



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
PPGEE  
ENGENHARIA ELÉTRICA

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais em atendimento  
ao regulamento do curso.

## **Projeto e Otimização de Antenas Helicoidais Não Uniformes**

Julio César de Oliveira

Dissertação de Mestrado  
Belo Horizonte - Minas Gerais

18/12/2013



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
PPGEE  
ENGENHARIA ELÉTRICA

Julio César de Oliveira

## **Projeto e Otimização de Antenas Helicoidais Não Uniformes**

*Trabalho apresentado ao Programa de Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais em atendimento ao regulamento do curso. do ENGENHARIA ELÉTRICA da UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Área de Concentração: Antenas, Propagação e Eletromagnetismo.*

Orientador: *Dr. Ricardo Luiz da Silva Adriano*

Belo Horizonte - Minas Gerais  
18/12/2013



*Dedico este trabalho aos meus filhos, Allan Leal e Julio Cesar Filho, e aos meus pais "in memoriam".*



# Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus, pois sei que Ele esteve presente em toda minha jornada no curso!

Agradeço ao professor Ricardo Adriano pela orientação, boa vontade, ensinamentos e dedicação.

Agradecimento em especial ao professor Rodney R. Saldanha pelo incentivo, e amizade demonstrada durante toda a minha jornada no programa, e por acreditar em meu trabalho.

Agradeço ao professor Elson José da Silva pelo apoio e disponibilidade.

Agradeço ao Diretor da ENACOM o Dr. Adriano C. Lisboa pelo seu apoio, quando se fez necessário.

Agradeço ao Diretor da FIEMG/Senai Dr. Ênio de Oliveira, pelo incentivo e confiança depositada.

Agradeço ao aluno Múcio Paixão que me ajudou nos ensaios dos experimentos, e aos amigos do GOPAC pelo auxílio e amizade.





*Ó profundidade de riqueza, tanto da sabedoria como do conhecimento de Deus! Quão insondáveis são os seus juízos, e quão inescrutáveis, os seus caminhos! Quem, pois, conheceu a mente do Senhor? Ou quem foi seu conselheiro? Ou quem primeiro deu a Ele para que lhe venha ser restituído? Porque dEle, e por meio dEle, e para Ele são todas as coisas. A Ele, pois a glória eternamente. Amém!*

—RM.11.33-36 (Bíblia)



# Resumo

Nesta dissertação, antenas helicoidais uniformes são usadas como ponto de partida para gerar antenas otimizadas não-uniformes. As melhorias no ganho e impedância de entrada são obtidas variando-se a forma da hélice usando uma função polinomial de segunda ordem. Os coeficientes da aproximação polinomial são encontrados com a utilização do algoritmo de otimização elipsoidal na versão de corte profundo (Deep-cut).

A utilização de fórmulas e esquemas bem conhecidos na concepção de antenas helicoidais uniformes é considerada como ponto inicial do método elipsoidal. Isso reduz consideravelmente o domínio de pesquisa e proporciona uma elevada taxa de convergência.

Para simular o comportamento das antenas, o Método dos Momentos é aplicado à Equação Integral de Campo Elétrico-EICE. As antenas são alimentadas usando um modelo de fonte de tensão do tipo Delta-Gap e o plano condutor existente na base das antenas é representado por meio do método das imagens.

Os resultados são apresentados para antenas banda estreita para aplicações em WiFi (frequência central de 2,45 GHz). Os resultados mostram que a impedância de entrada e o comprimento da antena podem ser consideravelmente melhorados usando-se uma parametrização simples e eficiente.

**Palavras-chave:** Antenas Helicoidais, Método dos Momentos, Algoritmo Elipsoidal deep-cut, Otimização.



# Abstract

In this dissertation, uniform helical antennas are used as a starting point to generate non-uniform optimized antennas . Improvements in the gain and input impedance are obtained by varying the helix shape using a second order polynomial function.

The the polynomial approximation coefficients are found using the deep-cut version of the ellipsoidal optimization algorithm.

The use of the well known formulae and diagrams for the design of uniform helical antennas as a initial point of the deterministic method can reduce the search domain and provides a fast convergence rate.

To simulate the behavior of the antennas, the Method of Moments (MoM) is applied to the Electric Field Integral Equation-EFIE. The antennas are fed using a Delta-Gap voltage source and the conducting plane at the base of the antennas are represented by the Image Theory.

Results are presented for WiFi application using a center frequency of 2.45 GHz. It shows that the input impedance and the antenna length can be considerably improved using a simple and efficient parametrization.

**Keywords:** Helical Antennas, Method of Moments, ellipsoid method deep-cut, Optimization.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Geometria de uma antena helicoidal uniforme	1
1.2	Modos de operação	3
1.2.1	Parâmetros da antena no modo normal	4
1.2.2	Parâmetros da antena no Modo Axial	5
1.3	Projeto de antenas helicoidais	8
1.4	Projeto otimizado de antenas helicoidais	9
1.5	Síntese desta dissertação	10
<b>2</b>	<b>Modelagem de antenas helicoidais</b>	<b>13</b>
2.1	Simplificações no modelo	13
2.2	Equação Integral de Campo Elétrico	15
2.3	Estudo do Método dos Momentos	18
2.3.1	Funções Base	19
2.3.1.1	Funções base de domínio inteiro	19
2.3.1.2	Funções Base de subdomínio	20
2.3.1.3	Função constante ou função pulso	20
2.3.1.4	Funções Lineares	23
2.3.1.5	Funções senoidais	24
2.3.2	Funções de Pesos ou de Testes	25
2.4	Formulação para fios retos	26
2.5	Formulação para fio curvo	28
2.6	Modelagem da Fonte	30
2.7	Considerações Finais	31
<b>3</b>	<b>Otimização de antenas helicoidais não uniformes</b>	<b>33</b>
3.1	O método elipsoidal - ME	34
3.1.1	Funcionamento do algoritmo	34
3.1.1.1	Viabilidade de $p_k$	36
3.1.1.2	Melhorando a convergência do ME	37
3.1.2	Aplicação do ME em problemas analíticos	38
3.2	Otimização das Antenas Helicoidais	41
3.2.1	Parametrização	41
3.2.2	Definição da função objetivo	43
3.3	Considerações Finais	44

<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>45</b>
4.1	Antenas de referência	45
4.2	Otimização das antenas de referência	46
4.3	Desempenho das antenas otimizadas	47
4.4	Geometria e diagramas de irradiação	49
4.5	Considerações Finais	51
<b>5</b>	<b>Conclusões e propostas de continuidade</b>	<b>53</b>



# Lista de Figuras

1.1	Conjunto de antenas helicoidais utilizado em rastreamento de satélites.	2
1.2	Antena Helicoidal e seus Parâmetros- Figura modificada[1].	3
1.3	Loop de uma antena na direção $z$ , Figura modificada [1]	4
1.4	Geometria da Antena e Padrão de Irradiação-Normal [1]	5
1.5	Geometria da Antena e Padrão de Irradiação-Axial[1]	6
1.6	Antena Helicoidal, vista em perspectiva e vista frontal.	8
1.7	Comparação de Resultados Obtidos [2].	9
2.1	Fonte Real na presença de um plano condutor perfeito infinito	14
2.2	Modelo Simplificado da antena helicoidal	15
2.3	Fio Condutor de Raio = $r$ , Meio 1 PEC e Meio 2 Espaço Livre	16
2.4	Segmentação do dipolo e sua corrente equivalen, [1].	21
2.5	Funções constantes definidas em cada subdomínio, [1]	22
2.6	Funções Lineares definidas em cada subdomínio, [1]	23
2.7	Funções Senoidais definidas em cada subdomínio, [1]	24
2.8	Geometria, Função Base, e de Peso para um segmento reto, $\delta$ é o gap infinitesimal [3].	27
2.9	Coordenada da Hélice, funções base e peso.	29
2.10	Compo elétrico incidente gerado por uma fonte de tensão	30
3.1	Exemplo de iterações dos Elipsoides	35
3.2	Técnica de correção para viabilidade de $p_k$	37
3.3	Evolução das elipses pelo Método original	39
3.4	Número de Iterações pelo Método original limitado a 50.	39
3.5	Evolução das elipses pelo Método RT	40
3.6	Número de Iterações pelo Método RT	40
3.7	Evolução das elipses pelo Método DA	40
3.8	Número de Iterações pelo Método DA	41
3.9	Antenas Helicoidais Parametrizadas	42
4.1	Antena Helicoidal Otimizada de $N=3$ , a) Geometria b) Diagrama de Irradiação.	49
4.2	Antena Helicoidal Otimizada de $N=4$ , a) Geometria b) Diagrama de Irradiação.	50
4.3	Antena Helicoidal Otimizada de $N=5$ , a) Geometria b) Diagrama de Irradiação.	50
4.4	Antena Helicoidal Otimizada de $N=6$ , a) Geometria b) Diagrama de Irradiação.	51
4.5	Antena Helicoidal Otimizada de $N=7$ , a) Geometria b) Diagrama de Irradiação.	51
4.6	Antena Helicoidal Otimizada de $N=8$ , a) Geometria b) Diagrama de Irradiação.	52

4.7	Antena Helicoidal Otimizada de $N=9$ , a) Geometria b) Diagrama de Irradiação.	52
-----	--	----

# Lista de Tabelas

3.1	Tipos de Algoritmos	39
4.1	Parâmetros das antenas uniformes	45
4.2	Desempenho das antenas uniformes	46
4.3	Parâmetros das antenas otimizadas	47
4.4	Impedância de entrada ( $Z_{in}$ )	47
4.5	Ganho das antenas	48
4.6	Comprimento das antenas ( $L$ )	48
4.7	Potência irradiada	49



# Lista de Abreviaturas

## *Simbologia de Vetores*

$\vec{A}$	Vetor Potencial Magnético (Wb)
$\vec{E}$	Campo elétrico (V/m)
$\vec{E}_i$	Campo elétrico incidente (V/m)
$\vec{E}_s$	Campo elétrico espalhado (V/m)
$\vec{E}_s$	Campo elétrico espalhado (V/m)
$\vec{F}$	Vetor Potencial Elétrico (V)
$\vec{H}$	Campo Magnético (A/m)
$\vec{J}$	Densidade de Corrente Elétrica (A)
$\vec{J}_s$	Densidade de Corrente Elétrica Linear(A/m)
$\vec{l}$	Componente Vetorial na direção l
$\hat{l}$	Vetor Unitário que segue o contorno da hélice
$\hat{l}'$	Vetor Unitário que segue o contorno da hélice definido no ponto da fonte
$\hat{n}$	Vetor Unitário Normal
$\vec{r}'$	Vetor Posição na Superfície do Condutor
$\vec{r}$	Vetor Posição no Centro do Condutor

## *Símbolos Gregos*

$\alpha$	Angulo de Passo "pitch"(graus)
$\alpha_{cp}$	Angulo de Inclinação para polarização circular (graus)
$\beta$	Constante de Fase de uma Onda (graus)
$\beta_{1,2,3}$	Fatores de Deep-Cut no Método Elipsoidal
$\delta$	Função de Dirac
$\Delta$	Comprimento de cada segmento segmento (m).
$\Delta f(p)$	Varição da função $f(p)$ no Método Elipsoidal
$\epsilon$	Permissividade elétrica (F/m)
$\epsilon_0$	Permissividade elétrica do espaço livre (F/m)
$\eta$	Impedância Intrínseca ( $120\pi$ ohms no espaço livre)
$\theta$	Angulo de Incidência ou de inclinação (graus)
$\lambda$	Comprimento de Onda (m)
$\mu$	Permeabilidade magnética (H/m))
$\mu_0$	Permeabilidade magnética do espaço livre (H/m)
$\sigma$	Condutividade elétrica (S/m)
$\rho_e$	Densidade de carga elétrica (C/m <sup>2</sup> )
$\psi$	Fase entre campos na direção $E_\phi$ e $E_\theta$

$\omega$	Frequência angular (rd/s)
$\Omega$	Impedância ou resistência ( $\Omega$ )
<i>Siglas Gerais</i>	
$a$	Raio de uma Antena Helicoidal Uniforme (m).
$a_n$	Constantes conhecidas no MoM.
$BWFN$	Beam Width First Nulls (graus).
$C(l')$	Domínio da função senoidal na superfície da estrutura, na direção $l'$ no MoM.
$C$	Circunferência de uma Antena Helicoidal Uniforme (m).
dB	Decibéis.
$D$	Diâmetro de uma Antena Helicoidal Uniforme (m).
$EGCE$	Equação Geral do Campo Elétrico (V/m).
$EICE$	Equação Integral do Campo Elétrico (V/m).
$EICM$	Equação Integral do Campo Magnético (A/m).
$EIP$	Equação Integral de Pocklington
$E_i^l$	Campo Elétrico incidente ao longo do eixo $\hat{l}$ (V/m).
$E_\theta$	Componente do campo elétrico na direção $\theta$ (V/m).
$E_\phi$	Componente do campo elétrico na direção $\phi$ (V/m).
$f$	Função de Excitação Conhecida no MoM.
$f_0(p)$	Função Objetivo no Método Elipsoidal.
$f_i(p)$	Função de Restrição no Método Elipsoidal.
$F$	Fator Espacial de uma Antena (adimensional).
$G$	Função de Green para o espaço livre.
$h$	Precisão do algoritmo no Método Elipsoidal.
$HPBW$	Half Power Beam Width (graus).
$I_z(z')$	Linha de corrente ou corrente equivalente da fonte filamentar no MoM.
$k$	Numero de Onda
$KKT$	Condição de Karush-Khun-Tucker no Método Elipsoidal.
$l$	Segmento $l$ da antena.
$L(u)$	Forma Básica da Equação do Método dos Momentos.
$L$	Operador linear Conhecido no MoM.
$L$	Altura da Hélice no Modo Axial (m).
$L_0$	Comprimento do fio da Antena de uma espira (m).
$L_w$	Comprimento da Bobina da Antena Helicoidal (m).
$mgk$	Módulo do Gradiente da função Objetivo no Método Elipsoidal.
$ME$	Método Elipsoidal.
$MoM$	Method of Moments-Método dos Momentos.
$N$	Número de Espiras de uma Antena Helicoidal.
$N$	Numero Natural.
$NB$	Narrow Band - Banda Estreita
$PEC$	Perfeito Condutor.
$p_k$	Sequência de Pontos $k$ no Método Elipsoidal.
$(p_j)_{min}$	Limite inferior do vetor da variável $p$ no Método Elipsoidal.
$(p_j)_{max}$	Limite superior do vetor da variável $p$ no Método Elipsoidal.

$p_0$	Ponto inicial no Método Elipsoidal.
$p^*$	Ponto de Ótimo no Método Elipsoidal.
$elp(p_k, Q_k)$	Elipsoide Genérica no Método Elipsoidal.
$elp(p_0, Q_0)$	Elipsoide Inicial no Método Elipsoidal.
$P_m(l)$	Função Pulso em $l$ no MoM.
$P_n^+(l')$	Função Base Triangular com inclinação Positiva no MoM.
$P_n^-(l')$	Função Base Triangular com inclinação Negativa no MoM.
$Q$	Matriz Definida Positiva no Método Elipsoidal.
$Q^{-1}$	Matriz Inversa no Método Elipsoidal.
$r$	Raio do fio da Antena Helicoidal (m).
$2r$	Diâmetro do fio da Antena Helicoidal (m).
$r$	representa o ponto de observação da equação EICE
$. r'$	representa a coordenada da fonte.
$R$	Distância do Ponto de Observação (m).
$S$	Pitch-espacamento entre espiras(centro a centro) (m).
$S$	Superfície S (m <sup>2</sup> ).
$s_m$	Localização da emésima fonte no segmento curvo $l$ .
$T_n l'$	Função Base Triangular Enésima na direção $l'$ no MoM.
$u$	Função de Resposta Conhecida no MoM.
$u^*$	Conjugado complexo de $u$ no MoM.
$u_n(z')$	Funções conhecidas, base ou expansão no MoM.
$u(x')$	Domínio da função na superfície da estrutura, na direção $x'$ no MoM.
$V_n$	Tensão na Antena (volts).
$V_{ms}$	Tensão da emésima fonte no MoM.
$w_m(l)$	Função de Peso ou Teste no MoM.
$w$	Funções de Peso no MoM.
$w^*$	Conjugado complexo de $w$ no MoM.
$\langle w, u \rangle$	produto escalar ou interno " $w.u$ " no MoM.
$WB$	Wide Band - Banda Larga.
$Z_{mn}$	Impedância Matricial da antena no MoM.
$Z_{ms}$	Localização da emésima Fonte no MoM.





## CAPÍTULO 1

# Introdução

Antenas helicoidais, são amplamente usadas em várias aplicações, desde sistemas de telefonia, sistemas wireless, rádio comunicadores pessoais e militares e até em satélites espaciais. A concepção de uma antena em forma de hélice foi descrita pela primeira vez por John Daniel Kraus em 1947 [4].

Nas décadas de 70, 80 e 90 as forças armadas dos Estados Unidos fizeram uso considerável de antenas helicoidais em seus satélites militares. Em muitos casos, essas antenas eram usadas juntamente com refletores parabólicos para aumentar o desempenho das mesmas. Um exemplo de conjunto de antenas helicoidais utilizado no rastreamento de satélites é apresentado na figura 1.1.

Os satélites em órbita sofrem um efeito chamado de “spin rotation”. Esse efeito é provocado pelo giro do satélite ao redor de seu próprio eixo axial fazendo com que a polarização do sinal recebido na terra varie constantemente, ora estando na horizontal, ora na vertical.

Devido à sua característica de gerar campos com polarização circular, a utilização dessas antenas nos satélites fazem com que esse efeito de mudança na polarização do sinal não ocorra. Isso facilita a recepção do sinal em terra e possibilita o uso de qualquer tipo de antena na recepção.

Atualmente, existem diversas metodologias empíricas para o projeto de antenas helicoidais. Entretanto, conforme será apresentado na seção 1.3, essas metodologias diferem consideravelmente umas das outras e dos resultados experimentais. Adicionalmente, tais metodologias são baseadas em antenas helicoidais uniformes cuja geometria simples não possibilita um bom casamento de impedância.

Dessa forma, esse trabalho propõe o desenvolvimento de uma metodologia para o projeto otimizado de antenas helicoidais não uniformes que são geradas a partir de antenas uniformes convencionais.

### 1.1 Geometria de uma antena helicoidal uniforme

A Antena Helicoidal, pode ser descrita como a combinação de uma antena em forma de Anel ou “Loop” com uma antena linear. Sendo que essas podem ser consideradas casos particulares de antenas Helicoidais. Fazendo-se o espaçamento  $S$  entre as espiras da antena helicoidal tender para zero, forma-se uma antena em Anel. Em contrapartida, fazendo-se o diâmetro  $D$  de uma hélice de altura  $L$  tender a zero, obtem-se uma antena linear de comprimento  $L$ . Esta analogia é importante para a análise teórica dos mecanismos de irradiação das antenas helicoidais [1] [5].

