

UFMG

Dinâmica de Emaranhamento em um Sistema Multipartido

por

Alberto Luiz de Paula Júnior

Dissertação submetida como requisito parcial para
obtenção do grau de mestre em Física.

Orientadora: Maria Carolina Nemes.

Co-orientador: Dagoberto da Silva Freitas.

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Física

5 de agosto de 2014

“A tarefa não é tanto ver o que ninguém viu ainda, mas pensar o que ninguém pensou sobre algo que todos veem.”

Arthur Schopenhauer

Resumo

No nosso trabalho estudamos a dinâmica de emaranhamento em um sistema de muitos corpos. O modelo que usamos consiste de um oscilador (oscilador principal) linearmente acoplado a N outros osciladores. Inicialmente, o oscilador principal é preparado em uma superposição de dois estados coerentes enquanto os N outros osciladores estão no estado fundamental. A partir desse estado inicial conseguimos obter a evolução temporal do sistema de forma analítica. Dividimos o sistema em três partes arbitrárias e quantificamos o emaranhamento, via concorrência, entre as bipartições. Vimos que a concorrência entre qualquer bipartição depende da superposição entre os dois estados coerentes que formam a superposição do estado inicial e do número médio de excitações em cada partição. Mostramos que o emaranhamento residual nessas tripartições está sempre presente. Por fim, obtivemos uma relação hierárquica de emaranhamento entre o oscilador principal e partições formadas pelos N outros osciladores. Para tempos suficientemente longos, as excitações do oscilador principal são completamente transferidas para os N outros osciladores e estes passam a ficar emaranhados.

Abstract

We studied the entanglement dynamics of a many body system. The model that we used consists of a harmonic oscillator (main oscillator) linearly coupled to N others. Initially, the main oscillator is prepared in a superposition of two coherent states and the N others in the ground states. From this initial state we obtain the temporal evolution of the system analytically. We divide this system in three arbitrary partitions and we quantify the entanglement, by concurrence, between any two partitions. We show that the concurrence of any two partitions depends on the overlap between the two coherent states forming the initial superposition of the main oscillator and the distribution of excitations in the partitions. We also show that the residual entanglement is always present. Finally, we obtain a hierarchy of entanglement between the main oscillator and partitions formed by the N others. For long times, the excitations of the main oscillator are completely transferred to the N others and these are found entangled.

Agradecimentos

Gostaria de fazer um agradecimento especial a Carol. Pela oportunidade de conhecer e trabalhar com essa pessoa fantástica. Uma pessoa tão apaixonada pela física que uma simples conversa com ela já nos motivava a querer estudar mais e mais. Muito obrigado Carol! Podexá que sempre que tiver oportunidade falarei para os meus alunos sobre você.

Ao Dagoberto, que me acompanhou durante todo esse trabalho e sempre me ajudou quando eu precisei, parava de fazer o que estava fazendo para me ajudar, sem ele dificilmente esse trabalho teria sido concluído. Ao Zézim, um dos idealizadores desse trabalho, que também sempre tirou minhas dúvidas e sempre tinha uma história para contar. Ao Zé, que nessa reta final conseguiu arrumar um tempo para ler e corrigir minha dissertação. Ao Nil, Romeu, Raphael, Arthur e todos do grupo de pesquisa que de alguma forma contribuíram para esse trabalho.

Aos meus pais e irmão, que sempre me apoiaram, mesmo quando eu falei que queria fazer física, e não mediram esforços para que eu pudesse estar aqui. A Rosana, que sempre esteve ao meu lado compartilhando os momentos bons e ajudando a superar os ruins. Ao Caio e a Dorinha, pelas infinitas caronas e estarem sempre à disposição para ajudar.

Ao Pumba, Dalso e Gustavo, que fizeram desta estadia em BH mais divertida e prazerosa. Pelas nossas discussões sobre física, futebol ou assuntos avulsos que duravam a noite toda. Ao Mr. Davi pelas inúmeras discussões. A todos os amigos, físicos e não físicos, que de alguma maneira, contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos funcionários e professores da física e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Muito obrigado a todos!

Sumário

Resumo	ii
Abstract	iii
Agradecimentos	iv
Lista de Figuras	vii
1 Introdução	1
2 Fundamentação Teórica	4
2.1 O estado quântico	4
2.2 Operador densidade	6
2.2.1 Estados Puros	6
2.2.2 Estado misto	8
2.3 Estados Coerentes	11
2.3.1 Oscilador Harmônico	12
2.3.2 Definindo um estado coerente	13
2.3.3 Evolução temporal de um estado coerente	15
2.3.4 Propriedades de estados coerentes	17
2.4 Sistemas compostos	18
2.5 Emaranhamento	20
2.5.1 Concorrência	21
2.5.2 Emaranhamento Residual	24
3 Dinâmica dos osciladores	26
3.1 Hamiltoniana do sistema	27
3.2 Dinâmica	29
3.3 Dinâmica de excitações	35
3.4 Resultados Numéricos	39
4 Concorrência	45
4.1 Concorrência entre o oscilador central e o banho	45
4.2 Concorrência entre o oscilador central e partes do banho	55

4.3	Concorrência entre os próprios osciladores do banho	64
5	Emaranhamento Residual	69
5.1	Resultados Numéricos	71
5.1.1	Partição A contendo 900 osciladores	72
5.1.2	Partição A contendo 100 osciladores	74
6	Conclusão	76
A	Cálculo da Concorrência	78
	Referências Bibliográficas	83

Lista de Figuras

3.1	Representação do modelo que estamos estudando. Cada esfera corresponde a um oscilador. A esfera central é o oscilador principal, enquanto as demais são os osciladores do banho. Cada oscilador do banho se acopla somente com o central via a constante g_j . Note que os osciladores do banho não interagem entre si.	27
3.2	Distribuição de frequência dos osciladores do banho. Os osciladores estão linearmente distribuídos com frequências entre 0.5 e 1.5. . . .	40
3.3	Dinâmica do número médio de excitações do sistema. A linha tracejada corresponde às excitações do oscilador principal, dada pela função $\Xi(t)$. Enquanto que a linha contínua representa as excitações do banho, dada pela função $\Theta(t)$	41
3.4	Representação de como foram feitas as partições do banho. Primeiro, temos uma associação entre o k -ésimo oscilador do banho e sua frequência ω_k . Dividimos o banho em 10 partes, e para cada parte associamos uma função Θ_i . As partições são simétricas em relação a frequência central.	42
3.5	Dinâmica do número médio de excitações de cada partição. Os osciladores que compõem cada partição podem ser identificados através da figura (3.4). Note que depois de estabilizado o sistema, a maior parte das excitações do banho estão contidas nas partições próximas à frequência de ressonância.	43
3.6	Distribuição das excitações para cada oscilador do banho em um tempo no qual o sistema já se estabilizou e todas as excitações estão no banho. Note a presença do pico para os osciladores mais próximos da frequência de ressonância.	44
3.7	Curva vermelha representa o fit de uma função Lorentziana. Já os pontos pertencem a figura (3.6), corresponde à distribuição de excitações dos osciladores do banho. Note que o fit Lorentziano está em boa aproximação com os resultados numéricos.	44
4.1	Concorrência entre o banho e o oscilador central em função da escala de tempo $\omega_0 t$ (adimensional) para o caso em que o <i>overlap</i> $\langle \alpha_0 \beta_0 \rangle = 0.98$. Na figura da esquerda os coeficientes do estado (3.17) se relacionam da seguinte maneira $b = -a$. Já na figura da direita $b = a$	53

4.2	Concorrência entre o banho e o oscilador central em função da escala de tempo $\omega_0 t$ (adimensional) para o caso em que o <i>overlap</i> $\langle \alpha_0 \beta_0 \rangle = e^{-18}$. Na figura da esquerda os coeficientes do estado (3.17) se relacionam da seguinte maneira $b=-a$. Já na figura da direita $b=a$	54
4.3	A figura da direita é um <i>zoom</i> da região do platô da figura da esquerda. A escala vertical do gráfico da esquerda está no intervalo de 0,99999995 a 1.00000005	55
4.4	Ilustração de como as partições do banho foram feitas. Cada partição foi centrada na frequência do oscilador principal, de modo que as partições menores são englobadas pelas maiores. Associamos uma função Θ_m para cada partição, sendo que m indica o número de osciladores na respectiva partição.	58
4.5	Dinâmica do número médio de excitações nas cinco partições com 100, 300, 500, 700 e 900 osciladores, respectivamente.	59
4.6	As cinco primeiras curvas, ordenadas de baixo para cima, correspondem à concorrência entre o oscilador central e partições com 100, 300, 500, 700 e 900 osciladores, respectivamente. A curva mais externa corresponde a concorrência entre o oscilador central e todo o banho. Aqui, o <i>overlap</i> é $\langle \alpha_0 \beta_0 \rangle \approx 0.92$	60
4.7	As cinco primeiras curvas, ordenadas de baixo para cima, correspondem à concorrência entre o oscilador central e partições com 100, 300, 500, 700 e 900 osciladores, respectivamente. A curva mais externa corresponde a concorrência entre o oscilador central e todo o banho. Aqui, o <i>overlap</i> é $\langle \alpha_0 \beta_0 \rangle \approx 0.015$	60
4.8	As cinco primeiras curvas, ordenadas de baixo para cima, correspondem à concorrência entre o oscilador central e partições com 100, 300, 500, 700 e 900 osciladores, respectivamente. A curva mais externa corresponde a concorrência entre o oscilador central e todo o banho. Aqui, o <i>overlap</i> é $\langle \alpha_0 \beta_0 \rangle = e^{-18}$	61
4.9	<i>Figura da esquerda:</i> Concorrência entre o oscilador principal e a partição com 900 osciladores do banho, para o caso em que $\langle \alpha_0 \beta_0 \rangle = e^{-18}$. <i>Figura da direita:</i> Termo da concorrência referente à distinguibilidade, curva vermelha, enquanto que a curva azul representa o termo referente à contribuição externa.	62
4.10	<i>Figura da esquerda:</i> Curva azul corresponde ao termo de contribuição externa. Já a curva vermelha corresponde à dinâmica das excitações dos osciladores fora do sistema de interesse. <i>Figura da direita:</i> Comparação entre a concorrência $C_{(c,900)}$, curva preta, e as excitações dos osciladores fora do sistema de interesse, curva vermelha.	63
4.11	Ilustração de como foi feita a divisão do banho. A partição A foi centrada na frequência de ressonância, a ela associamos a função Θ_A . A partição B é complementar a A , e a ela associamos a função Θ_B	65

4.12 Gráficos das funções Θ_A e Θ_B para os três casos em que o banho foi dividido. Nos três gráficos Θ_A corresponde a curva preta, e Θ_B a curva vermelha. No primeiro gráfico Θ_A contém 100 osciladores, no segundo 500 e no terceiro 900. 66

4.13 Concorrência entre as partições A e B do banho para três casos. No primeiro caso a partição A contém 100 osciladores, curva preta. No segundo caso a partição A contém 500 osciladores, curva vermelha. No terceiro caso a partição A contém 900 osciladores, curva azul. Aqui o *overlap* é $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = e^{-18}$ 67

5.1 Figura da esquerda: Curva interna corresponde a $C_{(c,A)}^2 + C_{(c,B)}^2$, e curva mais externa corresponde a $C_{(c,AB)}^2$. Figura da direita: emaranhamento residual. Para construção desses gráficos usamos $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = e^{-18}$ e a partição A continha 900 osciladores. 73

5.2 Figura da esquerda: Curva interna corresponde a $C_{(c,A)}^2 + C_{(c,B)}^2$, e curva mais externa corresponde a $C_{(c,AB)}^2$. Figura da direita: emaranhamento residual. Para construção desses gráficos usamos $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \approx 0.98$ e a partição A continha 900 osciladores. 73

5.3 Figura da esquerda: Curva interna corresponde a $C_{(c,A)}^2 + C_{(c,B)}^2$, e curva mais externa corresponde a $C_{(c,AB)}^2$. Figura da direita: emaranhamento residual. Para construção desses gráficos usamos $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = e^{-18}$ e a partição A continha 100 osciladores. 74

5.4 Figura da esquerda: Curva interna corresponde a $C_{(c,A)}^2 + C_{(c,B)}^2$, e curva mais externa corresponde a $C_{(c,AB)}^2$. Figura da direita: emaranhamento residual. Para construção desses gráficos usamos $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \approx 0.98$ e a partição A continha 100 osciladores. 75

A Carol

Capítulo 1

Introdução

Emaranhamento é uma propriedade fundamental da mecânica quântica sem nenhum análogo na teoria clássica. Segundo Schrödinger [1], é considerado não *um* mas *o* traço característico da mecânica quântica. E foi primeiramente colocado em discussão através das questões levantadas por Einstein, Podolsky e Rosen [2]. Desde então, suas propriedades estão sob constante investigação. Pesquisas nessa área se intensificaram recentemente devido ao seu potencial como recurso para computação e informação quântica [3]. Assim, como qualquer outro recurso, desenvolver uma teoria quantitativa que especifica como o emaranhamento pode ser manipulado se torna necessário.

Além de sistemas de dois níveis (qubits), sistemas de muitos graus de liberdade têm sido alvo de estudos da teoria de emaranhamento. Compreender emaranhamento em sistemas envolvendo muitos graus de liberdade tem despertado grande interesse na comunidade científica. E muitos trabalhos tem sido desenvolvidos recentemente na literatura [4–8].

Determinar se um estado é emaranhado ou não, não é uma tarefa fácil. Para o caso de sistemas de duas partes, sendo cada parte um qubit, um bom quantificador de emaranhamento é a concorrência [9, 10]. Porém, torna-se mais difícil quantificar emaranhamento em sistemas de muitas partes. Em tais sistemas há uma dificuldade de saber se o emaranhamento encontrado é emaranhamento parcial, ou seja, entre bipartições. Ou se é de fato emaranhamento genuíno multipartido (GME, *genuine multipartite entanglement*), isto é, se o emaranhamento é compartilhado por todas as partes do sistema. A noção de concorrência generalizada

conhecida como concorrência de GME [6, 7], foi introduzida na tentativa de fazer uma distinção entre (GME) e emaranhamento parcial.

Para estados puros compostos de três qubits existem teorias sobre o emaranhamento bem desenvolvidas [11]. E para tais sistemas passamos a ter resultados matemáticos mais sólidos. Para esse caso de sistemas compostos por três partes GME passa a ser chamado de emaranhamento residual.

O objetivo desse trabalho é estudar as propriedades dinâmicas do emaranhamento em um sistema de muitos corpos, com ênfase na distribuição de emaranhamento. Inicialmente dividiremos o sistema em várias partes e faremos um estudo de como o emaranhamento se distribui entre bipartições arbitrárias. Em seguida iremos focar nossa investigação para o caso em que o sistema é dividido em três partes. No caso das bipartições utilizaremos a concorrência como quantificador do emaranhamento; já nas tripartições calcularemos o emaranhamento residual.

Nosso modelo consiste de um oscilador harmônico linearmente acoplado a N outros osciladores. Tal modelo é bem conhecido em ótica quântica principalmente no estudo de cavidades. Quando quantizamos o campo eletromagnético dentro de uma cavidade chegamos a uma hamiltoniana idêntica a de um oscilador harmônico de massa um [12, 13]. Logo a álgebra dos dois sistemas, oscilador harmônico e o modo de um campo dentro da cavidade, é a mesma. Esse modelo que iremos estudar pode, por exemplo, ser usado para mapear um modo de um campo dentro de uma cavidade sendo dissipado. O sistema de interesse é um oscilador, que vamos chamar de oscilador principal. Esse oscilador poderia representar o modo dentro da cavidade. Os outros N osciladores desempenham o papel de banho térmico, seriam os agentes responsáveis pela dissipação. Esse acoplamento simula uma interação entre um sistema quântico e o ambiente que o envolve. Veremos no capítulo 3 que a hamiltoniana que utilizamos é a mesma usada para descrever a dissipação de modo do campo.

No capítulo 2 iremos apresentar as ferramentas que utilizamos no desenvolvimento desse trabalho. No capítulo 3 discutiremos a dinâmica do sistema descrito acima. Veremos que esse modelo apresenta solução analítica exata ao supor o estado inicial do oscilador como sendo um estado coerente. Falaremos da dinâmica do número médio de excitações, e como essas excitações irão se distribuir no banho.

Os capítulos 4 e 5 apresentam o estudo principal desse trabalho. No capítulo 4, vamos quantificar o emaranhamento entre bipartições, podendo elas serem compostas por: oscilador principal e banho, oscilador principal e partes do banho e somente entre partes do banho. Já no capítulo 5, dividiremos o sistema em três partes. Uma sendo o oscilador principal e as outras duas oriundas do banho. Em ambos os casos o emaranhamento é função da superposição do estado inicial e do número médio de excitações. Encerramos esse texto com o capítulo de conclusão e um apêndice que apresenta com mais detalhes como obtivemos a expressão da concorrência. Este trabalho foi recentemente publicado na revista *Physical Review A* [14].

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo apresentaremos algumas ferramentas básicas que foram utilizadas no desenvolvimento deste trabalho. Discutiremos a noção de estados quânticos e operador densidade, bem como obter sua evolução no tempo. Daremos uma atenção especial a uma classe de estados semiclássicos [13, 15] denominados estados coerentes. Por fim, discutiremos o emaranhamento e uma medida de emaranhamento: a concorrência.

2.1 O estado quântico

O estado quântico de um sistema físico pode ser caracterizado por um vetor $|\psi\rangle$ pertencente a um espaço vetorial complexo denominado espaço de Hilbert [15]. A partir do conhecimento do vetor de estado $|\psi\rangle$ conseguimos obter toda informação possível sobre o sistema.

Em boa parte dos problemas de mecânica quântica tem-se o interesse em estudar a dinâmica de um dado sistema. Para isso, devemos saber como o vetor de estado evolui no tempo. A dinâmica do vetor de estado $|\psi\rangle$ é dada pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (2.1)$$

sendo \hat{H} a hamiltoniana do sistema. Note que essa é uma equação determinística, de modo que ao resolvê-la, conseguimos obter o vetor de estado em qualquer tempo, desde que o estado inicial seja conhecido. A solução da equação (2.1) é da forma:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (2.2)$$

onde $\hat{U}(t, t_0)$ é o operador evolução temporal. Substituindo a equação (2.2) em (2.1), obtemos a equação de Schrödinger para o operador evolução temporal [16]:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H} \hat{U}(t, t_0). \quad (2.3)$$

Portanto, dada a hamiltoniana do sistema, podemos obter o operador evolução temporal através da resolução da equação (2.3). Se \hat{H} é independente do tempo, a solução será da forma:

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp \left[\frac{-i\hat{H}(t - t_0)}{\hbar} \right]. \quad (2.4)$$

Obtido o operador evolução temporal, basta aplicá-lo no estado inicial para obtermos o estado do sistema em um dado tempo t . Nos casos em que \hat{H} independe do tempo, podemos fazer uma utilização direta da solução (2.4) na equação (2.2). Uma discussão mais detalhada a respeito do operador evolução temporal e suas propriedades pode ser encontrada nas referências [15–17].

Embora $|\psi(t)\rangle$ evolui deterministicamente, sua interpretação é probabilística. Portanto, obtido $|\psi(t)\rangle$ podemos, por exemplo, calcular o valor médio de uma variável dinâmica \hat{A} em um dado tempo t , pela fórmula:

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle. \quad (2.5)$$

O vetor de estado é apenas uma maneira, com suas limitações, de descrever o estado quântico de um sistema. Existe outro formalismo, mais completo, conhecido como operador densidade que será discutido na próxima seção.

2.2 Operador densidade

Na seção anterior vimos que podemos descrever um sistema quântico através do vetor de estado. Porém, existem alguns sistemas que não são completamente descritos apenas por um único vetor de estado. Um exemplo são átomos emitidos por um forno a uma temperatura T . Nesse caso não podemos garantir que os átomos tem o mesmo estado quântico, e não temos conhecimento do estado quântico de cada átomo. Uma informação que teríamos acesso, por exemplo, seria da estatística da energia cinética dos átomos [15]. Para poder descrever esse tipo de sistema, utilizamos uma ferramenta matemática mais geral, comparado ao vetor de estado, conhecida como operador densidade [18].

Esse formalismo foi introduzido em 1927 por J. von Neumann, descreve quantitativamente sistemas físicos compostos por estados puros e por uma mistura estatística de estados [16].

2.2.1 Estados Puros

O estado quântico de um sistema é dito puro, quando este puder ser completamente descrito, através de um vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ [19]. O operador densidade para um estado puro é definido como:

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|. \quad (2.6)$$

Tal operador, que também pode ser interpretado como um projetor no estado $|\psi(t)\rangle$, tem as seguintes propriedades:

- Traço unitário:

$$\text{Tr}\hat{\rho}(t) = 1; \quad (2.7)$$

- Hermiticidade:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(t)^\dagger; \quad (2.8)$$

- Positividade semidefinida:

$$\hat{\rho}(t) \geq 0. \quad (2.9)$$

Tanto $|\psi(t)\rangle$ quanto $\hat{\rho}(t)$ descrevem o mesmo sistema físico, portanto é interessante obter uma equação que forneça a evolução temporal para o operador densidade. Derivando a equação (2.6) e usando (2.1), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= \left(\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle\right)\langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle\left(\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\right) \\ &= \frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| + \frac{1}{(-i\hbar)}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\hat{H}(t) \\ &= \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Finalmente obtemos a equação de movimento para o operador densidade conhecida como equação de Liouville-von Neumann [20, 21]:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (2.11)$$

Portanto, para obtermos a evolução do operador densidade, basta conhecermos a hamiltoniana do sistema e resolvermos a equação (2.11). Note que essa equação é válida independente da forma da hamiltoniana.

O operador densidade é comumente representado em uma forma matricial, dada uma base. Nesta representação ele é conhecido como *matriz densidade*, cujos elementos são dados por $\rho_{ij} = \langle u_i | \hat{\rho} | u_j \rangle$.

Assim como foi feito para o vetor de estado, podemos obter também valores médios de variáveis dinâmicas, para um dado tempo t , a partir do conhecimento do operador densidade. Para isto, primeiro vamos considerar uma base ortonormal $|u_n\rangle$, de modo que a relação de completeza $\mathbb{1} = \sum_n |u_n\rangle\langle u_n|$ é satisfeita, onde $\mathbb{1}$ é o operador identidade. Em seguida inserimos essa completeza na equação (2.5) obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{A} \rangle(t) &= \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle \\
&= \langle \psi(t) | \left(\sum_n |u_n\rangle \langle u_n| \right) \hat{A} | \psi(t) \rangle \\
&= \sum_n \langle u_n | \hat{A} | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | u_n \rangle \\
&= \sum_n \langle u_n | \hat{A} \hat{\rho}(t) | u_n \rangle \\
&= \text{Tr} \{ \hat{A} \hat{\rho}(t) \}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Temos, então, dois formalismos para descrever um dado sistema. Como o sistema físico é o mesmo, todos os resultados obtidos a partir do conhecimento do vetor de estado, também são obtidos a partir do operador densidade.

