Universidade Federal de Minas Gerais

Identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas das álgebras de matrizes

Silvia Gonçalves Santos

Orientadora: Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Belo Horizonte, 2013

Silvia Gonçalves Santos

Identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas das álgebras de matrizes

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Belo Horizonte

2013

Agradecimentos

A Deus por caminhar ao meu lado em todos os momentos, não permitindo que eu desistisse e me dando forças para seguir em frente.

À minha mãe Lúcia, minha irmã Angélica e meu tio Adael, que me apoiaram de forma incondicional, conviveram com minha ausência e me ajudaram muito nessa caminhada. Sem vocês eu não conseguiria.

Ao meu pai Reginaldo, meu avô Geraldo e minha avó Lourdes, que não estão mais entre nós, mas sei que estão muito felizes por essa conquista.

Aos meus tios, tias, primos e primas pelo incentivo, pelas palavras de apoio e pela amizade.

À minha amiga Milene, grande responsável por eu ter feito o mestrado.

À minha orientadora Viviane Ribeiro Tomaz da Silva, pela competência, paciência com minhas limitações e dedicação. Grande exemplo de pesquisadora e ser humano a ser seguido. Muito obrigada por tudo!

Aos professores André Gimenez, Lucio Centrone e Csaba Schneider por aceitarem fazer parte da banca e pelas importantes observações e correções.

A todos os professores e funcionários da UFOP pelo aprendizado, crescimento e amadurecimento. Especialmente aos professores Dimas Belarmino (em nossos corações), Adilson Brandão e Antônio Rosa, por acreditarem em mim e me incentivarem a seguir com os estudos.

Aos amigos que fiz na UFOP e carregarei comigo sempre. Especialmente Eder Marinho, Wenderson Ferreira e Júlio César do Espírito Santos.

À professora Ana Cristina Vieira, pelos ensinamentos e pelo apoio.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFMG que certamente contribuíram para a minha formação. Um agradecimento especial as minhas amigas da secretaria, Andréa e Kelli, pelas palavras de carinho e pela amizade.

Aos amigos da Matemática, Amanda, Leonel, Luciana, Natália, Willian, Ceili, Luiza, Rafael, Alan, Lorena, Aislan, Daiane e Guilherme pelos muitos momentos juntos e por tornarem essa caminhada mais fácil.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos o meu muito obrigada!

Resumo

Seja F um corpo e denote por $\mathbb{Z}_n$ o grupo dos inteiros módulo n. Nesta dissertação, estudaremos a descrição de uma base finita para as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas da álgebra das matrizes $n \times n$ sobre F, quando $n \geq 2$. Métodos diferentes são empregados conforme a característica do corpo. Se característica de F é zero, estudaremos o artigo de Vasilovsky, sendo que uma das estratégias fundamentais é a redução do estudo das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas ao trabalho com polinômios multilineares. No caso em que F é um corpo infinito de característica qualquer, lidaremos com o artigo de Azevedo, precisando nos concentrar nos polinômios multi-homogêneos, o que torna o problema mais difícil, e técnicas como as matrizes genéricas são utilizadas.

Abstract

Let F be a field and denote by $\mathbb{Z}_n$ the group of integers modulo n. In this dissertation, we will study a description of a finite basis for the $\mathbb{Z}_n$-graded polynomial identities of the matrix algebra of order n over F, when $n \geq 2$. Different methods are employed according to the characteristic of the field. If the characteristic of F is zero, we will to study the paper of Vasilovsky, in which one of the main strategies is to reduce the study of the $\mathbb{Z}_n$-graded polynomial identities to work with multilinear polinomials. In the case where F is an infinite field of any characteristic, we will use the paper of Azevedo, focusing on the study of the multihomogeneous polynomials. This fact makes the problem more difficult, and techniques such as generic matrices are employed.

Sumário

Introdução

A **Teoria das PI-álgebras**, também chamada de **PI-Teoria**, estuda a classe das álgebras que satisfazem uma identidade polinomial, isto é, a classe das PI-álgebras. Dizemos que um polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em variáveis não comutativas é uma **identidade polinomial** para uma álgebra A, se f se anula quando avaliado em quaisquer elementos de A. Se existe uma identidade polinomial não nula para A, dizemos que esta álgebra é uma **PI-álgebra**. Por exemplo, se C é uma álgebra comutativa, então $[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade polinomial de C e portanto C é uma PI-álgebra. Outros exemplos interessantes são as álgebras nilpotentes de índice de nilpotência n, que claramente satisfazem identidades do tipo $x_1x_2 \cdots x_n$. Além disso, pode-se provar que a álgebra $M_2(F)$ das matrizes 2×2 sobre um corpo F, satisfaz a identidade $f(x_1, x_2, x_3) = \left[[x_1, x_2]^2, x_3\right]$. Temos ainda que a álgebra de Grassmann E de dimensão infinita satisfaz a identidade $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2], x_3]$. Assim, a classe das PI-álgebras é ampla e engloba as álgebras comutativas, álgebras de dimensão finita, álgebras nilpotentes, a álgebra de Grassmann, entre outras.

O desenvolvimento da Teoria das Identidades Polinomiais teve início por volta de 1930 pelo matemático Dehn (ver [5]), mas foi a partir de 1948 que essa teoria realmente se desenvolveu, após o artigo de Kaplansky (ver [10]), onde o autor nos mostra que toda PI-álgebra primitiva é uma álgebra simples e de dimensão finita. Em 1950, Amitsur-Levitzki (veja [2]) demonstraram que a álgebra $M_n(F)$ das matrizes $n \times n$ satisfaz a identidade **standard** de grau $2n$. Este resultado marcou o começo de uma nova abordagem à PI-teoria, que visa descrever as identidades de uma dada álgebra.

Em PI-teoria, descrever as identidades polinomiais para uma certa álgebra é, em geral, um grande desafio. Sendo A uma álgebra associativa, denotamos o conjunto das identidades polinomiais dessa álgebra por $Id(A)$ e este é um ideal da álgebra associativa livre $F\langle X\rangle$ fechado por qualquer endomorfismo desta álgebra. Ideais com esta propriedade são chamados **T-ideais**. Descrever as identidades de A significa encontrar um conjunto gerador para $Id(A)$ como T-ideal. Em 1950, W. Specht (ver [18]) levantou a seguinte questão: "Toda álgebra associativa sobre um corpo de característica zero possui uma base finita para suas identidades polinomiais?". Este problema ficou conhecido como Problema de Specht e, ao longo das próximas décadas, apenas resultados parciais foram obtidos, até que Kemer (ver [11]) deu uma resposta positiva para esse problema. Uma das principais ferramentas usadas por Kemer para resolver o Problema de Specht foram as **identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas**.

Mais geralmente, se G é um grupo abeliano aditivo, então uma álgebra A é **G-graduada** se pode ser escrita como soma direta de subespaços $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ de modo que, para quaisquer $g,h \in G$, temos $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(g+h)}$. No caso particular em que $G = \mathbb{Z}_2$, temos que $A = A^{(\bar{0})} \oplus A^{(\bar{1})}$ é denominada uma **superálgebra** ou **álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada**.

Um exemplo importante e que será utilizado no nosso trabalho são as $\mathbb{Z}_n$-graduações da álgebra $M_n(F)$. Dado $\bar{t} \in \mathbb{Z}_n$, seja $M_n(F)^{(\bar{t})}$ o subespaço de $M_n(F)$ gerado por todas as matrizes elementares E_{ij} tais que $\overline{j-i} = \bar{t}$. Assim, $M_n(F)^{(\bar{0})}$ consiste das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}, \qquad a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n} \in F$$

e, para $0 < t \leqslant n-1$, temos que $M_n(F)^{(\bar{t})}$ consiste das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,t+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2,t+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-t,n} \\ a_{n-t+1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $a_{1,t+1}, a_{2,t+2}, \ldots, a_{n-t,n}, a_{n-t+1,1}, \ldots, a_{n,t} \in F$. Note que $M_n(F) = \bigoplus_{\bar{t} \in \mathbb{Z}_n} M_n(F)^{(\bar{t})}$, e ainda, para $\bar{t}, \bar{u} \in \mathbb{Z}_n$, temos que $M_n(F)^{(\bar{t})} M_n(F)^{(\bar{u})} \subseteq M_n(F)^{(\bar{t}+\bar{u})}$. E, portanto, a decomposição acima define uma $\mathbb{Z}_n$-graduação da álgebra $M_n(F)$ que, para simplificar a notação, denotaremos por $\mathcal{M}_n$.

Se considerarmos a álgebra livre $F\langle X \rangle$ com $X = \bigcup_{\beta \in G} X^{(\beta)}$, podemos definir uma G-graduação para esta álgebra da seguinte maneira. Observe, primeiramente, que os monômios $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$, com $k = 0, 1, \ldots; x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \in X$, formam uma base de $F\langle X \rangle$ como espaço vetorial. Uma variável $x \in X$ tem **grau homogêneo** β, e denotamos $\alpha(x) = \beta$, se $x \in X^{(\beta)}$. O **grau homogêneo de um monômio** $m = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ tal que $x_{i_r} \in X$ é definido como $\alpha(m) := \alpha(x_{i_1}) + \alpha(x_{i_2}) + \ldots + \alpha(x_{i_k})$. Para $\beta \in G$, denote por $F\langle X \rangle^{(\beta)}$ o subespaço de $F\langle X \rangle$ gerado por todos os monômios que têm grau homogêneo β. Assim, $F\langle X \rangle = \bigoplus_{\beta \in G} F\langle X \rangle^{(\beta)}$ determina uma G-graduação em $F\langle X \rangle$ e esta álgebra com esta graduação será denotada por $F\langle X \rangle^{gr}$.

Um exemplo interessante de superálgebra é a álgebra de Grassmann E com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural, também denominada **graduação canônica**, e dada por $E = E^{(\bar{0})} \oplus E^{(\bar{1})}$, onde $E^{(\bar{0})}$ é o centro de E e $E^{(\bar{1})}$ a parte anticomutativa de E. Dada uma superálgebra $A = A^{(\bar{0})} \oplus A^{(\bar{1})}$, podemos construir, a partir da graduação canônica de E, uma outra superálgebra, denominada **envolvente de Grassmann de** A e dada por $G(A) := (A^{(\bar{0})} \otimes E^{(\bar{0})}) \oplus (A^{(\bar{1})} \otimes E^{(\bar{1})})$.

Vale mencionar que a teoria desenvolvida por Kemer na solução do problema de Specht se baseia em uma teoria estrutural de T-ideais e envolve o estudo de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas e as envolventes de Grassmann. Em particular, Kemer (ver [12]) provou que toda PI-álgebra associativa A sobre um corpo de característica zero é PI-equivalente à envolvente de Grassmann de uma superálgebra associativa finitamente gerada B e em [13], esse resultado foi simplificado ainda mais. Mais precisamente, mostrou-se que $Id(A) = Id(G(B))$ para alguma superálgebra associativa B de dimensão finita.

Além disso, em [12], Kemer estudou as importantes álgebras T**-primas**, que são álgebras cujos T-ideais são T-primos. Dizemos que um T-ideal I é T**-primo** se a inclusão $I_1 I_2 \subseteq I$, sendo I_1 e I_2 T-ideais, implicar em $I_1 \subseteq I$ ou $I_2 \subseteq I$. Kemer mostrou em seus trabalhos que os únicos T-ideais T-primos não triviais em característica zero são $Id(M_n(F))$, $Id(M_n(E))$ e $Id(M_{k,l}(E))$, onde E é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e $M_{k,l}(E)$ é a subálgebra de $M_{k+l}(E)$ formada pelas matrizes da forma $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$, onde $A \in M_{k\times k}(E^{(\bar{0})})$, $B \in M_{k\times l}(E^{(\bar{1})})$, $C \in M_{l\times k}(E^{(\bar{1})})$ e $D \in M_{l\times l}(E^{(\bar{0})})$.

Ao longo das décadas, surgiram vários trabalhos importantes no sentido de descrever as identidades polinomiais G-graduadas de algumas álgebras G-graduadas. Se $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ é uma álgebra G-graduada, dizemos que um polinômio G-graduado $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle^{gr}$ é uma **identidade G-graduada de** A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para todo $a_1 \in A^{(\alpha(x_1))}, \ldots, a_n \in A^{(\alpha(x_n))}$. Neste caso, escrevemos simplesmente $f \equiv 0$ em A. O conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas da álgebra G-graduada A é denotado por $Id(A)^{gr}$ e este é um T_G-ideal, isto é, um ideal de $F\langle X\rangle^{gr}$ fechado por qualquer endomorfismo G-graduado de $F\langle X\rangle^{gr}$. Vale mencionar que, se A é uma PI-álgebra associativa sobre um corpo de característica zero e A é G-graduada por um grupo G finito, então $Id(A)^{gr}$ é finitamente gerado como T_G-ideal (veja [1] e [19]).

Em 1992, Di Vincenzo [8] provou que, sobre um corpo de característica zero, todas as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(E)$ seguem de $y_1y_2-y_2y_1$ e de $z_1z_2z_3+z_3z_2z_1$, onde $y_1, y_2 \in X^{(\bar{0})}$ e $z_1, z_2, z_3 \in X^{(\bar{1})}$. Para isto, ele trabalhou com polinômios multilineares e demonstrou primeiramente que todas as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $\mathcal{M}_2$ seguem de $y_1y_2 - y_2y_1$ e de $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$. Vale mencionar que, no caso mais geral em que o corpo é infinito e tem característica qualquer, apesar de não podermos nos limitar aos polinômios multilineares, podemos nos concentrar nos polinômios multi-homogêneos. Esta estratégia foi usada por Azevedo e Koshlukov [14] em 2002 para provar que o resultado de Di Vincenzo sobre as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $\mathcal{M}_2$ também é válido para corpos infinitos de qualquer característica. Para provar esse fato, Azevedo e Koshlukov utilizaram uma ferramenta importante, que são as matrizes genéricas $\mathbb{Z}_n$-graduadas.

Lembramos ao leitor que, em geral, as **matrizes genéricas $\mathbb{Z}_n$-graduadas** são matrizes $n \times n$ da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_i^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & y_i^{(2)} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_i^{(n-t)} \\ y_i^{(n-t+1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & y_i^{(n)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $y_i^{(k)}$, com $1 \leq k \leq n$ e $i \geq 1$, são variáveis comutativas. Denotaremos por R a álgebra gerada pelas matrizes genéricas $\mathbb{Z}_n$-graduadas $n \times n$. O ponto chave da demonstração de Azevedo e Koshlukov mencionada acima é usar, no caso particular em que $n = 2$, o fato de existir um isomorfismo entre $\frac{F\langle X\rangle^{gr}}{Id(\mathcal{M}_n)^{gr}}$ e R. Desta forma, as manipulações em $\frac{F\langle X\rangle^{gr}}{Id(\mathcal{M}_n)^{gr}}$ podem ser feitas em R.

Como foi visto anteriormente, sobre um corpo de característica zero, $Id(M_n(F))$ é um ideal T-primo, que aparece com destaque na classificação de Kemer, portanto é muito importante descrever estas identidades. Em 1973, Razmyslov [17] encontrou uma base, com nove elementos, para as identidades polinomiais (ordinárias) de $M_2(F)$ sobre um corpo de característica zero. Em 1981, Drensky (ver [6]) melhorou esse resultado encontrando uma base com duas identidades. No entanto, até o presente momento, não se tem uma descrição completa de $Id(M_n(F))$ no caso em que $n \geq 3$. Assim, considerar $M_n(F)$ munida de sua $\mathbb{Z}_n$-graduação natural, que estamos denotando por $\mathcal{M}_n$, e estudar $Id(\mathcal{M}_n)^{gr}$ para $n \geq 3$ é extremamente relevante, uma vez que a compreensão do seu comportamento auxilia no entendimento das identidades ordinárias de $M_n(F)$.

Motivado por Shestakov, Vasilovsky estudou o problema de encontrar uma base finita explícita para as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $\mathcal{M}_n$ no caso em que $n \geq 2$. Vale mencionar que, assim como Di Vincenzo havia feito no caso em que $n = 2$, Vasilovsky (ver [21]) trabalhou com polinômios multilineares para descrever, no caso $n \geq 2$, essas identidades sobre um corpo de característica zero. Por outro lado, Azevedo (ver [3]) trabalhou com polinômios multi-homogêneos, para descrever, no caso $n \geq 2$, essas identidades sobre corpos infinitos de característica qualquer. Vale destacar que esta dissertação tem como foco os artigos [21] e [3] e está estruturada da forma que descreveremos a seguir.

No Capítulo 1, apresentaremos os conceitos básicos, assumindo que o leitor tem conhecimento de álgebra linear básica, espaços vetoriais e conceitos relacionados. Iniciamos com a definição de álgebras e resultados relacionados e apresentamos a definição de álgebra associativa livre, e outros exemplos relevantes. Em seguida, trataremos das identidades polinomiais ordinárias, além do conceito de T-ideais e, por fim, falaremos dos polinômios multilineares e polinômios multi-homogêneos e suas propriedades.

No Capítulo 2, consideramos F um corpo e G um grupo abeliano aditivo. Começamos definindo uma álgebra G-graduada, daremos alguns exemplos, entre eles nosso principal objeto de estudo desta dissertação, as álgebras $\mathcal{M}_n$. Em seguida, falaremos das identidades polinomiais G-graduadas.

O Capítulo 3 trata de matrizes genéricas tanto no caso ordinário como no caso graduado. Em ambos os casos veremos definições, exemplos e teoremas importantes sobre matrizes genéricas que ajudarão no desenvolvimento do Capítulo 4.

No Capítulo 4, principal capítulo da nossa dissertação, faremos um estudo cuidadoso das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $\mathcal{M}_n$ para $n \geq 2$. Apresentaremos os resultados supracitados de Vasilovsky e de Azevedo, que trabalham, a partir de diferentes métodos, com os casos em que F é um corpo de característica zero e F é um corpo infinito de característica arbitrária, respectivamente.

A dissertação termina com as considerações finais, nas quais apresentamos os resultados de [20], [4], [15]. Mais precisamente observamos que, além da $\mathbb{Z}_n$-graduação $\mathcal{M}_n$, a álgebra $M_n(F)$ possui uma $\mathbb{Z}$-graduação natural. De modo análogo ao que ocorreu no caso $\mathbb{Z}_n$-graduado, Vasilovsky ([20]) e Azevedo ([4]) estudaram as identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas de $M_n(F)$ quando a característica do corpo F é zero e quando o corpo F é infinito de característica qualquer, respectivamente. É interessante ainda considerar a álgebra $UT_n(F)$ das matrizes triangulares superiores de ordem n, com sua $\mathbb{Z}_n$-graduação induzida de $M_n(F)$. A descrição das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $UT_n(F)$ foi feita por Koshlukov e Valenti ([15]), que trabalharam sobre um corpo F infinito de característica qualquer. Com a apresentação destes resultados finalizamos nossa dissertação.

Capítulo 1

PI-álgebras

Nesse capítulo, apresentaremos alguns resultados gerais que ajudarão a compreender melhor o texto. Além disso, desejamos trabalhar com a PI-teoria, e para isso, definiremos PI-álgebra, alguns resultados importantes e muitos exemplos. Veremos também algumas propriedades de polinômios multilineares e multi-homogêneos. Ao longo deste capítulo, F denotará um corpo.

