UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas – ICEX

Departamento de Matemática

"Uma história sobre o infinito atual"

Christiano Otávio de Rezende Sena

Professor Orientador: Alberto Berly Sarmiento Vera

Belo Horizonte

2011

Uma história sobre o infinito atual

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da UFMG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Especialista em Matemática para Professores do Ensino Básico.

Professor Orientador: Alberto Berly Sarmiento Vera

Belo Horizonte

2011

Sumário

Resumo

O infinito sempre foi um tema polêmico na história da matemática. Nesta monografia de conclusão do curso fazemos uma breve descrição das ideias relacionadas a esse conceito começando com os pitagóricos na Grécia Antiga até a revolução nessa área proporcionada pelo grande matemático Georg Cantor no séc. XIX com a teoria dos conjuntos, que dá a matemática uma linguagem e notação dos conjuntos além de suas descobertas sobre os números cardinais de conjuntos infinitos. Cantor foi o primeiro a descobrir que existem conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades ao provar que não pode haver uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números inteiros e dos números reais. Além disso, mostrou que a reta, o plano, o espaço tridimensional e todos os espaços de dimensão qualquer têm o mesmo número cardinal. Este trabalho apresenta alguns conceitos matemáticos introdutórios sobre a noção de infinito, em especial de infinito atual e finaliza mostrando alguns paradoxos famosos, o Paradoxo de Russell, o Paradoxo de Cantor e o Paradoxo de Richard, gerados a partir da própria natureza auto-contraditória da teoria dos conjuntos formulada por Cantor e as imprecisões da nossa linguagem.

Palavras-chave: Infinito; Conjunto; Matemática; Paradoxo.

Introdução

O infinito, que por sua grandiosidade é tão admirado, associando-se até mesmo ao papel de divindade, que tanto pode ser infinitamente grande como infinitamente pequeno (o infinitesimal) provoca ao mesmo tempo desconforto e perplexidade por suas propriedades aritméticas e seus inevitáveis paradoxos consequentes da sua aceitação.

Os que primeiro se depararam com essa dicotomia foram os gregos, mais especificamente a escola pitágorica da Grécia Antiga. A geometria mostrava que os inteiros e suas razões eram insuficientes para comparar medidas tão elementares como a diagonal e o lado de um quadrado, a aresta e a diagonal de um cubo ou mesmo a hipotenusa de um triângulo retângulo com seus catetos se estes medirem uma unidade de comprimento. E a constatação foi que, considerando apenas os números racionais, esses não são suficientes para medir todos os segmentos. Os segmentos comparados são incomensuráveis, não importa quão pequena tomemos a unidade de medida. Hoje sabemos que a reta racional é um conjunto infinito e denso, mas não possui os pontos irracionais e sendo assim, não é contínuo.

Essa contradição entre o mundo das formas geométricas e o universo dos números não foi o único impacto da escola pitagórica. Outro paradoxo mais cruel foi levantado pelo filósofo Zenão, discípulo de Parmênides de Eléia (viveu por volta de 450 a.C.). Zenão contesta a escola pitagórica, mostrando a impossibilidade de se compreender o movimento, se aceita a idéia pitagórica de uma reta pensada como simples justaposição de pontos. Os pitagóricos assumiam que tempo e espaço são pensados consistindo de pontos e instantes. Descreviam o ponto como “uma unidade tendo posição”. E assim imagina-se que foi contra essa visão que Zenão propôs seus paradoxos.

Em um de seus paradoxos, Zenão imagina que Aquiles, herói na mitologia grega, disputa uma corrida contra uma tartaruga. Por ser mais lenta, Aquiles dá uma distância de vantagem a esta e assim, surge o paradoxo de que Aquiles nunca alcançará a tartaruga. Zenão confundiu seus companheiros argumentando que o herói, por mais rápido que fosse, não conseguiria ultrapassar a lenta tartaruga que partira à sua frente, pois quando atingisse o ponto de partida da tartaruga, A, esta já se deslocara para um ponto B. Quando ele alcançasse B, a tartaruga já haveria avançado para C. Dessa forma, dizia Zenão, a tartaruga estaria sempre à frente, mesmo que fosse por uma distância mínima.

Além desse existem outros paradoxos deixados por Zenão que causaram na época (e para alguns causam até hoje) certa perturbação, como a *Dicotomia*, nos dizendo que antes que um objeto possa percorrer uma distância dada, deve primeiro percorrer metade desta, e antes disso, deve percorrer a metade dessa metade e assim por diante, sucedendo uma infinidade de subdivisões. Aquele que precise pôr-se em movimento deve fazer infinitos contatos num tempo finito, o que impossibilita iniciar o movimento.

Muitos argumentos foram dados para os paradoxos de Zenão. A questão é que falta uma linguagem adequada para falar do infinito, e assim os paradoxos causam desconforto negando a realidade que observamos. Todos sabem que, sendo mais rápido, Aquiles alcançará a tartaruga. E esse incômodo que causam esses paradoxos trouxe aos gregos o *horror ao infinito*. A argumentação de Zenão é de valor inestimável para a história da ciência. Esses paradoxos nos mostram que o movimento não pode ser compreendido como uma sucessão de estados particulares e o tempo não é uma sucessão de instantes, mas contínuo.

A presente monografia trata assim, dessas questões sobre o conceito de infinito. No capítulo 1 serão abordados conceitos preliminares, levantando algumas definições importantes sobre conjuntos e funções, necessárias no decorrer da pesquisa.

O capítulo 2 apresenta, de forma sintetizada, a história do infinito atual. Mostra como algumas personalidades ao longo da história trataram o conceito de infinito, como Galileu Galilei, Bernard Bolzano, David Hilbert e, principalmente, George Cantor, que inovou os conceitos acerca do infinito, tendo enfrentado muita resistência por seu trabalho pela comunidade matemática da época.

O capítulo 3 lista alguns paradoxos importantes propostos por Bertrand Russell, Jules Richard e George Cantor.