2.2.2 Estado misto

Nas seções anteriores, vimos como estudar a dinâmica de sistemas descritos por estados puros via o formalismo de vetor de estado e operador densidade. Porém, como havíamos dito, existem sistemas que não podem ser completamente descritos apenas por um vetor de estado.

Podemos imaginar um sistema de dois níveis em que cada partícula teria probabilidade p_1 de estar no estado $|\psi_1\rangle$ e probabilidade $p_2 = 1 - p_1$ de estar no estado $|\psi_2\rangle$. Um exemplo seria o experimento de Stern-Gerlach, no qual os átomos de prata teriam probabilidade p_1 de sair com o spin *up* e probabilidade p_2 de sair com o spin *down*. Quando o sistema é liberado, não sabemos, ao certo, qual o estado quântico das partículas. A única informação que temos é a distribuição de probabilidades. Dizemos, então, que o sistema está em um estado misto, sendo fruto da nossa ignorância clássica¹ [18]. Para descrever tais sistemas, o formalismo do operador densidade se torna imprescindível.

O operador densidade para um estado misto é definido como [16]:

¹Falamos ignorância clássica no sentido que mesmo preparando o estado não temos conhecimento completo a respeito dele.

$$\hat{\rho}(t) \equiv \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)|, \quad (2.13)$$

sendo $|\psi_i(t)\rangle$ os vetores de estado que caracterizam os possíveis estados do sistema. Note que os vetores não são necessariamente ortogonais, p_i é a probabilidade do sistema estar no estado $|\psi_i(t)\rangle$, que satisfaz a seguinte relação:

$$\sum_i p_i = 1. \quad (2.14)$$

Podemos facilmente verificar, a partir de (2.13), que as propriedades, dadas pelas equações (2.7), (2.8) e (2.9), são válidas tanto para estados puros quanto para estados mistos. E que o operador densidade para estados puros (2.6) é apenas um caso particular de (2.13), em que $n = 1$.

Para obtermos a equação que fornece a evolução temporal do operador densidade podemos seguir os mesmos passos da dedução da equação (2.11). Note que, devido à linearidade da equação de Schrödinger, obtemos a mesma equação de movimento para o operador densidade no caso de estados mistos. Portanto, a equação de Liouville-von Neumann é uma equação geral envolvendo o operador densidade, independente se o estado é puro ou misto.

Continuando o estudo comparativo entre estados puros e mistos, o valor médio de uma variável dinâmica em um sistema composto por estados mistos é dado por:

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \sum_i p_i \langle \psi_i(t) | \hat{A} | \psi_i(t) \rangle. \quad (2.15)$$

Sendo que nesse caso o valor esperado é pesado pelas probabilidades p_i . Seguindo o mesmo procedimento usado na seção anterior, inserindo uma completude na equação (2.15) obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{A} \rangle(t) &= \sum_i p_i \langle \psi_i(t) | \hat{A} | \psi_i(t) \rangle \\
 &= \sum_i p_i \langle \psi_i(t) | \left(\sum_n |u_n\rangle \langle u_n| \right) | \hat{A} | \psi_i(t) \rangle \\
 &= \sum_n \langle u_n | \hat{A} \left(\sum_i p_i | \psi_i(t) \rangle \langle \psi_i(t) | \right) | u_n \rangle \\
 &= \sum_n \langle u_n | \hat{A} \hat{\rho}(t) | u_n \rangle = Tr \{ \hat{A} \hat{\rho}(t) \}.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Portanto, todos os resultados obtidos para o caso de estados puros podem ser estendidos para estados mistos. Ou seja, através do formalismo do operador densidade conseguimos descrever tanto sistemas descritos por estados puros quanto por estados mistos, ficando claro o porquê do formalismo de operador densidade ser mais geral do que o de vetor de estado.

O operador densidade sempre pode ser escrito em função dos estados puros devidamente multiplicados pelas suas probabilidades. Mas nem sempre é fácil escrever ou encontrar o operador densidade na forma (2.13). Porém, existe um teste para determinar se o sistema de interesse é puro ou misto. Primeiro, observe que para estados puros temos:

$$\hat{\rho}^2 = (|\psi\rangle \langle \psi|) (|\psi\rangle \langle \psi|) = \hat{\rho} \implies Tr \{ \hat{\rho}^2 \} = Tr \{ \hat{\rho} \} = 1. \tag{2.17}$$

Para estados mistos, temos

$$\hat{\rho}^2 = \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) \left(\sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \right) = \sum_i \sum_j p_i p_j |\psi_i\rangle \langle \psi_i | \psi_j\rangle \langle \psi_j| \neq \hat{\rho}, \tag{2.18}$$

o que implica em

$$\begin{aligned}
Tr\{\hat{\rho}^2\} &= \sum_n \sum_i \sum_j p_i p_j \langle n|\psi_i\rangle \langle \psi_i|\psi_j\rangle \langle \psi_j|n\rangle \\
&= \sum_i \sum_j p_i p_j |\langle \psi_i|\psi_j\rangle|^2 \\
&\leq \left[\sum_i p_i \right]^2 = 1.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

A igualdade só seria satisfeita se $|\psi_i\rangle = |\psi_j\rangle$ para qualquer i , e isso só ocorre no caso de estados puros. Portanto, uma maneira de saber se o estado é puro ou misto, é calcular $Tr\{\hat{\rho}^2\}$. Se o resultado for igual a 1 o estado é puro, menor que 1 o estado é misto.

Pode acontecer de começarmos com um estado puro e certas operações fazerem com que o estado se torne misto. Um exemplo de tal operação é, dado um sistema composto por dois subsistemas, dependendo das condições do estado total, ao realizarmos o traço parcial em um certo subsistema², podemos ter, como resultado um estado misto associado ao outro subsistema. Isso significa que em mecânica quântica nem sempre o conhecimento do todo implica no conhecimento, das partes [1]. Esse aparecimento do estado misto surge como fruto da nossa ignorância quântica. Ignorância essa devido ao próprio formalismo da mecânica quântica que em certas ocasiões não nos permite ter um conhecimento completo a respeito do estado quântico do sistema de interesse. Essa é uma consequência do estado total ser emaranhado, isso será visto com mais detalhes nas próximas seções.

2.3 Estados Coerentes

Nesta seção faremos uma breve revisão sobre estados coerentes e suas propriedades, visto que o modelo utilizado em nosso trabalho apresenta solução exata se os usarmos como o estado inicial do sistema. O estudo aqui apresentado foi baseado nas referências [13, 15].

² Realizar essa operação basicamente significa que estamos estudando as variáveis de um subsistema e desprezando as variáveis do outro subsistema.

Estados coerentes são conhecidos como estados semiclássicos. Apesar de serem estados quânticos, os valores médios das grandezas dinâmicas, como por exemplo posição e momento, são os mais próximos possíveis do correspondente clássico para o caso do oscilador harmônico. Antes de definirmos estados coerentes, faremos um breve estudo a respeito do oscilador harmônico.

2.3.1 Oscilador Harmônico

A hamiltoniana do oscilador harmônico quântico é dada por:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{X}^2}{2}, \quad (2.20)$$

sendo ω a frequência do oscilador, m a massa dos oscilador e \hat{X} e \hat{P} os operadores posição e momento, respectivamente. Podemos definir dois operadores não hermitianos \hat{a} e \hat{a}^\dagger como combinações lineares de \hat{X} e \hat{P} , da seguinte forma:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{X} + \frac{i\hat{P}}{m\omega} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{X} - \frac{i\hat{P}}{m\omega} \right). \quad (2.21)$$

Os operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} são conhecidos como operadores de criação e destruição, respectivamente. E obedecem a seguinte relação de comutação:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (2.22)$$

Definindo o operador número como $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, é fácil mostrar que:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.23)$$

Note que, \hat{H} é uma função linear de \hat{N} . Então, se $|n\rangle$ é um autovetor de \hat{N} com autovalor n , o ket $|n\rangle$ também será um autovetor de \hat{H} com autovalor:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.24)$$

Seguindo os passos da referência [16] é possível mostrar que:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle; \quad (2.25)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.26)$$

Observe que, ao aplicarmos \hat{a} em $|n\rangle$ obtemos um estado diminuído de um quanta de energia enquanto que, ao aplicarmos \hat{a}^\dagger em $|n\rangle$ obtemos um estado acrescido de um quanta de energia. Por essas razões esses operadores são conhecidos como operadores de destruição e criação.

Essa foi uma breve análise a respeito da estrutura algébrica do oscilador harmônico. Um estudo mais completo pode ser encontrado na referência [16]. As relações que obtivemos são suficientes para darmos continuidade no estudo sobre estados coerentes.

2.3.2 Definindo um estado coerente

Um estado coerente $|\alpha\rangle$ pode ser definido como o autoestado do operador destruição \hat{a} com autovalor α , isto é:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.27)$$

Como os autoestados do oscilador harmônico $|n\rangle$ formam uma base completa, podemos expandir os estados coerentes em termos dela, ou seja:

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle. \quad (2.28)$$

Aplicando o operador \hat{a} no estado (2.28) obtemos:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_n c_n \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (2.29)$$

Substituindo a equação (2.29) na equação (2.27), e usando (2.28), obtemos uma relação de recorrência que nos permite encontrar todos os coeficientes c_n em termos do coeficiente c_0 :

$$c_{n+1} = \frac{\alpha c_n}{\sqrt{n+1}} \implies c_n = \frac{\alpha^n c_0}{\sqrt{n!}}. \quad (2.30)$$

A partir da relação acima observamos que basta encontrar o valor de c_0 que os outros coeficientes serão determinados. Para determinar c_0 , vamos normalizar o ket $|\alpha\rangle$. Nesse caso os coeficientes satisfazem a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \alpha \rangle = 1 &\implies \sum_n |c_n|^2 = 1, \\ |c_0|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} &= |c_0|^2 e^{|\alpha|^2} = 1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Sem perda de generalidade podemos considerá-lo real e positivo, logo temos que:

$$c_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}. \quad (2.32)$$

Finalmente obtemos o estado coerente escrito na base de estado de número:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.33)$$

Uma outra maneira de se obter o estado coerente é através do operador $\hat{D}(\alpha)$ definido por:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}. \quad (2.34)$$

Fazendo $\hat{A} = \alpha \hat{a}^\dagger$ e $\hat{B} = -\alpha^* \hat{a}$ temos que o comutador $[\hat{A}, \hat{B}] = |\alpha|^2$. E considerando que se dois operadores comutam com seus comutadores podemos escrever:

$$e^{\hat{A} + \hat{B}} = e^{-\frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{2}} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}, \quad (2.35)$$

Aplicando essa relação no nosso caso podemos escrever $\hat{D}(\alpha)$ como:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}. \quad (2.36)$$

Note que $e^{-\alpha^* \hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$. Aplicando o operador $\hat{D}(\alpha)$ no vácuo (ket $|0\rangle$), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \hat{D}(\alpha)|0\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}|0\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger}|0\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!}|0\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Por fim temos que:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle. \tag{2.38}$$

Portanto $\hat{D}(\alpha)$ é uma transformação unitária que leva o estado fundamental do oscilador harmônico $|0\rangle$ no estado coerente $|\alpha\rangle$. No espaço das coordenadas tal operação corresponde realizar uma translação na função de onda do estado fundamental do oscilador harmônico.

2.3.3 Evolução temporal de um estado coerente

Até agora vimos a definição de estados coerentes e uma maneira de obtê-los a partir do estado fundamental do oscilador harmônico. Vamos ver, agora, como o estado coerente evolui considerando como sistema o oscilador harmônico. Considere que o estado inicial do sistema no tempo $t = 0$ é um estado coerente, ou seja, $|\psi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle$. Para obtermos o estado evoluído usamos a equação (2.2) e a hamiltoniana (2.23), logo temos:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\alpha_0\rangle \\
 &= e^{-i\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})t} \left(e^{-|\alpha_0|^2/2} \sum_n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \right) \\
 &= e^{-i\omega t/2} e^{-|\alpha_0|^2/2} \sum_n \frac{(\alpha_0 e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Portanto, observamos que o estado evoluído permanece na forma de um estado coerente. A única mudança feita foi alterar α_0 por $e^{-i\omega t}\alpha_0$ e multiplicar o ket obtido por $e^{-i\omega t/2}$, que é justamente uma fase global multiplicando o estado, que não apresenta nenhuma consequência física relevante. A partir da equação de movimento, vemos que a mudança efetiva é no parâmetro α , que evolui no tempo da forma $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$. Então o estado evoluído pode ser escrito como:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} |\alpha_0 e^{-i\omega t}\rangle. \quad (2.40)$$

Agora que temos o estado evoluído, podemos, por exemplo, calcular o valor médio de grandezas dinâmicas de posição e momento. A partir das equações (2.21) podemos escrever os operadores \hat{X} e \hat{P} em função dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger :

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\ \hat{P} &= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (-\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (2.41)$$

e usando a equação (2.5), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \hat{X} \rangle(t) &= \langle \alpha(t) | \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right) | \alpha(t) \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha_0 e^{-i\omega t} + \alpha_0 e^{i\omega t}) \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \text{Re} [\alpha_0 e^{-i\omega t}]; \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{P} \rangle(t) &= \langle \alpha(t) | i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (-\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | \alpha(t) \rangle \\ &= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (-\alpha_0 e^{-i\omega t} + \alpha_0 e^{i\omega t}) \\ &= \sqrt{2m\hbar\omega} \text{Im} [\alpha_0 e^{-i\omega t}]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Portanto, como havíamos dito no início da seção, as equações para os valores médios de posição e momento são similares às equações clássicas para posição e

momento do oscilador harmônico.

2.3.4 Propriedades de estados coerentes

Agora vamos listar algumas propriedades importantes dos estados coerentes.

(a) Relação de incerteza:

Sabemos que em mecânica quântica, posição e momento não podem ser determinados simultaneamente. A medida desses dois observáveis devem obedecer o princípio de incerteza de Heisenberg $\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$. Para um estado coerente calculando ΔX e ΔP obtemos:

$$\begin{aligned}\Delta X &= \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \\ \Delta P &= \sqrt{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}.\end{aligned}\tag{2.44}$$

Portanto vemos que estados coerentes são estados de incerteza mínima

$$\Delta X \Delta P = \frac{\hbar}{2}.\tag{2.45}$$

Note que as incertezas na posição e momento são constantes e independem do parâmetro α . Para $|\alpha| \gg 1$ as amplitudes de oscilação de $\langle \hat{X} \rangle(t)$ e $\langle \hat{P} \rangle(t)$ se tornam muito maiores do que suas respectivas incertezas. Portanto, para valores de $|\alpha|$ suficientemente grande, podemos obter um movimento oscilatório no qual posição e momento, em relação às suas incertezas, podem ser tão bem definidos o quanto desejado. Então podemos dizer que quanto maior $|\alpha|$, mais próximos estamos do movimento do oscilador harmônico clássico.

(b) Produto escalar de dois estados coerentes:

Considere dois estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$. Usando a equação (2.33), o produto escalar $\langle \beta | \alpha \rangle$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\langle \beta | \alpha \rangle &= \left(e^{-|\beta|^2/2} \sum_m \frac{(\beta^*)^m}{\sqrt{m!}} \langle m | \right) \left(e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right), \\
&= e^{-|\beta|^2/2} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{(\beta^* \alpha)^n}{n!}, \\
&= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha\beta^*)}. \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Note que, diferente do estado de número $|n\rangle$, o produto escalar entre dois estados coerentes distintos é diferente de zero. Logo estados coerentes não são estados ortogonais. Do resultado acima temos que $|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}$, então, à medida que $|\alpha - \beta|$ cresce, mais ortogonais os estados vão ficando.

2.4 Sistemas compostos

Antes de falarmos sobre emaranhamento, faremos uma breve revisão a respeito de sistemas compostos. Essa seção é baseada nas referências [20, 22]. Dizemos que um sistema é composto quando este é constituído por duas ou mais partes, sendo essas partes denominadas subsistemas. O exemplo mais simples de sistema composto é um sistema de duas partículas, em que cada uma dessas partículas correspondem a um subsistema.

Para cada subsistema i existe um espaço de Hilbert \mathcal{H}_i associado, com base ortonormal $\{|m^{(i)}\rangle\}$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Para o caso mais simples de duas partículas temos \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 com bases $\{|m^{(1)}\rangle\}$ e $\{|n^{(2)}\rangle\}$. E o espaço de Hilbert do sistema composto é dado pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert de cada subsistema, ou seja, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ sendo sua base constituída pelo produto das bases de cada um dos subsistemas. No caso de duas partículas uma possível base é formada pelo par $\{|m^{(1)}\rangle |n^{(2)}\rangle\}$. Logo, um vetor $|\psi\rangle$ pertencente a \mathcal{H} pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \sum_{m,n} c_{m,n} |m^{(1)}\rangle \otimes |n^{(2)}\rangle \equiv \sum_{m,n} c_{m,n} |m^{(1)}, n^{(2)}\rangle. \tag{2.47}$$

Assim como foi feito no início do capítulo, podemos associar um operador densidade para o sistema composto.

$$\hat{\rho} = \sum_{m,n;m',n'} p_{m,n;m',n'} |m, n\rangle \langle m', n'|. \quad (2.48)$$

Sejam \hat{A}_1 e \hat{B}_2 variáveis dinâmicas pertencentes aos espaços \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , respectivamente. Cada operador atua somente em seu devido espaço. Podemos fazer uma extensão dessas variáveis dinâmicas para o espaço \mathcal{H} como sendo:

$$\hat{A}_1 \longrightarrow \hat{A} = \hat{A}_1 \otimes \mathbb{1}_2, \quad \hat{B}_2 \longrightarrow \hat{B} = \mathbb{1}_1 \otimes \hat{B}_2, \quad (2.49)$$

sendo $\mathbb{1}_i$ o operador identidade atuando no seu respectivo subespaço. Atuando esses operadores no estado $|\psi\rangle$ temos:

$$\begin{aligned} \hat{A}|\psi\rangle &= \sum_{m,n} \hat{A}_1 \otimes \mathbb{1}_2 c_{m,n} |m^{(1)}\rangle \otimes |n^{(2)}\rangle = \sum_{m,n} c_{m,n} \hat{A}_1 |m^{(1)}\rangle \otimes \mathbb{1}_2 |n^{(2)}\rangle \\ &= \sum_{m,n} c_{m,n} \hat{A}_1 |m^{(1)}\rangle \otimes |n^{(2)}\rangle, \\ \hat{B}|\psi\rangle &= \sum_{m,n} \mathbb{1}_1 \otimes \hat{B}_2 c_{m,n} |m^{(1)}\rangle \otimes |n^{(2)}\rangle = \sum_{m,n} c_{m,n} \mathbb{1}_1 |m^{(1)}\rangle \otimes \hat{B}_2 |n^{(2)}\rangle \\ &= \sum_{m,n} c_{m,n} |m^{(1)}\rangle \otimes \hat{B}_2 |n^{(2)}\rangle. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Portanto, quando esses operadores são aplicados em $|\psi\rangle$, eles atuam somente nas variáveis do subespaço ao qual eles pertencem; as variáveis do outro subespaço permanecem inalteradas. Note que essas não são as operações mais gerais possíveis, podemos ter outros tipos de operações. Um exemplo seria uma operação da forma $\hat{A} \otimes \hat{B}|\psi\rangle$. Nesse caso, novamente cada operador atua somente nas variáveis do seu respectivo subespaço.

Suponha que, em um dado sistema composto ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$), estamos interessados somente nas informações de um dos subsistemas. Ou seja, suponha que temos a matriz densidade ρ do sistema composto e queremos obter $\hat{\rho}_1$ ou $\hat{\rho}_2$. Para se obtê-las, fazemos o uso da operação de traço parcial, que é basicamente tomar o traço sob as variáveis do subsistema que não nos interessa, restando assim, somente as variáveis do sistema de interesse. Portanto, podemos escrever $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ como:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_1 &= Tr_2\{\hat{\rho}\}, \\ \hat{\rho}_2 &= Tr_1\{\hat{\rho}\}.\end{aligned}\tag{2.51}$$

As matrizes $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ são conhecidas como matrizes densidades reduzidas do subsistema 1 e 2 respectivamente. E apresentam as mesmas propriedades de matriz densidade estudadas na seção (2.2).

Essas operações são algumas operações básicas em sistemas compostos, que serão úteis no estudo de emaranhamento e foram largamente utilizadas no desenvolver desse trabalho.

2.5 Emaranhamento

Emaranhamento é uma característica exclusiva da mecânica quântica, sem nenhum análogo clássico. Surge devido às superposições quânticas aplicadas a sistemas compostos [23].

Na seção anterior vimos como podemos descrever sistemas compostos. Continuando a discutir o caso de um sistema de duas partes ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$), podemos construir estados do sistema global da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle;\tag{2.52}$$

sendo $|\psi_i\rangle$ um vetor de estado pertencente ao subespaço \mathcal{H}_i . Esses estados são chamados de estados separáveis. Mas note que essa não é a forma mais geral de se construir o vetor $|\psi\rangle$. Nem todos os vetores conseguem ser escritos dessa forma fatorada. Estados em que essa decomposição não é possível são ditos *emaranhados* [24, 25].

Essa é uma definição de emaranhamento para estados puros, no caso de estados misto temos que lançar mão do operador densidade. Nesse caso, a definição se torna um pouco mais elaborada. Estados mistos que podem ser descritos da seguinte forma:

$$\hat{\rho} = \sum_j^n p_j \hat{\rho}_1^j \otimes \hat{\rho}_2^j, \quad (2.53)$$

são ditos estados separáveis, sendo $\hat{\rho}_i^j$ o operador densidade pertencente ao subespaço \mathcal{H}_i . Note que o estado (2.52) é um caso particular de (2.53) para $n=1$. Porém, assim como em estados puros, nem todos os estados mistos podem ser escrito nessa forma, sendo esses estados ditos emaranhados.

Pode ocorrer que, mesmo $\hat{\rho}$ sendo um estado puro $\hat{\rho}_i$ pode não ser. Isso acontece quando não conseguimos escrever $\hat{\rho}$ na forma separável. Portanto, podemos dizer que para estados puros emaranhados os operadores densidade reduzidos são estados mistos [18]. Aqui temos um exemplo claro que em mecânica quântica nem sempre o conhecimento do todo implica no conhecimento das partes, ou seja, tínhamos um estado global puro, porém o estado reduzido é misto.

Apesar dessa definição de emaranhamento aparentar ser simples, para um dado estado geral $\hat{\rho}$ nem sempre é trivial saber se ele está ou não emaranhado. Ou seja, saber se o estado pode ser escrito nas formas acima não é uma tarefa fácil. Sendo assim, a busca por métodos e testes que caracterizam emaranhamento é objeto de estudo na teoria de emaranhamento. As referências [24, 25] fazem uma discussão mais completa a respeito desses critérios de emaranhamento. No nosso trabalho estamos mais interessados em quantificá-lo, e para isto vamos usar a concorrência.

