

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
CURSO DE FÍSICA

Pedro Ruas Dieguez

*A Questão da Medição e o Tempo como Fenômeno  
Emergente na Mecânica Quântica*

Belo Horizonte  
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
CURSO DE FÍSICA

Pedro Ruas Dieguez

*A Questão da Medição e o Tempo como Fenômeno  
Emergente na Mecânica Quântica*

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação  
em Física da UFMG, como requisito parcial para  
a obtenção do grau de Mestre em Física.

**Orientador: Maria Carolina Nemes**

**Doutora em Física - USP**

**Co-orientador: Augusto César Lobo**

**Doutor em Física - UFMG**

Belo Horizonte

2014

Dieguez, Pedro Ruas

A Questão da Medição e o Tempo como Fenômeno Emergente na  
Mecânica Quântica / Pedro Ruas Dieguez - 2014

32.p

Ciências Exatas. I.Título.

CDU teste

Pedro Ruas Dieguez

*A Questão da Medição e o Tempo como Fenômeno  
Emergente na Mecânica Quântica*

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação  
em Física da UFMG como requisito parcial para a  
obtenção do grau de Mestre em Física.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Maria Carolina Nemes

Doutora em Física - USP

---

Augusto César Lobo

Doutor em Física - UFMG

---

José Geraldo Peixoto de Faria

Doutor em Física - UFMG

---

Raphael Campos Drumond

Doutor em Física - UFMG

## Resumo

Discutimos o programa da Descoerência e sua relação com o Problema da Medição na Mecânica Quântica (MQ) através de um modelo simples de Banho de Spins devido a Zurek.

Apresentaremos o Formalismo de Dois Estados de Aharonov e alguns conceitos subjacentes como o de Medições Fracas e Valores Fracos incluindo uma interpretação retrocausal entre medições subsequentes no tempo, como exemplo de uma interpretação onde o colapso da função de onda é ontológico e inerente a teoria.

Discutimos, assim, a possibilidade da medição quântica ser mais fundamental que a evolução unitária temporal de estados quânticos.

Exibiremos uma explicação genérica, devida a Castagnoli, para a maior eficiência computacional dos algoritmos quânticos em comparação com seus respectivos análogos clássicos como argumento adicional para a interpretação de retrocausalidade na MQ. Interpretaremos a explicação de Castagnoli em termos do formalismo de dois estados.

Discutiremos a possibilidade do tempo e da evolução unitária na MQ, serem fenômenos emergentes. Nossa argumentação é baseada, em parte, no modelo de computação quântica baseado em medições (via um modelo simplificado) e de alguns outros resultados encontrados na literatura.

# Abstract

We discuss the Program of Decoherence and its relation with the Measurement Problem in Quantum Mechanics (QM) through Zurek's spin bath toy model.

We present the Two State Vector Formalism due to Aharonov and some underlying concepts, such as Weak Measurements and Weak Values, including a retrocausal interpretation between subsequent measurements in time, as an example of an interpretation where the collapse of the wave function is ontological and inherent to the theory.

Therefore we discuss the possibility of the Measurement Process being more fundamental than the temporal unitary evolution of quantum states.

We also present a general explanation due to Castagnoli, for the greater computational efficiency of quantum algorithms in comparison with their classical analogues as an additional argument for retrocausality in QM. We analyse Castagnoli's proposal in terms of the two-vector formalism.

We discuss the possibility of time and unitary evolution in QM be emergent phenomenon. Our argument is based in part on the measurement-based quantum computation (via a simplified model) and some other results found in the literature.

## Agradecimentos

Agradeço a minha família por me dar todas as condições de estar aqui hoje.

Rebeca, obrigado por me mostrar quem eu sou, você é minha fonte de inspiração e magia, você é o meu amor.

Agradeço ao amigo e orientador Augusto por ter me guiado por todos esses anos. Me sinto profundamente privilegiado por ter te conhecido e ser seu orientando.

Carolina, muito obrigado por toda a confiança e liberdade depositadas nesse trabalho. Obrigado também por me mostrar o caminho para a Casa do Estudante, é uma pena eu ainda não conseguir dissociar o barro de nossa matéria. Prometo continuar trabalhando meus sentidos, para enfim, reconhecer-me e lhe agradecer.

Aos amigos Ismael e Clyffe, por todos os estudos e conversas que foram tão importantes para a conclusão dessa etapa.

Aos membros da banca por prontamente aceitarem o convite para a avaliação desse trabalho, assim como pelo tempo desprendido na leitura do trabalho.

Agradeço também os irmãos da República Trem de Doido, por tudo.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>6</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2 O Formalismo Usual, o Problema da Medição na Mecânica Quântica e a Descoerência</b>	<b>11</b>
2.1 A Estrutura do Formalismo Padrão da Mecânica Quântica . . . . .	11
2.2 A Matriz Densidade . . . . .	12
2.2.1 Matriz Densidade Própria . . . . .	13
2.2.2 Matriz Densidade Imprópria . . . . .	14
2.3 A Esfera de Bloch . . . . .	16
2.4 A Medida ideal de von Neumann e o Problema da Medição . . . . .	19
2.5 Dinâmica de Descoerência . . . . .	24
2.5.1 O Modelo do Banho de Spins . . . . .	24
2.5.2 A Dinâmica de Descoerência na Esfera de Bloch: Os estados de ponteiro . . . . .	26
2.5.3 O problema foi resolvido? . . . . .	29
<b>3 O Formalismo de Dois Estados, a Retrocausalidade e a Emergência do Tempo</b>	<b>31</b>
3.1 O Formalismo de Dois Estados na Mecânica Quântica . . . . .	31
3.1.1 Pré e pós-seleção em um sistema de um q-bit.(partícula de spin 1/2)	34
3.1.2 Medida Fraca e Valor Fraco . . . . .	35
3.2 A eficiência dos algoritmos quânticos e a questão da retrocausalidade . . .	38
3.2.1 O Algoritmo de Grover . . . . .	40



3.3	Computação quântica baseada em medições via teleporte . . . . .	48
3.4	O formalismo de dois estados e a simulação da evolução temporal . . . . .	52
3.5	O Formalismo de Dois Estados e um modelo simples para a emergência do tempo . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>61</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>
4.0.1	Apêndice: O teorema da tridecomposição única . . . . .	68

## Lista de Figuras

2.1	Projeção Estereográfica . . . . .	18
2.2	Representação de um estado na Esfera de Bloch . . . . .	18
2.3	Fator de Descoerência . . . . .	26
2.4	Fator de Descoerência em escala logarítmica . . . . .	26
2.5	Dinâmica para o eixo x da Esfera de Bloch . . . . .	27
2.6	Dinâmica na Esfera de Bloch . . . . .	27

# 1 Introdução

A Mecânica Quântica é uma das maiores descobertas (ou seria uma invenção?) do século XX. O fato é que ela consegue explicar uma grande gama de fenômenos que até o século XIX eram considerados enigmáticos, como a existência das linhas espectrais, a estabilidade da matéria, a natureza química dos elementos, o ferromagnetismo, a supercondutividade...[1, 2, 3]. Desde o seu desenvolvimento na década de 1920, a teoria tem atraído muita atenção devido às modificações significativas sobre o nosso entendimento do que consiste exatamente uma lei fundamental da natureza e, em particular, ao novo papel atribuído ao processo de medição [4].

Assim como no século XVII, quando Blaise Pascal se assustou com o Universo infinito proposto por Galileu Galilei [5], alguns físicos de nosso tempo continuam perplexos com a questão do processo de *medição* na Mecânica Quântica. Pois, diferentemente das outras teorias físicas, a questão da observação na Mecânica Quântica ganhou um *status* completamente diferente, desafiando até nossas concepções sobre a própria realidade dos fatos observados, ao ponto de alguns físicos experimentais chegarem a denominar o seu próprio trabalho de “Metafísica Experimental” [6].

Com o surgimento da Teoria da Informação Quântica nas últimas décadas, o interesse por problemas fundacionais, como o problema relacionado às variadas interpretações dadas à Teoria Quântica, voltou ao cenário principal da Física.

O principal problema interpretativo da Mecânica Quântica surge devido a um suposto conflito entre dois processos. Por um lado, a evolução temporal de um estado quântico é dada por um operador unitário e, portanto, reversível e determinista (como é o caso da Mecânica Clássica), descrita pela equação de Schrödinger. Assim como na Mecânica Clássica, uma evolução temporal pode ser descrita em um tempo reverso, em outras palavras, a ação do operador unitário em um estado quântico é temporalmente simétrica. No entanto, quando se realiza uma medição (ou medida) em um estado que inicialmente não é auto-estado do observável que está sendo medido, ocorre (em algumas interpretações [7, 8, 9]) o fenômeno conhecido como colapso da função de onda, que é uma projeção intrinsecamente aleatória (portanto irreversível) sobre um dos auto-estados

do observável em questão. Com esse cenário, surge naturalmente a seguinte pergunta: Qual é a natureza do processo de medição na Mecânica Quântica que o torna diferente de qualquer outra interação unitária entre sistemas quânticos? Esta é a raiz do célebre e ao mesmo tempo polêmico:

*Problema da Medição na Mecânica Quântica* [10, 11, 12].

Esse problema é a raiz das variadas interpretações dadas a teoria pois, como pode-se ver em [13], ainda hoje, os físicos compartilham visões drasticamente diferentes sobre as possíveis implicações do mesmo. Para alguns, o problema da medição não passa de um “pseudo problema” [8], no sentido que o postulado do colapso é inerente a teoria e consistente com a evolução unitária. Outros ainda, atribuem ao processo de medição um papel proeminente nos fundamentos da teoria e chegam até a acreditar que sem uma solução do mesmo, não seria possível entendermos a verdadeira natureza pertencente aos domínios da teoria quântica. Devido a isso, um grande espectro de diferentes pontos de vista filosóficos (veja [9] para maiores detalhes) foi adotado pelos físicos ao longo do século XX: Temos a interpretação positivista de Copenhague [14] [15] que defende o “silêncio” sobre o que não pode ser observado (Bohr foi, provavelmente, o defensor mais proeminente em uma atitude alinhada com posturas filosóficas radicais em relação ao papel ontológico da linguagem como a de Wittgenstein [16]). Há também a interpretação mais pluralista (no sentido que todos os eventos acontecem) desenvolvida por Everett [17], também conhecida como a interpretação de Muitos Mundos [18], defendida por muitos, com David Deutsch entre alguns dos seguidores contemporâneos mais importantes e para os quais o colapso da função de onda nem sequer ocorre. A interpretação de Copenhague, de certa forma, evita o problema assumindo que o aparelho de medição é um sistema clássico em certo sentido e, como tal, deva ser visto como um elemento externo à descrição quântica.

Por outro lado, von Neumann propôs um modelo que trata o processo de medição como uma interação quântica [19], onde o sistema medidor passa a ser descrito por um vetor de estado pertencente a um espaço de estados, onde o sistema total (sistema medidor e sistema a ser medido) é considerado um sistema fechado que evolui de acordo com a equação de Schrödinger. Inicialmente reconhecido pelo próprio von Neumann e reiterado por Fine na década de 70, tem-se a consolidação do teorema da insolubilidade do problema da medição a partir do modelo de von Neumann [20] (veja [21], para uma versão mais pedagógica desse teorema) que, apesar de algumas críticas, parecia decretar

um fim às tentativas de resolução desse problema para uma interpretação em que o colapso da função de onda seja um componente ontológico da teoria. Nesse cenário, o programa da descoerência [22, 23, 24, 25, 26, 27], inicialmente proposto por Zeh, passa a ser reconhecido como potencialmente capaz de resolver o problema da medição mantendo a componente de colapso, pois, considerando-se a influência de um ambiente externo ao sistema físico como um ingrediente essencial, o sistema composto do processo de medição passa a ser um sistema aberto, e assim, pode-se evitar o teorema de insolubilidade. O programa da descoerência chegou a um estágio “maduro” na década de 1980 com os trabalhos [28, 29] de Zurek, que fez contribuições significativas para os fundamentos da teoria quântica e para o problema da medição, argumentando de forma convincente (para muitos) que, como o aparato medidor é um sistema macroscópico, seria impossível tratá-lo sem levar em conta os efeitos causados por esse ambiente que o cerca.

Durante muito tempo, alguns autores propuseram que pelo fato da medida ser um processo intrinsecamente aleatório e irreversível, ela poderia ser responsável pela aparente assimetria temporal do mundo, apesar das leis fundamentais da Física serem temporalmente simétricas (a chamada “flecha do tempo”). Pensando que essa assimetria temporal na mecânica quântica não é um aspecto intrínseco da teoria e sim um problema na escolha das condições de contorno temporais dada a um estado quântico, Aharonov e colaboradores desenvolveram, em 1964, o Formalismo de Dois Estados na Mecânica Quântica (ou Formalismo Temporalmente Simétrico [30]) com o intuito de remover tal assimetria. O formalismo de dois estados é uma reformulação da mecânica quântica usual em termos dos chamados estados pré e pós-selecionados [31, 32]. Como se trata apenas de uma reformulação (e não uma modificação), não é possível distinguir experimentalmente um formalismo do outro, mas os conceitos subjacentes podem ser dramaticamente diferentes, levando a uma maior compreensão de certos fenômenos e levando a descobrir e sugerir novos experimentos e aplicações [33, 34, 35, 36, 37, 38]. No formalismo de dois estados, um estado passa a ser descrito de forma completa a partir de dois vetores de estado, onde se colocam os estados resultantes de medições passadas em pé de igualdade com estados resultantes de medições futuras, e esses passam a descrever um estado em um instante presente, ou seja, é assumido tanto uma causalidade (passado causando o presente) quanto uma retro-causalidade (futuro causando o presente). A visão de Aharonov e colaboradores é mais próxima à visão da interpretação de Copenhague, no sentido que tanto a evolução unitária como a medida são elementos ontológicos, embora eles acreditem

que ambas evoluções sejam *complementares* no sentido Bohriano [37]

O problema da medição torna-se ainda mais intrigante quando consideramos medições em estados emaranhados, dado que, desde a comprovação da violação das desigualdades de Bell [39], não podemos mais interpretar as correlações obtidas através do processo de medição em subsistemas emaranhados a partir de uma visão realista e local (visão defendida por Einstein em seu épico debate com Niels Bohr [40, 41]). De fato, seguindo essa linha de raciocínio, Svetlichny sugeriu recentemente em [42] (baseado em trabalho anterior de Coeke [43]) que o papel da medida talvez devesse ser pensado como uma componente ontológica fundamental da teoria quântica que parece ser uma visão diametralmente oposta da maioria dos físicos que acreditam que a medida pode ser compreendida como um processo emergente da evolução unitária usual juntamente com o processo inevitável de descoerência.

A proposta de Svetlichny pode fornecer uma chance de se compreender o tempo como um processo interno da teoria ao invés de ser postulado como sendo um parâmetro externo. Em outras palavras, essa ideia ousada parece sugerir que a evolução temporal unitária poderia ser derivada de estruturas mais fundamentais dos sistemas quânticos: a estrutura de produto tensorial na composição de sistemas, o traço parcial e o processo de medida passariam a ser vistos como ingredientes fundamentais. Dessa forma, assumindo esses elementos como primordiais, passa a ser natural fazer as seguintes perguntas: Seria a medição um processo mais fundamental que a evolução unitária na mecânica quântica? De alguma forma, podemos descrever evoluções unitárias a partir de medições? Se sim, seria o espaço-tempo, em algum sentido, um fenômeno emergente na teoria quântica? Afinal, qual é a natureza física do tempo? Essas são questões fundamentais que vêm sendo levantadas recentemente na literatura [42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 37].

Acreditamos que o Formalismo de Dois Estados e seus conceitos subjacentes, como valores fracos e medições fracas [33], podem desempenhar um papel proeminente nessa discussão que é fundamental para o desenvolvimento teórico e experimental da Mecânica Quântica.

Buscamos então, neste trabalho, abordar essas questões e desenvolver uma opinião crítica em relação às mesmas, para então, propor novos questionamentos.

## 2 O Formalismo Usual, o Problema da Medição na Mecânica Quântica e a Descoerência

### 2.1 A Estrutura do Formalismo Padrão da Mecânica Quântica

A Mecânica Quântica padrão pode ser estruturada da seguinte maneira, através de seus três postulados: O primeiro postulado nos diz que estados quânticos são representados por vetores pertencentes a um *espaço vetorial complexo*[1] e esse vetor fornece a máxima informação possível de um sistema puro em um determinado estado físico. De acordo com o segundo postulado, um sistema isolado é descrito por um estado que evolui no tempo de maneira *determinista* de acordo com

$$i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle \quad (\hbar = 1). \quad (2.1)$$

A dificuldade básica da mecânica quântica e que leva a várias interpretações diferentes é um suposto conflito entre dois processos quânticos que são representados por  $\hat{U}$  e  $\hat{R}$ , onde  $\hat{U}$  é o operador de evolução temporal determinístico, que é unitário e inversível tal que:

$$\hat{U}(t)|\varphi(0)\rangle = |\varphi(t)\rangle \quad (2.2)$$

e que obedece a seguinte relação (equivalente a equação de Schrödinger) dada por:

$$i\frac{d}{dt}\hat{U}(t) = \hat{H}\hat{U}(t) \quad (\hbar = 1), \quad (2.3)$$

e onde  $\hat{R}$  é o operador de projeção (portanto, não inversível) que reduz o estado, de acordo com o terceiro postulado, conhecido como postulado da projeção, e age sempre que uma *medição* é realizada. O processo  $\hat{U}$  é algo familiar aos físicos, uma evolução temporal de uma quantidade matemática definida, que nesse caso é um vetor de estado  $|\Psi\rangle$ , descrita

pela equação 2.1. Por outro lado, a introdução do processo  $\hat{R}$  foi um elemento novo para os físicos, já que representa uma mudança intrinsecamente aleatória e descontínua do estado  $|\Psi\rangle$  onde apenas as probabilidades de diferentes resultados são determinadas. Digamos que o vetor de estado possa ser escrito como a superposição (possibilidade essa devido à linearidade da Mecânica Quântica)  $|\varphi\rangle = \alpha |\varphi_1\rangle + \beta |\varphi_2\rangle$ , onde  $|\varphi_1\rangle$  e  $|\varphi_2\rangle$  são auto-estados de um observável. Segundo o postulado de projeção (também conhecido como postulado de Born), após uma medição  $\hat{R}$  desse observável, o estado  $|\varphi\rangle$  é reduzido para  $|\varphi_1\rangle$  ou  $|\varphi_2\rangle$  com probabilidades dadas por  $|\alpha|^2$  ou  $|\beta|^2$ , respectivamente. Nesse formalismo, identifica-se claramente uma assimetria temporal devida a irreversibilidade da projeção quando realiza-se uma medição em um estado que não é auto-estado do observável em questão (colapso da função de onda).

Adiante, iremos discutir as duas formulações da matriz densidade (própria e imprópria) e a representação geométrica do espaço de estados quânticos de dois níveis (Esfera de Bloch).

## 2.2 A Matriz Densidade

A matriz densidade, ou operador densidade na forma proposta originalmente por Von Neumann, conhecida na literatura como Matriz Densidade Própria [54], é utilizada na Mecânica Quântica para descrever, de forma estatística, um estado de um sistema quântico. A Matriz Densidade Própria é formulada através de uma análise de uma quantidade muito grande de sistemas quânticos idênticos, conhecido como “Ensemble Quântico”, onde probabilidades “clássicas” são utilizadas juntamente com probabilidades quânticas através da construção da matriz densidade. Porém, existe outra maneira distinta de apresentarmos a matriz densidade, conhecida na literatura como Matriz Densidade Imprópria. Essa assume uma forma puramente quântica para lidar com esse problema, onde fatoramos nosso “Universo” Quântico como o produto tensorial de dois subsistemas quânticos, um subsistema sendo o objeto de nossas observações e o outro é fisicamente inacessível. Descreveremos ambas as abordagens de forma sucinta:



### 2.2.1 Matriz Densidade Própria

Suponha que um observador tenha acesso a um número  $N$  muito grande de sistemas quânticos de um mesmo tipo e que esse observador possa “sortear” aleatoriamente um deles e fazer a medida de um determinado observável  $\hat{O}$ . Cada um dos sistemas é representado por um espaço de estados  $W^{(m)}$  que iremos supor ser  $m$ -dimensional. Considerando o observável descrito na base  $\{|o_j\rangle\}$  de seus autoestados com  $(j = 1, 2, \dots, m)$ , tem-se que  $\hat{O} = |o_j\rangle o^j \langle o^j|$  (Daqui em diante utilizaremos a convenção da soma quando acharmos necessário simplificar alguma expressão). Supondo que em um dado instante os  $N$  sistemas quânticos estejam particionados em  $P$  subconjuntos com  $n_\alpha$  sistemas em um dado estado  $|\psi_\alpha\rangle$  com uma fração relativa  $\lambda_\alpha = \frac{n_\alpha}{N}$ , onde  $\alpha$  varia de um até o número total de partições. Pode-se notar, claramente, que:

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1 \quad \text{com } 0 < \lambda_{\alpha} < 1 \quad (2.4)$$

Repetindo o mesmo experimento muitas vezes, isto é  $N \rightarrow \infty$ , pode-se calcular a média do valor esperado do observável pela seguinte média estatística:

$$\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^P n_{\alpha} \langle \psi^{\alpha} | \hat{O} | \psi_{\alpha} \rangle = \sum_{\alpha=1}^P \lambda_{\alpha} \langle \hat{O} \rangle_{\psi_{\alpha}} \quad (2.5)$$

onde cada valor esperado  $\langle \hat{O} \rangle_{\psi_{\alpha}}$  “puramente quântico” é ponderado na média por um fator estatístico “clássico” dado por  $\lambda_{\alpha}$ . Note que, pela linearidade do traço, podemos reescrever essa média como

$$\sum_{\alpha=1}^P \lambda_{\alpha} \langle \psi^{\alpha} | \hat{O} | \psi_{\alpha} \rangle = \sum_{\alpha=1}^P \lambda_{\alpha} Tr[|\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi^{\alpha}| \hat{O}] = Tr[\hat{\rho} \hat{O}] \quad (2.6)$$

onde

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha=1}^P \lambda_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi^{\alpha}| \quad (2.7)$$

é a matriz ou *operador densidade próprio* do ensemble. Dessa forma, podemos definir o valor esperado do ensemble em termos da matriz densidade como:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}} = Tr[\hat{\rho} \hat{O}] \quad (2.8)$$

Note que o operador densidade obedece as seguintes *propriedades*:

(i) **Unitariedade do traço:**

$$Tr[\hat{\rho}] = 1 \quad (2.9)$$

De fato, temos que:

$$\text{Tr}[\hat{\rho}] = \text{Tr} \left[ \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}| \right] = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \langle \psi_{\alpha} | \psi_{\alpha} \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} = 1 \quad (2.10)$$

(ii) **Hermiticidade:**

$$\hat{\rho}^{\dagger} = \hat{\rho} \quad (2.11)$$

O operador densidade é claramente hermitiano.

