

A contextualidade da interferência condicional
de dois fótons: um estudo em múltiplos
cenários

Gilberto Ferreira Borges Júnior

Junho de 2013



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA–ICEX
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**A contextualidade da interferência condicional de dois
fótons: um estudo em múltiplos cenários**

Autor:
Gilberto Ferreira
Borges Júnior

Orientador:
Dr. Sebastião José N. de
Pádua

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física. Área de Concentração: Óptica Quântica, Fundamentos de Mecânica Quântica.

À minha família, o meu porto seguro.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, Eliana Aparecida Marques Borges e Gilberto Ferreira Borges, por sempre acreditarem em mim, seu apoio é fundamental a cada passo que dou em minha vida. E também a minha vizinha Margarida, prometo que dia 13 de maio do próximo ano estaremos juntos.

Agradeço a minha noiva (embora sem aliança física de metal nobre), Eufrásia de Sousa Pereira a orquídea mais rara e preciosa que conheci na vida. Sua amizade, seu carinho, seu apoio e sua paciência (e precisou de muita novamente) foram muito importantes para mim. Não sei se lista de agradecimento pode ser utilizada para pedir desculpas, mas para economizar uma nova seção, aproveito para pedir desculpas pelos desencontros vividos e por eu nunca desligar minha mente.

A minha irmã Anna Flávia e seu marido Marcos, pelo carinho, o respeito e a admiração.

Aos amigos de moradia aqui de BH, Isaac e Mychel (em ordem alfabética), com certeza dois irmãos, os quais gostaria de conviver por muito tempo. E com mais certeza ainda pessoas as quais devo muitas desculpas.

Ao meu orientador Prof.Dr. Sebastião José Nascimento de Pádua, por sua orientação exemplar e por sua paciência nos vários momentos em que eu me embaraçava, devo-lhe por isso muitas desculpas . E serei sempre grato por sua atenção e pelo conhecimento passado.

Dos amigos do departamento destaco quatro nomes importantes: Rodolfo (o Forrest Gump uberlandense), Yuri (mano de mais), Roberto (Padim) e Mychel (Butckov), pois estes foram pessoas que se esforçaram para que eu me sentisse em casa quando cheguei ao departamento.

Aos amigos de laboratório, em especial aos que me ensinaram com paciência os primeiros passos: José Ferraz, Marcos Aurélio e Wanderson, estes transcenderam a condição de colegas de trabalho, são pessoas que estimo muito não apenas por essas ajudas no âmbito profissional.

Dentre os amigos de laboratório, gostaria de agradecer ao Breno, por seus auxílios que me fizeram sobreviver com o Matlab e por compartilhar um pouco de seus conhecimentos comigo sempre que estava desesperado sem conseguir decifrar alguns enigmas científicos.

Também gostaria de agradecer ao Lucas Paresqui (que também me ajudou muito no início desta jornada) e ao Artur (Tutu) pela amizade e os elementos ópticos surrupiados!

Ao Dr. Pierre Louis Assis por ceder gentilmente a fig.(3.1).

Ao amigo Lucas Mussnich pelas várias conversas que tivemos, sempre positivas e inspiradoras, e por me convencer que um pouquinho de rigor ma-

temático não faz mal de vez em quando. Ao Marcos Vínicius uma pessoa fantástica e um amigo que estimo muito. Ao Aloísio pelas muitas conversas *floydianas*.

A galera do RPG: Octavarios Rocha, Kraco, Kroco (RIP, bom guerreiro), Terônios (me desculpe por ter usado aquela maldita informação extra jogo) e Dede (não dá para colocar o nome aqui mano) e ao épico Seu Luis pelos ótimos serviços prestados à turma.

Ao amigo Prof.Dr.Newton Martins Barbosa Neto, por seu incentivo, por seus conselhos sempre positivos (a menos os futebolísticos) e acima de tudo por me fazer acreditar que sou capaz de tunelar algumas barreiras enormes.

As pessoas envolvidas na administração do programa de Pós-Graduação, não tenho quase nada a reclamar do programa¹, viver nesse departamento por dois anos foi uma experiência sensacional.

A população brasileira pelo investimento financeiro, repassado através das agências de fomento: CNPq, CAPES, INCT de Informação quântica. E a infraestrutura providenciada pela Universidade Federal de Minas Gearais.

Acima de tudo agradeço a Deus, por permitir que toda essa lista de agradecimento fosse possível².

¹Pois toda unanimidade deve ser questionada.

²Final igual ao do meu TCC para dar sorte.

Resumo

Nesse trabalho testa-se uma família de desigualdades de não contextualidade, a qual é desenvolvida a partir de uma visão unificada dos diversos cenários não contextuais, *i.e.*, uma construção que permite unificar os aparentemente distintos, *Gedankenexperiment*³ empregados na elaboração de provas de contextualidade quântica, dentre os quais encontra-se o experimento que permite testar a desigualdade de CHSH. Cada uma das referidas desigualdades representa limitações impostas às correlações de um sistema físico, quando estas são tratadas a partir de teorias não-contextuais. A violação dessas desigualdades demonstra que para determinado cenário as correlações existentes no sistema não podem ser explicadas de um ponto de vista não-contextual.

O sistema no qual deseja-se testar o caráter contextual é um par de qbits fotônicos emaranhados nos caminhos transversais dos fótons gêmeos gerados por conversão paramétrica descendente espontânea (SPDC)⁴, com casamento de fase do tipo I. A violação de desigualdades não-contextuais em diversos cenários demonstra que a condicionalidade não-local exibida em um experimento de Young com fótons gerados por SPDC não pode ser explicada corretamente por um modelo determinístico e local, ou seja, não podem ser explicados no escopo de uma teoria de variáveis ocultas. Em outras palavras o resultado central deste estudo revela que a condicionalidade do padrão de interferência de dois fótons é uma característica ligada à contextualidade deste tipo de experimento.

³Termo de origem alemã que significa experimentos mentais

⁴Sigla retirada da tradução para o inglês da expressão a qual é dada por: *spontaneous parametric down conversion*.

Abstract

In this work we test a family of noncontextuality inequalities developed from a unified view of several non-contextual scenarios, *ie*, a construction that allows unify seemingly disparate *Gedankenexperiments* used for quantum contextuality proofs, among which is the experiment that allows testing the CHSH inequality. Each of these inequalities predicts numerical limitations on the correlations of a physical system, when they are modeled by non-contextual theories. Violation of these inequalities shows that for a given scenario the correlations in the system can not be explained from a non-contextual viewpoint .

The system which we want to test the contextual nature is two photonic qbits in the transversal path variable of twin photons generated by Spontaneous Parametric Down Conversion (SPDC). After being generated, the photon pairs cross a double-slit and exit it in a entangled state in path variables. Violation of the non-contextual inequalities for different measurement scenarios demonstrates that the nonlocal conditionality displayed in the Young experiment with photons generated by SPDC, can not be properly explained by a local deterministic model, *i.e*, can not be explained in scope of a non-contextual hidden variable theory.

Lista de Figuras

1.1	Esquemática da versão de Bohm óptica, sobre o paradoxo EPR. Uma fonte de luz produz pares de fótons correlacionados em polarização, cada uma desses fótons são enviados para observadores A e B distantes entre si, e munidos com prismas birrefringentes. O aparato de detecção permite aos observadores descobrir o caminho seguido por um fóton e consequentemente a sua polarização.	10
1.2	Grafo de compatibilidade entre n questões. Cada questão é representada por um vértice e as questões compatíveis são ligadas por uma aresta. A figura mostra o n-ciclo para $n = 4, 5$ e 8 .	26
2.1	Representação esquemática da SPDC, um feixe de bombeamento com frequência ω_p incide em um cristal e é convertido em dois fótons com frequências $\omega_s + \omega_i = \omega_p$	30
2.2	Representação esquemática da secção transversal dos cones de luz gerados no processo da SPDC, cada cor representa um comprimento dos possíveis comprimentos de onda gerados no processo. Na conversão do tipo I os fótons gerados possuem a mesma polarização enquanto na conversão do tipo II cada fóton gerado possui uma polarização perpendicular em relação a de seu par. Desta forma cada um dos cones é um feixe que possui estado de polarização ortogonal em relação ao outro. . .	31
2.3	Nessa figura estão representadas três regiões com campos distintos. O campo na região I corresponde ao campo que deverá ser propagado por uma lente esférica (LE), <i>i.e.</i> , ao campo $U_i(\vec{\rho}')$. A região no interior da lente é rotulada por região II. Na região III têm-se finalmente o campo $U_f(\vec{\rho})$, que corresponde ao campo propagado pela lente.	39
2.4	Representação esquemática de um telescópio confocal unidimensional. Uma lente cilíndrica e uma lente esférica compartilham seus focos no plano do Cristal, e o plano focal posterior da lente esférica coincide com o plano das fendas duplas (DS).	44

2.5	Comparação entre a função casamento de fase e a função de amplitude do bifóton, em um intervalo de comprimento com grandeza típica da separação entre as fendas duplas utilizadas. A linha sólida azul representa a função de o perfil transversal do pump ($v(x_+)$), enquanto a linha tracejada vermelha representa a função de casamento de fase ($\Gamma(x_-)$). Pode-se perceber que a função de casamento de fase varia mais rapidamente que a função do perfil transversal. Figura retirada de [1]	45
2.6	Representação esquemática do aparato de detecção. Um divisor de feixes balanceado (BS) divide o feixe incidente em dois caminhos, estes são rotulados por i e s . Em cada um dos caminhos existem detectores ligados a um circuito de contagens em coincidência (C.C).	47
2.7	Simulação do padrão de interferência de dois fótons. Em a) é mostrado o padrão de interferência obtidos fixando dois valores distintos de x_i , em b) é gerada uma superfície na qual cada linha representa um padrão condicional igual aos da figura a). Finalmente em c) é mostrado um mapa de intensidades da figura b) o qual é chamado de mapa de Fourier.	49
3.1	Representação esquemática do experimento realizado. A linha pontilhada vermelha representa o estágio do experimento onde o estado é gerado, neste um feixe de laser de comprimento de onda $\lambda = 405$ nm é focalizado no centro do cristal por uma lente esférica (não mostrada na figura). Os pares de fótons gêmeos gerados por SPDC são propagados, através de um telescópio confocal ((LC) + LE _t) na direção transversa x até um conjunto de duas fendas (D.S). No estágio de detecção, uma lente esférica (LF) projeta a transformada de Fourier óptica do estado do bifóton em um plano de detecção, onde são colocados dois detectores (D_i e D_s). Um divisor de feixe (BS) divide aleatoriamente os fótons do par entre os detectores.	54
3.2	Esquematização do processo de escaneamento do detectores em um plano de detecção arbitrário. Os dois detectores percorrem distâncias iguais partindo de posições equivalentes em seus respectivos planos, e com o mesmo passo. Figura retirada de [1]	56
3.3	Mapa das coincidências adquiridas com um tempo de aquisição $T_a = 5$ s realizado no plano das imagem. Esta figura representa o perfil do estados de dois fótons imediatamente após as fendas. É possível notar que os fótons gêmeos são correlacionados em suas posições transversais.	57
3.4	Esta figura apresenta o mapeamento das detecções em coincidência no plano de Fourier adquiridas com tempo de aquisição $T_a = 5$ s. A comparação desta figura com a (2.7.c), mostra a concordância dos dados experimentais com a previsão teorica para este experimento.	58

3.5	Violação relativa das desigualdades do n-ciclo, a cota quântica é reescalada para 1. Pode-se perceber que com o aumento de n a cota não contextual fica mais próxima da cota quântica, desta forma a violação experimental se torna cada vez mais difícil. Porém percebe-se que as violações obtidas continuam significativas.	64
A.1	Representação esquemática do sistema de detecção, neste uma lente esférica (LF) de comprimento focal f compartilha seu plano focal anterior com uma fenda dupla (FD) e seu plano focal posterior com um fotodetector (D_ν).	67

Lista de Tabelas

- 3.1 Valores obtidos para Ω . Ω_{exp} é o valor experimental obtido para a soma Ω em cada ciclo. $\Omega_{\text{prev.}}$ é o máximo valor previsto quando Ω é estimado com os parâmetros verdadeiramente implementados, i.e., quando $\gamma_{\text{exp}} = \kappa(x_i - x_s)$. $\Omega_{\text{qnt}}^{\text{ct}}$ é o máximo valor previsto permitido pela mecânica quântica quando $\gamma = \pi/n$ 62
- 3.2 A tabela apresenta o desvio padrão e a média obtidos quando o valor dos parâmetros de cada observador é alterado por um fator $\Delta\theta$, e as desigualdades de cada cenário são calculadas. 63

Sumário

I	Fundamentações Teóricas	4
1	O indeterminismo quântico e suas consequências	5
1.1	Realismo e localidade na mecânica quântica.	5
1.1.1	O Paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen	6
1.1.2	Versão óptica do paradoxo de EPR.	9
1.2	Estados emaranhados	11
1.3	Mecânica Quântica <i>vs</i> Teoria de Variáveis Ocultas	12
1.3.1	Visão geral sobre uma teoria de variáveis ocultas	12
1.4	O teorema de Bell e o problema de variáveis ocultas	13
1.4.1	A desigualdade de Bell, versão CHSH	14
1.4.2	Violação da desigualdade de Bell	16
1.5	Contextualidade e teoria quântica	17
1.5.1	Álgebra de operadores e contextualidade	18
1.5.2	O teorema de Kochen-Specker	18
1.5.3	A descrição de Peres-Mermin	19
1.5.4	Definição probabilística de contextualidade	20
1.5.5	Formulação de um modelo marginal	22
1.5.6	Desigualdades de Boole	23
1.5.7	O n-ciclo	26
1.5.8	Violação quântica das desigualdades do n-ciclo	27
2	Conversão Paramétrica Descendente Espontânea	29
2.1	Fundamentos sobre a SPDC	29
2.1.1	O hamiltoniano de interação	32
2.1.2	O estado dos fótons convertidos	33
2.1.3	A função casamento de fase	35
2.2	Elementos de óptica de Fourier	36
2.2.1	O espectro angular	36
2.2.2	Propagação do espectro angular através de um sistema óptico linear	37
2.3	Geração de estados emaranhados a partir de correlações espa- ciais da SPDC	40
2.3.1	Estados de fenda	40
2.3.2	Engenharia de estados de fenda	42
2.3.3	Manipulação experimental dos parâmetros de engenharia	44
2.3.4	Interferência de dois fótons	46
2.4	Operadores de Medida implementados nos mapas de Fourier	50

2.4.1	Relação entre detecção em coincidência e operadores de medida.	51
-------	--	----

II Implementação experimental dos testes de contextualidade **52**

3 Implementando as desigualdades do n -ciclo a partir da interferência de dois fótons **53**

3.1	O experimento de interferência de dois fótons	53
3.2	Mapeando as correlações do bifóton	56
3.3	Identificando os contextos de um ciclo no mapa de Fourier	59
3.3.1	Relação entre as coincidências e os contextos do n -ciclo	59
3.3.2	Implementando vários cenários a partir de um mapa de Fourier	60
3.4	Violação das desigualdades do n -ciclo.	61
3.5	Conclusão	64

A Operadores de medida implementados no experimento de Young quântico **66**

Introdução

A conversão paramétrica descendente espontânea (SPDC) é um processo óptico não-linear, que gera pares de fótons comumente denominados por *signal* (s) e *idler* (i). Essa fonte de luz possui grande interesse prático no estudo e aplicação de sistemas quânticos, uma vez que os fótons gerados na SPDC apresentam correlações em diversos graus de liberdade, permitindo a geração de estados quânticos correlacionados da luz. Em especial destacam-se as correlações existentes no caminho transversal desses fótons, estas são exploradas em alguns trabalhos para geração de estados qdits, testes de fundamentos de mecânica quântica e imageamento quântico conforme mostrado no trabalho de revisão dado na ref. [2]. Uma pergunta pertinente é sobre a natureza dessas correlações, ou sobre quais são as descrições teóricas alternativas a mecânica quântica que são capazes de gerar modelos para explicar estas correlações.

Quanto a sua natureza as correlações presentes em um sistema podem ser divididas entre duas classes principais: as correlações contextuais e as não-contextuais. Quando a medida de um observável é realizada em sistemas que exibem correlações do primeiro tipo, é impossível criar um modelo para explicar os resultados desta medida usando as hipóteses de que existe um valor pré-estabelecido para a medição e este é revelado após sua realização e ainda que o resultado desta medida deve ser o mesmo independente de qual outro observável é medido simultaneamente no sistema.

De fato a contextualidade é vista como uma das características fundamentais da teoria quântica, e segundo o teorema de Kocken-Specker [3], qualquer teoria capaz de reproduzir as previsões da mecânica quântica acerca dos resultados da medida de um observável, em um dado sistema que é representado por espaço de Hilbert com dimensão $d \geq 3$, deve inevitavelmente ser uma teoria *contextual*. Estudos recentes revelam que a noção de não-localidade é um caso especial da contextualidade aplicada a um sistema bipartido, aumentando ainda mais a importância desta propriedade para uma construção generalista da mecânica quântica [4]. Uma das maneiras experimentalmente acessíveis para caracterizar o caráter contextual das correlações de um sistema, é através do cálculo de uma função linear envolvendo grandezas que quantificam as correlações da medida de observáveis compatíveis, pertencentes à um mesmo sistema. Em geral essas grandezas quantificadoras de correlações são construídas a partir de dados obtidos experimentalmente.

Algumas construções teóricas são capazes de fornecer tais funções lineares, de modo que estas apresentem uma limitação numérica, quando avaliadas a partir de um conjunto de dados que podem ser explicados por uma teoria não-contextual. Em outras palavras, essas construções teóricas geram

desigualdades que devem ser satisfeitas por toda teoria determinística não-contextual. Em geral esses desenvolvimentos teóricos estabelecem cenários, ou experimentos mentais⁵ que permitem constatar teoricamente que a mecânica quântica viola tais desigualdades, *i.e.*, permite demonstrar que determinada função linear, avaliada sobre quantificadores de correlações, assume valor superior aos previsto por um modelo não-contextual. Em suma cada uma dessas construções teóricas busca dar ao problema de contextualidade uma estratégia semelhante a realizada por Clauser, Horne, Shimony, Holt e Bell (CHSHB) para o problema de localidade [5, 6], gerando desigualdades experimentalmente implementáveis.

Um recente desenvolvimento teórico [7] é capaz de fornecer uma visão generalista de uma série de cenários elaborados para demonstrar a contextualidade quântica. Essa família de cenários é chamada de *n-ciclo* e a razão para esta denominação ficará clara ao longo deste texto. Dado um cenário, esta teoria baseia-se na análise matemática do conjunto de probabilidades associadas às medidas conjuntas de observáveis implementados em um sistema. Tal análise provê um método que distingue o conjunto de correlações não-contextuais do conjunto de todas as correlações de tal sistema. A partir desta separação obtém-se um conjunto de vínculos, os quais devem ser obedecidos pelas correlações não-contextuais, estes vínculos são as chamadas *desigualdades de Boole*, e constituem as desigualdades não-contextuais para determinado cenário. A visão generalista de tal método revela-se pois é possível demonstrar uma forma geral capaz de gerar todas as desigualdades de Boole para todos os cenários do *n-ciclo*. O que torna possível demonstrar que os cenários propostos por CHSHB [5, 6] e Klyachko [8] fazem parte da família do *n-ciclo*, gerando inclusive as situações dentro de cada cenário nas quais é possível obter o máximo valor de violação das desigualdades não-contextuais.

Nesse trabalho deseja-se demonstrar o caráter contextual das correlações responsáveis pela condicionalidade não-local observada no experimento de Young para um par de fótons gerados por conversão paramétrica descendente espontânea (SPDC) com casamento de fase do tipo I, e ao mesmo tempo fornecer uma implementação experimental pioneira da construção teórica mencionada no parágrafo anterior. Nesse experimento o par de fótons é gerado em um cristal e propagado através de um sistema óptico linear até um conjunto de duas fendas, o que gera um estado destes fótons correlacionados em seus caminhos transversais [9–12]. Em termos mais técnicos, pode-se afirmar que foi preparado um estado emaranhado de dois qbits de caminho transversal. O aparato de detecção do experimento consiste em uma lente que projeta a transformada de Fourier óptica do campo após as fendas, em um plano onde são colocados dois detectores, D_i e D_s , cada um destes é capaz de detectar um dos fótons convertidos em posições variáveis x_i e x_s respectivamente. Este aparato de detecção permite realizar o mapeamento dos padrões de interferência condicionais, tal como proposto em [11, 12]. Este mapeamento gera uma matriz 25×25 na qual cada um dos elementos indica o valor das detecções em coincidência quando o detector D_i é colocado na posição x_i e o detector D_s em x_s .

⁵Do alemão: *Gedankenexperiment*

Neste trabalho explora-se a estrutura bipartida do espaço de Hilbert gerado, permitindo criar uma estratégia a partir da qual é possível implementar uma família de cenários do n -ciclo par, de modo que um dos cenários implementados tem como desigualdade não-contextual a conhecida desigualdade de CHSH. A quantificação das correlações do sistema é realizada a partir da matriz obtida pelo mapeamento dos padrões condicionais, o que é possível pois identificam-se os operadores de medida implementados no experimento de Young. A correspondência entre os observáveis cujas correlações devem ser medidas no teste e os operadores de medida implementados experimentalmente, foi demonstrada, o que permitiu extrair as correlações das contagens em coincidências. Desta forma, a partir da matriz de coincidências obtida experimentalmente, é possível acessar múltiplos cenários contextuais e testar suas desigualdades. As limitações experimentais restringem ao acesso de seis cenários, sendo possível verificar a violação das desigualdades não-contextuais de todos estes.

Na primeira parte dessa dissertação será apresentada uma visão geral sobre o problema da descrição determinística da mecânica quântica, com o intuito de mostrar ao leitor como surgiram os importantes conceitos de localidade, realismo e não-contextualidade. Introduzidos estes conceitos será realizada uma revisão minimalista da construção teórica proposta em [13] a qual conforme adiantado será empregada para o desenvolvimento desse trabalho. A segunda parte será dedicada a uma discussão sobre geração e controle de estados quânticos da luz, a partir de fótons gerados por SPDC. Essa seção tem um grande apelo experimental e todo o desenvolvimento nela apresentado é de grande importância para entender os experimentos realizados. Pode-se entendê-la como uma parte dedicada a teoria que margeia o experimento realizado. Por fim na terceira parte desta, é apresentada a estratégia criada para se acessar os múltiplos cenários não-contextuais partindo da interferência condicional dos pares de fótons. Também nessa parte os resultados obtidos são apresentados e discutidos.

Parte I

Fundamentações Teóricas

Capítulo 1

O indeterminismo quântico e suas consequências

A descrição quanto mecânica da natureza, vem sendo desde a sua criação, um marco na mudança do pensamento científico-filosófico da sociedade. Este fato tem raízes, na elaboração de alguns conceitos físicos radicalmente diferentes de conceitos providos pela física clássica, o que era inteiramente necessário, uma vez que a metodologia clássica se mostrava incapaz de solucionar uma gama de experimentos. Alguns desses conceitos "quânticos", importantes para uma melhor compreensão deste trabalho, e que são inteiramente diferentes de conceitos da mecânica clássica, serão discutidos neste capítulo, de modo que o leitor que já esteja familiarizado com as noções apresentadas, não terá sua leitura prejudicada ao saltá-lo.

1.1 Realismo e localidade na mecânica quântica.

A descrição da maioria dos fenômenos que rege o mundo macroscópico, é modelada e compreendida pelo formalismo que adequamos por chamar de **física clássica**, e esta se encontra fundamentada, dentre outros, em dois conceitos importantes denominados **localidade** e **realismo**. O conceito de **localidade** afirma que o resultado de uma medição feita em um volume finito do espaço, não deve influenciar ou sofrer a influência de uma outra medida feita em uma região espacialmente distinta, antes que algum sinal de luz possa conectar as duas regiões. Mesmo no caso de os resultados destas medições serem condicionados, assume-se, ser impossível que um sistema sofra a influência instantânea devido a uma mudança ocorrida no outro. Por sua vez o conceito de **realismo** afirma que as propriedades físicas de um sistema existem independentes da medida ou a observação ao qual esse é submetido.

Apoiados nas noções de localidade e realismo, Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen (**EPR**) concebem um critério por eles denominado **completeza** de uma teoria, e demonstram que a mecânica quântica (M.Q) não obedece a tal critério, concluindo desta forma, que a descrição de um sistema utilizando a função de onda é incompleta [14], esta argumentação

traz à tona uma das maiores discussões físicas do século XX, e merece ser analisada com maiores detalhes.

1.1.1 O Paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen

Segundo Einstein, Podolsky e Rosen o sucesso de uma teoria pode ser dado como satisfatório ao se responder positivamente duas questões: a primeira é se a teoria é de fato correta e a segunda é se a descrição obtida com esta teoria é completa. Quanto ao primeiro questionamento julga-se correta uma teoria, de acordo com o seu grau de concordância com a percepção humana (ou como dito por EPR, a experiência humana), que em ciência física é fundamentada em experimentos, em palavras mais práticas, julga-se pois pela concordância com os fatos experimentais. Afim de se responder a segunda questão deve-se primeiramente elaborar uma definição sobre o que é uma teoria completa, e segundo EPR uma condição necessária para qualquer teoria que se diz completa é que "*cada elemento de realidade física deve ter uma contraparte (uma previsão) em tal teoria*". Muito provavelmente o leitor se depara com o seguinte questionamento: "o que é um elemento de realidade física?". Afim de evitar qualquer interpretação errônea que tal expressão possa sugerir, sempre que mencionarmos tais elementos de realidade física (ERF) devemos ter em mente a seguinte definição [14]

Definição 1.1.1 (Elementos de realidade física (ERF)). "*Se, sem perturbar de alguma forma um sistema, pode-se prever com certeza (com probabilidade igual a um) o valor de uma grandeza física, então existe um elemento de realidade correspondente a ela.*"

Considerando-se dois observáveis não compatíveis A e B , e ϕ_A uma autofunção de A com autovalor a . Do formalismo quântico, sabe-se que se um sistema é preparado em um estado ϕ_A , toda medida de A realizada terá como resultado a . Se após esta medida deseja-se realizar uma medida do observável B , o resultado desta não será previsível, ou seja, todos os resultados dentro do espectro de B são equiprováveis. Em palavras de EPR, "*quando A é conhecido, então B não tem realidade física*", portanto a mecânica quântica não seria uma teoria completa uma vez que não existia uma contraparte na teoria ao elemento de realidade física associada ao observável B , e além disso a existência de tal elemento dependeria das medidas que o sistema fosse submetido¹. Então seguem duas hipóteses sobre a teoria quântica:

1. *A descrição de realidade quanto-mecânica, dada pela função de onda, não é completa.*
2. *Quando dois operadores que correspondem a duas quantidades físicas não comutam, então estas duas quantidades não possuem realidade simultânea..*

¹Ou seja este elemento de realidade existiria apenas se fossem realizadas medidas de observáveis compatíveis.