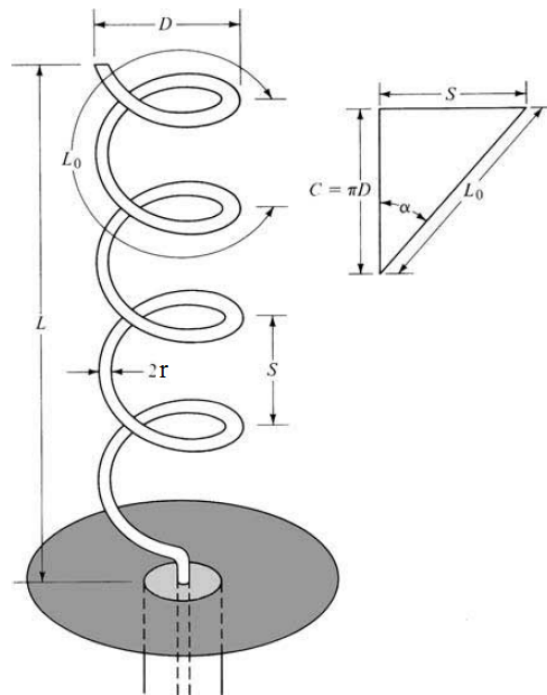


**Figura 1.1** Conjunto de antenas helicoidais utilizado em rastreamento de satélites.

Um exemplo de uma antena helicoidal é apresentado na Figura 1.2. A antena consiste de um fio condutor, sob a forma de uma hélice, situado sobre uma superfície condutora. A superfície condutora pode assumir diferentes formas sendo que as superfícies planas são as mais comumente adotadas. Dentre as superfícies planas, pode-se destacar as superfícies circulares ou quadradas. Em ambos os casos, o diâmetro ou o lado da placa deve ter dimensão de pelo menos  $3\lambda/4$  da frequência de operação da antena [6]. Superfícies com geometrias mais complexas também podem ser utilizadas como por exemplo, superfícies sob a forma de uma cavidade cilíndrica, ou sob a forma de um tronco de cone [7].

A hélice geralmente é ligada ao condutor central de um cabo coaxial e o condutor externo, ou seja, a malha do cabo é conectada à superfície condutora. Para a antena da Figura 1.2, pode-se definir os seguintes parâmetros [8], [6] e [5]:

- $N$  - número de espiras;
- $D$  - diâmetro da hélice;
- $a$  - raio da hélice;
- $C$  - circunferência da hélice ( $C = \pi D = 2\pi a$ );
- $S$  - Pitch ou Passo ( $S = C \tan \alpha$ );
- $\alpha$  - ângulo de passo ( $\alpha = \arctan(S/C)$ );



**Figura 1.2** Antena Helicoidal e seus Parâmetros- Figura modificada[1].

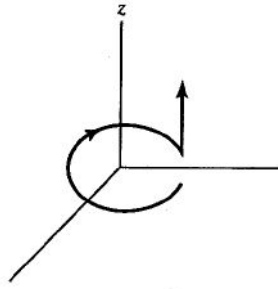
- $L_0$  - comprimento do fio de uma espira ( $L_0 = \sqrt{C^2 + S^2}$ );
- $L$  - Altura da Hélice ( $L = NS$ );
- $r$  - raio do fio da hélice;
- $L_w$  - comprimento da bobina Helicoidal ( $L_w = NL_0$ ).

O diâmetro  $D$  e a circunferência  $C$  referem-se ao cilindro imaginário cuja superfície passa através da linha do condutor da hélice. O índice  $\lambda$  significa que as dimensões da grandeza em questão são medidas em comprimentos de onda no espaço livre.

## 1.2 Modos de operação

O termo, *modo de irradiação*, descreve a forma geral do diagrama do campo distante de uma antena conforme [1]. No caso de antenas helicoidais, existem dois modos de irradiação possíveis [6] sendo eles:

1. O *modo normal*, para o qual o campo é máximo na direção normal ao eixo da hélice, sendo a polarização circular para uma dada relação entre o espaçamento entre espiras e o seu diâmetro. Para o funcionamento neste modo as dimensões da hélice têm que ser



**Figura 1.3** Loop de uma antena na direção  $z$ , Figura modificada [1]

pequenas relativamente comparada ao comprimento de onda ( $L \ll \lambda$ ). A largura de banda da antena nestes casos é pequena.

2. O *modo axial* ou de feixe, para o qual o campo é máximo na direção do eixo da hélice, com polarização circular ou elíptica. Este modo de irradiação é conseguido quando aumenta-se a circunferência  $C$  da hélice, até que ela seja da ordem de um comprimento de onda  $\lambda$ .

### 1.2.1 Parâmetros da antena no modo normal

No modo normal de funcionamento, o campo de irradiação é máximo numa direção normal ao eixo da hélice conforme Figura 1.4. Teoricamente, ela irá emitir ondas circularmente polarizadas.

Para operação em modo normal, as dimensões da hélice devem ser pequenas quando comparadas com o comprimento de onda, isto é,  $D \ll \lambda$  e  $L$  geralmente  $\ll \lambda$ . A hélice no modo normal é eletricamente pequena e, portanto, a sua eficiência é baixa.

Uma vez que a hélice é pequena, a corrente é assumida constante em magnitude em todo o seu comprimento. O padrão de campo distante é independente do número de voltas e pode ser obtido através da análise de uma volta. Nessas condições, a antena pode ser aproximada como a combinação de um laço pequeno e um dipolo ideal conforme apresentado na Figura 1.3.

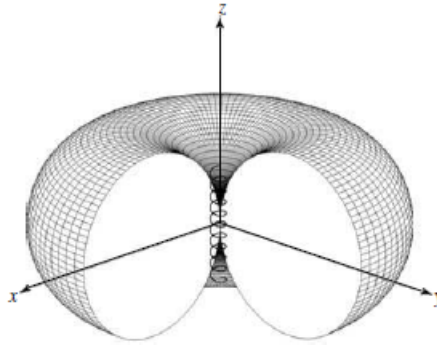
Nesse caso, a contribuição do dipolo para o campo elétrico em um ponto distante da antena pode ser aproximado por:

$$\vec{E}_D = j\omega\mu IS \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sin(\theta)\hat{\theta}, \quad (V/m) \quad (1.1)$$

já o campo gerado pelo laço é dado por:

$$\vec{E}_L = \eta\beta^2 D^2 I \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sin(\theta)\hat{\phi}, \quad (V/m) \quad (1.2)$$

onde  $\pi D^2/4$  é a área do loop,  $\omega$  é a frequência angular de operação da antena,  $\mu$  é a permeabilidade magnética do meio,  $\eta$  é a impedância intrínseca do meio e  $k$  é o número de onda.



**Figura 1.4** Geometria da Antena e Padrão de Irradiação-Normal [1]

O campo total gerado pela antena é então a soma vetorial de (1.1) e (1.2). A análise das equações (1.1) e (1.2) demonstra que ambas as componentes possuem campo nulo na direção de  $\hat{z}$  ( $\theta = 0$ ). O diagrama de radiação da antena em modo normal é apresentado na Figura 1.4.

Adicionalmente, a existência do operador  $j$  multiplicando apenas a equação (1.1) mostra que as fases dos campos estão em quadratura.

Nesse caso, o campo irradiado pela antena tem polarização elíptica e a razão axial entre os eixos da elipse é dado por:

$$|AR| = \frac{|E_D|}{|E_L|} = \frac{4\omega\mu S}{\mu\omega(2\pi/\lambda)\pi D^2} = \frac{2S\lambda}{\pi^2 D^2} \quad (1.3)$$

Como os componentes do campo elétrico gerado pela antena estão defasados de  $90^\circ$ . A polarização é circular caso a razão axial seja unitária. Essa condição é obtida se:

$$C = \pi D = \sqrt{2S\lambda} \quad (1.4)$$

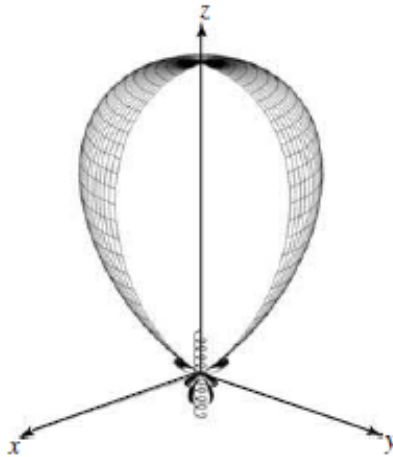
em outras palavras, o angulo de passo necessário para a polarização circular é:

$$\alpha_{cp} = \sin^{-1} \left[ \frac{-1 + \sqrt{1 + (L/\lambda)^2}}{L/\lambda} \right] \quad (1.5)$$

### 1.2.2 Parâmetros da antena no Modo Axial

As principais características da antena helicoidal operando em modo axial são:

1. Alta diretividade.
2. Polarização circular (direita ou esquerda).
3. Opera com ampla ou pequena largura de faixa.



**Figura 1.5** Geometria da Antena e Padrão de Irradiação-Axial[1]

#### 4. Projeto estrutural simples.

O modo mais utilizado da antena helicoidal é o Modo Axial, que pode ser gerado com grande facilidade. Neste modo de funcionamento existe apenas um lóbulo principal e a sua intensidade máxima de radiação é ao longo do eixo da hélice, como mostrado na Figura 1.5. Lóbulos secundários podem surgir em ângulos oblíquos em relação ao eixo de radiação.

Segundo [4], para excitar este modo o diâmetro  $D$  e o espaçamento  $S$  devem ter dimensões comparáveis ao comprimento de onda. Para alcançar a polarização circular, a circunferência da hélice deve ser definida dentro dos limites  $3/4 < C/\lambda < 4/3$  (com  $C/\lambda = 1$  considerado ótimo), e o espaçamento  $S$  deve ser próximo de  $\lambda/4$ . Adicionalmente, o ângulo de "pitch", ou de passo deverá estar entre  $12^\circ \leq \alpha \leq 14^\circ$ .

Na maioria das vezes a antena, situada axialmente no eixo  $z$  em coordenadas cartesianas, é utilizada em conjunto com um plano terra, situado no plano  $x$ - $y$ , cujo diâmetro é de pelo menos  $\lambda/2$  [1], ou no caso de ser uma placa quadrada de lado igual a  $1.5\lambda$  [7], geralmente alimentada por um cabo coaxial.

A modelagem da antena operando em modo axial é bem mais complexa do que a modelagem em modo normal visto que as dimensões da antena são comparáveis ao comprimento de onda da frequência central de operação da antena. Nesse caso, a condição de corrente uniforme nos laços da antena não pode ser mais utilizada. Felizmente, expressões empíricas baseadas em medições, permitem uma boa caracterização do comportamento dessas antenas sob certas condições [1].

Conforme [1], a impedância da antena é bastante variável com a frequência, especialmente se

$$\frac{C}{\lambda} < \frac{2}{3}, \quad (1.6)$$

entretanto, se

$$\frac{3}{4} < \frac{C}{\lambda} < \frac{4}{3}, \quad (1.7)$$

e a antena estiver irradiando no modo axial, a impedância é praticamente constante em função da frequência, tendo como condição que  $a$  e  $N$  não sejam demasiado pequenos. Sob essas condições, e considerando  $12^\circ < \alpha < 14^\circ$ , é possível definir uma relação empírica que permite determinar a impedância da antena com uma tolerância de  $\pm 20\%$ .

$$R \simeq 140 \frac{C}{\lambda} [\Omega]. \quad (1.8)$$

É importante reparar que nessa situação a impedância de entrada é predominantemente resistiva, variando entre 100 e 200 ohms [1].

A largura do feixe principal para meia potência (HPBW - Half-Power Beamwidth) é determinada de forma empírica por:

$$\text{HPBW (graus)} = \frac{52\lambda^{3/2}}{C\sqrt{N \times S}}, \quad (1.9)$$

e largura de feixe entre dois nulos é dada em graus por (BWFN-Beam Width First Nulls):

$$\text{BWFN (graus)} = \frac{115\lambda^{3/2}}{C\sqrt{NS}}. \quad (1.10)$$

Estas expressões são válidas nas condições anteriores de  $\alpha$  e  $C/\lambda$ , e para  $N > 3$ .

Já a diretividade  $D_0$ , da antena helicoidal operando no modo axial é aproximada pela expressão adimensional

$$D_0 \simeq 15N \times \frac{C^2 S}{\lambda^3}, \quad (1.11)$$

e a razão axial é aproximada por:

$$|AR| \simeq \frac{2N+1}{2N}. \quad (1.12)$$

Quando a antena está funcionando em modo axial o valor da relação axial é aproximadamente 1, isto significa que a polarização da antena é circular.

O diagrama de radiação da Figura 1.5 pode ser obtido assumindo-se que a antena é feita de um conjunto de  $N$  laços idênticos. Assim, o diagrama da hélice pode ser obtido pelo produto do diagrama de um único laço pelo fator espacial  $F$ , dado pela expressão

$$F = \sin\left(\frac{90^\circ}{N}\right) \times \frac{\sin(N \times \psi/2)}{\sin(\psi/2)} \quad (1.13)$$

onde

$$\psi = 360^\circ \left[ S(1 - \cos(\theta)) + \frac{1}{(2N)} \right] \quad (1.14)$$

Uma aproximação simples para o campo de um único laço consiste em aproximar o campo gerado pelo laço por  $\cos(\theta)$  [6]. Nesse caso o diagrama de radiação pode ser aproximado por:

$$E = \left( \sin\left(\frac{90^\circ}{N}\right) \times \frac{\sin(N \times \psi/2)}{\sin(\psi/2)} \times \cos(\theta) \right) = F \times \cos(\theta) \quad (1.15)$$

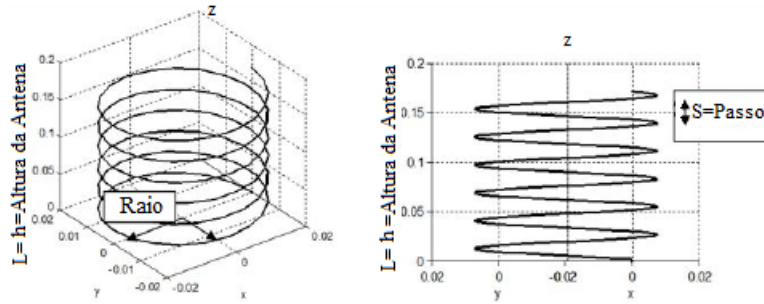


Figura 1.6 Antena Helicoidal, vista em perspectiva e vista frontal.

### 1.3 Projeto de antenas helicoidais

As equações apresentadas na seção 1.2 constituem uma maneira simples e direta de se projetar uma antena helicoidal, seja operando em modo normal, seja operando em modo axial. Para o modo axial, uma vez definida a frequência de operação e o ganho, os parâmetros geométricos que garantem o correto modo de funcionamento da antena podem ser encontrados facilmente. Entretanto, por se tratarem de equações empíricas, os valores esperados para o ganho e a resistência de entrada podem variar consideravelmente.

Considere a antena da Figura 1.6, além das equações apresentadas na seção anterior, pode-se encontrar na literatura diferentes modelos empíricos, formulas e diagramas para descrever o comportamento dessa antena [4],[6],[9]. Embora esses métodos sejam simples de serem utilizados e largamente difundidos na literatura, eles costumam apresentar resultados divergentes quando comparados entre si ou quando comparados com resultados computacionais ou experimentais.

Considerando as antenas helicoidais operando no modo axial, *Djordjevic* comenta em seu artigo [2]: “Embora sejam conhecidas por longo tempo, existe falta de dados, fórmulas e diagramas suficientemente confiáveis para o seu projeto.” *Djordjevic* comparou diferentes resultados empíricos, medições e simulações evidenciando as diferenças entre os métodos.

Como exemplo, considere a equação para ganho de antenas helicoidais, apresentada por Kraus em [4] e comentada por [2]:

$$g_{dBi} = 10 \log \left[ 15 \left( \frac{C}{\lambda} \right)^2 \frac{L}{\lambda} \right]. \quad (1.16)$$

Essa aproximação é válida para antenas uniformes com passo  $S$  constante e com um ângulo de passo entre  $12^\circ < \alpha < 14^\circ$ . Outras restrições impostas à equação (1.16) dizem respeito à circunferência da hélice ( $3/4 < C/\lambda < 4/3$ ) e ao número de espiras ( $N > 3$ ).

A comparação realizada em [2] entre o ganho fornecido pela equação (1.16) e os dados experimentais de [10] e [11] mostra que o fator numérico em (1.16) é significativamente diferente de “15”, ficando entre 4,2 e 7,7 dBi.

Outra expressão para o cálculo do ganho da antena é apresentado por Emerson em [12]:

$$g_{dBi} = 10.25 + 1.22 \frac{L}{\lambda_p} - 0.0726 \left( \frac{L}{\lambda_p} \right)^2 \quad (1.17)$$



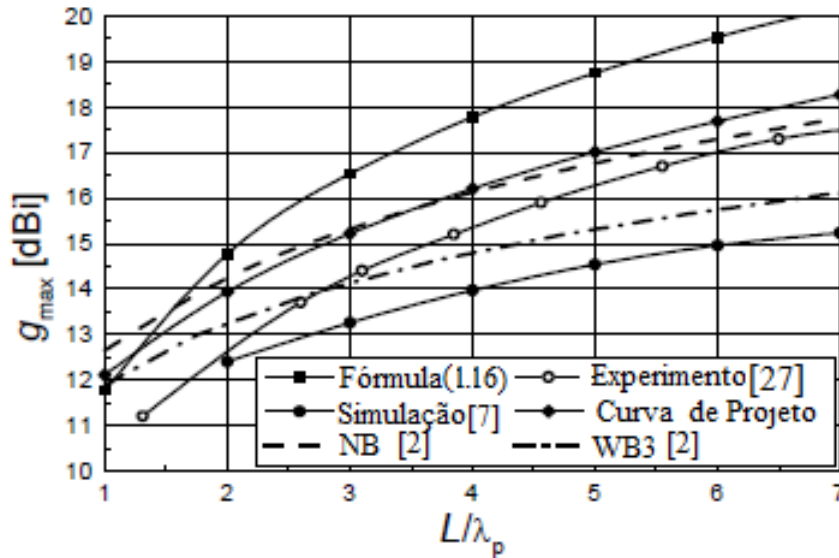


Figura 1.7 Comparação de Resultados Obtidos [2].

Na equação (1.17),  $\lambda_p$  é o comprimento de onda relativo à frequência onde o máximo do ganho ocorre. Essa expressão é válida dentro dos limites ( $2 < L/\lambda_p < 7$ ) e ( $S/\lambda_p \approx 0.24$ ). Ela considera um raio ótimo para a hélice normalizado em função de  $\lambda_p$  dado por  $a/\lambda_p = 0.2025 - 0.0079L/\lambda_p + 0.000515(L/\lambda_p)^2$ .

Em [2], *Djordjevic* constatou que, para os resultados analisados, a equação de Emerson subestimou o ganho da antena por volta de 2 dBs enquanto a equação de Kraus(1.16) superestimou o ganho em 4 a 5 dBs.

Um resumo das comparações feitas por *Djordjevic* é apresentado na Figura 1.7. Nesta Figura vê-se resultados da equação (1.16), juntamente com experimentos apresentados por [10] e simulações apresentadas pelo próprio autor para o caso de antenas banda estreita (NB) e antenas banda larga (WB3). Os valores mostram uma diferença considerável entre os modelos.

## 1.4 Projeto otimizado de antenas helicoidais

Devido à discrepância entre as abordagens existentes para o projeto clássico de antenas helicoidais, os autores em [2] realizaram um extenso trabalho de simulação e caracterização das antenas helicoidais a fim de obter um conjunto de diagramas ótimo para o projeto dessas antenas. Os resultados foram classificados de acordo com a aplicação (banda estreita ou banda larga).

O principal objetivo foi o de maximizar o ganho da antena para um dado comprimento. Porém, não havia muito controle sobre a impedância de entrada. A impedância encontrada variou entre  $90\Omega$  e  $270\Omega$ . Embora a faixa de valores esteja perto da faixa prevista por *Kraus* [6], Ela apresenta uma parte reativa considerável com valores variando entre  $15\Omega$  e  $85\Omega$ .

Em ambos os casos, as equações empíricas apresentadas em *Kraus* [6] e os ábacos otimizados apresentados por *Djordjevic*, produzem antenas cuja impedância de entrada está longe dos  $50\Omega$  da impedância do alimentador. Para contornar esse problema, técnicas de casamento de impedâncias são necessárias.