Capítulo I

Conceitos preliminares

Definição 1. Dados os conjuntos X e Y, uma função $f: X \to Y$ (lê-se "uma função f de X em Y") é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y \in Y$. O conjunto X chama-se *domínio* e Y é o *contradomínio* da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $y \in Y$ é chamado de imagem de x pela função f e podemos substituir y por f(x). Escreve-se $x \to f(x)$ para indicar que f *transforma* x em f(x). Os elementos f(x) produzem o *conjunto imagem* da função.

Os seguintes conceitos serão usados corriqueiramente no desenvolver do trabalho:

- Uma função $f : X \to Y$ chama-se injetiva (ou injetora) quando elementos diferentes em x são transformados por f em elementos diferentes em Y. Ou seja, f é injetiva quando $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

- Uma função $f : X \to Y$ chama-se *sobrejetiva* (ou *sobrejetora*) quando, para qualquer elemento $y \in Y$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$. O que significa dizer que todos os elementos do contradomínio de f são imagens, ou seja, o conjunto imagem é o próprio contradomínio da função.

- Uma função $f : X \to Y$ é *bijetiva* (ou *bijetora*) quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva. Em outras palavras uma função é bijetiva se há um emparelhamento perfeito entre os dois conjuntos X e Y, ou seja, há o que chamamos de correspondência um-a-um, ou mais comumente de correspondência *biunívoca*.

Definição 2. Dadas as funções $f: A \subset R \to R$ e $g: B \subset R \to R$, se para $x \in A$, $f(x) \in B$ então faz sentido g(f(x)). Assim definimos $g_o f: f^{-1}(f(A) \cap B) \to R$ denominada de *composta* de g com f.

Por exemplo, dadas as funções $f(x) = 2x+3$ e $g(x) = x-1$, uma função composta pode ser g(f(x)) (que pode também ser escrita como $g_o f$) tal que $g(f(x)) = 2x + 2$, sendo calculada da seguinte maneira: como f(x) = 2x+3 e g(x) = x–1, então: g(f(x)) = g(2x+3) = (2x+3) – 1 = 2x+2.

Observe no exemplo acima que foram apresentadas três funções: f, g e gof. Para entendermos através de um exemplo numérico a composição dessas funções vamos escolher um elemento qualquer no domínio de f, digamos 2. Assim, f(2) = 2 · 2 + 3 = 7 e vemos que f associa 2 ao número 7, ou seja $2 \xrightarrow{f} 7$. Já na função g temos g(7) = 7–1 = 6, ou seja, $7 \xrightarrow{g} 6$. Dessa forma, podemos escrever um encadeamento dessas funções da seguinte maneira:

$$2 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{g} 6$$

Ao estabelecer a composta gof criamos uma função que "leva" 2 ao 6 diretamente, sem a necessidade de fazer os dois cálculos separados (primeiro f(2) e depois g(7)), o que pode ser comprovado a partir da expressão g(f(x)) = 2x + 2, de onde concluímos que g(f(2)) = 6.

Supondo que se tenha duas (ou mais) funções f: X → X e g: X → X, (mesmo domínio e contradomínio), então pode-se formar longas cadeias destas funções, composto em conjunto, tais como $f \circ f \circ g \circ f$. Note que o conjunto imagem de uma função serve sempre de domínio para a outra.

Definição 3. Dada uma função bijetora f: A → B, denominamos de função inversa de f, denotada por f^{-1}, como sendo a função f^{-1}: B → A tal que $f(f^{-1}(y)) = y$, $\forall\, y \in B$ e $f(f^{-1}(x)) = x$, $\forall\, x \in A$.

Somente as funções bijetoras apresentam inversa, pois qualquer número do domínio tem um único correspondente no contradomínio (injetora) e este tem todos os seus valores relacionados uma única vez (sobrejetora). Assim, podemos estabelecer uma relação inversa, transformando o contradomínio em domínio e o domínio em contradomínio de uma função.

Exemplo

Seja a função dada por f(x) = 2x – 3. Assim, cada elemento y do contradomínio é calculado por 2x – 3. Assim, se quisermos "trocar" o domínio e o contradomínio de f, faremos a trocas por suas variáveis, x do domínio e y do contradomínio. Então $y = 2x - 3 \Rightarrow x = 2y - 3 \Rightarrow y = \frac{x+3}{2}$, expressão que representa a função inversa, ou seja:

$$f(x) = 2x - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}.$$

Cardinalidade

Dado $n \in N$, indiquemos com a notação I_n, o conjunto dos números naturais de 1 até n. Assim, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1,2\}$, $I_3 = \{1,2,3\}$ e, mais geralmente, um número k pertence a I_n se, e somente se, $1 \leq k \leq n$.

Definição 1. Seja X um conjunto. Diz-se que X é finito, e que X tem n elementos quando se pode estabelecer uma correspondência biunívoca $f: I_n \rightarrow X$. O número natural n chama-se então o *número cardinal* do conjunto X ou, simplesmente, o número de elementos de X.

A correspondência $f: I_n \rightarrow X$ chama-se contagem dos elementos de X. Pondo $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, ... , $f(n) = x_n$, podemos escrever $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Para todo n o conjunto é finito e seu número cardinal é n. Assim, todo número natural n é o número cardinal de algum conjunto finito. A fim de evitar exceções, admite-se ainda incluir o conjunto vazio $\varnothing$ entre os conjuntos finitos e dizemos que $\varnothing$ tem zero elementos. Assim, por definição, zero é o número cardinal do conjunto vazio. Denotamos o cardinal de um conjunto X por #X

Dessa forma, temos:

$$\# \varnothing = 0$$

$$\# \{0\} = 1$$

$$\# \{0, 1\} = 2$$

$$\# \{0, 1, 2\} = 3$$

$$\ldots$$

$$\# \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} = n$$

Definição 2. Sejam X e Y conjuntos quaisquer. Se existe uma bijeção $f : X \to Y$, dizemos que o conjunto X é *eqüipotente* ao conjunto Y e denotamos por $X \approx Y$. Assim, dizemos que X e Y têm a mesma cardinalidade, que é o número de elementos do conjunto, ou de outra forma, possuem a mesma potência.

A relação de equipotência é uma relação de equivalência.