Por fim, considere um sistema físico composto por duas partículas, rotuladas por i e s , que interagem por um tempo finito, o estado da partícula após esta interação pode ser considerado:

$$\Psi(x_i, x_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2\pi i/h)(x_i - x_s + x_0)p} dp, \quad (1.1)$$

onde x_ν ($\nu = i, s$) sendo a posição da partícula ν , x_0 uma constante arbitrária. Uma vez que as autofunções de momento da partícula i ($u_p(x_i)$) formam uma base ortogonal, pode-se expandir a função de onda do sistema composto na base destas autofunções. A função de onda que representa o estado global fica:

$$\Psi(x_i, x_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(x_s) u_p(x_i) dp, \quad (1.2)$$

sendo os coeficientes, $\psi_p(x_s)$ as autofunções de momento da partícula s .

Considerando que seja feita uma medida do momento da partícula i , o autovalor obtido é p . Segundo o postulado de redução do pacote de onda, após esta medida o estado desta partícula é dado por:

$$u_p(x_i) = e^{(2\pi i/h)px_i}, \quad (1.3)$$

Utilizando o resultado da equação (1.3) para determinar o coeficiente da expansão dada pela equação (1.2), o estado da partícula s é reduzido à:

$$\psi_p(x_s) = e^{-(2\pi i/h)p(x_s - x_0)}, \quad (1.4)$$

e uma medida de momento desta partícula vai dar sempre o valor $-p$.

Também é possível escrever o estado geral do sistema expandindo-o na base das autofunções do operador posição de cada uma das partículas (na representação da posição), de forma análoga a equação (1.2) esse será:

$$\Psi(x_i, x_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(x_s) v_x(x_i) dx. \quad (1.5)$$

Dessa forma, se uma medida da posição da partícula i for realizada e o valor obtido for x o estado que a representa logo após esta medida será:

$$v_x(x_i) = \delta(x_i - x), \quad (1.6)$$

com isto, ao inverter a expansão dada pela equação (1.5), determina-se que o estado da partícula s deve ser:

$$\begin{aligned} \varphi_x(x_s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x - x_s + x_0)p} dp \\ &= h \delta(x - x_s + x_0), \end{aligned} \quad (1.7)$$

que é um auto-estado do operador posição, com auto-valor associado $x + x_0$.

Do exemplo acima fica evidente que como consequência de duas medições feitas no subsistema constituído pela partícula i , o estado que representa a partícula s pode ser levado a duas diferentes funções de onda, aqui representadas por $\psi_n(x_s)$ e $\varphi_n(x_s)$. Segundo os argumentos de EPR, uma vez que os dois sistemas não mais interagem no momento da medição (pois isto foi requerido na construção do exemplo acima dado) então nenhuma mudança física real pode acontecer no sistema s dado que sua causa é uma alteração no sistema i , esta afirmação é o próprio princípio de localidade, embora não o tenha nomeado explicitamente no texto original. Em palavras de EPR "*Consequentemente é possível atribuir às duas diferentes funções de onda a mesma realidade*"², devendo, portanto, serem dados como ERF os autovalores de tais funções de onda.

Para ajudar na visualização do paradoxo proposto por EPR, considere que as partículas i e s são enviadas para experimentadores espacialmente separados denominados respectivamente por Alice e Bob. Cada um destes pode optar por medir ou posição ou momento de sua respectiva partícula de modo que esta escolha não esteja vinculada à escolha realizada pelo outro. Em uma situação na qual Alice resolve medir a posição da partícula i e Bob não possui qualquer possibilidade de descobrir a escolha de Alice, se Bob for interrogado sobre quais os elementos de realidade de física associados a partícula s , de acordo com as discussões precedentes, ele pode afirmar que tanto a posição quanto o momento de s podem ser associados a elementos de realidade desta partícula. Portanto, se a descrição da função de onda for considerada completa, então existe um observador (no caso Bob) que contraria a hipótese 2 sendo levado desta forma a um paradoxo.

Segundo EPR o paradoxo exposto acima pode ser desfeito se a hipótese 1 for abandonada, abrindo desta forma a possibilidade de se completar a teoria quântica no sentido de torná-la determinística, uma vez que se Alice e Bob pudessem prever o resultado da posição e o momento de suas partículas sem a necessidade de realizar alguma medida sobre elas (ou o sistema composto pelas duas) então estas duas grandezas voltariam a se encaixar na definição de elemento de realidade física (1.1.1). Esta análise levou EPR a refutarem a hipótese 1, o que endossava ainda mais os argumentos contrários ao aparente indeterminismo quântico e questionando se realmente a função de onda continha toda a informação sobre um sistema físico, ou seja, questionava se não deveriam existir parâmetros adicionais na descrição de um sistema que pudessem tornar essa descrição determinística.

A conclusão de não completude de EPR pode ser evitada, ao aceitar como ERF **simultâneos** apenas duas grandezas conjuntamente mensuráveis, porém como alertam EPR ao considerar tal formulação aceita-se implicitamente, que a realidade física de um sistema s depende de qual medida é feita no sistema i , sendo este rechaçado pelos autores, que ao o fazerem, defendem então que uma concepção de teoria baseada em localidade e realismo, embora o primeiro não o tenha sido feito de forma tão explícita quanto o segundo³.

²A realidade referida é: "o estado da partícula s após uma medida realizada na i .

³De fato após feita a consideração anterior, EPR descartam-a com o argumento de que

A seção seguinte trata de uma releitura dos argumentos dados por EPR, e pode, se assim preferir o leitor, ser saltada. Entretanto trata-se de uma releitura que acaba por aproximar as discussões acima a um sistema com grau de liberdade discreto, e que é estruturalmente idêntico ao sistema que foram implementados experimentalmente para a construção da presente dissertação.

1.1.2 Versão óptica do paradoxo de EPR.

David Bohm sugere em seu livro-texto [15] uma versão simplificada do paradoxo de EPR, utilizando ao invés de graus de liberdade contínuos (posição e momento), o grau de liberdade discreto de spin. O sistema físico utilizado para a descrição de Bohm consiste de duas partículas spin-1/2, em um estado singleto.

Nesta seção será utilizado um análogo ótico da descrição original de Bohm, nela um par de fótons são gerados por uma fonte e estes possuem uma correlação em seu grau de liberdade de polarização, sendo esta da mesma natureza que a presente nas partículas de EPR. A analogia é assegurado pois tanto o espaço das polarizações de cada fóton quanto o espaço de spin de uma partícula são bi-dimensionais, e a implicação algébrica disto é que tanto os operadores de polarização quanto os de spin podem ser escritos em termos das matrizes de Pauli. Os observáveis que representam a polarização dos fótons são os chamados operadores de Stokes e podem ser escritos como [16–18]:

$$S_1 \propto \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (1.8a)$$

$$S_2 \propto \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (1.8b)$$

$$S_3 \propto \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.8c)$$

nas quais os observáveis de Stokes representam os seguintes estados de polarização: S_1 polarização horizontal e vertical; S_2 polarização $\pm 45^\circ$ e S_3 polarização circular esquerda e direita. Por fim devemos notar que estes operadores obedecem a mesma relação de comutação cíclica dos operadores de spin, dada por:

$$[S_i, S_j] = 2i\epsilon_{ijk}S_k \quad (1.9a)$$

sendo $i, j, k = 1, 2, 3$ e ϵ_{ijk} definido por:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{para uma permutação par de } i, j, k, \\ -1 & \text{para uma permutação ímpar de } i, j, k, \\ 0 & \text{para qualquer outro caso.} \end{cases} \quad (1.9b)$$

Os fótons gerados pela fonte são rotulados por i (idler) e s (signal), e são enviados para observadores **A** e **B**, respectivamente, localizados em direções opostas, conforme esquematizado na figura (1.1).

esta não seria suportada por uma concepção "razoável" de **realismo**.

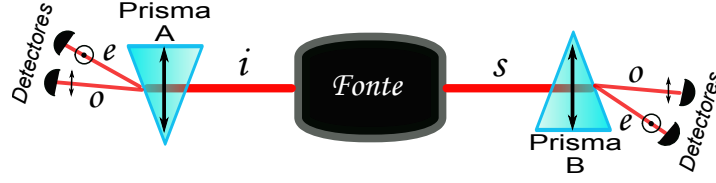


Figura 1.1: Esquemática da versão de Bohm óptica, sobre o paradoxo EPR. Uma fonte de luz produz pares de fótons correlacionados em polarização, cada uma desses fótons são enviados para observadores **A** e **B** distantes entre si, e munidos com prismas birrefringentes. O aparato de detecção permite aos observadores descobrir o caminho seguido por um fóton e conseqüentemente a sua polarização.

O espaço de Hilbert que representa o par de fótons é composto pelo produto tensorial do espaço de cada um, isto é $\mathcal{H} = \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_s$. Seja o estado que descreve o par de fótons (considerando-o puro) dado por:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_i |\uparrow\rangle_s + |\leftrightarrow\rangle_i |\leftrightarrow\rangle_s) , \quad (1.10)$$

Os vetor de estado $|\uparrow\rangle_i$ representa o estado de polarização vertical do fóton rotulado i , enquanto $|\leftrightarrow\rangle_i$ indica o estado de polarização horizontal, ambos são auto-estados do operador de Stokes $\hat{S}_{1_i} \otimes \mathbb{1}_s \in \mathcal{H}$, ao passo que $|l\rangle_s$ ($l = \uparrow, \leftrightarrow$) é auto estado de $\mathbb{1}_i \otimes \hat{S}_{1_s} \in \mathcal{H}$.⁴

Conforme mostrado na fig.(1.1) cada observador possui um prisma birrefringente, cujo eixo rápido é representado pela seta dupla vertical no interior de cada prisma, estes prismas são capazes de separar os fótons incidentes em dois caminhos distintos conforme sua polarização. Toda a componente linear do estado de polarização, que for paralela ao eixo óptico do prisma é transmitido ao longo do caminho rotulado o , caso seja perpendicular será transmitido ao longo de e . É instrutivo atribuímos valores numéricos arbitrários a estes dois eventos, se o fóton seguir por o atribuímos o valor +1, caso siga por e o valor será -1.

Aos dois observadores é permitida a escolha arbitrária e independente de medir uma componente de polarização, isto pode ser feito apenas variando a orientação do eixo óptico de cada prisma. Em uma situação na qual **A** escolhe medir \hat{S}_{1_i} e obtém como resultado +1, sabe-se portanto que após esta medida o estado total do sistema é dado por:

$$|\Psi\rangle = |\uparrow, \uparrow\rangle , \quad (1.11)$$

o que torna possível a predição do autovalor de uma medida de \hat{S}_{1_s} , e em vista das noções de realismo e localidade dadas por EPR, este é portanto um

⁴A partir de agora serão utilizadas as seguintes notações compactas: $|+\rangle_i |-\rangle_s \rightarrow |+-\rangle$, sendo o primeiro rótulo relacionado à partículas i e o segundo à s . E para os operadores definidos acima: $\mathbb{1}_i \otimes \hat{S}_{1_s} \rightarrow \hat{S}_{1_s}$ e $\hat{S}_{1_i} \otimes \mathbb{1}_s \rightarrow \hat{S}_{1_i}$, o mesmo valendo para as outras componentes do operador de Stokes de uma partícula.

ERF.

Suponha que o observador **A** queira medir as componentes de polarização $\pm 45^\circ$, pode-se verificar facilmente que o estado global descrito na base dos auto-estados dos operadores \hat{S}_{2_i} e \hat{S}_{2_s} é dado por:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|++\rangle + |--\rangle), \quad (1.12)$$

sendo $|\pm\rangle_i$ ($|\pm\rangle_s$) os referidos auto-estados de \hat{S}_{2_i} (\hat{S}_{2_s}).

Os dois resultados possíveis (autovalores de \hat{S}_2) continuam sendo ± 1 , de modo que, após o observador **A**, realizar uma medição de \hat{S}_{2_i} ele pode com o resultado obtido saber qual estado será obtido por **B**, caso este realize uma medida de \hat{S}_{2_s} . Podemos então afirmar que \hat{S}_{2_s} também é ERF.

O paradoxo neste caso surge tal qual exposto anteriormente, pois uma vez que $[\hat{S}_{1_s}, \hat{S}_{2_s}] = 2i\hat{S}_{3_s} \neq 0$ [17], então qualquer que seja a escolha feita por **A**, no instante em que ele realiza o experimento (excluindo o colapso instantâneo da função de onda da partícula s), duas grandezas não compatíveis se mostram como ERF, o que nos permite chegar as conclusões de EPR dadas anteriormente.

1.2 Estados emaranhados

Os estados correlacionados inicialmente propostos por EPR em [14], são chamados de estados emaranhados. Nesta seção serão apresentados alguns conceitos básicos sobre estados emaranhados.

Considerando um sistema bipartido, com partes i e s , de dimensão $2 \otimes 2$, o estado puro que representa este sistema é dito emaranhado se ele não pode ser escrito de forma fatorável, ou seja, se o estado global não pode ser escrito como o produto tensorial do estado de cada partição, matematicamente isso significa:

$$|\Psi\rangle_{sep.} = |\phi\rangle_i \otimes |\phi\rangle_s. \quad (1.13)$$

Sejam $|0\rangle$ e $|1\rangle$ os auto-estados da matriz de Pauli σ_z , então uma possível base para o espaço de Hilbert com dimensões $2 \otimes 2$ é dada por:

$$\{|00\rangle, |11\rangle, |10\rangle, |01\rangle\},$$

uma outra base denominada *base de Bell* é encontrada pela combinação linear dos estados que formam a base supra mencionada. Os estados que formam a base de Bell são chamados de *estados de Bell* e são dados por:

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,0\rangle + |1,1\rangle); \quad (1.14a)$$

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,0\rangle - |1,1\rangle); \quad (1.14b)$$

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,1\rangle + |1,0\rangle); \quad (1.14c)$$

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle - |1, 0\rangle) . \quad (1.14d)$$

1.3 Mecânica Quântica vs Teoria de Variáveis Ocultas

O trabalho de EPR [14] demonstra que o indeterminismo da mecânica quântica pode levar a um paradoxo demonstrando que a teoria quântica não pode ser considerada uma teoria completa.⁵ Algumas descrições já existiam muito antes do artigo de EPR e estas surgiam no intuito de tornar a mecânica quântica uma teoria determinística, um exemplo disso é a chamada teoria da onda piloto de Louis de Broglie datada de 1927 [19]. Nesta seção serão discutidas algumas tentativas de construção de uma teoria de variáveis ocultas (TVO), e como uma classe destas teorias é descartada por elaborações algébricas capazes de fornecer dois importantes teoremas da mecânica quântica conhecidos por *teorema de Bell* e *Teorema de Kochen-Specker*.

1.3.1 Visão geral sobre uma teoria de variáveis ocultas

Louis de Broglie em 1927 [19], elaborou uma tentativa de tornar a descrição quântica determinística, assim como a mecânica estatística clássica. Porém seu modelo não sobreviveu a críticas feitas, sendo abandonada por de Broglie pouco depois. Algumas outras ideias surgiram neste sentido, e a que mais parecia sensata, é a de uma descrição para a aleatoriedade dos resultados da medida de um observável, segundo a qual cada um dos resultados é associado a um micro-estado de equilíbrio, especificado por uma variável oculta e pelo vetor de estado no espaço de Hilbert. É importante notar que estas descrições exigem que um microestado seja tal que a dispersão em torno de um resultado de medida seja nula, ou seja, especificado este sabe-se com certeza o valor que será obtido após uma medição.

A título de ilustração considere um operador \hat{A} , e um sistema cujo estado é representado por um vetor $|\psi\rangle$, denotando de Υ o resultado obtido após uma medida de tal observável. Ao se tratar de uma TVO, insere-se a hipótese que Υ , seria determinado sem ambiguidade apenas conhecendo-se $|\psi\rangle$ e alguns parâmetros que evoluem de forma não controlada pelo observador, coletivamente representados por λ , que são as **variáveis ocultas** do sistema. Pode-se ainda, de forma mais geral, considerar que existe uma distribuição de probabilidade associada à λ , dada por $\rho(\lambda)$ ⁶. A inserção das variáveis ocultas, na descrição de um sistema quântico, torna os resultados de uma medida uma função destas, *i.e.*, $\Upsilon \longrightarrow \Upsilon_{|\psi\rangle}(\lambda)$.

⁵Dentro da definição dado por EPR

⁶Uma exemplificação disto pode ser dada considerando-se o conhecido jogo de lançamento de uma moeda, os possíveis resultados obtidos, após a moeda cair podem ser, cara ou coroa. Se o jogador conhece todas as condições do ambiente no qual a moeda é lançada e as influências destas sobre ela, a influência da força que é feita sobre a moeda, o número de voltas que ela dá até chegar, etc., saberia ele com certeza qual o resultado após o lançamento, acabando aí a aleatoriedade do resultado.

Qualquer que seja a TVO, esta deve respeitar a condição de que o valor médio de um operador calculado sobre a distribuição de todos os λ 's deve ser igual à média dada pela mecânica quântica [20], utilizando as definições anteriores, tal condição é expressa por:

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int \mathbf{r}_{|\psi\rangle}(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (1.15)$$

Em suma, uma TVO, daria uma nova interpretação ao vetor de estado, sendo este agora um *ensemble*⁷ e os microestados deste especificados, não somente por $|\psi\rangle$ (que também representa o *ensemble*) mas também por λ [22].

1.4 O teorema de Bell e o problema de variáveis ocultas

Em [23] John von Neumann elabora uma demonstração matemática de que a estrutura algébrica da mecânica quântica não comportaria a existência de estados sem dispersão, sendo esta aceita por grande parte da comunidade científica como uma demonstração da impossibilidade de se completar a mecânica quântica com parâmetros extras. Porém alguns anos após a elaboração da prova de von Neumann, John Stewart Bell em um trabalho de revisão sobre o problemas das variáveis ocultas em mecânica quântica [24], apresenta um argumento invalidando a prova de von Neumann e outras duas demonstrações de impossibilidades de TVO's as quais seguiam a estratégia traçada por Neumann. A estratégia adotada nessas provas de impossibilidades podem ser resumidas da seguinte forma: primeiramente são postuladas algumas propriedades a serem satisfeitas por uma função que represente a medida de um observável, e então demonstra-se que tal função corresponde justamente à regra de Bohm [25]. Em vista do resultado obtido as TVO's são descartadas sob o argumento de que os postulados estabelecidos devem ser satisfeitos por qualquer teoria, sendo assim, todas as teorias apontam que a função que descreve a medida de um observável é a regra de Bohm, a qual é não-determinística [13].

A crítica de Bell a este modelo de prova é que os conjuntos de hipóteses elaborados descartam *a priori* todas as teorias nas quais as variáveis ocultas podem apresentar uma dependência do contexto no qual determinado sistema é submetido a uma medida, ou seja, descarta teorias elaboradas sob a premissa de que a resposta obtida na medida de um observável pode depender de qual outro observável é medido concomitantemente no sistema.

Mediante a análise de uma descrição baseada em variáveis ocultas elaborada por David Bohm [26, 27], Bell chama a atenção para o que ele chamou de incrível propriedade desta teoria, a violação do princípio de localidade

⁷Para os leitores não acostumados com a noção de *ensemble* segue-a de maneira rápida: um ensemble, ou coletivo estatístico, é um conjunto de microestados que possuem a mesma estrutura. O princípio ergódico afirma que a média temporal de uma grandeza física em um sistema, é equivalente à médias dos valores assumidos por essa grandeza por todo ensemble. Uma excelente revisão sobre isto pode ser vista em [21].

discutido na sec.(1.1), e chama a atenção ao fato de que mesmo não existindo na época alguma prova de que esta propriedade seja indispensável para uma TVO, as provas de impossibilidade baseadas na descrição de Neumann poderiam dar lugar a uma prova que levasse em conta alguma condição de localidade.

Nesse contexto surge outro importante trabalho de Bell [5], no qual demonstra-se que qualquer TVO realista capaz de reproduzir os resultados da mecânica quântica deve inevitavelmente ser não-local. Para chegar a essa conclusão Bell primeiramente formula da uma tradução matemática aos conceitos de localidade e realismo, e posteriormente demonstra que existe uma relação a ser satisfeita por toda distribuição de probabilidades que possa ser explicada por uma descrição realista local, esta relação é conhecida por *desigualdade de Bell*.

Quatro anos após este importante resultado de Bell, outro notório trabalho é publicado por John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony and Richard Holt [6], no qual é realizada uma generalização da desigualdade de Bell a fim de propor um teste experimental para este teorema, por meio de uma desigualdade conhecida por desigualdade de Clause-Horne-Shimony-Holt (CHSH), a qual será rapidamente demonstrada à seguir.

O papel fundamental dessas desigualdades é que elas excluem a possibilidade de existir um modelo teórico que não comporte a não-localidade juntamente com o realismo, de modo que assim este modelo seja capaz de reproduzir os resultados da mecânica quântica. Como em geral os modelos de variáveis ocultas eram construídos para respeitarem a localidade, então é comum e de fato incorreto, afirmar-se que a desigualdade de Bell exclui toda e qualquer descrição de uma medida via variáveis ocultas, haja vista que ela não exclui por exemplo a descrição de D.Bohm [26, 27].

1.4.1 A desigualdade de Bell, versão CHSH

Em [18] é implementada uma interessante estratégia para a derivação da desigualdade de CHSH, além de sua simplicidade esta é conveniente ao desenvolvimento futuro do presente texto por possibilitar a introdução de algumas noções interessantes acerca da correlação entre dois resultados de medidas feitas por observadores em subsistemas separados de um espaço bipartido.

Considere uma situação similar a apresentada em 1.1.2 na qual dois observadores **A** e **B** se encontram separados espacialmente e podem escolher de forma independente parâmetros α e β para seus aparatos experimentais. Os resultados das medidas realizadas por **A** e **B** formam um conjunto discreto de M possíveis resultados dados respectivamente por: $\{\mathcal{A}_l, l = 1, 2, \dots, M\}$ e $\{\mathcal{B}_k, k = 1, 2, \dots, M\}$, e cada resultado pode ser rotulado com valores no intervalo $[-1, +1]$.

A discussão elaborada na sequência assume um ponto de vista *realista e local*, e a partir deste ponto de vista será feita uma análise quantitativa sobre os resultados de uma medida conjunta de **A** e **B**.

De acordo com o princípio de realismo local, a probabilidade de cada observador obter determinado resultado ao escolher um parâmetro deve ser independente do parâmetro escolhido pelo observador distante. E no escopo

de uma TVO, deve depender apenas da variável oculta λ e do parâmetro por ele escolhido. Esta condição pode ser expressa em termos de probabilidade condicional como:

$$p(\mathcal{A}_l|\lambda, \alpha, \beta) = p(\mathcal{A}_l|\lambda, \alpha) , \quad (1.16a)$$

$$p(\mathcal{B}_k|\lambda, \alpha, \beta) = p(\mathcal{B}_k|\lambda, \beta) . \quad (1.16b)$$

Uma vez que λ evolui deterministicamente então cada uma das probabilidades nas eqs. (1.16) são ou 0 ou 1, então a probabilidade conjunta de após uma medida de \mathbf{A} obter \mathcal{A}_l e \mathbf{B} obter \mathcal{B}_k é dada pelo produto da probabilidade de cada evento separadamente, ou seja:

$$p(\mathcal{A}_l, \mathcal{B}_k|\lambda, \alpha, \beta) = p(\mathcal{A}_l|\lambda, \alpha) p(\mathcal{B}_k|\lambda, \beta) . \quad (1.17)$$

Definidas as probabilidades relacionadas ao resultado de cada medida, podemos então facilmente, obter os valores esperados das medidas realizadas por cada observador, que seguem como:

$$E(\lambda, \alpha) = \sum_l p(\mathcal{A}_l|\lambda, \alpha) \mathcal{A}_l \quad (1.18a)$$

$$E(\lambda, \beta) = \sum_k p(\mathcal{B}_k|\lambda, \beta) \mathcal{B}_k , \quad (1.18b)$$

e por fim o valor esperado de cada observador obter após uma medida conjunta os resultados \mathcal{A}_l e \mathcal{B}_k é dada por:

$$E(\lambda, \alpha, \beta) = \sum_k \sum_l p(\mathcal{A}_l, \mathcal{B}_k|\lambda, \alpha, \beta) \mathcal{A}_l \mathcal{B}_k , \quad (1.18c)$$

que de acordo com as equações 1.17 e 1.18, pode ser reescrita como:

$$E(\lambda, \alpha, \beta) = E(\lambda, \alpha) E(\lambda, \beta) . \quad (1.19)$$

Com as definições acima em mente, suponhamos que aos observadores \mathbf{A} e \mathbf{B} é permitida a escolha de duas configurações distintas. A partir destes dois parâmetros, obtêm-se o valor esperado conjunto, eq.(1.19), para as seguintes configurações dos aparatos de medida: (α_1, β_1) , (α_1, β_2) , (α_2, β_1) e (α_2, β_2) .

Os resultados obtidos de um experimento definido pelos parâmetros acima podem ser utilizados para definir a seguinte grandeza:

$$\Omega \equiv E(\lambda, \alpha_1, \beta_1) + E(\lambda, \alpha_1, \beta_2) + E(\lambda, \alpha_2, \beta_1) - E(\lambda, \alpha_2, \beta_2) \quad (1.20)$$

O teorema de Bell pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 1.4.1 (Teorema de Bell). *Para toda teoria local e realista $|\Omega| \leq 2$*

A prova do Teorema de Bell segue como um corolário do lema de Mermin dado a seguir.

