

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
PRODUÇÃO

Renato Luiz de Souza Bastos

Uma formulação para a integração
de um problema clássico de
dimensionamento de lotes com o
problema do job shop

Belo Horizonte
2013

Renato Luiz de Souza Bastos

Uma formulação para a integração de um problema clássico de dimensionamento de lotes com o problema do job shop

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais, para a obtenção de Título de Mestre em Engenharia de Produção, na Linha de Pesquisa Modelos e Algoritmos de Produção e de Redes.

Orientador: Carlos Roberto Venâncio de Carvalho

Belo Horizonte
2013

Luiz de Souza Bastos, Renato.

Uma formulação para a Integração de um problema clássico de dimensionamento de lotes com o problema do *job shop*

50 páginas

Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. Departamento de Engenharia de Produção.

1. Dimensionamento de Lotes
2. Sequenciamento da Produção
3. Job shop

I. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. Departamento de Engenharia de Produção.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr.
Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto

Prof^a. Dr^a.
Clarisse da Silva Vieira

Prof. Dr.
Carlos Roberto Venâncio de Carvalho

Conhecimento não é aquilo que você sabe, mas o que você faz com aquilo que você sabe.
Aldous Huxley

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Carlos Roberto Venâncio de Carvalho, pela grande contribuição no emprego do seu conhecimento para o desenvolvimento da pesquisa e aos Professores Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto e Clarisse da Silva Vieira que contribuíram com sugestões valiosas para o desenvolvimento desta dissertação.

Também agradeço ao Prof. Leonardo Pereira Santiago pela disponibilização do Laboratório e aos amigos, jovens garotos mestres, futuros mestres e doutores do LADEC, pela enorme ajuda e companheirismo no dia-a-dia.

Agradeço à minha família pela enorme contribuição, em especial ao meu irmão, pelas dicas preciosas, apoio incondicional e por acreditar em minha capacidade.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro ao desenvolvimento desta pesquisa.

Resumo

Esta dissertação trata do desenvolvimento e implementação de um modelo matemático de otimização para o problema integrado de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção. Consiste em duas políticas, sendo que o problema de dimensionamento de lotes é o mesmo em ambas, o que diferencia uma política da outra consiste em como considerar o problema de sequenciamento no horizonte de planejamento discretizado no tempo. A primeira considera o sequenciamento de produção somente no primeiro período. Para esta política são propostos dois modelos para o sequenciamento, um baseado no modelo de Manne e outro no modelo de Wagner. A segunda proposta consiste em considerar o problema de sequenciamento em três períodos (semanas). Nessa proposta considera-se o custo de estoque dos produtos semiacabados. Antes porém de apresentar os modelos integrados, reescreve-se os problemas de sequenciamento de produção onde a quantidade produzida no período de planejamento é uma variável. A demanda é dada e o objetivo é minimizar o custo total de estoque, tanto de produtos acabados como os semiacabados, entre os períodos de produção. O problema considerado para o sequenciamento é o *job shop*, onde cada *job* é fabricado por uma sequência específica de operações denominada sequência tecnológica de fabricação e cada operação de cada *job* é executada por uma máquina específica também conhecida. Problemas dessa magnitude aparecem com frequência quando tratamos de situações práticas, como pode ser visto nos Problemas de Planejamento de Operações em máquinas em uma indústria manufatureira.

Palavras chave: Dimensionamento de Lotes. Sequenciamento da Produção. *Job shop*.

Abstract

This dissertation is related to the development and implementation of a mathematical model in order to make an integration between lot sizing problem and scheduling problem. The analyses were done according to two policies that are different due to the planning time. The proposal for the first policy is treat the scheduling problem according to Manne and Wagner models in a planning horizon of one week. In the second policy, the inventory cost of work in process is considered, since the data of demand is available, and the objective is to minimize the total cost of a problem scheduled for three weeks. Therefore, the lot sizing problem is the same in both of them. The goal of the integrated model is determine the amount and the sequence of each job, providing need information to production planning of industries. The job shop is the scheduling problem considered, in wich each job has a specific production sequence, named technological factory sequence, with each production operation in a machine known. The decision about the amount of products to be produced and its schedule is the context of Operational Planning sector in manufacturing industry.

Keywords: Lot Sizing. Scheduling. Job Shop.

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Introdução	2
1.2	Motivação	3
1.3	Objetivos	3
1.3.1	Objetivo Geral	3
1.3.2	Objetivos Específicos	3
1.4	Conteúdo da dissertação	3
2	Revisão bibliográfica	5
2.1	Contexto de Estudo	5
2.2	Problemas de Dimensionamento de lotes e Sequenciamento da Produção	6
2.2.1	O problema de Dimensionamento de Lotes	9
2.2.2	O problema de sequenciamento da produção em ambientes <i>Job Shop</i>	12
2.3	Representação Gráfica do Problema do <i>Job Shop</i>	15
2.3.1	Grafo disjuntivo	16
2.3.2	Gráfico de Gantt	18
3	Modelos da Programação Linear Inteira Mista	20
3.1	Modelo de Wagner	21
3.1.1	Formulação adaptada de Wagner	23
3.2	Modelo de Manne	24
3.2.1	Formulação adaptada de Manne	26
3.2.2	Um exemplo	27
3.3	Justificativa para integração dos modelos	29
3.4	Modelos integrados	32

3.4.1	Sequenciamento somente no primeiro período	32
3.4.2	Sequenciamento em todos os períodos	35
3.4.3	Formulação Matemática para o problema integrado	36
4	Resultados	39
4.1	Obtenção dos resultados	39
4.2	Apresentação e Análise dos Resultados - Modelos de Manne e Wagner	40
4.2.1	Representação de soluções pelo gráfico de Gantt	44
5	Considerações Finais	47
	Referências Bibliográficas	48

Lista de Figuras

2.1	Estrutura de Planejamento e Programação da Produção	6
2.2	Horizonte de Planejamento	10
2.3	Composição dos Produtos	13
2.4	Esquema do problema do <i>job shop</i>	14
2.5	Grafo disjuntivo do <i>job shop</i>	17
2.6	Possíveis circuitos no grafo do <i>job shop</i>	17
2.7	Grafo conjuntivo da tabela 2.2	18
2.8	Gráfico de Gantt da tabela 2.2	18
3.1	Grafo disjuntivo do problema mostrado na Tabela 3.1	28
3.2	Gráfico de Gantt da Tabela 3.1	28
3.3	Sequenciamento no primeiro período do horizonte de planejamento	32
3.4	Sequenciamento em todos os períodos do horizonte de planejamento	35
4.1	Gráfico de Gantt - Primeiro Período	44
4.2	Gráfico de Gantt - Segundo Período	44
4.3	Gráfico de Gantt - Terceiro Período	44
4.4	Gráfico de Gantt - Quarto Período	45

Lista de Tabelas

2.1	Dados do problema $J4 n = 5 C_{\max}$	14
2.2	Dados do problema $J4 n = 5 C_{\max}$	18
3.1	Dados do problema $J3 n = 3 C_{\max}$	28
3.2	Problema de dimensionamento de lotes	29
3.3	Solução ótima	29
3.4	Tempo de utilização das máquinas	30
3.5	Dados do Problema Primeiro Período	30
3.6	Dados do Problema Segundo Período	30
3.7	Dados do Problema Terceiro Período	31
3.8	Dados do Problema Quarto Período	31
3.9	Plano de Produção	31
3.10	Quantidades produzidas por período - Modelo de Manne	31
4.1	Valores dos Parâmetros	40
4.2	Resultados do Modelo de Manne	41
4.3	Resultados do Modelo de Wagner	42
4.4	Resultados - Modelo Integrado	43
4.5	Quantidades de produtos semiacabados de cada operação em cada período	45
4.6	Quantidades a serem produzidas por período	46

Lista de Abreviações

PCP: Planejamento e Controle da Produção

DLSP: Problema discreto de dimensionamento e sequenciamento de lotes

PLSP: Problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes proporcional

CLSP: Problema de dimensionamento de lotes capacitado

GLSP: Modelo genérico de dimensionamento e sequenciamento de lotes

EOQ: Dimensionamento do lote econômico

ELSP: Problema do dimensionamento de lotes e sequenciamento econômico

JSP: Problema de sequenciamento em ambientes do tipo *job shop*

PLIM: Programação linear inteira mista

PIM: Programação inteira mista

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

O planejamento e sequenciamento da produção é um dos assuntos mais desafiadores para quem está na responsabilidade da gestão de operações em uma organização (Drexl and Kimms, 1997), pois depende da habilidade dos responsáveis em determinar os tamanhos dos lotes e o sequenciamento da produção. Essas ações são necessárias para otimizar os processos de produção, visando atender a demanda dentro do tempo previsto e minimizar os custos de produção, respeitando a capacidade dos recursos disponíveis.

Um dos desafios da otimização de processos é o conflito que ocorre entre a produtividade, na busca de uma maior velocidade na produção, e a flexibilidade, no esforço de produzir um grande número de produtos distintos.

Nessa premissa, o presente trabalho apresenta uma proposta de integração de um problema clássico de Dimensionamento de Lotes com o problema do *job shop*, no qual cada *job* (i.e. produto a ser fabricado) consiste em uma sequência tecnológica de operações, que deve ser processado durante um período de tempo ininterrupto em uma dada máquina.

Essa proposta tem como objetivo garantir um plano de produção que minimize o custo total de não atendimento da demanda e estocagem de produtos acabados e semiacabados. A integração utiliza os tempos ociosos das máquinas para produzir produtos, acabados ou não, para serem utilizados em períodos posteriores, garantindo assim um custo mínimo.

Nota-se em diversas abordagens que os problemas citados são tratados separadamente, gerando planejamentos pouco viáveis que comprometem as restrições de capacidade, resultando no atraso da entrega de produtos (Dauzere-Peres and Lasserre, 1994).

1.2 Motivação

Neste trabalho é proposta uma nova formulação para o modelo matemático integrado, com embasamento distinto dos anteriores. E a motivação em resolver este problema de programação da produção, decorre da necessidade de reduzir os tempos ociosos das máquinas. Essa redução garante o aumento da eficiência na utilização dos recursos, aumentando conseqüentemente a competitividade da organização.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste estudo é utilizar os tempos ociosos das máquinas, para produzir produtos, acabados ou não, para serem utilizados nos períodos seguintes, captando dessa forma as relações entre o modelo de Dimensionamento de Lotes e o Sequenciamento da Produção.

1.3.2 Objetivos Específicos

Fazer um levantamento bibliográfico sobre o tema deste trabalho, bem como algumas metodologias utilizadas para o problema em questão.

Comparar dois modelos matemáticos, baseados nas formulações de Manne (1960) e Wagner (1959), em termos do tempo computacional para obtenção da solução ótima.

Desenvolver um modelo matemático integrado objetivando minimizar o custo total de estocagem dos produtos acabados, semiacabados e o custo de não atendimento de produtos acabados.

Implementar o modelo em um programa de otimização linear, testar e validá-lo.

1.4 Conteúdo da dissertação

Esta dissertação está estruturada em 5 capítulos, com conteúdos apresentados na seguinte seqüência.

O capítulo 1 apresenta uma introdução ao tema da dissertação, a motivação, os objetivos, e os conteúdos abordados na dissertação.

No capítulo 2 é realizada uma abordagem ao contexto de estudo, através de uma revisão bibliográfica. Este levantamento teórico é utilizado para facilitar a descrição do problema e o

desenvolvimento do modelo matemático para a solução do problema estudado.

Já o terceiro capítulo apresenta dois modelos para o sequenciamento da produção, baseados na formulação de Manne e Wagner, a justificativa para integração dos Modelos de Dimensionamento de Lotes e Sequenciamento da Produção e a formulação matemática para o problema integrado.

O capítulo 4 apresenta os resultados, sendo subdividido na obtenção dos resultados, tabelas de resultados para os modelos de Manne, Wagner e para o modelo integrado, apresentação e análise dos resultados.

Finalmente, no quinto capítulo são apresentadas as considerações finais do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão bibliográfica

2.1 Contexto de Estudo

Segundo Anthony (1965), a estrutura hierárquica de um sistema de Planejamento e Controle da Produção (PCP) apresenta-se em três níveis: estratégico, tático e operacional. O primeiro consiste no mais alto nível de tomada de decisões, que estão relacionadas aos objetivos globais e às políticas mais adequadas para atingi-los. Consiste no planejamento a longo prazo para avaliar riscos de sucesso e fracasso de mudanças neste horizonte temporal.

O planejamento tático é responsável pela utilização eficiente de recursos com intuito de atingir o que foi determinado no planejamento estratégico considerando os custos envolvidos para atender à demanda. Configura-se em um horizonte de planejamento de médio prazo. Encontra-se neste caso o dimensionamento de lotes, que trata do quanto será fabricado de cada item em cada período de produção considerando demandas existentes, capacidades produtivas disponíveis, níveis de estoque, disponibilidade de insumos, dentre outros fatores.

