Representações e Aspectos Quânticos de Sistemas Não-Comutativos

Julio Glauber Ferreira dos Santos

2013

Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG

Instituto de Ciências Exatas - ICEx

Programa de Pós Graduação em Física

Representações e Aspectos Quânticos de Sistemas Não-Comutativos

Julio Glauber Ferreira dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Co-orientador: Prof. Dr. Luís Antônio Cabral

Dissertação apresentada ao departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais, para a obtenção de Título de Mestre em Física

Área de Concentração: Teoria Quântica de Campos.

2013

"Com DEUS todas as coisas são possíveis

Mateus 19:26"

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelas oportunidades que me proporcionou e também por me segurar e me proteger a todos os momentos e durante a realização deste trabalho.

Aos meus pais Valdemar e Francisca que sempre me apoiaram. À minha esposa Fabiana pela compreensão e apoio durante todo esse tempo, a quem dedico este trabalho e toda a minha vida.

De modo especial ao professor Dr. Marcos D. Sampaio, Orientador deste trabalho, que com paciência e profissionalismo acompanhou-me com orientações claras e valiosas para elaboração dessa pesquisa e para a minha formação.

Ao professor Dr. Luiz Cabral, meu co-orientador, por sua dedicação e valiosas orientações que sempre teve disposição e entusiasmo para sanar minhas dúvidas. À Carolina Nemes, pelas valiosas e calorosas discussões.

Em especial ao meu colega de mestrado e irmão em Cristo, Welyson Tiano, que muito contribuiu para a minha formação. À Leandra Resende pelo apoio e aos demais amigos e colegas de curso pela amizade e momentos de descontração.

À CAPES, pelo apoio financeiro. Ao grupo de TQC pela amizade e valiosos conhecimentos. A todo o pessoal da biblioteca pela atenção e disposição em especial à Shirley, obrigado por toda a ajuda.

Resumo

O presente trabalho explora, inicialmente de forma intuitiva, algumas questões da não-comutatividade no espaço bem como as motivações para o estudo das teorias não-comutativas. Em seguida será dado um sobrevoo em alguns aspectos da teoria quântica não-comutativa abordada no plano. Seguindo as regras básicas de não-comutatividade, construir estados que saturem as relações de incerteza entre coordenadas e momentos e entre coordenadas apenas, ou seja, obter o mínimo de incerteza possível num dos observáveis em questão, para uma construção da álgebra não-comutativa de coordenadas. Em particular, seguir na busca de estados que saturem, simultaneamente, duas ou mais das relações de incerteza de Heisenberg modificadas, ou seja, valendo para o plano onde as coordenadas não comutam e mostrar que o determinante da matriz de covariância de Schrodinger, para um estado gaussiano particular, é equivalente à relação de incerteza de Heisenberg para dois operadores.

Será construído o propagador para a partícula livre, a partir da construção da versão não-comutativa da onda plana, explorando a ideia de média em estados coerentes. E, explorar também a ideia da construção do pacote de ondas, no plano não-comutativo, obter sua forma evoluída usando o formalismo de integral de trajetória, finalizando com a análise da transformada de Fourier em espaço. O presente trabalho analisa os resultados e o que se pode fazer, num próximo projeto, com as ferramentas apresentados.

Abstract

This paper explores initially, in a intuitive form, some questions of non-commutativity in space well as the motivations for the study of non-commutative theories. Then be given an overflight in some aspects of quantum theory non-commutative addressed in the plan. Following the basic rules of the non-commutative, see how to build states that saturate the uncertainty relations, i.e., get the least possible uncertainty in the observable in question, for a construction of non-commutative algebra of coordinates. In particular, following the search of states that saturate both relations Heisenberg uncertainty modified and show saturation of the Schrodinger's determinant for a given Gaussian state.

Then, will be built the propagator for the free particle from the construction of non-commutative version of the plane wave, exploring the idea of average in coherent states. And also exploring the idea of the construction of wave packet in the non-commutative plane, get its evolved form using the path integral formalism, ending with the analysis of the Fourier's transform in non-commutative space. This paper analyzes the results and what can be done in a next project, with the tools presented.

Keywords: Aspectos Cinemáticos de Teorias Quânticas Não-Comutativas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivações

O conceito de não-comutatividade nas coordenadas espaciais em mecânica quântica não é tão novo. Historicamente, essa ideia foi sugerida, logo nos primórdios da mecânica quântica, por Heisenberg[1][9] depois de perceber, entre outros físicos da época, que as grandezas clássicas expressas por funções reais deveriam ser abandonadas em favor de novas grandezas dadas por operadores cujo comutador não é necessariamente nulo. Ele propôs a existência de uma relação de incerteza não nula entre as coordenadas espaciais[23]. A partir de então, o espaço de configuração de um sistema físico tornou-se não-comutativo. Assim, segundo Heisenberg, seria uma maneira de eliminar as singularidades que aparecem na Teoria Quântica Relativística de Campos[8]. Essas considerações em parte levaram Snyder[2] a publicar o primeiro artigo sobre o tema[2]. Sendo esquecida durante muito tempo, essa ideia foi retomada recentemente em textos de Teoria de Cordas[14], [23]. O reaparecimento de modelos envolvendo características do espaço-tempo não-comutativo também foi impulsionado pelo fato de serem de grande interesse para a formulação da Teoria Quântica da Gravidade[13]. A ideia é que a comutatividade do espaço-tempo é perdida na escala de Planck $\lambda_p = (G\hbar/c^3)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-33} cm$. Isso leva a uma relação de comutação tal que dá,

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \qquad i, j = 1, 2 \tag{1.1}$$

[1]W. K. Heisenberg (1901-1976), físico teórico alemão, um dos criadores da mecânica quântica, prêmio Nobel de física em 1932.

[2]H. S. Snyder (1913 - 1962), um físico americano.

onde $\theta_{ij} = \theta\epsilon_{ij}$. Aqui, θ é um parâmetro real positivo com dimensão de comprimento ao quadrado e onde $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$, com módulo igual a um. Essa hipótese de inserir uma nova regra de não-comutatividade parece natural pois, assim como uma teoria quântica usual não tem seus estados físicos descritos por pontos no espaço de fase, mas sim por regiões de área proporcional a $\hbar$, um espaço-tempo N.C. também não possuiria pontos bem definidos, mas o próprio espaço físico se torna borrado (fuzzy), pontos são dissolvidos em pequenos planos (enevoados), tal como ocorre no já tradicional espaço de fase quântico. A relação (1.1) posta acima impõe possíveis limitações na precisão da localização de eventos no espaço-tempo, o que de fato deve ser uma característica da Teoria Quântica da Gravitação. Neste contexto, devemos considerar a não-comutatividade do espaço-tempo como uma teoria efetiva, capaz de levar em conta a existência de um comprimento mínimo. Além disso, no limite de baixas energias, $\theta \to 0$, ela deve recair nas teorias usuais que conhecemos bem.

Há várias formas de interpretar a alteração da álgebra quântica acima mencionada. A seguir, três abordagens a essa questão (não necessariamente populares) são comentadas:

- Considerar que a existência do objeto $\theta\epsilon_{ij} \neq 0$ seja tão fundamental quanto a de $\hbar\delta_{ij}$. Esse novo objeto deveria introduzir pequenos desvios nos resultados teóricos que possuem boa concordância experimental e possibilitar a resolução de algum problema;

- O parâmetro $\theta\epsilon_{ij} \neq 0$ é introduzido para modelar algum processo físico desconhecido ou sequência de interações não controlada, não tendo portanto um status de grandeza fundamental tal qual $\hbar\delta_{ij}$. Desta forma, introduz-se a não-comutatividade no espaço-tempo com o intuito de criar um modelo efetivo, o qual poderia ser consistente com muitos dos fenômenos conhecidos ou só com alguns muito particulares;

- Visto que a relação de não-comutatividade entre coordenadas e momentos, $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$, só é válida de forma geral em sistemas sem vínculos[9], há teorias físicas que, considerando sua estrutura de vínculos e sob certos limites, tornam-se não-comutativas no espaço-tempo, embora originalmente tenham sido formuladas em um contexto comutativo. Ou seja, nesta abordagem, não se assume $\theta\epsilon_{ij} \neq 0$ a priori, mas a não-comutatividade espaço-temporal é obtida, sob certo limite, como uma nova descrição para a teoria original.

Essa classificação foi acima introduzida apenas para proporcionar uma visão geral, porém vaga, de possíveis abordagens á não-comutatividade espaço-temporal. Não há na prática uma distinção bem definida entre essas abordagens. O estudo da não-comutatividade espaço-temporal advinda da teoria de cordas sob o limite de baixas energias e estudos gerais de sistemas vinculados cuja quantização leve a $\theta\epsilon_{ij} \neq 0$ são bons exemplos da terceira abordagem. Ainda não há no momento condições de se considerar a não-comutatividade espaço-temporal como um princípio fundamental, e nem há indícios experimentais claros nessa direção. Por enquanto ela fornece uma estrutura útil para propor novos modelos efetivos e estudar outras teorias sob certos limites, como a teoria de cordas no limite de baixas energias.

Supondo que as componentes $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_d$ do operador posição da Mecânica Quântica no espaço d-dimensional não comutam entre si, mas satisfazem a relação de comutação (1.1), a desigualdade de Cauchy-Schwarz[3] implica na relação de incerteza,

$$(\Delta\hat{x}_i)(\Delta\hat{x}_j) \geq 1/2|\theta_{ij}| \tag{1.2}$$

isto é, a partícula descrita pela função de onda, ψ, não pode ser localizada de forma precisa. Essa relação de incerteza para a posição implica uma imprecisão em determinado número de pontos no espaço: dizemos que o espaço é *fuzzy*, borrado ou tem uma estrutura quântica não-comutativa[15]. Obviamente, a não-comutatividade só pode se manifestar num espaço de configuração com pelo menos duas dimensões.

Uma vez que uma estrutura no espaço de configuração não é observada em escala macroscópica, é esperado que o parâmetro da não-comutatividade, θ, deva se manifestar numa escala do quadrado do comprimento de Planck[4], $\lambda^2 = (G\hbar/c^3)$. Assim, a não-comutatividade do espaço pode estar relacionada a distâncias muito curtas e a Mecânica Quântica Não-Comutativa, (M.Q.N.C), pode ser considerada como uma deformação da Mecânica Clássica[8]. Deste ponto de vista, Uma Teoria Quântica da Gravidade deve fornecer uma compreensão mais completa da não-comutatividade do espaço.

Os efeitos matemáticos e físicos causados pela não-comutatividade do espaço-tempo são desconhecidos e ainda é tema de estudo. No contexto da M.Q.N.C., estamos interessados em encontrar consequências fenomenológicas da presença de um espaço não-comutativo. O principal resultado, no caso de sistemas de partícula única, é o de que a

[3] K. H. A. Schwarz (1843-1921), matemático alemão.

[4] M. K. E. L. Planck, (1858-1947), físico alemão, pai da física quântica, prêmio Nobel de física, 1918.

modificação da álgebra obedecida pelos operadores de posição age como uma modificação das equações de Schrodinger com a ideia do produto Moyal tal como é feito com coordenadas clássicas para simular não-comutatividade em Teoria Quântica de Campos. No caso da Mecânica Quântica ela destrói a comutatividade dos observáveis de posição.

1.2 Estrutura da Dissertação

Esse trabalho de dissertação será apresentado da seguinte maneira. Além do contexto histórico e motivações [15], [9], abordadas neste capítulo de introdução, no capítulo 2 será feita uma revisão geral da mecânica quântica não-comutativa numa descrição mais formal e uma pouco mais abrangente[15], [18], [8]. No capítulo 3 apresentaremos uma abordagem diferente com uma possível representação da álgebra não-comutativa onde o objetivo é a busca de estados que saturem pelo menos duas das relações de incerteza entre posições e momento simultaneamente, [20], [21]. Em seguida, no capítulo 4, apresentaremos uma formulação da mecânica quântica não-comutativa numa forma funcional usando o conceito de posições médias tomadas em relação a estados coerentes, [29], com o objetivo de abordar algumas características cinemáticas dessa teoria e analisar alguns aspectos físicos a partir do propagador de Feynman para um sistema de partícula única. E, por fim, o capítulo 5 é deixado para as devidas conclusões e perspectivas futuras.

1.3 Contribuições Originais

As contribuições originais deste trabalho estão compiladas no capítulo 3, onde foi construída a matriz de covariância para uma dado estado e determinado o determinante de Schrodinger. O capítulo 4, trata de uma formulação funcional da mecânica quântica no espaço de configuração não-comutativo com ênfase em alguns aspectos cinemáticos dessa teoria usando a ideia de valor médio em estados coerentes. Nessa sessão, será construído o propagador Feynman para a partícula livre e, consequentemente, analisar aspectos não-comutativos, ou seja, qual a influência da não-comutatividade desse novo espaço sob resultados já conhecidos da mecânica quântica usual. Trataremos ainda de questões sobre unitariedade do propagador, evolução temporal e transformada de Fourier.

Capítulo 2

Aspectos Não-Comutativos no plano

Analogamente à Mecânica Quântica padrão, a M.Q.N.C. é formulada como um sistema quântico no espaço de Hilbert de operadores Hilbert-Schmidt agindo no espaço de configuração não-comutativo. Neste capítulo serão abordadas algumas consequências da não-comutatividade entre coordenadas, sobretudo na secção (2.1), no espaço de sistemas quânticos não-comutativos apenas em duas dimensões. Aqui, faremos uma analogia com as coordenadas em duas dimensões, x e y, que chamaremos de x_i e x_j no espaço de configuração não-comutativo. Apesar de apresentarmos uma visão geral de tal estrutura optamos por propor uma abordagem com a ideia de se trabalhar com posições médias em estados coerentes neste espaço, que discutiremos com mais detalhes no capítulo 4.

2.1 Aspectos Não-Comutativos no Plano

A estrutura matemática dessas teorias é um tanto quanto sofisticada, há muitos trabalhos sobre o assunto. Um formalismo elegante e rigoroso pode ser encontrado em[18], [15], [16], [27], por exemplo, estes dois últimos abordando unicidade e funcionalidade. Desde os primórdios da mecânica quântica, o emprego de operadores associados a observáveis físicos se tornou de grande ajuda na busca pelo entendimento das leis fundamentais da natureza. A predição de resultados experimentais adquiriu uma natureza probabilística de caráter fundamental, consistentemente com a relação de incerteza de Heisenberg, a qual impõe um limite essencial ao conhecimento dos estados dos observáveis físicos em questão. Neste contexto, estados deixam de ser descritos por pontos no espaço de fase e passam a ser descritos por regiões desse espaço de área mínima da ordem de $\hbar$. Essa relação de incerteza é modelada, em conjunto com a definição de valor esperado da medida de observáveis[1], pela imposição de que coordenada e seu momento canonicamente conjugado não comutam entre si, isto é,

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad , \qquad i, j = 1, 2.$$

Agora considere um espaço de configuração restrito a duas dimensões, onde as coordenadas x_i satisfazem à relação de comutação, segundo introduzido no cap. 1, eq. (1.1),

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta\epsilon_{ij} \quad , \qquad i, j = 1, 2. \tag{2.1}$$

onde $\theta \geq 0$ é um parâmetro real que mede a não-comutatividade entre as duas coordenadas e $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$ (onde $\theta = 0$ recupera a álgebra padrão de Heisenberg em que as componentes do operador posição comutam). Considerar a existência do parâmetro $\theta \neq 0$ significa introduzir pequenos desvios nos resultados teóricos que possuam boa concordância experimental e possibilitar assim, a resolução de algum problema. Algumas referências sobre aspectos gerais fenomenológicos podem ser vistas em [4], [17].

Afim de encontrar uma base para o espaço de configuração padrão, é conveniente definir os operadores de criação/aniquilação $\hat{b}$ e $\hat{b}^\dagger$ em favor dos operadores $\hat{x}_i$ que representam as coordenadas no espaço não-comutativo,

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\hat{x}_1 + i\hat{x}_2), \tag{2.2}$$

$$\hat{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\hat{x}_1 - i\hat{x}_2) \tag{2.3}$$

satisfazendo a álgebra de Fock[2],

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1. \tag{2.4}$$

Isso significa que o espaço de configuração padrão é isomórfico sobre o espaço de Fock, onde ao falar de espaço de configuração padrão, de acordo com[18] subentende-se o formalismo usual, ou seja, é feita uma analogia à álgebra de operadores do oscilador harmônico no espaço onde as coordenadas $\hat{x}_i$ comutam. Então, com essa ideia em mente, o espaço de Hilbert análogo ao espaço padrão é posto como

$$\mathcal{H}_p \cong \mathcal{F} \equiv span \left\{ |n\rangle = \frac{\left(\hat{b}^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \right\}_{n=0}^{n=\infty} \tag{2.5}$$

[1] Aqui o chapéu (^) significa operador

[2] V. A. Fock, físico russo.

onde o *span* é tomado sob todos os números complexos e onde $|0\rangle$ é o estado vácuo aniquilado por $\hat{b}$, ou seja, $\hat{b}|0\rangle = 0$. Assim, a forma (2.5) é o espaço de configuração padrão, $\mathcal{H}_p$. A essa altura devemos notar que, devido ao fato de que o parâmetro não-comutativo, θ (que se presume ser da ordem do quadrado do comprimento de onda de Planck), ser muito pequeno, os efeitos de não-comutatividade iriam se manifestar em escalas de comprimento muito curto. Então, vendo dessa forma, não é sensato falar a nível clássico, já que qualquer incerteza induzida pela não-comutatividade se manifestaria numa escala significativamente menor que as incertezas que são naturalmente inerentes às medidas clássicas.

Em seguida, o próximo passo é introduzir o equivalente do espaço de Hilbert de funções de quadrado integrável em que os estados físicos do novo sistema podem ser representados, em outras palavras, definir o espaço de estados quânticos, que chamaremos de espaço de Hilbert quântico, $\mathcal{H}_q$, e que é uma generalização do espaço L^2. Então, consideremos um conjunto de operadores Hilbert-Schmidt, $\mathcal{B}(\mathcal{H}_p)$, em $\mathcal{H}_p$, agindo no espaço de configuração não-comutativo, então $\mathcal{H}_q$ é um conjunto desses operadores tais que,

$$\mathcal{H}_q = \left\{\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) : \psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_p), \quad tr_p\left(\psi^\dagger(\hat{x}_1, \hat{x}_2)\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2)\right) < \infty\right\} \tag{2.6}$$

onde

$$tr_p\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2)|n\rangle \tag{2.7}$$

é o traço[24] sob $\mathcal{H}_p$.

Note que em analogia com a representação de Schrodinger[3], as funções de quadrado integrável de coordenadas de posição são substituídas por operadores de traço finito, que são funções de coordenadas de posição da forma (2.1). Os estados quânticos (operadores) do sistema são representados por elementos de $\mathcal{H}_q$. O produto interno associado a este espaço é

$$(\phi(\hat{x}_1, \hat{x}_2), \psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2)) = tr_p\left[\phi^\dagger(\hat{x}_1, \hat{x}_2)\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2)\right]. \tag{2.8}$$

Sobre a notação[18], os estados do espaço de configuração não-comutativo são dados por $|\cdot\rangle$, na notação de Dirac[4]. Os estados de $\mathcal{H}_q$ por outro lado são denotados por $\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \equiv |\psi)$, com seu dual $(\psi|$, que mapeia elementos de $\mathcal{H}_q$ nos números complexos por

$$(\phi|\psi) = (\phi, \psi) = tr_p(\phi^\dagger, \psi). \tag{2.9}$$

[3] E. Schrodinger, físico teórico austríaco, Nobel de Física em 1933.

[4] Paul A. M. Dirac, físico teórico britânico, Nobel de Física em 1933

Agora a álgebra de Heisenberg é substituída pela álgebra não-comutativa, que no plano temos:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{2.10}$$

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta\epsilon_{ij} \qquad i,j = 1,2 \tag{2.11}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \tag{2.12}$$

onde $\hat{x}_i$, $\hat{x}_j$, $\hat{p}_i$, $\hat{p}_j$ são todos hermitianos.