O uso de antenas uniformes (raio constante) como mostrado na Figura 1.6 torna impossível conciliar simultaneamente um ganho elevado e um bom casamento de impedância durante o projeto da antena. Soluções para esse problema podem ser obtidas modificando-se a geometria uniforme das antenas. Como exemplo, a substituição do plano condutor por um condutor em formato de tronco de cone apresentada em [7] aumenta consideravelmente o ganho da antena.

Outra possibilidade é a de variar os raios das hélices da antena. Em [13], seis graus de liberdade são utilizados para variar suavemente o raio da antena. Nesse caso, não é possível obter aproximações empíricas para o desempenho das antenas e a configuração ótima dos graus de liberdade é obtida com o auxílio de ferramentas estocásticas de otimização aplicadas à modelos computacionais das antenas.

Neste trabalho, a melhoria do desempenho das antenas helicoidais é obtida por meio de uma função polinomial de segunda ordem que é utilizada para controlar simultaneamente o raio das hélices e o ângulo de passo. Diferentemente de [13], a configuração ótima da antena é obtida utilizando-se um algoritmo de otimização determinístico. O algoritmo de otimização que será utilizado nesse trabalho é o algoritmo elipsoidal apresentado em [14]. Assim como em [13], a parametrização escolhida não possibilita o uso direto das aproximações empíricas para a avaliação do desempenho das antenas. Nesse caso, durante o processo de otimização, a avaliação do desempenho das antenas é feita utilizando um modelo computacional baseado no método dos momentos.

A escolha da parametrização e do algoritmo de otimização foram feitas visando aproveitar as informações oriundas dos diagramas e ábacos desenvolvidos para antenas uniformes. Assim, antenas não uniformes otimizadas podem ser obtidas facilmente a partir de antenas uniformes tradicionais.

## 1.5 Síntese desta dissertação

O objetivo dessa dissertação é propor uma metodologia simples e eficiente para o projeto de antenas helicoidais operando no modo axial. Nesse trabalho, as antenas helicoidais uniformes são usadas como ponto de partida para gerar antenas otimizadas não-uniformes. As melhorias no ganho e impedância de entrada são obtidas variando-se a forma da hélice usando uma função polinomial de segunda ordem. Os parâmetros polinomiais ideais são encontrados com a utilização do algoritmo de otimização elipsoidal. Os resultados são apresentados para a aplicação em WiFi usando-se uma frequência central de 2,45 GHz. Alternativamente, os principais resultados desse trabalho são apresentados de maneira compacta no artigo [15].

A dissertação está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 1 é feita uma breve introdução da antena helicoidal proposta por John D. Kraus. Este capítulo fornece uma visão geral sobre as antenas helicoidais uniformes, sua geometria, aplicações, e modos de operação: modo Normal e Axial.

O Capítulo 2 apresenta o modelo utilizado para avaliar o desempenho das antenas. Nesse

trabalho, as antenas são modeladas utilizando-se o Método dos Momentos (MoM) aplicado à Equação Integral de Campo Elétrico (EICE). A Equação Integral é deduzida inicialmente para uma superfície condutora arbitrária na qual o MoM é aplicado. Posteriormente, o problema é reduzido assumindo-se uma geometria filamental retilínea a fim de demonstrar como as funções de base e ponderação do MoM podem ser utilizadas. Por fim, o problema da antena filamental retilínea é modificado para considerar os filamentos curvos que compõe a antena helicoidal.

No Capítulo 3, é apresentada a ferramenta de otimização utilizada na obtenção das antenas helicoidais não uniformes, ou seja, o método elipsoidal. O capítulo apresenta a justificativa para a escolha do método determinístico juntamente com a formulação matemática necessária para sua implementação. Adicionalmente, o capítulo demonstra como modelar o problema de otimização relacionado à melhoria do desempenho das antenas helicoidais não uniformes. São apresentados a parametrização escolhida para gerar as antenas helicoidais não uniformes e a função objetivo proposta para o problema.

No Capítulo 4, são apresentados os resultados obtidos para um conjunto de sete antenas helicoidais operando na faixa de 2.45 GHz (Faixa de aplicações WiFi). Com os resultados, é possível mostrar que o Método Elipsoidal, aplicado ao problema de otimização proposto, pode prover boas soluções com um pequeno número de iterações.

Conclusões e propostas de continuidade são apresentadas no Capítulo 5.



## Modelagem de antenas helicoidais

Esse capítulo apresenta os passos necessários para a simulação de antenas helicoidais utilizando o Método dos Momentos [1] [5]. O primeiro passo no desenvolvimento da solução do problema consiste em derivar uma equação integral em função da corrente da antena. Em seguida, utiliza-se o método dos momentos para converter a equação em um sistema de equações lineares que podem ser resolvidas por diversas técnicas de álgebra linear. Uma vez conhecida a corrente em uma antena helicoidal, os parâmetros da antena tais como diretividade, ganho, resistência de entrada e resistência de irradiação podem ser obtidos facilmente.

Existem diferentes formas de apresentação das equações integrais no eletromagnetismo. Considerando-se campos eletromagnéticos harmônicos, duas das equações integrais mais utilizadas são a Equação Integral do Campo Elétrico (EICE) e a Equação Integral de Campo Magnético (EICM).

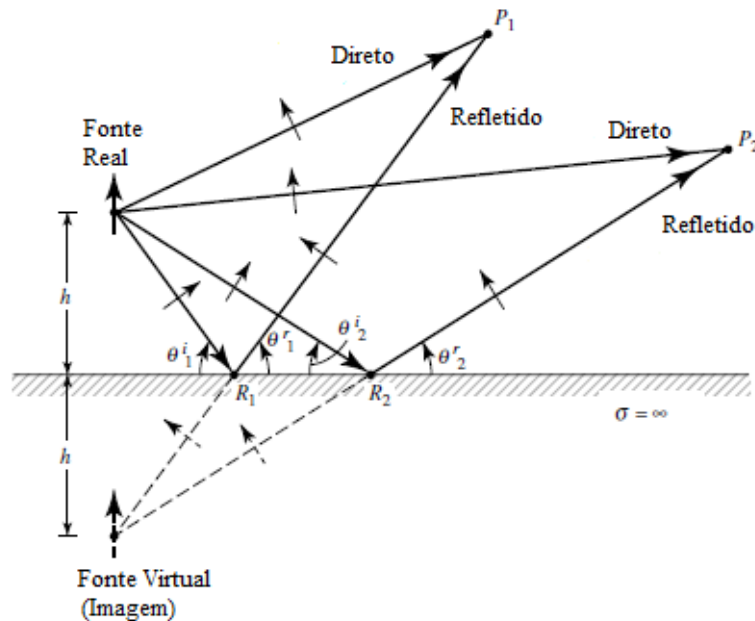
A EICE é obtida pela imposição da condição de continuidade do campo elétrico tangencial total na superfície dos condutores, enquanto a EICM impõe a condição de continuidade das componentes tangenciais do campo magnético.

Nesse trabalho, as correntes nas antenas helicoidais serão obtidas por meio da EICE. Primeiramente, será deduzida a EICE para um filamento reto (equação de Pocklington) e sua discretização utilizando o Método dos Momentos [1]. Posteriormente, a EICE será modificada para considerar segmentos curvos.

### 2.1 Simplificações no modelo

Para reduzir a complexidade do problema, algumas simplificações são introduzidas no modelo apresentado na Figura 1.2. A primeira simplificação diz respeito à condutividade do filamento e do plano condutor. Em ambos os casos, os materiais utilizados possuem condutividade elevada e serão aproximados por condutores perfeitos (PEC). A segunda aproximação diz respeito ao tamanho do plano condutor. Como o plano condutor utilizado em antenas helicoidais tem dimensões comparáveis com o comprimento de onda da frequência de operação da antena, ele pode ser considerado longo e será aproximado por um plano condutor infinito. Nesse caso, a complexidade do problema pode ser reduzida utilizando-se o método das imagens [1].

A Figura 2.1, ilustra a aplicação do método das imagens para uma fonte de campo localizada a uma altura  $h$  de um plano condutor perfeito infinito. Na figura, é possível ver que o campo em um ponto  $p_1$  distante da fonte pode ser descrito como a combinação de um campo direto (gerado pela fonte) e um campo refletido (gerado pela reflexão do campo da fonte no plano de condutor).



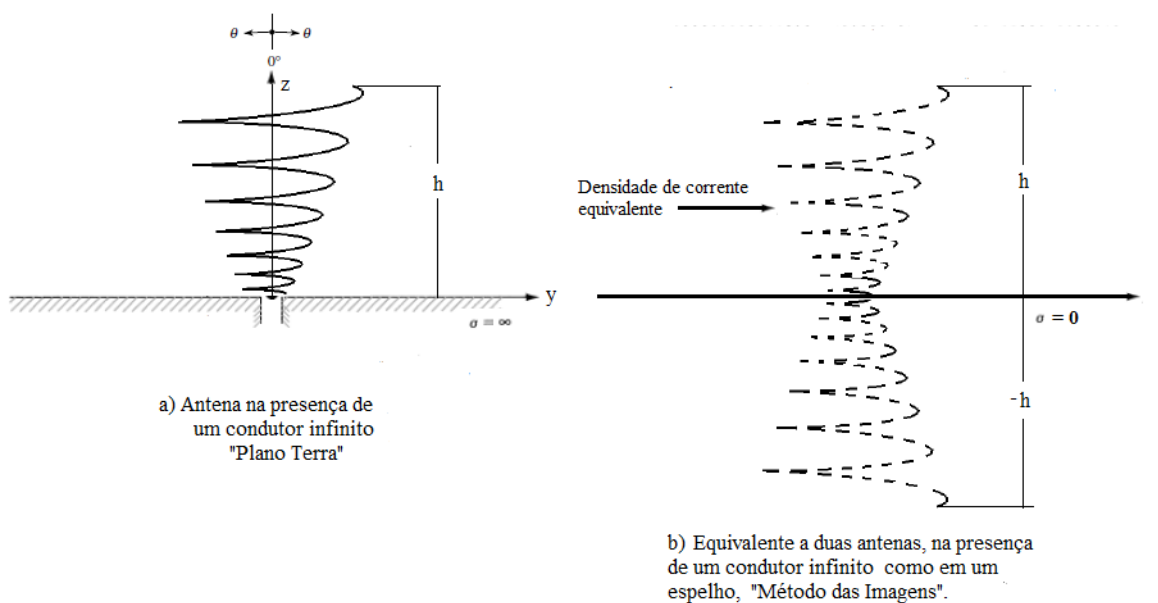
**Figura 2.1** Fonte Real na presença de um plano condutor perfeito infinito

O plano condutor pode ser removido do problema se considerarmos a existência de uma fonte fictícia de mesma amplitude da fonte real localizada a uma altura  $-h$ , conforme mostrado na figura. Nesse caso, o novo problema composto apenas pela fonte real e a fonte virtual é equivalente ao problema original para qualquer ponto acima do plano condutor. Abaixo do plano condutor, o modelo equivalente não é válido. Entretanto, como abaixo do plano os campos são nulos, não há necessidade de um modelo equivalente.

Substituindo-se o plano infinito da Figura 2.1 por um plano finito de comprimento  $R$  tal que  $R_1 < R < R_2$ , não é mais possível representar de maneira exata o problema original utilizando-se a fonte equivalente. É possível observar que o resultado obtido pelo método das imagens para o ponto  $p_1$  será uma melhor aproximação do problema real do que o resultado obtido para o ponto  $p_2$  uma vez que o ponto  $R_2$  não faz parte do plano finito. Dessa forma, à medida que o ponto  $p_2$  se afasta horizontalmente da fonte, pior a aproximação obtida pelo método das imagens. Entretanto, observando o padrão de irradiação da antena helicoidal operando em modo axial (Figura 1.5) é possível ver que os campos nessas posições são pequenos (antena diretiva) e o erro obtido pelo método das imagens não irá influenciar significativamente o resultado.

Para efeito de análise, o modelo equivalente obtido com o método das imagens reduz consideravelmente o custo computacional do problema e apresenta bons resultados, sobretudo para o lóbulo principal de radiação. Os erros obtidos devido ao fato do plano ser finito afetam de maneira mais significativa apenas os lóbulos laterais onde o campo é praticamente desprezível.

Dessa forma, o problema de se encontrar os campos gerados pela antena helicoidal, com altura ( $L = h$ ) situada sobre um plano condutor finito e alimentada por uma linha coaxial de  $50\Omega$ , Figura 2.2(a), pode ser substituído pelo problema de se encontrar a densidade de corrente da Figura 2.2(b).



**Figura 2.2** Modelo Simplificado da antena helicoidal

## 2.2 Equação Integral de Campo Elétrico

O primeiro passo na obtenção da corrente em uma antena filamental é a determinação da equação integral apropriada. Nesse trabalho, as correntes são obtidas por meio da EICE, conforme apresentado em [3]. A EICE pode ser derivada a partir das equações de Maxwell para problemas harmônicos

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H}, \quad (2.1)$$

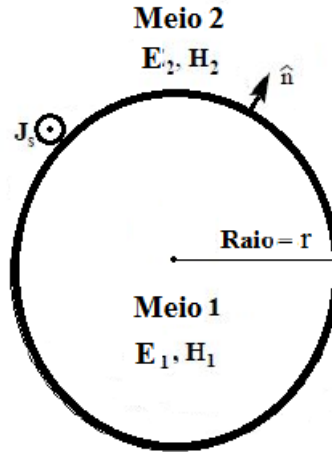
$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_0\vec{E} + \vec{J}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (2.4)$$

e a equação de continuidade,

$$\nabla \cdot \vec{J} = -j\omega\rho_e, \quad (2.5)$$



**Figura 2.3** Fio Condutor de Raio =  $r$ , Meio 1 PEC e Meio 2 Espaço Livre

$\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são os campos elétrico e magnético,  $\vec{J}$  é a densidade superficial de corrente elétrica e  $\rho_e$  é a densidade volumétrica de carga. Assume-se que o meio é linear, homogêneo e isotrópico, assim, a permissividade elétrica  $\epsilon$  e a permeabilidade magnética  $\mu$  podem ser consideradas constantes.

Considerando o condutor ilustrado na Figura 2.3, as condições de contorno do campo elétrico e magnético são:

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s, \quad (2.6)$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0, \quad (2.7)$$

Assumindo que o meio 1 é um condutor elétrico perfeito, os campos no condutor são nulos e a condição de interface para o campo elétrico é:

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2) = 0. \quad (2.8)$$

O campo Elétrico  $E_2$  pode ser escrito como a combinação de um campo incidente  $\vec{E}_i$  e um campo espalhado  $\vec{E}_s$ . Matematicamente:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_i + \vec{E}_s \quad (2.9)$$

O campo incidente é o responsável pela criação da densidade linear de corrente  $\vec{J}_s$  na superfície do fio condutor, que por sua vez cria o campo espalhado  $\vec{E}_s$ . Aplicando-se o princípio da equivalência e o método das imagens, os condutores da Figura 2.2(a) podem ser removidos do problema resultando no modelo da figura 2.2(b).

Como o fluxo magnético  $\vec{B}$  é sempre solenoidal, ele pode ser representado como rotacional de outro vetor. O mesmo ocorre para o campo magnético uma vez que o domínio do problema



é linear, homogêneo e isotrópico. Assim pode-se definir o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  de tal forma que:

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}. \quad (2.10)$$

Substituindo-se a equação (2.10) na equação (2.1) e observando que o rotacional de  $\vec{E} + j\omega\mu\vec{H}$  representa um campo conservativo, pode-se definir o potencial escalar elétrico  $\phi_e$  em função de  $\vec{E}$  e  $\vec{A}$  de modo que:

$$-\nabla\phi_e = \vec{E} + j\omega\mu_0\vec{A}. \quad (2.11)$$

O potencial escalar elétrico e o potencial vetor magnético permitem a solução dos campos elétricos e magnéticos através de uma única equação, chamada de equação de onda, ao invés de duas equações acopladas como no caso das equações (2.1) e (2.2). A equação de onda pode ser obtida substituindo-se a equação (2.10) e a equação (2.11) na equação (2.2), e usando-se o calibre de Lorentz:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega\epsilon_0\phi_e. \quad (2.12)$$

Esse procedimento é descrito detalhadamente em [8] e resulta na seguinte equação de onda:

$$\nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = -\vec{J} \quad (2.13)$$

onde  $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  é o número de onda.

A solução dessa equação em termos de uma densidade linear de corrente superficial  $J_s$  no espaço livre resulta em:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \int_s \vec{J}_s(\vec{r}') G(R) ds', \quad (2.14)$$

onde  $G(R)$  é a função de Green para o espaço livre,

$$G(R) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}, \quad (2.15)$$

$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ ,  $r$  representa o ponto de observação onde a equação (2.14) é avaliada e  $r'$  representa a coordenada da fonte de campo.

Uma vez obtido o potencial magnético em função da densidade de corrente, o campo elétrico espalhado pode ser escrito como uma combinação da equação (2.11) e da equação (2.12), resultando em [1],[5]:

$$\begin{aligned} \vec{E}_s &= -\nabla\phi_e - j\omega\mu_0\vec{A} \\ &= -j\frac{1}{\omega\epsilon_0}\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - j\omega\mu_0\vec{A} \\ &= -j\frac{1}{\omega\epsilon_0} \cdot [k^2\vec{A} + \nabla(\nabla\cdot\vec{A})] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Finalmente para determinar a EICE geral, combina-se a equação (2.8) com a equação (2.16), para relacionar o campo incidente e o espalhado resultando em:

$$\hat{n} \times \vec{E}_i = \hat{n} \times \frac{j}{\omega\epsilon_0} (k^2\vec{A} + \nabla(\nabla\cdot\vec{A})) \quad (2.17)$$

Se a equação (2.14) é substituída na equação (2.17), então a equação (2.17) pode ser rescrita como:

$$\hat{n} \times \vec{E}_i = \hat{n} \times \frac{j}{\omega \epsilon_0} \left[ \int \int_S k^2 \vec{J}_s(\vec{r}') G(R) ds' + \nabla \left( \nabla \cdot \int \int_S \vec{J}_s(\vec{r}') G(R) ds' \right) \right]. \quad (2.18)$$

O segundo termo do lado direito da equação (2.18) pode ser simplificado movendo-se o segundo operador  $\nabla$  para dentro da integral de superfície e utilizando-se integração por partes no termo resultante na superfície  $S$  da Figura 2.3. Adicionalmente, o operador  $\nabla$  restante também é inserido na integral. Após a simplificação, tem-se a seguinte equação:

$$\hat{n} \times \vec{E}_i = \hat{n} \times \frac{j}{\omega \epsilon_0} \int \int_S \left[ k^2 \vec{J}_s(\vec{r}') G(R) + (\nabla' \cdot \vec{J}_s(\vec{r}')) \nabla G(R) \right] ds'. \quad (2.19)$$

Nessa equação, operador  $\nabla'$  significa que as derivadas são calculadas em função das coordenadas da fonte  $r'$ . A equação (2.19) é a Equação Integral do Campo Elétrico Geral (EICE), válida para qualquer superfície condutora arbitrária.

### 2.3 Estudo do Método dos Momentos

Equações integrais e o Método dos Momentos estão relacionados entre si e são vastamente utilizados na solução de problemas envolvendo antenas filamentosas. Para antenas filamentosas, o Método dos Momentos produz bons resultados pois é capaz de representar com exatidão a distribuição de corrente nos filamentos utilizando poucos graus de liberdade [1].

