

**Fatores de Forma do Decaimento Radiativo do Píon
Usando o Modelo Nambu-Jona-Lasinio**

Arthur Cesar Dinali Viglioni

Agosto de 2013



Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG
Instituto de Ciências Exatas - ICEx
Programa de Pós-Graduação em Física

Fatores de Forma do Decaimento Radiativo do Píon Usando o Modelo
Nambu-Jona-Lasinio

Arthur Cesar Dinali Viglioni

Orientadora: Prof. Dra. Maria Carolina Nemes
Co-orientador: Prof. Dr. Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Teoria Geral de Partículas e Campos

Agosto de 2013

Agradecimentos

-À minha família, em especial aos meus pais, Augusto e Maguilânia, e meu irmão, Marco Túlio, pelo apoio, amizade e compreensão.

-À Deus pela oportunidade de viver, ser físico e pela ajuda¹.

-À minha orientadora, Maria Carolina, e meu co-orientador, Marcos, pela excelente ajuda e orientação. Infelizmente, 4 meses após a defesa deste trabalho minha orientadora faleceu. Dedico este trabalho à memória dela. A professora Maria Carolina tinha uma grande disposição e um grande carinho pelos seus alunos. Ela também tinha um vasto conhecimento de física e um enorme gosto pela física. É um verdadeiro exemplo de profissional pra todos nós físicos. Certamente ela não será esquecida por mim, pelos outros alunos que passaram por ela e pelos seus colegas de trabalho.

-À professora Brigitte Hiller, da Universidade de Coimbra, por me ajudar com algumas dúvidas importantes. Sem ela, não conseguiria concluir este trabalho a tempo.

-Aos meus colegas e amigos do grupo de teoria quântica de campos da UFMG (Adriano, Alexandre, Gabriel, Gustavo, Helvécio, Jean, Joilson e Yuri) pela ajuda, boa convivência e amizade.

-Aos meus colegas e amigos de mestrado e doutorado do departamento de física da UFMG pela boa convivência e amizade.

-Ao Instituto Presbiteriano Gammon, onde cursei o ensino fundamental e médio, por me preparar bem no ensino básico.

-Aos amigos da minha cidade, Lavras, e de Belo Horizonte, pela amizade.

-Aos professores do departamento de física da UFMG que contribuíram para minha formação acadêmica, especialmente àqueles que têm o interesse em contribuir para uma boa formação do seus alunos.

-Ao pessoal da biblioteca da física, em especial a Shirley, pela gentileza, ajuda com o acervo, etc.

-Aos membros da banca por aceitarem avaliar o meu trabalho.

-Ao CNPq pela importante ajuda financeira.

-À todas as outras pessoas que contribuíram de alguma forma para minha formação e/ou tiveram uma participação na minha vida.

¹Se Deus existe.

Resumo

Os decaimentos radiativos do pión são relativamente raros, no entanto, os experimentos atuais estão se tornando cada vez mais precisos. O objetivo é usar tais decaimentos, que ocorrem à energias relativamente baixas ($E < 2 \text{ GeV}$, tipicamente), para testar o Modelo Padrão ao invés de usar altas energias. Calculamos o Fator de Forma Vetorial (F_V) e a razão entre os Fatores de Forma Axial-Vetor (F_A) e Vetorial para o decaimento radiativo $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$ e comparamos com os seus valores experimentais. Neste decaimento, as três interações do Modelo Padrão estão presentes. Em particular, a interação forte, em que é aceito atualmente que a Cromodinâmica Quântica (QCD) a descreva. O problema é que, como dito anteriormente, este tipo de decaimento ocorre à energias relativamente baixas, então é necessário usar a QCD no regime não perturbativo, onde os cálculos de Feynman se tornam inúteis. Uma alternativa para isso é usar um modelo mais simples e que incorpore parte das características da QCD. Neste trabalho, usamos o Modelo Nambu-Jona-Lasinio, já que ele reproduz muito bem as características da QCD à baixas energias. Somos capazes de descrever F_V , no entanto não a razão entre F_A e F_V , o que provavelmente indica que outras interações devem ser incluídas, como, por exemplo, o méson ρ .

Palavras-chaves: Fatores de Forma, decaimento radiativo do pión, Modelo Nambu-Jona-Lasinio.

Abstract

The radiative decays of the pion are comparatively rare, however, experiments nowadays are becoming more precise. The goal is to use such decays, which occur at relatively low energies ($E < 2 \text{ GeV}$, typically), to test the Standard Model instead of using high energies. We calculate the Vector Form Factor (F_V) and the ratio between Axial-Vector (F_A) and Vector Form Factors to the radiative decay $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$ and we compare with their experimental values. In this decay, the three interactions of Standard Model are present. Particularly, the strong interaction, in what is currently accepted that Quantum Chromodynamics (QCD) describes it. The problem is that, as previously stated, this kind of decay occurs at relatively low energies, so it's necessary to use the QCD in the non-perturbative regime, where the Feynman calculations become useless. An alternative to this is to use a simpler model and which incorporates part of the features of QCD. In this work, we use the Nambu-Jona-Lasinio Model, since it reproduces very well the features of QCD at low energies. We are able to describe F_V , however not the ratio between F_A and F_V , which probably indicates that the other interactions should be included, as e.g. the ρ meson.

Keywords: Form Factors, radiative decay of the pion, Nambu-Jona-Lasinio Model.

Sumário

Resumo	I
Abstract	II
Lista de Tabelas	V
Lista de Figuras	VI
1 Introdução	1
2 Partículas e Modelos	4
2.1 Uma Breve Apresentação do Modelo Padrão	4
2.2 A Cromodinâmica Quântica	6
2.3 O Modelo Nambu-Jona-Lasinio	7
2.4 A Densidade Lagrangeana do Modelo NJL e a Simetria Quiral	8
2.5 A Equação de Gap	9
2.6 Os Decaimentos Fracos do Píon	11
2.7 A Constante de Decaimento Fraco do Píon f_{π^-}	12
3 O Decaimento Radiativo $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$	15
3.1 Diagramas de Feynman do Decaimento	15
3.2 Estrutura de Dirac e de Isospin dos Vértices do Decaimento	17
3.3 Aplicação das Regras de Feynman aos Diagramas do Decaimento	18
3.4 Fatores de Forma e Comparação Experimental	20
4 Conclusão	23
A Matrizes de Dirac γ, Matrizes de Pauli σ_i, Traços e Integrais	24
A.1 Matrizes de Dirac γ	24
A.2 Traços Envolvendo as Matrizes γ	25
A.3 Matrizes de Pauli σ_i	26
A.4 Algumas Integrais Úteis	27
B Cálculo da Constante de Decaimento Fraco do Píon	28
C Cálculo dos Traços da Equação (3.12) da Seção 3.3	32

Lista de Tabelas

2.1	Algumas propriedades dos léptons	5
2.2	Algumas propriedades dos quarks	5
2.3	Classificação das partículas por spin	6
2.4	Mediadores das interações do Modelo Padrão e algumas de suas características	6

Lista de Figuras

2.1	Representação da interação geral (2.5)	9
2.2	Configuração obedecendo a conservação do momento angular	12
2.3	Configuração obedecendo a helicidade	12
2.4	Diagrama do decaimento fraco $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$	13
2.5	Diagrama do acoplamento do quarks ao par $e^- \bar{\nu}_e$	13
3.1	Diagrama do decaimento $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$	15
3.2	Diagrama com termo cruzado do decaimento $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$	16
3.3	Diagrama com a aproximação do decaimento $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$	17
3.4	Diagrama do termo cruzado com a aproximação do decaimento $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$.	17

Capítulo 1

Introdução

Buscas por uma nova física no estudo de partículas elementares podem ser feitas em energias altas ou em energias baixas no regime de alta precisão. Decaimentos radiativos de mésons leves representam uma fonte bastante útil e relativamente pouco explorada no que se refere a informação sobre interações entre partículas. Em baixas energias, as partículas pesadas vão aparecer nas correções quânticas. A vantagem da física de alta precisão é que não é preciso saber o conteúdo, em termos de partículas, para caracterizar sinais de uma física ainda desconhecida. Trabalha-se com partículas externas conhecidas e faz-se a comparação indireta pressupondo a validade do Modelo Padrão. Discrepâncias podem estar ligadas a necessidade de estender o modelo. Por outro lado, como é claro, não é possível detectar novas partículas diretamente a partir desses decaimentos.

O decaimento radiativo do pión é

$$\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e, \quad (1.1)$$

onde, π^- é o pión, γ é o fóton, e^- é o elétron e $\bar{\nu}_e$ é o antineutrino eletrônico. Este decaimento, que é o tema deste trabalho, é interessante por não ser dominado pelo Bremsstrahlung das partículas carregadas e portanto é sensível a contribuições de “Fatores de Forma” que dependem da estrutura do processo que envolve a Cromodinâmica Quântica (QCD). Decaimentos leptônicos como esse são mediados pela interação eletrofraca que até hoje tem sido bastante adequadamente descrita pelo Modelo Padrão. Em decaimentos hadrônicos, a interação forte também faz parte do cenário. Embora acredite-se que a QCD é a teoria que a descreve, não se sabe ainda como resolver o problema dos mésons leves por serem altamente não perturbativos. Processos envolvendo altas energias ($E > 2 \text{ GeV}$, tipicamente) podem ser descritos analiticamente dentro da teoria das interações fortes (QCD) porque a teoria de perturbações é válida. Então, para energias mais baixas onde ocorre, por exemplo,

o processo no qual estamos interessados, é necessário buscar um caminho alternativo. Como frequentemente acontece na física, uma seleção apropriada dos graus de liberdade e simetrias mais importantes simplifica ou até permite encontrar uma solução. A forma mais rigorosa e conveniente nesse contexto é o uso de *Teorias Efetivas*, que preservam simetrias da teoria fundamental e que sejam escritos em termos dos graus de liberdade relevantes para a escala de energia de interesse. Weinberg disse, a respeito de Teorias Efetivas

“For a given set of asymptotic states, perturbation theory with the most general Lagrangian containing all terms allowed by the assumed symmetries will yield the most general S matrix elements consistent with analyticity, perturbation unitarity, cluster decomposition and the assumed symmetries”.

No caso da QCD em baixas energias, a Teoria Efetiva é definida com relação a alguma escala Λ .

O processo de decaimento radiativo do pión tem sido abordado na literatura dentro do contexto da *Teoria de Perturbação Quiral* [22, 23, 24, 25]. Existem medidas do Fator de Forma Vetorial F_V (ligado a corrente $\langle \gamma | \bar{u} \gamma_\alpha d | \pi^- \rangle$) e também da razão γ entre o Fator de Forma Axial-Vetor F_A e o Vetorial [27]. Os detalhes de como essas grandezas foram medidas e do aparato experimental usado não estão no escopo deste trabalho. Cálculos envolvendo modelos e a teoria de perturbação quiral podem ser encontrados na literatura (até 2 loops) [21, 26] sem conseguir descrever adequadamente os processos experimentais.

O objetivo do presente trabalho é bastante simples: usar um modelo efetivo muito simples e que tem bastante sucesso na descrição das mais variadas propriedades dos mésons leves, o *Modelo Nambu-Jona-Lasinio (Modelo NJL)* [15]. Vamos considerar a situação mais simples na descrição das interações, pensando nisso como um primeiro passo, no caso do resultado ser promissor, para incluir interações fortes mais complicadas compatíveis com os números quânticos do processo. Calculamos os Fatores de Forma Vetorial (F_V) e a razão (γ) entre os Fatores de Forma Axial-Vetor e Vetorial do decaimento $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$, comparamos nossos resultados com o F_V medido assim como a razão γ , esta última claramente indicando a importância de contribuição, por exemplo, méson vetorial ρ .

O conteúdo desta dissertação está ordenado como se segue abaixo.

No capítulo 2 é apresentado um resumo do Modelo Padrão para melhor compreensão deste trabalho, depois é mostrado alguns aspectos da QCD assim como seus problemas. Ainda no capítulo 2 é introduzido o Modelo Nambu-Jona-Lasinio, suas características principais e alguns cálculos onde o modelo é bem sucedido na descrição das propriedades dos mésons leves.

O capítulo 3 contém o objetivo principal deste trabalho. É nele que é apresentado o decaimento radiativo $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$, os correspondentes diagramas de Feynman de menor ordem usando o Modelo NJL e o Modelo Padrão, o cálculo da amplitude e por fim a obtenção dos fatores de forma do decaimento bem como a comparação com os valores experimentais.

No quarto e último capítulo estão apresentadas as conclusões que emergem deste trabalho e as suas perspectivas.