Em seguida o problema é achar uma representação unitária, em $\mathcal{H}_q$, da álgebra não-comutativa de Heisenberg (2.10), (2.11), (2.12). Primeiro, para fazer uma correspondência mais explícita sobre como o operador momento age na função de onda $\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, considere uma função qualquer $\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathcal{H}_q$, ela pode ser expandida como

$$\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{m,n}\hat{x}_1^m \hat{x}_2^n \quad , \qquad c_{m,n} \in \mathbb{C}. \tag{2.13}$$

Após ordenação adequada, veja mais detalhes no apêndice D, a ação do operador $\hat{P}_1$ neste estado, onde $i,j = 1,2$, é

$$\begin{aligned} \hat{P}_1\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\hat{x}_1}\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \\ &= \frac{\hbar}{\theta}(-i\theta)\sum_{m,n=0}^{\infty} c_{m,n} m \hat{x}_1^{m-1}\hat{x}_2^n \\ &= \frac{\hbar}{\theta}[\hat{x}_2, \psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2)] \end{aligned} \tag{2.14}$$

em que o mesmo pode ser feito para a ação do operador $\hat{P}_2$ na mesma função.

Então, usando letras maiúsculas para distinguir operador agindo no espaço de Hilbert quântico daquele operador que age no espaço de configuração não-comutativo e através de uma ordenação adequada conclui-se que uma representação de Schrodinger análoga à representação padrão pode ser posta da seguinte maneira:

$$\hat{X}_i\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_i\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2), \tag{2.15}$$

$$\hat{P}_i\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \frac{\hbar}{\theta}\epsilon_{ij}[\hat{x}_j, \psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2)] \tag{2.16}$$

onde $\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathcal{H}_q$. Ainda usando a notação de [18], reservamos a notação (†) para denotar conjugação hermitiana no espaço de configuração não comutativo e (‡) para conjugação hermitiana no espaço de Hilbert quântico. Sendo assim, podemos fazer uma combinação linear dos operadores de posição,

$$\hat{B} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\theta}}\left(\hat{X}_1 + i\hat{X}_2\right), \tag{2.17}$$

$$\hat{B}^{\ddagger} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \left(\hat{X}_1 - i\hat{X}_2 \right) \tag{2.18}$$

onde

$$\hat{B}\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{b}\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2), \tag{2.19}$$

$$\hat{B}^{\ddagger}\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{b}^{\dagger}\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \tag{2.20}$$

e também combinações lineares do operador momento,

$$\hat{P} \equiv \hat{P}_1 + i\hat{P}_2, \tag{2.21}$$

$$\hat{P}^{\ddagger} \equiv \hat{P}_1 - i\hat{P}_2 \tag{2.22}$$

em que

$$\hat{P}\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = -i\hbar\sqrt{\frac{2}{\theta}}[\hat{b}, \psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2)], \tag{2.23}$$

$$\hat{P}^{\ddagger}\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = i\hbar\sqrt{\frac{2}{\theta}}[\hat{b}^{\dagger}, \psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2)] \tag{2.24}$$

e onde $\hat{P}^2 = \hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 = \hat{P}^{\ddagger}\hat{P} = \hat{P}\hat{P}^{\ddagger}$. Podemos ver que de (2.21) e (2.22),

$$[\hat{P}, \hat{P}^{\ddagger}] = 0. \tag{2.25}$$

Já que o comutador das variáveis não-comutativas é diferentes de zero, (2.1), é impossível realizar simultaneamente medidas das posições x_1 e x_2 com boa precisão. O melhor que se pode fazer é construir um estado no espaço de configuração não-comutativo para o qual o produto das incertezas seja mínima. A noção de posição aqui é mantida de tal forma que uma partícula é localizada em torno de um certo ponto[18].

Em termos do espaço de configuração não-comutativo os estados de incerteza mínima na posição são representados pelos estados coerentes normalizados[3],

$$\begin{aligned} |z\rangle &= e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} e^{z\hat{b}^{\dagger}} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} z^n |n\rangle \end{aligned} \tag{2.26}$$

onde $z = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(x_1 + ix_2)$ é um número complexo adimensional, em que

$$\hat{b}|z\rangle = z|z\rangle, \tag{2.27}$$

$$\langle z|\hat{b}^{\dagger} = \langle z|\bar{z} \tag{2.28}$$

Assim, das definições (2.2) e (2.3) se obtém

$$\hat{x}_1 = \sqrt{\frac{\theta}{2}}(\hat{b}+\hat{b}^\dagger), \tag{2.29}$$

$$\hat{x}_2 = i\sqrt{\frac{\theta}{2}}(\hat{b}^\dagger-\hat{b}) \tag{2.30}$$

com isso as médias desses operadores são:

$$\langle\hat{x}_1\rangle = \sqrt{\frac{\theta}{2}}\langle z|(\hat{b}+\hat{b}^\dagger)|z\rangle = \sqrt{\frac{\theta}{2}}(z+\bar{z}), \tag{2.31}$$

$$\langle\hat{x}_2\rangle = i\sqrt{\frac{\theta}{2}}\langle z|(\hat{b}^\dagger-\hat{b})|z\rangle = i\sqrt{\frac{\theta}{2}}(\bar{z}-z) \tag{2.32}$$

e

$$\langle\hat{x}_1\rangle^2 = \frac{\theta}{2}\langle z|(\hat{b}+\hat{b}^\dagger)^2|z\rangle = \frac{\theta}{2}(z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}+1), \tag{2.33}$$

$$\langle\hat{x}_2\rangle^2 = -\frac{\theta}{2}\langle z|(\hat{b}^\dagger-\hat{b})^2|z\rangle = -\frac{\theta}{2}(z^2+\bar{z}^2-2z\bar{z}-1). \tag{2.34}$$

Com isso,

$$(\Delta\hat{x}_1)^2 = \langle\hat{x}_1^2\rangle-\langle\hat{x}_1\rangle^2 = \frac{\theta}{2}, \tag{2.35}$$

$$(\Delta\hat{x}_2)^2 = \langle\hat{x}_2^2\rangle-\langle\hat{x}_2\rangle^2 = \frac{\theta}{2} \tag{2.36}$$

onde implica na relação de incerteza saturada:

$$(\Delta\hat{x}_1)(\Delta\hat{x}_2) = \frac{\theta}{2}, \tag{2.37}$$

ou seja, esses estados coerentes (2.26) exibem incerteza mínima para os valores associados aos operadores $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$.

Esses estados do espaço de Hilbert quântico, $|\psi)$, são formados pelo produto externo de dois estados coerentes da forma (2.26):

$$|\psi) = |z\rangle\langle z| \tag{2.38}$$

que são normalizados em relação ao produto interno (2.8), logo são operadores Hilbert-Schmidt. Entretanto, podemos notar a sua não-ortogonalidade,

$$\begin{aligned}(z_1|z_2) &= tr_c\left[(|z_1\rangle\langle z_1|)^\ddagger(|z_2\rangle\langle z_2|)\right] \\ &= |e^{-\frac{z_1\bar{z}_1}{2}-\frac{z_2\bar{z}_2}{2}+z_2\bar{z}_1}|^2 = e^{-|z_1-z_2|^2}\end{aligned} \tag{2.39}$$

onde z_1 e z_2 são adimensionais, e a gaussiana se tornará uma função delta de Dirac no limite comutativo $\theta \longrightarrow 0$. Os estados (2.38) também tem a propriedade de que,

$$\begin{aligned}
\hat{B}|\psi) &= \hat{b}|z\rangle\langle z| = e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}[\hat{b}, e^{z\hat{b}^\dagger}]|0\rangle\langle z| \\
&= ze^{-\frac{z\bar{z}}{2}}e^{z\hat{b}^\dagger}|0\rangle\langle z| \\
&= z|\psi), \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

ou seja, o operador $\hat{B}$, definido em termos dos operadores $\hat{X}_1$ e $\hat{X}_2$, quando aplicado ao estado $|\psi)$ que pertence ao espaço de Hilbert quântico, nos fornece o valor z, onde $z = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(x_1 + ix_2)$.

Dessa forma pode-se realizar novos cálculos das médias como foi feito anteriormente para obter uma relação como (2.37) . Resolvendo para $\hat{X}_1$ e $\hat{X}_2$ em (2.17) e (2.18), ou seja,

$$\hat{X}_1 = \sqrt{\frac{\theta}{2}}(\hat{B} + \hat{B}^\ddagger), \qquad (2.41)$$

$$\hat{X}_2 = i\sqrt{\frac{\theta}{2}}(\hat{B}^\ddagger - \hat{B}). \qquad (2.42)$$

Com isso as médias desses operadores tomadas em relação aos estados modificados do espaço de Hilbert quântico são:

$$\langle \hat{X}_1 \rangle_{|\psi)} = \sqrt{\frac{\theta}{2}}(z|(\hat{B} + \hat{B}^\dagger)|z) = \sqrt{\frac{\theta}{2}}(z + \bar{z}), \qquad (2.43)$$

$$\langle \hat{X}_2 \rangle_{|\psi)} = i\sqrt{\frac{\theta}{2}}(z|(\hat{B}^\dagger - \hat{B})|z) = i\sqrt{\frac{\theta}{2}}(\bar{z} - z) \qquad (2.44)$$

e

$$\langle \hat{X}_1 \rangle^2_{|\psi)} = \frac{\theta}{2}(z|(\hat{B} + \hat{B}^\dagger)^2|z) = \frac{\theta}{2}(z^2 + \bar{z}^2 + 2z\bar{z} + 1), \qquad (2.45)$$

$$\langle \hat{X}_2 \rangle^2_{|\psi)} = -\frac{\theta}{2}(z|(\hat{B}^\dagger - \hat{B})^2|z) = -\frac{\theta}{2}(z^2 + \bar{z}^2 - 2z\bar{z} - 1) \qquad (2.46)$$

com isso,

$$(\Delta \hat{X}_1)^2_{|\psi)} = \langle \hat{X}_1^2 \rangle_{|\psi)} - \langle \hat{X}_1 \rangle^2_{|\psi)} = \frac{\theta}{2}, \qquad (2.47)$$

$$(\Delta \hat{X}_2)^2_{|\psi)} = \langle \hat{X}_2^2 \rangle_{|\psi)} - \langle \hat{X}_2 \rangle^2_{|\psi)} = \frac{\theta}{2} \qquad (2.48)$$

onde implica na relação de incerteza saturada:

$$(\Delta \hat{X}_1)(\Delta \hat{X}_2) = \frac{\theta}{2}. \qquad (2.49)$$

Portanto, os estados $|\psi)$ são *estados de incerteza mínima na posição* no espaço de Hilbert quântico. Isso implica que esses estados são os análogos dos auto-estados de posição em $\mathcal{H}_q$, já que eles saturam as relações de incerteza (1.2).

2.2 Evolução Temporal e Produto estrela

Em mecânica quântica convencional a evolução temporal de um sistema, ou seja, sua dinâmica quântica é dada pela equação de evolução de Schrodinger,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x_1,x_2,t)=\mathbf{H}\psi(x_1,x_2,t), \tag{2.50}$$

em que, aqui os operadores que representam as posições x_1 e x_2, comutam entre si. Esta é a equação fundamental de movimento que determina como estados evoluem no tempo, onde o hamiltoniano $\mathbf{H}$ é, em uma dimensão,

$$\mathbf{H}=\frac{p^2}{2m}+\mathbf{V}(x_1,x_2). \tag{2.51}$$

Mas, em mecânica quântica não-comutativa, o hamiltoniano é posto em termos dos operadores que representam as coordenadas, $x_i, i=1,2,\cdots,N$ do espaço de configuração não-comutativo e pelos momentos conjugados a essas coordenadas, $p_j, j=1,2,\cdots,N$. Entretanto, tais coordenadas já não mais comutam obedecendo às regras de comutação (2.10)-(2.12), ou seja, a relação entre coordenadas e momento continuam não comutando mas agora a diferença é que a relação entre coordenadas não comutam entre si. Então o novo hamiltoniano fica na forma, em duas dimensões,

$$\mathbf{H}(\hat{x},\hat{p})=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{x}_1,\hat{x}_2). \tag{2.52}$$

Substituindo essa (2.52) em (2.50) ficamos com,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\hat{x}_1,\hat{x}_2,t)=\frac{\hat{p}^2}{2m}\psi(\hat{x}_1,\hat{x}_2,t)+V(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\star\psi(\hat{x}_1,\hat{x}_2,t) \tag{2.53}$$

em que $\psi(\hat{x}_1,\hat{x}_2,t)$ é a função de onda no espaço não-comutativo e o produto convencional é substituído pelo símbolo $(\star)$ que denota o produto Grönewold-Moyal, cuja expansão geral para duas funções, $f(x)$ e $g(x)$ pertencente ao espaço não-comutativo[23] é

$$\begin{aligned}
f(x)\star g(x) &= \int\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{d^Dk'}{(2\pi)^D}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k'-k)e^{-\frac{i}{2}\theta_{ij}k_ik'_j}e^{ik'_ix_i}\\
&= f(x)e^{\frac{i}{2}\partial_i\theta_{ij}\partial_j}g(x)\\
&= f(x)g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\theta_{i_1j_1}\cdots\theta_{i_nj_n}\partial_{i_1}\cdots\partial_{j_n}f(x)\partial_{i_1}\cdots\partial_{j_n}g(x)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

onde a primeira derivada parcial na exponencial da segunda passagem de (2.54) age em $f(x)$ pela esquerda e a segunda derivada parcial age em $g(x)$ pela direita. De forma que, para $\theta = 0$, o produto estrela se reduz ao produto padrão. O termo $e^{-\frac{i}{2}\theta_{ij}k_i k'_j}$ da expansão acima aparece devido ao efeito não-comutativo das coordenadas com produto estrela entre as gaussianas, que será discutido com mais detalhes no cap. 4. Então, nesse sentido, temos uma realização da álgebra (2.10)-(2.12) que pode ser vista como a representação[20], [16],

$$\hat{x}_i \equiv \tilde{x}_i - \frac{\theta}{2\hbar}\epsilon_{ij}\tilde{p}_j \tag{2.55}$$

$$\hat{p}_i \equiv \tilde{p}_j \tag{2.56}$$

onde os $\tilde{x}_i$ e $\tilde{p}_j$ obedecem às regras de comutação padrão. Logo, o hamiltoniano (2.52) toma a forma

$$H(\tilde{x}_i - \frac{\theta}{2\hbar}\epsilon_{ij}\tilde{p}_j, \tilde{p}_i) = \frac{\tilde{p}_i\tilde{p}_i}{2m} + V(\tilde{x}_i - \frac{\theta}{2\hbar}\epsilon_{ij}\tilde{p}_j) \equiv H_\theta(\tilde{x}_i, \tilde{p}_i) \tag{2.57}$$

em que o produto estrela aparecendo em (2.53) entre o potencial e função de onda pode ser visto da seguinte maneira, segundo a expansão vista anteriormente,

$$\begin{aligned} V(\hat{x}) \star \psi(\hat{x}, t) &\equiv V(\hat{x}) \left[e^{-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}\theta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}} \right] \psi(\hat{x}, t) \\ &= V(\hat{x})\psi(\hat{x}, t) + \frac{1}{2}\theta_{ij}\partial_i V(\hat{x})\partial_j\psi(\hat{x}, t) + \cdots \\ &= V\left(x_i + \frac{i\theta}{2}\epsilon_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\psi(\hat{x}, t) \end{aligned} \tag{2.58}$$

calculado até primeira ordem no parâmetro θ. Em particular, note que o produto estrela não afeta o hamiltoniano da partícula livre pois não há interação entre coordenadas da parte do potencial, possuindo apenas informação do momento linear, logo a evolução acontece como na mecânica quântica padrão, pois nessa realização, as componentes do operador momento, comutam entre si.

2.3 Conservação da Probabilidade em M.Q.N.C.

Por causa da interpretação estatística da função de onda, em geral a probabilidade desempenha um papel importante na mecânica quântica. Podemos dizer que $|\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, t)|^2$ é a densidade se probabilidade, $\rho = \psi^\dagger(\hat{x}_1, \hat{x}_2, t)\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, t)$, para encontrar a partícula na posição $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ no tempo t. Mas note que a integral de ρ deve ser 1 em todo o espaço (a partícula tem que estar em algum lugar). Em mecânica quântica padrão, os estados fisicamente aceitáveis correspondem às soluções de *quadrado-integrável* para a equação de Schrodinger. Em mecânica Quântica comutativa a integral mencionada deve ser constate no tempo, ou seja, a função de onda permanece normalizada à medida que evolui.

Com essa ideia em mente, vamos ver o que acontece com a norma dos novos estado $|\psi)$. Como foi visto anteriormente, essas novas funções de onda, análogas às funções de quadrado integrável da mecânica quântica padrão, são funções tais que possuem traço finito equação (2.6). O objetivo aqui é mostrar que o traço, tomado sobra o espaço de configuração não comutativo, dessas novas funções não muda com o tempo. Então, dado um hamiltoniano

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \tag{2.59}$$

onde assumimos que o potencial $V(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, visto como um operador agindo no espaço de configuração não-comutativo, seja hermitiano, ou seja, $V^\dagger(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = V(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ (o equivalente a exigir que o potencial seja real em mecânica quântica comutativa). Assim, a evolução temporal de Schrodinger para um dado estado é:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, t)}{\partial t} = H \star \psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, t). \tag{2.60}$$

Analogamente ao caso comutativo, se multiplicarmos a equação anterior por $\psi^\dagger(\hat{x}_1, \hat{x}_2, t)$ pela esquerda e o conjugado hermitiano de (2.60) por $\psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, t)$ pela direita, temos

$$i\hbar \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi^\dagger \left\{ \frac{\hbar^2}{2m\theta^2} \left([\hat{x}_2, [\hat{x}_2, \psi]] + [\hat{x}_1, [\hat{x}_1, \psi]] \right) + V(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \star \psi \right\} \tag{2.61}$$

e

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi = \left\{ \frac{\hbar^2}{2m\theta^2} \left([\hat{x}_2, [\hat{x}_2, \psi^\dagger]] + [\hat{x}_1, [\hat{x}_1, \psi^\dagger]] \right) + \psi^\dagger \star V(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \right\} \psi \tag{2.62}$$

agora subtraindo (2.61) de (2.62):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger \psi) &= \frac{\hbar^2}{2m\theta^2} \left\{ \psi^\dagger \left([\hat{x}_2, [\hat{x}_2, \psi]] + [\hat{x}_1, [\hat{x}_1, \psi]] \right) \right\} - \\ &- \frac{\hbar^2}{2m\theta^2} \left\{ \left([\hat{x}_2, [\hat{x}_2, \psi^\dagger]] + [\hat{x}_1, [\hat{x}_1, \psi^\dagger]] \right) \right\}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Agora, usando as identidade de comutadores: [A, BC] = [A, B]C + B[A, C], podemos organizar os comutadores da seguinte maneira,

$$[\hat{x}_1, \psi^\dagger [\hat{x}_1, \psi]] = \psi^\dagger [\hat{x}_1, [\hat{x}_1, \psi]] + [\hat{x}_1, \psi^\dagger][\hat{x}_1, \psi] \tag{2.64}$$

e

$$[\hat{x}_1, [\hat{x}_1, \psi^\dagger]\psi] = [\hat{x}_1, [\hat{x}_1, \psi^\dagger]]\psi + [\hat{x}_1, \psi^\dagger][\hat{x}_1, \psi]. \tag{2.65}$$

Isolando o primeiro termo após a igualdade de cada equação acima:

$$\psi^\dagger[\hat{x}_1, [\hat{x}_1, \psi]] = [\hat{x}_1, \psi^\dagger[\hat{x}_1, \psi]] - [\hat{x}_1, \psi^\dagger][\hat{x}_1, \psi] \tag{2.66}$$

e também

$$[\hat{x}_1, [\hat{x}_1, \psi^\dagger]]\psi = [\hat{x}_1, [\hat{x}_1, \psi^\dagger]\psi] - [\hat{x}_1, \psi^\dagger][\hat{x}_1, \psi]. \tag{2.67}$$

O mesmo pode ser feito para os comutadores envolvendo $\hat{x}_2$ e a função ψ. E ao substituir essas relações em (2.63), obteremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) &= \frac{\hbar^2}{2m\theta^2}\left\{[\hat{x}_2, \psi^\dagger[\hat{x}_2, \psi]] - [\hat{x}_2, \psi^\dagger][\hat{x}_2, \psi] + [\hat{x}_1, \psi^\dagger[\hat{x}_1, \psi]] - [\hat{x}_1, \psi^\dagger][\hat{x}_1, \psi]\right\} - \\
&- \frac{\hbar^2}{2m\theta^2}\left\{[\hat{x}_2, [\hat{x}_2, \psi^\dagger]\psi] - [\hat{x}_2, \psi^\dagger][\hat{x}_2, \psi] + [\hat{x}_1, [\hat{x}_1, \psi^\dagger]\psi] - [\hat{x}_1, \psi^\dagger][\hat{x}_1, \psi]\right\} \\
&= \frac{\hbar^2}{2m\theta^2}\left\{[\hat{x}_2, \psi^\dagger[\hat{x}_2, \psi]] - [\hat{x}_2, [\hat{x}_2, \psi^\dagger]\psi] + [\hat{x}_1, \psi^\dagger[\hat{x}_1, \psi]] - [\hat{x}_1, [\hat{x}_1, \psi^\dagger]\psi]\right\}.
\end{aligned}$$