O planejamento a nível operacional consiste na desagregação da informação dos níveis mais altos e na execução do plano através de decisões do dia-a-dia. É neste estágio que se realiza a programação da produção, que inclui atividades como sequenciar pedidos e administrar estoques (Araujo and Arenales, 2000).

O sequenciamento de lotes consiste na ordem para a fabricação dos lotes considerando os tempos de preparo das máquinas dependentes da sequência de produção (Toso and Morabito, 2005).

O dimensionamento de lotes e o sequenciamento da produção são muitas vezes tratados separadamente, o que gera dificuldades para as organizações em obter soluções diante da capa-

cidade instalada e dos prazos de entrega. Algumas chegam a utilizar planilhas eletrônicas como ferramentas de suporte para definir a programação da produção, mas sem se preocupar com sua otimização. Então, o desenvolvimento de sistemas específicos voltados para a realidade da empresa e utilizando técnicas adequadas se torna útil para determinar a melhor programação da produção (Júnior, 2007).

Visando solucionar este problema, modelos matemáticos são então propostos e aplicados nesta dissertação, promovendo assim a integração entre estes dois aspectos, que envolvem decisões do nível tático-operacional. A Figura 2.1 representa a integração entre estes aspectos e denota a forma pela qual os processos de Planejamento e Programação da Produção são estruturados em uma organização.



Figura 2.1: Estrutura de Planejamento e Programação da Produção

Godinho (2004) aponta o PCP como sendo o cerne de uma empresa, e diz que dependendo de como ele é administrado, pode determinar o sucesso ou o fracasso da mesma.

2.2 Problemas de Dimensionamento de lotes e Sequenciamento da Produção

Thomas and Griffin (1996) enfatizaram que existe uma tendência em tratar problemas de planejamento e programação da produção de forma integrada, e Pochet and Wolsey (2006) aludiram à integração de modelos de planejamento da produção para melhorar a produtividade das operações em um sistema de produção. Embora não se tenham muitos trabalhos na literatura que abordem a integração de problemas de planejamento da produção, existe uma crescente mo-

tivação para o estudo desse tema (Alem and Morabito, 2013). Na revisão da literatura realizada em Drexl and Kimms (1997), os autores ressaltaram que os problemas de dimensionamento de lotes e programação da produção podem interagir com outras atividades de uma indústria, como o planejamento da distribuição, a programação de projetos e problemas de corte e empacotamento.

Os modelos integrados objetivam responder quanto, quando e em que sequência produzir os itens, visando minimizar os custos de estoque, atraso e preparação. Se forem consideradas várias máquinas, deve ainda determinar quais itens serão produzidos em cada máquina. Essas questões são respondidas quando define-se a programação da produção (Ferreira, 2006).

São citados trabalhos da literatura que integram o dimensionamento de lotes e o sequenciamento em um mesmo modelo matemático, dentre eles: Fleischmann (1990), Drexl and Haase (1995), Drexl and Kimms (1997), Meyr (2000), Araujo et al. (2004), Gutiérrez and Pizzolato (2004), Toledo (2005), Luche and Morabito (2005), Toso and Morabito (2005), Toledo et al. (2007) e Ferreira et al. (2013).

Grande parte desses trabalhos encontrados na literatura consideram algumas condições especiais. A maior parte deles divide os macro-períodos (dias, semanas) do problema em vários micro-períodos (horas ou transferências), como é o caso do dimensionamento e sequenciamento discreto (DLSP) (Fleischmann, 1990). No DLSP, as sequências são determinadas e caso ocorra produção em um período, esta produção ocupa toda a capacidade existente, ou seja, é utilizada a suposição da produção “tudo-ou-nada”.

Outra variação deste modelo é o modelo proposto por Drexl and Haase (1995), conhecido como Modelo PLSP, Problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes proporcional (*Proportional lot sizing and scheduling problem*), onde é permitida a utilização de parte da capacidade, além disso, permite-se utilizar na produção de um segundo item dentro de um mesmo período.

Em Drexl and Kimms (1997), é feita uma relaxação da restrição “tudo-ou-nada” permitindo o uso parcial da capacidade de produção no modelo *Continuous setup lotsizing scheduling problem* (CLSP).

Em Meyr (2002), o modelo *General Lot Sizing and Scheduling Problem* (GLSP) é resolvido por busca local, *Simulated Annealing e Threshold Accepting*, combinado com um algoritmo de reotimização dual incluindo várias máquinas.

É proposto um modelo para uma fundição de pequeno porte em Araujo et al. (2004), con-

siderando custos e tempo de preparação dependentes da sequência. São apresentados quatro modelos, buscando minimizar custos de estoque, atraso e *set up* nos três primeiros e no último é incluído um termo que penaliza algumas proibições do processo produtivo, pois algumas peças não podem ser feitas por determinada linha, devido a alguma restrição da linha de moldagem.

Gutiérrez and Pizzolato (2004) apresentam um modelo simplificado, com taxas de produção e demandas constantes nos períodos, consideram uma única máquina, tempos de *set up* calculados utilizando-se médias dos tempos dependentes da sequência e não permitem atrasos.

No trabalho de Toledo (2005) foi proposto um modelo de programação matemática inteira mista, baseado no modelo GLSP, para o dimensionamento e sequenciamento da produção de bebidas. Devido à complexidade e dimensão do modelo (o modelo envolve cerca de 65 famílias de restrições) também foi proposta uma abordagem de solução por meio de heurísticas e meta-heurísticas.

Para produzir um conjunto de produtos em uma fábrica que produz grãos eletrofundidos no interior de São Paulo, Luche and Morabito (2005) aplicam modelos de programação linear inteira mista para auxiliar particularmente nas decisões da programação da produção. Tais modelos combinam modelos conhecidos de seleção de processos e dimensionamento de lotes monoestágio, e podem ser vistos como modelos de dimensionamento de lotes que, em vez de "lotes de produtos", utilizam "lotes de processos".

Toso and Morabito (2005) modelam um problema de programação da produção de ração animal, onde é realizada a combinação do modelo GLSP com um modelo de dimensionamento de lotes capacitado com tempos de set up não dependentes da sequência, apresentado por Hax and Candea (1984).

Toledo et al. (2007) apresentam, modelam matematicamente e solucionam um problema multi-nível integrado de dimensionamento de lotes e programação da produção em um ambiente industrial com máquinas paralelas que apresentam restrições de capacidade, custos e tempos de preparo dependentes da sequência.

Finalmente, no trabalho de Ferreira et al. (2013) são apresentadas formulações monoestágio para o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção de bebidas, considerando dois estágios com sincronia. O problema envolve múltiplos produtos, múltiplas máquinas e tempos e custos de troca dependentes da sequência de produção. As formulações monoestágio apresentadas não têm perda de generalidade para representar o problema e, em geral, reduzem as dimensões da formulação dos estágios com sincronia apresentadas em Ferreira

et al. (2009) em termos dos números de variáveis e restrições.

2.2.1 O problema de Dimensionamento de Lotes

O problema de dimensionamento de lotes consiste em um problema de programação da produção com o objetivo de determinar o que e quanto produzir, em uma ou mais máquinas com ajustes na capacidade produtiva, considerando as variações na demanda em cada período ao longo do horizonte de planejamento definido *a priori* (finito), de forma que a demanda seja atendida com o menor custo possível. Sendo assim, duas alternativas são consideradas: aumento da capacidade pela aquisição de mais máquinas e antecipação da produção nos períodos de folga (utilização de estoques).

De acordo com Ferreira (2006) os primeiros estudos de problemas de dimensionamento de lotes ocorreram com o *Economic Order Quantity* (EOQ), que determina a quantidade de produção para um item individual, considerando o *tradeoff* existente entre os custos de controle de estoque e os custos de *set up*, ou seja, pressupõe um processo produtivo de um produto em um nível, sem restrições de capacidade, e demanda constante ao longo de um horizonte de planejamento infinito. A solução ótima deste problema pode ser obtida por uma expressão analítica (Wagner and Whitin, 1958).

Geralmente os modelos de dimensionamento de lotes são classificados quanto ao número de produtos (itens), único item como o modelo *Economic Order Quantity* (EOQ) ou multi-itens como o modelo *Economic Lot Scheduling Problem* (ELSP), quanto ao número de estágios (mono-estágio ou multi-estágio) e de acordo com o número de máquinas (única máquina ou várias máquinas).

No presente trabalho cada operação é executada por uma determinada máquina conhecida *a priori* e um produto acabado é obtido após uma determinada matéria-prima sofrer uma sequência específica de operações, denominada sequência tecnológica de fabricação.

Denomina-se item de produção o resultado da operação de uma máquina. Assim, o item obtido da última operação de uma sequência tecnológica de fabricação é um produto acabado. Se a operação não for a última dessa sequência, obtêm-se um produto acabado. As matérias-primas utilizadas para fabricar o item da primeira operação de uma sequência tecnológica de fabricação também é um item de produção.

Considera-se um horizonte de tempo discretizado em períodos contínuos de planejamento. No início do primeiro período de planejamento existem em estoque quantidades conhecidas de

matéria-prima, de produtos semiacabados e de produtos acabados. A cada período fabrica-se uma quantidade de cada item de produção.

No fim de um período de produção, uma parte das quantidades de produtos acabados fabricados no período mais a quantidade existente no estoque no início do período são utilizadas para a satisfação da demanda, outra parte fica estocada para a satisfação de demandas futuras. As quantidades dos demais itens de produção, que foram fabricadas, mas não foram utilizadas para fabricação de produtos acabados são estocadas para serem utilizados nos próximos períodos.

A Figura 2.2, representa esquematicamente, a conservação do fluxo de produtos ao longo de um horizonte de planejamento composto por quatro períodos para um problema de dimensionamento de lotes de produção.

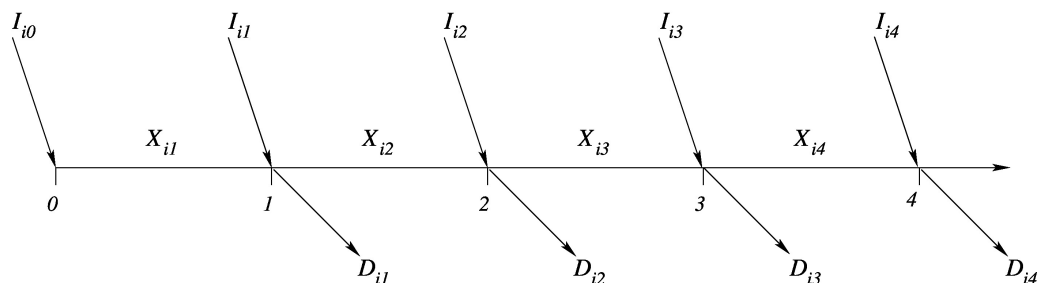


Figura 2.2: Horizonte de Planejamento

Na Figura 2.2, I_{i0} representa a quantidade em estoque do item i no início do horizonte. A linha horizontal representa o horizonte de planejamento discretizado em períodos, para todo produto i e todo período $t = 1, 2, 3$ e 4 , I_{it} , X_{it} e D_{it} representam, respectivamente a quantidade em estoque do produto, a quantidade produzida durante cada período e a demanda do produto i no período t .

Geralmente, não se considera os custos de produção, pois dificilmente serão diferentes entre os períodos. Considera-se somente os custos associados à estocagem de itens de produção. Neste contexto, o problema consiste em determinar o quanto fabricar e o quanto estocar de cada item de produção em cada período de planejamento de maneira que as demandas sejam satisfeitas e se minimize o custo total de estocagem.

Este problema teria uma solução trivial se não existisse um limite na capacidade de produção em cada período do horizonte de planejamento. Este limite é estabelecido principalmente pela limitação dos recursos necessários para produção. Dentre os inúmeros recursos que são necessários, considera-se aqui a capacidade das máquinas existentes no sistema de produção. Para contornar esta dificuldade, uma restrição simples considerando a soma total de tempos necessários de cada

máquina para fabricar cada item menor ou igual ao tempo total disponível em cada período, poderia ser inserida no problema. Entretanto, sabe-se que esta restrição não é exata, pois o tempo de utilização de uma máquina depende da disponibilidade dos itens a serem processados. A disponibilidade de item depende essencialmente da sequência tecnológica de fabricação de cada produto.

Neste contexto, propõe-se a integração do problema de sequenciamento de produção a este problema. Para tanto é necessário definir o problema de sequenciamento considerando o intervalo de tempo disponível em cada período de produção. Esta definição do problema de sequenciamento é tratada nas próximas seções no texto.