- Sabemos que $f : X \to X$ tal que $f(x) = x$ é bijetiva. Assim, todo conjunto é eqüipotente a si mesmo. Logo, a propriedade reflexiva é válida entre conjuntos.
- Se X é eqüipotente a Y, isto é, se existe uma bijeção $f : X \to Y$, como $f^{-1} : Y \to X$ é também uma bijeção, Y é também eqüipotente a X, ou seja, vale a propriedade simétrica.
- Se X é eqüipotente a Y e Y é eqüipotente a Z, então existem as bijeções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$. Como $gof : X \to Z$ é também uma bijeção, X é eqüipotente a Z. Assim, vale a propriedade transitiva.

Definição 3. Dados dois conjuntos X e Y, dizemos que $\# X \leq \# Y$ se existe $f : X \to Y$ injetiva, ou de outro modo, X é eqüipotente a um subconjunto de Y.

Demonstra-se na Teoria dos conjuntos que se pode de todo conjunto deduzir um conjunto de cardinalidade superior. Consideremos o caso muito simples de um conjunto X com três elementos: $X = \{0, 1, 2\}$. Denotando por P(X) o conjunto das partes de X, ou seja, o conjunto formado pelos subconjuntos de X, temos: $P(X) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ e $\# P(X) = 8 > 3 = \# X$.

De um modo geral, um subconjunto de um conjunto de *n* elementos é formado decidindo se cada elemento entra ou não no subconjunto. Como então, para cada um dos *n* elementos, temos duas possibilidades (entra ou não), o número total de possibilidades é 2^n. Assim, se $\# X = n$ então $\# P(X) = 2^n$.

Capítulo II

O infinito atual

Diz-se que um conjunto é infinito quando ele não é finito. Isto quer dizer que, se X é um conjunto infinito, não vazio e não importa qual seja $n \in N$, não existe correspondência biunívoca $f: I_n \rightarrow X$ usada na definição 1. O exemplo mais simples talvez seja a sequência dos números naturais, que, sendo ilimitada, entendemos como infinita. Esse modo de tratar quantidades ilimitadas corresponde ao chamado *infinito potencial*.

Desde o início do séc.XVII até o séc.XIX, dois matemáticos fizeram importantes descobertas sobre a natureza do infinito: Galileu (1584-1642) e Bolzano (1781-1848). Com eles é desenvolvida a idéia do chamado *infinito atual*, que é aquele que pode ser concebido como uma entidade "completa", "acabada": todos os seus elementos podem ser pensados num ato único, ou ainda, no infinito como objeto. Esta distinção é muito importante: o infinito potencial consiste num processo através do qual um número cresce para além dos limites finitos; o infinito atual não é um processo, é ele próprio um número.

O primeiro matemático a fundamentar a noção de infinito atual foi Bernard Bolzano, em sua obra “Paradoxos do infinito” (1851), defendendo a existência de um infinito atual e enfatizando que o conceito de equivalência entre dois conjuntos era aplicável tanto a conjuntos finitos como infinitos. Até então, a noção de infinito restringia-se à noção de infinito potencial. Galileu, em seu texto *Diálogos sobre as duas novas ciências* (1638), dá um grande salto para a identificação do infinito atual, estabelecendo a bijeção entre os números naturais e seus quadrados:

$$1 \rightarrow 1$$

$$2 \rightarrow 4$$

$$3 \rightarrow 9$$

$$\ldots$$

$$n \to n^2$$

...

Muito naturalmente vemos que para cada número natural, há um, e somente um quadrado perfeito e assim não temos dificuldade em aceitar o que, a partir dessa correspondência, Galileu diz: “devemos concluir que há tantos quadrados quantos são os números”.

Porém essa constatação causou certa estranheza, pois há séculos uma verdade era indiscutível: o todo é sempre maior que uma de suas partes, e por esse fato, essa demonstração é conhecida como *paradoxo de Galileu*. É claro que isso é verdade para os conjuntos finitos, entretanto, Galileu percebeu que os conjuntos infinitos não se comportavam dessa mesma forma.

A respeito disso, destacamos um exemplo de manipulação do infinito criado pelo matemático David Hilbert (1862-1943), denominado de Paradoxo do Hotel Infinito de Hilbert:

O Hotel de Hilbert tem um número infinito de quartos, numerados consecutivamente, um para cada número natural. Num fim de semana, o hotel estava com todos os seus quartos ocupados, quando chega um viajante. A recepcionista vai logo dizendo:

– Sinto muito, mas não há vagas.

Ouvindo isto, o gerente interveio:

– Podemos abrigar o cavalheiro, sim senhora. E ordena:

– Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante. Quem estiver no quarto n, mude para o quarto n+1. Isto manterá todos alojados e deixará disponível o quarto 1 para o recém chegado.

Logo depois chegou um ônibus com 1000 passageiros, todos querendo hospedagem. A recepcionista, tendo aprendido a lição, removeu o hóspede de cada quarto n para o quarto n+1000 e acolheu assim todos os passageiros do ônibus. Porém, horas depois, chegou um trem com uma infinidade de passageiros. Desesperada, apelou para o gerente que prontamente resolveu o problema dizendo:

– Passe cada hóspede do quarto n para o quarto 2n. Isto deixará vagos todos os apartamentos de número ímpar, nos quais poremos infinitos hóspedes. Pensando melhor: mude quem está no quarto n para o quarto 3n. Os novos hóspedes, ponha-os nos quartos de número 3n+2. Deixaremos vagos os quartos de número 3n+1. Assim, sobrarão infinitos quartos vazios e eu poderei ter sossego por algum tempo.

Utilizando um artifício parecido podemos perceber que entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares também há uma correspondência biunívoca

$$1 \rightarrow 2$$
$$2 \rightarrow 4$$
$$3 \rightarrow 6$$
$$4 \rightarrow 8$$
$$\ldots$$
$$n \rightarrow 2n$$
$$\ldots$$

Ou ainda, entre o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos naturais também há tal correspondência:

Consideremos a função $f : N \rightarrow Z$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, \text{se } x \text{ é par} \\ -\frac{x+1}{2}, \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

A função nos mostra um emparelhamento perfeito entre os dois conjuntos:

$$0 \rightarrow 0$$
$$1 \rightarrow -1$$
$$2 \rightarrow 1$$
$$3 \rightarrow -2$$
$$4 \rightarrow 2$$
$$5 \rightarrow -3$$

$$6 \rightarrow 3$$

...