E se fizermos a diferença entre os comutadores obteremos

$$\begin{aligned}
[\hat{x}_2, \psi^\dagger[\hat{x}_2, \psi]] - [\hat{x}_2, [\hat{x}_2, \psi^\dagger]\psi] &= \hat{x}_2\psi^\dagger[\hat{x}_2, \psi] - \psi^\dagger[\hat{x}_2, \psi]\hat{x}_2 - \hat{x}_2[\hat{x}_2, \psi^\dagger]\psi + [\hat{x}_2, \psi^\dagger]\psi\hat{x}_2 \\
&= \hat{x}_2\left(\psi^\dagger[\hat{x}_2, \psi] - [\hat{x}_2, \psi^\dagger]\psi\right) - \left(\psi^\dagger[\hat{x}_2, \psi] - [\hat{x}_2, \psi^\dagger]\psi\right)\hat{x}_2
\end{aligned}$$

e com isso pode-se definir a quantidade

$$j_1 \equiv \frac{\hbar^2}{2m\theta^2}\left(\psi^\dagger[\hat{x}_2, \psi] - [\hat{x}_2, \psi^\dagger]\psi\right). \tag{2.68}$$

Assim,

$$[\hat{x}_2, \psi^\dagger[\hat{x}_2, \psi]] - [\hat{x}_2, [\hat{x}_2, \psi^\dagger]\psi] = [\hat{x}_2, j_1]. \tag{2.69}$$

O mesmo pode ser feito com os comutadores que envolvem $\hat{x}_1$ e ψ obtendo

$$[\hat{x}_1, \psi^\dagger[\hat{x}_1, \psi]] - [\hat{x}_1, [\hat{x}_1, \psi^\dagger]\psi] = [\hat{x}_1, j_2] \tag{2.70}$$

onde

$$j_2 \equiv \frac{\hbar^2}{2m\theta^2}\left(\psi^\dagger[\hat{x}_1, \psi] - [\hat{x}_1, \psi^\dagger]\psi\right). \tag{2.71}$$

Daí ficamos com:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = [\hat{x}_2, j_1] + [\hat{x}_1, j_2] \tag{2.72}$$

em que $\rho \equiv \psi^\dagger\psi$. O resultado anterior é o análogo da equação da continuidade ou fluxo de probabilidade da mecânica quântica padrão, mas agora, relacionando comutadores envolvendo a função no espaço de configuração não-comutativo e as coordenadas não-comutativas das quais tal função dependa. Tomando o traço de (2.72) sobre o espaço de configuração não-comutativo, o lado direito desaparece, pois podemos tomar permutações cíclicas com um traço sem alterar seu valor. Portanto,

$$tr_c\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}tr_c(\rho) = \frac{\partial}{\partial t}(\psi|\psi) = 0 \tag{2.73}$$

Logo, concluímos que a função de onda permanece normalizada à medida que evolui.

Capítulo 3

Minimização das Relações de Incerteza Usando Coordenadas Não-Comutativas

Por volta de 1927 Heisenberg estabeleceu seu princípio de incerteza, afirmando que quando realizamos uma medida das variáveis conjugadas de um dado objeto a maior precisão na medida de uma das variáveis acarreta menor precisão na medida da outra[26], ou seja, $\Delta\tilde{x}\Delta\tilde{p} \propto h$ da mecânica quântica padrão, onde h é a constante de Planck. Tal relação mostra limitações na possibilidade de atribuir, simultaneamente, valores numéricos para duas variáveis que não-comutam, onde esses observáveis fornecem uma ideia de como devem ser incompatíveis. Neste capítulo discutiremos as relações de incerteza na Mecânica Quântica usando representação de coordenadas não-comutativas[20] no plano em que as coordenadas x_1 e x_2 estão relacionadas a x e y, por exemplo.

3.1 Princípio de Incerteza e Estados Coerentes

Aqui, faremos uma breve revisão das definições dos princípios de incerteza entre dois observáveis $\hat{A}$ e $\hat{B}$, sujeitos à regra de comutação

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}, \tag{3.1}$$

onde a incerteza desses operadores é posta como

$$(\Delta\hat{A}) = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_\psi I, \quad (\Delta\hat{B}) = \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle_\psi I, \tag{3.2}$$

onde a média é tomada em relação ao vetor normalizado $|\psi\rangle$. Então, dessas definições temos

$$(\Delta\hat{A})^2_\psi = \langle\psi|(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_\psi I)^2|\psi\rangle, \tag{3.3}$$

$$(\Delta\hat{B})^2_\psi = \langle\psi|(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle_\psi I)^2|\psi\rangle. \tag{3.4}$$

Então, definindo para qualquer estado $|\psi\rangle$:

$$|\chi\rangle = (\Delta\hat{A})|\psi\rangle = (\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_\psi I)|\psi\rangle, \tag{3.5}$$

$$|\phi\rangle = (\Delta\hat{B})|\psi\rangle = (\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle_\psi I)|\psi\rangle. \tag{3.6}$$

Pode-se usar a desigualdade de Schwartz para os estados $|\chi\rangle$ e $|\phi\rangle$,

$$\langle\chi|\chi\rangle\langle\phi|\phi\rangle \geq |\langle\chi|\phi\rangle|^2. \tag{3.7}$$

Se os operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são hermitianos, então $\Delta\hat{A}$ e $\Delta\hat{B}$ também devem ser, ou seja, $\Delta\hat{A}^\dagger = \Delta\hat{A}^\dagger$ e $\Delta\hat{B}^\dagger = \Delta\hat{B}^\dagger$. Com isso,

$$\langle\chi|\chi\rangle = \langle\psi|(\Delta\hat{A})^2|\psi\rangle, \tag{3.8}$$

$$\langle\phi|\phi\rangle = \langle\psi|(\Delta\hat{B})^2|\psi\rangle, \tag{3.9}$$

e

$$\langle\chi|\phi\rangle = \langle\psi|(\Delta\hat{A})(\Delta\hat{B})|\psi\rangle. \tag{3.10}$$

Agora, aplicando a relação (3.7):

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq |\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle|^2. \tag{3.11}$$

Note que no último termo, $\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}$ pode ser escrito como

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} = \frac{1}{2}[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] + \frac{1}{2}\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}.$$

O comutador é anti-hermitiano e o anti-comutador é hermitiano, assim,

$$|\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}\rangle|^2$$

onde o primeiro termo é imaginário puro e o segundo é real positivo. Então pode ser colocado como

$$|\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle|^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|^2 \tag{3.12}$$

em que foi usado o fato de $[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}]$. Com isso, a relação (3.11) se reduz a

$$(\Delta\hat{A})_\psi(\Delta\hat{B})_\psi \geq \frac{1}{2}|\langle\hat{C}\rangle_\psi| \tag{3.13}$$

levado em conta (3.1) e o fato de a notação $(\Delta\hat{A})_\psi$ significa média tomada no estado $|\psi\rangle$. A relação (3.13), é chamada de *princípio de incerteza generalizado* de Heisenberg na mecânica quântica padrão.

A desigualdade anterior é saturada, ou seja, atinge a igualdade, se e somente se obedece à relação:

$$(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_\psi I)|\psi\rangle = -i\gamma(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle_\psi I)|\psi\rangle, \qquad \gamma \in \Re. \tag{3.14}$$

Agindo com a quantidade $\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_\psi I$ em ambos os lados da equação (3.14), e usando a relação de comutação (3.1) temos que

$$\begin{aligned}(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_\psi I)^2|\psi\rangle &= -i\gamma[\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\langle\hat{B}\rangle_\psi I - \langle\hat{A}\rangle_\psi I\hat{B} + \langle\hat{A}\rangle_\psi\langle\hat{B}\rangle_\psi I]|\psi\rangle + \gamma\hat{C}|\psi\rangle \\ &= -i\gamma[(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle_\psi I)(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_\psi I)]|\psi\rangle \end{aligned} \tag{3.15}$$

e usando novamente (3.14), se obtém

$$(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_\psi I)^2|\psi\rangle = -\gamma^2(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle_\psi I)^2|\psi\rangle + \gamma\hat{C}|\psi\rangle \tag{3.16}$$

e, multiplicando por $\langle\psi|$ à esquerda, obtemos

$$(\Delta\hat{A})^2_\psi + \gamma^2(\Delta\hat{B})^2_\psi = \gamma\langle\hat{C}\rangle_\psi. \tag{3.17}$$

Agora, tomando a equação (3.17) junto com a forma saturada de (3.13) se obtém, $(\gamma \neq 0)$,

$$(\Delta\hat{A})^2_\psi = \frac{\gamma}{2}\langle\hat{C}\rangle_\psi, \qquad (\Delta\hat{B})^2_\psi = \frac{1}{2\gamma}\langle\hat{C}\rangle_\psi. \tag{3.18}$$

Aplicando isso à álgebra de Heisenberg para as variáveis canônicas $\tilde{x}$ e $\tilde{p}$, $[\tilde{x}, \tilde{p}] = i\hbar$, em que aqui o símbolo tilde $(\tilde{x}, \tilde{p})$ se refere a operadores da mecânica quântica usual, ficamos com a relação de incerteza

$$(\Delta\tilde{x})(\Delta\tilde{p}) \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{3.19}$$

Dessa forma (3.19) é saturada se, e somente se,

$$(\tilde{x} - \alpha)|\psi\rangle = -i\gamma(\tilde{p} - \beta)|\psi\rangle \tag{3.20}$$

onde $\alpha \equiv \langle\tilde{x}\rangle_\psi I$ e $\beta \equiv \langle\tilde{p}\rangle_\psi I$.

Dessa maneira podemos definir os operadores criação e aniquilação, com a frequência angular e massa, análogos aos do oscilador harmônico, unitários, ($\omega = 1s^{-1}, m = 1kg,$), como:

$$\tilde{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\tilde{x} + i\tilde{p}), \tag{3.21}$$

$$\tilde{a}^{\dagger} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\tilde{x} - i\tilde{p}) \tag{3.22}$$

com a regra de comutação $[\tilde{a}, \tilde{a}^{\dagger}] = 1$. E o espaço de Hilbert é gerado pela base de vetores

$$\mathcal{H} = span\left\{|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\tilde{a}^{\dagger})^n|0\rangle\right\}_{n=0}^{n=\infty} \tag{3.23}$$

em que os vetores $|n\rangle$ são os auto estados do oscilador harmônico.

A fim de encontrarmos a solução geral de (3.20), impomos que $\gamma > 0$, pois com $\gamma = 0$, $(\tilde{x} - \alpha)$ não pode ter auto-estado normalizado. No primeiro caso, para $\gamma = 1$, (3.20) pode ser escrita como,

$$\tilde{a}|\psi\rangle = z|\psi\rangle, \qquad z = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\alpha + i\beta). \tag{3.24}$$

Os auto-estados do operador aniquilação são chamados *estados coerentes*[3]. O vácuo é o estado coerente correspondente a $z = 0$. Podemos obter outros estados coerentes através do operador unitário,

$$U(z) \equiv e^{z\tilde{a}^{\dagger} - \bar{z}\tilde{a}} = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}e^{z\tilde{a}^{\dagger}}e^{-\bar{z}\tilde{a}}, \quad z \in \mathbb{C} \tag{3.25}$$

e, usando o lema de Baker-Hausdorff[25],

$$U^{\dagger}(z)\tilde{a}U(z) = \tilde{a} + zI. \tag{3.26}$$

Dessa forma, outros estados coerentes são gerados pela ação de tal operador unitário no estado de vácuo da seguinte maneira,

$$|z\rangle \equiv U(z)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}e^{z\tilde{a}^{\dagger}}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{3.27}$$

Agora, considere o caso em que $\gamma \neq 1$ e obviamente $\gamma \neq 0$. Assim, a equação (3.20) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\tilde{x}|\psi\rangle + i\gamma\tilde{p}|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle + i\beta\gamma|\psi\rangle$$

e reorganizando os termos e multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ se obtém

$$\tilde{a}_{\gamma}|\psi\rangle = z|\psi\rangle \tag{3.28}$$

onde definimos

$$z \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} + i\beta\sqrt{\gamma}\right) \tag{3.29}$$

e

$$\tilde{a}_\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{\gamma}} + i\sqrt{\gamma}\tilde{p}\right), \tag{3.30}$$

$$\tilde{a}^\dagger_\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{\gamma}} - i\sqrt{\gamma}\tilde{p}\right) \tag{3.31}$$

Esses novos operadores satisfazem à regra de comutação $[\tilde{a}_\gamma, \tilde{a}^\dagger_\gamma] = 1$, com $\tilde{a}_{\gamma=1} = \tilde{a}$.

Soluções para a equação (3.28) podem ser obtidas através dos operadores $\tilde{a}_\gamma$ e $\tilde{a}^\dagger_\gamma$ e o vácuo $|0\rangle_\gamma$. Podemos verificar que, para o operador unitário, definido da forma:

$$V(\gamma) \equiv e^{-\frac{1}{4}\ln\gamma[\tilde{a}^2 - (\tilde{a}^\dagger)^2]}, \tag{3.32}$$

valendo as seguintes relações,

$$V(\gamma)\tilde{a}V^\dagger(\gamma) = \tilde{a}_\gamma,$$

$$V(\gamma)\tilde{a}^\dagger V^\dagger(\gamma) = \tilde{a}^\dagger_\gamma.$$

Então podemos formar soluções para (3.14) da seguinte forma

$$|z,\gamma\rangle = e^{-\frac{1}{4}\ln\gamma[\tilde{a}^2 - (\tilde{a}^\dagger)^2]} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{z\tilde{a}^\dagger}|0\rangle. \tag{3.33}$$

O parâmetro complexo z está relacionado aos valores médios de $\tilde{x}$ e $\tilde{p}$, enquanto γ descreve suas dispersões:

$$(\Delta\tilde{x})^2 = \frac{\gamma\hbar}{2}, \tag{3.34}$$

$$(\Delta\tilde{p})^2 = \frac{\hbar}{2\gamma}. \tag{3.35}$$

Os procedimentos abordados nesta sessão podem ser aplicados também à relação de incerteza entre coordenadas que não comutam $(\Delta\hat{x}_1)^2 = \frac{\gamma\theta}{2}$ e $(\Delta\hat{x}_2)^2 = \frac{\theta}{2\gamma}$ cujo parâmetro θ mede a não-comutatividade entre elas e cuja discussão se estenderá em seguida.

3.2 O Problema e a Representação da Álgebra Básica

Existem fortes indicações vindas, por exemplo, do estudo de teoria de cordas, que espaços não-comutativos sejam de grande importância para a física de altas energias[6]. Problemas relacionados à Teoria Quântica de Campos(TQC) no espaço não-comutativo, poderiam ser simplificados[14], por exemplo, a presença do tensor constante θ_{ij} implica na violação da simetria de Larentz. No entanto Connes et al. [1], provaram que ela surge como um limite definido da teoria de cordas quando na presença de um campo magnético de fundo. Considerando o limite de baixas energias em TQC, no espaço não-comutativo entramos no setor da mecânica quântica não-comutativa. Em particular, consideraremos o movimento de uma partícula livre nos limitando apenas ao plano onde as coordenadas não comutam[20] definidas pelas regras de comutação,

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta\epsilon_{ij}I, \tag{3.36}$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}I, \qquad i, j = 1, 2 \tag{3.37}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \tag{3.38}$$

com $\theta > 0$, levando às relações de incerteza:

$$(\Delta\hat{x}_1)(\Delta\hat{p}_1) \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{3.39}$$

$$(\Delta\hat{x}_2)(\Delta\hat{p}_2) \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{3.40}$$

$$(\Delta\hat{x}_1)(\Delta\hat{x}_2) \geq \frac{\theta}{2}. \tag{3.41}$$

Em particular, estaremos interessados na busca de um estado que sature simultaneamente as relações postas anteriormente, como no caso comutativo, ($\theta = 0$), ou seja, queremos que tenhamos o mínimo de incerteza na medição dos operadores envolvidos nessas relações. Com a substituição da álgebra básica posta da seguinte maneira,

$$\tilde{x}_i \equiv \hat{x}_i + \frac{\theta}{2\hbar}\epsilon_{ij}\hat{p}_j, \tag{3.42}$$

$$\tilde{p}_i \equiv \hat{p}_i \tag{3.43}$$

pode ser visto que elas preservam as regras de comutação de Heisenberg-Weyl postas anteriormente. Como o parâmetro que mede a não comutatividade do espaço é da ordem de comprimento quadrado, a relação (3.42) é satisfeita dimensionalmente[1]. Aqui, as coordenadas comutativas, $\tilde{x}_i$, estão em função das coordenadas no plano não-comutativas, $\hat{x}_i$. Agora, substituindo essa nova representação nos operadores da mecânica quântica convencional, as relações (3.21) e (3.22) em termos das coordenadas comutativas, $\tilde{x}_i$, onde $(\omega = 1s^{-1}, m = 1kg)$, são a frequência angular e a massa, respectivamente,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\tilde{x}_i + i\tilde{p}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\hat{x}_i + \frac{\theta}{2\hbar}\epsilon_{ij}\hat{p}_j + i\hat{p}_i\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left[\hat{x}_i + \left(i\delta_{ij} + \frac{\theta}{2\hbar}\epsilon_{ij}\right)\hat{p}_j\right] \end{aligned} \tag{3.44}$$

e seu conjugado hermitiano,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i^\dagger &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\tilde{x}_i - i\tilde{p}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\hat{x}_i + \frac{\theta}{2\hbar}\epsilon_{ij}\hat{p}_j - i\hat{p}_i\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left[\hat{x}_i + \left(-i\delta_{ij} + \frac{\theta}{2\hbar}\epsilon_{ij}\right)\hat{p}_j\right], \end{aligned} \tag{3.45}$$

levando à regra de comutação,

$$[\tilde{a}_i, \tilde{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}. \tag{3.46}$$

Os vetores ortonormais no espaço de Fock são gerados por,

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!}}\frac{1}{\sqrt{n_2!}}(\tilde{a}_1^\dagger)^{n_1}(\tilde{a}_2^\dagger)^{n_2}|0\rangle. \tag{3.47}$$

As relações inversas de (3.44) e (3.45) são:

$$\hat{x}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\tilde{a}_i + \tilde{a}_i^\dagger) + \frac{i\theta}{2\sqrt{2\hbar}}\epsilon_{ij}(\tilde{a}_j - \tilde{a}_j^\dagger) \tag{3.48}$$

e

$$\hat{p}_i = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\tilde{a}_i - \tilde{a}_i^\dagger). \tag{3.49}$$

Note que, apenas o operador $\hat{x}_i$ depende explicitamente do parâmetro não-comutativo e no limite $\theta \to 0$, recai exatamente na forma convencional substituindo as variáveis

[1]As grandezas $\tilde{x}, \hat{x}$ têm dimensão $[L]$, o momento $\tilde{p}, \hat{p}$, $[ML/T]$, o parâmetro θ $[L^2]$, e a constante reduzida de Planck $\hbar$, $[ML^2/T]$. Portanto, uma análise dimensional da relação (3.42),

$$[L] \to [L] + a\frac{[L^2]}{[ML^2/T]} \cdot [ML/T]$$

$$[L] \to [L] + a[L],$$

mostra uma consistência dimensional linear, onde a é uma constante.

chapéu pelas variáveis til ($\hat{x}_i \to \tilde{x}_i$). É sempre conveniente se trabalhar com os operadores criação/aniquilação modificados. Assim, podemos definir os operadores:

$$\hat{a}_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{a}_1 \mp i\tilde{a}_2), \tag{3.50}$$

$$\hat{a}^\dagger_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{a}^\dagger_1 \pm i\tilde{a}^\dagger_2). \tag{3.51}$$

Com isso a nova base fica da forma, onde $[\hat{a}_+, \hat{a}^\dagger_+] = [\hat{a}_-, \hat{a}^\dagger_-] = 1$,

$$|n_+, n_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_+!}}\frac{1}{\sqrt{n_-!}}(\hat{a}^\dagger_+)^{n_+}(\hat{a}^\dagger_-)^{n_-}|0\rangle. \tag{3.52}$$