Lema 1.4.1 (Lema de Mermin). *Se x_1, x_2, y_1 e y_2 são números reais definidos no intervalo $[-1, +1]$ então a soma $S = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_2$ possui algum valor no intervalo $[-2, +2]$.*

A prova do lema de Mermin é simples e convém relatá-la.

Demonstração. Existem quatro termos que compõe a soma S , cada um deles é limitado por ± 1 , conseqüentemente $|S| \leq 4$. Porém S pode ser reescrita como:

$$S = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - 2x_2y_2 .$$

O termo $(x_1 + x_2)$ assume valores extremos 0 ou ± 2 , bem como o termo $(y_1 + y_2)$, assim o produto $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$, assume extremos 0 ou ± 4 , por outro lado $2x_2y_2$, pode ser 0 ou ± 2 . Desta forma vemos que S pode assumir valores extremos ± 2 ou ± 6 , porém este último está em desacordo com $|S| \leq 4$, logo os únicos limites aceitáveis são os dois primeiros, e desta forma concluímos que $|S| \leq 2$. \square

Conforme adiantado, o teorema de Bell segue como um corolário do lema de Mermin uma vez que, os valores esperados definidos pela equação 1.18, são limitados por ± 1 .

1.4.2 Violação da desigualdade de Bell

A fim de tornar a discussão mais rápida, considere um par de partículas i e s emaranhadas no grau de liberdade spin, de modo que o estado conjunto delas é o estado singleto dado:

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, -\rangle - |-, +\rangle) . \quad (1.21)$$

Supondo que cada uma das partículas é enviada para observadores i e s , separados espacialmente, tal como o modelo de Bohm para fótons, cada um desses observadores possui um aparato de Stern-Gerlach, e possuem liberdade para orientá-lo em direções arbitrárias \hat{u}_i e \hat{u}_s respectivamente. O operador que representa a componente de spin ao longo de uma direção arbitrária \hat{u}_ν ($\nu = i, s$) é dado por [28]:

$$\mathbf{S} \cdot \hat{u}_\nu = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta_\nu & e^{-i\varphi_\nu} \sin \theta_\nu \\ e^{i\varphi_\nu} \sin \theta_\nu & -\cos \theta_\nu \end{pmatrix} , \quad (1.22)$$

na qual os ângulos θ_ν e φ_ν são respectivamente os ângulos polar e azimutal que localizam o versor \hat{u}_ν em coordenadas esféricas.

O valor esperado de uma medida conjunta das componentes de spin $\mathbf{S} \cdot \hat{u}_i$ e $\mathbf{S} \cdot \hat{u}_s$, pode ser definido como a grandeza adimensional:

$$E(\hat{u}_s, \hat{u}_i) = \frac{4}{\hbar^2} \langle \psi^- | \mathbf{S} \cdot \hat{u}_i \otimes \mathbf{S} \cdot \hat{u}_s | \psi^- \rangle . \quad (1.23)$$

Para calcular esta grandeza pode-se tomar $\mathbf{S} \cdot \hat{u}_i$ ao longo da direção z , ou seja:

$$\mathbf{S} \cdot \hat{u}_i \equiv \hat{S}_{z_i} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

desta forma o ângulo polar θ_s é justamente dado pelo ângulo entre \hat{u}_i e \hat{u}_s , então a eq.(1.23) fica:

$$E(\theta_s, \theta_i) = -\cos(\theta_i) . \quad (1.24)$$

Embora este resultado foi obtido fixando \hat{u}_i ao longo da direção \hat{z} , este resultado pode ser generalizado uma vez que a escolha da orientação dos eixos é arbitrária [29], desta forma a eq.(1.24) pode ser reescrita como:

$$E(\theta_s, \theta_i) = -\cos(\theta_i - \theta_s) = -\hat{u}_i \cdot \hat{u}_s . \quad (1.25)$$

Partindo da eq.(1.25), e medindo o valor esperado para as seguintes configurações experimentais dos observadores:

$$\{E(0, \pi/4); E(\pi/2, \pi/4); E(0, -\pi/4); E(\pi/2, -\pi/4)\} .$$

Para todas essas configurações o valor de $E(\theta_s, \theta_i)$ é $\frac{1}{\sqrt{2}}$ exceto para o último termo que vale: $E(\pi/2, -\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Usando estes resultados na eq.(1.20) resulta:

$$S = -2\sqrt{2} ,$$

o que não concorda com o resultado previsto pelo teorema (1.4.1), ou seja, os valores esperados medidos em um estado emaranhado como o da eq.(1.21), não podem ser descritos por uma teoria realista e local, mostrando que para alguns sistemas quânticos aparentemente os princípios de realismo e localidade não podem ser colocados conjuntamente para descrever os resultados de uma medida.

A desigualdade de CHSH foi experimentalmente testada primeiro em um trabalho de Aspect, Grangier e Roger [30], no qual utiliza-se um sistema similar ao introduzido na seção (1.1.2). Nesse sistema dois fótons emaranhados em polarização são enviados para observadores localizados em regiões espaciais distintas. Porém este teste e todos os outros realizados até o momento não podem ser considerados provas definitivas do não realismo local da mecânica quântica. Todos os testes realizados estão sujeitos a limitações experimentais, estas limitações são as chamadas *loopholes*. Uma das causas de *loophole* é a ineficiência da detecção de fótons, a qual inevitavelmente faz com que o número de fótons detectados seja menor que o número total de fótons gerados por uma fonte, em um experimento sujeito a este tipo de imperfeição deve-se acrescentar uma hipótese extra de que as correlações presentes nos fótons detectados é da mesma natureza que as correlações presentes entre aqueles fótons que não são detectados pelo sistema [18]. Apesar de que atualmente os testes em desigualdade de Bell são muito comuns em diversos sistemas, ainda não se realizou nenhum teste livre de qualquer *loophole*.

1.5 Contextualidade e teoria quântica

Das discussões precedentes, nota-se que a questão levantada por EPR [14] abre caminho para um novo questionamento em mecânica quântica: seria possível tornar determinística a previsão quântica sobre o resultado de uma

medida? Conforme discutido algumas provas algébricas foram elaboradas na tentativa de refutar a inserção de variáveis extras na descrição quântico mecanicista de um sistema. Entretanto alguns modelos de variáveis ocultas são resistentes a essas provas. Enquanto estes modelos apresentavam uma dependência do contexto no qual uma medida é realizada, as referidas provas de incompatibilidade sequer levavam em consideração essa dependência contextual, o que por sua vez leva a elaboração de hipóteses incapazes de abranger os modelos contextuais de variáveis ocultas, *e.g.*, o modelo de D. Bohm [26, 27].

Pode-se levantar a seguinte questão: A influência do contexto no qual uma medida é realizada sobre o resultado desta, também é uma propriedade da teoria quântica, ou uma característica apenas das variáveis ocultas? A resposta de tal pergunta ainda não está definida, porém sabe-se que a independência do contexto colocada conjuntamente com a hipótese de existirem resultados bem definidos para uma medida, uma espécie de realismo local, são violadas pela mecânica quântica, revelando assim a *contextualidade quântica* ou simplesmente *contextualidade*. A linha de partida desse conceito pode ser considerado o trabalho de Bell [24], porém o marco inicial de uma construção algébrica da contextualidade é o trabalho de S.B.Kochen e E.Specker [3], no qual é derivado um teorema, conhecido por teorema de Kochen-Specker, o qual demonstra que as duas hipóteses mencionadas acima não são comportadas pela estrutura algébrica da mecânica quântica. Ao longo desta seção será apresentada uma breve construção da definição atual de contextualidade, no intuito de mostrar ao leitor alguns pontos importantes para a construção dos critérios de contextualidade desenvolvidos em [7], as quais são a estrutura teórica empregada neste trabalho.

1.5.1 Álgebra de operadores e contextualidade

Uma definição que consiga responder a pergunta acima elaborada, também é capaz de dar uma generalização ao conceito de contextualidade. Desse modo, sejam três observáveis, $\{A, B, C\}$ em um espaço de Hilbert de dimensão $d \geq 3$, de modo que $[A, B] = [A, C] = 0$, seja a o resultado de uma medida do operador A quando nenhuma outra medida é realizada conjuntamente no sistema, e este não é alterado se A for medido conjuntamente com B ou C , então diz-se que este sistema exhibe a não-contextualidade da medida de A , ou seja o resultado da medição de A nesse sistema não depende do contexto no qual a medição é realizada.

1.5.2 O teorema de Kochen-Specker

S.B. Kochen e E. Specker derivaram um importante teorema sobre a contextualidade quântica [3]. Segundo o teorema de Kochen-Specker (KS) para um espaço de Hilbert de dimensão $d \geq 3$, qualquer teoria determinística capaz de reproduzir os resultados da mecânica quântica deve inevitavelmente ser contextual. A prova desse importante teorema não será mostrada em detalhes nessa dissertação, limitando-se simplesmente a entender alguns pontos essenciais do teorema de KS.

Considere um conjunto de projetores compatíveis $\{P_m = |u_m\rangle\langle u_m|\}$, os quais projetam sobre os vetores de uma base $\{|u_m\rangle\} \equiv \mathcal{L}$, com $m = 1, 2, \dots, N$.

Conforme discutido na seção 1.3.1 um modelo determinístico afirma que o resultado de uma medida é pré-determinado e revelado após a conclusão desta. Na situação presente tais modelos afirmam que os valores obtidos da medida de um dos projetores P_m é dada por: $\mu(P_m) = 0$ ou 1 . De modo que as seguintes propriedades devem ser satisfeitas:

$$\sum_m P_m = \mathbb{1}; \quad (1.26a)$$

$$\sum_m \mu(P_m) = 1. \quad (1.26b)$$

Imagine que exista uma outra base no mesmo espaço de Hilbert denominada \mathfrak{M} , a qual compartilha um vetor com \mathcal{L} , se a medida do m -ésimo projetor associado a este vetor revelar o valor 1 , a eq.(1.26b) implica que os demais projetores terão como resultado de medida o valor 0 , e um modelo determinístico não contextual afirma que independente da base que escolhe-se para medir tal projetor, o resultado atribuído a ele é o mesmo.

Utilizando esse último argumento KS, mostram que para um conjunto de 117 vetores em \mathbb{R}^3 chega-se a uma contradição, revelando que é impossível a descrição do resultado de medida de um projetor por meio de uma teoria determinística e não-contextual. Consequentemente o teorema de KS constitui uma poderosa argumentação algébrica contra as TVO's não contextuais.

O teorema de KS ao contrário de teorema de Bell, constrói-se exclusivamente às custas de propriedades algébricas de vetores e operadores em um espaço de Hilbert tri-dimensional, não fazendo inferência sobre distribuições estatísticas tomadas sobre um estado, por esse motivo dizemos que a contextualidade tal qual retratada por KS é independente do estado e livre do *loophole* de detecção [20]. Algumas provas simplificadas do teorema podem ser encontradas em [31,32], nas quais utilizam-se um conjunto de projetores menor que o conjunto utilizado por KS.

1.5.3 A descrição de Peres-Mermin

Nessa seção será dada uma demonstração interessante desenvolvida em [33, 34], a qual é útil na visualização do desacordo entre o formalismo quântico e as hipóteses de não-contextualidade e determinismo.

Consideremos então um espaço de Hilbert bi-partido de dimensões $2 \otimes 2$, nesse espaço define-se um conjunto de nove operadores que desejamos agrupar em uma matriz quadrada 3×3 a qual é dada por:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} \otimes \sigma_z & \sigma_z \otimes \mathbb{1} & \sigma_z \otimes \sigma_z \\ \sigma_x \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \sigma_x \\ \sigma_x \otimes \sigma_z & \sigma_z \otimes \sigma_x & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Podemos notar que os três operadores que estão na mesma linha ou coluna são compatíveis, e ainda que cada operador é escrito como o produto dos outros dois operadores que estão na mesma linha ou coluna, exceto na terceira

coluna na qual o produto $(\sigma_z \otimes \sigma_z)(\sigma_x \otimes \sigma_x) = -(\sigma_y \otimes \sigma_y)$. O produto dos observáveis em cada linha ou cada coluna sempre dá $\pm 1 \otimes 1$. Uma importante propriedade da matemática da mecânica quântica é que se dois operadores A e B são compatíveis e o resultado das medidas de cada um individualmente são a e b , respectivamente, se for feita uma medida da função $f(A, B)$ então o resultado desta medida também deve ser uma função $f(a, b)$ com a mesma forma funcional de $f(A, B)$ [20]. Em outras palavras se A e B são compatíveis o resultado de uma medida de $C = AB$ deve ser $c = ab$.

Então atribuindo valores pré-definidos ± 1 às medidas de cada operador, notamos que o produto da terceira coluna é -1 mostrando uma contradição pois não obedece a mesma regra de multiplicação dos operadores. Desta forma pode-se notar que o resultado da medida do operador na terceira linha e terceira coluna não depende apenas da escolha dele mas também de qual caminho utiliza-se para chegar até ele.

1.5.4 Definição probabilística de contextualidade

A definição de contextualidade desenvolvida em 1.5.1 baseia-se na estrutura algébrica do formalismo quântico, e aplica-se a operadores compatíveis implementados no mesmo sistema, o que contrasta com o teorema de Bell, que baseia-se na distribuição de probabilidades gerada por uma medição conjunta nas partes, espaço-temporalmente separadas, de um sistema bi-partido (ver sec. 1.4). Essa estrutura do teorema de Bell permite a construção de um teste realista-local, ao qual um sistema pode ser submetido após quantificar as correlações dos resultados de medidas conjuntas, em outras palavras a estrutura matemática empregada para a construção da desigualdades tipo Bell tornam estas experimentalmente acessíveis.

Uma questão pertinente é se existe ou não uma formulação de contextualidade construída a partir da distribuição de probabilidades conjunta de medidas realizadas no mesmo subsistema. Essas formulações foram inicialmente elaboradas por [35, 36] e finalmente obtidas por [37]. Um importante resultado decorrente dessas formulações probabilísticas é que o princípio de localidade pode ser encarado como um caso especial da não-contextualidade.

Essa formulação probabilística de não-contextualidade, será o ponto de partida para a construção das desigualdades de Boole que são exploradas na implementação experimental dos testes de contextualidade quântica no sistema sobre o qual esse estudo é construído. Antes de prosseguir a construção de uma formulação probabilística é instrutivo definir conceitos como a não-localidade e a não-sinalização.

Formulação probabilística de localidade e não-sinalização

Considerando um sistema bi-partido, com partes \mathbf{A} e \mathbf{B} , sejam os conjuntos de operadores $\{A_i\}$ e $\{B_j\}$ pertencentes à \mathbf{A} e \mathbf{B} respectivamente, com os possíveis autovalores a_i e b_j . Tomando um modelo determinístico, atribui-se ao resultado de uma medida desses operadores valores de uma função de λ , chamada função resposta [13], dadas por $\mu_{a_i|A_i}(\lambda)$ e $\mu_{b_j|B_j}(\lambda)$.

De acordo com o princípio de localidade discutido em 1.1.1, uma distribuição de probabilidades conjunta das medidas de A_i, B_j é dita local se for possível escrevê-la como [13, 18]:

$$p(a_i, b_j | A_i, B_j) = \int d\lambda \rho(\lambda) \mu_{a_i | A_i}(\lambda) \mu_{b_j | B_j}(\lambda) . \quad (1.28)$$

Em suma a condição de localidade afirma que por serem eventos independentes, o resultado de uma medida de A_i , não deve influenciar ou ser influenciada pela distribuição associada a B_j . Segue como consequência da independência das distribuições de probabilidade locais, que a distribuição global, $p(a_i, b_j | A_i, B_j)$ (associada a medida conjunta de A_i, B_j), sempre comporta uma descrição marginal⁸, como por exemplo:

$$p(a_i | A_i) = \sum_{b_j} p(a_i, b_j | A_i, B_j) . \quad (1.29)$$

Uma distribuição de probabilidade deste tipo é comumente chamada de *não-sinalizadora*⁹ [13, 35, 37]. Deve-se notar que ela se refere a distribuições de probabilidade associadas a medições feita em diferentes sub-sistemas, porém uma generalização dessa propriedade pode ser dada, *i.e.*, pode-se exigir que o resultado da medida de um observável A_j , não perturbe a distribuição associada a medida de A_i ¹⁰. A eq.(1.29) pode então ser escrita como:

$$p(a_i | A_i) = \sum_{a_j} p(a_i, a_j | A_i, A_j) , \quad (1.30)$$

nesse caso a distribuição de probabilidades conjunta é dita *não perturbadora*¹¹. Deve-se notar que essa propriedade pode ser satisfeita pelo formalismo quântico, apenas se $[A_i, A_j] = 0$, o que remete a definição de contextualidade discutida. Finalmente o conceito de localidade pode ser generalizado escrevendo-o da forma:

$$p(a_i, a_j | A_i, A_j) = \int d\lambda \rho(\lambda) \mu_{a_i | A_i}(\lambda) \mu_{a_j | A_j}(\lambda) , \quad (1.31)$$

o que leva a uma definição probabilística da não-contextualidade, uma vez que a existência de funções respostas determinísticas garantem que a distribuição de probabilidade de uma medida A_i não é perturbada pela medida de qualquer A_j compatível (similar ao papel de λ na sec.(1.4.1)), ou seja, é independente de qual observável compatível é juntamente medido. É importante notar que uma distribuição de probabilidade conjunta não-contextual deve comportar uma descrição marginal.

A definição de não-contextualidade dada pela eq.(1.31) exige que, na prática, todas as distribuições de probabilidades envolvidas sejam medidas, o que

⁸Ou seja, a probabilidade associada a cada resultado a_i , pode ser obtida da distribuição global somando-a sobre todos os valores de b_j

⁹Tradução livre: *no-signalling*

¹⁰Com A_j pertencendo ao mesmo subsistema que A_i

¹¹Tradução livre: *no-disturbance*

em geral é inviável. Para contornar esse problema é formulada uma descrição, na qual são exigidas apenas um conjunto de probabilidades marginais, a partir das quais seja possível reconstruir a distribuição global, esse problema em estatística é chamado de problema marginal, e foi introduzido de forma sucinta para explorar a contextualidade em [38], algumas ideias chaves dessa formulação serão tratadas na próxima seção.

1.5.5 Formulação de um modelo marginal

Seja um conjunto de variáveis aleatórias $\Theta = \{O_i\}$. Associa-se a uma medida realizada sobre esse conjunto de variáveis aleatórias um vetor resposta χ , cujas componentes representam os valores assumidos por cada variável O_i . A partir dessas definições é possível associar a este conjunto de variáveis aleatórias uma distribuição de probabilidades global representada por: $p(\chi|\Theta)$.

Definindo uma coleção de subconjuntos denotados por \mathcal{C}_i , tal que $\mathcal{C}_i \subseteq \Theta$, e conseqüentemente todos os elementos de \mathcal{C}_i são elementos de Θ . Cada um desses subconjuntos são chamados de *contextos* e uma coleção destes contextos é denotada por *cenário marginal*. A medida de um contexto possui um vetor resposta ϑ_i , e a probabilidade de se obter um dado vetor resposta é dada por $p(\vartheta_i|\mathcal{C}_i)$. Denomina-se problema marginal a tentativa de encontrar cenários cujas distribuições de probabilidades associadas a estes representem as probabilidades marginais $p(\chi|\Theta)$ [38].

Considerando um conjunto de variáveis aleatórias Θ o qual pode ser particionado em duas partes denominadas **A** e **B**, de modo que existe um subconjunto de variáveis aleatórias $\{A_i\}$ na parte **A** e um subconjunto $\{B_j\}$ pertencente a **B**. Definindo contextos que contenham necessariamente um observável de A e um de B , defini-se então o cenário marginal para esse sistema como a coleção dos seguintes subconjunto:

$$\begin{aligned} &\{A_0\}, \{A_1\}, \{B_0\}, \{B_1\}, \\ &\{A_0B_0\}, \{A_1B_0\}, \{A_0B_1\}, \{A_1B_1\}. \end{aligned}$$

Um cenário marginal no qual divide-se o conjunto de variáveis aleatórias em duas partes, onde cada destas é implementada em um subsistema diferente é chamado genericamente de cenário de Bell [13].

Dada a construção de um cenário marginal, pode-se criar um modelo no qual cada contexto \mathcal{C}_i é mapeado através de uma distribuição de probabilidade $p(\vartheta_i|\mathcal{C}_i)$, associada a obtenção de um vetor ϑ_i , podendo-se escrever:

$$p(\vartheta_i|\mathcal{C}_i) = \sum_{\substack{\vartheta_j \\ \{\vartheta_j \neq \vartheta_i\}}} p(\vartheta_j|\mathcal{C}_j) \quad (1.32)$$

Um importante teorema conhecido por teorema de Fine [39], afirma que um modelo marginal é não-contextual se a partir da distribuição de probabilidade global, pode-se gerar as marginais $p(\vartheta_i|\mathcal{C}_i)$, ou seja:

$$p(\vartheta_i|\mathcal{C}_i) = \sum_{\chi \neq \vartheta_i} p(\chi|\Theta) \quad (1.33)$$

O teorema de Fine pode ser visto dessa forma como uma generalização da eq.(1.30), escrita em termos de contextos e vetores resposta deste. Decorre do teorema de Fine, uma tradução da eq.(1.31) em termos da formulação contextual de uma distribuição de probabilidade associada a Θ , dada por:

$$p(\vartheta_i | \mathcal{C}_i) = \int d\lambda \rho(\lambda) \prod_{x_i \in \mathcal{C}_i} \mu_{x_i | \Theta}(\lambda), \quad (1.34)$$

sendo $\mu_{x_i | \Theta}(\lambda)$ função resposta associada ao resultado x_i de uma variável O_i .

Dessa forma é possível construir um modelo marginal não contextual, e usando o teorema de Fine é possível identificar se um dado conjunto de marginais pode gerar uma distribuição de probabilidade a partir de um modelo marginal determinístico e não-contextual.

Para finalizar a construção de um modelo marginal não-contextual, será introduzida uma representação das probabilidades marginais para um par de variáveis aleatórias dicotômicas, em termos dos valores esperados de cada contexto. Na ref. [13], mostra-se que essa representação contém toda informação de um modelo marginal e é dada sem redundância. Matematicamente essa representação é dada pela transformação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(+, + | O_0, O_1) \\ p(+, - | O_0, O_1) \\ p(-, + | O_0, O_1) \\ p(-, - | O_0, O_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \langle O_0 \rangle \\ \langle O_1 \rangle \\ \langle O_0 O_1 \rangle \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

onde o resultado da medida de cada contexto foi identificado por ± 1 . Essa transformação gera o seguinte conjunto de equações:

$$4p(+, + | O_0, O_1) = 1 + \langle O_0 \rangle + \langle O_1 \rangle + \langle O_0 O_1 \rangle \quad (1.36a)$$

$$4p(-, + | O_0, O_1) = 1 - \langle O_0 \rangle + \langle O_1 \rangle - \langle O_0 O_1 \rangle \quad (1.36b)$$

$$4p(+, - | O_0, O_1) = 1 + \langle O_0 \rangle - \langle O_1 \rangle - \langle O_0 O_1 \rangle \quad (1.36c)$$

$$4p(-, - | O_0, O_1) = 1 - \langle O_0 \rangle - \langle O_1 \rangle + \langle O_0 O_1 \rangle \quad (1.36d)$$

Os termos $\langle O_l O_m \rangle$ ($l, m = 0, 1$) representam as *correlações* ou *coeficientes de correlação* [13, 29] entre as variáveis aleatórias O_l e O_m . Todas essas definições são úteis para a verificação do caráter contextual ou não contextual de uma distribuição de probabilidades, conforme será mostrado adiante.

1.5.6 Desigualdades de Boole

Conforme demonstrado na sec.(1.5.4) existe uma definição probabilística de não-contextualidade, definição esta que naturalmente abre a possibilidade para a realização de um teste tipo Bell, *i.e.*, baseado em uma desigualdade semelhante à de Bell. Porém a derivação de desigualdades não contextuais baseadas nas correlações dos resultados da medida de pares de observáveis, não é tão direto quanto a mostrado na sec.(1.4).

Uma estratégia útil na derivação de desigualdades não-contextuais é representar geometricamente o conjunto de probabilidades marginais, tal descrição geométrica é feita por meio de uma entidade matemática denominada *politopo convexo* [37, 38, 40]. Um politopo é uma generalização geométrica em \mathbb{R}^n do conceito de polígono, enquanto um politopo convexo é uma envoltória convexa de um conjunto de elementos, no qual cada vértice representa os elementos que não são obtidos à partir da combinação convexa dos outros elementos. Os elementos no interior da envoltória convexa do politopo, quando existem, são representados pela combinação convexa dos elementos do vértice. Este é um problema matematicamente estabelecido e é possível pois o conjunto de vínculos obedecidos por estas é o mesmo necessário para que um conjunto possa ser representado por um politopo convexo, conforme pode ser visto em [13].

Determinados os vértices de um politopo, este fica completamente caracterizado por um conjunto de desigualdades as quais constituem alguns vínculos aos quais esses elementos estão sujeitos, um bom exemplo de vínculos é a condição de positividade de uma distribuição de probabilidades. Estas desigualdades de vínculo são conhecidas como desigualdades de Boole. A obtenção das desigualdades de Boole é um problema matemático estabelecido, possuindo inclusive ferramentas computacionais para auxiliar no problema de sua obtenção.

Na ref. [13], mostra-se que tanto o conjunto de todas os cenários marginais possíveis, quanto o conjunto dos cenários marginais não contextuais podem ser representados por politopos convexos, sendo este denominado *politopo não-contextual* e aquele denominado por *politopo não perturbado*. Desta forma separa-se o conjunto das correlações não-contextuais de todas as outras correlações, de modo que gerando desigualdades que caracterizem o segundo politopo consegue-se gerar desigualdades tipo Bell capazes de atestar sobre o caráter contextual ou não de uma distribuição de probabilidades.

Outro importante resultado demonstrado em [13] é que os vértices do politopo não contextual são as distribuições de probabilidade determinísticas de um contexto as quais podem ser traduzidas no valor esperado da medida de cada contexto, conforme mostrado em 1.5.5.

Na sequência será dada uma ilustração das discussões precedentes por meio de um exemplo retirado de [13].

