

Joana Barbabela Barbosa

Linhas de solvência utilizando medidas de risco

Belo Horizonte, junho de 2013

Joana Barbabela Barbosa

Linhas de solvência utilizando medidas de risco

Dissertação apresentada como requisito parcial
para obtenção de grau de Mestre em Estatística
pela Universidade Federal de Minas Gerais.

Orientador: Sokol Ndreca

Co-Orientador: Adrian Pablo Hinojosa Luna

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Belo Horizonte, junho de 2013

Agradecimentos

Este trabalho não teria sido possível sem a ajuda de muitas pessoas, às quais agradeço imensamente.

Agradeço à minha família, base de tudo. À Tia Calma por me proporcionar suporte durante toda minha vida acadêmica, desde o colégio até a pós-graduação. À minha mãe, por todo amor e por sempre apoiar minhas decisões. Ao meu pai, pelo suporte e compreensão. À minha irmã Júlia, por todo carinho, por sempre me ouvir e me fazer orações.

Agradeço ao Sokol e ao Adrian pela orientação e aprendizado. Pela compreensão em relação às minhas mudanças, por terem paciência e conseguirem adaptar as reuniões de acordo com minha disponibilidade para viajar.

Agradeço aos colegas da pós-graduação da UFMG, pelos estudos em grupos e pelos bons momentos compartilhados. Aos professores da UFMG pelo conhecimento adquirido durante as disciplinas e ao departamento de estatística pelo suporte e estrutura oferecidos.

Aos colegas do departamento de Estudos Atuariais e Gestão de Riscos do Bradesco Seguros, pelas sugestões na elaboração da dissertação e em especial ao Fábio, pela compreensão nos momentos de ausência durante minhas reuniões em Belo Horizonte.

Aos professores Aniura Milanês Barrientos (MAT/UFMG), Chang Chung Yu Dorea (MAT/UnB) e Rodrigo Jardim Raad (FACE/UFMG) pela participação em minha banca. Ao prof. Jhames Sampaio (EST/UnB) pelas sugestões feitas na minha qualificação.

Resumo

Este trabalho é baseado em um modelo de solvência que relaciona a taxa de retorno esperada e sua volatilidade para os investimentos de uma seguradora. Em vez de calcular o capital mínimo requerido, exigido na regulamentação de Solvência II, esse modelo propõe uma alternativa, fornecendo padrões mínimos de risco e retorno dos investimentos. A taxa de retorno deve levar em conta o crescimento histórico de passivo ao longo do tempo, representada por um processo estocástico. Eling et al. (2009) propôs um modelo baseado em medidas de risco e utilizando a aproximação normal power para avaliar a solvência. Esta dissertação estende este estudo para o caso assimétrico, através da aproximação gama transladada e compara com um modelo não aproximado simplificado. Por fim, objetivando medir a qualidade das aproximações, avaliou-se o modelo em diversos cenários.

Palavras-chaves: *Solvência, Seguros, Medidas de Risco, Aproximação Normal Power, Aproximação Gama Transladada.*

Abstract

This work is based on a solvency model that relates the expected rate of return of investment performance by an insurance company with its volatility. Instead of calculating the minimum capital requirement for the Solvency II regulation, this model gives an alternative, by providing minimum standards for risk and return of investments. The rate of return should take into account the historical growth of liabilities over time, represented by a stochastic process. Eling et al. (2009) proposed a model based on risk measures and an approximation by the normal power to evaluate solvency. We extend this study for the asymmetric case, through the translated gamma approximation and compared with a not approximated simplified model. Thus, in order to measure the quality of the approximations, we evaluated the model in various scenarios.

Keywords: *Solvency, Insurance, Investment Performance, Risk Measures, Normal Power Approximation, Translated Gamma Approximation.*

Sumário

Lista de Figuras	9
1 Introdução	2
2 O contexto do projeto Solvência II	5
2.1 O Acordo de Basileia	5
2.2 Solvência II	8
2.3 Solvência II no Brasil	12
3 Medidas de Risco	14
3.1 Coerência das Medidas	15
3.2 Probabilidade de Ruína	16
3.3 Custo Esperado de Perda	17
3.4 Valor em Risco na Cauda	19
4 Abordagem Atuarial para a Solvência	23
4.1 O Modelo Clássico de Riscos Atuariais	23
4.2 Exemplo de Solvência Utilizando Monte Carlo	26
4.2.1 Curva de Solvência para a Probabilidade da Ruína	27
4.2.2 Curva de Solvência para o CEP	27
4.2.3 Curva de Solvência para a TVaR	28
5 Aproximações às Distribuições Agregadas	30

5.1	Aproximação Normal	30
5.2	Aproximação Normal Power	31
5.3	Aproximação Gama Transladada	36
6	Aproximações das Curvas de Solvência para um Modelo de Capital Próprio	39
6.1	Construção das Linhas de Solvência Utilizando a Aproximação Normal Power	42
6.1.1	Probabilidade de Ruína - PR	42
6.1.2	Custo Esperado da Perda - CEP	44
6.1.3	Valor em Risco na Cauda - TVaR	46
6.2	Construção das Linhas de Solvência Utilizando a Aproximação Normal da Gama Transladada	47
6.2.1	Probabilidade de Ruína - PR	47
6.2.2	Custo Esperado da Perda - CEP	48
6.2.3	Valor em Risco na Cauda - TVaR	50
6.3	Avaliação dos Resultados	51
7	Conclusão	56
	Referências Bibliográficas	58
A	O Problema dos Momentos	62
B	Algoritmo da simulação Monte Carlo	67
C	Extensão - Linhas de Solvência e o Mercado de Capitais	71
C.1	Teoria dos Portfólios	71
C.2	Linhas de Mercado de Capital	73

Lista de Abreviaturas

AIG	<i>American International Group.</i>
CEIOPS	<i>Committee of European Insurance and Occupational Pension Supervision.</i>
CEP	Custo Esperado da Perda.
CNSP	Conselho Nacional de Seguros Privados.
CVaR	<i>Condotional Value at Risk.</i>
EAD	<i>Exposured at Default.</i>
IAIS	<i>International Association of Insurance Supervisors.</i>
IRB	<i>International Ratings Based.</i>
LGD	<i>Loss Given Default.</i>
M	<i>Efective Maturite.</i>
MCR	<i>Minimum Capital Requirement.</i>
PD	<i>Probability Default.</i>
PIB	Produto Interno Bruto.
PLA	Patrimônio Líquido Ajustado.
PR	Probabilidade de Ruína.
SCR	<i>Solvency Capital Requirement.</i>
SUSEP	Superintendência de Seguros Privados.
TCL	Teorema Central do Limite.
TVaR	Valor em Risco na Cauda.

Lista de Figuras

2.1	Representação esquemática das provisões técnicas e do requisito de capital de solvência (SCR).	11
2.2	Representação dos risco que já foram ou ainda estão sendo regulamentados. .	13
3.1	Representação de duas distribuições de probabilidade com mesmo valor para probabilidade de ruína ϵ	18
3.2	Representação da definição do VaR e do TVaR.	21
4.1	Curva de solvência para a Probabilidade de Ruína, $\epsilon = 0,05$	28
4.2	Curva de solvencia para a CEP.	28
4.3	Curva de solvência para a TVaR.	29
5.1	Aproximação normal power em dados com distribuição gama.	35
5.2	Aproximação gama transladada em dados simulados com distribuição normal padrão.	38
6.1	Linhas de Solvência utilizando a aproximação normal power para PR, CEP e TVaR baseados em dados de uma seguradora alemã.	52
6.2	Linhas de Solvência para a PR, baseados em diferentes níveis de confiança, de acordo com dados de uma seguradora alemã.	53
6.3	Comparação entre as aproximações normal power e gama normal transladada, para as medidas de risco PR, CEP e TVaR.	54

6.4	Representação das diferenças do retorno esperado, utilizando a aproximação normal power e a gama transladada, quando a assimetria dos retornos é não-nula.	55
6.5	Diferenças entre a abordagem normal power e gama transladada, para retornos assimétricos.	55
C.1	Esboço da linha de mercado de capitais, com ativo livre de risco	74
C.2	Linha de mercado e linhas de Solvência para a aproximação normal power para PR, CEP e TVaR, baseados em dados de uma seguradora alemã.	75

Capítulo 1

Introdução

Desde a década de 90 que o mercado de seguros, previdência privada e capitalização se encontra em um período de grande crescimento no Brasil. A atual queda da taxa de juros, a estabilidade no nível de emprego e o maior poder aquisitivo da classe média contribuiu para estímulo do crescimento do setor de seguros no mercado brasileiro. De acordo com Chan (2010), o mercado segurador brasileiro é o maior da América Latina e, em razão de sua economia crescente e sua população de aproximadamente 180 milhões, oferece potencial para tornar-se um dos mais importantes centros seguradores no médio/longo prazo.

Ademais, o setor de seguros vem, cada vez mais, representando uma parcela significativa do Produto Interno Bruto (PIB). De acordo a FenSeg, Federação Nacional de Seguros Gerais, em reportagem para o Diário do Comércio, enquanto o PIB cresceu apenas 2,7% em 2011, o mercado de seguros teve um aumento de 11,7%; e em 2012, de janeiro a setembro, o crescimento já soma 13%, com faturamento de R\$35,4 bilhões nos nove primeiros meses do ano. O setor representa 4,5% do PIB brasileiro, mas ainda há muito a avançar, já que em mercados mais maduros este número chega a 10%.

Dessa forma, por ser um mercado que vem apresentando um crescimento acelerado e representa boa parte de todas as riquezas produzidas no país, torna-se necessário o desenvolvimento de métodos adequados para a análise da solvência das empresas de seguros. É um setor que merece toda a atenção e fiscalização por parte das autoridades competentes, pois uma crise implicaria em grandes reflexos negativos na economia nacional.

Adicionalmente, a crise na economia de 2008 mostrou que as economias estão interligadas e que as ações e os desequilíbrios em um único local afetam as economias de outras partes do mundo. Um exemplo deste fato é que o governo americano teve que injetar bilhões de dólares para evitar a quebra da Seguradora AIG - American International Group, pois seria devastadora para a estabilidade do sistema financeiro mundial. Weaver (2010) aponta a falta de regulamentação de reservas no mercado segurador e financeiro como causa deste evento. A desregulamentação ou diminuição de reservas permite a alavancagem desenfreada

das posições de portfólio de investidores, o que gera um aumento de risco em cada operação, e conseqüentemente, em todo o sistema. Assim os consumidores estão pedindo segurança e mais regulação para evitar que crises semelhantes voltem a acontecer no futuro.

Em assim sendo, a preocupação acerca da manutenção da segurança e solidez no mercado segurador é um tema antigo e foi inicialmente desenvolvido na União Europeia por meio do projeto Solvência I, o qual consistia na observância de um montante mínimo de capital destinado à absorção de eventuais perdas, sendo o modelo de cálculo considerado relativamente simples. Semelhante padronização foi adotada no segmento bancário pela, até então, Basileia I. Posteriormente, em 2002, com o Acordo de Basileia II e as novas tendências de capital baseado em risco, surgiu o projeto Solvência II.

Eling et al. (2009) introduziu uma nova perspectiva na regulação de Solvência. Usualmente, em uma situação de solvência fraca em que o capital próprio está abaixo do necessário, o segurador deve aumentar suas receitas ou diminuir suas despesas em um curto prazo, aumentando, por exemplo, o valor dos prêmios ou diminuindo os custos administrativos. Nesta nova abordagem, ao invés de obter o capital próprio na forma de cálculo usual, padrões mínimos de performance de investimento são obtidos, dado a estrutura de risco do passivo, o capital próprio e um nível de risco predefinido. Assim, um segurador insolvente pode ajustar sua alocação de capital em vez de modificar receitas ou despesas.

A relação funcional que garante este padrão mínimo de performance de investimento é chamada de linha de solvência e determina o investimento mínimo requerido em termos do retorno e desvio padrão esperado do portfólio de investimento do segurador. Neste modelo, quanto maior o capital próprio que o segurador possui, *ceteris paribus*, maior será o grau de liberdade da escolha de alocação de seu ativo.

Esta dissertação pretende estudar e estender o modelo de solvência proposto por Eling et al. (2009), que pode ser usado tanto como políticas de risco interno, como em políticas para implantação de normas de regulamentação para o mercado segurador. Para tanto, utiliza-se das medidas de risco Probabilidade de Ruína (PR), Custo Esperado da Perda (CEP) e Valor em Risco na Cauda (TVaR) em equações que nos possibilitam encontrar a linha de solvência da seguradora, traçando curvas da esperança do retorno dos investimentos em função de sua volatilidade.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 são caracterizados o Acordo de Basileia e o projeto Solvência I e II, inclusive no Brasil. No Capítulo 3 são apresentadas definições relacionadas ao risco, caracterizando os principais riscos, medidas de risco e medidas coerentes. São definidas as medidas de risco utilizadas: probabilidade de ruína, custo esperado da perda e o valor em risco na cauda e assim é apresentada uma comparação entre as mesmas.

Já no Capítulo 4, a abordagem clássica dos riscos atuariais é definida e é apresentado o resultado do modelo realizada através de uma simulação Monte Carlo. O Capítulo 5 aborda as vantagens do uso das aproximações e a definição das aproximações normal power e gama transladada. Por sua vez, o Capítulo 6 nos apresenta o modelo e as fórmulas obtidas utilizando as duas aproximações e ainda os resultados, que são expostos através de gráficos e comparações. Uma conclusão é feita no capítulo 7 e no Apêndice C mostra-se uma possível extensão do trabalho por meio da definição da teoria moderna dos portfólios e de curvas de mercado.

O código das simulações utilizadas no trabalho estão disponíveis no Apêndice B.

Capítulo 2

O contexto do projeto Solvência II

2.1 O Acordo de Basileia

O Comitê de Basileia é uma organização que congrega autoridades de supervisão bancária e foi formado pelos presidentes dos bancos centrais dos países do Grupo dos Dez (G-10), em 1975. É constituído por representantes de autoridades de supervisão bancária e bancos centrais da Bélgica, Canadá, França, Alemanha, Itália, Japão, Luxemburgo, Holanda, Espanha, Suécia, Suíça, Reino Unido e Estados Unidos. As reuniões normalmente são realizadas no Banco de Compensações Internacionais, na Basileia, Suíça, onde se localiza sua Secretaria Permanente. O objetivo do Comitê de Basileia é a elaboração de padrões de supervisão, recomendações e princípios para as melhores práticas no mercado financeiro. O Comitê foi responsável pela criação dos Acordos de Basileia (Basileia I, Basileia II e Basileia III), que foram adotados por vários outros países além dos 13 do G-10, inclusive o Brasil. Nesta seção, iremos introduzir o que foi esse projeto de acordo com o descrito em Gorziza (2007).

Em 1988, o Comitê introduziu o Acordo de Basileia I, que recomenda padrões mínimos de requerimentos de capital para fazer frente à deterioração dos índices de capital dos bancos internacionais na década de 80. O objetivo era o de minimizar os riscos de insucesso das atividades bancárias alcançando maiores garantias para a solvência e a liquidez do sistema bancário internacional. Ademais, também visava reduzir a competição desigual entre os bancos. Desta forma, o Acordo recomendava que os bancos observassem diretrizes uniformes de adequação de capital contemplando a exigência de capital de 8% sobre os ativos ponderados pelo risco associado aos empréstimos ou outros ativos monetários, garantias e contratos de derivativos.

Após estudos liderados pelo Comitê Basileia em conjunto com representantes de bancos centrais e órgãos de fiscalização, pesquisadores, acadêmicos e profissionais do mercado financeiro, o Acordo de 1988 foi revisado e, em junho de 1999, foi publicada a primeira versão do documento “Convergência Internacional de Mensuração e Padrões de Capital: Uma Estru-

tura Revisada”, ou “Basileia II”, mais complexo e com conceitos mais apurados que a versão anterior, tendo sua versão final divulgada em junho de 2004.

Este novo acordo utiliza um conceito de três pilares, com uma nova estrutura para requerimento de capital (mais detalhes veja Gorziza (2007)):

- Pilar 1: Capital Mínimo Requerido

Foram mantidos a definição de capital e o requerimento mínimo de 8% para os ativos ponderados pelo risco utilizadas no Solvência I. As mudanças referem-se a uma nova metodologia de mensuração, análise e administração de risco de crédito e operacional enquanto o risco de mercado permaneceu inalterado. Passou a estimular a adoção de modelos proprietários para mensuração dos riscos, com graus diferenciados de complexidade, sujeitos à aprovação do regulador, e possibilidade de benefícios de redução de requerimento de capital por conta da adoção de abordagens internas. Para o risco de crédito, dois principais métodos de avaliação foram propostos: abordagem padronizada e classificação interna de risco (*Internal Ratings Based - IRB*). Esta última é dividida em IRB básica e IRB avançada.

Abordagem Padronizada: Conforme esta abordagem, o banco poderá utilizar uma agência pública ou privada de classificação de risco para medir o risco dos ativos. Estabelece também um peso de risco para cada tipo de crédito, distribuída em quatro categorias: 20%, 50%, 100% e 150%.

De acordo com Allen et al. (2004), por esta abordagem, os ativos dos bancos são classificados em faixas de risco, de acordo com o *rating* de crédito do devedor, feito por agências de *rating* independentes, visando melhorar a qualidade da percepção de risco e não introduzir demasiada complexidade ao método. Para obter o requerimento mínimo de capital para risco de crédito, toda a exposição de crédito (*Exposure at Default*) em cada faixa de peso de risco é somada e multiplicada pelo peso de risco apropriado e então multiplicada pelo requerimento de capital total de 8%.

Classificação Interna de Risco (Internal Risk Based - IRB): Por este critério, os bancos estão autorizados a utilizar sua própria metodologia de classificação de risco de crédito. De acordo com Oliveira (2005), permite que os bancos usem estimativas internas para os quatro componentes do risco de crédito - PD (*Probability Default*), LGD (*Loss Given Default*), EAD (*Exposure At Default*) e M (*Effective Maturity*) - para calcular o capital inerente a esse risco. As instituições devem seguir normas mais rígidas de avaliação e fornecer maior transparência ao mercado. O uso deste critério depende de autorização prévia do órgão de supervisão bancária do país.

Para o tratamento das exposições das empresas, bancos e países existem duas metodologias previstas por Basileia II: uma básica e outra avançada. No método básico, apenas a PD é calculada enquanto a LGD e a EAD são fixadas e baseadas em valores do supervisor. Os bancos estimam a probabilidade de inadimplemento associada a cada tomador e os gestores fornecerão os outros insumos. No método avançado todos os quatro parâmetros são determinados pelo banco.

A outra mudança proposta é a introdução do risco operacional no cálculo, medido separadamente dos demais. Pelo Acordo de 1988, a exigência de capital de 8% sobre os ativos ponderados pelo risco se destinava a cobrir risco de crédito. O risco operacional envolve perdas por erros de funcionários, falhas de sistemas e documentações irregulares ou fraudes.

- **Pilar 2: Revisão no Processo de Supervisão**

O supervisor passará a ser o responsável por avaliar como os bancos estão estimando a adequação de suas necessidades de capital em relação aos riscos assumidos. A nova proposta enfatiza a importância dos administradores dos bancos desenvolverem um eficiente gerenciamento de risco e um processo interno de mensuração de capital de acordo com o perfil de risco e controle de sua instituição. Esses processos internos serão submetidos à aprovação da Supervisão Bancária, podendo haver interferência quando necessário. As autoridades de fiscalização irão examinar os sistemas internos de mensuração de risco de taxa de juros dos bancos e controlar se as instituições bancárias estão mantendo um capital correspondente ao nível de risco de taxas de juros.

- **Pilar 3: Disciplina de Mercado**

O objetivo do terceiro pilar é estimular uma maior disciplina do mercado, por meio do aumento da transparência dos bancos, para que os agentes de mercado sejam bem informados e possam entender melhor o seu perfil de risco.

O Comitê de Supervisão Bancária de Basileia preparou dois documentos para divulgação, um conjunto de princípios para uma supervisão bancária eficaz (Os Princípios Essenciais da Basileia) e um compêndio, a ser atualizado periodicamente, das recomendações, orientações e normas do Comitê da Basileia. Os Princípios Essenciais da Basileia se apresentam como referência básica para órgãos supervisores e outras autoridades públicas em todos os países e internacionalmente e compreendem 25 princípios básicos indispensáveis para um sistema de supervisão realmente eficaz. Eles se referem a:

- **Precondições para uma supervisão bancária eficaz - Princípio 1**

- Autorização e estrutura - Princípios 2 a 5
- Regulamentos e requisitos prudenciais - Princípios 6 a 15
- Métodos de supervisão bancária contínua - Princípios 16 a 20
- Requisitos de informação - Princípio 21
- Poderes formais dos supervisores - Princípio 22
- Atividades bancárias internacionais - Princípios 23 a 25.

Adicionalmente, o documento contém explicações sobre os vários métodos que os supervisores podem adotar para implementação dos princípios.

A partir de 2008 a crise dos subprimes gerou um amplo debate acerca da estrutura regulatória vigente sobre os sistemas financeiros e sua incapacidade de evitar a crise. Nesta conjuntura, em 2010, houve uma nova proposta de alterações na estrutura regulatória apresentada pelo Comitê de Basileia, o Basileia III. As principais mudanças estão sendo introduzidas nos pontos que, acredita-se, devem permitir aos bancos lidar de forma mais eficiente com o conceito de risco e as relações associadas a ele. O terceiro acordo de Basileia aumenta as exigências de capital de alta qualidade, ao qual será somado ainda um colchão de proteção do capital. Além disso, em paralelo a esse ajuste na composição de capital dos bancos, foram criados dois índices: um de alavancagem e outro de cobertura de liquidez. Com Basileia III, pretende-se fortalecer a resiliência do setor bancário tornando-o mais capaz de lidar com questões cruciais para o sistema financeiro, e para a economia como um todo, evitando os riscos que engendraram a recente crise financeira internacional (Leite e Reis, 2011).

2.2 Solvência II

Solvência é definida como o estado em que o devedor possui o ativo maior do que o passivo. Num contexto geral, é capacidade de uma entidade de cumprir os compromissos com os recursos que constituem seu patrimônio ou seu ativo. Já no ramo de seguros, tanto vida como não-vida, este conceito é ainda mais complexo. Não basta uma seguradora ter o seu total de ativo, hoje, maior que o total de passivo, para ser considerada solvete, é preciso analisar se futuramente os ativos se manteriam maior que os passivos. Para tanto, devem ser realizadas previsões futuras, baseadas em estudos estatísticos e de probabilidades, considerando variáveis aleatórias para a construção de modelos que definam a situação financeira necessária, no presente, para garantir, com o máximo de confiança, a solvência ao longo prazo. Isto acontece no contexto das seguradoras devido à alta variabilidade do passivo.

A partir da década de 80, no mercado segurador, iniciou um aumento do número de seguradoras e resseguradoras insolventes no mundo. Entre 1980 e 1994, aproximadamente 650 seguradoras tornaram-se insolventes. Esse comportamento surgiu, entre outros fatores, devido à forte instabilidade nos resultados, à tendência ao crescimento do nível das provisões para perdas, às flutuações nas taxas de juros e aos investimentos em ativos de risco elevado (veja Júnior e Lélis (2004)).