Bolzano formulou essa mesma idéia correspondendo os intervalos reais [0, 1] e [0, 2], propondo a seguinte bijeção:

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$$

$$f(x) = 2x$$

Pondo assim, um a um os elementos dos dois intervalos, percebemos, mais uma vez que são conjuntos *eqüipotentes*, ou seja, que o intervalo “menor” possui tantos números quanto o intervalo “maior”. Enfim, a crença de que o todo é maior que a parte perde todo o sentido aqui. Bolzano estudou vários exemplos a partir das idéias do paradoxo de Galileu, percebendo que tal paradoxo pode ser interpretado como uma propriedade dos conjuntos infinitos, publicado em sua obra “Os paradoxos do infinito”, o que foi fundamental para o desenvolvimento do cálculo sobre uma teoria de conjuntos infinitos rigorosamente desenvolvida no final do séc. XIX. Richard Dedekind (1831-1916) estabeleceu que um conjunto é infinito se pode ser colocado em correspondência biunívoca com alguma de suas partes próprias e é esse o conceito que mais adotamos hoje na teoria dos conjuntos.

George Cantor

Nascido em S. Petersburgo, com fortes inclinações para a teologia e matemática, em especial sobre a continuidade e o infinito. Iniciou seus estudos em Zurique, Göttingen e Berlim e concentrou-se primeiramente em filosofia, física e matemática. Doutorou-se posteriormente em Berlim com uma tese sobre a teoria dos números, cujo trabalho estimulou as idéias revolucionárias em seus trabalhos seguintes, na teoria dos conjuntos. Cantor desenvolveu a teoria dos conjuntos, como técnica para fazer a “anatomia do infinito”.

Georg Cantor (1845-1918)

Conjuntos enumeráveis

Ao conjunto dos números naturais positivos, conjunto que se pode contar, numerar, Cantor denominou de *enumerável*. Assim, é enumerável todo conjunto eqüipotente ao conjunto dos naturais. Vimos anteriormente que os conjuntos dos quadrados perfeitos e o conjunto dos números inteiros podem ser colocados em correspondência biunívoca com os naturais, assim, são também enumeráveis. Esses conjuntos parecem menores que o conjunto de todas as frações racionais, o conjunto dos números racionais. No entanto, Cantor mostrou que os números racionais formam também um conjunto enumerável, isto é, pode ser posto em correspondência biunívoca com os naturais. Essa idéia a princípio talvez fuja do senso comum porque as frações racionais são tão densas, que entre duas quaisquer delas, por mais próximas que estejam, há sempre outra. Então entre duas frações quaisquer há uma infinidade delas e esse fato nos faz parecer que não poderíamos estabelecer uma correspondência um-a-um com os números naturais. Mas Cantor nos provou que o senso comum estava equivocado: no esquema abaixo distribuímos as frações racionais em linhas e colunas de modo que em cada linha, fixamos o numerador e aumentamos de um em um os denominadores seguintes. Assim, na primeira linha temos todas as frações de numerador igual a 1, na segunda linha, todas as frações de numerador igual a 2, na terceira igual a 3 a assim por diante. Vemos claramente que estão representados todos os números racionais que podemos enumerar seguindo as flechas:

$$
\begin{tikzcd}
1/1 \arrow[r] & 1/2 \arrow[dl] & 1/3 \arrow[r] & 1/4 \arrow[dl] & 1/5 & \cdots \\
2/1 \arrow[d] & 2/2 \arrow[ur] & 2/3 \arrow[dl] & 2/4 \arrow[ur] & 2/5 & \cdots \\
3/1 \arrow[ur] & 3/2 \arrow[dl] & 3/3 \arrow[ur] & 3/4 & 3/5 & \cdots \\
4/1 \arrow[d] & 4/2 \arrow[ur] & 4/3 & 4/4 & 4/5 & \cdots \\
5/1 \arrow[ur] & 5/2 & 5/3 & 5/4 & 5/5 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Eis a correspondência:

$$1/1 \rightarrow 1$$

$$1/2 \rightarrow 2$$

$$2/1 \rightarrow 3$$

$$3/1 \rightarrow 4$$

$$2/2 \rightarrow 5$$

$$1/3 \rightarrow 6$$

...

O contínuo

Em 1874 Cantor percebeu que o conjunto dos números reais não poderia ser posto em correspondência biunívoca com os naturais, ou seja, não é enumerável: ele é de tamanho estritamente superior. Através de um simples e elegante método denominado de diagonal, Cantor provou a impossibilidade da bijeção entre os dois conjuntos e, não sendo enumerável, Cantor denominou o conjunto dos reais de contínuo.

Para justificar a impossibilidade da correspondência, primeiro vamos ver que R é eqüipotente ao intervalo]0, 1[pela função:

$$f: R \rightarrow]0,1[$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+|x|}+1\right)$$

que se trata de uma bijeção entre R e]0,1[.

Usando o método diagonal, vamos mostrar que R não é enumerável. Utilizando o método de redução ao absurdo, vamos supor que R seja enumerável. Como R ≈]0,1[, então o intervalo]0,1[é também enumerável. Assim, para cada $k \in N$ associamos a_k pertencente ao intervalo]0,1[, consideremos a representação decimal infinita dada por $a_k = 0,x_{k1}x_{k2}...x_{kn}...$

Assim, temos

k	a_k	representação decimal
1	a_1	$0,x_{11}x_{12}...x_{1n}...$
2	a_2	$0,x_{21}x_{22}...x_{2n}...$
3	a_2	$0,x_{31}x_{32}...x_{3n}...$
...	...	...
n	a_n	$0,x_{n1}x_{n2}...x_{nn}...$
...	...	...

Seja $b = 0,b_1b_2...$ o elemento do intervalo]0,1[definido da seguinte forma:

$$b_j = \begin{cases} 1, \text{ se } x_{jj} \neq 1 \\ 0, \text{ se } x_{jj} = 1 \end{cases}$$

Da definição de b segue que $b_j \neq x_{jj}$, $\forall\ j = 0, 1, 2, ...$, e assim $b \neq a_k\ \forall\ k = 0, 1, 2, ...$ Portanto $b \in [0, 1]$ não está associado a nenhum a_k, qualquer que seja k, e assim R não pode ser enumerável.