Aplicação da descrição marginal de não-contextualidade

Considere um conjunto de três variáveis aleatórias X_0, X_1, X_2 dicotômicas com possíveis resultados $\vartheta_i = \pm 1$ ($i = 0, 1$ e 2). Medidas entre os pares destas variáveis revelam que elas são sempre anti-correlacionadas. Medidas individuais das variáveis revelam que cada possível valor ocorre com uma frequência de 50%. Um cenário marginal para este problema é representado pela seguinte coleção de contextos:

$$\mathfrak{S} = \{\{X_0\}, \{X_1\}, \{X_2\}, \{X_0, X_1\}, \{X_1, X_2\}, \{X_2, X_0\}\}, \quad (1.37)$$

e por sua vez um modelo marginal para este cenário pode ser traduzido em termos das probabilidades associadas a cada contexto ou conforme discutido pode-se dar uma representação deste modelo marginal em termos do valor médio obtido em cada contexto. Inicialmente considere a representação do cenário marginal em termos do conjunto de probabilidades marginais:

$$\mathfrak{M}_p = \{p(\vartheta_0|X_0)\}; \{p(\vartheta_1|X_1)\}; \{p(\vartheta_2|X_2)\}; \\ \{p(\vartheta_0, \vartheta_1|X_0, X_1)\}; \{p(\vartheta_1, \vartheta_2|X_1, X_2)\}; \{p(\vartheta_2, \vartheta_0|X_2, X_0)\} \quad (1.38a)$$

Uma vez que essas variáveis são anti-correlacionadas aos pares então as probabilidades marginais $p(\pm, \pm|X_i, X_{j \neq i}) = 0$ (i e $j = 1, 2$ e 3). Desta forma não é possível atribuir uma distribuição de probabilidades conjuntas para estas três variáveis, pois uma das marginais sempre descreverá a probabilidade de obtenção de um resultado correlacionado.

Por outro lado pode-se estudar o sistema a partir dos valores médios de cada cenário utilizado para compor o modelo marginal dado na eq.(1.37), então o cenário marginal fica:

$$\mathfrak{M}_{v.m} = \{\{\langle X_0 \rangle\}, \{\langle X_1 \rangle\}, \{\langle X_2 \rangle\}, \{\langle X_0 X_1 \rangle\}, \{\langle X_1 X_2 \rangle\}, \{\langle X_2 X_0 \rangle\}\}, \quad (1.38b)$$

o qual pode ser representado numericamente como:

$$\mathfrak{M}_{v.m} = \{0, 0, 0, -1, -1, -1\}. \quad (1.38c)$$

Para a representação geométrica deste cenário marginal inicialmente deve-se encontrar os vértices dos politopos, os quais, conforme discutido anteriormente, são representados pelas distribuições de probabilidade determinísticas marginais, em termos dos valores médios, isso significa que os vértices do politopo serão representados pelos "vetores" de resposta, cujas componentes são construídas a partir da atribuição determinística de valores para as respostas das variáveis X_0 , X_1 e X_2 . Desta forma geram-se os seguintes vetores de resposta ($X_0, X_1, X_2, X_0X_1, X_1X_2, X_0X_2$):

$$\begin{array}{ll} (+, +, +, +, +, +); & (-, +, +, -, +, -); \\ (+, +, -, +, -, -); & (-, +, -, -, -, +); \\ (+, -, +, -, -, +); & (-, -, +, +, -, -); \\ (+, -, -, -, +, -); & (-, -, -, +, +, +). \end{array}$$

Uma vez determinados os vértices do politopo, este fica completamente especificado por um conjunto de desigualdades conhecida por *desigualdades de Boole* [41]. Encontrar este conjunto de desigualdades a partir de uma lista de vértices é um problema bem estabelecido em geometria convexa, existindo uma gama de algoritmos para realizar esta tarefa. Na ref. [13] utiliza-se um algoritmo proposto em [42] implementado no software *lrs* [43], para gerar as desigualdades de Boole que caracterizam o politopo associado a lista de vértices acima. Com isso temos dezesseis desigualdades, das quais doze representam a condição de positividade para cada par de variáveis aleatórias, ou seja, exigem que cada equação das 1.36 sejam maiores ou iguais a zero. Na

prática por se estar lidando com probabilidades as condições de positividade não trazem informações relevantes, dado que sempre serão satisfeitas. Porém as outras quatro desigualdades restantes, são de grande utilidade, estas são escritas como:

$$- \langle X_0 X_1 \rangle - \langle X_1 X_2 \rangle - \langle X_2 X_0 \rangle \leq 1 \quad (1.39a)$$

$$- \langle X_0 X_1 \rangle + \langle X_1 X_2 \rangle + \langle X_2 X_0 \rangle \leq 1 \quad (1.39b)$$

$$\langle X_0 X_1 \rangle - \langle X_1 X_2 \rangle + \langle X_2 X_0 \rangle \leq 1 \quad (1.39c)$$

$$\langle X_0 X_1 \rangle + \langle X_1 X_2 \rangle - \langle X_2 X_0 \rangle \leq 1 \quad (1.39d)$$

Desta forma se o modelo proposto para as três variáveis aleatórias não respeitar qualquer uma destas desigualdades pode-se dizer que este cenário não aceita uma descrição não-contextual e determinística. Em vista da eq.(1.38c) pode-se verificar que a eq.(1.39a) é violada, evidenciando que este modelo, o qual não comporta uma descrição marginal, não pode ser explicado por um modelo não-contextual e determinístico.

1.5.7 O n-ciclo

Considere o conjunto de n variáveis aleatórias $\Theta = \{O_0, \dots, O_{n-1}\}$, uma possível representação marginal deste conjunto é uma que contenha os contextos $\{O_i\}$ os quais serão chamados de *singletons*, e os contextos formados por pares de variáveis aleatórias conjuntamente mensuráveis $\{O_i O_{i+1}\}$, com a soma $i + 1$ módulo n . Se for construído um grafo de compatibilidade deste cenário marginal, ou seja, um grafo no qual cada variável aleatória está em um vértice e as variáveis conjuntamente mensuráveis são conectadas por uma aresta, tal qual mostrado na fig.(1.2), este grafo é chamado de n-ciclo.

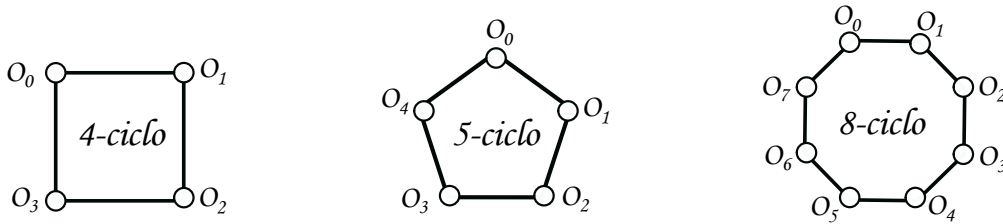


Figura 1.2: Grafo de compatibilidade entre n questões. Cada questão é representada por um vértice e as questões compatíveis são ligadas por uma aresta. A figura mostra o n-ciclo para $n = 4, 5$ e 8 .

A caracterização de cenários marginais representados por um n-ciclo é um problema estudado a muito tempo em matemática [44], e quando aplicado a descrição marginal de contextualidade construída até o momento, é capaz de gerar uma família de desigualdades de Boole para um dado ciclo. A importância deste resultado ficará mais evidente ao longo desta seção, onde será mostrado que determinados cenários reproduzem inclusive a eq.(1.20).

A completa caracterização desse tipo de cenário foi inicialmente conjecturada em [45] e formalmente obtida em [7], onde demonstra-se que existem 2^{n-1} desigualdades não-contextuais para um dado cenário e que estas são facetas do politopo não contextual, o que implica que elas são todas as desigualdades de Boole para o n-ciclo. As desigualdades de não-contextualidade encontradas são:

$$\Omega = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k \langle O_k O_{k+1} \rangle \leq n - 2, \quad (1.40)$$

onde ζ_k pode assumir valores ± 1 , desde que se tenha um número ímpar de sinais negativos na soma¹². Outra importante definição na eq.(1.40) é que a soma $k + 1$ seja módulo n ¹³.

Na seção seguinte será demonstrado que a mecânica quântica não obedece as desigualdades de Boole para um cenário marginal não-contextual, daí segue outro importante resultado obtido na ref. [7]: quando considerado um estado quântico maximamente emaranhado puro, o valor da soma na eq.1.40 é o máximo possível.

1.5.8 Violação quântica das desigualdades do n-ciclo

De acordo com a discussão na sec(1.5.6) se uma das desigualdades de Boole que são geradas a partir de um modelo marginal de um sistema não for satisfeita, então este sistema não comporta uma descrição determinística e não-contextual. Desta forma basta demonstrar que uma das desigualdades de Boole não são respeitadas para que se possa inferir o caráter contextual e não-determinístico dos resultados de medida de um sistema.

A fim de prover uma visualização da violação destas desigualdades com qualquer n par e maior ou igual a 4, considera-se o estado puro maximamente emaranhado de um sistema de dois níveis i e s , tal qual dado na eq.(1.10):

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle), \quad (1.41)$$

e os observáveis:

$$O_k = \begin{cases} \chi(\theta_k) \otimes \mathbb{1}_s & \text{para } k \text{ par,} \\ \mathbb{1}_i \otimes \chi(-\theta_k) & \text{para } k \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (1.42a)$$

na qual define-se:

$$\chi_k = \cos\left(k\frac{\pi}{n}\right) \sigma_x + \sin\left(k\frac{\pi}{n}\right) \sigma_y, \quad (1.42b)$$

Conforme será demonstrado na sequência a seguinte desigualdade de Boole não será satisfeita para o estado dado na eq.(1.41) e os operadores definidos pela eq.(1.42a):

¹²Para o leitor que achar esta aparente arbitrariedade estranha, pode-se verificar que isto apenas generaliza as eq.1.39

¹³Ou seja se $k + 1 = n$ então toma-se $k + 1 = 0$

$$\sum_{k=0}^{n-2} \langle O_k O_{k+1} \rangle - \langle O_0 O_{n-1} \rangle \leq 2. \quad (1.43)$$

Para demonstrar a violação desta desigualdade nota-se inicialmente que:

$$\chi(\theta_k) |1\rangle = e^{ik\frac{\pi}{n}} |0\rangle, \quad (1.44a)$$

$$\chi(-\theta) |1\rangle = e^{-ik\frac{\pi}{n}} |0\rangle, \quad (1.44b)$$

$$\chi(\theta) |0\rangle = e^{-ik\frac{\pi}{n}} |1\rangle \quad (1.44c)$$

$$\chi(-\theta) |0\rangle = e^{ik\frac{\pi}{n}} |1\rangle \quad (1.44d)$$

Das eqs.(1.44) decorre que:

$$\langle \phi^+ | O_k O_{k+1} | \phi^+ \rangle = \begin{cases} -\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) & \text{para } k = n-1, \\ \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) & \text{para } k \neq n-1. \end{cases} \quad (1.45)$$

Portanto escolhendo uma desigualdade onde todos os valores de ζ_k são +1, exceto o último ($k = n-1$), então vemos que o valor da desigualdade 1.40 é dado por:

$$\Omega = n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad (1.46)$$

o que claramente viola as desigualdades não-contextuais 1.40, para todo n par ≥ 4 .

As provas de contextualidade baseadas em desigualdades de Boole são essencialmente diferentes das provas de KS (ver 1.5.2), pois esta é independente de qualquer estatística relacionada a uma estado específico, enquanto aquelas são claramente dependente do estado quântico e de suas estatísticas, portanto um teste de desigualdade de Boole infelizmente, está sujeito as lacunas experimentais de detecção e amostra estatisticamente fiel.

O cenário de CHSH

Para fixar as ideias discutidas acima, será dado um exemplo de um importante cenário, o cenário de CHSH. Considerando novamente um sistema bi-partido com partições **A** e **B**, formados por dois qbits. Estes formam um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, de dimensão $d = 4$. Um n-ciclo particularmente interessante nesse sistema é dado para $n = 4$, para o qual os seguintes conjuntos são requeridos: $\{O_0, O_2\} \in \mathcal{H}_A$ e $\{O_1, O_3\} \in \mathcal{H}_B$, por serem definidos em espaços de Hilbert diferentes os elementos do primeiro conjunto logicamente comutam com os do segundo. Uma das possíveis desigualdades de Boole para este cenário é:

$$\Omega = \langle O_0 O_1 \rangle + \langle O_2 O_1 \rangle + \langle O_2 O_3 \rangle - \langle O_0 O_3 \rangle \leq 2, \quad (1.47)$$

a qual é justamente a desigualdade de CHSH (eq. 1.20), o que deixa claro, ao menos para este cenário particular, que partindo de um teste estabelecido para a contextualidade, encontra-se como um caso particular um teste de não localidade, evidenciando que este deve ser um caso especial daquele.

Capítulo 2

Conversão Paramétrica Descendente Espontânea

O fenômeno da Conversão Paramétrica Descendente Espontânea (SPDC) surge quando um feixe de luz intenso, geralmente um laser, incide em um meio não centro simétrico, com tensor susceptibilidade elétrica de segunda ordem relevante o suficiente de modo a propiciar a observação de um efeito não linear de 2ª ordem. A meios com estas características da-se o nome de meios não lineares de 2ª ordem. Este efeito é capaz de gerar luz com propriedades tais que não podem ser explicados no contexto da teoria eletromagnética clássica [46]. Nesse capítulo será feita uma discussão com um engajamento matemático sobre técnicas de controle e geração de qdits fotônicos emaranhados, decodificados no caminho transversal dos fótons convertidos neste processo. Uma revisão mais aprofundada sobre SPDC e algumas aplicações interessantes podem ser visualizadas na referência [47].

2.1 Fundamentos sobre a SPDC

Quando um campo elétrico intenso interage com um meio material, este campo pode induzir efeitos ópticos não lineares no meio, devido a oscilações anarmônicas de dipolos resultantes da interação campo-meio [48, 49]. Estes efeitos dependem basicamente de características do meio como a existência ou não de um centro de simetria e a magnitude de ordens específicas na expansão do tensor susceptibilidade do meio, o qual será discutido na sequência. Efeitos como a (SPDC) e a geração de segundo harmônico são chamados efeitos não lineares de segunda ordem [48], ou seja, apenas termos de segunda ordem na expansão do vetor polarização do meio [48] são relevantes para a ocorrência deste fenômeno. Uma outra condição para que efeitos de 2ª ordem sejam relevantes é que o meio não tenha um centro de simetria [49].

A SPDC pode ser obtida incidindo um feixe de laser sobre um meio não linear, geralmente um cristal. Desta forma existe uma pequena probabilidade de um fóton do campo incidente com frequência ω_p ser convertido espontaneamente em dois fótons com frequências ω_i e ω_s , de modo que $\omega_p = \omega_i + \omega_s$, ou seja, o campo eletromagnético incidente, o qual é denominado *pump*¹,

¹Ou feixe de bombeamento

dá origem a dois campos de baixa intensidade rotulados por *signal* e *idler*², a figura (2.1) mostra uma representação esquemática deste processo.

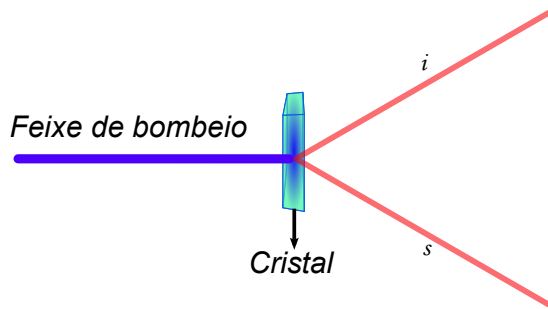


Figura 2.1: Representação esquemática da SPDC, um feixe de bombeamento com frequência ω_p incide em um cristal e é convertido em dois fótons com frequências $\omega_s + \omega_i = \omega_p$

Dois importantes vínculos entre as frequências e os vetores de onda dos campos envolvidos devem ser respeitados na SPDC, e eles expressam respectivamente a conservação de energia e momento, estes vínculos são dados por:

$$\omega_p = \omega_i + \omega_s ; \quad (2.1a)$$

$$\vec{k}_p = \vec{k}_i + \vec{k}_s . \quad (2.1b)$$

As relações de conservação acima são satisfeitas apenas quando existe um *casamento de fase* entre campo de bombeamento e os campos convertidos [47]. Esta condição será discutida em detalhes a seguir, por hora basta saber que existem dois tipos de função casamento de fases, a chamada tipo I no qual os fótons convertidos possuem a mesma polarização e o do tipo II onde os fótons convertidos possuem polarização ortogonal. Como consequência da conservação de momento entre os pares de fótons convertidos, observa-se que emergem do cristal diversos cones cada qual com cones de uma frequência. A figura (2.2) representa estes cones para os dois tipos de casamento de fase.

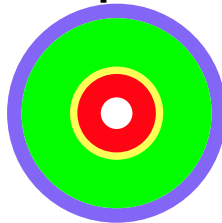
O fenômeno da SPDC não pode ser explicado utilizando as leis do eletromagnetismo clássico, uma vez que os estados de dois fótons *signal* e *idler* são amplificados espontaneamente a partir do estado de vácuo [18, 46]. É possível observar experimentalmente que os fótons convertidos exibem características que não são explicadas pela física clássica, uma dessas é o emaranhamento em alguns graus de liberdade, o que faz com que estes dois fótons seja um sistema físico que não pode ser representado por um estado separável. Portanto um pacote de onda representa os dois fótons, por este motivo, o par é muitas vezes chamado de *bifóton*, outro nome comumente dado a este par de fótons é *fótons gêmeos*.

As próximas subseções serão dedicadas ao tratamento matemático adequado a esse processo, utilizando o formalismo quântico.

²Outra nomenclatura comumente dada a estes fótons é *sinal* e *complementar*. Que corresponde a uma tradução do inglês.

Casamento de fase

Tipo I



Casamento de fase

Tipo II

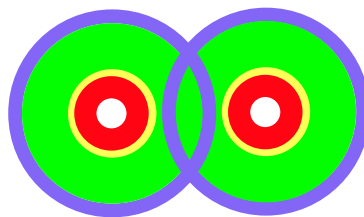


Figura 2.2: Representação esquemática da secção transversal dos cones de luz gerados no processo da SPDC, cada cor representa um comprimento dos possíveis comprimentos de onda gerados no processo. Na conversão do tipo I os fótons gerados possuem a mesma polarização enquanto na conversão do tipo II cada fóton gerado possui uma polarização perpendicular em relação a de seu par. Desta forma cada um dos cones é um feixe que possui estado de polarização ortogonal em relação ao outro.

2.1.1 O hamiltoniano de interação

Afim de tratar o fenômeno da SPDC quanticamente, o caminho largamente utilizado é [47] escrever o hamiltoniano de interação eletromagnética classicamente e posteriormente quantizar o campo elétrico. Considerando um volume \mathcal{V} onde ocorre a interação do campo com o meio, o hamiltoniano clássico é dado por:

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d\vec{r} [\mathbf{D}(\vec{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\vec{r}, t) + \mathbf{B}(\vec{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\vec{r}, t)] , \quad (2.2)$$

na qual $\mathbf{D}(\vec{r}, t) \equiv \epsilon_0 \mathbf{E}(\vec{r}, t) + \mathbf{P}(\vec{r}, t)$ é o vetor deslocamento elétrico, $\mathbf{B}(\vec{r}, t)$ é a indução magnética e $\mathbf{H}(\vec{r}, t)$ representa o campo magnético. Uma vez que a SPDC é um fenômeno não linear de 2ª ordem, toda a análise pode ser restrita à componente do vetor de polarização de 2ª ordem. A componente l deste vetor em segunda ordem, escrita no domínio temporal [18] é dada por:

$$P_l^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ljk}^{(2)}(t', t'') E_j(\mathbf{r}, t - t') E_k(\mathbf{r}, t - t'') , \quad (2.3)$$

sendo $\chi_{ljk}^{(2)}(t', t'')$ a susceptibilidade de 2ª ordem.

Em geral os meios utilizados para gerar a SPDC são cristais birrefringentes e que não possuem propriedades magnéticas relevantes. Isso significa que a contribuição não linear do campo magnético ao hamiltoniano da eq.(2.2) pode ser desprezada e combinando as eqs. (2.2) e (2.3), chega-se finalmente ao hamiltoniano clássico de interação, dado por:

$$\mathcal{H}_I = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d\mathbf{r} \mathbf{E}_p(\vec{r}, t) \cdot \mathbf{P}^{(2)} , \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{E}_p(\vec{r}, t)$ é o campo elétrico do campo de bombeamento.

O campo elétrico pode ser descrito como uma expansão de ondas planas [46]:

$$\mathbf{E}(\vec{r}, t) = \mathbf{E}^+(\vec{r}, t) + \mathbf{E}^-(\vec{r}, t) , \quad (2.5)$$

sendo:

$$\mathbf{E}^+(\vec{r}, t) = [\mathbf{E}^-(\vec{r}, t)]^* = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \hat{\mathbf{p}}_{\vec{k}, \sigma} \eta_{\vec{k}, \sigma} \alpha_{\vec{k}, \sigma} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} , \quad (2.6)$$

sendo V o volume no qual o campo é analisado, $\hat{\mathbf{p}}_{\vec{k}, \sigma}$ o autovetor de polarização do cristal [18, 46] e $\alpha_{\vec{k}, \sigma}$ a amplitude do modo do campo com componente σ do vetor de polarização e vetor de onda \vec{k} . A constante de normalização $\eta_{\vec{k}, \sigma}$ é dada por:

$$\eta_{\vec{k}, \sigma} = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_\sigma(\vec{k})}{2 \epsilon_0 n_\sigma^2(\vec{k})}} , \quad (2.7)$$

sendo $\omega_\sigma(\vec{k})$ as soluções da relação de dispersão: $c^2 k^2 = \omega^2 n_s^2(\omega)$ [18] e n_σ^2 o índice de refração sentido pelo campo com componente de polarização σ e vetor de onda \vec{k} .

A quantização do campo é finalmente obtida trocando na eq.(2.6) as amplitudes complexas $\alpha_{\vec{k},\sigma}$ pelo operador de aniquilação do modo (\vec{k}, σ) , o qual é representado por $\hat{a}_{\vec{k},\sigma}$. Deste modo as componentes de onda plana ficam [47]:

$$\mathbf{E}^+(\vec{r}, t) = [\mathbf{E}^-(\vec{r}, t)]^\dagger = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \hat{\mathbf{p}}_{\vec{k}, \sigma} \eta_{\vec{k}, \sigma} \hat{a}_{\vec{k}, \sigma} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (2.8)$$

Substituindo a eq.(2.8) na (2.4) e considerando apenas os termos que representam transições prováveis, ou seja, aqueles que envolvem a destruição de um fóton do campo de bombeamento e a criação de um fóton *signal* e um *idler*, obtêm-se finalmente o hamiltoniano quantizado que representa a SPDC, o qual é dado por [47]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_I = & \frac{1}{2V^{\frac{3}{2}}} \sum_{\vec{k}_s, \sigma_s} \sum_{\vec{k}_i, \sigma_i} \sum_{\vec{k}_p, \sigma_p} \eta_{\vec{k}_s, \sigma_s}^* \eta_{\vec{k}_i, \sigma_i}^* \eta_{\vec{k}_p, \sigma_p} \hat{a}_{\vec{k}_s, \sigma_s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_i, \sigma_i}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_p, \sigma_p} \chi_{ljk}^{(2)}(\omega = \omega' + \omega'') \times \\ & \times \left(\hat{\mathbf{p}}_{\vec{k}_s, \sigma_s}^* \right)_l \left(\hat{\mathbf{p}}_{\vec{k}_i, \sigma_i}^* \right)_j \left(\hat{\mathbf{p}}_{\vec{k}_p, \sigma_p} \right)_k \int_V d\vec{r} e^{-i(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p \cdot \vec{r})}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

sendo $\chi_{ljk}^{(2)}(\omega = \omega' + \omega'')$ dado por:

$$\chi_{ljk}^{(2)}(\omega = \omega' + \omega'') = \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' \chi_{ljk}^{(2)}(t', t'') e^{-i(\omega' t' + \omega'' t'')} \quad (2.10)$$

2.1.2 O estado dos fótons convertidos

O estado dos fótons convertidos imediatamente após o cristal é obtido aplicando o operador evolução temporal sobre o estado inicial do par de fótons. Dessa forma o estado final do par de fótons é dado por:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\text{vac}\rangle_{i,s}, \quad (2.11)$$

onde o estado inicial dos campos i e s é representado pelo estado de vácuo $|\text{vac}\rangle_{i,s}$, por não existirem excitações neste campo no estado inicial $t = 0$. E o operador de evolução $\hat{U}(t)$ na representação de interação é dado por:

$$\hat{U}(t) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \hat{\mathcal{H}}_I\right) \quad (2.12)$$

Se o campo de bombeamento é fraco o suficiente de modo que o tempo decorrido entre a geração de dois pares de fótons simultâneos é muito maior que a janela temporal na qual os fótons são observados³, pode-se então expandir

³A justificativa para isso é que a probabilidade de geração de quatro fótons é muito menor que a probabilidade associada a geração de um par de fótons, dado que a intensidade do campo não é grande o suficiente para favorecer à primeira situação.

o operador de evolução em uma série de potências e desprezar os termos de geração de quatro fótons, ou seja, é justificado que a série seja truncada em segunda ordem [47], desta forma é possível escrever:

$$\hat{U}(t) = \mathbb{1} + \left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \hat{\mathcal{H}}_I \right); \quad (2.13)$$

o termo da identidade representa a não geração dos fótons gêmeos, ao passo que o termo entre parenteses representa a geração de um par de fótons.