1.1 Álgebras

Nesta seção, apresentaremos os conceitos de álgebra, subálgebra, homomorfismo de álgebra e álgebras livres. Apresentaremos também alguns exemplos relevantes.

Definição 1.1.1. *Uma F-**álgebra** (**álgebra sobre** F ou simplesmente **álgebra**) é um par $(A, *)$, onde A é um espaço vetorial e $*$ é uma operação binária em A, $* : A \times A \to A$, que satisfaz*

(i) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

(ii) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

(iii) $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$,

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in F$.

Na definição acima, a operação $*$ é chamada multiplicação. Para simplificar a notação, vamos denotar a F-álgebra $(A, *)$ por A, e escreveremos ab em vez de $a * b$, para $a, b \in A$.

Um subconjunto β **é uma base da álgebra** A, se é uma base de A como espaço vetorial. Neste caso, definimos a **dimensão** da álgebra A como sendo a dimensão do espaço vetorial A.

Definição 1.1.2. *Dizemos que uma álgebra A é:*

(i) ***associativa*** *se $(ab)c = a(bc)$;*

(ii) ***comutativa*** *se $ab = ba$;*

(iii) ***unitária*** *se o produto possui elemento neutro, isto é, se existe um elemento $1_A \in A$ tal que*

$$1_A a = a 1_A = a,$$

para quaisquer $a, b, c \in A$.

No texto trabalharemos com álgebras associativas e unitárias.

Seja A é uma álgebra associativa. Definimos o **comutador de peso 2 de** A por

$$[a, b] = ab - ba, \ a, b \in A, \tag{1.1}$$

e, de modo geral, definimos o **comutador de peso** $n \geq 3$ **de** A por

$$[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n], \text{ com } a_i \in A. \tag{1.2}$$

Vejamos alguns exemplos de álgebras.

Exemplo 1.1.3. ***(Álgebra das Matrizes)*** *Para $n \in \mathbb{N}$, o espaço vetorial $M_n(F)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em F, munido da multiplicação usual de matrizes, é uma álgebra, cuja unidade é a matriz identidade I_n. Destacamos nesta álgebra as matrizes elementares onde, para $1 \leq i, j \leq n$, E_{ij} é a matriz cuja única entrada não nula é 1 e está situada na i-ésima linha e j-ésima coluna. O produto dessas matrizes é dado por*

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$$

com

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & se \;\; j \neq k \\ 1, & se \;\; j = k. \end{cases}$$

As matrizes elementares formam uma base de $M_n(F)$ como espaço vetorial.

Exemplo 1.1.4. *Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, \ldots\}$ e F um corpo de característica diferente de dois. Definimos a* ***álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior)*** *de V, denotada por E, como sendo a álgebra com base*

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} | i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k \geq 1\}$$

e que tem o produto definido pela relação

$$e_ie_j = -e_je_i, \; para \; quaisquer \; i, j \in \mathbb{N}.$$

Definiremos em E os seguintes subespaços vetoriais:

(i) *$E^{(\bar{0})}$, gerado pelo conjunto $\{1, e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m} | m \; par\}$;*

(ii) *$E^{(\bar{1})}$, gerado pelo conjunto $\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m} | m \; ímpar\}$.*

Claramente, $E = E^{(\bar{0})} \oplus E^{(\bar{1})}$ como espaço vetorial. Como $e_ie_j = -e_je_i$, temos que

$$(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m})(e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_k})(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m}),$$

para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$, e assim, $ax = xa$ para quaisquer $a \in E^{(0)}$, $x \in E$. Assim, $E^{(\bar{0})}$ está contido no centro de E, $Z(E)$. Mostra-se facilmente que o centro de E está contido em $E^{(\bar{0})}$ e, com isso, temos que $E^{(\bar{0})} = Z(E)$. E ainda, $bc = -cb$ para quaisquer $b, c \in E^{(\bar{1})}$.

Exemplo 1.1.5. *O espaço vetorial $F[X]$ dos polinômios na variável x com coeficientes em F, munido do produto usual de polinômios, é uma álgebra comutativa.*

Apresentaremos agora os conceitos de subálgebra e de ideal bilateral.

Definição 1.1.6. *Seja A uma álgebra. Então,*

(i) *Um subespaço vetorial B de A é uma* ***subálgebra*** *de A se $1 \in B$ e B é fechado para multiplicação;*

(ii) *Um subespaço vetorial I de A é um* ***ideal bilateral*** *de A se $AI \subseteq I$ e $IA \subseteq I$.*

No texto, sempre que nos referirmos a ideais, estaremos, a menos de menção em contrário, nos referindo a ideais bilaterais.

Exemplo 1.1.7. *O conjunto das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em F, $UT_n(F)$, é uma subálgebra de $M_n(F)$.*

Seja A uma álgebra. Então

(i) A é **nilpotente** se existe um inteiro fixo $n \geq 1$ tal que o produto de quaisquer n elementos de A é igual a zero. O menor número n com essa propriedade é o **índice de nilpotência** da álgebra A.

(ii) A é **nil** se, para cada $a \in A$, existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $a^n = 0$. Uma álgebra A é uma **nil álgebra de índice limitado** n se $a^n = 0$, para todo $a \in A$.

Exemplo 1.1.8. *Considere a F-álgebra das matrizes triangulares estritamente superiores de ordem n, cuja multiplicação é o produto usual de matrizes. Esta álgebra é uma álgebra nilpotente com índice de nilpotência n.*

De fato, sendo A uma matriz triangular estritamente superior, então podemos escrever A como

$$A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} E_{ij} = \sum_{2 \leq i+1 \leq j \leq n} \alpha_{ij} E_{ij}$$

onde $\alpha_{ij} \in F$. Desde que $j \geq i+1$ e $l \geq k+1$, para $j = k$ teremos $l \geq i+2$. Assim, como $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, então

$$A^2 = \sum_{3 \leq i+2 \leq j \leq n} \beta_{ij} E_{ij}$$

onde $\beta_{ij} \in F$. Repetindo esse mesmo processo, segue que

$$A^m = \sum_{m+1 \leq i+m \leq j \leq n} \gamma_{ij} E_{ij}$$

onde $\gamma_{ij} \in F$. Logo, para $m \geq n$, temos que $A^m = \{0\}$, concluindo assim o exemplo.

Agora, vamos definir homomorfismos de álgebras.

Definição 1.1.9. *Sejam A e B duas F-álgebras. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : A \to B$ é um* ***homomorfismo de álgebras*** *se $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, para todos os elementos $a, b \in A$.*

O conjunto $\ker\varphi := \{a \in A | \varphi(a) = 0\}$ é chamado **núcleo de** φ e o conjunto $\mathrm{Im}\varphi := \{\varphi(a) | a \in A\}$ é dito **imagem de** φ. Diremos que um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \to B$ é um **isomorfismo**, se ele for bijetivo.

Considere uma álgebra A e um ideal I de A.

Definição 1.1.10. *Sejam $a, b \in A$. Dizemos que a* ***é congruente a*** *b* ***módulo I****, e escreveremos $a \equiv_I b$, se $a - b \in I$.*

A congruência é uma relação de equivalência e a classe de equivalência de a é o conjunto $\{b \in A | a \equiv_I b\}$ e será denotada por $\overline{a}$ e também por $a + I$. O conjunto das classes de equivalência será denotado por A/I.

Definição 1.1.11. *Sejam A uma álgebra e I um ideal. Considere as seguintes operações em A/I:*

$$\lambda(a + I) = \lambda a + I;$$

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I;$$

$$(a + I)(b + I) = ab + I,$$

para $a, b \in A$, $\lambda \in F$. Estas operações independem da escolha dos representantes das classes, portanto, estão bem definidas. Temos ainda que A/I com estas operações é uma álgebra, a ***álgebra quociente de*** *A* ***por*** *I.*

Exemplo 1.1.12. *Dado $n \geq 2$, $\mathbb{Z}_n$ é a álgebra quociente de $\mathbb{Z}$ por $n\mathbb{Z}$.*

Uma vez que definimos os principais conceitos de álgebra, enunciaremos o clássico Teorema de Isomorfismos de Álgebras, válido também para grupos, espaços vetoriais e anéis.

Teorema 1.1.13. *Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de álgebras. Então $\ker(\varphi)$ é um ideal bilateral de A e a álgebra $A/\ker(\varphi)$ é isomorfa a $\mathrm{Im}(\varphi)$.*

A demonstração desse teorema é essencialmente a mesma do caso de anéis, tomando-se cuidado em verificar que o isomorfismo de anéis, nesse caso, também preserva a multiplicação por escalar.

Definiremos agora álgebras livres em uma classe de álgebras e construiremos a álgebra livre na classe das álgebras associativas com unidade. Vale lembrar que os conceitos básicos na PI-teoria são definidos nestas álgebras.

Definição 1.1.14. *Seja $\mathcal{B}$ uma classe de álgebras. Dizemos que uma álgebra $B \in \mathcal{B}$ é **livre na classe** $\mathcal{B}$ se existe $X \subseteq B$ tal que X gera B e, para cada álgebra $A \in \mathcal{B}$ e cada aplicação $h : X \to A$, existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi : B \to A$ estendendo h. Nestas condições, dizemos que B é **livremente gerada por** X.*

Vamos agora construir um importante exemplo de álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas com unidade.

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto não vazio e enumerável de variáveis não comutativas. Definimos uma **palavra** em X como sendo uma sequência finita $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $x_{i_j} \in X$. Definimos o **comprimento** da palavra $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ como sendo n. Quando $n = 0$, denominamos essa palavra de **palavra vazia** e a denotamos por 1. Dizemos que duas palavras $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ e $x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$ são iguais se $n = m$ e se $i_1 = j_1,\ i_2 = j_2,\ \ldots\ , i_n = j_n$. Seja $F\langle X\rangle$ o espaço vetorial cuja base é formada por todas as palavras de X, incluindo o 1. O produto de um escalar em F por uma palavra é chamado **monômio**. O produto de dois monômios é dado por justaposição. Assim, se $\alpha x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ e $\beta x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$ são dois monômios em $F\langle X\rangle$, o produto destes é dado por $\alpha\beta x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$. Os elementos de $F\langle X\rangle$ são somas formais desses monômios, e recebem o nome de **polinômios**. Observe que X gera $F\langle X\rangle$ como álgebra e que $F\langle X\rangle$ é uma álgebra associativa com unidade.

Proposição 1.1.15. *A álgebra $F\langle X\rangle$ é livre na classe de todas as álgebras associativas com unidade.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ a classe das álgebras associativas com unidade. Então $F\langle X\rangle$ pertence a $\mathcal{B}$ e X gera $F\langle X\rangle$ como álgebra. Para cada $A \in \mathcal{B}$ e para cada aplicação $h : X \to A$, temos que existem $a_i \in A$ tal que $h(x_i) = a_i$, para $i \in \mathbb{N}$. Então existe uma única aplicação linear $\varphi_h : F\langle X\rangle \to A$ tal que $\varphi_h(1) = 1_A$ e $\varphi_h(x_{i_1}\cdots x_{i_n}) = a_{i_1}\cdots a_{i_n}$. Temos que φ_h é um homomorfismo de álgebras e é o único que satisfaz $\varphi_h|_X = h$. Portanto $F\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade. $\square$

1.2 Identidades polinomiais

Neste capítulo estudaremos as identidades polinomiais ordinárias. As identidades polinomiais graduadas serão abordadas no Capítulo 2.

Definição 1.2.1. *Um polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é uma **identidade polinomial** para uma álgebra A se*

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0,$$

para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$. Adotaremos a notação $f \equiv 0$ em A.

O polinômio nulo $f = 0$ é sempre uma identidade polinomial para qualquer álgebra A e é chamado de **identidade polinomial trivial de A**. Desejamos, sobretudo, estudar álgebras que possuem identidades polinomiais não triviais. Assim, consideremos a seguinte definição.

Definição 1.2.2. *Se uma álgebra A satisfaz uma identidade polinomial não trivial, então A é dita uma **PI-álgebra** (ou **álgebra com identidade polinomial**).*

Vejamos alguns exemplos de PI-álgebras.

Exemplo 1.2.3. *Se A é uma álgebra comutativa, então $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é uma identidade polinomial de A.*

Exemplo 1.2.4. *Toda álgebra associativa nilpotente A é uma PI-álgebra, pois se n é o índice de nilpotência de A, então A satisfaz a identidade $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$.*

Exemplo 1.2.5. *Toda álgebra nil de índice limitado n é uma PI-álgebra, pois satisfaz a identidade $f(x_1) = x_1^n$.*

Exemplo 1.2.6. *A álgebra $UT_n(F)$ é uma PI-álgebra, pois satisfaz a identidade $f(x_1, \ldots x_{2n}) = [x_1, x_2]\cdots[x_{2n-1}, x_{2n}]$. Isto decorre de duas observações importantes. A* *primeira é que o comutador de duas matrizes triangulares superiores é uma matriz triangular estritamente superior. A outra observação é que, conforme mencionamos no Exemplo 1.1.8, a álgebra das matrizes triangulares estritamente superiores $n \times n$, é nilpotente, com índice de nilpotência n. Então, se $A_1, A_2, \ldots, A_{2n} \in UT_n(F)$, temos*

$$[A_1, A_2] \cdots [A_{2n-1}, A_{2n}] = 0,$$

concluindo o nosso exemplo.

Exemplo 1.2.7. *Considere o polinômio*

$$St_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo simétrico de grau n que permuta os símbolos $1, 2, \ldots, n$ e $(-1)^{\sigma}$ é o sinal da permutação σ. Esse polinômio é chamado de ***polinômio standard de grau*** *n.*

Por exemplo, para $n = 2$, $St_2(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1 = [x_1, x_2]$. O ***Teorema de Amitsur-Levitzki*** *afirma que $St_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ é uma identidade polinomial para a álgebra das matrizes $M_n(F)$. A prova desse teorema pode ser vista em [2].*

Exemplo 1.2.8. *A álgebra $M_2(F)$ das matrizes 2×2 sobre F, satisfaz a identidade $f(x_1, x_2, x_3) = \left[[x_1, x_2]^2, x_3\right]$. De fato, se $A \in M_2(F)$, então o polinômio característico de A é dado por $\lambda^2 + \ tr(A)\lambda + \ det(A)$, onde tr(A) e det(A) são o traço e o determinante da matriz A, respectivamente. Por outro lado, se $A, B \in M_2(F)$, então $tr([A, B]) = 0$. Diante dessas duas informações, temos que $[A, B]^2 = - \ det[A, B]\, I_2$, onde I_2 é a matriz identidade 2×2. Uma vez que I_2 comuta com todas as matrizes 2×2, concluímos o resultado.*

Exemplo 1.2.9. *A álgebra de Grassmann E definida no Exemplo 1.1.4 satisfaz a identidade*

$$f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2], x_3].$$

Como $E^{(\bar{0})} = Z(E)$, para verificar que E satisfaz f, basta mostrar que se $a, b \in E$, então $[a, b] \in E^{(\bar{0})}$. Agora, se a ou b pertencem a $E^{(\bar{0})}$, então $[a, b] = 0 \in E^{(\bar{0})}$. Se $a, b \in E^{(\bar{1})}$, então ab e ba têm ambos comprimento par e, portanto, $[a, b] \in E^{(\bar{0})}$. Desde que $E = E^{(\bar{0})} \oplus E^{(\bar{1})}$, segue o resultado.

Em geral, estamos interessados em estudar o conjunto de todas as identidades de A, para isso, considere a definição abaixo.

Definição 1.2.10. *Dada uma álgebra A, definimos o conjunto de todas as identidades polinomiais de A por*

$$Id(A) = \{f \in F\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \quad em \quad A\}.$$

Denote por $\mathrm{End}(F\langle X\rangle)$ o conjunto de todos os endomorfismos φ de $F\langle X\rangle$. Note que, se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Id(A)$ e $\varphi \in \mathrm{End}(F\langle X\rangle)$, então,

$$\varphi(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)).$$

Como $\varphi(x_k) \in F\langle X\rangle$, para todo $1 \leq k \leq n$, e $f \in Id(A)$, segue imediatamente que $f(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)) \in Id(A)$.

Definição 1.2.11. *Um ideal I de $F\langle X\rangle$ é um **T-ideal**, se é fechado sob todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$, em outras palavras, I é um T-ideal se $\varphi(I) \subseteq I$, para todo $\varphi \in \mathrm{End}(F\langle X\rangle)$.*

Logo, do que vimos acima, temos que $Id(A)$ é um T-ideal, denominado **T-ideal de A**. Reciprocamente, dado um T-ideal I, existe uma álgebra B tal que $I = Id(B)$, basta considerar a álgebra $B = F\langle X\rangle / I$.

Definição 1.2.12. *Dado um subconjunto $S \subseteq F\langle X\rangle$, o **$T$-ideal gerado por** S, denotado como $\langle S\rangle_T$, é o conjunto*

$$\langle S\rangle_T := \mathrm{span}_F\{\omega_1\varphi(f)\omega_2 | f \in S,\ \varphi \in \mathrm{End}(F\langle X\rangle),\ \omega_1, \omega_2 \in F\langle X\rangle\}.$$

Exemplo 1.2.13. *Se A é uma álgebra comutativa, então*

$$Id(A) = \langle [x_1, x_2]\rangle_T.$$

Exemplo 1.2.14. *Se F é um corpo infinito de característica diferente de 2, então (veja em [16] e [9])*

$$Id(E) = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle_T,$$

onde E é a álgebra de Grasmmann definida no Exemplo 1.1.4.

Exemplo 1.2.15. *Razmyslov em [17] encontrou uma base, com nove elementos, para as identidades polinomiais de $M_2(F)$ sobre um corpo de característica 0. Drensky, em [6], refinou esse resultado e provou que*

$$Id(M_2(F)) = \left\langle St_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \left[[x_1, x_2]^2, x_3\right] \right\rangle_T .$$

Definição 1.2.16. *Seja S um conjunto de polinômios em $F\langle X\rangle$ e $f \in F\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma* ***consequência dos polinômios em*** *S, se $f \in \langle S\rangle_T$, o T-ideal gerado pelo conjunto S.*

Definição 1.2.17. *Dois conjuntos de polinômios são* ***equivalentes*** *se geram o mesmo T-ideal.*

1.3 Polinômios multilineares e multi-homogêneos

Nesta seção, definiremos dois tipos de polinômios que serão essenciais nos próximos capítulos. Enunciaremos e demonstraremos alguns resultados importantes.