A essa altura podemos interpretar este resultado como sendo dois osciladores harmônicos simples totalmente independentes, ou seja, $[\hat{a}_+, \hat{a}^\dagger_-] = [\hat{a}_-, \hat{a}^\dagger_+] = 0$, sendo um do tipo $\hat{a}_+$, e outro do tipo $\hat{a}_-$. Note que o momento angular em termos das variáveis comutativas é posto da seguinte forma, $\tilde{L} = \epsilon_{ij}\tilde{x}_i\tilde{p}_j$. Substituindo a transformação de (3.42) e (3.43), ficamos com,

$$\hat{L} = \left(\hat{x}_1 + \frac{\theta}{2\hbar}\hat{p}_2\right)\hat{p}_2 - \left(\hat{x}_2 - \frac{\theta}{2\hbar}\hat{p}_1\right)\hat{p}_1$$

ou ainda,

$$\hat{L} = \epsilon_{ij}\hat{x}_i\hat{p}_j + \frac{\theta}{2\hbar}\hat{p}_i\hat{p}_i, \tag{3.53}$$

valendo as regras de comutação,

$$[\hat{L}, \hat{x}_i] = i\hbar\epsilon_{ij}\hat{x}_j \qquad e \qquad [\hat{L}, \hat{p}_i] = i\hbar\epsilon_{ij}\hat{p}_j. \tag{3.54}$$

Podemos ainda expressar o operador momento angular em termo dos operadores $\hat{a}_\pm$ e $\hat{a}^\dagger_\pm$:

$$\hat{L} = (\hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1) + \frac{\theta}{2\hbar}\left(\hat{p}_1\hat{p}_1 + \hat{p}_2\hat{p}_2\right), \tag{3.55}$$

mas

$$\begin{aligned}(\hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1) = \frac{\hbar}{2i}[(\tilde{a}_1 + \tilde{a}^\dagger_1)(\tilde{a}_2 - \tilde{a}^\dagger_2) - (\tilde{a}_2 + \tilde{a}^\dagger_2)(\tilde{a}_1 - \tilde{a}^\dagger_1)] \quad + \\ + \quad \frac{\theta}{4}[(\tilde{a}_2 - \tilde{a}^\dagger_2)(\tilde{a}_2 - \tilde{a}^\dagger_2) + (\tilde{a}_1 - \tilde{a}^\dagger_1)(\tilde{a}_1 - \tilde{a}^\dagger_1)]\end{aligned}$$

e

$$\frac{\theta}{2\hbar}\left(\hat{p}_1\hat{p}_1 + \hat{p}_2\hat{p}_2\right) = -\frac{\theta}{4}[(\tilde{a}_1 - a^\dagger_1)(\tilde{a}_1 - \tilde{a}^\dagger_1) + (\tilde{a}_2 - \tilde{a}^\dagger_2)(\tilde{a}_2 - \tilde{a}^\dagger_2)]$$

substituindo estes dois resultados em (3.55) ficamos com,

$$\hat{L} = \frac{\hbar}{2i}[(\tilde{a}_1 + \tilde{a}^\dagger_1)(\tilde{a}_2 - \tilde{a}^\dagger_2) - (\tilde{a}_2 + \tilde{a}^\dagger_2)(\tilde{a}_1 - \tilde{a}^\dagger_1)] \tag{3.56}$$

que pode ainda ser posto como, com a ajuda do comutador $[\tilde{a}_1, \tilde{a}_2^\dagger] = 0 \longrightarrow \tilde{a}_1\tilde{a}_2^\dagger = \tilde{a}_2^\dagger\tilde{a}_1$,

$$\hat{L} = \frac{\hbar}{2i}([\tilde{a}_1, \tilde{a}_2] - [\tilde{a}_1^\dagger, \tilde{a}_2^\dagger] + 2\tilde{a}_1^\dagger\tilde{a}_2 - 2\tilde{a}_2^\dagger\tilde{a}_1)$$

mas $[\tilde{a}_1, \tilde{a}_2] = [\tilde{a}_1^\dagger, \tilde{a}_2^\dagger] = \frac{i\theta}{\sqrt{2\hbar}}$, logo

$$\hat{L} = \frac{\hbar}{2i}2[\tilde{a}_1^\dagger\tilde{a}_2 - \tilde{a}_2^\dagger\tilde{a}_1] = \hbar[i(\hat{a}_+^\dagger\hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger\hat{a}_-)]$$

ou ainda,

$$\hat{L} = -i\hbar\epsilon_{ij}\tilde{a}_i^\dagger\tilde{a}_j = \hbar(\hat{a}_+^\dagger\hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger\hat{a}_-). \tag{3.57}$$

O autovalor do operador $\hat{L}$ para o estado (3.52) é: $\hbar(n_+ - n_-)$.

3.3 Minimizando as Relações de Incerteza

Como mencionado anteriormente, as relações de incerteza entre operadores nos dão informações no sentido de que quanto mais sabemos sobre a medida de uma grandeza associada a um deles, menos informação conhecemos sobre a medição da outra grandeza associada ao outro. Nesta sessão será fornecida a receita para a construção de estados que saturem tais relações de incerteza, ou seja, construir estados para os quais a incerteza na medição dos operadores é a mínima possível.

3.3.1 Minimizando a Relação de Incerteza Entre Coordenadas

Primeiro vamos em busca dos vetores que saturem a relação de incerteza (3.41), que evolvem as coordenadas $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ no espaço não-comutativo, como consequência da relação (3.36). Partindo de uma definição de novos operadores de criação/aniquilação em termos apenas das coordenadas não-comutativas,

$$\hat{b} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\hat{x}_1 + i\hat{x}_2), \tag{3.58}$$

$$\hat{b}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\hat{x}_1 - i\hat{x}_2), \tag{3.59}$$

com $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$.

Tomando a eq. (3.58) e substituindo os valores de $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ da eq. (3.48), onde $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$,

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\theta}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{(\tilde{a}_1 + i\tilde{a}_2)}_{\hat{a}_-} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{(\tilde{a}_1^\dagger + i\tilde{a}_2^\dagger)}_{\hat{a}_+^\dagger} + \frac{\theta}{2\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{(\tilde{a}_1 + i\tilde{a}_2)}_{\hat{a}_-} - \frac{\theta}{2\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{(\tilde{a}_1^\dagger + i\tilde{a}_2^\dagger)}_{\hat{a}_+^\dagger}\right]$$

ou

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\theta}} \left[\left(1 + \frac{\theta}{2\hbar}\right) \hat{a}_- + \left(1 - \frac{\theta}{2\hbar}\right) \hat{a}_+^\dagger \right], \tag{3.60}$$

com seu conjugado,

$$\hat{b}^\dagger = \sqrt{\frac{\hbar}{2\theta}} \left[\left(1 + \frac{\theta}{2\hbar}\right) \hat{a}_-^\dagger + \left(1 - \frac{\theta}{2\hbar}\right) \hat{a}_+ \right]. \tag{3.61}$$

E também podem ser definidos os seguintes operadores,

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\theta}} \left[\left(1 + \frac{\theta}{2\hbar}\right) \hat{a}_+ + \left(1 - \frac{\theta}{2\hbar}\right) \hat{a}_-^\dagger \right] \tag{3.62}$$

com seu conjugado,

$$\hat{c}^\dagger = \sqrt{\frac{\hbar}{2\theta}} \left[\left(1 + \frac{\theta}{2\hbar}\right) \hat{a}_+^\dagger + \left(1 - \frac{\theta}{2\hbar}\right) \hat{a}_- \right]. \tag{3.63}$$

Podemos verificar que esses operadores $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{b}^\dagger$ e $\hat{c}^\dagger$ formam um conjunto de operadores de criação/aniquilação independentes, ou seja,

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1, \qquad [\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = 1$$

e também,

$$[\hat{b}, \hat{c}^\dagger] = 0, \qquad [\hat{c}, \hat{b}^\dagger] = 0, \qquad [\hat{b}, \hat{c}] = 0.$$

Dessa forma, podemos proceder da mesma forma que foi feito na sessão (3.1) e construir estados que saturam a relação (3.41), mas agora fazendo a análise para os operadores $\hat{b}$ e $\hat{c}$ e seus conjugados, que estão postos em termos dos operadores $\hat{a}_+$, $\hat{a}_-$ e seus conjugados, que carregam informação do caráter não-comutativo do espaço. Logo, seguindo a receita discutida no final da sessão (3.1) chegamos ao estado da forma

$$|z, \gamma\rangle_\phi = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{\frac{1}{4}\ln\gamma[(\hat{b}^\dagger)^2 - \hat{b}^2]} e^{z\hat{b}^\dagger} |\phi\rangle. \tag{3.64}$$

Aqui, $|\phi\rangle$ é um estado de vácuo aniquilado por $\hat{b}$, ou seja,

$$\hat{b}|\phi\rangle = 0. \tag{3.65}$$

As representações dadas pelos operadores $\hat{b}, \hat{b}^\dagger$, e $\hat{c}, \hat{c}^\dagger$ são unitariamente equivalentes às definições dos operadores $\hat{a}_\pm, \hat{a}_\pm^\dagger$. Usando as transformações de Bogolyubov[2], podemos calcular as transformações:

$$\hat{b} = W \hat{a}_- W^\dagger$$

[2]N. N. Bogolyubov 1909-1992, matemático e físico teórico.

onde[21]

$$W = e^{\xi(\hat{a}_+\hat{a}_- - \hat{a}_+^\dagger\hat{a}_-^\dagger)} \tag{3.66}$$

em que $\xi = \frac{1}{2}ln(\frac{2\hbar}{\theta})$, $\xi \in \Re$. Note que, usando a expansão de Baker-Campbell-Hausdorff, em que A e B são quaisquer operadores,

$$e^B A e^B = A + [B, A] + \frac{1}{2!}[B, [B, A]] + \frac{1}{3!}[B, [B, [B, A]]] + \cdots$$

Temos,

$$W\hat{a}_- W^\dagger = e^{\xi(\hat{a}_+\hat{a}_- - \hat{a}_+^\dagger\hat{a}_-^\dagger)}\hat{a}_- e^{-\xi(\hat{a}_+\hat{a}_- - \hat{a}_+^\dagger\hat{a}_-^\dagger)}$$

e com $A = \hat{a}_-$ e $B = \xi(\hat{a}_+\hat{a}_- - \hat{a}_+^\dagger\hat{a}_-^\dagger)$ os valores dos comutadores são:

$$[B, A] = \xi\hat{a}_+^\dagger, \quad [B, [B, A]] = \xi^2\hat{a}_-, \quad [B, [B, [B, A]]] = \xi^3\hat{a}_+^\dagger$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
W\hat{a}_- W^\dagger &= \hat{a}_- + \xi\hat{a}_+^\dagger + \frac{1}{2!}\xi^2\hat{a}_- + \frac{1}{3!}\xi^3\hat{a}_+^\dagger + \cdots \\
&= \hat{a}_-\left[1 + \frac{1}{2!}\xi^2 + \cdots\right] + \hat{a}_+^\dagger\left[\xi + \frac{1}{3!}\xi^3 + \cdots\right] \\
&= \hat{a}_- \cosh(\xi) + \hat{a}_+^\dagger \sinh(\xi) \\
&= \hat{a}_-\left[\frac{e^\xi + e^{-\xi}}{2}\right] + \hat{a}_+^\dagger\left[\frac{e^\xi - e^{-\xi}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\hat{a}_-\left[\left(\frac{2\hbar}{\theta}\right)^{1/2} + \left(\frac{2\hbar}{\theta}\right)^{-1/2}\right] + \frac{1}{2}\hat{a}_+^\dagger\left[\left(\frac{2\hbar}{\theta}\right)^{1/2} - \left(\frac{2\hbar}{\theta}\right)^{-1/2}\right] \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2\theta}}\left[\left(1 + \frac{\theta}{2\hbar}\right)\hat{a}_- + \left(1 - \frac{\theta}{2\hbar}\right)\hat{a}_+^\dagger\right] \\
&= \hat{b}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

onde usamos que $\xi = \frac{1}{2}ln(\frac{2\hbar}{\theta})$. Podemos fazer o mesmo com os outros operadores ficando com um conjunto de transformações que são unitariamente equivalentes, ou seja, através de uma transformação unitária, podemos obter os novos operadores em termos dos velhos

$$\hat{b} = W\hat{a}_- W^\dagger, \qquad \hat{b}^\dagger = W\hat{a}_-^\dagger W^\dagger \tag{3.68}$$

e

$$\hat{c} = W\hat{a}_+ W^\dagger, \qquad \hat{c}^\dagger = W\hat{a}_+^\dagger W^\dagger. \tag{3.69}$$

Esses resultados também podem ser vistos, numa forma mais direta, da seguinte maneira: uma vez definido o operador

$$W(t) = e^{t(\hat{a}_+\hat{a}_- - \hat{a}_+^\dagger\hat{a}_-^\dagger)}$$

onde $t = \frac{t}{2} ln\left(\frac{2\hbar}{\theta}\right), t \in \Re$, e

$$\begin{aligned} \hat{b}(t) &= W(t)\hat{a}_- W^\dagger(t), \\ \hat{c}^\dagger(t) &= W(t)\hat{a}_+^\dagger W^\dagger(t), \end{aligned}$$

então, $\hat{b}(0) = \hat{a}_-$, $\hat{c}^\dagger(0) = \hat{a}_+^\dagger$ enquanto que,

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{b}}(t) \\ \dot{\hat{c}}^\dagger(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}(t) \\ \hat{c}^\dagger(t) \end{pmatrix}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{b}(t) \\ \hat{c}^\dagger(t) \end{pmatrix} &= \left(exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \hat{a}_- \\ \hat{a}_+^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cosh(t) & sinh(t) \\ sinh(t) & cosh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_- \\ \hat{a}_+^\dagger \end{pmatrix} \end{aligned}$$

em que na última passagem foi utilizada a matriz de transformação que leva os operadores $\hat{a}_+, \hat{a}_-$ nos novos operadores $\hat{b}(t), \hat{c}(t)$.

As equações de transformação (3.68) e (3.69) aliadas aos resultados apresentados na seção (3.1), nos permite concluir que os estados que saturam a relação (3.41) são combinações lineares (em relação a n_+ mas com z, γ fixos) dos estados

$$|z, \gamma, n_+\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} W(\xi) e^{-\frac{1}{4} ln\gamma[\hat{a}_-^2 - (\hat{a}_-^\dagger)^2]} e^{z\hat{a}_-^\dagger} |n_+, 0\rangle. \tag{3.70}$$

Note que

$$[W, \hat{L}] = 0, \tag{3.71}$$

isso implica que os estados para os quais $z = 0$, $\gamma = 1$ são autoestados de $\hat{L}$. Lembre-se de que foi discutido no início do capítulo que z está relacionado com os valores esperados dos operadores $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ enquanto que os valores esperados das grandezas $\hat{x}_1^2$ e de $\hat{x}_2^2$ são proporcionais a γ e a $\frac{1}{\gamma}$, respectivamente.

3.3.2 Minimizando a Relação de Incerteza Entre Coordenada e Momento

Nos concentraremos agora na saturação da relação de incerteza entre as componentes das coordenadas e momentos, relações (3.39) e (3.40), seguindo a mesma linha de raciocínio da sessão anterior. Primeiro, são definidos novos operadores de criação/aniquilação com a seguinte forma:

$$\hat{d} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{x}_1 + i\hat{p}_1). \tag{3.72}$$

Agora, substituindo as formas não-comutativas de (3.48) e (3.49) ficamos com

$$\hat{d} = \tilde{a}_1 + \frac{i\theta}{4\hbar}(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_2^\dagger), \tag{3.73}$$

com seu conjugado,

$$\hat{d}^\dagger = \tilde{a}_1^\dagger + \frac{i\theta}{4\hbar}(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_2^\dagger). \tag{3.74}$$

E definindo o operador

$$\hat{e} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{x}_2 + i\hat{p}_2), \tag{3.75}$$

podem se substituídas as formas de (3.48) e (3.49), obtemos

$$\hat{e} = \tilde{a}_2 + \frac{i\theta}{4\hbar}(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_1^\dagger) \tag{3.76}$$

e

$$\hat{e}^\dagger = \tilde{a}_2^\dagger + \frac{i\theta}{4\hbar}(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_1^\dagger) \tag{3.77}$$

cuja equivalência unitária entre os *velhos* operadores e os *novos* é

$$\hat{d} = T\tilde{a}_1 T^\dagger, \tag{3.78}$$

$$\hat{e} = T\tilde{a}_2 T^\dagger \tag{3.79}$$

onde T tem a forma,

$$\begin{aligned} T &= e^{\frac{i\theta}{2\hbar^2}\hat{p}_1\hat{p}_2} \\ &= e^{\frac{i\theta}{4\hbar}(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_1^\dagger)(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_2^\dagger)}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

A grandeza T é o operador dotado de momento que gera a translação no espaço. Dessa forma, os estados que saturam (3.39), podem ser escritos como uma combinação linear, em relação a n_2 mas com z, γ fixos, dos estados

$$|z, \gamma, n_2\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} T e^{-\frac{1}{4}ln\gamma[\tilde{a}_1^2 - (\tilde{a}_1^\dagger)^2]} e^{z\tilde{a}_1^\dagger}|n_2, 0\rangle \tag{3.81}$$

e, consequentemente, os estados que saturam a relação (3.40) são obtidos substituindo, no estado anterior, $1 \leftrightarrow 2$ e $\theta \to -\theta$ no operador T, obtendo

$$|z, \gamma, n_1\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} T^\dagger e^{-\frac{1}{4}ln\gamma[\tilde{a}_2^2 - (\tilde{a}_2^\dagger)^2]} e^{z\tilde{a}_2^\dagger}|n_1, 0\rangle \tag{3.82}$$

3.4 Trabalhando Com Coordenadas de Representação

Na mecânica quântica convencional, ou seja, onde as coordenadas $\tilde{x}_i$ e momentos $\tilde{p}_i$ não comutam, a representação dos operadores padrão no espaço de fase é:

$$\tilde{x}_i = x_i, \qquad \tilde{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Portanto, usando as equações (3.42) e (3.43), ficamos com a representação no espaço de fase não comutativo,

$$\hat{x}_i = x_i + \frac{i\theta}{2}\epsilon_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.83}$$

Note que pela descrição feita na secção (3.1), o estado ψ que satura a relação (3.41) obedece à seguinte relação:

$$(\hat{x}_1 - \alpha)\psi = -i\gamma(\hat{x}_2 - \beta)\psi \tag{3.84}$$

onde $\alpha = \langle \hat{x}_1 \rangle I$ e $\beta = \langle \hat{x}_2 \rangle I$. Substituindo as relações de (3.83) para $\hat{x}_i$, ficamos com

$$\left(x_1 + \frac{i\theta}{2}\frac{\partial}{\partial x_2} - \alpha\right)\psi = -i\gamma\left(x_2 - \frac{i\theta}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \beta\right)\psi.$$

Reorganizando os termos,

$$\frac{\theta}{2}\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\psi + \left[(x_1 + i\gamma x_2) - (\alpha + i\gamma\beta)\right]\psi = 0 \tag{3.85}$$

cuja solução geral é do tipo[21],

$$\psi(x_1, x_2) = f\left(\frac{x_1}{\sqrt{\gamma}} + i\sqrt{\gamma}x_2\right) e^{\frac{-1}{\theta}\left[\left(\frac{x_1^2}{\gamma} + \gamma x_2^2\right) - z\left(\frac{x_1}{\sqrt{\gamma}} - i\sqrt{\gamma}x_2\right)\right]} \tag{3.86}$$

onde $z \equiv \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} - i\sqrt{\gamma}\beta\right)$ e f é uma função tal que $\psi(x_1, x_2)$ seja normalizável. A solução (3.86) é a função que satura a relação de incerteza entre $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$, ou seja, é a função que torna mínima possível a incerteza da medida associada a estes operadores. Em particular, o auto-estado de $\hat{L}$ com autovalor $\hbar m$ pode ser posto como,

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{2^{\frac{m+1}{2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{m!}\theta^{\frac{m+1}{2}}} e^{im\phi} r^m e^{-\frac{r^2}{\theta}}. \tag{3.87}$$

Pode-se checar explicitamente que $\langle \hat{x}_1^2 \rangle = \langle \hat{x}_2^2 \rangle = \frac{\theta}{2}$.

Pode-se encontrar uma solução, ou seja, uma função que sature a relação de incerteza entre os operadores $\hat{x}_1$ e $\hat{p}_1$ pela equação que relaciona esses dois observáveis,

$$\hat{x}_1\psi_1 = -i\gamma_1\hat{p}_1\psi_1. \tag{3.88}$$

Logo,

$$\left(\frac{i\theta}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}+\gamma_1\hbar\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\psi_1+x_1\psi_1=0 \tag{3.89}$$

cuja solução é

$$\psi_1=f_1\left(x_1+\frac{2i\gamma_1\hbar}{\theta}x_2\right)e^{-\frac{3x_1^2}{8\gamma_1\hbar}-\frac{\gamma_1\hbar x_2^2}{2\theta^2}+\frac{ix_1x_2}{2\theta}} \tag{3.90}$$

onde f_1 é uma função tal que ψ_1 seja normalizável.