Realizando a integração do segundo termo da eq.(2.13) e a integração volumétrica da eq.(2.9) obtém-se:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= |\text{vac}\rangle_{i,s} + \frac{Vt}{2\mathcal{V}^{\frac{3}{2}}} \sum_{\vec{k}_s, \sigma_s} \sum_{\vec{k}_i, \sigma_i} \sum_{\vec{k}_p, \sigma_p} \eta_{\vec{k}_s, \sigma_s}^* \eta_{\vec{k}_i, \sigma_i}^* \eta_{\vec{k}_p, \sigma_p} \times \\ &\times v(\vec{k}_p, \omega_p) \left(\hat{\mathbf{p}}_{\vec{k}_s, \sigma_s}^* \right)_l \left(\hat{\mathbf{p}}_{\vec{k}_i, \sigma_i}^* \right)_j \left(\hat{\mathbf{p}}_{\vec{k}_p, \sigma_p} \right)_k e^{-i(\omega_s + \omega_i - \omega_p) \frac{t}{2}} \times \\ &\times \text{sinc} \left[(\omega_s + \omega_i - \omega_p) \frac{t}{2} \right] \prod_m \text{sinc} \left[\left(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p \right)_m \frac{l_m}{2} \right] \times \\ &\times e^{-i(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p)_m \frac{l_m}{2}} \left| \vec{k}_s, \sigma_s \right\rangle \left| \vec{k}_i, \sigma_i \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.14)$$

na qual $m = x, y$ e z representa as direções cartesianas e l_m o comprimento do cristal ao longo de cada direção m . A amplitude $v(\vec{k}_p, \omega_p)$ é o autovalor do estado do campo de bombeamento, e corresponde a expansão em ondas planas do perfil transversal do feixe de bombeamento [1, 46].

A equação acima representa o estado dos fótons gêmeos em um instante de tempo t , e devido as condições comuns aos experimentos que utilizam esta fonte de luz, é possível simplificá-lo através de um conjunto de aproximações [47]

1. Supondo o uso de um laser de potência contínua o tempo de interação t é considerado infinito ou igual ao tempo de coerência do laser, de modo que a função sinc $\left[(\omega_s + \omega_i - \omega_p) \frac{t}{2} \right]$ se torna relevante apenas quando $\omega_s + \omega_i = \omega_p$, então a seguinte aproximação é válida:

$$\text{sinc} \left[(\omega_s + \omega_i - \omega_p) \frac{t}{2} \right] \approx \delta(\omega_s + \omega_i - \omega_p) \quad (2.15)$$

2. Os fótons transmitidos pelos filtros de interferência apresentam pouca dispersão espectral, ou seja possuem frequências centrais estreitas de modo que os efeitos da birrefringência (quando houverem) podem ser desconsiderados.
3. As funções $\eta_{\vec{k}_u, \sigma_u}$ ($u = i, s, p$) e $\chi_{ljk}^{(2)}(\omega = \omega' + \omega'')$, variam lentamente com \vec{k}_u , de modo que podem ser tomadas como constantes no intervalo em que \vec{k}_u é analisado.

4. O pump propaga-se na direção z e o cristal é grande o suficiente nas direções x e y de modo que contenha praticamente todo o perfil transversal do feixe de bombeamento, ou seja, a cintura do feixe é muito menor que as dimensões transversais do cristal.
5. O volume de quantização V é suficientemente grande de modo que seja permitido no cristal um contínuo de modos, tal que os somatórios na eq.(2.14) possam ser substituídos por integrais. Em face desta aproximação $v(\vec{k}_p, \omega_p)$ torna-se o espectro angular do feixe de bombeamento [1].
6. O campo de bombeamento tem apenas polarização na direção extraordinária do cristal, o que representa implicitamente que está tratando-se de cristais com birrefringência negativa.

Desta forma o estado de dois fótons gerados pode ser expresso por:

$$|\psi(t)\rangle = (1 - \kappa) |vac\rangle_{i,s} + \kappa \int d\vec{q}_s \int d\vec{q}_i v(\vec{q}_s + \vec{q}_i) \Gamma(\vec{q}_s - \vec{q}_i) |1\vec{q}_s\rangle |1\vec{q}_i\rangle, \quad (2.16)$$

onde $\vec{q}_u = (k_{u_x}, k_{u_y})$, ou seja, é um vetor que contém as componentes transversais dos vetores de ondas dos campos envolvidos no processo. A função $\Gamma(\vec{q}_s - \vec{q}_i)$ é a função de casamento de fase que será analisada com detalhes na próxima seção. Um resultado interessante obtido à partir da eq.(2.16) é que o perfil transversal dos fótons gerados depende conjuntamente da função de casamento de fase e do perfil transversal do feixe de bombeamento, uma vez que a primeira é fixa para cada tipo de cristal, então um controle no estado dos fótons gerados pode ser obtido manipulando o perfil do pump. Este resultado é a base de diversos trabalhos realizados com fótons gêmeos com intuito de estudar propriedades de sistemas quânticos [50–53].

2.1.3 A função casamento de fase

A aproximação imposta pelo item 4 impõe que o produto na eq.2.14 pode ser aproximado por:

$$\prod_{m=x,y,z} \text{sinc} \left[\left(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p \right)_m \frac{l_m}{2} \right] \approx \delta(\vec{q}_s + \vec{q}_i - \vec{q}_p) \text{sinc} \left[\left(\vec{k}_s + \vec{k}_p - \vec{k}_p \right)_z \frac{l_z}{2} \right], \quad (2.17)$$

sendo $\vec{q}_u = (\vec{k}_{u_x}, \vec{k}_{u_y})$, o vetor que contém as componentes transversais do vetor de onda de cada campo. A expressão 2.17 implica que as sinc's que contenham l_x e l_y devem ser relevantes apenas quando:

$$k_{s_x} + k_{i_x} = k_{p_x}, \quad (2.18a)$$

$$k_{s_y} + k_{i_y} = k_{p_y}, \quad (2.18b)$$

que ao serem combinadas resultam em:

$$\vec{q}_s + \vec{q}_i = \vec{q}_p. \quad (2.18c)$$

A eq.2.18c representa a condição de casamento de fase transversal a qual o processo da SPDC está condicionado. Uma outra importante condição de casamento de fase é a estabelecida pelas componentes longitudinais dos vetores de onda envolvidos, estas são dadas por [11, 47]

$$\Gamma(\vec{q}_s, \vec{q}_p) = \sqrt{|\vec{k}_s|^2 - |\vec{q}_s|^2} + \sqrt{|\vec{k}_i|^2 - |\vec{k}_s|^2} - \sqrt{|\vec{k}_p|^2 - |\vec{q}_s - \vec{q}_i|^2} \quad (2.19)$$

Considerando a aproximação paraxial ($|\vec{q}_j| \ll |\vec{k}_j|$), é possível expandir esta expressão em uma série de Taylor e o seguinte resultado é obtido para o casamento de fase do tipo I [11]:

$$\Gamma(\vec{q}_s - \vec{q}_p) \approx \zeta_0 + L \frac{|\vec{q}_-|^2}{4n_0\omega_0/c}, \quad (2.20)$$

onde $\vec{q}_- = \vec{q}_i - \vec{q}_s$, L é o comprimento do cristal e o termo ζ_0 leva em conta o casamento de fase na direção de propagação dos fótons gêmeos.

2.2 Elementos de óptica de Fourier

O estado dos fótons gêmeos expresso pela eq.(2.16) refere-se ao estado do par imediatamente após o cristal. Em geral deseja-se enviar os fótons através de elementos ópticos lineares, a fim de realizar com eles operações tanto para preparação de estados quânticos quanto para estudar propriedades deste estado. Nesse caso é necessário calcular o estado do par ao ser transmitido pelos elementos ópticos. Uma vertente da óptica que possui ferramentas capazes de prever o comportamento de uma onda eletromagnética interagindo com elementos ópticos e relacionar o perfil deste em uma posição do espaço com o perfil em outra posição distinta, é a chamada *óptica de Fourier*. Esta descrição é assim denominada por possuir como ferramenta matemática fundamental a transformada de Fourier. Nesta seção serão discutidas algumas ideias centrais sobre óptica de Fourier e sua utilidade na propagação do estado gerado na SPDC e no estudo de propriedades deste.

2.2.1 O espectro angular

Considere um campo escalar e monocromático $U(\vec{r}, t)$, de frequência ω e com dependência temporal harmônica, ou seja:

$$U(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \quad (2.21)$$

Se o campo se propaga em um meio linear, isotópico e homogêneo com permissividade μ e permissividade ϵ , a parte espacial deste campo é solução da equação de Helmholtz [54], dada por:

$$\nabla^2 u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0, \quad (2.22)$$

sendo $k^2 = \omega^2/\mu\epsilon$

Tomando como a direção de propagação do campo a direção z , então utilizando-se da aproximação paraxial, a qual supõe que as componentes do vetor de onda nas direções transversais são muito menores que a componente na direção de propagação do campo [47], pode-se separar a componentes longitudinal das transversais. A distribuição de $u(\vec{r})$ ao longo do plano $z = cte.$ pode ser decomposta em diversas componentes espaciais ao longo deste plano, e a ferramenta matemática utilizada para expressar tal decomposição é a transformada de Fourier do campo transversal denotado por $W(\vec{\rho}, z)$, com $\vec{\rho}$ sendo o vetor com as componentes transversais de \vec{r} . A referida transformada de Fourier é escrita como [54]:

$$W(\vec{\rho}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{q} v(\vec{q}, z) e^{i\vec{q} \cdot \vec{\rho}}, \quad (2.23)$$

sendo \vec{q} a componente transversal do vetor de onda \vec{k} . O que a eq.(2.23) expressa é o fato de $W(\vec{\rho}, z)$ é uma sobreposição de ondas planas que se propagam para longe de do plano z_0 com amplitude complexa dada por $v(\vec{q}, z)$. Tal função é chamada de **espectro angular** que pode ser matematicamente expresso via transformada inversa da eq.(2.23):

$$v(\vec{q}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} W(\vec{\rho}, z) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{\rho}}. \quad (2.24)$$

Esta função é de utilidade prática pois a propagação do campo pode ser matematicamente realizada via propagação do espectro angular deste, ou seja, conhecendo como o espectro angular é afetado pela interação com elementos ópticos é possível saber qual o comportamento do campo após esta interação.

2.2.2 Propagação do espectro angular através de um sistema óptico linear

Conforme mencionado acima, a propagação do campo via propagação do espectro angular é capaz de relacionar o campo em um plano z_i com o campo após a interação com um elemento óptico linear em um plano z_f . Primeiramente deve-se definir o que é um elemento óptico linear, para isso considera-se dois campos incidentes f_{in_1} e f_{in_2} , de modo que quando estes campos incidem individualmente no elemento dão origem aos campos de resposta F_{out_1} e F_{out_2} respectivamente. Então um elemento é dito linear se para a incidência simultânea dos campos de entrada, têm-se como resposta a combinação $F_{out_1} + F_{out_2}$ das respostas individuais.

Supondo que um elemento deste tipo é inserido em um plano z_0 perpendicular à direção de propagação do campo, pode-se associar a este elemento uma função denominada função de transmissão $t(\vec{\rho})$, que é definida como a razão entre os campos transmitidos ($W_t(\vec{\rho}, z_f)$) e incidente ($W_i(\vec{\rho}, z_i)$), o que possibilita escrever:

$$W_t(\vec{\rho}, z_f) = t(\vec{\rho}) W_i(\vec{\rho}, z_i) . \quad (2.25)$$

Esta descrição pode ser feita via espectro angular, bastando tomar a transformada de Fourier dos dois lados da eq.(2.25), uma vez que a eq.(2.24) define a transformada de Fourier do campo como sendo o espectro angular. Para a transformada de Fourier do lado direito, têm-se a transformada do produto de duas funções, que é igual à convolução das transformadas de Fourier [54, 55]. Desta forma, a transformada da eq.(2.25) é dada por:

$$v_t(\vec{q}, z_f) = v_i(\vec{q}, z_i) * \mathcal{T}[t(\vec{\rho})] , \quad (2.26)$$

onde $*$ representa a convolução e $\mathcal{T}[t(\vec{\rho})]$ a transformada de Fourier da função $t(\vec{\rho})$.

Propagação do espectro angular através de lentes

Utilizando os conceitos discutidos acima, pode-se então observar o comportamento do campo após passar por uma lente fina (maiores detalhes técnico podem ser verificados em [54]). Considerando inicialmente um campo incidindo sobre uma lente esférica (LE), o qual propaga-se na direção z , com ângulo de incidência sobre a lente quase nulo, de modo que a aproximação paraxial possa ser aplicada [47]. Por ser uma calota esférica a referida lente deve ter simetria radial, portanto pode ser caracterizada por uma função de transmissão $t(R^2 = x^2 + y^2)$. Esta se justifica pois o campo propagado por uma LE deve ter um perfil de fases constantes ao longo da direção de propagação (que coincide com a direção radial), havendo modificação em seu perfil de fases ao longo das dimensões transversais (direções polar e azimutal). Em contrapartida para uma lente cilíndrica cujo eixo central está ao longo da direção y , a função de transmissão deve depender apenas de x , ou seja, $t \equiv t(x)$.

Considerando uma situação na qual um campo incidente $U_i(\vec{\rho})$ propaga-se de um plano z_i até uma lente delgada de comprimento focal f localizada no plano $z = 0$, posteriormente o campo transmitido pela lente, $U_f(\vec{\rho})$, é detectado no plano z_f , tal qual mostrado na figura (2.3). Conforme discutido acima a função de transmissão desta lente deve ser função apenas das componentes do vetor transversal $\vec{\rho} = x \hat{i} + y \hat{j}$, conforme discutido acima e é dada por [54]

$$t_l = \exp \left\{ -i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right\} , \quad (2.27)$$

Para uma lente de vidro de índice de refração n e raios de curvatura R_1 e R_2 em suas superfícies esféricas, o comprimento focal é definido pela equação:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) . \quad (2.28)$$

Um problema particularmente interessante e útil é o de se determinar o perfil do campo transmitido pela lente quando $z_i = -f$ e $z_f = f$, onde o sinal

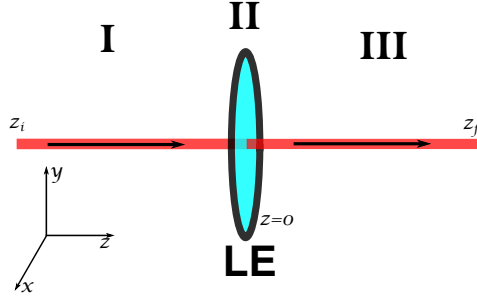


Figura 2.3: Nessa figura estão representadas três regiões com campos distintos. O campo na região I corresponde ao campo que deverá ser propagado por uma lente esférica (LE), *i.e.*, ao campo $U_i(\vec{\rho}_I)$. A região no interior da lente é rotulada por região II. Na região III têm-se finalmente o campo $U_f(\vec{\rho})$, que corresponde ao campo propagado pela lente.

negativo de f refere-se à distância focal à esquerda da lente, esta configuração é chamada de $f-f$. Assim como representado na figura (2.3), pode-se dividir o problema em três regiões espacialmente distintas e então, propaga-se o feixe em cada uma dessas regiões aplicando-se as transformações necessárias. De modo que na região I o campo é propagado livremente de z_i até $z=0$, neste caso a relação entre o campo no plano final com o campo no plano inicial é dada pela resolução da equação de Helmholtz, e após utilizar a aproximação paraxial pode-se escrever:

$$v(\vec{\rho}_{II}, z=0) = v(\vec{\rho}_I, z_i = -f) \exp \left\{ -i \frac{f}{2k} (q_x^2 + q_y^2) \right\}, \quad (2.29)$$

que representa o perfil do campo que chega à lente, e desta forma aplicando a eq.(2.25) e usando a função de transmissão para lentes delgadas obtêm-se:

$$v_t(\vec{\rho}_{II}, z=0) = \exp \left\{ -i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right\} v(\vec{\rho}_I, z_i = -f) \times \\ \times \exp \left\{ -i \frac{f}{2k} (q_x^2 + q_y^2) \right\}, \quad (2.30)$$

que corresponde ao espectro angular na saída da lente. Por fim deve-se novamente aplicar uma propagação livre ao espectro angular de $z=0$ até $z_f = f$ e aplicar a inversa de Fourier para determinar o campo no plano final, o qual será dado por:

$$U_f(\vec{\rho}) \propto \iint_{-\infty}^{\infty} U_i(\vec{\rho}_I) \exp \left\{ -i \frac{k}{f} (\vec{\rho}_I \cdot \vec{\rho}) \right\} dx_I dy_I. \quad (2.31)$$

A equação acima é capaz de relacionar o perfil do campo no plano inicial com o perfil do campo no plano de detecção, e tal conexão é feita a partir de uma transformada de Fourier. Porém nota-se que tal transformada de Fourier faz com que o campo continue função das coordenadas transversais, diferente

das operações convencionais deste tipo e por isso esta equação é chamada de ***Transformada de Fourier Óptica*** (TFO). É importante notar que esta introduz um fator de correção à coordenada espacial dado por k/f .

As noções apresentadas nesta seção, conforme adiantado, constituem um mínimo necessário para a compreensão da manipulação experimental das correlações quânticas provenientes da SPDC utilizadas nessa dissertação. Ao leitor que julgar necessário um aprofundar no estudo dessas ferramentas, sugere-se a ref. [54], por ser uma excelente fonte de estudos em ótica de Fourier

2.3 Geração de estados emaranhados a partir de correlações espaciais da SPDC

Conforme discutido na sec.(2.1), os fótons gerados pela SPDC possuem correlações em diversos graus de liberdade. A condição de conservação do momento, eq.(2.1), implica que estes fótons possuem correlações no grau de liberdade de posição transversal, ou caminho transversal. O perfil transversal desse grau de liberdade é contínuo, porém pode ser discretizado utilizando-se um conjunto de fendas múltiplas, as quais consistem de um anteparo opaco, com algumas regiões transparentes retangulares. A partir deste método e do controle do perfil transversal do feixe de bombeamento pode-se gerar estados emaranhados com os fótons gêmeos e controlar essa correlação. Na presente seção será apresentada uma revisão sobre os fundamentos que permeiam a geração e o controle dos estados quânticos que são utilizado neste estudo.

2.3.1 Estados de fenda

O estado quântico dos fótons gerados pela SPDC dado pela eq.(2.16), representa o estado geral do campo eletromagnético imediatamente após o cristal. Nos estudos mostrados nesta dissertação esse estado deve ser propagado através de sistemas ópticos lineares, tal propagação é feita matematicamente utilizando as ferramentas apresentadas na sec.(2.2). Considerando apenas o estado que representa a geração de dois fótons na saída do cristal, ou seja:

$$|\psi\rangle = \int d\vec{q}_i \int d\vec{q}_s \mathcal{F}(\vec{q}_i, \vec{q}_s) |1\vec{q}_s, 1\vec{q}_i\rangle, \quad (2.32)$$

onde $\mathcal{F}(\vec{q}_i, \vec{q}_s)$ é a amplitude do estado, também chamada de amplitude dos bifótons, a qual é definida por:

$$\mathcal{F}(\vec{q}_i, \vec{q}_s) \equiv v(\vec{q}_s + \vec{q}_i) \Gamma(\vec{q}_s - \vec{q}_i) \quad (2.33)$$

A propagação do estado (2.32) pode ser obtida através da propagação da amplitude do bifóton de um plano inicial z_i , até um plano final z_f .

Uma situação particular envolvendo a propagação da amplitude do bifóton é uma na qual o par de fótons gêmeos propaga-se ao longo da direção z e é interceptado por um conjunto de D fendas em um plano z_s . A função de transmissão desse conjunto é dada por [54]:

$$t_s = \sum_0^{\ell_D} \mathfrak{R} \left(\frac{x - 2d(\ell - \ell_D/2)}{2a} \right), \quad (2.34)$$

sendo $\ell = 0, 1, 2, \dots, D$ um índice que rotula determinada fenda e $\ell_D = (D - 1)$. A separação entre as fendas é $2d$ e a largura de cada uma delas (supostas iguais) é dada por $2a$. A função $\mathfrak{R}(\chi)$ é conhecida por função retângulo e definida como:

$$\mathfrak{R}(\chi) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\chi| \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{se } |\chi| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.35)$$

Neste capítulo será considerando que os fótons convertidos são colineares e degenerados em frequência. Se a dimensão y da fenda for muito maior que sua dimensão em x , os efeitos na componente y da amplitude do bifóton serão desprezíveis. Uma última consideração é que se a dimensão da fenda ao longo da direção x for muito pequena, o perfil transversal do feixe de bombeamento pode ser tomado como constante na região transparente das fendas. Seguindo estes vínculos experimentais, o estado do bifóton após as fendas é dado por [1, 56]:

$$|\Psi\rangle \propto \sum_{m,n=0}^{\ell_D} \mathcal{F}(d_m, d_n; z_s) |m\rangle |n\rangle, \quad (2.36)$$

sendo $d_\ell = 2d(\ell - 1/2)$, sendo $\ell = m, n$ e o estado $|\ell\rangle$ representando a passagem de um fóton signal (idler) pela fenda rotulada $m(n)$, dado por:

$$|\ell\rangle \equiv \sqrt{\frac{1}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R} \left(\frac{x - 2d(\ell - \ell_D/2)}{2a} \right) |1x\rangle dx, \quad (2.37)$$

sendo $|1x\rangle$ é a representação de posição para o estado de um fóton, a qual está associada por uma transformada de Fourier ao estado de Fock que representa uma ocupação no modo transversal de momento $|1q\rangle$ [56]. O estado dos fóton transmitido pelas fendas também podem ser escritos na representação de momento transversal. Esta representação é dada por:

$$|\ell\rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x e^{-2iq_x(\ell - \frac{1}{2})d} \text{sinc}(q_x a) |1q_x\rangle, \quad (2.38)$$

sendo $|1q_x\rangle$ o estado que representa uma ocupação no modo de momento transversal q_x .

Deste modo observa-se que a inserção de um conjunto de fendas em um plano que intercepta a propagação dos fótons é um artifício experimental útil para discretizar, mesmo que imperfeitamente, a função de amplitude dos bifótons, gerando assim estados discretos dos graus de liberdade posição-momento transversais.

2.3.2 Engenharia de estados de fenda

Conforme mencionado na sec.2.1 os fótons gêmeos gerados pela SPDC, possuem correlações em diversos graus de liberdade, dentre eles o próprio par de variáveis conjugadas posição-momento transversal. O controle dessas correlações permite a geração de estados emaranhados da luz, os quais revelam-se úteis na investigação de diversos fenômenos interessantes da física quântica e possuem aplicações interessantes para a informação quântica.

A ferramenta principal desse trabalho é o estado de qbits gerados à partir de um conjunto de fendas duplas inserido no caminho dos fótons gêmeos, e neste sentido o estado puro mais geral possível para o par de fótons é dado por:

$$|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle, \quad (2.39)$$

de modo que um controle sobre cada um dos coeficientes complexos c_{mn} ($m, n = 0$ ou 1) permite um controle sobre o estado dos fótons gêmeos gerados. Comparando as eq.(2.39) e (2.36) pode-se identificar os coeficientes c_{mn} como as amplitudes $\mathcal{F}(d_m, d_n; z_s)$. Uma vez que o sistema deve permanecer invariante perante a permutação dos rótulos das fendas⁴, então os c_{mn} devem obedecer a seguintes relações:

$$|c_{00}| = |c_{11}| \propto |\mathcal{F}(d, d; z_s)| = |\mathcal{F}(-d, -d; z_s)| = |\sin(\alpha/2)|; \quad (2.40a)$$

$$|c_{10}| = |c_{01}| \propto |\mathcal{F}(-d, d; z_s)| = |\mathcal{F}(d, -d; z_s)| = |\cos(\alpha/2)|, \quad (2.40b)$$

onde a última igualdade em (2.40a) e (2.40b) é apenas uma reparametrização dos coeficientes que respeita a condição de normalização. Deste modo o puro estado mais geral obtido para um par de fótons gêmeos atravessando um conjunto de fendas cada uma iluminada com a mesma intensidade é dado por [11]:

$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)|\psi^+\rangle + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)|\phi^+\rangle, \quad (2.41)$$

onde $|\psi^+\rangle = 1/\sqrt{2}(|01\rangle + |10\rangle)$ e $|\phi^+\rangle = 1/\sqrt{2}(|00\rangle + |11\rangle)$ são os estados de Bell introduzidos na seção (1.2). A eq.(2.41) mostra que à partir do controle sobre os parâmetros α e φ pode-se controlar o estado gerado. Pelas eq.(2.40), pode-se derivar uma importante relação [11] entre as duas possíveis amplitudes:

$$\frac{\mathcal{F}(-d, -d; z_s)}{\mathcal{F}(-d, d; z_s)} \equiv \wp = e^{i\varphi} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (2.42)$$

que torna explícito o fato de que o controle sobre os parâmetros α e φ modificam a razão entre as amplitudes que representam os estados correlacionados e anti-correlacionados.

⁴O que é justificado assumindo a iluminação simétrica das fendas

As eq.(2.32) e (2.33) evidenciam que o estado dos dois fótons após o cristal depende conjuntamente do casamento de fase e do perfil do feixe de bombeamento. Considerando apenas elementos ópticos lineares, o estado em qualquer ponto do espaço também é dependente dessas características experimentais.

Tipicamente o controle sobre o estado gerado é obtido manipulando-se o perfil do feixe de bombeamento, uma vez que o casamento de fases de um cristal é fixo por depender apenas das características dele. Considerando um feixe de bombeamento com perfil gaussiano focalizado em um plano z , seu perfil transversal na direção x é dado por:

$$V(x_s, x_i; z) = A_0 \frac{W_0}{W_z} \exp\left(-\frac{x_+^2}{W(z)}\right) \exp\left[i\left(zk_p + \frac{x_+^2}{2R(z)}k_p - \zeta(z)\right)\right], \quad (2.43)$$

sendo $x_+ = (x_s + x_i)/2$, o qual pode ser escrito desta forma devido a conservação de momento no processo da SPDC, $W(z)$ é a largura do perfil gaussiano em um plano z e W_0 é a menor largura do perfil gaussiano, a qual é chamada cintura do feixe. O raio de curvatura da frente de onda é definido por:

$$R(z) = z \left[1 - \left(\frac{z_0}{z}\right)\right], \quad (2.44)$$

enquanto a fase que representa o atraso na propagação de uma onda gaussiana em relação a uma onda plana (fase de Gouy) é dada por:

$$\zeta(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right). \quad (2.45)$$

Uma vez que a amplitude do bifóton é uma função complexa [9], e a função casamento de fase definida pela eq.(2.20) é real, a parte imaginária de $\mathcal{F}(x_s, x_i; z)$ deve estar contida na função do espectro angular do feixe de bombeamento [1]. Porém da eq.(2.43), nota-se que no plano $z = 0$ o campo é real e portanto a parte imaginária da função amplitude do bifotón é nula neste plano, e também será no plano das fendas duplas.