Cantor mostrou ainda que os conjuntos infinitos podem apresentar um infinidade de tamanhos. Para isso usou o seguinte resultado:

Proposição 1. Sejam S um conjunto e $P(S) = \{A; A \subseteq S\}$ o conjunto das partes de S. Então S não é eqüipotente a P(S).

Demonstração. Vamos supor que $S \approx P(S)$. Logo, existe $f : S \rightarrow P(S)$ bijetora.

Seja $A = \{x \in S; x \notin f(x)\}$. Denotemos $f(x) = B_x \subseteq S$. Assim, $A = A = \{x \in S; x \notin B_x\}$. Portanto $A \in P(S)$. Como f é bijetora, existe $p \in S$ tal que $f(p) = A$.

Se $p \in A \Rightarrow p \notin f(p) = B_p = A$ (absurdo!)

Se $p \notin A \Rightarrow p \in f(p) = B_p = A$ (absurdo!)

Logo, não existe $f : S \rightarrow P(S)$ bijetora.

∎

Teorema 1. $\#A < \#P(A)$. Logo dado qualquer cardinal, sempre existe um número cardinal maior que o número dado.

Demonstração. A função $f: A \rightarrow P(A)$ definida por $f(x) = \{x\}$ é injetora.

Portanto $\#A \leq \#P(A)$. Mas vimos que A não é eqüipotente a P(A). Assim, $\#A \neq \#P(A)$. Logo, $\#A < \#P(A)$.

∎

Cantor provou também que a cardinalidade de R é igual a cardinalidade de P(N), o conjunto das partes de N. Apresentamos aqui uma prova desse resultado.

Teorema 2. $\#R = \#P(N)$.

Demonstração. Seja $C(A) = \{ f : A \rightarrow \{0,1\} / f \text{ é função}\}$. Temos $C(A) \approx P(A)$.

De fato, basta definir

$F : P(A) \rightarrow C(A)$ por $F(S) = f / f : A \rightarrow \{0,1\}$onde, para cada $a \in A$,

$$f(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in S \\ 0, & \text{se } a \notin S \end{cases}$$

F é uma função bijetora e o resultado segue. Para $A = N$ temos $C(N) \approx P(N)$

Agora, temos $\#(P(N) = \#(P(Q)$, pois $N \approx Q$.

Seja $\psi : R \rightarrow P(Q)$ definida por $\psi(a) = \{x \in Q;\ x < a\}$, ou seja, $\psi(a)$ é o subconjunto de Q dos números menores que a. ψ é injetora, pois, sejam a e b $\in$ R com a < b. Logo, existe p $\in$ Q / a < p < b. Assim $p \notin \psi(a)$ e $p \notin \psi(b)$. Daí $\psi(a) \neq \psi(b)$. Temos então demonstrado que #R $\leq$ #P(N). Mas $P(Q) \approx P(N) \approx C(N) = \{f : N \rightarrow \{0,1\}\ ;\ f$ é função$\}$.

Sabemos que qualquer elemento x do intervalo]0,1[pode ser escrito na forma $0,x_1x_2x_3...$ (representação decimal de x).

Usando esse fato definimos $F : C(N) \rightarrow\ ]0,1[$ por $F(f) = 0,f(1)f(2)f(3)...$. Assim F(f) é uma representação decimal constituída de zeros e uns. F é injetora.

De fato, se f, g $\in$ C(N) com $f \neq g$, existe $n \in N$ tal que $f(n) \neq g(n)$. Logo, $0,f(1)f(2)f(3)...f(n)... \neq 0,g(1)g(2)g(3)...g(n)...$. Portanto $F(f) \neq F(g)$. Assim #C(N) $\leq$ #]0,1[. Mas #C(N) = #P(N) e #]0,1[= #R. Portanto, #P(N) = #R.

∎

Números transfinitos

Assim, o conjunto dos números naturais, dos quadrados perfeitos, dos inteiros, racionais são todos eqüipotentes. Cantor atribuiu tamanhos, que chamou de potências, aos diversos tipos de conjuntos infinitos. A esses tamanhos deu o nome de "números transfinitos" e fixou que a potência de todo conjunto enumerável é o primeiro número transfinito denotado por

$$\aleph_0$$

(Alef zero)

E a potência de R, ou seja, dos contínuos, representou por *c*. Observando que, sendo $\#N = \aleph_0$, denotou ainda que $\#R = c = 2^{\aleph_0}$.

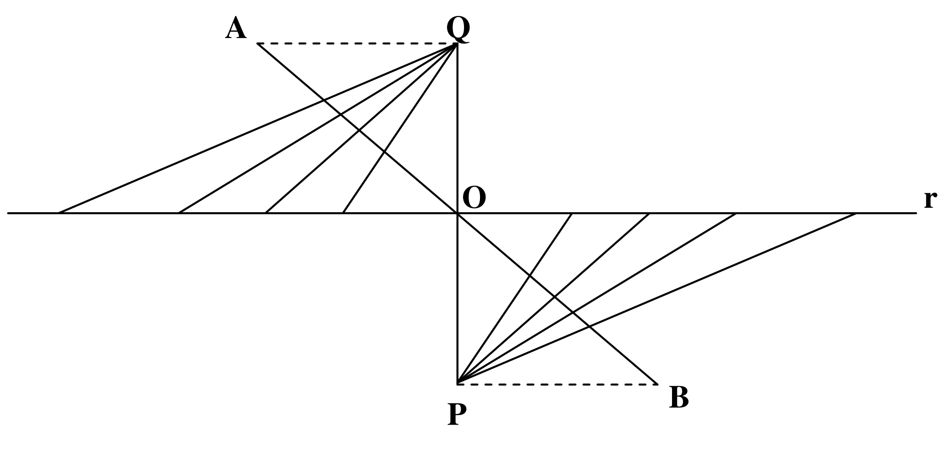
Como haviam muitos infinitos, onde vimos por exemplo que a potência dos enumeráveis é estritamente menor que a dos contínuos, que por suas vez é estritamente menor que o conjunto de suas partes e assim por diante, Cantor se fazia alguns questionamentos:

Se havia infinitos números transfinitos, será possível enumerá-los?