Este Método permite converter a EICE em um sistema linear de equações cujas incógnitas representam a densidade de corrente na antena. A forma básica da equação para ser resolvida pelo Método dos Momentos - MoM é:

$$L(u) = f, \quad (2.20)$$

onde  $L$  é um operador linear conhecido,  $f$  é uma função de excitação conhecida e  $u$  é uma função resposta desconhecida. O objetivo aqui é determinar  $u$ , ou seja, a corrente na antena, uma vez que  $L$  e  $f$  (campo incidente) são conhecidos. Para construir o sistema matricial, assume-se que a variável desconhecida  $u$  possa ser descrita como uma combinação linear de  $N$  funções independentes  $u_n$  conhecidas ponderadas por coeficientes desconhecidos,  $a_n$ :

$$u \simeq a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_N u_N = \sum_1^N a_n u_n, \quad (2.21)$$

as funções conhecidas são chamadas funções de base ou funções de expansão. Substituindo a equação (2.21) na equação (2.20) e usando a linearidade do operador  $L$ , a equação integral pode ser reescrita da seguinte forma:

$$L(u) = \sum_{n=1}^N a_n L(u_n) = f. \quad (2.22)$$

As funções de base  $u_n$  são escolhidas de maneira que cada  $L(u_n)$  possa ser calculada de forma analítica ou numérica. A única tarefa então, é encontrar as constantes  $a_n$  que satisfazem a equação (2.22).

A expansão da equação (2.22) proporciona um sistema com uma equação e  $N$  incógnitas que, por si só, não é suficiente para determinar as  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) constantes desconhecidas. Para se encontrar as constantes, é necessário dispor de  $N$  equações linearmente independentes. Isto pode ser conseguido por meio do cálculo da equação (2.22) em  $N$  diferentes pontos localizados sobre a superfície da antena. Essa técnica recebe o nome de ponto de correspondência ou ponto de casamento (matching points) [16]. Fazendo-se isso, a equação (2.22) pode ser reescrita para cada ponto de correspondência

$$\sum_{n=1}^N a_n L[u_n(m)] = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (2.23)$$

Em problemas eletromagnéticos, o sistema de equações apresentado em (2.23) é geralmente escrito em uma forma similar à lei de Ohm matricial.

$$[Z_{mn}][I_n] = [V_m], \quad (2.24)$$

onde

$$Z_{mn} = L[u_n(m)], \quad (2.25)$$

$$I_n = a_n, \quad (2.26)$$

$$V_m = f_m. \quad (2.27)$$

Os coeficientes  $a_n$  desconhecidos da equação (2.24) podem ser encontrados invertendo-se a matriz  $Z_{mn}$  ou por algum método de solução de sistemas matriciais.

$$[I_n] = [Z_{mn}]^{-1}[V_m] \quad (2.28)$$

### 2.3.1 Funções Base

A escolha das funções de aproximação influenciam significativamente a qualidade da solução do método dos momentos. O conjunto dessas funções deve ter capacidade de representar a função desconhecida com precisão e assemelham-se a ela. A escolha apropriada do conjunto de funções de aproximação pode minimizar o tempo de máquina necessário para encontrar a solução [17]. Teoricamente, existem muitos conjuntos de funções de bases. Entretanto, apenas um número limitado é utilizado na prática. As funções de peso podem ser divididas em duas classes gerais. A primeira classe consiste de funções de subdomínio diferentes de zero, as quais são válidas em apenas uma parte do domínio da função  $u(r')$ . A segunda classe contém funções que existem em todo o domínio da função desconhecida.

#### 2.3.1.1 Funções base de domínio inteiro

Um exemplo de um conjunto de funções válidas em todo domínio e a expansão da função por meio de uma série finita de Fourier. Nesse caso, funções senoidais são utilizadas para

representar a densidade de corrente. As funções de base de domínio inteiro, como o próprio nome indica, são definidas e são diferentes de zero ao longo de todo o comprimento da estrutura a ser considerada. Assim, nenhuma segmentação é envolvida.

Este conjunto de base, é particularmente útil para modelar a distribuição de corrente em dipolos, que são conhecido por terem uma distribuição de corrente essencialmente senoidal.

A principal vantagem de funções de base de domínio inteiro, reside em problemas em que a função desconhecida é assumida a priori, ou seja, segue um padrão conhecido. Tais funções de domínio inteiro podem obter uma representação aceitável da função desconhecida usando muito menos termos na expansão do que seria necessário para funções bases de subdomínio.

Funções de base de domínio inteiro geralmente têm dificuldade em modelar funções desconhecidas, arbitrárias ou com comportamento complexo. Dentre as funções usualmente utilizadas como funções de domínio inteiro destacam-se, além das funções senoidais, as funções polinomiais, funções de Tschebyscheff, series de Maclaurin e Funções de Legendre [1].

### 2.3.1.2 Funções Base de subdomínio

Dentre as classes de funções de base, as funções definidas em subdomínios são as mais comuns [1]. Ao contrário das funções de base de domínio inteiro, elas podem ser usadas sem o conhecimento prévio da natureza da função que deverão representar. Essa característica é particularmente interessante pois pretende-se, nesse trabalho, simular o comportamento de antenas helicoidais não uniformes cuja natureza da distribuição da corrente no condutor não é conhecida à priori.

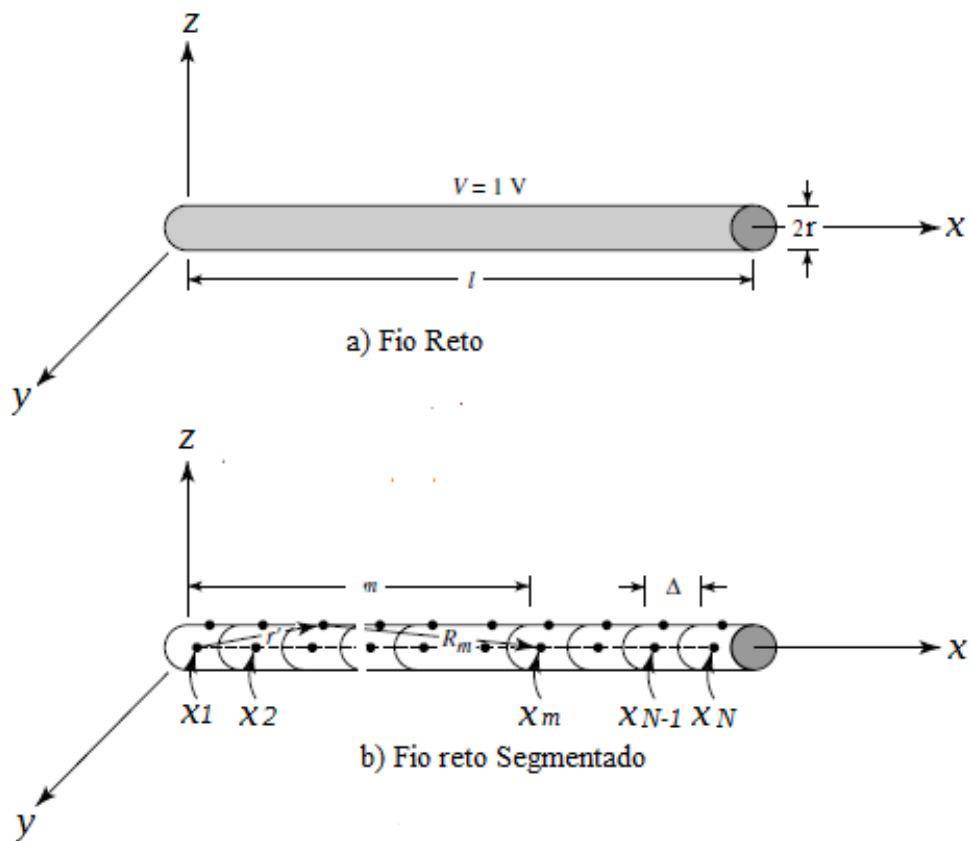
As funções de subdomínio são obtidas subdividindo o domínio em  $N$  segmentos não sobrepostos conforme ilustrado na figura 2.4. Nessa figura um segmento retilíneo é subdividido em  $N$  pontos sobre os segmentos e no interior de cada um é definido uma função ou um subconjunto de funções. Alguns exemplos de funções de base de subdomínio são apresentadas a seguir.

### 2.3.1.3 Função constante ou função pulso

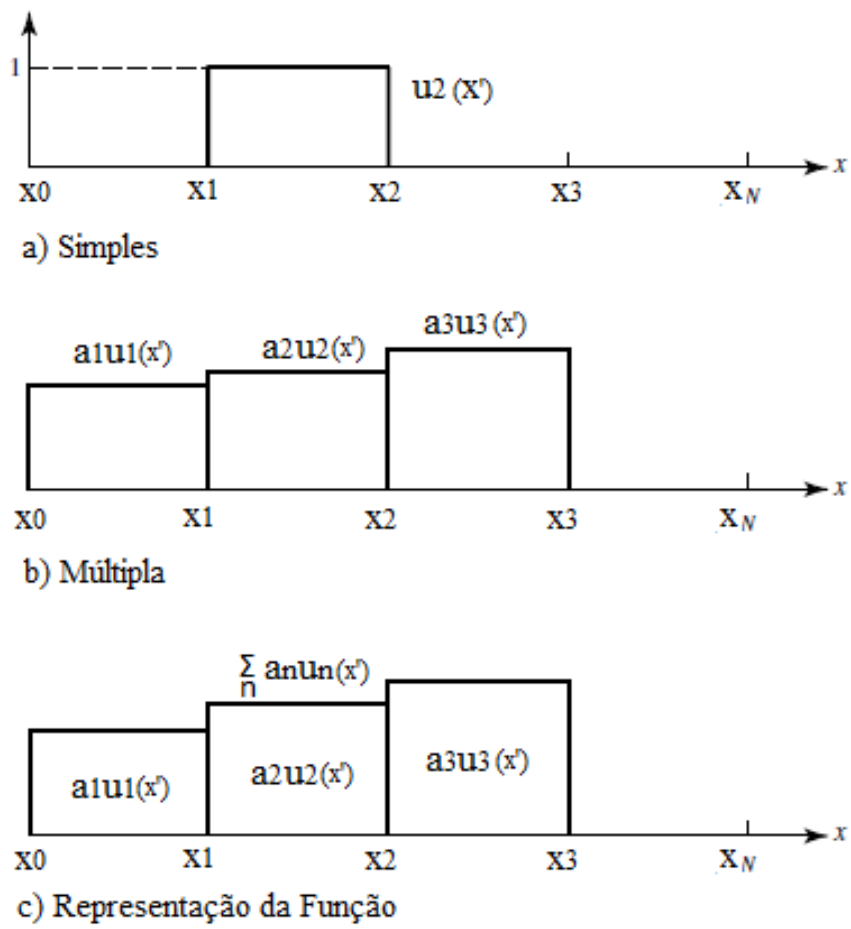
A função pulso é talvez a função mais comum do conjunto das funções de subdomínio [1]. A construção dessas funções envolve a subdivisão da estrutura em  $N$  segmentos que não precisam ser necessariamente igualmente espaçados. Dentro de cada segmento é definida uma função constante

$$u(x') = P_n(x') = \begin{cases} 1, & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.29)$$

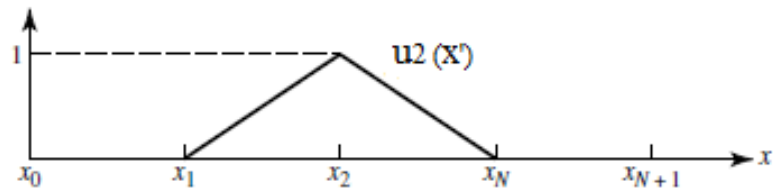
conforme mostrado na Figura 2.5. Funções constantes produzem uma aproximação descontínua para a função a ser representada de acordo com a Figura 2.5(c).



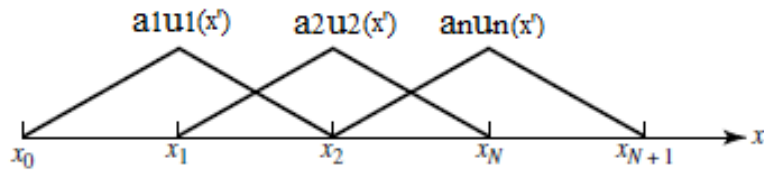
**Figura 2.4** Segmentação do dipolo e sua corrente equivalen, [1].



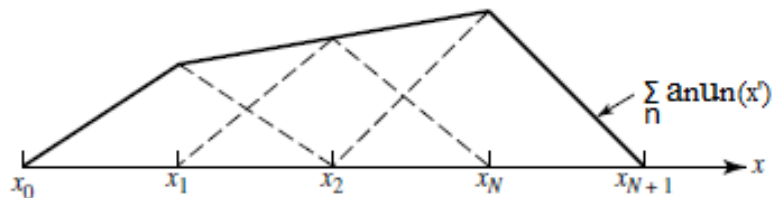
**Figura 2.5** Funções constantes definidas em cada subdomínio, [1]



a) Simple



b) Múltipla



c) Função Representada

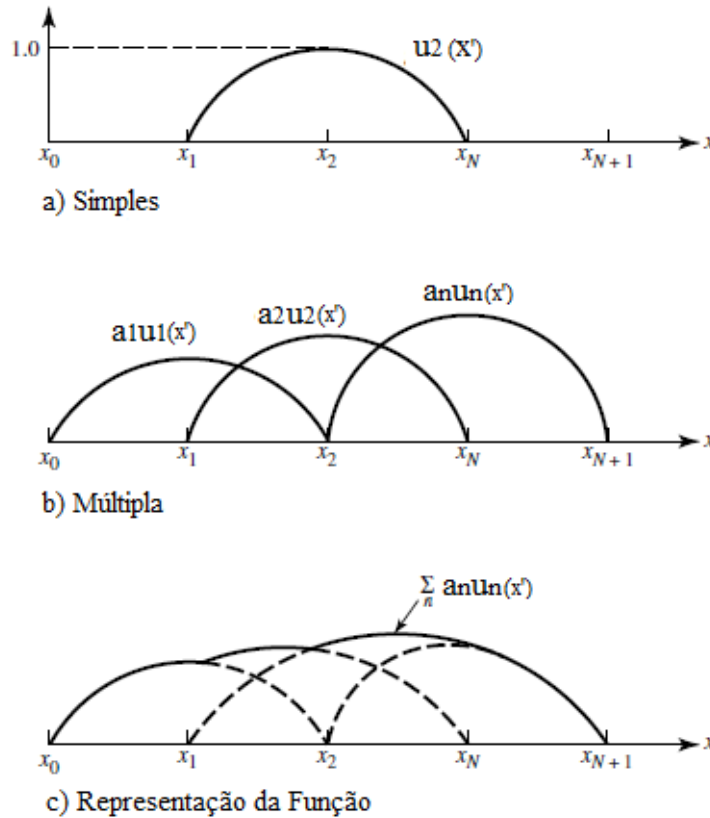
Figura 2.6 Funções Lineares definidas em cada subdomínio, [1]

#### 2.3.1.4 Funções Lineares

Outro conjunto de funções de base[1], bastante comum é o conjunto de funções lineares por parte, também chamadas de funções triangulares. As funções triangulares são definidas por

$$u_n(x') = T_n(x') = \begin{cases} \frac{x' - x'_{n-1}}{x'_n - x'_{n-1}}, & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ \frac{x_{n+1} - x'}{x'_{n+1} - x'_n}, & x'_n \leq x' \leq x'_{n+1} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.30)$$

Conforme mostrado na figura 2.6(b), As funções triangulares cobrem dois segmentos e se sobrepõem às funções vizinhas. Elas proporcionam uma aproximação mais suave para a função  $u$  do que a aproximação feita por funções pulso. Em contrapartida, o aumento na complexidade das funções de base aumenta o custo computacional total do MoM.



**Figura 2.7** Funções Senoidais definidas em cada subdomínio, [1]

### 2.3.1.5 Funções senoidais

Para a maioria dos casos, utilizar funções mais complexas do que as funções triangulares não é garantia de melhoria na solução. Entretanto, em casos específicos, a utilização de funções senoidais ou cossenoidais podem possibilitar que as integrais da matriz de impedância  $Z_{mn}$  possam ser realizadas analiticamente. Assim, o uso de funções mais sofisticadas podem acelerar a montagem da matriz  $Z_{mn}$  [1]. Um exemplo de função de base de subdomínio pode ser definido como

$$u_n(x') = C_n(x') = \begin{cases} \frac{\sin k(x' - x'_{n-1})}{\sin k(x'_n - x'_{n-1})}, & x'_{n-1} \leq x' < x'_n, \\ \frac{\sin k(x'_{n+1} - x')}{\sin k(x'_{n+1} - x'_n)}, & x'_n \leq x' < x'_{n+1}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.31)$$



### 2.3.2 Funções de Pesos ou de Testes

Para melhorar a solução obtida por meio dos pontos de correspondência da equação (2.24), define-se um produto interno  $\langle w, u \rangle$  o qual satisfaz as seguinte propriedades:

$$\langle w, u \rangle = \langle u, w \rangle \quad (2.32)$$

$$\langle bf + cu, w \rangle = b \langle f, w \rangle + c \langle u, w \rangle \quad (2.33)$$

$$\langle u^*, u \rangle > 0 \text{ se } u \neq 0 \quad (2.34)$$

$$\langle u^*, u \rangle = 0 \text{ se } u = 0 \quad (2.35)$$

onde  $b$  e  $c$  são escalares e  $u^*$  representa o conjugado complexo de  $u$ , dessa forma uma das possíveis soluções para o produto interno é:

$$\langle w, u \rangle = \int \int_S w^* \cdot u \, ds, \quad (2.36)$$

onde os  $w$ 's são as funções peso ou ponderação e  $S$  (Figura 2.3) é a superfície analisada. Repare que o produto interno continua válido mesmo se  $w$  e  $u$  forem vetores. A substituição dos pontos de correspondência pela integração no domínio dá origem ao método dos momentos proposto por Harrington [18],[16].

O método dos pontos de correspondência é um método cujas soluções numéricas satisfazem as condições de contorno eletromagnéticas, como o desvanecimento dos campos elétricos tangenciais na superfície de um condutor, apenas em pontos discretos. Em regiões entre esses pontos, as condições de contorno podem não ser satisfeitas causando um erro residual.

O MoM proposto por Harrington visa minimizar esse erro de maneira global, avaliando a EICE em todos os pontos do domínio. Para isso, o MoM utiliza o método de resíduos ponderados que consiste em utilizar o produto interno definido em (2.36) para integrar a função de erro  $\Delta E_{tan} = E_{s_{tan}} + E_{i_{tan}}$  ponderada por uma função de peso  $w$  em todo o domínio. Essa técnica não conduz a um desvanecimento no erro residual em cada ponto de correspondência na superfície de um condutor. Ao invés disso, ela obriga que as condições de contorno sejam satisfeitas, na média, sobre toda a superfície.

A função de peso (ou ponderação) é definida da mesma forma da função de base. Ela é construída como a combinação linear de um conjunto de  $N$  funções de peso  $w_m = w_1, w_2, \dots, w_N$ . Aplicando o método dos resíduos ponderados no operador  $L$  da equação (2.22), um novo sistema de equações pode ser criado para solucionar o problema de se encontrar os coeficientes desconhecidos.

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle w_m, L(u_n) \rangle = \langle w_m, f \rangle, m = 1, 2, \dots, N, \quad (2.37)$$

Assim como no caso anterior, a equação matricial (2.37), pode ser escrita de forma compatível com a Lei de Ohm, equação (2.24).

onde o novo sistema matricial é dado por

$$[Z_{mm}] = [\langle w_m, L(u_n) \rangle], \quad (2.38)$$

$$[I_n] = [a_n], \quad (2.39)$$

$$[V_m] = [\langle w_m, f \rangle]. \quad (2.40)$$

## 2.4 Formulação para fios retos

Embora a equação (2.24) aplicada à Equação Geral do Campo Elétrico (2.19) possa ser utilizada para qualquer superfície condutora arbitrária, sua implementação computacional pode não ser uma tarefa simples devido à singularidade da função de Green. Dessa forma, restrições proporcionadas pela geometria do problema podem ser utilizadas para simplificar a EICE geral e consequentemente sua solução por meio do MoM.