A resposta europeia para o crescimento do número de seguradoras insolventes foi a criação das primeiras regras de constituição de margem de solvência. Em 2001, conforme Júnior e Lélis (2004), essas regras foram alteradas através da aprovação do projeto denominado Solvência I, cujo principal objetivo era o fortalecimento das regras de constituição de um patamar mínimo do patrimônio líquido das companhias seguradoras por meio da revisão e alteração de fatores aplicados sobre prêmios, sinistros e reservas técnicas constituídas.

O trabalho de Eling et al. (2007) introduziu o conceito de Solvência I e descreve com mais detalhes o projeto que veio em seguida, o Solvência II. Segundo os autores, estes projetos tinham o objetivo de aumentar a confiança do consumidor, promovendo a plena integração do mercado financeiro, garantindo elevados níveis de proteção aos consumidores. O Solvência I foi desenvolvido nos países membros da União Europeia e consistia na observância de um montante mínimo de capital destinado à absorção de perdas eventuais, sendo considerado um modelo relativamente simples. É semelhante ao acordo realizado pelo segmento bancário, o Basileia II.

Enquanto o Solvência I realizou pequenas modificações nos requisitos de capital originalmente introduzidos nos anos 70, o projeto Solvência II foi criado para requerer maiores mudanças. Iniciado em 2001, em uma primeira fase o projeto desenhou um quadro geral e analisou a atual situação, discutindo os princípios e conceitos do futuro sistema. Ademais, diversos estudos foram encomendados pela União Europeia. Um destes estudos concluiu por uma estrutura de três pilares adaptada do setor bancário através do Basileia II, que são:

- Pilar 1: Requerimentos de Capital - Contém regulação quantitativa para os requisitos de capital das companhias seguradoras e apresenta regras para determinar o capital mínimo requerido e o capital alvo. Inclui também condições para modelos de risco internos e padronizados, incorporando os riscos do ativo e do passivo, apesar de não necessariamente incluir o casamento ativo-passivo. Existem quatro categorias relevantes de controle e monitoramento de risco: (1) Riscos de subscrição, particularmente de cálculo de prêmios e reservas de sinistros; (2) Risco de crédito decorrente da inadimplência do devedor; (3) Risco de Mercado resultante das flutuações dos preços de mercado, incluindo ações, títulos e taxas de câmbio e (4) Risco operacional.

- Pilar 2: Atividades de Supervisão - Os órgãos supervisores devem avaliar todos os riscos e analisar exaustivamente as técnicas internas de gerenciamento de risco dos supervisionados. Assim, ele contém requisitos qualitativos relacionados às atividades de supervisão e gerenciamento de risco, criando um canal de comunicação construtivo entre supervisores e participantes do mercado, de modo a possibilitar o devido tratamento dos riscos.
- Pilar 3: Reporte Financeiro e Divulgação ao Público - Contém medidas destinadas a reforçar a disciplina de mercado. Inclui requisitos de divulgação aprofundados, a transparência e integração com as normas internacionais de contabilidade Internacional Financial Reporting Standards, IFRS.

Ainda por Eling et al. (2007), para os requerimentos de capital apresentados no pilar 1 são especificados dois níveis. O primeiro nível é o Capital Mínimo Requerido ou *Minimum Capital Requirement* (MCR) definido ainda no Solvência I. O MCR corresponde ao limite mínimo de capital, que abaixo dele representa um risco excessivo para as partes envolvidas e depende da linha de negócios do segurador. No caso de seguros não vida, os limites baseados nos prêmios são de 18% dos primeiros 50 milhões e 16% o que estiver acima deste montante. A margem baseada nos sinistros, que é 26% nos primeiros 35 milhões e 23% acima deste montante, será usada se este montante exceder os requerimentos de capital próprio mínimo determinado pelos cálculos baseados em prêmios. Este primeiro nível corresponde também a um nível de intervenção da autoridade de supervisão, e pode chegar a implicar o encerramento da comercialização de novos contratos para a seguradora.

O segundo nível de capital, ponto principal do Solvência II, é o requisito de capital de solvência ou *Solvency Capital Requirement* (SCR) baseado no valor de mercado e tem como valor mínimo o MCR. O SCR deve corresponder ao capital econômico que uma seguradora precisa para gerir seu negócio com um determinado nível de segurança, e é determinado pela probabilidade de insolvência ou usando uma medida de risco. Este parâmetro deve ser calibrado de forma a quantificar os riscos que uma instituição com um portfólio diversificado está exposta, baseada na quantidade de capital econômico correspondente à probabilidade de ruína de 0,5% e um horizonte de tempo de um ano. Se a seguradora ficar abaixo deste nível recomendado de capital, as autoridades de supervisão deverão tomar medidas de acordo com as regras definidas no pilar 2.

De acordo com as orientações emanadas pelo *Committee of European Insurance and Occupational Pension Supervision* (CEIOPS), as provisões técnicas deverão ser calculadas com base na melhor estimativa (*best estimate*) adicionada de uma margem de risco. Desta forma as provisões técnicas são divididas em duas componentes: a *best estimate*, que corresponde

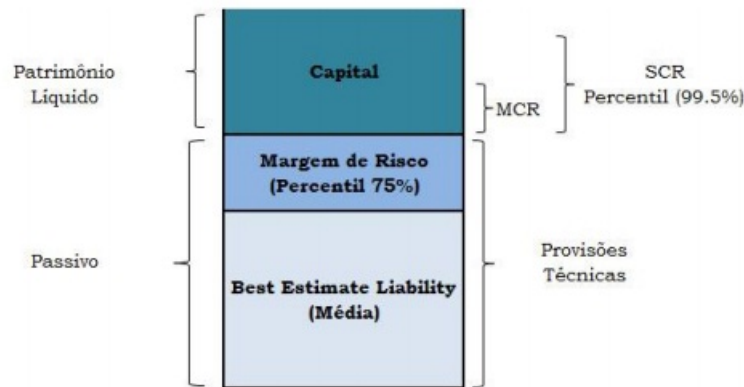


Figura 2.1: Representação esquemática das provisões técnicas e do requisito de capital de solvência (SCR).

Fonte: Adaptado da SUSEP

à estimativa do custo total que uma empresa de seguros terá de suportar para regularizar todos os sinistros que ocorrem até ao final do exercício e a margem de risco, que consiste em um valor adicional a *best estimate* que garanta a suficiência das provisões técnicas a um determinado nível de confiança, sendo que foi previsto 50% e 75% para a margem de segurança. A Figura 2.1 representa de forma esquemática a definição das provisões técnicas e do SCR.

Uma das mais importantes inovações do Solvência II é a possibilidade do uso de modelos internos, ao invés de modelos padrões para se determinar o SCR. Um modelo interno é aquele construído pela seguradora para suas necessidades específicas e o modelo padrão é desenhado pelo regulador e usado uniformemente pelas seguradoras. Espera-se que os modelos internos resultem em análises e controles mais precisos da situação financeira do que os modelos padrões, que são mais genéricos. Para ser elegível para utilizar um modelo interno de risco um segurador deve ter seu modelo certificado pelo supervisor, um processo que requer documentações detalhadas e hipóteses bem delimitadas. Exames periódicos do modelo também são necessários para garantir que está ajustado propriamente ao dinâmico ambiente financeiro. Se um modelo interno é usado, o capital de solvência resultante não deve ser menor que o capital mínimo requerido sobre as regras do Solvência I. Ademais, os reguladores podem requerer o uso de um modelo interno se as condições particulares do segurador diferirem muito das hipóteses determinadas para o modelo padrão.

O modelo com o melhor poder preditivo será mais complexo, inclusive poderá incluir alguns aspectos de fluxos de caixa dinâmicos. Entretanto, apenas complexidade não nos garante um bom modelo. Mesmo que um modelo consiga identificar companhias financeiramente fracas, essa habilidade não necessariamente justifica os custos para tanto. Complexi-

dade tende a requerer mais dados e resultados com altos custos para desenvolver e manter o sistema, tanto para os seguradores quanto para os reguladores. Apesar de ainda não sabermos a versão final do modelo padrão da UE, sabemos que um dos requisitos é que ele seja fácil de usar, afastando-se de um alto grau de complexidade. Em contraste, os modelos internos são geralmente mais detalhados e específicos, podendo ser mais precisos, e assim têm custos correspondentes de transação maiores. Seguradoras menores podem ser mais afetadas por estes altos custos e desta forma talvez não valha a pena para Seguradoras menores este investimento.

A Diretiva Solvência II originalmente estava prevista para ser implementada em 2012, mas foi adiada para Janeiro de 2014 e ainda existem dúvidas quanto a essa data (Collins, 2012). A análise de solvência utiliza modelos complexos e assim ainda há muito a desenvolver nesta área.

2.3 Solvência II no Brasil

No mercado brasileiro, a implementação das regras estabelecidas pelo Solvência II está avançando e a Superintendência de Seguros Privados (SUSEP), como membro do International Association of Insurance Supervisors (IAIS), está trabalhando sobre os três pilares. Atualmente, existem poucos estudos neste sentido no Brasil. Alguns trabalhos como Júnior e Lélis (2004), Chan (2008) e Chan (2010) descrevem como está sendo realizado este novo processo no país. Todavia, desde estas publicações, houveram modificações devido às novas legislações, e assim iremos apresentar as legislações atualizadas até o final do ano de 2012.

O cenário regulatório até 2006 seguia o projeto Solvência I. A margem de solvência foi determinada inicialmente pela Resolução CNSP 8/1989, alterada pela Resolução CNSP 55/2001, e correspondia ao montante igual ou maior entre (a) 0,20 vezes o total da receita líquida de prêmios emitidos dos últimos 12 meses e (b) 0,33 vezes a média anual do total dos sinistros retidos dos últimos trinta e seis meses.

Com o início do projeto Solvência II na Europa e as novas tendências mundiais, o órgão regulador brasileiro realizou grandes mudanças no capital mínimo requerido para autorização e funcionamento das sociedades seguradoras por intermédio de outras Resoluções do Conselho Nacional de Seguros Privados. Nesta primeira etapa, foram estabelecidas regras específicas apenas para a determinação do capital mínimo adicional destinado à cobertura do risco de subscrição, e foram publicadas as Resoluções CNSP 155, 156, 157 e 158, todas em 2006.

Segundo Chan (2010), a Resolução CNSP 158/2006 dispõe sobre a forma de cálculo do capital mínimo requerido para a cobertura do risco de subscrição, podendo ser de duas formas: utilizando fatores mais agravados que acarretam em maior necessidade de capital quando a empresa não dispõe de um modelo interno de avaliação de risco e outra com

fatores mais suavizados para as instituições que possuam modelo. A autora ainda destaca que, diferentemente do setor bancário, no mercado segurador brasileiro não é permitida a utilização do próprio modelo interno ou dos parâmetros do modelo interno para determinação do capital mínimo requerido, mas, apenas, a aplicação de fatores mais suavizados, conforme a referida resolução.

Em um segundo momento, a Resolução CNSP 155 foi revogada pela 178/07, que, por sua vez, juntamente com as 156 e 157, foram revogadas pela 227/2010. A Resolução 158 continua em vigor.

A Resolução CNSP 227/2010, dispõe sobre o capital mínimo requerido para autorização e funcionamento das sociedades seguradoras, das entidades abertas de previdência complementar, das sociedades de capitalização e dos resseguradores locais. O capital mínimo requerido será o capital total que a sociedade supervisionada deverá manter, a qualquer tempo, para operar, e deverá ser o maior valor entre a soma do capital base com o capital adicional, e a margem de solvência. Os Anexos I a IV trazem tabelas com os valores de capital base, divididos por região do país e seguimento.

Adicionalmente, a resolução define o plano corretivo de solvência como sendo o plano que deverá ser enviado à SUSEP pela sociedade supervisionada visando à recomposição da situação de solvência, quando a insuficiência do patrimônio líquido ajustado - PLA em relação ao capital mínimo requerido for de até 30

Ademais, outras resoluções importantes estabelecem critérios para o capital adicional, sendo que a Resolução CNSP 411/2010 é baseada no risco de subscrição e em 2011 o risco de crédito foi regulamentado através da Resolução CNSP 241/2011.

Na Figura 2.2, pode-se verificar quais risco já foram regulamentados pela SUSEP e quais estão em processo de estudo.



Figura 2.2: Representação dos risco que já foram ou ainda estão sendo regulamentados.
Fonte: SUSEP

Capítulo 3

Medidas de Risco

Uma medida de risco é definida com sendo uma função ρ que mapeia um risco X , em que $X \in \mathcal{G}$ um conjunto de riscos, para um número real $\rho(X)$, representando o capital extra que deve ser adicionado a X para torná-lo aceitável.

$$\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$$

A ideia é que ρ quantifica o risco X : grandes valores de $\rho(X)$ nos diz que X é “perigoso”. Especificamente, se X é uma perda possível de um portfólio sob um horizonte de tempo, interpretamos $\rho(X)$ como a quantia de capital que deve ser adicionada ao seu portfólio para que ele se torne aceitável para um controle interno ou externo. Neste caso, $\rho(X)$ é o capital em risco do portfólio. Medidas de risco são usadas para determinar provisões e requisitos de capital para evitar a insolvência (ver Panjer (2006)).

Várias medidas de risco já foram propostas no ramo da atuária e das finanças, sendo que a escolha da medida apropriada para quantificar os riscos das seguradoras continua sendo objeto de debate. Recentemente, conforme Denuit et al. (2005), emergiram sofisticadas teorias sobre estas medidas como forma de determinar os requisitos de capital para os detentores de carteira de risco. A forma funcional e as propriedades fundamentais das medidas de risco veem sendo estudadas na literatura atuarial desde 1947 (Von Neumann e Morgenstern, 2007), sob a forma de princípio de cálculo de prêmio.

De forma ampla, as medidas de riscos são classificadas em dois tipos. Medidas que caracterizam a cauda da distribuição de probabilidade acumulada das perdas, sendo relacionadas com a solvência, e medidas que avaliam a parte central da distribuição, sendo relacionadas ao desempenho. O foco deste trabalho é nas medidas de risco baseadas na distribuição de perdas possíveis futuras, uma vez que estas perdas são objeto central de interesse de um gerenciamento de riscos. Dentre as principais medidas de risco conceituadas na literatura, iremos abordar sobre: probabilidade de ruína (*ruin probability* - PR), valor em risco (*value*

at risk - VaR), valor em risco na cauda (*tail value at risk* - TVaR) e o custo esperado da perda (*expected policyholder deficit* - CEP). Não consideramos fundamentalmente, nenhuma destas necessariamente superiores do que as outras, sendo mais importante esclarecer quais conclusões podem ou não ser desenhadas com o uso de uma medida de risco em particular.

Em se tratando de Solvência II, segundo Comissão Europeia (2006):

“O novo regime de solvência irá atribuir um montante de capital para o perfil de risco da empresa, o que corresponde exatamente à definição de uma medida de risco. É essencial definir uma medida de risco clara, uma vez que servirá como referência para a fórmula-padrão e para diversos modelos internos (total ou parcial) de que as empresas podem desenvolver, sendo que ambos os requisitos de capital, o SCR e o MCR, devem refletir o padrão de risco da empresa. A medida de risco servirá então como um benchmark comum e garantirá a coerência entre a abordagem padrão e as individuais.”

3.1 Coerência das Medidas

A ideia de coerência das medidas de risco foi introduzida por Artzner et al. (1999), que definiu alguns axiomas que são considerados como características desejáveis às medidas de risco.

Seja \mathcal{G} o conjunto de todos os riscos e neste conjunto definimos os seguintes axiomas:

Axioma 1. Subaditividade Para todo X_1 e $X_2 \in \mathcal{G}$,

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2).$$

Essa propriedade traz a ideia de que uma fusão de riscos não traz riscos extras.

Axioma 2. Homogeneidade positiva Para qualquer constante $c \geq 0$ e todo $X \in \mathcal{G}$,

$$\rho(cX) = c\rho(X).$$

Um risco como por exemplo a taxa de retorno, multiplicada por uma constante, como alguma correção monetária, deve ser o mesmo que multiplicar esta constante pelo risco individual.

Axioma 3. Monotonocidade Para todo X_1 e $X_2 \in \mathcal{G}$ com $X_1 \leq X_2$, temos

$$\rho(X_1) \leq \rho(X_2).$$

Caso um ativo X_1 apresente retornos menores em relação a outro ativo X_2 , esse ativo X_1 deve possuir sempre risco menor em relação a X_2 .

Axioma 4. Invariância Transladada Para todo $X \in \mathcal{G}$ e toda constante real c , temos que

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c.$$

Adicionando um ativo livre de risco c em um portfólio existente não modifica o risco. Por exemplo, quando focado na adequação de capital, adicionar um capital a uma companhia não irá mudar o risco do portfólio.

Desta forma, Artzner et al. (1999) definiram que uma medida de risco que satisfaz estes quatro axiomas é chamada de coerente. Vale ressaltar que a coerência é definida em relação a um conjunto de axiomas, e esse conjunto não é universalmente aceito. Modificando o conjunto de axiomas considerados desejáveis conduz a outra medida de risco coerente.

3.2 Probabilidade de Ruína

A ruína corresponde ao pior cenário que o órgão regulador deseja evitar. Sob essa perspectiva, diferentes situações podem ser vistas como inaceitáveis. O trabalho da Comissão Europeia (2006) apresenta um pouco desta discussão, mostrando possíveis situações de ruína, nas quais a ocorrência da ruína pode variar de acordo como ela é definida, em relação a qual parte do ativo e do passivo deve ser levada em consideração e mostra diferentes definições:

- Definição 1 (presente definição do projeto Solvência II): “A ruína ocorre quando a quantidade de ativos admissíveis é inferior ao montante das provisões técnicas.”

- Definição 2 (proposta CEIOPS): “A ruína ocorre quando a quantidade de capital disponível cai abaixo de zero, ou seja, quando os ativos já não excedem provisões técnicas e outros passivos (na medida em que não são tratados como capital disponível).”

- Definição 3: “A ruína ocorre quando a quantidade de ativos é menor do que a soma dos passivos *seniors* (por exemplo: passivos fiscais, segurança social, e pessoal) e provisões técnicas.”

- Definição 4: “A ruína ocorre quando a quantidade de capital elegível (conforme definido para efeitos de supervisão) cai sob um piso absoluto (por exemplo, piso MCR absoluto, ainda a ser definido).”

Desta forma, assumindo que o evento ruína tenha sido definido, o nível de capital é estabelecido de modo que há alguma probabilidade fixa que os ativos A serão menores do que o valor realizado de passivo L , o que significa que há alguma probabilidade não nula de que a seguradora irá tornar-se insolvente; isto é, a probabilidade que o capital $U = A - L$ seja negativo é maior que zero e então $\epsilon = P(U < 0) = P(A < L) > 0$. Portanto, a probabilidade

de ruína ϵ é a probabilidade de que o valor real das dívidas passe a ser superior ao valor dos ativos e a seguradora entrará em ruína. A probabilidade de que a seguradora irá permanecer solvente é $1 - \epsilon$.

Barth (2000) compara as medidas de risco probabilidade de ruína e custo esperado da perda sobre a ótica de capital baseado em riscos, que na prática podem modelar ativos e passivos estocásticos, porém no trabalho ele considera os ativos como sendo fixos. Quando o valor relativo dos ativos sobre as obrigações previstas ($A/\mathbb{E}(L)$) aumenta, diminui o valor de ϵ . Para exemplificar, Barth assumiu uma distribuição de probabilidade lognormal para L , em que o valor esperado da taxa de crescimento de L é zero e o desvio-padrão da taxa de crescimento é de 0,25, e assim as probabilidades da ruína são apresentadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Capital baseado em risco estabelecido por meio da abordagem da probabilidade de ruína

A	$\mathbb{E}(L)$	$\mathbb{E}(U)$	$P(A > L)$	$P(A < L)$
1	1	0	50,00%	50,00%
1,1	1	0,1	35,15%	64,85%
1,2	1	0,2	23,29%	76,71%
1,3	1	0,3	14,70%	85,30%
1,4	1	0,4	8,92%	91,08%
1,5	1	0,5	5,24%	94,76%
1,6	1	0,6	3,01%	96,99%

Partindo destes pressupostos, quando os ativos são definidos como igual ao valor esperado dos passivos, ou seja, $A = \mathbb{E}(L)$, existe uma chance de 50% que o valor real das dívidas poderá ultrapassar os ativos e uma chance de 50% que os ativos excederão o valor do passivo. Quando os bens, hoje, são iguais a 1,5 vezes o valor esperado do passivo, a probabilidade de que o valor real das dívidas será superior a 1,5 é 5,24%. Se o padrão de risco é definido para exigir que a probabilidade de ruína seja superior a 5,24%, a seguradora deve deter o capital equivalente a pelo menos metade do seu passivo. Desta forma, quanto maior a proporção ativo/passivo, menor será a probabilidade de insolvência da seguradora. Deve-se então, atingir uma proporção ideal referente à probabilidade de ruína desejada.

3.3 Custo Esperado de Perda

Na figura abaixo (Figura 3.1) são ilustradas (em forma de esboço) duas distribuições de probabilidade com mesmo valor para a probabilidade de ruína de 0,5%. Porém, caso a ruína ocorra, no caso da distribuição 1, existem grandes chances de que esta ruína assuma valores muito baixos, sendo assim muito mais grave do que uma possível ruína com a distribuição de probabilidade 2. Podemos concluir assim que a probabilidade de ruína pode não ser uma

boa medida para quantificar a exposição as perdas, pois não é suficiente medir se a perda ocorre ou não, deve-se levar em consideração a severidade.

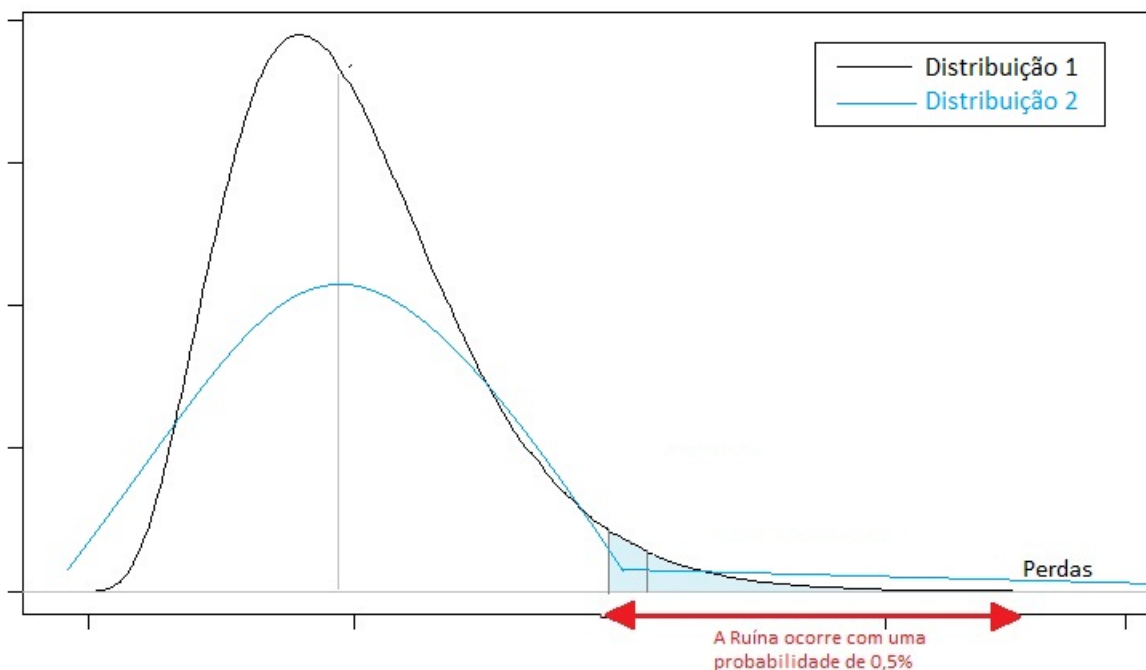


Figura 3.1: Representação de duas distribuições de probabilidade com mesmo valor para probabilidade de ruína ϵ .