2.5.1 Concorrência

Vimos acima que para qualquer estado puro pertencente a um sistema composto por duas partes \mathcal{A} e \mathcal{B} , se o operador densidade reduzido for um estado misto o sistema está emaranhado. Sob essas condições — estado puro e sistema bipartido — a entropia de von Neumann, de cada uma das partes, é uma medida de emaranhamento [26]. Ou seja, para um estado total $|\psi\rangle$, o emaranhamento pode ser definido como:

$$E(\psi) = -Tr \hat{\rho}_i \log_2 \hat{\rho}_i, \quad (2.54)$$

sendo $\hat{\rho}_i$ o operador densidade reduzido de um dos subsistemas. Note que esse cálculo independe sob qual subsistema é tomado o traço.

Agora, ao estudar estados mistos, não podemos usar a entropia de von Neumann como medida de emaranhamento. Uma boa medida nesse caso é o Emaranhamento de Formação [9, 10]. Um estado misto pode ser decomposto em estados puros, ou seja, $\hat{\rho} = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$. O emaranhamento de formação pode ser definido como o emaranhamento médio dos estados puros da decomposição de $\hat{\rho}$, minimizado sob toda decomposição de $\hat{\rho}$:

$$E(\hat{\rho}) = \min \sum_k p_k E(\psi_k), \quad (2.55)$$

sendo $E(\psi_k)$ a entropia de von Neumann de cada estado puro da decomposição.

Apesar de ser geral, a equação (2.55), se torna pouco operacional. Porém para um sistema composto por um par de qubits³, ela pode ser escrita explicitamente em função da matriz densidade $\hat{\rho}$ [9, 10]. Para obtê-la, primeiro temos que definir a transformação *spin flip*, que é uma operação que pode ser aplicada em ambos vetor de estado e matriz densidade. Para o vetor de estado de um qubit, tal transformação é definida como:

$$|\tilde{\psi}\rangle = \hat{\sigma}_y |\psi^*\rangle, \quad (2.56)$$

sendo $|\psi^*\rangle$ o complexo conjugado de $|\psi\rangle$, e σ_y é a matriz de Pauli

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Em um sistema de n qubits devemos aplicar essa transformação para cada qubit. Para fazer essa transformação em uma matriz densidade, devemos aplicar $\hat{\sigma}_y$ de ambos os lados de $\hat{\rho}$. No caso de um sistema composto, temos:

$$\tilde{\rho} = (\hat{\sigma}_{y_1} \otimes \sigma_{y_2}) \hat{\rho}^* (\hat{\sigma}_{y_1} \otimes \hat{\sigma}_{y_2}). \quad (2.57)$$

³Qubit é conhecido como um sistema de dois níveis.

Novamente $\hat{\rho}^*$ é o complexo conjugado da matriz densidade $\hat{\rho}$ escrita na base de um par de qubits. Conhecida essa transformação podemos voltar a falar do cálculo do emaranhamento.

É possível mostrar que o emaranhamento definido em (2.54) pode ser escrito como [9]:

$$E(\psi) = \mathcal{E}(C(\psi)) \quad (2.58)$$

sendo C conhecida como concorrência, a qual é definida para estados puros como:

$$C(\psi) = |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle|. \quad (2.59)$$

A função \mathcal{E} é definida como:

$$\mathcal{E}(C) = -\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} \log_2 \frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2} \log_2 \frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2}. \quad (2.60)$$

Para o caso de matriz densidade:

$$E(\hat{\rho}) = \mathcal{E}(C(\hat{\rho})). \quad (2.61)$$

Porém, nesse, caso a concorrência é dada por:

$$C(\hat{\rho}) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (2.62)$$

onde os λ_i 's são os autovalores em ordem decrescente da matriz $R \equiv \sqrt{\sqrt{\hat{\rho}} \tilde{\rho} \sqrt{\hat{\rho}}}$.

A função $\mathcal{E}(C)$ é uma função monotônica crescente da concorrência, quando esta está no intervalo de 0 a 1. Portanto, a concorrência pode ser usada como medida de emaranhamento. Vale ressaltar que esses resultados da concorrência só são válidos quando estamos tratando sistemas compostos por pares de qubits.

2.5.2 Emaranhamento Residual

Até o momento, vimos como podemos calcular o emaranhamento em sistemas compostos por duas partes, mais especificamente para sistemas de dois qubits. Mas o que acontece quando aumentamos o número de subsistemas?

Quando aumentamos o número de membros do sistema global pode surgir emaranhamentos que são compartilhados por todas as partições, conhecido com emaranhamento genuíno multipartido (GME, *genuine multipartite entanglement*). E vários estudos ainda são feitos na tentativa de quantificar emaranhamento em sistemas de muitas partes [6, 7].

Um resultado conhecido nessa área de muitos corpos é que emaranhamento não pode ser livremente compartilhado entre muitos objetos [26, 27]. Por exemplo, se dois subsistemas \mathcal{A} e \mathcal{B} estão maximamente emaranhados, nem \mathcal{A} e nem \mathcal{B} podem ter emaranhamento com \mathcal{C} . Sendo isso conhecido como monogamia de emaranhamento [28].

Para um estado puro ($|\psi\rangle$) de três qubits, os autores Coffman, Kundu e Wootters [11] mostraram a seguinte relação:

$$C_{A,BC}^2 \geq C_{A,B}^2 + C_{A,C}^2, \quad (2.63)$$

sendo $C_{A,B}$ a concorrência entre o qubit \mathcal{A} e \mathcal{B} ; o mesmo é válido para $C_{A,C}$. Seguindo o mesmo raciocínio, o termo $C_{A,BC}$ é a concorrência entre \mathcal{A} e a parte \mathcal{BC} . Podemos considerar o par \mathcal{BC} como um único objeto. Considerando o estado do sistema ($|\psi\rangle$) puro podemos mostrar que apesar de \mathcal{H}_{BC} ter dimensão 4 (duas dimensões para cada qubit), apenas duas dimensões são necessárias para escrever o estado puro $|\psi\rangle$. Usando a decomposição de Schmidt podemos escrever $|\psi\rangle$ como:

$$|\psi\rangle = \sum_i^d |\xi_A^i\rangle |\phi_{BC}^i\rangle, \quad (2.64)$$

onde $d = \min(\dim\mathcal{H}_A, \dim\mathcal{H}_{BC})$, $\{|\xi_A^i\rangle\}$ e $\{|\phi_{BC}^i\rangle\}$ são bases para \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_{BC} respectivamente. O coeficiente α_i é conhecido como coeficiente de Schmidt. Como $\dim\mathcal{H}_A = 2$ temos que $d = 2$. Podemos mostrar que devido a dimensão de \mathcal{H}_A a matriz densidade reduzida ρ_{BC} tem apenas dois autovalores não-nulos. Para isto

basta tomarmos o traço parcial sobre o subsistema A , ou seja:

$$\begin{aligned}
\rho_{BC} &= Tr_A\{\rho\} = \sum_n \sum_{i,j}^d \langle n_A | \alpha_i^* \alpha_j | \xi_A^j \rangle \langle \xi_A^i | \otimes |\phi_{BC}^j\rangle \langle \phi_{BC}^i | n_A \rangle \\
&= \sum_{i,j}^d \alpha_i^* \alpha_j \langle \xi_A^i | \xi_A^j \rangle \otimes |\phi_{BC}^j\rangle \langle \phi_{BC}^i | \\
&= \sum_i^d |\alpha_i|^2 |\phi_{BC}^i\rangle \langle \phi_{BC}^i|. \tag{2.65}
\end{aligned}$$

Como $d = 2$ temos que ρ_{BC} apresenta apenas dois autovalores não-nulos. Logo o par \mathcal{BC} pode ser considerado um qubit. Portanto, efetivamente podemos tratar \mathcal{A} e \mathcal{BC} como sendo dois pares de qubits [11], e sem problemas calcular a concorrência. Essa expressão é conhecida com equação monogâmica de emaranhamento [29, 30].

Note que a equação (2.63) trata de uma desigualdade, pode-se acrescentar um termo de modo a torná-la uma igualdade, ou seja:

$$C_{A,BC}^2 = C_{A,B}^2 + C_{A,C}^2 + \tau_{ABC}, \tag{2.66}$$

onde o termo τ_{ABC} é interpretado como sendo um emaranhamento entre \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} que não pode ser tratado separadamente entre as bipartições, é um emaranhamento genuinamente tripartido. Tal quantidade é conhecida como emaranhamento residual [11].

De acordo com a equação (2.66) em sistemas de três partes, podemos tanto ter emaranhamento bipartido quanto tripartido. E ela nos diz que parte do emaranhamento entre \mathcal{A} e \mathcal{BC} é devido o emaranhamento entre \mathcal{A} e \mathcal{B} , \mathcal{A} e \mathcal{C} e o emaranhamento tripartido τ_{ABC} .

Capítulo 3

Dinâmica dos osciladores

Em boa parte dos problemas de mecânica quântica tratamos sistemas isolados. Porém, na prática, é muito difícil conseguir isolar completamente um sistema e a interação com o ambiente pode fazer com que a dinâmica desse sistema se altere. Portanto, é interessante levar em conta interações com o ambiente a fim de se obter uma descrição mais precisa e realista.

O modelo que utilizamos consiste de um oscilador harmônico linearmente acoplado a N outros osciladores, Figura (3.1). Nesse caso, o ambiente é modelado por esse conjunto de osciladores, que desempenham um papel de banho térmico. O nosso sistema de interesse é o oscilador harmônico que se acopla ao banho, que aqui iremos chamá-lo de oscilador central ou principal¹. A simplicidade e a riqueza do modelo faz com que ele seja largamente estudado. Em ótica quântica, por exemplo, podemos mapear a dissipação de um modo do campo eletromagnético confinado em uma cavidade nesse modelo, já que a álgebra dos dois sistemas é a mesma [13, 21, 31]. Nesse caso, o oscilador principal representaria o modo dentro da cavidade.

No nosso sistema vamos considerar o banho inicialmente no vácuo (temperatura nula), e o oscilador principal em um estado coerente. No início da dinâmica, toda a energia do sistema está contida no oscilador principal. Porém, ajustaremos alguns parâmetros para garantir que a energia se dissipe completamente para o banho sem que o oscilador central recupere parte dessa energia, obedecendo dessa forma um comportamento markoviano [12].

¹Usaremos essa denominação apenas para distingui-lo dos demais osciladores do banho.

Neste capítulo, iremos obter as equações de movimento do sistema. Trabalharemos sempre com o banho finito. Diferente da maioria dos estudos feitos em ótica quântica, não iremos estudar a dinâmica via equação mestra [12, 21, 31], visto que também estamos interessados no comportamento dos osciladores do banho. Por fim, iremos ver como o número médio de excitações se distribui durante a dinâmica. Veremos que a maior parte da energia fica distribuída nos osciladores do banho mais próximos da frequência do oscilador principal.

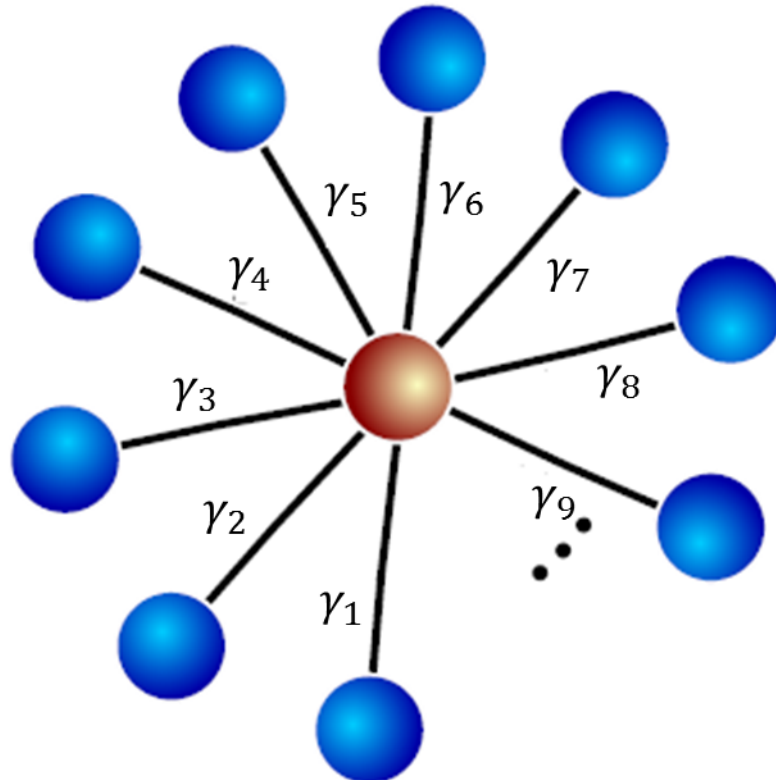


FIGURA 3.1: Representação do modelo que estamos estudando. Cada esfera corresponde a um oscilador. A esfera central é o oscilador principal, enquanto que as demais são os osciladores do banho. Cada oscilador do banho se acopla somente com o central via a constante γ_j . Note que os osciladores do banho não interagem entre si.

3.1 Hamiltoniana do sistema

A hamiltoniana do nosso sistema, na aproximação de ondas girantes (RWA, *Rotating Wave Approximation*), é dada por:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sum_k \hbar\omega_k\hat{b}_k^\dagger\hat{b}_k + \sum_k \hbar\gamma_k \left(\hat{a}^\dagger\hat{b}_k + \hat{a}\hat{b}_k^\dagger \right), \quad (3.1)$$

sendo \hat{a}^\dagger e \hat{a} os operadores bosônicos de criação e destruição, respectivamente, referente ao oscilador principal e seguem a seguinte relação de comutação:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (3.2)$$

Analogamente b_k^\dagger e b_k são os operadores bosônicos de criação e destruição, respectivamente, referentes ao k-ésimo oscilador do banho. As grandezas ω_0 e ω_k correspondem às frequências do oscilador central e dos osciladores do banho, respectivamente. A grandeza γ_k corresponde a constante de acoplamento entre o oscilador principal e o k-ésimo oscilador do banho.

Ao olharmos para a hamiltoniana identificamos três termos. O primeiro termo corresponde ao termo de energia livre do oscilador central. O segundo termo é o de energia livre dos osciladores do banho. E o terceiro diz respeito ao acoplamento dos dois subsistemas. Pela hamiltoniana, observamos que os osciladores do banho não interagem diretamente entre si. Ou seja, os osciladores do banho são independentes, um oscilador não consegue “ver” o outro. A única maneira que eles podem interagir é via oscilador central o que, seria, de certa forma uma interação de segunda ordem.

Se usarmos essa hamiltoniana para descrever a dissipação de um modo do campo em uma cavidade, o termo de interação pode ser interpretado como uma excitação sendo aniquilada no modo principal, enquanto que uma excitação é criada no k-ésimo modo do banho. O processo inverso também é permitido: uma excitação no k-ésimo modo do banho é aniquilada, enquanto que uma excitação é criada no modo principal. Portanto, esse processo de transferência de quanta de energia é devido ao termo de acoplamento que aparece na hamiltoniana. Note que sempre que um quanta é criado outro é destruído, dessa forma, o número de quanta sempre é conservado.

3.2 Dinâmica

Conhecida a hamiltoniana do sistema estamos preparados para estudar sua dinâmica. Esse sistema envolve muitos graus de liberdade, e geralmente a resolução de sistemas envolvendo vários graus de liberdade necessita do uso de aproximações. Porém, para o caso particular dessa hamiltoniana equação (3.1), esse modelo apresenta solução analítica exata se utilizarmos como estado inicial do sistema estados coerentes.

Primeiramente, consideramos o estado inicial do sistema como sendo o oscilador principal em um estado coerente $|\alpha_0\rangle$ e cada oscilador do banho estando no estado de vácuo $|0_k\rangle$. Escolhemos o estado global do sistema da forma:

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle \otimes \prod_k |0_k\rangle. \quad (3.3)$$

Para este caso particular de estado inicial esse modelo apresenta solução analítica exata. Essa é uma propriedade particular da hamiltoniana que estamos utilizando [12].

Ao escolhermos o estado inicial como sendo o estado (3.3) temos que para essa hamiltoniana em específico o estado evoluído, conforme pode ser visto nas referências [12, 32] será da forma:

$$|\psi(t)\rangle = |\alpha(t)\rangle \otimes \prod_k |\lambda_k(t)\rangle, \quad (3.4)$$

onde $|\alpha(t)\rangle$ e $|\lambda_k(t)\rangle$ são os estados coerentes do oscilador central e dos osciladores do banho em qualquer tempo t . Ou seja, se começamos com um estado coerente o sistema continua em um estado coerente e se começamos com estado de vácuo o sistema é levado a um estado coerente.

A dinâmica das amplitudes dos estados coerentes $\alpha(t)$ e $\lambda_k(t)$ são obtidas usando a equação de Schrödinger. Substituindo o estado (3.4) na equação (2.1), obtemos:

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle, \quad (3.5)$$

Vamos desenvolver primeiramente o lado direito da equação acima:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle &= \frac{d}{dt} \left(|\alpha(t)\rangle \otimes \prod_k |\lambda_k(t)\rangle \right) \\ &= \frac{d}{dt} (|\alpha(t)\rangle) \otimes \prod_k |\lambda_k(t)\rangle + |\alpha(t)\rangle \otimes \sum_i \frac{d}{dt_i} \left(\prod_k |\lambda_k(t)\rangle \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

o subíndice i indica sobre qual estado está sendo tomado a derivada. Note que a derivada temporal de um estado coerente genérico $|\xi(t)\rangle$ fica da forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\xi(t)\rangle &= \frac{d}{dt} \left(e^{-|\xi(t)|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi(t)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} |\xi(t)|^2 \right) |\xi(t)\rangle + \dot{\xi}(t) e^{-|\xi(t)|^2/2} \sum_n \frac{n \xi(t)^{n-1}}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} |\xi(t)|^2 \right) |\xi(t)\rangle + \dot{\xi}(t) e^{-|\xi(t)|^2/2} \sum_m \frac{m+1 \xi(t)^m}{\sqrt{m+1!}} |m+1\rangle \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} |\xi(t)|^2 \right) |\xi(t)\rangle + \dot{\xi}(t) e^{-|\xi(t)|^2/2} \sum_n \frac{\xi(t)^n}{\sqrt{n!}} \hat{a}^\dagger |n\rangle \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} |\xi(t)|^2 \right) |\xi(t)\rangle + \dot{\xi}(t) \hat{a}^\dagger |\xi(t)\rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Substituindo esse resultado em 3.6 obtemos:

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|a(t)|^2 + \sum_k |\lambda_k(t)|^2 \right) |\psi(t)\rangle + \dot{a}(t) \hat{a}^\dagger |\psi(t)\rangle + \sum_k \dot{\lambda}_k \hat{b}_k^\dagger |\psi(t)\rangle, \quad (3.8)$$

como o número de excitações do sistema se conserva, o primeiro termo do lado direito da equação é nulo, logo temos:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = i\hbar \left(\dot{a}(t) \hat{a}^\dagger |\psi(t)\rangle + \sum_k \dot{\lambda}_k \hat{b}_k^\dagger |\psi(t)\rangle \right). \quad (3.9)$$

Agora desenvolvendo o lado esquerdo da equação (3.5)

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = \hbar\omega_0\alpha(t)\hat{a}^\dagger|\psi(t)\rangle + \sum_k \hbar\omega_k\lambda_k(t)\hat{b}_k^\dagger|\psi(t)\rangle + \sum_k \gamma_k \left(\lambda_k(t)\hat{a}^\dagger + \alpha(t)\hat{b}_k^\dagger \right) |\psi(t)\rangle. \quad (3.10)$$

Igualando esses resultados e reorganizando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left(i\dot{\alpha}(t) - \omega_0\alpha(t) - \sum_k \gamma_k\lambda_k(t) \right) \hat{a}^\dagger|\psi(t)\rangle + \\ & \sum_k \left(i\dot{\lambda}_k(t) - \omega_k\lambda_k(t) - \gamma_k\alpha(t) \right) \hat{b}_k^\dagger|\psi(t)\rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como os vetores $\hat{a}^\dagger|\psi(t)\rangle$ e $\hat{b}_k^\dagger|\psi(t)\rangle$ são linearmente independente obtemos:

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\alpha(t) &= \omega_0\alpha(t) + \sum_k \gamma_k\lambda_k(t), \\ i\frac{d}{dt}\lambda_k(t) &= \omega_k\lambda_k(t) + \gamma_k\alpha(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Note que se fizermos $c_0(t) = \alpha(t)/\alpha_0$ e $c_k(t) = \lambda_k(t)/\alpha_0$ vamos obter equações que apresentam estrutura matemática idêntica ao decaimento de um átomo de dois níveis no vácuo [33], onde $c_0(t)$ corresponde ao coeficiente do estado do sistema com o átomo no estado excitado e o campo no vácuo, e $c_k(t)$ corresponde ao coeficiente do estado do sistema com o átomo no estado de vácuo e um fóton excitado no k -ésimo modo, enquanto todos os outros modos permanecem no vácuo. Embora a estrutura matemática seja a mesma de um átomo de dois níveis, tal sistema é tratado com apenas um quanta de energia, um fóton. Já o sistema que estamos estudando não existe limitações em relação ao número médio de excitações, podemos, inclusive, trabalhar com um número médio de excitações muito elevado.

Na tentativa de resolver o conjunto de equações (3.12), podemos supor, sem perda de generalidade, uma solução da forma:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_0 e^{-i\omega_0 t} f(t), \\ \lambda_k(t) &= \alpha_0 e^{-i\omega_k t} g_k(t) e^{-2i\delta_k t}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $\delta_k = (\omega_0 - \omega_k)/2$ é a dessintonia entre o oscilador principal e o k -ésimo oscilador do banho.

Analisando a solução que foi proposta podemos identificar dois termos $\alpha_0 e^{-i\omega_0 t}$ e $f(t)$. O primeiro correspondente à solução obtida caso não existisse acoplamento entre os osciladores, inclusive foi exatamente esse termo que obtivemos no estudo da evolução de estados coerentes ($\alpha_0 e^{-i\omega_0 t}$). O segundo termo é uma função auxiliar, dependente do tempo, que é responsável por carregar a informação a respeito da interação entre o oscilador central e o banho. Essa análise é válida tanto para a solução $\alpha(t)$ quanto para os $\lambda_k(t)$. Então, podemos dizer que a solução é composta por uma parte livre mais uma parte que leva em conta o acoplamento.

Substituindo a solução nas equações (3.12), obtemos um novo conjunto de equações diferenciais envolvendo as funções $f(t)$ e $g_k(t)$, ou seja:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} f(t) &= \sum_k \gamma_k g_k(t), \\ i \frac{d}{dt} g_k(t) &= -2\delta_k g_k(t) + \gamma_k f(t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Olhando para o estado no tempo $t = 0$ (3.3), temos como condições iniciais $f(0) = 1$ e $g_k(0) = 0$.

Derivando novamente em relação ao tempo a equação diferencial que envolve g_k , obtemos a seguinte equação:

$$\frac{d^2}{dt^2} g_k - 2i\delta_k \frac{d}{dt} g_k + \gamma_k^2 g_k = -\gamma_k \sum_{j \neq k} \gamma_j g_j. \quad (3.15)$$

Essa é uma equação diferencial não homogênea escrita somente em termos das variáveis do banho. O termo da direita pode ser interpretado como uma ação externa sobre o k -ésimo oscilador originária do restante do banho. Ou seja, apesar de cada oscilador do banho interagir apenas com o oscilador central, existe uma interação de segunda ordem entre os osciladores do banho, via oscilador principal, que influenciam a dinâmica entre si.