Visando não sobrecarregar o corpo da dissertação, alguns cálculos foram colocados em apêndices (B e C).

A métrica utilizada, as matrizes de Dirac γ e de Pauli σ_i , traços e algumas integrais que são usadas nos cálculos estão no apêndice A. Não deixe de dar uma olhada no apêndice A antes de seguir a leitura dos capítulos posteriores.

O sistema de unidades usado nesta dissertação é o sistema de unidades naturais (ou unidades de Planck) em que $\hbar = c = 1$. Este é o sistema mais usado em física de partículas. Também é usada a convenção, muito comum na literatura, de que índices gregos variam de 0 a 3, latinos de 1 a 3 e índices repetidos indicam soma (convenção de Einstein).

Convém lembrar ao leitor que é necessário ter um conhecimento básico de teoria quântica de campos e física de partículas para melhor compreender este trabalho. A fundamentação teórica básica e os conceitos utilizados podem ser encontrados em [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

Capítulo 2

Partículas e Modelos

2.1 Uma Breve Apresentação do Modelo Padrão

A teoria mais aceita atualmente para descrever a natureza da matéria e das interações é o chamado *Modelo Padrão de Partículas Elementares*. A estrutura básica da matéria segundo o Modelo Padrão são as partículas elementares chamadas de léptons e quarks. As interações ocorrem devido as partículas mediadoras (também elementares). Toda a matéria e radiação é composta por partículas destes três grupos ¹.

As interações do Modelo Padrão são descritas pela *Eletrodinâmica Quântica* (em inglês, *Quantum Electrodynamics* ou QED), *Cromodinâmica Quântica* (em inglês, *Quantum Chromodynamics* ou QCD) e pela *Flavordinâmica*² (em inglês, *Flavordynamics*). A QED descreve as interações eletromagnéticas, a QCD descreve as interações fortes e Flavordinâmica descreve as interações fracas. O Modelo Padrão ainda incorpora a *Teoria Eletrofraca* que descreve a interação eletromagnética unificada com a interação fraca. Então, a Teoria Eletrofraca mais a QCD conseguem descrever as três interações citadas. Portanto, com exceção da gravidade, o Modelo Padrão descreve todas as interações fundamentais da natureza.

Segundo o Modelo Padrão, todos os léptons e quarks são férmions de spin meio. As partículas mediadoras das três interações são bósons de spin 1. Toda partícula tem uma antipartícula associada.

A tabela 2.1 fornece algumas propriedades dos léptons como massa (M), carga (Q),

¹O Modelo Padrão é o resultado de dois mil anos de evolução do pensamento sobre a natureza. Ele nos dá a melhor resposta que pode-se dar atualmente a pergunta que nos intriga à tantos séculos: De quê a matéria é constituída?

²Termo sem aceitação geral.

números leptônicos eletrônico (L_e), muônico (L_μ) e tauônico (L_τ) e tempo de vida. Observe que os léptons são classificados em três famílias ou gerações. Os antiléptons tem as mesmas propriedades, mas com sinal trocado. Ao todo existem 12 léptons.

Lépton	Geração	$M(Mev/c^2)$	Q	L_e	L_μ	L_τ	Tempo de vida (s)
e	1	0,511003	-1	1	0	0	∞
ν_e	1	0	0	1	0	0	∞
μ	2	105,659	-1	0	1	0	$2,197 \times 10^{-6}$
ν_μ	2	0	0	0	1	0	∞
τ	3	1784	-1	0	0	1	$3,3 \times 10^{-13}$
ν_τ	3	0	0	0	0	1	∞

Tabela 2.1: Algumas propriedades dos léptons

A tabela 2.2 mostra algumas propriedades dos quarks como massa “nua” (em inglês, bare mass, M_n), carga (Q), os sabores “upness” (U), “downness” (D), “strangeness” (S), “charm” (C), “beauty” (ou “bottom”, B) e “topness” (ou “truth”, T) e tempo de vida. Assim como os léptons, os quarks também são agrupados em gerações. Os antiquarks têm as mesmas propriedades, mas com sinal contrário.

Quark	Geração	$M_n(Mev/c^2)$	Q	D	U	S	C	B	T	Tempo de vida (s)
d	1	7,5	-1/3	-1	0	0	0	0	0	∞
u	1	4,2	2/3	0	1	0	0	0	0	∞
s	2	150	-1/3	0	0	-1	0	0	0	∞
c	2	1100	2/3	0	0	0	1	0	0	∞
b	3	4200	-1/3	0	0	0	0	-1	0	∞
t	3	> 23000	2/3	0	0	0	0	0	1	∞

Tabela 2.2: Algumas propriedades dos quarks

Os quarks também possuem cores nos tipos verde, azul e vermelho³. Cada quark e antiquark possui uma das três cores possíveis, existindo 36 quarks ao todo. É devido as cores dos quarks que o fazem interagir fortemente, a cor na QCD faz o mesmo papel da carga na QED.

De acordo com o modelo de quarks, as partículas somente podem existir na forma de um singlete de cor⁴. Isso significa que existem somente estados ligados “incolores”, onde incolor significa um quark com uma determinada cor ligado a um antiquark com a correspondente anticor (“anulando” a cor total), ou um estado ligado de três quarks quaisquer, cada um com uma cor diferente (verde + azul + vermelho gerando cor branca, interpretado como incolor) ou ainda um estado ligado de três antiquarks, cada um com uma anticor diferente (antiverde + antiazul + antivermelho gerando antibranco, também interpretado como incolor). Não existem portanto quarks livres, já que eles possuem cor. As partículas compostas de dois

³O surgimento das cores dos quarks foi devido a dificuldade em descrever os bárions formados por três quarks de mesmo sabor em um mesmo estado, o que viola o princípio de exclusão de Pauli, já que os quarks são férmions de spin meio. A presença das cores dos quarks resolve este problema. Mais tarde foram realizados experimentos mostrando conclusivamente a realidade do conceito de cor e atualmente a cor tem uma importância fundamental na descrição da interação forte.

⁴Devido a propriedade Confinamento (discutida mais adiante) da QCD.

quarks são chamadas de mésons e as partículas compostas de três quarks são chamadas de bárions. O grupo dos mésons mais o grupo dos bárions forma o grupo dos hádrons. A tabela 2.3 mostra a classificação das partículas elementares e compostas pelos seus spins.

Natureza da partícula	Spin 0	Spin 1/2	Spin 1	Spin 3/2
Elementar	Bóson de Higgs	Léptons e quarks	Mediadores	Não existe
Composta	Mésons pseudo-escalares	Octeto de bárions	Mésons vetoriais	Decuplo de bárions

Tabela 2.3: Classificação das partículas por spin

A tabela 2.4 mostra as partículas mediadoras das interações do Modelo Padrão e algumas de suas propriedades como intensidade relativa⁵ (*I.R.*), massa (*M*), carga (*Q*) e tempo de vida. O número total de partículas mediadoras é 12.

Teoria	I.R.	Mediador	M(Mev/c ²)	Q	Tempo de vida (s)
Cromodinâmica (QCD)	1	8 glúons (<i>g</i>)	0	0	∞
Eletrodinâmica (QED)	10^{-3}	Fóton (γ)	0	0	∞
Flavordinâmica	10^{-14}	W^{\pm}	81800	± 1	$3,3 \times 10^{-25}$
		Z^0	92600	0	$3,3 \times 10^{-25}$

Tabela 2.4: Mediadores das interações do Modelo Padrão e algumas de suas características

O Modelo Padrão também prevê uma partícula de Higgs, que é uma partícula elementar com massa, sem sabor, cor, carga e spin (portanto um bóson)⁶. Portanto, o número total de partículas elementares do Modelo Padrão é 61 (36 quarks +12 léptons +12 mediadores +1 bóson de Higgs = 61).

2.2 A Cromodinâmica Quântica

Nesta seção, faremos uma breve discussão qualitativa sobre a QCD e depois apresentaremos um de seus problemas, introduzindo em seguida o Modelo Nambu-Jona-Lasinio.

O estudo das simetrias básicas do formalismo matemático da QCD foi formulado em 1954 por C. N. Yang e Robert L. Mills, mas somente foi reconhecido e aplicado para a força forte em 1960 por Jun John Sakurai.

Como dito anteriormente, a QCD descreve a interação forte e para que haja a interação forte é necessário que uma dada partícula tenha cor. Dentre os léptons e quarks, somente os quarks possuem cor e portanto somente eles podem interagir fortemente. Os mediadores da interação forte, os 8 glúons, também possuem cor e assim eles podem interagir diretamente entre si, podendo existir estados ligados de glúons, os chamados “glueballs”. Este efeito de

⁵A intensidade depende da natureza da fonte e da distância que se está dela, assim os números da tabela não devem ser tomados tão literalmente.

⁶Apesar do Modelo Padrão tratar o bóson de Higgs como uma partícula elementar, ainda não é certo se este é uma partícula elementar ou composta (veja, por exemplo, [11]).

acoplamento direto entre os mediadores não ocorre, por exemplo, na QED, já que nela, os fótons não possuem carga e portanto não interagem diretamente.

Uma característica que a QCD possui é o fato de sua constante de acoplamento depender da distância de separação entre as partículas interagentes. Esta constante é pequena (menor que 1) para distâncias pequenas (altas energias), da ordem do tamanho de um próton ou menos, e nesse regime os quarks estão relativamente livres no interior dos hádrons, podendo ser usado os cálculos perturbativos de Feynman (se a constante é menor que 1, os diagramas de Feynman com mais vértices contribuem menos no cálculo da amplitude). Esta propriedade da QCD é conhecida como *Liberdade Assintótica* (em inglês, *Asymptotic Freedom*). Os cálculos de processos nesse regime perturbativo da QCD, reproduzem muito bem os dados experimentais, o que contribuiu para a aceitação da QCD como a teoria das interações fortes. Para distâncias grandes (baixas energias), da ordem do tamanho de núcleos atômicos ou mais, a constante de acoplamento é grande (maior que 1) e nesse caso os quarks estão interagindo fortemente, assim os cálculos perturbativos de Feynman não podem ser utilizados (os diagramas com mais vértices contribuem mais na amplitude). Nesse regime os quarks ficam confinados dentro dos hádrons. Esta propriedade da QCD é conhecida como *Confinamento*. A QCD ainda não tem uma demonstração conclusiva para o Confinamento dos quarks, já que, como foi dito, o regime é altamente não perturbativo e os cálculos de Feynman não podem ser utilizados. Apesar disso, a comunidade de físicos de partículas tanto teóricos quanto experimentais tem aceito que o Confinamento seja uma das propriedades básicas da QCD, devido ao fato de nunca terem encontrado quarks livres na natureza.

Pode-se resumir as propriedades da QCD, Liberdade Assintótica e Confinamento, afirmando que um quark se comporta como uma partícula quase livre no interior de um hádron do qual ele é um dos constituintes, sem contudo, poder abandoná-lo.

Uma terceira propriedade que QCD possui é a *Simetria Quiral*. Esta propriedade será discutida em detalhes mais adiante.

Para descrever hádrons em baixas energias, é necessário usar a QCD no regime não perturbativo, mas como foi dito anteriormente, os cálculos de Feynman não podem ser usados, então uma medida para contornar este problema é usar um modelo fenomenológico mais simples que incorpore, o máximo possível, as simetrias mais importantes da QCD e reproduz as características dela na fase não perturbativa. Um modelo que se enquadra bem neste quesito e recebeu destaque na literatura é o Modelo Nambu-Jona-Lasinio.

2.3 O Modelo Nambu-Jona-Lasinio

O Modelo NJL é um modelo fenomenológico efetivo⁷ inspirado na teoria BCS da supercondutividade. Inicialmente proposto como uma teoria de interação entre núcleons (próton ou nêutron), este modelo foi reinterpretado posteriormente como um modelo para interação entre quarks. Seu primeiro autor é Yoichiro Nambu⁸ e o segundo é Giovanni Jona-Lasinio. O modelo foi proposto pelos dois em 1961 (ver artigos em [16, 17]).

⁷Pois ele não é renormalizável.

⁸Ele também teve contribuições essenciais para teoria da supercondutividade.

Um fato importante sobre o Modelo NJL é a presença de parte das características da QCD na densidade lagrangeana, como a simetria quiral, a geração dinâmica da massa dos férmions obtida pela quebra da simetria, os modos de Goldstone (píons) e as relações de Goldberger-Treiman e Gell-Mann-Oakes Renner, obtidas da álgebra de correntes, que são satisfeitas pelo modelo. Um ponto fraco do modelo é o não Confinamento dos quarks, assim a aplicabilidade deste modelo está limitada a fenômenos hadrônicos que não dependam sensivelmente do mecanismo de Confinamento, mas para a física dos hádrons de baixas energias o Confinamento não tem se mostrado de grande importância. Atualmente, este modelo é visto por muitos como o limite para baixas energias da QCD.