(iii) **Positividade:**

Dado um estado arbitrário,  $|\xi\rangle \in W^{(m)}$  temos:

$$\langle \hat{\rho} \rangle_{\xi} = \langle \xi | \hat{\rho} | \xi \rangle \geq 0 \quad (2.12)$$

De fato:

$$\langle \hat{\rho} \rangle_{\xi} = \langle \xi | \hat{\rho} | \xi \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} |\langle \psi_{\alpha} | \xi \rangle|^2 \geq 0, \text{ pois } 0 \leq \lambda_{\alpha} \leq 1 \quad (2.13)$$

É importante notar que para a matriz densidade própria, a probabilidade clássica *não é ontológica*, mas *epistêmica*, pois surge devido a uma ignorância sobre *qual* partição do ensemble, o sistema faz parte. Outra forma mais realista de se construir um sistema descrito pela mesma matriz densidade própria acima seria a de um agente (Alice) construir um mecanismo capaz de produzir deterministicamente um sistema em qualquer estado  $|\psi_{\alpha}\rangle$  desejado e, então, promover um “sorteio aleatório” com probabilidade  $\lambda_{\alpha}$  de se produzir tal estado. Após o sorteio, Alice entrega o sistema a uma segunda parte (Bob) juntamente com a informação detalhada sobre a distribuição de probabilidades  $\lambda_{\alpha}$ . Novamente, a melhor descrição possível do estado do sistema por Bob é representada por  $\hat{\rho}$ . Note que, nessa versão, não há necessidade de se construir um ensemble de  $N$  sistemas idênticos com  $N \rightarrow \infty$ .

### 2.2.2 Matriz Densidade Imprópria

Na segunda abordagem (puramente quântica) iremos supor a existência de um espaço de estados universal  $W^{(u)} = W^{(m)} \otimes W^{(n)}$  de dimensão  $u = m \times n$ , dado pelo produto tensorial de um espaço de dimensão  $m$  (o espaço que representa um sistema que temos acesso) e um espaço de dimensão  $n$  (que representa um sistema o qual, por algum motivo, não temos

acesso físico). Sejam  $\{|w_i\rangle\}$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $\{|u_\alpha\rangle\}$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , as respectivas bases de cada espaço, temos que  $\{|w_i\rangle \otimes |u_\alpha\rangle\}$  é uma base para o espaço total. Seja  $|\Psi\rangle \in W^{(u)}$  um estado puro do espaço total (universal) e seja um observável  $\hat{O}$  acessível somente ao subsistema  $W^{(m)}$ , então é razoável definir o valor esperado restrito ao subsistema  $W^{(m)}$  como  $\langle \Psi | \hat{O} \otimes \hat{I} | \Psi \rangle$ . Podemos então, associar a cada estado puro  $|\Psi\rangle$  do *sistema total*, um operador densidade  $\hat{\rho}_{|\Psi\rangle}$  do subsistema  $W^{(m)}$  através da relação

$$Tr[\hat{\rho}_{|\Psi\rangle} \hat{O}] = \langle \Psi | \hat{O} \otimes \hat{I} | \Psi \rangle \quad \forall \hat{O} \in W^{(m)} \otimes \bar{W}^{(m)}, \quad (2.14)$$

com  $\bar{W}^{(m)}$  representando o espaço dual de  $W^{(m)}$ .

Mostraremos a seguir que  $\hat{\rho}_{|\Psi\rangle}$  obedece as três propriedades descritas no caso anterior:

**(i) Unitariedade do traço:**

$$Tr[\hat{\rho}_{|\Psi\rangle}] = 1 \quad (2.15)$$

De fato, basta tomarmos  $\hat{O} = \hat{I}$  na definição.

**(ii) Hermiticidade:**

$$\hat{\rho}_{|\Psi\rangle}^\dagger = \hat{\rho}_{|\Psi\rangle} \quad (2.16)$$

De fato, esse resultado segue da definição, juntamente com a ciclicidade do traço, a hermiticidade do observável e do fato de que o traço é um produto interno hermitiano no espaço dos operadores, conhecido na literatura como o produto de *Hilbert-Schmidt*.

**(iii) Positividade:**

Dado um estado arbitrário,  $|\xi\rangle \in W^{(m)}$ , queremos mostrar que

$$\langle \hat{\rho}_{|\Psi\rangle} \rangle_\xi = \langle \xi | \hat{\rho}_{|\Psi\rangle} | \xi \rangle \geq 0 \quad (2.17)$$

Sejam

$$\hat{\rho}_{|\Psi\rangle} = |w_i\rangle \rho_j^i \langle w^j| \quad (2.18)$$

$$|\Psi\rangle = |w_i\rangle \otimes |u_\alpha\rangle \Psi^{i\alpha} \quad (2.19)$$

e seja

$$\hat{O} = |w_k\rangle \langle w^l| \quad (2.20)$$

Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\hat{\rho}_{|\Psi}\hat{O}] &= \rho_k^l = \langle \Psi | (|w_k\rangle \langle w^l| \otimes \hat{I}) | \Psi \rangle = \bar{\Psi}_{m\tau} \langle w^m | \otimes \langle u^\tau | (|w_k\rangle \langle w^l| \otimes \hat{I}) | w_i \rangle \otimes |u_\sigma\rangle \Psi^{i\sigma} \\ &= \bar{\Psi}_{m\tau} \delta_k^m \delta_i^l \delta_\sigma^\tau \Psi^{i\sigma} = \bar{\Psi}_{k\sigma} \Psi^{l\sigma} \end{aligned} \quad (2.21)$$

logo

$$\rho^k = \sum_{\sigma} |\Psi^{k\sigma}|^2 \geq 0 \quad (2.22)$$

Como o traço de  $\hat{\rho}_{|\Psi}$  é unitário, temos que  $0 \leq \rho_{(k)}^{(k)} \leq 1$  em qualquer base. Dessa forma, podemos expandir  $|\xi\rangle$  na base que diagonaliza  $\hat{\rho}_{|\Psi}$  para provar a positividade, segue então:

$$\langle \hat{\rho}_{|\Psi} \rangle_{|\xi\rangle} = \langle \xi | \rho_i \rangle \rho^i \langle \rho^i | \xi \rangle = \sum_i |\langle \xi | \rho_i \rangle|^2 \rho^i \geq 0 \quad (2.23)$$

Como queríamos provar.

É interessante notar que, nesse caso a matriz densidade imprópria é obtida de maneira diferente. A “ignorância” sobre o estado do sistema parece ter um status ontológico completamente diferente, onde a informação perdida devido ao traço parcial está “escondida” nas correlações não-locais do estado global emaranhado. No entanto, o objeto matemático é exatamente o mesmo. Teremos mais a dizer a esse respeito quando introduzirmos a formulação de dois estados da Mecânica Quântica criada por Aharonov e colaboradores [30].

## 2.3 A Esfera de Bloch

Seja um sistema quântico representado por um espaço vetorial hermitiano complexo (espaço de Hilbert)  $W^{(N+1)}$  de dimensão finita ( $N + 1$ ), ou seja,  $2N + 2$  variáveis reais, sendo assim, isomorfo a um espaço Euclidiano de dimensão  $2N + 2$ . Dada uma base  $\{|u_\sigma\rangle\}$  de  $W^{(N+1)}$ , com  $\sigma = 0, \dots, N$ , um estado quântico arbitrário pode ser expresso como:

$$|\psi\rangle = |u_\sigma\rangle \psi^\sigma \quad (2.24)$$

onde os  $\psi^{(\sigma)}$  e  $\bar{\psi}_\sigma$  tem as seguintes formas:

$$\psi^\sigma = x^\sigma + iy^\sigma \quad (2.25)$$

$$\bar{\psi}_\sigma = x_\sigma - iy_\sigma$$

sendo  $x^\sigma$  e  $y^\sigma$  pertencente aos números reais e  $i$  representando a unidade imaginária.

Pela interpretação probabilística, consideraremos apenas estados normalizados de  $W^{(N+1)}$  reduzindo, dessa forma, um grau de liberdade em nosso sistema usando o seguinte vínculo:

$$\psi^\sigma \bar{\psi}_\sigma = x^\sigma x_\sigma + y^\sigma y_\sigma = 1 \quad (2.26)$$

A equação acima é a equação da esfera  $S^{2N+1}$  de dimensão  $(2N + 1)$  imersa num espaço euclidiano de dimensão  $(2N + 2)$ . No entanto, dois estados quânticos ainda são fisicamente equivalentes se esses diferirem apenas por uma fase complexa. Dessa forma, considerando a seguinte relação de equivalência  $|\psi\rangle \sim |\psi\rangle e^{i\phi}$ , podemos reduzir mais um grau de liberdade. Define-se como espaço projetivo ou espaço de raios  $CP(N)$ , a variedade de dimensão real  $2N$  obtida pela relação de equivalência acima. Vimos que o  $CP(N)$  é uma subvariedade de  $S^{2N+1}$  e  $W^{(N+1)}$ , ou seja:

$$CP(N) \subset S^{2N+1} \subset W^{(N+1)} \quad (2.27)$$

Denotamos por

$$\Pi : S^{2N+1} \rightarrow CP(N) \quad (2.28)$$

o mapa natural de projeção que associa cada vetor de estado normalizado em sua respectiva classe de equivalência. As coordenadas  $(\psi^0, \psi^1 \dots \psi^n)$  não formam um bom sistema de coordenada em  $CP(N)$  pois são  $N + 1$  coordenadas complexas para um espaço complexo  $N$  dimensional, representando de forma ambígua a classe de equivalência. Dessa forma, é conveniente introduzir coordenadas projetivas para esse mapa definidas por

$$\xi^i = \frac{\psi^i}{\psi^0} \quad (i = 1, \dots, N) \quad \text{com } (\psi^0 \neq 0) \quad (2.29)$$

Quando o sistema quântico é bidimensional, como por exemplo uma partícula de spin  $\frac{1}{2}$ , vemos que o espaço projetivo é dado por  $CP(1)$  que é fácil percebermos que é topologicamente equivalente a uma esfera bidimensional  $S^2$  através da conhecida *projeção estereográfica*, em coordenadas esféricas usuais  $\theta$  e  $\varphi$ :

$$\xi = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi} \quad (2.30)$$

Na figura a seguir, pode-se ver claramente como todos os pontos do *plano complexo + ponto no infinito* podem ser mapeados bijetivamente na esfera. Por propriedades geométricas, não é difícil ver que  $\beta = \theta/2$ .

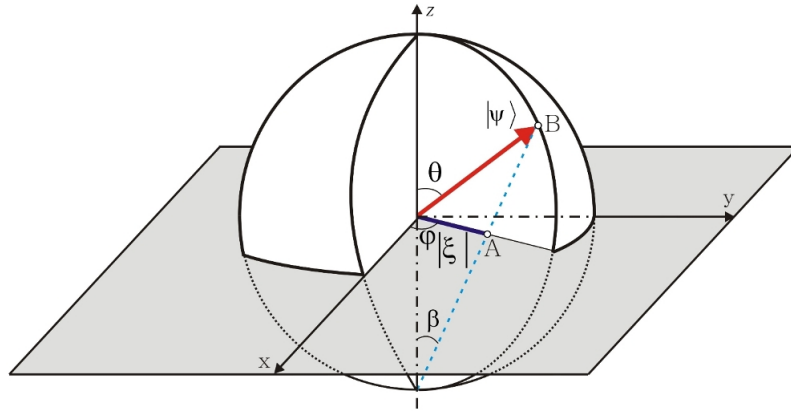


Figura 2.1: Projeção Estereográfica

Logo, podemos representar um estado normalizado

$$|\psi\rangle = |u_0\rangle \psi^0 + |u_1\rangle \psi^1 \quad (2.31)$$

em uma esfera como:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |u_0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |u_1\rangle \quad (2.32)$$

Como podemos visualizar na figura abaixo, o polo norte da esfera é representado pela projeção do estado  $|u_0\rangle$  e o pólo sul representa a projeção de  $|u_1\rangle$  sendo que, de modo geral, pontos antípodas representam a projeção de estados ortogonais entre si. Construimos, portanto, uma representação geométrica para sistemas de dois níveis em

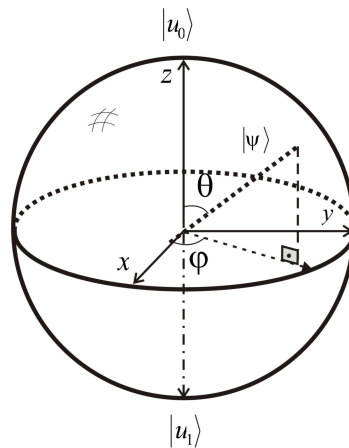


Figura 2.2: Representação de um estado na Esfera de Bloch

estados puros. Vamos, agora, ampliar essa representação para estados misturados.

Um sistema de dois níveis num estado misto arbitrário é representado por um operador em  $W^{(2)}$  (ou, simplesmente, uma matriz  $2 \times 2$ ) que obedece as três pro-

priedades citadas nas seções anteriores. Utilizando essas propriedades, expressaremos a seguir uma matriz densidade genérica na base constituída pelas *matrizes de Pauli*, que são as seguintes:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0 = \hat{I} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\sigma}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Então, se  $\hat{\rho}$  for uma matriz densidade para um sistema de dois níveis, pode-se escrever:  $\hat{\rho} = \rho^\alpha \hat{\sigma}_\alpha$ . Como  $\hat{\rho}$  é hermitiana, os coeficientes  $\rho^\alpha$  devem ser todos reais. Ainda, utilizando o fato de que  $Tr\hat{\rho} = 1$ , conclui-se que  $\rho^0 = \frac{1}{2}$ . Logo:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\hat{I} + \rho^k \hat{\sigma}_k \quad (2.33)$$

com  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

Como foi visto, o fato de  $\hat{\rho}$  ser semidefinido positivo implica que os autovalores são não negativos. Esse fato implica que o determinante também é não negativo. Portanto:  $\rho^k \rho_k \leq \frac{1}{4}$ . Se escolhermos, então, coeficientes  $r^k$  tais que  $r^k = 2\rho^k$ , conclui-se que:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left( \hat{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \right) \quad (2.34)$$

com  $\vec{r} \cdot \vec{\sigma} = r^k \hat{\sigma}_k$  e  $\|\vec{r}\| \leq 1$ . Além disso,  $\vec{r}$  “localiza” o ponto que representa o estado  $\hat{\rho}$ . Portanto, nessa extensão da representação de estados na esfera de Bloch, todos os pontos da bola (não somente os pontos sobre a superfície) representam estados físicos de sistemas de dois níveis.

Essa esfera é a *Esfera de Riemann-Poincaré-Bloch* ou simplesmente conhecida como a *Esfera de Bloch* na literatura usual da Informação Quântica.

Em seguida, iremos caracterizar o processo de medição a partir do modelo de von Neumann [19] e discutir *Problema da Medição na Mecânica Quântica* [10, 11, 12].

## 2.4 A Medida ideal de von Neumann e o Problema da Medição

Seja  $W = W_S \otimes W_M$  o espaço de estados definido pelo produto tensorial do espaço de estados do sistema físico a ser medido  $W_S$  e o espaço de estados do sistema medidor

$W_M$ . Considere que iremos medir uma variável discreta de  $W_M$  definida pelo observável  $\hat{O} = \sum_i |o_i\rangle o_i \langle o_i|$  e que o subsistema de medição, para efeitos de simplificação, será dado pelo movimento de uma partícula quântica em uma dimensão (onde desprezaremos quaisquer variáveis internas da partícula). Assim, podemos escolher, como base para o subsistema  $W_M$  qualquer um dos auto-estados usuais de posição ou momento  $\{|x\rangle\}$  ou  $\{|p\rangle\}$  de modo que:

$$\hat{Q}|x\rangle = x|x\rangle \quad \text{e} \quad \hat{P}|p\rangle = p|p\rangle, \quad (2.35)$$

onde  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$  são respectivamente os observáveis posição e momento que obedecem à célebre relação de comutação de Heisenberg: (para simplificar as expressões, usaremos de agora em diante unidades tais que  $\hbar = 1$ )

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hat{I} \quad (2.36)$$

As relações de completeza e o produto interno dos elementos de uma base com os elementos da outra base podem ser expressos como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x\rangle \langle x| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |p\rangle \langle p| dp = \hat{I} \quad \text{e} \quad \langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ixp}. \quad (2.37)$$

Uma medição ideal de von Neumann, conhecida também por medida forte, pode ser definida como uma interação instantânea entre os dois subsistemas, de tal forma que pode-se desprezar as evoluções individuais de cada subsistema em comparação com o Hamiltoniano de interação:

$$\hat{H}_{int}(t) = \lambda \delta(t - t_0) \hat{O} \otimes \hat{P} \quad (2.38)$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro que descreve a intensidade da interação.

Seja o estado inicial do sistema composto dado pelo estado produto entre os dois subsistemas em questão  $|\psi_{(i)}\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\varphi\rangle$ . Logo, o estado final será dado por  $|\psi_{(f)}\rangle = \hat{U}(t_A, t_B) |\psi_{(i)}\rangle$  ( $t_A < t_0 < t_B$ ), onde o operador unitário que descreve a evolução desse sistema é dado por:

$$\hat{U}(t_A, t_B) = e^{-i \int_{t_A}^{t_B} \hat{H}_{int}(t) dt} = e^{-i\lambda \hat{O} \otimes \hat{P}}, \quad (2.39)$$

Podemos expandir  $|\alpha\rangle$  na base dos autoestados de  $\hat{O}$ , obtendo o seguinte resultado:

$$|\psi_{(f)}\rangle = e^{-i\lambda \hat{O} \otimes \hat{P}} \left( \sum_j |o_j\rangle \langle o_j| \alpha \right) \otimes |\varphi\rangle = \sum_j |o_j\rangle \alpha^j \otimes e^{-i\lambda o_j \hat{P}} |\varphi\rangle = \sum_j |o_j\rangle \otimes |\varphi_j\rangle \alpha^j \quad (2.40)$$



onde definimos os estados  $|\varphi_j\rangle$  como:

$$|\varphi_j\rangle = e^{-i\lambda o_j \hat{P}} |\varphi\rangle. \quad (2.41)$$

É importante notar que os estados  $|\varphi_j\rangle$  formam, em geral, um conjunto *não-ortogonal entre si* e correlacionados com os autoestados do observável  $\hat{O}$ .

Para analisarmos essa correlação em termos do observável posição da função de onda resultante em  $W_M$  vamos multiplicar ambos os lados por  $(\hat{I} \otimes \langle x|)$ :

$$(\hat{I} \otimes \langle x|) |\psi_{(f)}\rangle = \sum_j |o_j\rangle \langle x | \hat{V}_{\lambda o_j}^\dagger |\varphi_{(i)}\rangle \alpha^j, \quad (2.42)$$

onde identificamos  $\hat{V}_\xi = e^{i\xi \hat{P}}$  como a família dos operadores unitários que implementam a representação do grupo abeliano aditivo de translações na base das posições:

$$\hat{V}_\xi |x\rangle = |x - \xi\rangle. \quad (2.43)$$

Dessa forma, estabelece-se uma correlação entre a variável a ser medida  $o_j$  com a variável contínua de posição da partícula medidora:

$$(\hat{I} \otimes \langle x|) |\psi_{(f)}\rangle = \sum_j |o_j\rangle \alpha^j \varphi_{(i)}(x - \lambda o_j). \quad (2.44)$$

Note que, em geral:

$$\langle \varphi_{(i)} | \hat{V}_{\lambda o_j} |\varphi_{(i)}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{(i)}(x - \lambda o_j) \bar{\varphi}_{(i)}(x) dx \neq 0, \quad (2.45)$$

onde  $\bar{\varphi}_{(i)}(x)$  é o complexo conjugado da função de onda inicial ( $\varphi_{(i)}(x) = \langle x | \varphi_{(i)} \rangle$ ) do sistema medidor constituído pela partícula unidimensional.

O resultado (2.40) acima permite que possamos discutir de forma genérica (sem especificar um hamiltoniano de interação), uma dinâmica “típica” correspondente a uma medição de von Neumann, para tratarmos da formulação dada pelo programa da descoerência ao problema da medição na Mecânica Quântica [29].

Considere um espaço total dado por  $W^{(n \times m)} = W_S^{(n)} \otimes W_M^{(m)}$ , onde  $n$  e  $m$  representam as dimensões do subsistema a ser medido e sistema medidor, respectivamente. Definindo  $\{|o_j\rangle\}$  ( $j = 0, \dots, n-1$ ) como *base* do subsistema a ser medido  $W_S^{(n)}$  e  $\{|u_\sigma\rangle\}$ , ( $\sigma = 0, \dots, m-1$ ) base do sistema medidor, tem-se que um elemento de uma possível base

do espaço produto pode ser representado por  $\{|o_j\rangle \otimes |u_\sigma\rangle\}$ . Nesse caso, temos um estado-produto *não-emaranhado*. Podemos resumir a descrição de *von-Neumann* do processo de medição dada por 2.40 da seguinte forma:

$$|\Psi_I\rangle = |o_j\rangle \otimes |\varphi\rangle \xrightarrow{\text{medida}} |\Psi_F\rangle = |o_j\rangle \otimes |\varphi_j\rangle, \quad (2.46)$$

onde  $|\varphi\rangle$  é um estado arbitrário de  $W_M^{(m)}$  e os estados  $|\varphi_j\rangle$  são também estados de  $W_M^{(m)}$  (não, em geral, ortogonais entre si) correlacionados com os estados  $|o_j\rangle$  de  $W_S^{(n)}$  correlacionados pela variável discreta  $j$ . Supondo que o sistema físico agora comece em uma superposição  $|\alpha\rangle = |o_j\rangle \alpha^j$ , então, por linearidade, a dinâmica correspondente à interação entre o sistema físico e o aparato é:

$$|\alpha\rangle \otimes |\psi\rangle = \sum_j |o_j\rangle \alpha^j \otimes |\varphi\rangle \longrightarrow \sum_j |o_j\rangle \otimes |\varphi_j\rangle \alpha^j \quad (2.47)$$

que é um estado genericamente emaranhado do sistema  $W_S^{(n)} \otimes W_M^{(m)}$ . Observe que a superposição que antes estava contida apenas no sistema a ser medido  $W_S^{(n)}$  foi ampliada via *emaranhamento* para o sistema conjunto, sistema a ser medido + sistema medidor, correlacionando os estados  $|o_j\rangle$  e  $|\varphi_j\rangle$ . Essa situação é denominada de *pré-medida de von-Neumann* na literatura. A medida propriamente dita se concretiza quando (de alguma forma) um particular elemento da combinação  $|o_j\rangle \otimes |\varphi_j\rangle \alpha^j$  se “materializa” via uma observação de um elemento  $|\varphi_j\rangle$  do aparato clássico (o chamado “colapso da função de onda”) com uma probabilidade  $P_j = |\alpha^j|^2$ .