Os estados que saturam (3.40) são obtidos mudando as variáveis $x_1 \longleftrightarrow x_2$, $\theta \rightarrow -\theta$ e $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2$. Com isso, a solução nessas novas condições é

$$\psi_2=f_2\left(x_2-\frac{2i\gamma_2\hbar}{\theta}x_1\right)e^{-\frac{3x_2^2}{8\gamma_2\hbar}-\frac{\gamma_2\hbar x_1^2}{2\theta^2}-\frac{ix_1x_2}{2\theta}}. \tag{3.91}$$

Pode ser mostrado que não é possível construir um estado que sature as relações (3.39) e (3.40) simultaneamente. Inserindo (3.91) em (3.88), temos que as derivadas ficam, com a função ψ_2 na forma

$$\psi_2=f_2Ae^B$$

em que $A=\left(x_2-\frac{2i\gamma_2\hbar}{\theta}x_1\right)$ e $B=-\frac{3x_2^2}{8\gamma_2\hbar}-\frac{\gamma_2\hbar x_1^2}{2\theta^2}-\frac{ix_1x_2}{2\theta}$:

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}=f_2'A\left(\frac{-2i\hbar\gamma_2}{\theta}\right)e^B-f_2A\left(\frac{\hbar\gamma_2}{\theta}x_1+\frac{i}{2\theta}x_2\right)e^B$$

e

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}=f_2'Ae^B-f_2A\left(\frac{3}{4\hbar\gamma_2}x_2+\frac{i}{2\theta}x_1\right)e^B$$

substituindo essas derivadas em (3.89) e organizando os termos, temos que:

$$\frac{f_2'\left(x_2-\frac{2i\hbar\gamma_2x_1}{\theta}\right)}{f_2\left(x_2-\frac{2i\hbar\gamma_2x_1}{\theta}\right)}=\frac{\left(\frac{5}{4}-\frac{\gamma_1\gamma_2\hbar^2}{\theta}\right)x_1-i\left(\frac{3\theta}{8\gamma_2\hbar}+\frac{\gamma_1\hbar}{2\theta}\right)x_2}{\left(\frac{2i\gamma_1\gamma_2\hbar}{\theta}-\frac{i\theta}{2}\right)} \tag{3.92}$$

Note que os dois lados dessa relação anterior dependem das variáveis x_1 e x_2 de modo que é impossível de se verificar. Mas a pergunta a ser feita agora é : os estados (3.90) e (3.91) podem ser autoestado do momento angular $\hat{L}$ com escolhas apropriadas de f_1 e f_2? Inserindo (3.90) na equação

$$\hat{L}\psi=\hbar m\psi \tag{3.93}$$

vemos que isso é impossível. E, por último, inserindo (3.87) em (3.88), tendo como resultado

$$\frac{f'\left(\frac{x_1}{\sqrt{\gamma}}+i\sqrt{\gamma}x_2\right)}{f\left(\frac{x_1}{\sqrt{\gamma}}+i\sqrt{\gamma}x_2\right)}=\frac{\left(1-\frac{2\gamma_1\hbar}{\gamma\theta}\right)x_1-i\gamma x_2+z\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2}+\frac{\gamma_1\hbar}{\theta\sqrt{\gamma}}\right)}{\left(\frac{\theta\sqrt{\gamma}}{2}-\frac{\gamma_1\hbar}{\sqrt{\gamma}}\right)} \tag{3.94}$$

onde a condição de consistência (o lado direito deveria depender apenas de $\frac{x_1}{\sqrt{\gamma}} + i\sqrt{\gamma}x_2$) implica que

$$\frac{\gamma_1 \hbar}{\gamma\theta} = 1.$$

Então, sob essa condição, a solução para (3.94) leva a

$$f = Ce^{\frac{1}{\theta}\left(\frac{x_1}{\sqrt{\gamma}}+i\sqrt{\gamma}x_2\right)^2 - \frac{3\sqrt{\gamma}}{\theta}z\left(\frac{x_1}{\sqrt{\gamma}}+i\sqrt{\gamma}x_2\right)} \tag{3.95}$$

Dessa forma, inserindo em (3.87) podemos concluir que ψ não é normalizável. Isso mostra que as relações de incerteza (3.40) e (3.41) não podem ser saturadas simultaneamente, ou seja, para um dado estado ψ, no máximo uma das relações de incerteza podem ser saturadas.

3.5 Matriz de Covariância

Embora não exista estados que saturem as relações de incerteza entre coordenadas e momento, (3.40) e (3.41), simultaneamente, os limites inferiores podem ser aproximados tanto quanto se deseja. Tomemos um estado do tipo,

$$\psi(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{2\delta}{\pi}} e^{-\delta(x_1^2+x_2^2)}. \tag{3.96}$$

Com isso podemos ver que, usando (3.93), com $m = 0$, $\hat{L}\psi = 0$ e os valores médios de coordenadas e momentos, usando as representações (3.83):

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_1 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_1 |\psi(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(x_1 + \frac{i\theta}{2}\frac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi dx_1 dx_2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.97}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_2 |\psi(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(x_2 - \frac{i\theta}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} \right) \psi dx_1 dx_2 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.98}$$

E também

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p}_1 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}_1 |\psi(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \psi dx_1 dx_2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.99}$$

pelo fato da derivada primeira fornecer apenas x_1, a integral de uma função impar se anula. O mesmo acontece com,

$$\langle \hat{p}_2 \rangle = 0. \tag{3.100}$$

Agora as quadraturas:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x}_1^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_1^2 |\psi(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(x_1^2 - \frac{\theta^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + i\theta x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{4\delta} + \frac{\theta^2 \delta}{4}.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

O mesmo para

$$\langle \hat{x}_2^2 \rangle = \frac{1}{4\delta} + \frac{\theta^2 \delta}{4} \tag{3.102}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p}_1^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}_1^2 |\psi(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \psi dx_1 dx_2 \\
&= \delta \hbar^2.
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Da mesma forma,

$$\langle \hat{p}_2^2 \rangle = \delta \hbar^2 \tag{3.104}$$

Assim,

$$(\Delta \hat{x}_1)^2 (\Delta \hat{p}_1)^2 = \frac{\hbar^2}{4} + \frac{\theta^2 \hbar^2 \delta^2}{4}. \tag{3.105}$$

Por simetria,

$$(\Delta \hat{x}_2)^2 (\Delta \hat{p}_2)^2 = \frac{\hbar^2}{4} + \frac{\theta^2 \hbar^2 \delta^2}{4} \tag{3.106}$$

onde as médias foram calculadas no estado $\psi(x_1, x_2)$ que é normalizável para qualquer $\delta > 0$. Os limites são saturados para $\delta \to 0$, mas, este estado se torna não-normalizável neste limite.

Pode ser definida uma matriz de Covariância da relação entre quaisquer dois operadores que nos dá informação de suas variâncias e das interações entre eles, veja mais detalhes no apêndice B, da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \Sigma_{\hat{A}_1,\hat{A}_2} &\equiv \begin{pmatrix} \sigma^2_{\hat{A}_1} & \sigma_{\hat{A}_2,\hat{A}_1} \\ \sigma_{\hat{A}_1,\hat{A}_2} & \sigma^2_{\hat{A}_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \bar{A}_1^2 \rangle & \frac{1}{2}\langle \bar{A}_1\bar{A}_2 + \bar{A}_2\bar{A}_1 \rangle \\ \frac{1}{2}\langle \bar{A}_2\bar{A}_1 + \bar{A}_1\bar{A}_2 \rangle & \langle \bar{A}_2^2 \rangle \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.107}$$

onde A_1 e A_2 são quaisquer operadores de uma forma mais geral, e em princípio e a barra sobre eles indica seus desvios. Portanto, a matriz de covariância associada aos operadores $\hat{x}_1$ e $\hat{p}_1$ é posta da forma

$$\begin{aligned} \Sigma_{\hat{x}_1,\hat{p}_1} &\equiv \begin{pmatrix} \sigma^2_{\hat{x}_1} & \sigma_{\hat{x}_1,\hat{p}_1} \\ \sigma_{\hat{p}_1,\hat{x}_1} & \sigma^2_{\hat{p}_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{4\delta} + \frac{\theta^2\delta}{4}\right] & 0 \\ 0 & \delta\hbar^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.108}$$

onde foram substituídos os valores das variâncias (termos sem interações) e covariâncias (interações entre eles) discutidos na sessão anterior. Dessa forma, assim como na mecânica quântica usual, pode-se calcular a relação de incerteza de Schrodinger escrita em termos do determinante de $\Sigma_{\hat{x}_1,\hat{p}_1}$ como

$$\begin{aligned} det\left(\Sigma_{\hat{x}_1,\hat{p}_1}\right) &= \delta\hbar^2\left[\frac{1}{4\delta} + \frac{\theta^2\delta}{4}\right] \\ &= \frac{\hbar^2}{4} + \frac{\theta^2\hbar^2\delta^2}{4}. \end{aligned} \tag{3.109}$$

E da mesma forma se obtém,

$$\begin{aligned} det\left(\Sigma_{\hat{x}_2,\hat{p}_2}\right) &= \delta\hbar^2\left[\frac{1}{4\delta} + \frac{\theta^2\delta}{4}\right] \\ &= \frac{\hbar^2}{4} + \frac{\theta^2\hbar^2\delta^2}{4}. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Esse resultado indica que quando a não-comutatividade das coordenadas é introduzida, a relação de incerteza de Schrodinger escrita em termos do determinante possui uma correção proporcional ao quadrado do parâmetro que mede essa não-comutatividade. Além disso, se impusermos que no limite $\theta \to 0$, se recupera o resultado usual.

Para o estado específico considerado a matriz de covariância associada aos operadores $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ pode ser posta na forma,

$$\begin{aligned} \Sigma_{\hat{x}_1,\hat{x}_2} &\equiv \begin{pmatrix} \sigma^2_{\hat{x}_1} & \sigma_{\hat{x}_1,\hat{x}_2} \\ \sigma_{\hat{x}_2,\hat{x}_1} & \sigma^2_{\hat{x}_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{4\delta} + \frac{\theta^2\delta}{4}\right] & 0 \\ 0 & \left[\frac{1}{4\delta} + \frac{\theta^2\delta}{4}\right] \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.111}$$

Assim, o determinante de Schrodinger para esses operadores fica,

$$det\left(\Sigma_{\hat{x}_1,\hat{x}_2}\right) = \left[\frac{1}{4\delta} + \frac{\theta^2\delta}{4}\right]^2$$

$$det\left(\Sigma_{\hat{x}_1,\hat{x}_2}\right) \approx \left(\frac{1}{4\delta}\right)^2 + 2\left(\frac{\theta}{4}\right)^2 \tag{3.112}$$

onde foi desprezado termos da ordem de θ^4, já que esse parâmetro é muito pequeno. Novamente, para o estado considerado, esse resultado trás a informação da não-comutatividade entre $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$, pois o primeiro termo da equação acima, para o estado referido, se refere ao termo usual para o caso comutativo. Para $\theta = 0$,

$$det\left(\Sigma_{\hat{x}_1,\hat{x}_2}\right) = \left(\frac{1}{4\delta}\right)^2. \tag{3.113}$$

Isso se deve ao estado específico tratado.

Capítulo 4

Formulação da Mecânica Quântica Não-Comutativa Usando Estados Coerentes

Grande parte da física atual é formulada utilizando um poderoso mecanismo criado por Feynmann[1] conhecido como *integral de caminho* ou *trajetória*, com aplicações que vão desde teoria de calibre[2] em física de altas energias à física do estado sólido e também em mecânica estatística. Neste contexto usaremos uma nova forma de deduzir o propagador de Feynman[7]. As principais ideias e técnicas aqui abordadas são para a análise de uma partícula livre no espaço não-comutativo. Uma breve revisão sobre integral de caminho em mecânica quântica convencional é posta no apêndice C. Aqui será procurada a representação via integral de caminho para o propagador da mecânica quântica não-comutativa.

Uma das dificuldades de se trabalhar com geometrias não-comutativas é realizar cálculos explícitos em termos de coordenadas que não comutam. Na mecânica quântica padrão (onde as coordenadas espaciais comutam assim como os momentos) é possível encontrar uma combinação adequada de coordenadas espaciais que definem novas coordenadas, com a não-comutatividade se manifestando como um campo magnético externo constante[29].

Na abordagem de Teoria Quântica de Campos (T.Q.C), uma ideia similar não pode ser

[1]R. P. Feynman, físico norte-americano, premio Nobel da física em 1965.

[2]Representam uma classe de teorias físicas baseadas na ideia de que as transformações de simetria podem ser locais ou globais.

aplicada desde que os campos quânticos sejam funções de coordenadas de posição apenas e os momentos conjugados a essas coordenadas não apareçam. Neste caso, é costume formular uma teoria de campo não-comutativa em termos de funções de variáveis que não comutam, dotadas de um *produto estrela*[3] ($\star - product$). Entretanto, nessa formulação, propriedades básicas da não-comutatividade, isto é, a existência de um corte (UV) natural, devido à incerteza da posição, não é transparente.

Em particular, o propagador livre não é afetado pelo produto estrela ($\star - product$), como se a não-comutatividade não tivesse nenhum efeito sobre a partícula. A existência de um comprimento mínimo no plano não comutativo deve se manifestar já no propagador livre, que é propriedade (geométrica) do espaço e não da interação entre campos. Na busca de tal Propagador será usado ($\hbar = 1J \cdot s = 1ML^2T^{-1}$).

4.1 Onda Plana Modificada

Trabalhos recentes propõem calcular o propagador de Feynmann no espaço não comutativo usando estados coerentes[29], [22]. Dessa forma, a amplitude de transição é definida com coordenadas médias de posição de dois estados coerentes, com isso a não-comutatividade é vista pela evolução de gaussianas de estados coerentes. Somente uma representação da álgebra N.C. é envolvida em termos das variáveis comutativas. Os estados coerentes, neste contexto, são auto-estados de uma combinação de operadores de posição, eles são estados de posições médias definidas. Assim, eles agem como um conjunto que substitui os auto-estados de posição admissíveis da teoria comutativa. A ideia principal na formulação de modelos não-comutativos sem o uso do produto estrela é o uso de valores esperados entre estados coerentes. Desse modo, a não-comutatividade no plano pode ser descrita pelo conjunto de coordenadas $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ que não comutam entre si, satisfazendo a álgebra

$$[\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2] = i\theta \tag{4.1}$$

Essa relação nos diz que não existe auto-estados comuns a esses dois operadores. Assim, não se pode trabalhar na representação de coordenadas da mecânica quântica padrão. O parâmetro θ tem dimensão de comprimento quadrado e mede a não-comutatividade de

[3] O produto convencional é substituído por uma expansão que leva em conta a ordenação adequada devido a não-comutatividade entre as coordenadas envolvidas, visto no cap. anterior.

coordenadas. Como consequência da relação (4.1), a não-comutatividade no plano é dividida em regiões de área θ. Dizemos que o espaço está borrado e não temos informação de pontos neste espaço, onde se pode achar um conjunto de estados que permite definir o valor médio de uma função $F(\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2)$. A vantagem é que valores médios não representam autovalores, logo podem ser medidos simultaneamente, apesar da não-comutatividade das coordenadas. Operadores de criação/aniquilação podem ser definidos como[29]

$$\hat{\mathbf{A}} \equiv \hat{\mathbf{q}}_1 + i\hat{\mathbf{q}}_2, \tag{4.2}$$

$$\hat{\mathbf{A}}^\dagger \equiv \hat{\mathbf{q}}_1 - i\hat{\mathbf{q}}_2. \tag{4.3}$$

A regra de comutação desses operadores é

$$[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}}^\dagger] = 2\theta. \tag{4.4}$$

Note que o limite comutativo $\theta \to 0$ corresponde ao limite clássico, $\hbar \to 0$, de mecânica quântica. Os *estados coerentes* [5], são definidos como auto-estados dos operadores (4.2) e (4.3) que têm a vantagem de possuir auto-estados

$$\hat{\mathbf{A}}|z\rangle = z|z\rangle, \tag{4.5}$$

$$\langle z|\hat{\mathbf{A}}^\dagger = \langle z|z^* \tag{4.6}$$

onde os estados coerentes normalizados têm a forma explícita

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}zz^*} e^{z\hat{\mathbf{A}}^\dagger}|0\rangle \tag{4.7}$$

em que z são os autovalores complexos e $|0\rangle$ é o vácuo aniquilado pelo operador $\hat{\mathbf{A}}$. Se for definido *valores esperados* de coordenadas que não comutam em estados coerentes da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle z|\hat{\mathbf{q}}_1|z\rangle &= \langle z|\frac{\hat{\mathbf{A}}^\dagger + \hat{\mathbf{A}}}{2}|z\rangle \\ &= \frac{z^* + z}{2} = Re(z) \\ &\equiv x_1. \end{aligned} \tag{4.8}$$

E o mesmo para a média do operador $\hat{\mathbf{q}}_2$,

$$\begin{aligned} \langle z|\hat{\mathbf{q}}_2|z\rangle &= \langle z|\frac{-\hat{\mathbf{A}}^\dagger + \hat{\mathbf{A}}}{2i}|z\rangle \\ &= \frac{-z^* + z}{2i} = Im(z) \\ &\equiv x_2 \end{aligned} \tag{4.9}$$

em que $\vec{x} = (x_1, x_2)$ representa a *posição média* da partícula no plano não-comutativo. Dessa forma, a qualquer função das coordenadas no espaço não-comutativo associa-se uma outra função das coordenadas médias neste espaço com a ajuda dos estados coerentes: $F = F(\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2) \longrightarrow \psi = \psi(x_1, x_2)$, ou seja,

$$\psi(\vec{z}) \equiv \langle z|F(\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2)|z\rangle. \tag{4.10}$$

Considere a versão não-comutativa da onda plana como sendo o operador $exp(i\vec{p}\cdot\vec{\mathbf{q}})$ onde $\vec{p} = (p_1, p_2)$ é um vetor de duas componentes reais. Logo, o valor médio do operador onda plana é

$$\langle z|e^{ip_1\mathbf{q}_1 + ip_2\mathbf{q}_2}|z\rangle = Ne^{-\theta\frac{\vec{p}^2}{4} + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \tag{4.11}$$

onde foi explorado a expansão de Backer-Hausdorff

$$\begin{aligned} e^{ip_+\hat{\mathbf{A}}^\dagger + ip_-\hat{\mathbf{A}}} &= e^{ip_+\hat{\mathbf{A}}^\dagger} e^{ip_-\hat{\mathbf{A}}} e^{\frac{p_+p_-}{2}[\hat{\mathbf{A}}^\dagger, \hat{\mathbf{A}}]} \\ &= e^{ip_+\hat{\mathbf{A}}^\dagger} e^{ip_-\hat{\mathbf{A}}} e^{-\theta p_+ p_-} \\ &= e^{ip_+\hat{\mathbf{A}}^\dagger} e^{ip_-\hat{\mathbf{A}}} e^{-\theta\frac{\vec{p}_2}{4}} \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde,

$$p_\pm \equiv \frac{1}{2}(p_1 \pm ip_2). \tag{4.13}$$

A equação (4.11) diz que $\vec{p}$ é canonicamente conjugado à posição média $\vec{x}$ e podemos pensar nele como *momento linear médio*. Sendo assim, podemos interpretar a equação (4.11) como sendo a função de onda que representa uma partícula livre no plano não-comutativo, ou seja,

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}) \equiv \langle\vec{p}|\vec{x}\rangle_\theta \equiv e^{-\theta\frac{\vec{p}^2}{4} + i\vec{p}\cdot\vec{x}}. \tag{4.14}$$

Com a ajuda do conjunto completo no espaço de momento, podemos calcular a amplitude entre dois estados de diferentes posições médias usando a função de onda (4.14),

$$\begin{aligned} \langle\vec{y}|\vec{x}\rangle_\theta &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^2} \langle\vec{y}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\vec{x}\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^2} e^{-\theta\frac{\vec{p}^2}{4} + i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \\ &= \frac{1}{(2\pi\theta)} e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{y})}{2\theta}}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Note que o efeito da não-comutatividade na amplitude (4.15) substitui a função delta de Dirac convencional por uma gaussiana cujo comprimento $\sqrt{\theta}$ corresponde ao comprimento mínimo no espaço borrado. Podemos definir a amplitude em (4.15) como uma função delta no espaço não-comutativo, definida em termos de posições médias neste espaço,

$$\langle \vec{y}|\vec{x}\rangle_\theta \to \delta_\theta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{4.16}$$

No limite comutativo $\theta \to 0$, temos, de (4.15), uma função delta de Dirac convencional, ou seja,

$$\lim_{\theta\to 0}\langle \vec{y}|\vec{x}\rangle_\theta = \delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{4.17}$$

4.2 Propagador da Partícula Livre e Unitariedade

Com o desenvolvimento da teoria quântica de campos o formalismo funcional de integral de caminho demonstrou ser uma ferramenta poderosa, incorporando naturalmente várias propriedades da teoria. Será feita aqui uma análise sobre o propagador da partícula livre no espaço N.C. levando em conta a nova versão da onda plana discutida nas sessões anteriores. Em seguida, será analisado se tal propagador é unitário.