A idéia central desse trabalho é estudar a dinâmica do emaranhamento entre o oscilador central e o banho. Para isso vamos considerar o estado inicial do

oscilador principal como uma superposição de estados coerentes enquanto que o banho continua no vácuo², ou seja:

$$|\psi(0)\rangle = \mathcal{N} (a|\alpha_0\rangle + b|\beta_0\rangle) \otimes \prod_k |0_k\rangle, \quad (3.16)$$

sendo $\mathcal{N} = (|a|^2 + |b|^2 + \{ab^*\langle\beta_0|\alpha_0\rangle + c.h.\})^{-1/2}$ a constante de normalização e a e b os coeficientes que multiplicam os estados da superposição. Devido à linearidade da equação de Schrödinger, podemos calcular a evolução unitária de cada estado que fornece a superposição em (3.16) apropriadamente e, em seguida construir o estado global evoluído superpondo essas partes. Portanto o que teremos é uma superposição composta por estados da forma (3.4). Logo o estado global evoluído para qualquer tempo t será da forma:

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{N} (a|\alpha(t)\rangle \otimes |\lambda_t\rangle + b|\beta(t)\rangle \otimes |\chi_t\rangle). \quad (3.17)$$

Aqui, usamos uma notação mais compacta³ para os estados dos osciladores do banho, sendo:

$$\begin{aligned} |\lambda_t\rangle &= \prod_k |\lambda_k(t)\rangle, \\ |\chi_t\rangle &= \prod_k |\chi_k(t)\rangle. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Fazendo o procedimento análogo ao do caso anterior (substituindo o estado (3.17) na equação (2.1)), obtemos as seguintes equações de movimento para $\beta(t)$ e $\chi_k(t)$:

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\beta(t) &= \omega_0\beta(t) + \sum_k \gamma_k\chi_k(t), \\ i\frac{d}{dt}\chi_k(t) &= \omega_k\chi_k(t) + \gamma_k\beta(t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

²Ficará mais claro nos próximos capítulos o porquê dessa escolha para o estado inicial

³Para evitar qualquer confusão, se o estado que estamos tratando tiver o subíndice k estamos nos referindo ao k -ésimo oscilador do banho. Porém se o estado tiver o subíndice t estamos nos referindo ao estado global do banho.

As equações de movimento para $\alpha(t)$ e $\lambda_k(t)$ são as mesmas obtidas para o caso onde não havia superposição. Note que as equações de movimento envolvendo $\beta(t)$ e $\chi_k(t)$ são análogas às equações envolvendo $\alpha(t)$ e $\lambda_k(t)$. Portanto, do mesmo modo, podemos supor as seguintes soluções:

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \beta_0 e^{-i\omega_0 t} f'(t), \\ \chi_k(t) &= \beta_0 e^{-i\omega_k t} g'_k(t) e^{-2i\delta_k t}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Novamente podemos fazer a mesma análise discutida anteriormente. Existe um termo correspondente à parte livre da hamiltoniana do oscilador principal ($\beta_0 e^{-i\omega_0 t}$), e um termo responsável pela interação $f'(t)$ e $g'_k(t)$. Substituindo (3.20) em (3.19), obtemos as seguintes equações de movimento para essas funções:

$$\begin{aligned}i \frac{d}{dt} f'(t) &= \sum_k \gamma_k g'_k(t), \\ i \frac{d}{dt} g'_k(t) &= -2\delta_k g'_k(t) + \gamma_k f'(t).\end{aligned}\tag{3.21}$$

Observe que as condições iniciais para $f'(t)$ e $g'_k(t)$ são as mesmas de $f(t)$ e $g_k(t)$. Como as equações (3.14) e (3.21) apresentam a mesma estrutura e as mesmas condições iniciais, podemos dizer que $f'(t) = f(t)$ e $g'_k(t) = g_k(t)$.

No estudo da dinâmica desse sistema, para saber como o estado evolui deveríamos resolver o conjunto de equações diferenciais (3.12) e (3.19). O grau de dificuldade na resolução dessas equações aumenta a medida que aumentamos o número de osciladores do sistema. E como trabalhamos com um número elevado de osciladores só conseguimos resolver as equações numericamente. No entanto, a solução dessas equações depende das condições iniciais, que nesse caso são os coeficientes α_0 e β_0 . A partir disso, toda vez que mudássemos o estado inicial teríamos que resolver novamente as equações (3.12) e (3.19). Porém, com o *ansatz* proposto, equações (3.13) e (3.20), transformamos o conjunto de equações diferenciais (3.12) e (3.19) nas equações (3.14), cuja solução independe dos estados iniciais α_0 e β_0 . Portanto precisamos resolver essas equações apenas uma vez, sem nos preocupar com a escolha do estado inicial. Veremos nas próximas seções que para todas as grandezas que calculamos, a dependência temporal se encontra nas

funções auxiliares $f(t)$ e $g_k(t)$; os coeficientes do estado inicial α_0 e β_0 entram apenas como parâmetros.

3.3 Dinâmica de excitações

Como foi discutido na seção anterior, o problema da dinâmica é resolvido encontrando as funções $f(t)$ e $g_k(t)$. Veremos, agora, que essas funções não são apenas artifícios matemáticos para a resolução das equações (3.12) e (3.19). Podemos associar a elas uma interpretação física, relacionando-as com o número de excitações em cada subsistema.

Ao olharmos para o termo de interação da hamiltoniana do nosso sistema, equação (3.1), percebemos que só pode ser trocada uma excitação por vez. E essa interação é feita de tal modo que se um subsistema perde uma excitação o outro subsistema recebe essa excitação. Logo o número de excitações do sistema global é conservado. Então, devido às interações entre os subsistemas, as excitações são transferidas de um subsistema para o outro, mas para cada instante de tempo t o número de excitações total é igual ao número de excitações inicial.

Inicialmente o banho está no estado de vácuo, portanto todas as excitações se concentram no oscilador principal. Para um dado valor de α_0 e β_0 , o número médio de excitações no sistema (oscilador central mais banho) será dado por:

$$\begin{aligned} \bar{N}_0 &= \langle \psi(0) | a^\dagger a | \psi(0) \rangle \\ &= \mathcal{N}^2 (|a|^2 |\alpha_0|^2 + |b|^2 |\beta_0|^2 + \{ab^* \alpha_0 \beta_0^* \langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle + c.c.\}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

À medida que os subsistemas começam a interagir, há uma transferência de excitações do oscilador central para o banho. Do mesmo modo, podemos calcular o número médio de excitações em um dado instante de tempo t , que ambas as partes contêm. Para o oscilador central temos:

$$\begin{aligned}
\bar{N}_c(t) &= \langle \psi(t) | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi(t) \rangle \\
&= \mathcal{N}^2 (|a|^2 |\alpha(t)|^2 + |b|^2 |\beta(t)|^2 + \{ab^* \alpha(t) \beta^*(t) \langle \beta(t) | \alpha(t) \rangle \langle \chi_t | \lambda_t \rangle + c.c.\}) .
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Para o banho, temos:

$$\begin{aligned}
\bar{N}_b(t) &= \langle \psi(t) | \sum_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k | \psi(t) \rangle \\
&= \mathcal{N}^2 \sum_k (|a|^2 |\lambda_k(t)|^2 + |b|^2 |\chi_k(t)|^2 + \{ab^* \lambda_k(t) \chi_k^*(t) \langle \beta(t) | \alpha(t) \rangle \langle \chi_t | \lambda_t \rangle + c.c.\}) .
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Podemos escrever o número médio de excitações contido no oscilador principal e no banho em termos do número médio de excitações inicial (\bar{N}_0). Para fazer isso, primeiro vamos calcular o *overlap* entre os estados do oscilador central, bem como os dos osciladores do banho. Usando a equação (2.46) e as soluções (3.13) e (3.20) temos:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(t) | \beta(t) \rangle &= e^{-(|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 - 2\alpha^*(t)\beta(t))/2} \\
&= e^{-(|\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2 - 2\alpha_0^* \beta_0) \Xi(t)/2} \\
&= \langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle^{\Xi(t)} .
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_t | \chi_t \rangle &= \prod_k \langle \lambda_k(t) | \chi_k(t) \rangle \\
&= \prod_k e^{-(|\lambda_k(t)|^2 + |\chi_k(t)|^2 - 2\lambda_k^*(t)\chi_k(t))/2} \\
&= \prod_k e^{-(|\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2 - 2\alpha_0^* \beta_0) |g_k(t)|^2 / 2} \\
&= \langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle^{\Theta(t)} .
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Onde fizemos $|f(t)|^2 = \Xi(t)$ e $\sum_k |g_k(t)|^2 = \Theta(t)$. Note que o *overlap* entre os estados coerentes, tanto do oscilador principal quanto do banho, para qualquer tempo t , depende unicamente do *overlap* entre os estados coerentes do estado inicial do oscilador principal ($|\alpha_0\rangle$ e $|\beta_0\rangle$), elevado à função auxiliar correspondente ao determinado subespaço no qual estamos tratando, $\Xi(t)$ para o oscilador principal e $\Theta(t)$ para o banho.

Usando a condição de que o estado deve estar normalizado para todo tempo t , obtemos um vínculo entre $\Xi(t)$ e $\Theta(t)$ dado por:

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle &= \mathcal{N}^2 (|a|^2 + |b|^2 + \{ab^* \langle \beta(t) | \alpha(t) \rangle \langle \chi_t | \lambda_t \rangle + c.h.\}) \\ &= \frac{|a|^2 + |b|^2 + \{ab^* \langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle^{\Xi(t) + \Theta(t)} + c.c.\}}{|a|^2 + |b|^2 + \{ab^* \langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle + c.c.\}} = 1. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para que o estado esteja normalizado ($\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1$), temos que:

$$\Xi(t) + \Theta(t) = 1. \quad (3.28)$$

Substituindo os resultados acima em (3.23) e (3.24), obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{N}_c(t) &= \mathcal{N}^2 (|a|^2 |\alpha(t)|^2 + |b|^2 |\beta(t)|^2 + \{ab^* \alpha(t) \beta^*(t) \langle \beta(t) | \alpha(t) \rangle \langle \chi_t | \lambda_t \rangle + c.c.\}) \\ &= \mathcal{N}^2 (|a|^2 |\alpha_0|^2 + |b|^2 |\beta_0|^2 + \{ab^* \alpha_0 \beta_0^* \langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle + c.c.\}) \Xi(t) \\ &= \bar{N}_0 \Xi(t), \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_b(t) &= \mathcal{N}^2 \sum_k (|a|^2 |\lambda_k(t)|^2 + |b|^2 |\chi_k(t)|^2 + \{ab^* \lambda_k(t) \chi_k^*(t) \langle \beta(t) | \alpha(t) \rangle \langle \chi_t | \lambda_t \rangle + c.c.\}) \\ &= \mathcal{N}^2 (|a|^2 |\alpha_0|^2 + |b|^2 |\beta_0|^2 + \{ab^* \alpha_0 \beta_0^* \langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle + c.c.\}) \Theta(t) \\ &= \bar{N}_0 \Theta(t). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Agora, podemos atribuir uma interpretação para as funções $\Xi(t)$ e $\Theta(t)$ e, indiretamente, às funções $f(t)$ e $g_k(t)$, como sendo uma espécie de peso que informam a fração das excitações que podemos encontrar em cada subsistema. De acordo com as equações (3.29) e (3.30) a dinâmica das excitações é dada por um

termo constante dependente de α_0 e β_0 multiplicado pelas funções $\Xi(t)$ e $\Theta(t)$. Se fizermos uma normalização do número médio de excitações, a dinâmica será completamente descrita por essas funções.

Como os estados do banho $|\lambda_t\rangle$ e $|\chi_t\rangle$ são estados produtos, ou seja, para qualquer tempo⁴ eles são escritos na forma (3.18), podemos facilmente separar o banho em várias partições, e temos liberdade para escolher a quantidade de osciladores que compõe cada partição. Podemos, então, calcular o número médio de excitações em cada partição. Para uma partição com m osciladores temos:

$$\begin{aligned}
\bar{N}_m(t) &= \langle \psi(t) | \sum_{k=n'}^{m'} \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k | \psi(t) \rangle \\
&= \mathcal{N}^2 \sum_{k=n'}^{m'} (|a|^2 |\lambda_k(t)|^2 + |b|^2 |\chi_k(t)|^2 + \{ab^* \lambda_k(t) \chi_k^*(t) \langle \beta(t) | \alpha(t) \rangle \langle \chi_t | \lambda_t \rangle + c.c.\}) \\
&= \bar{N}_0 \sum_{k=n'}^{m'} |g_k(t)|^2 = \bar{N}_0 \Theta_m(t), \tag{3.31}
\end{aligned}$$

sendo $m' - n' = m$.

Note que, de acordo com a equação (3.31), o número médio de excitações em um dado conjunto de osciladores do banho é proporcional à função Θ relativa a esse conjunto de osciladores. Podemos então dividir o banho em várias partes, sendo que cada uma delas teria sua função⁵ Θ_i indicando qual percentagem das excitações do banho estão contidas naquela partição. E, como essas funções são basicamente uma soma dos $|g_k(t)|^2$, se somarmos todas as Θ_i de todas as partições estaremos somando todos os $|g_k(t)|^2$ que, ao final, é a própria função $\Theta(t)$. Portanto as funções Θ_i , assim como o número de excitações, são aditivas, no sentido que a soma das partes é igual ao todo.

Como o número médio de excitações se conserva, temos que:

⁴Os estados do banho ficam nessa forma fatorada graças ao fato dos osciladores do banho não interagirem diretamente um com o outro.

⁵Novamente, para evitar qualquer tipo de confusão, quando usarmos um subíndice para a função Θ estamos nos referindo a uma partição do banho. Caso contrário, estamos tratando de todo o banho.

$$\begin{aligned}
\bar{N}_0 = \langle \psi(0) | \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \right) | \psi(0) \rangle &= \langle \psi(t) | \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \right) | \psi(t) \rangle \\
&= \bar{N}_0 \Xi(t) + \bar{N}_0 \Theta(t) \\
&= \bar{N}_0 (\Xi(t) + \Theta(t)). \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos ver que o vínculo (3.28) obtido através da normalização, também é obtido aqui. Esse vínculo está completamente ligado a conservação do número médio de excitações.

3.4 Resultados Numéricos

Nas seções anteriores fizemos um estudo analítico da dinâmica do oscilador principal acoplado ao banho. Obtivemos as equações de movimento que determinam as funções $f(t)$ e $g_k(t)$, bem como expressões descrevendo a dinâmica das excitações do oscilador principal, do banho e de partes do banho. Concluimos que, para conhecer essa dinâmica precisamos obter as funções $\Xi(t)$ e $\Theta(t)$, mas para isto precisamos primeiramente determinar $f(t)$ e $g_k(t)$.

Para determinar essas funções devemos resolver o conjunto de equações (3.14). Note que temos $N + 1$ equações diferenciais acopladas, onde N é o número de osciladores do banho. Resolvê-las analiticamente sem fazer o uso de aproximações é praticamente impossível. Portanto, tivemos que utilizar recursos computacionais. Utilizamos o programa *Wolfram Mathematica* para resolver essas equações.

Olhando atentamente as equações (3.14), existem alguns parâmetros que devemos determinar, tais como a distribuição de frequência dos osciladores do banho ω_k , o acoplamento deles com o oscilador principal γ_k e a frequência do oscilador principal ω_0 . É através desses parâmetros que caracterizamos nosso sistema.

Note que, analisando a hamiltoniana, há possibilidade da energia se transferir tanto do oscilador central para o banho, quanto do banho para o oscilador central. Ou seja, existe uma possibilidade do oscilador central recuperar a energia que ele cede para o banho. Para um banho finito, os autores da referência [32], mostraram que o tempo para que o oscilador central recupere a energia que é cedida ao banho, chamado de tempo de ressurgimento, é proporcional ao número de osciladores

do banho. Como estamos interessados em estudar como o oscilador principal se emaranha com o banho durante sua desexcitação, escolhemos um banho com um número grande o suficiente de osciladores, de modo que o tempo de *revival* seja muito longo. Porém não tão grande, de modo que não perdêssemos muito tempo nas simulações. Trabalhamos, então, com um banho composto por 1000 osciladores, ou seja, $N = 1000$.

Normalizamos as frequência dos osciladores do banho pela frequência do oscilador principal. As frequências dos osciladores do banho foram distribuídas igualmente espaçadas entre 0.5 e 1.5, como mostra a figura (3.2). Escolhemos essa faixa de frequência porque a aproximação *RWA* só é válida quando a faixa de frequência dos osciladores do banho é próxima do oscilador principal.

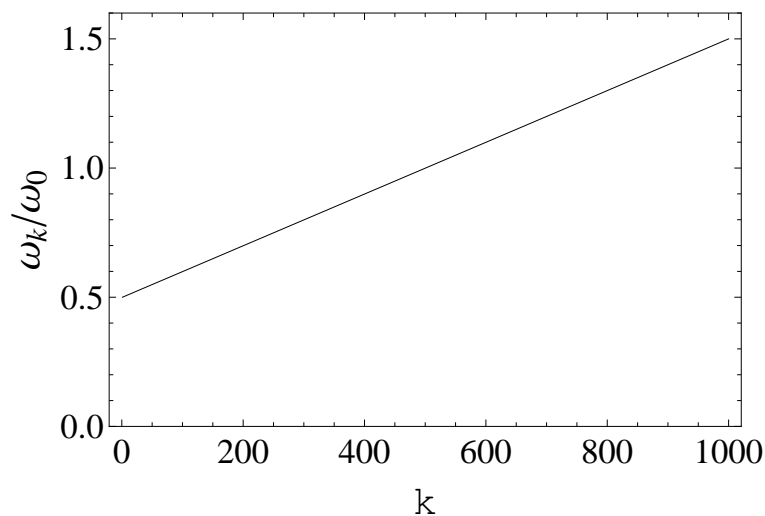


FIGURA 3.2: Distribuição de frequência dos osciladores do banho. Os osciladores estão linearmente distribuídos com frequências entre 0.5 e 1.5.

Em relação ao acoplamento entre o oscilador principal e os osciladores do banho, γ_k , escolhemos como sendo constante $\gamma_k = \frac{0.1}{\sqrt{N}}$. Ou seja, o oscilador principal se acopla com todos osciladores do banho com a mesma intensidade. Fizemos testes com outros valores de acoplamento, para acoplamentos mais fortes o oscilador central se desexcita rapidamente, já para acoplamentos mais fracos essa desexcitação é mais lenta. Portanto, o valor de γ_k que escolhemos foi o que mais nos interessou em relação à taxa de desexcitação e em relação a forma dessa desexcitação (ver figura 3.3).

Escolhidos os parâmetros, conseguimos, então, calcular as funções $f(t)$ e $g_k(t)$. Consequentemente obtivemos as funções $\Xi(t)$ e $\Theta(t)$. Como foi visto na seção

anterior, tendo essas funções em mãos conseguimos plotar gráficos do número médio de excitações para cada subsistema.

Na figura (3.3), temos um gráfico da troca de excitações entre o oscilador principal e o banho. A linha tracejada corresponde às excitações do oscilador principal, enquanto que a linha contínua corresponde às excitações do banho. Como é esperado, o banho retira todas as excitações do oscilador principal. Aqui, fizemos uma normalização do número médio de excitações e, como foi discutido na seção anterior, nesse caso a dinâmica será dada pelas funções $\Xi(t)$ e $\Theta(t)$, sendo que a primeira diz respeito as excitações do oscilador principal e a segunda diz respeito ao banho. Note que a curva do oscilador principal se assemelha a um decaimento exponencial, apresentando um comportamento tipicamente markoviano, onde o sistema de interesse perde excitações para o ambiente sem recuperá-las. As duas curvas são complementares de modo que sua soma é igual a 1, obedecendo assim, à conservação do número de excitações.

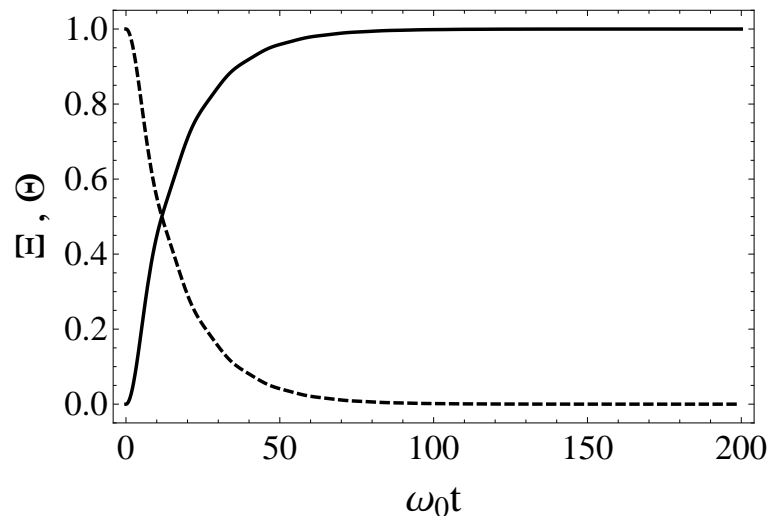


FIGURA 3.3: Dinâmica do número médio de excitações do sistema. A linha tracejada corresponde às excitações do oscilador principal, dada pela função $\Xi(t)$. Enquanto que a linha contínua representa as excitações do banho, dada pela função $\Theta(t)$.

Estudando agora as excitações no banho, podemos dividir o banho em várias partes e observar como as excitações se distribuem entre essas partições. Dividimos o banho em 10 partes, com 100 osciladores cada. Em cada partição, metade dos osciladores tem frequência acima, enquanto a outra metade tem frequência abaixo da frequência do oscilador principal. A figura (3.4) ilustra como foi feita essa divisão.

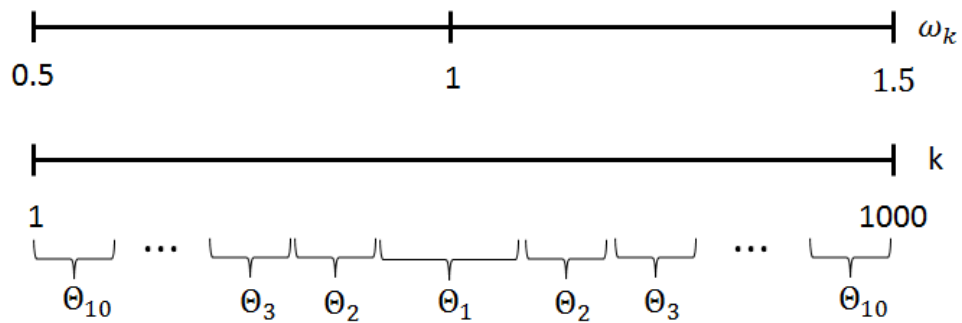


FIGURA 3.4: Representação de como foram feitas as partições do banho. Primeiro, temos uma associação entre o k -ésimo oscilador do banho e sua frequência ω_k . Dividimos o banho em 10 partes, e para cada parte associamos uma função Θ_i . As partições são simétricas em relação a frequência central.