2.4 A Densidade Lagrangeana do Modelo NJL e a Simetria Quiral

Neste trabalho, trabalharemos com a densidade lagrangeana do Modelo NJL original em $SU(2)$ acrescida com o acoplamento mínimo à interação eletromagnética, devido ao decaimento que será estudado. Denotaremos a densidade lagrangeana por \mathcal{L}_{NJL} . Assim \mathcal{L}_{NJL} é a densidade lagrangeana do Modelo NJL com uma modificação (acoplamento com campo eletromagnético), mas, por simplicidade, citaremos apenas como densidade lagrangeana de NJL. \mathcal{L}_{NJL} é dada por

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(x) \left[i\partial\!\!\!/ - m_c - \frac{ie}{2} \left(\frac{1}{3} + \tau_3 \right) \not{A} \right] \psi(x) + G \left[(\bar{\psi}(x)\psi(x))^2 + (\bar{\psi}(x)i\gamma^5\vec{\tau}\psi(x))^2 \right] \quad (2.1)$$

, onde $\psi(x)$ é o campo de quarks ⁹ e m_c é a chamada massa de corrente dos quarks ¹⁰. A presença desta massa em (2.1) quebra explicitamente a simetria quiral como será visto logo adiante, mas vamos considerar o limite quiral, em que $m_c = 0$. A matriz γ^5 e o vetor $\vec{\tau}$ são dados, respectivamente, pelas eqs. (A.8) e (A.30). A constante de acoplamento G é fixada pela equação de gap, que gera a massa dinâmica dos quarks como será visto posteriormente. O acoplamento mínimo eletromagnético é dado pelo termo $-\frac{ie}{2}\bar{\psi}(x)(1/3 + \tau_3)\not{A}\psi(x)$, em que e corresponde a carga do elétron e $(1/3 + \tau_3)$ corresponde a estrutura de isospin dos quarks, já que quando o operador $\frac{e}{2}(1/3 + \tau_3)$ atua na função de onda dos quarks no espaço de isospin, leva as suas cargas corretas. A matriz τ_3 é igual a matriz de Pauli σ_3 (eq. A.25). As matrizes τ_i usadas ao longo de toda a dissertação são as matrizes de Pauli σ_i , mas no contexto de isospin (veja a seção A.3). Uma transformação quiral é definida como

$$\psi'(x) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}\gamma^5} \psi(x), \quad (2.2)$$

onde $\vec{\alpha} = \text{constante}$. A simetria quiral é a invariância da densidade lagrangeana sob a transformação quiral (2.2). É possível mostrar que (veja demonstração em [10], apêndice B)

$$\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}\gamma^5}. \quad (2.3)$$

⁹Campo de núcleons no modelo original.

¹⁰Este nome é devido a esta massa ser determinada pela álgebra de correntes.

Substituindo (2.2) e (2.3) na densidade lagrangeana (2.1) com $m_c = 0$, obtém-se (a demonstração não é trivial e pode ser encontrada em [10], página 15 e apêndice B ou em [15], páginas 652-654)

$$\mathcal{L}'_{NJL} = \mathcal{L}_{NJL}. \quad (2.4)$$

Portanto a densidade lagrangeana (2.1) com $m_c = 0$ é invariante sob a transformação quiral. Isso significa que ela apresenta a simetria quiral, como foi dito na seção anterior. Agora se $m_c \neq 0$, \mathcal{L}'_{NJL} fica diferente de \mathcal{L}_{NJL} , quebrando explicitamente a simetria quiral.

2.5 A Equação de Gap

Genericamente, a densidade lagrangeana de interação é dada por

$$\mathcal{L}_I = \sum_{ijk} G_{ijk} (\bar{\psi}(x)\Gamma_{ijk}\psi(x))^2. \quad (2.5)$$

Esta interação é do tipo quártica (interação entre quatro férmions) em que G_{ijk} são constantes de acoplamento e $\Gamma_{ijk} \equiv S_i I_j \Lambda_k$ representa operadores no espaço de Dirac S_i , isospin I_j e cor Λ_k , onde

$$S_i = 1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \text{ etc} \quad (2.6)$$

$$I_j = 1, \tau_1, \tau_2, \tau_3 \quad (2.7)$$

$$\Lambda_k = 1, \lambda_1 \cdots \lambda_8. \quad (2.8)$$

Pode-se representar a interação geral (2.5) pelo diagrama

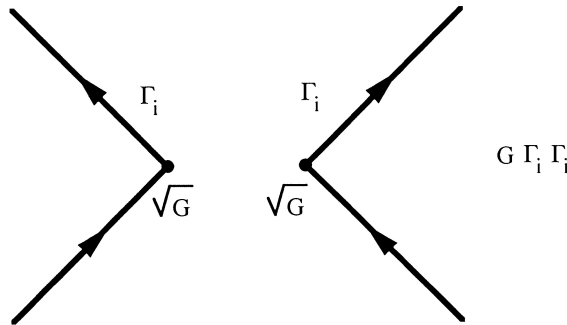


Figura 2.1: Representação da interação geral (2.5)

A densidade lagrangeana de interação de (2.1) é

$$\mathcal{L}_{I,NJL} = G \left[(\bar{\psi}(x)\psi(x))^2 + (\bar{\psi}(x)i\gamma^5\vec{\tau}\psi(x))^2 \right]. \quad (2.9)$$

Observe que (2.9) é um caso particular de (2.5). Para chegar na Equação de Gap, é necessário fazer a aproximação de Hartree-Fock (ou aproximação de campo médio) da densidade lagrangeana de interação (2.9). Para isso, é preciso conhecer $\langle 0 | \bar{\psi}(x)\psi(x) | 0 \rangle$ e

$\langle 0 | \bar{\psi}(x) i\gamma^5 \vec{\tau} \psi(x) | 0 \rangle$. Sabe-se que o valor esperado no vácuo do termo genérico $\bar{\psi}(x) \Gamma_{ijk} \psi(y)$ é

$$\langle 0 | \bar{\psi}(x) \Gamma_{ijk} \psi(y) | 0 \rangle = -i Tr_{s,i,c} [S_F(x-y) \Gamma_{ijk}], \quad (2.10)$$

onde $S_F(x-y)$ é o propagador de Feynman dos férmions dado por

$$S_F(x-y) = i \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{\not{K} - M} \quad (2.11)$$

e $Tr_{s,i,c}$ é o traço nos espaços de Dirac, spin, isospin e cor. Assim para os termos de (2.9), tem-se

$$\langle 0 | \bar{\psi}(x) \psi(x) | 0 \rangle = -i Tr_{s,i,c} [S_F(0)] \quad (2.12)$$

e

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\psi}(x) i\gamma^5 \vec{\tau} \psi(x) | 0 \rangle &= -i Tr_{s,i,c} [S_F(0) i\gamma^5] Tr(\vec{\tau}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para chegar a eq. (2.13), usou-se a eq. (A.29). A equação de Dirac para o campo $\psi(x)$ com $m_c = 0$ (limite quirral) e com interação (2.9), na aproximação de campo médio, é

$$(i\cancel{\partial} + 2G \langle 0 | \bar{\psi}(x) \psi(x) | 0 \rangle) \psi(x) = 0. \quad (2.14)$$

O termo $\langle 0 | \bar{\psi}(x) i\gamma^5 \vec{\tau} \psi(x) | 0 \rangle$ não aparece em (2.14), pois ele vale zero. Sabendo que a equação de Dirac para um férmion de massa M é

$$(i\cancel{\partial} - M) \psi(x) = 0, \quad (2.15)$$

fica fácil ver que é possível definir uma massa M , conhecida como massa dinâmica, ao campo $\psi(x)$ dada por

$$M = -2G \langle 0 | \bar{\psi}(x) \psi(x) | 0 \rangle. \quad (2.16)$$

A eq. (2.16) é conhecida como *Equação de Gap*¹¹. Usando as eqs. (2.12) e (2.11) em (2.16), obtém-se

$$M = 2i^2 G \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} Tr_{s,i,c} \left(\frac{1}{\not{K} - M} \right). \quad (2.17)$$

Usando a relação $\frac{1}{\not{K} - M} = \frac{\not{K} + M}{(\not{K} - M)(\not{K} + M)} = \frac{\not{K} + M}{\not{K}^2 - M^2} = \frac{\not{K} + M}{K^2 - M^2}$ em (2.17) e calculando o traço sobre o spin, isospin e cor, obtém-se

$$\begin{aligned} M &= -2G6 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{Tr(\not{K} + M)}{K^2 - M^2} \\ &= -12G \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{Tr(\gamma^\mu) K_\mu + M Tr(I_4)}{K^2 - M^2}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

¹¹Este nome se deve à analogia com a equação que determina o gap de energia em um supercondutor (teoria BCS).

onde I_4 é a matriz identidade 4×4 . Utilizando as eqs. (A.14) e (A.15) em (2.18), obtém-se

$$M = -48GM \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^2 - M^2}, \quad (2.19)$$

portanto

$$\int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^2 - M^2} = -\frac{1}{48G}. \quad (2.20)$$

Observe que $\int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^2 - M^2}$ divergente quadraticamente. Definindo

$$I_{quad}(M^2) \equiv \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^2 - M^2}, \quad (2.21)$$

a eq. (2.20) fica escrita como

$$I_{quad}(M^2) = -\frac{1}{48G}. \quad (2.22)$$

Pode ser usado um esquema de regularização em $I_{quad}(M^2)$ como, por exemplo, o “cut-off”, gerando um parâmetro de corte Λ . Se este for o caso, a eq. (2.22) impõe uma relação entre a massa dinâmica M , a constante de acoplamento G e um parâmetro de escala Λ do modelo.

2.6 Os Decaimentos Fracos do Píon

Antes de discutirmos sobre os decaimentos fracos do píon, vamos discutir resumidamente sobre o conceito de helicidade, pois ele será necessário a seguir. Helicidade de uma partícula é a projeção do spin na direção do momento linear (ou do movimento). Partículas sem massa têm o spin na direção do momento linear, isso significa que a helicidade é um bom número quântico para elas, ao contrário das partículas com massa. Se uma antipartícula não tiver massa, o spin está na mesma direção e no mesmo sentido do momento linear. Dizemos que a antipartícula tem helicidade positiva. Agora, se for uma partícula sem massa, o spin está na mesma direção e no sentido contrário ao do momento linear. Nesse caso, dizemos que a helicidade é negativa. Dito isso, vamos aos decaimentos fracos do píon.

O píon π^- pode decair fracamente de duas maneiras: $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$ ou $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$. O decaimento fraco $\pi^- \rightarrow \tau^- \bar{\nu}_\tau$ não pode acontecer, pois viola a conservação da energia, já que a massa do píon ($m_{\pi^-} = 139,570 \text{ Mev}/c^2$) é menor que a massa do tau ($m_{\tau^-} = 1784 \text{ Mev}/c^2$). De acordo com as experiências, o píon decai na forma $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ 10^4 vezes mais que na forma $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$, isso significa que ele tende a decair mais em uma partícula com massa próxima da sua (múon μ^-) do que numa partícula mais leve (elétron)¹², um resultado que a princípio parece estranho. Para entender porque isso acontece, é necessário levar-se em conta a conservação do momento linear e angular e a helicidade das partículas.

Analisando o decaimento no referencial do píon, tem-se que inicialmente o píon está em repouso (momento linear nulo). Depois do decaimento, ele dá origem a duas partículas ($e^- \bar{\nu}_e$ ou $\mu^- \bar{\nu}_\mu$) com momentos lineares iguais em módulo e opostos por conservação do momento linear. Como o spin (J) do píon é nulo, por conservação do momento angular, deveríamos

¹²A relação entre a massa do elétron e do múon é $m_{e^-} \simeq \frac{m_{\mu^-}}{200}$.

ter a configuração mostrada na figura 2.2.

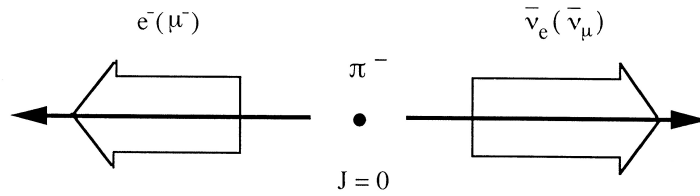


Figura 2.2: Configuração obedecendo a conservação do momento angular

Por outro lado, sabendo que a helicidade de partículas sem massa é negativa e de anti-partículas sem massa é positiva, se o elétron e o múon tivessem massa nula, deveríamos ter a configuração mostrada na figura 2.3.