4.2.1 Propagador da Partícula Livre

Usando a notação de Dirac e representação de Heisenberg podemos escrever a amplitude de transição $\langle \vec{x}_f, t_f|\vec{x}_i, t_i\rangle$ para uma partícula que inicialmente está no estado $|\vec{x}_i, t_i\rangle$ e evoluir para a posição $|\vec{x}_f, t_f\rangle$ num tempo t posterior. Então, afim de construir o propagador para a partícula livre a evolução temporal de uma estado inicial é

$$|\vec{x}_f, t\rangle = \mathcal{U}(t)|\vec{x}_i\rangle \tag{4.18}$$

onde $\mathcal{U}(t)$ é o operador evolução temporal. Portanto, a amplitude de transição será dada por

$$\langle \vec{x}_f, t_f|\vec{x}_i, t_i\rangle = \langle \vec{x}_f|\mathcal{U}(t_f-t_i)|\vec{x}_i\rangle = \langle \vec{x}_f|e^{-i(t_f-t_i)H}|\vec{x}_i\rangle \tag{4.19}$$

em que, em princípio, o Hamiltoniano acima, independente do tempo, é uma função geral de $\vec{x}$ e $\vec{p}$, ou seja, $H = H(\vec{x},\vec{p})$. Uma vez conhecida a amplitude podemos determinar como estado inicial evolui no tempo. Definindo a amplitude de transição como o *kernel*,

$$\langle \vec{x}_f, t_f|\vec{x}_i, t_i\rangle \equiv \mathcal{K}(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}_i, t_i).$$

Inicialmente, podemos definir uma amplitude de transição entre dois pontos vizinhos bem próximos[19], começando da posição $\vec{x}_i$ no tempo $t_i = 0$ por

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{x}_{i+1}, \varepsilon | \vec{x}_i, 0 \rangle &= \langle \vec{x}_{i+1} | \mathcal{U}(\varepsilon) | \vec{x}_i \rangle \\
&= \langle \vec{x}_{i+1} | e^{-i\varepsilon H} | \vec{x}_i \rangle \\
&= \langle \vec{x}_{i+1} | 1 - i\varepsilon H + \mathcal{O}(\varepsilon^2) | \vec{x}_i \rangle \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

onde $\varepsilon = \frac{t_f - t_i}{N} = \frac{t_f}{N}$, N é o número de intervalos de tempo iguais a ε. Usando o conjunto completo no espaço de momento em duas dimensões,

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\vec{p}_i}{(2\pi)^2} |\vec{p}_i\rangle\langle\vec{p}_i| = 1 \qquad i = 1, \cdots, N
$$

$$
\langle \vec{x}_{i+1}, \varepsilon | \vec{x}_i, 0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\vec{p}_i}{(2\pi)^2} \langle \vec{x}_{i+1} | \vec{p}_i \rangle \langle \vec{p}_i | \vec{x}_i \rangle e^{-i\varepsilon H(\vec{x}_i, \vec{p}_i)} \qquad (4.21)
$$

e com a ajuda da versão não-comutativa da função de onda de partícula livre (4.14),

$$
\langle \vec{x}_{i+1}, \varepsilon | \vec{x}_i, 0 \rangle_\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\vec{p}_i}{(2\pi)^2} e^{i\vec{p}_i \cdot (\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i)} e^{-i\varepsilon H(\vec{x}_i, \vec{p}_i) - \frac{\theta \vec{p}_i^2}{2}}. \qquad (4.22)
$$

Portanto, somando todos os caminhos discretos conectando os pontos $\vec{x}_i$ em $t_i = 0$ e $\vec{x}_f$ num tempo t_f e levando o número de intervalos para o infinito teremos,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_\theta(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}_i, 0) &= \lim_{N \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\vec{x}_1 \cdots d^2\vec{x}_N \prod_{i=1}^{N+1} \langle \vec{x}_{i+1}, \varepsilon | \vec{x}_i, 0 \rangle_\theta \\
&= \lim_{N \to \infty} \left(\prod_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\vec{x}_i \right) \left(\prod_{i=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\vec{p}_i}{(2\pi)^2} \right) \times \\
&\times exp \left\{ i\varepsilon \sum_{i=1}^{N+1} \left[\frac{(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) \cdot \vec{p}_i}{\varepsilon} - H(\vec{x}_i, \vec{p}_i) - \frac{\theta}{2i\varepsilon} \vec{p}_i^2 \right] \right\}. \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

Note que, no limite contínuo com $\varepsilon \to 0$ podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_\theta(\vec{x}_f, T; \vec{x}_i, 0) = \lim_{N \to \infty} &\left(\prod_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\vec{x}_i \right) \left(\prod_{i=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\vec{p}_i}{(2\pi)^2} \right) \times \\
&\times exp \left\{ i \int_0^T \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} dt' - i \int_0^T \left[H(\vec{x}, \vec{p}) + \frac{\theta \vec{p}^2}{2iT} \right] dt' \right\}. \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

A esta altura, vamos considerar agora o hamiltoniano da partícula livre e usar uma importante identidade, feita a seguir, para transformar a primeira integral temporal acima numa integral espacial:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} dt' &= \int_0^T \frac{d}{dt} [\vec{x} \cdot \vec{p}] dt' - \int_0^T \vec{x} \cdot \dot{\vec{p}} \\
&= \int_x^y d(\vec{x} \cdot \vec{p}) - \int_0^T \vec{x} \cdot \dot{\vec{p}} dt'. \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\mathcal{K}_\theta(\vec{x},T;\vec{y},0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [D\vec{p}]\delta[\dot{\vec{p}}]exp\left\{ i\int_y^x d(\vec{x}\cdot\vec{p}) - i\int_0^T \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\theta\vec{p}^2}{2iT}\right] dt'\right\} \tag{4.26}$$

em que foi usada a abreviação $[D\vec{p}] = \left(\prod_{i=1}^{N+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^2\vec{p}_i}{(2\pi)^2}\right)$ e onde o funcional delta de Dirac, $\delta[\dot{\vec{p}}]$ é representado como uma integral de Fourier[7] sobre as funções $\vec{x}(t)$

$$\delta[\dot{\vec{p}}] = \int_{-\infty}^{+\infty} [D\vec{x}]exp\left\{ i\int_y^x [\vec{x}\cdot\dot{\vec{p}}]dt'\right\} \tag{4.27}$$

mas, observe que para a partícula livre o momento $\vec{p}$ é uma constante de movimento,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = 0, \qquad \vec{p} = constante$$

dessa forma, como pode ser visto com mais detalhes no apêndice C, o propagador em (4.26) se reduz a

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_\theta(\vec{x},T;\vec{y},0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^2} exp\left\{ i[\vec{p}\cdot\vec{x}]_y^x - i\int_0^T \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\theta\vec{p}^2}{2iT}\right] dt'\right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} d^2\vec{p} \quad exp\left\{ -(iT+m\theta)\frac{\vec{p}^2}{2m} + i(\vec{x}-\vec{y})\cdot\vec{p}\right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} d^2\vec{p} \quad exp\left\{ i\left[-(iT+m\theta)\frac{\vec{p}^2}{2mi} + (\vec{x}-\vec{y})\cdot\vec{p}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Usando a integral do tipo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} due^{i(au^2+u)} = \sqrt{\frac{i\pi}{a}}e^{-i\frac{b^2}{4a}},$$

temos que,

$$\mathcal{K}_\theta(\vec{x},T;\vec{y},0) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{im}{(im\theta - T)}\right] \quad exp\left\{ -\frac{im}{2}\frac{(\vec{x}-\vec{y})^2}{(im\theta - T)}\right\}. \tag{4.29}$$

Note que se impusermos o limite $\theta \to 0$ recuperamos a forma original do propagador para a partícula livre no espaço onde as componentes das coordenadas comutam. E, no limite de $T \to 0$, (4.29) toma a forma,

$$\mathcal{K}_\theta(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2\pi\theta} \quad exp\left\{ -\frac{(\vec{x}-\vec{y})^2}{2\theta}\right\}. \tag{4.30}$$

Portanto, podemos concluir que no limite $T \to 0$ *o propagador não é uma função delta*,

$$\lim_{T\to 0}\mathcal{K}_\theta(\vec{x},\vec{y}) \neq \delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{4.31}$$

mas uma gaussiana no espaço não comutativo onde a melhor localização possível da partícula é uma pequena região, uma célula de área θ. Mas, se tomarmos o limite do propagador para o parâmetro θ ficando cada vez mais próximo de zero,

$$\lim_{\theta\to 0}\mathcal{K}_\theta(\vec{x},\vec{y}) = \delta_\theta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{4.32}$$

ficamos com uma função delta modificada no espaço barrado.

4.2.2 Unitariedade do Propagador

Da propriedade de unitariedade do operador evolução,

$$\mathcal{U}(t,t_0)\mathcal{U}^{\dagger}(t,t_0) = \hat{1}. \tag{4.33}$$

Tomando o conjunto completo,

$$\int d^2\vec{z}|\vec{z}\rangle\langle\vec{z}| = \hat{1}, \tag{4.34}$$

e como a variável de integração é $\vec{z}$, podemos aplicar $\langle\vec{x}|$ à esquerda e $|\vec{y}\rangle$ à direita, obtendo

$$\int d^2\vec{z}\mathcal{K}_{\theta}(\vec{x},\vec{z};t,t_0)\mathcal{K}^{\dagger}_{\theta}(\vec{z},\vec{y};t,t_0) = \delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \tag{4.35}$$

onde o propagador $\mathcal{K}_{\theta}$ tem a forma (4.29). Então identificando a integral como

$$\mathcal{I} = \int d^2\vec{z}\mathcal{K}(\vec{x},\vec{z};t,t_0)\mathcal{K}^{\dagger}(\vec{z},\vec{y};t,t_0). \tag{4.36}$$

Já vimos que o propagador $\mathcal{K}_{\theta}(\vec{x},T;\vec{y},0)$ é identificado como uma função delta apenas no limite $\theta \to 0$. Então calculemos a integral em (4.36), primeiro identificando o termo

$$\frac{1}{2}\frac{im}{(im\theta - t)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\theta + \frac{it}{m}\right)} \equiv \alpha_R - i\alpha_I \tag{4.37}$$

em que,

$$\alpha_R \equiv \frac{1}{2}\frac{\theta}{\theta^2 + \left(\frac{it}{m}\right)^2}, \qquad \alpha_I \equiv \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{t}{m}\right)}{\theta^2 + \left(\frac{it}{m}\right)^2}. \tag{4.38}$$

E definido,

$$\beta \equiv \alpha_R - i\alpha_I \tag{4.39}$$

o nosso propagador (4.29) fica da seguinte forma,

$$\mathcal{K}(\vec{x},\vec{z};t) = \frac{\beta}{\pi}e^{-\beta(\vec{x}-\vec{z})^2}. \tag{4.40}$$

Com isso (4.36) fica

$$\mathcal{I} = \frac{\beta\beta^*}{\pi^2}\int d^2\vec{z}e^{-\beta(\vec{x}-\vec{z})^2}e^{-\beta^*(\vec{z}-\vec{y})^2}. \tag{4.41}$$

Mas o expoente fica:

$$-\beta(\vec{x}-\vec{z})^2 - \beta^*(\vec{z}-\vec{y})^2 = -(\beta+\beta^*)\vec{z}^2 + 2(\beta\vec{x}+\beta^*\vec{y})\vec{z} - (\beta\vec{x}^2+\beta^*\vec{y}^2).$$

Logo,

$$\mathcal{I}=\frac{1}{\pi^2}|\beta|^2 e^{-(\beta\vec{x}^2+\beta^*\vec{y}^2)}\int d^2\vec{z}e^{-\left[(\beta+\beta^*)\vec{z}^2-2(\beta\vec{x}-\beta^*\vec{y})\vec{z}\right]}, \tag{4.42}$$

completando quadrado temos que:

$$\begin{aligned}(\beta+\beta^*)\vec{z}^2-2(\beta\vec{x}-\beta^*\vec{y})\vec{z} &= (\beta+\beta^*)\left[\vec{z}-\frac{2(\beta\vec{x}+\beta^*\vec{y})}{2(\beta+\beta^*)}\right]^2- \\ &- \frac{[2(\beta\vec{x}+\beta^*\vec{y})]^2}{4(\beta+\beta^*)}.\end{aligned}$$

E definindo,

$$\frac{(\beta\vec{x}+\beta^*\vec{y})}{(\beta+\beta^*)}\equiv\vec{A}$$

a grandeza $\mathcal{I}$ fica da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{1}{\pi^2}|\beta|^2 e^{-(\beta\vec{x}^2+\beta^*\vec{y}^2)}\int d^2\vec{z}e^{-(\beta+\beta^*)\left[(\vec{z}-\vec{A})^2-\vec{A}^2\right]} \\ &= \frac{1}{\pi^2}|\beta|^2 e^{-(\beta\vec{x}^2+\beta^*\vec{y}^2)}\int d^2\vec{z}e^{-(\beta+\beta^*)(\vec{z}^2-2\vec{z}\vec{A})} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{|\beta|^2}{\alpha_R}e^{-(\beta\vec{x}^2+\beta^*\vec{y}^2)}e^{\frac{(\beta\vec{x}+\beta^*\vec{y})^2}{(\beta+\beta^*)}}\end{aligned} \tag{4.43}$$

em que $(\beta+\beta^*)=2\alpha_R$. Mas,

$$\begin{aligned}-(\beta\vec{x}^2+\beta^*\vec{y}^2)+\frac{(\beta\vec{x}+\beta^*\vec{y})^2}{(\beta+\beta^*)} &= \frac{-(\beta\vec{x}^2+\beta^*\vec{y}^2)(\beta+\beta^*)+(\beta\vec{x}+\beta^*\vec{y})^2}{(\beta+\beta^*)} \\ &= \frac{-\left[|\beta|^2\vec{x}^2+|\beta|^2\vec{y}^2-2|\beta|^2\vec{x}\vec{y}\right]}{(\beta+\beta^*)} \\ &= \frac{-|\beta|^2(\vec{x}-\vec{y})^2}{2\alpha_R}.\end{aligned} \tag{4.44}$$

Assim,

$$\mathcal{I}=\frac{1}{2\pi}\frac{|\beta|^2}{\alpha_R}e^{-\frac{|\beta|^2(\vec{x}-\vec{y})^2}{2\alpha_R}}. \tag{4.45}$$

Mas note que:

$$\frac{|\beta|^2}{\alpha_R}=\frac{\beta\beta^*}{\alpha_R}=\frac{(\alpha_R^2+\alpha_I^2)}{\alpha_R}$$

em que

$$\begin{aligned}\Rightarrow(\alpha_R^2+\alpha_I^2) &= \left[\frac{1}{2}\frac{\theta}{\theta^2+\left(\frac{t}{m}\right)^2}\right]^2+\left[\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{t}{m}\right)}{\theta^2+\left(\frac{t}{m}\right)^2}\right]^2 \\ &= \frac{\left[\theta^2+\left(\frac{t}{m}\right)^2\right]}{4\left[\theta^2+\left(\frac{t}{m}\right)^2\right]^2}=\frac{1}{4\left[\theta^2+\left(\frac{t}{m}\right)^2\right]} \\ &= \frac{1}{2\theta}\left[\frac{1}{2}\frac{\theta}{\theta^2+\left(\frac{t}{m}\right)^2}\right] \\ &= \frac{\alpha_R}{2\theta}.\end{aligned}$$

Com isso,

$$\frac{|\beta|^2}{\alpha_R} = \frac{1}{2\theta}.$$

Dessa forma temos,

$$\mathcal{I} = \left(\frac{1}{4\pi\theta}\right) e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{y})^2}{4\theta}}. \tag{4.46}$$

Assim como o propagador da partícula livre se mostrou ser uma delta de Dirac apenas no limite comutativo, este resultado nos diz o kernel livre só se torna unitário também sob o limite $\theta \to 0$.

4.3 Pacote Gaussiano no Plano N.C. e Evolução Temporal

4.3.1 Construção do Pacote de ondas

Estamos em busca de um pacote de ondas, em analogia com com a mecânica quântica convencional, que possa representar a partícula livre no plano não-comutativo. Então, definindo o *operador pacote de ondas* da seguinte maneira,

$$\psi_G(\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2) \equiv \mathcal{N} e^{-\frac{\left(\hat{\mathbf{q}}_1^2 + \hat{\mathbf{q}}_2^2\right)}{2\delta^2}} \tag{4.47}$$

onde $\mathcal{N}$ é uma constante de normalização a ser encontrada e onde os operadores $\hat{\mathbf{q}}_1$ e $\hat{\mathbf{q}}_2$ obedecem às regras de comutação (4.1). Como foi argumentado na sessão 4.1, pode-se associar uma função de coordenadas no espaço não-comutativo a uma função de coordenadas médias neste espaço. Logo, tomando a média do operador pacote de ondas em (4.47) nos estados coerentes de (4.7):

$$\psi_G(\vec{z}) \equiv \langle z|\psi_G(\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2)|z\rangle \tag{4.48}$$

$$\psi_G(\vec{z}) = N\langle z|e^{-\frac{\left(\hat{\mathbf{q}}_1^2 + \hat{\mathbf{q}}_2^2\right)}{2\delta^2}}|z\rangle, \tag{4.49}$$

e, tendo definido os operadores de criação/aniquilação em (4.2) e (4.3), de onde obteremos

$$\left(\hat{\mathbf{q}}_1^2 + \hat{\mathbf{q}}_2^2\right) = \hat{\mathbf{N}} + \theta, \tag{4.50}$$

com

$$\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{A}}^\dagger \hat{\mathbf{A}}, \tag{4.51}$$

teremos:

$$\psi_G(\vec{z}) = Ne^{-\frac{\theta}{2\delta^2}}\langle z|e^{-\frac{\hat{\mathbf{N}}}{2\delta^2}}|z\rangle. \tag{4.52}$$

Se propormos uma mudança de variável do tipo,

$$\hat{\mathbf{A}}^{'} \longrightarrow \frac{\hat{\mathbf{A}}}{\sqrt{2\theta}}, \tag{4.53}$$

levando à regra de comutação

$$[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}}^{'\dagger}] = 1. \tag{4.54}$$

Dessa forma podemos realizar os procedimentos usuais análogos aos da mecânica quântica padrão em que

$$\hat{\mathbf{A}}^{'}|z^{'}\rangle = z^{'}|z^{'}\rangle, \tag{4.55}$$

$$\langle z^{'}|\hat{\mathbf{A}}^{'\dagger} = \langle z^{'}|z^{'*} \tag{4.56}$$

onde $z^{'} = z/\sqrt{2\theta}$. E também,

$$|z^{'}\rangle = e^{-\frac{1}{2}z^{'}z^{'*}}e^{-\frac{1}{2}z^{'}\hat{\mathbf{A}}^{'\dagger}}|0\rangle \tag{4.57}$$

com $\hat{\mathbf{A}}^{'}|0\rangle = 0$. Esses estados $|z^{'}\rangle$ podem ser expandidos na base dos estados:

$$|n^{'}\rangle = \frac{\left(\hat{\mathbf{A}}^{'\dagger}\right)^{n^{'}}}{\sqrt{n^{'}!}}|0\rangle \tag{4.58}$$

em que,

$$\hat{\mathbf{N}}^{'}|n^{'}\rangle = n^{'}|n^{'}\rangle, \tag{4.59}$$

onde

$$\hat{\mathbf{N}}^{'} = \frac{\hat{\mathbf{N}}}{2\theta} \longrightarrow \hat{\mathbf{N}} = 2\theta\hat{\mathbf{N}}^{'}. \tag{4.60}$$