A medida de risco denominada custo esperado da perda (CEP) considera não somente a probabilidade de ruína, mas também a perda esperada no evento de ruína. Essa mensuração também é chamada de Déficit Esperado do Segurado (*Expected Policyholder Deficit*), pois pode ser vista como o valor devido aos segurados, ou seja, o valor esperado da diferença entre a quantia que deveria ser paga ao segurado e a quantia efetivamente paga. Nos últimos anos, como explicado por Barth (2000), a metodologia CEP foi adotada como base de parâmetros de risco nos modelos de adequação de capital, nas mais tradicionais empresas classificadoras de risco, a AM Best e a Standard Poor's.

Ainda de acordo com Barth (2000), o custo esperado da perda é definido como o custo esperado de uma insolvência, caso ela ocorra. Este custo esperado é desenvolvido através da multiplicação da probabilidade de ocorrer uma insolvência pelo custo médio da insolvência, se ela realmente ocorrer. Isto é semelhante à fórmula de seguro básico para o desenvolvimento de um prêmio puro: gravidade vezes a frequência é igual ao custo médio da perda. A frequência é a probabilidade de ocorrer uma insolvência e a gravidade é o custo esperado de insolvência, assumindo que, de fato, ocorra. No presente contexto o CEP é:

$$CEP = \mathbb{E}(\max(-U, 0))$$

Butsic (1994) propôs o uso do CEP para determinar requisitos de capital baseado em risco e também apresenta um exemplo de que a probabilidade de ruína pode ser uma medida inadequada para políticas públicas. O CEP pode ser aplicado igualmente em qualquer elemento de risco, tanto para ativos quanto para passivos. Para ajustar a escala de diferentes tamanhos de riscos, a taxa CEP é usada como a medida básica de segurança do segurado. A taxa CEP denotada por d é dada por $d = \frac{CEP}{L}$.

Posteriormente, Barth (2000) estendeu o trabalho de Butsic (1994), mostrando que o CEP é um avanço do conceito de probabilidade de ruína, porque leva em conta a magnitude do déficit e revela assim mais informações sobre a cauda direita da distribuição. Barth (2000) mostra que uma diferença existente entre o padrão de capital definido usando a probabilidade de ruína e o padrão de capital usando o CEP é o processo de cálculo. Diferentemente do capital requerido usando a PR, a taxa CEP não pode ser calculada diretamente e sim iterativamente. Quando há o aumento de capital, tanto a probabilidade de ruína quanto o seu custo médio mudam. Sob a abordagem da taxa CEP, o capital aumenta até que o produto da frequência vezes severidade seja igual a um percentual fixo de $\mathbb{E}(L)$. Em contraste, sob a abordagem PR, o capital é adicionado até que ϵ alcance um valor predeterminado. Assim, o capital requerido sob a abordagem da ruína pode ser resolvido diretamente porque apenas o valor de ϵ é incorporado diretamente na equação.

3.4 Valor em Risco na Cauda

Outra medida de risco muito usada no setor de seguros é o valor em risco (VaR), para mais detalhes veja Jorion (2007). Formalmente, dado um risco X e a probabilidade $p \in (0, 1)$, e F_x estritamente crescente, $VaR_p(X)$ é definido como sendo o p -quantil da variável aleatória X , ou seja,

$$VaR_p(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq p\} = F_X^{-1}(p).$$

Segundo Jorion (2007), o VaR sintetiza a maior (ou pior) perda esperada dentro de determinados períodos de tempo e níveis de confiança. Partindo desse conceito, vemos que os primeiros passos para o cálculo do VaR envolvem a escolha do horizonte de tempo e do nível de confiança. O valor em risco respeita todas as propriedades de uma medida de risco coerente, com exceção da sub-aditividade. Assim, em geral, o VaR possui a propriedade de que o VaR de uma soma pode ser maior do que a soma dos VaRs. Um possível aspecto prejudicial da falta de sub aditividade é a de que o risco de um sistema de gestão descentralizada pode falhar porque VaR calculados para carteiras individuais podem não ser somados para

produzir um limite superior para o VaR da carteira combinada.

Para Denuit et al. (2005), outra restrição significativa desta medida é que não se obtêm qualquer informação sobre o comportamento das perdas, ou seja, a forma da cauda da distribuição. Esta é uma lacuna considerável já que na prática um regulador não se preocupa apenas com a frequência de inadimplência, mas também com a gravidade da mesma .

Além disso, as dificuldades em controlar e otimizar o VaR em carteiras com retornos não normais e não log-normais (Rockafellar e Uryasev, 2002), tem levado os pesquisadores a procurar por medidas de risco baseadas em quantis. Portanto, é conveniente utilizar outra medida de risco, chamada de Valor em Risco na Cauda. Para evitarmos ambiguidades e convenção de notações, iremos restringir nossas considerações apenas para as distribuições contínuas.

Definição: (Panjer, 2006) Seja X uma variável aleatória com esperança. O valor em risco na cauda de X ao nível de confiança p , denotado $TVaR_p(X)$, é a perda esperada dado que esta perda excede o p -quantil da distribuição de X .

De forma simples, podemos escrever $TVaR_p(X)$ para a variável aleatória X como

$$\begin{aligned} TVaR_p(X) &= \mathbb{E}(X|X > x_p) \\ &= \frac{\int_{x_p}^{\infty} x dF(x)}{1 - F(x_p)} \end{aligned}$$

onde $F(x)$ é a função de distribuição acumulada de X . Adicionalmente, para as distribuições contínuas, se a quantia acima é finita, podemos usar a integração por parte e reescrever

$$\begin{aligned} TVaR_p(X) &= \frac{\int_{x_p}^{\infty} x f(x) dx}{1 - F(x_p)} \\ &= \frac{\int_p^1 VaR_u(X) du}{1 - p}. \end{aligned}$$

Assim, TVaR pode ser visto como a média de todos os valores de VaR acima do nível de confiança p . Isso significa que o TVaR nos diz muito mais sobre a cauda da distribuição do que o VaR sozinho. Finalmente, TVaR pode ser escrito também como

$$\begin{aligned} TVaR_p(X) &= \mathbb{E}(X|X > x_p) \\ &= x_p + \frac{\int_{x_p}^{\infty} (x - x_p) dF(x)}{1 - F(x_p)} \\ &= VaR_p(x) + e(x_p), \end{aligned}$$

onde $e(x_p)$ é a média da função de excesso da perda, ou seja, $e(x_p) = \mathbb{E}((X - x_p)^+)$.

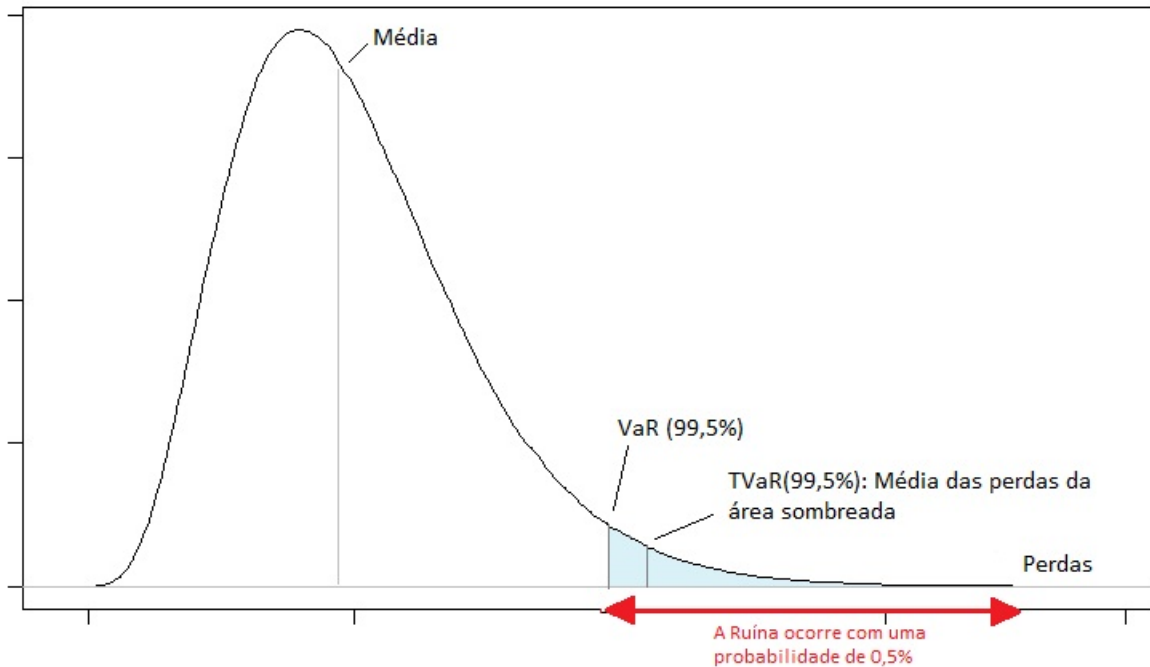


Figura 3.2: Representação da definição do VaR e do TVaR.

Assim, TVaR é maior do que o correspondente VaR pela média do excesso de toda a perda que excede o VaR, conforme podemos visualizar na Figura 3.2. A linha representa a distribuição das perdas. Se considerarmos $\alpha = 0,5\%$, ou seja, a ruína ocorre com uma probabilidade de 0,5%, o TVaR é a média das perdas da área sombreada, o que está acima do VaR.

Sob outro ponto de vista, por definição, um VaR de 100 significa que a probabilidade da ruína ocorrer na próxima unidade de tempo adotada será de $\alpha\%$. O VaR permite à companhia avaliar com precisão a probabilidade do cenário adverso, sabendo o montante inicial de seus fundos. Por outro lado, se assumirmos um TVaR de 115, significa que no pior cenário (as $\alpha\%$ das situações em que a ruína ocorre nos próximos x anos), a companhia irá perder, em média, 115. Desta forma, se a empresa detém 115 da capital, ela deverá, portanto, sobreviver aos cenários de ruína em aproximadamente metade da vezes.

O TVaR é uma medida coerente (para detalhes Artzner et al. (1997)). Deste forma, ao utilizá-lo, não nos deparamos com o problema da subaditividade do VaR. Entretanto, existem também desvantagens no uso do TVaR. O VaR é mais simples de ser implementado e de ser explicado e já é difundido no setor financeiro e de seguros enquanto o TVaR requer uma base matemática maior e é conhecido apenas onde se utilizam abordagens mais avançadas.

É importante ressaltar que o TVaR também é conhecido como *Conditional Value at Risk* (CVaR) e *Expected Shortfall*. Entretanto, quando a distribuição não é contínua, CVaR, Expected Shortfall e TVaR podem ser diferentes.

Comparativamente ao CEP, temos

$$TVaR_p(X) = VaR_p(X) + \frac{CEP(VaR_p(X))}{1 - p}.$$

Capítulo 4

Abordagem Atuarial para a Solvência

4.1 O Modelo Clássico de Riscos Atuariais

Primeiramente, iremos definir alguns conceitos utilizados neste trabalho, que podem ser utilizados tanto para seguros vida quanto para não vida. Considere uma companhia seguradora que comercializa seguros, como por exemplo seguros de vida ou de um automóvel. Os segurados pagam uma certa quantia à seguradora que denominamos prêmio, para que esta assuma a responsabilidade de um determinado risco. Este risco é o evento incerto ou de data incerta que independe das partes contratantes e contra o qual é feito o seguro. O acontecimento deste evento previsto e coberto no contrato é denominado sinistro. A apólice é o instrumento do contrato de seguro pelo qual o segurado repassa à seguradora a responsabilidade sobre os risco. Além disso, o segurador, com o intuito de diminuir sua responsabilidade na aceitação de um risco, pode optar por ceder parte de sua responsabilidade e de seu prêmio recebido para uma resseguradora.

Utilizando como base o trabalho de Dickson e Waters (1992), apresentamos agora um modelo clássico de risco. Vamos considerar um contrato de seguro de curto prazo cobrindo um determinado risco. Entendemos por risco uma apólice única ou um grupo específico de apólices. Para simplificação, vamos considerar um contrato de seguro em um tempo fixo $(0, T]$ sendo $T = 1$ ano. A variável aleatória S denota os sinistros agregados pagos por um segurador no ano correspondente ao risco. Seja N o número de sinistros em $(0, T]$ e X_1, X_2, \dots, X_N os sinistros correspondentes. Então

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

é a soma acumulada dos sinistros. Assumimos que:

1. O montante de um determinado sinistro individual não é afetado pelo montante de qualquer outro sinistro individual.

2. A distribuição do montante dos sinistros individuais não se altera em uma apólice.

Assim, em termos de probabilidade:

1. N e X_1, X_2, \dots são independentes.
2. X_1, X_2, \dots são independentes.
3. X_1, X_2, \dots têm a mesma função de distribuição G .

Essa decomposição de S nos permite considerar o número de sinistros e o montante de sinistros separadamente, uma vez que os fatores que afetam N e X podem ser diferentes. Um exemplo disso são os seguros de automóveis. Um período prolongado de tempo com condições climáticas ruins pode ter um efeito significativo no número de sinistros, mas pouco efeito na distribuição do valor dos sinistros individuais. Por um outro lado, a inflação pode ter um efeito significativo no custo do reparo de carros, enquanto a distribuição do número de sinistros individuais não se altera com esta mudança.

O modelo descrito acima contém simplificações quando comparados com uma operação de seguros da vida real. O primeiro é que geralmente assumimos que os momentos e/ou as distribuições de N e de X_i são certamente conhecidos. Na prática, eles seriam provavelmente estimados de uma base de dados utilizando alguns métodos estatísticos. Uma outra simplificação é que assumimos que, ao menos implicitamente, os sinistros são determinados assim que o acidente que causou o sinistro ocorre, desta forma, os lucros do segurador são conhecidos ao final do ano. Na prática, ocorrerá pelo ao menos algum atraso na determinação dos sinistros e em alguns casos este atraso pode perdurar por alguns anos. Este fato é especialmente verdadeiro quando a extensão da perda é difícil de se determinar, por exemplo se será algo a ser decidido pelos meios legais.

Para determinarmos os primeiros momentos de S a partir deste modelo clássico, iremos utilizar duas propriedades da esperança condicional. Para qualquer variável aleatória X e Y para qual os momentos apropriados existam, temos que

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$$

e

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(\sigma^2(X|Y)) + \sigma^2(\mathbb{E}(X|Y)).$$

Desta forma, podemos estabelecer

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(S|N)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n | N = n) P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbb{E}(X) P(N = n).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X), \quad (4.1)$$

o que nos diz que o valor esperado do montante de sinistros agregados é o produto do número esperado de sinistros e o valor esperado do montante individual. E de maneira similar, utilizando a propriedade da esperança condicional obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma^2(S) &= \sigma^2(\mathbb{E}(S|N)) + \mathbb{E}(\sigma^2(S|N)) \\
&= \sigma^2(\mathbb{E}(X)N) + \mathbb{E}(N\sigma^2(X)) \\
&= \sigma^2(X)\mathbb{E}(N) + \sigma^2(N)\mathbb{E}(X)^2.
\end{aligned}$$

Em relação à função de geradora de momentos (FGM), que por definição é $M_s(t) = \mathbb{E}(e^{tS})$, utilizando as propriedades da esperança condicional

$$M_s(t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{tS}|N)). \quad (4.2)$$

Temos que $\mathbb{E}(e^{tS}|N) = \mathbb{E}(e^{t\sum_{i=1}^N X_i})$ e como X_1, X_2, \dots, X_N são variáveis aleatórias independentes,

$$\mathbb{E}(e^{t\sum_{i=1}^N X_i}) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^N e^{tX_i}\right),$$

e como X_1, \dots, X_N são identicamente distribuídos, eles possuem FGM iguais, então

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^N e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^N \mathbb{E}(e^{tX}) = \prod_{i=1}^N M_X(t) = (M_X(t))^N$$

e assim

$$\mathbb{E}(e^{tS}|N) = (M_X(t))^N. \quad (4.3)$$

Substituindo (4.3) em (4.2)

$$M_S(t) = \mathbb{E}(M_X(t)^N) = \mathbb{E}(e^{N \log M_X(t)}) = M_N(\log M_X(t))$$

onde M_N é a função geradora de momentos de N . O coeficiente de assimetria pode ser obtido a partir da FGM usando a fórmula

$$\mathbb{E}((S - E(S))^3) = \frac{d^3}{dt^3} \log(M_S(t))|_{r=0}.$$

4.2 Exemplo de Solvência Utilizando Monte Carlo

Consideramos aqui o modelo de um período para o capital próprio U da seguradora

$$U = A(1 + r) - (S + B), \quad (4.4)$$

em que A representa o valor do ativo da seguradora no tempo $t = 0$ e $r + 1$ denota a taxa de retorno estocástica dos investimentos da seguradora, sendo $r + 1$ representado por R . O termo $S + B$ representa o passivo no tempo $t = 1$, sendo S o valor de mercado dos sinistros líquidos depois do resseguro e B as despesas administrativas, que são determinísticas. Maiores detalhes são apresentados no capítulo 6.

Neste modelo, $S = \sum_{i=1}^N X_i$ e, conforme a seção anterior, podemos assumir separadamente distribuições de probabilidade para r , X e N (A e B são determinísticos). O objetivo desta dissertação é encontrar as linhas de solvência, que são as curvas da esperança do retorno dos investimentos $\mathbb{E}(r)$ em função do seu desvio padrão $\sigma(r)$. Ao aplicarmos a abordagem da medida de risco probabilidade de ruína no modelo, procuramos

$$\epsilon = P(U < 0) = P(A(1 + r) < S + B).$$

Logo, nos deparamos com a dificuldade de acharmos estas curvas de solvência de forma exata, tanto para a aplicação da probabilidade de ruína quanto para as medidas de risco CEP e TVaR. Como alternativa, propomos duas abordagens: a aproximação normal power e a gama transladada. As aproximações serão definidas no capítulo 5 e a resolução do modelo por meio das aproximações no capítulo 6.

A seguir, exploramos a solução para a equação (??) utilizando o método Monte Carlo. Para a utilização do método, supomos $r \sim N(\mu(r), \sigma^2(r))$ e os parâmetros não foram fixados, eles foram obtidos através das simulações. Em relação ao passivo ($S + B$), não fizemos suposições diretamente para N e X , mas assumimos que S possui uma distribuição gama, sendo denotado $S \sim Gama(\alpha, \beta)$ e, por simplificação, consideramos os parâmetros $\alpha = 1$ e

$\beta = 2$, logo

$$\mathbb{E}(S) = \alpha/\beta = 1/2, \quad \sigma^2(S) = \alpha/\beta^2 = 1/4 \quad \text{e} \quad \gamma(S) = 2/\sqrt{\alpha} = 2 > 0,$$

ou seja, S é assimétrica.

Em relação a parte determinística, para facilitar, assumimos $B = 0$. Para o valor dos ativos, temos que se A for pequeno, a ruína acontece com uma probabilidade grande. Por consequência, para este modelo, precisamos fixar A suficientemente grande, e no melhor cenário teríamos que $\sigma^2(r) = 0$ e $r_0 = \mu(r)$ seria constante. Neste cenário, para que a seguradora seja solvente com uma grande probabilidade: $0,95 = 1 - \epsilon$, precisamos que seja satisfeita a condição:

$$P(A(1 + r_0) - S \leq 0) = \epsilon$$

Se F_S é a função de distribuição de S podemos escrever esta condição como $F_S^{-1}(1 - \epsilon) = A(1 + r_0)$, e $F_S^{-1}(1 - \epsilon) = 1,498$. Se $r_0 \geq 0$ basta que $1,498 = A(1 + r_0)$ para ter essa condição satisfeita. Assim, podemos fixar $A = 1$ e $r_0 = 0,498$, ver (4.5) abaixo.

Nas seguintes seções vamos a encontrar as curvas de solvência para este modelo usando simulações Monte Carlo, utilizando as três medidas de risco. Os códigos do software R Team (2011) que foram utilizados para as simulações e para a construção do gráfico podem ser verificados no Apêndice B.

4.2.1 Curva de Solvência para a Probabilidade da Ruína

Foram realizadas $M = 1000$ simulações de $U = A(1 + r) - S$ para cada cada valor de $\mu(r)$ e $\sigma^2(r)$. Desta forma, encontramos os valores aproximados de $\mu(r)$ e $\sigma^2(r)$ que tornem os valores da probabilidade da ruína, $P(U \leq 0)$, mais próximos de $\epsilon = 0,05$. Obtivemos o seguinte gráfico:

4.2.2 Curva de Solvência para o CEP

Para encontrar a curva de solvência correspondente ao CEP, precisamos fixar o valor do mesmo que será usado. Este valor é constante, para obtê-lo vamos a fixar $\sigma^2(r) = 0$, que é o valor inicial da curva de solvência. Usando a curva de solvência da seção anterior obtemos o valor de $\mu(r) = r_0 = 0,498$ inicial.

Realizamos $M = 1000$ simulações de $U = A(1 + r_0) - S$ para obter o valor de CEP = $\mathbb{E}[\max(-U, 0)] = 0,0015$. Em seguida, encontramos os valores de $\mathbb{E}[\max(-U, 0)]$, usando simulações Monte Carlo para diferentes $\mu(r)$ e $\sigma^2(r)$, e escolhemos os que que estão mais próximos do CEP, obtivemos este gráfico:

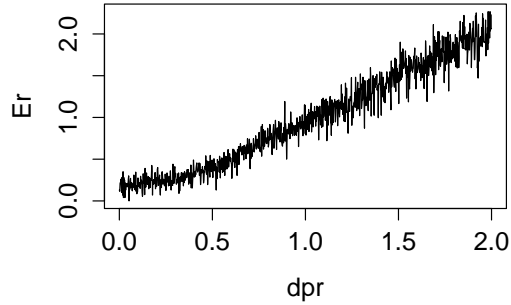


Figura 4.1: Curva de solvência para a Probabilidade de Ruína, $\epsilon = 0,05$

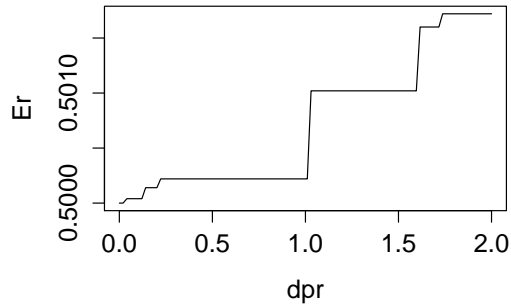


Figura 4.2: Curva de solvencia para a CEP.