Nesta seção, é apresentado o caso particular de problemas envolvendo condutores filamentosos retos. Nesse caso, a EICE geral pode ser reduzida à equação de Pocklington onde a corrente pode ser aproximada por uma corrente filamentar conforme apresentado em [3].

Considerando-se um fio reto de comprimento  $L$  e raio  $r$ , o calibre de Lorentz da equação (2.12) se reduz a:

$$\frac{\partial A_l}{\partial l} = -j\omega\epsilon_0\phi_e, \quad (2.41)$$

e o campo elétrico espalhado passa a ser

$$E_l = -j\omega\mu_0 A_l - \frac{\partial \phi_e}{\partial l}, \quad (2.42)$$

onde o subscrito  $l$  indica a componente do vetor na direção do filamento. Rearranjando a equação (2.42), o campo espalhado pode ser reescrito como:

$$E_l = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \left[ k^2 A_l + \frac{\partial^2 A_l}{\partial l^2} \right]. \quad (2.43)$$

Considerando que o fio é fino, a corrente pode ser considerada filamentar e fluindo apenas na direção  $\hat{l}$ . Com isso, o potencial vetor magnético pode ser reduzido a:

$$A_l = \int_{-l/2}^{l/2} I(l') G(R) dl', \quad R = \sqrt{(l-l')^2 + r^2} \quad (2.44)$$

Substituindo (2.44) em (2.43) é possível obter a equação integral de Pocklington a seguir:

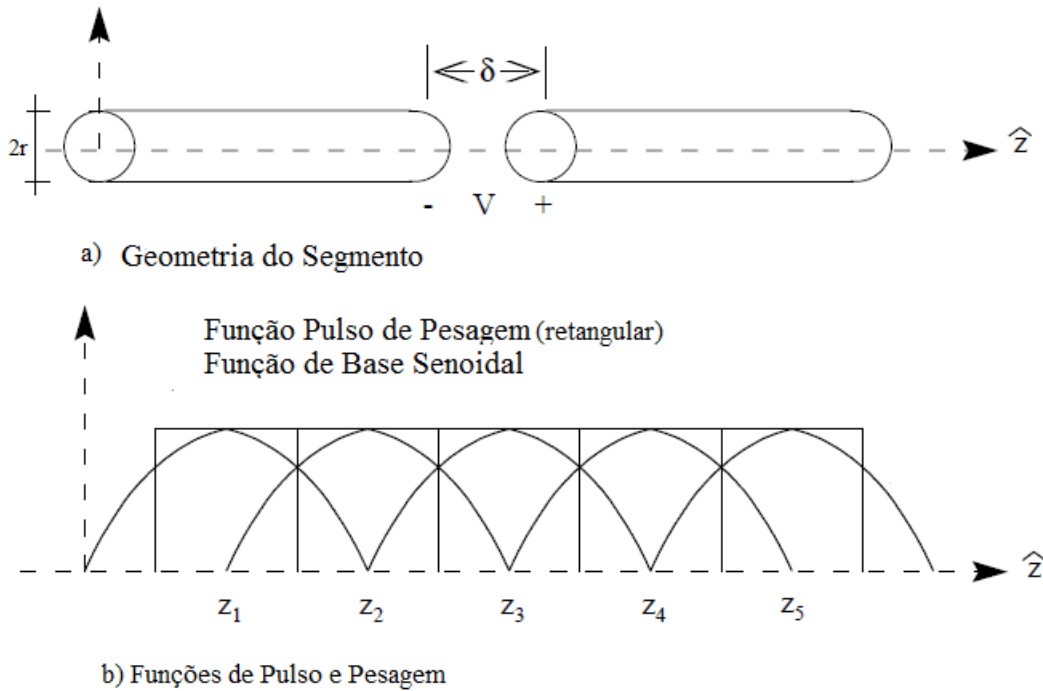
$$E_i^l = \frac{1}{\omega\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} I(l') \left[ \frac{\partial^2}{\partial l^2} G(R) + k^2 G(R) \right] dl', \quad (2.45)$$

onde  $E_i^l$  é a componente do campo elétrico incidente que é paralela à direção  $\hat{l}$ . Essa equação pode ser entendida como um caso particular da EICE geral para fios retilíneos.

Para resolver (2.45) utilizando o MoM, são necessárias algumas mudanças de variáveis, sendo elas [3]:

$$\frac{\partial}{\partial l} G(R) = -\frac{\partial}{\partial l'} G(R), \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2} G(R) = \frac{\partial^2}{\partial l'^2} G(R). \quad (2.47)$$



**Figura 2.8** Geometria, Função Base, e de Peso para um segmento reto,  $\delta$  é o gap infinitesimal [3].

Assumindo que o fio está orientado na direção  $\hat{z}$  e aplicando integração por partes com as mudanças acima, a equação a ser resolvida pelo MoM é:

$$E_i^z = \frac{1}{\omega \epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z'^2} I(z') + k^2 I(z') \right] G(R) dz', \quad (2.48)$$

onde  $R = \sqrt{(z - z')^2 + r^2}$ .

Para exemplificar a aplicação do MoM, considere o dipolo de meia onda da Figura 2.8. Para discretizar o problema, foram escolhidas funções de subdomínio senoidais  $C_n$  para representar a distribuição de corrente e funções do tipo pulso para representar as funções de ponderação. Para o exemplo da figura, a aplicação do MoM resultará em cinco integrações de (2.48) (uma para cada função de ponderação). Como resultado, cada segmento centrado em um nó  $z_m$ , gerará uma equação do tipo:

$$\int_{z_m - \Delta/2}^{z_m + \Delta/2} \frac{V_{ms}}{\Delta} \delta(z - z_{ms}) dz = \sum_n I_n \frac{j}{\omega \epsilon_0} \frac{k}{\sin k \Delta} \int_{z_m - \Delta/2}^{z_m + \Delta/2} [G(R_{n+1}) + G(R_{n-1}) - 2G(R_n) \cos k \Delta] dz \quad (2.49)$$

onde,  $R_n = \sqrt{(z - z_n)^2 + r^2}$ ,  $\Delta$  é o tamanho do segmento e  $V_{ms}$  é a tensão aplicada no ponto central do filamento (campo incidente). Resolvendo-se o sistema, a resultante da amplitude das cinco funções de base utilizadas para representar  $I(z)$  serão obtidas.

## 2.5 Formulação para fio curvo

A equação de Pocklington fornece uma maneira simples e eficiente para a obtenção de correntes filamentosas utilizando o MoM. Infelizmente, ela não pode ser aplicada diretamente na modelagem de antenas helicoidais uma vez que ela é foi deduzida para condutores retilíneos. Entretanto, a condição de fio fino utilizada na obtenção da equação de Pocklington permanece válida. Como consequência, a corrente das antenas helicoidais poderá ser considerada filamentar, fluindo no sentido do fio condutor. Em outras palavras, a aproximação para “fio fino”, implica na substituição da densidade de corrente superficial  $\vec{J}_s(\vec{r}')$  por uma linha de corrente  $I(l')\hat{l}$ , sendo  $\hat{l}$  o vetor unitário tangencial ao contorno do fio, vide Figura 2.9.

Analogamente, o operador  $\nabla'$  pode ser substituído por  $\hat{l} \frac{\partial}{\partial l'}$ , o que permite escrever a equação (2.18) como:

$$\hat{l} \cdot \vec{E}_i = \hat{l} \cdot \frac{j}{\omega \epsilon_0} \int_{l'} \left[ l' k^2 I(l') G(R) + \left( \frac{\partial}{\partial l'} I(l') \right) \nabla G(R) \right] dl' \quad (2.50)$$

Aplicando-se o Método dos Momentos, a corrente  $I(l')$  é aproximada por uma soma de funções de base do tipo:

$$I(l') = \sum_n I_n u_n(l'), \quad (2.51)$$

e as funções de ponderação  $w_m(l)$  são utilizadas para integrar (2.50) ao longo do filamento curvo conforme descrito em [3]. Como resultado obtém-se:

$$\int_l w_m(l) \hat{l} \cdot \vec{E}_i dl = \frac{j}{\omega \epsilon_0} \sum_n I_n \left[ k^2 \int_l w_m(l) \int_{l'} (\hat{l} \cdot \hat{l}') u_n(l') G(R) dl' dl + \int_l w_m(l) \int_{l'} (\hat{l} \cdot \nabla G(R)) \frac{\partial}{\partial l'} u_n(l') dl' \cdot dl \right]. \quad (2.52)$$

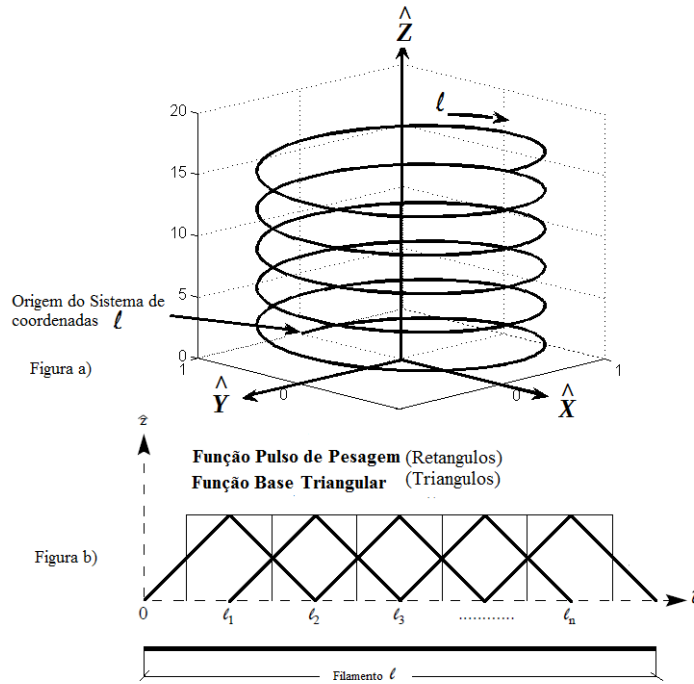
Substituindo  $\hat{l}' \cdot \nabla G(R)$  por  $\frac{\partial}{\partial l} G(R)$ :

$$\int_l w_m(l) \hat{l} \cdot \vec{E}_i dl = \frac{j}{\omega_0 \epsilon_0} \sum_n I_n \left[ k^2 \int_l w_m(l) \int_{l'} (\hat{l} \cdot \hat{l}') u_n(l') G(R) dl' dl + \int_l w_m(l) \frac{\partial}{\partial l} \int_{l'} G(R) \frac{\partial}{\partial l'} u_n(l') dl' \cdot dl \right]. \quad (2.53)$$

Portanto verifica-se que a equação integral (2.53) depende apenas dos vetores unitários  $l$  e  $l'$  e aplica-se a qualquer geometria contendo condutores filamentosos curvos.

Como para as antenas helicoidais não uniformes não é possível fazer nenhuma previsão sobre o comportamento da corrente, optou-se nesse trabalho pela utilização das mesmas funções de subdomínio utilizadas em [3] para antenas helicoidais uniformes. No caso das funções de base, as funções escolhidas foram funções triangulares do tipo:

$$u_n(l') = T_n(l') = \begin{cases} 1 - \frac{|l' - n\Delta|}{\Delta}, & |l' - n\Delta| < \Delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.54)$$



**Figura 2.9** Coordenada da Hélice, funções base e peso.

No caso das funções de peso, as funções escolhidas foram funções pulso centradas sobre a junção entre dois segmentos. Conforme ilustrado na Figura 2.9.

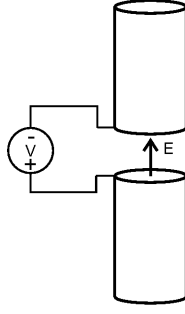
$$w_m(l) = P_m(l) = \begin{cases} 1, & |l - m\Delta| < \Delta/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.55)$$

Substituindo as função de base e de peso na equação (2.53), tem-se:

$$\int_{l_m} \hat{l} \cdot \vec{E}_i dl = \frac{j}{\omega \epsilon_0} \sum_n I_n \left[ k^2 \int_{l_m} \int_{l'} (\hat{l} \cdot \hat{l}') T_n(l') G(R) dl' dl \right] + \frac{j}{\omega \epsilon_0} \sum_n I_n \int_{l_m} \frac{\partial}{\partial l} \int_{l'} G(R) \frac{\partial}{\partial l'} T_n(l') dl' . dl. \quad (2.56)$$

A integral em  $l_m$  estende-se sobre a  $m$ -ésima função de peso enquanto a integral em  $l'$  representa a integral sobre o comprimento total da antena [3].

A equação (2.56) pode ser simplificada considerando que  $\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} dx = f(x,y) \Big|_a^b$  pode ser aplicado ao último termo e que a derivação da função base triangular, pode ser representada



**Figura 2.10** Campo elétrico incidente gerado por uma fonte de tensão

por duas funções de pulso:

$$\frac{\partial}{\partial l'} T_n(l') = \frac{1}{\Delta} [P_n^+(l') - P_n^-(l')] \quad (2.57)$$

onde as funções de pulso  $P_n^+(l')$  e  $P_n^-(l')$ , representam a inclinação positiva e negativa dos lados do triângulo, sendo representadas por;

$$P_n^+(l') = \begin{cases} 1, & |l' - n\Delta/2| < \Delta/2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.58)$$

e

$$P_n^-(l') = \begin{cases} 1, & |l' - n\Delta - \Delta/2| < \Delta/2. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.59)$$

Finalmente substituindo (2.57) em (2.56) resulta em:

$$\int_{l_m} \hat{l} \cdot \vec{E}_i dl = \frac{1}{\omega \epsilon_0} \sum_n I_n \left[ k^2 \int_{l_m} \int_{l'} (\hat{l} \cdot \hat{l}') T_n(l') G(R) dl' dl + \left( \int_{l'} \frac{G(R)}{\Delta} [P_n^+(l') - P_n^-(l')] dl' \right) \Big|_{l_m^-}^{l_m^+} \right]. \quad (2.60)$$

A avaliação da equação (2.60) em cada segmento resulta no sistema matricial que é utilizado para a definição da corrente no filamento curvo da antena helicoidal.

## 2.6 Modelagem da Fonte

O termo do campo incidente, representado pelo lado esquerdo da equação (2.60), pode ser obtido considerando-se que a antena é alimentada em seu centro por uma fonte de tensão, conforme apresentado na Figura 2.10 para o caso de um dipolo.

Nesse caso, assumindo-se que o espaçamento entre os dipolos é pequeno em comparação com o comprimento de onda da faixa de operação da antena, pode-se considerar que o campo

elétrico gerado será constante e orientado no sentido do filamento. Seja  $V_{ms}$  a tensão da fonte, o campo elétrico incidente pode então ser escrito como

$$\vec{E}_i = \frac{V_{ms}}{\Delta} \hat{l}, \quad (2.61)$$

onde  $\Delta$  é o tamanho do espaçamento entre os elementos do dipolo, e  $\delta$  é a função de Dirac.

Substituindo-se (2.61) em (2.60), o lado esquerdo de (2.60) pode ser reescrito como:

$$\int_{l_m} \hat{l} \cdot \vec{E}_i dl = \int_{l_m} \frac{V_{ms}}{\Delta} \delta(l - s_m) dl \quad (2.62)$$

onde  $s_m$  é o segmento que contém a fonte de tensão.

Esse tipo de representação de fonte recebe o nome de Delta-Gap [1] e [18]. A representação da fonte utilizando o modelo Delta-Gap proporciona uma maneira simples e direta de incorporar o efeito da fonte de alimentação no MoM. Os resultados obtidos com o modelo Delta-Gap geralmente proporcionam uma excelente representação da corrente nas antenas com uma boa estimativa de sua impedância de entrada.

Uma vez conhecida a corrente, a impedância de entrada pode ser obtida facilmente

$$Z_{in} = \frac{V_{ms}}{I(s_m)}, \quad (2.63)$$

onde  $I(s_m)$  é o valor da corrente avaliada no segmento que une as duas partes do dipolo.

Embora as equações (2.61) a (2.63) tenham sido derivadas para o dipolo da Figura 2.10, elas podem ser generalizadas para representar a alimentação de qualquer antena filamentar. A única restrição para tal generalização diz respeito às antenas alimentadas a partir de um plano condutor, como por exemplo, um monopolo ou as antenas helicoidais apresentadas nesse trabalho.

Considere a antena da Figura 2.2(a). A corrente nessa antena é obtida aplicando-se o MoM no modelo da Figura 2.2(b). Nesse caso, apenas a metade superior da região onde a fonte é imposta é real, a parte inferior é gerada pelo método das imagens. Dessa forma, a tensão aplicada no modelo da Figura 2.2(b) será o dobro da tensão que é aplicada na antena real da Figura 2.2(a). Assim, para o caso de antenas alimentadas a partir de um plano condutor  $V_{ms} = 2V_{real}$  e a impedância de entrada é dada por [1]:

$$Z_{in} = \frac{V_{ms}}{2I(s_m)} \quad (2.64)$$

Por fim, com o valor da corrente no filamento, os campos elétrico e magnético ao redor da antenas podem ser obtidos por integração numérica e os parâmetros, tais como, diretividade e ganho podem ser obtidos facilmente.

## 2.7 Considerações Finais

Esse capítulo apresentou a formulação necessária para a modelagem das antenas helicoidais utilizando o Método dos Momentos. Para a construção do modelo, duas simplificações

foram realizadas: i) considerar o plano condutor infinito e ii) considerar que os condutores são condutores elétricos perfeitos. Em ambos os casos, os efeitos das simplificações adotadas não influenciam consideravelmente o resultado final, sobretudo para o caso do cálculo do campo distante. Em contrapartida, as simplificações realizadas reduzem consideravelmente o esforço computacional do problema, possibilitando que um maior número de iterações seja realizada pela ferramenta de otimização em um mesmo intervalo de tempo.

Outro ponto importante no modelo adotado é a forma de imposição do campo incidente. Embora o modelo Delta-Gap seja largamente utilizado, é esperado uma pequena variação no cálculo da impedância de entrada. Entretanto, essa variação é muito menor do que as apresentadas nas metodologias empíricas de projeto de antenas helicoidais.



## Otimização de antenas helicoidais não uniformes

Esse capítulo tem por objetivo apresentar a ferramenta de otimização que é utilizada na obtenção das antenas helicoidais não uniformes.

Conforme mostrado na seção 1.4, a modificação da geometria de antenas helicoidais segundo algum critério de parametrização pode melhorar o funcionamento da antena. Entretanto, encontrar os valores dos parâmetros que resultam em uma antena melhor nem sempre é uma tarefa simples.

Como exemplo, em [7], o ganho de antenas helicoidais uniformes é aumentado substituindo-se o plano condutor da base da antena por uma superfície em formato de tronco de cone. A superfície foi parametrizada em função do raio superior, do raio inferior e da altura do cone. Os valores dos raios que maximizam o ganho da antena foram encontrados mantendo-se a altura do tronco de cone fixa ( $h_c = 0,5\lambda$ ). A busca pela melhor solução foi feita amostrando-se o espaço de busca com ( $31 \times 31 = 961$ ) pontos igualmente espaçados. As 961 antenas geradas foram avaliadas utilizando-se o método dos momentos, e a antena de melhor ganho foi escolhida.

É fácil verificar que com a mesma discretização e levando-se em conta a altura do cone como parâmetro variável, seria necessária a avaliação de  $31 \times 31 \times 31 = 29.791$  antenas diferentes, o que tornar-se-ia uma tarefa extremamente custosa.

Outro exemplo de otimização de antenas helicoidais pode ser encontrado em [13]. Nesse artigo, a melhoria no desempenho da antena é alcançada variando-se os raios das hélices. A parametrização dos raios foi feita utilizando-se seis pontos de controle.