Nesse cenário, surge o chamado *Problema Geral da Medição*, que consiste em responder a seguinte pergunta: O que torna o processo de medição na Mecânica Quântica especial tendo em vista a necessidade de se criar um postulado para esse processo? Várias tentativas foram feitas para responder essa pergunta de forma satisfatória e devido a isso, foram criadas várias versões (reformulações) do problema da medição, como pode ser visto em [11]. Discutiremos nesse trabalho a formulação dada pelo programa da descoerência para o problema da medição. Problema esse que será dividido em 3 partes: o problema da *base preferida*, o problema da *não-observação de interferência* de estados macroscópicos ou “clássicos” e o problema específico do *colapso da função de onda*, isto é, de como resultados específicos são obtidos de forma intrinsecamente aleatória a partir da sobreposição coerente original.

### O problema da base preferida

O primeiro problema advém do fato que podemos escrever o estado resultante que descreve uma pré-medida de uma infinidade de maneiras, gerando uma ambiguidade, pois, o estado do medidor **não** é unicamente descrito por seu estado final.

$$|\Psi_F\rangle = |\varphi_a\rangle \otimes |\psi_a\rangle \varphi^a = |\varphi_b\rangle \otimes |\psi_b\rangle \varphi^b = |\varphi_c\rangle \otimes |\psi_c\rangle \varphi^c = \dots \quad (2.48)$$

Para perceber isso, basta enxertarmos uma resolução da identidade com bases ortonormais arbitrárias  $\{|\varphi_b\rangle\}$ ,  $\{|\varphi_c\rangle\}$ , ... da seguinte maneira:

$$|\Psi_F\rangle = |\varphi_a\rangle \otimes |\psi_a\rangle \varphi^a = |\varphi_b\rangle \langle \varphi^b | \varphi_a \rangle \otimes |\psi_a\rangle \varphi^a = |\varphi_b\rangle \otimes |\psi_b\rangle \varphi^b \quad (2.49)$$

com

$$|\psi_b\rangle \varphi^{(b)} = |\psi_a\rangle \langle \varphi^b | \varphi_a \rangle \varphi^a, \quad |\psi_c\rangle \varphi^{(c)} = |\psi_a\rangle \langle \varphi^c | \varphi_a \rangle \varphi^a, \dots \quad (2.50)$$

onde adotamos a convenção na equação acima de que índices repetidos dentro de parênteses **não** são somados. Zurek reconheceu que o problema da base preferida desempenha um papel importante no estudo da transição quântica-clássica [24]. A questão é por que percebemos os sistemas macroscópicos, em um conjunto *específico* de “valores físicos”, que *a priori* estão também submetidos às leis da mecânica quântica.

### O problema da não observação das interferências

Porque é tão difícil observar efeitos de interferências quânticas em escalas mesoscópicas e macroscópicas? O que acontece na transição quântica-clássica e porque esses efeitos são suprimidos?

### O problema do colapso da função de onda

Como resultados específicos são obtidos de forma intrinsecamente aleatória a partir da sobreposição coerente original?

Discutiremos em seguida, a dinâmica do fenômeno da descoerência e como esse programa se propôs em resolver esses problemas.

## 2.5 Dinâmica de Descoerência

### 2.5.1 O Modelo do Banho de Spins

Estudando explicitamente um modelo devido originalmente a Zurek [29], iremos investigar diretamente as características da descoerência. Vamos mostrar formalmente e numericamente como ocorre esse processo. O modelo de banho de spins introduzido por Zurek em 1982, consiste em um sistema formado por uma partícula de spin  $1/2$  (um único q-bit) com dois possíveis estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  (spin para cima e para baixo respectivamente). Denotaremos o seu espaço de estados por  $W^{(2)}$  e esse sistema irá interagir com um ambiente, composto por  $N$  partículas de spin  $1/2$  ( $N$  q-bits) em que o  $k$ -ésimo q-bit terá dois possíveis estados  $|0_k\rangle$  e  $|1_k\rangle$  pertencentes ao espaço  $W_k^{(2)}$ . O espaço total  $W$  será dado pelo produto

$$W = W^{(2)} \otimes W_{amb} = W^{(2)} \bigotimes_{k=1}^N W_k^{(2)} \quad (2.51)$$

Consideraremos agora que a interação entre o sistema  $W^{(2)}$  e seu ambiente ocorre de maneira tão rápida que o efeito da evolução unitária devido aos Hamiltonianos individuais de cada sub-sistema possa ser desprezado em face da interação. Modelaremos o Hamiltoniano de interação da forma:

$$\hat{H}_{int} = -\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \otimes \sum_{k=1}^N \hat{I}_1 \otimes \hat{I}_2 \otimes \dots \otimes \hat{I}_{k-1} \otimes [g_k(|0_k\rangle\langle 0_k| - |1_k\rangle\langle 1_k|)] \otimes \hat{I}_{k+1} \otimes \dots \otimes \hat{I}_N \quad (2.52)$$

Podemos reescrever  $\hat{H}_{int}$  de maneira mais compacta como:

$$\hat{H}_{int} = -\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z \otimes \sum_{k=1}^N g_k \hat{\sigma}_z^{(k)}) \quad (2.53)$$

onde

$$\hat{\sigma}_z^{(k)} = |0_k\rangle\langle 0_k| - |1_k\rangle\langle 1_k|. \quad (2.54)$$

Vamos supor o estado inicial do sistema como:

$$|\Psi(0)\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \bigotimes_{k=1}^N (\alpha_k|0_k\rangle + \beta_k|1_k\rangle) \quad (2.55)$$

A dinâmica é governada pelo operador unitário de evolução temporal através da equação:

$$\hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle = |\Psi(t)\rangle \quad (2.56)$$

sendo

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t\right). \quad (2.57)$$

Sob a ação de  $\hat{H}$  o estado  $|\Psi(0)\rangle$  evolui para:

$$|\Psi(t)\rangle = a |0\rangle |E_0(t)\rangle + b |1\rangle |E_1(t)\rangle \quad (\hbar = 1), \quad (2.58)$$

onde

$$|E_0(t)\rangle = |E_1(-t)\rangle = \bigotimes_{k=1}^N \left( \exp\left(\frac{ig_k t}{2}\right) \alpha_k |0_k\rangle + \exp\left(-\frac{ig_k t}{2}\right) \beta_k |1_k\rangle \right). \quad (2.59)$$

A matriz densidade pura desse estado é:

$$\hat{\rho}(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)| \quad (2.60)$$

$$= (|a|^2 |0\rangle \langle 0| \otimes |E_0(t)\rangle \langle E_0(t)| + |b|^2 |1\rangle \langle 1| \otimes |E_1(t)\rangle \langle E_1(t)| \quad (2.61)$$

$$+ ab^* |0\rangle \langle 1| \otimes |E_0(t)\rangle \langle E_1(t)| + a^* b |1\rangle \langle 0| \otimes |E_1(t)\rangle \langle E_0(t)| \quad (2.62)$$

Tomando o traço parcial no sistema do ambiente tem-se que:

$$Tr_{amb}(\hat{\rho}(t)) = |a|^2 |0\rangle \langle 0| + |b|^2 |1\rangle \langle 1| + r(t) ab^* |0\rangle \langle 1| + r^*(t) a^* b |1\rangle \langle 0| \quad (2.63)$$

com

$$r(t) = \langle E_1(t) | E_0(t) \rangle = \prod_{k=1}^N (|\alpha_k|^2 \exp(ig_k t) + |\beta_k|^2 \exp(-ig_k t)) \quad (2.64)$$

A função  $r(t)$  é chamada de *fator de descoerência* e é importante ressaltar que o fator de descoerência é *quasi-periódico*. Isso significa que para um tempo suficientemente grande (com tempos para modelos realísticos muito maiores do que a idade do Universo), o sistema volta a estar arbitrariamente próximo ao ponto inicial. Fazendo alguns experimentos numéricos, observamos que, na prática, quanto maior for  $N$ , o fator  $|r(t)|^2$  tende a zero muito rapidamente. A coerência desaparece localmente, mas fica retida no sistema como um todo. De certo modo, podemos dizer que a informação contida no q-bit flui para o ambiente. O gráfico abaixo representa  $|r(t)|^2$  com  $|\alpha_k|^2 = |\beta_k|^2 = \frac{1}{2}$  e com os coeficientes relativos a intensidade de acoplamento  $g_k$  gerados pseudo-aleatoriamente no intervalo de  $[0, 2\pi]$ .

O gráfico 2.4 representa a mesma função  $|r(t)|^2$  acima mas aplicamos uma escala logarítmica para podermos observar melhor as oscilações que sucedem ao decaimento.

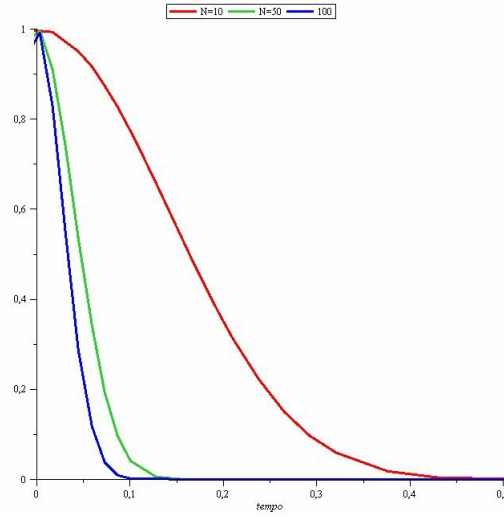


Figura 2.3: Fator de Descoerência

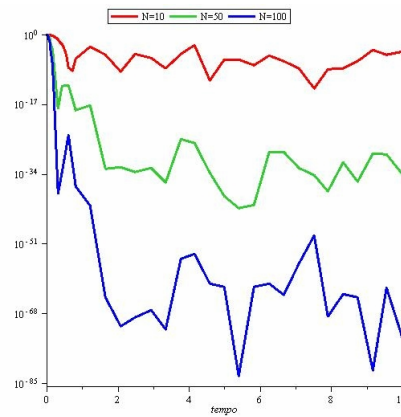


Figura 2.4: Fator de Descoerência em escala logarítmica

### 2.5.2 A Dinâmica de Descoerência na Esfera de Bloch: Os estados de ponteiro

Como visto, pode-se descrever geometricamente a matriz densidade de um q-bit na Esfera de Bloch usando a parametrização usual:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{I} + \vec{\sigma} \cdot \vec{v}), \quad (2.65)$$

onde  $|\vec{v}| \leq 1$ . Segue então que a dinâmica do modelo anterior na Esfera de Bloch é representada por:

$$v^z = (|a|^2 - |b|^2) = cte \quad (2.66)$$

$$v^x(t) = 2ab^* \prod_{k=1}^N [\cos g_k t] \quad (2.67)$$

$$v^y(t) = 2a^*b \prod_{k=1}^N [(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) \sin g_k t]$$

Escolhendo, por simplicidade,  $|a|^2 = |b|^2 = |\alpha_k|^2 = |\beta_k|^2 = \frac{1}{2}$ , observamos que a dinâmica ocorre no *equador da esfera* e se dá no plano  $z = 0$  e apenas no eixo  $x$  pois,  $v^y(t)$  nessas condições.

Com essas escolhas teremos apenas  $v^x(t)$  variando com o tempo conforme plotamos abaixo para  $N = 10$ . Portanto, vimos que um estado puro localizado na superfície da Esfera de Bloch sob a ação de um ambiente externo, composto por apenas 10 partículas de spin  $\frac{1}{2}$ , caminha em um tempo muito curto ao centro da Esfera de Bloch e fica oscilando em torno do centro como podemos observar na figura:

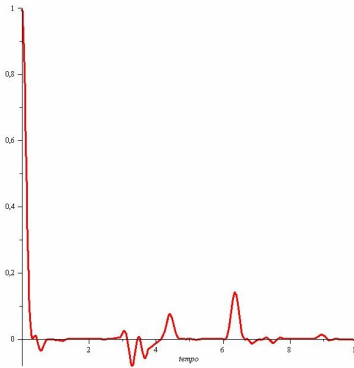


Figura 2.5: Dinâmica para o eixo x da Esfera de Bloch

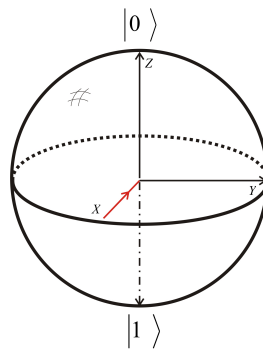


Figura 2.6: Dinâmica na Esfera de Bloch

Como visto, mesmo com esse modelo simplificado (*toy-model*), o programa da descoerência oferece uma explicação para o fato de não observarmos interferências quânticas entre estados macroscópicos. À medida que aumentamos o número de partículas do ambiente, vemos claramente que os termos não-diagonais relacionados com as interferências quânticas desaparecem muito rapidamente quando tomamos o traço parcial em relação ao sistema do ambiente. Pode-se identificar também os estados que não são afetados pela descoerência (conhecidos como *estados de ponteiro*). Esses estados são robustos, porque eles permanecem inalterados no âmbito do processo e são, portanto, cruciais para uma maior compreensão do processo de transição quântico-clássico. Identificamos, neste modelo simples, uma forma geométrica para reconhecer esses estados, onde qualquer estado pertencente ao eixo  $z$  da esfera de Bloch não sofre a ação da decoerência. O eixo  $z$  em seguida define uma base privilegiada (a base em que  $\sigma_z$  é diagonal). Nesse modelo, vemos que o estado inicial é descrito por um vetor na superfície da esfera de Bloch (estado puro) e sob a interação com o ambiente, o estado torna-se um estado misto e se move rapidamente para o centro da esfera, o que representa um estado maximamente emaranhado com o ambiente. Por exemplo, assumindo que as interações hamiltonianas fundamentais que ocorrem na natureza em um nível macroscópico, são funções da posição, pode-se justificar o fato das posições macroscópicas serem bem definidas pois as interações as definem como uma base privilegiada[10].

Então, vemos que o ambiente seleciona as bases privilegiadas para descrever o processo de medição através da forma do Hamiltoniano de interação, esse é o conceito de superseleção ambiental (*einselection*), introduzido por Zurek. Dessa forma, temos um critério para nos dizer qual a base para descrever o aparato medidor em que o estado final da interação (sistema a ser medido, sistema medidor e sistema ambiente) seria unicamente determinado. A base preferida para descrever o processo de medição é gerada então pelos estados de ponteiros que permanecem robustos durante a interação com o ambiente. Além de oferecer um critério para reconhecer os estados de ponteiro, o programa da descoerência fornece uma decomposição única para o estado final resultante do processo de descoerência mesmo nos casos em que há degenerescência nos autovalores do observável em questão, como pode-se ver no teorema provado no Apêndice. Ou seja, não é necessário impor nenhuma condição específica para os autovalores destes observáveis.



### 2.5.3 O problema foi resolvido?

Como discutido até agora, o programa da descoerência consegue resolver os problemas da base preferida e o da não observação de interferência em estados macroscópicos, mas e o problema específico do colapso da função de onda? O fato dos termos referentes a interferência quântica serem suprimidos implica necessariamente que não exista mais superposição entre os autoestados do observável selecionado pelo ambiente? Esse é um ponto bastante delicado e controverso. Basta vermos as respostas dadas por físicos, matemáticos e filósofos quando estes foram entrevistados sobre questões fundamentais da Mecânica Quântica e em particular ao Problema da Medição (veja [55] [13], para maiores detalhes de como foram feitas as entrevistas).

O maior problema advém do fato que o estado final resultante do processo de descoerência no formalismo usual é dependente sobre qual postura filosófica é assumida para tratar o colapso da função de onda. Com o formalismo padrão, não há maneiras de distinguir fisicamente um estado associado a uma matriz densidade própria ou imprópria, pois elas são representadas pelo mesmo objeto matemático. Porém, existe uma clara distinção conceitual entre as duas formulações e essa distinção conceitual é responsável pelas diferentes interpretações assumidas para o estado final resultante do processo de descoerência, como será argumentado em seguida.

Quando se analisa o resultado final da interação, temos uma matriz densidade imprópria (diagonal na base selecionada pela interação com o ambiente, conhecida na literatura como *base de ponteiro* [28]) resultante de um traço parcial aplicado ao sistema do ambiente. Como discutido anteriormente, a matriz densidade imprópria não tem relação com uma ignorância clássica sobre o resultado da medição que por algum motivo não temos acesso. Como é argumentado em [56], para o programa da descoerência resolver o Problema da Medição de forma satisfatória, seria necessário explicar como que, ao final do processo de medição, obteríamos um estado puro como resultado da medição ou como obteríamos um estado misto (descrito por uma matriz densidade própria) de tal forma que a mistura seja associada a uma incerteza clássica sobre qual estado puro obteríamos ao final do processo de medição. Sem essa descrição, de como e quando um estado puro emerge ao final do processo de medição não podemos afirmar que o problema foi de fato resolvido pois, em princípio, não podemos associar nenhuma incerteza subjetiva ao estado que sofreu o processo de descoerência e teve sua base de medição selecionada pelo

ambiente. Devido a persistência da mistura imprópria, o programa da descoerência tem de assumir uma interpretação onde o colapso da função de onda não é um elemento fundamental da teoria, ou seja, os pares correlacionados entre sistema medidor e sistema a ser medido resultantes do traço parcial sobre o sistema do ambiente devem de fato existir (por exemplo, na interpretação de Everett [17], onde em cada “universo”, temos uma história referente a um dos possíveis colapsos). O colapso nessas interpretações é visto apenas como um fenômeno aparente, dado que em cada “universo”, temos um estado referente a um colapso da função de onda (história clássica). Assim, para uma descrição mais satisfatória do processo de medição através do programa da descoerência é necessário assumir interpretações da mecânica quântica na qual o colapso é visto como fenômeno aparente pois, ao contrário, seria necessário explicar como um sistema misto (proveniente de um traço parcial) seria representado por um estado puro ao final da interação. Porém, como pode ser visto em [57] que interpretações como essa sofrem do chamado *Problema da Fatoração*, que basicamente, pode ser anunciado da seguinte maneira: Dado que o estado do universo antes do colapso é tido como elemento principal, o que determinaria a correta fatoração dos subsistemas pertencentes a esse universo, para que tenhamos uma descrição de um processo de medição quântica? Dado que o colapso é um fenômeno aparente, como justificar o fato de experimentarmos no laboratório apenas um ramo entre todos os possíveis? Esse é outro ponto bastante controverso e polêmico, pois para responder essas perguntas alguns físicos incorporam a noção da “consciência individual” nos processos quânticos, argumentando que esta esteja também correlacionada ao estado global da função de onda ontológica. Não temos como objetivo abordar esse problema neste trabalho, porém pode-se ver em [57], uma crítica interessante em relação às interpretações da Mecânica Quântica que tratam o colapso da função de onda como um fenômeno aparente.

Nesse ponto, convém manifestar nossa opinião de que uma mudança de formalismo é essencial para continuarmos a investigar os aspectos fundamentais envolvidos na questão da medição dos estados quânticos. Alguns físicos defendem a ideia de que essa reformulação deve ser feita em termos do formalismo de medições generalizadas (POVMs) juntamente com o processo de descoerência [58].

Porém, de agora em diante, iremos argumentar como o Formalismo de Dois Estados e os seus conceitos subjacentes como Medição Fraca e Valor Fraco podem fornecer uma análise diametralmente oposta aos programas que tentam explicar o colapso em

---

termos de evoluções unitárias globais juntamente com o processo de descoerência.

## 3 O Formalismo de Dois Estados, a Retrocausalidade e a Emergência do Tempo

### 3.1 O Formalismo de Dois Estados na Mecânica Quântica

O formalismo de Dois Estados desenvolvido por Aharonov, Bergman e Lebowitz (ABL) em 1964 [30] foi proposto com a intenção de remover a assimetria temporal existente no formalismo usual da Mecânica Quântica devido ao postulado da projeção, por acharem que essa assimetria não advém de um aspecto intrínseco da teoria mas de uma assimetria nas condições de contorno temporais. Essa assimetria é removida, como veremos a diante, a partir de uma reformulação da Mecânica Quântica Padrão [1] em termos de estados pré e pós-selecionados, que serão explicados a seguir.

Considere um estado  $|\alpha_{in}\rangle$  bem determinado devido a uma medida executada em um tempo  $t_{in} < t$  e suponha que em um tempo posterior  $t_{fin} > t$  façamos uma nova medição nesse estado de um observável cujos possíveis autoestados façam parte de um conjunto  $\{|\beta_{fin}\rangle_1, |\beta_{fin}\rangle_2, |\beta_{fin}\rangle_3 \dots\}$ . A ideia é de escolhermos um resultado específico  $|\beta_{fin}\rangle$  e efetuarmos esse mesmo experimento um número muito grande de vezes, descartando todos os experimentos que não resultarem em  $|\beta_{fin}\rangle$ . Como veremos, esse *refinamento* do sub-ensemble total, possui propriedades que dependem do estado pré-selecionado  $|\alpha_{in}\rangle$  como também do estado pós-selecionado  $|\beta_{fin}\rangle$ . Diremos então, que no instante  $t$ , os estados desse sub-ensemble específico é descrito pelo bi-vetor  $\langle\beta_{fin}| \otimes |\alpha_{in}\rangle$ .

Como se trata de uma reformulação, não é possível distinguir experimentalmente um formalismo do outro. Porém, como veremos ao final da discussão, ao adotarmos esse formalismo podemos mudar substancialmente a interpretação dada ao processo de medição na Mecânica Quântica.