Definição 1.3.1. *Considere os elementos $u = \alpha x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}$ e $f = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ de $F\langle X\rangle$.*

(i) *O* ***grau do monômio*** *u, deg u, é o comprimento da palavra u, no nosso caso, deg $u = m$;*

(ii) *O* ***grau do monômio*** *u* ***em*** *x_i, $deg_{x_i}u$, é o número de ocorrências de x_i em u;*

(iii) *O* ***grau do polinômio*** *f, deg f, é o maior grau entre os monômios de f;*

(iv) *O* ***grau de*** *f* ***em*** *x_i, $deg_{x_i}f$, é o maior valor de $deg_{x_i}u$, onde u é um monômio de f.*

Exemplo 1.3.2. *Seja $f = f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 x_1 x_3 x_2 + x_1 x_3 - x_3 x_2^3 x_1^2 x_2$. Então*

$$deg_{x_1}f = 2, \qquad deg_{x_2}f = 4, \qquad deg_{x_3}f = 1.$$

Definição 1.3.3. *Um polinômio f é* ***homogêneo na variável*** *x_i, se x_i aparece com o mesmo grau em todos os monômios de f. Se f é homogêneo em todas as suas variáveis, dizemos que f é* ***multi-homogêneo****.*

Exemplo 1.3.4. *O polinômio* $f = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_2x_1x_2x_3 - x_2^2x_3x_1 + 2x_1x_2x_3x_2$ *é multi-homogêneo, enquanto o polinômio* $g = g(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2^2x_3^4 - x_1x_3x_1x_2x_3^3$ *é homogêneo apenas na variável* x_3*.*

Se $m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ é um monômio de $F\langle X\rangle$, definimos o **multigrau de** m pela k-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, onde $a_i = deg_{x_i}m$. A soma de todos os monômios de $f \in F\langle X\rangle$ com o mesmo multigrau é chamada **componente multi-homogênea de** f. Observemos que $f \in F\langle X\rangle$ é multi-homogêneo se, e somente se, possui uma única componente multi-homogênea.

Exemplo 1.3.5. *Considere o polinômio* $f(x_1, x_2, x_3) = x_2x_1^2x_3x_2 + x_2x_3x_2 + x_2^2x_3 \in F\langle X\rangle$*.* f *possui duas componentes multi-homogêneas, a saber,* $x_2x_1^2x_3x_2$ *e* $x_2x_3x_2 + x_2^2x_3$*, onde a primeira componente tem multigrau* $(2, 2, 1)$ *e a segunda tem multigrau* $(0, 2, 1)$*.*

Um resultado muito importante é o teorema a seguir. Ele nos diz que se F é um corpo infinito e queremos descrever $Id(A)$, então podemos nos ater apenas aos seus polinômios multi-homogêneos.

Teorema 1.3.6. *Seja* F *um corpo infinito. Se* $f \equiv 0$ *é uma identidade polinomial para a álgebra* A*, então toda componente multi-homogênea de* f *ainda é uma identidade polinomial para* A*.*

Demonstração. Sejam $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in Id(A)$ e $n = deg_{x_1}f$. Para cada $0 \leq i \leq n$, consideremos $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ como sendo a soma de todos os monômios que têm grau i em x_1. Então, $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$. Queremos mostrar que $f_i \in Id(A)$, $0 \leq i \leq n$. Como F é infinito, podemos escolher $n+1$ elementos distintos $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de F e assim, para cada $0 \leq j \leq n$, temos

$$g_j = f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_k) = f_0 + \alpha_j f_1 + \alpha_j^2 f_2 + \cdots + \alpha_j^n f_n. \tag{1.3}$$

Como $f \equiv 0$ em A, então $g_j \equiv 0$ em A. Assim, para cada $a_1, \ldots, a_k \in A$, denotando $\widetilde{f_i} = f_i(a_1, \ldots, a_k)$, segue de (1.3) que $\widetilde{f_0} + \alpha_j\widetilde{f_1} + \cdots + \alpha_j^n\widetilde{f_n} = 0$, para todo $0 \leq j \leq n$.

Logo,

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{f}_0 \\ \widetilde{f}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para avaliar se esse sistema homogêneo tem solução não trivial, basta verificar o que ocorre com o determinante da matriz à esquerda que é diferente de zero; já que essa matriz é uma matriz de Vandermonde, com os α_i's todos distintos. Assim essa matriz é invertível. Com isso, concluímos que $\widetilde{f}_i = 0$, para todo $0 \leq i \leq n$, e assim, $f_0, f_1, \ldots, f_n$ são identidades polinomiais para a álgebra A.

Repetindo esse mesmo processo para $x_2, x_3, \ldots, x_k$, concluímos a demonstração desse teorema. $\square$

No caso em que F tem característica zero, podemos trabalhar com polinômios mais simples.

Definição 1.3.7. *Um **polinômio linear em** x_i é um polinômio de grau 1 em x_i. Se um polinômio é linear em cada variável que ocorre em f, dizemos que esse polinômio é **multilinear**.*

Exemplo 1.3.8. *O polinômio $f = f(x_1, x_2, x_3) = 5x_2x_3x_1 + x_3x_1x_2 - x_1x_3x_2$ é multilinear, já o polinômio $f = f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2x_1x_3x_2 + x_1x_3 - x_3x_2^3x_1^2x_2$ é linear apenas na variável x_3.*

É importante observar que todo polinômio multilinear é multi-homogêneo. E ainda, $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in F\langle X\rangle$ é multilinear se é multi-homogêneo com multigrau $\underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{k \text{ vezes}}$, e, neste caso,

$$f = \sum_{\sigma \in S_k} a_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)},$$

onde $a_\sigma \in F$.

Observação 1.3.9. *Se $f = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ é um polinômio multilinear em uma variável, por exemplo x_1, então*

$$f\left(\sum \alpha_i y_i, x_2, \ldots, x_k\right) = \sum \alpha_i f(y_i, x_2, \ldots, x_k),$$

para todo $\alpha_i \in F$, $y_i \in F\langle X\rangle$.

Observação 1.3.10. *Seja A uma F-álgebra gerada, como espaço vetorial, pelo conjunto B sobre F. Se o polinômio multilinear f se anula em B, então f é uma identidade polinomial para A.*

De fato, sejam $a_1 = \sum \alpha_{1i}u_i, \ldots, a_n = \sum \alpha_{ni}u_i$ elementos de A, com $u_i's \in B$. Temos que $f(a_1, \ldots, a_n) = f\left(\sum \alpha_{1i}u_i, \ldots, \sum \alpha_{ni}u_i\right)$. Como f é multilinear, pela Observação 1.3.9, segue que $f(a_1, \ldots, a_n) = \sum \alpha_{1i_1} \cdots \alpha_{ni_n} \underbrace{f(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n})}_{0} = 0$.

Observação 1.3.11. *Seja $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in F\langle X\rangle$ um polinômio multi-homogêneo de grau n em x_1. Para y_1 e y_2 variáveis distintas pertencentes a $X - \{x_1, \ldots, x_k\}$, consideremos o seguinte polinômio*

$$h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_k) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_k) - f(y_1, x_2, \ldots, x_k) - f(y_2, x_2, \ldots, x_k).$$

*Claramente, se f é uma identidade polinomial para A, então o polinômio h também o é. E ainda, $deg_{x_i}h = deg_{x_i}f$, $2 \leq i \leq k$, e o grau de h nas variáveis y_1 e y_2 é menor que o grau de h em x_1. Pode-se mostrar que $h \neq 0$ se a característica de F é zero. Podemos repetir esse processo até que a primeira variável tenha grau 1. Se fizermos isso em todas as variáveis envolvidas neste processo, obtemos um polinômio multilinear. Esse processo é chamado de **multilinearização do polinômio** f.*

O próximo exemplo ilustra essa observação.

Exemplo 1.3.12. *Considere o polinômio $f(x_1) = x_1^3$. Observe que f é multi-homogêneo de grau 3 em x_1. Sejam y_1 e y_2 variáveis em X. Então, tomando h como*

$$h(y_1, y_2) = f(y_1 + y_2) - f(y_1) - f(y_2),$$

temos que

$$h(y_1, y_2) = y_1y_2y_1 + y_2y_1^2 + y_2^2y_1 + y_1^2y_2 + y_1y_2^2 + y_2y_1y_2.$$

Observe que, nesse novo polinômio, $deg_{y_1}h = deg_{y_2}h = 2$. Vamos repetir esse mesmo processo, mas agora para a variável y_1. Sejam z_1 e z_2 variáveis em X, e considere o polinômio $g(z_1, z_2, y_2)$ dado por

$$g(z_1, z_2, y_2) = h(z_1 + z_2, y_2) - h(z_1, y_2) - h(z_2, y_2),$$

temos então que

$$g(z_1, z_2, y_2) = z_1y_2z_2 + z_2y_2z_1 + y_2z_1z_2 + y_2z_2z_1 + z_1z_2y_2 + z_2z_1y_2,$$

e assim conseguimos um polinômio multilinear nas variáveis z_1, z_2, y_2.

Se considerarmos agora $u(x_1, x_2) = x_1^3x_2^4$*, para linearizar esse polinômio, começaríamos linearizando* x_1^3*, obtendo*

$$v(z_1, z_2, y_2, x_2) = z_1y_2z_2x_2^4 + z_2y_2z_1x_2^4 + y_2z_1z_2x_2^4 + y_2z_2z_1x_2^4 + z_1z_2y_2x_2^4 + z_2z_1y_2x_2^4$$

e, em seguida, repetiríamos, de modo análogo ao caso anterior, o mesmo processo, mas agora para x_2^4.

Um dos principais resultados sobre polinômios multilineares será descrito no próximo teorema. Ele nos diz que, se a característica de F é zero, então podemos reduzir nosso estudo das identidades de uma álgebra ao trabalho com polinômios multilineares.

Teorema 1.3.13. *Se F é um corpo de característica zero, então todo polinômio não nulo $f \in F\langle X\rangle$ é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Demonstração. Para demonstrar esse teorema, precisamos observar mais de perto o processo de multilinearização. Como a característica de F é zero, então F é infinito e assim, pela demonstração do Teorema 1.3.6, podemos supor que f é multi-homogêneo. Considere $d = deg_{x_1}f$. Aplicando o processo de linearização na variável x_1, temos

$$\widetilde{f}(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_k) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i=0}^{d} g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_k),$$

onde $deg_{y_1}g_i = i,\ deg_{y_2}g_i = d - i$ e $deg_{x_t}g_i = deg_{x_t}f,\ 2 \leq t \leq k$.

Como F é infinito, aplicando novamente o Teorema 1.3.6 temos, para $1 \leq i \leq d-1$, que os polinômios g_i são consequências de $\widetilde{f}$, ou seja, $\langle g_1, g_2, \ldots, g_{d-1}\rangle_T \subseteq \left\langle \widetilde{f}\right\rangle_T$. Como $\left\langle \widetilde{f}\right\rangle_T \subseteq \langle f\rangle_T$, concluímos que os polinômios $g_i's$ são consequências de f.

Por outro lado, para todo valor de i,

$$g_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_k) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Uma vez que a característica de F é zero, segue que $\binom{d}{i} \neq 0$ e, portanto, f é uma consequência de todos os $g_i's$, para $1 \leq i \leq d-1$, isto é, $\langle f\rangle_T \subseteq \langle g_1, g_2, \ldots, g_{d-1}\rangle_T$. $\square$

Uma consequência imediata desse teorema é o corolário abaixo.

Corolário 1.3.14. *Se a característica de F é zero, então todo T-ideal é gerado, como T-ideal, por seus polinômios multilineares.*

Capítulo 2

G-graduações e identidades G-graduadas

Neste capítulo, introduziremos o conceito de álgebra G-graduada por um grupo abeliano aditivo, daremos alguns exemplos, entre eles a graduação natural para a álgebra $M_n(F)$ que será estudada no Capítulo 4. Também definiremos as identidades polinomiais G-graduadas de uma álgebra G-graduada e veremos alguns exemplos.

2.1 G-graduações

Seja A uma álgebra sobre um corpo F e considere G um grupo abeliano aditivo.

Definição 2.1.1. *Uma álgebra A é G-**graduada** se pode ser escrita como soma direta de subespaços*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$$

de modo que, para quaisquer $g, h \in G$, temos

$$A^{(g)} A^{(h)} \subseteq A^{(g+h)}.$$

*Os subespaços $A^{(g)}$ são denominados **componentes homogêneas** de A e os elementos de $A^{(g)}$, **elementos homogêneos de grau homogêneo** g.*

*No caso particular em que $G = \mathbb{Z}_n$, usaremos o termo álgebra n-**graduada** ao nos referirmos à álgebra A.*

Se $G = \mathbb{Z}_2$, então $A = A^{(\bar{0})} \oplus A^{(\bar{1})}$ é também denominada uma ***superálgebra*** *e as componentes $A^{(\bar{0})}$ e $A^{(\bar{1})}$ são chamadas de* ***componetes pares e ímpares***, *respectivamente.*

Definição 2.1.2. *Um subespaço $B \subseteq A$ é* ***graduado*** *ou* ***homogêneo*** *se $B = \bigoplus_{g\in G} \left(B \cap A^{(g)}\right)$.*

Veremos agora alguns exemplos de álgebras G-graduadas.

Exemplo 2.1.3. *Se A é uma álgebra, então podemos escrever*

$$A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)},$$

onde $A^{(e)} = A$ e $A^{(g)} = \{0\}$, para todo $g \in G - \{e\}$, onde e denota o elemento identidade de G. Esta graduação é chamada ***graduação trivial***. *Portanto, qualquer álgebra pode ser graduada por qualquer grupo através da graduação trivial.*

Exemplo 2.1.4. *A álgebra de Grassmann E possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural: $E = E^{(\bar{0})} \oplus E^{(\bar{1})}$ onde $E^{(\bar{0})}$ e $E^{(\bar{1})}$ são os espaços definidos no Exemplo 1.1.4. Esta graduação é denominada* ***$\mathbb{Z}_2$-graduação canônica de*** *E.*

Exemplo 2.1.5. *Seja $M_2(F)$ a álgebra das matrizes 2×2 sobre F. A álgebra $M_2(F)$ possui a seguinte 2-graduação: $M_2(F) = M_2(F)^{(\bar{0})} \oplus M_2(F)^{(\bar{1})}$, onde*

$$M_2(F)^{(\bar{0})} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in F \right\}$$

é a subálgebra de $M_2(F)$ consistindo de todas as matrizes diagonais e

$$M_2(F)^{(\bar{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in F \right\}$$

é o subespaço de $M_2(F)$ de todas as matrizes com 0 na diagonal. Desta forma, $M_2(F)$, com a 2-graduação dada acima, é uma superálgebra.

Exemplo 2.1.6. *Seja $M_n(F)$ a álgebra das matrizes $n \times n$. Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_n$, seja $M_n^{(\alpha)}$ o subespaço de $M_n(F)$ gerado por todas as matrizes elementares E_{ij} tais que $\overline{j-i} = \alpha$.*

Assim, $M_n(F)^{(\bar{0})}$ consiste das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}, \qquad a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n} \in F,$$

e, para $0 < t \leqslant n-1$, temos que $M_n(F)^{(\bar{t})}$ consiste das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,t+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2,t+2} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-t,n} \\ a_{n-t+1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $a_{1,t+1}, a_{2,t+2}, \ldots, a_{n-t,n}, a_{n-t+1,1}, a_{n-t+2,2}, \ldots, a_{n,t} \in F$.

Observemos que $M_n(F)$ é soma direta dos subespaços $M_n(F)^{(\alpha)}$'s, isto é,

$$M_n(F) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_n} M_n(F)^{(\alpha)},$$

e ainda, para $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_n$, temos

$$M_n(F)^{(\alpha)} M_n(F)^{(\beta)} \subseteq M_n(F)^{(\alpha+\beta)}.$$

E, portanto, a decomposição acima define uma $\mathbb{Z}_n$-graduação da álgebra $M_n(F)$. Para simplificar a notação, denotaremos a álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada $M_n(F)$ por $\mathcal{M}_n$ e suas componentes homogêneas $M_n(F)^{(\alpha)}$ por $\mathcal{M}_n^{(\alpha)}$.

Exemplo 2.1.7. *Considere $\{X^{(\alpha)} | \alpha \in G\}$ uma família de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Tome $X = \bigcup_{\alpha \in G} X^{(\alpha)}$ e denote por $F\langle X \rangle$ a álgebra associativa livremente gerada pelo conjunto X. Podemos definir uma G-graduação para álgebra livre $F\langle X \rangle$ do seguinte modo. Observe, primeiramente, que os monômios*

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \text{ com } k = 0, 1, \ldots; \; x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \in X,$$

formam uma base de $F\langle X\rangle$ como espaço vetorial. Uma variável $x \in X$ tem ***grau homogêneo*** *β, e denotamos $\alpha(x) = \beta$, se $x \in X^{(\beta)}$. O* ***grau homogêneo de um monômio*** *$m = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ tal que $x_{i_r} \in X$ é definido como:*

$$\alpha(m) := \alpha(x_{i_1}) + \alpha(x_{i_2}) + \ldots + \alpha(x_{i_k}).$$

Para $\beta \in G$, denote por $F\langle X\rangle^{(\beta)}$ o subespaço de $F\langle X\rangle$ gerado por todos os monômios que têm grau homogêneo β. Observe que

$$F\langle X\rangle^{(\alpha)} F\langle X\rangle^{(\beta)} \subseteq F\langle X\rangle^{(\alpha+\beta)}, \forall \alpha, \beta \in G,$$

assim,

$$F\langle X\rangle = \bigoplus_{\alpha\in G} F\langle X\rangle^{(\alpha)}$$

determina uma G-graduação em $F\langle X\rangle$ e esta álgebra com esta graduação será denotada por $F\langle X\rangle^{gr}$. Se $f \in F\langle X\rangle^{(\beta)}$, dizemos que f é um ***polinômio G-graduado de grau homogêneo*** *β.*

No caso particular em que $n = 2$, usamos em geral uma notação especial para a álgebra livre $F\langle X\rangle^{gr}$. Mais precisamente, consideramos $Y = \{y_i | i \in \mathbb{N}\}$ e $Z = \{z_i | i \in \mathbb{N}\}$ dois subconjuntos disjuntos de X tais que $X = Y \cup Z$. Assumimos que as variáveis do conjunto Y têm grau homogêneo par e as variáveis do conjunto Z têm grau homogêneo ímpar. Assim, um monômio tem grau homogêneo par (respec. ímpar) se possui um número par (respec. ímpar) de variáveis no conjunto Z. O espaço formado por todos os monômios de grau par (respec. ímpar) é denotado por $F\langle X\rangle^{(\bar{0})}$ (respec. $F\langle X\rangle^{(\bar{1})}$).

Definição 2.1.8. *Sejam $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ e $B = \bigoplus_{g\in G} B^{(g)}$ álgebras G-graduadas. Dizemos que uma aplicação $\varphi : A \to B$ é um* ***homomorfismo de álgebras G-graduadas*** *(ou simplesmente um* ***homomorfismo G-graduado****), se φ é um homomorfismo de álgebras que satisfaz $\varphi(A^{(g)}) \subseteq B^{(g)}$, para todo $g \in G$. Dizemos que φ é um* ***isomorfismo de álgebras G-graduadas*** *(ou simplesmente* ***isomorfismo graduado****), se φ é um homomorfismo de álgebras G-graduadas bijetivo.*

2.2 Identidades G-graduadas

As identidades polinomiais definidas no primeiro capítulo, no caso ordinário, são naturalmente estendidas para as álgebras G-graduadas.