A razão entre a parte real ($\Re(\varphi)$) e a parte imaginária ($\Im(\varphi)$) de φ definido pela eq.(2.42) é dada por:

$$\frac{\Im(\varphi)}{\Re(\varphi)} = \tan \varphi, \quad (2.46)$$

e portanto, se a parte imaginária da amplitude do bifóton é nula em um determinado plano, temos que $\varphi = 0$. De um modo geral conforme mostrado em [9, 11, 12] o perfil transversal do bifóton pode ser controlado manipulando a projeção do espectro angular do feixe de bombeamento no plano das fendas, ou seja, manipulando o perfil do espectro angular que é projetado sobre as fendas. O único termo na eq.(2.43) que é dependente da posição transversal relativa x_+ é o termo da curvatura da frente de onda [11]. Uma vez que para o ponto $x_+ = 0$ este termo de curvatura é nulo, então $\varphi = 0$. Portanto a projeção deste ponto no plano das fendas faz com que o estado definido pela eq.(2.41) dependa apenas de α .

Para o caso em que $\varphi = 0$, a relação (2.42) mostra que a manipulação do parâmetro α reflete no controle da razão entre as amplitudes que representam os estados correlacionados e anti-correlacionados, do estado de dois fótons preparado. Uma vez que cada amplitude é o produto das duas funções pares $v(x_+)$ e $\Gamma(x_-)$ que possuem máximos em $x_{\pm} = 0$, o tipo de correlação no estado do bifóton será determinada pela função dominante no plano das fendas, *e.g.*, se a função $v(x_-)$, for dominante nesse plano, então os estados correlacionados em posição transversal são favorecidos, uma vez que $x_i = x_s$.

Na próxima seção será discutida a configuração de um experimento com o qual é possível obter o controle sobre os parâmetros de engenharia de estados mencionados.

2.3.3 Manipulação experimental dos parâmetros de engenharia

Seguindo a configuração experimental proposta inicialmente em [11], pode-se obter o controle sobre os parâmetros α e φ , de modo que torna-se possível a implementação do estado maximamente emaranhado $|\phi^+\rangle$. Tal configuração consiste em um telescópio confocal na direção transversal x , o qual projeta sobre o plano das fendas a amplitude do bifóton em $z = 0$, que corresponde ao plano sobre o qual o feixe de bombeamento é focalizado.

A figura (2.4) representa um telescópio confocal, que produz uma imagem ampliada, real e invertida ao longo da direção x . Nele uma lente cilíndrica (LC) de foco f_{LC} e uma lente esférica (LE_t) de foco f_{LE_t} , compartilham seus planos focais anteriores, os quais estão sobre o plano focal do feixe de bombeamento, geralmente localizado no centro do cristal. Por sua vez o plano das fendas é localizado no plano focal posterior da LE_t , fazendo com que a amplificação da imagem seja dada por [54]:

$$M = \frac{f_{LE_2}}{f_{LC}}. \quad (2.47)$$

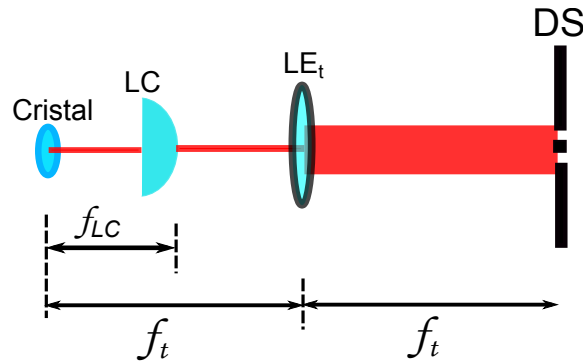


Figura 2.4: Representação esquemática de um telescópio confocal unidimensional. Uma lente cilíndrica e uma lente esférica compartilham seus focos no plano do Cristal, e o plano focal posterior da lente esférica coincide com o plano das fendas duplas (DS).

2.3. GERAÇÃO DE ESTADOS EMARANHADOS A PARTIR DE CORRELAÇÕES ESPACIAIS DA SPDC

Dessa forma para descobrir a amplitude do estado propagado de $z = 0$ (onde $x_- = 0$) até o plano das fendas, deve-se utilizar a descrição apresentada em 2.2. Utilizando essa descrição em [1] mostra-se que a amplitude do bifóton no plano da fenda dupla ($z = z_F$) após este passar pelo telescópio é dado por:

$$\mathcal{F}(x_s, x_i; z_F) = v\left(\frac{x_+}{M}; z = 0\right) \Gamma\left(\frac{x_-}{M}; z = 0\right). \quad (2.48)$$

Conforme discutido anteriormente, para uma configuração desse tipo onde a imagem do ponto em que os fótons são gerados é projetada no plano das fendas, deve ocorrer um favorecimento à geração de estados correlacionados. Isso pode ser matematicamente visualizado através de uma análise gráfica da eq.(2.48), a partir da qual percebe-se que para os parâmetros experimentais utilizados neste trabalho, o perfil transversal do feixe de bombeamento é aproximadamente constante na região da fenda dupla, de modo que a amplitude do bifóton nesta mesma região depende apenas de x_- portanto conforme discutido na sec.(2.3.2) os estados correlacionados em posição serão privilegiados nessa configuração.

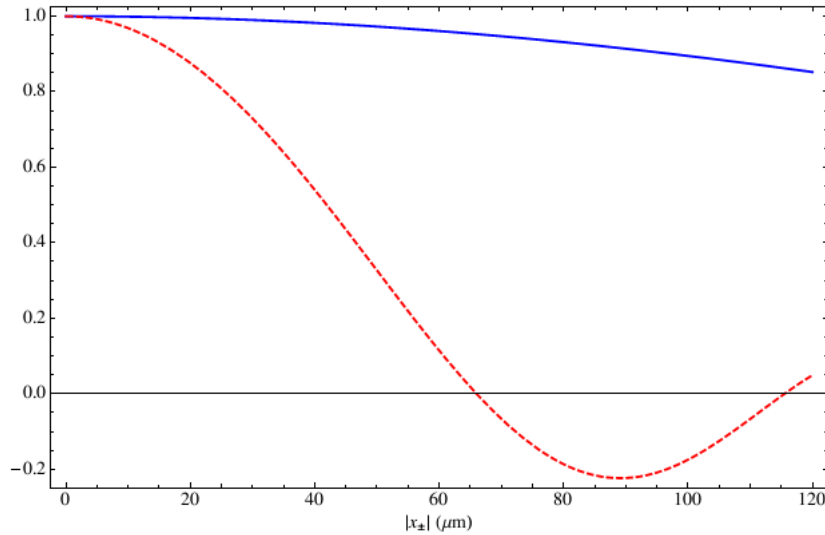


Figura 2.5: Comparação entre a função casamento de fase e a função de amplitude do bifóton, em um intervalo de comprimento com grandeza típica da separação entre as fendas duplas utilizadas. A linha sólida azul representa a função de o perfil transversal do pump ($v(x_+)$), enquanto a linha tracejada vermelha representa a função de casamento de fase ($\Gamma(x_-)$). Pode-se perceber que a função de casamento de fase varia mais rapidamente que a função do perfil transversal. Figura retirada de [1]

Conforme adiantado, através dessa configuração experimental pode-se gerar o estado maximamente emaranhado $|\phi^+\rangle$, para um plano imediatamente após as fendas este é dado por:

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_s |0\rangle_i + |1\rangle_s |1\rangle_i), \quad (2.49)$$

no qual os índices s e i localizam os fótons signal e idler e os estados $|\ell\rangle$ são dados pela eq.(2.37), e representam o estado do fóton que passou pela fenda ℓ . A geração deste estado pode ser intuitivamente visualizada da seguinte forma: os fótons gêmeos observados são gerados em algum ponto de um plano no cristal cuja imagem é projetada no plano das fendas, desta forma serão transmitidos pela fenda apenas fótons gêmeos gerados nos pontos que são projetados sobre as regiões transparentes das fendas, ou seja, esta configuração atua como se projetasse o vértice dos cones gerados na SPDC sobre as fendas. A partir desse momento, salvo quando o contrário for referido, sempre que se referir ao estado dos fótons, imagina-se o estado do bifóton em um plano imediatamente após as fendas duplas, ou seja, todo o experimento anterior ao plano das fendas será tratado como uma "caixa preta" da qual emerge o estado dado na eq.(2.49).

2.3.4 Interferência de dois fótons

Quando um campo coerente passa por um conjunto de D fendas, seu perfil de intensidade em um plano distante é modificado, dando origem a uma figura conhecida por padrão de interferência [57]. Conforme será demonstrado adiante o padrão de interferência do estado do bifóton possui propriedades diferentes dos padrões de interferência gerados por campos clássicos, e este pode indicar uma assinatura da quanticidade das correlações existentes entre os fótons de um par convertido por SPDC e transmitidos por uma fenda dupla. Vale ainda ressaltar que no plano de interferência existe uma superposição dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ para cada fóton, sendo este fato muito relevante para o desenvolvimento do presente trabalho.

O estado do bifóton em um plano distante ao das fendas, pode ser experimentalmente realizado propagando o campo por uma lente esférica de comprimento focal f_F , em uma configuração na qual o plano focal anterior da lente coincida com o plano das fendas e o plano focal posterior coincida com um plano onde a detecção dos fótons será realizada, essa é a chamada configuração $f - f$ discutida em 2.2.2, que projeta a transformada de Fourier Óptica no plano de detecção de modo que o estado dado pela eq.(2.38) pode ser escrito como [1]:

$$|\ell(z_f)\rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\bar{x}(\ell-\frac{1}{2})2d} \text{sinc}(\bar{x}a) |\bar{x}\rangle d\bar{x}, \quad (2.50)$$

com $|\ell\rangle = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ e $\bar{x} = k_p x / f_F$ representando a posição x corrigida no plano de Fourier.

A partir da eq.(2.50), pode-se escrever o estado dado pela eq.(2.49), no plano de Fourier e este é dado por:

$$|\phi^+\rangle^{(F)} \propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[d(\bar{x}_i + \bar{x}_s)] \text{sinc}(a\bar{x}_i) \text{sinc}(a\bar{x}_s) |\bar{x}_i\rangle |\bar{x}_s\rangle d\bar{x}_i d\bar{x}_s \quad (2.51)$$

Uma vez que o estado que representa o par de fótons após as fendas é dado pela eq.(2.49), e representa um estado maximamente emaranhado,

o estado que representa cada fóton individualmente deve ser representado por um estado maximamente misto, ou incoerente. Portanto a detecção individual dos fótons não deve revelar nenhum padrão de interferência. Para isso é necessário que seja detectado o pacote formado pelo bifóton. Porém devido a correlação temporal dos fótons gerados pela SPDC, e também ao funcionamento dos fotodetectores usuais, os quais ao receberem um fóton emitem um pulso de voltagem, seria impossível distinguir um par de fótons gêmeos com momento \vec{k} de um fóton simples de mesmo momento.

Um artifício experimental utilizado para detectar com maior grau de veracidade um bifóton, é mostrado na figura (2.6), onde os dois fótons do par percorrem o mesmo caminho óptico até dois detectores distintos D_i e D_s localizados em x_i e x_s . No caminho entre as fendas e os detectores existe um divisor de feixe (BS) balanceado 50 : 50, *i.e.*, a intensidade em suas duas portas de saída são iguais e valem a metade da intensidade de entrada. Este divisor de feixes separa aleatoriamente os fótons do par, de modo que os rótulos i e s dados aos detectores são arbitrários. Os fotodetectores são ligados a um circuito eletrônico capaz de registrar quando dois pulsos de tensão, que percorrem distâncias iguais, chegam à ele dentro de uma janela temporal Δt , um registro nesse circuito indica que estes pulsos foram gerados simultaneamente no processo de fotodetecção, permitindo estimar através do número de pulsos coincidentes o número de fótons gêmeos que chegam ao ponto (x_i, x_s) do plano de detecção. Este tipo de detecção é chamada detecção em coincidência, ou simplesmente, coincidência.

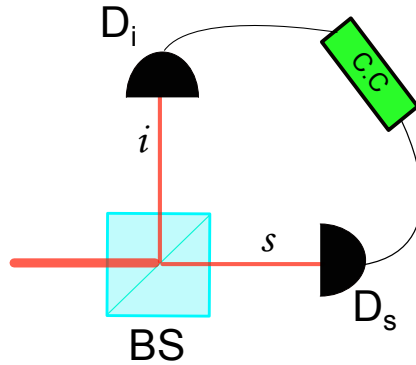


Figura 2.6: Representação esquemática do aparato de detecção. Um divisor de feixes balanceado (BS) divide o feixe incidente em dois caminhos, estes são rotulados por i e s . Em cada um dos caminhos existem detectores ligados a um circuito de contagens em coincidência (C.C).

A probabilidade $P(x_i, x_s)$, de se detectar dois fótons em coincidência em um ponto (x_i, x_s) , no plano de Fourier, é proporcional à função de correlação de segunda ordem em intensidade ($G^{(2)}$) [18, 46]. Considerando o estado puro $|\phi^+\rangle$ esta probabilidade é dada por:

$$G^{(2)}(x_i, x_s) \propto P(x_i, x_s) = |\langle \text{vac} | \hat{a}(x_i) \hat{a}(x_s) | \phi^+ \rangle|^2, \quad (2.52)$$

os operadores $\hat{a}(x_\nu)$ ($\nu = i, s$), representam a aniquilação de um fóton no modo espacial x_ν , e sua ação nos estados de Fock $|1x\rangle_\nu$ é dada por:

$$\hat{a}(x_\nu) |1x'_\nu\rangle = \delta(x_\nu - x'_\nu) |\text{vac}\rangle . \quad (2.53)$$

A probabilidade de detectar dois fótons em coincidência no plano de Fourier pode ser finalmente obtida, utilizando as eq.(2.51), (2.52) e (2.53), resultando em:

$$P(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2(a\bar{x}_i) \text{sinc}^2(a\bar{x}_s) \{1 + \cos[(\bar{x}_i + \bar{x}_s)]\} , \quad (2.54)$$

A eq.(2.54) representa um padrão de interferência que depende conjuntamente das posições x_i e x_s dos detectores no plano de Fourier. A figura (2.7.a) representa duas situações onde a posição do detector D_i é fixa e o detector D_2 é posicionado algumas posições transversais, sendo para cada par de posições x_i e x_s registrada a contagem em coincidências. Desta forma nota-se que \bar{x}_i pode ser encarada como uma fase não local dada ao padrão de interferência do bifóton registrado variando a posição de D_s . Esta propriedade é a chamada condicionalidade do padrão de interferência e é referida por alguns autores como a assinatura da natureza quântica das correlações que geram este comportamento [58]

Um mapeamento das correlações do par de fótons no plano de Fourier pode ser realizado, ao registrar as contagens em coincidência para diversos valores de (x_i, x_s) , conforme proposto em [11]. Desta forma pode-se construir uma superfície onde os eixos x e y representam as posições dos detectores e o eixo z representa o número de coincidências, conforme mostrado na figura (2.7.b). Um mapa de intensidade desta superfície pode ser construído este é mostrado na figura (2.7.c). Estas superfícies são chamadas de *mapas de Fourier*, por representarem o mapeamento das probabilidades $P(x_i, x_s)$ no plano de Fourier.

2.3. GERAÇÃO DE ESTADOS EMARANHADOS A PARTIR DE CORRELAÇÕES ESPACIAIS DA SPDC

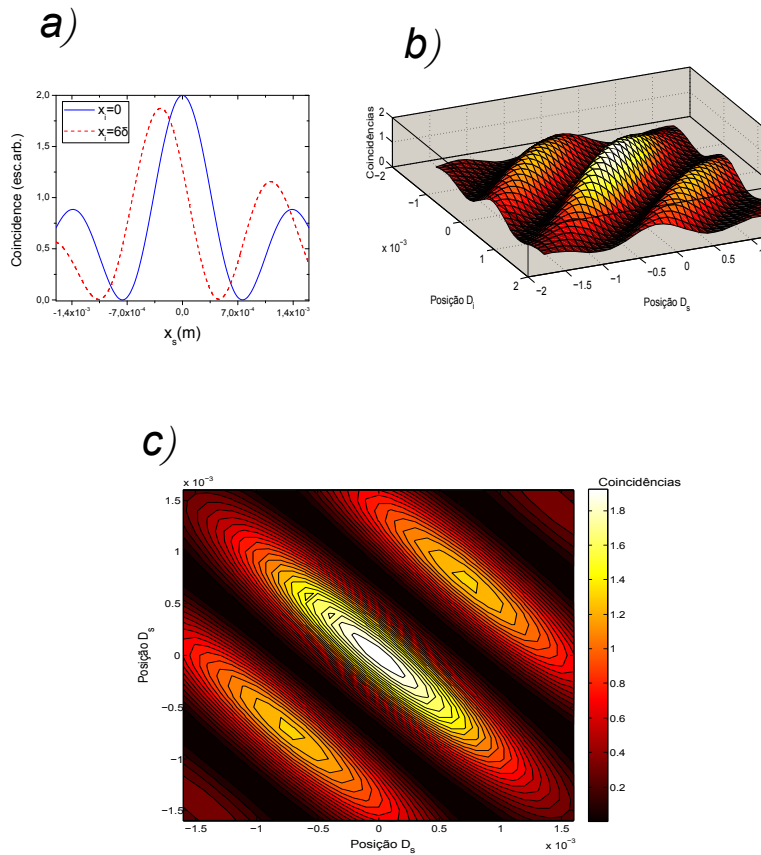


Figura 2.7: Simulação do padrão de interferência de dois fótons. Em a) é mostrado o padrão de interferência obtidos fixando dois valores distintos de x_i , em b) é gerada uma superfície na qual cada linha representa um padrão condicional igual aos da figura a). Finalmente em c) é mostrado um mapa de intensidades da figura b) o qual é chamado de mapa de Fourier.

2.4 Operadores de Medida implementados nos mapas de Fourier

O tratamento quântico sobre a representação matemática de uma medida feita em um sistema pode se tornar extremamente complexo [20]. No caso ideal, sabe-se que uma medida realizada pode ser representada por um operador de projeção e esse tipo de medida é chamada medida projetiva ou de Von Neumann. Uma medida projetiva assume que o observador possui total conhecimento e controle sobre o estado em que o sistema é projetado, ou seja, assume que o sistema é projetado sobre um estado puro.

Porém este tratamento é aproximado e encontra-se distante da realidade de medidas realizadas no laboratório. Para o caso da detecção em coincidência no plano de Fourier (ver sec.(2.3.4)), uma medida projetiva é atingida apenas quando todos os fótons detectados possuem o mesmo estado de momento transversal, o que é possível apenas quando o detector é puntiforme. Como em geral os detectores possuem uma área de detecção finita, uma medida real em um experimento desse tipo não é representada por um projetor, portanto ela deve ser representada por um operador de medida [59]. Nesta seção será abordado o caso de detecção de dois fótons, utilizando dois detectores, de modo que cada detector desloca-se apenas na direção transversal x .

Considerando que a largura na direção x de dois detectores, D_i e D_s , seja $2b$ o operador $\Pi(x_i, x_s)$ implementado na detecção em coincidência do par de fótons, conforme demonstrado no apêndice (A), é dado por:

$$\Pi(x_i, x_s) = \Pi_i(x_i) \otimes \Pi_s(x_s); \quad (2.55)$$

sendo $\Pi_\nu(x_\nu)$ ($\nu = i, s$) é o operador que representa a medida em cada subsistema ν o qual é dado por:

$$\Pi_\nu(x_\nu) = \mathcal{A}(x_\nu) [\mathbb{1} + \mathcal{S}(\cos(\theta_\nu)\sigma_x^{(\nu)} + \text{sen}(\theta_\nu)\sigma_y^{(\nu)})], \quad (2.56)$$

onde $\mathcal{S} = \text{sinc}\left(\frac{k_p db}{2f_F}\right)$, é um fator numérico que depende apenas de parâmetros do experimentos. Outro parâmetro definido na (2.56) é a posição angular do detector definida por:

$$\theta_\nu = -\kappa x_\nu, \quad (2.57)$$

com $\kappa = k_p d/2f_F$. A função $\mathcal{A}(x_\nu)$ é dada por:

$$\mathcal{A}(x_\nu) = \frac{a}{f_F \lambda_p} \text{sinc}^2\left(\frac{a k_p}{2f_F} x_\nu\right), \quad (2.58)$$

e é consequência dos efeitos da difração das fendas sobre as medidas.

A partir da eq.(2.56) pode-se reescrever a eq.(2.55) como:

$$\Pi(\theta_i, \theta_s) = \mathcal{A}(\theta_i) \mathcal{A}(\theta_s) [\mathbb{1} + \mathcal{S}\mathfrak{D}(\theta_i)] \otimes [\mathbb{1} + \mathcal{S}\mathfrak{D}(\theta_s)], \quad (2.59a)$$

definido-se:

$$\mathfrak{D}(\theta_\nu) = (\cos(\theta_\nu)\sigma_x^{(\nu)} + \text{sen}(\theta_\nu)\sigma_y^{(\nu)}) . \quad (2.59b)$$

Pode-se notar que se os efeitos de difração são desprezados ($\mathcal{A}(x_\nu) = 1$), quando o tamanho efetivo do detector é zero (detector pontual), o operador de medida obtido se torna o projetor mais geral possível de se implementar em um espaço de dois qbits [20].

2.4.1 Relação entre detecção em coincidência e operadores de medida.

O valor esperado do observável na eq.(2.59a) é por definição à detecção em coincidência dos fótons em (θ_i, θ_s) . Assim pode-se escrever:

$$C(\theta_i, \theta_s) = N \langle \Pi(\theta_i, \theta_s) \rangle , \quad (2.60)$$

onde $C(\theta_i, \theta_s)$ é o número de coincidências para dada posição.

A fim de determinar a constante de normalização N , deve-se primeiramente notar que da eq.(2.59b) decorre que:

$$\mathfrak{D}(\theta_\nu - \pi) \equiv \mathfrak{D}(\theta'_\nu) = -\mathfrak{D}(\theta_\nu) . \quad (2.61)$$

De modo que a eq.(2.59a) pode dar origem ao sistema de equações:

$$\Pi(\theta_s, \theta_i) = \mathcal{A}(\theta_s) \mathcal{A}(\theta_i) [\mathbb{1}_4 + \mathcal{S}\mathfrak{D}(\theta_s) + \mathcal{S}\mathfrak{D}(\theta_i) + \mathcal{S}^2\mathfrak{D}(\theta_s)\mathfrak{D}(\theta_i)] ; \quad (2.62a)$$

$$\Pi(\theta'_s, \theta'_i) = \mathcal{A}(\theta'_s) \mathcal{A}(\theta'_i) [\mathbb{1}_4 - \mathcal{S}\mathfrak{D}(\theta_s) - \mathcal{S}\mathfrak{D}(\theta_i) + \mathcal{S}^2\mathfrak{D}(\theta_s)\mathfrak{D}(\theta_i)] ; \quad (2.62b)$$

$$\Pi(\theta'_s, \theta_i) = \mathcal{A}(\theta'_s) \mathcal{A}(\theta_i) [\mathbb{1}_4 - \mathcal{S}\mathfrak{D}(\theta_s) + \mathcal{S}\mathfrak{D}(\theta_i) - \mathcal{S}^2\mathfrak{D}(\theta_s)\mathfrak{D}(\theta_i)] ; \quad (2.62c)$$

$$\Pi(\theta_s, \theta'_i) = \mathcal{A}(\theta_s) \mathcal{A}(\theta'_i) [\mathbb{1}_4 + \mathcal{S}\mathfrak{D}(\theta_s) - \mathcal{S}\mathfrak{D}(\theta_i) - \mathcal{S}^2\mathfrak{D}(\theta_s)\mathfrak{D}(\theta_i)] . \quad (2.62d)$$

Utilizando a eq.(2.60), este sistema pode ser reescrito tomando o valor esperado das eqs.(2.62). Pode-se então relacionar o fator de normalização N com as coincidências medidas em quatro pares de posições angulares, através da expressão:

$$N = \frac{C(\theta_i, \theta_s) + C(\theta'_i, \theta'_s) + C(\theta'_i, \theta_s) + C(\theta_i, \theta'_s)}{\mathcal{A}(\theta_s) \mathcal{A}(\theta_i) + \mathcal{A}(\theta'_s) \mathcal{A}(\theta'_i) + \mathcal{A}(\theta_s) \mathcal{A}(\theta'_i) + \mathcal{A}(\theta'_s) \mathcal{A}(\theta_i)} . \quad (2.63)$$

Parte II

Implementação experimental dos testes de contextualidade

Capítulo 3

Implementando as desigualdades do n -ciclo a partir da interferência de dois fótons

O principal objetivo desse trabalho é implementar as desigualdades do n -ciclo (sec.(1.5)) em um experimento de interferência de dois fótons, o qual segue basicamente a descrição dada em (2.3.4). A partir daí pode-se inferir se as correlações responsáveis pela condicionalidade dos padrões de interferência são explicadas ou não de uma forma não-contextual, *i.e.*, por um modelo que atribui valores pré-determinados às coincidências no plano de Fourier.

É conveniente ressaltar que toda discussão feita sobre contextualidade, na seção (1.5), deve ser considerada apenas para um conjunto de operadores no qual se consiga determinar subconjuntos de operadores compatíveis, estando este conjunto definido em um espaço de Hilbert de dimensões $d_{\mathcal{H}} \geq 3$. Estas condições são automaticamente satisfeitas no cenário CHSH discutido na sec.(1.5.8), uma vez que para esse cenário os observáveis O_k , com k par pertencem à \mathcal{H}_A , enquanto aqueles com k ímpar pertencem à \mathcal{H}_B . Assim, conforme será mostrado ao longo deste capítulo, o sistema quântico de dois fótons gerados pela SPDC, preparados em um estado com correlações transversais, permite a implementação de cenários de n -ciclo para qualquer n par, permitindo dessa forma, verificar que a distribuição de probabilidade no plano de Fourier, não pode ser explicado via modelos não-contextuais, independente do cenário n -ciclo testado.

3.1 O experimento de interferência de dois fótons

O experimento realizado é basicamente uma junção dos diversos tópicos discutidos no capítulo (2). A figura (3.1) mostra uma esquematização deste experimento, que pode ser dividido em dois estágios distintos e independentes, o primeiro sendo o estágio de preparação e o segundo o de detecção.