4.2.3 Curva de Solvência para a TVaR

Por outro lado, a simulação para a abordagem do valor em risco na cauda inicialmente calcula o valor em risco da distribuição de U , e depois o valor esperado de $-U$, dado que U é menor que o VaR. Assim encontra os parâmetros μ e σ que minimizam a distância entre o TVaR calculado e o TVaR do exemplo.

Como antes, precisamos fixar o valor do TVaR_q . Fixemos $q = 0,005$, lembrando que $\text{TVaR}_q = \mathbb{E}[-U|U \leq \text{VaR}_q(U)]$, precisamos achar primeiro $\text{VaR}_q(U) = F_U^{-1}(q)$. Usando $r_0 = 0.498$ e $\sigma^2(r) = 0$, temos que $U = (1 + r_0) - S$ vamos mostrar mas abaixo que:

$$F_U^{-1}(y) = A(1 + r_0) - F_S^{-1}(1 - y) \quad (4.5)$$

Usando (4.5) vemos que $\text{VaR}_q(U) = (1 + r_0) - F_S^{-1}(0,995) = (1 + r_0) - 2,65 = -1,152$.

Para a prova de (4.5) observe que:

$$\begin{aligned}
 F_U(x) &= P(U \leq x) = P(A(1+r_0) - S \leq x) \\
 &= P(A(1+r_0) - x \leq S) \\
 &= 1 - F_S(A(1+r_0) - x)
 \end{aligned}$$

Fazendo $y = F_U(x)$ temos que $x = F_U^{-1}(y)$ logo $y = 1 - F_S(A(1+r_0) - x)$ e $1 - y = F_S(A(1+r_0) - F_U^{-1}(y))$ então:

$$\begin{aligned}
 F_S^{-1}(1 - y) &= A(1+r_0) - x \\
 &= A(1+r_0) - F_U^{-1}(y)
 \end{aligned}$$

Usando $\text{VaR}_q(U) = -1,152$ simulamos $M = 1000$ cópias de $U = A(1+r_0) - S$ para obter, via Monte Carlo, o valor de $\text{TVaR}_q = \mathbb{E}[-U|U \leq -1,152] = 1,52058$. Lembre que este valor não muda e foi obtido usando $r_0 = \mu(r) = r_0 = 0,713$ constante, com $\sigma^2(r) = 0$, os outros valores de $\mu(r)$ e $\sigma^2(r)$ devem dar o mesmo valor de TVaR_q .

Depois achamos os valores de $\mathbb{E}[-U|U \leq -1,152]$, usando simulações Monte Carlo para diferentes $\mu(r)$ e $\sigma^2(r)$, e escolhemos os que estão mais próximos do $\text{TVaR}_q = 1,52058$, obtivemos este gráfico:

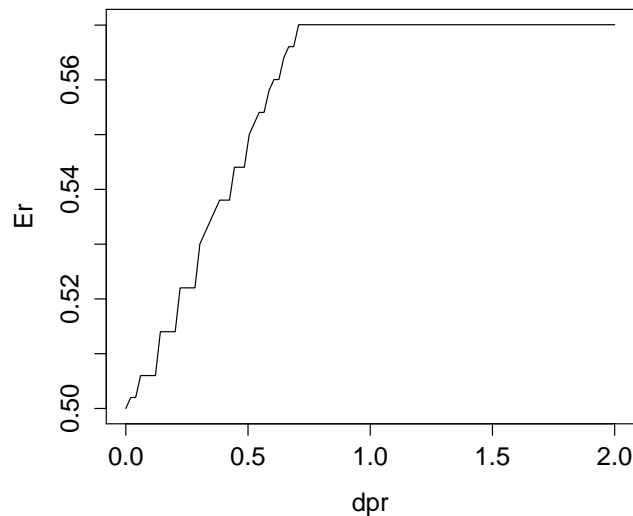


Figura 4.3: Curva de solvência para a TVaR.

Capítulo 5

Aproximações às Distribuições Agregadas

Como explicado em Dickson e Waters (1992), a fórmula exata de calcular a distribuição dos sinistros agregados $S = \sum_{i=1}^N X_i$ é uma ferramenta muito útil, mas ainda possui alguns inconvenientes. É possível, em alguns casos, descobrir de forma bem simples a distribuição de S , como por exemplo, quando todos os sinistros têm o mesmo valor, mas as premissas serão muito restritivas para que seja um modelo de interesse prático. O mesmo problema ocorre na obtenção da forma exata para o nosso modelo $U = A(1+r) - (S+B)$. No Capítulo 4, mostramos que utilizar o método Monte Carlo pode requerer um tempo computacional considerável.

Segundo Dickson e Waters (1992), umas das razões para a utilização das aproximações para a distribuição de S , como no caso por uma gama ou por uma normal, é que pode ser mais fácil de obter os valores dos quantis. Em alguns casos mais simples, pode ser possível estimar estas probabilidades através de uma tabela. Na literatura, alguns livros conhecidos na atuária abordam a construção de distribuições analíticas como aproximações às distribuições das perdas agregadas de uma seguradora (veja Hogg e Klugman (2009), Panjer e Willmot (1992) e Klugman et al. (2012)).

5.1 Aproximação Normal

A alternativa mais simplificada destas aproximações seria pela aproximação normal, que surge por meio do Teorema do Limite Central definido abaixo:

Teorema do Limite Central - TLC *Seja X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância $\sigma^2 > 0$, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq n\mu + x\sigma\sqrt{n} \right) = \Phi(x).$$

Em virtude do Teorema Central do Limite, aproximamos S por uma distribuição normal

de forma que os dois primeiros momentos coincidam, ou seja, tenham a mesma média e variância de S .

$$F_S(x) = P\left(\frac{S - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Conforme Dhaene (2004), em geral, esta aproximação não é satisfatória para a prática de seguros, onde existe uma necessidade de aproximações mais refinadas, especialmente nas caudas, que reconhecem explicitamente a probabilidade substancial de grandes perdas, enquanto na distribuição normal as caudas se comportam como $e^{-\frac{x^2}{2}}$. Mais tecnicamente, o terceiro momento central de S é geralmente maior do que zero, enquanto que para a distribuição normal é igual a zero. Desta forma, a aproximação normal poderá subestimar a $P(S > x)$ para grandes valores de x . Para o ponto de vista do segurador, este é um quesito totalmente indesejável, já que as grandes perdas podem ser bem significantes financeiramente.

No presente trabalho, para o modelo em questão, iremos utilizar estas aproximações para $U = AR - (S + B)$ em vez de S . Por conseguinte, como uma alternativa para a aproximação normal, apresentamos duas aproximações mais refinadas: a aproximação normal power e a aproximação normal da gama transladada. Essas aproximações podem vir a serem muito mais precisas do que a aproximação pelo TCL e em contraste com um procedimento de aproximação numérica, permite o uso de expressões analíticas da medida de risco usada nos modelos de solvência.

5.2 Aproximação Normal Power

A ideia por trás da aproximação normal power tem origem no problema dos momentos, definido no Apêndice A. É uma aproximação simples e pouco complexa. A essência da aproximação normal power é transformar a variável original padronizada assimétrica, $\tilde{X} = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$, em uma variável simétrica $Y \stackrel{d}{=} v(\tilde{X})$, em que v é escolhido para que Y seja uma variável normal padrão ou pelo ao menos aproximadamente isto. Assim, para a função de distribuição de X , $G(x)$, segue que $G(x) \approx \Phi(v(x)) = \Phi(y)$, em que Φ é a função distribuição de uma normal padrão.

$$\tilde{X} = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \stackrel{d}{\approx} \alpha Y^2 + Y + \beta. \quad (5.1)$$

Observação 1: Se $\epsilon = G(0)$, então $v(0) = \Phi^{-1}(\epsilon) = z_\epsilon$.

Como $E\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = 0$, $\mathbb{E}(Y) = 0$ e $\mathbb{E}(Y^2) = 1$,

$$\mathbb{E}(\alpha Y^2 + Y + \beta) = \alpha \mathbb{E}(Y^2) + \mathbb{E}(Y) + \beta = \alpha + \beta = 0$$

Como $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y^3) = 0$, temos

$$\mathbb{E}((\alpha Y^2 + Y + \beta)^2) = \mathbb{E}(Y^2 + \alpha^2 Y^4 + \beta^2 + 2\alpha Y^3 + 2\beta Y + 2\alpha\beta Y^2) = \mathbb{E}(Y^2)$$

e $\gamma(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^3 / \sigma(X)^3$ representa a medida de assimetria de X .

$$\begin{aligned} \gamma(X) &= \mathbb{E}(Y + (\alpha Y^2 + \beta))^3 = \mathbb{E}(Y^3 + 3Y^2(\alpha Y^2 + \beta) + 3Y(\alpha Y^2 + \beta)^2 + (\alpha Y^2 + \beta)^3) \\ &= \mathbb{E}(Y^3 + 3\alpha Y^4 + 3\beta Y^2 + 3\alpha^2 Y^5 + 6\alpha\beta Y^3 + 3\beta^2 Y + \alpha^3 Y^6 + 3\alpha\beta^2 Y^2 + 3\alpha^2\beta Y^4 + \beta^3) \\ &= 3\alpha\mathbb{E}(Y^4) + 3\beta\mathbb{E}(Y^2) \\ &= 9\alpha + 3\beta. \end{aligned}$$

Dado que $\alpha = -\beta$, temos $\beta = \frac{-\gamma(X)}{6}$ e $\alpha = \frac{\gamma(X)}{6}$ e substituindo em (5.1)

$$\tilde{X} \stackrel{d}{\approx} \frac{\gamma(X)}{6} Y^2 + Y - \frac{\gamma(X)}{6}, \quad (5.2)$$

e encontrando as raízes da equação

$$\gamma(X)Y^2 + 6Y - [\gamma(X) + 6\tilde{X}] = 0$$

$$Y = \frac{-6 \pm \sqrt{D}}{2\gamma(X)}, \text{ onde } D = 36 + 4\gamma(X) [\gamma(X) + 6\tilde{X}].$$

Dessa forma, considerando a parte positiva $Y = \frac{-6 + \sqrt{D}}{2\gamma(X)}$ e desenvolvendo, temos

$$\begin{aligned} Y &= \frac{-6 + \sqrt{36 + 4\gamma(X) [\gamma(X) + 6\tilde{X}]}}{2\gamma(X)} \\ &= \frac{1}{\gamma(X)} \left[\sqrt{\gamma(X)^2 + 6\gamma(X)\tilde{X} + 9} - 3 \right] \end{aligned}$$

ou de forma equivalente

$$P\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \leq \tilde{x}\right) \approx \Phi\left(\frac{1}{\gamma(X)} \left[\sqrt{\gamma(X)^2 + 6\gamma(X)\tilde{x} + 9} - 3 \right]\right). \quad (5.3)$$

Alternativamente, para $x \geq 1$

$$P\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \leq x + \frac{\gamma(x)}{6}(x^2 - 1)\right) \approx \Phi(x) \quad (5.4)$$

Conforme Ramsay (1991), como a transformação inversa $v^{-1}(Y)$ aproxima \tilde{X} , devemos esperar que o lado esquerdo e o lado direito da equação (5.2) tenham momentos aproximadamente iguais. Entretanto, isto não ocorre pois

$$E\left(Y + \frac{\gamma(X)}{6}(Y^2 - 1)\right)^k = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 1 \\ 1 + \frac{\gamma(X)^2}{18}, & \text{se } k = 2 \\ \gamma(X) + \frac{\gamma(X)^3}{27}, & \text{se } k = 3 \end{cases}$$

enquanto

$$E(\tilde{X})^k = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 1 \\ 1, & \text{se } k = 2 \\ \gamma(X), & \text{se } k = 3. \end{cases}$$

Se $\gamma(X)$ é pequeno, os termos $\frac{\gamma(X)^2}{18}$ e $\frac{\gamma(X)^3}{27}$ podem ser desconsiderados, resultando em uma boa aproximação entre os três primeiros momentos do lado esquerdo e do lado direito. Por outro lado, caso $\gamma(X)$ seja grande, a variância e a assimetria do lado direito da equação (5.2) será inflada, levando assim a possíveis aproximações ruins. Assim, essa aproximação é bastante precisa se $0 \leq \gamma(X) \leq 1$, com perda desta precisão à medida que $\gamma(X)$ aumenta.

Adicionalmente, no mesmo artigo, Ramsay (1991) estuda a precisão do modelo que considera apenas até o terceiro momento. Para tanto, ele encontra uma aproximação normal power aproximada “ajustada”, considerando $\tilde{X} \stackrel{d}{=} \alpha Y + \beta(Y^2 - 1)$ ao invés de como realizado pela equação (5.1) e conclui que a diferença entre as duas abordagens é insignificante, ou seja, como a forma atualmente utilizada é mais simples de ser utilizada ela é superior.

Exemplo 5.2.1. (Aplicação da aproximação NP na modelagem dos sinistros)
Para uma determinada seguradora, considere um montante esperado de sinistro total S como sendo 10.000, com desvio-padrão 1.000 e medida de assimetria 1. Para determinarmos o capital necessário para cobrir uma perda com probabilidade de 99,5% :

$$P\left(\frac{S - E(S)}{\sigma(S)} \leq s + \frac{\gamma(S)}{6}(s^2 - 1)\right) \approx \Phi(s),$$

se $s = 2,57$. Assim, para o quantil 99,5% de S , encontramos

$$E(S) + \sigma(S) \left(2,57 + \frac{\gamma(S)}{6}(2,57^2 - 1)\right) = E(S) + \sigma(S)3,50415 = 13504,15.$$

Por outro, para determinarmos a probabilidade de que o capital 13.000 será suficiente para

cobrir as perdas S , mantemos $E(S) = 10.000$, $\sigma(S) = 1000$ e $\gamma(S) = 1$ então

$$P(S > 13000) = P\left(\frac{S - E(S)}{\sigma(S)} > \frac{13.000 - 10.000}{1.000}\right) \approx 1 - \Phi(\sqrt{1 + 18 + 9} - 3) = 1 - \Phi(2,2915)$$

e então, de acordo com a tabela da normal padrão, a probabilidade encontrada é de 1,10%, ou seja, se a seguradora mantiver um capital mínimo requerido de \$13.000, ela se manterá solvente com probabilidade de 98,9%.

Exemplo 5.2.2. (Simulação) Como forma de análise da precisão da aproximação normal power, foram realizadas simulações dos valores de uma distribuição gama com diferentes valores de assimetria (skewness) e conseqüentemente diferentes valores de α . A Figura 5.1 representa em azul os valores da função de densidade simulados de quatro distribuições gama com parâmetros $G(16,5)$, $G(4,5)$, $G(1,5)$ e $G(0.25,5)$, e assim a assimetria γ como 0,5,1,2 e 4, respectivamente, e em vermelho, está representada a aproximação NP. Desta forma, podemos confirmar que para uma distribuição gama, a normal power aproxima bem os dados quando a assimetria é 0,5, mas a aproximação piora de acordo seu aumento, gráficos (2) a (4).

Conforme já visto, a diferença entre a variância da aproximação NP e dos dados é dada por $\frac{\sigma^2(S)}{18}$ e a diferença entre o valor da assimetria $\frac{\sigma^3(S)}{27}$. Assim, para os casos (1) e (2), estas diferenças são de aproximadamente 0.01 e 0.06 para a variância e 0 e 0.04 para a assimetria, o que é relativamente pequeno. Já nos casos (3) e (4), e 0.30 e 2,37 confirmando mais uma vez que a aproximação NP se distancia dos dados quando assimetria dos mesmos aumenta.

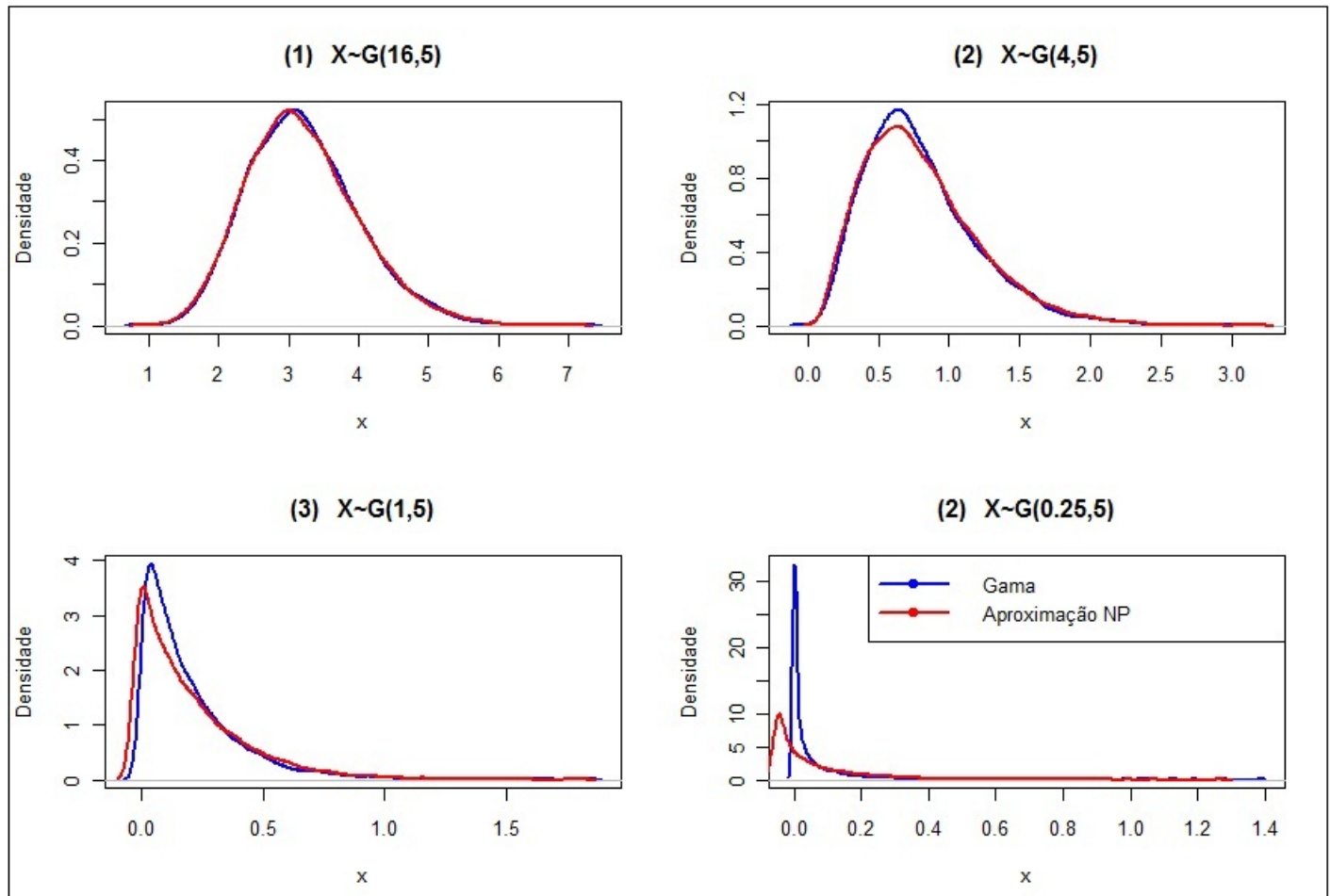


Figura 5.1: Aproximação normal power em dados com distribuição gama.

5.3 Aproximação Gama Transladada

Na seção anterior, conclui-se que a aproximação NP não faz uma boa modelagem quando se afasta da normal, em condições de assimetria e de caudas um pouco mais pesadas. Ademais, de acordo com o descrito em Dhaene (2004), a maior parte das distribuições dos sinistros possuem a mesma forma de uma distribuição gama: são assimétricas à direita ($\gamma > 0$), estão em um intervalo não negativo e são unimodais.

Utilizamos no trabalho a aproximação normal da gama transladada. Neste capítulo iremos apresentar primeiramente a aproximação gama transladada e por último a aproximação normal da gama transladada. A aproximação pela gama é amplamente utilizada para modelagem de S (veja Schmidli (2006)). Chaubey et al. (1998) argumenta que as aproximações analíticas baseadas na gama, gama transladada, gaussiana inversa transladada e uma mistura das duas últimas distribuições geralmente produzem boas aproximações distribuições de sinistros agregados ou distribuições compostas.

Para assumir valores negativos, conforme Dickson e Waters (2002), além dos parâmetros usuais da gama α e β , acrescentamos um terceiro grau de liberdade permitindo uma translação de uma distância x_0 . Assim, aproximamos a função densidade de probabilidade de X pela de $Y + x_0$, em que $Y \sim Gama(\alpha, \beta)$. Escolhemos α , β e x_0 de tal forma que a variável aleatória aproximada tenha os mesmos primeiros momentos que X . Note que agora $Y + x_0$ é apenas uma variável aleatória gama, Y , cujos valores foram transladados por uma quantia negativa ou positiva x_0 .

A aproximação da gama transladada pode ser formulada da seguinte maneira:

$$F_X(x) \approx G(x - x_0; \alpha, \beta),$$

onde

$$G(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} \beta^\alpha e^{-\beta y} dy, x \geq 0. \quad (5.5)$$

Aqui $G(x; \alpha, \beta)$ é a função densidade de probabilidade da gamma. Sabe-se que para a gama transladada, a média $\mu = E(X)$, a variância $\sigma^2 = \sigma^2(X)$ e a assimetria $\gamma = \gamma(X)$, são $\mu = x_0 + \frac{\alpha}{\beta}$, $\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$ e $\gamma = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$, e assim, resolvendo o sistema, os parâmetros devem satisfazer

$$\alpha = \frac{4}{\gamma^2}, \quad \beta = \frac{2}{\sigma\gamma} \quad e \quad x_0 = \mu - \frac{2\sigma}{\gamma}. \quad (5.6)$$

Em comparação aos dois métodos, Seal (1977) criticou o método NP, alegando que a aproximação gama é superior e sugere, para certos casos, que o método NP seja desconsiderado totalmente. Ele conclui a alegação baseado em comparações numéricas obtidas por sete

distribuições diferentes apresentadas em seu trabalho, e afirma também que a superioridade da aproximação pela gama não depende do tamanho de γ .

Posteriormente, Pentikainen (1977) compara valores obtidos de uma distribuição exata com resultados da aproximação NP e gama, por meio de exemplos retirados de situações com diferentes distribuições e assimetrias. Com base nestes resultados, ele afirma que o método normal power resulta em uma precisão satisfatória quando a distribuição não é muito perigosa, ou seja, γ não excede 1 ou, dependendo da precisão demandada, 2. Esse fato já é conhecido (Kaoppi e Ojantakanen (1969) e Pesonen (1969)) e dentro destes limites não foi encontrado diferenças entre as duas abordagens.

