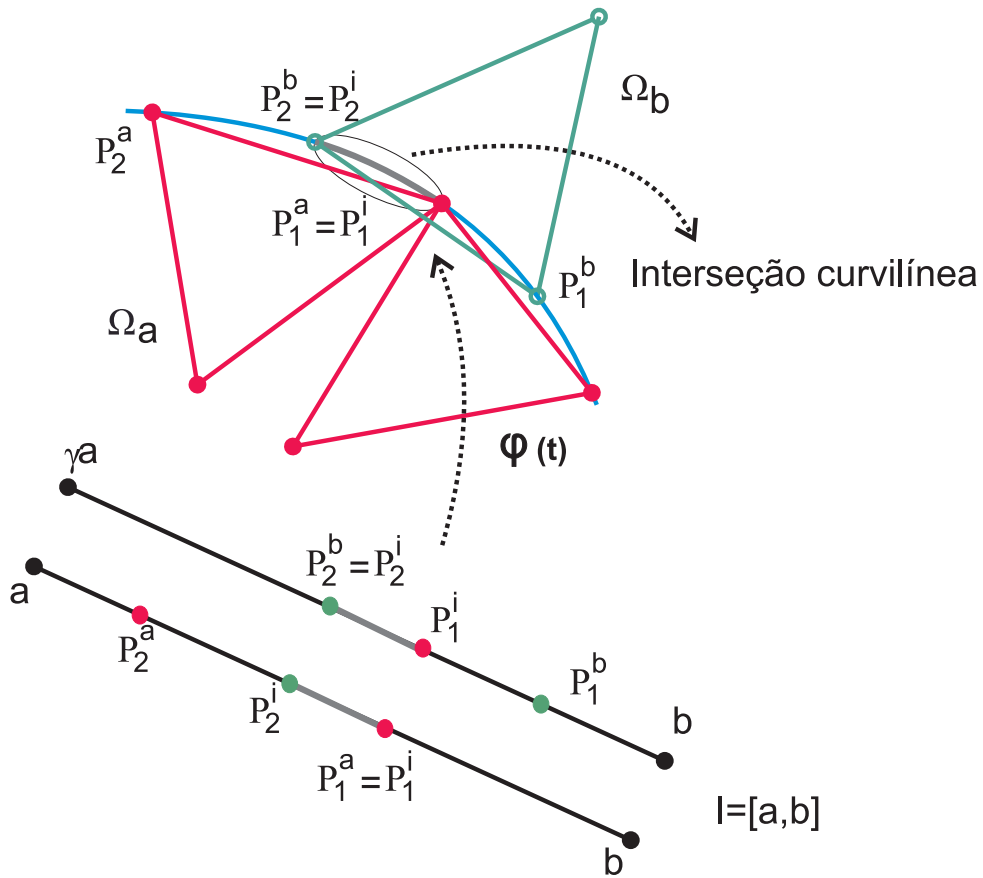


Figura 5.3: Interface curvilínea entre duas malhas não-conformes

Em seguida nota-se que a interseção entre  $S_a$  e  $S_b$ , arestas de  $\Gamma_{h_a}$  e  $\Gamma_{h_b}$ , respectivamente não está bem definida, como mostra a Fig.5.3. Por outro lado, a interpolação dos valores nodais e das funções de teste estão completamente definidos nos arcos gerados por estas arestas, inclusive para o arco interseção entre eles. Neste caso, considera-se como arestas os arcos definidos pelos nós sobre a interface  $\Gamma$ . Por meio da parametrização  $\varphi$  é possível definir uma correspondência biunívoca entre os nós de  $\Gamma_{h_a}$  e  $\Gamma_{h_b}$  e pontos sobre o intervalo  $I$ , veja Fig.5.3. De onde surgem uma coleção de novas arestas em  $I$ . Sejam  $S_a = \widehat{P_1^a P_2^a}$  e  $S_b = \widehat{P_2^b P_1^b}$  os arcos

de  $\Gamma_{h_a}$  e  $\Gamma_{h_b}$ , respectivamente e o arco interseção  $S_i = \widehat{P_1^i P_2^i}$  entre eles. Da parametrização  $\varphi$  encontra-se novas arestas  $S_a^I$ ,  $S_b^I$  e  $S_i^I$  sobre o intervalo  $I$  correspondentes as arestas curvas  $S_a$ ,  $S_b$  e  $S_i$ , respectivamente. Aplicando-se às novas arestas  $S_a^I$ ,  $S_b^I$  e  $S_i^I$  as mudanças de variáveis apresentadas na Seção 5.1.2 é possível em seguida construir as matrizes locais  $\mathbf{C}_a^{loc}$  e  $\mathbf{C}_b^{loc}$ .

Tendo em vista que os valores nodais e as funções de teste são completamente definidas sobre a aresta curva  $S_a$ , apenas a primeira mudança de variável atrelada a parametrização  $\varphi$  é necessária para avaliar a Equação (5.13). Usando a Equação (5.15) e a parametrização  $\varphi$ , as arestas curvas na Equação (5.13) podem ser mapeadas no elemento de referência. Note-se que o Jacobiano de mudança de variável  $J_a$  leva em consideração a Equação (5.15) e parametrização definida pela função  $\varphi$ .

Por outro lado, devido à incompatibilidade entre as arestas curvilíneas sobre  $\Gamma$ , além das quatro mudanças de variáveis também é necessário fazer uso da parametrização  $\varphi$  na construção das matrizes  $\mathbf{C}_b^{loc}$ . Neste caso o Jacobiano de mudança de variável  $J_b$  precisa levar em conta não só as mudanças de variáveis definidas pelas Equações (5.18) e (5.21), Fig.5.2 como também a mudança dada pela parametrização utilizada.

Uma vez que as matrizes  $\mathbf{C}_a$  e  $\mathbf{C}_b$  foram construídas e possuem dimensões respectivamente iguais a  $n_a^\Gamma \cdot q \times n_a^\Gamma \cdot q$  e  $n_b^\Gamma \cdot q \times n_b^\Gamma \cdot q$  com o mesmo número de colunas é possível garantir as condições de mortar dada pelas Equações (4.24) e (4.25) fundamentais para construir o sistema resultante do NC-MEFG com o MEM.

## 5.2 Resultados e discussão

Nesta seção, serão apresentados e analisados os resultados computacionais obtidos usando as abordagens do ML e do MEM para forçar a condição de interface no NC-MEFG. Os exemplos que serão resolvidos são os mesmos da Seção 4.3.

### 5.2.1 Problema de propagação de onda com interface linear

Uma malha de tamanho  $h_a = 0.6\lambda_a$  em  $\Omega_a$  e  $h_b = 0.5\lambda_b$  em  $\Omega_b$  foi usado para resolver o problema apresentado na Fig.5.4. Esta malha é composta de 629 elementos, 1014 arestas e 387 nós. Sendo que destes nós, 41 estão sobre a interface  $\Gamma_{h_b}$  e 35 estão sobre a interface

$\Gamma_{h_a}$ . Para avaliar os coeficientes do sistema linear dado pela Equação 3.15 foi empregado o método de integração de Gauss-Legendre, com 64 pontos dentro de cada triângulo e 6 ao longo de cada aresta.

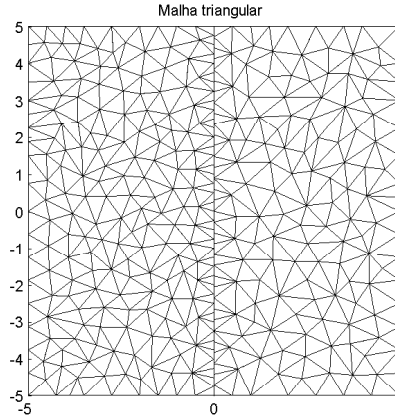


Figura 5.4: Malha triangular não-conforme

#### 5.2.1.1 NC-MEFG com ML

As Fig. 5.5a e Fig. 5.5b mostram respectivamente a parte real e imaginária do campo magnético analítico e aproximado numericamente pelo NC-MEFG com o ML e  $q = 12$  diferentes direções de ondas planas na linha  $C_x$ , os erros absolutos médios para a parte real e imaginária são de 0.0077 e 0.0089, respectivamente. Os resultados são obtidos usando uma onda plana incidente com ângulo incidente  $\theta_I = 15^\circ$ . O sistema resultante do NC-MEFG de dimensão igual a  $12 \times (387 + 41) = 5.136$  inferior a dimensão sistema resultante do MEFG com ML é mal condicionamento (o número de condição é de ordem  $10^{19}$ ) e não é positivo definido. Além disto, o número de elementos não nulos do sistema é igual 424.944. Aqui também para obter a convergência foi utilizado o método do gradiente biconjugado.