Designando por $\aleph_1$ o menor cardinal depois de $\aleph_0$, $\aleph_2$ o menor cardinal depois de $\aleph_1$ e assim por diante, será possível criar uma sequência de alefs tal que $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < ... < \aleph_n < ...$? Havia algum transfinito entre $\aleph_0$ e c? Sobre essa questão, Cantor morreu, em 1918, sem obter tal resposta e ainda hoje não a temos. A questão ficou conhecida como a “Hipótese do Continuum.” Em 1938, o matemático austríaco Kurt Godel (1906-1978) provou um teorema, denominado de Teorema da Incompletude de Godel, que a Hipótese do Continuum é consistente com a Teoria dos Conjuntos, ou seja, aceitá-la não geraria contradições. Porém Godel não conseguiu mostrar que a negação da Hipótese do Continuum também é consistente com a Teoria dos Conjuntos, prova essa que foi dada em 1963 por Paul Cohen (1934-2007), mostrando a independência da Hipótese do Continuum em relação a todos os axiomas da Teoria dos Conjuntos, isto é, poderia ser tanto verdadeira como falsa, não podendo ser provada nem refutada no sistema atual. Paul Cohen ganhou em 1966 a medalha Fields por esse trabalho.

Potências iguais em dimensões distintas

A potência do conjunto de pontos numa reta é a mesma que a potência do conjunto de pontos de um segmento de reta, por menor que seja. De fato, seja r uma reta de um plano α e sejam A e B dois pontos de semiplanos distintos limitados por r de forma que o segmento AB não seja perpendicular a r e intercepte r no ponto O. Escolhendo P e Q de modo que PQ seja perpendicular a r e ainda AQ e BP paralelos a r, então traçando semiretas de Q e P que cortam tanto AB quanto r, estabelece-se facilmente uma correspondência biunívoca entre os pontos de AB e de r.

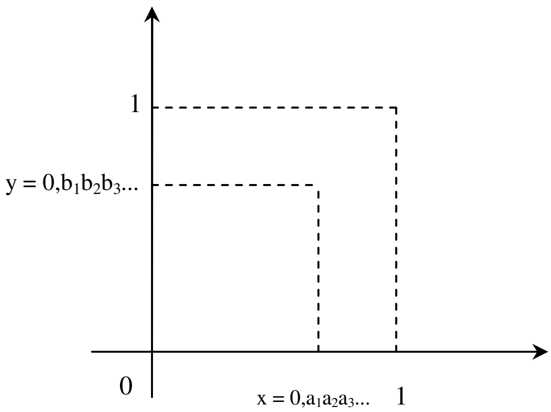


Posteriormente, Cantor estendeu a teoria aos contínuos n dimensionais. Demonstrou que o conjunto de pontos no interior de um quadrado tem a mesma potência do contínuo, isto é, do conjunto dos pontos de um dos lados do quadrado, que é o que diz o seguinte teorema:

Teorema. O quadrado $S = [0,1] \times [0,1] \subset R^2$ possui a mesma quantidade de pontos que o segmento $[0,1] \subset R$.

Demonstração. Para demonstrarmos tal afirmação, basta exibir uma bijeção entre esses dois conjuntos. Dado $(x,y) \in S = [0,1] \times [0,1]$, $x = 0,a_1a_2a_3...$ e $y = 0,b_1b_2b_3...$, definimos $f:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ 0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3... & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$



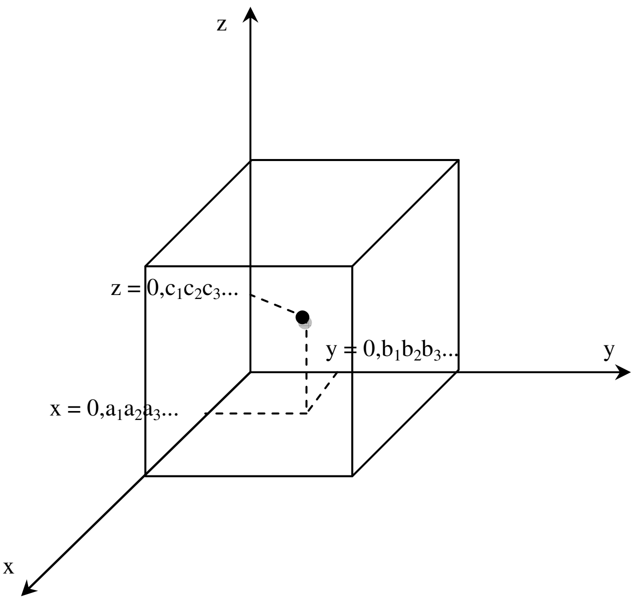
Assim, temos $f(x,y) = 0,a_1b_1a_2b_2...a_nb_n... = f(x',y') = 0,a_1b_1a_2b_2...a_nb_n...$ $0,a'_1b'_1a'_2b'_2...a'_nb'_n...$ $\Leftrightarrow$ $a_n = a'_n$ e $b_n = b'_n$ $\forall$ $n \in N \Leftrightarrow x = x'$ e $y = y' \Rightarrow$ f é injetiva.

Além disso, dado $t \in [0,1]$, $t = 0,c_1c_2c_3...c_n = f(0,c_1c_3c_5...c_{2n-1}... , 0,c_2c_4c_6...c_{2n}...)$ com $n \in N$. Isto é, $t = f(x,y)$ para algum $(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \Rightarrow$ f é sobrejetiva.

Portanto, f é bijetiva, e isto prova que os conjuntos têm a mesma cardinalidade.