Por outro lado, quando há um grande aumento no valor de γ , nenhuma das duas aproximações é suficientemente confiável (como já demonstrado por Kaoppi e Ojantakanen (1969)). Como os dois métodos são baseados apenas nos três primeiros momentos, que são iguais aos correspondentes momentos da distribuição a ser aproximada, não se pode esperar nenhuma grande precisão nestes casos.

Aproximação Normal da Gama Transladada

Para utilizarmos a aproximação gama transladada, precisamos dos valores da função de distribuição da variável aleatória gama, $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Usando a relação $\sqrt{4\beta Y} - \sqrt{4\alpha - 1} \approx N(0, 1)$ para $\alpha \geq \frac{1}{4}$ (veja em Dhaene (2004)), podemos expressar os valores da aproximação em termos da distribuição normal padrão.

Assim, introduzimos a ideia da aproximação normal gama transladada para \tilde{X} segue que

$$P \left[\frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \leq y + \frac{\gamma(X)}{8}(y^2 - 1) - y \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma(X)^2}{16}} \right] \right] \approx \Phi(y). \quad (5.7)$$

O lado direito da desigualdade é escrito como y adicionado de uma correção para a assimetria de X . Assim, quando X é simétrico, ou seja, $\gamma(X) = 0$ esta correção se torna zero, veja o Exemplo 5.3.2.

Exemplo 5.3.1. (Aplicação da aproximação gama transladada na modelagem dos sinistros) Utilizando o Exemplo 5.2.1, para parâmetros que satisfazem (5.6), segue que $\alpha = 4$, $\beta = 0,002$ e $x_0 = 8.000$. Desta forma, para determinarmos o capital necessário para cobrir uma perda com probabilidade de 99,5% e assim $s = 2,57$ por (5.7) segue

$$E(S) + 2,57\sigma(S) + \sigma(S)\frac{\gamma(S)}{8}(2,57^2 - 1) - 2,57\sigma(S) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma(S)^2}{16}} \right] = 13.189.$$

Assim sendo, podemos concluir que, para uma seguradora com estes valores, o modelo resulta em um capital menor do que o necessário se for utilizado a abordagem da aproximação normal

power.

Por outro lado, para determinarmos a probabilidade de que um capital de 13.000 será suficiente para cobrir as perdas S , segue que

$$P(S > 13.000) \approx 1 - \text{Gama}(13000 - 8000; 4; 0,002) = 0,0103.$$

ou seja, se a seguradora mantiver um capital mínimo requerido de \$13.000, ela se manterá solvente com probabilidade de 98,97%. Seguindo a mesma lógica acima, a probabilidade de insolvência neste caso é menor do que utilizando a abordagem NP.

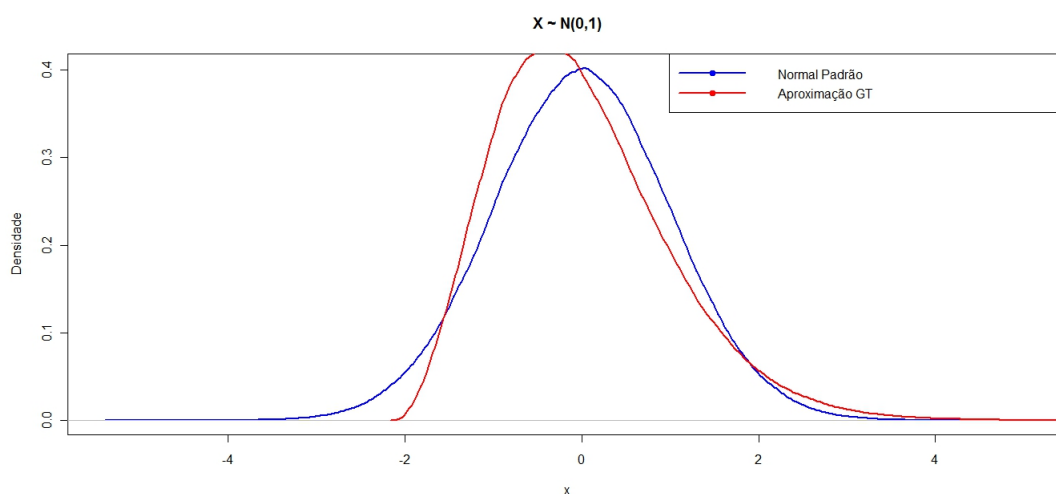


Figura 5.2: Aproximação gama transladada em dados simulados com distribuição normal padrão.

Exemplo 5.3.2. Dado que a gama transladada é uma distribuição assimétrica com suporte no conjunto $[x_0, \infty)$, quando a assimetria da distribuição é próxima de zero, temos que a aproximação gama transladada não capta a cauda esquerda de x_0 . Isso pode ser exemplificado na Figura (5.2). A linha em azul representa a densidade de uma distribuição normal padrão, e a linha vermelha a respectiva aproximação gama transladada.

Capítulo 6

Aproximações das Curvas de Solvência para um Modelo de Capital Próprio

Como forma de mensuração da solvência, o procedimento típico nos modelos usuais é calcular o capital mínimo requerido em um determinado tempo, dado uma determinada medida de risco, um nível de segurança exigido, um horizonte fixo de tempo e valores do ativo, passivo e taxa de retorno. Assim, quando o capital disponível não é suficiente para satisfazer o capital mínimo requerido, a seguradora é obrigada a aumentar o seu capital próprio. Entretanto, em uma situação de solvência fraca, é uma tarefa complicada para a Seguradora, pois ela terá que arrecadar receitas ou diminuir suas despesas. Alternativamente, mudar a localização dos ativos para estar de acordo com o nível de solvência requerido pode ser bem mais fácil de ser alcançado.

Assim, o objetivo principal desse trabalho não é calcular o capital mínimo requerido para uma seguradora, mas sim derivar um desempenho mínimo para a carteira de investimento com base na esperança $\mathbb{E}(R)$ e desvio-padrão $\sigma(R)$ do retorno. A relação funcional que garante este desempenho mínimo é chamada de linha de solvência. As linhas de solvência serão obtidas como resultado deste trabalho, e é a partir delas que podemos analisar que, mantidas as demais variáveis constantes, seguradoras com maior capital próprio irão possuir um maior grau de liberdade para alocação de seus investimentos.

Para tanto, no modelo a seguir, A_i representa o valor do ativo da seguradora no tempo $t = i$ e L_i representa o passivo da seguradora em $t = i$. As dívidas correspondem ao valor de mercado das obrigações. A diferença entre o valor de mercado do ativo A_i e passivos L_i é o capital próprio da seguradora U_i . Assim, temos que

$$U_i = A_i - L_i. \tag{6.1}$$

$R = r + 1$ denotará a taxa de retorno estocástica dos investimentos da seguradora,

$$A_i = A_{i-1}(r + 1). \quad (6.2)$$

Denotamos S_i como o valor de mercado dos sinistros líquidos depois do resseguro em $t = i$ para contratos anteriores a $t = i - 1$. Denotamos B_i como as despesas administrativas da seguradora, que são determinísticas. Assim

$$L_i = S_i + B_i. \quad (6.3)$$

E para $t = 1$, substituindo a equação (6.3) em (6.1), segue que

$$U_1 = A_0R - (S_1 + B_1). \quad (6.4)$$

As linhas de solvência são obtidas a partir da equação (6.4), através do cálculos de $PR(U_1)$, $CEP(U_1)$ e $TVaR(U_1)$. A obtenção de uma solução exata para este modelo é de difícil. Portanto, utilizamos as aproximações normal power e aproximação normal da gama transladada.

Eling et al. (2009) aproximaram, para o tempo $t = 1$, U_1 com uma aproximação normal power e realizaram uma comparação entre as medidas de risco Probabilidade de Ruína (PR), Custo Esperado da Perda (CEP) e Valor em Risco na Cauda (TVaR) com o objetivo de construir modelos de solvência. Este trabalho explora os resultados de Eling et al. (2009) e o estende para a aproximação normal da gama transladada. Cabe ressaltar que, como iremos tratar apenas do caso em que $t = 1$, iremos denotar U_1 , A_0 , S_1 e B_1 como U , A , S e B , respectivamente.

Para a utilização das aproximações propostas, necessitamos dos valores de $\mathbb{E}(U)$, $\sigma^2(U)$ e $\gamma(U)$.

A partir de (6.4) temos que:

1. Primeiro momento:

$$\mathbb{E}(U) = A\mathbb{E}(R) - \mathbb{E}(S) - B.$$

2. Segundo momento:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U - \mathbb{E}(U))^2 &= \sigma^2(U) \\ &= \sigma^2(AR - (S + B)) \\ &= \sigma^2(AR) + \sigma^2(S + B) - 2cov(AR, S + B) \\ &= A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S) - 2Acov(R, S), \end{aligned}$$

e para os casos em que R e S forem independentes¹, temos que:

$$\mathbb{E}(U - \mathbb{E}(U))^2 = A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S).$$

3. Terceiro momento: De acordo com a propriedade de aditividade dos momentos centrais, temos que para $k \leq 3$ a soma do momento central $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^k = \mu_k$ de duas variáveis independentes X e Y é $\mu_k(X + Y) = \mu_k(X) + \mu_k(Y)$. Como o coeficiente de assimetria $\gamma(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)}$, temos que $\mu_3(X) = \sigma^3(X)\gamma(X)$. Assim, considerando R e S independentes, segue que

$$\begin{aligned}\mu_3(U) &= \mu_3(AR - S - B) = \mu_3(AR) - \mu_3(S) \\ \sigma^3(U)\gamma(U) &= \sigma^3(AR)\gamma(AR) - \sigma^3(S)\gamma(S),\end{aligned}$$

e então

$$\gamma(U) = \frac{A^3\sigma^3(R)\gamma(R) - \sigma^3(S)\gamma(S)}{[A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)]^{3/2}}. \quad (6.5)$$

Para o caso em que a taxa de retorno R é simétrica, temos $\gamma(R) = 0$, e assim

$$\gamma(U) = \frac{-\sigma^3(S)\gamma(S)}{[A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)]^{3/2}},$$

mas, em geral, quando não há independência entre R e S , temos o terceiro momento central como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U - \mathbb{E}(U))^3 &= \mathbb{E}((AR - S - B) - (A\mathbb{E}(R) - \mathbb{E}(S) - B))^3 = \mathbb{E}(A(R - \mathbb{E}(R)) - (S - \mathbb{E}(S)))^3 \\ &= A^3\mathbb{E}((R - \mathbb{E}(R))^3) - 3A^2\mathbb{E}((R - \mathbb{E}(R))^2(S - \mathbb{E}(S))) \\ &\quad + 3A\mathbb{E}((R - \mathbb{E}(R))(S - \mathbb{E}(S))^2) - \mathbb{E}((S - \mathbb{E}(S))^3).\end{aligned}$$

¹A taxa de retorno R e o valor dos sinistros S podem possuir correlação, como é o caso dos *credit default swaps*. Os *credit default swaps*, popularmente conhecidos como CDS, foram criados como um tipo de plano de seguros para certa transação financeira grande, sendo uma troca de posições por meio da qual o titular de um crédito paga a uma contraparte garantidora uma taxa anual, que varia na proporção em que oscilam os riscos, em troca de uma proteção devida na ocorrência de um evento pré-definido, sendo, em geral, devida em casos de insolvência, inadimplência ou diminuição de classificação de risco (*rating*). De acordo com Tabak (2011), como esta complexa transferência de risco depende de probabilidades sob as quais os analistas financeiros possuem um entendimento impreciso, tornou-se comum a realização de *hedge*, e assim as instituições passaram a ser compradoras e vendedoras de proteção ao mesmo tempo. Desta forma, a utilização deste seguro passa a estar diretamente relacionada com a taxa de retorno, várias instituições financeiras ficam ligadas umas na outras e uma única inadimplência ou rebaixamento de *rating* pode afetar todas elas.

6.1 Construção das Linhas de Solvência Utilizando a Aproximação Normal Power

Como a normal power é uma distribuição não paramétrica, não especificamos parâmetros para R ou S , precisamos apenas dos três primeiros momentos centrais de U . Distribuições de caudas diferentes da normal podem ser modeladas, pois esta aproximação leva em consideração alguma assimetria na distribuição. Em contraste com um procedimento de aproximação numérica, permite o uso de expressões analíticas das medidas de risco usados no modelo de solvência.

Conforme descrito no capítulo 4, a ideia essencial da aproximação normal power é transformar a variável original padronizada assimétrica, no caso $\tilde{U} = \frac{U - \mathbb{E}(U)}{\sigma(U)}$, em uma variável simétrica $Y \stackrel{d}{=} v(U)$, o que implica que $\tilde{U} \stackrel{d}{=} v^{-1}(y)$ e então

$$\tilde{U} = \frac{U - \mathbb{E}(U)}{\sigma(U)} \stackrel{d}{\approx} Y + \frac{\gamma(U)}{6}(Y^2 - 1). \quad (6.6)$$

6.1.1 Probabilidade de Ruína - PR

Seja ε a probabilidade de ocorrer uma situação de insolvência em $t = 1$:

$$PR = P(U \leq 0) = P(A \leq L) = \varepsilon,$$

ou seja, é a probabilidade de os ativos da resseguradora não serem suficientes para cobrir seus passivos.

Além do mais, $\varepsilon = P(U \leq 0) = P\left(\frac{U - \mathbb{E}(U)}{\sigma(U)} \leq \frac{-\mathbb{E}(U)}{\sigma(U)}\right) = \Phi\left(v\left(-\frac{\mathbb{E}(U)}{\sigma(U)}\right)\right)$. Logo obtemos

$$\frac{-\mathbb{E}(U)}{\sigma(U)} = v^{-1}(z_\varepsilon)$$

Para uma probabilidade de ruína fixa ε , o uso da aproximação normal power nos leva a

$$P(U \leq 0) = P(v(U) \leq v(0)) = \varepsilon.$$

Logo $v(0) = z_\varepsilon$, onde z_ε é o ε -quantil da distribuição normal padrão (veja a observação 1 da seção 5.1). E assim temos que $v^{-1}(z_\varepsilon) = u = 0$. Pela aproximação normal power, sabemos que $v^{-1}(y) \hat{=} y + \frac{\gamma(U)}{6}(y^2 - 1) = \frac{u - \mathbb{E}(U)}{\sigma(U)}$. E substituindo y por z_ε , obtemos

$$v^{-1}(z_\varepsilon) \hat{=} z_\varepsilon + \frac{\gamma(U)}{6}(z_\varepsilon^2 - 1),$$

e já que $P(U \leq 0) = \varepsilon$, temos que

$$\mathbb{E}(U) + \left[z_\varepsilon + \frac{(z_\varepsilon^2 - 1)}{6} \gamma(U) \right] \sigma(U) = 0.$$

Se a distribuição de U for simétrica, temos que o último termo é igual a zero. Dessa forma, a aproximação normal power equivale a aproximação normal. Substituindo os valores de $\mathbb{E}(U)$, $\sigma(U)$ e $\gamma(U)$ na equação acima:

$$A\mathbb{E}(R) - \mathbb{E}(S) - B + \left[z_\varepsilon + \frac{(z_\varepsilon^2 - 1)}{6} \frac{A^3 \sigma^3(R) \gamma(R) - \sigma^3(S) \gamma(S)}{[A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S)]^{3/2}} \right] \sqrt{A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S)} = 0.$$

Isolando $\mathbb{E}(R)$,

$$\mathbb{E}(R) = \frac{\mathbb{E}(S) + B}{A} - \frac{\sqrt{A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S)}}{A} \left[z_\varepsilon + \frac{A^3 \sigma^3(R) \gamma(R) - \sigma^3(S) \gamma(S)}{[A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S)]^{3/2}} \frac{(z_\varepsilon^2 - 1)}{6} \right]. \quad (6.7)$$

Adicionalmente, e como forma de simplificação, definimos

$$h(\sigma(R), \gamma(R)) = A^3 \sigma^3(R) \gamma(R) - \sigma^3(S) \gamma(S) \quad (6.8)$$

$$g(\sigma(R)) = \sqrt{A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \quad (6.9)$$

Logo,

$$\mathbb{E}(R) = \frac{\mathbb{E}(S) + B}{A} - \frac{g(\sigma(R)) z_\varepsilon}{A} + \frac{h(\sigma(R), \gamma(R)) (z_\varepsilon^2 - 1)}{g(\sigma(R))^2 6A}.$$

Esta função é estritamente crescente em relação ao desvio padrão dos retornos e, na prática, vale que quanto maior o retorno esperado de uma carteira mais arriscada ela é. É fácil provar este fato de forma algébrica para o caso específico, em que $\gamma_R = 0$. Para tanto, simplificamos a fórmula colocando em função de constantes

$$\mathbb{E}(R) = C_1 - C_2 \sqrt{A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S)} - \frac{\sigma^3(S) \gamma(S)}{[A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S)]} C_3,$$

onde $C_1 = \frac{\mathbb{E}(S) + B}{A}$, $C_2 = \frac{z_\varepsilon}{A}$ e $C_3 = \frac{(z_\varepsilon^2 - 1)}{6A}$.

E encontrando a derivada de $\mathbb{E}(R)$ em relação a $\sigma(R)$

$$\frac{d\mathbb{E}(R)}{d\sigma(R)} = -\frac{C_2}{2} [A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S)]^{-\frac{1}{2}} 2A^2 \sigma(R) + \frac{\sigma^3(S) \gamma(S) A^2 2\sigma(R)}{[A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S)]^2} C_3 \geq 0,$$

6.1.2 Custo Esperado da Perda - CEP

O CEP é definido como

$$CEP = \mathbb{E}(\max\{-U, 0\}),$$

ou seja, a perda esperada em caso de insolvência, caso o capital próprio se torne negativo no tempo 1. Denotaremos o custo esperado da perda pela abordagem da normal power como CEP^{NP} .

Temos que $\max\{-U, 0\} = -UI_{\{U < 0\}} + 0I_{\{U \geq 0\}}$ e assim

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\max\{-U, 0\}) &= - \int_{-\infty}^0 u\phi(u)du \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} u\phi(u)du + \int_0^{\infty} u\phi(u)du \\ &= -\mathbb{E}(U) + \mathbb{E}(\max\{U, 0\}). \end{aligned}$$

Para $Y \sim N(0, 1)$, sendo Φ a função de distribuição acumulada da normal padrão e ϕ é a respectiva função de densidade, por Britney (1972) segue que

$$E_{v(0)}^{\infty}(Y^n) = \int_{v(0)}^{\infty} y^n \phi(y) dy = \mathbb{E}(Y^n) - E_{-\infty}^{v(0)}(Y^n), \quad (6.10)$$

onde,

$$E_{-\infty}^z(Y^n) = -z^{n-1}\phi(z) + (n-1)E_{-\infty}^z(Y^{n-2}) \quad (6.11)$$

$$E_{-\infty}^z(Y^0) = \Phi(z) \quad (6.12)$$

$$E_{-\infty}^z(Y^1) = -\phi(z). \quad (6.13)$$

Temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\max\{U, 0\}) &= \int_0^{\infty} ug(u)du. \\ \mathbb{E}(\max\{U, 0\}) &= \int_{v(0)}^{\infty} v^{-1}(y)\phi(y)dy \end{aligned}$$

usando a expressão para $v^{-1}(\cdot)$ temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\max\{U, 0\}) &= \int_{v(0)}^{\infty} \left[\mathbb{E}(U) + \sigma(U)y + \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6}(y^2 - 1) \right] \phi(y)dy \\ &= \left[\mathbb{E}(U) - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6} \right] \int_{v(0)}^{\infty} \phi(y)dy + \sigma(U) \int_{v(0)}^{\infty} y\phi(y)dy + \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6} \int_{v(0)}^{\infty} y^2\phi(y)dy \end{aligned}$$

e por (6.10) temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\max\{U, 0\}) &= \left[\mathbb{E}(U) - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6} \right] E_{v(0)}^\infty(Y^0) + \sigma(U)E_{v(0)}^\infty(Y^1) + \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6} E_{v(0)}^\infty(Y^2) \\
&= \left[\mathbb{E}(U) - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6} \right] [\mathbb{E}(Y^0) - E_{-\infty}^{v(0)}(Y^0)] + \sigma(U)(\mathbb{E}(Y^1) - E_{-\infty}^{v(0)}(Y^1)) + \\
&\quad \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6} [\mathbb{E}(Y^2) - E_{-\infty}^{v(0)}(Y^2)] \\
&= \left[\mathbb{E}(U) - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6} \right] - E_{-\infty}^{v(0)}(Y^0) \left[\mathbb{E}(U) - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6} \right] - \sigma(U)E_{-\infty}^{v(0)}(Y^1) + \\
&\quad \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6} - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6} E_{-\infty}^{v(0)}(Y^2)
\end{aligned}$$

e substituindo os valores de $E_{-\infty}^Z(Y^n)$, $E_{-\infty}^Z(Y^0)$ e $E_{-\infty}^Z(Y^1)$ por (6.11), (6.12) e (6.13)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\max\{U, 0\}) &= \left[\mathbb{E}(U) - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6} \right] - \Phi(v(0)) \left[\mathbb{E}(U) - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6} \right] + \sigma(U)\phi(v(0)) + \\
&\quad \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6} - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6} [-v(0)\phi(v(0)) + E_{-\infty}^{v(0)}(Y^0)] \\
&= \mathbb{E}(U) - \Phi(v(0))\mathbb{E}(U) + \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6}\Phi(v(0)) + \sigma(U)\phi(v(0)) + \\
&\quad \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6}v(0)\phi(v(0)) - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6}\Phi(v(0)),
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbb{E}(\max\{U, 0\}) = \mathbb{E}(U)\Phi(-v(0)) + \left[\sigma(U) + \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6}v(0) \right] \phi(v(0)).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
CEP^{NP} &= \mathbb{E}(\max\{-U, 0\}) = -\mathbb{E}(U) + \mathbb{E}(\max\{U, 0\}) \\
&= -\mathbb{E}(U) + \mathbb{E}(U)\Phi(-v(0)) + \left[\sigma(U) + \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6}v(0) \right] \phi(v(0)) \\
&= -\mathbb{E}(U)(1 - \Phi(-v(0))) + \left[\sigma(U) + \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6}v(0) \right] \phi(v(0)) \\
&= -\mathbb{E}(U)\Phi(v(0)) + \left[\sigma(U) + \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{6}v(0) \right] \phi(v(0)).
\end{aligned}$$

Dessa forma, o custo esperado da perda é dado por:

$$CEP^{NP} = -\mathbb{E}(U)\Phi(v(0)) + \sigma(U) \left[1 + \frac{v(0)}{6}\gamma(U) \right] \phi(v(0)). \quad (6.14)$$