#### 5.2.1.2 NC-MEFG com MEM

A parte real e imaginária da solução deste primeiro exemplo, considerando o NC-MEFG com MEM e  $q = 12$  direções de ondas planas é mostrado nas Fig. 5.6a e Fig. 5.6b, através das quais também é possível observa que a solução do campo magnético obtida por este método é tão precisa quanto a do NC-MEFG com ML ou do MEFG com malha conforme, Capítulo 4. Os erros absolutos médios para a parte real e imaginária neste caso, foram de 0.0084 e 0.0091, respectivamente. Apesar do NC-MEFG com MEM ter utilizado a mesma malha e o mesmo número de direções de ondas que NC-MEFG com ML, o seu sistema resultante apresentou

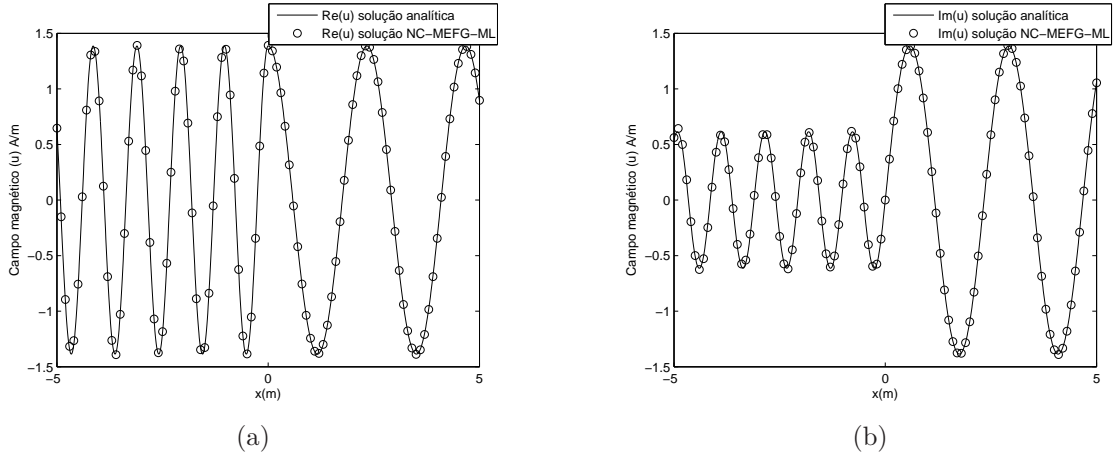


Figura 5.5: Campo magnético para NC-MEFG com ML, ao longo de  $C_x$ , com  $\theta_I = 15^\circ$ ,  $h_a = 0.6\lambda_a$  em  $\Omega_a$  e  $h_b = 0.5\lambda_b$  em  $\Omega_b$  e  $q = 12$ . (a) Parte Real. (b) Parte Imaginária.

uma dimensão igual  $12 \times (387 - 41) = 4.152$  inferior ao sistema do NC-MEFG com ML e do MEFG com MEM. O número de elementos não nulos do sistema é igual a 686.016, cerca de 1.5 vezes maior que o número de elementos não nulos do NC-MEFG com ML. Além disto, o sistema final é esparso e quando multiplicado pelo conjugado da matriz dos coeficientes fica positivo definido o que facilita a escolha do método de resolução do sistema.

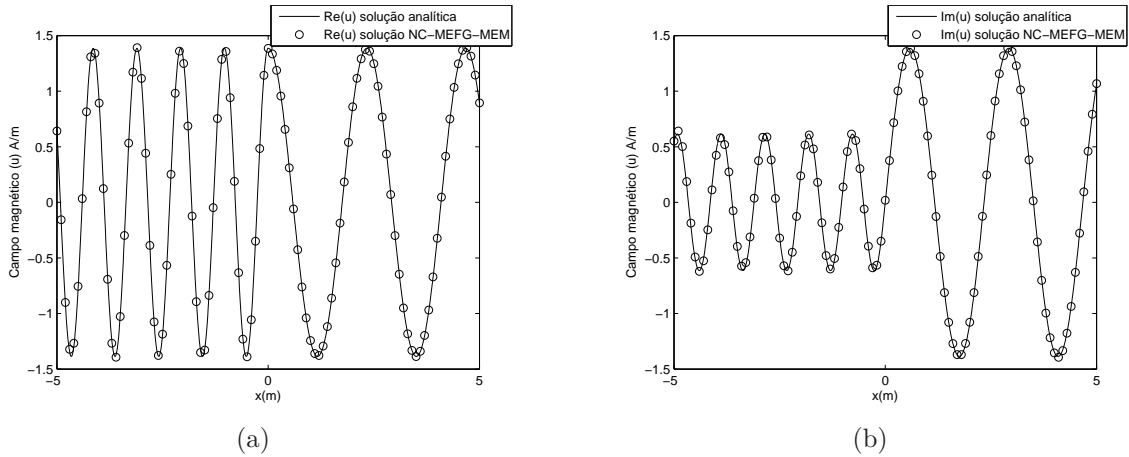


Figura 5.6: Campo magnético para NC-MEFG com MEM, ao longo de  $C_x$ , com  $\theta_I = 15^\circ$ ,  $h_a = 0.6\lambda_a$  em  $\Omega_a$  e  $h_b = 0.5\lambda_b$  em  $\Omega_b$  e  $q = 12$ . (a) Parte Real. (b) Parte Imaginária.

### 5.2.1.3 $q$ -convergência do NC-MEFG com o MEM e ML

A Fig. 5.15 mostra a  $q$ -convergência das partes real e imaginária da solução do campo magnético ao longo da linha  $C_x$  pelo NC-MEFG com MEM e ML,  $q = 2, 4, 6, 8, 10, 12$  utilizando a malha Fig.5.4. Para obter resultados precisos, foram necessários um mínimo de 10 direções de

onda, ou seja,  $10 \times (387 - 41) = 3.460$  grau de liberdade no MEM e  $10 \times (387 + 41) = 4.280$  para ML.

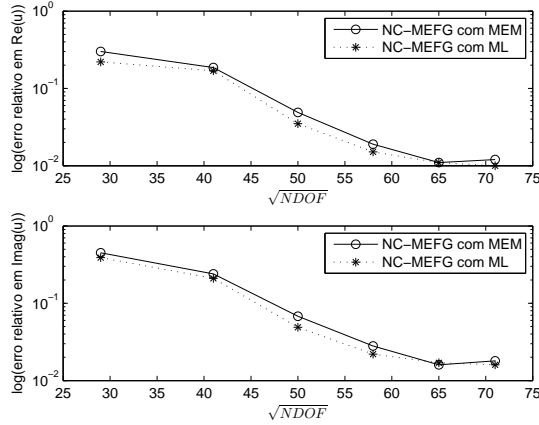


Figura 5.7: Real e imaginária  $q$ -convergência da solução do NC-MEFG com MEM e ML.

## 5.2.2 Guia de placas paralelas com interface linear

Para o exemplo do guia de onda de placas paralelas utilizou-se uma malha de elementos finitos de tamanho  $h_a = 0.1\lambda_0$  para  $\Omega_a$  e  $h_b = 0.08\lambda_0$  para  $\Omega_b$ , composta de 408 elementos, 689 arestas e 283 nós. Sendo que destes nós, 44 estão sobre a interface  $\Gamma_{h_a}$  e 30 estão sobre a interface  $\Gamma_{h_b}$ . Para validar os resultados obtidos com o NC-MEFG, usou-se os mesmos resultados obtidos com MEF no MEFG Seção 4.3.2.

### 5.2.2.1 NC-MEFG com ML

As Fig. 5.8a e Fig. 5.8b mostram a parte real e imaginária do campo magnético aproximado numericamente pelo MEF e pelo NC-MEFG com o ML e  $q = 4$  diferentes direções de ondas planas na linha  $C_x = \{(x, y) | y = 0, -20 \leq x \leq 20\}$ , respectivamente. O número de graus de liberdade para obter este resultados foi de  $4 \times (283 + 44) = 1.308$ . A Fig. 5.9 apresenta as linhas equipotenciais da parte real e imaginária do campo magnético aproximado pelo MEF com o ML. Os resultados são obtidos usando uma onda plana incidente com ângulo incidente  $\theta_I = 0^\circ$ ,  $\lambda_0 = 10\text{cm}$   $\epsilon_r = 4.0 - 1.0j$ .