Queremos agora calcular a *probabilidade condicional* de uma medição de um observável  $\hat{O} = |o_k\rangle o_k \langle o^k|$  com autovalor  $o_j$  no instante intermediário  $t$  sabendo-se de an-

temão os respectivos estados pré e pós-selecionados  $|\alpha_{in}\rangle$  e  $|\beta_{fin}\rangle$  obtidos respectivamente nos instantes  $t_{in}$  e  $t_{fin}$ . Ora, a probabilidade de um evento  $A$  condicionada ao resultado de um dado evento  $B$  é dada pela probabilidade relativa

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (3.1)$$

onde  $P(A \cap B)$  é a probabilidade de acontecer *ambos* os eventos  $A$  e  $B$  e  $P(B)$  é a probabilidade de ocorrência somente do evento  $B$ . O evento  $A$  tomamos como sendo a medida do observável  $\hat{O}$  no instante  $t$  dados os estados pré e pós-selecionados  $|\alpha_{in}\rangle$  e  $|\beta_{fin}\rangle$ , resultando em um autovalor específico  $o_j$ , enquanto que o evento  $B$  representa o fato de termos medido  $\hat{O}$  no instante  $t$  (com qualquer resultado) dados os estados pré e pós-selecionados  $|\alpha_{in}\rangle$  e  $|\beta_{fin}\rangle$ . A *amplitude* de probabilidade para o evento  $A \cap B$  é dada claramente por  $\langle \beta_{fin} | \hat{U}_{t \rightarrow t_{fin}} | o_j \rangle \langle o_j | \hat{U}_{t_{in} \rightarrow t} | \alpha_{in} \rangle$ . Dessa forma, aplicando 3.1, obtemos a fórmula desenvolvida por ABL [30]:

$$prob_{ABL}(o_j, t | \alpha_{in}, t_{in}; \beta_{fin}, t_{fin}) = \frac{\left| \langle \beta_{fin} | \hat{U}_{t \rightarrow t_{fin}} | o_j \rangle \langle o_j | \hat{U}_{t_{in} \rightarrow t} | \alpha_{in} \rangle \right|^2}{\sum_j \left| \langle \beta_{fin} | \hat{U}_{t \rightarrow t_{fin}} | o_j \rangle \langle o_j | \hat{U}_{t_{in} \rightarrow t} | \alpha_{in} \rangle \right|^2}. \quad (3.2)$$

Note que, a expressão acima é temporalmente *simétrica*. Seguindo Aharonov e colaboradores, podemos interpretar essa fórmula da seguinte maneira: Começamos com o estado pré-selecionado  $|\alpha_{in}\rangle$ . Em seguida, evoluímos esse estado através do operador  $\hat{U}_{t_{in} \rightarrow t} = \exp(-i\hat{H}(t - t_{in}))$  com  $\hat{H}$  representando o Hamiltoniano do sistema. Então, o termo  $\left| \langle o_j | \hat{U}_{t_{in} \rightarrow t} | \alpha_{in} \rangle \right|^2$  representa a probabilidade de obtermos  $|o_j\rangle$  em uma medição do observável  $\hat{O}$  em um tempo  $t$  no estado  $\hat{U}_{t_{in} \rightarrow t} | \alpha_{in} \rangle$ . Analogamente, evolui-se  $|o_j\rangle$  através do operador  $\hat{U}_{t \rightarrow t_{fin}}$  e  $\left| \langle \beta_{fin} | \hat{U}_{t \rightarrow t_{fin}} | o_j \rangle \right|^2$  fornece a probabilidade de obtermos  $|\beta_{fin}\rangle$ . Dado os três estágios, a *probabilidade condicional* de obtermos  $|o_j\rangle$  no tempo intermediário  $t \in [t_{in}, t_{fin}]$  entre a pré e pós-seleção é dada pelo produto das duas expressões explicadas anteriormente com a devida normalização, ou seja, somando todos os possíveis eventos condicionados a uma pré-seleção de  $|\alpha_{in}\rangle$  em  $t_{in}$  e uma pós-seleção de  $|\beta_{fin}\rangle$  em  $t_{fin}$ . Como a evolução temporal é unitária, temos que:

$$(\hat{U}_{t \rightarrow t_{fin}})^\dagger = \exp(-i\hat{H}(t_{fin} - t))^\dagger = \exp(-i\hat{H}(t - t_{fin})) = \hat{U}_{t_{fin} \rightarrow t}. \quad (3.3)$$

De modo que podemos interpretar, [32], ao invés de  $\hat{U}_{t \rightarrow t_{fin}}$  agindo em  $|o_j\rangle$ , podemos considerar  $\hat{U}_{t_{fin} \rightarrow t}$  agindo sobre  $\langle \beta_{fin} |$ . Assim, no *formalismo de dois estados*

um sistema quântico em um dado instante  $t$  é completamente descrito por um bi-vetor, da seguinte maneira:

$$\langle\beta(t)| \otimes |\alpha(t)\rangle, \quad (3.4)$$

onde  $|\alpha(t)\rangle$  pertence a um espaço de estados  $W$ , e é dado pelo resultado de uma medição realizada em  $t_1 < t$  (pré-seleção) que evoluiu “para frente no tempo” (evolução causal) através de uma dada operação unitária:

$$|\alpha(t)\rangle = \hat{U}(t_1, t) |\alpha(t_1)\rangle \quad (3.5)$$

e  $\langle\beta(t)|$  pertence ao espaço dual  $\bar{W}$ , e é dado pelo resultado de uma medida realizada em  $t_2 > t$  (pós-seleção) que “evoluiu para trás no tempo” (evolução retrocausal) através da operação unitária:

$$\langle\beta(t)| = \langle\beta(t_2)| \hat{U}^\dagger(t, t_2). \quad (3.6)$$

Note que a expressão 3.2 é *simétrica* sobre a troca dos estados pré e pós-selecionados, no sentido que, a probabilidade de obter  $o_j$  não se altera ao trocarmos  $t$  por  $-t$ , ou seja, como afirmamos anteriormente, a expressão é *temporalmente simétrica*. O formalismo de dois estados representa um “refinamento” da formulação usual da MQ onde se considera apenas estados pré-selecionados. Isso porque, ao considerarmos um ensemble com um grande número de sistemas todos preparados com um mesmo estado pré-selecionado, o formalismo de dois estados prevê que esse ensemble pode ser subdividido em sub-ensembles, cada um com diferentes estados pós-selecionados. Isso significa que uma descrição completa de um ensemble nesse formalismo depende de “informações futuras”, incluindo uma decisão futura de qual medida será realizada por um observador e qual o resultado do futuro colapso da função de onda. Existem, portanto, elementos retrocausais nessa formulação (que mantem uma simetria entre o futuro e o passado), pois o sistema “carrega a informação” sobre o seu destino futuro, embora essa informação seja inacessível para qualquer observador externo. Essa informação pode ser considerada como um tipo de variável escondida. O melhor argumento a favor de aceitarmos essa noção (contra-intuitiva) de retrocausalidade é a identificação de um novo “elemento de realidade” denominado de *valor fraco* de um observável dado um par de estados pré e pós-selecionados. Examinaremos esse conceito nas próximas seções.

Para isso, começaremos examinando a seguir, um exemplo simples.

### 3.1.1 Pré e pós-seleção em um sistema de um q-bit.(partícula de spin 1/2)

Considere um exemplo típico de Stern-Gerlach onde há um ensemble de partículas de spin 1/2 pré-selecionados no autoestado  $|+\rangle$  associado ao autovalor positivo do operador  $\hat{S}_x$ , e pós-selecionado no autoestado  $|0\rangle$  associado ao autovalor positivo do operador  $\hat{S}_z$ . Supondo que a evolução unitária entre as medições não altere a componente de spin (evolução de um Hamiltoniano nulo), temos o seguinte estado quântico em um tempo intermediário  $t$ :

$$\langle 0| \otimes |+\rangle \quad (3.7)$$

Se realizarmos uma medição de spin na direção do eixo  $z$ , temos que, a probabilidade de encontrarmos o autovalor  $+1/2$  é dada por:

$$prob_{ABL}(\hat{S}_z = +1/2) = \frac{|\langle 0|0\rangle \langle 0|+\rangle|^2}{|\langle 0|0\rangle \langle 0|+\rangle|^2 + |\langle 0|1\rangle \langle 1|+\rangle|^2} = 1 \quad (3.8)$$

Suponha agora que, ao invés de medir  $\hat{S}_z$ , implementemos a medida na direção  $x$ . Segue então, que a probabilidade de encontrarmos o autovalor  $+1/2$  é dada por:

$$prob_{ABL}(\hat{S}_x = +1/2) = \frac{|\langle 0|+\rangle \langle +|+\rangle|^2}{|\langle 0|-\rangle \langle -|+\rangle|^2 + |\langle 0|+\rangle \langle +|+\rangle|^2} = 1 \quad (3.9)$$

Note que, a partir do formalismo de dois estados, obtemos uma informação inerentemente nova, pois agora, para o estado quântico definido pela expressão 3.7, sabemos a priori, o resultado de duas possíveis medições de observáveis que não comutam entre si ( $[\hat{S}_x, \hat{S}_z] \neq 0$ ).

Considere agora, que queiramos medir o spin na direção  $\xi = 45^\circ$  relativo aos eixos  $x$  e  $z$  no plano  $y = 0$ . Temos então que:

$$\hat{S}_{\xi=45^\circ} = \hat{S}_x \cos(45^\circ) + \hat{S}_z \sin(45^\circ) = (\hat{S}_x + \hat{S}_z) / \sqrt{2} \quad (3.10)$$

Considerando o resultado anterior em que temos o autovalor  $+1/2$  ocorrendo com probabilidade 1 na direção  $x$  e o autovalor  $+1/2$  ocorrendo com probabilidade 1 na direção  $z$ , poderíamos esperar de “forma ingênua” obter o seguinte autovalor correspondente à  $\hat{S}_{\xi=45^\circ}$  :

$$\hat{S}_{\xi=45^\circ} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3.11)$$

O resultado acima não pode estar certo já que o autovalor de qualquer operador de spin 1/2 deve ser  $\pm 1/2$ . Então, qual é o problema? Sabemos que uma medição ideal em  $\hat{S}_i$  perturba completamente um autoestado de  $\hat{S}_{j \neq i}$ . Ao analisarmos o estado dado por 3.7 vemos que uma medição em  $\hat{S}_{\xi=45^\circ}$  perturba tanto o estado pré-selecionado quanto o estado pós-selecionado e, por esse motivo, não devemos esperar que esses dois estados sejam, de fato, os estados corretos para intermediar uma medição ideal de  $\hat{S}_{\xi=45^\circ}$ . Em outras palavras, não devemos esperar que esses dois estados formem juntos as condições de contorno temporais para uma medição intermediária de  $\hat{S}_{\xi=45^\circ}$ . Porém, podemos fazer a seguinte pergunta:

E se, de alguma maneira, fosse possível medir  $\hat{S}_{\xi=45^\circ}$  tal que essa medição não causasse uma perturbação apreciável nos estados pré e pós-selecionados, ou seja, que esses estados continuem formando condições de contorno temporais ideais, ainda assim, obteríamos o mesmo resultado?

Só existe uma maneira para realizarmos tal procedimento: Para medir  $\hat{S}_{\xi=45^\circ}$  sem que essa medição cause uma perturbação nos estados de 3.7, devemos abrir mão de nossa precisão nesse processo, no sentido de interagir o mínimo possível os dois sistemas (sistema a ser medido e medidor), para que essa interação não mude o estado a ser medido de forma substancial.

Para responder questões como essa proposta acima, Aharonov, Albert e Vaidman em 1988 [33] desenvolveram os importantes conceitos de Medida Fraca e Valor Fraco, como veremos a seguir.

### 3.1.2 Medida Fraca e Valor Fraco

A medida fraca pode ser entendida como uma interação infinitesimal entre o sistema a ser medido e o sistema medidor, com a intenção de não modificar substancialmente o estado a ser medido, como discutido anteriormente. O processo de medição fraca pode ser modelado analogamente ao modelo de von Neumann, com uma interação infinitesimal:

$$\hat{H}_{int}^{(w)}(t) = \epsilon \delta(t - t_0) \hat{O} \otimes \hat{P} \quad (\epsilon \rightarrow 0) \quad (3.12)$$

O operador de evolução unitária devido a uma medição fraca será expresso por:

$$\hat{U}^{(w)}(t_i, t_f) = e^{-i \int_{t_i}^{t_f} \hat{H}_{int}^{(w)}(t) dt} = e^{-i \epsilon \hat{O} \otimes \hat{P}} \quad (\epsilon \rightarrow 0) \quad (3.13)$$



Considerando  $\hat{U}^{(w)}(t_i, t_f)$  expandido até primeira ordem em  $\epsilon$

$$\hat{U}^{(w)}(t_i, t_f) \simeq \hat{I} - i\epsilon \hat{O} \otimes \hat{P} \quad (3.14)$$

temos que:

$$|\Psi_f\rangle = \left( \hat{I} - i\epsilon \hat{O} \otimes \hat{P} \right) |\Psi_i\rangle \quad (3.15)$$

com  $|\Psi_i\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle$  dado pelo produto tensorial do estado a ser medido com o estado medidor. Como mostrado em [33], a evolução acima não altera substancialmente o estado, no sentido que, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $|\Psi_f\rangle \rightarrow |\Psi_i\rangle$ .

Garantido que a medição não irá causar perturbação (em um limite ideal), o que acontece quando condicionamos uma medição fraca a uma futura medição forte (pós-seleção)? O estado resultante de uma evolução fraca, condicionado pela pré e pós-seleção, é dado por:

$$|\Psi_f\rangle = (\langle\beta| \otimes \hat{I}) \hat{U}^{(w)}(t_i, t_f) (|\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle) \quad (3.16)$$

onde  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  são respectivamente os estados pré e pós-selecionados do subsistema a ser medido.

Considerando, novamente,  $\hat{U}^{(w)}(t_i, t_f)$  expandido até primeira ordem em  $\epsilon$ , segue que:

$$|\Psi_f\rangle \simeq (\langle\beta| \otimes \hat{I}) (\hat{I} - i\epsilon \hat{O} \otimes \hat{P}) (|\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle) \quad (3.17)$$

$$|\Psi_f\rangle \simeq \langle\beta|\alpha\rangle (\hat{I} - i\epsilon \frac{\langle\beta|\hat{O}|\alpha\rangle}{\langle\beta|\alpha\rangle} \hat{P}) |\varphi_{(i)}\rangle \quad (3.18)$$

$$|\Psi_f\rangle \simeq \langle\beta|\alpha\rangle (1 - i\epsilon O_w \hat{P}) |\varphi_{(i)}\rangle \quad \text{com} \quad O_w = \frac{\langle\beta|\hat{O}|\alpha\rangle}{\langle\beta|\alpha\rangle}. \quad (3.19)$$

$$|\Psi_f\rangle \simeq \langle\beta|\alpha\rangle e^{-i\epsilon O_w \hat{P}} |\varphi_{(i)}\rangle. \quad (3.20)$$

O termo  $O_w$  é reconhecido como o *valor fraco* do observável  $\hat{O}$  e, como pode ser visto, o valor fraco pode assumir valores em todo o plano complexo, diferentemente do valor esperado que temos no formalismo usual que assume apenas valores reais. Ambas as quantidades podem ser relacionados da seguinte maneira:

$$\left\langle \hat{O} \right\rangle_{|\alpha\rangle} = \langle\alpha|\hat{O}|\alpha\rangle = \langle\alpha| \sum_{\beta} |\beta\rangle \langle\beta|\hat{O}|\alpha\rangle = \sum_{\beta} |\langle\beta|\alpha\rangle|^2 \frac{\langle\beta|\hat{O}|\alpha\rangle}{\langle\beta|\alpha\rangle}, \quad (3.21)$$

onde o conjunto de estados ortogonais  $\{|\beta\rangle\}$  são os resultados de medições ideais (pós-seleção). Dessa forma, podemos interpretar o valor esperado usual de um observável em um determinado estado (pré-seleção) com  $t_i < t$ , como a soma de todas as possíveis

medições fracas feitas em um tempo  $t$ , tal que essas medições sejam condicionadas a uma pós-seleção em um tempo  $t_f > t$  e cada uma com um peso dado pela probabilidade de se obter uma transição entre os estados pré e pós-selecionados do mesmo observável. Note que, quando  $|\beta\rangle = |\alpha\rangle$ , o valor fraco se torna o valor esperado usual.

Voltemos então ao exemplo anterior dado pelo estado:

$$\langle 0| \otimes |+\rangle, \quad (3.22)$$

calculando o valor fraco dos observáveis  $\hat{S}_x$  e  $\hat{S}_z$  temos que:

$$S_{w(x)} = \frac{\langle 0|\hat{S}_x|+\rangle}{\langle 0|+\rangle} = \frac{1}{2} \quad (3.23)$$

e

$$S_{w(z)} = \frac{\langle 0|\hat{S}_z|+\rangle}{\langle 0|+\rangle} = \frac{1}{2}. \quad (3.24)$$

Note que nos dois casos em que a Probabilidade ABL foi igual a 1, equações 3.8 e 3.9, o valor fraco de cada observável, coincidiu com um autovalor dos observáveis em questão. Vamos então calcular o valor fraco do observável  $\hat{S}_{\xi=45^\circ}$ :

$$S_{w(\xi=45)} = \frac{\langle 0|\frac{\hat{S}_x + \hat{S}_z}{\sqrt{2}}|+\rangle}{\langle 0|+\rangle} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (3.25)$$

onde o valor encontrado não corresponde mais a um autovalor do observável  $\hat{S}_{\xi=45^\circ}$ . Pelo fato do valor fraco coincidir com o autovalor nas equações 3.23 e 3.24, fomos erroneamente conduzidos a interpretar o resultado da equação 3.11 como o autovalor do observável  $\hat{S}_{\xi=45^\circ}$ , quando esse resultado, na realidade, representa o *valor fraco* do observável  $\hat{S}_{\xi=45^\circ}$ .

Vários experimentos tem comprovado a existência dos valores fracos e esse conceito tem adquirido uma importância crescente tanto na investigação de fundamentos da MQ como na prática, em metrologia quântica [34, 35, 36, 38].

Voltando à estrutura básica do formalismo de dois estados, temos que um sistema quântico em um tempo intermediário entre a pré e pós-seleção passa a ser descrito por dois estados resultantes de medidas ideais: uma em um tempo passado e outra em um tempo futuro, associando a cada um desses instantes de tempo, *dois* espaços de Hilbert ao invés do formalismo usual em que temos um estado quântico, associado a um único espaço de Hilbert, evoluindo de maneira sequencial no tempo.

Na seção seguinte, discutiremos as ideias desenvolvidas por Castagnoli [59] [60] [61] [46], para uma possível explicação da vantagem dos algoritmos quânticos em relação

a seus análogos clássicos baseado no conceito de retrocausalidade (conceito fundamental do formalismo descrito acima) envolvido em medições parciais em um par de estados maximamente correlacionados.

## 3.2 A eficiência dos algoritmos quânticos e a questão da retrocausalidade

Entende-se por um algoritmo, uma sequência de passos lógicos para que algum problema seja resolvido. Podemos pensar como uma sequência finita de instruções bem definidas e não ambíguas onde cada instrução possa ser executada por algum mecanismo físico. Classicamente, qualquer algoritmo pode ser pensado como um procedimento efetivo que executa alguma função:

$$f : \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^n \quad (3.26)$$

onde  $f$  transforma a sequência de  $m$ -bits de informação clássica em  $n$ -bits de informação clássica. Note que, em uma computação clássica, existe uma clara correlação entre os  $n$ -bits de informação de saída com os  $m$ -bits de informação de entrada, correlação essa, estabelecida pela função  $f$  (conhecida também por função-decisão).

Por exemplo, considere a função *soma* :  $\{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  definida pela usual soma (mod 2).

$$\text{soma}(j, k) = j \oplus k \quad (\text{mod } 2) \quad (3.27)$$

Podemos considerar a implementação de funções arbitrárias  $f : \{0, \dots, N-1\} \rightarrow \{0, \dots, M-1\}$  através de computação quântica, via evoluções unitárias de estados quânticos juntamente com estados auxiliares da seguinte maneira:

$$\hat{U} (|u_i\rangle \otimes |u_\sigma\rangle) = |u_i\rangle \otimes |u_{\sigma \oplus f(i)}\rangle \quad (i = 0, \dots, N-1) \quad \text{e} \quad (\sigma = 0, \dots, M-1) \quad (3.28)$$

Por exemplo, para implementar a soma *mod 2*, (Eq.3.27), basta tomar a função  $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  acima como a *função identidade*.

Os elementos básicos de uma computação quântica baseada em evoluções unitárias (modelo de Deutsch) pode ser definida, portanto, através dos seguintes elementos:

- Um ou mais sistemas quânticos, cujos estados representarão a estrutura lógica da computação.
- Uma medição inicial, necessária para preparar o estado de entrada desejado.
- Um processo computacional reversível, que nada mais é do que uma transformação unitária  $\hat{U}$  (uma porta lógica quântica) ou uma sequência de transformações unitárias que transformam o estado de entrada em um estado de saída.
- Uma medição final, necessária para ler o estado de saída.

Sabe-se que algoritmos quânticos tem uma grande vantagem sobre alguns algoritmos análogos clássicos, no sentido que é possível resolver o mesmo problema com uma quantidade menor de passos computacionais, utilizando computação quântica. Uma das explicações para essa eficiência é a do fenômeno denominado de *paralelismo quântico massivo*: Suponhamos que uma dada uma função Booleana genérica do tipo dada por (3.28), podemos preparar um estado inicial como a sobreposição  $\sum_i |u_i\rangle \otimes |u_0\rangle$ , de modo que o estado de saída será a sobreposição  $\sum_i |u_i\rangle \otimes |u_{f(i)}\rangle$ . Em outras palavras, com uma *única* aplicação do operador unitário que implementa a função  $f$ , obtemos um estado que contém a informação de todas as entradas e saídas da função!

Por outro lado, devido ao postulado de Born (da projeção ou “colapso”), não é possível obter essa informação toda com uma medida na base  $\{|u_i\rangle\}$ , pois obteríamos apenas *um único* par  $(i, f(i))$ . É preciso utilizar alguma estrutura especial das funções para se obter algum tipo de vantagem do paralelismo quântico. Provavelmente, por isso mesmo, somente um número pequeno de algoritmos quânticos eficientes foram descobertos até o momento presente: os problemas da classe de busca de um subgrupo oculto (entre eles, os algoritmos de Deutsch e de Schor) e o algoritmo de busca de Grover [62]. Pode-se argumentar, como faz Castagnoli, que a razão exata da eficiência de alguns algoritmos quânticos não é ainda conhecida[59, 46].

Temos como objetivo nessa seção, justamente apresentar as ideias de Castagnoli, desenvolvidas com o intuito de explorar essa pergunta. Veremos que um ponto crucial das ideias de Castagnoli é observar que em todo algoritmo existe uma clara correlação entre o problema a ser resolvido e a solução do problema, e em um algoritmo quântico, essa correlação se torna quântica.