A figura (3.4) apresenta duas linhas associando a frequência ω_k e o k -ésimo oscilador. Assim o oscilador 1 do banho tem frequência 0.5 e o milésimo tem frequência 1.5. Desse modo, conseguimos observar quais osciladores e qual a faixa de frequência presente em cada partição. Note que, para cada partição, designamos uma função $\Theta_i(t)$. E essas funções vão de Θ_1 até Θ_{10} sendo que a primeira corresponde aos 100 osciladores com frequência mais próxima da frequência do oscilador principal e a última corresponde aos 100 osciladores com maior dessintonia. Como o número médio de excitações está normalizado, assim como no caso anterior, a dinâmica das excitações em cada partição será dada puramente por essas funções. A figura (3.5), mostra como as excitações evoluem nessas 10 partições.

Observe que, inicialmente, existem algumas oscilações. Elas ocorrem, porque durante esse tempo o oscilador principal está trocando excitações com o banho. Então, enquanto as excitações vão sendo distribuídas para os osciladores do banho, estes trocam excitações entre si via oscilador principal. Depois que todas as excitações são transferidas para o banho, o sistema se estabiliza, não há mais trocas de excitações. Portanto, o número médio de excitações em cada partição fica constante. Ao observar o gráfico, percebemos que, em torno de 68% das excitações do banho estão contidas nos 100 osciladores mais próximos da frequência de ressonância, enquanto que menos de 1% das excitações se distribuem para os osciladores com maior dessintonia, mostrando, assim, que a maior parte das excitações se distribuem próximas à frequência do oscilador principal.

Depois que o sistema termalizou, que é justamente quando todas as excitações foram transferidas para o banho, plotamos um gráfico da distribuição de excitações para cada oscilador do banho. Esse gráfico está ilustrado na figura (3.6). A

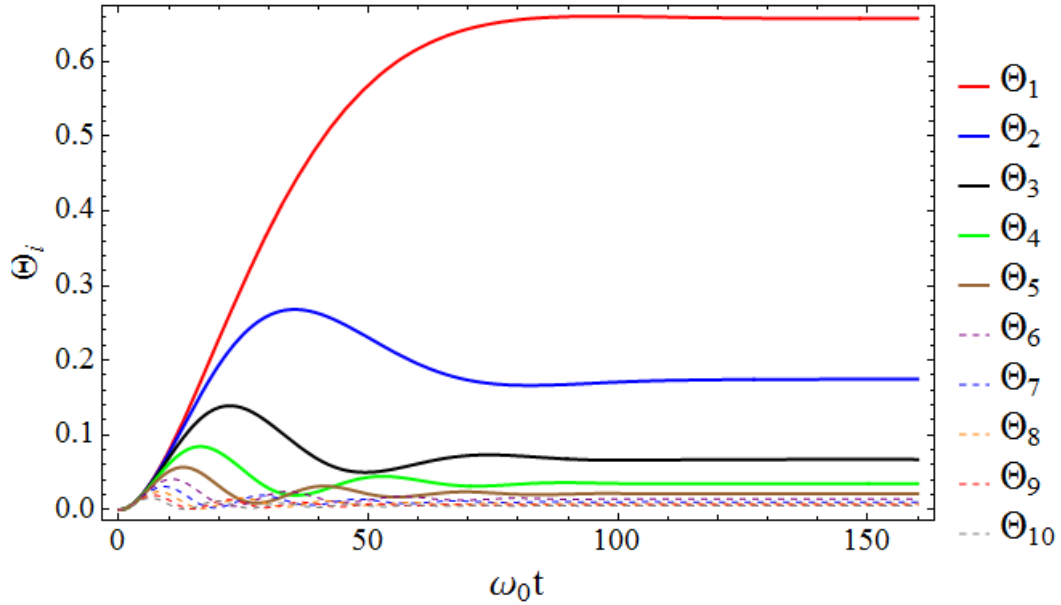


FIGURA 3.5: Dinâmica do número médio de excitações de cada partição. Os osciladores que compõem cada partição podem ser identificados através da figura (3.4). Note que depois de estabilizado o sistema, a maior parte das excitações do banho estão contidas nas partições próximas à frequência de ressonância.

curva retrata bem o que discutimos acima, a maior parte das excitações estão concentradas em torno da frequência do oscilador principal. Note que há um pico nos osciladores de número 500 e 501, que são justamente os osciladores mais próximos da frequência do oscilador principal.

Fazendo um ajuste dessa curva observamos que ela representa função Lorentziana $\bar{N}_k = \frac{1}{\pi\xi \left[1 + \left(\frac{k-k_0}{\xi}\right)^2\right]}$, sendo $\xi = 31.37$ e $k_0 = 500.5$. A figura (3.7) apresenta um gráfico comparando o ajuste lorentziano com os pontos da figura (3.6). Note que o ajuste está em boa aproximação. O fato da distribuição das excitações do banho seguir uma distribuição lorentziana está diretamente ligado com o decaimento das excitações do sistema de interesse ser do tipo exponencial [32].

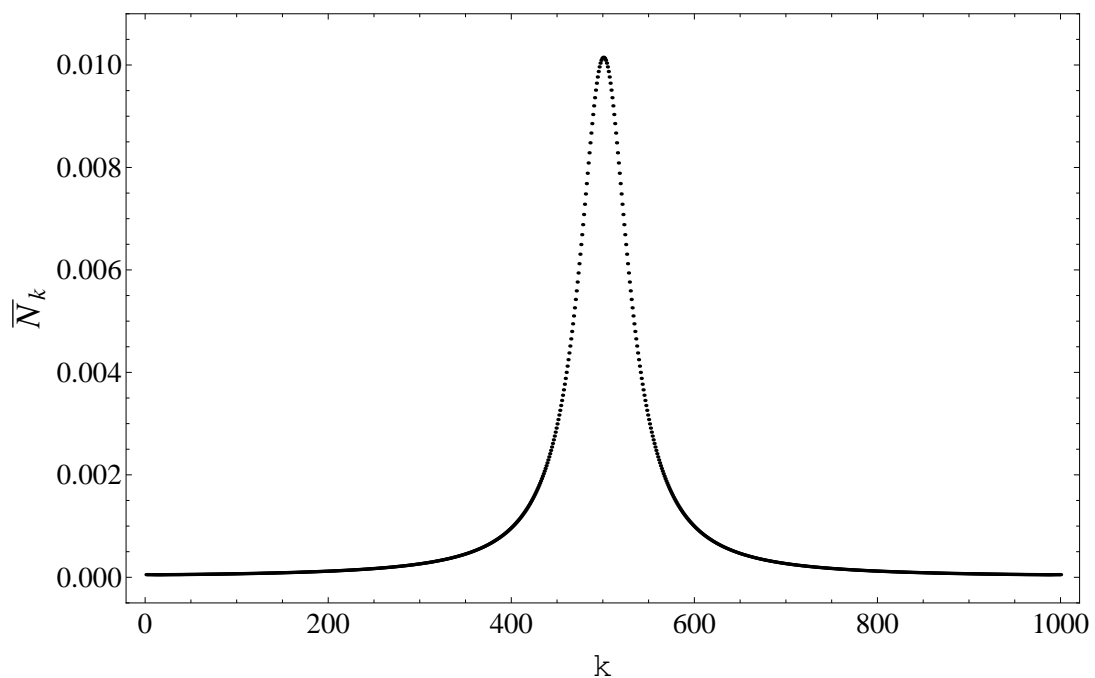


FIGURA 3.6: Distribuição das excitações para cada oscilador do banho em um tempo no qual o sistema já se estabilizou e todas as excitações estão no banho. Note a presença do pico para os osciladores mais próximos da frequência de ressonância.

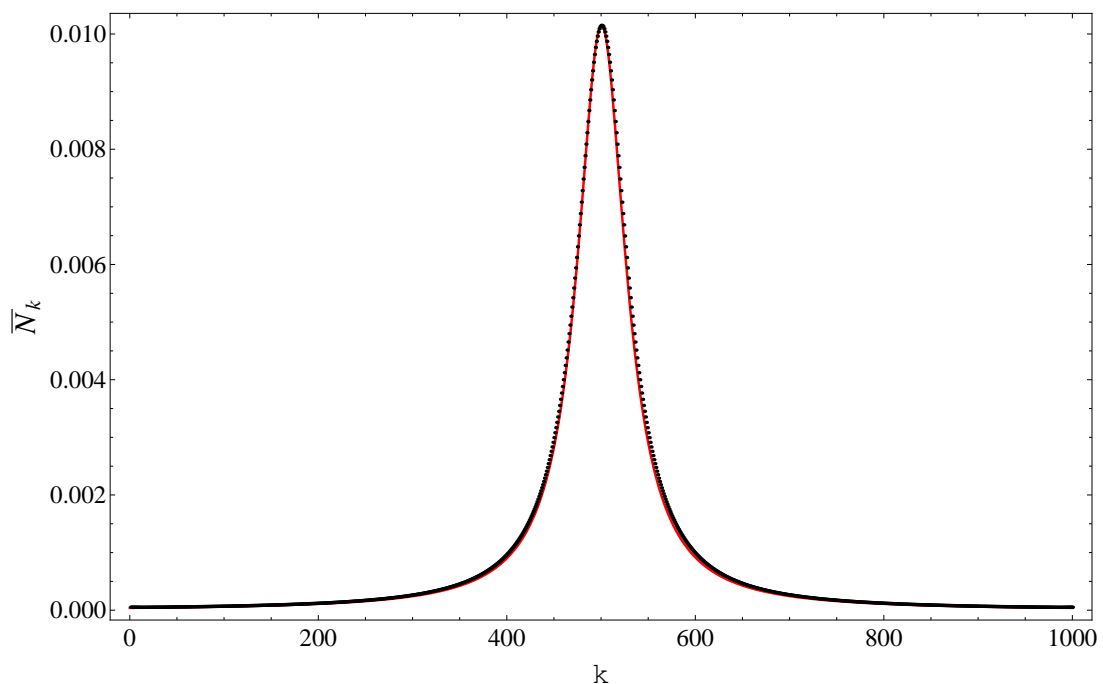


FIGURA 3.7: Curva vermelha representa o fit de uma função Lorentziana. Já os pontos pertencem a figura (3.6), corresponde à distribuição de excitações dos osciladores do banho. Note que o fit Lorentziano está em boa aproximação com os resultados numéricos.

Capítulo 4

Concorrência

Até o momento, estudamos a dinâmica do sistema. Obtivemos as equações de movimento e calculamos as funções $\Xi(t)$ e $\Theta(t)$. Vimos como as excitações são transferidas do oscilador principal para o banho, e como elas ficam distribuídas no banho após o sistema ter termalizado. Neste capítulo iremos estudar a dinâmica do emaranhamento entre o oscilador principal e o banho; entre o oscilador principal e partes do banho; e entre os osciladores do banho. Como discutido na seção 2.5, usaremos a concorrência como quantificador de emaranhamento.

4.1 Concorrência entre o oscilador central e o banho

O sistema que estamos estudando pode ser considerado um sistema composto de duas partes, uma sendo o oscilador principal e a outra o banho. Como falamos no capítulo anterior, escolhemos o estado inicial do sistema $|\psi(0)\rangle$ como sendo um estado fatorado (3.2):

$$|\psi(0)\rangle = \mathcal{N}(a|\alpha_0\rangle + b|\beta_0\rangle) \otimes \prod_k |0_k\rangle.$$

Como esse estado é separável, inicialmente o oscilador central e o banho não estão emaranhados.

Na hamiltoniana do nosso sistema (3.1) existem dois termos livres, que atuam de forma independente nas variáveis do sistema, e um termo de interação $\hat{H}_{int} \propto \hat{a}^\dagger \otimes \hat{b} + \hat{a} \otimes \hat{b}^\dagger$, que atua de maneira conjunta nas variáveis do oscilador principal e do banho. Ao evoluir o sistema, os termos livres acrescentam apenas uma fase, e o estado permaneceria fatorado. Já o termo de interação “*mistura*” as variáveis dos dois subsistemas de modo que o estado evoluído do sistema é dado por:

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{N} (a|\alpha(t)\rangle \otimes |\lambda_t\rangle + b|\beta(t)\rangle \otimes |\chi_t\rangle).$$

Aparentemente esse estado não é separável. Portanto, podemos dizer que é devido à interação que o oscilador principal e o banho se emaranham.

Para ver se de fato esse estado está emaranhado, e o quão emaranhado está, vamos calcular a concorrência entre o oscilador principal e o banho. Discutimos na seção (2.5) que a concorrência é um bom quantificador de emaranhamento para um sistema constituído por um par de qubits. Porém, estamos trabalhando com estados coerentes, que não são estados ortogonais. Para obtermos a concorrência devemos escrever esses estados em função de uma base ortonormal. Considere os estados genéricos [34]:

$$\begin{aligned} |f\rangle &= \cos \mu |\alpha(t)\rangle + e^{i\theta} \sin \mu |\beta(t)\rangle, \\ |g\rangle &= -\sin \mu |\alpha(t)\rangle + e^{i\theta} \cos \mu |\beta(t)\rangle, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde θ é real. Uma possível relação para que eles sejam ortogonais, $\langle f|g\rangle = 0$, é:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\pi}{4}, \\ e^{i\theta} &= \frac{\langle \beta(t)|\alpha(t)\rangle}{|\langle \beta(t)|\alpha(t)\rangle|}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Normalizando os estados temos:

$$\begin{aligned}
|1\rangle &= \frac{|f\rangle}{\sqrt{\langle f|f\rangle}} = \frac{1}{2S_+} (|\alpha(t)\rangle + e^{i\theta}|\beta(t)\rangle), \\
|0\rangle &= \frac{|g\rangle}{\sqrt{\langle g|g\rangle}} = \frac{1}{2S_-} (-|\alpha(t)\rangle + e^{i\theta}|\beta(t)\rangle),
\end{aligned} \tag{4.3}$$

sendo $S_{\pm} = \sqrt{\frac{1 \pm |\langle \alpha(t)|\beta(t)\rangle|}{2}}$. Portanto temos que os estados $\{|1\rangle, |0\rangle\}$ formam um par de estados ortonormais. Podemos fazer um procedimento análogo e criar outro par ortonormal levando em conta as variáveis do banho, ou seja:

$$\begin{aligned}
|\uparrow\rangle &= \frac{1}{2S'_+} (|\lambda_t\rangle + e^{i\theta'}|\chi_t\rangle), \\
|\downarrow\rangle &= \frac{1}{2S'_-} (-|\lambda_t\rangle + e^{i\theta'}|\chi_t\rangle),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

sendo $S'_{\pm} = \sqrt{\frac{1 \pm |\langle \lambda_t|\chi_t\rangle|}{2}}$ e $e^{i\theta'} = \frac{\langle \chi_t|\lambda_t\rangle}{|\langle \chi_t|\lambda_t\rangle|}$.

Podemos, agora, escrever os estados coerentes em termos desses estados ortonormais. Fazendo isso, temos que:

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= S_+|1\rangle - S_-|0\rangle, \\
|\beta\rangle &= e^{-i\theta} (S_+|1\rangle + S_-|0\rangle), \\
|\lambda_t\rangle &= S'_+|\uparrow\rangle - S'_-|\downarrow\rangle, \\
|\chi_t\rangle &= e^{-i\theta'} (S'_+|\uparrow\rangle + S'_-|\downarrow\rangle).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Como o estado do sistema fica da forma (3.17) para todo tempo t , os estados $\{|1\rangle, |0\rangle\}$ e $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ formam uma base para o nosso sistema. Portanto, para todo instante de tempo, o sistema pode ser escrito como um par de qubits. Feita essa mudança de base, podemos, então, calcular a concorrência entre os dois subsistemas.

A concorrência entre o oscilador central e os osciladores do banho pode ser escrita na forma¹:

¹A dedução da equação (4.6) está no apêndice A.

$$C_{c,b} = 2|ab|\mathcal{N}^2\mathcal{D}_c\mathcal{D}_b, \quad (4.6)$$

sendo a e b os coeficientes que multiplicam os estados coerentes, \mathcal{N} é o fator de normalização e \mathcal{D}_c (\mathcal{D}_b) é a distinguibilidade entre os estados $|\alpha(t)\rangle$ e $|\beta(t)\rangle$ ($|\lambda_t\rangle$ e $|\chi_t\rangle$) do oscilador central (osciladores do banho) [34]. A função \mathcal{D}_i mede o quão distinguíveis são dois estados $|\mu_i\rangle$ e $|\nu_i\rangle$, ou seja, quanto mais distinguíveis os estados, mais próximos da ortogonalidade (*overlap* próximo de zero) eles estão, e a função se aproxima de um. Agora, quanto mais indistinguíveis os estados, mais próximo de um é o *overlap* entre eles, e \mathcal{D}_i se aproxima de zero. Portanto a distinguibilidade leva em conta o *overlap* entre os estados e pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_c &= \sqrt{1 - |\langle\alpha(t)|\beta(t)\rangle|^2}, \\ \mathcal{D}_b &= \sqrt{1 - |\langle\lambda_t|\chi_t\rangle|^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Note que se não tivéssemos considerado o estado inicial como uma superposição de estados coerentes, o estado evoluído seria da forma (3.4) ao invés da forma (3.17), conseqüentemente não seria um estado emaranhado.

A concorrência é diretamente proporcional à distinguibilidade que, por sua vez depende do *overlap* entre os estados coerentes, tanto do oscilador central quanto dos osciladores do banho. Usando as relações (3.25) e (3.26), podemos escrevê-la como:

$$C_{c,b} = 2|ab|\mathcal{N}^2\sqrt{1 - |\langle\alpha_0|\beta_0\rangle|^{2\Xi(t)}}\sqrt{1 - |\langle\alpha_0|\beta_0\rangle|^{2\Theta(t)}}. \quad (4.8)$$

Vemos que no emaranhamento entre o oscilador central e o banho existe uma dependência do *overlap* do estado inicial do oscilador principal e da distribuição de excitação de cada um dos subsistemas. Porém não é uma dependência linear. Podemos dizer que a concorrência é completamente governada pelo *overlap* inicial $\langle\alpha_0|\beta_0\rangle$ e pelas funções $\Xi(t)$ e $\Theta(t)$.

A dependência temporal na expressão da concorrência é devida às funções $\Xi(t)$ e $\Theta(t)$. São elas que ditam como será a dinâmica do emaranhamento. Inicialmente, todas as excitações estão no oscilador principal, $\Theta(0) = 0$, portanto, a

distinguibilidade dos estados do banho é zero e, conseqüentemente, a concorrência é nula. Podemos analisar isso olhando para o estado do sistema (3.17). Esse estado vale para qualquer tempo t . No tempo $t = 0$ os estados dos osciladores do banho são indistinguíveis ($|\lambda_t\rangle = |\chi_t\rangle = |0\rangle$), ou seja, são iguais, logo eles podem ser fatorados, se reduzindo ao estado (3.4). Portanto, o estado global do sistema se torna separável, conseqüentemente não emaranhado. Ao final da dinâmica, todas as excitações estão no banho, logo $\Xi(T) = 0$. Agora há uma inversão, são os estados do oscilador principal que estão indistinguíveis. Portanto nesse tempo² $t = T$ $|\alpha(T)\rangle = |\beta(T)\rangle = |0\rangle$ e o estado (3.17) se torna novamente fatorado, conseqüentemente o emaranhamento do sistema vai a zero. Podemos concluir que só existe emaranhamento entre o oscilador central e banho enquanto há troca de excitações entre esses dois subsistemas.

Vimos então, que, o sistema começa desemaranhado, interage, emaranha e ao final desemaranha novamente. Isso quer dizer que: a concorrência inicialmente é zero, assume valores diferentes de zero, e retorna a zero novamente. Portanto existe um valor máximo na função da concorrência, ou seja, existe um tempo $t = t'$ em que o emaranhamento entre os dois subsistemas atinge um valor máximo. Esse máximo ocorrerá quando:

$$\left. \frac{d}{dt} C_{c,b} \right|_{t=t'} = 0. \quad (4.9)$$

Derivando a equação (4.8) em relação ao tempo, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} C_{c,b} &= \frac{d}{dt} 2|ab|\mathcal{N}^2 \sqrt{1 - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Xi(t)}} \sqrt{1 - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Theta(t)}}, \\ &= 2|ab|\mathcal{N}^2 \ln |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle| \frac{|\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Theta(t)} - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Xi(t)}}{\mathcal{D}_c \mathcal{D}_b} \frac{d}{dt} \Xi(t). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para que a condição do máximo (4.9) seja satisfeita, temos que:

$$\begin{aligned} |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Theta(t')} - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Xi(t')} &= 0, \\ |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Theta(t')} &= |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Xi(t')}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

²Vamos usar o tempo T , como o tempo no qual todas as excitações foram transferidas para o banho.

o que implica em:

$$\Xi(t') = \Theta(t') = \frac{1}{2}. \quad (4.12)$$

Isso significa dizer que a concorrência será máxima quando número médio de excitações em cada subsistema for o mesmo, que é justamente no momento em que metade das excitações do oscilador principal foram transferidas para o banho. Note que nesse tempo $t = t'$ há um emaranhamento máximo entre as partes do sistema global, mas isso não significa dizer que este estado é maximamente emaranhado, ou seja, apesar de ser um ponto de máximo, isso não implica que a concorrência é igual a um para esse tempo.

Podemos escolher alguns casos particulares e ver como fica o estado do sistema para o tempo em que a concorrência assume um valor máximo. Vamos supor que α_0 , β_0 , a e b são reais, e vamos analisar dois estados $|\psi_{-}\rangle$ e $|\psi_{+}\rangle$ onde fizemos $b = -a$ e $b = a$ no estado (3.17), respectivamente. Logo, temos que:

$$\begin{aligned} |\psi_{-}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}(1 - \langle\alpha_0|\beta_0\rangle)^{1/2}} (|\alpha(t')\rangle|\lambda_{t'}\rangle - |\beta(t')\rangle|\chi_{t'}\rangle), \\ |\psi_{+}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \langle\alpha_0|\beta_0\rangle)^{1/2}} (|\alpha(t')\rangle|\lambda_{t'}\rangle + |\beta(t')\rangle|\chi_{t'}\rangle). \end{aligned} \quad (4.13)$$

A concorrência para esses dois estados em $t = t'$, é dada por:

$$\begin{aligned} C_{(c,b)}^{(-)} &= \frac{2a^2 \sqrt{1 - |\langle\alpha_0|\beta_0\rangle|} \sqrt{1 - |\langle\alpha_0|\beta_0\rangle|}}{2a^2(1 - \langle\alpha_0|\beta_0\rangle)} \\ &= \frac{1 - \langle\alpha_0|\beta_0\rangle}{1 - \langle\alpha_0|\beta_0\rangle} = 1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} C_{(c,b)}^{(+)} &= \frac{2a^2 \sqrt{1 - |\langle\alpha_0|\beta_0\rangle|} \sqrt{1 - |\langle\alpha_0|\beta_0\rangle|}}{2a^2(1 + \langle\alpha_0|\beta_0\rangle)} \\ &= \frac{1 - \langle\alpha_0|\beta_0\rangle}{1 + \langle\alpha_0|\beta_0\rangle}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Temos que, para $|\psi_{-}\rangle$, a concorrência é igual a um, enquanto que para $|\psi_{+}\rangle$ é menor que um. Esse resultado nos diz que se o estado do sistema for preparado de

modo que $b = -a$ o oscilador principal se emaranha maximamente com o banho, em contrapartida, quando o sistema é preparado de modo que $b = a$ o emaranhamento entre o oscilador central e o banho não é tão intenso quanto no caso anterior. Note nesse último caso que a concorrência depende do *overlap* $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle$, de modo que quanto mais próximo de zero vai ficando o *overlap*, mais próximo de um fica a concorrência. No limite do *overlap* tendendo a zero ($\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \rightarrow 0$), a concorrência tende a um ($C_{c,b}^+ \rightarrow 1$). Por outro lado, quanto maior o *overlap* menor vai ficando o valor da concorrência. No limite do *overlap* tendendo a um ($\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \rightarrow 1$), a concorrência tende a zero ($C_{c,b}^+ \rightarrow 0$).