### 5.2.2.2 NC-MEFG com MEM

Como esperado, os resultados apresentado nas Fig. 5.10a e Fig. 5.10b mostram que a solução do campo magnético obtida pelo NC-MEFG com MEM e  $q = 4$  diferentes direções de ondas

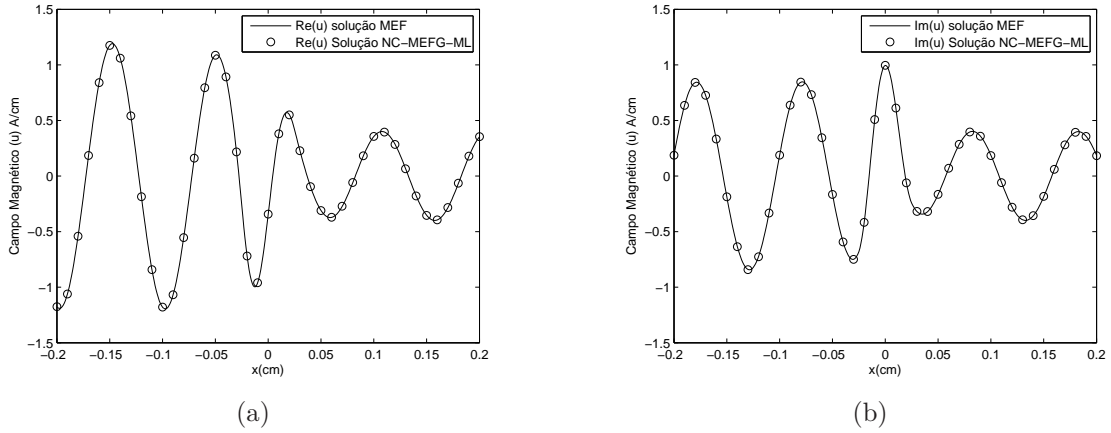


Figura 5.8: Campo magnético para NC-MEFG com ML versus MEF, ao longo de  $C_x$ , com  $\theta_I = 0^\circ$ ,  $h_a = 0.1\lambda_0$ ,  $h_b = 0.08\lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 10\text{cm}$ ,  $\epsilon_r = 4.0 - 1.0j$  e  $q = 4$ . (a) Parte Real. (b) Parte Imaginária.

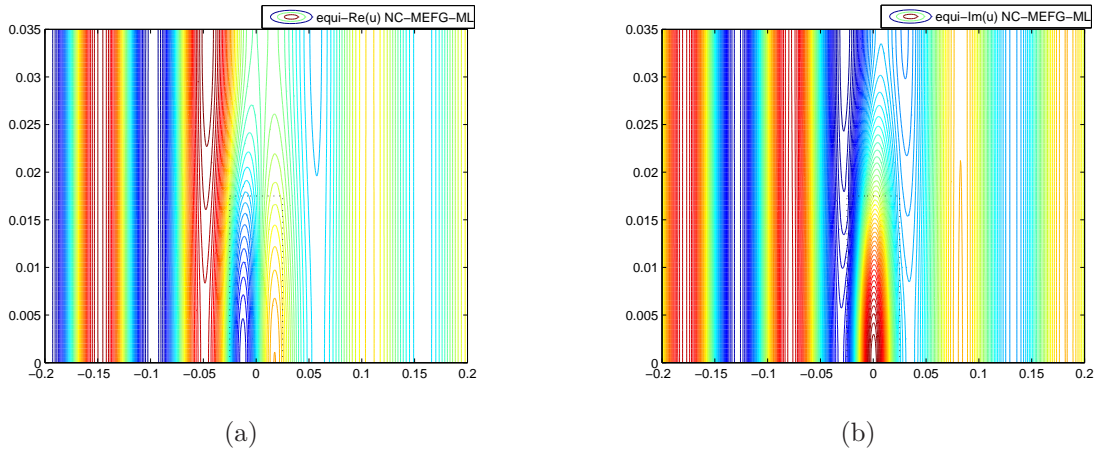


Figura 5.9: Linhas equipotenciais do campo magnético para NC-MEFG com ML, com  $\theta_I = 0^\circ$ ,  $h_a = 0.1\lambda_0$ ,  $h_b = 0.08\lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 10\text{cm}$  e  $\epsilon_r = 4.0 - 1.0j$  e  $q = 4$ . (a) Parte Real. (b) Parte Imaginária.

planas na linha  $C_x$  é tão precisa quanto a do NC-MEFG com ML ou do MEFG com malha conforme, Capítulo 4. O mesmo ocorre com as linhas equipotenciais, de acordo com a Fig. 5.11. O número de graus de liberdade do NC-MEFG com o MEM é igual a  $4 \times (283 - 44) = 956$ , inferior ao ML.

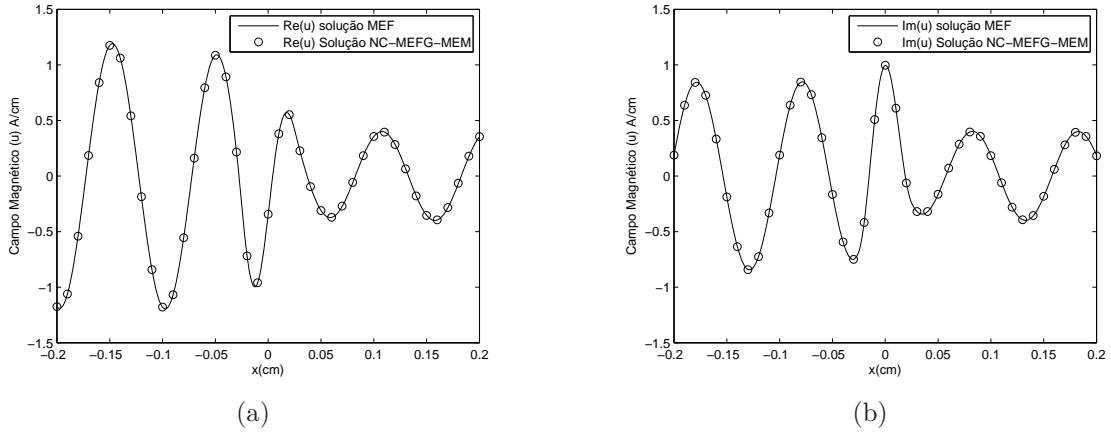


Figura 5.10: Campo magnético para NC-MEFG com MEM versus MEF, ao longo de  $C_x$ , com  $\theta_I = 0^\circ$ ,  $h_a = 0.1\lambda_0$ ,  $h_b = 0.08\lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 10\text{cm}$ ,  $\epsilon_r = 4.0 - 1.0j$  e  $q = 4$ . a) Parte Real. (b) Parte Imaginária.

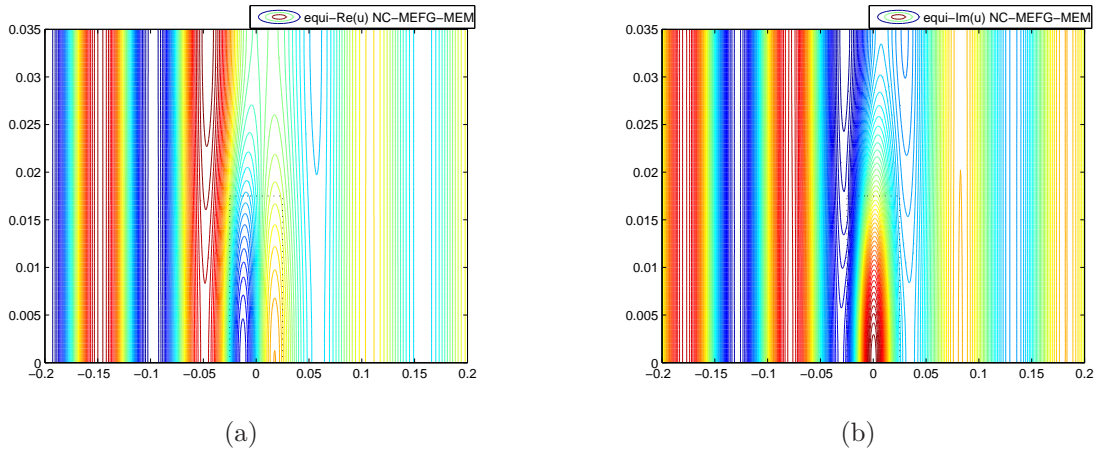


Figura 5.11: Linhas equipotenciais do campo magnético para NC-MEFG com ML, com  $\theta_I = 0^\circ$ ,  $h_a = 0.1\lambda_0$ ,  $h_b = 0.08\lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 10\text{cm}$  e  $\epsilon_r = 4.0 - 1.0j$  e  $q = 4$ . (a) Parte Real. (b) Parte Imaginária.

### 5.2.3 Problema de espalhamento eletromagnético com interface curva

O problema apresentado na Seção 4.3.3 será resolvido utilizando o NC-MEFG com o ML e com o MEM. A parametrização da interface curvilínea  $\Gamma$  necessária para garantir a continuidade entre os diferentes meios é dada por

$$\begin{cases} X = r\cos(\theta) \\ Y = r\sen(\theta). \end{cases} \quad (5.26)$$



onde,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . O domínio computacional  $\Omega$  foi discretizado em uma malha de elementos finitos de tamanho  $h_a = 1\lambda_0$  para  $\Omega_a$  e  $h_b = 1\lambda_0$  para  $\Omega_b$ , composta de 530 elementos triangulares, resultando em 929 arestas e 399 nós. Sendo que destes nós, 90 estão sobre a interface  $\Gamma_{h_a}$  e 46 estão sobre a interface  $\Gamma_{h_b}$ , como mostra a Fig. 5.12. Para este exemplo, foram usados os mesmo números de nós de Gauss-Legendre, usados nos exemplos anteriores.