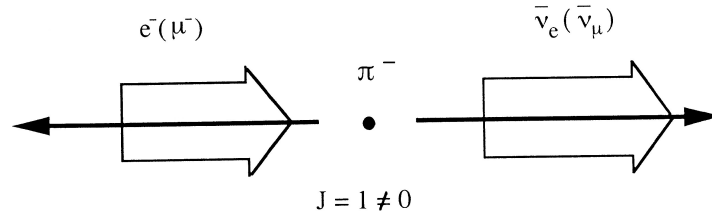


Figura 2.3: Configuração obedecendo a helicidade

Se o elétron e o múon tivessem massa nula, o decaimento mostrado na figura 2.3 não poderia acontecer, pois viola a conservação do momento angular. Assim, como o elétron tem massa mais próxima de zero do que o múon, ele tem mais tendência a decair na forma da figura 2.3 que é proibida. Já o múon que tem massa relativamente grande tem mais tendência a não respeitar a figura 2.3, pois a helicidade deixa de ser um bom número quântico para ele. Conclui-se que o decaimento que tem o múon deve ser o mais frequente. É claro que é possível chegar neste mesmo resultado fazendo os cálculos explícitos das probabilidades dos dois decaimentos.

2.7 A Constante de Decaimento Fraco do Píon f_{π^-}

O elemento de matriz da corrente axial $A_\mu^j(x)$ entre o estado do píon e do vácuo é dado por

$$\langle 0 | A_\mu^j(x) | \pi^k(p) \rangle = i p_\mu \delta^{jk} f_{\pi^-} e^{-ip \cdot x}, \quad (2.23)$$

onde f_{π^-} é a constante de decaimento fraco do píon. O cálculo de f_{π^-} que será realizado adiante vale para os dois tipos de decaimento citados anteriormente. Isso fica claro nas contas, pois as propriedades dos léptons resultantes do decaimento não aparecem nelas.

O diagrama de Feynman de ordem mais baixa do decaimento $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$ é mostrado na figura 2.4.

O píon é um estado ligado de quarks $\bar{u}d$ como mostra a figura 2.4. O vértice de acoplamento dos quarks ao par $e^- \bar{\nu}_e$ é uma interação fraca mediada pelo bóson W^- como mostra

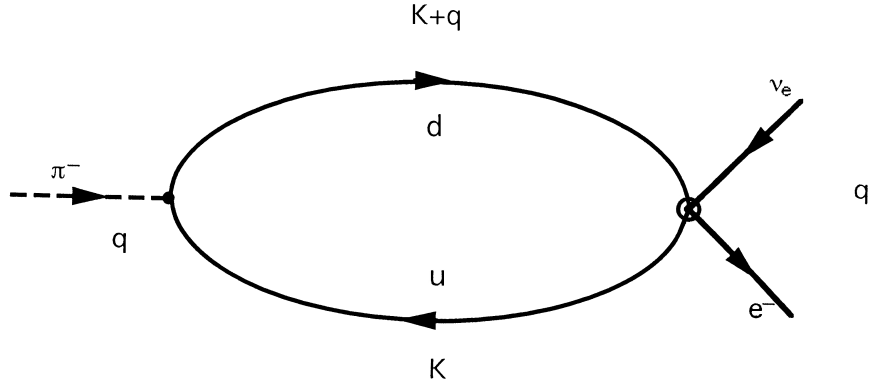


Figura 2.4: Diagrama do decaimento fraco $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$

a figura 2.5.

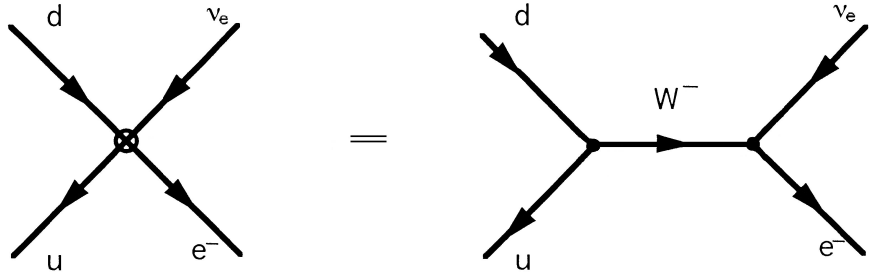


Figura 2.5: Diagrama do acoplamento do quarks ao par $e^- \bar{\nu}_e$

A estrutura dos vértices dos diagramas das figuras 2.4 e 2.5 é

$$\gamma^5 \vec{\tau}_j \text{ para o vértice } \pi^- \bar{u}d \tag{2.24}$$

$$\gamma^\nu (1 - \gamma^5) \vec{\tau}_i \text{ para o vértice } W^- \bar{u}d. \tag{2.25}$$

Estes vértices também estão presentes no decaimento $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$, estudado no capítulo 3.

Aplicando as regras de Feynman aos diagramas das figuras 2.4 e 2.5, obtém-se o seguinte valor para f_{π^-}

$$f_{\pi^-} = \frac{i}{q^\nu} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} Tr_{s,i,c} \left[C_1 \gamma^5 \vec{\tau}_j \frac{1}{\not{K} + \not{q} - M_j} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \vec{\tau}_i \frac{1}{\not{K} - M_i} \right], \tag{2.26}$$

em que C_1 é a intensidade de acoplamento do pión aos quarks e M_i e M_j são as massas dos quarks antiup e down, respectivamente. Olhando a tabela 2.2, percebe-se que as massas dos quarks up (ou antiup) e down são relativamente próximas, de modo que elas, numa boa aproximação, podem ser tomadas como iguais, afim de facilitar os cálculos. Assim, tomando

$M_i = M_j \equiv M$, tem-se

$$f_{\pi^-} = \frac{i}{q^\nu} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} Tr_{s,i,c} \left[C_1 \gamma^5 \vec{\tau}_j \frac{1}{\not{K} + \not{q} - M} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \vec{\tau}_i \frac{1}{\not{K} - M} \right]. \quad (2.27)$$

O cálculo completo e detalhado de f_{π^-} está no apêndice B. O resultado obtido (eq. B.16) é

$$f_{\pi^-} = -24iC_1 M I_{log}(M^2) - \frac{3C_1 M}{2\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left[\frac{M^2 - q^2 x(1-x)}{M^2} \right], \quad (2.28)$$

onde $I_{log}(M^2)$ é definido como

$$I_{log}(M^2) \equiv \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{(K^2 - M^2)^2}. \quad (2.29)$$

Observe que a integral $I_{log}(M^2)$ diverge logaritmicamente. Pode-se mostrar que (demonstração em [10], seção 2.4)

$$C_1 = \frac{M}{f_{\pi^-}}. \quad (2.30)$$

Substituindo (2.30) em (2.28), obtém-se

$$(f_{\pi^-})^2 = -24iM^2 I_{log}(M^2) - \frac{3M^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left[\frac{M^2 - q^2 x(1-x)}{M^2} \right]. \quad (2.31)$$

Novamente aqui pode ser usado um esquema de regularização em $I_{log}(M^2)$ como o “cut-off”. Usando este esquema de regularização, obtém-se uma relação entre M , f_{π^-} e a escala Λ . Basta ajustar a escala Λ para obter o valor experimental de f_{π^-} que vale $f_{\pi^-} = 93$ Mev.

Capítulo 3

O Decaimento Radiativo $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$

Neste capítulo, vamos estudar o problema central deste trabalho, o decaimento radiativo $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$.

3.1 Diagramas de Feynman do Decaimento

Os diagramas de Feynman de menor ordem para o decaimento são

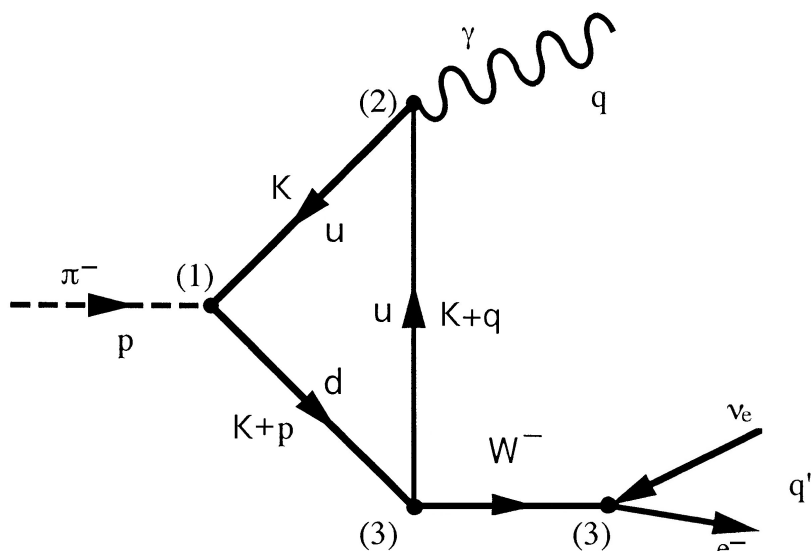
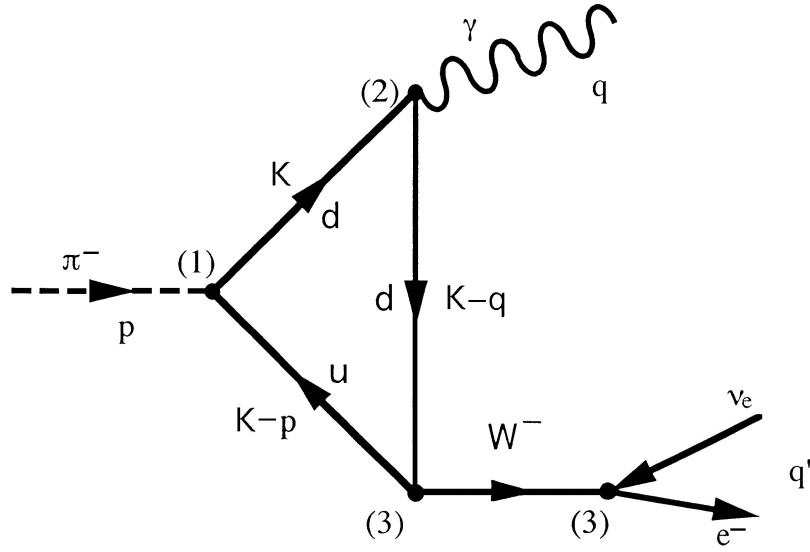


Figura 3.1: Diagrama do decaimento $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$


 Figura 3.2: Diagrama com termo cruzado do decaimento $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$

Cada um dos diagramas é conhecido como triângulo de quarks. Lembrando que o píon é uma estado ligado dos quarks $\bar{u}d$ como é mostrado nas duas figuras anteriores.

Os quadrimomentos que aparecem nos propagadores são aplicados de modo a conservar o quadrimomento em cada vértice. A conservação do quadrimomento também impõe a seguinte relação no triângulo de quarks

$$p = q + q', \quad (3.1)$$

onde p é o quadrimomento do píon, q é o quadrimomento do fóton e q' é o quadrimomento do par $e^- \bar{\nu}_e$.

Observe nos diagramas a presença das três interações do Modelo Padrão. No vértice (1) tem-se a interação forte, no vértice (2) tem-se a interação eletromagnética e nos vértices (3) tem-se a interação fraca.