Formulação Matemática do dimensionamento de lotes

A seguir são descritas detalhadamente a função objetivo e as restrições para o modelo matemático de dimensionamento de lotes, o conjunto de dados utilizados no modelo são descritos da seguinte forma:

Dados do problema:

- c_j^+ , $\forall j \in J$: custo unitário de estocagem do *job* j por um período de planejamento.
- c_j^- , $\forall j \in J$: custo unitário de não atendimento da demanda do *job* j por um período de planejamento.
- $I_{j(t-1)}^+$, $\forall j \in J$: quantidade do *job* j em estoque no início do horizonte de planejamento.
- $I_{j(t-1)}^-$, $\forall j \in J$: demanda do *job* j não atendida em períodos anteriores ao horizonte de planejamento.
- H : número de períodos de planejamento t .
- $J = \{1, 2, \dots, |J|\}$: conjunto de *jobs*.
- D_{jt} , $\forall j \in J$ e $t = 1, 2, \dots, H$: demanda do *job* j no período t .
- Q^k , $\forall k \in M$: número total de horas da máquina k disponível para cada período de produção.
- $a_j^k \forall j \in J$ e $k \in M$: número de horas necessárias da máquina k para fabricar uma unidade do *job* j .
- $M = \{1, 2, \dots, k\}$: conjunto de máquinas.

As variáveis de decisão são:

- $X_{jt} \geq 0$, $\forall j \in J$ e $t = 1, 2, \dots, H$: quantidade a ser fabricada do *job* j no período t .
- $I_{jt}^+ \geq 0$, $\forall j \in J$ e $t = 1, 2, \dots, H$: quantidade do *job* j a estocar no fim do período t .

• $I_{jt}^- \geq 0, \forall j \in J$ e $t = 1, 2, \dots, H$: quantidade da demanda do *job* j não atendida no fim do período t .

Note que $I_{jt} = I_{jt}^+ - I_{jt}^-$, com $I_{jt} \in \mathbb{R}$, sendo $I_{jt}^+ \geq 0$ a quantidade em estoque e I_{jt}^- a quantidade da demanda não atendida. A demanda não atendida em um período pode ser considerada como um estoque negativo. O atraso do período $t - 1$ deverá ser complementado pela produção dos períodos posteriores.

O modelo fica:

$$\min \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^H (c_j^+ I_{jt}^+ + c_j^- I_{jt}^-) \quad (2.1)$$

$$I_{j(t-1)}^+ - I_{j(t-1)}^- + X_{jt} = D_{jt} + I_{jt}^+ - I_{jt}^- \quad \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in J} a_j^k X_{jt} \leq Q^k \quad \forall t = 1, 2, \dots, H \text{ e } k \in M \quad (2.3)$$

$$X_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (2.4)$$

$$I_{jt}^+ \geq 0 \quad \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (2.5)$$

$$I_{jt}^- \geq 0 \quad \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (2.6)$$

A função objetivo minimiza a soma dos custos de estocagem do *job* j por um período de planejamento e o custo de não atendimento da demanda nesse mesmo período. O conjunto de restrições (2.2) diz respeito ao balanceamento de estoque, levando-se em consideração o estoque e a demanda não atendida em cada período t . Em (2.3), a produção de todos os itens é limitada à capacidade em horas disponíveis para cada período de produção e as restrições (2.4) a (2.6) definem o domínio das variáveis.

2.2.2 O problema de sequenciamento da produção em ambientes *Job Shop*

O problema considerado aqui para o sequenciamento da produção é o problema de sequenciamento *job shop*, conhecido na literatura como *job shop scheduling problem* (JSP). São problemas caracterizados por possuírem um número finito de tarefas a serem processadas em um número finito de máquinas, onde cada tarefa é caracterizada por uma quantidade fixa de operações, que devem ser processadas em máquinas específicas, durante um dado intervalo de tempo. Cada máquina podendo processar no máximo uma operação por vez e, uma vez iniciado

o processamento de certa operação em uma máquina, esse processamento deverá ser completado sem interrupção, ou seja, caracteriza-se como um sistema não preemptivo.

Seja então um conjunto de *jobs* (produtos a serem fabricados). Cada *job* é fabricado por uma sequência específica de operações denominada sequência tecnológica de fabricação. Cada operação de cada *job* é executada por uma máquina específica também conhecida a *priori*.

Quando um *job* sofre uma operação em uma máquina, fica indisponível para sofrer outra operação. Para integrar este problema de sequenciamento ao problema de dimensionamento de lotes de produção, considera-se que cada operação em uma máquina fabrica uma quantidade de um determinado item de produção, esta quantidade é uma variável a ser determinada.

Considera-se ainda um limite para a maior data de término de execução de qualquer operação. Este limite é determinado pelo tempo disponível em um período de planejamento. Assim o intervalo de tempo para o problema de sequenciamento é igual ao tempo total disponível no período.

A Figura 2.3 evidencia a composição do *job* j , cuja fabricação é composta pelas operações de 1 a n , executadas exatamente na ordem exposta.

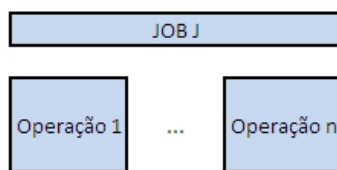


Figura 2.3: Composição dos Produtos

O tipo de sistema *job shop* apresenta uma grande flexibilidade mas o volume de produção é pequeno e a variedade de produtos é muito grande. Nesse sentido, nota-se uma grande complexidade de gerenciamento do fluxo de materiais e informações (já que para cada produto uma nova ordem de produção deve ser feita) (Palomino, 1995).

O problema consiste em programar as operações das tarefas, definindo a sequência de operações que cada máquina deve executar de modo que todas as operações sejam executadas, visando otimizar a medida de desempenho conhecida como *makespan* – maior data de término de execução das operações.

A Figura 2.4 e a Tabela 2.1, exemplificam um problema de programação da produção do tipo *job shop*.

Tabela 2.1: Dados do problema $J4|n = 5|C_{\max}$

<i>jobs</i>	o_i : máquina (p_i)		
<i>J1</i>	o_1 : 1(2)	o_2 : 2(3)	–
<i>J2</i>	o_3 : 1(3)	o_4 : 3(3)	o_5 : 2(2)
<i>J3</i>	o_6 : 1(1)	o_7 : 2(3)	o_8 : 4(2)
<i>J4</i>	o_9 : 1(4)	o_{10} : 4(1)	o_{11} : 3(3)
<i>J5</i>	o_{12} : 4(4)	o_{13} : 3(4)	–

Exemplo 2.1 : $J4|n = 5|C_{\max}$

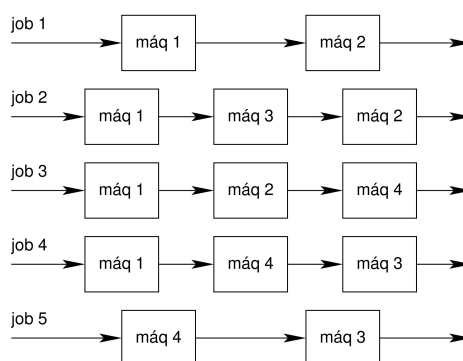


Figura 2.4: Esquema do problema do *job shop*

São fornecidos os tempos (em minutos) de processamento de cada operação, as operações em cada *job* e o roteamento das operações nas máquinas para 5 *jobs*.

Restrições do problema

1. Cada *job* só pode sofrer uma única operação por vez.
2. Cada máquina só pode executar uma única operação por vez.
3. Uma vez iniciado o processo não ocorre interrupção das máquinas (*preemption*).
4. Cada *job* é fabricado por uma seqüência conhecida de operações.
5. Não existe relação de precedência entre as operações executadas por uma mesma máquina.

Formulação matemática do sequenciamento da produção

A seguir são descritas detalhadamente a função objetivo e as restrições para o modelo matemático de sequenciamento da produção, os dados são descritos da seguinte forma:

1. C_{\max} : *Makespan*

2. t_i : data de início da operação i .
3. p_i : representa os tempos de processamento de cada operação.
4. E : o conjunto de pares de operações (i_1, i_2) tal que i_1 e i_2 são executadas por uma mesma máquina.
5. A : representa a sequência tecnológica de fabricação, denotado pelo conjunto de pares de operações (i_1, i_2) tal que
 - i_1 e i_2 são executadas sobre um mesmo *job*
 - a operação i_1 deve ser executada antes de i_2 sem nenhuma outra operação intermediária

O problema do *job shop* é definido:

$$\min_{t \geq 0} C_{max} \quad (2.7)$$

s.a :

$$t_{i_2} - t_{i_1} \geq p_{i_1} \quad \vee \quad t_{i_1} - t_{i_2} \geq p_{i_2} \quad \forall (i_1, i_2) \in E \quad (2.8)$$

$$t_{i_2} - t_{i_1} \geq p_{i_1} \quad \forall (i_1, i_2) \in A \quad (2.9)$$

A função objetivo visa minimizar o *makespan*, definido anteriormente como a maior data de término das operações e também definido por Lustosa et al. (2008) como o tempo necessário para conclusão de todas as ordens abertas, ou seja, intervalo de tempo entre a liberação da primeira ordem e conclusão da última operação da última ordem processada.

As restrições definidas em (2.8) são denominadas restrições de capacidade, expressam a não sobreposição de operações nas máquinas. A restrição (2.9) expressa a precedência em cada trabalho e a não simultaneidade de operações do mesmo trabalho, dado que $p_i > 0$.

2.3 Representação Gráfica do Problema do *Job Shop*

As formas mais utilizadas para representar graficamente as soluções do problema do *job shop* são o Grafo Disjuntivo e o Gráfico de Gantt.

Os Grafos Disjuntivos foram propostos por Roy and Sussmann (1964) para modelar e resolver problemas de *Job Shop*, além de permitir a representação gráfica, permitem a representação de

um determinado sequenciamento. Dessa forma é muito utilizado para representar problemas do *job shop* em modelos de programação matemática.

Já o Gráfico de Gantt é amplamente utilizado por permitir uma visualização intuitiva de um sequenciamento possível e estar mais cotado para ser usado como interface com o utilizador.

2.3.1 Grafo disjuntivo

No Grafo Disjuntivo o objetivo está em sequenciar os *jobs* em um conjunto de máquinas através de rotas pré-definidas em função do tempo (Blazewicz et al., 2003).

Existe um modo para cada operação e dois modos adicionais, denominadas de operações 0 e *, que representam o início e o fim de um sequenciamento, respectivamente.

Para cada par de operações $(i_1, i_2) \in E$ (conjunto de pares de operações tal que i_1 e i_2 são executadas por uma mesma máquina) existem dois arcos (i_1, i_2) e (i_2, i_1) com direções opostas. As operações i_1 e i_2 definem um arco disjuntivo e a cada arco é associado um peso p_i , correspondente ao tempo de processamento da operação i_2 e da ordem de fabricação i_1 .

Consideremos o grafo $\mathbf{G}(X, U)$, onde:

- X representa o conjunto de todas as operações de N mais duas operações fictícias 0 e * tal que

1. 0 representa o início de todas as operações e $p_0 = 0$
2. * representa o fim de todas as operações e $p_* = 0$

onde $N = \{1, 2, \dots, n\}$: conjunto de todas as operações i que podem existir em um período, as operações p_0 e p_* , por definição, recebem peso igual a zero.

- $U = A \cup A' \cup E$ o conjunto de arcos, tal que

1. A como definido, para representar a seqüência tecnológica de fabricação
2. $A' = \{(0, i), (i, *), \forall i \in N\}$
3. E representa as operações executadas por uma mesma máquina

- os arcos são valorados com o tempo de processamento da operação que se encontra na sua origem.

Exemplo de Grafo disjuntivo

Como foi visto, Grafos Disjuntivos podem ser usados tanto para modelar um problema de sequenciamento da produção, quanto para representar a solução deste. A ideia principal dele consiste em mostrar a solução do problema destacando o uso das máquinas, e respeitando a precedência de operação dos *jobs*.

Utilizando a definição do Grafo Disjuntivo do problema do *job shop*, obtêm-se o grafo mostrado na Figura 2.5 para o problema do Exemplo 2.1, visto anteriormente.

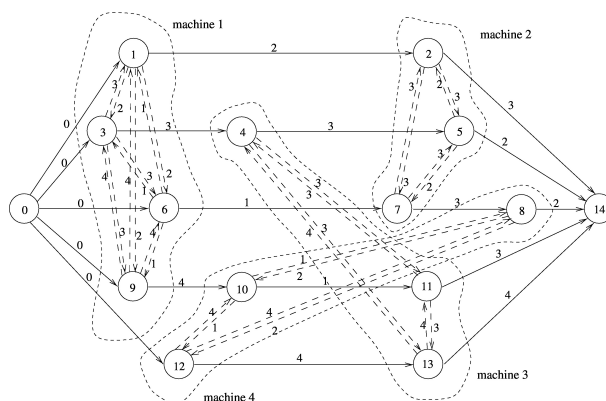


Figura 2.5: Grafo disjuntivo do *job shop*

Nesta Figura, os arcos na horizontal são os arcos do conjunto A (seqüência tecnológica de fabricação - operações em um mesmo produto) e os arcos em pontilhado são os arcos do conjunto E (operações executadas pela mesma máquina).