Definição 2.2.1. *Seja* $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ *uma álgebra* G*-graduada. Um polinômio* G*-graduado* $f(x_1, x_2 \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle^{gr}$ *é uma* ***identidade*** G***-graduada de*** A *se*

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

para todo $a_1 \in A^{(\alpha(x_1))}, \ldots, a_n \in A^{(\alpha(x_n))}$*. Neste caso, escrevemos simplesmente* $f \equiv 0$ *em* A*.*

Vejamos alguns exemplos de identidades G-graduadas.

Exemplo 2.2.2. *Seja* $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ *uma álgebra* G*-graduada, e seja* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ *uma identidade ordinária de* A*. Então se considerarmos a álgebra* G*-graduada* $F\langle X\rangle^{(gr)}$ *e tomarmos variáveis* $x_i \in X = \bigcup_{\alpha \in G} X^{(\alpha)}$*, teremos que o polinômio* G*-graduado* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle^{(gr)}$*, é uma identidade* G*-graduada de* A*.*

Exemplo 2.2.3. *Seja* $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ *uma álgebra* G*-graduada com a graduação trivial (ver Exemplo 2.1.3). Se* $\alpha(x_1) \in G - \{e\}$*, então* $x_1 \in F\langle X\rangle^{(gr)}$ *é uma identidade* G*-graduada de* A*.*

Exemplo 2.2.4. *Seja* $E = E^{(\bar{0})} \oplus E^{(\bar{1})}$ *a graduação canônica da álgebra de Grassmann, (ver Exemplo 2.1.4). Então* $[y_1, y_2], [y_1, z_1]$ *e* $z_1z_2 + z_2z_1,$ *com* $y_1, y_2 \in Y$ *e* $z_1, z_2 \in Z$*, são identidades* $\mathbb{Z}_2$*-graduadas de* E*. Para mostrar isso, basta observar que* $Z(E) = E^{(\bar{0})}$ *e que para quaisquer* $b_1, b_2 \in E^{(\bar{1})}$*, temos que* $b_1b_2 + b_2b_1 = 0$*.*

Exemplo 2.2.5. *Seja* $M_2(F) = M_2(F)^{(\bar{0})} \oplus M_2(F)^{(\bar{1})}$ *a 2-graduação natural definida no Exemplo 2.1.5. Então os polinômios* $y_1y_2 - y_2y_1$ *e* $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$ *são identidades* $\mathbb{Z}_2$*-graduadas de* $M_2(F)$*.*

Definição 2.2.6. *Dada uma álgebra* A *munida de uma* G*-graduação, definimos o* ***conjunto de todas as identidades polinomiais*** G***-graduadas de*** A *por*

$$Id(A)^{gr} = \{f \in F\langle X\rangle^{gr} \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}.$$

No estudo das identidades ordinárias, o conceito de T-ideal é de extrema importância. Para o caso das identidades G-graduadas, temos um conceito análogo, a saber, o T_G-ideal.

Definição 2.2.7. *Um ideal I de $F\langle X\rangle^{gr}$ é um T_G-**ideal** se é fechado sob todos os F-endomorfismos G-graduados $\gamma : F\langle X\rangle^{gr} \to F\langle X\rangle^{gr}$, isto é, $\gamma(I) \subseteq I$, para todo endomorfismo G-graduado γ de $F\langle X\rangle^{gr}$.*

Claramente, I é um T_G-ideal se, e somente se, $f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_i \in F\langle X\rangle^{(\alpha(x_i))}$. Se A é uma álgebra G-graduada, então o conjunto $Id(A)^{gr}$ das identidades G-graduadas de A é um T_G-ideal de $F\langle X\rangle^{gr}$. Quando $G = \mathbb{Z}_n$, nos referiremos a T_n-ideal ao invés de T_G-ideal.

Definição 2.2.8. *Considere um conjunto $S \subseteq F\langle X\rangle^{gr}$.*

(i) *O T_G-**ideal gerado por** S, $\langle S\rangle_{T_G}$, é a interseção de todos os T_G-ideais de $F\langle X\rangle^{gr}$ que contêm S.*

(ii) *Um polinômio $f \in F\langle X\rangle^{gr}$ é uma T_G-**consequência de** S, se $f \in \langle S\rangle_{T_G}$.*

Note que, se denotarmos por $\mathrm{End}^{gr}(F\langle X\rangle^{gr})$ o conjunto de todos os endomorfismos G- graduados de $F\langle X\rangle^{gr}$, então

$$\langle S\rangle_{T_G} = span_F\{\omega_1\varphi(f)\omega_2 | f \in S,\ \varphi \in \mathrm{End}^{gr}(F\langle X\rangle^{gr}),\ \omega_1, \omega_2 \in F\langle X\rangle^{gr}\}.$$

Exemplo 2.2.9. *Sejam $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ uma álgebra G-graduada com a graduação trivial (ver em 2.1.3) e S um subconjunto de $F\langle X\rangle$. Se $Id(A) = \langle f(x_1, \ldots, x_n) | f(x_1, \ldots, x_n) \in S\rangle_T$, então, $Id(A)^{gr} = \langle f(y_1, \ldots, y_n), u \ \mid\ \alpha(y_i) = e, f(x_1, \ldots, x_n) \in S, \alpha(u) \in G - \{e\}\rangle_{T_G}$.*

Exemplo 2.2.10. *Seja $E = E^{(\bar{0})} \oplus E^{(\bar{1})}$ a graduação canônica da álgebra de Grassmann, (ver 2.1.4). Então, $Id(E)^{gr} = \langle [y_1y_2], [y_1z_1], z_1z_2 + z_2z_1\rangle_{T_2}$.*

Exemplo 2.2.11. *Seja $M_2(F)$ a álgebra das matrizes 2×2 munida da 2-graduação descrita no Exemplo 2.2.5. Então, foi provado por Di Vincenzo ([8]), no caso em que F é um corpo de característica zero, e por Koshlukov e Azevedo ([14]), no caso em que F é um corpo infinito de caracaterística qualquer, que*

$$Id(M_2(F))^{gr} = \langle [y_1, y_2], z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1\rangle_{T_2}.$$

Agora, vamos definir polinômios multi-homogêneos e multilineares G-graduados e alguns resultados, no caso em que A é uma álgebra G-graduada. Como as demonstrações são análogas ao caso ordinário, omitiremos as demonstrações.

Definição 2.2.12. *Um polinômio G-graduado $f \in F\langle X\rangle^{gr}$ é dito **homogêneo na variável** $x_i \in X$, se x_i aparece com o mesmo grau em todos os monômios de f. Se f é homogêneo em todas as variáveis, então diremos que f é **multi-homogêneo**.*

Teorema 2.2.13. *Seja F um corpo infinito. Se $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial G-graduada para a álgebra G-graduada A, então toda componente multi-homogênea de f também é uma identidade G-graduada para A.*

Um polinômio importante, que é um caso particular de polinômios multi-homogêneos, são os polinômios multilineares.

Definição 2.2.14. *Um polinômio graduado $f \in F\langle X\rangle^{gr}$ é **linear na variável** $x_i \in X$, se x_i aparece com grau 1 em cada monômio de f. Se f é linear em todas as suas variáveis, diremos que f **é multilinear G-graduado**.*

O próximo resultado nos diz que, em um corpo de característica zero, todo T_G-ideal é gerado por seus polinômios multilineares G-graduados.

Teorema 2.2.15. *Todo polinômio não nulo $f \in F\langle X\rangle^{gr}$ é uma T_G-consequência de um conjunto finito de polinômios multilineares G-graduados.*

O próximo resultado mostra uma importante relação entre os conceitos de identidades graduadas e identidades ordinárias.

Proposição 2.2.16. *Sejam A e B duas álgebras. Se A e B possuem G-graduações tais que $Id(A)^{gr} \subseteq Id(B)^{gr}$, então $Id(A) \subseteq Id(B)$. Além disso, se $Id(A)^{gr} = Id(B)^{gr}$, então $Id(A) = Id(B)$.*

Demonstração. Consideremos a álgebra associativa livre $F\langle Y\rangle$, onde $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ é um conjunto não vazio e enumerável de variáveis não comutativas e seja $f = f(y_1, \dots, y_n)$

uma identidade ordinária de A. Dados $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$, tomemos $b_{i_g} \in B^{(g)}$ tal que, para $1 \leq i \leq n$ e $g \in G$, temos

$$b_i = \sum_{g \in G} b_{i_g}.$$

Para cada $b_{i_g} \neq 0$, podemos associar uma variável $x_{i_g} \in X^{(g)}$. Consideremos o polinômio

$$f_1 = f_1(x_{1_e}, \ldots, x_{1_g}, \ldots, x_{2_e}, \ldots) = f\left(\sum_{g \in G} x_{1_g}, \ldots, \sum_{g \in G} x_{n_g}\right) \in F\langle X\rangle^{gr}.$$

Como $f \in Id(A)$, então $f_1 \in Id(A)^{gr}$, e assim, pela hipótese do teorema, temos que $f_1 \in Id(B)^{gr}$. Fazendo as substituições $x_{i_g} = b_{i_g}$, para $1 \leq i \leq n,\ g \in G$, temos

$$f(b_1, \ldots, b_n) = f\left(\sum_{g \in G} b_{1_g}, \ldots, \sum_{g \in G} b_{n_g}\right) = f_1(b_{1_e}, \ldots, b_{1_g}, \ldots, b_{2_e}, \ldots) = 0,$$

concluindo nosso resultado. $\square$

Capítulo 3

Matrizes genéricas

A álgebra das matrizes genéricas, que definiremos neste capítulo, constitui um modelo bastante útil da álgebra relativamente livre sobre um corpo infinito. Definiremos e enunciaremos algumas propriedades da álgebra das matrizes genéricas. Dividiremos esse capítulo em duas seções. A primeira, onde estudaremos o caso ordinário, e a segunda seção onde estudaremos o caso graduado, que será nossa ferramenta no próximo capítulo.

3.1 Caso ordinário

Seja F um corpo infinito arbitrário e, para um inteiro $n \geq 2$, considere a F-álgebra dos polinômios em infinitas variáveis comutativas:

$$\Omega_n := F\left[y_{pq}^{(i)} \mid 1 \leq p, q \leq n; i \geq 1\right].$$

Definição 3.1.1. *As seguintes matrizes $n \times n$ com entradas em Ω_n*

$$y_i := \sum_{p,q=1}^{n} y_{pq}^{(i)} E_{pq}, \quad i \geq 1,$$

*são chamadas **matrizes genéricas** $n \times n$. Denotaremos por R_n a álgebra gerada pelas matrizes genéricas $n \times n$.*

Exemplo 3.1.2. *Para $n = 2$, temos:*

$$\Omega_2 = F\left[y_{pq}^{(i)} \mid 1 \leq p, q \leq 2; i \geq 1\right] \text{ e } y_i = \sum_{p,q=1}^{2} y_{pq}^{(i)} E_{pq}, \ i \geq 1.$$

Assim, as matrizes genéricas com entradas em Ω_2 são:

$$y_1 = \begin{pmatrix} y_{11}^{(1)} & y_{12}^{(1)} \\ y_{21}^{(1)} & y_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} y_{11}^{(2)} & y_{12}^{(2)} \\ y_{21}^{(2)} & y_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \ldots, \quad y_i = \begin{pmatrix} y_{11}^{(i)} & y_{12}^{(i)} \\ y_{21}^{(i)} & y_{22}^{(i)} \end{pmatrix}, \ldots$$

Logo, R_2 é a álgebra gerada por $y_1, y_2, \ldots$ e assim os elementos de R_2 são da forma $f(y_1, \ldots, y_k)$ com $f(x_1, \ldots, x_k) \in F\langle X\rangle$.

Para qualquer F-álgebra comutativa C, temos que as matrizes $n \times n$ com entradas em C podem ser obtidas especializando as matrizes genéricas, isto é,

$$a = \sum_{p,q=1}^{n} \gamma_{pq} E_{pq}, \quad \gamma_{pq} \in C,$$

é obtido a partir de

$$y_1 = \sum_{p,q=1}^{n} y_{pq}^{(1)} E_{pq}$$

substituindo a variável $y_{pq}^{(1)}$ por γ_{pq}, para $1 \leq p, q \leq n$.

O próximo resultado faz uma ponte entre as álgebras relativamente livres $\frac{F\langle X\rangle}{Id(M_n(F))}$ e as matrizes genéricas R_n, no caso em que F é um corpo infinito.

Teorema 3.1.3. *Considere um corpo F infinito. Então a álgebra R_n é isomorfa à álgebra relativamente livre $F\langle X\rangle / Id(M_n(F))$, isto é,*

$$R_n \cong \frac{F\langle X\rangle}{Id(M_n(F))}.$$

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{array}{ccc} F\langle X\rangle & \to & \frac{F\langle X\rangle}{Id(M_n(F))} \\ x_i & \mapsto & x_i + Id(M_n(F)). \end{array}$$

Pela propriedade universal da álgebra livre $F\langle X\rangle$, a aplicação acima induz um único homomorfismo sobrejetor de álgebras π_1, definido por

$$\begin{array}{cccc} \pi_1: & F\langle X\rangle & \to & \frac{F\langle X\rangle}{Id(M_n(F))} \\ & f(x_1, \ldots, x_k) & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_k) + Id(M_n(F)). \end{array}$$

Analogamente, como R_n é gerada pelas matrizes genéricas, e, novamente, usando a propriedade universal da álgebra livre $F\langle X\rangle$, a aplicação que associa cada $x_i \in X$ a um elemento genérico y_i induz um único homomorfismo sobrejetor de álgebras

$$\begin{array}{rccc} \pi_2 : & F\langle X\rangle & \rightarrow & R_n \\ & f(x_1,\ldots,x_k) & \mapsto & f(y_1,\ldots,y_k). \end{array}$$

A fim de provarmos o teorema, é suficiente mostrarmos que $\ker\pi_1 = \ker\pi_2$, pois assim teremos, pelo Teorema de Isomorfismo de Álgebras, que $\frac{F\langle X\rangle}{Id(M_n(F))} \cong \frac{F\langle X\rangle}{\ker\pi_1} = \frac{F\langle X\rangle}{\ker\pi_2} \cong R_n$.

Se $f(x_1,\ldots,x_k) \in \ker\pi_2$, então $f(y_1,\ldots,y_k) = 0$ e queremos provar que $f(x_1,\ldots,x_k) \in Id(M_n(F))$. Dados $A_1,\ldots,A_k \in M_n(F)$, especializando as variáveis y_i's pelos elementos A_i's temos que, como $f(y_1,\ldots,y_k) = 0$, segue que $f(A_1,\ldots,A_k) = 0$, ou seja, f também é uma identidade para $M_n(F)$ e, portanto, $f(x_1,\ldots,x_k) \in \ker\pi_1$, e assim, $\ker\pi_2 \subseteq \ker\pi_1$.

Por outro lado, seja $f(x_1,\ldots,x_k)$ uma identidade para $M_n(F)$ e, suponhamos, por absurdo, que $f(y_1,\ldots,y_k) \neq 0$. Então, existem A_i's tais que, ao especializarmos as variáveis y_i's por essas A_i's, temos que $f(A_1,\ldots,A_k) \neq 0$. Absurdo. Assim, $\ker\pi_1 = \ker\pi_2$, concluindo nossa demonstração. $\square$

3.2 Caso graduado

Assim como a álgebra das matrizes genéricas nos auxilia no estudo da álgebra relativamente livre $\frac{F\langle X\rangle}{Id(M_n(F))}$, podemos definir, de forma similar, a álgebra das matrizes genéricas $\mathbb{Z}_n$-graduadas, que nos auxiliarão no estudo da álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada relativamente livre $\frac{F\langle X\rangle^{gr}}{Id(M_n(F))^{gr}}$. Essa álgebra é uma ferramenta importante para a caracterização das identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_n(F)$ no caso em que F é um corpo infinito de característica qualquer.

Definição 3.2.1. *Seja* $\Omega = F\left[y_i^{(k)} \quad | \quad 1 \leq k \leq n; i \geq 1\right]$ *a álgebra dos polinômios comutativos gerada pelas variáveis* $y_i^{(k)}$*. Para* $0 \leq i \leq n-1$*, vamos denotar por* $M_n(\Omega)_{\bar{i}}$ *o subespaço de* $M_n(\Omega)$ *que consiste de todas as matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & f_2 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{n-i} \\ f_{n-i+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & f_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Omega$.

O próximo exemplo ajudará a entender melhor o comportamento dessas matrizes.

Exemplo 3.2.2. *Considerando o espaço das matrizes* 3×3, $M_3(\Omega)$, *sejam* A *e* B *pertencentes a* $M_3(\Omega)^{(\bar{1})}$, *com*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 \\ g_3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $f_1,\ f_2,\ f_3,\ g_1,\ g_2$ *e* $g_3 \ \in \ \Omega$.

Então, o produto de A *por* B *é dado por*

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_1g_2 \\ f_2g_3 & 0 & 0 \\ 0 & f_3g_1 & 0 \end{pmatrix},$$

e assim $AB \in M_3(\Omega)^{(\bar{2})}$. *Em geral, se* $A \in M_3(\Omega)^{(\bar{i})}$ *e* $B \in M_3(\Omega)^{(\bar{j})}$, *então observamos que* $AB \in M_3(\Omega)^{(\overline{i+j})}$.

O próximo lema nos mostra que a decomposição dada na Definição 3.2.1 caracteriza uma $\mathbb{Z}_n$-graduação para a álgebra $M_n(\Omega)$.

Lema 3.2.3. *Sejam* $f_1, f_2, \ldots, f_n, g_1, g_2, \ldots, g_n$ *polinômios de* Ω, *e considere as matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & f_2 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{n-i} \\ f_{n-i+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & f_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & g_2 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{n-j} \\ g_{n-j+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & g_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

com $0 \leq i, j \leq n-1$.

Então

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & f_1 g_{i_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & f_2 g_{i_2} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & f_x g_{i_x} \\ f_{x+1} g_{i_{x+1}} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & f_n g_{i_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

com $i_k = (i+k-1)\mathrm{mod} n + 1$ e $x = n - (i+j)\mathrm{mod} n$.

Demonstração. Antes de começarmos a demonstração, observemos que, na matriz A, o elemento f_k ocupa a posição $(k, i+k)$, se $i+k \leq n$ e $(k, i+k-n)$, se $i+k > n$. Logo, podemos escrever a matriz A da seguinte forma

$$A = \sum_{k=1}^{n-i} f_k E_{k,i+k} + \sum_{k=n-i+1}^{n} f_k E_{k,i+k-n}.$$

Analogamente, para a matriz B, temos

$$B = \sum_{l=1}^{n-j} g_l E_{l,j+l} + \sum_{l=n-j+1}^{n} g_l E_{l,j+l-n}.$$

Então

$$AB = \sum_{k=1}^{n-i} \sum_{l=1}^{n-j} f_k g_l E_{k,i+k} E_{l,j+l} + \sum_{k=1}^{n-i} \sum_{l=n-j+1}^{n} f_k g_l E_{k,i+k} E_{l,j+l-n} +$$

$$+ \sum_{k=n-i+1}^{n} \sum_{l=1}^{n-j} f_k g_l E_{k,i+k-n} E_{l,j+l} + \sum_{k=n-i+1}^{n} \sum_{l=n-j+1}^{n} f_k g_l E_{k,i+k-n} E_{l,j+l-n}.$$

Note que, para cada $1 \leq k \leq n-i$ fixo, temos, pelas propriedades de matrizes elementares, que o único elemento da linha k de AB que pode ser não nulo aparecerá quando $i+k = l$, e será dado por $f_k g_{i+k}$. Se $1 \leq i+k \leq n-j$, então este elemento aparecerá na coluna $j+l = j+i+k$. Por outro lado, se $n-j+1 \leq i+k \leq n$, então este elemento aparecerá na coluna $j+l-n = j+i+k-n$.