Substituindo os valores de $\mathbb{E}(U)$, $\sigma(U)$ e $\gamma(U)$ na equação (6.10)

$$CEP^{NP} = -(A\mathbb{E}(R) - \mathbb{E}(S) - B) \Phi(v(0)) + \sqrt{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \left[1 + \frac{v(0)}{6} \frac{A^3\sigma(R)^3\gamma(R) - \sigma(S)^3\gamma(S)}{(A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S))^{3/2}} \right] \phi(v(0)),$$

e isolando $\mathbb{E}(R)$ resulta em

$$\mathbb{E}(R) = \frac{-CEP^{NP} + (\mathbb{E}(S) + B) \Phi(v(0))}{A\Phi(v(0))} + \frac{\phi(v(0))}{A\Phi(v(0))} \left[\sqrt{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)} + \frac{v(0)}{6} \frac{A^3\sigma(R)^3\gamma(R) - \sigma(S)^3\gamma(S)}{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \right],$$

e colocando em função de (6.8) e (6.9)

$$\mathbb{E}(R) = \frac{-CEP^{NP} + (\mathbb{E}(S) + B) \Phi(v(0))}{A\Phi(v(0))} + \left[g(\sigma(R)) + \frac{v(0)}{6} \frac{h(\sigma(R), \gamma(R))}{g(\sigma(R))^2} \right] \frac{\phi(v(0))}{A\Phi(v(0))}$$

6.1.3 Valor em Risco na Cauda - TVaR

Conforme definido anteriormente, para a variável aleatória U , usando o valor em risco VaR para um nível de segurança α , $VaR_\alpha(U) = q_\alpha$, o TVaR para um nível de segurança α é dado pela esperança condicional

$$TVaR_\alpha(U) = \mathbb{E}(-U|U \leq VaR_\alpha(U)).$$

Denotaremos o valor em risco na cauda pela abordagem da normal power como $TVaR_\alpha^{NP}$. Se a aproximação da normal power é usada para estimar a distribuição de U , o valor em risco na cauda pode ser derivado analiticamente por:

$$\begin{aligned} TVaR_\alpha^{NP}(U) &= \mathbb{E}(-U|U \leq q_\alpha) \\ &= \mathbb{E}(q_\alpha - U|U \leq q_\alpha) - \mathbb{E}(q_\alpha|U \leq q_\alpha) \\ &= \frac{\mathbb{E}(\max\{q_\alpha - U, 0\})}{P(U \leq q_\alpha)} - q_\alpha. \end{aligned}$$

E usando o resultado obtido no cálculo do CEP

$$TVaR_\alpha^{NP}(U) = \frac{-\mathbb{E}(U)\Phi(v(q_\alpha)) + \sigma(U) \left[1 + \frac{\gamma(U)}{6} v(q_\alpha) \right] \phi(v(q_\alpha))}{\alpha}. \quad (6.15)$$

Substituindo os valores de U , $\sigma(U)$ e $\gamma(U)$

$$TVaR_{\alpha}^{NP}(U) = \frac{-(A\mathbb{E}(R) - \mathbb{E}(S) - B_1)\Phi(v(q_{\alpha}))}{\alpha} + \frac{\sqrt{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \left[1 + \frac{A^3\sigma(R)^3\gamma(R) - \sigma(S)^3\gamma(S)}{[A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)]^{3/2}} \frac{v(q_{\alpha})}{6} \right] \frac{\phi(v(q_{\alpha}))}{\alpha}}{\alpha}$$

e buscando $\mathbb{E}(R)$ em função de $\sigma(R)$ para o valor do risco na cauda, isolamos $\mathbb{E}(R)$

$$\mathbb{E}(R) = \frac{-TVaR_{\alpha}^{NP}(U)\alpha + (\mathbb{E}(S) + B)\Phi(v(q_{\alpha}))}{A\Phi(v(q_{\alpha}))} + \left[\frac{\sqrt{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)}}{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)} + \frac{A^3\sigma(R)^3\gamma(R) - \sigma(S)^3\gamma(S)}{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \frac{v(q_{\alpha})}{6} \right] \frac{\phi(v(q_{\alpha}))}{A\Phi(v(q_{\alpha}))}.$$

e colocando em função de (6.9) e (6.8)

$$\mathbb{E}(R) = \frac{-TVaR_{\alpha}^{NP}(U)\alpha + (\mathbb{E}(S) + B)\Phi(v(q_{\alpha})) + \left[g(\sigma(R)) + \frac{h(\sigma(R), \gamma(R))}{g(\sigma(R))^2} \frac{v(q_{\alpha})}{6} \right] \phi(v(q_{\alpha}))}{A\Phi(v(q_{\alpha}))}.$$

6.2 Construção das Linhas de Solvência Utilizando a Aproximação Normal da Gama Transladada

Em Eling et al. (2009), os autores utilizam a aproximação normal power para a distribuição de U . Porém essa aproximação não é uma boa quando U se afasta da normal, em condições de assimetria e de caudas um pouco mais pesadas. Em assim sendo, como forma de extensão, realizamos a modelagem por meio da aproximação usual gama transladada.

Assim, para a variável aleatória U vale que

$$P \left[\frac{U - \mathbb{E}(U)}{\sigma(U)} \leq y + \frac{\gamma(U)}{8}(y^2 - 1) - y \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma(U)^2}{16}} \right] \right] \approx \Phi(y) \quad (6.16)$$

6.2.1 Probabilidade de Ruína - PR

Conforme mostrado na seção 6.1.1, temos que a probabilidade ε de ocorrer uma situação de insolvência em $t = 1$ é dada por

$$PR = \varepsilon = P(U \leq 0) = P \left(\frac{U - \mathbb{E}(U)}{\sigma(U)} \leq \frac{-\mathbb{E}(U)}{\sigma(U)} \right),$$

e por (6.16) temos que

$$\frac{-\mathbb{E}(U)}{\sigma(U)} = y + \frac{\gamma(U)}{8}(y^2 - 1) - y \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma(U)^2}{16}} \right].$$

Como $\Phi(y) = \varepsilon$, tomando a função inversa temos que $y = \Phi^{-1}(\varepsilon) = z_\varepsilon$. E substituindo z_ε , segue que

$$\begin{aligned} \frac{-\mathbb{E}(U)}{\sigma(U)} &= z_\varepsilon + \frac{\gamma(U)}{8}(z_\varepsilon^2 - 1) - z_\varepsilon \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma(U)^2}{16}} \right] \\ \mathbb{E}(U) &= -\sigma(U) \frac{\gamma(U)}{8}(z_\varepsilon^2 - 1) - \sigma(U) z_\varepsilon \sqrt{1 - \frac{\gamma(U)^2}{16}}. \end{aligned}$$

Agora, ao substituirmos os valores de $\mathbb{E}(U)$, $\sigma(U)$ e $\gamma(U)$ calculados na seção 6 na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} A\mathbb{E}(R) - \mathbb{E}(S) - B &= -\frac{A^3\sigma^3(R)\gamma(R) - \sigma^3(S)\gamma(S)(z_\varepsilon^2 - 1)}{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \frac{1}{8} \\ &\quad - z_\varepsilon \sqrt{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S) - \frac{1}{16} \left[\frac{A^3\sigma^3(R)\gamma(R) - \sigma^3(S)\gamma(S)}{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \right]^2} \end{aligned}$$

e isolando $\mathbb{E}(R)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R) &= \frac{\mathbb{E}(S) + B}{A} - \frac{A^3\sigma^3(R)\gamma(R) - \sigma^3(S)\gamma(S)(z_\varepsilon^2 - 1)}{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \frac{1}{8A} \\ &\quad - \frac{z_\varepsilon}{A} \sqrt{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S) - \frac{1}{16} \left[\frac{A^3\sigma^3(R)\gamma(R) - \sigma^3(S)\gamma(S)}{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \right]^2} \end{aligned}$$

e colocando em função de 6.8 e 6.9

$$\mathbb{E}(R) = \frac{\mathbb{E}(S) + B}{A} - \frac{h(\sigma(R), \gamma(R))(z_\varepsilon^2 - 1)}{g(\sigma(R))^2} \frac{1}{8A} - \frac{z_\varepsilon}{A} \sqrt{g(\sigma(R))^2 - \frac{1}{16} \left[\frac{h(\sigma(R), \gamma(R))}{g(\sigma(R))^2} \right]^2}.$$

6.2.2 Custo Esperado da Perda - CEP

Como calculado na seção 6.1.2 , temos que

$$\begin{aligned} CEP &= \mathbb{E}(\max\{-U, 0\}) \\ &= -\mathbb{E}(U) + \mathbb{E}(\max\{U, 0\}), \end{aligned}$$

logo $\mathbb{E}(\max\{U, 0\}) = \int_0^\infty ug(u)du$. E para a abordagem da aproximação normal da gama transladada, denotaremos o custo esperado da perda como CEP^{GT} .

Assim como na aproximação normal power, $Y \stackrel{d}{=} v(U)$ e para a função de distribuição de U , $G(u) \approx \Phi(v(u)) = \Phi(y)$, logo

$$\mathbb{E}(\max\{U, 0\}) = \int_{v(0)}^\infty v^{-1}(y)\phi(y)dy.$$

E substituindo a função

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\max\{U, 0\}) &= \int_{v(0)}^\infty \left[\mathbb{E}(U) + \sigma(U)y + \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{8}(y^2 - 1) - \sigma(U)y \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma(U)^2}{16}} \right] \right] \phi(y)dy \\ &= \left[\mathbb{E}(U) - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{8} \right] \int_{v(0)}^\infty \phi(y)dy + \sigma(U)\sqrt{1 - \frac{\gamma(U)^2}{16}} \int_{v(0)}^\infty y\phi(y)dy \\ &+ \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{8} \int_{v(0)}^\infty y^2\phi(y)dy \end{aligned}$$

E pelos resultados apresentados também em 6.1.2,

$$\mathbb{E}(\max\{U, 0\}) = \left[\mathbb{E}(U) - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{8} \right] E_{v(0)}^\infty(Y^0) + \sigma(U)\sqrt{1 - \frac{\gamma(U)^2}{16}} E_{v(0)}^\infty(Y^1) + \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{8} E_{v(0)}^\infty(Y^2).$$

Conforme já indicado, para $Y \sim N(0, 1)$, seguem as equações (6.10), (6.11), (6.12) e (6.13). E por (6.10),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\max\{U, 0\}) &= \left[\mathbb{E}(U) - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{8} \right] \left[\mathbb{E}(Y^0) - E_{-\infty}^{v(0)}(Y^0) \right] + \sigma(U)\sqrt{1 - \frac{\gamma(U)^2}{16}} \left[\mathbb{E}(Y^1) - E_{-\infty}^{v(0)}(Y^1) \right] + \\ &\frac{\gamma(U)\sigma(U)}{8} \left[\mathbb{E}(Y^2) - E_{-\infty}^{v(0)}(Y^2) \right] \\ &= \left[\mathbb{E}(U) - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{8} \right] \left[1 - E_{-\infty}^{v(0)}(Y^0) \right] + \sigma(U)\sqrt{1 - \frac{\gamma(U)^2}{16}} \left[-E_{-\infty}^{v(0)}(Y^1) \right] + \\ &\frac{\gamma(U)\sigma(U)}{8} \left[1 - E_{-\infty}^{v(0)}(Y^2) \right] \end{aligned}$$

e substituindo os valores de $E_{-\infty}^Z(Y^n)$, $E_{-\infty}^Z(Y^0)$ e $E_{-\infty}^Z(Y^1)$ por (6.11), (6.12) e (6.13)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\max\{U, 0\}) &= \left[\mathbb{E}(U) - \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{8} \right] [1 - \Phi(v(0))] + \sigma(U)\sqrt{1 - \frac{\gamma(U)^2}{16}}\phi(v(0)) + \\ &\frac{\gamma(U)\sigma(U)}{8} [1 + v(0)\phi(v(0)) - \Phi(v(0))] \\ &= \mathbb{E}(U) - \Phi(v(0))\mathbb{E}(U) + \sigma(U)\sqrt{1 - \frac{\gamma(U)^2}{16}}\phi(v(0)) + v(0)\phi(v(0))\frac{\gamma(U)\sigma(U)}{8} \end{aligned}$$

Em assim sendo, o Custo Esperado da Perda é dado por

$$\begin{aligned} CEP^{GT} &= -\mathbb{E}(U) + \mathbb{E}(\max\{U, 0\}) \\ &= \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{8}v(0)\phi(v(0)) - \Phi(v(0))\mathbb{E}(U) + \sigma(U)\sqrt{1 - \frac{\gamma(U)^2}{16}}\phi(v(0)). \end{aligned}$$

Substituindo os valores de $\mathbb{E}(U)$, $\sigma(U)$ e $\gamma(U)$, temos

$$\begin{aligned} CEP^{GT} &= \frac{A^3\sigma^3(R)\gamma(R) - \sigma^3(S)\gamma(S)}{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \frac{v(0)\phi(v(0))}{8} - \\ &\quad \Phi(v(0))[A\mathbb{E}(R) - \mathbb{E}(S) - B] + \phi(v(0))\sqrt{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S) - \frac{1}{16} \left[\frac{A^3\sigma^3(R)\gamma(R) - \sigma^3(S)\gamma(S)}{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \right]^2}, \end{aligned}$$

e isolando $\mathbb{E}(R)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R) &= \frac{1}{\Phi(v(0))A} \left[-CEP^{GT} + \frac{A^3\sigma^3(R)\gamma(R) - \sigma^3(S)\gamma(S)}{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \frac{v(0)\phi(v(0))}{8} + \right. \\ &\quad \left. \Phi(v(0))[\mathbb{E}(S) + B] + \phi(v(0))\sqrt{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S) - \frac{1}{16} \left[\frac{A^3\sigma^3(R)\gamma(R) - \sigma^3(S)\gamma(S)}{A^2\sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \right]^2} \right]. \end{aligned}$$

Colocando em função de $h(\sigma(R), \gamma(R))$ e $g(\sigma(R))$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R) &= \frac{1}{\Phi(v(0))A} \left[-CEP^{GT} + \frac{h(\sigma(R), \gamma(R))}{g(\sigma(R))^2} \frac{v(0)\phi(v(0))}{8} + \Phi(v(0))[\mathbb{E}(S) + B] \right. \\ &\quad \left. + \phi(v(0))\sqrt{g(\sigma(R))^2 - \frac{1}{16} \left[\frac{h(\sigma(R), \gamma(R))}{g(\sigma(R))^2} \right]^2} \right]. \end{aligned}$$

6.2.3 Valor em Risco na Cauda - TVaR

Seguindo o mesmo raciocínio da seção 6.1.3 e definindo o $TVaR^{GT}$, temos que

$$TVaR_{\alpha}^{GT}(U) = \mathbb{E}(-U|U \leq VaR_{\alpha}(U)) = \frac{\mathbb{E}(\max\{q_{\alpha} - U, 0\})}{P(U \leq q_{\alpha})} - q_{\alpha},$$

e usando o resultado obtido no cálculo do CEP,

$$TVaR_{\alpha}^{GT}(U) = \frac{\mathbb{E}(U) + \frac{\gamma(U)\sigma(U)}{8}v(q_{\alpha})\phi(v(q_{\alpha})) - \Phi(v(q_{\alpha}))\mathbb{E}(U) + \sigma(U)\sqrt{1 - \frac{\gamma(U)^2}{16}}\phi(v(q_{\alpha}))}{\alpha}. \quad (6.17)$$

Substituindo os valores de $\mathbb{E}(U)$, $\sigma(U)$ e $\gamma(U)$ em (6.17) temos:

$$TVaR_{\alpha}^{GT}(U) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{A^3 \sigma^3(R) \gamma(R) - \sigma^3(S) \gamma(S)}{A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \frac{v(q_{\alpha}) \phi(v(q_{\alpha}))}{8} \right. \\ \left. - \Phi(v(q_{\alpha})) [A \mathbb{E}(R) - \mathbb{E}(S) - B] + \phi(v(q_{\alpha})) \sqrt{A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S) - \frac{1}{16} \left[\frac{A^3 \sigma^3(R) \gamma(R) - \sigma^3(S) \gamma(S)}{A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \right]^2} \right\},$$

e isolando $\mathbb{E}(R)$ obtivemos

$$\mathbb{E}(R) = \frac{1}{\Phi(v(q_{\alpha}))A} \left\{ -\alpha TVaR_{\alpha}^{GT}(U) + \frac{A^3 \sigma^3(R) \gamma(R) - \sigma^3(S) \gamma(S)}{A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \frac{v(q_{\alpha}) \phi(v(q_{\alpha}))}{8} \right. \\ \left. + \Phi(v(q_{\alpha})) [\mathbb{E}(S) + B] + \phi(v(q_{\alpha})) \sqrt{A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S) - \frac{1}{16} \left[\frac{A^3 \sigma^3(R) \gamma(R) - \sigma^3(S) \gamma(S)}{A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S)} \right]^2} \right\},$$

e colocando em função de $h(\sigma(R), \gamma(R))$ e $g(\sigma(R))$

$$\mathbb{E}(R) = \frac{1}{\Phi(v(q_{\alpha}))A} \left\{ -\alpha TVaR_{\alpha}^{GT}(U) + \frac{h(\sigma(R), \gamma(R))}{g(\sigma(R))^2} \frac{v(q_{\alpha}) \phi(v(q_{\alpha}))}{8} \right. \\ \left. + \Phi(v(q_{\alpha})) [\mathbb{E}(S) + B] + \phi(v(q_{\alpha})) \sqrt{A^2 \sigma^2(R) + \sigma^2(S) - \frac{1}{16} \left[\frac{h(\sigma(R), \gamma(R))}{g(\sigma(R))^2} \right]^2} \right\}.$$

6.3 Avaliação dos Resultados

Como forma de aplicação dos modelos apresentados no capítulo anterior, utilizamos o exemplo de uma seguradora alemã de médio porte do ramo não-vida, cujos valores (apresentados a seguir) foram retirados de Eling et al. (2009). O valor de mercado dos ativos em $t = 0$, A_0 , é de \$ 1,582 bilhões. O valor estocástico de mercado dos sinistros em $t = 1$ possui um valor esperado $\mathbb{E}(S)$ de \$ 1,171 bilhões e desvio padrão $\sigma(S)$ de 66 bilhões. A assimetria dos sinistros, $\gamma(S)$, é de 0,3. As despesas administrativas do segurador (B é modelado deterministicamente) é de \$ 264 milhões. Neste exemplo, assumimos a independência estocástica entre a taxa de retorno do portfólio de investimentos e os sinistros pagos.

De acordo com as regras do Solvência II, descritas em Comissão Europeia (2008), a probabilidade de ruína é determinada como $\epsilon = 0,5\%$. Para o TVaR, o nível de confiança que deve ser utilizado é de $\alpha = 1\%$. Para maior clareza das expressões, iremos nos referir como $R(= r+1)$ ao invés de r . Para garantirmos o mesmo valor inicial para as três medidas de risco dado $\sigma(r) = \sigma(R) = 0$ e assim a comparabilidade, o artigo determina $TVaR_{1\%}(U) = \$7,827$ milhões e $EPD = \$0,135$ milhões. Assim, a Figura 6.1 nos apresenta as linhas de solvência obtidas para a aproximação normal power para a PR, TVaR e CEP.

As combinações de risco e retorno apresentadas no gráfico são utilizadas para verificar se a

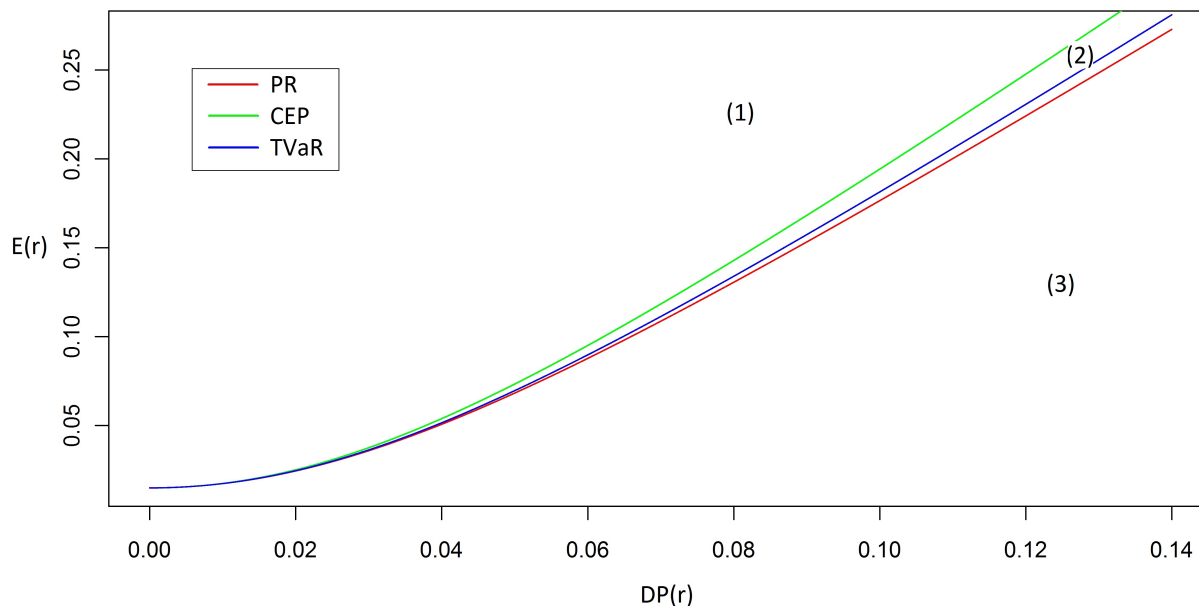


Figura 6.1: Linhas de Solvência utilizando a aproximação normal power para PR, CEP e TVaR baseados em dados de uma seguradora alemã.

atual alocação de capital da seguradora está de acordo com os requerimentos exigidos. Assim, a Figura 6.1 representa 3 diferentes áreas enumeradas de (1) a (3). As combinações de $\mathbb{E}(r) - DP(r)$ que se encontram na área (3), representam os investimentos que são considerados insolventes pela abordagem das três medidas de risco, ou seja, as combinações que devem ser evitadas. Já a área (2), representa aqueles que são considerados solventes apenas pela abordagem do TVaR e da PR, mas são insolventes se levarmos em consideração o CEP. Por sua vez, a área (1) é onde se localiza os investimentos que são considerados solventes pelas três medidas de risco. Desta forma, podemos concluir que, para este exemplo, a taxa de retorno requerida para uma volatilidade dada é maior para o CEP, em comparação com a PR e o TVaR.

Adicionalmente, a Figura 6.2 nos apresenta as linhas de solvência para diferentes valores de ϵ , 0,1%, 0,5% e 1%, respectivamente. As linhas são paralelas entre si e possuem diferentes valores para os ativos livres de risco. Para garantirmos uma probabilidade de ruína de até 0,1%, precisaríamos de um ativo livre de risco com uma taxa de retorno de mais de 4%, o que é extremamente alto, levando em consideração os títulos considerados como livres de risco. Já para a PR de 0,5% e 1%, o ativo livre de risco deveria possuir o retorno de no mínimo 1,49% e 0,19%, o que é plausível nos dias de hoje.