Busca-se eliminar exatamente um arco de cada par de arcos disjuntivos de tal maneira que o grafo conjuntivo restante não tenha circuitos.

A Figura 2.6 mostra dois exemplos de possíveis circuitos que inviabilizam uma solução para o problema.

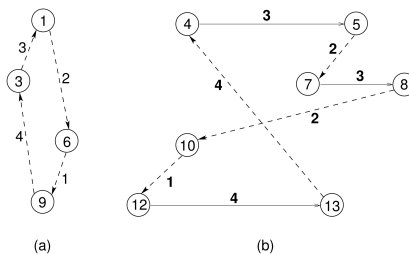


Figura 2.6: Possíveis circuitos no grafo do *job shop*

Uma solução ótima

Utilizando-se de um método exato de execução, obtêm-se a solução ótima do problema do

exemplo 2.1, mostrada pela Tabela 2.2.

$M1$	$J2$	$J3$	$J4$	$J1$
$M2$	$J3$	$J2$	$J1$	
$M3$	$J2$	$J5$	$J4$	
$M4$	$J5$	$J4$	$J3$	

Tabela 2.2: Dados do problema $J4|n = 5|C_{\max}$

Grafo conjuntivo

A solução ótima mostrada na tabela 2.2 também pode ser vista pelo grafo conjuntivo da Figura 2.7.

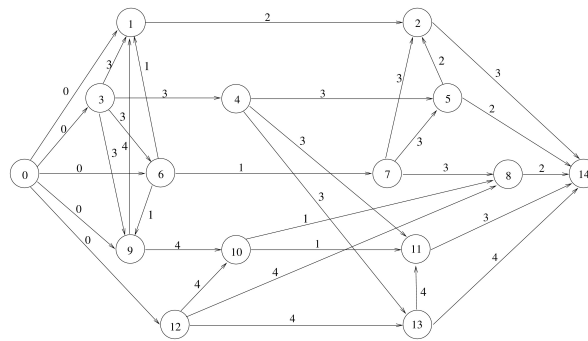


Figura 2.7: Grafo conjuntivo da tabela 2.2

2.3.2 Gráfico de Gantt

Gráfico de Gantt de uma solução ótima: A solução ótima mostrada na tabela 2.2 também pode ser vista pelo gráfico de Gantt da Figura 2.8.

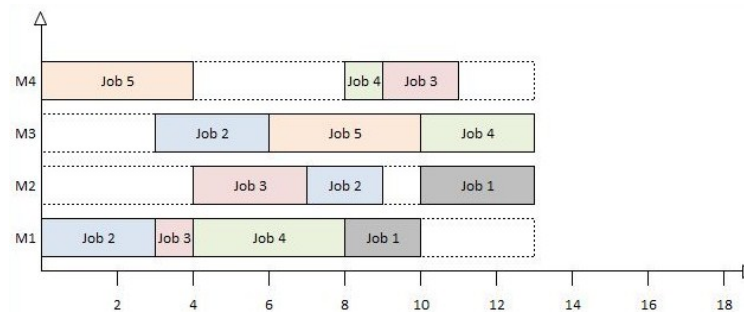


Figura 2.8: Gráfico de Gantt da tabela 2.2

Na Figura 2.8, são representadas as operações realizadas em quatro máquinas ao longo do tempo. Os jobs 2 e 5 são os primeiros a serem processados na máquina 1 e 4, respectivamente. O

job 2 inicia seu processamento na data 0 e termina na data 3, já o *job* 5 inicia seu processamento na data 0 e finaliza na data 4. É possível notar que a máquina 4 fica ociosa da data 4 até a data 8, posterior ao processamento do *job* 5.

Capítulo 3

Modelos da Programação Linear

Inteira Mista

A Programação Linear Inteira Mista (PLIM) compreende problemas em que há variáveis inteiras e variáveis contínuas. A natureza dessas variáveis é modelada de acordo com a necessidade de aplicação do problema de programação matemática. Há diversas áreas potenciais para aplicação da PLIM, tais como o planejamento e gestão de redes de serviços, a gestão da produção, a análise e avaliação de projetos e o planejamento financeiro. Muitos desses problemas podem ser modelados como Programação Inteira Mista (PIM ¹), por meio de restrições que incorporam fenômenos discretos e contínuos.

Neste trabalho, pretende-se fazer uma comparação entre dois modelos de PLIM, propostos inicialmente para o problema de *job shop*. Estes modelos tratam do Problema da Programação da Produção e datam das décadas de 50 e 60, sendo propostos por Wagner (1958) e Manne (1960), respectivamente.

Um Problema de Programação da Produção é entendido como um problema de n tarefas que devem ser processadas em m máquinas que estão disponíveis, segundo Taillard (1993).

A comparação entre ambos é realizada quanto ao desempenho em termos de tempo computacional, para obtenção da solução ótima de um conjunto de instâncias ², posteriormente faz-se a integração do modelo que apresentar melhor desempenho com o modelo clássico de dimensionamento de lotes.

O primeiro desses modelos, formulado por Wagner (1959), é descrito a seguir:

¹Problema de otimização no qual apenas parte das variáveis está restrita a valores inteiros

²A palavra instância é um (mau) neologismo, importado do inglês. Ela está sendo empregada aqui no sentido de exemplo, exemplar, espécime, amostra, ilustração.

3.1 Modelo de Wagner

O modelo de Wagner usa o problema clássico de alocação de tarefas para assinalar *jobs* às posições na sequência de produção.

Considere as seguintes Variáveis:

- $y_i^{(l)} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é a } l^{\text{ésima}} \text{ operação na máquina } m(i) \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$
- M : conjunto de máquinas.
- $t_k^{(l)}$: data de início da $l^{\text{ésima}}$ operação na máquina k
- N' : conjunto de operações.
- $s_k^{(l)}$: duração entre o fim da $l^{\text{ésima}}$ operação e o começo da $(l+1)^{\text{ésima}}$ operação na máquina k (variável de folga)
- s_k^0 : duração entre 0 e a primeira operação na máquina k
- $T_k^{(l)}$: tempo de processamento da $l^{\text{ésima}}$ operação na máquina k .

Formulação Matemática para o Modelo de Wagner

O modelo fica:

$$\min C_{\max} \tag{3.1}$$

$$t_{k_1}^{(l_1)} + p_i y_i^{(l_1)} \leq t_{k_2}^{(l_2)} + \mathbf{M}(2 - y_i^{(l_1)} - y_j^{(l_2)}) \quad \forall \begin{cases} (i,j) \in A, \\ l_1 = 1, \dots, n_{k_1}, \\ l_2 = 1, \dots, n_{k_2} \end{cases} \tag{3.2}$$

$$T_k^{(l)} = \sum_{i \in N': m(i)=k} p_i y_i^{(l)} \quad \forall k \in M, l = 1, \dots, n_k \tag{3.3}$$

$$\sum_{i \in N': m(i)=k} y_i^{(l)} = 1 \quad \forall k \in M, l = 1, \dots, n_k \tag{3.4}$$

$$\sum_{l=1}^{n_k} y_i^{(l)} = 1 \quad \forall i \in N' \tag{3.5}$$

$$t_k^{(1)} = s_k^0 \quad \forall k \in M \tag{3.6}$$

$$t_k^{(r)} = s_k^0 + \sum_{l=1}^{r-1} (T_k^{(l)} + s_k^{(l)}) \quad k \in M, r = 2, \dots, n_k \quad (3.7)$$

$$C_{\max} \geq t_k^{(n_k)} + T_k^{(n_k)} \quad \forall k \in M \quad (3.8)$$

$$t_k^l \geq 0 \quad \forall k \in M, l = 1, \dots, n_k \quad (3.9)$$

$$T_k^{(l)} \geq 0 \quad \forall k \in M, l = 1, \dots, n_k \quad (3.10)$$

$$s_k^l \geq 0 \quad \forall k \in M, l = 0, \dots, n_k - 1 \quad (3.11)$$

$$y_i^{(l)} \in \{0, 1\} \quad \forall \begin{cases} i \in N' \\ l = 1, \dots, n_k \end{cases} \quad (3.12)$$

Seja $t_{k_2}^{(l_2)}$ a data de início da operação l_2 na máquina k_2 . A restrição (3.2) mostra que a $l_2^{\text{ésima}}$ operação não pode ser executada antes que a $l_1^{\text{ésima}}$ operação tenha sido completada. Essa restrição é satisfeita considerando que i é a $l_1^{\text{ésima}}$ operação na máquina $m(i)$ e j é a $l_2^{\text{ésima}}$ operação na máquina $m(j)$.

A equação (3.3) diz que o tempo de processamento da $l^{\text{ésima}}$ operação na máquina k é igual ao tempo total de processamento das operações.

A restrição (3.4) estabelece que cada tarefa pode ser alocada uma só vez em cada máquina e a (3.5) garante que cada posição em cada máquina só pode conter uma operação.

A restrição (3.6) impõe que o instante de início da primeira operação na máquina k seja igual ao tempo transcorrido entre zero e a primeira operação na máquina k .

A restrição (3.7) define que o instante de início de uma operação (diferente da inicial) numa máquina seja igual ao somatório dos tempos ociosos incorridos na máquina desde o início da produção até a posição avaliada adicionado aos tempos de processamento de todas as operações alocadas nas posições anteriores.

A restrição (3.8) diz que o critério de otimização (makespan) deve ser maior ou igual ao tempo de processamento de um item, adicionado à data de início da operação, considerando todas as operações executadas em uma mesma máquina.

As restrições (3.9) a (3.10) definem o domínio das variáveis e a (3.11) denota a variável binária, assumindo o valor 1 quando i é a $l^{\text{ésima}}$ operação na máquina $m(i)$ e 0 caso contrário.

3.1.1 Formulação adaptada de Wagner

A formulação adaptada de Wagner possui como objetivo minimizar o custo de não atendimento da demanda, considerando a produção no máximo igual à demanda, incluindo uma restrição de capacidade, sendo que a data de início de uma operação, adicionada ao tempo de processamento da mesma não pode ultrapassar a capacidade disponível para o período.

Os dados e variáveis da formulação são apresentados:

- $y_i^{(l)} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é a } l^{\text{ésima}} \text{ operação na máquina } m(i) \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$
- $t_k^{(l)}$: data de início da $l^{\text{ésima}}$ operação na máquina m_k
- $s_k^{(l)}$: duração entre o fim da $l^{\text{ésima}}$ operação e o começo da $(l+1)^{\text{ésima}}$ operação na máquina m_k (variável de folga)
- s_k^0 : duração entre 0 e a primeira operação na máquina m_k
- $T_k^{(l)}$: tempo de processamento da $l^{\text{ésima}}$ operação na máquina m_k .

Modelo:

$$\min \sum_{j \in J} c_j (D_j - X_j) \quad (3.13)$$

s. a:

$$\sum_{i \in N' : m(i) = m_k} y_i^{(l)} = 1 \quad \forall k \in M, l = 1, \dots, n_k \quad (3.14)$$

$$\sum_{l=1}^{n_k} y_i^{(l)} = 1 \quad \forall i \in N \quad (3.15)$$

$$T_k^{(l)} \geq p_i X_j - M(1 - y_i^{(l)}) \quad \forall \begin{cases} k \in M, \\ l = 1, \dots, n_k \\ i : m(i) = k \text{ e } j(i) = j \end{cases} \quad (3.16)$$

$$t_{k_1}^{(l_1)} + p_{i_1} X_j \leq t_{k_2}^{(l_2)} + M(2 - y_{i_1}^{(l_1)} - y_{i_2}^{(l_2)}) \quad \forall \begin{cases} (i_1, i_2) \in A, j(i_1) = j(i_2) = j \\ l_1 = 1, \dots, n_{k_1} \text{ e } i_1 : m(i_1) = k_1 \\ l_2 = 1, \dots, n_{k_2} \text{ e } i_2 : m(i_2) = k_2 \end{cases} \quad (3.17)$$

$$t_k^{(1)} = s_k^0 \quad \forall k \in M \quad (3.18)$$

$$t_k^{(r)} = s_k^0 + \sum_{l=1}^{r-1} (T_k^{(l)} + s_k^{(l)}) \quad k \in M, r = 2, \dots, n_k \quad (3.19)$$

$$t_k^{(n_k)} + T_k^{(n_k)} \leq Q \quad \forall k \in M \quad (3.20)$$

$$0 \leq X_j \leq D_j \quad \forall j \in J \quad (3.21)$$

$$T_k^{(l)} \geq 0 \quad \forall k \in M, l = 1, \dots, n_k \quad (3.22)$$

$$s_k^l \geq 0 \quad \forall k \in M, l = 1, \dots, n_k \quad (3.23)$$

$$y_i^{(l)} \in \{0, 1\} \quad \forall \begin{cases} i \in N, \\ l = 1, \dots, n_k \text{ e } i : m(i) = k \end{cases} \quad (3.24)$$

A Função Objetivo minimiza o custo total de não atendimento da demanda do *job* j .