Para a preparação do estado um feixe de laser contínuo com comprimento de onda $\lambda_p = 405$ nm e potência 50 mW proveniente de um laser de diodo **TOPTICA 506** é utilizado para bombear o cristal BiB_3O_6 (BiBO)

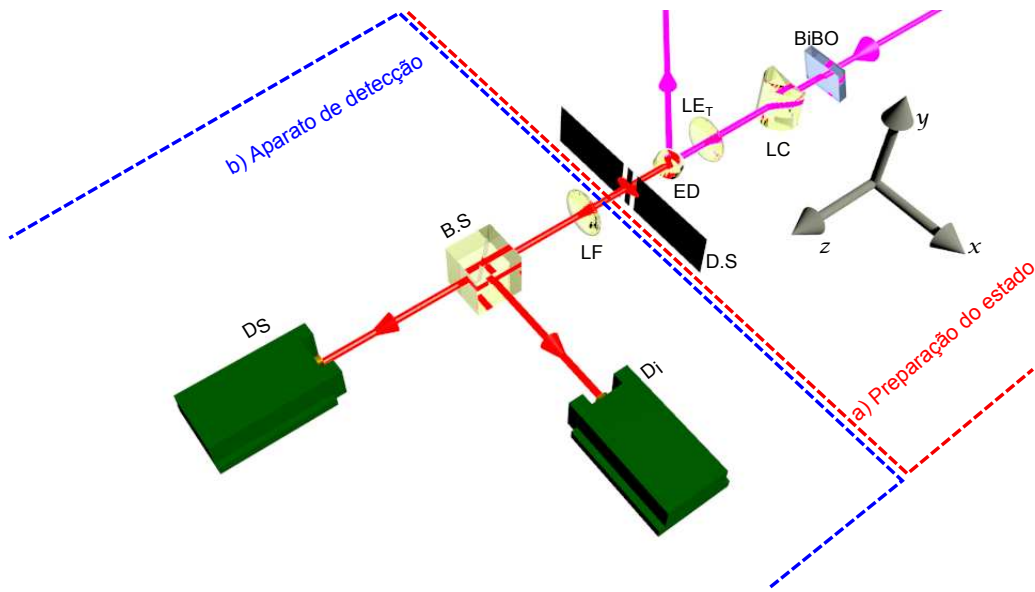


Figura 3.1: Representação esquemática do experimento realizado. A linha pontilhada vermelha representa o estágio do experimento onde o estado é gerado, neste um feixe de laser de comprimento de onda $\lambda = 405 \text{ nm}$ é focalizado no centro do cristal por uma lente esférica (não mostrada na figura). Os pares de fótons gêmeos gerados por SPDC são propagados, através de um telescópio confocal ((LC) + LE_t) na direção transversa x até um conjunto de duas fendas (D.S). No estágio de detecção, uma lente esférica (LF) projeta a transformada de Fourier óptica do estado do bifóton em um plano de detecção, onde são colocados dois detectores (D_i e D_s). Um divisor de feixe (BS) divide aleatoriamente os fótons do par entre os detectores.

de 2 mm de espessura, com casamento de fase do tipo I, gerando fótons correlacionados em posição e momento transversal. Conforme discutido na sec.(2.3) o controle do estado dos fótons gêmeos gerados no cristal pode ser feito manipulando o perfil do feixe de bombeamento, sendo considerado que este possuía um perfil gaussiano. Experimentalmente este perfil gaussiano pode ser praticamente atingido, propagando o feixe através de um conjunto de orifícios chamados de íris ou *pinholes*. Uma lente esférica (LE_p) de comprimento focal $f_p = 30$ cm é utilizada para focalizar o feixe de bombeamento no centro do cristal.

A propagação dos fótons gêmeos do cristal até as fendas é feita através de um telescópio confocal na direção transversa x , este cria uma imagem ampliada na direção x , do plano do cristal no plano das fendas, conforme discutido na sec.(2.3.3). Na configuração implementada, uma lente cilíndrica (LC) de foco $f_{LC} = 5$ cm e uma lente esférica (LE_t) de foco $f_{LE_t} = 10$ cm compartilham seus planos focais anteriores com o plano focal da LE_p , ou seja no centro do cristal, o fator de magnificação deste telescópio de acordo com a eq.(2.47) é $M = 4$. O plano focal posterior da LE_t , coincide com o plano que contém um conjunto de duas fendas (DS), cada uma com meia largura dada por $2a = 80 \mu\text{m}$ e separação entre os centros dado por $d = 160 \mu\text{m}$. Conforme discutido na sec.(2.3) essa configuração é utilizada para a preparação do estado de dois qbits fotônicos de fótons gêmeos decodificados nos caminhos transversais do par de fótons, permite a geração do estado $|\phi^+\rangle$, dado pela eq.(2.49).

No estágio de detecção duas configurações podem ser adotadas, enquanto uma é capaz de projetar no plano de detecção uma imagem ampliada do plano das fendas, a segunda projeta a transformada de Fourier óptica do plano das fendas no plano de detecção. O plano de detecção no primeiro caso é chamado de *plano de imagem* e no segundo *plano de Fourier*.

Para projetar o plano de Fourier sobre os detectores adota-se a configuração $f - f$, discutida na seção (2.3.4). Em tal configuração uma lente esférica de comprimento focal $f_F = 30$ cm projeta a transformada de Fourier do plano das fendas no plano de detecção. Um divisor de feixes balanceado, *i.e.*, com intensidade dos feixes iguais em cada uma das portas de saída, distribui cada fóton do par por braços de detecção nomeados arbitrariamente por i e s . No fim de cada braço encontra-se um fotodetector de avalanche. Cada um destes detectores é equipado com um orifício circular de diâmetro $2b = 200 \mu\text{m}$ e um filtro de interferência centrado no comprimento de onda $\lambda_c = 810$ nm e com largura de banda $\Delta\lambda = 10$ nm. Estes detectores são montados sobre plataformas horizontais que permitem o deslocamento em x com passos de $10 \mu\text{m}$, o que possibilita fazer uma varredura desses detectores no plano de Fourier. Completa o estágio de detecção um circuito de contagens em coincidências, desenvolvido no laboratório de Óptica Quântica da UFMG por Álvaro Nunes. Este sistema aceita como uma detecção em coincidência os eventos em que dois pulsos de voltagem nas saídas dos módulos de contagem de um fóton cheguem a um registrador dentro de um intervalo temporal de 5,3 ns.

O acesso ao plano da imagem das fendas é feito apenas substituindo a

lente LE_F , por uma lente esférica com comprimento focal $f_I = f_F/2 = 15\text{cm}$, o que constitui uma configuração que chamaremos $2f - 2f$. Portanto para este experimento a lente LE_I , que projeta a imagem ampliada das fendas sobre o plano de detecção, possui comprimento focal $f_I = 15\text{cm}$. A projeção da imagem do plano das fendas sobre plano de detecção é útil durante o processo de alinhamento do experimento e, conforme será mostrado a seguir, permite determinar o perfil espacial do estado do bifóton em um campo próximo ao das fendas.

3.2 Mapeando as correlações do bifóton

Conforme adiantado na seção anterior (3.1) é possível variar a posição dos detectores ao longo da direção x , percorrendo um intervalo Δx . Se para cada par de posições (x_i, x_s) dos detectores D_i e D_s forem registradas as coincidências, então é possível desta forma obter experimentalmente os mapas de coincidência discutidos na seção (2.3.4).

A figura (3.2) apresenta uma esquematização do processo de escaneamento, o qual é realizado em um plano de detecção arbitrário. Os dois detectores percorrem uma distância $\Delta x = x^{(fin)} - x^{(in)}$, sendo $x^{(in)}$ a posição inicial (a mesma para os dois detectores) e $x^{(fin)}$ a posição final dos detectores. Esse intervalo é percorrido com passos iguais, sendo cada passo representado por δ . A origem das posições, *i.e.*, $x = 0$, é definida como o centro da imagem da fenda dupla, determinado no processo de alinhamento ao projetar a imagem das fendas sobre o plano de detecções.

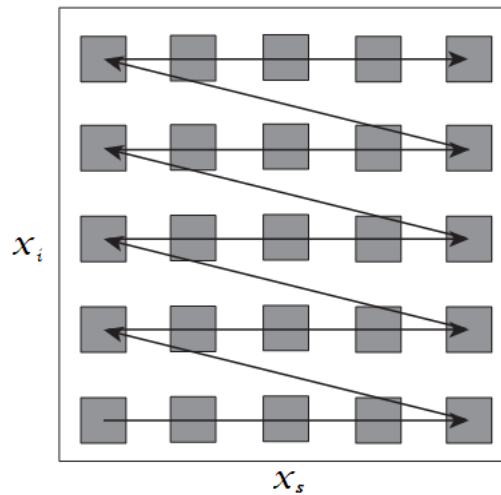


Figura 3.2: Esquematização do processo de escaneamento do detectores em um plano de detecção arbitrário. Os dois detectores percorrem distâncias iguais partindo de posições equivalentes em seus respectivos planos, e com o mesmo passo. Figura retirada de [1]

Seguindo esse procedimento é possível obter experimentalmente os mapas discutidos na seção (2.3.4). Para tal, a posição de um dos detectores (no caso D_i) é fixada inicialmente em $x_i^{(in)}$, enquanto o outro detector (D_s) percorre

a distância Δx , partindo de $x_s^{(in)}$ (esta é uma posição equivalente à $x_i^{(in)}$) com passos de δ . Para cada ponto $(x_i^{(in)}, x_s)$, são registradas as coincidências entre os detectores. Após D_s atingir a posição $x_s^{(fin)}$, este é novamente recolocado na posição inicial, enquanto a posição de D_i é incrementada de δ , recomeçando o processo de escaneamento do detector D_s adquirindo as coincidências para todos os pares de posição $(x_i^{(in)} + \delta, x_s)$.

Projetando a imagem das fendas no plano de detecção é possível reconstruir o perfil do estado do bifóton imediatamente após as fendas, a fig.(3.3) mostra um mapa de coincidências¹ obtido para essa configuração de detecção. Para a realização deste cada detector percorre uma distância de 1,2mm, com passos de $\delta = 0,05$ mm, de $-0,6$ mm até $0,6$ mm. Nessa figura é possível observar que o valor das coincidências é máximo quando os dois detectores detectam fótons que passaram pela mesma fenda, o que é evidenciado pelo fato de que para a diagonal do mapa na qual $x_i = x_s$ as coincidências são maiores que as contagens ao longo de $x_i = -x_s$, mostrando desta forma que existe uma correlação entre a posição dos dois fótons no plano das fendas.

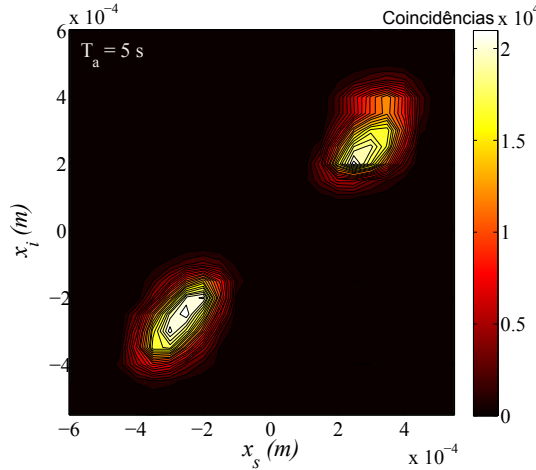


Figura 3.3: Mapa das coincidências adquiridas com um tempo de aquisição $T_a = 5$ s realizado no plano das imagem. Esta figura representa o perfil do estados de dois fótons imediatamente após as fendas. É possível notar que os fótons gêmeos são correlacionados em suas posições transversais.

Os mapeamento das coincidências no plano de Fourier é realizado projetando no plano de detecção a transformada de Fourier óptica, que corresponde ao esquema $f - f$ discutido anteriormente. O escaneamento dos detectores segue o mesmo procedimento anterior com os detectores percorrendo uma região de 2,4 mm, de $-1,2$ mm até $1,2$ mm, com passos de $\delta = 100$ μ m. Uma análise conjunta do mapa de Fourier dado na figura 3.4 e do mapa de imagem (fig.(3.3)) é capaz de mostrar que o estado gerado no experimento é o estado dado pela eq.(2.49), a qual será apresentada a seguir.

¹É importante ressaltar que quando se refere à coincidências, leva-se em conta a diferença entre as coincidências obtidas com o equipamento subtraída das coincidências acidentais [18]

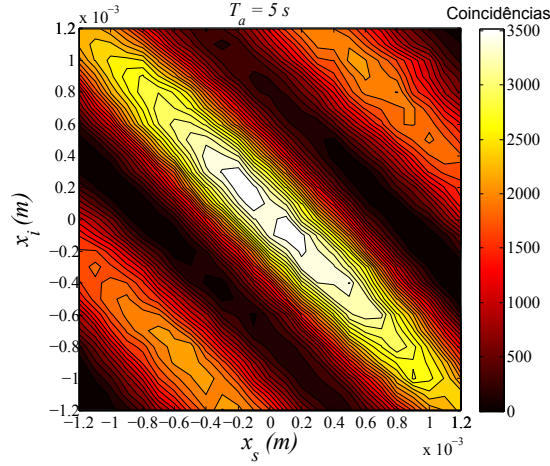


Figura 3.4: Esta figura apresenta o mapeamento das detecções em coincidência no plano de Fourier adquiridas com tempo de aquisição $T_a = 5s$. A comparação desta figura com a (2.7.c), mostra a concordância dos dados experimentais com a previsão teórica para este experimento.

Identificando o estado dos dois fótons a partir do mapeamento nos planos de imagem e Fourier.

Conforme discutido na sec.(2.3.2) o estado puro mais geral que se pode gerar com o aparato experimental utilizado pode ser dado por:

$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) |\psi^\pm\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) |\phi^\pm\rangle. \quad (3.1)$$

A visibilidade de um padrão de interferência é definida por:

$$\eta = \frac{|C_{\max} - C_{\min}|}{C_{\max} + C_{\min}}, \quad (3.2)$$

na qual C_{\max} (C_{\min}) é o máximo (mínimo) valor das contagens em coincidência do padrão de interferência. Este parâmetro é útil pois está relacionado com a coerência de um campo, dado que quanto maior a visibilidade mais coerente é o campo [46], desta forma a visibilidade do padrão de interferência de um estado misto é tanto maior quanto maior o grau de mistura (incoerência) do estado. O cálculo da visibilidade tomada na linha central do mapa de Fourier é $\eta = 0,97$, mostrando que o estado preparado pode ser o grau de coerência do estado é grande, de modo que este estado pode ser aproximado de um estado puro.

Pelo mapa do plano de Imagem dado na fig.(3.3) pode-se notar que os estado estado gerado privilegia as correlações nas posições transversais dos fótons gêmeos, desta forma o termo que representa o estado $|\psi^\pm\rangle$ é desprezível.

Outra propriedade exibida pelo estado preparado é a existência de um máximo de coincidências na posição central do padrão de interferência, este fato pode ser levado em conta para se descartar a possibilidade de se ter gerado o estado $|\phi^-\rangle$ de Bell, uma vez que para este deve existir uma contagem mínima das coincidências na posição central do padrão.

Portanto a partir das análises precedentes é possível verificar que o estado preparado no experimento é o estado dado pela eq.(2.49).

3.3 Identificando os contextos de um ciclo no mapa de Fourier

Conforme discutido na sec.(1.5) existem duas condições necessárias na elaboração das provas de contextualidade quântica. A primeira é que o espaço de Hilbert do sistema tenha dimensão $d \geq 3$, enquanto a segunda exige que nesse espaço seja possível definir um conjunto de observáveis e seus subconjuntos de observáveis compatíveis. Estes subconjunto definem os contextos.

No experimento de interferência de dois fótons discutido na sec.(3.1), o espaço de Hilbert dos dois fótons após as fendas duplas é quadridimensional, uma vez que cada um dos fótons é um sistema de dois níveis (qbit). Conforme exemplificado na sec.(1.5.8), um espaço bipartido $2 \otimes 2$, permite escrever um conjunto de cenários n-ciclo para n par, a condição de compatibilidade dos observáveis que definem os contextos, dados pela eq.(1.40), é garantida, pois cada observável O_k e O_{k+1} , definidos na eq.(1.42), são implementados em um dos subespaços i e s do par de fótons, e portanto comutam.

3.3.1 Relação entre as coincidências e os contextos do n-ciclo

Uma vez que o espaço de Hilbert de dois qbits fotônicos codificados nos caminhos transversais de fótons gêmeos, é apropriado a implementação do n-ciclo par, devido a sua dimensionalidade e sua estrutura bipartida, resta relacionar os observáveis dados pela eq.(1.42) com as contagens em coincidência no plano de detecção (Fourier).

De acordo com as eqs.(2.62), pode-se escrever:

$$\mathcal{S}^2 \mathfrak{D}(\theta_s) \mathfrak{D}(\theta_i) = \frac{\Pi(\theta_i, \theta_s) + \Pi(\theta'_i, \theta'_s) - \Pi(\theta'_i, \theta_s) - \Pi(\theta_i, \theta'_s)}{\mathcal{A}(\theta_s) \mathcal{A}(\theta_i) + \mathcal{A}(\theta'_s) \mathcal{A}(\theta'_i) + \mathcal{A}(\theta_s) \mathcal{A}(\theta'_i) + \mathcal{A}(\theta'_s) \mathcal{A}(\theta_i)}. \quad (3.3)$$

Tomando o valor médio da eq.(2.62) obtêm-se as correlações entre os operadores $\mathfrak{D}(\theta_s)$ e $\mathfrak{D}(\theta_i)$ [29,30], as quais são dadas por:

$$\Xi(\theta_s, \theta_i) = \frac{C(\theta_i, \theta_s) + C(\theta'_i, \theta'_s) - C(\theta'_i, \theta_s) - C(\theta_i, \theta'_s)}{C(\theta_i, \theta_s) + C(\theta'_i, \theta'_s) + C(\theta'_i, \theta_s) + C(\theta_i, \theta'_s)}, \quad (3.4)$$

na qual $C(\theta_i, \theta_s)$ representam as contagens em coincidência em (θ_i, θ_s) .

Uma vez definidas as correlações entre os observáveis $\mathfrak{D}(\theta_s)$ e $\mathfrak{D}(\theta_i)$ é possível calcular as desigualdades de não-contextualidade para o cenário do n-ciclo par a partir das contagens em coincidência obtidas no plano de Fourier.

A fim de aproximar as notações utilizadas nessa seção com a notação utilizada na seção (1.5.7), convencionou-se que θ_s assume apenas valores múltiplos pares de π/n (k par na eq.(1.42a)) e θ_i os múltiplos ímpares de π/n (k ímpar na eq.(1.42a)). Dessa forma a eq.(1.42a) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$O_k = \begin{cases} \mathcal{SD}(\theta_s) \otimes \mathbb{1} & \text{para } k \text{ par,} \\ \mathbb{1} \otimes \mathcal{SD}(\theta_i) & \text{para } k \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (3.5)$$

3.3.2 Implementando vários cenários a partir de um mapa de Fourier

A construção experimental de um mapa de Fourier possibilita a implementação de diversos coeficientes de correlação $\Xi(\theta_s, \theta_i)$ dados pela eq.(3.4). Neste trabalho, conforme adiantado na seção precedente, tais coeficientes são calculados através de um tratamento dos dados experimentais, os quais são obtidos do experimento discutido na seção (3.2). Nesta seção será mostrado com mais detalhes o procedimento feito para calcular tais correlações.

A título de exemplificação considere o cenário de CHSH, *i.e.*, o cenário do 4-ciclo. Nesse cenário os parâmetros θ_ν que devem ser implementados por cada observador são: $\{\theta_s\} = \{0, 2\pi/4\}$ e $\{\theta_i\} = \{\pi/4, 3\pi/4\}$. Conforme discutido na seção (1.5.8) cada um destes parâmetros está relacionado a um dos contextos cujos valores esperados são os vértices do politopo não-contextual. Para o caso do 4-ciclo, estes contextos são:

$$\{O_0O_1; O_2O_1; O_2O_3; O_0O_3\} ,$$

ou em termos das correlações, as quais estão associadas aos valores médios destes contextos:

$$\{\Xi(0, \pi/4); \Xi(\pi/2, \pi/4); \Xi(\pi/2, 3\pi/4); \Xi(0, 3\pi/4)\} .$$

De acordo com a eq.(3.4), para a determinação de um correlator $\Xi(\theta_s, \theta_i)$ necessita-se além da coincidência $C(\theta_s, \theta_i)$ de outros três valores de coincidência dados por: $\{C(\theta'_s, \theta'_i); C(\theta_s, \theta'_i); C(\theta'_s, \theta_i)\}$. A relação entre os parâmetros θ_ν e a posição de cada detector no plano de Fourier é dada pela eq.(2.57), a qual pode ser reescrita como:

$$x_\nu = -0,24 \theta_\nu \cdot 10^{-3} , \quad (3.6)$$

onde a constante multiplicativa é calculada através dos parâmetros experimentais. Utilizando a relação dada pela eq.(3.6) o coeficiente de correlação $\Xi(0, \pi/4)$, é dado por:

$$\Xi(0, -0, 19) = \frac{C(0; -0, 19) - C(0; 0, 57) - C(0, 76; -0, 19) + C(0, 76; 0, 57)}{C(0; -0, 19) + C(0; 0, 57) + C(0, 76; -0, 19) + C(0, 76; 0, 57)}, \quad (3.7)$$

na qual $C(x_s, x_i)$ referem-se as contagens em coincidências nas posições (x_s, x_i) dadas em mm. Os parâmetros (posições dos detectores) exigidos na eq.(3.7) em geral não correspondem exatamente aos parâmetros implementados no mapa de Fourier, uma vez que para a realização deste é fixa-se o passo dado pelos detectores. Por este motivo calcula-se as correlações com os parâmetros experimentais que mais se aproximam aos exigidos teoricamente, como exemplo a correlação $\Xi(0, -0, 19)$ é reescrita como:

$$\Xi(0, -0, 19) = \frac{C(0; -0, 2) - C(0; 0, 6) - C(0, 8; -0, 2) + C(0, 8; 0, 6)}{C(0; -0, 2) + C(0; 0, 6) + C(0, 8; -0, 2) + C(0, 8; 0, 6)}. \quad (3.8)$$

O efeito da aproximação acima mencionada é apenas afastar o valor de cada correlator do valor dado na eq.(1.45), o que afasta o valor das desigualdades de Boole do máximo valor que essas podem assumir. Uma vez que γ representa a diferença $|\theta_i - \theta_s|$, ou seja a separação angular entre os O_k com k par e O_k com k ímpar. Pode-se então definir o parâmetro:

$$\gamma_{min.} = |-0, 24\delta 10^{-3}|, \quad (3.9)$$

que representa o menor valor de γ implementado experimentalmente. Assim o aumento de n torna maior a discrepância entre γ e $\gamma_{min.}$, e tal discrepância faz com que se torne impossível distinguir cada dois valores distintos de θ_ν , limitando portanto o número de ciclos possíveis de serem implementados a partir de um experimento de interferência de duas partículas. Em contrapartida se δ é fixado, então γ_{min} pode ser alterado, apenas alterando os parâmetros experimentais que determinam a constante multiplicativa na eq.(3.9).

3.4 Violação das desigualdades do n-ciclo.

Conforme discutido na seção (1.5.7) uma das desigualdades de Boole para o cenário do n-ciclo par é dada por:

$$\Omega = \sum_{k=0}^{n-2} \langle O_k O_{k+1} \rangle - \langle O_0 O_{n-1} \rangle \leq n - 2, \quad (3.10)$$

a qual pode ser reescrita em termos dos coeficientes de correlação, usando as eqs.(3.5) e (3.4):

$$\sum_{j=0}^{n-2} \Xi(\theta_{s_j}, \theta_{i_{j+1}}) - \Xi(0, \theta_{i_{n-1}}) \leq n - 2, \quad (3.11)$$

com $j = 0, 2, \dots, n - 2$ e $\theta_{\nu_k} = k \pi/n$. Conforme discutido na seção (1.5.6), esta desigualdade deve ser satisfeita por toda distribuição de probabilidades que possa ser explicada por um modelo não-contextual, em outras palavras, se os coeficientes de correlação (eq.(3.4)) são calculados a partir de uma distribuição de probabilidades não-contextual então o máximo valor obtido para eq.(3.11) é $\Omega_{n.c} = n - 2$. Este valor será chamado de *cota não-contextual*.

A partir dos mapas de Fourier obtidos experimentalmente são calculados os valores da soma dada pela eq.(3.11) para $4 \leq n \leq 14$. Estes são apresentados na tabela 3.1 como Ω_{exp} e são comparados com o máximo valor de Ω previsto para cada ciclo, o qual será chamado de *cota quântica*, sendo esta obtida pela eq.(1.45). Para todos esses ciclos é possível perceber que o valor de Ω_{exp} é sempre maior que a cota não-contextual dada por $\Omega_{nc} = n - 2$.

3.4. VIOLAÇÃO DAS DESIGUALDADES DO N-CICLO.

De acordo com a discussão feita na seção (3.3.2), os parâmetros experimentais são aproximados dos parâmetros previsto pela (3.11), isso faz com que a separação angular entre dois operadores que definem um contexto não seja sempre π/n . Desta forma a eq.(1.45) torna-se:

$$\Omega_{\text{prev.}} = \sum_{j=0}^{n-2} \cos [\kappa (x_{s_j} - x_{s_{j+1}})] , \quad (3.12)$$

sendo κx_{ν_k} os parâmetros experimentalmente implementados com os mapas de Fourier. Em outras palavras pode-se afirmar que $\Omega_{\text{exp}}^{\text{ct}}$ é o valor previsto da soma Ω utilizando como parâmetro as posições dos detectores que de fato são implementadas nos mapas. Neste caso, considera-se que a aresta que separa dois observáveis compatíveis em um ciclo não possui tamanho π/n . Portanto, outras fontes de erro como eficiência de detecção e a infidelidade do estado preparado em relação ao estado maximamente emaranhado $|\Phi^+\rangle$ não são levados em consideração na expressão (3.12).

n	Ω_{exp}	$\Omega_{\text{prev.}}$	$\Omega_{\text{qnt}}^{\text{ct}}$	$\Omega_{\text{n.c}}$
4	$2,73 \pm 0,02$	2,73	2,83	2
6	$4,90 \pm 0,02$	5,11	5,20	4
8	$7,02 \pm 0,02$	7,25	7,39	6
10	$8,80 \pm 0,02$	9,25	9,51	8
12	$10,82 \pm 0,02$	11,25	11,59	10
14	$12,67 \pm 0,02$	13,25	13,65	12

Tabela 3.1: Valores obtidos para Ω . Ω_{exp} é o valor experimental obtido para a soma Ω em cada ciclo. $\Omega_{\text{prev.}}$ é o máximo valor previsto quando Ω é estimado com os parâmetros verdadeiramente implementados, i.e., quando $\gamma_{\text{exp}} = \kappa(x_i - x_s)$. $\Omega_{\text{qnt}}^{\text{ct}}$ é o máximo valor previsto permitido pela mecânica quântica quando $\gamma = \pi/n$.