∎

Note que, no teorema, ao invés do quadrado S = $[0,1]\times[0,1] \subset R^2$, tivéssemos o cubo sólido S_3 = $[0,1]\times[0,1]\times[0,1] \subset R^3$, então, para cada ponto (x,y,z) = $(0,a_1a_2a_3... , 0,b_1b_2b_3... , 0,c_1c_2c_3...)$ poderíamos definir uma função $f : S_3 \rightarrow [0,1]$ tal que $f(x,y,z) = 0,a_1b_1c_1a_2b_2c_2...a_nb_nc_n...$



É fácil verificar que f é bijetora. E da mesma forma, para $S_n = [0,1]\times[0,1]\times...\times [0,1] \subset R^n$, constrói-se de maneira análoga, uma bijeção entre S_n e [0,1], provando que $\#S_n = \#[0,1]\ \forall\ n \in N$. Esse resultado surpreendeu até mesmo Cantor, que demonstrou que a dimensão não decide a potência de um conjunto. A potência de um conjunto de pontos num segmento de reta é a mesma numa superfície qualquer de um plano ou mesmo o conjunto de pontos do espaço tridimensional. Ou seja, há tantos pontos num segmento de reta qualquer, por menor que ele seja, quanto em todo o universo. Cantor ficou tão surpreso com esse resultado que, em 1877, escreveu ao seu maior colaborador, o matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916): “Eu vejo isso, mas não acredito”.

Cantor estava entre os matemáticos mais notáveis, e certamente mais originais de seu tempo e, no entanto, nunca conseguiu uma posição de destaque no âmbito profissional. Passou a maior parte de sua carreira na Universidade de Halle, pequena escola sem grande reputação. Esperava obter um posto na Universidade de Berlim e culpou Leopold Kronecker (1823-1891) por sua falta de sucesso, já que este possuía o título de membro da Academia de Ciências de Berlim e se opunha ferozmente a aceitação de Cantor. Kronecker era um pilar na comunidade matemática alemã e para ele, apenas os números inteiros tinham existência real, onde todos os outros tipos de números eram ilusões imaginadas pelos matemáticos. É dele uma bem conhecida afirmação “Deus fez os inteiros, e todo o resto é obra do homem”. Kronecker chegou a classificar Cantor de “charlatão científico” e “corruptor da juventude”. Durante uma década atacou Cantor e sua obra. Outro matemático que se opôs fortemente as idéias de Cantor foi Jules Henri Poincaré (1854-1912), com enorme peso na comunidade matemática. Considerado o matemático mais importante do período transitório entre os séculos XIX e XX e, de acordo com diversos historiadores, nenhum de seus contemporâneos dominou tanta diversidade de assuntos, enriquecendo todos eles. Poincarè chegou a afirmar que a teoria dos conjuntos era uma moléstia, uma doença perversa da qual, algum dia, os matemáticos estariam curados. Devido a esses ataques, Cantor teve diversos acessos de depressão chegando inclusive a questionar a própria obra, com o que também muito contribuiu para seus colapsos nervosos o enorme esforço, porém infrutífero, de resolver o problema da hipótese do continuum. Apesar de sofrer ataques pessoais e à sua obra, Cantor despertou também a admiração de vários matemáticos ilustres, dentre os quais destaca-se David Hilbert (1862-1943), considerado um dos maiores matemáticos do séc. XX, assim como Poincarè. Mas, ao contrário desse, Hilbert foi um admirador das idéias de Cantor, descrevendo a aritmética transfinita como “o produto mais extraordinário do pensamento matemático, uma das mais belas realizações da atividade humana no domínio do puramente inteligível”. Hilbert, na conferência que deu a 4 de Junho de 1925, por ocasião do congresso organizado pela Sociedade Matemática de Westfália, em Münster, afirmou que “ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós”.

Capítulo III

Alguns paradoxos

Introdução

Ao longo da história, os paradoxos serem exerceram fascínio e foram responsáveis muitas vezes pelo desenvolvimento da matemática. Consistindo basicamente de duas proposições contrárias ou contraditórias derivadas conjuntamente a partir de argumentos fora do contexto particular que gera o paradoxo. Ou seja, partindo de premissas aceitas e utilizadas é, pelo menos aparentemente, possível, em certas condições específicas, inferir duas proposições que ou afirmam exatamente o inverso uma da outra ou não podem ser ambas verdadeiras. Um exemplo disso pode ser observado na seguinte frase:

"Esta frase é falsa."

Se a frase é falsa, então é verdadeira; se é verdadeira, então é falsa.

Paradoxo de Russell

Um dos argumentos dos que atacavam a teoria dos conjuntos de Cantor são as contradições e paradoxos que ela apresenta. Dentre os muitos paradoxos que foram descobertos, destaca-se o chamado Paradoxo de Russell, que nos mostra que a própria noção de conjunto não está livre de contradições. O paradoxo diz o seguinte: Considere o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos. Este conjunto é elemento de si próprio?

Para entendê-lo, primeiro vamos lembrar que um conjunto pode ser elemento para outro conjunto, como por exemplo, o conjunto das partes. Sabemos ainda que um conjunto pode ser inclusive elemento de si próprio, como por exemplo o conjunto dos conceitos abstratos, que é em si um conceito abstrato, logo é um conjunto que deve pertencer a si mesmo. Por outro lado, existem conjuntos que não pertencem a si mesmos, como o conjunto de todos os homens que não é um homem, portanto não deve pertencer a si mesmo. Formemos assim o conjunto A de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos. Pelo princípio do terceiro excluído, ou A pertence ou não pertence a si mesmo. Assim, temos:

- Se $A \in A$, então pertence a si mesmo e, como tal, não pode ser elemento do conjunto A, que só contém conjuntos que não pertencem a si mesmos. Contradição.

- Se $A \notin A$, ou seja, não pertence a si mesmo, então ele é elemento de A, conjunto de todos os que não pertencem a si mesmos. Contradição.

Uma variante desse problema é o paradoxo do barbeiro que diz o seguinte: Numa cidade, um barbeiro corta o cabelo somente das pessoas que não cortam o próprio cabelo. Esse barbeiro corta o próprio cabelo?

Analisemos a situação: Se ele próprio se barbear, pertencerá ao grupo dos homens que se barbeiam sozinhos, mas ele nunca faz a barba de alguém pertencente a esse grupo. Portanto, não pode barbear-se a si próprio!

Então, se é outra pessoa que faz a barba ao barbeiro, ele pertence ao conjunto dos homens que não se barbeiam a si próprios, mas ele faz a barba de todos os homens desta categoria, portanto tem de fazer a sua própria barba!