O propagador do bóson W^- é

$$S = \frac{g^{\mu\nu} - \frac{q'^\mu q'^\nu}{M_{w^-}^2}}{q'^2 - M_{w^-}^2}. \quad (3.2)$$

A massa dele é muito grande ($M_{w^-} = 81,8 \text{ Gev}/c^2$) em relação a energia do processo, então o propagador de W^- pode ser aproximado por

$$S \simeq \frac{g^{\mu\nu} - \frac{q'^\mu q'^\nu}{M_{w^-}^2}}{-M_{w^-}^2}. \quad (3.3)$$

Nesta aproximação, a constante $-M_{w^-}^2$ é absorvida e passa-se a ter um acoplamento direto dos quarks ao par $e^- \bar{\nu}_e$. Assim os diagramas da figuras 3.1 e 3.2 podem ser aproximados,

respectivamente, por

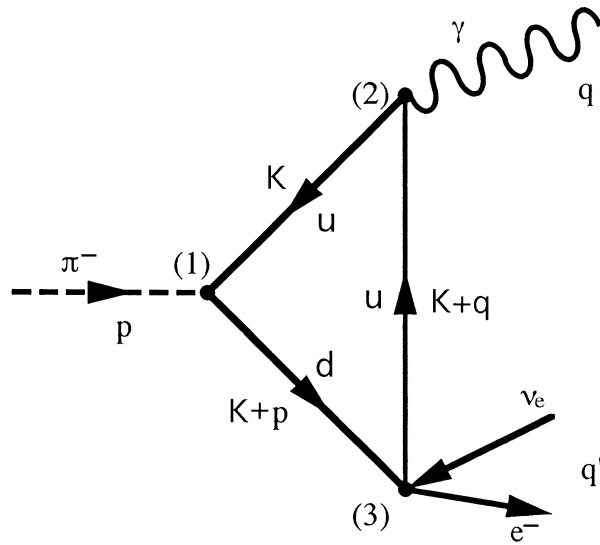


Figura 3.3: Diagrama com a aproximação do decaimento $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$

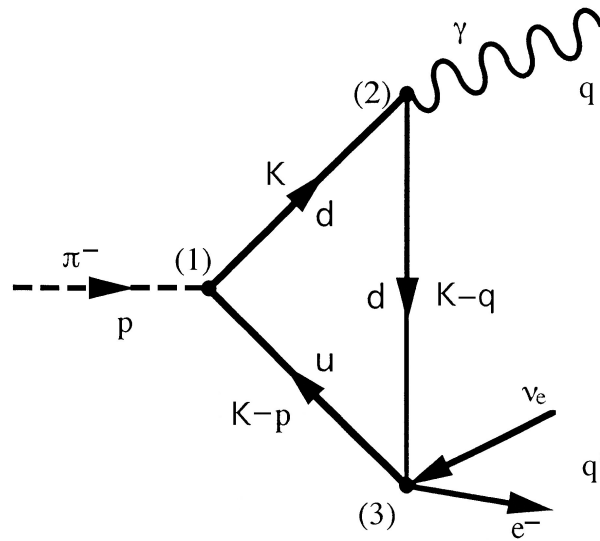


Figura 3.4: Diagrama do termo cruzado com a aproximação do decaimento $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$

Como a aproximação utilizada é boa, estes últimos serão os diagramas de referência para estudo do decaimento em questão.

3.2 Estrutura de Dirac e de Isospin dos Vértices do Decaimento

Nesta seção, vamos ver qual é a estrutura de Dirac e de isospin de cada um dos vértices.

Para o vértice (1) (vértice $\pi^- \bar{u}d$), tem-se

$$C_1 \gamma^5 \otimes \tau_+, \quad (3.4)$$

onde $C_1 \gamma^5$ é a estrutura de Dirac e τ_+ (eq. A.31) é a estrutura de sabor. C_1 é a constante de acoplamento do pión aos quarks.

A estrutura do vértice (2) (vértice $\gamma \bar{q}q$ com $q = u$ para o diagrama da figura 3.3 e $q = d$ para o diagrama da figura 3.4) é

$$\frac{ie}{2} \left(\frac{1}{3} + \tau_3 \right) \otimes \gamma^\mu. \quad (3.5)$$

Assim como foi introduzido no vértice (1) o operador γ^5 , devido ao fato do pión ser um pseudoescalar no espaço de Dirac, é introduzido agora o operador γ^μ , devido ao fato do fóton ser um vetor no mesmo espaço.

A estrutura do vértice (3) é (a estrutura deste vértice é mais difícil de determinar e pode ser encontrado detalhadamente em [10], páginas 33-35)

$$\gamma^\nu (1 - \gamma^5) \otimes \tau_-, \quad (3.6)$$

onde τ_- é dado pela eq. (A.32).

3.3 Aplicação das Regras de Feynman aos Diagramas do Decaimento

Aplicando as regras de Feynman aos diagramas das figuras 3.3 e 3.4, obtém-se as amplitudes $T_+^{\mu\nu}$ e $T_-^{\mu\nu}$, respectivamente. Seus valores são

$$T_+^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} Tr_{C,I} \left[C_1 \gamma^5 \tau_- \frac{1}{\not{K} - M_i} \gamma^\mu \frac{3ie}{2} \left(\frac{1}{3} + \tau_3 \right) \frac{1}{\not{K} - \not{q} - M_j} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \tau_+ \frac{1}{\not{K} - \not{p} - M_k} \right] \quad (3.7)$$

$$T_-^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} Tr_{C,I} \left[C_1 \gamma^5 \tau_- \frac{1}{\not{K} + \not{p} - M_k} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \tau_+ \frac{1}{\not{K} + \not{q} - M_j} \frac{3ie}{2} \left(\frac{1}{3} + \tau_3 \right) \gamma^\mu \frac{1}{\not{K} - M_i} \right]. \quad (3.8)$$

O fator 3 em $3ie/2$ vem do cálculo sobre a cor. A amplitude $T^{\mu\nu}$ do decaimento é

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= T_+^{\mu\nu} + T_-^{\mu\nu} = \\ &= \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} Tr_{C,I} \left[C_1 \gamma^5 \tau_- \frac{1}{\not{K} - M_i} \gamma^\mu \frac{3ie}{2} \left(\frac{1}{3} + \tau_3 \right) \frac{1}{\not{K} - \not{q} - M_j} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \tau_+ \frac{1}{\not{K} - \not{p} - M_k} \right] + \\ &+ \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} Tr_{C,I} \left[C_1 \gamma^5 \tau_- \frac{1}{\not{K} + \not{p} - M_k} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \tau_+ \frac{1}{\not{K} + \not{q} - M_j} \frac{3ie}{2} \left(\frac{1}{3} + \tau_3 \right) \gamma^\mu \frac{1}{\not{K} - M_i} \right]. \quad (3.9) \end{aligned}$$

As massas M_i , M_j e M_k correspondem as massas dos quarks up e down e assim como foi feito na seção 2.7, as massas podem ser aproximadas como iguais (novamente veja a tabela 2.2), então tomemos $M_i = M_j = M_k \equiv M$. Usando a relação $\frac{1}{\not{J} - M} = \frac{\not{J} + M}{\not{J}^2 - M^2}$ nos vários termos das eqs. (3.7), (3.8) (consequentemente em 3.9) e fazendo a transformação $K \rightarrow -K$

em $T_-^{\mu\nu}$ para as integrais de $T_+^{\mu\nu}$ e $T_-^{\mu\nu}$ ficarem com o mesmo denominador, obtém-se

$$T_+^{\mu\nu} = C_1 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{Tr_{C,I} [\gamma^5 \tau_- (\not{K} + M) \gamma^\mu \frac{3ie}{2} (\frac{1}{3} + \tau_3) (\not{K} - \not{q} + M) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \tau_+ (\not{K} - \not{p} + M)]}{[(K-p)^2 - M^2][(K-q)^2 - M^2](K^2 - M^2)} \quad (3.10)$$

$$T_-^{\mu\nu} = C_1 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{Tr_{C,I} [\gamma^5 \tau_- (-\not{K} + \not{p} + M) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \tau_+ (-\not{K} + \not{q} + M) \frac{3ie}{2} (\frac{1}{3} + \tau_3) \gamma^\mu (-\not{K} + M)]}{[(K-p)^2 - M^2][(K-q)^2 - M^2](K^2 - M^2)} \quad (3.11)$$

e

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = T_+^{\mu\nu} + T_-^{\mu\nu} = C_1 \left\{ \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(K-p)^2 - M^2][(K-q)^2 - M^2](K^2 - M^2)} \cdot \right. \\ \cdot \{ Tr_{C,I} [\gamma^5 \tau_- (\not{K} + M) \gamma^\mu \frac{3ie}{2} (\frac{1}{3} + \tau_3) (\not{K} - \not{q} + M) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \cdot \\ \cdot \tau_+ (\not{K} - \not{p} + M)] + Tr_{C,I} [\gamma^5 \tau_- (-\not{K} + \not{p} + M) \gamma^\nu \cdot \\ \cdot (1 - \gamma^5) \tau_+ (-\not{K} + \not{q} + M) \frac{3ie}{2} (\frac{1}{3} + \tau_3) \gamma^\mu (-\not{K} + M)] \} \}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Integrando a eq. (3.12) (ou 3.10 e 3.11) em K e calculando os traços, obtém-se uma combinação de vários termos invariantes de Lorentz do tipo

$$p^\mu q^\nu; p^\nu q^\mu; p^\mu p^\nu; q^\mu q^\nu; g^{\mu\nu}; \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha q^\beta. \quad (3.13)$$

Os coeficientes que multiplicam estes termos invariantes de Lorentz são escalares que podem depender de p^2 , q^2 , $p \cdot q$ e M . Estes escalares são chamados de *Fatores de Forma*. Os dois traços de (3.12) estão calculados (sem os traços de cor e isospin) detalhadamente no apêndice C. Usando as matrizes (A.25), (A.33) e (A.34), obtém-se os seguintes valores para os traços em cor e isospin

$$Tr \left[\tau_- \frac{3ie}{2} (\frac{1}{3} + \tau_3) \tau_+ \right] = 4ie \quad (3.14)$$

$$Tr \left[\tau_- \tau_+ \frac{3ie}{2} (\frac{1}{3} + \tau_3) \right] = -2ie. \quad (3.15)$$

A princípio, teríamos que incluir os traços (3.14) e (3.15) nas amplitudes $T_+^{\mu\nu}$ e $T_-^{\mu\nu}$ para obter os Fatores de Forma, porém somente é possível medir em laboratório os Fatores de Forma com o traço no espaço de Dirac, sem o traço no espaço de cor e isospin, então os traços (3.14) e (3.15) não serão levados em conta no cálculo de $T_+^{\mu\nu}$ e $T_-^{\mu\nu}$. Substituindo (C.2) em (3.10) e (C.3) em (3.11), obtém-se

$$T_\pm^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{4iC_1 M \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha q^\beta \pm 4C_1 M (p^\mu q^\nu - 2p^\nu K^\mu + p^\nu q^\mu + K^2 g^{\mu\nu} - p \cdot q g^{\mu\nu} - M^2 g^{\mu\nu})}{[(K-p)^2 - M^2][(K-q)^2 - M^2](K^2 - M^2)}. \quad (3.16)$$

Essas são as amplitudes sem os traços em cor e isospin. Para continuar o cálculo de $T_\pm^{\mu\nu}$, vamos definir as seguintes quantidades

$$I_1(p^2, q^2, 2p \cdot q) \equiv \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(K-p)^2 - M^2][(K-q)^2 - M^2](K^2 - M^2)} \quad (3.17)$$

$$I_2 \equiv \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(K-p)^2 - M^2][(K-q)^2 - M^2]} \quad (3.18)$$

$$I^\mu \equiv \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{K^\mu}{[(K-p)^2 - M^2][(K-q)^2 - M^2](K^2 - M^2)}. \quad (3.19)$$

I_2 pode ser escrito de uma maneira mais conveniente. Fazendo uma mudança de variável do tipo $K' = K - q$ em (3.18), obtém-se

$$I_2((p - q)^2) = \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{[K^2 - M^2] \{[K - (p - q)]^2 - M^2\}}. \quad (3.20)$$

Reescrevendo $T_{\pm}^{\mu\nu}$ em termos das integrais $I_1(p^2, q^2, 2p \cdot q)$, $I_2((p - q)^2)$ e I^μ , obtém-se

$$\begin{aligned} T_{\pm}^{\mu\nu} = & 4iC_1 M I_1 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha q^\beta \pm 4C_1 M (I_1 p^\mu q^\nu - 2I^\mu p^\nu + \\ & + I_1 p^\nu q^\mu + I_2 g^{\mu\nu} - p \cdot q I_1 g^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Como foi dito no capítulo 2, estamos considerando o limite quiral onde a massa do pión tende a zero. Nesse limite, alguns termos da eq. (3.21) se anulam e, para isso, é preciso escrever I^μ em termos de I_1 e I_2 . Lembrando que p é o quadrimomento de π^- , q é o quadrimomento do fóton e q' é o quadrimomento do par $e^- \bar{\nu}_e$, tem-se as seguintes relações

$$p^2 = m_{\pi^-}^2 \quad (3.22)$$

$$q^2 = 0 \quad (3.23)$$

e

$$\begin{aligned} q'^2 &= (p - q)^2 \\ &= m_{\pi^-}^2 - 2p \cdot q. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Levando-se em conta as três relações anteriores, $-2I^\mu p^\nu$ pode ser escrito da seguinte forma [10]

$$\begin{aligned} -2I^\mu p^\nu = & \frac{p^\mu p^\nu}{p \cdot q} [I_2(m_{\pi^-}^2) - I_2(m_{\pi^-}^2 - 2p \cdot q)] + \\ & + \frac{p^\nu q^\mu}{p \cdot q} \left\{ I_2(0) - I_2(m_{\pi^-}^2 - 2p \cdot q) - m_{\pi^-}^2 I_1 - \frac{m_{\pi^-}^2}{p \cdot q} [I_2(m_{\pi^-}^2) - I_2(m_{\pi^-}^2 - 2p \cdot q)] \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sabendo que $I_2(0) = I_2(-2p \cdot q) = 0$, no limite quiral ($m_{\pi^-} = 0$) tem-se que $-2I^\mu p^\nu = 0$. Portanto a eq. (3.21) se reduz a

$$T_{\pm}^{\mu\nu} = 4iC_1 M I_1 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha q^\beta \pm 4C_1 M I_1 (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu - p \cdot q g^{\mu\nu}). \quad (3.26)$$

Na próxima seção, vamos obter a partir de $T_{\pm}^{\mu\nu}$ os Fatores de Forma Vetorial e Axial-Vetor.