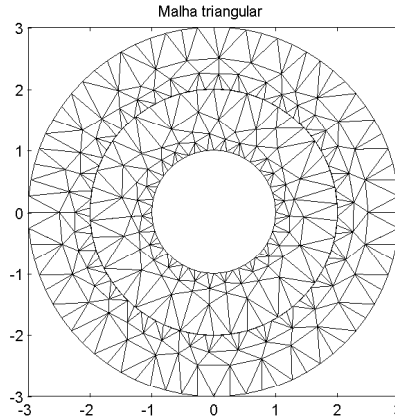


Figura 5.12: A malha triangular utilizada nos cálculos.

### 5.2.3.1 NC-MEFG com ML

A Fig. 5.13a e Fig. 5.13b mostram a parte real e imaginária do campo magnético analítico e aproximado numericamente na linha  $C_y$ , respectivamente. O campo magnético calculado através do NC-MEFG, com  $q = 6$  direções de ondas planas, fornece uma excelente aproximação à solução analítica, Equações 4.33 e 4.34. Os erros absoluto das partes real e imaginária foram iguais 0.0070 e 0.0073, respectivamente.

### 5.2.3.2 NC-MEFG com MEM

A solução do problema considerando o NC-MEFG com MEM e  $q = 6$  direções de ondas planas é apresentado nas Fig. 5.14a e Fig. 5.14b, através das quais observa-se que a solução obtida para o campo magnético por este método é tão preciso quanto a do NC-MEFG com ML. Os erros absoluto da parte real e imaginária foram de 0.0086 e 0.0091 ao longo de  $C_y$ , respectivamente.

### 5.2.3.3 $q$ -convergência do NC-MEFG com o MEM e ML

A Fig. 5.15 mostra a  $q$ -convergência das partes real e imaginária da solução do campo magnético ao longo da linha  $C_y$  pelo NC-MEFG com MEM e ML,  $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  utilizando a malha Fig 5.12. Para obter resultados precisos, foram necessários um mínimo de 6

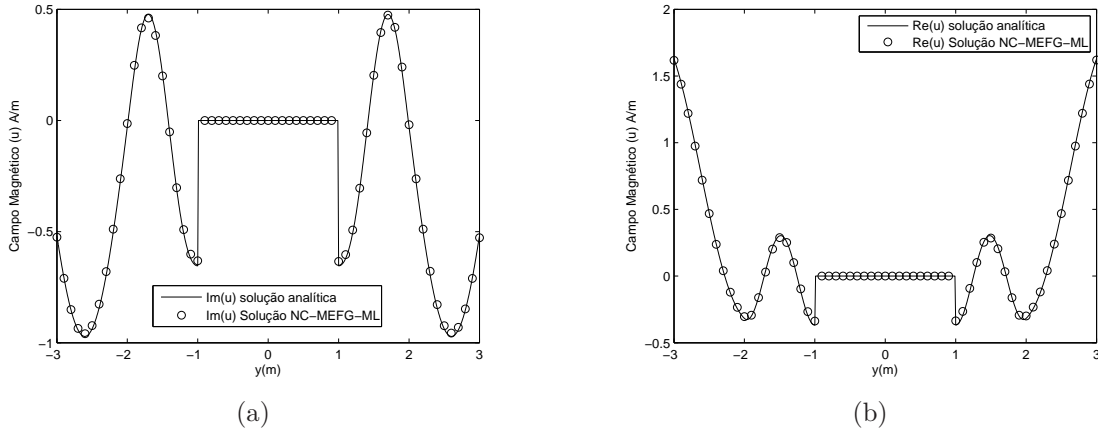


Figura 5.13: Campo magnético para o NC-MEFG-ML, ao longo da reta  $C_y$ , com  $h_a = 1\lambda_0$  para  $\Omega_a$  e  $h_b = 1\lambda_0$  para  $\Omega_b$  e  $q = 6$ . (a) Parte Real. (b) Parte Imaginária.

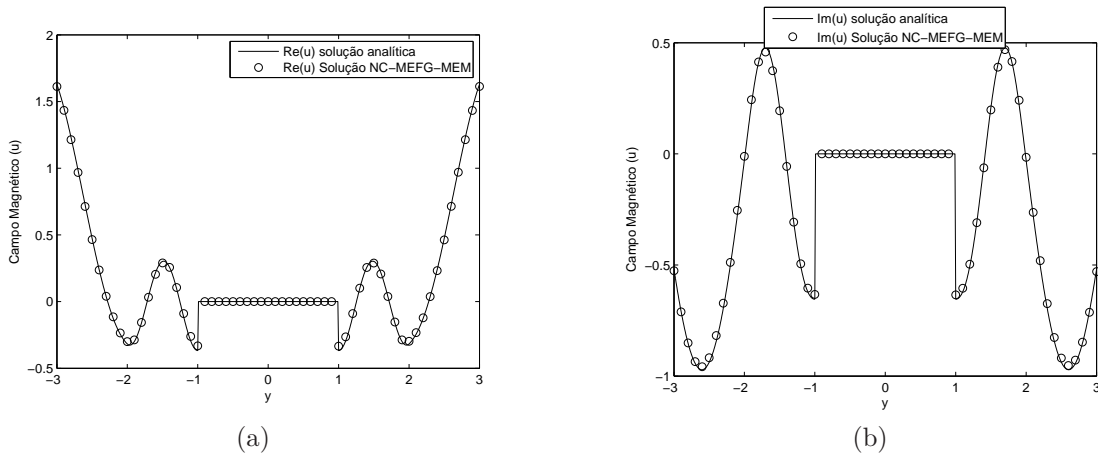


Figura 5.14: Campo magnético para o NC-MEFG-MEM, ao longo da reta  $C_y$ , com  $h_a = 1\lambda_0$  para  $\Omega_a$  e  $h_b = 1\lambda_0$  para  $\Omega_b$  e  $q = 6$ . (a) Parte Real. (b) Parte Imaginária.

direções de onda, ou seja,  $6 \times (399 - 90) = 1.854$  grau de liberdade no MEM e  $6 \times (399 + 90) = 2.934$  para ML. Note-se que a formulação utilizando malhas não conformes para forçar a continuidade na interface  $\Gamma$  não afetou a convergência.

Os padrões de matriz mostrado na Fig. 5.16 são obtidos para a malha Fig 5.12 com seis direções de ondas planas, (á esquerda) NC-MEFG com o MEM, (á direita) NC-MEFG com o ML. Estes padrões revelam que apesar da dimensão do sistema resultante do MEM ser menor que a dimensão do sistema resultante do ML, o seu número de elementos não nulos é cerca de duas vezes maior. O que já é esperado tendo em vista que o número de linhas de uma das matrizes  $C_a$  ou  $C_b$  diminui no NC-MEFG e como falou-se anteriormente acredita-se que

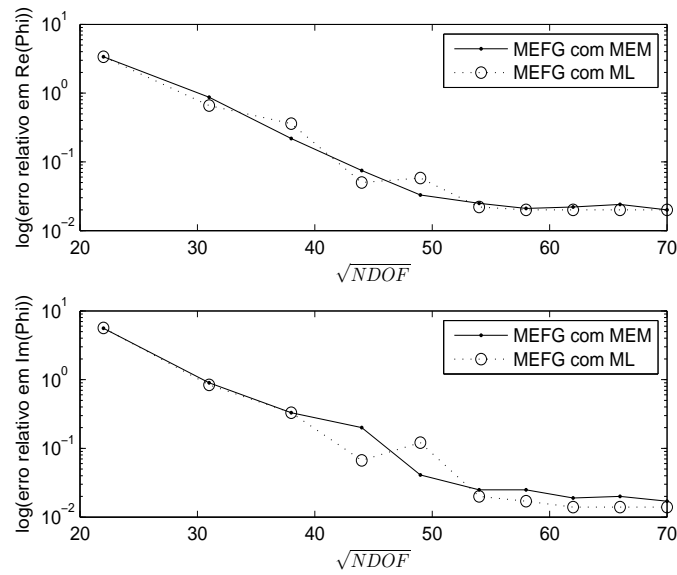


Figura 5.15: Real e imaginária  $q$ -convergência da solução do NC-MEFG com MEM e ML.