A regra resulta num paradoxo, pois o barbeiro ao mesmo tempo deve e não deve fazer a própria barba, não podendo se decidir sem quebrar a regra.

Paradoxo de Cantor

Observe que não cometemos nenhum erro no raciocínio que nos leva a tal paradoxo. Então é natural nos perguntarmos: se não há nenhum erro no raciocínio, por que chegamos a essas contradições? Acontece que o universo do discurso é tão amplo que acaba permitindo tais contradições. Cantor percebeu que o próprio conceito de conjunto foi feito de maneira tão livre que também abria possibilidades a tais contradições, como neste exemplo: imagine o conjunto U de todos os conjuntos, tendo dessa forma a maior de todas as potências, já que reuniria todos os conjuntos passíveis de consideração. Acontece que P(U), ou seja, o conjunto das partes de U, deve ter potência maior que a de U, como Cantor já havia demonstrado e, dessa forma, temos uma contradição com a hipótese inicial da existência de um conjunto de todos os conjuntos.

Paradoxo de Richard

Por conta desses paradoxos gerados pela flexibilidade da linguagem, muitos matemáticos pensaram em formular um sistema de axiomas a partir dos quais fosse possível estabelecer resultados precisos a partir da teoria sem que fossem geradas tais contradições. Um deles foi Ernst Zermelo (1871–1953), que percebeu que duas coisas não poderiam coexistir: a consideração livre de conjuntos, como o conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmos, e a caracterização de um conjunto por uma propriedade de seus elementos. Ora, essa última é tão natural que razoavelmente a primeira foi descartada por Zermelo, ou seja, ele descartou a condição de tomarmos um conjunto livre de restrições. E com a idéia de que sempre podemos formar um conjunto a partir de outro, Zermelo formulou o seguinte axioma, chamado de *axioma da especificação*:

Dados um conjunto A e uma propriedade P(x)*, existe um conjunto M cujos elementos são os elementos de A que satisfazem a propriedade P*(x)*. Simbolicamente,* $M = \{x \in A \,/\, P\,(x)\}$.

Utilizamos com muita freqüência o axioma da especificação na linguagem matemática, quando, por exemplo, nos referimos ao conjunto das raízes de uma equação ou ao conjunto dos números pares. Entretanto, mesmo restringindo a consideração livre de conjuntos, assumindo apenas a caracterização de um conjunto por uma propriedade de seus elementos, não estamos livres de cairmos em contradições como podemos observar no exemplo seguinte, denominado Paradoxo de Richard:

Seja *M* o conjunto dos números naturais que podem ser descritos com menos de 20 palavras da língua portuguesa. Sabemos ser um conjunto finito, pois não é ilimitado o arranjo de todas as palavras da língua portuguesa em grupos de menos de 20 palavras e considerando todos esses grupos ainda assim estamos nos referindo apenas a uma fração, representado por aqueles que resultam em definições significativas de números naturais. Sendo M' o complementar de M em relação ao conjunto dos números naturais, M' é um conjunto infinito e sendo um subconjunto de N, possui um menor elemento. Seja m esse menor elemento. Então m é o menor número natural que não pode ser descrito com menos de 20 palavras da língua portuguesa. Porém, observe que descrevemos m com menos de 20 palavras. Eis o paradoxo.

O paradoxo que acabamos de citar expõe um grave problema: as imprecisões da linguagem, que por mais correta que seja, contém muitas imprecisões e ambigüidades, como por exemplo: "A polícia cercou o ladrão do banco na rua Santos." O banco ficava na rua Santos, ou a polícia cercou o ladrão nessa rua? Ou ainda: “O patrão discutiu com o funcionário e estragou seu dia.” Quem ficou com o dia estragado, o patrão ou o funcionário?

Kurt Gödel (1906–1978), um dos maiores lógicos do século XX, disse certa vez: “Quanto mais reflito sobre a linguagem, tanto mais me admiro que as pessoas consigam se entender umas com as outras.”

O problema da linguagem corrente quando a utilizamos na matemática é que ela não atende ao rigor lógico (a ambigüidade foi proposital, é claro que é a linguagem que não atende ao rigor). Assim, em 1922, os matemáticos Fraenkel (1891-1965) e Skolem (1887-1963) propuseram o banimento do uso da linguagem corrente na matemática que teria apenas uma linguagem própria, formal, utilizando símbolos como $\in$ (pertence), $\Rightarrow$ (implica), $\leq$ (menor ou igual que) e etc. Assim, o exemplo do conjunto proposto no paradoxo de Richard não poderia ser formulado e da mesma forma, outros conjuntos que poderiam gerar paradoxos não seriam possíveis de serem considerados utilizando apenas a linguagem formal. Aliás, desde a proposta de Fraenkel e Skolem, ninguém até hoje consegui formular um propriedade que gerasse um conjunto auto-contraditório, isto é, que conduzisse a um paradoxo, utilizando apenas a linguagem formal.

Referência bibliográfica

[1] AMADEI, FLÁVIO LUIZ. *O infinito, um obstáculo no estudo da matemática.* São Paulo, 2005. Dissertação de mestrado em Educação Matemática (PUC/SP)

[2] ANDRADE, MARIA GORETE CARREIRA. *Um breve passeio ao infinito real de Cantor.* V Bienal da SBM. Paraíba, outubro de 2010

[3] ÁVILA, GERALDO. *Cantor e a teoria dos conjuntos.* Revista do professor de matemática, nº 43.

[4] ÁVILA, GERALDO. *O paradoxo de Zenão.* Revista do professor de matemática, nº 39.

[5] BOYER, C. B. *História da matemática***.** Tradução Elza F. Gomide, 2ª ed., São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

[6] CONIGLIO, M. E. et al. *Lógica e aplicações: Matemática, Ciência da Computação e Filosofia.* Universidade de São Paulo, março de 2006.

[7] LIMA, ELON LIMA, et al. *A Matemática no Ensino Médio (vol. 1).* 9ª ed. SBM

[8] SAMPAIO, PATRÍCIA ALEXANDRA. *Infinito, uma história a contar.* Repositório Científico do Instituto Politécnico de Viseu. Revista Millenium, nº 34, abril de 2008.

Disponível em: http://hdl.handle.net/10400.19/372