Podemos escrever $|\psi_-\rangle$ e $|\psi_+\rangle$ na base de qubits na tentativa de compreender o que ocorre com o estado no tempo $t = t'$. Note que para as dadas condições $e^{i\theta} = e^{i\theta'} = 1$ e usando as relações (3.25) e (3.26) podemos escrever S_{\pm} e S'_{\pm} em função do *overlap* $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle$ e das funções $\Xi(t)$ e $\Theta(t)$. Feitas essas alterações, os estados $|\psi_-\rangle$ e $|\psi_+\rangle$ podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} |\psi_-\rangle &= -\frac{a\sqrt{1 - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|} (|1 \downarrow\rangle + |0 \uparrow\rangle)}{a\sqrt{2}(1 - \langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle)^{1/2}}, \\ |\psi_-\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|1 \downarrow\rangle + |0 \uparrow\rangle). \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$|\psi_+\rangle = \frac{(1 + |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{1/2}) |1 \uparrow\rangle + (1 - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{1/2}) |0 \downarrow\rangle}{\sqrt{2}(1 + \langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle)^{1/2}}. \quad (4.17)$$

Vemos que, a menos de uma fase global, o estado $|\psi_-\rangle$ no ponto onde a concorrência atinge o valor máximo se reduz a um estado de Bell [35]. Os estados de Bell são definidos como:

$$\begin{aligned} |\Phi^{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0 \downarrow\rangle \pm |1 \uparrow\rangle) \\ |\Psi^{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0 \uparrow\rangle \pm |1 \downarrow\rangle) \end{aligned} \quad (4.18)$$

É conhecido que esses estados são maximamente emaranhados [24], tanto é que obtivemos a concorrência igual a um para esse estado. Já o $|\psi_+\rangle$, bem como a concorrência, ainda fica em função do *overlap* entre os estados iniciais do oscilador principal. Se prepararmos vários estados como diferentes valores de $|\alpha_0\rangle$ e $|\beta_0\rangle$,

temos que quanto menor o *overlap*, mais esse estado se aproxima de um estado de Bell, e conseqüentemente mais emaranhado o estado vai se tornando. À medida que o *overlap* aumenta, o coeficiente de um dos estados da superposição diminui, logo esse estado vai se aproximando de um estado separável. No caso limite em que o *overlap* é um, o estado se torna um estado separável, logo desemaranhado.

Podemos fazer a mesma análise utilizando a matriz densidade reduzida do oscilador principal. Tomando o traço sobre as variáveis do banho, as matrizes densidade reduzidas dos estados $|\psi_{-}\rangle$ e $|\psi_{+}\rangle$ em $t = t'$, respectivamente, são:

$$\rho_c^{(-)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

$$\rho_c^{(+)} = \frac{1}{2(1 + \langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle)} \begin{pmatrix} (1 + \langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle^{1/2})^2 & 0 \\ 0 & (1 - \langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle^{1/2})^2 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Ambas as matrizes densidade representam estados mistos. Como discutimos na seção (2.5), para um estado puro emaranhado, a matriz densidade reduzida é um estado misto e a entropia de von Neumann que mede o grau de mistura é um quantificador de emaranhamento para estados puros (equação (2.54)). Note que $\rho_c^{(-)}$ é um múltiplo da matriz identidade, dessa forma é um estado maximamente misto e conseqüentemente $|\psi_{-}\rangle$ é maximamente emaranhado. $\rho_c^{(+)}$ novamente aparece uma dependência do *overlap*, e toda a análise que foi feita para o vetor de estado pode ser refeita aqui. Dependendo do *overlap* ela se aproxima da matriz identidade, que indica emaranhamento máximo, ou se aproxima de um estado puro, que indica emaranhamento nulo.

Como estamos trabalhando com estados coerentes, o *overlap* entre eles não podem ser zero. Caso isso ocorresse estaríamos trabalhando desde o início com qubits. Por isso, mantivemos o *overlap* entre zero e um ($0 < \langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle < 1$). Mas é importante ressaltar a validade das equações, mesmo para os casos limites. Para discutirmos os casos limites. Plotamos gráficos da concorrência entre o oscilador principal e o banho para valores distintos de *overlap*, ora $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \approx 1$, ora $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \approx 0$. Consideramos as condições que discutimos acima $|\alpha_0\rangle$, $|\beta_0\rangle$, a e b reais. A figura (4.1) apresenta dois gráficos da concorrência para o caso em que o *overlap* $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = 0.98$. A figura da esquerda corresponde a um estado em que $b = -a$, enquanto que a da direita $b = a$. Note que em ambos os gráficos inicialmente a

concorrência é zero, em seguida o sistema se emaranha. Há um ponto de máximo e no final, quando todas as excitações estão no banho, o emaranhamento vai a zero.

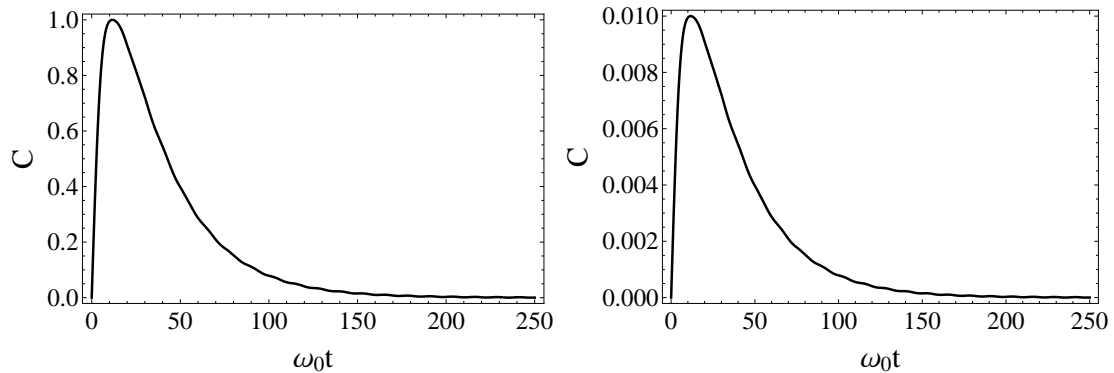


FIGURA 4.1: Concorrência entre o banho e o oscilador central em função da escala de tempo $\omega_0 t$ (adimensional) para o caso em que o *overlap* $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = 0.98$. Na figura da esquerda os coeficientes do estado (3.17) se relacionam da seguinte maneira $b = -a$. Já na figura da direita $b = a$.

Podemos ver que, em ambos os gráficos, o máximo da concorrência ocorre no ponto em que metade das excitações estão no banho e metade das excitações estão no oscilador principal (ver figura (3.3)). Note que os gráficos tem o mesmo comportamento, a única diferença entre eles é a escala do eixo da concorrência. Essa diferença na escala é devida à escolha dos coeficientes a e b . Se voltarmos à expressão da concorrência vemos que a parte responsável pela dinâmica, que dá o formato da curva dos gráficos, depende do *overlap* e das funções $\Xi(t)$ e $\Theta(t)$, enquanto que a e b entram apenas como constantes multiplicando $\mathcal{D}_c \mathcal{D}_b$. Então para $b = -a$ essa constante vale $y_{(-)} = \frac{1}{1 - \langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle}$, e para $b = a$ vale $y_{(+)} = \frac{1}{1 + \langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle}$, logo $y_{(-)} > y_{(+)}$. Note que $\frac{y_{(-)}}{y_{(+)}} = 99$, que é justamente a diferença na escala dos dois gráficos. Uma escala é praticamente 100 vezes maior do que a outra. Podemos interpretar isso da seguinte forma: como estados coerentes são superposições do estado de número, podemos escrever o estado inicial do sistema em termos dos estados de número. Veremos nesse caso que vai existir um termo de vácuo do oscilador principal que junto com o termo de vácuo do banho não vão evoluir no tempo. Esse é um termo fatorado portanto, não emaranhado. Mas vai existir também os termos do oscilador principal que não estão no estado de vácuo. Esses termos ao se acoplarem com vácuo do banho evoluem, e durante essa evolução os estados deixam de se tornar fatorados. O emaranhamento surge devido a esses termos. Portanto, quanto maior for essa parcela do estado inicial que não estiver no estado de vácuo maior será o emaranhamento. Vemos então que, se escrevermos

o estado inicial do sistema em termos do estado de número o estado $|\psi_{-}\rangle$ tem uma população do vácuo menor do que o estado $|\psi_{+}\rangle$.

Podemos observar também que o pico do gráfico da esquerda atinge o valor máximo da concorrência, $C = 1$, enquanto que o da direita vai a um valor $C < 1$. Isso é um retrato da discussão feita anteriormente sobre os estados que se emaranham maximamente ou não, dependendo da escolha dos coeficientes a e b .

A figura (4.2) é um gráfico da concorrência para o caso em que o *overlap* $\langle\alpha_0|\beta_0\rangle = e^{-18}$. No gráfico da esquerda $b = -a$, enquanto que no gráfico da direita $b = a$. Note que, diferente do caso anterior, os gráficos são praticamente iguais, e isso é devido ao fato do *overlap* ser muito próximo de zero, portanto a diferença entre y_1 e y_2 é muito pequena, de forma que $\frac{y_{(-)}}{y_{(+)}} \approx 1$. Note que, em ambos os gráficos, o máximo da concorrência atinge o valor $C \approx 1$. Isso está de acordo com o que discutimos: quanto menor o *overlap* mais o estado em que $b = a$ se aproxima de um estado de Bell no ponto em que a concorrência é máxima. Para o *overlap* em questão, a diferença no emaranhamento para os dois casos fica praticamente imperceptível.

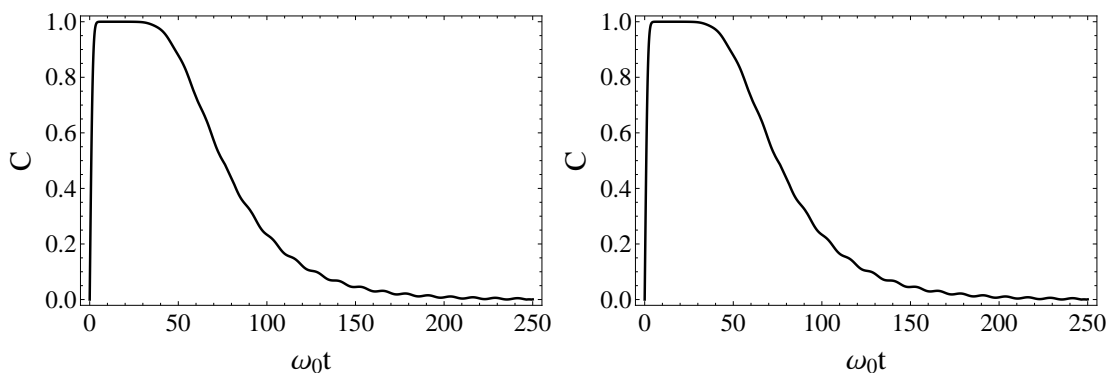


FIGURA 4.2: Concorrência entre o banho e o oscilador central em função da escala de tempo $\omega_0 t$ (adimensional) para o caso em que o *overlap* $\langle\alpha_0|\beta_0\rangle = e^{-18}$. Na figura da esquerda os coeficientes do estado (3.17) se relacionam da seguinte maneira $b=-a$. Já na figura da direita $b=a$.

Note que na figura (4.2), há o aparecimento de uma espécie de platô, e nos passa uma impressão que o sistema fica maximamente emaranhado por um intervalo de tempo. Mas, de acordo com o estudo que fizemos da equação da concorrência, só existe um ponto em que o emaranhamento é máximo. Na verdade, isso não é um platô, existe na realidade um pico, que nessa escala não é possível observá-lo.

A figura (4.3) apresenta um *zoom* da região desse “platô”. Esse pico só é notado em uma escala cuja a precisão está na oitava casa decimal, a escala vertical do gráfico está no intervalo de 0,99999995 a 1.00000005. Podemos explicar essa espécie de platô olhando para a expressão da concorrência, mais precisamente para a distinguibilidade. A distinguibilidade depende do *overlap* elevado a uma função dependente do tempo. Como o *overlap* é muito pequeno, somente as funções $\Xi(t)$ e $\Theta(t)$, assumirem valores próximos de zero, a distinguibilidade irá alterar seu valor, se aproximando de zero também. Como durante a interação essas funções têm valores diferentes de zero, a distinguibilidade, e conseqüentemente a concorrência, varia muito pouco durante esse intervalo de tempo. Portanto quanto menor o *overlap*, maior é esse “platô”.

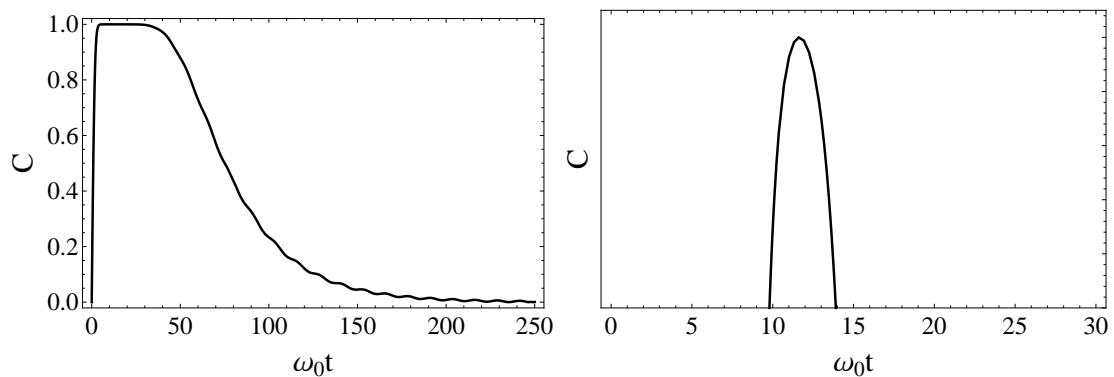


FIGURA 4.3: A figura da direita é um *zoom* da região do platô da figura da esquerda. A escala vertical do gráfico da esquerda está no intervalo de 0,99999995 a 1.00000005

4.2 Concorrência entre o oscilador central e partes do banho

Como foi discutido na seção (3.3) podemos facilmente separar o banho em várias partes e estudar, por exemplo, a dinâmica das excitações nessas partições. Aqui podemos fazer essa mesma separação do banho, e agora estudar a dinâmica do emaranhamento entre o oscilador central e partes do banho, e como esse emaranhamento se distribui entre as possíveis partições.

Na seção anterior consideramos o banho todo como um subsistema, pois só assim poderíamos calcular a concorrência. Podemos até dividir o banho em várias partes, mas a concorrência só pode ser calculada entre bipartições. Então, para que

possamos trabalhar com bipartições, devemos tomar um traço sobre as variáveis do banho que não pertencem ao sistema de interesse.

Considere a matriz densidade do sistema:

$$\begin{aligned} \rho_{(c,b)} &= \mathcal{N}^2 (|a|^2 |\alpha(t), \lambda_t\rangle \langle \alpha(t), \lambda_t| + |b|^2 |\beta(t), \chi_t\rangle \langle \beta(t), \chi_t| \\ &+ \{ab^* |\alpha(t), \lambda_t\rangle \langle \beta(t), \chi_t| + c.h.\}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para estudar o emaranhamento entre o oscilador principal e o k -ésimo oscilador do banho tomamos o traço sobre as variáveis dos outros osciladores do banho. Logo temos:

$$\begin{aligned} \rho_{(c,k)} &= \mathcal{N}^2 (|a|^2 |\alpha(t), \lambda_k(t)\rangle \langle \alpha(t), \lambda_k(t)| + |b|^2 |\beta(t), \chi_k(t)\rangle \langle \beta(t), \chi_k(t)| \\ &+ \{ab^* \langle \bar{\chi}_k(t) | \bar{\lambda}_k(t) \rangle |\alpha(t), \lambda_k(t)\rangle \langle \beta(t), \chi_k(t)| + c.h.\}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Onde $|\bar{\lambda}_k(t)\rangle$ e $|\bar{\chi}_k(t)\rangle$ são os estados do banho nos quais o traço foi tomado. Podemos escrever o *overlap* entre eles em função do *overlap* entre os estados iniciais do oscilador central. Portanto, a matriz densidade pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \rho_{(c,k)} &= \mathcal{N}^2 (|a|^2 |\alpha(t), \lambda_k(t)\rangle \langle \alpha(t), \lambda_k(t)| + |b|^2 |\beta(t), \chi_k(t)\rangle \langle \beta(t), \chi_k(t)| \\ &+ \{ab^* \langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle^{\Theta(t) - |g_k|^2} |\alpha(t), \lambda_k(t)\rangle \langle \beta(t), \chi_k(t)| + c.h.\}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Usando os passos do Apêndice A, a concorrência entre esses dois subsistemas é dada por:

$$C_{(c,k)} = 2|ab|\mathcal{N}^2 |\langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle|^{\Theta(t) - |g_k|^2} \mathcal{D}_c \mathcal{D}_k, \quad (4.24)$$

sendo $\mathcal{D}_k = \sqrt{1 - |\langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle|^{|g_k|^2}}$ a distinguibilidade entre os estados do k -ésimo oscilador. Continuando no mesmo raciocínio, podemos calcular a concorrência entre o oscilador principal e dois osciladores arbitrários do banho (k e j). A matriz densidade desses dois subsistemas será da forma:

$$\begin{aligned} \rho_{(c,kj)} &= \mathcal{N}^2 (|a|^2 |\alpha(t), \lambda_k, \lambda_j\rangle \langle \alpha(t), \lambda_k, \lambda_j| + |b|^2 |\beta(t), \chi_k, \chi_j\rangle \langle \beta(t), \chi_k, \chi_j| \\ &+ \{ab^* \langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle^{\Theta(t) - |g_k|^2 - |g_j|^2} |\alpha(t), \lambda_k, \lambda_j\rangle \langle \beta(t), \chi_k, \chi_j| + c.h.\}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

E a concorrência será:

$$C_{(c,kj)} = 2|ab|\mathcal{N}^2 |\langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle|^{\Theta(t) - |g_k|^2 - |g_j|^2} \mathcal{D}_c \mathcal{D}_{kj}. \quad (4.26)$$

Expandindo esse resultado para um grupo de m osciladores do banho a concorrência entre estes e o central é da forma:

$$C_{(c,m)} = 2|ab|\mathcal{N}^2 |\langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle|^{\Theta(t) - \sum_{k'}^{m'} |g_{k'}|^2} \mathcal{D}_c \mathcal{D}_m. \quad (4.27)$$

O somatório $\sum_{k'}^{m'}$ é feito de tal modo a conter m termos, correspondente aos m osciladores da partição. Note que já vimos o termo $\sum_{k'}^{m'} |g_{k'}|^2$. Ele corresponde justamente à função Θ_m que informa o número médio de excitações na partição contendo m osciladores (ver seção 3.3). Portanto, o termo $\Theta(t) - \sum_{k'}^{m'} |g_{k'}|^2$, que pode ser substituído por $\Theta(t) - \Theta_m$, nos fornece o número médio de excitações dos osciladores fora da partição de interesse. Podemos escrever a concorrência em função de Θ_m como:

$$C_{(c,m)} = 2|ab|\mathcal{N}^2 |\langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle|^{\Theta(t) - \Theta_m} \sqrt{1 - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Xi(t)}} \sqrt{1 - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Theta_m}}. \quad (4.28)$$

Portanto, na expressão da concorrência existe um termo ($|\langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle|^{\Theta(t) - \Theta_m}$) que envolve as excitações dos osciladores que estão fora da partição de interesse; esse é um termo de contribuição externa (c_{ext}). Essa equação se reduz a equação (4.8) quando levamos em conta todos os osciladores do banho pois, nesse caso, $\Theta(t) - \Theta_N = 0$.

Dividindo a equação (4.24) pela equação (4.26), obtemos:

$$\frac{C_{(c,k)}}{C_{(c,kj)}} = |\langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle|^{|g_j|^2} \frac{\mathcal{D}_k}{\mathcal{D}_{kj}} \leq 1 \quad (4.29)$$

Isso significa que $C_{(c,k)} \leq C_{c,kj}$, ou seja, o oscilador central emaranha mais com dois osciladores do banho do que com apenas um. Usando esse procedimento, é fácil mostrar que existe a seguinte hierarquia entre as concorrências:

$$C_{(c,k)} \leq C_{c,kj} \leq C_{c,kjl} \leq C_{c,kj\dots m} \dots \leq C_{c,N}. \quad (4.30)$$

A equação (4.30) mostra que o oscilador principal se emaranha mais fortemente com o banho inteiro do que com as suas partes. Note que essa expressão só é válida ao compararmos duas partições em que uma delas engloba todos os osciladores da outra. Caso as partições envolvam osciladores diferentes, essa equação não é mais válida. Essa relação nos indica como o emaranhamento se distribui. Ele é maior quanto maior (considerando o número de osciladores envolvidos) forem as partições.

Para visualizar a relação de hierarquia de emaranhamento, dividimos o banho em cinco partes, contendo 100, 300, 500, 700 e 900 osciladores cada. Diferente do que foi feito na seção (3.3) as partições tem osciladores em comum. Todas elas são centradas na frequência de ressonância de modo que a maior sempre engloba a menor, ou seja, a de 900 engloba a de 700, que por sua vez engloba a de 500 e assim por diante. A figura (4.4) apresenta uma representação esquemática de como foi feita essas partições.