Nesse caso, a busca de uma solução utilizando um grid igualmente espaçado torna-se inviável e técnicas de otimização tornam-se necessárias. Para contornar esse problema, o artigo utiliza os métodos estocásticos *Particle Swarm Optimization* (PSO) e *Genetic Algorithm* (GA).

Métodos estocásticos são ferramentas eficazes para se conseguir um ótimo global aproximado mesmo para problemas multimodais. Entretanto, a eficácia desses métodos pode variar consideravelmente em função de seus parâmetros de ajuste.

Em geral, não existe um único método de otimização que seja eficiente para qualquer problema. A escolha do método mais apropriado para cada tipo de problema é uma tarefa essencial no desenvolvimento de dispositivos otimizados [19].

Diferentemente de [13], esse trabalho utiliza um método determinístico no lugar dos métodos estocásticos. Algoritmos determinísticos geralmente são baseados em uma análise local dos problemas de otimização. Esses métodos, sob determinadas condições, beneficiam-se de garantias teóricas de convergência para um ótimo local.

A opção por um algoritmo determinístico reside no fato de que os campos eletromagnéticos gerados pela antena comportam-se bem localmente. Assim, se o domínio de pesquisa puder ser suficientemente reduzido, garantias teóricas de convergência podem ser alcançadas. Além

disso, conhecimento prévio do comportamento da antena pode ser utilizado na escolha dos pontos iniciais.

Neste contexto, o conhecimento dos diagramas apresentados em [2] podem tornar o uso dos métodos determinísticos mais atrativo do que o uso de métodos estocásticos. As informações oriundas dos ábacos presentes em [2] podem ser utilizadas nos algoritmos determinísticos da seguinte forma:

1. proporcionar um bom ponto de partida para o algoritmo e,
2. reduzir o espaço de busca da solução ótima.

Utilizando as antenas uniformes projetadas em [2] e as restrições para o funcionamento no modo axial, é possível definir um espaço de busca pequeno em torno dessa antena de modo a privilegiar o uso de métodos determinísticos em detrimento aos estocásticos. Entretanto, mesmo nessas condições não é possível garantir a convexidade do espaço de busca a fim de garantir a convergência para o ótimo global. Por essa razão optou-se pelo uso do método elipsoidal que proporciona a possibilidade de escapar de alguns ótimos locais [20].

### 3.1 O método elipsoidal - ME

Desenvolvido por David Yudin e Arkadi Nemirovski em 1976 [21], e de forma independentemente por Naum Shor em 1977 [22], o Método elipsoidal foi popularizado pelo matemático russo Leonid G. Khachiyan em 1979 [20].

O ME é um método de otimização determinístico, que baseia-se na informação do gradiente da função objetivo ou das funções de restrição no centro de um elipsoide  $n$ -dimensional onde  $n$  é o número de variáveis de otimização do espaço de busca.

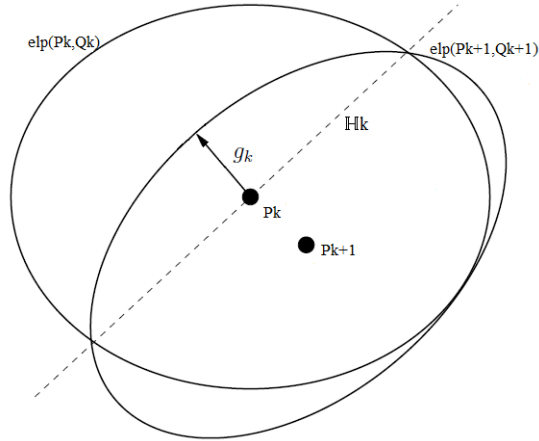
Conforme dito anteriormente, este método pode encontrar o ótimo global mesmo em um espaço de busca contendo outros ótimos locais. Isso ocorre porque, diferentemente dos métodos de direções de busca, o cálculo do próximo ponto no processo iterativo não é feito sobre uma trajetória a partir ponto atual. O próximo ponto, ao invés disso, é obtido calculando-se o centro do novo elipsoide da geração seguinte. Isso possibilita que a sequência de estimativas consiga evitar alguns ótimos locais.

Com isso, o método elipsoidal pode ser utilizado em problemas de otimização de funções não-convexas. Exemplos de aplicações bem sucedidas do ME podem ser encontrados em [23] para a solução de problemas de teoria econômica e em [24] e [14] para o caso de projetos de dispositivos eletromagnéticos.

Uma das principais desvantagens do ME, quando comparado com outros métodos determinísticos, diz respeito à sua taxa de convergência que é geralmente inferior à taxa obtida por métodos de direção de busca. Em contrapartida, o ME apresenta alta robustez e uma implementação relativamente simples conforme apresentado a seguir.

#### 3.1.1 Funcionamento do algoritmo

Para entender o funcionamento do algoritmo, considere o problema de minimização mono-objetivo restrito dado por:



**Figura 3.1** Exemplo de iterações dos Elipsoides

$$\text{Encontre:} \quad p^* = \underset{p}{\operatorname{arg\,min}} f_0(p) \quad (3.1)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad f_i(p) \leq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (3.2)$$

$$p_{j_{\min}} \leq p_j \leq p_{j_{\max}} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

onde  $f_0(p)$  é a função objetivo,  $f_i(p)$  é uma função de restrição e  $p_{j_{\min}}$  e  $p_{j_{\max}}$  são os limites inferiores e superiores do vetor da variável  $p_j$ .

A formulação clássica do ME consiste em construir um elipsoide  $n$ -dimensional que contenha o espaço de busca do problema. Em seguida, arbitra-se um ponto de partida dentro do elipsoide, geralmente o centro. Calcula-se então um sub-gradiente no ponto inicial e a partir da informação gerada pelo sub-gradiente, gera-se um novo elipsoide de menor volume que o primeiro. Esse processo é repetido de maneira iterativa e em cada passo uma parte do espaço de busca é eliminado conforme ilustrado na Figura 3.1 [23].

A figura apresenta uma iteração do ME para um problema bidimensional. Nela, o elipsoide  $elp(p_{k+1}, Q_{k+1})$  é construído a partir do elipsoide  $elp(p_k, Q_k)$  definido por

$$elp(p_k, Q_k) \triangleq \{p \in \mathfrak{R}^n \mid (p - p_k)^T Q_k^{-1} (p - p_k) \leq 1\} \quad (3.4)$$

onde  $Q^{-1}$  é uma matriz simétrica positiva definida associada aos eixos do elipsoide e  $p_k$  representa o seu centro.

Em cada iteração, o valor do gradiente da restrição mais violada  $g_k$  (ou da função objetivo, no caso de  $p_k$  ser viável) é calculado. A partir de  $g_k$  pode-se definir o semi-espaço:

$$\mathbb{H}_k \triangleq \{p \mid g_k^T (p - p_k) \leq 0\} \quad (3.5)$$

e um novo elipsoide de menor volume que contém o semi-elipsoide  $elp(p_k, Q_k) \cap \mathbb{H}_k$  é construído.

Dessa forma, dado um ponto inicial  $p_0 \neq p^*$ , o ME gera uma sequência  $p_k$  que garante que  $p_k \rightarrow p^*$  para o caso das funções  $f_i$  ( $i = 0, \dots, m$ ) serem convexas. Em cada iteração, o novo elipsoide é definido por

$$p_{k+1} = p_k - \beta_1 \frac{Q_k g_k}{(g_k^T Q_k g_k)^{1/2}}, \quad (3.6)$$

$$Q_{k+1} = \beta_2 \left( Q_k - \beta_3 \frac{(Q_k g_k)(Q_k g_k)^T}{(g_k^T Q_k g_k)} \right), \quad (3.7)$$

onde  $\beta_1 = 1/(n+1)$ ,  $\beta_2 = n^2/(n^2-1)$  e  $\beta_3 = 2/(n+1)$ .

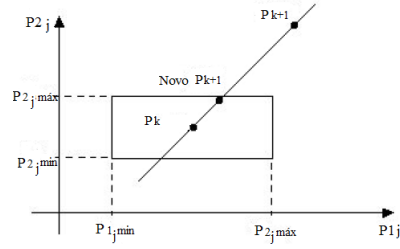
A sequência  $p_k$  é calculada até que algum dos critérios de parada enumerados a seguir sejam alcançados:

1. Número máximo de iterações: o algoritmo terminará quando um número de iterações pré-definido for alcançado.
2. Módulo do Gradiente da função Objetivo: o algoritmo terminará se o valor do módulo do gradiente da função objetivo no ponto  $p_k$  é inferior a um limiar pré-definido.
3. Variação de  $f_0(p)$ : o algoritmo terminará se a diferença no valor da função objetivo entre duas iterações for menor que um limiar.
4. Karush-Kuhn-Tucker (KKT): Em cada iteração o algoritmo verifica se as KKT são satisfeitas.
5. Matriz definida positiva Q: caso a matriz  $Q_k$  seja singular ou se aproxime da condição de singularidade (elipsoide degenerado), ou se a Matriz  $Q_k$  não é positivo definida o algoritmo é interrompido.

### 3.1.1.1 Viabilidade de $p_k$

Um ponto importante na implementação do ME diz respeito à viabilidade de  $p_k$ . Como mostrado na equação (3.3), o espaço de busca dos problemas de otimização são geralmente definidos como sendo hipercubos cujos vértices estão associados aos valores máximos e mínimos dos parâmetros a serem otimizados.

Ao se definir um elipsoide inicial que envolve o espaço de busca, alguns pontos no interior desse elipsoide podem estar fora da região viável. Dessa forma, a cada iteração, o algoritmo deve verificar se o ponto calculado  $p_{k+1}$  permanece no espaço de busca do problema. Caso  $p_{k+1}$  esteja fora da região viável. Um novo ponto  $p_{k+1}$  é obtido traçando-se uma reta entre os pontos  $p_k$  e  $p_{k+1}$  e encontrando o ponto de intercessão com a fronteira do problema conforme ilustrado na Figura 3.2.



**Figura 3.2** Técnica de correção para viabilidade de  $p_k$

### 3.1.1.2 Melhorando a convergência do ME

Uma característica importante do método elipsoidal é que a convergência não depende do comportamento das funções do problema e sim da dimensão do espaço de busca. Essa característica foi usada por Khachiyan [20] para provar que problemas lineares poderiam ser resolvidos com algoritmos de complexidade polinomial. Apesar disso, comparado com métodos de direção de busca, a convergência do método elipsoidal clássico pode ser considerada lenta.

Para melhorar a convergência do ME, o método pode ser modificado para aumentar a região excluída em cada iteração. Uma das formas de se fazer isso consiste em reescrever as equações (3.6) e (3.7) como em [25] ou [26]:

$$p_{k+1} = p_k - \beta_1 Q_k g_k / (g_k Q_k g_k^T)^{1/2}, \quad (3.8)$$

$$Q_{k+1} = \beta_2 (Q_k - \beta_3 \frac{Q_k g_k (Q_k g_k)^T}{g_k Q_k g_k^T}), \quad (3.9)$$

onde;

$$\beta_1 = \frac{1 + n\alpha}{n + 1}, \quad (3.10)$$

$$\beta_2 = n^2 \frac{1 - \alpha^2}{n^2 - 1}, \quad (3.11)$$

$$\beta_3 = \frac{2(1 - n\alpha)}{(n + 1)(1 + \alpha)}. \quad (3.12)$$

Este novo conjunto de equações gera uma sequência de elipsoides, que contém a interseção de cada elipsoide anterior com um semi-espaço  $\mathbb{H}_k$ , que não passa mais pelo centro do elipsoide anterior:

$$\mathbb{H}_k = \{p(g_k^T(p - p_k) \leq -\alpha[g_k^T Q_k g_k]^{1/2}), \quad (3.13)$$

Onde o parâmetro  $\alpha$  é chamado de profundidade do corte (*deep-cut*) e pode variar de 0 (ME clássico) à  $1/n$  (máximo corte permitido). O parâmetro  $\alpha$  pode ser definido a priori ou estimado à cada iteração conforme apresentado em [14].

Outra forma de acelerar a convergência do método consiste em se utilizar mais de um plano de corte por iteração. Em [19] é proposto um método que utiliza mais de uma função de restrição em cada iteração para realizar múltiplos planos de corte.

### 3.1.2 Aplicação do ME em problemas analíticos

Nesse trabalho, foram implementadas a versão do ME clássico e as versões com corte profundo apresentadas em [14] e [19] aqui chamadas respectivamente de RT (Rodney-Takahashi) e DA (Douglas-Adriano).

Para ilustrar o funcionamento dos métodos e validar as implementações, as versões de método elipsoidal foram aplicadas ao problema de minimização analítico descrito a seguir: Minimize:

$$f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 \quad (3.14)$$

sujeito a:

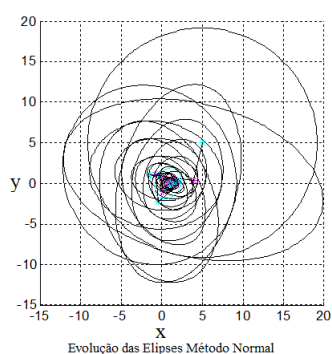
$$\begin{aligned} a) \quad g_1 &= x^2 + 4y^2 - 1 \\ b) \quad g_2 &= (x-2)^2 + 4y^2 - 1 \\ c) \quad g_3 &= 4(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 \\ d) \quad g_4 &= 4(x-2)^2 + (y+1)^2 - 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para a função escolhida, o mínimo ocorre no ponto  $(1,0)$  e o valor da função objetivo é  $f(1,0) = 5$ . Os resultados obtidos com as três versões do método elipsoidal são mostrados na Tabela 3.1. Em todos os casos, o ponto inicial escolhido foi o ponto  $x_0 = (5,5)$  e os critérios de parada foram:

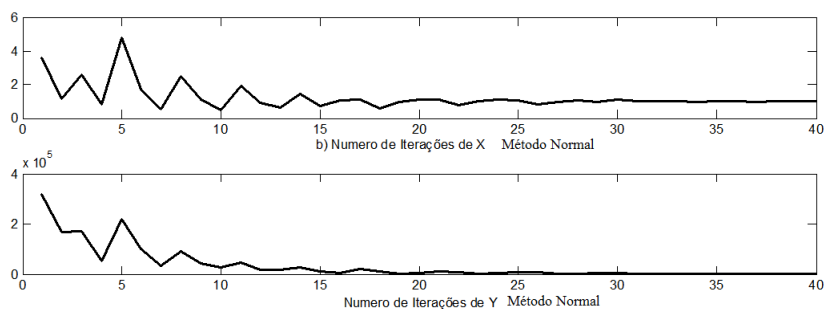
1. Número máximo de iterações:  $MAXITER = 2000$ .
2. Módulo do Gradiente da função Objetivo: o algoritmo terminará se o valor do módulo do gradiente da função objetivo no ponto  $p_k$  é  $< \epsilonpslon = 1.0e - 15$ .
3. Variação de  $f_0(p)$ : o algoritmo terminará se a diferença no valor da função objetivo entre duas iterações for,  $|f_0(p_{(k+1)}) - f_0(p_{(k)})| < \epsilonpslon = 1.0e - 15$ .
4. Karush-Kuhn-Tucker (KKT): Em cada iteração o algoritmo verifica se as condições KKT são satisfeitas, neste caso  $\epsilon kuhnt = 1.0e - 04$ .
5. Matriz definida positiva Q: caso a matriz  $Q_k$  seja singular ou se aproxime da condição de singularidade (elipsoide degenerado), ou se a Matriz  $Q_k$  não é positivo definida, nesse caso então não existe a "possibilidade de verificação da decomposição de CHOLESKY", consequentemente o algoritmo será interrompido.

**Tabela 3.1** Tipos de Algoritmos

Algoritmo	No.Iter.	x	y	fob.
Elipsoidal Original	89	0.99998	1.3542e-005	4.9999
Deep-cut RT	41	1.00000	-1.1093e-005	5.0000
Deep-cut DA	36	0.99999	-7.9361e-006	5.0000

**Figura 3.3** Evolução das elipses pelo Método original

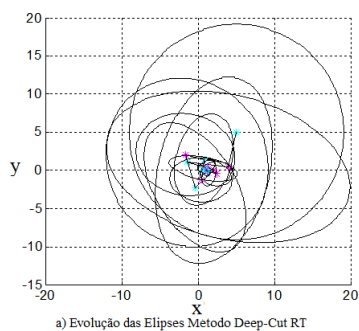
Como a função objetivo e as funções de restrição são convexas, todas as versões do ME foram capazes de solucionar o problema. Pode-se observar que o número de iterações necessárias para a obtenção dos resultados é bem menor nos casos que implementam esquemas de corte profundo quando comparados com o ME original.

**Figura 3.4** Número de Iterações pelo Método original limitado a 50.

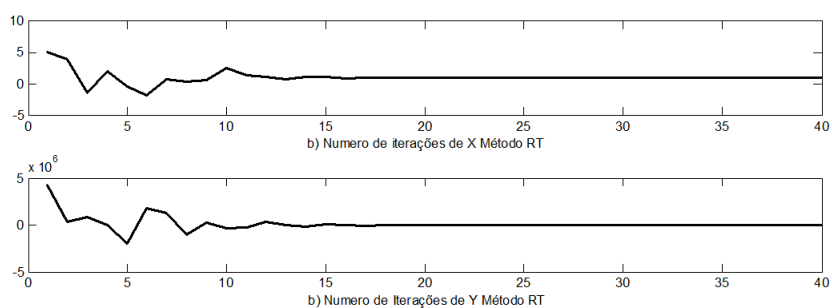
A evolução das elipses para o ME original é apresentada na Figura 3.3. Pode-se observar que à medida que a área das elipses diminui,  $p_k$  tende ao ótimo do problema (ver Figura 3.4).

O mesmo comportamento pode ser observado para os casos em que o corte profundo é utilizado (Figuras 3.5 - 3.8). Entretanto, nesses casos, o número de elipses necessárias para atingir os critérios de convergência é consideravelmente inferior.

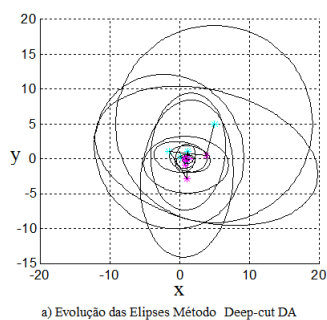
É interessante ressaltar que se comparado ao método do gradiente, por exemplo, o problema exemplificado poderia ser resolvido com menos iterações. Porém, como dito anteriormente,



**Figura 3.5** Evolução das elipses pelo Método RT



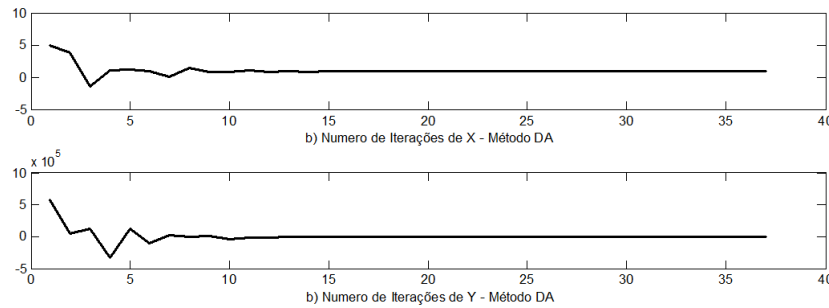
**Figura 3.6** Número de Iterações pelo Método RT



**Figura 3.7** Evolução das elipses pelo Método DA

o método elipsoidal não necessariamente depende do cálculo do gradiente da função. Isso porque, ele pode ser implementado utilizando o valor estimado do sub-gradiente. Dessa forma, o algoritmo elipsoidal, ao contrário dos métodos de direção e busca, pode ser usado para otimizar problemas de funções não diferenciáveis.