A restrição (3.14) estabelece que cada tarefa pode ser alocada uma só vez em cada máquina e a (3.15) garante que cada posição em cada máquina só pode conter uma operação.

A restrição (3.16) diz que o tempo total de processamento de um item deve ser no máximo igual ao tempo de processamento da *l*ésima operação na máquina k .

A restrição (3.17) denota a relação de precedência das operações.

A restrição (3.20) estabelece que a data de início de determinada operação em determinada máquina adicionada ao tempo de processamento da mesma operação deve ser no máximo igual ao número de horas da máquina disponível para cada período de produção.

A restrição (3.21) estabelece que a quantidade a ser fabricada do *job* j deve ser no mínimo igual a zero e no máximo igual à quantidade demandada do *job* j .

As demais restrições foram definidas na formulação anterior.

O segundo modelo, descrito por Manne (1960) é apresentado:

3.2 Modelo de Manne

O modelo de Manne procura satisfazer duas restrições básicas: seqüência e não interferência e utiliza um par de restrições dicotômicas para controlar a ordem relativa dos *jobs* dentro da seqüência de produção. Os dados gerais do problema são representados pela notação já definida

anteriormente, lembrando:

- C_{max} : *Makespan*
- t_j : data de início da operação j
- t_i a data de início da operação i
- p_i tempo unitário de processamento da operação i .
- $y_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in E$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ precede } j \text{ em } m_k = m(i) = m(j) \\ 0 & \text{se } j \text{ precede } i \text{ em } m_k = m(i) = m(j). \end{cases}$$

- $A = \{(i, j) : i \in N', j \in N', \text{ e } i < j\}$: conjunto de pares de operações para representar a sequência tecnológica de fabricação de cada produto.
- $m(i) = m_i$: uma função aplicada ao conjunto N' para definir a máquina que executa cada operação.
- $E = \{(i, j) : i \in N', j \in N', i \neq j \text{ e } m(i) = m(j)\}$: conjunto de pares de operações para representar as operações executadas em uma mesma máquina. Note que, se $(i, j) \in E$, então, $(j, i) \in E$.
- M : um valor positivo grande.
- n_k : número de operações executadas na máquina m_k .

Variáveis:

- N' : conjunto de operações.

Formulação Matemática para o Modelo de Manne

O modelo fica:

$$\min C_{\max} \tag{3.25}$$

$$t_j - t_i \geq p_i \quad \forall (i, j) \in A \tag{3.26}$$

$$t_j \geq t_i + p_i - \mathbf{M}(1 - y_{ij}) \quad \forall (i, j) \in E \quad (3.27)$$

$$y_{ij} + y_{ji} = 1 \quad \forall \{(i, j); (j, i)\} \subset E \quad (3.28)$$

$$C_{\max} \geq t_i + p_i \quad \forall i \in N' \quad (3.29)$$

A desigualdade (3.26) apresenta a restrição lógica, que caracteriza os Problemas de Sequenciamento, porém a programação matemática linear clássica não lida com esta restrição, sendo necessária sua linearização. Para transformar essa restrição em uma inequação linear com variáveis inteiras, Manne definiu a variável binária y_{ij} (com $y_{ij} \in \{0,1\}$). Com essa variável binária é possível obter a restrição (3.26) a partir da (3.27), quando o *job* j é produzido após o *job* i , caso em que y_{ij} é igual a 1.

No modelo de Manne existem duas situações possíveis, mostradas na restrição (3.28), ou o *job* i é produzido antes do *job* j , caso em que y_{ij} é igual a 1 e y_{ji} é igual a zero ou o *job* i é produzido após o *job* j , onde temos y_{ij} igual a zero e y_{ji} igual a um. A última restrição do modelo, designada por (3.29) diz que o critério de otimização (C_{\max}) é maior ou igual ao tempo de processamento de um item, adicionado à data de início da operação i .

3.2.1 Formulação adaptada de Manne

De forma análoga à formulação adaptada de Wagner, nessa formulação considera-se como objetivo a minimização do custo de não atendimento da demanda e a produção é no máximo igual à demanda, incluindo uma restrição de capacidade para o processamento dos itens.

As variáveis deste modelo são:

- $t_i \geq 0$, para todo $i \in N$: data de início de processamento do item i .
- $y_{i_1 i_2} \in \{0, 1\}$, para todo $(i_1, i_2) \in E$, onde

$$y_{i_1 i_2} = \begin{cases} 1 & \text{se a operação } i_1 \text{ é executada antes de } i_2 \\ 0 & \text{se não.} \end{cases}$$

O modelo fica:

$$\min \sum_{j \in J} c_j (D_j - X_j) \quad (3.30)$$

s. a:

$$t_{i_2} \geq t_{i_1} + p_{i_1} X_j \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} (i_1, i_2) \in A \text{ e} \\ j(i_1) = j(i_2) = j \end{array} \right. \quad (3.31)$$

$$t_{i_2} \geq t_{i_1} + p_{i_1} X_j - \mathbf{M}(1 - y_{i_1 i_2}) \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} (i_1, i_2) \in E \text{ e} \\ j(i_1) = j \end{array} \right. \quad (3.32)$$

$$y_{i_1 i_2} + y_{i_2 i_1} = 1 \quad \forall (i_1, i_2) \in E \quad (3.33)$$

$$t_{ij} + p_{ij} X_j \leq Q \quad \forall j \in J \quad (3.34)$$

$$t_i \geq 0 \quad \forall i \in N \quad (3.35)$$

$$0 \leq X_j \leq D_j \quad \forall j \in J \quad (3.36)$$

$$y_{i_1 i_2} \in \{0, 1\} \quad \forall (i_1, i_2) \in E \quad (3.37)$$

A Função Objetivo minimiza o custo total de não atendimento da demanda do *job* j .

A restrição (3.31) define a sequência de operações.

Se a operação i_1 for executada antes de i_2 a restrição (3.32) será igual à anterior, caso contrário, será desativada, visto que será redundante.

A restrição (3.33) define a ordem de execução das operações sequenciais e a restrição (3.34) limita o tempo de execução das operações.

As restrições (3.35) a (3.36) definem o domínio das variáveis.

3.2.2 Um exemplo

Em caráter ilustrativo é apresentado um problema de sequenciamento da produção o qual conhece-se, à princípio, uma solução ótima. Este problema é resolvido pelos dois modelos propostos e obtém-se a solução ótima procurada pelos dois modelos.

Considere o seguinte exemplo, onde 3 produtos são fabricados utilizando-se 3 máquinas. A sequência tecnológica de fabricação de cada produto e os tempos unitários de processamento de cada operação são dados pela Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Dados do problema $J3|n = 3|C_{\max}$

<i>jobs</i>	o_i : máquina (p_i)		
<i>J1</i>	o_1 : 1(2)	o_2 : 2(2)	o_3 : 3(3)
<i>J2</i>	o_4 : 1(3)	o_5 : 2(1)	o_6 : 3(2)
<i>J3</i>	o_7 : 2(4)	o_8 : 1(3)	–

Note que neste exemplo, como mostrado pela Tabela 3.1, para fabricar o produto 1 são necessárias três operações. A primeira operação possui o tempo unitário de processamento igual à duas unidades de tempo e é executada pela máquina 1. A segunda possui tempo unitário de processamento igual à dois e deve ser executada pela máquina 2, a terceira possui tempo unitário de processamento igual à três e é executada pela máquina 3. Assim, a sequência tecnológica de fabricação do produto 1 é composta por essas três operações. De maneira similar, a tabela mostra as sequências tecnológicas de fabricação dos demais produtos.

O grafo disjuntivo deste problema é mostrado pela Figura 3.1.

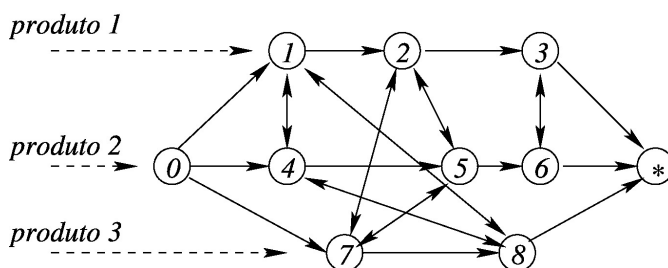


Figura 3.1: Grafo disjuntivo do problema mostrado na Tabela 3.1

Considerando a função objetivo de minimização da maior data de término da fabricação de exatamente uma unidade de cada produto, obtêm-se uma solução ótima para este problema, mostrada pela Figura 3.2.

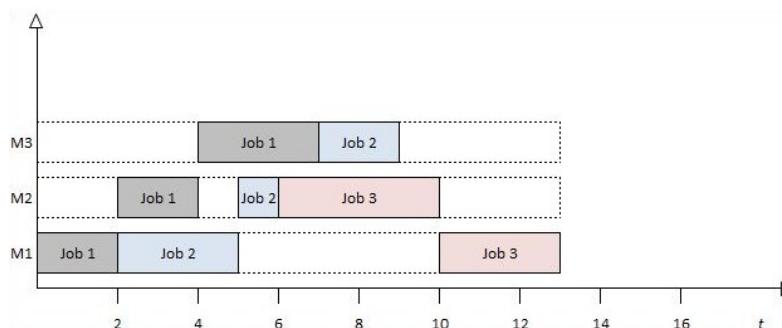


Figura 3.2: Gráfico de Gantt da Tabela 3.1

Nesta solução, todos os produtos são fabricados e a maior data de término é igual a 13. Observa-se que todas as máquinas possuem tempos ociosos, gerados entre o término de uma

operação e o início da seguinte, busca-se reduzir esses tempos e para tanto, faz-se necessário propor um modelo que capte as relações entre o modelo de dimensionamento de lotes e o sequenciamento da produção.

São apresentados a seguir, ambos os modelos e é realizada uma análise, visando averiguar a possibilidade da Integração e os ganhos com tal proposta.

3.3 Justificativa para integração dos modelos

Seja um horizonte de planejamento discretizado em quatro períodos de planejamento, onde três produtos devem ser fabricados utilizando-se três máquinas. Para cada produto, o estoque inicial, as demandas em cada período, o custo de estocagem, o custo de não atendimento da demanda e o número necessário de horas de cada máquina são mostrados pela Tabela 3.2. Note que o tempo disponível para a produção é igual à 33 unidades de tempo para todas as máquinas.

Tabela 3.2: Problema de dimensionamento de lotes

	I_{i0}	D_{jt}				c_j^+	c_j^-	a_j^k		
produto 1	-1	1	2	3	5	3	30	2	4	3
produto 2	0	2	2	6	6	4	40	3	3	2
produto 3	1	0	2	4	5	5	50	3	4	0
Q^k								33	33	33

O problema de dimensionamento de lotes é definido como um problema de planejamento da produção. No exemplo considerado, consiste em determinar a quantidade de itens a ser produzida em cada período, considerando o horizonte de planejamento formado por quatro períodos, de modo a atender as demandas pré-estabelecidas e otimizar uma função objetivo que minimiza os custos de estoque e não atendimento da demanda.

A solução ótima obtida para este problema é mostrada pela Tabela 3.3 e possui um custo de 54 u.m.

Tabela 3.3: Solução ótima

	X_{jt}				I_{jt}^+				I_{jt}^-			
produto 1	2	3	2	5	0	1	0	0	0	0	0	0
produto 2	4	6	4	2	2	6	4	0	0	0	0	0
produto 3	0	1	4	5	1	0	0	0	0	0	0	0

Observa-se que não ocorre ruptura de estoque, ou seja, todas as ordens produtivas são suficientes para cobrir as respectivas demandas.

Considerando a_j^k e a solução ótima dada, encontra-se a utilização das máquinas em cada período, mostrada pela Tabela 3.4:

Tabela 3.4: Tempo de utilização das máquinas

máquina 1	20	33	32	33
máquina 2	18	28	26	31
máquina 3	22	33	22	23

Observe que, como já previsto nas restrições do modelo de dimensionamento de lotes, os valores dos tempos de utilização das máquinas expostos na Tabela 3.4, respeitam a capacidade fornecida para cada máquina.

E uma vez definidas as quantidades a serem produzidas em cada período, faz-se necessário definir o sequenciamento das máquinas, isto é, torna-se necessário definir a sequência de operações em cada máquina.

Esta sequência pode ser obtida resolvendo-se o problema de sequenciamento pelo Modelo de Manne. No exemplo numérico apresentado, cada período de produção gera um problema de sequenciamento, onde os tempos de processamento de cada operação em cada máquina é obtido pela multiplicação dos tempos unitários de processamento (a_j^k) pelas respectivas quantidades de produtos a serem produzidos em cada período. Assim, obtém-se um problema de sequenciamento para cada período de produção, mostrados pelas Figuras 3.5 a 3.8.

O problema de sequenciamento da produção é definido como um problema de programação da produção que consiste em: dado um planejamento preestabelecido, sequenciar determinadas tarefas em uma ou várias máquinas, de forma a otimizar uma função objetivo (Araujo, 2003).