3.4 Fatores de Forma e Comparação Experimental

De acordo com Portolés [20], os Factores de Forma Vetorial e Axial-Vetor são definidos, respectivamente, como

$$\langle \gamma | \bar{u} \gamma_\mu d | \pi^- \rangle = -\frac{e}{m_{\pi^-}} \varepsilon^\nu F_V(q'^2) \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha q^\beta \quad (3.27)$$

$$\langle \gamma | \bar{u} \gamma^\mu \gamma^5 d | \pi^- \rangle = i \frac{e}{m_{\pi^-}} \varepsilon_\nu F_A(q'^2) [(p \cdot q) g^{\mu\nu} - p^\mu q^\nu] + i e \varepsilon^\mu \sqrt{2} F. \quad (3.28)$$

O último termo de (3.28) refere-se a processos de Bremsstrahlung que não serão discutidos aqui.

Substituindo (2.30) em (3.26), obtém-se

$$T_{\pm}^{\mu\nu} = \frac{4M^2}{f_{\pi^-}} I_1 i \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha q^\beta \pm \frac{4M^2}{f_{\pi^-}} I_1 (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu - p \cdot q g^{\mu\nu}). \quad (3.29)$$

O Fator de Forma Vetorial F_V é portanto

$$F_V = \frac{4M^2}{f_{\pi^-}} I_1, \quad (3.30)$$

e o Fator de Forma Axial-Vetor F_A é

$$F_A = \frac{4M^2}{f_{\pi^-}} I_1. \quad (3.31)$$

A razão entre os dois Fatores de Forma é definida como

$$\gamma \equiv \frac{F_A}{F_V}. \quad (3.32)$$

Substituindo (3.31) e (3.30) em (3.32), obtém-se

$$\gamma = 1. \quad (3.33)$$

As quantidades mensuráveis em laboratório são F_V e γ , então falta calcular o valor de F_V . Antes precisamos calcular I_1 . A integral I_1 no limite quiral vale

$$I_1 = \frac{1}{2M^2}. \quad (3.34)$$

Substituindo (3.34) em (3.30), obtém-se

$$\begin{aligned} F_V &= \frac{4M^2}{f_{\pi^-}} \frac{1}{2M^2} \\ &= \frac{2}{f_{\pi^-}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Utilizando o valor experimental de $f_{\pi^-} = 93 \text{ Mev}$, obtém-se

$$F_V = 0,022. \quad (3.36)$$

O valor experimental de F_V é [26]

$$F_V = 0,017 \pm 0,008. \quad (3.37)$$

Mostrando que o cálculo realizado de F_V está dentro das barras de erro. Isso já não acontece com γ . Seu valor experimental é [26]

$$\gamma = 0,45 \pm 0,06. \quad (3.38)$$

Observa-se uma defasagem entre os valores teórico e experimental de γ . Isso indica a necessidade de inclusão de outros processos como o méson vetorial ρ .

Capítulo 4

Conclusão

Como foi dito na introdução, o objetivo deste trabalho foi calcular o Fator de Forma Vetorial (F_V) e a razão (γ) entre os Fatores de Forma Axial-Vetor e Vetorial para o decaimento radiativo $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$, em que F_V e γ são quantidades mensuráveis em laboratório, de modo que podemos comparar o resultado teórico com o experimental. Um detalhe importante é que no cálculo que foi realizado, foi utilizado o Modelo NJL no lugar da QCD para a interação forte por motivos já mencionados e a Teoria Eletrofraca (Modelo Padrão) para a interação Eletrofraca, em que esta última é uma teoria bem estabelecida nos dias atuais, mas o uso dela neste trabalho não deixa de ser um teste para a mesma. Desta forma, somos capazes de verificar a autenticidade do Modelo NJL, bem como as aproximações envolvidas na aplicação deste, e do Modelo Padrão.

O resultado obtido teoricamente para F_V ($F_V = 0,022$) fica em acordo com o experimental ($F_V = 0,017 \pm 0,008$), levando-se em conta as barras de erro. Isso mostra a veracidade do Modelo NJL em descrever processos que envolve a interação forte à baixas energias e a veracidade do Modelo Padrão. No entanto, comparando a razão γ teórica ($\gamma = 1$) com a experimental ($\gamma = 0,45 \pm 0,06$), observa-se uma diferença significativa, mostrando-se a necessidade de adicionar correções ao decaimento. Uma dessas possíveis correções deve ser o méson ρ . Antes de um dos vértices gerar o fóton, pode haver a produção de um par quark-antiquark, gerando um méson ρ que se acopla ao fóton no final.

Apêndice A

Matrizes de Dirac γ , Matrizes de Pauli σ_i , Traços e Integrais

A.1 Matrizes de Dirac γ

As matrizes γ^μ , $\mu = 0, \dots, 3$, são matrizes 4×4 que obedecem as seguintes relações

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad (\text{A.2})$$

onde

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

é o tensor métrico no espaço de Minkowski. Segue da eq. (A.1) que

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1, \quad \text{para } i=1, 2 \text{ e } 3 \quad (\text{A.4})$$

e

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0 \quad \text{para } \mu \neq \nu, \quad (\text{A.5})$$

ou seja, matrizes γ^μ distintas anticomutam entre si. Usando estes últimos resultados na eq. (A.2), obtém-se que

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \quad (\text{A.6})$$

(γ^0 é hermitiana) e

$$\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i, \quad \text{para } i=1, 2 \text{ e } 3 \quad (\text{A.7})$$

(γ^i é antihermitiana).

A matriz γ^5 é definida como

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{A.8})$$

É fácil mostrar que γ^5 tem as propriedades

$$(\gamma^5)^2 = 1 \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5 \quad (\text{A.10})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Observe que o índice grego μ somente varia de 0 a 3 e nunca vale 5.

As matrizes γ com índice inferior são definidas como

$$\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu. \quad (\text{A.12})$$

Note que a equação anterior corresponde a mesma equação que relaciona um tensor covariante com um contravariante, porém as matrizes γ não são tensores, pois não se transformam como eles.

A matriz γ_5 é definida como

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\pi}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\pi, \quad (\text{A.13})$$

onde $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\pi}$ é o tensor de Levi-Civita.

A.2 Traços Envolvendo as Matrizes γ

Se o produto $(\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu)$ contém um número ímpar de matrizes γ^λ , então

$$Tr(\gamma^\alpha\gamma^\beta \dots \gamma^\mu\gamma^\nu) = 0. \quad (\text{A.14})$$

Para um número par de matrizes γ^λ , tem-se

$$Tr(I_4) = 4 \quad (\text{A.15})$$

$$Tr(\gamma^\alpha\gamma^\beta) = 4g^{\alpha\beta} \quad (\text{A.16})$$

$$Tr(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta) = 4(g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}), \quad (\text{A.17})$$

em que I_4 corresponde a matriz identidade 4×4 . Para demonstrar os traços desta seção, basta usar as equações da seção A.1 e o fato de que

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA), \quad (\text{A.18})$$

sendo A e B matrizes $n \times n$.

Analogamente, se o produto $(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu)$ contém um número ímpar de matrizes γ^λ , então

$$\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0. \quad (\text{A.19})$$

Para um número par de matrizes γ^λ , tem-se

$$\text{Tr}(\gamma^5) = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = -4i \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = 4i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (\text{A.22})$$

A.3 Matrizes de Pauli σ_i

As matrizes de Pauli σ_i , $i = 1, 2, 3$, são matrizes 2×2 dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

É fácil mostrar que as matrizes de Pauli obedecem as seguintes relações

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (\text{A.26})$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (\text{A.27})$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker dado por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

e ε_{ijk} é antisimétrico em todos os pares de índices com $\varepsilon_{123} = 1$. Olhando as eqs. (A.23), (A.24) e (A.25), é fácil ver que

$$\text{Tr}(\sigma_i) = 0. \quad (\text{A.29})$$

O vetor $\vec{\sigma}$ é definido como

$$\vec{\sigma} \equiv \sigma_1 \hat{x} + \sigma_2 \hat{y} + \sigma_3 \hat{z}, \quad (\text{A.30})$$

onde \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} são os os vetores unitários canônicos.

As matrizes σ_+ e σ_- são definidas como

$$\sigma_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 + i\sigma_2) \quad (\text{A.31})$$

$$\sigma_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - i\sigma_2). \quad (\text{A.32})$$

Substituindo as eqs. (A.23) e (A.24) em (A.31) e (A.32), obtém-se

$$\sigma_+ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

$$\sigma_- = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

Observe que

$$\text{Tr}(\sigma_+) = \text{Tr}(\sigma_-) = 0. \quad (\text{A.35})$$

Quando nos referirmos a spin, representamos as matrizes por σ_i e quando nos referirmos a isospin ou qualquer outro tipo de objeto que tenha a mesma descrição do spin, representamos as matrizes por τ_i .

A.4 Algumas Integrais Úteis

Listaremos abaixo algumas integrais básicas que aparecem no cálculo de algumas amplitudes de espalhamento, em particular, integrais de loop.

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{(K^2 - \Lambda^2)^n} = \frac{(-1)^n i \Gamma(n-2)}{(4\pi)^2 \Gamma(n)} \frac{1}{\Lambda^{2(n-2)}}, \quad n \geq 3 \quad (\text{A.36})$$

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{K^\mu}{(K^2 - \Lambda^2)^n} = 0, \quad n \geq 2 \quad (\text{A.37})$$

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{K^\mu K^\nu}{(K^2 - \Lambda^2)^n} = \frac{(-1)^{n+1} i \Gamma(n-3)}{(4\pi)^2 2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{\Lambda^{2(n-3)}}, \quad n \geq 4 \quad (\text{A.38})$$

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{K^\mu K^\nu K^\gamma}{(K^2 - \Lambda^2)^n} = 0, \quad n \geq 4. \quad (\text{A.39})$$

As integrais (A.37) e (A.39) valem zero, pois os integrandos delas são ímpares e os intervalos de integração são simétricos. A eq. (A.36) para o caso $n = 3$ é obtida integrando primeiro em relação a K^0 como uma integral de contorno e depois integrando em relação a \vec{K} usando coordenadas esféricas¹. O caso geral para $n \geq 3$ é obtido diferenciando repetidas vezes com relação a Λ^2 . Para obter a eq. (A.38), é necessário primeiramente mudar as variáveis K e Λ^2 da eq. (A.37) para

$$p = K - q, \quad t = q^2 - \Lambda^2. \quad (\text{A.40})$$

Depois, é só derivar a equação resultante em relação a q_ν e tomar $q = 0$.

¹Este cálculo é feito em [9], página 315.