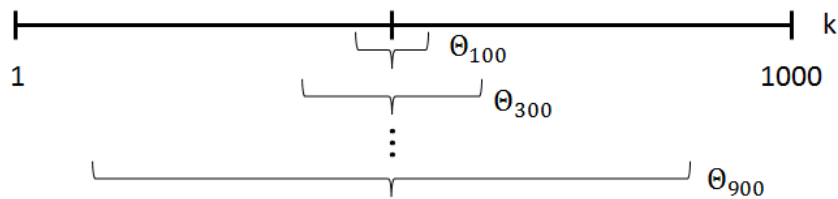


FIGURA 4.4: Ilustração de como as partições do banho foram feitas. Cada partição foi centrada na frequência do oscilador principal, de modo que as partições menores são englobadas pelas maiores. Associamos uma função Θ_m para cada partição, sendo que m indica o número de osciladores na respectiva partição.

Novamente associamos funções Θ_m para cada partição, sendo que aqui o índice m indica quantos osciladores há na respectiva partição. Como foi discutido na seção (3.3), essas funções nos dizem o quanto de excitações há em cada partição. A figura (4.5) apresenta a dinâmica dessas funções Θ_m . Como o esperado, quanto maior o número de osciladores na partição maior é o número médio de excitações.

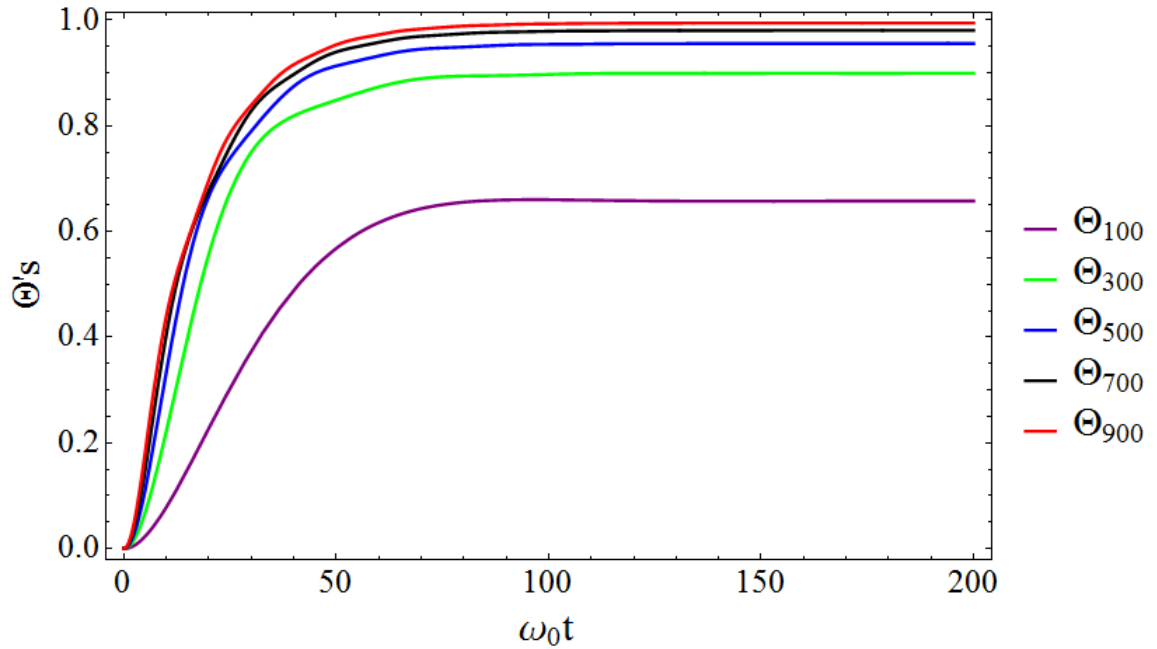


FIGURA 4.5: Dinâmica do número médio de excitações nas cinco partições com 100, 300, 500, 700 e 900 osciladores, respectivamente.

Depois de criadas as partições do banho, podemos então plotar gráficos da concorrência entre o oscilador principal e cada uma das partições. Como foi feito para o caso do oscilador central com todo o banho, devemos definir o *overlap*. Em todos os casos que iremos discutir escolhemos α_0 , β_0 , a e b reais, e fizemos $b = -a$.

A figura (4.6) é o caso em que o *overlap* $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \approx 0.92$. Nessa figura temos seis curvas, as cinco primeiras, ordenadas de baixo para cima ($C_{(c,100)}$, $C_{(c,300)}$, $C_{(c,500)}$, $C_{(c,700)}$, $C_{(c,900)}$), correspondem à concorrência entre oscilador central e as partições com 100, 300, 500, 700 e 900 osciladores, respectivamente. E a última curva, a mais externa, corresponde a concorrência do oscilador central com todo o banho. As curvas são bem próximas, porém não se cruzam, respeitando a relação hierárquica. E apresentam como limitante superior a curva do emaranhamento do central com o banho.

Fizemos outros testes, mudando o valor do *overlap*. Na figura (4.7) o *overlap* é $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \approx 0.015$. Como no caso anterior, as cinco primeiras curvas, ordenadas de baixo para cima, são as concorrências do oscilador principal com as mesmas partições, enquanto que a última é concorrência do central com todo o banho. A única mudança feita foi no *overlap*. Novamente, a hierarquia é obedecida. Note que na curva mais externa, o pico fica menos pronunciado, em relação ao caso

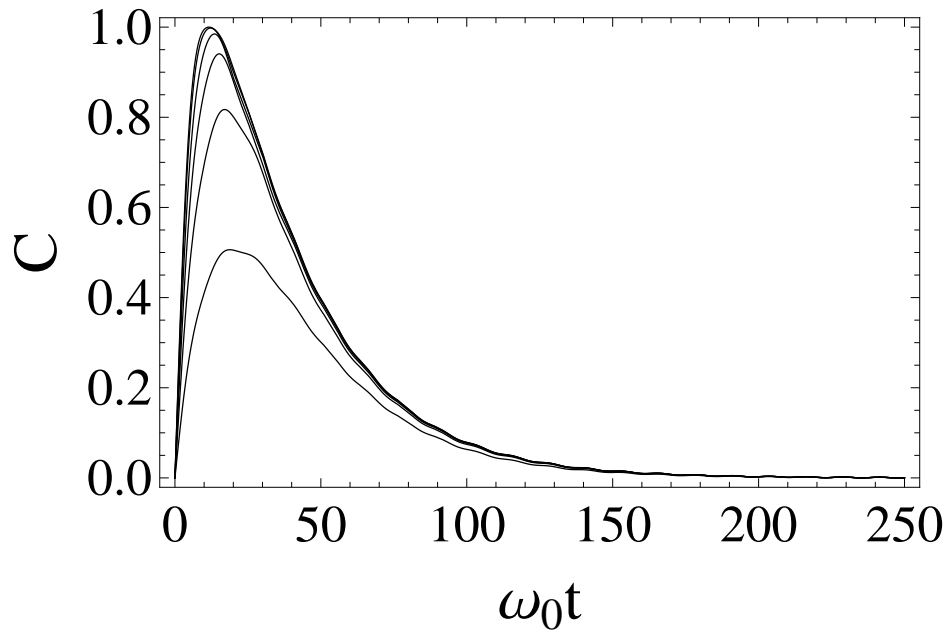


FIGURA 4.6: As cinco primeiras curvas, ordenadas de baixo para cima, correspondem à concorrência entre o oscilador central e partições com 100, 300, 500, 700 e 900 osciladores, respectivamente. A curva mais externa corresponde a concorrência entre o oscilador central e todo o banho. Aqui, o *overlap* é $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \approx 0.92$.

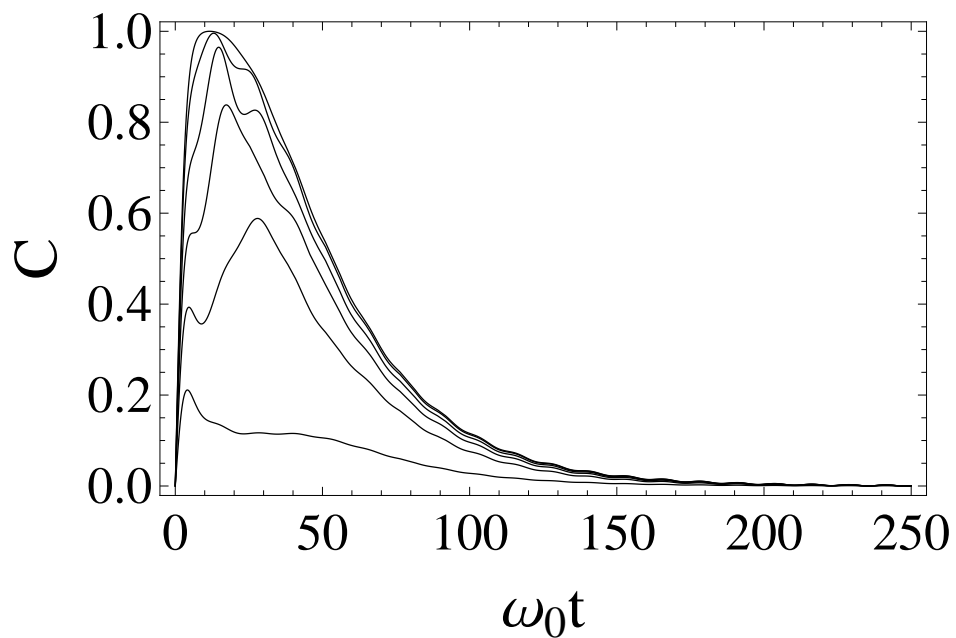


FIGURA 4.7: As cinco primeiras curvas, ordenadas de baixo para cima, correspondem à concorrência entre o oscilador central e partições com 100, 300, 500, 700 e 900 osciladores, respectivamente. A curva mais externa corresponde a concorrência entre o oscilador central e todo o banho. Aqui, o *overlap* é $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \approx 0.015$.

anterior, apresentando um alargamento. Nas demais curvas começam a aparecer certas oscilações.

Diminuímos ainda mais o *overlap*. A figura (4.8) é o caso em que o *overlap* é $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = e^{-18}$. As curvas representam a concorrência entre o oscilador central e as mesmas partições, com o mesmo ordenamento dos casos anteriores. Novamente a hierarquia está presente. O pico da curva mais externa praticamente não aparece, surgindo aquela espécie de “platô”, que discutimos na subseção anterior, enquanto que as oscilações nas demais curvas aumentam.

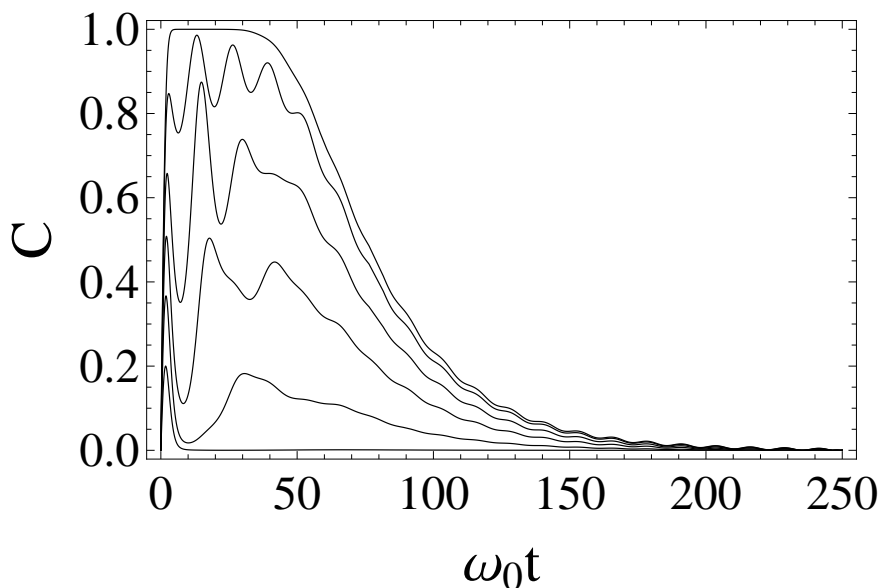


FIGURA 4.8: As cinco primeiras curvas, ordenadas de baixo para cima, correspondem à concorrência entre o oscilador central e partições com 100, 300, 500, 700 e 900 osciladores, respectivamente. A curva mais externa corresponde a concorrência entre o oscilador central e todo o banho. Aqui, o *overlap* é $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = e^{-18}$.

Podemos explicar essas oscilações olhando separadamente para dois termos na expressão da concorrência. Um termo é o do produto das distinguibilidades ($\mathcal{D} = \mathcal{D}_c \mathcal{D}_m$), que chamaremos apenas de distinguibilidade. O outro é o termo referente à contribuição dos osciladores que não estão no sistema de interesse ($c_{ext} = |\langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle|^{\Theta(t) - \Theta_m}$), que chamaremos de contribuição externa. São esses dois termos responsáveis pela dinâmica da concorrência entre oscilador central e partições do banho.

Vamos analisar o caso $C_{(c,900)}$, pois é a curva que apresenta mais oscilações. A figura (4.9) traz dois gráficos, o da esquerda é o gráfico da concorrência entre esses dois subsistemas, já o da direita é um gráfico da distinguibilidade (curva

de vermelho) e da contribuição externa (curva de azul). Portanto, o gráfico da esquerda, a menos de uma constante, é o produto desses dois gráficos. Note que o termo da distinguibilidade é responsável apenas pelo envelope do gráfico da concorrência, isto é, o gráfico que mostra o comportamento da distinguibilidade em função do tempo é semelhante ao gráfico correspondente da concorrência, exceto pela ausência de oscilações. Já o termo de contribuição externa é responsável pelas oscilações. Temos então, um fato muito interessante: os osciladores fora do sistema de interesse, nesse caso os 100 osciladores que não estão presentes nessa partição, influenciam no emaranhamento entre o oscilador central e a dada partição.

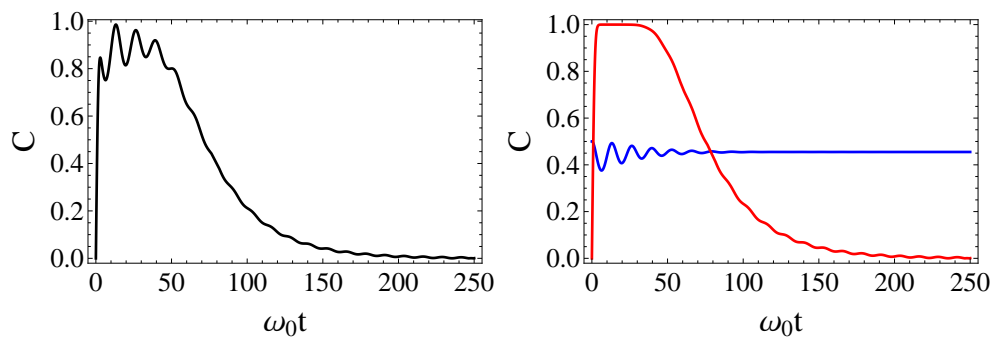


FIGURA 4.9: *Figura da esquerda:* Concorrência entre o oscilador principal e a partição com 900 osciladores do banho, para o caso em que $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = e^{-18}$. *Figura da direita:* Termo da concorrência referente à distinguibilidade, curva vermelha, enquanto que a curva azul representa o termo referente à contribuição externa.

A figura (4.10) apresenta dois gráficos. O da esquerda, é o gráfico da dinâmica do número médio de excitações desses osciladores que foram traçados fora (curva vermelha) e o da contribuição externa (curva azul). Durante a interação os osciladores ficam trocando excitações, o que favorece as oscilações. Quando o número de excitações desses osciladores vai aumentando, o termo de contribuição externa vai diminuindo e, quando o número de excitações diminui, o termo de contribuição externa aumenta. Portanto c_{ext} varia de acordo com a população de excitações nos osciladores que estão fora do sistema de interesse.

No gráfico da direita da figura (4.10) faz-se uma comparação entre a concorrência (curva preta) e a dinâmica de excitações desses osciladores que estão fora (curva vermelha). Note que, como consequência do que discutimos no parágrafo anterior, as oscilações da concorrência são devidas à dinâmica das excitações desses osciladores que estão fora.

Em ambos os gráficos da figura (4.10) a escala não é importante, só estamos interessados no comportamento. Tanto que a curva das excitações foi multiplicada por um fator de 5 para que pudesse ser vista.

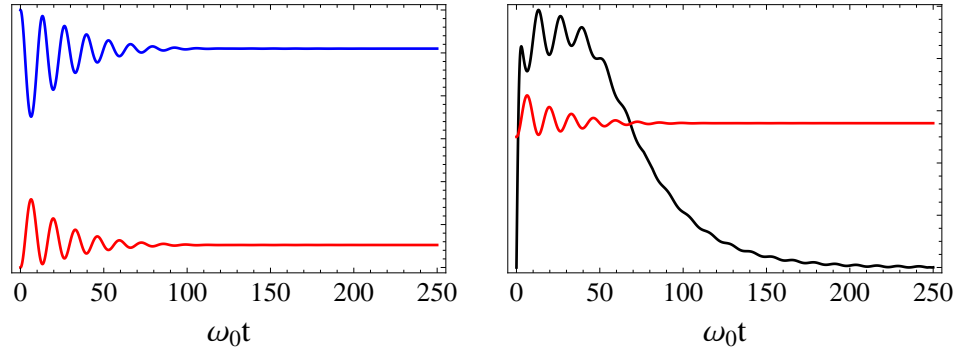


FIGURA 4.10: *Figura da esquerda:* Curva azul corresponde ao termo de contribuição externa. Já a curva vermelha corresponde à dinâmica das excitações dos osciladores fora do sistema de interesse. *Figura da direita:* Comparação entre a concorrência $C_{(c,900)}$, curva preta, e as excitações dos osciladores fora do sistema de interesse, curva vermelha.

Observe que essas oscilações nos gráficos da concorrência começaram a aparecer à medida que diminuíamos o *overlap* inicial. Para o caso em que o *overlap* era $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \approx 0.92$, figura (4.6), as curvas só apresentavam um pico, já para o caso em que o *overlap* era $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = e^{-18}$ as curvas já apresentam oscilações. Podemos ver que há dois comportamentos distintos nas curvas da concorrência, e eles estão relacionados com o valor do *overlap*.

Olhando para a expressão da concorrência notamos que, se o *overlap* $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \approx 1$, o termo correspondente à contribuição externa é próximo de 1 e pouco contribui para a dinâmica. Desse modo a dinâmica da concorrência é governada pela distinguibilidade, que é um termo que se refere somente aos subsistemas de interesse. Porém, quando o *overlap* é próximo de zero, exceto no caso em que as funções $\Xi(t)$ e $\Theta_m(t)$ são próximas de zero, a distinguibilidade fica próxima de 1, enquanto que o termo de contribuição externa fica mais sensível às oscilações, portanto nesse caso é esse termo que governa a dinâmica.

4.3 Concorrência entre os próprios osciladores do banho

Até o momento, estudamos a dinâmica do emaranhamento entre o oscilador principal e os osciladores do banho. E observamos que após um tempo $t = T$ a concorrência entre esses dois subsistemas vai a zero. Nesse tempo todas as excitações estão contidas no banho e o oscilador central permanece no vácuo. Já que para esse tempo as excitações ficam contidas no banho, é de se esperar que exista algum emaranhamento entre partições do banho. Podemos, então, estudar a dinâmica do emaranhamento entre partições do banho. Para isto, basta tomar o traço sobre as variáveis do oscilador central.

Dada a matriz densidade do sistema, equação (4.21), ao tomar o traço sobre as variáveis do oscilador principal, obtemos:

$$\rho_{(b)} = \mathcal{N}^2 (|a|^2 |\lambda_t\rangle \langle \lambda_t| + |b|^2 |\chi_t\rangle \langle \chi_t| + \{ab^* \langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle^{\Xi(t)} |\lambda_t\rangle \langle \chi_t| + c.h.\}), \quad (4.31)$$

onde usamos $\langle \beta(t) | \alpha(t) \rangle = \langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle^{\Xi(t)}$.

Como o estado do banho é escrito como um estado produto de cada oscilador do banho (ver equação (3.18)), podemos separá-lo em duas partes (A e B), de modo que:

$$\begin{aligned} |\lambda_t\rangle &= |\lambda_A\rangle \otimes |\lambda_B\rangle, \\ |\chi_t\rangle &= |\chi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle \end{aligned} \quad (4.32)$$

sendo que $|\lambda_A\rangle$ ($|\lambda_B\rangle$) é escrito como um estado produto dos osciladores da partição A(B), o mesmo é válido para o estado $|\chi_A\rangle$ ($|\chi_B\rangle$). Portanto a matriz densidade reduzida, considerando o banho constituído de duas partes, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \rho_{(A,B)} &= \mathcal{N}^2 (|a|^2 |\lambda_A, \lambda_B\rangle \langle \lambda_A, \lambda_B| + |b|^2 |\chi_A, \chi_B\rangle \langle \chi_A, \chi_B| \\ &+ \{ab^* \langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle^{\Xi(t)} |\lambda_A, \lambda_B\rangle \langle \chi_A, \chi_B| + c.h.\}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Seguindo os passos do Apêndice A, escrevendo os estados coerentes nas bases ortonormais, obtemos a concorrência entre esses dois subsistemas dada por:

$$C_{A,B} = 2|ab|\mathcal{N}^2|\langle\alpha_0|\beta_0\rangle|^{\Xi(t)}\sqrt{1-|\langle\alpha_0|\beta_0\rangle|^{2\Theta_A}}\sqrt{1-|\langle\alpha_0|\beta_0\rangle|^{2\Theta_B}}, \quad (4.34)$$

Onde fizemos $\langle\lambda_i|\chi_i\rangle = \langle\alpha_0|\beta_0\rangle^{\Theta_i}$, sendo i uma dada partição do banho. Novamente podemos escrever a concorrência como função do *overlap* $\langle\alpha_0|\beta_0\rangle$ e das funções que fornecem a dinâmica das excitações em cada subsistema. Note que, semelhante ao caso do emaranhamento entre o central e uma parte do banho, existe um termo na expressão da concorrência que se refere a um subsistema que está fora do sistema de interesse. Podemos portanto, dividir a expressão da concorrência em dois termos: contribuição interna e externa. O termo de contribuição interna envolve a distinguibilidade entre os estados coerentes dos osciladores do banho. Já o de contribuição externa envolve a função $\Xi(t)$ que está diretamente relacionada com a dinâmica das excitações do oscilador principal.

De acordo com a equação (4.34), a concorrência depende das funções Θ_A e Θ_B . Como sabemos, essas funções estão relacionadas com a dinâmica das excitações das partições A e B , respectivamente. Portanto, tais funções variam de acordo com o número de osciladores e com a faixa de frequência de cada partição. Analisamos o caso em que a partição A está centrada na frequência do oscilador principal, enquanto que a partição B seria complementar à primeira. A figura (4.11) ilustra como foi feita essa divisão.

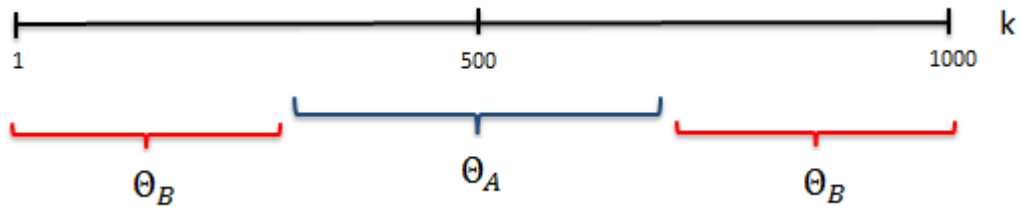


FIGURA 4.11: Ilustração de como foi feita a divisão do banho. A partição A foi centrada na frequência de ressonância, a ela associamos a função Θ_A . A partição B é complementar a A , e a ela associamos a função Θ_B .