A margem de erro experimental da grandeza Ω_{exp} é estimada propagando as flutuações das fotocontagens para cada coeficiente de correlação e posteriormente para a soma destes. Surpreendentemente esta incerteza não escala com n , revelando outra característica surpreendente das desigualdades de Boole do n-ciclo, o valor experimental obtido para cada ciclo sofre pouca influência das flutuações estatísticas de detecção, o que faz com que mesmo para valores grandes de n a violação seja significativa, mesmo que distante da cota quântica.

De acordo com a eq.(1.45) a violação máxima das desigualdades do n-ciclo depende apenas da grandeza $\gamma = \pi/n$, a qual representa a separação entre os dois parâmetros θ_i e θ_s de cada contexto. Isso significa que se o valor inicial de $\theta_{s_{ini}} = 0$ for deslocado por um fator $\Delta\theta$, para obter a máxima violação para a desigualdade do n-ciclo, deve-se deslocar pelo mesmo fator todos os parâmetros do observador i e s . Dessa forma para cada posição x_s no intervalo $[-1, 2\text{mm}; 1, 2\text{mm}]$, existe um único conjunto de parâmetros $\{\theta_i\}$ com os quais é possível obter a máxima violação da desigualdade (3.11).

3.4. VIOLAÇÃO DAS DESIGUALDADES DO N-CICLO.

Com auxílio de recursos computacionais, as desigualdades de cada cenário são calculadas a partir de cada posição x_s , o que pode ser feito com a substituição $\theta_\nu \mapsto \theta_\nu + l0,4137$, com l inteiro no intervalo $[-12, 12]$, e $\theta = 0,4137$ corresponde ao ângulo relacionado ao passo do detector (δ). Como resultado obtém-se vinte e cinco valores de Ω_{exp} para cada cenário. A tabela (3.2), apresenta o desvio padrão (σ_Ω) a média dos valores de Ω_{exp} obtidos para cada ciclo ($\overline{\Omega_{\text{exp}}}$) e o erro padrão ϵ definido por:

$$\epsilon = \frac{\sigma_\Omega}{\sqrt{N}}, \quad (3.13)$$

sendo N o número de valores obtidos para Ω_{exp} . Esses valores de desvio

n	σ_Ω	$\overline{\Omega_{\text{exp}}}$	ϵ
4	0,10	2,67	0,02
6	0,10	4,86	0,02
8	0,11	6,93	0,02
10	0,13	8,86	0,03
12	0,10	10,8	0,02
14	0,13	12,69	0,03

Tabela 3.2: A tabela apresenta o desvio padrão e a média obtidos quando o valor dos parâmetros de cada observador é alterado por um fator $\Delta\theta$, e as desigualdades de cada cenário são calculadas.

padrão revelam uma pequena dispersão dos valores obtidos para cada configuração de ângulos, confirmando que as violações dependem exclusivamente de γ . A utilidade desta análise é que ela pode ser utilizada como forma alternativa à propagação de erros utilizadas para expressar os resultados da tabela (3.1) e mostra a concordância entre os resultados, o que indica que a propagação das incertezas que levam em consideração apenas as flutuações estatísticas das fotocontagens é uma excelente aproximação para a barra de erros das medidas de Ω .

Uma característica das desigualdades do n-ciclo é a escalabilidade da dificuldade de violação das destas desigualdades, *i.e.*, as violações tornam-se cada vez menores com o aumento de n . Esta característica pode ser visualizada definindo a grandeza $\beta \equiv (\Omega + n)/2n$, que para cenários CHSH representam a probabilidade de sucesso em uma tarefa específica definida como "*jogo CHSH*" [60]. A figura (3.4) é construída a partir dos dados obtidos de Ω_{exp} em comparação com a cota não contextual da desigualdade do n-ciclo dada por Ω_{NC} . Nota-se que a violação se torna mais difícil com o aumento de n e que ainda assim as violações obtidas são significativas. Pode-se perceber também que a aproximação dos parâmetros requeridos pela eq.(3.5) por parâmetros implementados no mapa de Fourier têm seu efeito acentuado com o aumento de n pois a violação obtida torna-se mais distante da cota quântica.

Vale ressaltar que a escolha do máximo valor de n implementado neste experimento não é arbitrária, mas sim determinada pelo passo δ e o tamanho dos detectores utilizados na construção dos mapas de Fourier. Para valores

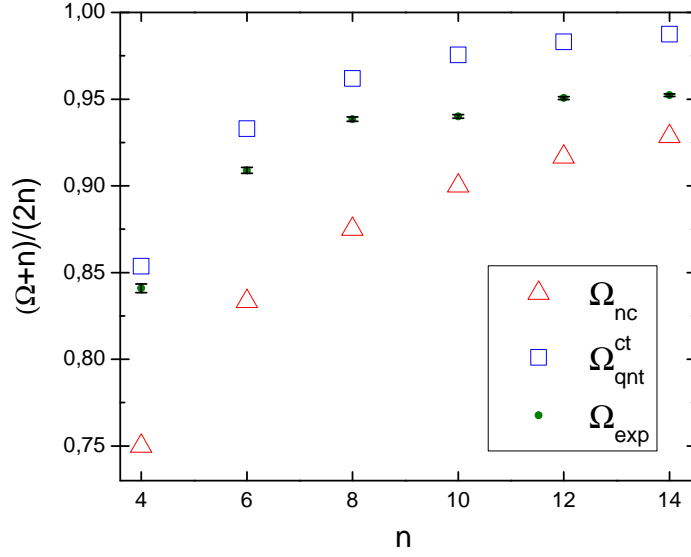


Figura 3.5: Violação relativa das desigualdades do n -ciclo, a cota quântica é reescalada para 1. Pode-se perceber que com o aumento de n a cota não contextual fica mais próxima da cota quântica, desta forma a violação experimental se torna cada vez mais difícil. Porém percebe-se que as violações obtidas continuam significativas.

de $n > 14$, $\gamma_{n>14}$ torna-se menor que a resolução experimental dada por $\gamma_{res} = \kappa\delta$, desta forma torna-se impossível diferenciar dois observáveis distintos em uma mesma parte, ou seja, a perda de resolução experimental faz com que os contextos experimentais para $n > 14$, não correspondem aos contextos da eq.(3.11).

Todos esses resultados mostram que as correlações responsáveis pela condicionalidade do padrão de interferência de dois fótons gerados por SPDC, são correlações não clássicas no sentido que as distribuições de probabilidade conjunta gerada por elas não pode ser explicada de uma forma contextual, corroborando com o caráter quântico dessas correlações. Além disso esse experimento mostra um caminho para se caracterizar as correlações de um sistema de duas partículas através do padrão de interferência do estado global destas.

3.5 Conclusão

Os resultados deste trabalho permitem vislumbrar uma nova e interessante face do experimento de Young quântico realizado: as correlações responsáveis pela condicionalidade exibida na figura de interferência de duas partículas não podem ser reproduzidas por algum modelo determinístico e não-contextual. Para verificar este indeterminismo contextual utiliza-se uma família de desigualdades de não contextualidade conhecidas por *desigualdades do n -ciclo*

par, as quais permitem a implementação de testes de não-contextualidade em diferentes cenários.

O estudo realizado pode ser encarado entretanto como uma implementação de testes de Bell em cenários diversos nos quais dois observadores espacialmente separados medem as correlações entre as medidas de n observáveis dicotômicos, de modo que a cada observador implemente $n/2$ observáveis. Desta forma a desigualdade de CHSH surge como um caso particular destes múltiplos cenários com $n = 4$.

O sistema físico utilizado consiste de dois *qbits* de caminho, implementados ao transmitir por uma fenda dupla dois fótons gêmeos emaranhados em seus caminhos transversais. A estrutura bipartida do espaço de Hilbert gerado permite a implementação do n -ciclo par, uma vez que para esta família de desigualdades a compatibilidade dos observáveis que se deseja medir as correlações é garantida implementado-se $n/2$ observáveis em cada sub-espaço de um qbit.

A partir de um único experimento de Young pode-se mapear as correlações entre os fótons em um plano distante ao das fendas. Desta forma é possível calcular as correlações necessária a implementação de cada cenário n -ciclo, que no presente estudo estende-se de $n = 4$ até $n = 14$. Sendo possível verificar violações significativas das desigualdades de não-contextualidade do n - ciclo em todos os cenários testados.

É importante salientar que devido à baixa eficiência de detecção o experimento fica sujeito ao *loophole* de detecção e de amostra fiel, o que não diminui a importância dos resultados obtidos nesse trabalho, apenas não o valida como um teste fundamental de um comportamento geral da natureza. Porém garante a validade do comportamento não contextual para a distribuição de probabilidades obtida nesse experimento, reforçando sua utilidade como um testemunho da natureza de correlações.

Apêndice A

Operadores de medida implementados no experimento de Young quântico

Este apêndice tem como objetivo prover uma breve demonstração matemática do operador de medida implementado em um experimento de Young de dois fótons. Essa construção é necessária pois, conforme discutido na seção (2.4), a dimensão finita do detector faz com que não seja possível a realização de uma medida projetiva sobre o sistema.

É conveniente iniciar esta análise considerando uma medida projetiva realizada sobre o sistema quando os dois detectores são colocados nas posições (x_i, x_s) . De acordo com a descrição de Glauber a probabilidade de se obter uma detecção em coincidência em (x_i, x_s) de dois fótons preparados em um estado qualquer com matriz de densidade ρ , é dada por [18, 46]:

$$p(x_i, x_s) = \text{Tr} \left(\rho \hat{E}_i^- (x_i) \hat{E}_i^+ (x_i) \hat{E}_s^- (x_s) \hat{E}_s^+ (x_s) \right) , \quad (\text{A.1})$$

sendo $\hat{E}_\nu^+ (x_\nu)$ ($\nu = i, s$) o operador campo correspondente ao modo espacial x_ν enquanto $\hat{E}_\nu^- (x_\nu) = \left(\hat{E}_\nu^+ (x_\nu) \right)^\dagger$. Uma vez que o valor médio de um projetor \mathcal{P}_ν corresponde à probabilidade de se projetar o sistema sobre determinado estado, então pode-se associar o operador que aparece na eq.(A.1) ao operador de projeção em um modo do campo que corresponde a posição (x_i, x_s) dos detectores. A probabilidade de se detectar os fótons nas posições transversais x_i e x_s , no plano de detecção z , após passar pelo sistema ótico de detecção, é dado por :

$$p(x_i; x_s) = \text{Tr}(\rho \mathcal{P}_i \mathcal{P}_s) , \quad (\text{A.2})$$

onde \mathcal{P}_ν ($\nu = i, s$) são os operadores de projeção nos sub-espacos dos fótons *signal* e *idler*. A comparação entre as eqs. (A.1) e (A.2), permite definir este operador de projeção como:

$$\hat{\mathcal{P}}_\nu = \hat{E}_\nu^- (x_\nu) \hat{E}_\nu^+ (x_\nu) , \quad (\text{A.3})$$

o qual pode ser reescrito como:

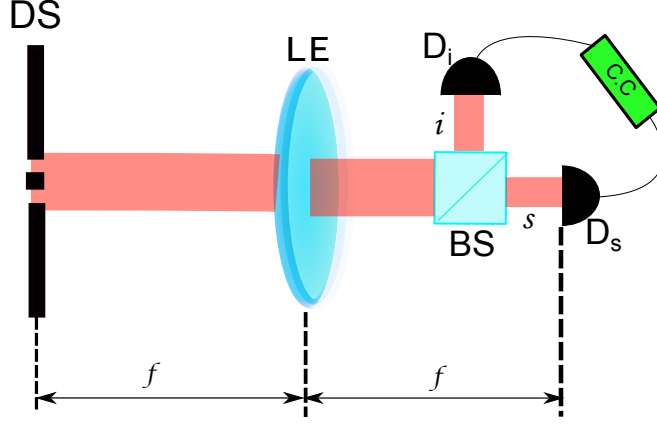


Figura A.1: Representação esquemática do sistema de detecção, neste uma lente esférica (LF) de comprimento focal f compartilha seu plano focal anterior com uma fenda dupla (FD) e seu plano focal posterior com um fotodetector (D_ν).

$$\hat{\mathcal{P}}_\nu = \mathbb{1} \hat{\mathcal{P}}_\nu \mathbb{1} \quad (\text{A.4})$$

$$= \sum_{\ell', \ell=0}^D |\ell'\rangle \langle \ell' | \hat{\mathcal{P}}_\nu | \ell \rangle \langle \ell | , \quad (\text{A.5})$$

na qual os índices do somatório seguem as definições dadas na subseção (2.3.1), com $|\ell\rangle$ representando o estado do fóton ν passando pela fenda ℓ . Ao reescrever o projetor na forma (A.4), têm-se a conveniência de tê-lo em função dos estados de fenda e portanto estes atuarão sobre o estado do fóton imediatamente após a fenda dupla. Em outras palavras têm-se a decomposição espectral deste projetor na base dos estados $|\ell\rangle$, e portanto a propagação do operador até o plano de detecção, pode ser simplificada propagando-se estes estados de fenda através do aparato de detecção.

Conforme discutido na seção (3.1) o sistema de detecção utilizado nesse experimento projeta a transformada de Fourier óptica após a fenda dupla, sobre o plano de detecção. Um esquema deste é mostrado na fig.(A.1).

Na ref. [56] é feita a demonstração detalhada da amplitude de probabilidade $\langle \text{vac} | \hat{E}_\nu^+(x_\nu) | \ell \rangle$, quando o operador campo elétrico é propagado por um sistema de detecção semelhante ao utilizado nesse trabalho. Para a configuração $f - f$ utilizada esta pode ser escrita como:

$$\hat{E}_\nu^+(x_\nu) | \ell \rangle \propto \text{sinc} \left(\frac{kx}{2f} a \right) \exp \left[-i\beta \left(\frac{kx}{2f} \right)^2 \right] \exp \left[-i \frac{kdx}{2f} j \right] . \quad (\text{A.6})$$

Utilizado esta equação na eq.(A.4), obtêm-se finalmente que:

$$\hat{\mathcal{P}}_\nu \propto \sum_{\ell', \ell=0}^D \text{sinc}^2(\bar{x}_\nu a) e^{i\bar{x}_\nu d(\ell - \ell')} |j'\rangle \langle j| , \quad (\text{A.7})$$

Conforme adiantado, em uma situação prática o detector utilizado possui uma área efetiva de detecção finita, *i.e.*, ele detecta fótons que atingem uma área finita. Portanto quando um detector é colocado em uma posição $x_{0\nu}$, implementa-se experimentalmente uma série de projetores correspondentes as posições dentro da área efetiva de detecção. Considerando um detector com largura $2b$, nessa situação a probabilidade de detecção para um detector colocado na posição $x_{0\nu}$, deve ser dada pela soma das probabilidades de detecção associada a cada ponto dentro da área de detecção. Neste caso, não se pode falar em projetores e sim em operadores de medida, conhecidos como POVM (*positive operator value measure*), cuja a soma dos elementos desse conjunto dá o operador identidade. Em termos dos operadores de medida (elementos do POVM), a probabilidade de se detectar dois fótons nas posições x_i e x_s é

$$p(x_i; x_s) = \text{Tr}(\rho \Pi_i(x_i) P_i(x_s)) , \quad (\text{A.8})$$

onde os $\Pi_\nu(x_\nu)$ são os operadores de medida nos sub-espacos dos fótons signal e idler.

$$p(x_{0i}, x_{0s}) \propto \int_{x_{0i}-b}^{x_{0i}+b} \int_{x_{0s}-b}^{x_{0s}+b} dx_i dx_s \text{Tr} \left[\rho \hat{E}_i^-(x_i) \hat{E}_i^+(x_i) \hat{E}_s^-(x_s) \hat{E}_s^+(x_s) \right] . \quad (\text{A.9})$$

De forma similar a realizada anterior o operador de medida do par, é dado por:

$$\Pi(x_i, x_s) = \int_{x_{0i}-b}^{x_{0i}+b} \int_{x_{0s}-b}^{x_{0s}+b} dx_i dx_s \hat{E}_i^-(x_i) \hat{E}_i^+(x_i) \hat{E}_s^-(x_s) \hat{E}_s^+(x_s) \quad (\text{A.10})$$

Em termos dos estados de fenda, o elemento de POVM podem ser escritos como:

$$\Pi_\nu \equiv \int_{x_{0\nu}-b}^{x_{0\nu}+b} dx_\nu \mathbb{1} \hat{E}_\nu^+(x_\nu) \hat{E}_\nu^-(x_\nu) \mathbb{1} \quad (\text{A.11})$$

a qual resulta em:

$$\Pi_\nu \propto \text{sinc}^2(\bar{x}_\nu a) \text{sinc} \left(\frac{kdb}{2f} \right) \sum_{\ell', \ell=0}^D e^{i\bar{x}_\nu d(\ell-\ell')} |\ell'\rangle \langle \ell| , \quad (\text{A.12})$$

obtendo assim uma forma não normalizada para este elemento de POVM [59]¹.

Normalizando este operador e desenvolvendo o somatório para duas fendas (ℓ, ℓ'), encontra-se por fim o operador de medidas na forma dada na eq.(2.56).

¹De fato é possível verificar que $\int_{-\infty}^{\infty} \Pi_\nu \propto \mathbb{1}$

Referências Bibliográficas

- [1] Pierre-Louis de Assis. *Manipulação e mapeamento de correlações quânticas em estados de quatro qudits espaciais*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2011.
- [2] S.P. Walborn, C.H. Monken, S. Pádua, and P.H. Souto Ribeiro. Spatial correlations in parametric down-conversion. *Physics Reports*, 495:87 – 139, 2010.
- [3] S. Kochen and E. Specker. The problem of hidden variables in quantum mechanics. *J.Math.Mech.*, 17, 1967.
- [4] A. Cabello, S. Severini, and A. Winter. (Non-)Contextuality of Physical Theories as an Axiom. *ArXiv e-prints*, October 2010.
- [5] John S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics*, 1:195–200, 1964.
- [6] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880–884, 1969.
- [7] M. Araújo, M. Túlio Quintino, C. Budroni, M. Terra Cunha, and A. Cabello. Complete characterization of the n-cycle noncontextual polytope. *ArXiv e-prints*, June 2012.
- [8] Alexander A. Klyachko, M. Ali Can, Sinem Binicioğlu, and Alexander S. Shumovsky. Simple test for hidden variables in spin-1 systems. *Phys. Rev. Lett.*, 101:020403, Jul 2008.
- [9] Leonardo Neves, G. Lima, J. G. Aguirre Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra, and S. Pádua. Generation of entangled states of qudits using twin photons. *Phys. Rev. Lett.*, 94:100501, Mar 2005.
- [10] Leonardo Neves, S. Pádua, and Carlos Saavedra. Controlled generation of maximally entangled qudits using twin photons. *Phys. Rev. A*, 69:042305, Apr 2004.
- [11] W. H. Peeters, J. J. Renema, and M. P. van Exter. Engineering of two-photon spatial quantum correlations behind a double slit. *Phys. Rev. A*, 79:043817, Apr 2009.

- [12] P.-L. de Assis, M. A. D. Carvalho, L. P. Berruezo, J. Ferraz, I. F. Santos, F. Sciarrino, and S. Pádua. Control of quantum transverse correlations on a four-photon system. *Opt. Express*, 19(4):3715–3729, Feb 2011.
- [13] Mateus Araújo Santos. Quantum realms and quantum surrealism. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.
- [14] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.
- [15] D. Bohm. *Quantum Theory*. Prentice-Hall physics series. Dover Publications, New York, 1951.
- [16] Pavel Usachev, Jonas Söderholm, Gunnar Björk, and Alexei Trifonov. Experimental verification of differences between classical and quantum polarization properties. *Optics Communications*, 193:161 – 173, 2001.
- [17] Alfredo Luis. Degree of polarization in quantum optics. *Phys. Rev. A*, 66:013806, Jul 2002.
- [18] J. Garrison and R. Chiao. *Quantum Optics*. Oxford Graduate Texts. OUP Oxford, 2008.
- [19] L. de Broglie, A. George, W. Pauli, and A. Einstein. *Louis de Broglie, physicien et penseur: Hommages*. A. Michel.
- [20] A. Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Fundamental Theories of Physics. Kluwer Academic Publishers-Dordrecht, 1995.
- [21] S.R.A. Salinas. *Introdução a Física Estatística Vol. 09*. EDUSP-São Paulo, 1997.
- [22] O. Pessoa. *Conceitos de Física Quântica 2*. Number v. 2. LIVRARIA DA FÍSICA-São Paulo, 2006.
- [23] J. von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. “Die” Grundlehren der mathematischen Wissenschaften / “Die” Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1995.
- [24] John S. Bell. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 38:447–452, Jul 1966.
- [25] L.E. Ballentine. *Quantum Mechanics: A Modern Development*. World Scientific.
- [26] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. i. *Phys. Rev.*, 85:166–179, Jan 1952.
- [27] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. ii. *Phys. Rev.*, 85:180–193, Jan 1952.

- [28] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Quantum Mechanics*. Wiley, 1992.
- [29] L.E. Ballentine. *Quantum mechanics: a modern development*. World Scientific Publishing Company, New York, 1998.
- [30] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm *Gedankenexperiment* : A new violation of bell’s inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49:91–94, Jul 1982.
- [31] Adán Cabello, JoséM. Estebaranz, and Guillermo García-Alcaine. Bell-kochen-specker theorem: A proof with 18 vectors. *Physics Letters A*, 212(4):183 – 187, 1996.
- [32] Sixia Yu and C. H. Oh. State-independent proof of kochen-specker theorem with 13 rays. *Phys. Rev. Lett.*, 108:030402, Jan 2012.
- [33] Asher Peres. Incompatible results of quantum measurements. *Physics Letters A*, 151(3–4):107 – 108, 1990.
- [34] N. David Mermin. Simple unified form for the major no-hidden-variables theorems. *Phys. Rev. Lett.*, 65:3373–3376, Dec 1990.
- [35] R. W. Spekkens. Contextuality for preparations, transformations, and unsharp measurements. *Phys. Rev. A*, 71:052108, May 2005.
- [36] Adam Brandenburger and Noson Yanofsky. A classification of hidden-variable properties. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(42):425302, 2008.
- [37] Samson Abramsky and Adam Brandenburger. The sheaf-theoretic structure of non-locality and contextuality. *New Journal of Physics*, 13(11):113036, 2011.
- [38] T. Fritz and R. Chaves. Entropic inequalities and marginal problems. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 59(2):803–817, 2013.
- [39] Arthur Fine. Hidden variables, joint probability, and the bell inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 48:291–295, Feb 1982.
- [40] Rafael Luiz da Silva Rabelo. Não-localidade quântica: Matemática e fundamentos. Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.
- [41] I. Pitowsky. *Quantum probability and quantum logic*. Lecture notes in physics. Springer-Verlag, 1989.
- [42] David Avis and Komei Fukuda. A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra. *Discrete e Computational Geometry*, 8(1):295–313, 1992.
- [43] D.Avis. lrs.

- [44] George Boole. On the theory of probabilities. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 152:225–252, 1862.
- [45] Matthias Kleinmann, Costantino Budroni, Jan-Åke Larsson, Otfried Gühne, and Adán Cabello. Optimal inequalities for state-independent contextuality. *Phys. Rev. Lett.*, 109:250402, Dec 2012.
- [46] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [47] S.P. Walborn, C.H. Monken, S. Pádua, and P.H. Souto Ribeiro. Spatial correlations in parametric down-conversion. *Physics Reports*, 495(4–5):87 – 139, 2010.
- [48] Y.R. Shen. *The principles of nonlinear optics*. Wiley classics library. Wiley-Interscience, 2003.
- [49] R.W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Nonlinear Optics Series. Elsevier Science, 2008.
- [50] E. J. S. Fonseca, C. H. Monken, and S. Pádua. Measurement of the de broglie wavelength of a multiphoton wave packet. *Phys. Rev. Lett.*, 82:2868–2871, Apr 1999.
- [51] W. A. T. Nogueira, S. P. Walborn, S. Pádua, and C. H. Monken. Experimental observation of spatial antibunching of photons. *Phys. Rev. Lett.*, 86:4009–4012, Apr 2001.
- [52] S. P. Walborn, M. O. Terra Cunha, S. Pádua, and C. H. Monken. Double-slit quantum eraser. *Phys. Rev. A*, 65:033818, Feb 2002.
- [53] M. A. D. Carvalho, J. Ferraz, G. F. Borges, P.-L de Assis, S. Pádua, and S. P. Walborn. Experimental observation of quantum correlations in modular variables. *Phys. Rev. A*, 86:032332, Sep 2012.
- [54] J.W. Goodman. *Introduction To Fourier Optics*. McGraw-Hill physical and quantum electronics series. Roberts & Company Publishers, 2005.
- [55] G.B. Arfken and H.J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 2005.
- [56] Leonardo Teixeira Neves. *Estados emaranhados de qbits e qdits criados com pares de fótons produzidos na conversão paramétrica descendente*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.
- [57] E. Hecht. *Optics*. Addison-Wesley Longman, Incorporated, 2002.
- [58] E. J. S. Fonseca, J. C. Machado da Silva, C. H. Monken, and S. Pádua. Controlling two-particle conditional interference. *Phys. Rev. A*, 61:023801, Jan 2000.

- [59] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge Series on Information and the Natural Sciences. Cambridge University Press, 2000.
- [60] Y.-C. Liang, R. W. Spekkens, and H. M. Wiseman. Specker's parable of the overprotective seer: A road to contextuality, nonlocality and complementarity. *Arxiv*, 506:1–39, September 2011.