**Figura 3.8** Número de Iterações pelo Método DA

## 3.2 Otimização das Antenas Helicoidais

O bom desempenho do ME no problema anterior se deve, em parte, à convexidade das funções utilizadas. Como o problema é convexo, a convergência do ME pode ser assegurada. Já no caso das antenas helicoidais, a convergência do método não pode ser garantida a priori e a obtenção de bons resultados pode depender fortemente do tamanho do espaço de busca e do ponto inicial de partida do ME.

Nesse trabalho, tanto a definição do espaço de busca quanto do ponto de partida são feitas a partir da criação de uma antena uniforme de referência. A antena de referência é gerada utilizando-se as curvas apresentadas em [2]. Elas possibilitam a criação de antenas uniformes com ganho otimizado e impedância de entrada variando entre  $90\Omega$  e  $250\Omega$ .

Uma vez gerada a antena de referência, um conjunto de variáveis de controle pode ser definido para modificar a geometria da antena uniforme de modo a melhorar não apenas o ganho, mas também a impedância de entrada.

Como a antena original já apresenta um bom desempenho, a região no seu entorno pode ser utilizada como o espaço de busca para o ME. Os limites do espaço de busca podem ser definidos em função das dimensões da antena de referência. Assim, o ME buscará apenas no entorno de uma solução viável.

### 3.2.1 Parametrização

Os parâmetros geométricos básicos que definem uma antena helicoidal uniforme foram apresentados na seção 1.1. Tendo em vista esses parâmetros, a equação paramétrica que descreve a hélice de uma antena uniforme pode ser descrita como:

$$\mathbf{H}_{elix} = a \cos(2N\pi t)\hat{x} + a \sin(2N\pi t)\hat{y} + Lt\hat{z}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.16)$$

onde  $a$  é o raio da hélice,  $N$  é o número de espiras e  $L$  é a altura da antena.

Para melhorar as características da antena, a hélice pode ser modificada pela variação de alguns parâmetros geométricos. Neste trabalho, um espaço de busca para o problema de otimização é construído substituindo-se o raio constante  $a$  por uma função polinomial de segunda ordem  $a(p, t)$ .

O vetor de parametrização  $p$  contém a informação dos valores do raio inicial, raio central e raio final da antena não uniforme. Os valores dos raios presentes no vetor  $p$  são normalizados em função do raio da antena uniforme de referência.

Além disso, na análise dos diagramas em [2], é possível observar que a maioria das antenas são descritas em termos de parâmetros normalizados  $L/C$ . Assim, a fim de se manter a proporcionalidade  $L/C$  nas antenas não uniformes, este trabalho propõe a seguinte curva de parametrização:

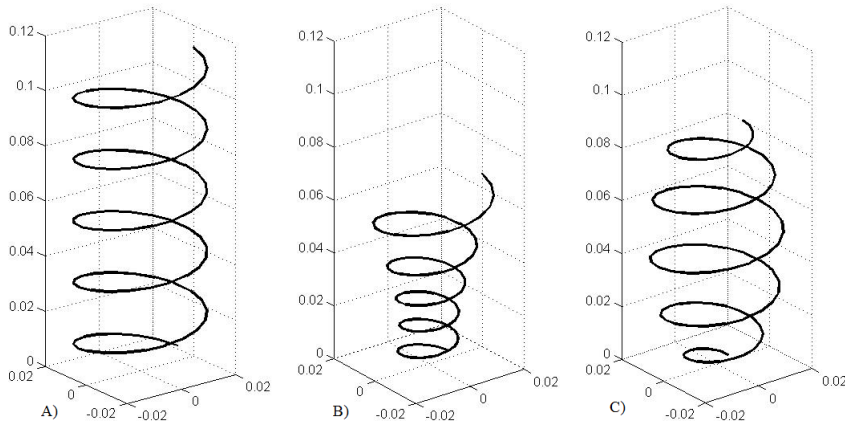
$$\mathbf{H}_{elix}(t) = a(p,t) \cos(2N\pi t)\hat{x} + a(p,t) \sin(2N\pi t)\hat{y} + a'(p,t)Lt\hat{z}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.17)$$

onde

$$a'(p,t) = \frac{1}{a_{max}} \int_0^t a(p,t) dt \quad (3.18)$$

e  $a_{max}$  é o valor máximo de  $a(p,t)$  no intervalo  $0 \leq t \leq 1$ . O termo da equação (3.18) é introduzido para fazer com que a altura da antena possa variar em função do raio médio das hélices. Pode-se notar que o máximo de  $a'(p,t)$  ocorre quando todos os elementos de  $p$  são iguais (para antenas uniformes). Nesse caso, o comprimento da antena será igual ao da antena original, caso contrário, a antena parametrizada, será sempre mais curta.

Exemplos das antenas geradas com a parametrização proposta na equação (3.17) são apresentados na Figura 3.9. Na figura, a antena do lado esquerdo (A) representa a antena uniforme de referência, ou seja,  $p = (1.0, 1.0, 1.0)$ . A antena do centro (B) representa uma antena não uniforme gerada a partir da antena uniforme e do vetor  $p = (0.5, 0.5, 1.0)$ . Por fim, a antena da direita (C) é obtida usando-se  $p = (0.3, 1.0, 0.5)$ . Pode-se observar que os parâmetros  $p$  modificam não apenas o envelope dos raios das espiras, mas também a altura da antena. Uma



**Figura 3.9** Antenas Helicoidais Parametrizadas

vez definida a parametrização, O espaço de busca do ME é construído escolhendo-se os limites superiores e inferiores do vetor de parametrização. Esses são obtidos a partir dos parâmetros da antena uniforme de referência e as restrições de operação no modo axial.

Teoricamente, o limite inferior do vetor  $p$  é limitado fisicamente pelo raio do fio utilizado. No entanto, raios muito pequenos não são de interesse prático. Por isso, nesse trabalho, o limite inferior dos raios foi definido como  $p_{lo} = (0.1, 0.1, 0.1)$ . Já os limites superiores, ele são limitados pela condição de operação em modo axial.

De acordo com [6], a antena helicoidal uniforme opera no modo axial, quando  $3/4 < C/\lambda < 4/3$ . Consequentemente, grandes valores de  $p$  não permitem o modo axial.

### 3.2.2 Definição da função objetivo

Uma vez que o espaço de busca é definido, o método elipsoidal pode ser usado a partir de um ponto aleatório dentro desse domínio. A busca pelos parâmetros  $p$  que otimizam o funcionamento da antena pode ser escrita como um problema de otimização irrestrito do tipo

$$\text{Encontre: } p^* = \underset{p}{\operatorname{arg\,min}} f_0(p), \quad (3.19)$$

onde  $f_0(p)$  representa uma medida de desempenho da antena (quanto mais próxima de zero, melhor a antena). Nesse trabalho, três objetivos são considerados sendo eles:

- A maximização do ganho da antena.
- O casamento entre a antena e a impedância de  $50\Omega$  do alimentador.
- A redução da altura da antena.

Conforme apresentado na Figura 3.9, o espaço de busca gera antenas que têm no máximo o mesmo tamanho da antena de referência. Assim, caso o método de otimização encontre uma antena não uniforme melhor do que a antena de referência, ela será automaticamente menor do que a antena original. Em outras palavras, a busca pela redução do tamanho da antena é incorporada pela parametrização.

Como o método de otimização utilizado nesse trabalho é mono-objetivo, a maximização do ganho e o casamento de impedância devem ser incorporados em uma única função. Nesse caso, a função objetivo utilizada nesse trabalho é escrita como:

$$f_0(p) = [50 - R_{in}(p)]^2 + |X_{in}(p)| + k[G_{ref} - G_{max}(p)]^2, \quad (3.20)$$

onde os valores  $R_{in}(p)$  e  $X_{in}(p)$  representam a parte real e imaginária da impedância de entrada da antena e  $G_{max}$  representa o ganho na direção de propagação do modo axial. Esses valores são obtidos com o auxílio do MoM apresentado no capítulo 2.

A constante  $G_{ref}$  é um ganho de referência. Seu valor deve ser maior ou igual ao valor máximo do ganho existente no espaço de busca e  $k$  é uma constante de proporcionalidade que visa definir a importância do ganho em relação ao casamento de impedância durante o processo de otimização.

Como as antenas de referências são obtidas pelas curvas propostas em [2], o valor de  $G_{ref}$  foi arbitrado como o ganho máximo observado em [2], ou seja, 20 dB.

Analisando (3.20), é possível observar que o mínimo dessa função ocorre quando  $R_{in} = 50\Omega$ ,  $X_{in} = 0$  e  $G_{max} = G_{ref}$ . Entretanto, como  $G_{ref}$  é um valor utópico,  $f_0 > 0$  para qualquer ponto no domínio.

Outra característica de (3.20) é que os termos  $R_{in}$  e  $G_{max}$  são quadráticos enquanto  $X_{in}$  é linear por partes. Dessa forma, o algoritmo tenta satisfazer os termos quadráticos primeiro e a minimização da reatância tem uma menor prioridade durante o processo de otimização. Isto foi feito pois, em geral, a parte imaginária da impedância possui uma característica mais oscilatória do que a parte real. Assim, o ME poderia nas primeiras iterações se dirigir a uma região de reatância zero mas cuja resistência estaria longe do desejado. Tal procedimento pode levar o algoritmo prematuramente para um mínimo local, longe da impedância desejada de  $50\Omega$ .

### 3.3 Considerações Finais

Nesse Capítulo, o projeto de antenas helicoidais não uniforme foi apresentado como um problema de otimização. Foram descritas a forma de parametrização da antena e a função objetivo a ser otimizada. A parametrização escolhida possibilita a construção de um espaço de busca pequeno ao redor de um ponto concebido a partir do projeto de uma antena uniforme. Tal procedimento reduz consideravelmente o espaço de busca e, conseqüentemente, o esforço necessário para a obtenção da solução.

Para a solução do problema de otimização, o método escolhido foi o método elipsoidal. O Capítulo apresentou, de forma sucinta, a formulação necessária para a implementação do ME. A aplicação do método em problemas analíticos demonstra que a convergência do método pode ser incrementada com a inclusão de mecanismos de corte profundo.

## CAPÍTULO 4

# Resultados

Nesse capítulo, são apresentados os resultados obtidos na otimização de antenas helicoidais para aplicações em WiFi. Para a avaliação do desempenho da metodologia proposta, foram geradas sete antenas uniformes conforme descrito a seguir.

### 4.1 Antenas de referência

As antenas de referência foram projetadas para operar com uma frequência central de 2,45 GHz e foram geradas a partir dos diagramas de banda estreita (NB) disponíveis em [2]. Diferentemente do proposto em [2], foi utilizado o intervalo do ângulo de inclinação clássico ( $12^\circ < \alpha < 14^\circ$ ) proposto por [4]. Essa modificação permite encontrar antenas com número de voltas inteiros e pequenos, o que facilita a interpretação dos resultados.

Os parâmetros das antenas uniformes são apresentados na Tabela 4.1, esta tabela apresenta os valores da altura da antena  $L$ , o raio das hélices  $a$  e o raio do condutor  $r$ . Conforme dito anteriormente, estes valores foram calculados pelas curvas de [2] para antenas banda estreita. Entretanto, a curva NB da Fig. 6(a) em [2], que define o ângulo do passo, foi substituída por um passo constante que está dentro de  $12^\circ < \alpha < 14^\circ$ . Isso permite o uso de antenas com poucas espiras sem violar a condição de operação no modo axial  $3/4 < C/\lambda < 4/3$ .

A partir dos valores da Tabela 4.1 e da parametrização descrita em (3.16) é possível construir a geometria das antenas, que por sua vez, podem ser avaliadas utilizando-se o MoM. O desempenho das antenas de referência é apresentado na tabela 4.2.

Analisando a Tabela 4.2, é possível ver que antenas maiores, e conseqüentemente com maior número de voltas, tendem a ter um ganho mais elevado. Entretanto, essa relação não é linear. Outro ponto que pode ser observado é que a impedância de entrada fica entre os

**Tabela 4.1** Parâmetros das antenas uniformes

Espiras	L(mm)	a(mm)	r(mm)
N=3	86.51	19.67	0.30
N=4	114.49	18.22	0.30
N=5	112.33	19.86	0.30
N=6	170.55	19.67	0.30
N=7	174.74	19.86	0.30
N=8	237.38	18.89	0.30
N=9	254.39	19.28	0.30

**Tabela 4.2** Desempenho das antenas uniformes

Espiras	$Z_{in}$ ( $\Omega$ )	Ganho (dBi)	$P_{rad}$ (mW)
N=3	134.72-65.27i	7.612	3.006
N=4	142.31-79.25i	7.709	2.682
N=5	124.49-87.88i	9.932	2.681
N=6	152.93-82.51i	9.028	2.532
N=7	143.34-85.90i	10.313	2.566
N=8	144.11-88.68i	9.226	2.516
N=9	211.95-73.63i	9.626	2.105

valores previstos em [2] (entre  $90\Omega$  e  $270\Omega$ ). Esses valores estão bem longe dos  $50\Omega$  típicos dos circuitos de alimentação. Como consequência, conectando-se a antena com maior ganho ( $N = 7$ ) a um gerador de  $1V$  por meio de um cabo de  $50\Omega$ , a potência total irradiada será menor do que a potência irradiada pela antena de menor ganho ( $N = 3$ ), conforme mostrado na última coluna da tabela. Esse resultado confirma a importância do bom casamento da antena, o que justifica a utilização da metodologia descrita nesse trabalho.

## 4.2 Otimização das antenas de referência

Para cada antena da Tabela 4.2, foi construído um espaço de busca contido entre os limites inferior e superior do vetor de parametrização, sendo que o limite inferior foi definido previamente como  $p_{lo} = (0.1, 0.1, 0.1)$ . Já no caso do limite superior, ele é limitado pela condição de operação no modo axial. Para as antenas analisadas nesse trabalho, arbitrou-se o limite superior como  $p_{up} = (1.0, 1.0, 2.5)$ .

Uma vez definidos os espaços de busca, o método elipsoidal pode ser aplicado à cada antena, partido-se de um elipsoide cujo centro corresponde a um ponto arbitrário dentro de cada espaço de busca.

Para cada antena, o algoritmo foi executado utilizando as seguintes configurações:

- Número máximo de iterações igual a 150
- Limiar do módulo do gradiente igual a  $10^{-6}$
- Limiar da diferença do valor da função objetivo igual a  $10^{-6}$
- Corte profundo do tipo DA

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4.3. Nesta tabela apresenta-se os vetores de parametrização das Antenas Helicoidais Otimizadas onde as variáveis  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  representam respectivamente o raio inicial, o raio central e o raio final da nova antena otimizada. É importante lembrar que os valores obtidos são normalizados em função do raio constante da antena uniforme original, conforme mostrado na Figura 3.9.

Analisando das novas antenas apresentadas na Tabela 4.3, é possível ver que o raio inicial das antenas otimizadas correspondem a uma fração do raio original enquanto o raio final é

**Tabela 4.3** Parâmetros das antenas otimizadas

Espiras	$p_1$	$p_2$	$p_3$	Iter.
N=3	0.7029	0.5410	2.5000	40
N=4	0.6597	0.4022	2.4932	21
N=5	0.2209	0.1516	1.9890	26
N=6	0.6686	0.1240	2.4999	34
N=7	0.4043	0.9328	1.7883	25
N=8	0.3018	0.8759	1.9922	05
N=9	0.3179	0.4773	1.9103	30

**Tabela 4.4** Impedância de entrada ( $Z_{in}$ )

Espiras	Uniforme ( $\Omega$ )	Otimizada ( $\Omega$ )
N=3	134.72-65.27i	50.70-03.81i
N=4	142.31-79.25i	50.22-00.01i
N=5	124.49-87.88i	50.02-00.02i
N=6	152.93-82.51i	50.42-00.52i
N=7	143.34-85.90i	50.30-28.89i
N=8	144.11-88.68i	50.55-64.28i
N=9	211.95-73.63i	51.59-31.04i

próximo do limite superior definido para o espaço de busca. Isso mostra que as antenas obtidas são bem diferentes das antenas uniformes utilizadas como ponto de partida.

Outro aspecto interessante diz respeito ao comportamento do método elipsoidal. Como o espaço de busca foi definido como uma pequena região no entorno de uma antena uniforme gerada para apresentar um ganho elevado, o ME precisou apenas de poucas iterações para encontrar o ótimo de cada problema. Isso pode ser verificado na coluna “Iter” da Tabela 4.3. Apesar do número máximo de iterações ter sido definido com 150, a antena que exigiu um maior número de iterações foi a antena com  $N = 3$ , cujo número de iterações necessárias foi igual a 40. Isso vem comprovar que o uso de um método determinístico pode ser muito vantajoso quando se utiliza alguma informação do problema para definição do ponto de partida do algoritmo.

### 4.3 Desempenho das antenas otimizadas

Para avaliar o desempenho das antenas geradas pelo ME, parâmetros como Impedância de entrada, Ganho e Potência irradiada foram calculados e comparados com as antenas uniformes originais. A Tabela 4.4 apresenta a melhora obtida no casamento de impedância.

Nessa tabela, pode-se verificar que as antenas uniformes apresentam um valor de resistência em torno de  $140\Omega$ , com uma variação mais acentuada para o caso da antena de 9 espiras. Adicionalmente, a parte reativa da impedância é elevada. Após o processo de otimização, todas as novas antenas apresentam resistências bem próximas a  $50\Omega$  e reatância próxima de zero, o

**Tabela 4.5** Ganho das antenas

Espiras	Uniforme (dBi)	Otimizada (dBi)	$\Delta_{Gain}$ (dB)
N=3	7.612	10.227	2.615
N=4	7.709	9.986	2.777
N=5	9.932	9.774	-0.158
N=6	9.028	10.002	0.974
N=7	10.313	11.718	1.405
N=8	9.226	11.196	1.970
N=9	9.626	10.747	1.121

**Tabela 4.6** Comprimento das antenas ( $L$ )

Espiras	Uniforme (mm)	Otimizada (mm)	Percentual de Redução (%)
N=3	86.51	31.40	63.70
N=4	114.49	37.04	67.65
N=5	112.33	27.22	75.76
N=6	170.55	42.55	75.04
N=7	174.74	96.52	55.24
N=8	237.38	115.27	51.44
N=9	254.39	92.29	63.72

que facilita sua conexão com um cabo de  $50\Omega$ . Pode ser observado também que, à medida que o número de espiras aumenta, a metodologia proposta encontra dificuldade em eliminar completamente a parte reativa da impedância. De qualquer modo, os resultados obtidos são melhores do que os obtidos com as antenas originais.

O ganho das antenas otimizadas é apresentado na Tabela 4.5. Comparando unicamente o ganho das antenas otimizadas com o ganho das antenas originais, a melhoria não parece muito expressiva. Em geral, o aumento médio do ganho obtido foi da ordem de 1.46dB sendo que, no caso da antena com 5 espiras, houve uma redução de 0.158dB.

Entretanto, para analisar esses resultados, é importante ter em mente que as antenas originais foram construídas seguindo os diagramas em [2]. Logo, elas foram construídas para maximizar o ganho para um dado comprimento  $L$ . Adicionalmente, a parametrização desenvolvida nesse trabalho visa minimizar de maneira indireta a altura da antena. Dessa forma, a altura máxima possível é a altura da antena original. Esse efeito pode ser observado comparando-se o valor de  $L$  das antenas otimizadas com o valor das antenas originais, conforme mostrado na Tabela 4.6. Pode ser observado que as antenas otimizadas, apresentaram uma redução no valor do comprimento da antenas que varia entre 51 e 75% do valor das antenas originais. Nesse contexto, os ganhos apresentados na Tabela 4.5 mostram-se mais interessantes, uma vez que antenas otimizadas, que são mais curtas, proporcionam basicamente o mesmo ganho das antenas originais.