Com isso,

$$|z^{'}\rangle = e^{-\frac{|z^{'}|^2}{2}}\sum_{n^{'}=0}^{n^{'}=\infty}\frac{(z^{'})^{n^{'}}}{\sqrt{n^{'}!}}|n^{'}\rangle$$

$$e^{-\frac{\theta\hat{\mathbf{N}}^{'}}{\delta^2}}|z^{'}\rangle = e^{-\frac{|z^{'}|^2}{2}}\sum_{n^{'}=0}^{n^{'}=\infty}\frac{(z^{'})^{n^{'}}}{\sqrt{n^{'}!}}e^{-\frac{\theta\hat{\mathbf{N}}^{'}}{\delta^2}}|n^{'}\rangle$$

$$\langle z^{'}|e^{\xi\hat{\mathbf{N}}^{'}}|z^{'}\rangle = e^{-|z^{'}|^2}\sum_{n^{'},m^{'}}\frac{(z^{'*})^{n^{'}}(z^{'})^{n^{'}}}{\sqrt{n^{'}!}\sqrt{m^{'}!}}e^{\xi\hat{\mathbf{N}}^{'}}\delta_{n^{'},m^{'}}$$

onde $\xi = -\frac{\theta}{\delta^2}$. Logo

$$\langle z^{'}|e^{\xi\hat{\mathbf{N}}^{'}}|z^{'}\rangle = e^{-|z^{'}|^2}\sum_{n^{'}}\frac{(z^{'*})^{n^{'}}(z^{'})^{n^{'}}}{n^{'}!}e^{\xi n^{'}}$$

$$= e^{-|z^{'}|^2} \sum_{n^{'}} \frac{|z^{'}|^{2n^{'}}}{n^{'}!} e^{\xi n^{'}}$$

$$\langle z^{'}| e^{\xi \hat{\mathbf{N}}^{'}} |z^{'}\rangle = e^{-|z^{'}|^2 \left(1 - e^{\xi}\right)}. \tag{4.61}$$

Mas $z^{'} = z/2\theta$, então

$$\langle z^{'}| e^{\xi \hat{\mathbf{N}}^{'}} |z^{'}\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2\theta} \left(1 - e^{\xi}\right)}. \tag{4.62}$$

Agora, podemos expandir o termo $\left(1 - e^{\xi}\right)$ no expoente e considerar apenas termos de 2ª ordem em θ, já que tal parâmetro é muito pequeno em primeira ordem:

$$\langle z^{'}| e^{\xi \hat{\mathbf{N}}^{'}} |z^{'}\rangle = e^{-\frac{\lambda_\theta |z|^2}{2\delta^2}} \tag{4.63}$$

onde $\lambda_\theta = 1 - \frac{\theta}{\delta^2}$. Portanto, nosso pacote de ondas (14) fica da forma:

$$\psi_G(\vec{z}) = N e^{-\frac{\theta}{2\delta^2}} e^{-\frac{\lambda_\theta |z|^2}{2\delta^2}} \tag{4.64}$$

onde, aqui, $\vec{z} = \vec{x} = (x_1, x_2)$ e $|z|^2 = x_1^2 + x_2^2$ e cuja função normalizada pode ser posta, em uma dimensão, como

$$\psi_G(x_1) = \left[\frac{\sqrt{\lambda_\theta}}{\delta\sqrt{\pi}}\right]^{1/2} e^{-\lambda_\theta \frac{x_1^2}{2\delta^2}} \tag{4.65}$$

e de forma análoga para a procura de $\psi_G(x_2)$.

4.3.2 Evolução Temporal

O pacote de ondas que representa a partícula livre no plano N.C. é da forma (4.65), e usando o propagador livre de Feynman construído anteriormente, em uma dimensão:

$$K_\theta(x_1 - x_1^{'}, t) = \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2\pi i m}{(im\theta - t)}\right]^{1/2} e^{-\frac{im}{2} \frac{(x_1 - x_1^{'})^2}{(im\theta - t)}}. \tag{4.66}$$

Definindo,

$$\Omega_\theta(t) = \frac{m}{(im\theta - t)} \tag{4.67}$$

daí,

$$K_\theta(x_1 - x_1^{'}, t) = \left[\frac{i}{(2\pi)} \Omega_\theta(t)\right]^{1/2} e^{-\frac{i\Omega_\theta(t)}{2}(x_1 - x_1^{'})^2}. \tag{4.68}$$

Em geral, a evolução temporal de uma função de onda inicial $\psi(\vec{r}, t_0)$, usando o formalismo de propagador de Feynman, é

$$\psi(\vec{r^{''}}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{r^{'}} K(\vec{r^{''}}, \vec{r^{'}}; t, t_0) \psi(\vec{r^{'}}, t_0). \tag{4.69}$$

No nosso caso,

$$\psi(x_1,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1^{'}K(x_1,x_1^{'};t)\psi(x_1^{'},0) \tag{4.70}$$

logo,

$$\psi(x_1,t)=Ne^{-\frac{i\Omega_\theta(t)}{2}x_1^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1^{'}e^{i\left[-\frac{1}{2}\left(\Omega_\theta(t)+\frac{\lambda_\theta}{i\delta^2}\right)x_1^{'2}+\Omega_\theta(t)x_1x_1^{'}\right]}$$

onde,

$$N=\left[\frac{i\sqrt{\lambda_\theta}}{(2\pi)}\frac{\Omega_\theta(t)}{\delta\sqrt{\pi}}\right]^{1/2}.$$

Identificando a integral como do tipo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}due^{i\left[au^2+bu\right]}=\sqrt{\frac{i\pi}{a}}e^{-i\frac{b^2}{4a}}.$$

Então,

$$\psi(x_1,t)=Ne^{-\frac{i\Omega_\theta(t)}{2}x_1^2}\sqrt{\frac{i\pi}{a}}e^{-i\frac{b^2}{4a}} \tag{4.71}$$

onde aqui,

$$a=-\frac{1}{2}\left(\Omega_\theta(t)+\frac{\lambda_\theta}{i\delta^2}\right),\qquad b=\Omega_\theta(t)x_1$$

e substituindo ficamos com,

$$\psi(x_1,t)=\left[\frac{\Omega_\theta(t)}{\delta\sqrt{\pi\lambda_\theta}\left(\Omega_\theta(t)+\frac{\lambda_\theta}{i\delta^2}\right)}\right]^{1/2}e^{\frac{i}{2}\left[-\Omega_\theta(t)+\frac{\Omega_\theta^2(t)}{\Omega_\theta(t)+\frac{\lambda_\theta}{i\delta^2}}\right]x_1^2}. \tag{4.72}$$

Mas note que,

$$\left[-\Omega_\theta(t)+\frac{\Omega_\theta^2(t)}{\Omega_\theta(t)+\frac{\lambda_\theta}{i\delta^2}}\right]=\frac{1}{\delta^2}\frac{i\lambda_\theta\Omega_\theta(t)}{\left(\Omega_\theta(t)+\frac{\lambda_\theta}{i\delta^2}\right)}$$

daí,

$$\psi(x_1,t)=\left[\frac{1}{\delta\sqrt{\pi\lambda_\theta}}\right]^{1/2}\left[\frac{\Omega_\theta(t)}{\left(\Omega_\theta(t)+\frac{\lambda_\theta}{i\delta^2}\right)}\right]^{1/2}e^{-\frac{\lambda_\theta}{2\delta^2}\left[\frac{\Omega_\theta(t)}{\left(\Omega_\theta(t)+\frac{\lambda_\theta}{i\delta^2}\right)}\right]x_1^2} \tag{4.73}$$

onde,

$$\Omega_\theta(t)=\frac{m}{(im\theta-t)}.$$

Mas observe ainda que:

$$\frac{\Omega_\theta(t)}{\left(\Omega_\theta(t)+\frac{\lambda_\theta}{i\delta^2}\right)}=\left[\frac{m}{(im\theta-t)}\right]\div\left[\frac{m}{(im\theta-t)}+\frac{\lambda_\theta}{i\delta^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\left[1+\lambda_\theta\left(\frac{\theta}{\delta^2}+\frac{it}{m\delta^2}\right)\right]}=\frac{1}{\sigma_\theta+\frac{it\lambda_\theta}{m\delta^2}} \tag{4.74}$$

onde foi definido

$$\sigma_\theta\equiv 1+\frac{\theta\lambda_\theta}{\delta^2} \tag{4.75}$$

ou,

$$\frac{1}{\delta^2}\frac{\Omega_\theta(t)}{\left(\Omega_\theta(t)+\frac{\lambda_\theta}{i\delta^2}\right)}=\frac{1}{\delta^2}\frac{\left(\sigma_\theta-\frac{it\lambda_\theta}{m\delta^2}\right)}{\left(\sigma_\theta^2+\frac{t^2\lambda_\theta^2}{m^2\delta^4}\right)}. \tag{4.76}$$

E definindo,

$$B_\theta^2(t)\equiv\delta^2\left[\sigma_\theta^2+\frac{t^2\lambda_\theta^2}{m^2\delta^4}\right] \tag{4.77}$$

temos que a função de onda normalizada fica da forma, com $\lambda_\theta, \sigma_\theta, B_\theta(t) \in \Re$,

$$\psi(x_1,t)=\left[\frac{\sqrt{\lambda_\theta\sigma_\theta}}{\sqrt{\pi}B_\theta(t)}\right]^{1/2} e^{-\frac{\lambda_\theta x_1^2}{2B_\theta^2(t)}\left(\sigma_\theta-\frac{it\lambda_\theta}{m\delta^2}\right)} \tag{4.78}$$

onde,

$$\lambda_\theta\equiv 1-\frac{\theta}{\delta^2},\qquad \sigma_\theta\equiv 1+\frac{\theta\lambda_\theta}{\delta^2}$$

de forma que, se $\theta\longrightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\lambda_\theta &\longrightarrow 1,\qquad \sigma_\theta\longrightarrow 1\\ B_\theta(t) &\longrightarrow \delta\sqrt{1+\frac{t^2}{m^2\delta^4}}=B(t)\end{aligned}$$

recuperamos a forma padrão da função de onda no espaço comutativo,

$$\psi(x_1,t)=\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}B(t)}\right]^{1/2} e^{-\frac{x_1^2}{2B^2(t)}\left(1-\frac{it}{m\delta^2}\right)}. \tag{4.79}$$

4.4 Versão Não-comutativa da Transformada de Fourier

A versão não-comutativa da transformada de Fourier leva em conta o fato dito anteriormente de que podemos associar a toda função $F(\hat{\mathbf{q}}_1,\hat{\mathbf{q}}_2)$ uma função $F(z)$ da forma como foi definido em (4.10). A Transformada de Fourier pode ser definida de tal forma que

$$F(z)\equiv\int\frac{d^2p}{2\pi}f(p)\langle z|exp(ip_j\hat{\mathbf{q}}_j)|z\rangle \tag{4.80}$$

nas sessões anteriores vimos que $\langle z|exp(ip_j\hat{\mathbf{q}}_j)|z\rangle$ significa o valor médio da onda plana, levando em conta a não-comutatividade das coordenadas, nos estados coerentes. Isso nos fornece a versão não-comutativa da onda plana, como foi visto na sessão (4.1). Dessa forma, a equação anterior pode ser posta na forma

$$F(\vec{x})=\int\frac{d^2p}{2\pi}f(p)exp\left\{-\frac{\theta\vec{p}^2}{4}+\vec{p}\cdot\vec{x}\right\} \tag{4.81}$$

onde $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{p} = (p_1, p_2)$.

Esse resultado indica que a não-comutatividade produz uma gaussiana com um fator de amortecimento. Se escolhermos $f(p) = constante$, que corresponde ao máximo espalhamento no momento[30], portanto não sabemos sobre o momento mas sabemos sobre sua posição média no espaço não-comutativo, a transformada de Fourier leva ao resultado

$$F(\vec{x}) = \left(\frac{1}{2\pi\theta}\right) exp\left\{-\frac{\vec{x}^2}{2\theta}\right\}, \tag{4.82}$$

que identificamos como uma distribuição gaussiana. Pode ser visto que a gaussiana se lembra da não-comutatividade do espaço por um fator oscilante.

Mesmo que o momento tenha espalhamento máximo no espaço não-comutativo, o melhor que podemos dizer é que a incerteza nas coordenadas se reduz a uma largura mínima proporcional a $\sqrt{\theta}$, indicando um borrão no espaço. E, no limite $\theta \rightarrow 0$, recuperamos a função delta de Dirac usual. Como resultado, pode-se afirmar que a não-comutatividade pode ser introduzida na transformada de Fourier, substituindo ondas planas por pacotes de ondas gaussianas.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Este trabalho discute que a não-comutatividade no plano pode ser formulada com um certo formalismo expondo que os estados do espaço de Hilbert quântico, $|\psi)$, formados por estados coerentes, são estados de incerteza mínima na posição, ja que eles saturam as relações de incerteza induzida pela relação de comutação (2.1). Mostra também que a função de onda em tal espaço permanece normalizada a medida que o tempo passa. É discutido ainda que é possível construir estados que saturam qualquer uma das relações de incerteza na posição mas não é possível a construção de estados que saturam mais de uma dessas relações de incerteza simultaneamente, ou seja, para um dado estado no máximo uma das relações das desigualdades (3.33)-(3.35) pode ser saturada.

Foi construída a versão não-comutativa da onda plana, que leva em conta a não-comutatividade das coordenadas, através da média tomada em estados coerentes, mostrando que em tal espaço a onda plana contém um fator gaussiano acoplado e que, no limite $\theta \to 0$, se reduz à onda plana usual. Esses estados coerentes descrevem estados físicos através de coordenadas médias neste espaço. Foi visto também um modelo de integral de trajetória para a mecânica quântica no plano não-comutativo e avaliado o propagador para a partícula livre e após a construção de um pacote de ondas, foi feita sua evolução recuperando os resultados conhecidos no limite comutativo. A versão não-comutativa da transformada de Fourier, que ao tomarmos $f(p) = constante$, que equivale a um máximo espalhamento no momento, obtemos uma distribuição gaussiana que se lembra da não-comutatividade do espaço por um fator gaussiano em θ, mostrando que a incerteza nas coordenadas se reduz a uma largura mínima proporcional a $\sqrt{\theta}$. Como resultado, pode-se afirmar que a não-comutatividade pode ser introduzida na transformada de Fourier, substituindo ondas planas por pacotes de ondas gaussianas descritas por posições médias em tal espaço.

Uma generalização imediata desse trabalho seria estudar a integral de caminho de outros tipos de interação Hamiltonianas usando o mecanismo de média em estados coerentes e também utilizando a representação da álgebra vista no capítulo 3, para hamiltonianas quadráticas. E também usar essa formulação de média de uma função em estados coerentes e construir uma matriz de covariância dos observáveis de posição. E na construção da função de Green, estudar questões abordadas em T.Q.C. relacionadas à divergência UV/IR.

Apêndice A

Operador Unitário, Operador de Translação e Operador de Rotação

Um operador linear, a nível de Mecânica quântica usual, é dito unitário se satisfaz a relação

$$\mathcal{U}\mathcal{U}^{\dagger} = \mathcal{U}^{\dagger}\mathcal{U} = I \tag{A.1}$$

em que I é o operador identidade. Sendo $\mathcal{U}$ um operador unitário, considere as transformações das funções de onda,

$$\psi^{'}(\vec{r}) = \mathcal{U}\psi(\vec{r}) \qquad e \qquad \phi^{'}(\vec{r}) = \mathcal{U}\phi(\vec{r}). \tag{A.2}$$

Então, sabemos que uma transformação, implementada por um operador unitário, conserva os produtos escalares[25]. O operador deslocamento ou de translação, definido por $\mathbf{D}_a\psi(x) = \psi(x+a)$ para um deslocamento na direção de x, em que a é um número real. Assim, podemos escrever,

$$\psi^{'}(x) = \mathbf{D}_a\psi(x) = \psi(x+a) \tag{A.3}$$

em que $T_x = -i\frac{\partial}{\partial x}$. Observe que a diferença entre $\psi^{'}(x)$ e $\psi(x)$ é originada pela ação do operador iaT_x sobre a função $\psi(x)$. Chamamos T_x de operador infinitesimal de translação ao longo da direção de x. Em mecânica Quântica, relacionamos o operador T_x ao operador momento linear $p_x = -i\frac{\partial}{\partial x}$. Assim, o gerador infinitesimal de translação é posto como

$$T_x = \frac{p_x}{\hbar}. \tag{A.4}$$

Pode-se verificar que $\mathbf{D}_a^{\dagger}\mathbf{D}_a = I$ é unitário e que $T_x^{\dagger} = T_x$ é hermitiano. Mas sabemos que uma translação finita numa distância a é gerada por uma série de translações infinitesimais, em que devemos considerar um limite $\lim_{n\to\infty}(\frac{a}{n})$. Então, temos

$$\psi^{'}(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + i\frac{a}{n}\frac{p_x}{\hbar}\right)\psi(x) = e^{i\frac{ap_x}{\hbar}}\psi(x). \tag{A.5}$$

Generalizando para três dimensões,

$$\psi^{'}(\vec{r}) = e^{i\frac{a\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}}\psi(\vec{r}). \tag{A.6}$$

Logo, o operador, unitário, de translação fica definido como

$$\mathbf{D}_{\vec{r}} = e^{i\frac{a\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} \tag{A.7}$$

onde $\mathbf{D}_{\vec{r}}$ é dotado de momento linear que é o gerador de translação.

De forma semelhante podemos obter um operador dotado de momento angular responsável por uma rotação de certo sistema físico. dessa forma podemos definir

$$\mathbf{R}(\delta\vec{\varphi}) = 1 + \frac{i}{\hbar}\vec{\delta}\varphi\cdot\ \vec{\mathbf{L}} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\delta}\varphi\cdot\ \vec{\mathbf{L}}} \tag{A.8}$$

que é o operador de rotação unitário, que, atuando sobre a função de onda de um sistema, produz a mesma função de onda rodada por um ângulo $\delta\varphi$. Sabemos também de que se comuta com o hamiltoniano do sistema então ele é uma constante de movimento[25].