Tabela 3.5: Dados do Problema Primeiro Período

jobs	o_i : máquina ($a_j^k \times X_{jt}$)		
J1	o_1 : 1(4)	o_2 : 2(8)	o_3 : 3(6)
J2	o_4 : 1(12)	o_5 : 3(12)	o_6 : 2(8)
J3	o_7 : 2(0)	o_8 : 1(0)	-

Tabela 3.6: Dados do Problema Segundo Período

jobs	o_i : máquina ($a_j^k \times X_{jt}$)		
J1	o_1 : 1(6)	o_2 : 2(12)	o_3 : 3(9)
J2	o_4 : 1(18)	o_5 : 3(18)	o_6 : 2(12)
J3	o_7 : 2(3)	o_8 : 1(4)	-

Tabela 3.7: Dados do Problema Terceiro Período

<i>jobs</i>	o_i : máquina ($a_j^k \times X_{jt}$)		
<i>J1</i>	o_1 : 1(4)	o_2 : 2(8)	o_3 : 3(6)
<i>J2</i>	o_4 : 1(12)	o_5 : 3(12)	o_6 : 2(8)
<i>J3</i>	o_7 : 2(12)	o_8 : 1(16)	–

Tabela 3.8: Dados do Problema Quarto Período

<i>jobs</i>	o_i : máquina ($a_j^k \times X_{jt}$)		
<i>J1</i>	o_1 : 1(10)	o_2 : 2(20)	o_3 : 3(15)
<i>J2</i>	o_4 : 1(6)	o_5 : 3(6)	o_6 : 2(4)
<i>J3</i>	o_7 : 2(15)	o_8 : 1(20)	–

As Tabelas 3.5 a 3.8 retratam os tempos necessários de utilização de cada máquina e a sequência tecnológica de fabricação de cada *job*. Todos os valores foram encontrados, multiplicando-se os tempos unitários necessários de processamento (a_j^k) de cada *job* pela respectiva quantidade produzida.

A Tabela 3.9 apresenta o Plano de Produção requerido e a Tabela 3.10 apresenta as quantidades a serem produzidas em cada período.

Tabela 3.9: Plano de Produção

produtos\período	1	2	3	4
1	2	3	2	5
2	4	6	4	2
3	0	1	4	5

Considerando então, que cada período possui 33 unidades de tempo de processamento para cada máquina e resolvendo-se o problema de sequenciamento com este limite, observa-se que não é possível produzir as quantidades definidas pelo problema de dimensionamento de lotes.

No ótimo, as quantidades que se consegue produzir em cada período são mostradas pela Tabela 3.10

Tabela 3.10: Quantidades a serem produzidas por período - Modelo de Manne

produtos\período	1	2	3	4
1	2	2.06	2	2.70
2	4	4.13	4	2
3	0	1	4	4.71

3.4 Modelos integrados

A integração proposta, consiste em introduzir as restrições de sequenciamento no problema de dimensionamento de lotes, de maneira que a função objetivo do problema é mantida (minimização de custos de estoque e não atendimento da demanda) e em que, existe uma sequência de máquinas capaz de produzir as quantidades de produtos à cada período.

Para esta integração, são apresentadas duas propostas de políticas de integração para os problemas de dimensionamento de lotes de produção e sequenciamento de produção. A primeira política considera o problema de sequenciamento somente no primeiro período de planejamento. O objetivo é minimizar o custo total de estocagem e não atendimento da demanda.

A segunda política considera o problema de sequenciamento em todos os períodos de produção e o objetivo é minimizar o custo total de estocagem, tanto de produtos acabados como os semiacabados, e o custo de não atendimento de produtos acabados. O modelo utilizado para o problema de dimensionamento de lotes é o mesmo apresentado e o modelo utilizado para o sequenciamento de produção é o modelo de Manne.

3.4.1 Sequenciamento somente no primeiro período

Esta política considera o problema de sequenciamento somente no primeiro período do horizonte de planejamento do problema de dimensionamento de lotes de produção. A Figura 3.3 ilustra esta política para um problema com três períodos de planejamento.

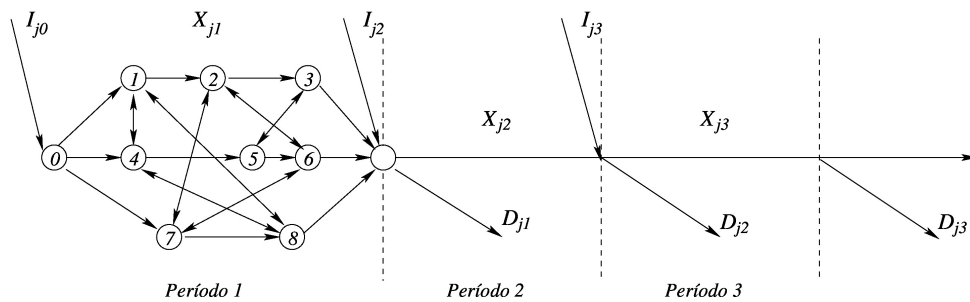


Figura 3.3: Sequenciamento no primeiro período do horizonte de planejamento

O problema ilustrado pela Figura 3.3 possui período de planejamento de três semanas e o sequenciamento foi aplicado apenas na primeira semana.

Dados do problema:

- c_j^+ , $\forall j \in J$: custo unitário de estocagem do job j por um período de planejamento.
- c_j^- , $\forall j \in J$: custo unitário de não atendimento da demanda do job i por um período de planejamento.

- $I_{jt}^+ \geq 0, \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H$: quantidade do *job* j a estocar no fim do período t .
- $I_{jt}^- \geq 0, \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H$: quantidade da demanda do *job* j não atendida no fim do período t .
- $X_{jt} \geq 0, \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H$: quantidade a ser fabricada do *job* j no período t .
- $D_{jt}, \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H$: demanda do *job* j no período t .
- \mathbf{M} : um valor positivo grande.
- $y_{i_1 i_2} \in \{0, 1\}$, para todo $(i_1, i_2) \in E$, onde

$$y_{i_1 i_2} = \begin{cases} 1 & \text{se a operação } i_1 \text{ é executada antes de } i_2 \\ 0 & \text{se não.} \end{cases}$$

- $E = \{(i, j) : i \in N', j \in N', i \neq j \text{ e } m(i) = m(j)\}$: conjunto de pares de operações para representar as operações executadas em uma mesma máquina. Note que, se $(i, j) \in E$, então, $(j, i) \in E$.
- $a_j^k \forall j \in J \text{ e } k \in M$: número de horas necessárias da máquina k para fabricar uma unidade do *job* j
- $Q^k, \forall k \in M$: número total de horas da máquina k disponível para cada período de produção.
- t_i : data de início da operação i .
- p_i : representa o tempo de processamento de cada operação.
- H : número de períodos de planejamento t .
- $J = \{1, 2, \dots, |J|\}$: conjunto de *jobs*.
- $M = \{1, 2, \dots, K\}$: conjunto de máquinas.

O modelo fica:

$$\min \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^H (c_j^+ I_{jt}^+ + c_j^- I_{jt}^-) \quad (3.38)$$

sujeito a:

$$I_{j(t-1)}^+ - I_{j(t-1)}^- + X_{jt} = D_{jt} + I_{jt}^+ - I_{jt}^- \quad \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.39)$$

$$\sum_{j \in J} a_j^k X_{jt} \leq Q^k \quad \forall t = 2, 3, \dots, H \text{ e } k \in M \quad (3.40)$$

$$t_{i_1} + p_{i_1} X_{j_1} \leq t_{i_2} \quad \forall (i_1, i_2) \in A \text{ e } j(i_1) = j \quad (3.41)$$

$$t_{i_1} + p_{i_1} X_{j1} - \mathbf{M}(1 - y_{i_1 i_2}) \leq t_{i_2} \quad \forall (i_1, i_2) \in E \text{ e } j(i_1) = j \quad (3.42)$$

$$t_{i_j} + p_{i_j} X_{j1} \leq Q^1 \quad \forall j \in J \quad (3.43)$$

$$y_{i_1 i_2} + y_{i_2 i_1} = 1 \quad \forall (i_1, i_2) \in E \quad (3.44)$$

$$y_{i_1 i_2} \in \{0, 1\} \quad \forall (i_1, i_2) \in E \quad (3.45)$$

$$t_i \geq 0 \quad \forall i \in N \quad (3.46)$$

$$X_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.47)$$

$$I_{jt}^+ \geq 0 \quad \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.48)$$

$$I_{jt}^- \geq 0 \quad \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.49)$$

A função objetivo (3.38) minimiza a soma dos custos totais de estocagem de produtos acabados e não atendimento da demanda.

A restrição (3.39) faz o balanceamento de estoque, ou seja, a cada período, a quantidade produzida a estocar no fim do período $t - 1$ mais a quantidade de demanda não atendida no fim do período $t - 1$ adicionada à quantidade a ser fabricada no período t deve ser igual à demanda do período mais a quantidade a estocar no fim do período t adicionada à demanda não atendida ao fim do mesmo período.

A restrição (3.40) é a restrição de capacidade que garante que a soma dos tempos de produção dos itens no período t será menor que a capacidade disponível no mesmo período.

A restrição (3.41) diz que a data de início do processamento do item i_2 deve ser maior ou igual à data de início de processamento do item i_1 , mais o tempo total necessário para o processamento desse mesmo item.

A restrição (3.42) garante a ordem de operações em uma mesma máquina, ou seja, a operação i_1 deve ser realizada antes da operação i_2 , retornando dessa forma à restrição anterior.

Em (3.43) é mostrada a restrição de capacidade de tempo para o primeiro período de produção.

A equação (3.44) denota a ordem de precedência das operações, caso a operação i_1 seja executada antes da i_2 o valor de $y_{i_1 i_2}$ é 1 e $y_{i_2 i_1}$ é zero.

As restrições (3.46) a (3.49) definem o domínio das variáveis.

3.4.2 Sequenciamento em todos os períodos

Este problema considera a estocagem de produtos semiacabados. A última operação da sequência tecnológica de fabricação de cada produto produz o produto acabado. Uma operação só produz produto semiacabado se ela não for a última operação de uma sequência tecnológica de fabricação.

Considerando um horizonte formado por três períodos de planejamento. Em cada período poderão ser fabricados três produtos. A sequência tecnológica de fabricação do produto 1 é composta por três operações, (1, 2, e 3), executadas pelas máquinas 1, 2 e 3, respectivamente. A sequência tecnológica de fabricação do produto 2 também é composta por três operações (4, 5, e 6), executadas pelas máquinas 1, 2 e 3, respectivamente. A sequência tecnológica de fabricação do produto 3 é composta por duas operações (7, e 8), executadas pelas máquinas 2 e 1, respectivamente. A Figura 3.4 ilustra o problema de integração considerando o problema de sequenciamento nos três períodos de planejamento.

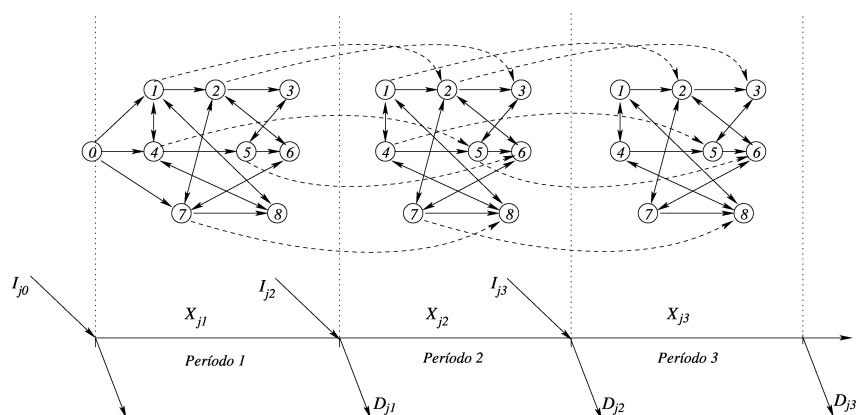


Figura 3.4: Sequenciamento em todos os períodos do horizonte de planejamento

A reta inferior da Figura 3.4 representa o horizonte de planejamento composto pelos três períodos. Neste horizonte são identificados os estoques, a quantidade produzida e as demandas de cada período. As operações de cada produto, conseqüentemente as sequências tecnológicas de fabricação de cada produto em cada período são representadas acima da linha do horizonte de planejamento. As setas pontilhadas interligando as mesmas operações, porém de períodos consecutivos, representam a possibilidade de estocagem de produtos semiacabados produzidos em um período e utilizados no próximo.

Seja então as variáveis:

- c_j^+ , $\forall j \in J$: custo unitário de estocagem do job j por um período de planejamento.