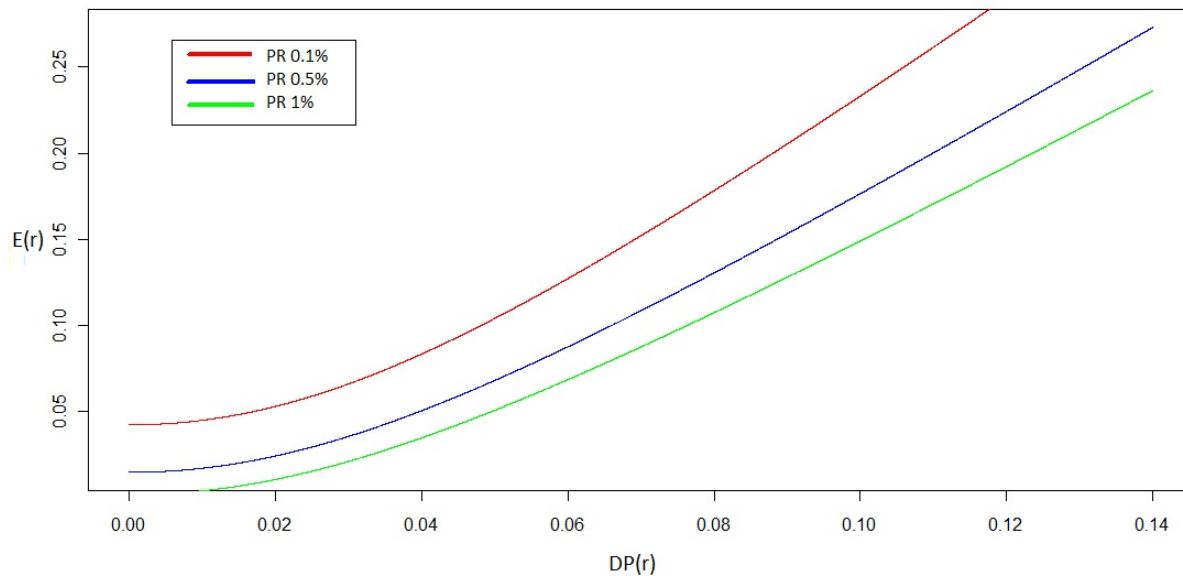


Figura 6.2: Linhas de Solvência para a PR, baseados em diferentes níveis de confiança, de acordo com dados de uma seguradora alemã.

Em relação à abordagem da aproximação gama normal transladada, também obtivemos linhas de solvência para as três medidas de risco. O gráfico obtido é similar a Figura 6.2 e assim iremos apresentar apenas a comparação com o resultado obtido por meio da aproximação normal power, para cada uma das medidas de risco.

Utilizando o mesmo exemplo da seguradora alemã, obtivemos a aproximação ilustrada na Figura 6.3. Dessa forma, observa-se que para os casos em que a assimetria dos retornos é nula, as duas abordagens se diferenciam quando seu desvio padrão é pequeno e vão se igualando quando o mesmo aumenta. A maior diferença entre as duas abordagens é para o TVaR, em que as linhas se diferenciam inclusive quando a volatilidade dos retornos aumentam.

Adicionalmente, utilizamos o exemplo da seguradora alemã porém supomos que a assimetria dos retornos não seja nula, qual seja $\gamma(r) = 0,3$. Existem evidências empíricas de que as rentabilidades das ações têm distribuições de retornos assimétricos (veja Cysneiros e Maior (2009)). Dessa forma, observa-se que para os casos em que a assimetria dos retornos não é nula, para a PR e o CEP, as duas abordagens se diferenciam quando seu desvio padrão aumenta. Já para o TVaR, ocorre o efeito contrário, a diferenças entre as duas abordagens diminui com o aumento do desvio padrão, conforme Figura 6.4.

Representamos na Figura 6.5 a diferença absoluta entre a aproximação normal power e gama transladada. Para a probabilidade de ruína, esta diferença é crescente em relação à volatilidade. Já para o custo esperado da perda e o valor em risco na cauda, está diferença

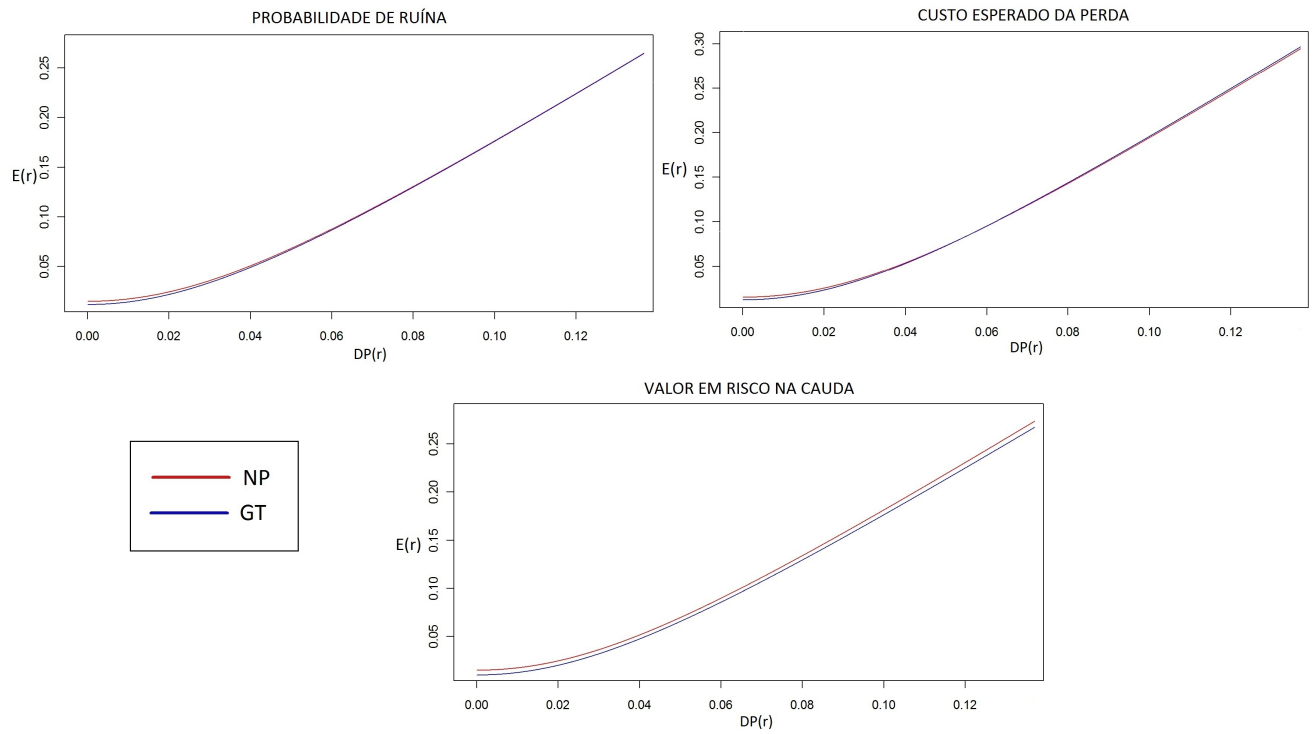


Figura 6.3: Comparação entre as aproximações normal power e gama normal transladada, para as medidas de risco PR, CEP e TVaR.

se inverte: primeiramente diminui e depois aumenta.

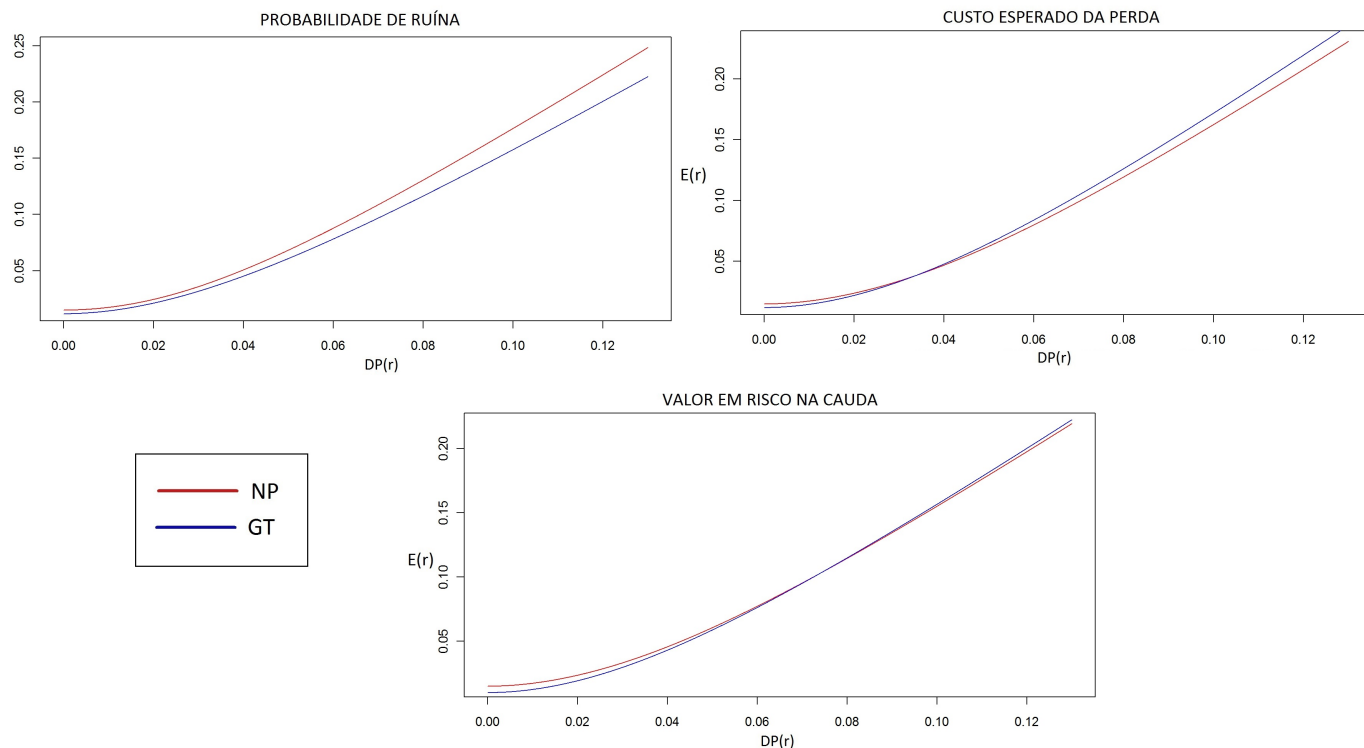


Figura 6.4: Representação das diferenças do retorno esperado, utilizando a aproximação normal power e a gama transladada, quando a assimetria dos retornos é não-nula.

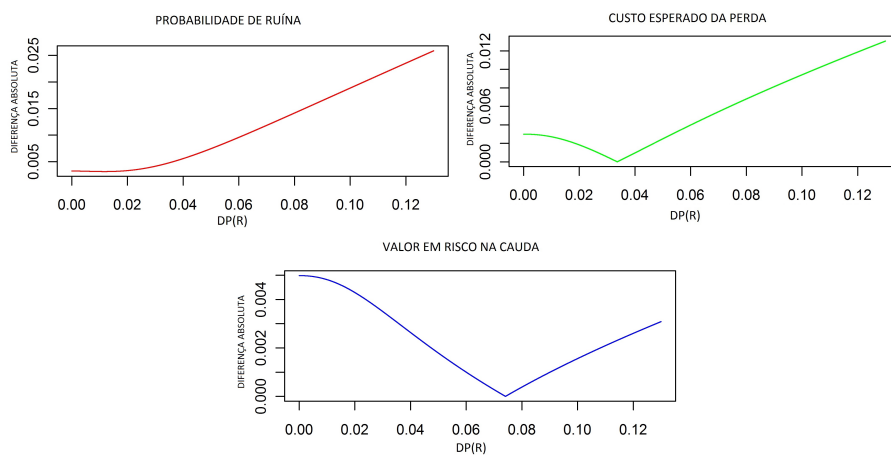


Figura 6.5: Diferenças entre a abordagem normal power e gama transladada, para retornos assimétricos.

Capítulo 7

Conclusão

O presente trabalho propôs uma nova forma de avaliação de capital de solvência para seguradoras. Usualmente, em uma situação de solvência fraca em que o capital próprio está abaixo do necessário, o segurador deve aumentar suas receitas ou diminuir suas despesas em um curto prazo. Nesta nova abordagem, ao invés de obter o capital próprio na forma de cálculo usual, padrões mínimos de performance de investimento são obtidos, dado a estrutura de risco do passivo, o capital próprio e um nível de risco predefinido. Assim, um segurador insolvente pode ajustar sua alocação de capital em vez de modificar receitas ou despesas.

Esta avaliação de capital é feita através das linhas de solvência, que são combinações de risco e retorno dos investimentos que garante um padrão mínimo de desempenho, o que garante a seguradora estar dentro do risco mínimo de ficar insolvente. Estas linhas são obtidas utilizando a abordagem de três medidas de risco: probabilidade de ruína, custo esperado da perda e valor em risco na cauda.

As equações que geram as linhas de solvência são de difícil obtenção na sua forma exata, desta maneira propomos duas soluções: a utilização de aproximações e de simulações Monte Carlo. Inicialmente, utilizamos o método Monte Carlo simulando $r \sim N(\mu, \sigma)$ e $S \sim G(\alpha, \beta)$, e obtivemos aproximadamente curvas de solvência.

O trabalho de Eling et al. (2009) propôs inicialmente a construção destas curvas utilizando a aproximação normal power e obtivemos as equações explicitamente. Porém, como a normal power não realiza boas aproximações em situações de assimetria e caudas mais pesadas, utilizamos uma outra aproximação, a gama normal transladada, e também obtivemos as equações explicitamente para as três medidas de risco. Foram construídos os gráficos das linhas de solvência também para esta abordagem e comparados com os gráficos construídos para a normal power.

No Apêndice C, apresentamos uma possível extensão deste trabalho. Após identificar as combinações $\mathbb{E}(r) - \sigma(r)$ que são compatíveis com as exigências de solvência para uma companhia seguradora, estes resultados devem ser relacionados com os gráficos de risco versus

retorno utilizados no mercado. Para tanto, introduzimos a teoria do portfólio e incluímos no gráfico das linhas de solvência a linha de mercado de capital.

Referências Bibliográficas

- ALCÂNTRA, J.C. O Modelo de Avaliação de Ativos (Capital Asset Pricing Model) - Aplicações. *Revista de Administração de Empresa*, Rio de Janeiro, v. 21, p. 55–65, 1981.
- ALLEN, L.; DELONG G.; SAUNDERS, A. Issues in the credit risk modeling of retail markets. *Journal of Banking & Finance*, v. 28, p. 727–752, 2004.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.M.; HEATH, D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, v. 9, p. 203–228, 1999.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.M.; HEATH, D. Thinking coherently: Generalised scenarios rather than VAR should be used when calculating regulatory capital. *Risk-London-Risk Magazine Limited*, v. 10, p. 68–71, 1997.
- AKHIEZER, N. I. The classical moment problem and some related questions in analysis, translated from the Russian by N. Kemmer. *Hafner Publishing Co.*, Nova York, 1965.
- BAIMA, F.R. Análise de desempenho dos investimentos dos fundos de pensão no Brasil, 2012.
- BARABACH, G.; SILVA C. A eficiente diversificação comercial do café arábica: uma abordagem a partir da moderna teoria de carteiras. Dissertação (Mestrado em Economia do Desenvolvimento), Porto Alegre: PUCRS, 2009.
- BARTH, M. M. A Comparison Of Risk Based Capital Standards Under The Expected Policyholder Deficit And The Probability Of Ruin Approaches. *Journal of Risk and Insurance*, p. 397–413, 2000.
- BHALLA, V. K. Investment Management:(security Analysis and Portfolio Management). *S. Chand & Company Limited*, 2008.
- BRITNEY, R.R.; ROODMAN G. M.; WINKLER, R. L. The Determination of Partial Moments. *Management Science*, v. 19, p. 290–296, 1972.

- BUTSIC, R.P. Solvency Measurement for Property-Liability Risk-Based Capital Applications. *The Journal of Risk and Insurance*, v. 61, p.656–690, 1994.
- CHAUBEY, Y.P.; GARRIDO, J.; TRUDEAU, S. On the computation of aggregate claims distributions: some new approximations. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 23, n. 3, p. 215–230, 1998
- CHAN, B.; SILVA, F.; MARTINS, G. Novas Regras de Solvência no Mercado Segurador Brasileiro: Uma Reflexão Acerca do Modelo Adotado. *8 Congresso USP de Controladoria e Contabilidade*, 2008.
- CHAN, B. Risco de subscrição frente às regras de solvência do mercado Segurador brasileiro. Tese (Doutorado em Contabilidade), Universidade de São Paulo, 2010.
- COLLINS, S. Outstanding issues delay implementation of Solvency II regime. *Business Insurance*. Disponível em: <<http://www.businessinsurance.com/article/20120923/NEWS04/309239979>>. Acesso em: 05 Jan. de 2013.
- COMISSÃO EUROPEIA, Choice of a risk measure for supervisory purposes: possible amendments to the Framework for Consultation. Markt/2534/06, Working Paper, Brussels, 2006.
- COMISSÃO EUROPEIA, Amended Proposal for a Directive of the European Parliament and the Council on the Taking-Up and Pursuit of the Business of Insurance and Reinsurance—Solvency II. Brussels, 2008.
- CYSNEIROS, F.J.A.; MAIOR, V.Q.S. Estimacao do Risco Sistemático em Modelos CAPM com erros Normais Assimétricos. *Rev. Bras. Biom.*, v. 27, p.197–209, 2009.
- DAYKIN, C.D.; PENTIKINEN, T.; Pesonen, M. Practical Risk Theory for Actuaries. *Chapman & Hall/CRC*, v. 53, 1993.
- DENUIT, M.; DHAENE, J.; GOOVAERTS, M. Kaas R. Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models. *John Wiley Sons*, 2005.
- DHAENE, J.; VYNCKE, D. The individual risk model. *Encyclopedia of Actuarial Science*, 2004.
- DICKSON, D.C.M.; WATERS, H.R. Risk Models. Department of Actuarial Mathematics & Statistics, Heriot-Watt University, 1993.

- DICKSON, D.C.; WATERS, H.R. The distribution of the time to ruin in the classical risk model. Centre for Actuarial Studies, Department of Economics, University of Melbourne, 2002.
- DOFF, R. A Critical Analysis of the Solvency II Proposals. *The Geneva Papers on Risk and Insurance – Issues and Practice*, v. 33, p.193–206, 2008.
- ELING, M.; GATZERT, N.; SCHMEISER, H. Minimum standards for investment performance: A new perspective on non-life insurer solvency. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 45, p. 113–122, 2009.
- ELING, M.; SCHMEISER, H. e SCHMIT, J. T. The Solvency II Process: Overview and Critical Analysis. *Risk Management and Insurance Review*, v. 10, p.69–85, 2007.
- ELTON, E.; GRUBER, M.; BROWN, S. Moderna teoria de carteiras e análise de investimentos. Elsevier Brasil, 2004.
- GALIZA, F. O mercado de seguros no Brasil - Um setor em expansão e suas características principais. *Rating de Seguros*, 2007.
- GORZIZA, A.P. Um estudo sobre a implantação do novo acordo de Basiléia e seus efeitos no Banco do Brasil. Trabalho de conclusão de especialização, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.
- HOGG, R. V.; KLUGMAN, S. A. Loss distributions. Wiley, v. 249, 2009
- HURLIMANN, W. The Normal Laplace Approximation to Compound Distributions. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. 44, n. 3, 2008.
- JORION, P. Value at risk: the new benchmark for managing financial risk. Nova York: McGraw-Hill, v. 2, 2007.
- JÚNIOR, A.; LÉLIS, R. Unificando a Alocação de Capital em Bancos e Seguradoras no Brasil. *Revista de Administração de Empresas*, v. 44, p.73–84, 2004.
- KAOPPI, L.; OJANTAKANEN, P. Approximations of the generalised Poisson function. *Astin Bulletin*, p.213–226, 1969.
- KLUGMAN, S.A.; PANJER, H.H.; WILLMOT, G.E. Loss models: from data to decisions. Wiley, v. 715, 2012
- LEITE, K.V.B.; REIS, M. O acordo de capitais de Basiléia III: Mais do mesmo?. 39 Encontro Nacional de Economia, 2011.

- OLIVEIRA, W. Componentes-Chave para a Abordagem IRB de Risco de Crédito, proposta por Basileia II. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciência da Informação e Documentação, Universidade de Brasília, 2005.
- PANJER, H.H. Operational Risk: Modeling Analytics. *John Wiley&Sons*, v. 620, 2006.
- PANJER, H.H.; WILLMOT, G. E. Insurance risk models. Society of Actuaries, 1992
- PENTIKAINEN, T. Approximation of the Total Amount of Claims. *Astin Bulletin*, v. 9, 1977.
- PESONEN, E. NP-approximation of risk processes. *Scandinavian Actuarial Journal*, v. 3, p. 158–164, 1968.
- RAMSAY, C. M. A Note on The Normal Power Approximation. *Astin Bulletin*, v. 21, p. 147–150, 1991.
- RINCÓN, L. Introduccion a la teoria del riesgo. Departamento de Matematicas Facultad de Ciencias UNAM, Delegación Coyoacán, México D.F, 2012.
- ROCKAFELLAR, R.; URYASEV, S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, v. 26, p.1443–1471, 2002.
- SCHIMIDLI, H. Lecture notes on Risk Theory. *University of Aarhus*, 2006.
- SEAL, H. Approximations to risk theory's $F(x, t)$ by means of the gamma distribution. *Astin Bulletin*, v. 9, p.213–18, 1977.
- SUPERINTENDÊNCIA DE SEGUROS PRIVADOS. Resolução CNSP n.8, de 1989.
- TABAK, J. Probability and Statistics: The Science of Uncertain. p.102–118, 2011.
- TEAM, R Development Core. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation Statistical Computing, v. 2.13.0, 2011. Disponível em: <<http://www.r-project.org>>. Acesso em: 10 Jan. 2012
- VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. Theory of games and economic behavior (commemorative edition). Princeton university press, 2007.
- WEAVER, B. Crise Financeira: O que a motivou? *Caderno de Seguros*, Rio de Janeiro: Escola Nacional de Seguros, v. 152, p.29–34, 2010.

Apêndice A

O Problema dos Momentos

Conforme já mencionado no capítulo 5, uma situação frequentemente encontrada é que a distribuição da variável aleatória de interesse é desconhecida. Muitas vezes, apenas uma informação parcial é conhecida como a média, variância, covariância, assimetria, curtose, entre outras. Desta forma, dado as informações dos primeiros momentos, podemos obter aproximações para estas variáveis. Na teoria da probabilidade clássica, estes problemas são conhecidos como problema dos momentos (*moment problem*), mais detalhes podem ser encontrados em Akhiezer (1965).

O problema dos momentos foi inicialmente estudado por Tchebyshev, Markov e Stieltjes. Eles formularam e resolveram diversas variações sobre o tema. O problema está em determinar a distribuição $F(x)$ em função de um conjunto de momentos determinados:

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} x^i F(x) = \mu_i, \text{ para todo } i = 0, 1, \dots,$$

onde os valores de μ_1, μ_2, \dots são momentos.

Existem três problemas dos momentos clássicos: o Hamburger, no qual o suporte de F está contido em \mathbb{R} , o de Stieltjes, para o intervalo $[0, +\infty)$ e o de Hausdorff para um intervalo limitado $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Em cada caso são obtidas as condições necessárias e suficientes para determinar se uma determinada sequência de momentos, $\{\mu_n, n \geq 1\}$, determina unicamente a distribuição de probabilidade associada.