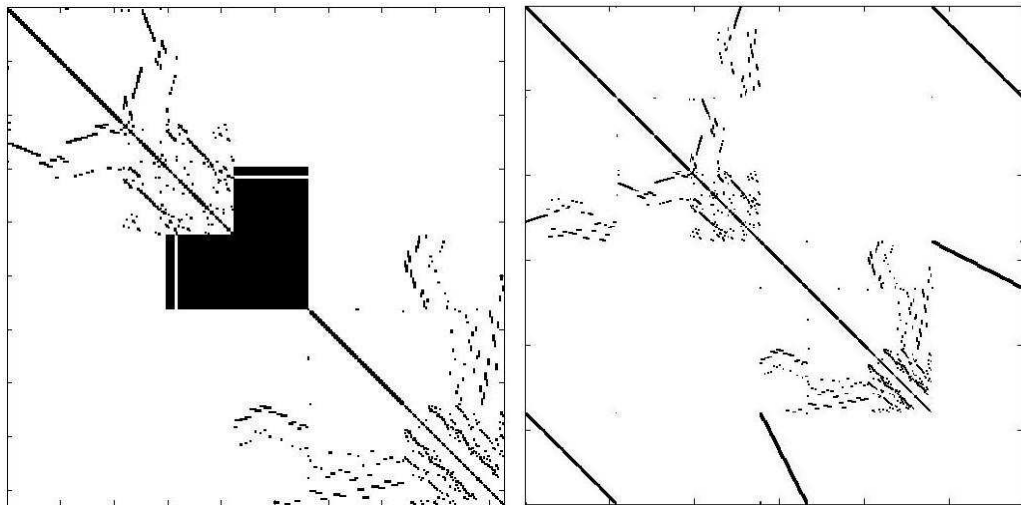


Figura 5.16: Vistas dos termos diferentes de zero para os métodos MEM e para o ML.

isto influência na quantidade de elementos nulos do sistema resultante do NC-MEFG. Nota-se então uma outra vantagem de se trabalhar com malhas não conformes. Ao multiplicar o sistema resultante do MEM pelo conjugado da matriz dos coeficientes, obtém-se como no MEFG a condição Hermitiana. Neste caso, o sistema final pode ser resolvido por meio de vários métodos, visto que ele é esparso e positivo definido. O sistema resultante para ML para esta formulação continua mal condicionado (o número de condição é de ordem  $10^{19}$ ) e para obter convergência, foi utilizado o método do gradiente biconjugado.

## 5.3 Aplicação

A aplicação apresentada na Seção 4.4.1 será avaliada através das formulações propostas para o tratamento de descontinuidade no NC-MEFG. A parametrização da interface curvilínea  $\Gamma$  necessária para garantir a continuidade entre os diferentes meios é a mesma dada pela Equação (5.26).

### 5.3.1 Coluna de concreto cilíndrica

Na discretização do domínio computacional do problema será utilizada uma malha de elementos finitos de tamanho  $h_a = \frac{4}{3}\lambda_0$  para  $\Omega_a$  e  $h_b = \frac{4}{15}\lambda_0$  para  $\Omega_b$ , composta de 893 elementos, 1.493 arestas e 600 nós. Sendo que destes nós, 91 estão sobre a interface  $\Gamma_{h_a}$  e 73 estão sobre a interface  $\Gamma_{h_b}$ , Fig. 5.17. Os resultados obtidos pelo NC-MEFG com o ML e com MEM serão também verificados juntos a solução obtida pelo MEF Seção 4.4.

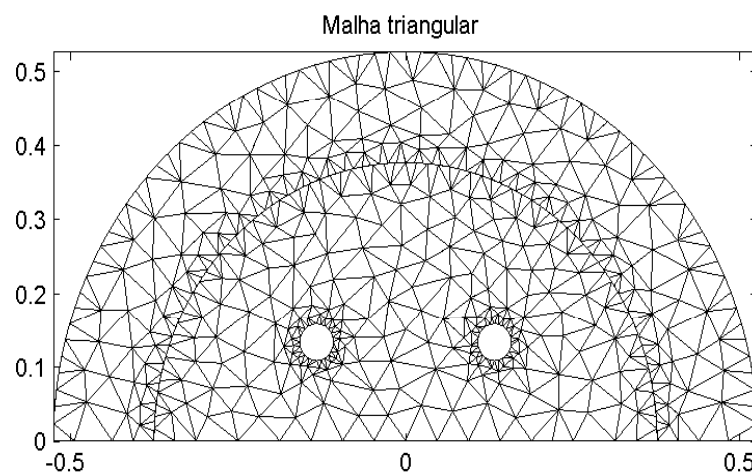


Figura 5.17: Malha triangular não conforme

### 5.3.2 NC-MEFG com ML

A Fig. 5.18 mostra respectivamente a parte real e imaginária do campo magnético aproximado numericamente pelo MEF e pelo NC-MEFG com o ML e  $q = 8$  diferentes direções de ondas

planas ao longo da semicircunferência de raio  $r = 3.5\lambda_0$ . Nota-se que a formulação apresentada para malhas não conformes preserva as boas taxas de convergências do MEFG.

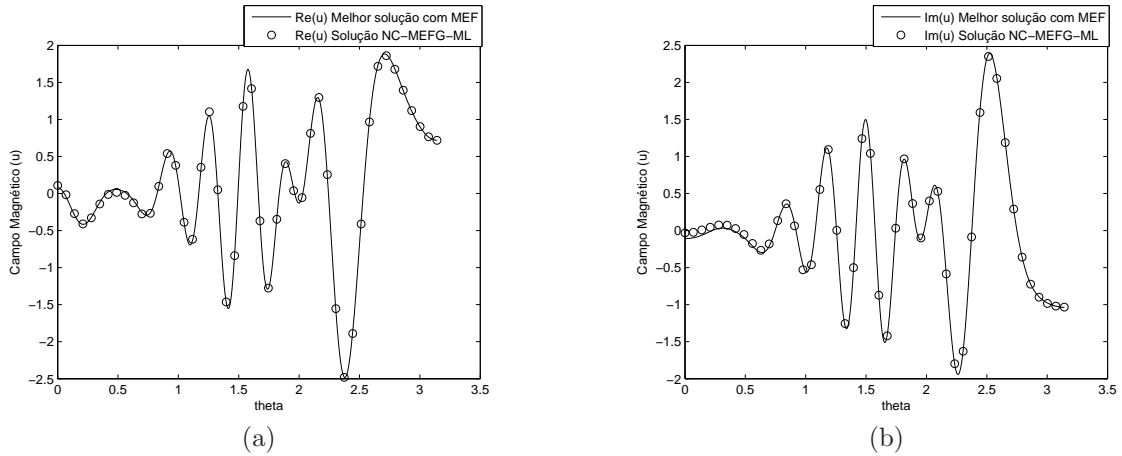


Figura 5.18: Campo magnético aproximado numericamente pelo MEF e pelo NC-MEFG com o ML ao longo da semicircunferência de raio  $r = 3.5\lambda_0$ , com  $h_a = \frac{4}{3}\lambda_0$  para  $\Omega_a$  e  $h_b = \frac{4}{15}\lambda_0$  para  $\Omega_b$  e  $q = 8$ . (a) Parte Real. (b) Parte Imaginária.

### 5.3.3 NC-MEFG com MEM

Considerando o NC-MEFG com MEM e  $q = 8$  direções de ondas planas, apresenta-se na Fig. 5.19 a solução aproximada obtida utilizando malhas não-conforme juntamente com a melhor solução obtida pelo MEF. A solução obtida para o campo magnético por este método é tão precisa quanto a do MEFG com ML e o MEM, Subseção 4.4 ou a do NC-MEFG com ML, Subseção 5.3.2.

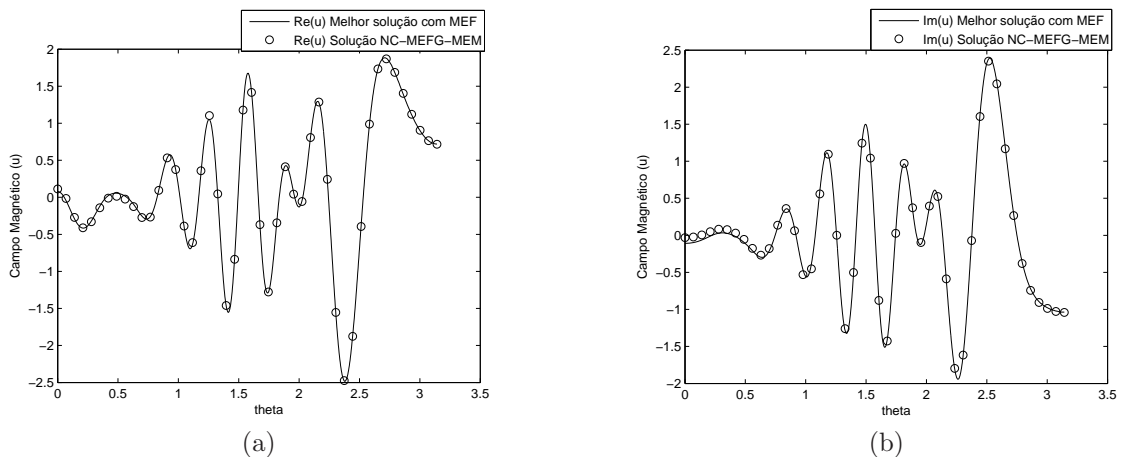


Figura 5.19: Campo magnético aproximado numericamente pelo MEF e pelo NC-MEFG com o MEM ao longo da semicircunferência de raio  $r = 3.5\lambda_0$ , com  $h_a = \frac{4}{3}\lambda_0$  para  $\Omega_a$  e  $h_b = \frac{4}{15}\lambda_0$  para  $\Omega_b$  e  $q = 8$ . (a) Parte Real. (b) Parte Imaginária.