De modo análogo, para cada $n-i+1 \leq k \leq n$ fixo, teremos que o único elemento da linha k de AB que pode não ser nulo aparecerá quando $i+k-n=l$, e será dado por $f_k g_{i+k-n}$. Se $1 \leq i+k-n \leq n-j$, então este elemento aparecerá na coluna $j+l=j+i+k-n$. Por outro lado, se $n-j+1 \leq i+k-n \leq n$, então este elemento aparecerá na coluna $j+l-n=j+i+k-2n$.

Assim, em todos os casos temos que, na linha k, o único elemento que pode ser não nulo é $f_k g_{i_k}$ com

$$i_k = \begin{cases} i+k, & \text{se} \quad i+k \leq n, \\ i+k-n, & \text{se} \quad i+k > n. \end{cases}$$

e, portanto,

$$i_k = (i+k-1) \bmod n + 1, \tag{3.1}$$

concluindo a primeira parte da demonstração.

A fim de determinarmos x tal que $f_x g_{i_x}$ aparece na última coluna da matriz AB, observemos, primeiramente, que o índice i_x de $f_x g_{i_x}$ da matriz AB acompanha o índice $n-j$ da matriz B, assim

$$i_x = n-j. \tag{3.2}$$

Então, de (3.1) e (3.2) temos

$$i_x = n-j = (i+x-1) \bmod n + 1$$

Vamos dividir em dois casos,

- $1 \leq i+x \leq n$

  Neste caso,

  $$i+x = n-j,$$

  e assim,

  $$x = n-(i+j).$$

- $i+x > n$

  Então

  $$i+x-n = n-j,$$

logo,

$$x = n - (i + j - n).$$

Em ambos os casos,

$$x = n - (i + j) \bmod n,$$

concluindo a demonstração do lema. $\square$

Para simplificar a escrita, usaremos a notação $\alpha(x_i)$ tanto para denotar um elemento de $\mathbb{Z}_n$ (o grau homogêneo da variável x_i em $\mathbb{Z}_n$), quanto um elemento de $\mathbb{Z}$ (seu representante pertencente a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$). No contexto ficará claro a quem estamos nos referindo.

Denotaremos por R a subálgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada de $M_n(\Omega)$ gerada pelas matrizes da forma

$$A_i := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_i^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & y_i^{(2)} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_i^{(n-\alpha(x_i))} \\ y_i^{(n-\alpha(x_i)+1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & y_i^{(n)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

para $i \geq 1$.

Exemplo 3.2.4. *Considere o caso em que $n = 3$.*

- *Se $\alpha(x_1) = 0$, então*

$$A_1 = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & y_1^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & y_1^{(3)} \end{pmatrix};$$

- *Se $\alpha(x_1) = 1$, então*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & y_1^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & y_1^{(2)} \\ y_1^{(3)} & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

- *Se* $\alpha(x_1) = 2$, *então*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_1^{(1)} \\ y_1^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & y_1^{(3)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a definição de A_i depende do grau homogêneo de x_i. Note ainda que, dado um monômio $0 \neq m(x_1, \ldots, x_k) \in F\langle X\rangle^{gr}$, ao avaliarmos em $A_1, \ldots, A_k$, teremos uma matriz que obedece a $\mathbb{Z}_n$-graduação e que, em cada entrada não nula, aparecem produtos de elementos de Ω.

A relação entre as matrizes genéricas $\mathbb{Z}_n$-graduadas e a álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada relativamente livre $F\langle X\rangle^{gr}/Id(M_n(F))^{gr}$ é dada no próximo teorema e sua demonstração é similar ao caso ordinário.

Teorema 3.2.5. *Seja F um corpo infinito. A álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada relativamente livre $F\langle X\rangle^{gr}/Id(M_n(F))^{gr}$ é isomorfa à álgebra R.*

Capítulo 4

Identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_n(F)$

Seja $\mathcal{M}_n$ a álgebra $M_n(F)$ com a $\mathbb{Z}_n$-graduação natural. Neste capítulo, estudaremos os resultados obtidos por Vasilovsky [21] e por Azevedo [3]. Eles descreveram uma base finita para as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $\mathcal{M}_n$ quando F é um corpo de característica zero e quando F é um corpo infinito, respectivamente.

Iniciamos considerando os polinômios $\mathbb{Z}_n$-graduados

$$x_1x_2 - x_2x_1, \quad \text{com} \;\; \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \overline{0} \tag{4.1}$$

e

$$x_1xx_2 - x_2xx_1, \quad \text{com} \;\; \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = -\alpha(x) \tag{4.2}$$

e mostrando que estes polinômios são, independentemente da característica de F, identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $\mathcal{M}_n$.

Lema 4.0.6. *Os polinômios* (4.1) *e* (4.2) *são identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $\mathcal{M}_n$.*

Demonstração. Observe que os elementos de $\mathcal{M}_n^{(\overline{0})}$ são matrizes diagonais e, como quaisquer duas matrizes diagonais comutam, temos que o polinômio (4.1) é uma identidade graduada de $\mathcal{M}_n$.

Considere as substituições dos polinômios (4.2) por elementos da forma

$$x_1 = E_{i_1,j_1}, \qquad x_2 = E_{i_2,j_2} \qquad \text{e} \qquad x = E_{r,s}, \tag{4.3}$$

onde $x_1,\ x_2 \in \mathcal{M}_n^{(\overline{t})}$ e $x\ \in \mathcal{M}_n^{(\overline{n-t})}$, $0 < t \leq n-1$. Então

$$j_1 = \begin{cases} i_1 + t, & \text{se } \ i_1 + t \leq n, \\ i_1 + t - n, & \text{se } \ i_1 + t > n; \end{cases}$$

$$i_2 = \begin{cases} j_2 - t, & \text{se } \ j_2 - t \geq 1, \\ j_2 - t + n, & \text{se } \ j_2 - t < 1; \end{cases}$$

$$r = \begin{cases} s + t, & \text{se } \ s + t \leq n, \\ s + t - n, & \text{se } \ s + t > n. \end{cases}$$

Como os polinômios (4.2) são multilineares, a fim de verificar que os mesmos são identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $\mathcal{M}_n$, é suficiente avaliá-los para as substituições (4.3) dadas acima.

Vamos mostrar que

$$E_{i_1,j_1}E_{r,s}E_{i_2,j_2} \neq 0 \qquad \text{se, e somente se,} \qquad j_1 = r = j_2 \qquad \text{e} \qquad i_1 = s = i_2, \tag{4.4}$$

pois assim teremos que, em todos os casos,

$$E_{i_1,j_1}E_{r,s}E_{i_2,j_2} = E_{i_2,j_2}E_{r,s}E_{i_1,j_1},$$

provando que (4.2) é uma identidade $\mathbb{Z}_n$-graduada de $\mathcal{M}_n$.

Comecemos notando que, pela definição de matrizes elementares, temos

$$E_{i_1,j_1}E_{r,s}E_{i_2,j_2} \neq 0 \qquad \text{se, e somente se,} \qquad j_1 = r \qquad \text{e} \qquad s = i_2.$$

Observemos que, neste caso,

- $j_1 = i_1 + t$ e $r = s + t - n$ não podem ocorrer simultaneamente, pois senão, como $j_1 = r$, teríamos

  $$i_1 + t = s + t - n,$$

  o que implica que

  $$n = s - i_1,$$

  o que não é possível desde que $1 \leq s, i_1 \leq n$.

- $s = r-t$ e $i_2 = j_2 - t + n$ não podem ocorrer simultaneamente pois, caso contrário, como $i_2 = s$, teríamos

$$r - t = j_2 - t + n,$$

e assim,

$$n = r - j_2, \qquad \text{onde} \qquad 1 \leq r, j_2 \leq n.$$

Então, quando $j_1 = i_1 + t$, temos $r = s + t$ e $i_2 = j_2 - t$ e, portanto,

$$i_2 = s = r - t = j_1 - t = i_1 \qquad \text{e} \qquad j_1 = r = s + t = i_2 + t = j_2.$$

De modo análogo, se $j_1 = i_1 + t - n$, então $r = s + t - n$ e $i_2 = j_2 - t + n$, e assim,

$$i_2 = s = r - t + n = j_1 - t + n = i_1 \qquad \text{e} \qquad j_1 = r = s + t - n = i_2 + t - n = j_2.$$

Portanto, se $j_1 = r$ e $s = i_2$, então tanto no caso em que $j_1 = i_1 + t$, como no caso $j_1 = i_1 + t - n$, temos que (4.4) é verificado, concluindo assim nossa demonstração.

□

Nosso objetivo principal é mostrar que, se F é infinito, então todas as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $\mathcal{M}_n$ seguem dos polinômios (4.1) e (4.2). Para isto, denotemos por $\mathcal{I}_n$ o T_n-ideal gerado pelos polinômios (4.1) e (4.2).

Estudemos primeiramente o caso em que a característica de F é igual a zero.

4.1 Característica de F igual a Zero

Os resultados aqui apresentados foram descritos por Vasilovsky (ver [21]) em 1999. Ao longo desta seção, F denotará um corpo de característica zero. Comecemos o nosso estudo com as seguintes definições.

Definição 4.1.1. *Considere $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ e $\sigma \in S_k$. Definimos o monômio multilinear em $x_1, x_2, \ldots, x_k$ correspondente à permutação σ por*

$$m_\sigma = m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)}.$$

Observe que, se denotarmos por I a permutação identidade, então,

$$m_I = m_I(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_1 x_2 \cdots x_k.$$

Note ainda que,

$$\alpha(m_\sigma) = \alpha(m_I) = \alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \cdots + \alpha(x_k).$$

Definição 4.1.2. *Uma* ***substituição standard*** *S é uma substituição da forma*

$$x_1 = E_{i_1,j_1},\ x_2 = E_{i_2,j_2},\ \ldots,\ x_k = E_{i_k,j_k}, \tag{4.5}$$

onde

$$\overline{j_s - i_s} = \alpha(x_s), \tag{4.6}$$

de modo que $E_{i_s,j_s} \in \mathcal{M}_n^{(\alpha(x_s))}$, $s = 1, 2, \ldots, k$.

Para $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in F\langle X\rangle^{gr}$ e uma substituição standard S, denotaremos por $f|_S$ o valor de f correspondente à substituição S. Note que se f é multilinear e se $f|_S = 0$ para toda substituição standard S, então f é uma identidade graduada de $\mathcal{M}_n$.

Pela definição de matrizes elementares, quando uma substituição standard (4.5) é feita, o valor do monômio $m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ é diferente de zero se, e somente se,

$$j_{\sigma(1)} = i_{\sigma(2)},\quad j_{\sigma(2)} = i_{\sigma(3)},\quad \ldots,\quad j_{\sigma(k-1)} = i_{\sigma(k)}, \tag{4.7}$$

e, neste caso,

$$m_\sigma|_S = E_{i_{\sigma(1)},j_{\sigma(k)}}.$$

Definição 4.1.3. *Para um monômio $m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $\sigma \in S_k$, e quaisquer inteiros $1 \leq p \leq q \leq k$, denotamos por $m_\sigma^{[p,q]}$ a subpalavra obtida a partir de m_σ descartando os primeiros $p-1$ e os últimos $k-q$ fatores, ou seja,*

$$m_\sigma^{[p,q]} = x_{\sigma(p)} x_{\sigma(p+1)} \cdots x_{\sigma(q)}.$$

O exemplo abaixo ajudará a entender essa definição.

Exemplo 4.1.4. *Se $m_\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2 x_5 x_1 x_3 x_4$, então*

$$m_\sigma^{[2,4]} = x_5 x_1 x_3 \quad e \quad m_\sigma^{[1,4]} = x_2 x_5 x_1 x_3.$$

Uma vez que definimos alguns conceitos importantes, vamos demonstrar alguns lemas que ajudarão na prova do resultado principal.

Lema 4.1.5. *Para qualquer $\sigma \in S_k$, existe uma substituição standard S tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_S \neq 0.$$

Demonstração. Para provar esse lema, faremos indução em k.

Para $k = 1$, temos

$$m_\sigma(x_1) = x_1.$$

Então, tomando S tal que $x_1 = E_{i,n}$ com $\overline{n-i} = \alpha(x_1)$, temos

$$m_\sigma(x_1)|_S = E_{i,n} \neq 0.$$

Seja $k > 1$ e suponha agora que vale para $k-1$. Aplicando a hipótese de indução a $m_\sigma^{[1,k-1]}$, temos que existe uma substituição standard S com

$$x_{\sigma(1)} = E_{i_1,j_1}, \quad x_{\sigma(2)} = E_{i_2,j_2}, \quad \ldots, \quad x_{\sigma(k-1)} = E_{i_{k-1},j_{k-1}}, \tag{4.8}$$

tal que

$$m_\sigma^{[1,k-1]}|_S = E_{i_1,j_{k-1}} \neq 0.$$

Então, se $\alpha(x_{\sigma(k)}) = \overline{t}$, tomando S' satisfazendo (4.8) e

$$x_{\sigma(k)} = E_{j_{k-1},j_k},$$

onde

$$j_k = \begin{cases} j_{k-1} + t, & \text{se } \ j_{k-1} + t \leq n, \\ j_{k-1} + t - n, & \text{se } \ j_{k-1} + t > n, \end{cases}$$

temos

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_{S'} = E_{i_1,j_{k-1}} E_{j_{k-1},j_k} = E_{i_1,j_k} \neq 0.$$

□

Lema 4.1.6. *Seja S uma substituição standard satisfazendo* (4.5)*. Se $m_\sigma|_S \neq 0$ então, para todo $1 \leq p \leq q \leq k$, temos*

$$\alpha(m_\sigma^{[p,q]}) = \overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}}.$$

Demonstração. Sabemos que $m_\sigma^{[p,q]} = x_{\sigma(p)}x_{\sigma(p+1)}\cdots x_{\sigma(q-1)}x_{\sigma(q)}$. Então

$$\begin{aligned}
\alpha\left(m_\sigma^{[p,q]}\right) &= \alpha\left(x_{\sigma(p)}x_{\sigma(p+1)}\cdots x_{\sigma(q-1)}x_{\sigma(q)}\right)\\
&= \alpha\left(x_{\sigma(q)}\right) + \alpha\left(x_{\sigma(q-1)}\right) + \cdots + \alpha\left(x_{\sigma(p+1)}\right) + \alpha\left(x_{\sigma(p)}\right)\\
&= \overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(q)}} + \overline{j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(q-1)}} + \cdots + \overline{j_{\sigma(p+1)} - i_{\sigma(p+1)}} + \overline{j_{\sigma(p)} - i_{\sigma(p)}}.
\end{aligned}$$

Como $m_\sigma|_S \neq 0$ então, segue de (4.7), que

$$\begin{aligned}
\alpha\left(m_\sigma^{[p,q]}\right) &= \overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(q)}} + \overline{i_{\sigma(q)} - i_{\sigma(q-1)}} + \cdots + \overline{i_{\sigma(p+2)} - i_{\sigma(p+1)}} + \overline{i_{\sigma(p+1)} - i_{\sigma(p)}}\\
&= \overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}}.
\end{aligned}$$

□

Nos próximos resultados, se dois polinômios $f, g \in F\langle X\rangle^{gr}$ são tais que f é equivalente a g módulo $\mathcal{I}_n$, isto é, $f - g \in \mathcal{I}_n$, então usaremos a notação

$$f \equiv_{\mathcal{I}_n} g.$$

Lema 4.1.7. *Se, para uma permutação $\sigma \in S_k$, existir uma substituição standard S tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_S = m_I(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_S \neq 0,$$

então

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ x_1 n_\delta(x_2, x_3, \ldots, x_k),$$

para algum monômio $n_\delta(x_2, x_3, \ldots, x_k) = x_{\delta_{(2)}}x_{\delta_{(3)}}\cdots x_{\delta_{(k)}}$, com $\delta \in S_{k-1}$.

Demonstração. Se $\sigma(1) = 1$, temos claramente o nosso resultado.

Suponha então $\sigma(1) \neq 1$. Neste caso, vamos quebrar o monômio m_σ em pedaços com apropriados graus homogêneos, para que possamos usar as informações sobre $\mathcal{I}_n$ de modo a produzir o resultado desejado. Começamos observando que

$$1 = \sigma^{-1}(\sigma(1)) < \sigma^{-1}(1).$$

Seja s o menor inteiro que aparece antes do 1 ao percorrer o monômio m_σ da esquerda para a direita. Claramente $s \geq 2$. Tome $t = s - 1$. Então,

$$1 \leq \sigma^{-1}(t+1) < \sigma^{-1}(1) \leq \sigma^{-1}(t).$$

Considerando

$$p := \sigma^{-1}(t+1), \quad q := \sigma^{-1}(1) \ \ e \ \ r := \sigma^{-1}(t),$$

temos

$$1 \leq p < q \leq r.$$

E ainda, como $m_\sigma|_S = m_I|_S$, temos

$$i_{\sigma(1)} = i_1.$$

Além disso, como $m_\sigma|_S \neq 0$, segue de (4.7) que

$$j_{\sigma(l-1)} = i_{\sigma(l)}, \text{ para todo } 2 \leq l \leq k.$$

Analogamente, como $m_I|_S \neq 0$, temos

$$j_{l-1} = i_l, \text{ para todo } 2 \leq l \leq k.$$

Juntando as informações acima temos

$$j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_1 = i_{\sigma(1)}, \qquad j_{\sigma(r)} = j_t = i_{t+1} = i_{\sigma(p)}$$

e, quando $p > 1$, temos também

$$j_{\sigma(p-1)} = i_{\sigma(p)}.$$

Estudemos então os dois casos possíveis:

- $p > 1$

  Nesse caso, temos

  $$j_{\sigma(r)} = i_{\sigma(p)} = j_{\sigma(p-1)} \qquad \text{e} \qquad i_{\sigma(q)} = j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(1)},$$

  o que implica que

  $$j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)} = i_{\sigma(p)} - j_{\sigma(q-1)} = j_{\sigma(p-1)} - i_{\sigma(1)} = t_0,$$

  para algum $t_0 \in \mathbb{Z}$.