Por fim, a melhoria no casamento de impedância associada ao ligeiro aumento do ganho das antenas proporcionam uma melhoria considerável na potência irradiada pela antena. O cálculo da potência irradiada pelas antenas otimizadas é apresentado na Tabela 4.7. Assim como na



**Tabela 4.7** Potência irradiada

Espiras	Uniforme (mW)	Otimizada (mW)
N=3	3.006	9.806
N=4	2.682	9.956
N=5	2.681	9.996
N=6	2.532	9.915
N=7	2.566	7.473
N=8	2.516	3.779
N=9	2.105	7.114

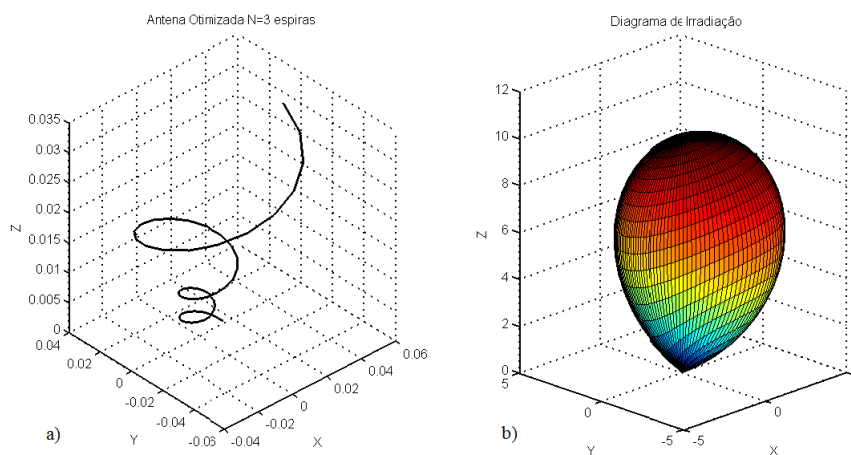
Tabela 4.2, os resultados foram obtidos para um alimentador de 1V conectado à antena por meio de um cabo de  $50\Omega$ .

As antenas otimizadas apresentaram uma potência irradiada muitas vezes maior do que as antenas uniformes. Isso possibilita a conexão do circuito alimentador diretamente na antena sem a necessidade de casadores de impedância.

#### 4.4 Geometria e diagramas de irradiação

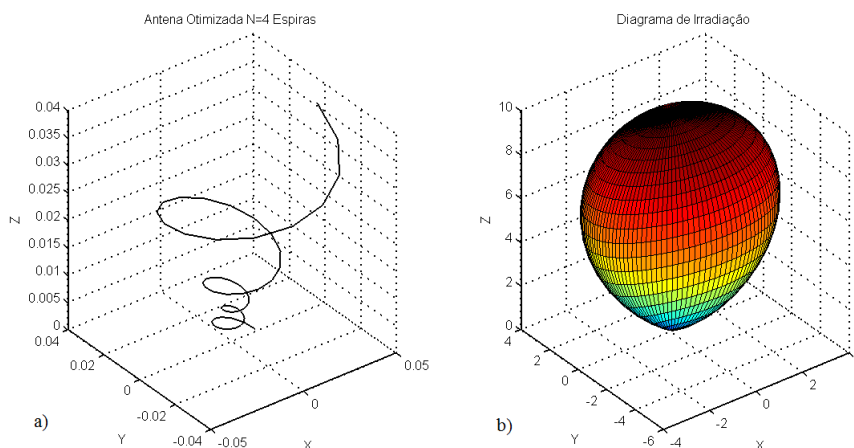
Nas Figuras 4.1 a 4.7, são apresentadas a geometria e o diagrama de radiação das antenas otimizadas. Pode-se notar que a função de parametrização descrita em (3.17) controla não apenas o contorno como também o ângulo de passo das antenas. Nesse caso, como as antenas não são uniformes, a variável  $p_2$  pode não coincidir com o raio do ponto central da antena.

É possível observar também que todas as antenas trabalham no modo axial.

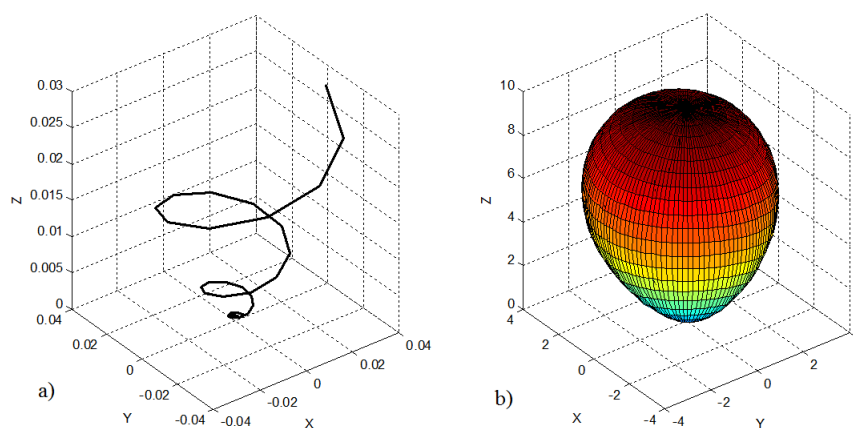


**Figura 4.1** Antena Helicoidal Otimizada de  $N=3$ , a) Geometria b) Diagrama de Irradiação.

Antenas com  $N = 3, \dots, 6$  possuem um padrão semelhante entre si, mas bem diferente das antenas helicoidais convencionais. Nesses casos observa-se uma melhora mais significativa do desempenho das antenas.



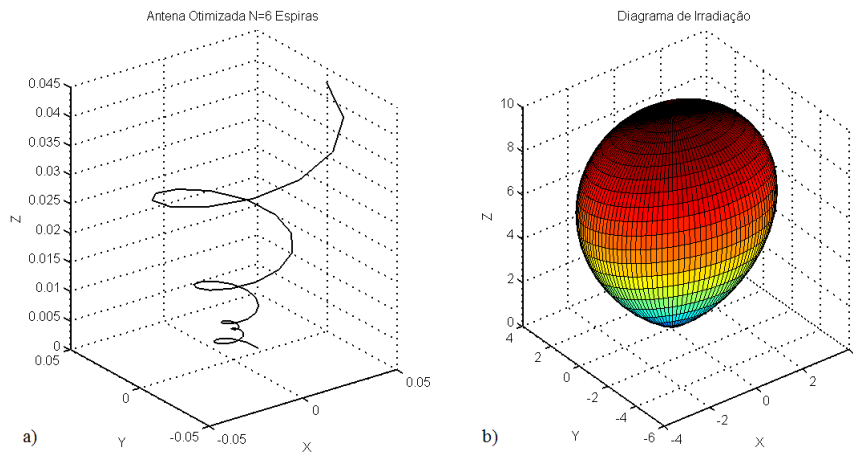
**Figura 4.2** Antena Helicoidal Otimizada de N=4, a) Geometria b) Diagrama de Irradiação.



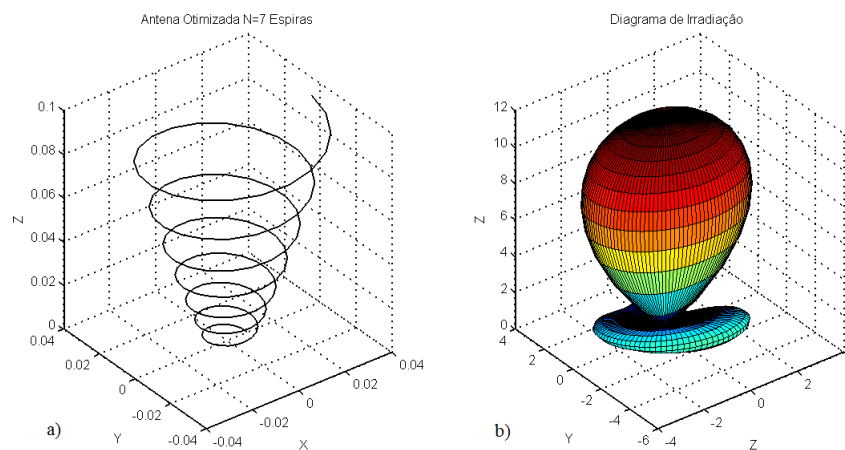
**Figura 4.3** Antena Helicoidal Otimizada de N=5, a) Geometria b) Diagrama de Irradiação.

Tais geometrias exemplificam bem a vantagem em se utilizar ferramentas de otimização no projeto de antenas helicoidais, uma vez que a obtenção dessas geometrias por meio de equações empíricas, como feito em [4], seria bastante improvável.

Já no caso das antenas com  $N = 7, 8$  e  $9$ , cujo casamento de impedância não é completamente satisfeito, as antenas possuem um perfil mais parecido com o perfil das antenas uniformes. Uma possível justificativa para esse efeito está no fato de que à medida que o número de espiras aumenta, o número de graus de liberdade utilizados se torna pequeno para controlar o raio de todas as espiras. Nesse caso, outras formas de parametrizações podem ser mais apropriadas quando o número de espiras é elevado.



**Figura 4.4** Antena Helicoidal Otimizada de N=6, a) Geometria b) Diagrama de Irradiação.

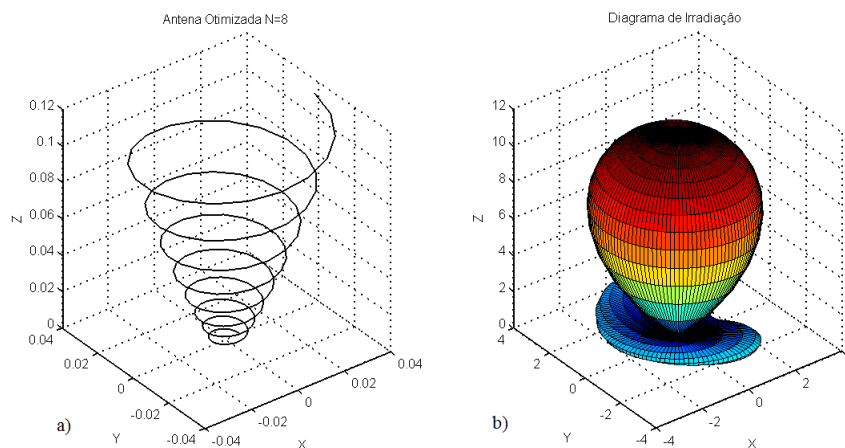


**Figura 4.5** Antena Helicoidal Otimizada de N=7, a) Geometria b) Diagrama de Irradiação.

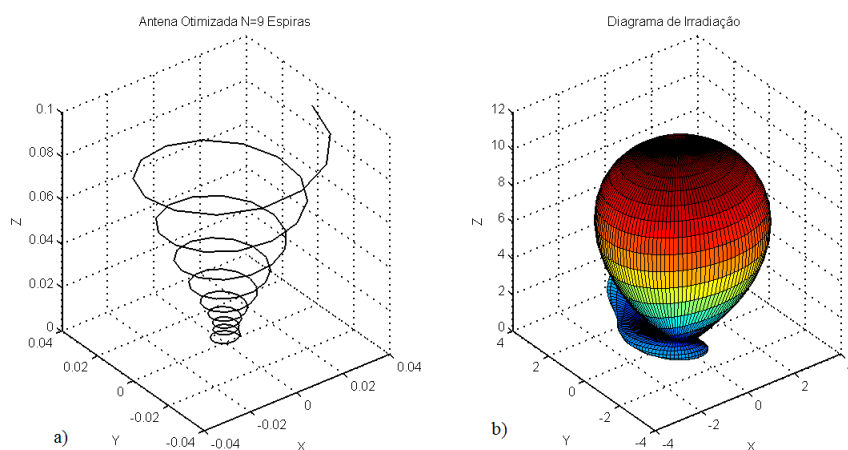
## 4.5 Considerações Finais

Analisando os resultados obtidos pode-se observar que as antenas uniformes originais apresentam um valor de resistência em torno de  $140\Omega$  (Tabela 4.4) e parte reativa elevada. Após o processo de otimização, todas as novas antenas apresentam resistências bem próximas a  $50\Omega$  e reatância próxima de zero.

O aumento médio do ganho das antenas otimizadas apresentado na Tabela 4.5 foi da ordem de 1.46dB sendo que, no caso da antena com 5 espiras, houve uma redução de 0.158dB. Embora aparentemente pequeno, o aumento no ganho é significativo uma vez que a altura das antenas e consideravelmente reduzida. Pode ser observado que as antenas otimizadas, apresentaram uma redução no valor do comprimento da antenas que varia entre 51 e 75% do valor das antenas



**Figura 4.6** Antena Helicoidal Otimizada de N=8, a) Geometria b) Diagrama de Irradiação.



**Figura 4.7** Antena Helicoidal Otimizada de N=9, a) Geometria b) Diagrama de Irradiação.

originais.

A melhoria no casamento de impedância associada ao ligeiro aumento do ganho das antenas proporcionam uma melhoria considerável na potência irradiada pela antena. Tendo em vista os valores encontrados, pode-se dizer que as antenas otimizadas apresentaram uma melhoria em praticamente todos os aspectos analisados. Isso valida a metodologia proposta nesse trabalho.

## Conclusões e propostas de continuidade

Esse trabalho apresentou uma metodologia baseada no algoritmo de otimização elipsoidal para o projeto de antenas helicoidais não-uniformes que operam no modo axial. O trabalho fez uso do conhecimento já consolidado na literatura para o projeto de antenas uniformes de modo a propiciar um método simples e robusto para a criação de antenas não-uniformes.

Utilizando os diagramas de [2] e as expressões empíricas de [4], foi possível definir um espaço de busca reduzido, baseado em uma parametrização simples gerada a partir de uma antena uniforme. Como consequência, o método de otimização foi capaz de encontrar, com um número muito pequeno de iterações, antenas que superam o desempenho das antenas uniformes utilizadas como ponto de partida.

Os resultados mostraram que a parametrização proposta é capaz de gerar antenas com geometrias pouco usuais com desempenho elevado, principalmente quando são utilizadas poucas espiras. Entretanto, à medida que o número de espiras aumenta, os resultados indicam que novas formas de parametrização poderiam ser utilizadas.

Um das possíveis propostas de continuidade desse trabalho seria justamente a utilização de funções de mais alta ordem para a parametrização das antenas. Uma possibilidade seria a de definir o número de parâmetros necessários em função do número de espiras de modo que se obtenha um número mínimo de parâmetros a serem utilizados em função da quantidade de espiras da antena desejada.

Outra possibilidade, seria a utilização de parâmetros independentes para controle da altura e do raio das antenas. Nesse trabalho, fez-se o uso das relações empíricas entre  $L$  e  $C$  de modo a se construir uma parametrização simples com um pequeno número de variáveis. Isso reduz consideravelmente o custo computacional para se encontrar o ótimo do problema.

Entretanto, como o número de iterações obtidas foi extremamente baixo, parametrizações mais complexas poderiam ser implementadas. Nesses casos, restrições devem ser incorporadas ao problema de modo a garantir o funcionamento no modo axial.

Ainda no campo da parametrização, o modelo utilizado assume que a hélice é gerada a partir do plano condutor. Contudo, em problemas reais, a hélice é geralmente conectada ao cabo coaxial por meio de uma sonda linear. Dessa forma, o tamanho dessa sonda poderia ser inserida no problema como variável de otimização

No que diz respeito à modelagem da antena por meio do método dos momentos, o modelo apresentado pode ser modificado para levar em conta a condutividade finita dos condutores e também o fato do plano condutor ser finito. Embora espera-se que esses parâmetros tenham pouca influência na distribuição da corrente e, consequentemente, no ganho e na diretividade da antena, seria interessante uma análise da influência desses parâmetros.

Outra característica que influencia o cálculo da impedância de entrada é a forma como a

fonte do problema é modelada. Nesse trabalho utilizou-se o modelo Delta-Gap que é conhecido pela sua facilidade de implementação. Entretanto, existem modelos, como o caso do Magnetic frill [18], que proporcionam uma melhor aproximação para o cálculo da impedância de entrada que poderia ser incorporado ao modelo.

## Referências Bibliográficas

- [1] Balanis, *Antenna Theory Analysis and Design*. New Jersey, 2005.
- [2] A. Djordjevic, A. Zajic, M. Ilie, and G.L.Stuber, "Optimization of helical antennas," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 48(6), p. 107-106, December 2006.
- [3] E. D. Caswell, "Analysis of a helix antenna using a moment method approach, with curved basis and testing functions," *Thesis*, vol. 1, pp. 1-71, 1998.
- [4] J. Kraus, "Helical beam antennas," *Electronics*, vol. 20, pp. 109-111, April 1947.
- [5] W. Stutzman, *Antenna Theory and Design*. New York., 1998.
- [6] J. D. Kraus, *Antennas*. Mc Graw-Hill, 1997.
- [7] A. Djordjevic, A. Zajic, M. Ilie, and G.L.Stuber, "Design of optimal ground conductor for the helical antenna," in *ETRAN Conference*, June 2006.
- [8] Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. New York, 1988.
- [9] T. Tice and J. Kraus, "The influence of conductor size on the properties of helical beam antennas," *Proc. IRE*, vol. 27, p. 1296, 1949.
- [10] H. King and J. Wong, "Characteristics of 1 to 8 wavelength uniform helical antennas," *IEEE Trans Antennas Propagation*, vol. AP-28, pp. 291-296, March 1980.
- [11] J. Wong and H. King, "Empirical helix antennas design," in *Antenna and Propagation Society International Symposium*, vol. 20, pp. 366-369, May 1982.
- [12] D. Emerson, *The gain of the axial-mode helix antenna*, vol. 4. Antenna Compendium, 1995.
- [13] S. Zhao, C. Fumeaux, and C. Coleman, "Optimal helical antenna with continuously varying radius using evolutionary optimizers," *IEEE*, vol. 1, p. 1:11, 2011.
- [14] R.R.Saldanha, R. Takahashi, J. Vasconcelos, and J. Ramirez, "Adaptive deep-cut method in ellipsoidal optimization for electromagnetic design - magnetism," *IEEE Transactions on magnetism*, vol. Vol.35, p. No.3, maio 1999.
- [15] J. C. Oliveira, M. Paixão, R. Adriano, E. Silva, and R. R. Saldanha, "Improvement of helical antennas using a deep cut algorithm," *IMOC*, p. 1 a 4, agosto 2013.

- [16] R. Harrington, *Field Computation by Moment Method*. New York, 1968.
- [17] R. Mittra, *Stability and Convergence of Moment Method Solutions*. Springer-Verlag, 1975.
- [18] R. Harrington, "Matrix methods for field problems," *IEEE*, vol. 55, pp. 136–149, 1967.
- [19] D. Vieira, A. Lisboa, and R. Saldanha, "An enhanced ellipsoid method for electromagnetic devices optimization and design," *IEEE*, vol. 46(8), p. 1, August 2010.
- [20] L. Khachiyan, "A polynomial algorithm in linear programming soviet," *Math Matekon*, vol. 20, pp. 191–194, 1979.
- [21] D. Ludin and Namirovski, "Informational complexity and efective methods for solving convex programming problrms," *Matekon*, vol. 13, pp. 25–45, 1977.
- [22] N. Shor, "Extension in convex programming problems," *Kibernetics*, vol. 13(1), pp. 94–95, 1977.
- [23] R. H. Takahashi, *Otimização Escalar e Vetorial*, vol. 2. UFMG, janeiro 2007.
- [24] R. Saldanha, J. Coulomb, A. Foggia, and J. Sabonnadière, "a dual method for constrained optimisation design in magnetostatic problems"," in *CEFC90 Conference Proceedings, Toronto*, 1990.
- [25] J. Ecker and M. Kupferschmid, *An Ellipsoid Algorithm for Nonlinear Programming*, vol. 27. Mathematical Programming, 1983.
- [26] M. Tod, *The Many Facets of linear Programming*. march, 15 2002.