A Fig. 5.20 mostra a partes real e imaginária da  $q$ -convergência da solução do campo magnético pelo NC-MEFG ao longo da semicircunferência de raio  $r = 3.5\lambda_0$  com MEM e ML,  $q = 2, 4, 6, 8, 10$ . Para obter resultados precisos, foram utilizadas 8 direções de onda, ou seja,  $8 \times (600 - 91) = 4.072$  grau de liberdade no MEM e  $8 \times (602 + 2 * 121) = 5.528$  para ML.

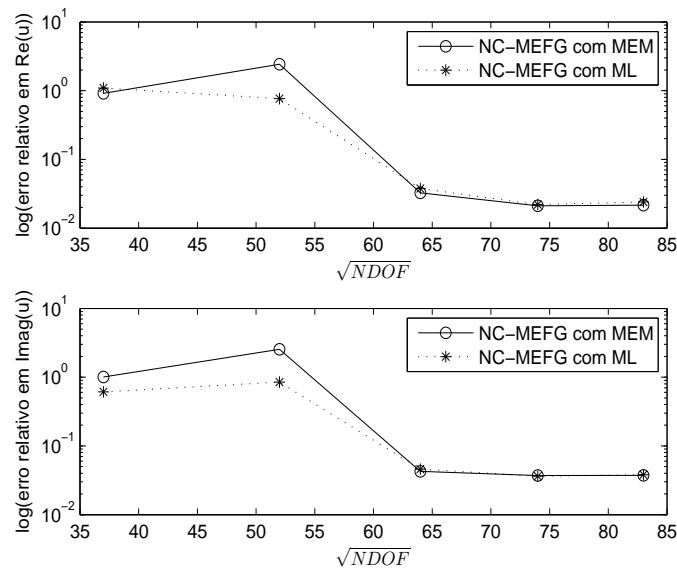


Figura 5.20: Real e imaginária  $q$ -convergência da solução do NC-MEFG com MEM e ML.

A distribuição do campo magnético total aproximado pelo NC-MEFG e apresentado na Fig. 5.21 quando comparada com os resultados apresentado pelas Figuras 4.26 e 4.25 também demonstra a eficiência da abordagem apresentada para malhas não conformes.

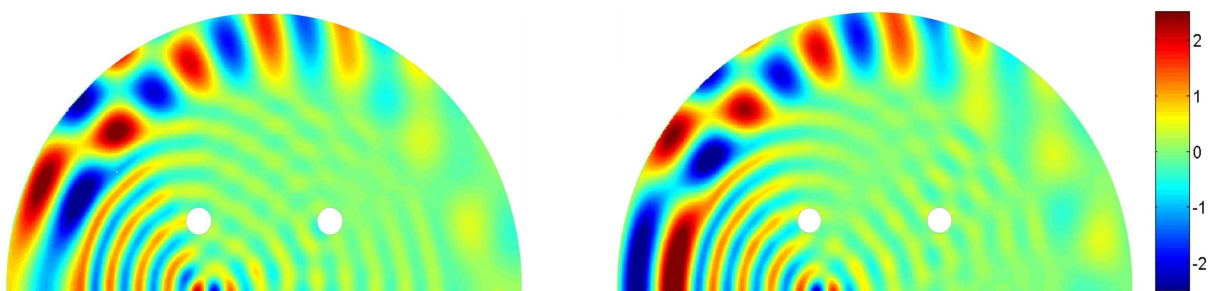


Figura 5.21: Campo Magnético total, para NC-MEFG

# Capítulo 6

## Conclusão

No presente trabalho, desenvolveu-se a partir de formulações para o tratamento de descontinuidade de materiais no MEFG com o ML e o tradicional MEF com o MEM, novas técnicas para o tratamento de descontinuidade no MEFG. Problemas de propagação e espalhamento foram resolvidos usando o MEFG enfatizando o uso destas abordagens para garantir as condições de continuidade na interface entre os diferentes materiais. Mostrou-se que o MEFG com ML pode ser computacionalmente exigente uma vez que leva a um sistema de equações mal condicionado. As principais características das abordagens proposta são:

- Menor número de graus de liberdade;
- Sistema resultante esparso e positivo definido.

Nota-se que o MEFG com ML e o MEFG com o MEM são conceitualmente equivalentes e apresentaram taxa de convergência semelhante sendo que a última apresenta um sistema resultante de fácil resolução devido as suas características.

A principal dificuldade na aplicação do padrão MEF em problemas de engenharia é a geração de malha em partes do domínio computacional do problema que demanda refinamentos. Por outro lado, neste trabalho foi possível observa que o MEFG é capaz de apresentar boas aproximações para a solução da equação mesmo utilizando malhas de tamanho menores que as normalmente utilizadas no MEF, malhas que em geral apenas sobrepõe-se o domínio computacional do problema. O custo computacional no MEFG foi inferior ao apresentado no MEF. No entanto,

---

como pode ser visto, no MEFG para garantir a continuidade de campo é preciso fazer uso de técnicas apropriadas como o ML e MEM. Além disto, ainda não foi possível resolver uma classe de problemas que exigem condições essenciais e como se sabe, tais fatos são resolvidos de maneira direta no tradicional MEF.

O MEFG com ML aplicado no tratamento de interface para domínio conformes, foi estendido aos domínio não conformes. O método não conforme proposto neste trabalho e denotado por NC-MEFG pode ser aplicado a problemas cujas as interfaces são lineares, seccionalmente de lineares e interfaces curvilíneas sem a exigência de conformidade entre as malhas das diferentes regiões. Este método não necessita de uma correspondência nodal um-para-um sobre as fronteiras entre os subdomínio. Como consequência, o método proporciona flexibilidade nos modelos e elimina a necessidade de transição em malha complexa. Exemplos numéricos demonstraram a eficiência e a precisão do método proposto e mostra que a  $q$ -convergência obtida é equivalente ao MEFG usando malhas conformes.

Para validar as implementações e ilustrar as capacidades dos métodos desenvolvido, resolveram-se alguns problemas em eletromagnetismo, como problema de propagação de onda em um domínio quadrado, problema do guia de ondas, o problema de propagação de onda em um cilindro circular reto e o problema da coluna de concreto circular com quarto vergalhões de ferro no seu interior.

Em tais problemas estiveram presentes as seguintes características:

- Domínios compostos de um e dois materiais distintos;
- Geometrias formadas por segmentos e curvas, com e sem buracos presentes.

Todos os métodos apresentados para tratar as discontinuidades de materiais neste trabalho foram utilizados, analisados e confrontados em vários exemplos. Os resultados mostraram concordância e boa precisão entre as aproximações dadas pelos métodos propostos e as soluções analíticas, quando disponíveis, e as aproximações obtidas através do tradicional MEF.



---

## Trabalhos Futuros

Há muitas possibilidades e um potencial grande para estender as idéias propostas neste trabalho. Alguns deles são descritos como se segue.

Praticamente não existem estudos disponíveis que apresentem propostas para impor as condições de contorno de Dirichlet no MEFG. E este é um ponto importante que não foi estudado neste trabalho. Apesar das novas funções de base do MEFG não satisfazerem a propriedade do Delta de Kronecker [40], acredita-se que com todo o suporte do MEF seja possível impor de maneira mais natural no MEFG as condições de contorno de Dirichlet.

Neste trabalho foi utilizado o Método de Integração de Gauss para calcular os coeficientes das matrizes de rigidez. No entanto, acredita-se que um estudo na linha do que foi feito no trabalho de Ortiz [40] seja possível ampliar as possibilidades de diminuição de erros de aproximação e melhorar o tempo computacional para MEFG.

A escolha das funções de forma de enriquecimento são fundamentais para a obtenção de bons resultados no MEFG e segundo a literatura esta escolha se dá com base em funções que tenham condições de reproduzir as características específicas da solução a ser aproximada. Problemas com características especiais locais podem então ser resolvido por um acoplamento entre o MEF ou outros métodos e o MEFG, desde que sejam utilizados funções de enriquecimento apropriadas. Na literatura ao MEFG com enriquecimento local dá-se o nome de Método de Elemento Finito Estendido (MEFE). Trabalhar com enriquecimentos locais em problemas com certas características especiais é um outro ponto importante a ser estudado no futuro.

O mal condicionamento que aparece no sistema de equações do MEFG foi o ponto de origem dos resultados apresentados neste trabalho, porém pouco se fez a este respeito. Acredita-se que a escolha das direções de onda de forma adequada pode levar a sistemas melhores, o que vai facilitar a resolução do sistema. Sendo assim, este também será uma das frentes de trabalho dentro dos estudos do MEFG e do MEFE.