Apêndice B

Cálculo da Constante de Decaimento Fraco do Píon

Na seção 2.7, aplicou-se as regras de Feynman aos diagramas das figuras 2.4 e 2.5 e chegou-se na seguinte expressão (na aproximação em que $M_i = M_j \equiv M$)

$$f_{\pi^-} = \frac{i}{q^\nu} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} Tr_{s,i,c} \left[C_1 \gamma^5 \vec{\tau}_j \frac{1}{\not{K} + \not{q} - M} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \vec{\tau}_i \frac{1}{\not{K} - M} \right]. \quad (\text{B.1})$$

Usando a relação $\frac{1}{\not{J} - M} = \frac{J + M}{J^2 - M^2}$ nos dois termos de (B.1) e calculando o traço sobre a spin, isospin e cor, obtém-se

$$f_{\pi^-} = \frac{6iC_1}{q^\nu} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{Tr [\gamma^5 (\not{K} + \not{q} + M) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) (\not{K} + M)]}{[(K + q)^2 - M^2](K^2 - M^2)}. \quad (\text{B.2})$$

Primeiramente, calculemos o traço no numerador do integrando

$$\begin{aligned} Tr [\gamma^5 (\not{K} + \not{q} + M) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) (\not{K} + M)] &= Tr(\gamma^5 \not{K} \gamma^\nu \not{K}) + \\ &+ Tr(\gamma^5 \not{K} \gamma^\nu M) - Tr(\gamma^5 \not{K} \gamma^\nu \gamma^5 \not{K}) - Tr(\gamma^5 \not{K} \gamma^\nu \gamma^5 M) + Tr(\gamma^5 \not{q} \gamma^\nu \not{K}) + \\ &+ Tr(\gamma^5 \not{q} \gamma^\nu M) - Tr(\gamma^5 \not{q} \gamma^\nu \gamma^5 \not{K}) - Tr(\gamma^5 \not{q} \gamma^\nu \gamma^5 M) + Tr(\gamma^5 M \gamma^\nu \not{K}) + \\ &+ Tr(\gamma^5 M \gamma^\nu M) - Tr(\gamma^5 M \gamma^\nu \gamma^5 \not{K}) - Tr(\gamma^5 M \gamma^\nu \gamma^5 M) = Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta) K_\alpha K_\beta + \\ &+ Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu) M K_\alpha - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\beta) K_\alpha K_\beta - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5) K_\alpha M + \\ &+ Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta) q_\alpha K_\beta + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu) q_\alpha M - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\beta) q_\alpha K^\beta - \\ &- Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5) q_\alpha M + Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\alpha) K_\alpha M + Tr(\gamma^5 \gamma^\nu) M^2 - \\ &- Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\alpha) K_\alpha M - Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5) M^2. \end{aligned}$$

Dos 12 traços na expressão anterior, 6 valem 0, devido as eqs. (A.19) e (A.21). Assim

$$\begin{aligned} & Tr [\gamma^5(\not{K} + \not{q} + M)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)(\not{K} + M)] = -Tr [(\gamma^5)^2\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta] K_\alpha K_\beta - \\ & -Tr [(\gamma^5)^2\gamma^\alpha\gamma^\nu] K_\alpha M - Tr [(\gamma^5)^2\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta] q_\alpha K_\beta - Tr [(\gamma^5)^2\gamma^\alpha\gamma^\nu] q_\alpha M + \\ & +Tr [(\gamma^5)^2\gamma^\nu\gamma^\alpha] K_\alpha M + Tr [(\gamma^5)^2\gamma^\nu] M^2. \end{aligned} \quad (B.3)$$

Na equação anterior, usou-se a eq. (A.11). Usando as eqs. (A.9), (A.14) e (A.16), o traço se reduz a

$$\begin{aligned} & Tr [\gamma^5(\not{K} + \not{q} + M)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)(\not{K} + M)] = \\ & = -4g^{\alpha\nu}K_\alpha M - 4g^{\alpha\nu}q_\alpha M + 4g^{\nu\alpha}K_\alpha M = 4M(-K^\nu - q^\nu + K^\nu), \end{aligned}$$

portanto

$$Tr [\gamma^5(\not{K} + \not{q} + M)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)(\not{K} + M)] = -4Mq^\nu. \quad (B.4)$$

Substituindo (B.4) em (B.2), obtém-se

$$\begin{aligned} f_{\pi^-} &= \frac{-24iC_1Mq^\nu}{q^\nu} \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(K+q)^2 - M^2](K^2 - M^2)} \\ f_{\pi^-} &= -24iC_1M \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(K+q)^2 - M^2](K^2 - M^2)}. \end{aligned} \quad (B.5)$$

A integral da eq. (B.5) é logaritmicamente divergente. Precisamos retirar a parte finita dela. Para isso, basta usar a identidade¹ (facilmente demonstrável)

$$\frac{1}{(K+q)^2 - M^2} = \frac{1}{K^2 - M^2} - \frac{q^2 + 2q \cdot K}{[(K+q)^2 - M^2](K^2 - M^2)}, \quad (B.6)$$

assim

$$\begin{aligned} f_{\pi^-} &= -24iC_1M \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{1}{(K^2 - M^2)^2} + \\ &+ 24iC_1M \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{q^2 + 2q \cdot K}{[(K+q)^2 - M^2](K^2 - M^2)^2}. \end{aligned} \quad (B.7)$$

A primeira integral da esquerda para direita da eq. (B.7) corresponde a um $I_{log}(M^2)$ puro (2.29) e a segunda é uma integral finita que precisa ser avaliada usando a parametrização de Feynman. Vamos agora realizar o cálculo da segunda integral que é dada por

$$\int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{q^2 + 2q \cdot K}{[(K+q)^2 - M^2](K^2 - M^2)^2}. \quad (B.8)$$

Será necessário usar a seguinte identidade (que introduz os parâmetros de Feynman)

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(x+y-1) \frac{ny^{n-1}}{(xA+yB)^{n+1}}. \quad (B.9)$$

¹Esta identidade é muito utilizada em regularização implícita.

Usando a identidade anterior para $A = (K + q)^2 - M^2$, $B = K^2 - M^2$ e $n = 2$ na eq. (B.8), tem-se

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{q^2 + 2q \cdot K}{[(K + q)^2 - M^2](K^2 - M^2)^2} = \\
 &= \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(x + y - 1) \frac{2y(q^2 + 2q \cdot K)}{\{x[(K + q)^2 - M^2] + y(K^2 - M^2)\}^3} = \\
 &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{2(1-x)(q^2 + 2q \cdot K)}{\{x[(K + q)^2 - M^2] + (1-x)(K^2 - M^2)\}^3} = \\
 &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{2(1-x)(q^2 + 2q \cdot K)}{[xK^2 + xq^2 + 2xK \cdot q - xM^2 + K^2 - xK^2 + xM^2 - M^2]^3} = \\
 &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{2(1-x)(q^2 + 2q \cdot K)}{[K^2 + 2xK \cdot q + x^2q^2 - M^2 + q^2x(1-x)]^3},
 \end{aligned}$$

então

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{q^2 + 2q \cdot K}{[(K + q)^2 - M^2](K^2 - M^2)^2} = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{2(1-x)(q^2 + 2q \cdot K)}{[(K + xq)^2 - M^2 + q^2x(1-x)]^3}. \quad (\text{B.10})$$

Fazendo uma mudança de variável da forma $K' = K + xq$ e definindo $\Lambda^2 = M^2 - q^2x(1-x)$, a eq. (B.10) se torna

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 dx \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{2(1-x)(q^2 + 2q \cdot K)}{[(K + xq)^2 - M^2 + q^2x(1-x)]^3} = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 K'}{(2\pi)^4} \frac{2(1-x)(q^2 + 2q \cdot K' - 2xq^2)}{(K'^2 - \Lambda^2)^3} = \\
 &= 2 \int_0^1 dx (1-x)q^2(1-2x) \int \frac{d^4 K'}{(2\pi)^4} \frac{1}{(K'^2 - \Lambda^2)^3} + \\
 &+ 4 \int_0^1 dx (1-x)q_\alpha \int \frac{d^4 K'}{(2\pi)^4} \frac{K'^\alpha}{(K'^2 - \Lambda^2)^3}. \quad (\text{B.11})
 \end{aligned}$$

O termo $\int \frac{d^4 K'}{(2\pi)^4} \frac{K'^\alpha}{(K'^2 - \Lambda^2)^3}$ da eq. (B.11) corresponde a integral da eq. (A.37) para $n = 3$ e portanto vale zero. O termo $\int \frac{d^4 K'}{(2\pi)^4} \frac{1}{(K'^2 - \Lambda^2)^3}$ da eq. (B.11) corresponde a integral da eq. (A.36) para $n = 3$ e portanto vale $\int \frac{d^4 K'}{(2\pi)^4} \frac{1}{(K'^2 - \Lambda^2)^3} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3)} \frac{1}{(\Lambda^2)^1} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{0!}{2!} \frac{1}{(\Lambda^2)^1} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2\Lambda^2}$. Então

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{q^2 + 2q \cdot K}{[(K + q)^2 - M^2](K^2 - M^2)^2} = \\
 &= 2 \int_0^1 dx (1-x)q^2(1-2x) \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2\Lambda^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)q^2(2x-1)}{\Lambda^2}. \quad (\text{B.12})
 \end{aligned}$$

A integral em x pode ser escrita de outra forma. Primeiro note que

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx} \ln \Lambda^2 = \frac{1}{\Lambda^2} \frac{d}{dx} [M^2 - q^2x(1-x)] = \\
 &= \frac{1}{\Lambda^2} [-q^2(1-x) + q^2x] = \frac{1}{\Lambda^2} q^2(2x-1), \quad (\text{B.13})
 \end{aligned}$$

assim

$$\frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)q^2(2x-1)}{\Lambda^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (1-x) \frac{d}{dx} \ln \Lambda^2.$$

Integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned}
 & \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx(1-x) \frac{d}{dx} \ln \Lambda^2 = \\
 & = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[(1-x) \ln \Lambda^2 \Big|_0^1 + \int_0^1 dx \ln \Lambda^2 \right] = \\
 & = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[-\ln M^2 + \int_0^1 dx \ln \Lambda^2 \right] = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \ln \frac{\Lambda^2}{M^2}, \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

portanto

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{q^2 + 2q \cdot K}{[(K+q)^2 - M^2](K^2 - M^2)^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \ln \left[\frac{M^2 - q^2 x(1-x)}{M^2} \right]. \tag{B.15}$$

Finalmente a eq. (B.7) fica escrita como

$$f_{\pi^-} = -24iC_1 M I_{\log}(M^2) - \frac{3C_1 M}{2\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left[\frac{M^2 - q^2 x(1-x)}{M^2} \right]. \tag{B.16}$$

Apêndice C

Cálculo dos Traços da Equação (3.12) da Seção 3.3

Na seção 3.3, foi calculado o valor de $T^{\mu\nu}$ e chegou-se na seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} = T_+^{\mu\nu} + T_-^{\mu\nu} = C_1 \left\{ \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(K-p)^2 - M^2][(K-q)^2 - M^2](K^2 - M^2)} \cdot \right. \\
 \cdot \{Tr_{C,I}[\gamma^5 \tau_- (\not{K} + M) \gamma^\mu \frac{3ie}{2} (\frac{1}{3} + \tau_3) (\not{K} - \not{q} + M) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \cdot \\
 \cdot \tau_+ (\not{K} - \not{p} + M)] + Tr_{C,I}[\gamma^5 \tau_- (-\not{K} + \not{p} + M) \gamma^\nu \cdot \\
 \cdot (1 - \gamma^5) \tau_+ (-\not{K} + \not{q} + M) \frac{3ie}{2} (\frac{1}{3} + \tau_3) \gamma^\mu (-\not{K} + M)]\} \}. \quad (C.1)
 \end{aligned}$$

Neste apêndice, vamos calcular os dois traços da integral de (C.1) sem os traços de cor e isospin. Começemos com o traço

$$\begin{aligned}
 & Tr [\gamma^5 (\not{K} + M) \gamma^\mu (\not{K} - \not{q} + M) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) (\not{K} - \not{p} + M)] = \\
 & = Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\gamma) K_\alpha K_\beta K_\gamma - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\gamma) K_\alpha K_\beta p_\gamma + \\
 & + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu) K_\alpha K_\beta M - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\gamma) K_\alpha K_\beta K_\gamma + \\
 & + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\gamma) K_\alpha K_\beta p_\gamma - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^5) K_\alpha K_\beta M - \\
 & - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\gamma) K_\alpha q_\beta K_\gamma + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\gamma) K_\alpha q_\beta p_\gamma - \\
 & - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu) K_\alpha q_\beta M + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\gamma) K_\alpha q_\beta K_\gamma - \\
 & - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\gamma) K_\alpha q_\beta p_\gamma + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^5) K_\alpha q_\beta M + \\
 & + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta) K_\alpha M K_\beta - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta) K_\alpha M p_\beta + \\
 & + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu) K_\alpha M^2 - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\beta) K_\alpha M K_\beta + \\
 & + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\beta) K_\alpha M p_\beta - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) K_\alpha M^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta)MK_\alpha K_\beta - Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta)MK_\alpha p_\beta + \\
 & +Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu)MK_\alpha M - Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\beta)MK_\alpha K_\beta + \\
 & +Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\beta)MK_\alpha p_\beta - Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^5)MK_\alpha M - \\
 & -Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta)Mq_\alpha K_\beta + Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta)Mq_\alpha p_\beta - \\
 & -Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu)Mq_\alpha M + Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\beta)Mq_\alpha K_\beta - \\
 & -Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\beta)Mq_\alpha p_\beta + Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^5)Mq_\alpha M + \\
 & +Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha)M^2K_\alpha - Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha)M^2p_\alpha + Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu)M^3 - \\
 & -Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\alpha)M^2K_\alpha + Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\alpha)M^2p_\alpha - Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5)M^3.
 \end{aligned}$$