Inicialmente, discutiremos o algoritmo de Grover mostrando a vantagem deste sobre seu análogo clássico e apresentando a visão de Castagnoli onde passaremos a olhar os algoritmos como um jogo entre duas partes. Denominaremos essas partes de Bob (responsável pela escolha do problema) e Alice (responsável em solucionar o problema proposto por Bob). Veremos que essa escolha do problema a ser resolvido será feita de forma quântica (*intrinsecamente aleatória*) para evidenciar a correlação entre o problema proposto e a solução do problema. Em seguida, discutiremos a justificativa dada por Castagnoli, baseado no conceito de retrocausalidade, para a vantagem dos algoritmos quânticos em relação aos seus análogos clássicos com o uso do formalismo de dois estados de Aharonov.

### 3.2.1 O Algoritmo de Grover

O algoritmo de Grover é basicamente um protocolo de pesquisa para um banco de dados não estruturados. Podemos pensá-lo da seguinte maneira [62], suponha que sejam dadas  $N$  caixas idênticas, sabendo que, apenas em uma delas existe um único determinado objeto identificável. Classicamente, podemos abrir uma por uma das caixas até encontrar o objeto. Pode-se mostrar que, no caso clássico, é necessário abrir, em média, um número  $\frac{N}{2} \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{2}{N^2}\right)$  de caixas para encontrar o objeto. Assim, para um número assintoticamente grande de experimentos desse tipo, abriremos em média, uma ordem de cerca de  $N/2$  caixas antes de encontrar o objeto, resultado que podemos considerar bastante intuitivo. No entanto, utilizando computação quântica, podemos mostrar que esse número pode ser reduzido para uma ordem de  $\sqrt{N}$  passos computacionais. Podemos codificar o problema através da função booleana  $f : \{0, 1, 2, \dots, N-1\} \rightarrow \{0, 1\}$  com  $f(j) = \delta_{jx}$  e onde a “caixa” onde o objeto está “escondido” estará representado pelo  $x$ -ésimo índice  $x \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ . A função  $f$  será implementada pelo operador unitário  $\hat{O}_f$  em  $W^{(N)}$ :

$$\begin{aligned} \hat{O}_f : W^{(N)} &\longrightarrow W^{(N)} \\ |u_j\rangle &\longrightarrow (-1)^{f(j)} |u_j\rangle \end{aligned} \tag{3.29}$$

onde  $\{|u_j\rangle\}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$  formam a base de posições finitas de Schwinger [63]. Em seguida, definiremos as bases de posição e momentos finitos de Schwinger :

Introduziremos as bases finitas (ou discretas) de posição  $\{|u_j\rangle\}$  e momentos  $\{|v_m\rangle\}$  ( $j, m = 0, \dots, N-1$ ) que pertencem a  $W^{(N)}$  com as seguintes propriedades:

$$|u_j\rangle \langle u^j| = |v_m\rangle \langle v^m| = \hat{I} \quad (\text{completeza}) \quad (3.30)$$

e

$$\langle u^j | u_k \rangle = \langle v^j | v_k \rangle = \delta_k^j \quad (\text{ortonormalidade}). \quad (3.31)$$

Com o seguinte produto interno entre os estados das bases de posição e momento:

$$\langle u^j | v_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} v_m^j = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi i}{N} jm}, \quad (3.32)$$

onde o estado zero de *momento finito*  $|v_0\rangle$  é dado por:

$$|v_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} |u_j\rangle. \quad (3.33)$$

Constroi-se, então, o operador unitário de Grover  $\hat{G}$  dado por:

$$\hat{G} = \left( 2\hat{\pi}_{|v_0\rangle} - \hat{I} \right) \hat{O}_f \quad (3.34)$$

onde

$$\hat{\pi}_{|v_0\rangle} = |v_0\rangle \langle v^0| \quad (3.35)$$

é o operador de projeção no estado zero de *momento finito*  $|v_0\rangle$ . A seguir, iremos enunciar o protocolo de Grover:

1. O sistema é iniciado no estado  $|v_0\rangle$ .
2. Aplica-se o operador de Grover aproximadamente  $\frac{\pi\sqrt{N}}{4}$  vezes.
3. O estado “escolhido”  $|u_x\rangle$  é obtido após uma medição na base computacional com alta probabilidade de sucesso.

De fato, temos que:

$$\hat{O}_f |v_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \hat{O}_f |u_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j (-1)^{f(j)} |u_j\rangle = |v_0\rangle - \frac{2}{\sqrt{N}} |u_x\rangle \quad (3.36)$$

então,

$$\hat{G} |v_0\rangle = \left( 1 - \frac{4}{N} \right) |v_0\rangle + \frac{2}{\sqrt{N}} |u_x\rangle \quad (3.37)$$

Podemos interpretar a equação acima como uma rotação do estado  $|v_0\rangle$  em um espaço bidimensional gerado pelo estado inicial  $|v_0\rangle$  e o estado marcado  $|u_x\rangle$  após  $N$  operações.

Convém notar que para o caso especial em que  $N = 4$ , uma *única* aplicação do operador de Grover será necessária para obtermos  $|u_x\rangle$  com 100% de probabilidade. Definiremos agora  $|\alpha\rangle$  como um estado normalizado claramente ortogonal à  $|u_x\rangle$  (por construção):

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j \neq x} |u_j\rangle = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j \neq x} |u_j\rangle \right) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}} \left( |v_0\rangle - \frac{1}{\sqrt{N}} |u_x\rangle \right), \quad (3.38)$$

de tal forma que:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \left( \sqrt{N-1} |\alpha\rangle + |u_x\rangle \right) = |v_0\rangle. \quad (3.39)$$

Substituindo a equação acima em (3.37), temos:

$$\hat{G} |v_0\rangle = \left( 1 - \frac{4}{N} \right) \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} |\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} \left( 3 - \frac{4}{N} \right) |u_x\rangle \quad (3.40)$$

e

$$\hat{G} |u_x\rangle = \left( 2\hat{\pi}_{|v_0\rangle} - \hat{I} \right) \hat{O}_f |u_x\rangle = \left( -2\hat{\pi}_{|v_0\rangle} + \hat{I} \right) |u_x\rangle = \frac{-2}{\sqrt{N}} |v_0\rangle + |u_x\rangle, \quad (3.41)$$

após substituir (3.39) na equação acima, segue que:

$$\hat{G} |u_x\rangle = \frac{-2}{N} \left( \sqrt{N-1} |\alpha\rangle + |u_x\rangle \right) + |u_x\rangle = -\frac{2\sqrt{N-1}}{N} |\alpha\rangle + \left( 1 - \frac{2}{N} \right) |u_x\rangle \quad (3.42)$$

e de (3.38) juntamente com (3.40) pode-se escrever finalmente:

$$\hat{G} |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \hat{G} \left( \sqrt{N} |v_0\rangle - |u_x\rangle \right) = \left( 1 - \frac{2}{N} \right) |\alpha\rangle + \frac{2\sqrt{N-1}}{N} |u_x\rangle, \quad (3.43)$$

que, por sua vez, pode ser escrita explicitamente em forma matricial como:

$$\hat{G} \begin{pmatrix} |\alpha\rangle & |u_x\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha\rangle & |u_x\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left( 1 - \frac{2}{N} \right) & -\frac{2\sqrt{N-1}}{N} \\ \frac{2\sqrt{N-1}}{N} & \left( 1 - \frac{2}{N} \right) \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Como a matriz acima possui o *determinante unitário*, podemos ver que o operador de Grover pode ser associado a uma matriz de rotação (para um dado  $\theta$ ) em um espaço bidimensional *real*:

$$G = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{N} & -\frac{2\sqrt{N-1}}{N} \\ \frac{2\sqrt{N-1}}{N} & 1 - \frac{2}{N} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

com

$$\cos \theta = 1 - \frac{2}{N} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{2\sqrt{N-1}}{N} \quad (3.46)$$

tal que

$$\sin^2(\theta/2) = \frac{1}{N} \quad \text{e} \quad \cos^2(\theta/2) = \frac{N-1}{N}, \quad (3.47)$$

dessa forma, podemos reescrever  $|v_0\rangle$  como:

$$|v_0\rangle = \cos(\theta/2) |\alpha\rangle + \sin(\theta/2) |u_x\rangle. \quad (3.48)$$

Após a  $k$ -ésima iteração da matriz de Grover, temos:

$$\hat{G}^k |v_0\rangle = \cos[\theta(k+1/2)] |\alpha\rangle + \sin[\theta(k+1/2)] |u_x\rangle \quad (3.49)$$

a probabilidade de sucesso do algoritmo é dada claramente por:

$$P(k) = \left| \langle u_x | \hat{G}^k |v_0\rangle \right|^2 = \sin^2[\theta(k+1/2)] \quad (3.50)$$

em função do número  $k$  de iterações. A probabilidade é *máxima* quando

$$\frac{dP}{dk} = \theta \sin[\theta(2k+1)] = 0 \quad (3.51)$$

isto é,

$$\theta(2k+1) = \pi \quad (3.52)$$

para  $k \gg 1$ ,

$$k \simeq \frac{\pi}{2\theta} \quad \theta \sim \frac{2}{\sqrt{N}} \implies k \simeq \frac{\pi\sqrt{N}}{4}, \quad (3.53)$$

como queríamos provar.

### O ponto de vista de Castagnoli

Considere o mesmo problema como um jogo entre duas partes: Bob, o jogador que escolhe *em qual* das  $N$  caixas o objeto será “escondido” e Alice, que usará o algoritmo para achar o objeto “escondido”. Com o intuito de simplificar o algoritmo, vamos considerar o caso em que  $N = 4$ , caso em que é necessário apenas *uma* aplicação do operador de Grover pela Alice, conforme vimos anteriormente. As caixas serão representadas por Alice através de um sistema quântico quadridimensional  $W_A^{(4)}$  descrito por uma base  $\left\{ \left| u_j^{(A)} \right\rangle \right\}$ , ( $j = 0, 1, 2, 3$ ). Consideraremos o mesmo sistema quântico para Bob  $W_B^{(4)} = \left\{ \left| u_k^{(B)} \right\rangle \right\}$ , ( $k = 0, \dots, 3$ ) em que cada estado representa uma possível escolha de Bob. Agora, a função lógica  $f : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \{0, 1\}$  deve ser *estendida* para uma função booleana binária,

$$f : \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \{0, 1\} \quad (3.54)$$

$$(j, k) \longrightarrow f(j, k) = \delta_{jk}$$



que pode ser implementada através do operador unitário *estendido*  $\hat{O}_f$ , que atuará no sistema conjunto  $W_B^{(4)} \otimes W_A^{(4)}$  dado por:

$$\hat{O}_f \left( \left| u_k^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_j^{(A)} \right\rangle \right) = (-1)^{\delta_{jk}} \left| u_k^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_j^{(A)} \right\rangle. \quad (3.55)$$

Suponha que Bob decida de forma intrinsecamente aleatória *em qual* caixa ele irá esconder o objeto. Para fazer isso, ele prepara seu sistema  $W_B^{(4)}$  no seguinte estado inicial:

$$\left| v_0^{(B)} \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \left| u_0^{(B)} \right\rangle + \left| u_1^{(B)} \right\rangle + \left| u_2^{(B)} \right\rangle + \left| u_3^{(B)} \right\rangle \right) \quad (3.56)$$

e, em seguida, executa uma medição na base  $\left\{ \left| u_k^{(B)} \right\rangle \right\}$  obtendo  $\left| u_x^{(B)} \right\rangle$  com 25% de probabilidade. Alice e Bob executam o protocolo de pesquisa aplicando o operador de Grover estendido:

$$\hat{G} = \hat{O}' \hat{O}_f \quad \text{com} \quad \hat{O}' = \hat{I}^{(B)} \otimes 2\hat{\pi}_{|v_0}^{(A)} - \hat{I}^{(BA)} \quad \text{e} \quad \hat{I}^{(BA)} \equiv \hat{I}^{(B)} \otimes \hat{I}^{(A)} \quad (3.57)$$

Nesse caso, a sequência temporal dos estados pode ser esquematizada da seguinte forma:

$$|\Psi_i\rangle = \left| v_0^{(B)} \right\rangle \otimes \left| v_0^{(A)} \right\rangle \xrightarrow{\text{medição em } B} \left| u_x^{(B)} \right\rangle \otimes \left| v_0^{(A)} \right\rangle \xrightarrow{\hat{G}} \left| u_x^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_x^{(A)} \right\rangle \xrightarrow{\text{medição em } A} \left| u_x^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_x^{(A)} \right\rangle \quad (3.58)$$

Como exemplo, considere que Bob mediu  $\left| u_x^{(B)} \right\rangle$  com  $x = 2$ :

$$\begin{aligned} |\Psi_i\rangle &\xrightarrow{\text{medição em } B} \frac{1}{2} \left| u_2^{(B)} \right\rangle \otimes \left( \left| u_0^{(A)} \right\rangle + \left| u_1^{(A)} \right\rangle + \left| u_2^{(A)} \right\rangle + \left| u_3^{(A)} \right\rangle \right) \xrightarrow{\hat{O}_f} \\ &\longrightarrow \frac{1}{2} \left( \left| u_2^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_0^{(A)} \right\rangle + \left| u_2^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_1^{(A)} \right\rangle - \left| u_2^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_2^{(A)} \right\rangle + \left| u_2^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_3^{(A)} \right\rangle \right) \xrightarrow{\hat{O}'} \\ &\longrightarrow \left| u_2^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_2^{(A)} \right\rangle \xrightarrow{\text{medição em } A} \left| u_2^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_2^{(A)} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.59)$$

Suponha agora, que Bob *não* faça sua escolha (medida) *antes* de ser aplicado a operação unitária estendida. Nesse caso, teremos a seguinte sequência temporal de estados:

$$\begin{aligned} |\Psi_i\rangle &= \left| v_0^{(B)} \right\rangle \otimes \left| v_0^{(A)} \right\rangle \xrightarrow{\hat{O}_f} \frac{1}{4} \left( \sum_{j \neq k} \left| u_k^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_j^{(A)} \right\rangle - \sum_j \left| u_j^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_j^{(A)} \right\rangle \right) \quad (3.60) \\ &= \left( \left| v_0^{(B)} \right\rangle \otimes \left| v_0^{(A)} \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_j \left| u_j^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_j^{(A)} \right\rangle \right) \xrightarrow{\hat{O}'} \\ &= \left[ \left| v_0^{(B)} \right\rangle \otimes \left| v_0^{(A)} \right\rangle - \left( \left| v_0^{(B)} \right\rangle \otimes \left| v_0^{(A)} \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_j \left| u_j^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_j^{(A)} \right\rangle \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \left| u_j^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_j^{(A)} \right\rangle \end{aligned}$$

Notem que, agora, a correlação existente entre os estados de entrada e saída é claramente simétrica em relação a Alice e Bob.

Se agora, Bob executar sua medida (com resultado  $j = 2$ ) e só após, Alice executa sua medida para descobrir a informação escolhida por Bob, temos a seguinte sequência de estados:

$$\frac{1}{2} \sum_j |u_j^{(B)}\rangle \otimes |u_j^{(A)}\rangle \xrightarrow{\text{medida de Bob}} |u_2^{(B)}\rangle \otimes |u_2^{(A)}\rangle \xrightarrow{\text{medida de Alice}} |u_2^{(B)}\rangle \otimes |u_2^{(A)}\rangle \quad (3.61)$$

É evidente pela eq. acima, que as duas medições são *redundantes* em termos da *dinâmica* dos estados. Mais ainda, se as medidas forem realizadas em eventos-tipo-espaço, então não se pode fisicamente afirmar de maneira relativisticamente invariante quem foi que “escondeu” o objeto e quem foi que “descobriu” a informação. Esse tipo de canal quântico não-causal que se forma entre os dois jogadores é que faz com que Castagnoli acredite que é devido a um fenômeno de natureza inerentemente retrocausal que permite que Alice “antecipe” parte da informação sobre a escolha de Bob. Esse tipo de *retrocausalidade quântica* seria então, a origem da eficiência de certos algoritmos quânticos sobre seus análogos clássicos. Procuraremos fazer uma análise um pouco mais cuidadosa dessas idéias, lançando mão do formalismo de dois estados para ajudar a explicar melhor essa noção de retrocausalidade. Para isso, vamos começar fatorando o espaço  $4D$  de Bob (o espaço  $4D$  de Alice será fatorado de forma análoga), como o produto tensorial de dois q-bits tal que:

$$|v_0^{(B)}\rangle = |v_0\rangle \otimes |v_0\rangle \text{ com } |v_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_0\rangle + |u_1\rangle) \quad (3.62)$$

e

$$\begin{aligned} |u_0^{(B)}\rangle &= |u_0\rangle \otimes |u_0\rangle \\ |u_1^{(B)}\rangle &= |u_0\rangle \otimes |u_1\rangle \\ |u_2^{(B)}\rangle &= |u_1\rangle \otimes |u_0\rangle \\ |u_3^{(B)}\rangle &= |u_1\rangle \otimes |u_1\rangle \end{aligned} \quad (3.63)$$

satisfazendo, então:

$$|v_0^{(B)}\rangle = \frac{1}{2}(|u_0^{(B)}\rangle + |u_1^{(B)}\rangle + |u_2^{(B)}\rangle + |u_3^{(B)}\rangle). \quad (3.64)$$

Os espaços de Alice e Bob serão denotados respectivamente por  $W^{(a_0)} \otimes W^{(a_1)}$  e  $W^{(b_0)} \otimes W^{(b_1)}$  com base computacional (base de posições finitas) dadas por  $\{|u_{a_0}\rangle \otimes |u_{a_1}\rangle\}$

e  $\{|u_{b_0}\rangle \otimes |u_{b_1}\rangle\}$ . Agora, cada base dos espaços  $4D$  de Alice e Bob podem ser indexados por índices coletivos  $\vec{a} = (a_0 a_1)$  e  $\vec{b} = (b_0 b_1)$ . Consideremos “medidas parciais” de ambas as partes nos observáveis

$$\hat{A}_0 \otimes \hat{I} \quad \text{e} \quad \hat{I} \otimes \hat{A}_1 \quad (3.65)$$

para o sistema de Alice e

$$\hat{B}_0 \otimes \hat{I} \quad \text{e} \quad \hat{I} \otimes \hat{B}_1 \quad (3.66)$$

para o sistema de Bob.

Tal que:

$$\hat{A}_0 |u_{a_0}\rangle = a_0 |u_{a_0}\rangle \quad \text{e} \quad \hat{A}_1 |u_{a_1}\rangle = a_1 |u_{a_1}\rangle \quad (3.67)$$

e ainda

$$\hat{B}_0 |u_{b_0}\rangle = b_0 |u_{b_0}\rangle \quad \text{e} \quad \hat{B}_1 |u_{b_1}\rangle = b_1 |u_{b_1}\rangle. \quad (3.68)$$

Como sempre, iniciamos nosso estado inicial global como  $|\Psi_i\rangle = |v_0^{(B)}\rangle \otimes |v_0^{(A)}\rangle = |v_0\rangle \otimes |v_0\rangle \otimes |v_0\rangle \otimes |v_0\rangle$ . Em seguida, Bob mede  $\hat{B}_0$  resultando em  $b_0 = 1$  e ambas as partes implementam o operador unitário de Grover e, em seguida, supomos que Alice mede o observável  $\hat{A}_1$  resultando em  $a_1 = 0$ . Temos, então, a seguinte sequência de estados:

$$\begin{aligned} |\Psi_i\rangle &= |v_0^{(4)}\rangle \otimes |v_0^{(4)}\rangle = |v_0\rangle \otimes |v_0\rangle \otimes |v_0\rangle \otimes |v_0\rangle \xrightarrow{\text{medida de } \hat{B}_0} |\Psi'_i\rangle \\ &= |u_1\rangle \otimes |v_0\rangle \otimes |v_0\rangle \otimes |v_0\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_1\rangle \otimes [(|u_0\rangle + |u_1\rangle) \otimes (|u_0\rangle + |u_1\rangle) \otimes (|u_0\rangle + |u_1\rangle)] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_1\rangle \otimes \left( \begin{array}{l} |u_0\rangle \otimes |u_0\rangle \otimes |u_0\rangle + |u_0\rangle \otimes |u_1\rangle \otimes |u_0\rangle + |u_0\rangle \otimes |u_0\rangle \otimes |u_1\rangle + |u_0\rangle \otimes |u_1\rangle \otimes |u_1\rangle + \\ |u_1\rangle \otimes |u_0\rangle \otimes |u_0\rangle + |u_1\rangle \otimes |u_0\rangle \otimes |u_1\rangle + |u_1\rangle \otimes |u_1\rangle \otimes |u_0\rangle + |u_1\rangle \otimes |u_1\rangle \otimes |u_1\rangle \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|u_2^{(B)}\rangle + |u_3^{(B)}\rangle) \otimes |v_0^{(A)}\rangle = \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \begin{array}{l} |u_2^{(B)}\rangle \otimes |u_0^{(A)}\rangle + |u_2^{(B)}\rangle \otimes |u_2^{(A)}\rangle + |u_2^{(B)}\rangle \otimes |u_1^{(A)}\rangle + |u_2^{(B)}\rangle \otimes |u_3^{(A)}\rangle + \\ |u_3^{(B)}\rangle \otimes |u_0^{(A)}\rangle + |u_3^{(B)}\rangle \otimes |u_1^{(A)}\rangle + |u_3^{(B)}\rangle \otimes |u_2^{(A)}\rangle + |u_3^{(B)}\rangle \otimes |u_3^{(A)}\rangle \end{array} \right) \xrightarrow{\hat{O}_f} \quad (3.70)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|u_2^{(B)}\rangle \otimes |v_0^{(A)}\rangle + |u_3^{(B)}\rangle \otimes |v_0^{(A)}\rangle - |u_2^{(B)}\rangle \otimes |u_2^{(A)}\rangle - |u_3^{(B)}\rangle \otimes |u_3^{(A)}\rangle) \xrightarrow{\hat{O}_f} \quad (3.71)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| u_2^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_2^{(A)} \right\rangle + \left| u_3^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_3^{(A)} \right\rangle \right) \quad (3.72)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| u_1 \right\rangle \otimes \left| u_0 \right\rangle \otimes \left| u_1 \right\rangle \otimes \left| u_0 \right\rangle + \left| u_1 \right\rangle \otimes \left| u_1 \right\rangle \otimes \left| u_1 \right\rangle \otimes \left| u_1 \right\rangle \right) \xrightarrow{\text{medida de } \hat{A}_1}$$

$$= \left| u_1 \right\rangle \otimes \left| u_0 \right\rangle \otimes \left| u_1 \right\rangle \otimes \left| u_0 \right\rangle = \left| u_2^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_2^{(A)} \right\rangle = \left| \Psi_f \right\rangle \quad (3.73)$$