  Assim, pelo Lema 4.1.6,

  $$\alpha\left(m_\sigma^{[1,p-1]}\right) = \overline{j_{\sigma(p-1)} - i_{\sigma(1)}} = \overline{t_0}$$

$$\alpha\left(m_\sigma^{[p,q-1]}\right) = \overline{j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(p)}} = -\overline{t_0}$$

$$\alpha\left(m_\sigma^{[q,r]}\right) = \overline{j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)}} = \overline{t_0},$$

e, portanto, como o polinômio (4.2) pertence a $\mathcal{I}_n$, segue que

$$m_\sigma = m_\sigma^{[1,p-1]} m_\sigma^{[p,q-1]} m_\sigma^{[q,r]} m_\sigma^{[r+1,k]} \equiv_{\mathcal{I}_n} m_\sigma^{[q,r]} m_\sigma^{[p,q-1]} m_\sigma^{[1,p-1]} m_\sigma^{[r+1,k]},$$

e assim

$$m_\sigma \equiv_{\mathcal{I}_n} \underbrace{x_{\sigma(q)}}_{x_1} \underbrace{x_{\sigma(q+1)} \cdots x_{\sigma(r)} x_{\sigma(p)} \cdots x_{\sigma(q-1)} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p-1)} x_{\sigma(r+1)} \cdots x_{\sigma(k)}}_{n_\delta(x_2,\ldots,x_k)}$$

o que implica

$$m_\sigma \equiv_{\mathcal{I}_n} x_1 n_\delta(x_2, \ldots, x_k).$$

- $p = 1$

  Neste caso,

$$j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_{\sigma(1)} = i_{\sigma(p)} = j_{\sigma(r)}$$

  o que implica que

$$\alpha\left(m_\sigma^{[1,q-1]}\right) = \overline{j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(1)}} = \overline{0}$$

$$\alpha\left(m_\sigma^{[q,r]}\right) = \overline{j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)}} = \overline{0}.$$

  Como o polinômio (4.1) pertence a $\mathcal{I}_n$, então

$$m_\sigma = m_\sigma^{[1,q-1]} m_\sigma^{[q,r]} m_\sigma^{[r+1,k]} \equiv_{\mathcal{I}_n} m_\sigma^{[q,r]} m_\sigma^{[1,q-1]} m_\sigma^{[r+1,k]}.$$

  E assim, como $x_{\sigma(q)} = x_1$ temos, analogamente ao caso anterior, que

$$m_\sigma \equiv_{\mathcal{I}_n} x_1 n_\eta(x_2, \ldots, x_k),$$

  para algum monômio n_η.

Com isso finalizamos a demonstração. □

Agora, veremos que, qualquer monômio m_σ que satisfaz as hipóteses do Lema 4.1.7, é equivalente, módulo $\mathcal{I}_n$, ao monômio m_I.

Lema 4.1.8. *Se, para uma permutação $\sigma \in S_k$, existir uma substituição standard S tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_S = m_I(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_S \neq 0,$$

então

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv_{\mathcal{I}_n} m_I(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Demonstração. Segue do Lema 4.1.7 que

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ x_1 n_\delta(x_2, x_3, \ldots, x_k),$$

para algum monômio $n_\delta(x_2, x_3, \ldots, x_k) = x_{\delta(2)}x_{\delta(3)} \cdots x_{\delta(k)}$, $\delta \in S_{k-1}$.

Seja r o maior inteiro positivo tal que

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv_{\mathcal{I}_n} x_1 x_2 \cdots x_r n_\tau(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_k),$$

para algum monômio multilinear $n_\tau = n_\tau(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_k) = x_{\tau(r+1)}x_{\tau(r+2)} \cdots x_{\tau(k)}$, com $\tau \in S_{k-r-1}$.

Para concluirmos o lema, basta mostrar que $r = k$, pois assim teremos

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv_{\mathcal{I}_n} x_1 x_2 \cdots x_k.$$

Vamos supor que $r < k$ e considerar S uma substituição da forma (4.5) tal que $m_\sigma|_S = m_I|_S \neq 0$. Sabemos que

$$x_1 x_2 \cdots x_r n_\tau|_S = E_{i_1,j_1} \cdots E_{i_r,j_r} n_\tau|_S = E_{i_1,j_r} n_\tau|_S, \tag{4.9}$$

e

$$m_I|_S = E_{i_1,j_1} \cdots E_{i_r,j_r} \{x_{r+1}x_{r+2} \cdots x_k\}|_S = E_{i_1,j_r} \{x_{r+1}x_{r+2} \cdots x_k\}|_S. \tag{4.10}$$

Por outro lado, como $m_\sigma \equiv_{\mathcal{I}_n} x_1 x_2 \cdots x_r n_\tau$ e $\mathcal{I}_n \subseteq Id(\mathcal{M}_n)^{gr}$, então $m_\sigma - x_1 x_2 \cdots x_r n_\tau \in \mathcal{I}_n \subseteq Id(\mathcal{M}_n)^{gr}$ e assim $(m_\sigma - x_1 x_2 \cdots x_r n_\tau)|_S = 0$ o que implica que $m_\sigma|_S = x_1 x_2 \cdots x_r n_\tau|_S$ e assim $x_1 x_2 \cdots x_r n_\tau|_S = m_I|_S \neq 0$. Logo, segue de (4.9) e (4.10) que

$$n_\tau(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_k)|_S = x_{r+1}x_{r+2} \cdots x_k|_S \neq 0.$$

Pelo lema anterior, existe um monômio multilinear $n_{\tau'}(x_{r+2}, x_{r+3}, \ldots, x_k)$, com $\tau' \in S_{k-r-1}$ tal que

$$n_\tau(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_k) \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ x_{r+1} n_{\tau'}(x_{r+2}, x_{r+3}, \ldots, x_k).$$

E assim,

$$m_\sigma \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ x_1 x_2 \cdots x_r x_{r+1} n_{\tau'}(x_{r+2}, x_{r+3}, \ldots, x_k),$$

contrariando a escolha do r. $\square$

Corolário 4.1.9. *Se, para duas permutações σ e $\tau \in S_k$, existe uma substituição standard S tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_S = m_\tau(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_S \neq 0,$$

então

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ m_\tau(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Demonstração. A fim de podermos aplicar o Lema 4.1.7, façamos a mudança de variável $x'_l = x_{\tau(l)}$, com $1 \leq l \leq k$.

Temos

$$\begin{aligned} m_{\tau^{-1}\sigma}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k) &= x'_{\tau^{-1}\sigma(1)} x'_{\tau^{-1}\sigma(2)} \cdots x'_{\tau^{-1}\sigma(k)} = x_{\tau(\tau^{-1}\sigma(1))} x_{\tau(\tau^{-1}\sigma(2))} \cdots x_{\tau(\tau^{-1}\sigma(k))} \\ &= x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)} = m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \end{aligned}$$

e

$$m_I(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k) = x'_1 x'_2 \cdots x'_k = x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} \cdots x_{\tau(k)} = m_\tau(x_1, x_2 \ldots, x_k). \tag{4.11}$$

Logo, como $m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_S = m_\tau(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_S \neq 0$, segue que

$$m_{\tau^{-1}\sigma}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k)|_S = m_I(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k)|_S \neq 0.$$

Aplicando o lema anterior, temos

$$m_{\tau^{-1}\sigma}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k) \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ m_I(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k).$$

Assim, de (4.1) e (4.11), concluímos que

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ m_\tau(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

como desejávamos mostrar. $\square$

A seguir veremos o principal resultado desta seção.

Teorema 4.1.10. *Se característica de F é zero, então todas as identidades polinomiais graduadas da álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada $\mathcal{M}_n$ são consequências de*

$$x_1x_2 - x_2x_1,\ \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \overline{0}$$

e

$$x_1xx_2 - x_2xx_1,\ \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = -\alpha(x).$$

Demonstração. Já vimos no Lema 4.0.6 que os polinômios (4.1) e (4.2) são identidades graduadas de $\mathcal{M}_n$. Assim o T_n-ideal $\mathcal{I}_n$ gerado pelos polinômios (4.1) e (4.2) está contido em $Id(\mathcal{I}_n)^{gr}$. Queremos mostrar que, se $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq 0$ é uma identidade polinomial graduada de $\mathcal{M}_n$, então $f \in \mathcal{I}_n$. Como a característica de F é zero, podemos supor f multilinear.

Seja r o menor inteiro não negativo tal que o polinômio f pode ser expresso, módulo $\mathcal{I}_n$, como uma combinação linear de r monômios multilineares, ou seja,

$$f \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ \sum_{q=1}^{r} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q},$$

com $0 \neq a_{\sigma_q} \in F$, $\ \sigma_q \in S_k$. A fim de mostrarmos que $f \in \mathcal{I}_n$, basta mostrar que $r = 0$, pois assim teremos $f \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ 0$.

Suponha $r > 0$. Então, pelo Lema 4.1.5, existe uma substituição standard S tal que

$$m_{\sigma_1}|_S \neq 0.$$

Uma vez que f é uma identidade graduada de $\mathcal{M}_n$, então $f|_S = 0$ e assim

$$a_{\sigma_1} m_{\sigma_1}|_S = -\sum_{q=2}^{r} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q}|_S.$$

Como

$$m_{\sigma_q}|_S \in \{E_{i,j} | i, j = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{0\}\,,\ 1 \leq q \leq r,$$

existe pelo menos um número inteiro $p \in \{2, 3, \ldots, r\}$ tal que

$$m_{\sigma_p}|_S = m_{\sigma_1}|_S \neq 0.$$

Pelo Corolário 4.1.9 segue que

$$m_{\sigma_p} \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ m_{\sigma_1}.$$

Portanto,

$$f \equiv_{\mathcal{I}_n} \left(a_{\sigma_1} + a_{\sigma_p}\right) m_{\sigma_1} + \sum_{q=2}^{p-1} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} + \sum_{q=p+1}^{r} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q}.$$

Absurdo, pela escolha do r. Assim,

$$f \equiv_{\mathcal{I}_n} 0.$$

□

4.2 F é um Corpo Infinito

Na seção anterior, estudamos as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $\mathcal{M}_n$, quando F é um corpo de característica zero. Nesta seção, baseados no artigo [3], trataremos as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $\mathcal{M}_n$, no caso mais geral em que F é um corpo infinito. Assim, até o final desta seção, consideraremos que F é um corpo infinito.

Conforme vimos, Vasilovsky [21] provou que, quando F é um corpo de característica zero, todas as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $\mathcal{M}_n$ seguem de (4.1) e (4.2). O mesmo resultado foi encontrado por Azevedo em [3] quando F é um corpo infinito.

No entanto, vale ressaltar que, ao trabalharmos sobre um corpo de característica zero, podemos assumir que os polinômios são multilineares e, com isso, conseguimos o resultado. Quando o corpo é infinito, não podemos, em geral, utilizar desse fato. Sendo assim, foi preciso encontrar outra forma de obter os resultados pretendidos. Em [3], Azevedo utilizou polinômios multi-homogêneos e matrizes genéricas para conseguir os resultados. Desta forma, utilizaremos as definições e notações vistas na Seção 2 do Capítulo 3. Para a conveniência do leitor, lembramos que as matrizes genéricas A_i estão definidas por (3.3).

O próximo resultado nos diz o que ocorre ao avaliarmos um monômio não nulo $\mathbb{Z}_n$-graduado por matrizes genéricas.

Lema 4.2.1. *Para todo monômio não nulo $m(x_1, \ldots, x_k) \in F\langle X\rangle^{gr}$ de comprimento q,* *existem inteiros* $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_q \leq k$ *e* $\{k_1, \ldots, k_q, x\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ *tais que*

$$m(A_1, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_{i_1}^{(k_1)} \cdots y_{i_q}^{(k_q)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \omega_2 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_x \\ \omega_{x+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\omega_r = y_{i_1}^{((k_1+r-2) \bmod n \, + \, 1)} \cdots y_{i_q}^{((k_q+r-2) \bmod n \, + \, 1)}, \quad 2 \leq r \leq n.$

Antes de iniciarmos a demonstração do lema, façamos um exemplo para entender melhor o que acontece com esse monômio m ao avaliarmos nas matrizes A_i's.

Exemplo 4.2.2. *Considere o monômio* $m(x_1, x_2) = x_2^2 x_1 \in F\langle X \rangle^{gr}$, *onde* $\alpha(x_1) = 2$ *e* $\alpha(x_2) = 1$. *Vamos avaliar esse polinômio na subálgebra* $\mathbb{Z}_3$*-graduada de* $M_3(\Omega)$ *gerada pelas matrizes* A_i*'s definidas em* (3.3). *Temos*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_1^{(1)} \\ y_1^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & y_1^{(3)} & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & y_2^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & y_2^{(2)} \\ y_2^{(3)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$A_2^2 A_1 = \begin{pmatrix} 0 & y_2^{(1)} y_2^{(2)} y_1^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & y_2^{(2)} y_2^{(3)} y_1^{(1)} \\ y_2^{(3)} y_2^{(1)} y_1^{(2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que as variáveis $y_i^{(k)}$*'s são comutativas, podemos ordenar os produtos de tal modo que os índices* i*'s estejam em ordem crescente. Teremos então,*

$$A_2^2 A_1 = \begin{pmatrix} 0 & y_1^{(3)} y_2^{(1)} y_2^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & y_1^{(1)} y_2^{(2)} y_2^{(3)} \\ y_1^{(2)} y_2^{(3)} y_2^{(1)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E assim, usando a notação do Lema 4.2.1, temos $q = 3, k = 2, i_1 = 1, i_2 = i_3 = 2$, $x = 2, k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = 2$.

Note que, uma vez que, ordenando os índices, determinamos a primeira linha $y_{i_1}^{(k_1)} y_{i_2}^{(k_2)} y_{i_3}^{(k_3)}$ *(que neste caso é igual a* $y_1^{(3)} y_2^{(1)} y_2^{(2)}$*), conseguimos escrever toda a matriz.*

Basta, para cada $1 \leq j \leq 3$, somarmos 1 ao valor de $(k_j + r - 2) mod\, 3$, obtendo assim o "expoente" t_{j_r} na expressão $\omega_r = y_{i_1}^{(t_{r_1})} y_{i_2}^{(t_{r_2})} y_{i_3}^{(t_{r_3})}$, com $r = 2, 3$. Por exemplo, na segunda linha temos

$$\omega_2 = y_1^{((3+2-2)\mathrm{mod}3+1)} y_2^{((1+2-2)\mathrm{mod}3+1)} y_3^{((2+2-2)\mathrm{mod}3+1)} = y_1^{(1)} y_2^{(2)} y_2^{(3)}.$$

Vale ressaltar que essa não é a única forma de reescrever esse produto, pois, como os índices $i_2 = i_3 = 2$, podemos, na primeira linha, também trocar a ordem das variáveis que aparecem com esses índices (escrevendo $y_1^{(3)} y_2^{(2)} y_2^{(1)}$) e ainda assim manteremos nossa condição $i_1 \leq i_2 \leq i_3$ (obtendo então ω_2 e ω_3 de modo análogo ao que já foi feito acima).

Demonstração. A prova desse lema utiliza as ideias do exemplo acima. Usaremos indução sobre o comprimento q.

Se $q = 1$, temos que o monômio m tem comprimento 1, ou seja,

$$m(x_1) = x_1.$$

Assim,

$$m(A_1) = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_1^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & y_1^{(2)} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_1^{(n-\alpha(x_1))} \\ y_1^{(n-\alpha(x_1)+1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & y_1^{(n)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, $i_1 = 1, k_1 = 1, x = n - \alpha(x_1)$ e $\omega_r = y_1^{(r-1) \bmod n \, + \, 1}$, $2 \leq r \leq n$, e assim temos o resultado.

Se $q > 1$, considere o monômio $n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de tamanho $q - 1$, obtido excluindo a última variável do monômio m, ou seja,

$$m(x_1, \ldots, x_k) = n(x_1, \ldots, x_k)x_l, \text{ para algum } 1 \leq l \leq k.$$

Nossa hipótese de indução é que o resultado é válido para o monômio $n(x_1, \ldots, x_k)$, então, existem inteiros $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{q-1} \leq k$ e $\{k_1, k_2, \ldots, k_{q-1}, t\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$

tais que

$$n(A_1,A_2,\ldots,A_k)=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_{i_1}^{(k_1)}\cdots y_{i_{q-1}}^{(k_{q-1})} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \eta_2 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_t \\ \eta_{t+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \eta_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\eta_r = y_{i_1}^{((k_1+r-2)\mathrm{mod}n+1)}\cdots y_{i_{q-1}}^{((k_{q-1}+r-2)\mathrm{mod}n+1)},\quad 2\leq r\leq n.$

Agora, $n(A_1,A_2,\ldots,A_k)A_l$ é igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_{i_1}^{(k_1)}\cdots y_{i_{q-1}}^{(k_{q-1})} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \eta_2 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_t \\ \eta_{t+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \eta_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_l^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & y_l^{(2)} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_l^{(n-\alpha(x_l))} \\ y_l^{(n-\alpha(x_l)+1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & y_l^{(n)} & 0 & 9 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

e, pelo Lema 3.2.3, esse produto é igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_{i_1}^{(k_1)}\cdots y_{i_{q-1}}^{(k_{q-1})}y_l^{(j_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \eta_2 y_l^{(j_2)} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_x y_l^{(j_x)} \\ \eta_{x+1}y_l^{(j_{x+1})} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \eta_n y_l^{(j_n)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $j_r=(n-t+r-1)\mathrm{mod}n+1$ e $x=n-(n-t+\alpha(x_l))\mathrm{mod}n$.

Note que $j_1=(n-t)\mathrm{mod}n+1$ e assim

$$j_r=((n-t+1)+r-2)\mathrm{mod}n+1=(j_1+r+2)\mathrm{mod}n+1,$$

para $2\leq r\leq n$.

Desta forma, tomando $i_q = l$ e $k_q = j_1$, temos

$$m(A_1, \ldots, A_k) = n(A_1, \ldots, A_k)A_l = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_{i_1}^{(k_1)} \cdots y_{i_q}^{(k_q)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \omega_2 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_x \\ \omega_{x+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\omega_r = \eta_r y_{i_q}^{(j_r)} = y_{i_1}^{((k_1+r-2)\mathrm{mod} n+1)} \cdots y_{i_{q-1}}^{((k_{q-1}+r-2)\mathrm{mod} n+1)} y_{i_q}^{((k_q+r-2)\mathrm{mod} n+1)}$, $2 \leq r \leq n$ e $\{k_1, \ldots, k_q, x\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Note que temos $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{q-1} \leq k$ e $i_q \leq k$, mas não temos a garantia que $i_{q-1} \leq i_q$. Assim, reordenando as variáveis, se necessário, concluímos nosso teorema. □

O próximo lema é uma consequência imediata do Lema 4.2.1.

Lema 4.2.3. *Sejam $m(x_1, \ldots, x_k)$ e $n(x_1, \ldots, x_k)$ dois monômios de $F\langle X\rangle^{gr}$. Se as matrizes $m(A_1, \ldots, A_k)$ e $n(A_1, \ldots, A_k)$ têm, na primeira linha, a mesma entrada não nula, então $m(A_1, \ldots, A_k) = n(A_1, \ldots, A_k)$.*

Demonstração. Uma vez que demonstramos o Lema 4.2.1, sabemos que existem $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_q \leq k$ e $\{k_1, k_2, \ldots, k_q, x\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, assim como existem $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_p \leq k$ e $\{l_1, l_2, \ldots, l_p, t\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que

$$m(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_{i_1}^{(k_1)} \cdots y_{i_q}^{(k_q)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \omega_2 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_x \\ \omega_{x+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$n(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_{j_1}^{(l_1)} \cdots y_{j_p}^{(l_p)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \eta_2 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_t \\ \eta_{t+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \eta_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\omega_r = y_{i_1}^{((k_1+r-2)\mathrm{mod}n+1)} \cdots y_{i_q}^{((k_q+r-2)\mathrm{mod}n+1)}$ e $\eta_r = y_{j_1}^{((l_1+r-2)\mathrm{mod}n+1)} \cdots y_{j_p}^{((l_p+r-2)\mathrm{mod}\ n\ +\ 1)}$.