A Aproximação de Edgeworth

No contexto da teoria do risco, apresentamos a abordagem da aproximação de Edgeworth, que foi detalhada por Rincón (2012). Seja S uma variável aleatória com média $E(S)$ e variância finita $\sigma^2(S)$, tal que sua função geradora de momentos exista. Definimos Z como a variável padronizada

$$Z = \frac{S - E(S)}{\sigma(S)}.$$

Seja $M_Z(r)$ a função geradora de momentos de Z . A expansão de Taylor do $\log M_Z(r)$ em torno de $r = 0$ tem a forma

$$\log M_Z(r) = a_0 + a_1 r + a_2 \frac{r^2}{2!} + a_3 \frac{r^3}{3!} + a_4 \frac{r^4}{4!} + \dots$$

onde os coeficientes são

$$a_k = \left. \frac{d^k \log M_Z(r)}{dr^k} \right|_{r=0}.$$

Calculando as derivadas e avaliando-as no ponto zero, encontramos que os cinco primeiros coeficientes são

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= E(Z) = 0, \\ a_2 &= E(Z^2) = 1, \\ a_3 &= E(Z^3), \\ a_4 &= E(Z^4) - 4E(Z^3)E(Z) - 3(EZ^2)^2 + 12E(Z^2)E(Z)^2 - 6E(Z)^4 = E(Z^4) - 3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

A aproximação de Edgeworth consiste em truncar a série de Taylor da função $\log M_Z(r)$ até algum termo adequado. Por exemplo, a aproximação até a quarta potência de r é

$$\log M_Z(r) \approx \frac{1}{2!} r^2 + \frac{a_3}{3!} r^3 + \frac{a_4}{4!} r^4$$

e então

$$\begin{aligned} M_Z(r) &\approx \exp \left[\frac{1}{2!} r^2 + \frac{a_3}{3!} r^3 + \frac{a_4}{4!} r^4 \right] \\ &\approx e^{\frac{r^2}{2}} \exp \left[\frac{a_3}{6} r^3 + \frac{a_4}{24} r^4 \right]. \end{aligned}$$

E se utilizamos a série $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ no segundo fator temos

$$\begin{aligned} M_Z(r) &\approx e^{\frac{r^2}{2}} \left(1 + \frac{a_3}{6} r^3 + \frac{a_4}{24} r^4 + \frac{a_3^2}{72} r^6 \right) \\ &\approx e^{\frac{r^2}{2}} + \frac{a_3}{6} r^3 e^{\frac{r^2}{2}} + \frac{a_4}{24} r^4 e^{\frac{r^2}{2}} + \frac{a_3^2}{72} r^6 e^{\frac{r^2}{2}}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

O passo seguinte é inverter cada termo da equação acima encontrando uma distribuição aproximada para Z .

Como temos que $e^{\frac{r^2}{2}}$ é a função geradora de momentos da distribuição normal padrão e $\phi(x)$ a função de densidade da distribuição normal padrão, se multiplicar por r ,

$$\begin{aligned} r e^{\frac{r^2}{2}} &= \int_{-\infty}^{\infty} r e^{rx} \phi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} e^{rx} \right) \phi(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} \phi'(x) dx. \end{aligned}$$

E procedendo de maneira análoga, multiplicando sucessivamente para r , para qualquer inteiro $n \geq 0$, se chega a

$$r^n e^{\frac{r^2}{2}} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} \phi^{(n)}(x) dx.$$

Em particular, demonstra-se que $r e^{\frac{r^2}{2}}$ é a transformada de Laplace de $-\phi'(x)$. Neste caso, usamos a transformada de Laplace e não a função geradora de momentos pois a função $-\phi'(x)$ não é uma função de densidade. O inverso de $e^{\frac{r^2}{2}}$ é a função de distribuição normal $\Phi(x)$, e para os outros termos derivamos

$$r^n e^{\frac{r^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{rx})^{(n)} \Phi'(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} \Phi^{(n+1)}(x) dx.$$

Então, o inverso de $r^n e^{\frac{r^2}{2}}$ é $(-1)^n$ multiplicado a n -ésima derivada de Φ .

O próximo passo é inverter cada um dos termos da igualdade (A.1), mesmo que não se esteja calculando de maneira formal a inversa da função geradora de momentos, e sim que está usando o fato de que se duas distribuições de probabilidade têm a mesma função geradora de momentos, então suas distribuições coincidem, o que nos leva a

$$f_Z(z) \approx \phi(z) - \frac{a_3}{6} \phi^{(3)}(z) + \frac{a_4}{24} \phi^{(4)}(z) + \frac{a_3^2}{72} \phi^{(6)}(z).$$

Tínhamos definido $Z = \frac{S - E(S)}{\sigma(S)}$, portanto, a função de densidade de $S = E(S) + \sigma(S)Z$ é dada por

$$f_S(x) = \frac{1}{\sigma(S)} f_Z\left(\frac{x - E(S)}{\sigma(S)}\right),$$

e assim chegamos ao seguinte resultado

$$f_S(x) \approx \frac{1}{\sigma(S)} \left[\phi\left(\frac{x - E(S)}{\sigma(S)}\right) - \frac{a_3}{6} \phi^{(3)}\left(\frac{x - E(S)}{\sigma(S)}\right) + \frac{a_4}{24} \phi^{(4)}\left(\frac{x - E(S)}{\sigma(S)}\right) + \frac{a_3^2}{72} \phi^{(6)}\left(\frac{x - E(S)}{\sigma(S)}\right) \right].$$

E derivando diretamente a função densidade $\phi(x)$ da distribuição normal padrão, pelo polinômio de Hermite,

Definição 1. *Polinômio de Hermite* Seja $\phi(x)$ a densidade de probabilidade da normal padrão, definimos os polinômios de Hermite $H_k(x)$ pela equação

$$(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \phi(x) = H_k(x) \phi(x)$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} H_1(x) &= x, \\ H_2(x) &= x^2 - 1, \\ H_3(x) &= 3x - x^3, \\ H_4(x) &= 3 - 6x^2 + x^4, \\ H_5(x) &= -15 + 45x^2 - 15x^4 + x^6, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, pode se demonstrar que

$$\begin{aligned} \phi^{(3)}(x) &= (3x - x^3)\phi(x), \\ \phi^{(4)}(x) &= (3 - 6x^2 + x^4)\phi(x), \\ \phi^{(6)}(x) &= (-15 + 45x^2 - 15x^4 + x^6)\phi(x). \end{aligned}$$

Podemos substituir estas expressões na aproximação de Edgeworth para obtermos uma expressão em termos unicamente da função $\phi(x)$. O primeiro termo da aproximação corresponde a função de densidade de uma normal, com média $E(S)$ e variância $\sigma^2(S)$, e assim podemos verificar que quando S segue uma distribuição normal, a aproximação de Edgeworth é exata e produz como resultado a mesma distribuição.

A aproximação de Edgeworth pode ser expressa também em termos da função de distribuição da seguinte forma. Integrando $f_S(x)$ se obtêm

$$F_Z(z) \approx \Phi(z) - \frac{a_3}{6} \Phi^{(3)}(z) + \frac{a_4}{24} \Phi^{(4)}(z) + \frac{a_3^2}{72} \Phi^{(6)}(z).$$

Considerando a identidade $F_S(x) - F_Z((x - E(S))/\sigma(S))$, se tem que a aproximação de S

em termos da função de distribuição é

$$F_S(x) \approx \Phi(z) - \frac{a_3}{6}\Phi^{(3)}(z) + \frac{a_4}{24}\Phi^{(4)}(z) + \frac{a_3^2}{72}\Phi^{(6)}(z),$$

em que

$$\begin{aligned}\Phi^{(3)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(z^2 - 1)e^{-\frac{z^2}{2}}, \\ \Phi^{(4)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-z^3 + 3z)e^{-\frac{z^2}{2}}, \\ \Phi^{(6)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-z^5 + 10z^3 - 15z)e^{-\frac{z^2}{2}}.\end{aligned}$$

Apêndice B

Algoritmo da simulação Monte Carlo

```
## Modelando S~Gama e r~normal
## Utilizando a equação do artigos:  $U = A_0*(r+1) - (S+ B)$ 
#####
##### Parametros da GAMA
alpha<-1  ## shape de S
beta<-2   ##rate de S

#####
#           Probabilidade de Ruína
#####
N<-1000
M<-100
mean<-seq(from = 0, to = 5, by = ((5 - 0)/(N - 1)) )
Prob_Ruina<-rep(0,N)
Distancia<-rep(0,N)
Er<-rep(0,N)
dpr<-seq(from = 0, to = 2 , by = ((2 - 0)/(N - 1)) )
U<-rep(0,N)
for (i in 1:N)
  {
    for (j in 1:N)
    {
      S<- rgamma(M, shape=alpha, rate=beta)
      r<- rnorm(M, mean[j], dpr[i])
      U <- (1+r)-S
      Prob_Ruina[j]<-length(U[U<0])/length(U)
```

```

}
  Distancia<-abs(Prob_Ruina-0.05)
  indice<-which.min(Distancia)
  Er[i]<-mean[indice]
}

plot(dpr,Er, type="l")

#####
## CEP
#####
N<-100
M<-1000
K<-1000
mean<-seq(from = 0.5, to = 2.5, by = ((2.5 - 0.5)/(K - 1)) )
CEPsimul<-rep(0,N)
Distancia<-rep(0,N)
Er<-rep(0,N)
dpr<-seq(from = 0, to = 2 , by = ((2 - 0)/(N - 1)) )
U<-rep(0,N)
##### Calculo do CEP
S<- rgamma(M, shape=alpha, rate=beta)
r<-0.498
U<- (1+r)-S
CEP<-sum(max(-U,0))/length(U)

####Curva de solvência do CEP
for (i in 1:N)
{
  for (j in 1:K)
  {
S<-rgamma(M, shape=alpha, rate = beta)
  r<-rnorm(M, mean[j], dpr[i])
U<-(1+r)-S
  CEPsimul[i]<-sum(max(-U,0))/length(U)
}
}

```

```

Distancia<-abs(CEPsimul-CEP)
  indice<-which.min(Distancia)
  Er[i]<-mean[indice]
}
plot(dpr,Er, type="l")

#####
## TVaR
#####
N<-100
M<-1000
K<-1000
mean<-seq(from = 0.5, to = 2.5, by = ((2.5 - 0.5)/(K - 1)) )
TVaRsimul<-rep(0,N)
Distancia<-rep(0,N)
Er<-rep(0,N)
dpr<-seq(from = 0, to = 2 , by = ((2 - 0)/(N - 1)) )
U<-rep(0,N)
##### Calculo do TVaR
VaR<--1.152
  S<- rgamma(M, shape=alpha, rate=beta)
  r<-0.498
  U<- (1+r)-S
TVaR<-sum(max(-(U+1.152),0))/length(U)+1.52

####Curva de solvência do TVaR
for (i in 1:N)
{
  for (j in 1:K)
  {
S<-rgamma(M, shape=alpha, rate = beta)
  r<-rnorm(M, mean[j], dpr[i])
U<-(1+r)-S
VaR<-quantile(U, c(0.05))

```

```
    TVaRsimul[i]<-sum(max(-(U+VaR),0))/length(U)+VaR
  }
  Distancia<-abs(TVaRsimul-TVaR)
  indice<-which.min(Distancia)
  Er[i]<-mean[indice]
}
plot(dpr,Er, type="l")
```

Apêndice C

Extensão - Linhas de Solvência e o Mercado de Capitais

Após identificar as combinações $\mathbb{E}(r) - \sigma(r)$ que são compatíveis com as exigências de solvência para uma companhia seguradora, estes resultados devem ser relacionados com os gráficos de risco versus retorno utilizados no mercado. A teoria dos portfólios explica esta relação com outro foco e a linha de mercado de capitais descreve o risco vs retorno para uma carteira eficiente. A subseção C.1 introduz o conceito de teoria do portfólio e a subseção C.2 inclui no gráfico das linhas de solvência a linha de mercado de capital, conforme Eling et al. (2009). Este assunto é apresentado apenas como forma introdutória e pode ser explorado como uma possível extensão desta dissertação.

Para aplicações práticas, também deve ser observada a legislação vigente que disciplina a aplicação dos recursos das reservas, das provisões e dos fundos das sociedades seguradoras, estabelecidas pelo Banco Central, SUSEP, CNSP e CVM. Estas autoridades regulatórias definem limitações e demais condições que os recursos das seguradoras devam ser alocados, entre os seguimentos de renda fixa, renda variável e imóveis (veja Resolução 3.308 do BACEN).

C.1 Teoria dos Portfólios

A teoria moderna dos portfólios é uma teoria das finanças que objetiva maximizar o retorno esperado do portfólio para um determinado risco, ou equivalentemente minimizar o risco para um determinado retorno esperado, escolhendo as devidas proporções de vários ativos. Surgiu com o trabalho de Markowitz (1952), e é uma formulação matemática do conceito de diversificação em investimentos, com o objetivo de selecionar diversos investimentos em ativos que possuam, coletivamente, menores riscos do que qualquer ativo individualmente. Isto pode ser verificado intuitivamente porque diferentes tipos de ativos podem variar em

sentidos opostos. Por exemplo, os preços no mercado de ações se movimentam em sentido diferente dos preços no mercado de títulos, e uma carteira com ambos pode, em teoria, ser menos arriscada do que carteiras que contenham apenas um deles. A diversificação pode diminuir o risco mesmo que o retorno dos ativos sejam correlacionados positivamente (ver Bhalla (2008)).

Mais tecnicamente, a teoria dos portfólios modela o retorno dos ativos e define o risco como sendo o desvio padrão dos retornos, e modela a carteira como sendo uma combinação ponderada de ativos. Combinando diferentes ativos cujos retornos não sejam perfeita e positivamente correlacionados, reduz-se a variância total do portfólio. De acordo com Barabach e Silva (2009), o modelo assume três premissas básicas: (1) os investidores avaliam portfólios apenas com base no valor esperado e na variância da taxas de retorno; (2) os investidores preferem a carteira com maior retorno, quando duas carteiras tiverem o mesmo risco; e (3) são avessos ao risco, pois quando confrontados entre duas carteiras com o mesmo retorno escolhem a que apresenta menor variância (menor risco).

Diante das incertezas do mercado, todos os possíveis resultados do investimento em um ativo devem ser considerados, assim como devem ser analisadas todas as diversas opções de ativos. Porém, as escolhas dos ativos e suas combinações não são fáceis, o que é chamado de problema de seleção de carteira.

Ainda por Barabach e Silva (2009), a equação para o cálculo do retorno esperado do portfólio é

$$\mathbb{E}(R_p) = \sum_i w_i \mathbb{E}(R_i),$$

onde $\mathbb{E}(R_p)$ é o retorno esperado do portfólio, $\mathbb{E}(R_i)$ é o retorno esperado do ativo i e w_i é o peso da alocação do ativo i . A partir da matriz de variância e covariância, calcula-se a variância de um portfólio, medido pela multiplicação do peso de cada ativo por sua covariância,

$$Var(R_p) = \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^N w_s w_j \sigma_{sj},$$

e em notação matricial,

$$Var(R_s) = W_t^T \sigma \sigma_t W_t,$$

onde w_j é o peso do ativo j que representa todos os demais ativos na composição da carteira, σ_{sj} é a covariância entre os ativos s e j , W_t é o vetor coluna dos pesos dos ativos da carteira, em percentual, e $\sigma \sigma_t$ é a matriz de variância e covariância.

A partir da elaboração das matrizes de retorno médio e variância calculam-se os diversos arranjos possíveis com os ativos previamente estabelecidos. Os resultados obtidos formam

um diagrama denominado de espaço retorno-variância. As possibilidades são infinitas, o que torna necessário transformar essas possibilidades em um número finito, conforme explica Elton et al. (2004), ou seja, carteiras que ofereçam maior retorno para o mesmo risco ou carteiras com menor risco para um dado retorno. Este é o princípio do modelo de média-variância.

Seguindo esta lógica, a fronteira eficiente delimita o intervalo em que, fixado o nível de risco, não existe carteira com maior retorno e dado um retorno não existe carteira com menor risco. Dessa forma, qualquer ponto fora da fronteira apresenta retorno menor para um risco maior ou risco maior para um retorno menor que o obtido dentro do intervalo eficiente.

Em 1958, complementando os trabalhos de Markowitz (1952), Tobin (1958) introduz uma taxa livre de risco na análise de investimentos. Tobin mostra que a escolha de carteiras pode ser realizada em dois estágios: no primeiro é necessário encontrar a carteira eficiente de ativos arriscados; no segundo, deve-se determinar a fração ótima para investir na carteira eficiente de ativos arriscados e no ativo livre de risco. Dada a existência dessa taxa livre de risco, existiria apenas uma combinação ótima de ativos com risco, que maximizaria a relação entre risco e retorno, independentemente das preferências do investidor entre risco e retorno.

Desta forma, a linha de mercado de capitais (em inglês *capital market line*) descreve a relação entre risco e retorno para carteiras eficientes e é composta pela combinação de ativos com risco e um ativo livre de risco. Conforme pode ser visto na Figura C.1, a linha tem seu intercepto na taxa livre de risco e sua inclinação representando o coeficiente de recompensa para variabilidade, quanto maior for a inclinação melhor a relação de risco e retorno da carteira. Maiores detalhes veja em Alcântara (1981) e Baima (2012).

C.2 Linhas de Mercado de Capital

Ainda utilizando o exemplo da seguradora alemã, Eling et al. (2009) derivou empiricamente a linha de mercado de capital. Seja k o número de diferentes classes de ativos. Definimos o ativo do tipo $j = 0$, com taxa de retorno r_j , representando o investimento livre de risco, e os ativos que possuem risco representados pela taxa de retorno r_j , com $j = 1, \dots, k$. Conforme definições anteriores, temos que o problema de otimização é descrito por:

$$\sigma(U)^2 = A^2 w^T \sigma_{sj} w + \sigma(S)^2 - 2A \text{cov}(w^T \mathbb{E}(r), S) \rightarrow \min_w$$

Para a otimização do vetor w , devemos obter combinações de risco x retorno eficientes para $\mathbb{E}(r) = w^T \mathbb{E}(\hat{r})$ e $\sigma(r)^2 = w^T C w$.

A linha de mercado foi estimada baseada em índices *benchmark* que representam os investimentos disponíveis. O artigo base nos apresenta 11 índices que representam as principais classes de ativos que compõe a carteira de uma seguradora alemã. A partir dos retornos

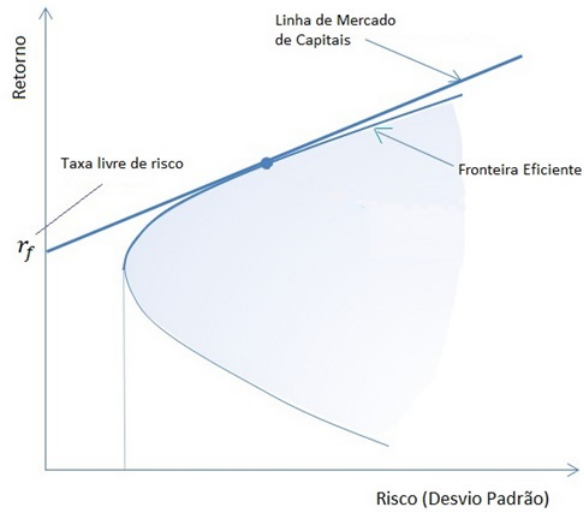


Figura C.1: Esboço da linha de mercado de capitais, com ativo livre de risco
 Fonte: Adaptado de Baima (2012)

mensais de cada um desses índices entre janeiro de 1994 e dezembro de 2006, a média e o desvio padrão são calculados anualizadamente. Assim, baseado nos retornos e suas correlações, o artigo calcula a fronteira eficiente e a linha de mercado de capital utilizando o ativo *JPM Euro Cash 3 Month* como ativo livre de risco ($r_f = 3,95\%$). A linha de mercado de capitais obtida através da otimização é então dada por

$$\mathbb{E}(r) = 0,039492 + 1,0637\sigma(r)$$

e está representada através da Figura C.2, conjuntamente com as linhas de solvência para a aproximação normal power para PR, CEP e TVaR. Em comparação com a Figura 6.2, a Figura C.2 nos apresenta mais duas áreas, (1) e (2). A área (1) apesar de estar solvente pela abordagem das três medidas de risco, não atende a linha de mercado de capitais. É importante ressaltar que os ativos escolhidos para representar a linha de mercado em questão podem não representar a realidade dos atuais investimentos da seguradora. Desta forma, outros critérios de decisão podem ser implementados e a linha deve ser vista apenas como uma ilustração das restrições impostas pelo mercado.

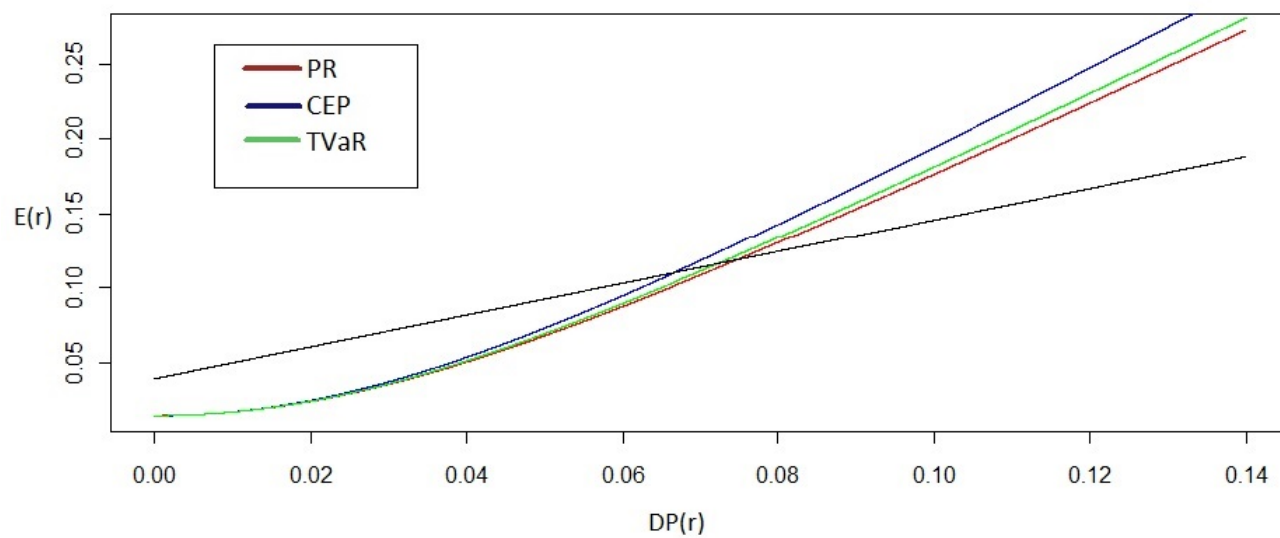


Figura C.2: Linha de mercado e linhas de Solvência para a aproximação normal power para PR, CEP e TVaR, baseados em dados de uma seguradora alemã.