Vamos calcular agora o valor fraco do observável  $\hat{\Pi}_{|u_x\rangle} = \left| u_x^{(B)} \right\rangle \langle u_x^{(B)} |$  (que representa a projeção sobre o estado  $\left| u_x^{(B)} \right\rangle$  e cuja medida do análogo clássico representa “abrir” a  $x$ -ésima caixa) para o estado pré-selecionado  $\left| \Psi_i \right\rangle$  e pós-selecionado  $\hat{G}^{-1} \left| \Psi_f \right\rangle = \hat{G}^\dagger \left| \Psi_f \right\rangle$ . Isso significa que nosso bi-vetor é dado por  $\left( \langle \Psi_f | \hat{G} \right) \otimes \left| \Psi_i \right\rangle$ . Observe que o estado  $\left| \Psi_f \right\rangle$  foi “trazido de volta no tempo” *antes* da aplicação do algoritmo de Grover, quando Bob já tinha selecionado apenas o seu primeiro bit. Note que  $\hat{G}^{-1} = \hat{O}_f \hat{O}'$ . Temos então que:

$$\left| u_2^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_2^{(A)} \right\rangle \xrightarrow{\hat{O}'} \left| u_2^{(B)} \right\rangle \otimes \left| v_0^{(A)} \right\rangle - \left| u_2^{(B)} \right\rangle \otimes \left| u_2^{(A)} \right\rangle = \quad (3.74)$$

$$= \frac{1}{2} \left| u_2^{(B)} \right\rangle \otimes \left( \left| u_0^{(A)} \right\rangle + \left| u_1^{(A)} \right\rangle - \left| u_2^{(A)} \right\rangle + \left| u_3^{(A)} \right\rangle \right) \xrightarrow{\hat{O}_f} \quad (3.75)$$

$$= \left| u_2^{(B)} \right\rangle \otimes \left| v_0^{(A)} \right\rangle = \hat{G}^{-1} \left| \Psi_f \right\rangle = \hat{G}^\dagger \left| \Psi_f \right\rangle \quad (3.76)$$

de modo que

$$\langle \Psi_f | \hat{G} = \langle u^{2(B)} | \otimes \langle v^{0(A)} | \quad (3.77)$$

e

$$\langle \Psi_f | \hat{G} | \Psi_i \rangle = \left( \langle u^{2(B)} | \otimes \langle v^{0(A)} | \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| u_2^{(B)} \right\rangle + \left| u_3^{(B)} \right\rangle \right) \otimes \left| v_0^{(A)} \right\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.78)$$

o valor fraco associado ao observável dado pelo projetor  $\hat{\Pi}_{|u_x\rangle} \otimes \hat{I}$  para o bi-vetor  $\left( \langle \Psi_f | \hat{G} \right) \otimes \left| \Psi_i \right\rangle$  pode ser facilmente calculado como

$$\left\langle \hat{\Pi}_{|u_x\rangle} \otimes \hat{I} \right\rangle_w = \frac{\langle \Psi_f | \hat{G} \left( \hat{\Pi}_{|u_x\rangle} \otimes \hat{I} \right) | \Psi_i \rangle}{\langle \Psi_f | \hat{G} | \Psi_i \rangle} = \quad (3.79)$$

$$= \sqrt{2} \left( \langle u^{2(B)} | \otimes \langle v^{0(A)} | \right) \left( \left| u_x^{(B)} \right\rangle \langle u_x^{(B)} | \otimes \hat{I}^{(A)} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| u_2^{(B)} \right\rangle + \left| u_3^{(B)} \right\rangle \right) \otimes \left| v_0^{(A)} \right\rangle \right) = \delta_x^2 \quad (3.80)$$

Esse resultado parece sugerir, de fato, que a intuição de Castagnoli está correta, significando que, de alguma forma, a “escolha” do problema e sua solução são compartilhadas entre Alice e Bob, pois o valor fraco é nulo para todas as escolhas, com exceção

do valor  $x = 2$ . Isso indica que, no momento em que Bob seleciona *metade* do problema a ser proposto, o sistema de Bob exibe um valor fraco contendo parte da informação pós-selecionada por Alice no futuro. Note que essa informação complementar, “vinda do futuro”, causa uma redução local no sistema de Bob, (antes mesmo do algoritmo ser rodado) de tal forma que podemos, de certa forma, interpretar esse fato afirmando que o algoritmo quântico utiliza essa informação futura (inacessível para qualquer observador externo) e soluciona o problema proposto com uma eficiência superior à seus análogos clássicos, que desconhecem esse tipo de informação, pois essa é inerentemente quântica. Esse tipo de canal quântico não-causal que se forma entre as duas partes permite uma interpretação retrocausal entre as medições parciais, de tal forma que podemos justificar a eficiência dos algoritmos quânticos sobre seus análogos clássicos argumentando que a proposta e a solução de um problema ficam correlacionadas e, na Mecânica Quântica, essa correlação se torna inerentemente quântica. A seguir, veremos brevemente alguns aspectos da computação quântica via medições por teleporte, pois essa parece ser relevante para a questão do tempo na MQ.

### 3.3 Computação quântica baseada em medições via teleporte

O modelo de computação quântica padrão foi desenvolvido por David Deutsch [64] baseado no conceito de Máquina de Turing Quântica. Uma sequência finita de evoluções unitárias quântica (portas lógicas quânticas) formam o mecanismo básico do processo computacional. As medições são feitas nos estados quânticos resultantes das evoluções unitárias e são realizadas somente no final de cada processo. Dessa forma, a informação quântica é transformada em informação clássica e essa será lida como o resultado final. Mais recentemente, no entanto, foram propostos alguns modelos de computação quântica baseado apenas em medições quânticas realizadas em estados inicialmente emaranhados [65, 66]. De maneira surpreendente, mostrou-se que portas lógicas universais da computação quântica do modelo de Deutsch podem ser simulados eficientemente no modelo via medições [66], de modo que a computação quântica via medições é também um modelo universal de computação capaz de computar qualquer algoritmo que a máquina de Turing quântica de Deutsch for capaz de computar. Podemos destacar um aspecto interessante desses

modelos, pois ele oferece uma nova perspectiva ao uso do emaranhamento na computação quântica que, utilizado nesse contexto, torna-se um recurso fundamental [67].

Discutiremos em sequência o modelo desenvolvido por Nielsen e colaboradores, conhecido como Computação Quântica via Teleporte que é baseado no protocolo de teleporte [67]. Para isso, definiremos em um sistema composto por dois q-bits, os estados maximamente emaranhados que formam a *Base de Bell*, que são amplamente utilizados nesse modelo:

$ B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( u_0\rangle \otimes  u_0\rangle +  u_1\rangle \otimes  u_1\rangle)$
$ B_{01}\rangle = (\hat{\sigma}_x \otimes \hat{I})  B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( u_1\rangle \otimes  u_0\rangle +  u_0\rangle \otimes  u_1\rangle)$
$ B_{10}\rangle = (\hat{\sigma}_z \otimes \hat{I})  B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( u_0\rangle \otimes  u_0\rangle -  u_1\rangle \otimes  u_1\rangle)$
$ B_{11}\rangle = (i\hat{\sigma}_y \otimes \hat{I})  B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( u_1\rangle \otimes  u_0\rangle -  u_0\rangle \otimes  u_1\rangle)$

Que pode ser escrito de forma compacta como:

$$|B_{cd}\rangle = (\hat{\sigma}_z^c \hat{\sigma}_x^d \otimes \hat{I}) |B_{00}\rangle \quad (3.81)$$

Para compreender a ideia da computação via teleporte, será fundamental compreender os dois lemas que serão provados a seguir.

Considere um estado *maximamente emaranhado* de um sistema bipartido  $W \otimes W$  (com  $\dim W = d$ ) escrito em sua forma diagonal:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} |u_j\rangle \otimes |u_j\rangle. \quad (3.82)$$

**Lema 3.3.1.** *Dado um sistema tripartido, onde os espaços de estados são representados por  $W_1 \otimes W_2 \otimes W_3$ . A contração de  $\langle\phi|_{1,2}$  com  $|\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_{2,3}$  (a menos de uma constante global sem importância física) resulta no estado  $|\psi\rangle$  pertencente ao subsistema  $W_3$ .*

De fato, seja:

$$|\psi\rangle = |u_k\rangle \psi^k, \quad (3.83)$$

então, contraindo  $\langle\phi|_{1,2}$  com  $|\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_{2,3}$  obtemos (desprezando fatores constantes globais):

$$\left(\langle\phi|_{1,2}\right) \left(|\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_{2,3}\right) = C \sum_{j,l} (\langle u^j | \otimes \langle u^j |) (|u_k\rangle \psi^k \otimes |u_l\rangle \otimes |u_l\rangle) \quad (3.84)$$

$$= C \sum_{j,l} \delta_k^j \psi^k \delta_l^j |u_l\rangle = C \sum_{j,l} \psi^j \delta_l^j |u_l\rangle = C |u_j\rangle \psi^j = C |\psi\rangle. \quad (3.85)$$

Agora, dado  $|\phi\rangle$  definido pela equação 3.82 e um operador unitário arbitrário  $\hat{U}$ , introduzimos o estado “rotacionado”  $|\phi^{(U)}\rangle$  definido por:

$$|\phi^{(U)}\rangle = \left(\hat{U}^\dagger \otimes \hat{I}\right) |\phi\rangle. \quad (3.86)$$

Podemos, então, enunciar o seguinte lema:

**Lema 3.3.2.** *Dado um sistema tripartido pertencente a  $W_1 \otimes W_2 \otimes W_3$ , temos que a contração de  $(\langle\phi^{(U)}|_{1,2})$  com  $|\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_{2,3}$  resulta em  $\hat{U}|\psi\rangle$  no subsistema  $W$  (a menos de uma constante global sem importância física).*

$$\left(\langle\phi^{(U)}|_{1,2}\right) \left(|\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_{2,3}\right) = C \sum_{j,l} (\langle u^j| \otimes \langle u^j|) \left(\hat{U} \otimes \hat{I}\right) (|u_k\rangle \psi^k \otimes |u_l\rangle \otimes |u_l\rangle) \quad (3.87)$$

$$= C \sum_{j,l} \langle u^j| \hat{U} |u_k\rangle \psi^k \delta_l^j |u_l\rangle = C |u_j\rangle \langle u^j| \hat{U} |u_k\rangle \psi^k = C \hat{U} |\psi\rangle. \quad (3.88)$$

A ideia básica é considerar a projeção realizada nos lemas acima como sendo o resultado de uma medição projetiva aplicada nos dois primeiros subsistemas. A base de Bell rotacionada,  $\{|B_{cd}^{(U)}\rangle\}$ , é então:

$$|B_{cd}^{(U)}\rangle = \left(\hat{U}^\dagger \otimes \hat{I}\right) |B_{cd}\rangle = \left(\hat{U}^\dagger \otimes \hat{I}\right) (\hat{\sigma}_z^c \hat{\sigma}_x^d \otimes \hat{I}) |B_{00}\rangle = \left[\left(\hat{\sigma}_z^d \hat{\sigma}_x^c \hat{U}\right)^\dagger \otimes \hat{I}\right] |B_{00}\rangle. \quad (3.89)$$

Dado um estado tripartido escrito como:

$$|\alpha\rangle = |\psi\rangle \otimes |B_{00}\rangle \quad (3.90)$$

e o projetor  $\hat{\Pi}_{|B_{cd}^{(U)}\rangle}$  que atua nos dois primeiros q-bits de  $|\alpha\rangle$ , tal que:

$$\hat{\Pi}_{|B_{cd}^{(U)}\rangle} = |B_{cd}^{(U)}\rangle \langle B_{cd}^{(U)}|, \quad (3.91)$$

então, pelo lema anterior, temos que:

$$\left(\hat{\Pi}_{|B_{cd}^{(U)}\rangle} \otimes \hat{I}\right) |\alpha\rangle = C |B_{cd}^{(U)}\rangle \otimes \hat{\sigma}_z^d \hat{\sigma}_x^c \hat{U} |\psi\rangle, \quad (3.92)$$

onde observamos que o operador unitário desejado  $\hat{U}$  foi teleportado, a menos de um produto de matrizes de Pauli:

$$\hat{P} = \hat{\sigma}_z^d \hat{\sigma}_x^c \quad c, d = 0, 1 \pmod{2} \quad (3.93)$$

esse fator aleatório é devido à randomicidade intrínseca envolvida na medição quântica.

Um operador unitário arbitrário para um q-bit pode ser escrito como [62]:

$$\hat{U}(\zeta, \eta, \xi) = \hat{R}_x(\zeta)\hat{R}_z(\eta)\hat{R}_x(\xi) \quad (\text{para ângulos de Euler } \zeta, \eta, \xi), \quad (3.94)$$

onde

$$\hat{R}_j(\theta) = \exp(-i\theta\hat{\sigma}_j) = \cos\theta\hat{I} - i\sin\theta\hat{\sigma}_j \quad \text{com} \quad (j = x, y, z). \quad (3.95)$$

É fácil observar que os operadores aleatórios de Pauli podem ser facilmente invertidos, bastando inverter a ordem das matrizes de Pauli:

$$\hat{P}^\dagger = \hat{P}^{-1} = \hat{\sigma}_x^c \hat{\sigma}_z^d. \quad (3.96)$$

Assim, dado um resultado da medida na base de Bell, podemos aplicar operações inversas de Pauli de modo a “cancelar” o termo indesejado.

Outra maneira de remediar a situação é a de utilizar o conceito de *Medição Adaptativa*. Considere, por simplicidade, apenas portas lógicas de um q-bit. Se aplicarmos o procedimento realizado anteriormente por três vezes consecutivas a fim de teleportar o estado  $\hat{U}_3\hat{U}_2\hat{U}_1|\psi\rangle$ , obteríamos de forma análoga ao procedimento anterior  $\hat{P}_3\hat{U}_3\hat{P}_2\hat{U}_2\hat{P}_1\hat{U}_1|\psi\rangle$  onde os operadores de Pauli  $\hat{P}_i$  dependem dos resultados das medições realizadas na base de Bell. Considerando que todas as operações em um q-bit são *rotações* referentes aos eixos  $x$  e  $z$  na Esfera de Bloch, as seguintes relações serão úteis (facilmente deduzidas através da eq. (3.95)), chamadas de *Propagações de Pauli*:

$$\begin{aligned} \hat{R}_x(\theta)\hat{\sigma}_z &= \hat{\sigma}_z\hat{R}_x(-\theta) \\ \hat{R}_z(\theta)\hat{\sigma}_x &= \hat{\sigma}_x\hat{R}_z(-\theta). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Para exemplificar o uso da medida adaptativa, implementaremos o teleporte da evolução unitária  $\hat{R}_z(\beta)\hat{R}_x(\alpha)$ , do primeiro q-bit de  $W \otimes W \otimes W$  para o terceiro e último q-bit no seguinte estado inicial  $|\alpha\rangle$ :

$$|\alpha\rangle = |\psi\rangle \otimes |B_{00}\rangle. \quad (3.98)$$

O primeiro projetor atua nos dois primeiros q-bits:

$$\hat{\Pi}_{|B_{ab}^{(\hat{R}_x(\alpha))}\rangle} = |B_{ab}^{(\hat{R}_x(\alpha))}\rangle \langle B_{ab}^{(\hat{R}_x(\alpha))}| \quad \text{onde} \quad |B_{ab}^{(\hat{R}_x(\alpha))}\rangle = (\hat{R}_x(\alpha) \otimes \hat{I}) |B_{ab}\rangle, \quad (3.99)$$

resultando em

$$\hat{\Pi}_{|B_{ab}^{(\hat{R}_x(\alpha))}\rangle} (|\alpha\rangle) = |B_{ab}^{(\hat{R}_x(\alpha))}\rangle \otimes (\hat{\sigma}_x^a \hat{\sigma}_z^b \hat{R}_x(\alpha) |\psi\rangle). \quad (3.100)$$



Levando em conta as propagações de Pauli (3.97), podemos escolher  $\hat{R}_z((-1)^b\beta)$  para o operador de rotação, de modo que o projetor aleatório pode ser escrito como

$$\hat{\Pi}_{\left|B_{ab}^{\hat{R}_z((-1)^b\beta)}\right\rangle}(|\alpha\rangle) = \left|B_{ab}^{\hat{R}_z((-1)^b\beta)}\right\rangle \left\langle B_{ab}^{\hat{R}_z((-1)^b\beta)}\right| \alpha\rangle \quad (3.101)$$

nos *dois últimos* q-bits, resultando em (utilizando novamente (3.97) juntamente com as relações usuais de comutação entre as matrizes de Pauli):

$$\hat{\sigma}_x^c \hat{\sigma}_z^d \hat{\sigma}_x^a \hat{\sigma}_z^b \hat{R}_z(\beta) \hat{R}_x(\alpha) |\psi\rangle = (-1)^{ad} \hat{\sigma}_x^{a+c} \hat{\sigma}_z^{b+d} \hat{R}_z(\beta) \hat{R}_x(\alpha) |\psi\rangle. \quad (3.102)$$

Assim, não é difícil perceber que qualquer *operador unitário* sobre 1 q-bit  $\hat{U} = \hat{R}_x(\zeta) \hat{R}_z(\eta) \hat{R}_x(\xi)$  pode ser realizado (a menos de uma fase global sem importância), desde que escolhas corretas de medidas adaptativas sejam feitas em função do resultado da medida anterior. No modelo de Computação Quântica via Medições (CQM), esse é um caráter fundamental da evolução computacional do sistema: A cada medida que é realizada sobre um estado emaranhado que faz parte do sistema total, a escolha da base (ou do observável) a ser medida depende essencialmente do resultado aleatório obtido na medição anterior. Podemos dizer que a “escolha apropriada” da base a ser medida em cada passo computacional é que impede que a aleatoriedade inerente a MQ “impeça” o funcionamento da lógica computacional. Podemos inverter o raciocínio e dizer que é a *aleatoriedade intrínseca* do fenômeno da *Medida* na MQ é que determina a *ordem temporal* correta dos eventos computacionais na CQM. [44]. É desse tipo de raciocínio que faz com que Svetlichny [42] sugira que talvez o fenômeno da medida seja um agente ontológico e irreduzível da MQ e que a evolução unitária é que seja emergente em uma formulação mais fundamental da teoria.

### 3.4 O formalismo de dois estados e a simulação da evolução temporal

Para prosseguirmos em uma linha de argumentação com a intenção de nos engajarmos na proposta corajosa de Svetlichny com a qual fechamos a seção anterior, vamos primeiramente, discutir dois pontos de vista sobre como podemos pensar em uma evolução temporal, seguindo as ideias publicadas recentemente em [37]. A primeira, chamaremos de *visão usual*, em que consideramos o “universo” como único e todos os objetos que nele

habitam, mudando continuamente seus estados a cada instante de tempo. A segunda visão estabelece que, a cada instante de tempo temos um novo “universo” e a evolução temporal de um objeto em particular, pode ser associada a diferentes objetos cada um pertencente a diferentes universos, cada um em um novo instante de tempo. Veremos então, em modelos simples, como podemos associar essas duas visões na física.

Considere, primeiramente, uma partícula clássica em um movimento unidimensional, tal que sua evolução temporal seja dada por uma trajetória  $x(t)$ . Essa função horária nos informa qual é a posição  $x$  dessa partícula em cada instante de tempo  $t$ . Para construirmos essa trajetória, podemos medir a posição da partícula instantes de tempo,  $t_1, t_2, \dots, t_N$ , sendo que, quanto menor for o intervalo entre as medições, ou seja, quanto maior o número de medições  $N$ , mais próximo de uma descrição da trajetória contínua  $x(t)$  chegaremos. Podemos, no entanto, fazer a seguinte elocubração: Suponha que, ao invés de uma partícula clássica em  $N$  instantes diferentes, tenhamos  $N$  partículas clássicas cada uma com uma trajetória  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ . Se prepararmos cada uma das partículas, tal que para em um *mesmo tempo*  $\tau$ , tenhamos:

$$x_1(\tau) = x(t_1), \quad x_2(\tau) = x(t_2), \quad \dots, \quad x_N(\tau) = x(t_N), \quad (3.103)$$

então, sob uma perspectiva puramente *informacional*, podemos dizer que ambos os quadros se equivalem. Assim, na Mecânica Clássica, podemos dizer que não existe distinção fundamental entre os dois pontos de vistas citados anteriormente.

E quanto a Mecânica Quântica, podemos repetir o raciocínio acima? Para tentar responder a essa pergunta, consideremos um sistema de um q-bit em um dado estado inicial  $|\psi\rangle$  submetido a uma evolução temporal trivial com  $\hat{H} = 0$ . Assim, não ocorrem mudanças no vetor de estado, nem por evolução unitária e nem por colapso induzido por medições:

$$|\psi(t)\rangle = |\psi\rangle. \quad (3.104)$$

Para tentar simular algo análogo ao que pensamos no caso clássico, podemos tentar preparar  $N$  q-bits de tal forma que ao realizarmos  $N$  medições em um tempo  $\tau$ , obtermos a mesma informação obtida ao executar  $N$  medições em tempos distintos  $t_1, t_2, \dots, t_N$  no estado dado pela evolução (3.104). Primeiramente, vamos pensar apenas em medições realizadas em uma *mesma* base (uma *dada direção* na esfera de Bloch).

Considere o seguinte estado formado pelo produto tensorial :

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\psi\rangle_N \quad \text{onde} \quad |\Psi\rangle \in W_1 \otimes W_2 \otimes \dots \otimes W_N \quad (3.105)$$

Esse estado claramente *não* consegue modelar todas as possíveis informações contidas em (3.104), pois existe um tipo de *correlação temporal especial* entre os  $N$  instantes do observável representado por uma *direção arbitrária*  $\hat{n}$

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})(t_1) = (\vec{\sigma} \cdot \hat{n})(t_2) = \dots = (\vec{\sigma} \cdot \hat{n})(t_N). \quad (3.106)$$

Para compreender esse fato, considere dois instantes  $t_1$  e  $t_2$ , então podemos mostrar que  $(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})(t_1) = (\vec{\sigma} \cdot \hat{n})(t_2)$  da seguinte maneira: Tomemos o seguinte hamiltoniano de interação (entre o sistema do q-bit e uma partícula quântica em um movimento unidimensional) dependente do tempo da forma

$$\hat{H}_{int}(t) = \lambda (\delta(t - t_2) - \delta(t - t_1)) (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \otimes \hat{P} \quad (3.107)$$

Esse hamiltoniano é apropriado para medir o observável dado pela *diferença*  $(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})(t_2) - (\vec{\sigma} \cdot \hat{n})(t_1)$ . De fato, dado o estado inicial do sistema total como  $|\psi\rangle \otimes |q\rangle$ , após a interação (depois de  $t_2 > t_1$ ), na representação de Schrodinger, escrevendo o estado inicial do qubit na base  $\{|u_0\rangle, |u_1\rangle\}$  de autoestados de  $\vec{\sigma} \cdot \hat{n}$

$$|\psi\rangle = |u_0\rangle \psi^0 + |u_1\rangle \psi^1, \quad (3.108)$$

temos a seguinte evolução: (após respectivamente os instantes  $t_1$  e  $t_2$ )

$$|\psi\rangle \otimes |q\rangle = (|u_0\rangle \psi^0 + |u_1\rangle \psi^1) \otimes |q\rangle \xrightarrow{e^{i\lambda(\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \otimes \hat{P}}} (|u_0\rangle \otimes |q - \lambda\rangle \psi^0 + |u_1\rangle \otimes |q + \lambda\rangle \psi^1) \xrightarrow{e^{-i\lambda(\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \otimes \hat{P}}} |\psi\rangle \otimes |q\rangle \quad (3.109)$$

No final de todo o processo, o estado permanece *inalterado* e podemos concluir que  $(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})(t_2) = (\vec{\sigma} \cdot \hat{n})(t_1)$ . Claramente esse resultado pode ser generalizado para todas os instantes de tempo conforme (3.106).