Usando as eqs. (A.9), (A.11), (A.14), (A.16), (A.17), (A.19), (A.21) e (A.22), o traço se reduz a

$$\begin{aligned}
 & Tr[\gamma^5(\mathcal{K} + M)\gamma^\mu(\mathcal{K} - q' + M)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)(\mathcal{K} - p' + M)] = \\
 & = -4i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu}K_\alpha K_\beta M + 4i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu}K_\alpha q_\beta M - 4i\varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta}K_\alpha M K_\beta + 4i\varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta}K_\alpha M p_\beta - \\
 & -4i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}M K_\alpha K_\beta + 4i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}M K_\alpha p_\beta + 4i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}M q_\alpha K_\beta - 4i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}M q_\alpha p_\beta - \\
 & -4(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta})K_\alpha K_\beta M + \\
 & +4(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta})K_\alpha q_\beta M + \\
 & +4(g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta} - g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta} + g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu})K_\alpha M K_\beta - \\
 & -4(g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta} - g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta} + g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu})K_\alpha M p_\beta + \\
 & +4(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu})M K_\alpha K_\beta - \\
 & -4(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu})M K_\alpha p_\beta - \\
 & -4(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu})M q_\alpha K_\beta + \\
 & +4(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu})M q_\alpha p_\beta - 4g^{\mu\nu}M^3 = \\
 & = -4iM\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu}K_\alpha K_\beta - 4iM\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}q_\alpha p_\beta + \\
 & +4M(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta})K_\alpha K_\beta - 8Mg^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}K_\alpha p_\beta + \\
 & +4M(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu})q_\alpha p_\beta - 4M^3g^{\mu\nu} = \\
 & = -4iM\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}p_\alpha q_\beta + 4MK^\mu K^\nu + 4MK^2g^{\mu\nu} - 4MK^\nu K^\mu - 8MK^\mu p^\nu + \\
 & +4Mq^\mu p^\nu - 4Mp \cdot qg^{\mu\nu} + 4Mq^\nu p^\mu - 4M^3g^{\mu\nu} = 4iM\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}p^\alpha q^\beta + \\
 & +4MK^2g^{\mu\nu} - 8MK^\mu p^\nu + 4Mq^\mu p^\nu - 4Mp \cdot qg^{\mu\nu} + 4Mq^\nu p^\mu - 4M^3g^{\mu\nu},
 \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
 & Tr[\gamma^5(\mathcal{K} + M)\gamma^\mu(\mathcal{K} - q' + M)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)(\mathcal{K} - p' + M)] = \\
 & = 4iM\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}p^\alpha q^\beta + 4M(p^\mu q^\nu - 2p^\nu K^\mu + p^\nu q^\mu + K^2g^{\mu\nu} - \\
 & -p \cdot qg^{\mu\nu} - M^2g^{\mu\nu}).
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Agora, calculemos o segundo traço da eq. (C.1)

$$Tr[\gamma^5(-\mathcal{K} + p' + M)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)(-\mathcal{K} + q' + M)\gamma^\mu(-\mathcal{K} + M)] =$$

$$\begin{aligned}
 &= -Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma) K_\alpha K_\beta K_\gamma + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu) K_\alpha K_\beta M + \\
 &\quad + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma) K_\alpha q_\beta K_\gamma - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu) K_\alpha q_\beta M + \\
 &\quad + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\beta) K_\alpha K_\beta M - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\mu) M^2 K_\alpha + \\
 &+ Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma) K_\alpha K_\beta K_\gamma - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\beta \gamma^\mu) K_\alpha K_\beta M - \\
 &\quad - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma) K_\alpha q_\beta K_\gamma + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\beta \gamma^\mu) K_\alpha q_\beta M - \\
 &\quad - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\beta) K_\alpha M K_\beta + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\mu) K_\alpha M^2 + \\
 &\quad + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma) p_\alpha K_\beta K_\gamma - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu) p_\alpha K_\beta M - \\
 &\quad - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma) p_\alpha q_\beta K_\gamma + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu) p_\alpha q_\beta M - \\
 &\quad - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\beta) p_\alpha K_\beta M + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\mu) M^2 p_\alpha - \\
 &\quad - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma) p_\alpha K_\beta K_\gamma + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\beta \gamma^\mu) p_\alpha K_\beta M + \\
 &\quad + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma) p_\alpha q_\beta K_\gamma - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\beta \gamma^\mu) p_\alpha q_\beta M + \\
 &\quad + Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\beta) p_\alpha M K_\beta - Tr(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\mu) p_\alpha M^2 + \\
 &\quad + Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta) M K_\alpha K_\beta - Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu) M K_\alpha M - \\
 &\quad - Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta) M q_\alpha K_\beta + Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu) M q_\alpha M - \\
 &\quad - Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\alpha) M K_\alpha M + Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\mu) M^3 - \\
 &\quad - Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta) M K_\alpha K_\beta + Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu) M K_\alpha M + \\
 &\quad + Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta) M q_\alpha K_\beta - Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\mu) M q_\alpha M + \\
 &\quad + Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\alpha) M^2 K_\alpha - Tr(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\mu) M^3.
 \end{aligned}$$

Novamente, usando as eqs. (A.9), (A.11), (A.14), (A.16), (A.17), (A.19), (A.21) e (A.22), o traço se reduz a

$$\begin{aligned}
 &Tr [\gamma^5 (-\not{K} + \not{p} + M) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) (-\not{K} + \not{q} + M) \gamma^\mu (-\not{K} + M)] = \\
 &= -4i\varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} K_\alpha K_\beta M + 4i\varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} K_\alpha q_\beta M - 4i\varepsilon^{\alpha\nu\mu\beta} K_\alpha K_\beta M + 4i\varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} p_\alpha K_\beta M - \\
 &\quad - 4i\varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} p_\alpha q_\beta M + 4i\varepsilon^{\alpha\nu\mu\beta} p_\alpha K_\beta M - 4i\varepsilon^{\nu\alpha\mu\beta} M K_\alpha K_\beta + 4i\varepsilon^{\nu\alpha\mu\beta} M q_\alpha K_\beta - \\
 &\quad - 4(g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta}) K_\alpha K_\beta M + \\
 &\quad + 4(g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta}) K_\alpha q_\beta M - \\
 &\quad - 4(g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta} - g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta} + g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu}) K_\alpha M K_\beta + \\
 &\quad + 4(g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta}) p_\alpha K_\beta M - \\
 &\quad - 4(g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta}) p_\alpha q_\beta M + \\
 &\quad + 4(g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta} - g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta} + g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu}) p_\alpha M K_\beta + \\
 &\quad + 4(g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} - g^{\nu\mu} g^{\alpha\beta} + g^{\nu\beta} g^{\alpha\mu}) M K_\alpha K_\beta - \\
 &\quad - 4(g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} - g^{\nu\mu} g^{\alpha\beta} + g^{\nu\beta} g^{\alpha\mu}) M q_\alpha K_\beta + 4g^{\nu\mu} M^3 = \\
 &\quad = -4iM\varepsilon^{\nu\alpha\mu\beta} K_\alpha K_\beta - 4iM\varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} p_\alpha q_\beta - \\
 &\quad - 4M(g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} + g^{\nu\mu} g^{\alpha\beta} - g^{\nu\beta} g^{\alpha\mu}) K_\alpha K_\beta + 8Mg^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} p_\alpha K_\beta - \\
 &\quad - 4M(g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta}) p_\alpha q_\beta + 4M^3 g^{\mu\nu} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -4iM\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}p_\alpha q_\beta - 4MK^\nu K^\mu - 4MK^2g^{\mu\nu} + 4MK^\mu K^\nu + 8Mp^\nu K^\mu - \\
 &\quad -4Mp^\nu q^\mu + 4Mp \cdot qg^{\mu\nu} - 4Mp^\mu q^\nu + 4M^3g^{\mu\nu} = 4iM\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}p^\alpha q^\beta - \\
 &\quad -4MK^2g^{\mu\nu} + 8Mp^\nu K^\mu - 4Mp^\nu q^\mu + 4Mp \cdot qg^{\mu\nu} - 4Mp^\mu q^\nu + 4M^3g^{\mu\nu},
 \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
 &Tr [\gamma^5(-\not{K} + \not{p} + M)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)(-\not{K} + \not{q} + M)\gamma^\mu(-\not{K} + M)] = \\
 &\quad = 4iM\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}p^\alpha q^\beta - 4M(p^\mu q^\nu - 2p^\nu K^\mu + p^\nu q^\mu + K^2g^{\mu\nu} - \\
 &\quad \quad - p \cdot qg^{\mu\nu} - M^2g^{\mu\nu}).
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

Referências Bibliográficas

- [1] Franz Mandl, Graham Shaw, *Quantum Field Theory, 2nd Edition*, (John Wiley & Sons, 2010).
- [2] David Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, (John Wiley & Sons, 1987).
- [3] G. B. Arfken, H. J. Weber and F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*, (Academic Press, 2012).
- [4] M. O. C. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos*, (EDUSP, 2002).
- [5] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, (Springer, 1996).
- [6] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, (Addison-Wesley Publishing Company, 1995).
- [7] S. Pokorski, *Gauge Field Theories, 2nd Edition*, (Cambridge University Press, 2000).
- [8] Gordon Kane, *Modern Elementary Particle Physics: The Fundamental Particles and Forces?, Updated Edition*, (Addison-Wesley Publishing Company, 1994).
- [9] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, 1967).
- [10] Carlos J. L. Boavida Fernandes, Factores de Forma do Decaimento $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$ no Quadro do Modelo de Nambu e Jona-Lasinio, *Dissertação de Mestrado*, Universidade de Coimbra (1995).
- [11] Yuri Rodrigues Batista, Quebra Dinâmica da Simetria Quiral como Possível Mecanismo Gerador da Massa do Bóson de Higgs, *Dissertação de Mestrado*, UFMG (2012).
- [12] José Eloy Ottoni, Teorias de Calibre e Modelos de Unificação, *Dissertação de Mestrado*, UFMG (2002).
- [13] Heron Carlos de Godoy Caldas, Consequências da Simetria Quiral e Sua Quebra à Temperatura e Densidade Finitas, *Dissertação de Mestrado*, UFMG (1995).
- [14] André Luiz Mota, O Modelo de Nambu-Jona-Lasinio Como Uma Teoria Quântica de Campos, *Tese de Doutorado*, UFMG (1999).
- [15] S. P. Klevansky, The Nambu-Jona-Lasinio Model of Quantum Chromodynamics, *Reviews of Modern Physics* **64**, **3**, 649-708 (1992).

- [16] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I, *Physical Review* **122**, 345-358 (1961).
- [17] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II, *Physical Review* **124**, 246-254 (1961).
- [18] Stanley G. Brown and Sidney A. Bludman, Further Analysis of The Decay $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$, *Physical Review* **136**, **4B**, 1160-1163 (1964).
- [19] V. N. Bolotov, The Radiative Pion Decays: History, Present Situation and Possible Future Researches, Institute for Nuclear Research RAS.
- [20] Vicent Mateu and Jorge Portolés, Form Factors in The Radiative Pion Decay, arXiv:0706.1039v2 [hep-ph] (2007).
- [21] Rene Unterdorfer and Hannes Pichl, On The Radiative Pion Decay, arXiv:0801.2482v1 [hep-ph] (2008).
- [22] S. Weinberg, *Physica* **A**, **96**, 327 (1979).
- [23] J. Gasser and H. Leutwyler, *Annals of Physics* **158**, 142 (1984).
- [24] J. Gasser and H. Leutwyler, *Nuclear Physics* **B**, **250**, 465 (1985).
- [25] B. R. Holstein, *Physical Review* **D**, **33**, 3316 (1986).
- [26] J. Bijnens and P. Talavera, $\pi \rightarrow l\nu\gamma$ Form Factors at Two-loop, arXiv:hep-ph/9610269v2 (1997).
- [27] Particle Data Group, *Physical Review* **D**, **54**, 1 (1996).
- [28] W. Bertl, Form Factors for Radiative Pion and Kaon Decays, Paul Scherrer Institute (2009).
- [29] T. Das, V. S. Mathur, S. Okubo, Low-energy Theorem in The Radiative Decays of Charged Pions, *Physical Review Letters* **19**, **15**, 859-861 (1967).
- [30] Pablo Roig Garcés, Hadronic and Radiative Decays of The Tau Lepton, *PhD Thesis*, Valencia University (2010).