Como a primeira entrada não nula das matrizes coincidem, temos que $x = t$ e $q = p$. E ainda, como $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_q$ e $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_p$, segue que

$$i_1 = j_1,\ i_2 = j_2, \ldots,\ i_q = j_p.$$

Reordenando, se necessário, concluímos que

$$k_1 = l_1,\ k_2 = l_2, \ldots,\ k_q = l_q.$$

Logo, $\omega_2 = \eta_2,\ \omega_3 = \eta_3,\ \ldots, \omega_n = \eta_n$, e assim concluímos o resultado. $\square$

O próximo lema é uma importante ferramenta para prosseguirmos nossos estudos.

Lema 4.2.4. *Sejam $m(x_1, \ldots, x_k)$ e $n(x_1, \ldots, x_k)$ dois monômios de $F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $m(A_1, \ldots, A_k) = n(A_1, \ldots, A_k)$. Se x_p é uma variável de $m(x_1, \ldots, x_k)$ e m_1, m_2 são monômios de $F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $m = m_1 x_p m_2$, então existem monômios $n_1, n_2 \in F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $n = n_1 x_p n_2$ e $\alpha(m_1) = \alpha(n_1)$.*

Demonstração. Seja x_p uma variável de $m(x_1 \ldots, x_k)$ e suponha que existam m_1 e m_2 $\in F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $m = m_1 x_p m_2$. Pelo Lema 4.2.1 sabemos que existem monômios $\omega_1, \ldots, \omega_n, \eta_1, \ldots, \eta_n \in \Omega$ e inteiros $0 \leq i, j \leq n-1$ tais que

$$m_1(A_1, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \omega_2 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_{n-i} \\ \omega_{n-i+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$m_2(A_1,\ldots,A_k)=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \eta_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \eta_2 & & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_{n-j}\\ \eta_{n-j+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \eta_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que os graus homogêneos de $m_1(A_1,\ldots,A_k)$ e $m_2(A_1,\ldots,A_k)$ em R são, respectivamente, $\bar{i}$ e $\bar{j}$. Pelo Lema 3.2.3, temos

$$m_1(A_1,\ldots,A_k)A_p=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \omega_1 y_p^{(i_1)} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \omega_2 y_p^{(i_2)} & & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_x y_p^{(i_x)}\\ \omega_{x+1} y_p^{(i_{x+1})} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \omega_n y_p^{(i_n)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $i_r=(i+r-1)\mathrm{mod} n+1$ e $x=n-(i+\alpha(x_p)) \bmod n$. Logo,

$$\begin{aligned} m(A_1,\ldots,A_k) &= (m_1(A_1,\ldots,A_k)A_p)m_2(A_1,\ldots,A_k)\\ &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \omega_1 y_p^{(i_1)}\eta_{j_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \omega_2 y_p^{(i_2)}\eta_{j_2} & & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \omega_t y_p^{(i_t)}\eta_{j_t}\\ \omega_{t+1} y_p^{(i_{t+1})}\eta_{j_{t+1}} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \omega_n y_p^{(i_n)}\eta_{j_n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $j_s=(n-x+s-1)\mathrm{mod} n+1$ e $t=n-(n-x+j)\mathrm{mod} n$.

Desta forma, a variável $y_p^{(i_1)}$ deve aparecer pelo menos uma vez na primeira linha de $n(A_1,\ldots,A_k)$, pois, por hipótese, $m(A_1,\ldots,A_k)=n(A_1,\ldots,A_k)$. Assim, existem monômios n_1 e $n_2\in F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $n=n_1x_pn_2$ e o grau homogêneo de $n_1(A_1,\ldots,A_k)$ em R é $\bar{i}$, pois senão a variável $y_p^{(i_1)}$ não apareceria na primeira linha de $n(A_1,\ldots,A_k)$. Logo, $m_1(A_1,\ldots,A_k)$ e $n_1(A_1,\ldots,A_k)$ têm o mesmo grau homogêneo em R e, portanto, $\alpha(m_1)=\alpha(n_1)$. $\square$

Observação 4.2.5. *No caso geral, sejam $m(x_1, \ldots, x_k)$ e $n(x_1, \ldots, x_k)$ dois monômios de $F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $m(A_1, \ldots, A_k) = n(A_1, \ldots, A_k)$. Procedendo de modo análogo ao lema acima, obtemos que se x_p é uma variável de $m(x_1, \ldots, x_k)$ e $m_1, \ldots m_l$ são monômios de $F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $m = m_1x_pm_2x_pm_3\cdots m_{l-1}x_pm_l$, então existem monômios $n_1, \ldots, n_l \in F\langle X\rangle^{gr}$ e uma correspondência biunívoca $\varphi : \{1, \ldots, l\} \to \{1, \ldots, l\}$ tais que $n = n_1x_pn_2x_pn_3\cdots n_{l-1}x_pn_l$ e $\alpha(m_1x_pm_2x_pm_3\cdots m_t) = \alpha(n_1x_pn_2x_pn_3\cdots n_{\varphi(t)})$, para todo $t = 1, 2, \ldots, l$.*

A fim de ilustrar a correspondência biunívoca $\varphi : \{1, \ldots, l\} \to \{1, \ldots, l\}$ mencionada acima, vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 4.2.6. *Considerando a subálgebra R 2-graduada de $M_2(\Omega)$ temos que, se $m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3x_1x_1x_2$ e $n(x_1, x_2, x_3) = x_2x_1x_1x_1x_3$ são dois monômios de $F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $\alpha(x_1) = \alpha(x_3) = \overline{1}, \alpha(x_2) = \overline{0}$, então*

$$m(A_1, A_2, A_3) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}y_3^{(2)}y_1^{(1)}y_1^{(2)}y_2^{(1)} & 0 \\ 0 & y_1^{(2)}y_3^{(1)}y_1^{(2)}y_1^{(1)}y_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

e

$$n(A_1, A_2, A_3) = \begin{pmatrix} y_2^{(1)}y_1^{(1)}y_1^{(2)}y_1^{(1)}y_3^{(2)} & 0 \\ 0 & y_2^{(2)}y_1^{(2)}y_1^{(1)}y_1^{(2)}y_3^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Como as variáveis $y_i^{(k)},\ 1 \leq k \leq 2,\ 1 \leq i \leq 3$ são comutativas, segue que

$$m(A_1, A_2, A_3) = n(A_1, A_2, A_3),$$

e assim a primeira hipótese da Observação 4.2.5 é satisfeita. Consideremos então a variável x_1.

Se

$$m = \underbrace{1}_{m_1} x_1 \underbrace{x_3x_1x_1x_2}_{m_2},$$

então estamos nas condições do Lema 4.2.4 e temos ainda que $\alpha(m_1) = \overline{0}$ e $\alpha(m_1x_1m_2) = \overline{0}$. Note que, se considerarmos tanto a decomposição

$$n = \underbrace{x_2}_{n_1} x_1 \underbrace{x_1x_1x_3}_{n_2},$$

como a decomposição

$$n = \underbrace{x_2x_1x_1}_{n_1}x_1\underbrace{x_3}_{n_2},$$

teremos $\alpha(n_1) = \alpha(m_1) = \overline{0}$ *e* $\alpha(n_1x_1n_2) = \alpha(m_1x_1m_2) = \overline{0}$ *e assim basta tomar* φ *a aplicação identidade definida no conjunto* $\{1,2\}$.

Vale ressaltar que, em geral, sempre que estamos nas condições do Lema 4.2.4, podemos tomar φ *a aplicação identidade.*

Por outro lado, se

$$m = \underbrace{1}_{m_1}x_1\underbrace{x_3}_{m_2}x_1\underbrace{1}_{m_3}x_1\underbrace{x_2}_{m_4},$$

temos $\alpha(m_1) = \overline{0}$, $\alpha(m_1x_1m_2) = \overline{0}$, $\alpha(m_1x_1m_2x_1m_3) = \overline{1}$ *e* $\alpha(m_1x_1m_2x_1m_3x_1m_4) = \overline{0}$. *Neste caso, existe uma única maneira de decompor o monômio* n *na forma* $n = n_1x_1n_2x_1n_3x_1n_4$. *Essa decomposição é dada por*

$$n = \underbrace{x_2}_{n_1}x_1\underbrace{1}_{n_2}x_1\underbrace{1}_{n_3}x_1\underbrace{x_3}_{n_4},$$

e assim, temos $\alpha(n_1) = \overline{0}$, $\alpha(n_1x_1n_2) = \overline{1}$, $\alpha(n_1x_1n_2x_1n_3) = \overline{0}$ *e* $\alpha(n_1x_1n_2x_1n_3x_1n_4) = \overline{0}$. *Neste caso, não podemos considerar* φ *a aplicação identidade, pois* $\alpha(m_1x_1m_2) \neq \alpha(n_1x_1n_2)$. *No entanto, se tomarmos a permutação* $\varphi : 1 \to 1,\ 2 \to 3,\ 3 \to 2,\ 4 \to 4$, *teremos:*

$$\alpha(m_1) = \underbrace{\alpha(n_1)}_{\alpha(n_{\varphi(1)})} = \overline{0};$$

$$\alpha(m_1x_1m_2) = \underbrace{\alpha(n_1x_1n_2x_1n_3)}_{\alpha(n_1x_1\cdots n_{\varphi(2)})} = \overline{0};$$

$$\alpha(m_1x_1m_2x_1m_3) = \underbrace{\alpha(n_1x_1n_2)}_{\alpha(n_1x_1n_{\varphi(3)})} = \overline{1};$$

$$\alpha(m_1x_1m_2x_1m_3x_1m_4) = \underbrace{\alpha(n_1x_1n_2x_1n_3x_1n_4)}_{\alpha(n_1x_1\cdots n_{\varphi(4)})} = \overline{0}.$$

Note que, em geral, se $m = m_1x_1m_2x_1\cdots x_1m_l$ *então, ao decompor* n, *é possível, usando as ideias do Lema 4.2.4, encontrar uma decomposição na forma* $n = n_1x_1n_2x_1\cdots x_1n_l$ *tal que, ao se comparar os graus homogêneos dos termos* $m = m_1x_1m_2x_1\cdots x_1m_t$, *com* $t = 1,2,\ldots,l$, *com aqueles da forma* $n = n_1x_1n_2x_1\cdots x_1n_s$, *com* $s = 1,2,\ldots,l$, *teremos* *a mesma quantidade de cada grau homogêneo e assim podemos sempre estabelecer uma bijeção* φ.

O próximo lema nos diz que se $m(A_1, \ldots, A_k) = n(A_1, \ldots, A_k)$, então teremos que $m(x_1, \ldots, x_k) \equiv_{\mathcal{I}_n} n(x_1, \ldots, x_k)$.

Lema 4.2.7. *Sejam* $m(x_1, \ldots, x_k)$ *e* $n(x_1, \ldots, x_k)$ *dois monômios de* $F\langle X\rangle^{gr}$. *Se* $m(A_1, \ldots, A_k) = n(A_1, \ldots, A_k)$, *então* $m(x_1, \ldots, x_k) \equiv_{\mathcal{I}_n} n(x_1, \ldots, x_k)$.

Demonstração. Seja q o comprimento do monômio m. Faremos indução em q. A ideia é encontrar monômios com graus homogêneos apropriados para que possamos trabalhar módulo $\mathcal{I}_n$. Se $q = 1$, temos obviamente o resultado.

Suponha agora que $q > 1$. Seja x_i a primeira variável de m. Então $m = 1x_i m'$, para algum $m' \in F\langle X\rangle^{gr}$, e assim, pelo Lema 4.2.4, existem dois monômios $n_1, n_2 \in F\langle X\rangle^{gr}$ tais que

$$n = n_1 x_i n_2, \text{ com } \alpha(n_1) = \alpha(1) = \overline{0}.$$

Consideremos os três casos possíveis e mostremos que, em cada caso, existirão quatro monômios $n_7, n_8, n_9, n_{10} \in F\langle X\rangle^{gr}$ tais que

$$n = n_7 n_8 x_i n_9 n_{10}, \ \alpha(n_7 n_8) = \overline{0} \text{ e } \alpha(n_8 x_i n_9) = \overline{0}.$$

Caso 1. Existem dois monômios m_1 e m_2 em $F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $m = x_i m_1 x_i m_2$ e $\alpha(x_i m_1) = \overline{0}$. Se denotarmos $m_0 = 1$, temos $m = m_0 x_i m_1 x_i m_2$, e assim

$$\alpha(m_0) = \overline{0}, \quad \alpha(m_0 x_i m_1) = \overline{0} \text{ e } \alpha(m_0 x_i m_1 x_i m_2) = \alpha(m). \tag{4.12}$$

Pela Observação 4.2.5, existem três monômios $n_3, n_4, n_5 \in F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $n = n_3 x_i n_4 x_i n_5$ e uma correspondência biunívoca $\varphi : \{0, 1, 2\} \to \{3, 4, 5\}$ tal que $\alpha(m_1 x_i m_2 x_i m_3 \cdots m_t) = \alpha(n_1 x_i n_2 x_i n_3 \cdots n_{\varphi(t)})$ com $t = 0, 1, 2$. Assim, cada um dos graus homogêneos

$$\alpha(n_3), \ \alpha(n_3 x_i n_4) \text{ e } \alpha(n_3 x_i n_4 x_i n_5) = \alpha(n)$$

está associado a exatamente um dos graus homogêneos de (4.12). Como $\alpha(m) = \alpha(n)$ (pois $m(A_1, \ldots, A_k) = n(A_1, \ldots, A_k)$) teremos, necessariamente,

$$\alpha(n_3) = \overline{0} \text{ e } \alpha(n_3 x_i n_4) = \overline{0}.$$

Se tomarmos

$$n = \underbrace{1}_{n_7} \underbrace{n_3}_{n_8} x_i \underbrace{n_4}_{n_9} \underbrace{x_i n_5}_{n_{10}},$$

teremos $\alpha(n_7 n_8) = \alpha(n_3) = \overline{0}$ e $\alpha(n_8 x_i n_9) = \alpha(n_3 x_i n_4) = \overline{0}$.

Caso 2. Existem duas variáveis x_a e x_b e seis monômios $m_1, m_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ em $F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $m = m_1 x_a x_b m_2$, $n = n_3 x_a n_4 x_i n_5 x_b n_6$, $n_1 = n_3 x_a n_4$, $\alpha(m_1) = \alpha(n_3)$ e $\alpha(m_1 x_a) = \alpha(n_3 x_a n_4 x_i n_5)$. Neste caso, como $\alpha(m_1) = \alpha(n_3)$, segue que $\alpha(m_1 x_a) = \alpha(n_3 x_a)$. Logo, $\alpha(n_3 x_a) = \alpha(m_1 x_a) = \alpha(n_3 x_a n_4 x_i n_5)$, e assim, $\alpha(n_4 x_i n_5) = \overline{0}$.

Tomando

$$n = \underbrace{n_3 x_a}_{n_7} \underbrace{n_4}_{n_8} x_i \underbrace{n_5}_{n_9} \underbrace{x_b n_6}_{n_{10}},$$

temos $\alpha(n_7 n_8) = \alpha(n_3 x_a n_4) = \alpha(n_1) = \overline{0}$ e $\alpha(n_8 x_i n_9) = \alpha(n_4 x_i n_5) = \overline{0}$.

Caso 3. Não ocorre nenhum dos dois casos anteriores. Seja x_k uma variável que aparece em n_1. Então existem monômios $n_3, n_4 \in F\langle X\rangle^{gr}$ tais que

$$n_1 = n_3 x_k n_4.$$

Assim, $n = n_3 x_k \widehat{n_4}$, com $\widehat{n_4} = n_4 x_i n_2$. Pelo Lema 4.2.4, existem dois monômios $\widetilde{m_1}, \widetilde{m_2} \in F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $m = \widetilde{m_1} x_k \widetilde{m_2}$, com $\alpha(\widetilde{m_1}) = \alpha(n_3)$. Se escrevemos

$$m = x_{i_1} \cdots x_{i_q},$$

então temos que existe $r \in \{1, \ldots, q\}$ tal que $k = i_r$ e assim $\widetilde{m_1} = x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}}$ o que implica que

$$\alpha(n_3) = \alpha(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}}).$$

Usando novamente o Lema 4.2.4, mas agora considerando a decomposição $m = \underbrace{x_{i_1} \cdots x_{i_r}} x_{i_{r+1}} \underbrace{x_{i_{r+2}} \cdots x_{i_q}}$, sabemos que existem monômios $n_5, n_6 \in F\langle X\rangle^{gr}$ tais que

$$n = n_5 x_{i_{r+1}} n_6 \quad \text{com} \quad \alpha(n_5) = \alpha(x_{i_1} \cdots x_{i_r}).$$

Como estamos na situação em que não ocorre nenhum dos casos anteriores, o comprimento de $n_5 x_{i_{r+1}}$ precisa ser menor que o comprimento de $n_1 x_i$.

De fato, se o comprimento de $n_5x_{i_{r+1}}$ é igual ao comprimento de n_1x_i, então $n_5 = n_1$ e $x_{i_{r+1}} = x_i$ e, como $x_{i_1} = x_i$ (já que x_i é a primeira variável de m), temos

$$m = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}x_{i_{r+1}}x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_q} = x_i\underbrace{x_{i_2}\cdots x_{i_r}}_{m_1}x_i\underbrace{x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_q}}_{m_2},$$

com $\alpha(x_im_1) = \alpha(x_i\cdots x_{i_r}) = \alpha(n_5) = \alpha(n_1) = \overline{0}$, ocorrendo o Caso 1. Por outro lado, se o comprimento de $n_5x_{i_{r+1}}$ é maior que o comprimento de n_1x_i, como $n = n_5x_{i_{r+1}}n_6$ e $n = \underbrace{n_3x_{i_r}n_4}_{n_1}x_in_2$, segue que $x_{i_{r+1}}$ aparece em n_2, e assim, existe um monômio $\widehat{n_5} \in F\langle X\rangle^{gr}$ tal que $n_2 = \widehat{n_5}x_{i_{r+1}}n_6$. Se tomarmos $x_a = x_{i_r}$ e $x_b = x_{i_{r+1}}$, temos

$$m = x_i\cdots x_{i_{r-1}}x_{i_r}x_{i_{r+1}}\cdots x_{i_q} = \underbrace{x_i\cdots x_{i_{r-1}}}_{m_1'}x_ax_b\underbrace{x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_q}}_{m_2'} \quad \text{e} \quad n = \underbrace{n_3x_an_4x_i\widehat{n_5}}_{n_5}x_bn_6,$$

e ainda, $\alpha(m_1') = \alpha(x_i\cdots x_{i_{r-1}}) = \alpha(n_3)$, $\alpha(m_1'x_a) = \alpha(x_i\cdots x_{i_r}) = \alpha(n_5) = \alpha(n_3x_an_4x_i\widehat{n_5})$, ou seja, estamos nas condições do Caso 2.