Apêndice B

Matriz de Covariância

Afim de expressar o desvio quadrático médio σ_g^χ, pode-se definir a quantidade

$$g_\chi \equiv g - \langle\chi|g|\chi\rangle\hat{1} \tag{B.1}$$

que é uma espécie de operador deslocado, onde a média é tomada no estado $|\chi\rangle$. Com isso pode-se coloca-lo como

$$\sigma_g^2 = \langle\chi|g_\chi^2|\chi\rangle. \tag{B.2}$$

Considerando agora os desvios quadráticos médios no estado $|\chi\rangle$, σ_g^2 e σ_h^2, de dois observáveis g e h, não necessariamente compatíveis, resulta, usando a desigualdade de Schwartz, que o produto $\sigma_g^2\sigma_h^2$ satisfaz à desigualdade escrita em termos dos operadores deslocados,

$$\sigma_g^2\sigma_h^2 = \langle\chi|g_\chi^2|\chi\rangle\langle\chi|h_\chi^2|\chi\rangle \geq |\langle\chi|g_\chi h_\chi|\chi\rangle|^2. \tag{B.3}$$

O valor esperado do produto $g_\chi h_\chi$ é em geral complexo se esses operadores não comutam. Assim,

$$\begin{aligned} |\langle\chi|g_\chi h_\chi|\chi\rangle|^2 &= (Re\langle\chi|g_\chi h_\chi|\chi\rangle)^2 + (Im\langle\chi|g_\chi h_\chi|\chi\rangle)^2 \\ &\geq (Im\langle\chi|g_\chi h_\chi|\chi\rangle)^2 . \end{aligned} \tag{B.4}$$

Usando a hermiticidade de g e h,

$$\begin{aligned} Im\langle\chi|g_\chi h_\chi|\chi\rangle &= \frac{1}{2i}\left[\langle\chi|g_\chi h_\chi|\chi\rangle - \langle\chi|g_\chi h_\chi|\chi\rangle^*\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[\langle\chi|g_\chi h_\chi|\chi\rangle - \langle\chi|h_\chi g_\chi|\chi\rangle^*\right] \\ &= \frac{1}{2i}\langle\chi|[g_\chi, h_\chi]|\chi\rangle = \frac{1}{2i}\langle\chi|[g,h]|\chi\rangle. \end{aligned} \tag{B.5}$$

De onde

$$\sigma_g \sigma_h \geq \frac{\langle \chi | [g,h] | \chi \rangle}{2i}. \tag{B.6}$$

Nessa relação há um *limite inferior* para o produto dos desvios quadráticos médios associados aos dois operadores num estado $|\chi\rangle$ em termos dos valores médios nesse estado do comutador dos operadores associados a esses observáveis e pode portanto ser visto como uma relação geral de incerteza. Esse limite inferior em geral depende do estado considerado. Ele pode, em particular, ser zero mesmo se os observáveis não sejam compatíveis, como ocorre, por exemplo, se $|\chi\rangle$ é autovetor de um dos operadores. Existe porem uma situação em que essa relação geral de incerteza implica uma *limitação independente do estado considerado* para o produto dos desvios quadráticos médios. Ela corresponde ao caso em que o comutador $[g, h]$ é um múltiplo da unidade, como ocorre com os operadores associados às coordenadas e ao seu momento conjugado,

$$[p, q] = -i\hbar \hat{1} \tag{B.7}$$

que leva à relação de incerteza,

$$\sigma_p \sigma_q \geq \frac{\hbar}{2} \tag{B.8}$$

ou seja, para qualquer vetor de estado o produto $\sigma_p \sigma_q$ é sempre maior que $\frac{\hbar}{2}$. Estados para os quais essa desigualdade vale como igualdade são chamados de *estados de incerteza mínima.*

Mas o fato do quadrado da parte real ter sido eliminada arbitrariamente em (B.4) restringe o conjunto de estados de incerteza mínima[11], pois para que a relação de incerteza valha como igualdade é preciso não apenas que a desigualdade de Schwartz valha como igualdade mas também que o quadrado da parte real desprezado se anule. Schrodinger havia percebido isso e num dos seus trabalhos ele conserva a contribuição da pate real[28], sendo levado à desigualdade,

$$\sigma_g^2 \sigma_h^2 \geq \left[\frac{\langle \chi | (g_\chi h_\chi + h_\chi g_\chi) | \chi \rangle}{2} \right]^2 + \frac{1}{2} |\langle \chi | [g, h] | \chi \rangle|^2 \tag{B.9}$$

que interpreta como estabelecendo uma relação entre três quantidades : (a) o produto dos quadrados dos desvios quadráticos médios; (b) o módulo quadrado da metade do valor médio e; (c) "uma quantidade que pode ser definida como o quadrado do desvio médio do produto, com a condição de que a não-comutatividade seja levada em conta, isto é, o desvio médio do produto deve ser definido como a média aritmética de

$$\langle \chi | g_\chi h_\chi | \chi \rangle \qquad e \qquad \langle \chi | h_\chi g_\chi | \chi \rangle \tag{B.10}$$

que são as expressões *mistas* completamente análogas a σ_g^2 e σ_h^2". Esta terceira quantidade recebe o nome de *covariância* dos operadores g e h no estado $|\chi\rangle$. Definindo-a como σ_{gh}^2 e definindo a matriz de covariância como

$$\Sigma_{g,h} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_g^2 & \sigma_{gh} \\ \sigma_{hg} & \sigma_h^2 \end{pmatrix}$$

onde pode ser visto que a relação geral de incerteza de Schrodinger pode ser escrita em termos do determinante de $\Sigma_{g,h}$ como

$$det(\Sigma_{g,h}) \geq \frac{1}{2}|\langle\chi|[g,h]|\chi\rangle|^2 \tag{B.11}$$

em que, para o caso das variáveis canônicas p e q, satisfazendo as relações de incerteza de Heisenberg, é

$$det(\Sigma_{g,h}) \geq \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2. \tag{B.12}$$

Essa relação difere da relação de incerteza de Heisenberg por termos que envolvem a covariância σ_{pq}. Schrodinger observa ainda que na teoria clássica das flutuações estatísticas o anulamento da covariância é uma condição *necessária* (mas não suficiente) para a independência estatística das flutuações de cada uma das variáveis e que mesmo no caso de variáveis dinâmicas quânticas canonicamente conjugadas, existem vetores de estado $|\chi\rangle$ para os quais a covariância *não é nula*, indicando a presença de correlações entre as respectivas flutuações quânticas.

Apêndice C

Propagador Livre: outro ponto de vista

Uma propriedade fundamental para o estudo de integral de caminho é a amplitude de probabilidade, pois podemos calcular a amplitude de transição $\langle x^{'}, t^{'} | x_0, t_0 \rangle$ para uma partícula que inicialmente está no estado $|x_0, t_0\rangle$ no tempo t_0 e evoluir para a posição $|x_{'}, t_{'}\rangle$ num tempo $t_{'}$. Segundo Feynman e Dirac[12], uma partícula se move simultaneamente ao longo de todas as trajetórias possíveis ligando os pontos finais e iniciais. Mas nem todas as trajetórias são iguais ainda que dizem respeito a funções de onda com mesmo valor absoluto: $S[y(t)]$ de um certo caminho que liga os dois pontos de extremidade fixa determina a fase da amplitude de propagação associado a essa trajetória. O fator de fase correspondente a qualquer caminho individual pode ser escrito na forma $exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[y(t), p(t)]\right\}$ e uma boa maneira de escrever o comportamento quântico da partícula é através da soma dos possíveis caminhos traçados por ela. A amplitude de evolui-la de x_0 até x é

$$A(x_0, x) = \sum_{x_0}^{x} \Phi[y(t), p(t)] \tag{C.1}$$

onde

$$\Phi[y(t), p(t)] = K \cdot e^{\frac{i}{\hbar}S[y(t),p(t)]}. \tag{C.2}$$

Uma soma desse tipo é uma integral funcional. Então, dividindo o intervalo de tempo $[t, t_0]$por $N + 1$ subintervalos, ou seja, $t_1, t_2, \cdots, t_i, \cdots, t_{N+1}$ de modo que

$$t = t_0 \qquad , \qquad t^{'} = t_{N+1} \tag{C.3}$$

onde pode-se escolher os subintervalos acima de mesmo comprimento,

$$t_{i+1} - t_i = \varepsilon \tag{C.4}$$

de tal forma que

$$t_k = t + k\varepsilon \qquad , \quad k = 0, \cdots, N+1. \tag{C.5}$$

Logo, a amplitude entre dois pontos vizinhos é

$$A(q_{i+1}, t_{i+1}; q_i, t_i) \equiv \langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_i, t_i \rangle. \tag{C.6}$$

Assim, a amplitude do primeiro subintervalo é

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{q}, \varepsilon | \bar{q}, 0 \rangle &= \langle \tilde{q} | e^{i\varepsilon H} | \bar{q} \rangle \\
&= \delta(\tilde{q} - \bar{q}) - i\varepsilon \langle \tilde{q} | H | \bar{q} \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \int \frac{dp}{2\pi} exp \left\{ i \left[p(\tilde{q} - \bar{q}) - \varepsilon H \left(p, \frac{\tilde{q} + \bar{q}}{2} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{C.7}$$

generalizando,

$$\langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_i, t_i \rangle = \int \frac{dp_i}{2\pi} exp \left\{ i \left[p_i (q_{i+1} - q_i) - H \left(P_i, \frac{q_{i+1} + q_i}{2} \right) (t_{i+1} - t_i) \right] \right\}. \tag{C.8}$$

A amplitude total é o produto das amplitudes associadas a cada subintervalo e integrando para todas as trajetórias possíveis,

$$\begin{aligned}
A(q', t'; q, t) &= \lim_{N \to +\infty} \int dq_1 \int dq_2 \cdots \int dq_N \prod_{i=1}^{N+1} \langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_i, t_i \rangle \\
&= \lim_{N \to +\infty} \left(\prod_i^N \int dq_i \right) \left(\prod_j^{N+1} \int dp_j \right) \times \\
&\times \; exp \left\{ i \sum_{k=1}^{N+1} \left[p_k \frac{q_k - q_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} - H \left(P_k, \frac{q_k + q_{k-1}}{2} \right) \right] (t_k - t_{k-1}) \right\} \\
&\equiv \int [D_q] \int [D_p] exp \left\{ i \int_0^T [p\dot{q} - H(p,q)] \, dt \right\}.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Agora, numa abordagem diferente das expostas normalmente na literatura, e reconhecendo que a integral de caminho atribui um papel especial para toda a família de trajetórias que são soluções da equação clássica de movimento[7]. Logo, podemos escrever o primeiro termo na ação como

$$\begin{aligned}
\int_0^T p \cdot \dot{q} dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}[p \cdot q] dt - \int_0^T q \cdot \dot{p} dt \\
&= \int d(p \cdot q) - \int_0^T q \cdot \dot{p} dt.
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Assim, para um ponto inicial arbitrário $q = x_0$ num tempo $t = t_0$ e final $x^{'} = x$ em $t^{'} = T$, teremos que

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(x, x_0; T) &= N \int_{x_0}^{x} [D_{y(t)}][D_{p(t)}] \times \\ &\times \; exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\int_{x_0}^{x} d(p \cdot y) - \int_0^T dt y(t) \cdot \dot{p}(t) - \int_0^T dt H_0(p) \right] \right\}. \quad \text{(C.11)}\end{aligned}$$

Nota-se que, enquanto o primeiro termo é a integral de uma diferencial total e, portanto, independe do caminho que liga os dois pontos (x_0, x), o segundo termo depende linearmente da trajetória $y(t)$. Um olhar mais atento mostra que é uma distribuição delta de Dirac (um funcional) representada como uma integral de Fourier sobre as funções $y(t)$:

$$\int_{x_0}^{x} [D_{y(t)}] exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt y(t) \cdot \dot{p}(t) \right\} = \delta \left[\frac{dp}{dt} \right] \quad \text{(C.12)}$$

que não desaparece apenas quando seu argumento é nulo, ou seja, quando o momento p é solução da equação clássica de movimento,

$$\frac{dp}{dt} = 0 \qquad \rightarrow \qquad p(t) = constante \equiv q. \quad \text{(C.13)}$$

Uma vez que as trajetórias $y(t)$ são separadas, a integral resultante é não nula apenas quando a variável de integração sobrevive. Pode ser colocado

$$\mathcal{K}(x, x_0, T) = N \int [D_{p(t)}] \delta \left[\frac{dp}{dt} \right] exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^{x} d(p \cdot y) \right\} exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt H_0(p) \right\} \quad \text{(C.14)}$$

onde apenas a família de trajetórias constantes contribui para a integral.

Apêndice D

Ordenação de Operadores

Na transição da mecânica clássica para a mecânica quântica não existe, a princípio, nenhuma regra estabelecida para a ordenação de operadores. Embora essa questão seja irrelevante no contexto clássico, em um sistema quântico ela é de fundamental importância. A evolução temporal desses sistemas é regida por operadores hamiltonianos que, em geral, são funções das coordenadas generalizadas q_i e seus momentos canonicamente conjugados p_i, obedecendo à regra de comutação,

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{D.1}$$

,ou seja, quando se trata de variáveis que não comutam, a construção de operadores quânticos a partir de seus análogos clássicos é ambígua levando a predições divergentes entre si. Isso é, inclusive, tema de embates filosóficos sobre a interpretação da teoria e o quanto ela realmente nos informa sobre a natureza. Dentre as formas possíveis de ordenação de operadores, as duas mais conhecidas são a ordenação normal e a ordenação Weyl.

D.1 Ordenação Normal

A ordenação é tal que operadores de momento são colocados a esquerda dos operadores de posição. Ex.

$$\begin{aligned} \hat{x}\hat{p} &\longrightarrow \hat{p}\hat{x} \\ \hat{x}\hat{p}^2 + \hat{p}\hat{x} &\longrightarrow \hat{p}^2\hat{x} + \hat{p}\hat{x} \\ \hat{x}\hat{p}\hat{x} &\longrightarrow \hat{p}\hat{x}^2 \end{aligned}$$

Portanto, para uma hamiltoniana $H(\hat{x},\hat{p})$ sujeita a ordenação normal:

$$\begin{aligned}\langle x^{'}|H(\hat{x},\hat{p})|x\rangle &= \int \langle x^{'}|p\rangle\langle p|H(\hat{x},\hat{p})|x\rangle dp \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int H(x,p)e^{-i\frac{p}{\hbar}(x-x^{'})}dp \end{aligned} \tag{D.2}$$

onde $\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-i\frac{px}{\hbar}}$.

D.2 Ordenação de Weyl

A ordenação de Weyl[10] é feita de modo a gerar todas as combinações possíveis de ordenação, sendo gerada e manipulada de forma bastante simples. Ex:

$$\begin{aligned}\hat{x}\hat{p} &\longrightarrow \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}) \\ \hat{p}\hat{x} &\longrightarrow \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}) \\ \hat{x}^2\hat{p} &\longrightarrow \frac{1}{3}(\hat{x}^2\hat{p}+\hat{x}\hat{p}\hat{x}+\hat{p}\hat{x}^2) \\ \hat{x}\hat{p}\hat{x} &\longrightarrow \frac{1}{3}(\hat{x}^2\hat{p}+\hat{x}\hat{p}\hat{x}+\hat{p}\hat{x}^2)\end{aligned}$$

Sabe-se que:

$$(\alpha\hat{x}+\beta\hat{p})^N = \sum_{n+m=N}\frac{N!}{n!m!}\alpha^n\beta^m(\hat{x}^n\hat{p}^m)_{o.w.} \tag{D.3}$$

Na expressão acima, o termo entre parênteses do lado direito da equação corresponde a ordenação de Weyl do produto $(\hat{x}^n\hat{p}^m)$:

$$(\hat{x}^n\hat{p}^m)_{o.w.} = \frac{n!m!}{N!}(\hat{x}^n\hat{p}^m+\hat{p}\hat{x}^n\hat{p}^{m-1}+\cdots+\hat{p}^m\hat{x}^n)$$

ou seja, a expansão (3) gera a ordenação de Weyl. De forma geral, a expressão

$$e^{(\alpha\hat{x}+\beta\hat{p})} = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{n+m=N}\frac{1}{N!}\underbrace{\frac{N!}{n!m!}\alpha^n\beta^m(\hat{x}^n\hat{p}^m)_{o.w.}}_{(\alpha\hat{x}+\beta\hat{p})^N} \tag{D.4}$$

gera todas as ordenações possíveis entre quaisquer pares de potências de $\hat{x}$ e $\hat{p}$. Utilizando a fórmula da Baker-Campbell-Hausdor para quaisquer dois operadores que não comutam,

$$e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]+\cdots}$$

obtém-se:

$$\begin{aligned}e^{\frac{\alpha\hat{x}}{2}}e^{\beta\hat{p}}e^{\frac{\alpha\hat{x}}{2}} &= e^{\frac{\alpha\hat{x}}{2}}e^{\beta\hat{p}+\frac{\alpha\hat{x}}{2}-i\frac{\hbar\alpha\beta}{4}} = e^{\alpha\hat{x}+\beta\hat{p}+i\frac{\hbar\alpha\beta}{4}-i\frac{\hbar\alpha\beta}{4}} \\ &= e^{\alpha\hat{x}+\beta\hat{p}}\end{aligned} \tag{D.5}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
\langle x^{'}|e^{\alpha\hat{x}+\beta\hat{p}}|x\rangle &= \langle x^{'}|e^{\frac{\alpha\hat{x}}{2}}e^{\beta\hat{p}}e^{\frac{\alpha\hat{x}}{2}}|x\rangle \\
&= \int \langle x^{'}|e^{\frac{\alpha\hat{x}}{2}}|p\rangle\langle p|e^{\beta\hat{p}}e^{\frac{\alpha\hat{x}}{2}}|x\rangle dp \\
&= \int e^{\frac{\alpha x^{'}}{2}+\beta p+\frac{\alpha x}{2}}\langle x^{'}|p\rangle\langle p|x\rangle dp \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{-i\frac{p}{\hbar}(x-x^{'})}e^{\beta p+\frac{\alpha}{2}(x+x^{'})}dp
\end{aligned} \tag{D.6}$$

dessa forma, o elemento de matriz do operador hamiltoniano na ordenação de Weyl é dado por

$$\langle x^{'}|H(\hat{x},\hat{p})_{o.w.}|x\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{-i\frac{p}{\hbar}(x-x^{'})}H\left(\frac{x+x^{'}}{2},p\right)dp \tag{D.7}$$

que é conhecida como descrição de ponto médio.

Esse resultado é geral, apesar de parecer fundamental, é possível demonstrar que o formalismo das integrais de trajetória independe da ordenação escolhida, desde que a aproximação de rede seja coerente com o sistema a ser descrito.

Referências Bibliográficas

[1] A. Connes, M. Douglas and A. S. Schwarz, JHEP 9802:003 (1998).

[2] H. S. Snyder, *Quantized Spacetime, Phys. Rev.* **71** *(1947) 38.*

[3] J.R. Klauder, B. Skagerstam, *Coherent states : Applications in Physics and Mathematical Physics (World Scientific, Singapore, 1985).*

[4] R. Jackiw. *Physical Instances of Noncommuting Coordinates, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 108 (2002) 30-36, Phys. Part. Nucl. 33 (2002) S6-S11.*

[5] R.J. Glauber, *Coherent States: Applications to Physics and Mathematical Physics Eds. J.R.Klauder, B.S. Skagerstam (World Scientific, Singapore, 1985).*

[6] S. W. Taylor, *Lectures at the NATO School , Iceland, 1999.*

[7] S. Ansoldi, A. Aurilia, and E. Spallucci. *Particle propagator in elementary quantum mechanics: A New path integral derivation. Eur.J.Phys.*, 21:1–12, 2000.

[8] F. S. Bemfica. *Tese: Dinâmica Quântica de Sistemas Não-Comutativos, Porto Alegre: RS, 2009.*

[9] D. R. Cabral. *Tese: Dualidades Eletromagnéticas no Espaço-Tempo Não-Comutativo e Formalismos Simpléticos, Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2006.*

[10] A. Das. *Field Theory: a Path Integral Approach. World Scientific Lecture Notes in Physics, 52, 1993.*

[11] A. F. R. de Toledo Piza. *Mecânica Quântica, EDUSP, São Paulo, 2003.*

[12] P. A. M. Dirac. *Lectures on quantum mechanics, Yeshiva University (1964).*

[13] Sergio Doplicher, Klaus Fredenhagen, and John E. Roberts. The Quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum fields. *Commun.Math.Phys.*, 172:187–220, 1995.

[14] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov. *Noncommutative field theory*. *Rev.Mod.Phys.*, 73:977–1029, 2001.

[15] D. Francois, D. Quentin, G. Francois, and M. Lefrancois. *Magnetic fields in noncommutative quantum mechanics*. *J.Phys.Conf.Ser.*, 103:012020, 2008.

[16] F.S. Bemfica; H.O. Girotti. *Noncommutative quantum mechanics: Uniqueness of the functional description*. *Phys.Rev.*, D78:125009, 2008.

[17] A. Anisimov; T. Banks; M. Dine; M. Graesser. *Comments on noncommutative phenomenology*. *Phys.Rev.*, D65:085032, 2002.

[18] F.G. Scholtz; L. Gouba; A. Hafver and C.M. C. M. Rohwer. *Formulation, Interpretation and Application of non-Commutative Quantum Mechanics*. *J.Phys.*, A42:175303, 2009.

[19] R.P. Feynman; A. R. Hibbs. *Quamtum mechanics and path integral, New York, McGraw-Hill (1965).*

[20] B. Katarzyna and K. Piotr. *On uncertainty relations in noncommutative quantum mechanics*. *Phys.Lett.*, B547:51–54, 2002.

[21] P. Kosinski and K. Bolonek. *Minimalization of uncertainty relations in noncommutative quantum mechanics*. *Acta Phys.Polon.*, B34:2575–2588, 2003.

[22] V.P. Nair and A.P. Polychronakos. *Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere*. *Phys.Lett.*, B505:267–274, 2001.

[23] J. S. Richard. *Quantum field theory on noncommutative spaces*. *Phys.Rept.*, 378:207–299, 2003.

[24] C.M. Rohwer. *Tese: Additional degrees of freedom associated with position measurements in non-commutative quantum mechanics, University of Stellenbosch, 2010.*

[25] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics - Revised Edition (Addison-Wesley Publishing Company, 1994).*

[26] L. J. Schiff. *Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1968.*

[27] L. Gouba; F.G. Scholtz. *On the uniqueness of unitary representations of the noncommutative Heisenberg-Weyl algebra. Can.J.Phys.*, 87:995–997, 2009.

[28] E. Schrodinger. *About Heisenberg uncertainty relation. Bulg.J.Phys.*, 26:193, 1999.

[29] A. Smailagic; E. Spallucci. *Feynman path integral on the noncommutative plane. J.Phys.*, A36:L467, 2003.

[30] A. Smailagic; E. Spallucci. *UV divergence free QFT on noncommutative plane. J.Phys.*, A36:L517–L521, 2003.