- c_j^- , $\forall j \in J$: custo unitário de não atendimento da demanda do *job* i por um período de planejamento.
- I_{jt}^+ , $\forall j \in J$ e $t = 1, 2, \dots, H$: quantidade do *job* j a estocar no fim do período t .
- I_{jt}^- , $\forall j \in J$ e $t = 1, 2, \dots, H$: quantidade da demanda do *job* j não atendida no fim do período t .
- c_i , $\forall i \in N \setminus N_j$: custo unitário de estoque do item i durante um período.
- q_{it}^+ , $\forall i \in N \setminus N_j$ e $t = 1, 2, \dots, H$: quantidade estocada do item i no fim do período t .
- x_{it} , $\forall i \in N \setminus N_j$ e $t = 1, 2, \dots, H$: quantidade do item i fabricada no período t .
- X_{jt} , $\forall j \in J$ e $t = 1, 2, \dots, H$: quantidade a ser fabricada do *job* j no período t .
- p_i : tempo unitário de processamento da operação i .
- Q : tempo total disponível no período para a fabricação dos itens.

3.4.3 Formulação Matemática para o problema integrado

$$\min \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^H (c_j^+ I_{jt}^+ + c_j^- I_{jt}^-) + \sum_{i \in N \setminus N_j} \sum_{t=1}^H c_i q_{it}^+ \quad (3.50)$$

Nesta formulação, a função objetivo (3.50) minimiza a soma dos custos de estocagem de produtos acabados, não atendimento da demanda e dos produtos semiacabados.

O conjunto de restrições (3.51) representam o balanceamento de estoque de cada item em cada período, observa-se que parte de X_{jt} é utilizada para atendimento da demanda D_{jt} e parte é estocada para o próximo período.

$$I_{j(t-1)}^+ - I_{j(t-1)}^- + X_{jt} = D_{jt} + I_{jt}^+ - I_{jt}^- \quad \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.51)$$

Para garantir que o balanceamento de estoque de produtos semiacabados seja realizado, faz-se necessário impor as restrições (3.52), onde a quantidade em estoque de itens da operação 1 no fim do período $t - 1$, adicionada à quantidade do mesmo item fabricado seja igual à quantidade necessária desse item na operação 2, mais a quantidade encaminhada para estoque no fim do período t .

$$q_{i_1(t-1)}^+ + x_{i_1t} = x_{i_2t} + q_{i_1t}^+ \quad \forall \begin{cases} (i_1, i_2) \in A, i_2 \neq i_1 \text{ e} \\ t = 1, 2, \dots, H \end{cases} \quad (3.52)$$

Nas equações (3.53), observa-se que $x_{it} = X_{jt}$ se i for a última operação da sequência tecnológica de fabricação do *job* j , visto que a quantidade estocada do item i no fim do período t será igual à quantidade estocada do mesmo item no início do período. Note que, para os produtos semiacabados, parte de x_{it} é utilizada na operação seguinte da sequência tecnológica de fabricação e parte é estocada

$$q_{i(t-1)}^+ + x_{it} = X_{jt} + q_{it}^+ \quad \forall (i, i_j) \in A \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.53)$$

As restrições (3.54) são válidas quando uma operação sucede imediatamente a outra na sequência tecnológica de fabricação.

$$t_{i_1t} + p_i x_{i_1t} \leq t_{i_2t} \quad \forall (i_1, i_2) \in A \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.54)$$

No conjunto de restrições (3.55), \mathbf{M} é um valor muito grande.

$$t_{i_1t} + p_i x_{i_1t} - \mathbf{M}(1 - y_{i_1i_2}^t) \leq t_{i_2t} \quad \forall (i_1, i_2) \in E \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.55)$$

Desta forma, quando $y_{i_1i_2}^t$ for igual a um, as restrições tornam-se:

$$t_{i_1t} + p_i x_{i_1t} \leq t_{i_2t} \quad \forall (i_1, i_2) \in E \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.56)$$

E quando $y_{i_1i_2}^t$ é igual a zero, tem-se:

$$t_{i_1t} + p_i x_{i_1t} - t_{i_2t} \leq \mathbf{M} \quad \forall (i_1, i_2) \in E \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.57)$$

As restrições (3.55) são, desta forma, desativadas, pois a desigualdade (3.57) é redundante, ou seja, a parcela $t_{i_1t} + p_i x_{i_1t} - t_{i_2t}$ será sempre menor que \mathbf{M} .

As restrições representadas em (3.58), denotam a limitação da capacidade, onde a data de início de uma operação adicionada ao tempo total de processamento da mesma, sendo no máximo

igual à capacidade disponível no período.

$$t_{i_j} + p_{i_j} X_{it} \leq Q \quad \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.58)$$

Estas restrições garantem a não simultaneidade de execução de duas operações numa mesma máquina.

$$y_{i_1 i_2}^t + y_{i_2 i_1}^t = 1 \quad \forall (i_1, i_2) \in E \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.59)$$

$$y_{i_1 i_2}^t \in \{0, 1\} \quad \forall (i_1, i_2) \in E \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.60)$$

Por fim, as restrições (3.61) a (3.66) definem o domínio das variáveis.

$$x_{it} \geq 0 \quad \forall i \in N \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.61)$$

$$q_{it}^+ \geq 0 \quad \forall i \in N \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.62)$$

$$t_{it} \geq 0 \quad \forall i \in N \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.63)$$

$$X_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.64)$$

$$I_{jt}^+ \geq 0 \quad \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.65)$$

$$I_{jt}^- \geq 0 \quad \forall j \in J \text{ e } t = 1, 2, \dots, H \quad (3.66)$$

Capítulo 4

Resultados

4.1 Obtenção dos resultados

Neste capítulo são apresentados e analisados os resultados computacionais obtidos através de algumas instâncias. São apresentados, também, os parâmetros dos métodos utilizados e como foram gerados as instâncias para o problema.

Todos os resultados apresentados nessa dissertação foram obtidos através do pacote comercial CPLEX, rodando em uma máquina Intel Core 2 Quad 64 bits 2.5GHz, Memória 8GB RAM DDR2, sistema operacional Linux 64Bits (Ubuntu 11.04).

Para testar os modelos de Manne e Wagner segundo aspectos específicos, foi proposto um gerador de instâncias. A construção deste gerador foi motivada principalmente pela necessidade de comparar os resultados para ambos os modelos e optar por um deles para realizar a integração com o modelo clássico de dimensionamento de lotes.

O GAP ¹ foi calculado para avaliar a qualidade dos limites inferiores da seguinte forma:

$$GAP = \frac{Z - LI}{Z} \times 100$$

onde:

- Z é o valor da solução encontrada pelo CPLEX.
- LI o limite inferior obtido com a relaxação linear.

¹distância percentual entre a solução encontrada pelo CPLEX e o limitante inferior

Tabela 4.1: Valores dos Parâmetros

Parâmetros	Valores
Número de períodos	3
Número de <i>jobs</i>	[4; 9]
Número de máquinas	[3; 8]
Demanda	[5; 10]
Capacidade de cada máquina	168
Capacidade do período	168
Estoque Inicial	[-4; 4]
Custo de Estoque	$jobs - 2 + i$
Custo de não atendimento da demanda	10 x (custo de estoque)
Valor de M	169

Em todas as instâncias, a capacidade do período foi considerada constante e esse valor foi encontrado multiplicando-se um turno de oito horas, pelo número de dias considerado (7 dias por semana) e pelo período de planejamento que é igual à três semanas. O não atendimento da demanda, ou ruptura de estoque foi penalizado na função objetivo e seu valor é 10 vezes o valor considerado para o custo de estoque de produtos acabados.

4.2 Apresentação e Análise dos Resultados - Modelos de Manne e Wagner

Para as instâncias seguintes, o tempo computacional para resolver cada modelo foi arbitrariamente limitado em 1 hora (3600 segundos) e os gaps de otimalidade foram calculados.

Comparando os resultados das Tabelas 4.2 e 4.3, nota-se, que ambos os modelos, apresentam características peculiares para instâncias de maior dimensão. É verificado através dos resultados expostos que o Modelo de Wagner não encontra solução para algumas instâncias e apresenta um Gap significativo para outras. Já o modelo de Manne, apesar de encontrar a solução para todas as instâncias testadas, apresenta um Gap significativo para as instâncias de maior dimensão.

Dessa forma, pode-se concluir que o Modelo de Manne é melhor de forma comparativa, levando-se em conta o tempo de resolução das instâncias propostas.

Sendo assim, esse modelo foi utilizado para a integração com o Modelo Clássico de Dimensionamento de Lotes e os resultados são apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.2: Resultados do Modelo de Manne

Jobs x Máquinas	Solução	Limite Inferior	gap (%)	Tempo de execução
4x4	-96	-96	0	0.02
4x5	-104	-104	0	0.02
4x6	-124	-124	0	0.01
4x7	-120	-120	0	0.02
4x8	-104	-104	0	0.03
5x4	-133.6	-133.6	0	0.07
5x5	-140	-140	0	0.03
5x6	-143.6	-143.6	0	0.02
5x7	-112.8	-112.8	0	0.02
5x8	-119.8	-119.8	0	0.06
6x4	-164	-164	0	0.24
6x5	-152	-152	0	0.22
6x6	-169.8	-169.8	0	0.18
6x7	-180	-180	0	0.03
6x8	-151.6	-151.6	0	0.03
7x6	-169	-169	0	1.63
7x7	-193.3	-193.3	0	0.18
7x8	-185.3	-185.3	0	0.2
8x6	-174.8	-174.8	0	112.51
8x7	-198.3	-198.3	0	1.55
8x8	-194	-194	0	0.2
9x7	-208.5	-208.5	0	988.99
9x8	-185.7	-185.7	0	340.62
10x7	-193.6	-193.6	0	1934.09
10x8	-192	-192	0	3546.31
11x6	-187.87	-219.57	16.88	3600
11x7	-221.6	-221.6	0	1988.64
11x8	-249.33	-249.33	0	27.83
12x6	-213.33	-218.08	2.23	3600
12x7	-191.30	-256.23	33.94	3600
12x8	-232	-233.333	0.57	3600

Tempo Limite de 3600 Segundos

Tabela 4.3: Resultados do Modelo de Wagner

Jobs x Máquinas	Solução	Limite Inferior	gap (%)	Tempo de execução
4x4	-96	-96	0	0.07
4x5	-104	-104	0	0.06
4x6	-124	-124	0	0.08
4x7	-120	-120	0	0.07
4x8	-104	-104	0	0.13
5x4	-136	-136	0	0.12
5x5	-140	-140	0	0.27
5x6	-143.60	-143.60	0	1.28
5x7	-112.80	-112.80	0	2.01
5x8	-119.80	-119.80	0	3.94
6x4	-184	-184	0	0.18
6x5	-172	-172	0	1.74
6x6	-179.20	-179.20	0	14.72
6x7	-180	-180	0	8.99
6x8	-151.60	-151.60	0	11.03
7x6	-206.60	-206.60	0	52.38
7x7	-208	-208	0	41.94
7x8	-197.80	-197.8	0	27.81
8x6	-210.47	-210.47	0	94.7
8x7	-220	-220	0	52.82
8x8	-203.8	-203.8	0	236.46
9x7	-246.13	-264.25	7.36	3600
9x8	-215.22	-215.22	0	2854.74
10x7	-236.67	-236.67	0	2528.41
10x8	-230.62	-230.62	0	2324.87
11x6	-	-	-	-
11x7	-308	-340.00	10.39	3600
11x8	282.67	-324	14.62	3600
12x6	-	-	-	-
12x7	-	-	-	-
12x8	-259.43	-312	20.26	3600

Tempo Limite de 3600 Segundos

Tabela 4.4: Resultados - Modelo Integrado

Períodos x jobs x Máquinas	Solução	Limite Inferior	gap(%)	Tempo de execução
3x4x4	2273.56	2273.56	0	0.02
3x4x5	5067.72	5067.72	0	0.02
3x4x6	4166.33	4166.33	0	0.02
3x4x7	12073.2	12073.2	0	0.06
3x4x8	13953.8	13953.8	0	0.03
3x5x4	4106	4106	0	0.18
3x5x5	2712.79	2712.79	0	0.42
3x5x6	7396.33	7396.33	0	0.17
3x5x7	8279.7	8279.7	0	0.23
3x5x8	16055.6	16055.6	0	0.07
3x6x4	3359.17	3359.17	0	1.51
3x6x5	4313.8	4313.8	0	0.52
3x6x6	14534.8	14534.8	0	0.34
3x6x7	8312.36	8312.36	0	0.34
3x6x8	14931.4	14931.4	0	0.28
3x7x6	5281.77	5281.77	0	4.7
3x7x7	3044.09	3044.09	0	0.37
3x7x8	24603.3	24603.3	0	0.83
3x8x6	12542	12542	0	38.88
3x8x7	13513.4	13513.4	0	1.88
3x8x8	25911.3	25911.3	0	6.62
3x9x7	30457	30457	0	104.5
3x9x8	33412.4	33412.4	0	16.38
3x10x7	35336.4	35336.4	0	337.08
3x10x8	37984.4	37984.4	0	211.67

Tempo Limite de 3600 Segundos

4.2.1 Representação de soluções pelo gráfico de Gantt

O Diagrama de Gantt é uma ferramenta largamente utilizada para o processo de sequenciamento *job shop*, visto que proporciona uma representação visual simples e muito útil para a tomada de decisão. Este diagrama representa a ocupação das máquinas em função do tempo e sua construção é feita associando a cada máquina k barras dispostas horizontalmente, as barras possuem comprimento proporcional à duração da operação que representa e a posição que ocupa é definida pelo instante de início da respectiva operação. As Figuras 4.1 a 4.4 apresentam os Diagramas de Gantt para os quatro períodos considerados no Exemplo Numérico da seção 3.3.