Assim, o comprimento de $n_5x_{i_{r+1}}$ é menor ou igual ao comprimento de n_1 e, portanto, $x_{i_{r+1}}$ também aparece em n_1. Podemos repetir esse mesmo processo para $r+1$, $r+2,\ldots$, com isso, concluímos que existe um $r_0 \in \{1,\ldots,q\}$ tal que, para $r \geq r_0$, todo x_{i_r} aparece em n_1 o mesmo número de vezes que em $x_{i_{r_0}}x_{i_{r_0+1}}\cdots x_{i_q}$ e, toda variável de n_1 está em $x_{i_{r_0}}x_{i_{r_0+1}}\cdots x_{i_q}$. Logo

$$\overline{0} = \alpha(n_1) = \alpha(x_{i_{r_0}}x_{i_{r_0+1}}\cdots x_{i_q}).$$

Seja x_j a primeira variável de n. Então, pelo Lema 4.2.4 existem monômios $m_4, \widetilde{m_5} \in F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $m = m_4x_j\widetilde{m_5}$, com $\alpha(m_4) = \alpha(1) = \overline{0}$. Como x_j aparece em $x_{i_{r_0}}x_{i_{r_0+1}}\cdots x_{i_q}$, existem monômios $\widetilde{m_3}, \widetilde{m_4} \in F\langle X\rangle^{gr}$ tais que

$$m = \widetilde{m_3}\widetilde{m_4}x_j\widetilde{m_5}$$

com $\widetilde{m_4}x_j\widetilde{m_5} = x_{i_{r_0}}x_{i_{r_0+1}}\cdots x_{i_q}$ e $\alpha(\widetilde{m_3}\widetilde{m_4}) = \alpha(m_4) = \overline{0}$. Então, $\alpha(\widetilde{m_4}x_j\widetilde{m_5}) = \alpha(x_{i_{r_0}}x_{i_{r_0+1}}\cdots x_{i_q}) = \alpha(n_1) = \overline{0}$.

Trocando as letras m por n (e consequentemente $\widetilde{m_3}, \widetilde{m_4}, \widetilde{m_5}$ e x_j por $\widetilde{n_3}, \widetilde{n_4}, \widetilde{n_5}$ e x_i, respectivamente) obtemos

$$n = \widetilde{n_3}\widetilde{n_4}x_i\widetilde{n_5} \text{ com } \alpha(\widetilde{n_3}\widetilde{n_4}) = \overline{0} \text{ e } \alpha(\widetilde{n_4}x_i\widetilde{n_5}) = \overline{0}.$$

Tomando

$$n = \underbrace{\widetilde{n_3}}_{n_7}\,\underbrace{\widetilde{n_4}}_{n_8}\,x_i\,\underbrace{\widetilde{n_5}}_{n_9}\,\underbrace{1}_{n_{10}},$$

temos $\alpha(n_7n_8) = \alpha(\widetilde{n_3}\widetilde{n_4}) = \overline{0}$ e $\alpha(n_8x_in_9) = \alpha(\widetilde{n_4}x_i\widetilde{n_5}) = \overline{0}$.

Assim, em todos os casos, existem quatro monômios $n_7, n_8, n_9, n_{10} \in F\langle X\rangle^{gr}$ tais que

$$n = n_7n_8x_in_9n_{10},\ \ \alpha(n_7n_8) = \overline{0} \text{ e } \alpha(n_8x_in_9) = \overline{0}.$$

Então, definimos:

$$\mathbf{w}(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} x_in_9n_7n_8n_{10}, & \text{se } \ \alpha(n_8) = \overline{0}, \\ x_in_9n_8n_7n_{10}, & \text{se } \ \alpha(n_8) \neq \overline{0}. \end{cases}$$

- Se $\alpha(n_8) = \overline{0}$, como $\alpha(n_8x_in_9) = \overline{0}$, segue que $\alpha(x_in_9) = \overline{0}$. Assim, como $\alpha(x_in_9) = \overline{0}$ e $\alpha(n_7n_8) = \overline{0}$, usando a identidade $x_1x_2 = x_2x_1$, com $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \overline{0}$, temos que

$$\underbrace{(x_in_9)(n_7n_8)n_{10}}_{\mathbf{w}(x_1,\ldots,x_k)} \equiv_{\mathcal{I}_n} \underbrace{(n_7n_8)(x_in_9)n_{10}}_{n(x_1,\ldots,x_k)}.$$

- Se $(n_8) \neq \overline{0}$, como $\alpha(n_7n_8) = \overline{0}$ e $\alpha(n_8x_in_9) = \overline{0}$, temos que $\alpha(n_7) = \alpha(x_in_9) = -\alpha(n_8)$ e, usando a identidade $x_1xx_2 = x_2xx_1$, com $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = -\alpha(x)$, concluímos que

$$\underbrace{(x_in_9)n_8(n_7)n_{10}}_{\mathbf{w}(x_1,\ldots,x_k)} \equiv_{\mathcal{I}_n} \underbrace{(n_7)n_8(x_in_9)n_{10}}_{n(x_1,\ldots,x_k)}.$$

Portanto, em todas as situações, temos

$$\mathbf{w}(x_1, \ldots, x_k) \equiv_{\mathcal{I}_n} n(x_1, \ldots, x_k). \tag{4.13}$$

Assim,

$$\mathbf{w}(x_1, \ldots, x_k) - n(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{I}_n.$$

Do Lema 4.0.6, temos que $\mathcal{I}_n \subseteq Id(\mathcal{M}_n)^{gr}$. Pelo isomorfismo provado no Teorema 3.2.5, concluímos que $Id(R)^{gr} = Id\left(\frac{F\langle X\rangle^{gr}}{Id(\mathcal{M}_n)^{gr}}\right)^{gr} = Id(\mathcal{M}_n)^{gr}$, onde R é a álgebra das matrizes genéricas graduadas. Então,

$$\mathbf{w}(A_1, \ldots, A_k) = n(A_1, \ldots, A_k).$$

Como $n(A_1, \ldots, A_k) = m(A_1, \ldots, A_k)$, temos

$$\mathbf{w}(A_1, \ldots, A_k) = m(A_1, \ldots, A_k).$$

Sejam agora $\mathbf{w}_0$ e m_0 dois monômios de $F\langle X\rangle^{gr}$ tais que $\mathbf{w} = x_i\mathbf{w}_0$ e $m = x_i m_0$. Como $\mathbf{w}(A_1, \ldots, A_k) = m(A_1, \ldots, A_k)$, do Lema 3.2.3 segue que

$$\mathbf{w}_0(A_1, \ldots, A_k) = m_0(A_1, \ldots, A_k).$$

Como o comprimento de $\mathbf{w}_0$ é igual ao comprimento de m_0 que é $k-1$, usando nossa hipótese de indução, temos

$$\mathbf{w}_0(x_1, \ldots, x_k) \equiv_{\mathcal{I}_n} m_0(x_1, \ldots, x_k).$$

Assim,

$$\underbrace{x_i\mathbf{w}_0(x_1, \ldots, x_k)}_{\mathbf{w}(x_1,\ldots,x_k)} \equiv_{\mathcal{I}_n} \underbrace{x_i m_0(x_1, \ldots, x_k)}_{m(x_1,\ldots,x_k)}$$

e, portanto, de (4.13) temos

$$n(x_1, \ldots, x_k) \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \mathbf{w}(x_1, \ldots, x_k) \equiv_{\mathcal{I}_n} m(x_1, \ldots, x_k),$$

provando o lema. □

Demonstraremos agora o teorema principal desta seção. A demonstração desse teorema é análoga à demonstração do Teorema 4.1.10, com as devidas adaptações por estarmos no caso em que F é um corpo infinito.

Teorema 4.2.8. *Sobre um corpo infinito de característica qualquer, todas as identidades polinomiais graduadas da álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada $\mathcal{M}_n$ são consequências de*

$$x_1x_2 - x_2x_1,\ \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \overline{0}$$

e

$$x_1xx_2 - x_2xx_1,\ \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = -\alpha(x).$$

Demonstração. Considerando $\mathcal{I}_n$ o T_n-ideal gerado pelas identidades (4.1) e (4.2), foi provado no Lema 4.0.6 que (4.1) e (4.2) são identidades graduadas de $\mathcal{M}_n$, assim, $\mathcal{I}_n \subseteq$

$Id(\mathcal{M}_n)^{gr}$. Para concluir a prova do teorema, basta mostrar a inclusão contrária, ou seja, queremos mostrar que se $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq 0$ é uma identidade polinomial graduada de $\mathcal{M}_n$, então $f \in \mathcal{I}_n$. Pelo Teorema 2.2.13, podemos supor que f é uma identidade graduada multi-homogênea de $\mathcal{M}_n$.

Seja r o menor inteiro não negativo tal que o polinômio f pode ser expresso, módulo $\mathcal{I}_n$, como uma combinação linear de r monômios multi-homogêneos, ou seja,

$$f \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ \sum_{q=1}^{r} a_q m_q,$$

com $0 \neq a_q \in F, \quad m_q \ \in \ F\langle X \rangle, \quad 1 \leq q \leq r$. A fim de mostrarmos que $f \in \mathcal{I}_n$, basta mostrar que $r = 0$, pois assim teremos $f \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ 0$.

Suponhamos $r > 0$. Como f é uma identidade graduada de $\mathcal{M}_n$ e $Id(R)^{gr} = Id\left(\frac{F\langle X \rangle^{gr}}{Id(\mathcal{M}_n)^{gr}}\right)^{gr} = Id(\mathcal{M}_n)^{gr}$, então,

$$f(A_1, \ldots, A_k) = 0$$

e assim

$$a_1 m_1(A_1, \ldots, A_k) = -\sum_{q=2}^{r} a_q m_q(A_1, \ldots, A_k).$$

Como as entradas não nulas são monômios de R, segue que existe pelo menos um número inteiro $p \in \{2, 3, \ldots, r\}$ tal que $m_1(A_1, \ldots, A_k)$ e $m_p(A_1, \ldots, A_k)$ têm, na primeira linha, a mesma entrada não nula.

Pelo Lema 4.2.3 segue que $m_1(A_1, \ldots, A_k) = m_p(A_1, \ldots, A_k)$ e assim, pelo Lema 4.2.7, temos

$$m_1 \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ m_p.$$

Portanto,

$$f \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ (a_1 + a_p)\, m_1 + \sum_{q=2}^{p-1} a_q m_q + \sum_{q=p+1}^{r} a_q m_q.$$

Absurdo, pela escolha do r. Assim,

$$f \ \equiv_{\mathcal{I}_n} \ 0.$$

$\square$

Considerações Finais

A álgebra de matrizes $M_n(F)$ se destaca por ser uma das mais importantes PI-álgebras e por ser T-prima. Conforme vimos, $M_n(F)$ possui uma $\mathbb{Z}_n$-graduação natural dada por $M_n(F) = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}_n} M_n(F)^{(\alpha)}$, onde $M_n(F)^{(\alpha)}$ é o subespaço de $M_n(F)$ gerado por todas as matrizes elementares E_{ij} tais que $\overline{j-i} = \alpha$. Nesta dissertação, estudamos os resultados de Vasilovsky ([21]) e Azevedo ([3]), os quais encontraram, por diferentes métodos, uma mesma base para as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $\mathcal{M}_n$, nos casos em que F é um corpo de característica zero e um corpo infinito de característica qualquer, respectivamente. Mais precisamente, eles provaram que as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $\mathcal{M}_n$ são consequências dos polinômios $x_1x_2 - x_2x_1$, com $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \overline{0}$, e $x_1xx_2 - x_2xx_1$, com $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = -\alpha(x)$.

É interessante mencionar que, conforme relatado pelo próprio Vasilovsky em [20], ao tentar descrever as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $\mathcal{M}_n$, o autor encontrou uma base para as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $M_n(F)$, no caso em que a característica de F é zero. Mais precisamente, Vasilovsky considerou $M_n(F)$ munida de sua natural $\mathbb{Z}$-graduação $M_n(F) = \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} M_n(F)^{(t)}$, onde $M_n(F)^{(t)}$ é o subespaço de $M_n(F)$ gerado por todas as matrizes elementares E_{ij} tais que $j - i = t$. Assim, $M_n(F)^{(t)}$ consiste de matrizes da forma

- $\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$, se $t = 0$;

- $$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,t+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2,t+2} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-t,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se} \quad 0 < t \leq n-1;$$

- $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{t+1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{t+2,2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-t} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se} \quad -(n-1) \leq t < 0;$$

- $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se} \quad |t| \geq n,$$

onde todas as entradas das matrizes acima são elementos de F.

Note que, baseados no estudo do caso $\mathbb{Z}_n$-graduado, temos que claramente

$$x_1x_2 - x_2x_1, \text{ com } \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$$

e

$$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1, \text{ com } \alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2)$$

são identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $M_n(F)$. Além disso, desde que $M_n(F)^{(t)} = 0$ se $|t| \geq n$, temos também que

$$x_1, \text{ com } |\alpha(x_1)| \geq n$$

é uma identidade polinomial $\mathbb{Z}$-graduada de $M_n(F)$.

Assim, se dado um monômio $\mathbb{Z}$-graduado multilinear $m(x_1, \ldots, x_r) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}$ e inteiros $1 \leq p \leq q \leq r$, denotamos por $\left|\alpha(m^{[p,q]})\right|$ o módulo do grau homogêneo da subpalavra $m^{[p,q]}$ (ver Definição 4.1.3) e consideramos

$$\widehat{\alpha}(m) := \max\{\left|\alpha(m^{[p,q]})\right| \mid 1 \leq p \leq q \leq r\},$$

então, se $\widehat{\alpha}(m) \geq n$ temos que m é uma identidade $\mathbb{Z}$-graduada de $M_n(F)$.

Desta forma, precisamos nos ater apenas aos monômios multilineares m tais que $\widehat{\alpha}(m) \leq n-1$. Utilizando polinômios multilineares, Vasilovsky demonstrou uma série de lemas que resultaram no seguinte teorema.

Teorema 4.2.9. *Seja F um corpo de característica zero. Então todas as identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas da álgebra $\mathbb{Z}$-graduada $M_n(F)$ são consequências de*

$$x_1, \ \textit{com} \ |\alpha(x_1)| \geq n,$$

$$x_1x_2 - x_2x_1, \ \textit{com} \ \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$$

e

$$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1, \ \textit{com} \ \alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2).$$

O mesmo resultado foi provado por Azevedo em [4], quando F é um corpo infinito de característica qualquer, e a prova dada por Azevedo é análoga à prova do Teorema 4.2.8.

Finalizamos esta dissertação observando que a $\mathbb{Z}_n$-graduação de $M_n(F)$ estudada nesta dissertação induz uma natural $\mathbb{Z}_n$-graduação na álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem n, $UT_n(F)$, e mencionando um resultado interessante, provado por Koshlukov e Valenti em [15], sobre as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $UT_n(F)$, quando F é um corpo infinito de característica qualquer. Mais precisamente, a álgebra $UT_n(F)$ admite uma $\mathbb{Z}_n$-graduação natural $UT_n(F) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_n} UT_n(F)^{\alpha}$, onde $UT_n(F)^{\alpha}$ é o subespaço de $UT_n(F)$ gerado pelas matrizes E_{ij} tais que $\overline{j-i} = \alpha$. Considerando essa $\mathbb{Z}_n$-graduação, Koshlukov e Valenti provaram o seguinte teorema.

Teorema 4.2.10. *Se F é um corpo infinito, então todas as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $UT_n(F)$ são consequências de*

$$x_1x_2 - x_2x_1, \quad \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$$

e

$$x_1x_2, \quad \alpha(x_1) + \alpha(x_2) \geq n.$$

Note que a primeira identidade da álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada $UT_n(F)$ é a mesma encontrada para a álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada $M_n(F)$. Isto ocorreu, pois as componentes homogêneas de grau zero de $UT_n(F)$ e $M_n(F)$ coincidem.

Referências Bibliográficas

[1] Aljadeff, E.; Kanel-Belov, A. *Representability and Specht Problem for G-graded algebras*. Adv. Math., **225 (5)** (2010), 2391-2428.

[2] Amitsur, S. A.; Levitzki, J. *Minimal identities for algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950) 449-463.

[3] Azevedo, S.S. *Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field*. Communications in Algebra, **30 (12)** (2002), 5849-5860.

[4] Azevedo, S.S. *A basis for $\mathbb{Z}$-graded identities of matrices over infinite fields*. Serdica Math. J. **29** (2003), 149-158.

[5] Dehn, M. *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme*. Math. Ann. **85** (1922), 184-194.

[6] Drensky, V. *A Minimal Basis for the Identities of a Second Order Matrix Algebra over a Field of Characteristic 0*. Algebra and Logic **20** (1981), 188-194.

[7] Drensky, V. *Free Algebras and PI-algebras*; Springer-Verlag: Singapore, (2000).

[8] Di Vincenzo, O. M. *On The Graded Identities of $M_{1,1}(E)$*. Israel Journal of Mathematics **80** (1992), 323-335.

[9] Giambruno, A.; Koshlukov, P. *On the Identities of the Grassmann Algebras in Characteristic $p > 0$*. Israel Journal of Mathematics **122** (2001), 305-316.

[10] Kaplansky, I. *Rings with a polynomial identity*. Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 496-500.

[11] Kemer, A. R. *Finite basis property of identities of associative algebra*. Algebra and Logica **26** (1987), 362-397.

[12] Kemer. A. R. *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras*. Math. USSR Izv. **25** (1985) 359-374.

[13] Kemer. A. R. *Ideal of Identities of Associative Algebras*. Translations of Mathematical Monographs **87**, American Mathematical Society, Providence, RI, (1991).

[14] Koshlukov, P.; Azevedo, S.S. *Graded Identities for T-prime Algebras Over Fields of Positive Characteristic*. Israel Journal of Mathematics **128** (2002), 157-176.

[15] Koshlukov, P.; Valenti, A. *Graded Identities for the Algebra of $n \times n$ Upper Triangular Matrices over an Infinite Field*. International Journal of Algebra and Computation **13 (5)** (2003), 517-526.

[16] Krakowski, D.; Regev, A. *The polynomial identities of the Grassmann algebra*. Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973), 429-438.

[17] Razmyslov, Yu. P. *Finite Basing of the Identities of a Matrix Algebra of Second Order over a Field of Characteristic Zero*. Algebra and Logic **12** (1973), 47-63.

[18] Specht, W. *Gesetze in ringen*. Math. Zeitschrift **52** (1950), 557-589.

[19] Sviridova, I. *Identities of PI-Algebras Graded by a Finite Abelian Group*. Communications in algebra, **39 (9)** (2011), 3462-3490.

[20] Vasilovsky, S.Yu. *$\mathbb{Z}$-graded polynomial identities of the full matrix algebra*. Communications in algebra, **26 (2)** (1998), 601-612.

[21] Vasilovsky, S.Yu. *$\mathbb{Z}_n$-graded Polynomial Identities of the Full Matrix Algebra of order n*. Proceedings of the American Mathematical Society , **127 (12)** (1999), 3517-3524.