Esse é um exemplo da chamada “medida em dois instantes de tempo” de um dado observável e que pode ser claramente estendido para medidas em *múltiplos instantes de tempo*. Claramente, essa correlação *não* ocorre entre os  $N$  diferentes q-bits do estado (3.105) para um dado instante  $\tau$ . Porém, em um trabalho recente [37], Aharonov e colaboradores sugerem uma solução baseada no formalismo de dois estados, para englobar as multicorrelações temporais existente na evolução do estado 3.104. Mostraremos a seguir

como  $N$  q-bits que estejam adequadamente pré e pós-selecionadas podem em um tempo  $\tau$ , simularem  $N$  momentos temporais da evolução discutida anteriormente. Primeiramente, consideremos o seguinte espaço de estados:

$$(W_{t_N} \otimes \overline{W}_{t_{N-1}}) \otimes (W_{t_{N-1}} \otimes \overline{W}_{t_{N-2}}) \otimes \dots \otimes (W_{t_2} \otimes \overline{W}_{t_1}) \otimes (W_{t_1} \otimes \overline{W}_{t_0}) \otimes W_{t_0}, \quad (3.110)$$

onde  $\overline{W}_{t_j}$  é o espaço dual ao  $j$ -ésimo espaço de um q-bit  $W_{t_j}$  e consideraremos também um estado “multi-vetor”  $|\Psi\rangle$  desse espaço na forma

$$|\Psi\rangle = \hat{\Phi}_{t_N t_{N-1}} \otimes \hat{\Phi}_{t_{N-1} t_{N-2}} \otimes \dots \otimes \hat{\Phi}_{t_2 t_1} \otimes \hat{\Phi}_{t_1 t_0} \otimes |\psi\rangle \quad \text{onde} \quad (3.111)$$

$$\hat{\Phi}_{t_j t_{j-1}} = |u_\sigma\rangle_{t_j} \langle u^\sigma|_{t_{j-1}} \quad (\sigma = 0, 1 \text{ e } j = 1, \dots, N) \quad (3.112)$$

É importante notar que na definição acima do  $j$ -ésimo bi-vetor  $\hat{\Phi}_{t_j t_{j-1}} = |u_\sigma\rangle_{t_j} \langle u^\sigma|_{t_{j-1}}$ , o *ket*  $|u_\sigma\rangle_{t_j}$  pertence ao espaço  $W_j$  associado a um instante  $t_j$  infinitesimalmente próximo ao instante  $t_{j-1}$  (para  $N$  suficientemente grande) que está associado ao *bra*  $\langle u^\sigma|_{t_{j-1}} \in \overline{W}_{j-1}$ . Assim, o estado dado por (3.111) representa fielmente a evolução temporal (trivial) do vetor de estado de um q-bit  $|\psi\rangle$  preparado no instante  $t = 0$  juntamente com as correlações temporais que o q-bit mantém através dos estados *maximamente emaranhados*  $\hat{\Phi}_{t_j t_{j-1}} = |u_\sigma\rangle_{t_j} \langle u^\sigma|_{t_{j-1}} = |u_0\rangle_{t_j} \langle u^0|_{t_{j-1}} + |u_1\rangle_{t_j} \langle u^1|_{t_{j-1}}$  entre o espaço do estado pós-selecionado  $\overline{W}_{t_{j-1}}$  no instante  $t_{j-1}$  e o espaço do vetor pré-selecionado  $W_{t_j}$  no instante seguinte  $t_j$ . Para incluir uma evolução mais geral (com o operador hamiltoniano não-nulo), basta substituímos cada  $j$ -ésimo operador  $\hat{\Phi}_{t_j t_{j-1}} = |u_\sigma\rangle_{t_j} \langle u^\sigma|_{t_{j-1}}$  pelo bi-vetor

$$\hat{\Phi}_{t_j t_{j-1}}^{\hat{U}(t_{j-1}, t_j)} = \hat{U}(t_{j-1}, t_j) |u_\sigma\rangle_{t_j} \langle u^\sigma|_{t_{j-1}} \quad (3.113)$$

que continua a representar um estado maximamente emaranhado que correlaciona cada vetor arbitrário pós-selecionado  $\langle \xi|_{t_{j-1}}$  com o vetor pré-selecionado  $\hat{U}(t_{j-1}, t_j) |\xi\rangle_{t_j}$  ao invés de um vetor arbitrário pós-selecionado  $\langle \xi|_{t_{j-1}}$  com o vetor pré-selecionado  $|\xi\rangle_{t_j}$  para o caso de uma evolução trivial. Resumindo, essa interpretação para o formalismo de dois estados pode ser descrita da seguinte maneira:

- A cada instante, temos, de certa maneira, “um Universo”, representado, no entanto, por *dois* espaços de estados: Um representando a condição de contorno temporal do passado, o estado *pré-selecionado* e outro representando a condição de contorno do futuro, o estado *pós-selecionado*.

- A evolução temporal unitária corresponde na correlação (com emaranhamento máximo) entre dois instantes de tempo, mais precisamente, entre o estado pós-selecionado do instante anterior e o estado pré-selecionado do instante posterior.
- Uma medição induz o colapso que destrói o emaranhamento entre toda a história de evolução temporal do sistema até aquele momento, de modo que temos um estado dado pelo produto direto do sistema antes da medida com o estado obtido após a medição.
- Suponha que um estado submetido a uma evolução unitária  $\hat{U}(t)$  seja pré-selecionado no estado  $|\psi\rangle$  no instante  $t_i = t_0$  e pós-selecionado em um estado  $\langle\varphi|$  em um instante  $t_f = t_N$ , então essa evolução pode ser descrita através do multi-vetor:

$$\langle\varphi| \otimes \hat{\Phi}_{t_N t_{N-1}}^{\hat{U}(t_{N-1}, t_N)} \otimes \hat{\Phi}_{t_{N-1} t_{N-2}}^{\hat{U}(t_{N-2}, t_{N-1})} \otimes \dots \otimes \hat{\Phi}_{t_2 t_1}^{\hat{U}(t_1, t_2)} \otimes \hat{\Phi}_{t_1 t_0}^{\hat{U}(t_0, t_1)} \otimes |\psi\rangle \quad (3.114)$$

Para calcular a amplitude de probabilidade de ocorrência deste processo basta substituir cada termo (eq. 3.113) apropriado no multi-vetor acima

$$\begin{aligned} &\langle\varphi| \otimes \hat{U}(t_{N-1}, t_N) |u_{\sigma_N}\rangle_{t_N} \langle u^{\sigma_N} |_{t_{N-1}} \otimes \hat{U}(t_{N-2}, t_{N-1}) |u_{\sigma_{N-1}}\rangle_{t_{N-1}} \langle u^{\sigma_{N-1}} |_{t_{N-2}} \otimes \dots \\ &\dots \otimes \hat{U}(t_1, t_2) |u_{\sigma_2}\rangle_{t_2} \langle u^{\sigma_2} |_{t_1} \otimes \hat{U}(t_0, t_1) |u_{\sigma_1}\rangle_{t_1} \langle u^{\sigma_1} |_{t_0} \otimes |\psi\rangle \end{aligned}$$

e contrairmos os bras e kets pertencentes a um mesmo instante de tempo. Levando em conta a propriedade de grupo da evolução unitária  $\hat{U}(t)\hat{U}(t') = \hat{U}(t+t')$ , obtemos o resultado bem conhecido  $\langle\varphi| \hat{U}(t_i, t_f) |\psi\rangle$  equivalente ao postulado de Born.

Apresentaremos a seguir, uma versão de um “toy-model” para a *emergência* do tempo (evolução unitária) na mecânica quântica, baseada no formalismo de dois estados.

## 3.5 O Formalismo de Dois Estados e um modelo simples para a emergência do tempo

A seguir, introduziremos um modelo simplificado (*toy-model*) para emergência do tempo a partir do formalismo de dois estados da MQ. A estrutura de produto tensorial na composição de sistemas, o traço parcial, o processo de medida e o formalismo de dois estados formarão o escopo ontológico de nossa descrição. Para motivar a nossa discussão, vamos traçar um paralelo com o conceito de matriz densidade imprópria que vimos na

seção 2.2.2 e sua relação com sistemas termodinâmicos em equilíbrio térmico. Dado um sistema global  $W$  fatorado como o produto tensorial de algum sistema de interesse  $W_s$  com o sistema  $W_{RU}$  (que Feynman chamava prosaicamente de “restante do Universo”)  $W = W_s \otimes W_{RU}$ , nós vimos que a eq. (2.14) permite associar a cada *raio* de  $W$ , um operador hermitiano, positivo e de traço unitário  $\hat{\rho}$ . Esse mapa pode ser realizado via o *traço parcial*, isto é, dado  $|\Psi\rangle$  um estado *normalizado* de  $W$ , então podemos escrever:

$$|\Psi\rangle \longrightarrow \hat{\rho}_{|\Psi\rangle} = tr_{RU} (|\Psi\rangle \langle\Psi|).$$

Como a transformação  $|\Psi\rangle \longrightarrow |\Psi\rangle e^{i\alpha}$  claramente não afeta em nada o mapa, podemos ver que os elementos do domínio da aplicação são, de fato, os elementos do espaço projetivo ou espaço de raios de  $W$ . No caso em que  $W_s$  tiver um hamiltoniano  $\hat{H}$  e o sistema estiver em *equilíbrio térmico*, então necessariamente temos que  $[\hat{\rho}, \hat{H}] = 0$ , de modo que  $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\hat{H})$ . Definimos o valor esperado de ensemble da energia  $E$  como:

$$E = tr (\hat{\rho} \hat{H}) \tag{3.115}$$

e a *entropia* como

$$S = -k_B tr (\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) = -tr (\hat{\rho} \ln \hat{\rho}), \tag{3.116}$$

onde tomamos a constante de Boltzmann  $k_B = 1$ , fazendo com que a entropia seja *adimensional*. Podemos encontrar a matriz densidade para o equilíbrio termodinâmico maximizando a entropia (3.116), mas com as restrições dadas por (3.115) e a unitariedade do traço. Utilizando multiplicadores de Lagrange, não é difícil mostrar [1] que a matriz densidade toma a forma do fator de Boltzmann:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \quad \text{com} \quad Z = tr (e^{-\beta \hat{H}}), \tag{3.117}$$

onde  $\beta = 1/T$  possui dimensão de inverso da temperatura (ou inverso de energia). Podemos dizer que praticamente toda a Termodinâmica e Mecânica Estatística para sistemas em equilíbrio termodinâmico parte desse princípio.

Note que o operador hermitiano  $e^{-\beta \hat{H}}$  se assemelha estruturalmente com o operador unitário de evolução temporal  $\hat{U} = e^{-it\hat{H}}$  para um “ $\beta$  imaginário”. Como tomamos  $\hbar = 1$ , então  $\beta$  possui a *mesma* dimensão de *tempo* também. No entanto, o fator de Boltzmann é um operador hermiteano e o operador de evolução é unitário. O primeiro decorre claramente (seção 2.2.2) do mapa (2.14). Como poderíamos obter um operador unitário de forma análoga? Uma resposta possível é a de se utilizar novamente o *formalismo de*

### 3.5 O Formalismo de Dois Estados e um modelo simples para a emergência do tempo<sup>59</sup>

*dois estados*: Sejam  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  dois estados distintos, normalizados e não-ortogonais entre si, pertencentes à um espaço de estados  $W = W_s \otimes W_{RU}$ , onde  $W_s$  é um certo sistema físico de interesse (com  $\dim W_s = N$ ) e  $W_{RU}$  é novamente o chamado “restante do Universo” de Feynman. Os estados  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  são respectivamente os estados pré e pós-selecionados do “Universo” e associamos a  $\langle\beta| \otimes |\alpha\rangle$  um operador  $\hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle}$  em  $W_s$  pela seguinte equação:

$$\text{tr} \left( \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle} \hat{O} \right) = N \langle\beta| \hat{O} \otimes \hat{I} |\alpha\rangle \quad \text{para todos observáveis } \hat{O} \text{ em } W_s. \quad (3.118)$$

Como

$$\text{tr} \left( \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle}^\dagger \hat{O} \right) = N \langle\alpha| \hat{O} \otimes \hat{I} |\beta\rangle = \text{tr} \left( \hat{U}_{\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle} \hat{O} \right) \quad (3.119)$$

então, pode se concluir que

$$\hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle}^\dagger = \hat{U}_{\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle} \quad (3.120)$$

que está de acordo com a idéia de *reversibilidade temporal* do formalismo de dois estados.

Introduzindo bases ortogonais arbitrárias  $\{|u_j\rangle\}$  e  $\{|u_\sigma\rangle\}$  respectivamente em  $W_s$  e  $W_{RU}$ , podemos escrever:

$$\langle u^j | \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle} \hat{O} |u_j\rangle = N \bar{\beta}_{j\sigma} (\langle u^j | \otimes \langle u^\sigma |) (\hat{O} \otimes \hat{I}) (|u_k\rangle \otimes |u_\tau\rangle) \alpha^{k\tau}, \quad (3.121)$$

ou

$$\langle u^k | \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle} |u_j\rangle \langle u^j | \hat{O} |u_k\rangle = N \bar{\beta}_{j\sigma} \langle u^j | \hat{O} |u_k\rangle \delta_\tau^\sigma \alpha^{k\tau}, \quad (3.122)$$

de modo que

$$\langle u^k | \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle} |u_j\rangle = N \bar{\beta}_{j\sigma} \alpha^{k\sigma}. \quad (3.123)$$

Podemos dizer que  $\hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle}$  é obtido através do *traço parcial* de  $|\alpha\rangle \langle\beta|$  pois,

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle} &= N \text{tr}_2 (|\alpha\rangle \langle\beta|) = N \bar{\beta}_{j\tau} \text{tr}_2 [(|u_i\rangle \otimes |u_\sigma\rangle) \langle u^j | \otimes \langle u^\tau |] \alpha^{i\sigma} = \\ &= N \bar{\beta}_{j\tau} \text{tr}_2 (|u_i\rangle \langle u^j | \otimes |u_\sigma\rangle \langle u^\tau |) \alpha^{i\sigma} = |u_i\rangle N \bar{\beta}_{j\sigma} \alpha^{i\sigma} \langle u^j |. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Note que como,  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  são vetores normalizados, temos necessariamente:

$$\bar{\alpha}_{k\sigma} \alpha^{k\sigma} = \bar{\beta}_{j\sigma} \beta^{j\sigma} = 1 \quad (3.125)$$

e

$$\text{tr} \left( \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle} \right) = N \langle\beta|\alpha\rangle \quad (3.126)$$

### 3.5 O Formalismo de Dois Estados e um modelo simples para a emergência do tempo 60

Para o operador adjunto  $\hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle}^\dagger$  temos claramente, os seguintes elementos de matriz:

$$\langle u^j | \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle}^\dagger | u_l \rangle = \langle u^j | \hat{U}_{\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle} | u_l \rangle = N \bar{\alpha}_{l\tau} \beta^{j\tau} \quad (3.127)$$

tal que

$$\langle u^k | \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle} \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle}^\dagger | u_l \rangle = \langle u^k | \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle} | u_j \rangle \langle u^j | \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle}^\dagger | u_l \rangle = N^2 \bar{\beta}_{j\sigma} \alpha^{k\sigma} \bar{\alpha}_{l\tau} \beta^{j\tau} \quad (3.128)$$

Com isso, podemos provar o seguinte teorema:

**Teorema 3.5.1.** *Suponha  $W_s = W_{RU}$  e que  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  sejam estados distintos e **maximamente emaranhados***

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} |u_i\rangle \otimes |u_j\rangle \delta^{ij} \quad e \quad |\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} |w_i\rangle \otimes |w_j\rangle \delta^{ij} \quad (3.129)$$

onde  $\{|u_i\rangle\}$  e  $\{|w_j\rangle\}$  são bases ortonormais. Então,  $\hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle}$  é **unitário**.

*Demonstração.* Temos que,  $\alpha^{k\sigma} = \frac{1}{\sqrt{N}} \delta^{k\sigma}$  e  $|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} |u_j\rangle \langle u^j | w_m \rangle \otimes |u_\tau\rangle \langle u^\tau | w_n \rangle \delta^{mn}$  tal que,  $\beta^{j\tau} = \langle u^j | w_m \rangle \langle u^\tau | w_n \rangle \delta^{mn}$  e  $\bar{\beta}_{j\sigma} = \frac{1}{\sqrt{N}} \delta_{rs} \langle w^r | u_j \rangle \langle w^s | u_\sigma \rangle$ . Isso implica que  $\langle u^k | \hat{U} \hat{U}^\dagger | u_l \rangle = \delta_{rs} \langle w^r | u_j \rangle \langle w^s | u_\sigma \rangle \delta^{k\sigma} \delta_{l\tau} \langle u^j | w_m \rangle \langle u^\tau | w_n \rangle \delta^{mn} = \delta_l^k$   $\square$

Podemos estabelecer o seguinte mapa entre os estados de  $W_s \otimes W_s$  (com  $W_s = W_{RU}$ ) e os operadores em  $W_s$ , dado por:

$$|\alpha\rangle = |u_i\rangle \otimes |u_\sigma\rangle \alpha^{i\sigma} \rightarrow \hat{\alpha} = |u_i\rangle \alpha_\sigma^i \langle u^\sigma| \quad \text{com} \quad \alpha_\sigma^i = \alpha^{i\sigma} \quad (3.130)$$

e

$$|\beta\rangle = |u_i\rangle \otimes |u_\sigma\rangle \beta^{i\sigma} \rightarrow \hat{\beta} = |u_j\rangle \beta_\sigma^j \langle u^\sigma| \quad \text{com} \quad \beta_\sigma^j = \beta^{j\sigma}. \quad (3.131)$$

Note também que esta notação nos permite escrever de uma forma muito simples o operador unitário  $\hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle}$  associado ao vetor de dois estados  $\langle\beta| \otimes |\alpha\rangle$  como:

$$\hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle} = N \hat{\alpha} \hat{\beta}^\dagger \quad \text{ou} \quad \left( \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle} \right)_j^k = N \alpha_\sigma^i (\bar{\beta}^T)_j^\sigma = N \bar{\beta}_{j\sigma} \alpha^{k\sigma}. \quad (3.132)$$

Com esse formalismo, podemos de certa forma, falar em *emergência* do tempo, como veremos a seguir em um exemplo:



### 3.5 O Formalismo de Dois Estados e um modelo simples para a emergência do tempo<sup>61</sup>

Suponha que os estados  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  sejam dados por:

$$|B_{00}\rangle = |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) \quad \text{e} \quad |\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |0\rangle + e^{i\lambda} |1\rangle \otimes |1\rangle) \quad (3.133)$$

então na notação matricial que introduzimos, temos:

$$\hat{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{I} \quad (3.134)$$

tal que

$$\langle k | \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle} |j\rangle = N \bar{\beta}_{j\sigma} \alpha^{k\sigma} = N \alpha \beta^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda} \end{pmatrix} \implies \hat{U}_{\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle} = e^{-\frac{i}{2}\lambda(\hat{I}-\hat{\sigma}_3)} \quad (3.135)$$

de modo que

$$\hat{H} = \frac{\lambda}{2} (\hat{I} - \hat{\sigma}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad t = 1 \quad (3.136)$$

É importante notar que esse teorema só vale quando a dimensão de  $W_s$  for *igual* a dimensão de  $W_{RU}$ , isto é, os dois espaços devem ser *isomorfos*. No entanto, vemos que, uma noção de “tempo” emerge no sistema considerado a partir de um traço parcial aplicado ao bi-vetor  $\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle$  no formalismo de dois estados. Observe que não somente uma noção de “tempo” mas também uma noção de “interação” específica, dada por um hamiltoniano, emerge com a aplicação do traço parcial. Notem o paralelo de como a matriz densidade surge através do traço parcial de um estado puro de um espaço maior e como o operador unitário surge através do traço parcial associado a um estado  $\langle\beta|\otimes|\alpha\rangle$  no chamado formalismo de dois estados também no espaço aumentado. É interessante notar que, com o modelo da seção anterior, nós vimos que a evolução temporal contínua no formalismo de dois estados pode ser visto como um encadeamento de correlações entre dois espaços de estados maximamente emaranhados separados por um tempo infinitesimalmente pequeno entre si. Aqui, temos um resultado que é, de certa forma, o oposto. Provamos que dois estados maximamente emaranhados (para “todo o Universo”) pode ser interpretado por “uma parte” do sistema global como sendo uma evolução unitária. A grande pergunta aqui seria então responder como interpretar ontologicamente o que seria esse outro fator “restante do Universo”? Uma resposta adequada a essa pergunta poderia, de fato, sugerir uma maneira de ver o tempo como fenômeno emergente.