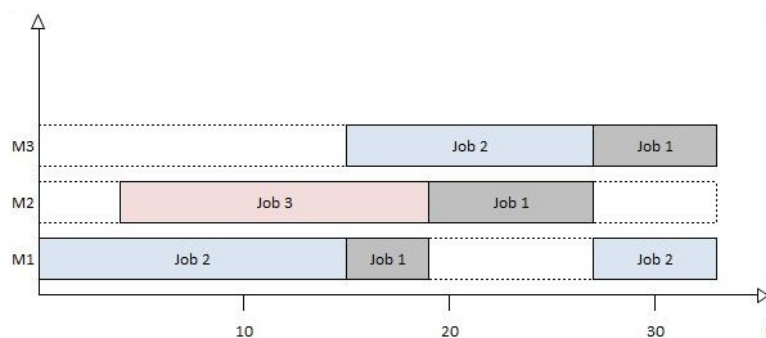


Figura 4.1: Gráfico de Gantt - Primeiro Período

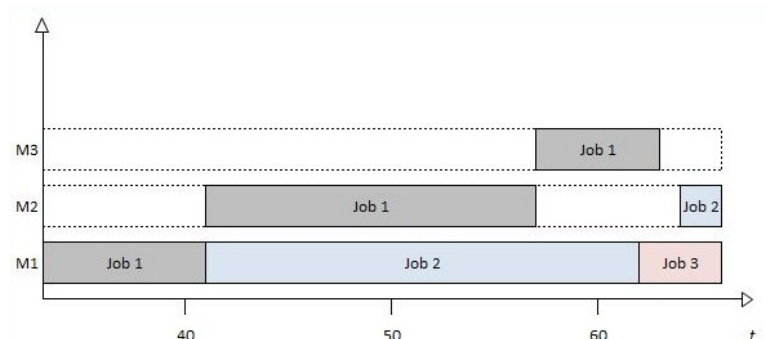


Figura 4.2: Gráfico de Gantt - Segundo Período

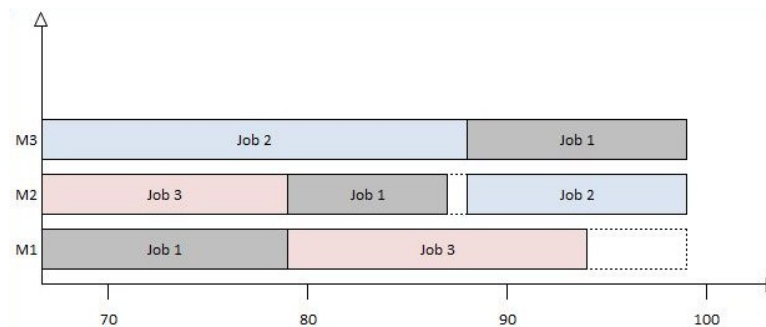


Figura 4.3: Gráfico de Gantt - Terceiro Período

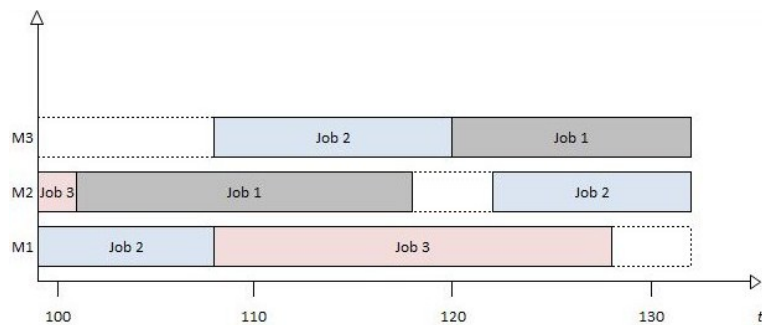


Figura 4.4: Gráfico de Gantt - Quarto Período

Tabela 4.5: Quantidades de produtos semiacabados de cada operação em cada período

$i \backslash$ período	1	2	3	4
1	0	0	4	0
2	0	2	0	0
3	0	0	0	0
4	1	8	1	0
5	1	10	1	0
6	0	10	0	0
7	5	4	4	0
8	0	0	0	0

O valor ótimo encontrado para o Modelo Integrado foi de 52 u.m (i.e. unidades monetárias) em um tempo de 1.62 segundos, dessa forma, apresentou valor menor que Modelo de Manne utilizado para o sequenciamento.

Os gráficos de Gantt apresentados, denotam o sequenciamento para a solução ótima do Modelo Integrado e é possível verificar através da Tabela 4.5 que são produzidos itens semiacabados, sendo possível dessa forma, adiantar a produção, utilizando os tempos ociosos das máquinas e esses itens para produzir produtos em períodos posteriores.

A Tabela 4.6 especifica as quantidades a serem produzidas por período, nota-se que a produção se concentra nos dois últimos períodos. Sendo assim, pode-se concluir que o modelo se ajustou bem às instâncias testadas. Visto que esta é uma forma de reduzir os custos de manutenção de estoques.

Tabela 4.6: Quantidades a serem produzidas por período

jobs\período	1	2	3	Total
1	3,3	5,8	16,2	25,3
2	0,95	12,5	20,6	34,05
3	0,9	26,1	3	30
4	3,9	9,1	9	22
5	1,1	14,9	6	22
6	0,44	12,6	7	20,04
7	4,8	5,2	5	15
Total	15,39	86,2	66,8	168,39

A Tabela 4.6 denota as quantidades produzidas em cada período para a Instância 3x4x4.

Capítulo 5

Considerações Finais

A análise dos resultados mostrou que os modelos baseados no trabalho de Wagner necessitaram de maior tempo computacional para chegar à solução ótima dos problemas testados, em comparação aos modelos baseados no trabalho de Manne, sendo assim o modelo integrado proposto utilizou o modelo de Manne para o sequenciamento.

O objetivo dessa dissertação consistiu na apresentação de um modelo matemático integrado para o dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção, visando utilizar os tempos ociosos das máquinas para produzir produtos, acabados ou não para serem utilizados em períodos posteriores.

O modelo integrado proposto neste trabalho se apresentou bem coerente à realidade das organizações ao coordenar a capacidade ao longo do horizonte de planejamento e sequenciar a produção. Além de ter uma preocupação com a administração de estoques para a redução dos seus custos de manutenção, como pôde ser percebido na instância mostrada, onde o modelo concentrou a produção no final do período para reduzir os custos de manutenção de estoques.

Observa-se, entretanto, que devido ao grau de dificuldade dos problemas de sequenciamento, instâncias de maior dimensão tornam-se difíceis de serem resolvidas com o limite de tempo computacional considerado para os modelos de Manne e Wagner.

O modelo integrado apresentado, encontra soluções ótimas em todos os casos, visto que o Gap é igual a zero para todas as instâncias, ou seja, se adequa bem às instâncias testadas.

Recomenda-se, dessa forma, aprimorar o modelo integrado. Aumentando o número de testes e análises, visando averiguar a resolução de problemas de maior magnitude e com aplicações práticas em diferentes horizontes de planejamento.

Referências Bibliográficas

- Alem, D. and Morabito, R. (2013). The integrated problem of production planning and cutting stock under uncertainties: application in small-scale furniture plants. *Gestão & Produção*, 20(1):111–133.
- Anthony, R. N. (1965). Planning and control systems: a framework for analysis.
- Araujo, S. (2003). Modelos e métodos para o planejamento e programação da produção aplicados no setor de fundições. *Modelos e Métodos para o Planejamento e Programação da Produção Aplicados no setor de Fundições*.
- Araujo, S. A., Arenales, M. N., and Clark, A. R. (2004). Dimensionamento de lotes e programação do forno numa fundição de pequeno porte. *Gestão & Produção*, 11:165–176.
- Araujo, S. A. d. and Arenales, M. N. (2000). Problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade: modelagem, método de resolução e resultados computacionais. *Pesquisa Operacional*, 20(2):287–306.
- Blazewicz, J., Domschke, W., and Pesch, E. (2003). The job shop scheduling problem: Conventional and new solution techniques. *European journal of operational research*, 93(1):1–33.
- Dauzere-Peres, S. and Lasserre, J.-B. (1994). Integration of lotsizing and scheduling decisions in a job-shop. *European Journal of Operational Research*, 75(2):413–426.
- Drexl, A. and Haase, K. (1995). Proportional lotsizing and scheduling. *International Journal of Production Economics*, 40(1):73–87.
- Drexl, A. and Kimms, A. (1997). Lot sizing and scheduling—survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, 99(2):221–235.

- Ferreira, D. (2006). *Abordagens para o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes da produção de bebidas*. PhD thesis, Tese de Doutorado, Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Engenharia de Produção.
- Ferreira, D., Almada-Lobo, B., and Morabito, R. (2013). Mono-stage formulations for the soft drink production process with two synchronized stages. *Produção*, 23(1):107–119.
- Ferreira, D., Morabito, R., and Rangel, S. (2009). Um modelo de otimização inteira mista e heurísticas relax and fix para a programação da produção de fábricas de refrigerantes de pequeno porte. *Produção*, 18(1):76–88.
- Fleischmann, B. (1990). The discrete lot-sizing and scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 44(3):337–348.
- Godinho, F. (2004). Paradigmas estratégicos de gestão da manufatura: configuração, relações com planejamento e controle da produção e estudo exploratório na indústria de calçados. *Universidade Federal de São Carlos. Departamento de Engenharia de Produção*.
- Gutiérrez, J. and Pizzolato, N. (2004). Desenvolvimento e aplicação de um modelo heurístico para a programação de lotes econômicos de produção (elsp) com tempos e custos de setup dependentes da seqüência. *Anais do XXXVI SBPO*.
- Hax, A. and Candea, D. (1984). Production and inventory management.
- Júnior, A. d. C. G. (2007). *Problema de Sequenciamento em uma Máquina com Penalidades por Antecipação e Atraso: Modelagem e Resolução*. PhD thesis, Dissertação, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Luche, J. and Morabito, R. (2005). Otimização na programação da produção de grãos eletrofundidos: Um estudo de caso. *Gestão & Produção*, 12(1):135–149.
- Lustosa, L., MESQUITA, M. A., Lustosa, L., Mesquita, M. A., and Oliveira, R. J. (2008). *Planejamento e controle da produção*. Elsevier Brasil.
- Manne, A. S. (1960). On the job-shop scheduling problem. *Operations Research*, 8(2):219–223.
- Meyr, H. (2000). Simultaneous lotsizing and scheduling by combining local search with dual reoptimization. *European Journal of Operational Research*, 120(2):311–326.

- Meyr, H. (2002). Simultaneous lotsizing and scheduling on parallel machines. *European Journal of Operational Research*, 139(2):277–292.
- Palomino, R. (1995). Uma abordagem para a modelagem, análise e controle de sistemas de produção utilizando redes de petri. *Monografia de Mestrado, UFSC, Florianópolis, SC, Brasil*.
- Pochet, Y. and Wolsey, L. A. (2006). *Production planning by mixed integer programming*. Springer.
- Roy, B. and Sussmann, B. (1964). Les problemes d’ordonnancement avec contraintes disjonctives. *Note ds*, 9.
- Taillard, É. (1993). Parallel iterative search methods for vehicle routing problems. *Networks*, 23(8):661–673.
- Thomas, D. J. and Griffin, P. M. (1996). Coordinated supply chain management. *European journal of operational research*, 94(1):1–15.
- Toledo, C. (2005). Problema conjunto de dimensionamento de lotes e programação da produção. *Problema conjunto de dimensionamento de lotes e programação da produção*.
- Toledo, C. F., França, P. M., Morabito, R., and Kimms, A. (2007). Um modelo de otimização para o problema integrado de dimensionamento de lotes e programação da produção em fábricas de refrigerantes. *Pesquisa Operacional*, 27(1):155–186.
- Toso, E. A. V. and Morabito, R. (2005). Otimização no dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção: estudo de caso numa fábrica de rações. *Gestão & Produção*, 12(2):203–217.
- Wagner, H. M. (1959). An integer linear-programming model for machine scheduling. *Naval Research Logistics Quarterly*, 6(2):131–140.
- Wagner, H. M. and Whitin, T. M. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. *Management science*, 5(1):89–96.