Todos os exemplos que foram resolvidos neste trabalho estão em duas dimensões. Uma perspectiva interessante para futuros desenvolvimentos é expandir a aplicabilidade a problemas em três dimensões, o que tornaria o conjunto de métodos apresentados neste trabalho mais completo.

---

## Publicações

Durante o período do doutorado, quatro publicações diretamente associada a minha tese foram geradas:

- Facco, W.G., Silva, E.J., Moura, A.S., Lima, N.Z., Saldanha, R.R. Handling Material Discontinuities in the Generalized Finite Element Method to Solve Wave Propagation Problems. In: *Compumag*, 2011.
- Facco, W.G., Silva, E.J., Moura, A.S., Lima, N.Z., Saldanha, R.R. Handling material discontinuities in the generalized finite element method to solve wave propagation problems. *IEEE Trans. On Magn.* 48(2):607–610, Febr., 2012
- Facco, W.G., Silva, E.J., Ricardo Adriano, Moura, A.S., Lima, N.Z. Handling Material Discontinuities in a Non-Conforming Generalized Finite Element Method to Solve Wave Propagation Problems. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2012.
- Facco, W.G., Silva, E.J., Ricardo Adriano, Moura, A.S. Treating Curvilinear Interfaces in a Non-Conforming Generalized Finite Element Method Enriched by Plane Waves. *CEFC*, 2012.

Oito outros trabalhos não ligados diretamente ao tema da minha tese de doutorado foram desenvolvidos e publicados como consequência da colaboração com outros alunos pertencentes ao Grupo de Otimização e Projeto Assistido por Computador (GOPAC):

- Moura, A.S., Saldanha, R.R., Silva, E.J., Lisboa, A.C., Facco, W.G., Lima N.Z. A Recursive Sparsification of the Inverse Hodge Matrix. In: *Compumag*, 2011.
- Lima, N.Z., Mesquita, R.C., Facco, W.G., Moura, A.S., Silva, E.J. The Nonconforming Point Interpolation Method applied to Electromagnetic Problems. In: *Compumag*, 2011.
- Moura, A.S., Saldanha, R.R., Silva, E.J., Lisboa, A.C., Facco, W.G., Lima N.Z. A Recursive Sparsification of the Inverse Hodge Matrix. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2):611–614, Febr., 2012

- 
- Lima, N.Z., Mesquita, R.C., Facco, W.G., Moura, A.S., Silva, E.J. The Nonconforming Point Interpolation Method Applied to Electromagnetic Problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2):619–622, Febr., 2012
  - Moura, A.S., Gomes, B. N., Saldanha, R.R., Silva, E.J., Lisboa, A.C., Facco, W.G. Otimização dos parâmetros CFS-PML utilizando Evolução Diferencial. *Momag*, 2012.
  - Moura, A.S., Saldanha, R.R., Silva, E.J., Lisboa, A.C., Facco, W.G., Lima N.Z. Approximation of the inverse of the Hodge Matrix via Sparsity Pattern. *CEFC*, 2012.
  - Moura, A.S., Saldanha, R.R., Silva, E.J., Pantoja M. F., Lisboa, A.C., Facco, W.G. CFS-PML via Discrete Differential Forms for Ground Penetrating Radar Applications. *CEFC*, 2012.
  - Moura, A.S., Saldanha, R.R., Silva, E.J., Pantoja, M. F., Lisboa, A.C., Facco, W.G. Discretization of the CFS-PML for Computational Electromagnetics Using Discrete Differential Forms. *Microwave and Optical Technology Letters*. 2012.

# Referências Bibliográficas

- [1] K. Bathe, Finite element procedures, New Jersey: Prentice Hall. [citado na(s) página(s) 1, 5]
- [2] B. Szabó, I. Babuška, Finite element analyses, John Wiley & Sons, New York. [citado na(s) página(s) 1, 5]
- [3] P. Silvester, A general high-order finite-element waveguide analysis program, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-17 (1969) 204–210. [citado na(s) página(s) 1]
- [4] M. Israel, R. Miniowitz, An efficient finite element method for nonconvex waveguides based on hermitian polynomials, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-35 (1987) 1019–1026. [citado na(s) página(s) 1]
- [5] Y. Utsumi, Variational analysis of ridged waveguide modes, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-33 (1977) 111–120. [citado na(s) página(s) 1]
- [6] T. BELYTSCHKO, Y. LU, L. GU, Element-free galerkin methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering 37 (1994) 229–256. [citado na(s) página(s) 1]
- [7] P. Ribeiro, Hierarchical finite element analyses of geometrically non-linear vibration of beams and plane frames, Journal of Sound and Vibration 246 (2) (2001) 225–244. [citado na(s) página(s) 2]
- [8] R. C. Bengels, Finite element modeling of dynamic behavior of some basic structural members, Journal of Vibration and Acoustics 114 (1992) 3–9. [citado na(s) página(s) 2]
- [9] N. Ganesan, R. C. Engels, Hierarchical bernoulli-euler beam finite elements, Computers & Structures 43 (2) (1992) 297–304. [citado na(s) página(s) 2]
- [10] P. Zeng, Composite element method for vibration analysis of structures, part i: principle and  $c^0$  element (bar), Journal of Vibration and Acoustics 218 (4) (1998) 619–658. [citado na(s) página(s) 2]

- 
- [11] P. Zeng, Composite element method for vibration analysis of structures, part ii:  $c^1$  element (beam), *Journal of Vibration and Acoustics* 218 (4) (1998) 659–696. [citado na(s) página(s) 2]
- [12] P. Zeng, Introduction to composite element method for structural analysis in engineering, *TKey Engineering Materials* (4) (1998) 185–190. [citado na(s) página(s) 2]
- [13] A. Y. T. Leung, J. K. W. Chan, Fourier p-element for the analysis of beams and plates, *Journal of Sound and Vibration* 212 (1) (1998) 179–185. [citado na(s) página(s) 2]
- [14] I. Babuška, J. M. Melenk, The partition of unity method, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* (40) (1996) 727–758. [citado na(s) página(s) 3, 10]
- [15] J. M. Melenk, I. Babuška, The partition of unity finite element method: basic theory and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139 (1-4) (1996) 289–314. [citado na(s) página(s) 3, 4]
- [16] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, T. Belytschko, Extended finite element method for three dimensional crack modelling, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (11) (2000) 1549–1570. [citado na(s) página(s) 3]
- [17] N. Sukumar, D. L. Chopp, N. M. T. Belytschko, Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001) 6183–6200. [citado na(s) página(s) 3]
- [18] S. R. Idelsohn, E. Onáte, N. Calvo, F. D. Pin, The meshless finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58 (2003) 893–912. [citado na(s) página(s) 3]
- [19] S. De, K. J. Bathe, The method of finite spheres, *Computational Mechanics* 25 (4) (2000) 329–345. [citado na(s) página(s) 3]
- [20] C. A. DUARTE, J. D. ODEN, An h-p adaptative method using clouds, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139 (1996) 237–262. [citado na(s) página(s) 3, 4, 10]
- [21] C. A. M. Duarte, J. T. Oden, Hp clouds-an hp meshless method, *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 12 (1996) 673–705. [citado na(s) página(s) 3]
- [22] J. M. Melenk, On generalized finite element methods. phd thesis, University of Mariland, College Park, MD. [citado na(s) página(s) 3, 4, 5]

- [23] T. Strouboulis, I. Babuška, K. Copps, The design and analysis of the generalized finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 181 (2001) 43–69. [citado na(s) página(s) 3]
- [24] K. C. T. Strouboulis, I. Babuška, The generalized finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001) 4081–4193. [citado na(s) página(s) 3, 5]
- [25] T. Belytschko, T. Black, Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45 (1999) 601–620. [citado na(s) página(s) 4]
- [26] N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46 (1999) 131–150. [citado na(s) página(s) 4]
- [27] C. A. Duarte, I. Babuška, J. T. Oden, Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 77 (2000) 215–232. [citado na(s) página(s) 4]
- [28] T. Belytschko, N. Moës, S. Usui, C. Parimi, Arbitrary discontinuities in finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (2001) 993–1013. [citado na(s) página(s) 4]
- [29] M. K. Alves, R. Rossi, An extension of the partition of unity finite element method, *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng* 27 (3) (2005) 209. [citado na(s) página(s) 5]
- [30] C. Bacuta, J. Sun, Notes on the schwarz alternating method for partition of unity fem, *Dyn Contin Discrete Impuls Syst Ser A Math Anal* 16 (2009) 15–21. [citado na(s) página(s) 5]
- [31] Q. Z. Xiao, B. L. Karihaloo, Implementation of hybrid crack element on a general finite element mesh and in combination with xfem, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196 (2007) 1864–1873. [citado na(s) página(s) 5]
- [32] R. Gracie, G. Ventura, T. Belytschko, A new fast finite element method for dislocations based on interior discontinuities, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 69 (2007) 423–441. [citado na(s) página(s) 5]
- [33] T. Strouboulis, I. Babuška, R. Hidajat, The generalized finite element method for helmholtz equation: Theory, computation, and open problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (195) (2006) 4711–4731. [citado na(s) página(s) 5, 25, 38]