## 4 Conclusão

Newton definiu o Tempo como uma entidade matemática, absoluta e inflexível, que “flui” continuamente e uniformemente, existindo independentemente de qualquer fator “externo” a ele. Ele definiu o Espaço como um “palco”, absoluto, onde todos os eventos acontecem, independente de sua relação com o tempo e a qualquer elemento “externo” a ele. Em outras palavras, tempo e espaço para Newton são duas “entidades” que existem *a priori* e de forma absoluta. A rigidez do espaço e tempo e a independência entre um e outro foram dissolvidos pela Teoria da Relatividade no início do século passado. Entretanto, o conceito de espaço-tempo, que agora é interpretado de forma unificada, continua existindo *a priori*, onde apenas sua rigidez fica condicionada a fatores “externos” à ele. Por outro lado, vejamos como Leibniz define esses conceitos. Para Leibniz, o Espaço nada mais é do que a *ordem de coexistência* de objetos materiais enquanto o tempo é a sucessão desses objetos que coexistem, em outras palavras, o tempo é a ordem de mudança desses objetos. Note como espaço e tempo não são vistos *a priori* na definição de Leibniz, os dois conceitos são relacionados a partir da coexistência e da sucessão desses objetos materiais que por sua vez são definidos a partir de estruturas mais fundamentais conhecidas como as Mônadas de Leibniz. A ideia de Leibniz é a de que o tempo é definido apenas pelas relações individuais que se sucedem, enquanto espaço são todas as possíveis relações coletivas que coexistem. Se não existissem eventos, não existiriam relações e, neste sentido, o tempo não teria uma existência independente dos eventos que nele ocorrem. Julian Barbour argumenta em [68] que um resgate dos princípios da filosofia de Leibniz podem contribuir de maneira significativa para os fundamentos da teoria quântica de acordo com sua proposta de “Física Relacional”.

Neste trabalho, exploramos a ideia que o processo de *medição* na Mecânica Quântica poderia ser um fenômeno emergente através do programa de descoerência. Estudamos um modelo simples de um banho de spins devido a Zurek, que permite observar como a descoerência consegue solucionar alguns aspectos da questão da medida como o problema da base preferida. Estudamos as ideias envolvidas no formalismo de dois estados, formalismo esse que parece colocar em pé de igualdade ontológico, tanto a medida como a evolução unitária. O formalismo de dois estados, além de ser temporalmente

simétrico, permite extrair os importantes conceitos de *medição fraca* e *valor fraco* (que pode ser visto como uma generalização do conceito de valor esperado usual na mecânica quântica) para dados pré e pós-selecionados. Vimos ainda que, utilizando o conceito de valor fraco, aparentemente podemos justificar a eficiência dos algoritmos quânticos utilizando uma interpretação retrocausal entre medições parciais quando ocorre um canal quântico não local, que se forma entre os dois jogadores. Analisando as ideias básicas do modelo de *computação quântica baseado em medições via teleporte*, pudemos vislumbrar algumas das idéias principais sobre o modelo de *Computação Quântica via Medições*. Foram idéias surgidas através desse novo paradigma de computação quântica que levaram a alguns pesquisadores como Svetlichny e Raussendorf a pensarem na medição como fenômeno fundamental e até sugerir que a evolução unitária é que poderia ser de natureza emergente.

Estudamos a interpretação mais recente desenvolvida por Aharonov e colaboradores sobre o formalismo de dois estados:

O conceito de “a cada instante de tempo, temos um novo “universo” onde associamos dois espaços de estados para descrevê-lo, um correspondendo a condição de contorno temporal no passado (estado pré-selecionado) e outro dado pela condição de contorno temporal futura (o estado pós-selecionado). Uma evolução temporal unitária contínua é representada pela correlação de momentos temporais infinitesimalmente próximos entre um estado de emaranhamento máximo pós-selecionado em um instante anterior e um estado pré-selecionado do instante seguinte. O colapso resultante de uma medição destrói o emaranhamento e desacopla a correlação entre os momentos anteriores e futuros ao colapso, ou seja, os vetores de estado que representam os momentos imediatamente passado e futuros ao colapso são dados por um produto tensorial direto. Desenvolvemos um modelo simplificado (toy-model) onde mostramos que um traço parcial sobre um sistema global “duplicado” (isto é, um sistema dado por um produto tensorial do sistema de interesse por outro isomorfo a ele) para dois estados (não-ortogonais) pré e pós-selecionados que sejam maximamente emaranhados em relação aos dois subsistemas resulta necessariamente em um operador unitário. Fomos levados a investigar essa idéia originalmente por causa dos conceitos de Umezawa [69] na criação do formalismo da Dinâmica dos Campos Térmicos (*Thermofield Dynamics*), onde ele “duplica” o espaço de estados para descrever graus de liberdade térmicos para campos quânticos e inclusive sugere a introdução de um “operador de tempo” na MQ. Foi intrigante descobrir como essas idéias parecem se

---

aproximar muito do modelo descrito acima para evolução temporal devido a Aharonov e colaboradores para interpretar o formalismo de dois estados. Achamos que vale a pena persistir pesquisando nessa direção e continuar a investigar a relação entre essas duas idéias. Sabemos naturalmente que um programa que almeje tratar o espaço-tempo como um fenômeno emergente na teoria quântica, só fará realmente sentido se esse for capaz de explicar a plena emergência de um espaço-tempo de *Minkowski* a partir de medições quânticas. Dessa forma, identificamos essa questão como a motivação central de trabalhos futuros sobre esse assunto.

## Referências Bibliográficas

- [1] Sakurai, J. and Tuan, S. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley Reading (Mass.), (1994).
- [2] Szekeres, P. *A course in modern mathematical physics: groups, Hilbert space, and differential geometry*. Cambridge Univ Pr, (2004).
- [3] Penrose, R. *The road to reality*. Jonathan Cape, (2004).
- [4] PESSOA Jr, O. *Cadernos de Historia e Filosofia da Ciência* , 177–217.
- [5] Koyré, A. *Do mundo fechado ao universo infinito*. Gradiva, (1986).
- [6] Cavalcanti, E. G. *arXiv preprint arXiv:0810.4974* (2008).
- [7] Zeh, H. *Foundations of Physics* **1**(1), 69–76 (1970).
- [8] Bub, J. *Interpreting the quantum world*. Cambridge University Press, (1999).
- [9] Jammer, M. (1974).
- [10] Schlosshauer, M. *Reviews of Modern Physics* **76**(4), 1267 (2005).
- [11] Bächtold, M. *Journal for general philosophy of science* **39**(1), 17–33 (2008).
- [12] Pessoa, O. *Synthese* **113**(3), 323–346 (1997).
- [13] Schlosshauer, M., Kofler, J., and Zeilinger, A. *arXiv preprint arXiv:1301.1069* (2013).
- [14] Faye, J. *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2008).
- [15] Stapp, H. P. *American Journal of Physics* **40**, 1098 (1972).
- [16] Janik, A. S. and Toulmin, S. E. *Wittgenstein's Vienna*. Elephant paperbacks, (1996).
- [17] Everett, H., DeWitt, B., and Graham, N. *The many-worlds interpretation of quantum mechanics: a fundamental exposition*. Princeton University Press, (1973).

- [18] Albert, D. and Loewer, B. *Synthese* **77**(2), 195–213 (1988).
- [19] Von Neumann, J. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton Univ Pr, (1996).
- [20] Fine, A. *Physical Review D* **2**(12), 2783 (1970).
- [21] Brown, H. *Foundations of Physics* **16**(9), 857–870 (1986).
- [22] Zeh, H. D. In *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*, 5–34. Springer (1996).
- [23] Zeh, H. *Decoherence: Theoretical, Experimental, and Conceptual Problems* , 19–42 (2000).
- [24] Zurek, W. *Reviews of Modern Physics* **75**(3), 715–775 (2003).
- [25] Giulini, D., Kiefer, C., and Zeh, H. D. *Physics Letters A* **199**(5), 291–298 (1995).
- [26] Schlosshauer, M. *Decoherence and the quantum-to-classical transition*. Springer Verlag, (2007).
- [27] Castagnino, M., Fortin, S., Laura, R., and Lombardi, O. *Classical and Quantum Gravity* **25**, 154002 (2008).
- [28] Zurek, W. *Physical Review D* **24**(6), 1516–1525 (1981).
- [29] Zurek, W. *Physical Review D* **26**(8), 1862–1880 (1982).
- [30] Aharonov, Y., Bergmann, P. G., and Lebowitz, J. L. *Physical Review* **134**(6B), B1410 (1964).
- [31] Aharonov, Y. and Vaidman, L. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **24**(10), 2315 (1991).
- [32] Tollaksen, J. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **40**(30), 9033 (2007).
- [33] Aharonov, Y., Albert, D. Z., and Vaidman, L. *Physical review letters* **60**(14), 1351 (1988).
- [34] Dixon, P. B., Starling, D. J., Jordan, A. N., and Howell, J. C. *Phys. Rev. Lett* **102**, 173601 (2009).

- [35] Tollaksen, J., Aharonov, Y., Casher, A., Kaufherr, T., and Nussinov, S. *New Journal of Physics* **12**(1), 013023 (2010).
- [36] Hofmann, H. F. *Physical Review A* **83**(2), 022106 (2011).
- [37] Aharonov, Y., Popescu, S., and Tollaksen, J. *arXiv preprint arXiv:1305.1615* (2013).
- [38] Turner, M. D., Hagedorn, C. A., Schlamming, S., and Gundlach, J. H. *Optics letters* **36**(8), 1479–1481 (2011).
- [39] Aspect, A., Grangier, P., and Roger, G. *Physical Review Letters* **47**(7), 460 (1981).
- [40] Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N. *Physical review* **47**(10), 777 (1935).
- [41] Bohr, N. *Physical review* **48**(8), 696–702 (1935).
- [42] Svetlichny, G. *arXiv preprint arXiv:0801.0550* (2008).
- [43] Coecke, B. *arXiv preprint quant-ph/0402014* (2004).
- [44] Raussendorf, R., Sarvepalli, P., Wei, T., and Hahnegahdar, P. *arXiv preprint arXiv:1108.5774* (2011).
- [45] Castagnoli, G. *International Journal of Theoretical Physics* **34**(8), 1283–1287 (1995).
- [46] Castagnoli, G. *Physical Review A* **82**(5), 052334 (2010).
- [47] Hofmann, H. F. *New Journal of Physics* **14**(4), 043031 (2012).
- [48] Stoica, O. C. *arXiv preprint arXiv:1212.2601* (2012).
- [49] Stoica, C. In *EPJ Web of Conferences*, volume 58, 01017. EDP Sciences, (2013).
- [50] Cortês, M. and Smolin, L. *arXiv preprint arXiv:1307.6167* (2013).
- [51] Markopoulou, F. and Smolin, L. *Physical Review D* **70**(12), 124029 (2004).
- [52] Seiberg, N. *arXiv preprint hep-th/0601234* (2006).
- [53] Moreva, E., Brida, G., Gramegna, M., Giovannetti, V., Maccone, L., and Genovese, M. *arXiv preprint arXiv:1310.4691* (2013).
- [54] d’Espagnat, B. (1976).
- [55] Schlosshauer, M. *Elegance and Enigma*. Springer, (2011).

- [56] Kastner, R. E. (2013).
- [57] Schwindt, J. *arXiv preprint arXiv:1210.8447* (2012).
- [58] Wallace, D. *arXiv preprint arXiv:0712.0149* (2007).
- [59] Castagnoli, G. and Finkelstein, D. R. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **457**(2012), 1799–1806 (2001).
- [60] Castagnoli, G. *International Journal of Theoretical Physics* **48**(8), 2412–2426 (2009).
- [61] Castagnoli, G. *International Journal of Theoretical Physics* **48**(12), 3383–3395 (2009).
- [62] Preskill, J. *California Institute of Technology* (1998).
- [63] Schwinger, J. *Quantum Kinematics And Dynamic*. Westview Press, 2000, (1970).
- [64] Deutsch, D. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **400**(1818), 97 (1985).
- [65] Nielsen, M. A. *Reports on Mathematical Physics* **57**(1), 147–161 (2006).
- [66] Raussendorf, R. and Briegel, H. J. *Physical Review Letters* **86**(22), 5188–5191 (2001).
- [67] Childs, A. M., Leung, D. W., and Nielsen, M. A. *Physical Review A* **71**(3), 032318 (2005).
- [68] Barbour, J. *HARVARD REVIEW OF PHILOSOPHY* **11**, 45–58 (2003).
- [69] Umezawa, H. and Umezawa, H. *Advanced field theory: micro, macro, and thermal physics*. American Institute of Physics, (1995).
- [70] Elby, A. and Bub, J. *Physical Review A* **49**(5), 4213 (1994).



### 4.0.1 Apêndice: O teorema da tridecomposição única

Mostraremos a seguir, como podemos ter uma tridecomposição única quando incorporamos o sistema do ambiente interagindo com o processo de medição, não sendo necessário dessa forma, impor nenhuma condição específica para os autovalores dos observáveis selecionados.

Trataremos o processo da medida como sendo uma interação entre o sistema físico, o aparato medidor e o ambiente. Definindo o espaço de estados do sistema físico por  $W_S^{(n)}$ , o espaço de estados do aparato medidor por  $W_A^{(m)}$  e o espaço de estados do ambiente por  $W_E^{(p)}$  onde  $n$ ,  $m$  e  $p$  representam as dimensões dos espaços, podemos definir o espaço produto  $W^{(n \times m \times p)}$  como sendo o *produto tensorial* dos espaços de cada subsistema,  $W^{(n \times m \times p)} = W_S^{(n)} \otimes W_A^{(m)} \otimes W_E^{(p)}$ . Dessa forma, o estado final, que no modelo de Von Neumann era uma bidecomposição, passa a ser tridecomposto da seguinte forma:

$$|\Psi\rangle = \Psi^i |\varphi_i\rangle \otimes |A_i\rangle \otimes |E_i\rangle \quad (4.1)$$

Nesse contexto, surge um importante teorema proposto por Andrew Elby e Jeffrey Bub [70] que garante a unicidade da tridecomposição. Iremos assumir, sem perda de generalidade, que todos os vetores são normalizados. Para prosseguir, será necessário definir a terminologia que usaremos:

Dois vetores são colineares quando o módulo do seu produto interno é igual a 1. Por exemplo,  $|\xi\rangle$  e  $e^{i\phi} |\xi\rangle$  são colineares. Um conjunto não trivial de vetores denotado por  $\{|\alpha_i\rangle\}$  deve conter dois ou mais vetores. O conjunto  $\{|\alpha_i\rangle\}$  é não colinear quando dois vetores em seu conjunto não são colineares. Um conjunto de vetores  $\{|\alpha'_i\rangle\}$  difere não trivialmente de  $\{|\alpha_i\rangle\}$  apenas se algum vetor de  $\{|\alpha'_i\rangle\}$  não é colinear com qualquer vetor de  $\{|\alpha_i\rangle\}$ . Antes de provarmos o teorema, discutiremos dois lemas:

**Lema 4.0.1.** *Se  $|\Psi\rangle \in W = W_1 \otimes W_2$  é um estado fatorizável, ou seja,  $|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\xi\rangle$  onde  $|\phi\rangle$  é um estado de  $W_1$  e  $|\xi\rangle$  é um estado de  $W_2$ . Então, não existe uma base  $\{|A_i\rangle\}$  do espaço  $W_1$  e um conjunto linearmente independente  $\{|B_i\rangle\}$  tal que  $|\Psi\rangle = d^i |A_i\rangle \otimes |B_i\rangle$ .*

*Demonstração.* Suponha  $|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\xi\rangle$  seja  $\{|A'_j\rangle\}$  uma base do espaço  $W_1$ , então podemos expandir  $|\phi\rangle$  nessa base da seguinte forma:  $|\phi\rangle = c^j |A'_j\rangle$ . Dessa forma, temos que  $|\Psi\rangle = c^j |A'_j\rangle \otimes |\xi\rangle$ .

Se  $|\Psi'\rangle = d^i |A_i\rangle \otimes |B_i\rangle$  onde  $\{|A_i\rangle\}$  é também uma base de  $W_1$ . Temos que,  $|\Psi\rangle = |\Psi'\rangle$  se, primeiramente,  $\{|A_i\rangle\}$  expandir o mesmo subespaço que  $\{|A'_j\rangle\}$ . Então,

necessariamente,  $|A'_j\rangle = e_j^i |A_i\rangle$ . Segue que,  $|\Psi\rangle = h^i |A_i\rangle \otimes |\xi\rangle$  onde  $h^i \equiv c^j e_j^i$ . Como  $|\Psi'\rangle = d^i |A_i\rangle \otimes |B_i\rangle$  temos que  $d^{(i)} |B_{(i)}\rangle = h^i |\xi\rangle$  para cada  $i$ . Então,  $|\Psi\rangle = |\Psi'\rangle$  apenas se  $\{|B_i\rangle\}$  é um conjunto linearmente dependente.  $\square$

**Lema 4.0.2.** *Seja  $\{|\alpha_i\rangle\}$  e  $\{|C_i\rangle\}$  conjuntos linearmente independentes dos espaços  $W_1$  e  $W_2$  respectivamente. Seja  $\{|C'_i\rangle\}$  um conjunto de vetores linearmente independentes que difere não trivialmente de  $\{|C_i\rangle\}$ . Se  $|\Psi\rangle = c^i |\alpha_i\rangle \otimes |C_i\rangle$  então  $|\Psi\rangle = d^i |\alpha'_i\rangle \otimes |C'_i\rangle$  apenas se no mínimo um dos  $\{|\alpha'_i\rangle\}$  é combinação linear de ao menos dois vetores de  $\{|\alpha_i\rangle\}$ , ou seja,  $|\alpha'_k\rangle = g_k^i |\alpha_i\rangle$  onde no mínimo dois dos  $g_k^i$  são diferentes de zero.*

*Demonstração.* Considere  $|\Psi'\rangle = d^i |\alpha_i\rangle \otimes |C'_i\rangle$  vamos mostrar inicialmente que  $|\Psi\rangle \neq |\Psi'\rangle$ . Para  $|\Psi\rangle$  ser igual a  $|\Psi'\rangle$  os  $\{|C'_i\rangle\}$  e  $\{|C_i\rangle\}$  tem que expandir o mesmo subespaço  $W_2$ . Portanto, como  $\{|C_i\rangle\}$  e  $\{|C'_i\rangle\}$  são conjuntos linearmente independentes então, os vetores de  $\{|C'_i\rangle\}$  são combinações lineares dos  $\{|C_i\rangle\}$ , ou seja,  $|C'_i\rangle = e_i^j |C_j\rangle$ . Mas por hipótese, no mínimo um vetor dos  $\{|C'_i\rangle\}$  não é colinear com vetores de  $\{|C_i\rangle\}$ . Portanto, para algum  $i$ ,  $e_i^j \neq 0$  para no mínimo dois valores de  $j$ .

Então, desde que  $|C'_i\rangle = e_i^j |C_j\rangle$ , temos  $|\Psi'\rangle = d^i |\alpha_i\rangle \otimes (e_i^j |C_j\rangle)$ . Como os  $\{|\alpha_i\rangle\}$  são vetores linearmente independentes,  $|\Psi'\rangle$  é igual a  $|\Psi\rangle = c^i |\alpha_i\rangle \otimes |C_i\rangle$  se  $|C_{(i)}\rangle = \frac{d_{(i)}}{c_{(i)}} e_{(i)}^j |C_j\rangle$  para cada  $i$ . Como os  $\{|C_i\rangle\}$  são linearmente independentes temos que  $e_i^j$  necessariamente é nulo para todo valor de  $j \neq i$ . Isso contradiz a conclusão anterior que para algum  $i$ ,  $e_i^j \neq 0$  para no mínimo dois valores de  $j$ . Pela mesma razão, pode-se provar que  $|\Psi'\rangle = d^i |\alpha'_i\rangle \otimes |C'_i\rangle$  não pode ser igual a  $|\Psi\rangle = c^i |\alpha_i\rangle \otimes |C_i\rangle$  se todos os  $\{|\alpha'_i\rangle\}$  são colineares com os  $\{|\alpha_i\rangle\}$ . Então,  $|\Psi\rangle = d^i |\alpha'_i\rangle \otimes |C'_i\rangle$  apenas se  $\{|\alpha'_i\rangle\}$  difere não trivialmente dos  $\{|\alpha_i\rangle\}$ . Como  $\{|\alpha'_i\rangle\}$  e  $\{|\alpha_i\rangle\}$  deve expandir o mesmo subespaço, segue que para algum  $k$ ,  $|\alpha'_k\rangle = g_k^i |\alpha_i\rangle$ .  $\square$

Dado esses dois lemas, podemos agora provar que, se um sistema do tipo  $W = W_1 \otimes W_2 \otimes W_3$  puder ser decomposto como  $|\Psi\rangle = c^i |A_i\rangle \otimes |B_i\rangle \otimes |C_i\rangle$ , essa decomposição é única.

**Teorema 4.0.2.** *Suponha  $|\Psi\rangle = c^i |A_i\rangle \otimes |B_i\rangle \otimes |C_i\rangle$ , onde  $\{|A_i\rangle\}$  e  $\{|C_i\rangle\}$  são conjuntos de vetores linearmente independentes e  $\{|B_i\rangle\}$  é um conjunto não colinear. Então, não existem conjuntos linearmente independentes  $\{|A'_k\rangle\}$  e  $\{|C'_k\rangle\}$  e um conjunto não colinear  $\{|B'_k\rangle\}$  tal que  $|\Psi\rangle = d^k |A'_k\rangle \otimes |B'_k\rangle \otimes |C'_k\rangle$ . (Desde que os conjuntos alternativos não difira trivialmente dos outros)*

*Demonstração.* Assumindo que  $\{|C_i\rangle\}$  difira não trivialmente de  $\{|C'_i\rangle\}$ . Então,  $|\Psi\rangle = c^i |\alpha_i\rangle \otimes |C_i\rangle$  onde  $|\alpha_i\rangle \equiv |A_i\rangle \otimes |B_i\rangle$ . Suponha também que  $|\Psi\rangle = d^k |\alpha'_k\rangle \otimes |C'_k\rangle$  onde  $|\alpha'_k\rangle \equiv |A'_k\rangle \otimes |B'_k\rangle$ . Pelo primeiro lema, não podemos reescrever  $|\alpha'_k\rangle$  como um estado emaranhado pois  $|\alpha'_k\rangle$  é um estado fatorizável. Mas de acordo com o segundo lema, enquanto  $|\Psi\rangle = c^i |\alpha_i\rangle \otimes |C_i\rangle$  segue que  $|\Psi\rangle = d^i |\alpha'_i\rangle \otimes |C'_i\rangle$  apenas se  $|\alpha'_k\rangle = g_k^i |\alpha_i\rangle$  onde no mínimo dois dos elementos de matriz  $g_k^i$  são não nulos.

Como  $|\alpha_i\rangle = |A_i\rangle \otimes |B_i\rangle$  segue que  $|\alpha'_k\rangle$  é um estado emaranhado, pois  $|\alpha'_k\rangle = g_k^i |A_i\rangle \otimes |B_i\rangle$ . Mas isso contradiz a definição que  $|\alpha'_k\rangle \equiv |A'_k\rangle \otimes |B'_k\rangle$  que é um estado fatorizável. Portanto, essa contradição assegura que  $|\Psi\rangle \neq d^k |A'_k\rangle \otimes |B'_k\rangle \otimes |C'_k\rangle$ , onde podemos concluir, que a primeira decomposição é única.  $\square$