- [34] T. Strouboulis, R. Hidajat, I. Babuška, The generalized finite element method for helmholtz equation. part ii: Effect of choice of handbook functions, error due to absorbing boundary conditions and its assessment, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (197) (2008) 364–380. [citado na(s) página(s) 5]
- [35] I. Babuška, U. Banerjee, J. Osborn, Generalized finite element methods - main ideas, results and perspective, *Int. J. Comput. Methods* 1 (2004) 67–103. [citado na(s) página(s) 5]
- [36] I. Babuška, F. I. E. Paik, S. Sauter, A generalized finite element method for solving the helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 128 (1995) 325–360. [citado na(s) página(s) 5]
- [37] C. Lu, B. Shanker, Hybrid boundary integral-generalized (partition of unity) finite-element solvers for the scalar helmholtz equation, *IEEE Trans. On Magn.* 43 (3) (2007) 1002–1012. [citado na(s) página(s) 5, 38]
- [38] W. Aquino, J. C. Brigham, C. J. Earls, N. Sukumak, Generalized finite element method using proper orthogonal decomposition, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79 (7) (2009) 887–906. [citado na(s) página(s) 6]
- [39] P. Ortiz, E. Sanchez, An improved partition of unity finite element model for diffraction problems, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 50 (2001) 2727–2740. [citado na(s) página(s) 6]
- [40] P. Ortiz, Finite elements using a plane-wave basis for scattering of surface water waves, *Phil. Trans. R. Soc. Lond* 362 (2004) 525–540. [citado na(s) página(s) 6, 86]
- [41] O. Laghrouche, P. Bettess, E. Perrey-Debain, J. Trevelyan, R. Hidajat, Wave interpolation finite elements for helmholtz problems with jumps in the wave speed, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (194) (2005) 367–381. [citado na(s) página(s) 6, 7, 8, 34, 38, 52]
- [42] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos, N. Sadowski, A. Razek, L. Santandrea, F. Bouillault, F. Rapetti, Using hierarchic high-order interpolation with mortar element method for electrical machines analysis, *IEEE Trans. On Magn.* 41 (5) (2005) 1472–1475. [citado na(s) página(s) 6, 8, 38, 67]
- [43] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos, N. Sadowski, A. Razek, L. Santandrea, F. Bouillault, F. Rapetti, Comparison between nonconforming movement methods, *IEEE Trans. On Magn.* 42 (4) (2006) 599–602. [citado na(s) página(s) 6, 8, 38, 41, 43, 65]

- [44] V. Rochus, D. L. Rixen, Extended finite element for electromechanical coupling, Delft University of Technology faculty 3mE. [citado na(s) página(s) 6]
- [45] N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud, J. F. Remacle, A computational approach to handle complex microstructure geometries, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003) 3163–3177. [citado na(s) página(s) 6]
- [46] T. BELYTSCHKO, R. GRACIE, G. VENTURA, A review of extended / generalized finite element methods for material modelling modelling and simulation in materials, *Science and Engineering* 17 (4). [citado na(s) página(s) 7]
- [47] W. G. Facco, E. J. Silva, A. S. Moura, N. Z. Lima, R. R. Saldanha, Handling material discontinuities in the generalized finite element method to solve wave propagation problems, *IEEE Trans. On Magn.* 48 (2) (2012) 607–610. [citado na(s) página(s) 7, 8, 38]
- [48] F. B. Belgacem, The mortar finite element method with lagrange multipliers, *Numerische Mathematik* 84 (1999) 173–197. [citado na(s) página(s) 8]
- [49] D. Rodger, H. C. Lai, P. J. Leonard, Coupled elements for problems involving movement, *IEEE Trans. On Magn.* 26 (2) (1990) 548–550. [citado na(s) página(s) 8, 38]
- [50] S. Padmanabhan, S. Philip, A non-conforming finite element method for sub-meshing, *Applied Mathematics and Computation* 139 (2003) 85–100. [citado na(s) página(s) 8, 64]
- [51] M. Cho, W. B. Kim, A coupled finite element analysis of independently modeled substructures by penalty frame method, *Applied Mathematics and Computation* 16 (10) (2002) 1201–1210. [citado na(s) página(s) 8]
- [52] O. Flemisch, B. I. W. J. M. Melenk, Mortar methods with curved interfaces, *Applied Numerical Mathematics* 54 (2005) 339–361. [citado na(s) página(s) 8, 70]
- [53] O. Flemisch, B. I. W. M. A. Puso, A new dual mortar method for curved interfaces: 2d elasticity, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 63 (2005) 813–832. [citado na(s) página(s) 8]
- [54] J. T. ODEN, C. A. M. DUARTE, O. C. ZIENKIEWICZ, A new cloud-based hp finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 153 (1998) 117–126. [citado na(s) página(s) 10]
- [55] L. Proekt, S. Yuferev, I. Tsukerman, N. Ida, Method of overlapping patches for electromagnetic computation near imperfectly conducting cusps and edges, *IEEE Trans. On Magn.* 38 (2) (2002) 649–652. [citado na(s) página(s) 10]



- [56] C. A. M. DUARTE, I. Babuška, J. T. ODEN, Generalized finite element method for threedimensional structures mechanics problems, *Computer and Structures* 77 (2000) 215–232. [citado na(s) página(s) 10]
- [57] J. T. Oden, J. Reddy, *An introduction to the mathematical theory of finite elements, pure and applied mathematics*, New York: John Willey & Sons. [citado na(s) página(s) 11]
- [58] C. A. Duarte, I. Babuška, J. D. Oden, Generalized finite element methods for three dimensional structural mechanics problems, *Computers & Structures* 77 (2000) 215–232. [citado na(s) página(s) 12, 15]
- [59] V. Rochus, D. L. Rixen, P. Duysinx, Electrostatic simulation using xfm for conductor and dielectric interfaces, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 85 (2010) 1207–1226. [citado na(s) página(s) 14]
- [60] C. Bacuta, J. Sun, Partition of unity finite element method implementation for poisson equation, *Advances in Applied Mathematics* 0 (2005) 57–67. [citado na(s) página(s) 14]
- [61] S. Soghrati, A. M. Aragón, C. A. Duarte, P. H. Geubelle, An interface-enriched generalized finite element method for problems with discontinuous gradient field, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 0 (2010) 1–19. [citado na(s) página(s) 14]
- [62] L. Proekt, I. Tsukerman, Method of overlapping patches for electromagnetic computation, *IEEE Trans. On Magn.* 38 (2) (2002) 741–744. [citado na(s) página(s) 14, 38]
- [63] L. Demkowicz, Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, part 1. constrained approximation and data structure, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 77 (1989) 79–112. [citado na(s) página(s) 15]
- [64] T. Strouboulis, I. Babuška, K. Copps, The design and analysis of the generalized finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 181 (1-3) (2000) 43–69. [citado na(s) página(s) 16]
- [65] J. M. Melenk, *Finite element methods with harmonic shape functions for solving laplace's equations. dissertação (mestrado)*, University of Maryland, College Park. [citado na(s) página(s) 16]
- [66] MathWorks, The MATLAB home page, <http://www.mathworks.com/products/matlab/> (Acesso em fevereiro de 2011). [citado na(s) página(s) 27]

- [67] T. Strouboulis, R. Hidajat, I. Babuška, The generalized finite element method for helmholtz equation. part ii: Effect of choice of handbook functions, error due to absorbing boundary conditions and its assessment, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008) 364–280. [citado na(s) página(s) 33]
- [68] C. Farhat, I. Harari, U. Hetmanuk, A discontinuous galerkin method with lagrange multipliers for the solution of helmholtz problems in the mid-frequency regime, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003) 1389–1419. [citado na(s) página(s) 40]
- [69] F. Rapetti, F. Bouillault, L. Santandrea, A. Buffa, Y. Maday, A. Razek, Calculation of eddy currents with edge elements on nonmatching grids in moving structures, *IEEE Trans. On Magn.* 36 (4) (2000) 1351–1355. [citado na(s) página(s) 43]
- [70] C. R. Johnson, Positive definite matrices, *Amer. Math. Monthly* 77 (1970) 259–264. [citado na(s) página(s) 44]
- [71] U. C. Hasar, Non-destructive testing of hardened cement specimens at microwave frequencies using a simple free-space method, *NDT&E International* 42 (2009) 550–557. [citado na(s) página(s) 59]
- [72] C. Bernardi, Y. Maday, A. Patera, Domain decomposition by the mortar element method, H. Kaper, et al. (Eds.), *Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*, Reidel, Dordrecht (1993) 269–286. [citado na(s) página(s) 70]
- [73] C. Bernardi, Y. Maday, A. Patera, A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar element method, H. Brezzi, J.L. Lions (Eds.), *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*, Pitman, New York, (1994) 13–14. [citado na(s) página(s) 70]