Estudamos três casos distintos: primeiro Θ_A com 100 osciladores, segundo Θ_A com 500 osciladores e por último Θ_A com 900 osciladores. A figura (4.12) apresenta três gráficos das funções Θ_A e Θ_B para os três casos em que dividimos

o banho. Nos três gráficos, a curva preta é referente à função Θ_A , enquanto que a curva vermelha corresponde à função Θ_B . No primeiro gráfico, Θ_A contém 100 osciladores, no segundo 500 e no terceiro 900. Note que, no primeiro gráfico, as excitações de cada partição se distribuem de forma mais equilibrada do que no último gráfico.

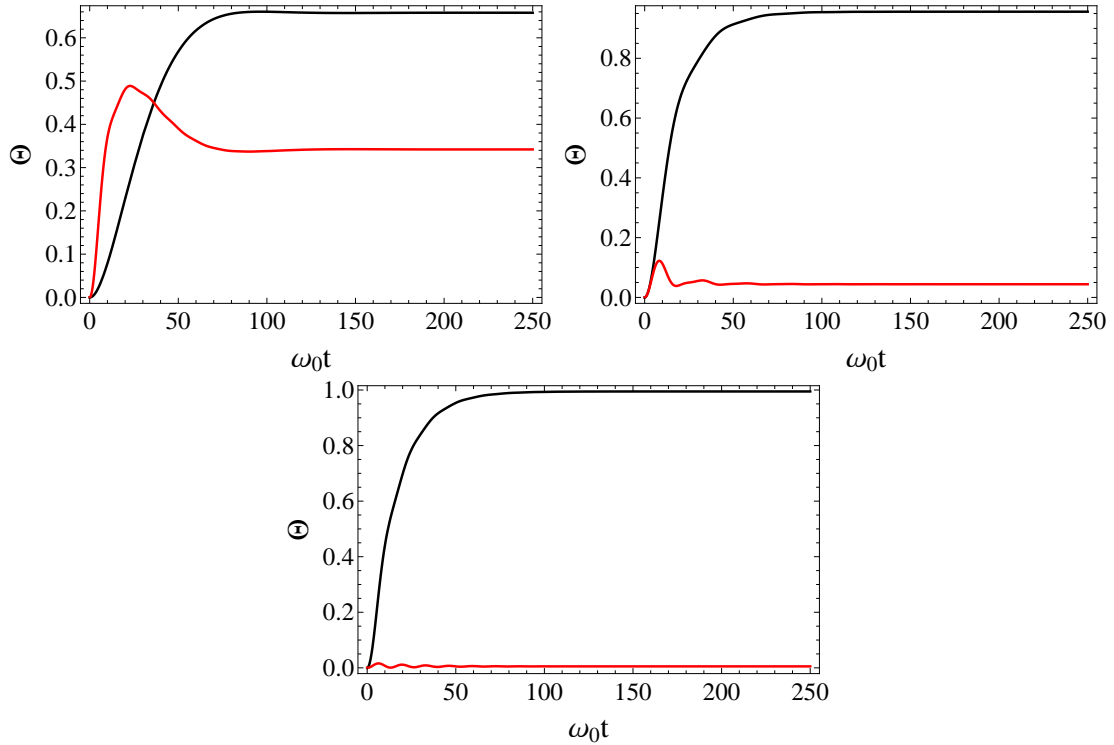


FIGURA 4.12: Gráficos das funções Θ_A e Θ_B para os três casos em que o banho foi dividido. Nos três gráficos Θ_A corresponde a curva preta, e Θ_B a curva vermelha. No primeiro gráfico Θ_A contém 100 osciladores, no segundo 500 e no terceiro 900.

Fizemos um gráfico, figura (4.13), da concorrência para esses três casos. Usamos o *overlap* $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = e^{-18}$ e escolhemos $b = -a$. Essa figura apresenta três curvas: a primeira com Θ_A com 100 osciladores, curva preta; a segunda com Θ_A com 500 osciladores, curva vermelha; e a terceira com Θ_A com 900 osciladores, curva azul. Através do gráfico observamos que no primeiro caso (Θ_A com 100 osciladores) o sistema se emaranha muito mais do que no último caso (Θ_A com 900 osciladores).

Para tentar entender esse comportamento, vamos voltar para expressão da concorrência. Como estamos interessados na situação onde toda a excitação está contida no banho, $\Xi(T) = 0$ e $\Theta_A + \Theta_B = 1$, a equação (4.34) se reduz à forma:

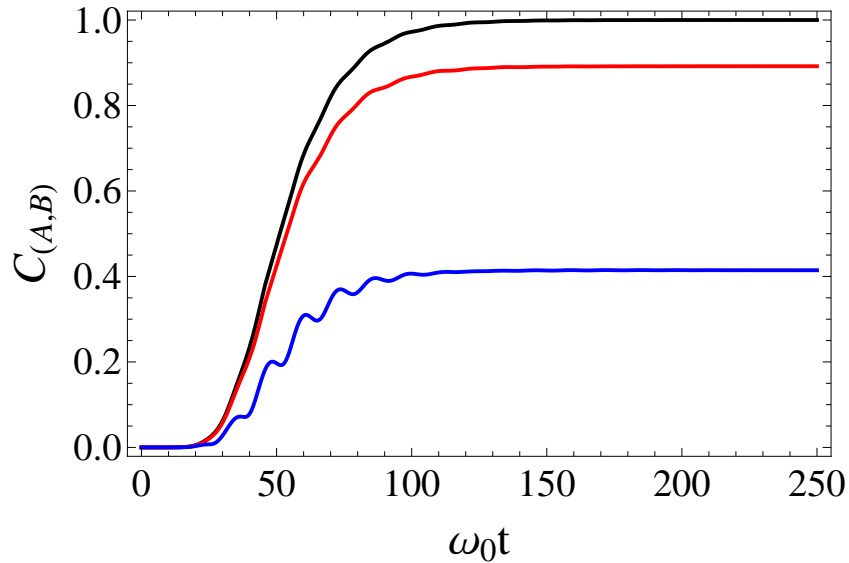


FIGURA 4.13: Concorrência entre as partições A e B do banho para três casos. No primeiro caso a partição A contém 100 osciladores, curva preta. No segundo caso a partição A contém 500 osciladores, curva vermelha. No terceiro caso a partição A contém 900 osciladores, curva azul. Aqui o *overlap* é $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = e^{-18}$.

$$C_{A,B} = 2|ab|\mathcal{N}^2 \sqrt{1 - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Theta_A}} \sqrt{1 - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Theta_B}}. \quad (4.35)$$

Note que essa expressão é similar a equação (4.8). Para esse tempo a concorrência depende apenas da distinguibilidade. Se Θ_A ou Θ_B são próximos de zero, o termo de distinguibilidade, conseqüentemente a concorrência, tendem a zero. Olhando para o terceiro caso, em que Θ_A contém 900 osciladores, vemos, através da figura (4.12), que Θ_B é próximo de zero. Então, nesse caso, a distinguibilidade dos estados dos osciladores da partição B é pequena. Portanto, o estado do sistema se aproxima de um estado separável. Logo esses dois subsistemas se emaranham pouco.

Quando Θ_A é próximo de Θ_B o termo da distinguibilidade se aproxima do seu valor máximo. Olhando para a figura (4.12), vemos que dos três casos estudados, a situação em que as duas funções pareçam mais próximas é mostrada no primeiro gráfico em que A contém 100 osciladores. Como nessa situação os estados de cada parte do banho são mais distinguíveis, o emaranhamento entre as duas partes se torna maior. Note de acordo com a equação (4.35) que no limite em que $\Theta_A = \Theta_B = \frac{1}{2}$, a concorrência atinge o valor um. Ou seja, se conseguirmos separar o banho em duas partes, de modo que o número médio de excitações em cada uma das partes seja igual, temos que esses dois subsistemas estarão maximamente

emaranhados. Esse resultado do emaranhamento máximo, se assemelha ao caso quando estávamos estudando o emaranhamento entre o banho e o oscilador principal. Observamos, naquela situação que o emaranhamento era máximo quando cada subsistema tinha o mesmo número médio de excitações.

Olhando para a figura (4.13), vemos que a concorrência fica constante após um certo tempo $t = T$. Após esse tempo todas as excitações estão contidas no banho e o oscilador principal está no estado de vácuo. Quando isso acontece a dinâmica do sistema “morre”. O sistema se estabiliza e não há mais troca de excitações nem entre os próprios osciladores do banho. Portanto as funções Θ_A e Θ_B ficam constantes, e conseqüentemente a concorrência. Note que inicialmente os osciladores do banho estavam descorrelacionados, não havia emaranhamento entre eles. Ao interagi-los com o oscilador principal, eles passam a ficar correlacionados. Então essa interação com o oscilador principal cria correlações entre os osciladores do banho. A superposição do estado inicial é transferida para os estados dos osciladores do banho, fazendo com que estes passem a ficar emaranhados.

Capítulo 5

Emaranhamento Residual

Nos capítulos anteriores vimos que, devido à simplicidade do nosso modelo, podemos dividir o banho em quantas partes desejarmos. Se dividirmos o banho em duas partes, teremos então, um sistema tripartido. Duas partes devido a divisão do banho e a outra parte seria o oscilador principal.

Vimos na seção 2.5 que, para sistemas de três partes, podemos ter emaranhamento entre bipartições e o emaranhamento residual entre as três partes. Para o caso de estados puros envolvendo três qubits, esses emaranhamentos se relacionam da seguinte forma:

$$C_{(X,YZ)}^2 = C_{(X,Y)}^2 + C_{(X,Z)}^2 + \tau_{(XYZ)}. \quad (5.1)$$

Mesmo trabalhando com estados coerentes podemos escrevê-los na base de qubits. Então podemos usar a equação acima para verificar se há emaranhamento tripartido no nosso sistema.

No capítulo 4 obtivemos uma expressão geral para a concorrência entre duas partições arbitrárias X e Y , dada pela seguinte forma:

$$C_{(X,Y)} = 2|ab|\mathcal{N}^2|\langle\alpha_0|\beta_0\rangle|^{(XY)_{out}}\mathcal{D}_X\mathcal{D}_Y, \quad (5.2)$$

sendo que $(XY)_{out}$ representa o número médio de excitações da partição complementar às outras duas Z . Ou seja, corresponde ao número de excitações do

subsistema fora do sistema de interesse. $\mathcal{D}_X(\mathcal{D}_Y)$ é a distinguibilidade dos estados do subsistema $X(Y)$. Mapeando essas equações no nosso sistema temos que a partição X corresponde ao oscilador central, a partição Y corresponde a uma parte do banho, enquanto que a partição Z corresponde à parte do banho complementar a Y . Como já fizemos uma divisão do banho em duas partes na seção 4.3, usaremos as letras A e B para nos referir às partes do banho, assim como foi feito naquela seção, e a letra c para nos referir ao oscilador central.

A equação (5.1) fica da forma:

$$C_{(c,AB)}^2 = C_{(c,A)}^2 + C_{(c,B)}^2 + \tau_{(cAB)}. \quad (5.3)$$

Usando a equação (5.2) na equação (5.3), obtemos uma expressão para τ_{cAB} dada por:

$$\tau_{(cAB)} = 4|ab|^2 \mathcal{N}^4 \mathcal{D}_c^2 \left[\mathcal{D}_{AB}^2 - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Theta_B} \mathcal{D}_A^2 - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Theta_A} \mathcal{D}_B^2 \right]. \quad (5.4)$$

Expandindo os termos dentro do colchete, temos:

$$\tau_{(cAB)} = 4|ab|^2 \mathcal{N}^4 \mathcal{D}_c^2 \left[1 + |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2(\Theta_A + \Theta_B)} - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Theta_A} - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Theta_B} \right]. \quad (5.5)$$

Note que o emaranhamento residual pode ser escrito em função do *overlap*. Pela equação (5.5) vemos que quanto mais próximo de um for o *overlap*, menor será o emaranhamento entre as tripartições.

Fatorando a equação (5.5), obtemos:

$$\begin{aligned} \tau_{(cAB)} &= 4|ab|^2 \mathcal{N}^4 \mathcal{D}_c^2 \left[(1 - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Theta_A}) (1 - |\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{2\Theta_B}) \right], \\ &= 4|ab|^2 \mathcal{N}^4 \mathcal{D}_c^2 \mathcal{D}_A^2 \mathcal{D}_B^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Através da equação (5.6) vemos que o emaranhamento residual será zero em dois momentos da dinâmica. O primeiro é para $t = 0$, pois para esse tempo $\Theta_A = \Theta_B =$

0. Além disso, o estado do sistema é separável logo não há nenhuma forma de emaranhamento. O segundo é para $t = T$, esse é o tempo em que $\Xi(T) = 0$, ou seja, a partir do momento em que todas as excitações forem transferidas para o banho. Note que, nesse tempo, o estado do sistema se torna separável e novamente não há nenhuma forma de emaranhamento entre o oscilador principal e banho. Como as funções \mathcal{D}_c^2 , \mathcal{D}_A^2 e \mathcal{D}_B^2 são sempre maiores que zero no intervalo $0 < t < T$, temos que o emaranhamento residual sempre será maior que zero nesse intervalo. Logo, a partir do momento que as partes começam a interagir, o emaranhamento genuíno tripartido surge nessas três partições do sistema. E ele permanece enquanto houver troca de excitações entre o oscilador principal e o banho.

Note que τ_{cAB} é, de certa forma, a concorrência ao quadrado. Tirando a raiz dos dois lados da equação (5.6) temos:

$$\sqrt{\tau_{cAB}} = 2|ab|\mathcal{N}^2\mathcal{D}_c\mathcal{D}_A\mathcal{D}_B. \quad (5.7)$$

Chegamos a uma relação interessante aqui. Essa expressão é semelhante à equação que obtivemos para a concorrência entre dois subsistemas. Olhando para a equação (5.2), vemos que a concorrência é função das distinguibilidades entre os estados de cada partição e de um termo de contribuição externa, caso as partições não englobem todo o sistema. Já a equação (5.7), assim como a concorrência, é função da distinguibilidade das partes envolvidas. Se pudéssemos fazer uma extensão da concorrência entre três partes, ela seria escrita como o produto das distinguibilidades entre as partes, logo iríamos obter a equação (5.7).

5.1 Resultados Numéricos

Vimos que o emaranhamento residual depende do *overlap* $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle$ bem como do número médio de excitações de cada subsistema, ou seja, das funções $\Xi(t)$, Θ_A e Θ_B . Essas duas últimas funções, Θ_A e Θ_B , dependem, de certa forma, de como a partição do banho é feita. Isto é, do número de osciladores em cada uma das partições, e qual a faixa de frequência eles ocupam. Dividimos o banho da mesma maneira que foi feito na seção (4.3). Uma partição é centrada na frequência do oscilador principal enquanto a outra é complementar a primeira. Associamos a função Θ_A com a partição centrada na frequência do oscilador principal e Θ_B a partição complementar, como mostra a figura (4.11). Poderíamos ter feito outro

tipo de divisão, a princípio não há nenhuma restrição de como deve ser feita as partições.

Analisamos dois casos: o primeiro com a partição de Θ_A contendo 900 osciladores, já o segundo a partição de Θ_A contém 100 osciladores. Nos dois casos consideramos $|\alpha_0\rangle$, $|\beta_0\rangle$, a e b reais. Como a e b são apenas constantes que aparecem multiplicando as distinguibilidades, o que irá mudar nos gráficos será somente a escala, o comportamento permanecerá o mesmo. Isso foi discutido quando estudamos a concorrência no capítulo anterior. Portanto analisamos apenas os casos em que $b = -a$.

5.1.1 Partição A contendo 900 osciladores

Primeiro, vamos estudar o caso em que a partição A contém 900 osciladores. Já vimos o gráfico de Θ_A e Θ_B para essa divisão do banho na seção 4.3. Corresponde ao terceiro gráfico da figura (4.12). A figura (5.1) apresenta dois gráficos. O primeiro é um gráfico comparando a concorrência entre o oscilador central e todo banho ao quadrado ($C_{(c,AB)}^2$), curva mais externa, com a soma $C_{(c,A)}^2 + C_{(c,B)}^2$, curva mais interna. Note que as curvas não estão superpostas, ou seja, a concorrência ao quadrado entre o oscilador principal e o banho não é igual a concorrência ao quadrado entre o oscilador principal e a partição A mais a concorrência ao quadrado entre o oscilador principal e a partição B . Precisamos somar alguma função à curva inferior de modo a se igualar com a curva superior. Essa função que devemos somar, é justamente o emaranhamento residual que está representado no gráfico da direita.

Note que, assim que começa a interação, o emaranhamento residual passa a existir. Ele dura enquanto há emaranhamento entre o oscilador principal e o banho. Essas figuras correspondem ao caso em que o *overlap* $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = e^{-18}$.

As oscilações do gráfico da direita são devidas ao termo de distinguibilidade da partição B . Se olharmos para o terceiro gráfico da figura (4.12), iremos notar que Θ_B é próximo de zero e apresenta oscilações. Então, o que temos na distinguibilidade é um número muito pequeno, o *overlap*, elevado a uma função que oscila em torno de zero (Θ_B). Portanto a distinguibilidade se torna mais sensível a essas oscilações.

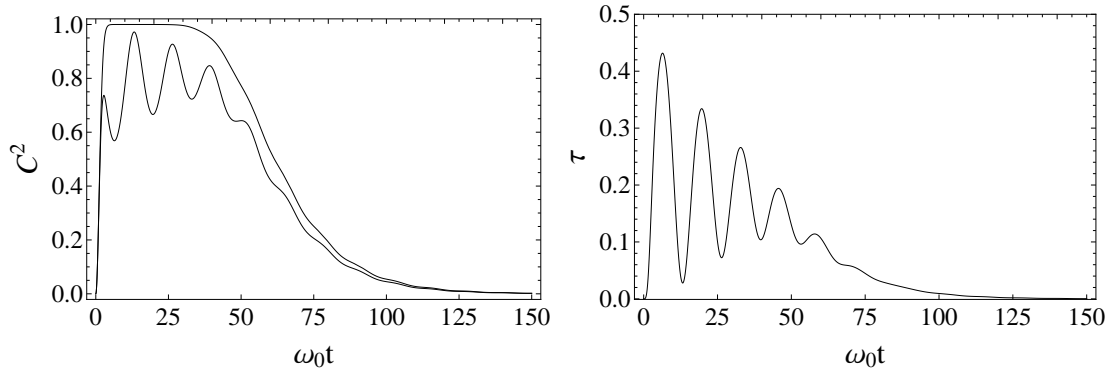


FIGURA 5.1: Figura da esquerda: Curva interna corresponde a $C^2_{(c,A)} + C^2_{(c,B)}$, e curva mais externa corresponde a $C^2_{(c,AB)}$. Figura da direita: emaranhamento residual. Para construção desses gráficos usamos $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = e^{-18}$ e a partição A continha 900 osciladores.

Fizemos o mesmo estudo só que agora o *overlap* é $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \approx 0.98$. A figura (5.2) também apresenta dois gráficos, para esse caso. O gráfico da esquerda compara $C^2_{(c,AB)}$ com $C^2_{(c,A)} + C^2_{(c,B)}$. Note que não conseguimos diferenciar as duas curvas. Então, tudo parece indicar que as curvas estão superpostas. Logo, nesse caso não teríamos emaranhamento residual.

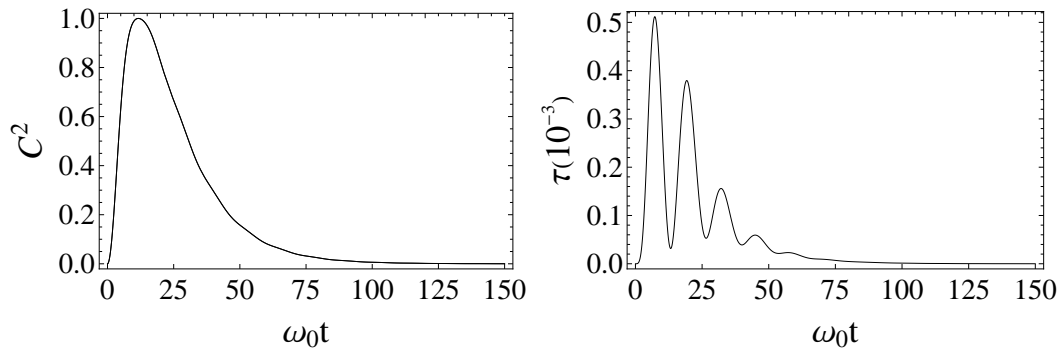


FIGURA 5.2: Figura da esquerda: Curva interna corresponde a $C^2_{(c,A)} + C^2_{(c,B)}$, e curva mais externa corresponde a $C^2_{(c,AB)}$. Figura da direita: emaranhamento residual. Para construção desses gráficos usamos $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \approx 0.98$ e a partição A continha 900 osciladores.

Na verdade essas curvas estão muito próximas, porém não estão superpostas. Se olharmos para o gráfico da direita, que traz o emaranhamento residual, veremos que ele é da ordem de 10^{-4} . Ou seja, o emaranhamento tripartido, nesse caso, é muito pequeno, de modo que não conseguimos ver diferença entre as curvas da figura da esquerda.

Note que, assim como havíamos dito, quanto mais próximo de um for o *overlap*, menor será o emaranhamento residual. Novamente aparecem oscilações no

gráfico da direita. Assim como no caso anterior, essas oscilações são devidas a distinguibilidade referente a partição B, e sua origem está relacionada com as oscilações de Θ_B com valores próximos de zero.

5.1.2 Partição A contendo 100 osciladores

Na subseção anterior vimos como o emaranhamento residual muda com o *overlap*. Agora vamos variar os osciladores na partição A e B, e ver como essa mudança será sentida no emaranhamento residual. A partição A contém agora 100 osciladores e a B contém 900. O gráfico de Θ_A e Θ_B corresponde ao primeiro gráfico da figura (4.12). Primeiro, vamos olhar para o caso em que o *overlap* é $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = e^{-18}$. A figura (5.3) apresenta dois gráficos: o da esquerda é uma comparação entre $C_{(c,AB)}^2$ e $C_{(c,A)}^2 + C_{(c,B)}^2$; e o da direita é o emaranhamento residual. Note que o emaranhamento entre as bipartições é menor que o emaranhamento entre as tripartições. Inclusive, para certo intervalo, o emaranhamento entre as bipartições cai para próximo de zero e, nesse tempo só existe praticamente emaranhamento entre tripartido.

Se olharmos para os gráficos de Θ_A e Θ_B (figura (4.12)), percebemos que nem Θ_A nem Θ_B tem oscilações com valores próximos de zero. Portanto, diferente do caso anterior, não vemos oscilações no gráfico do emaranhamento residual.

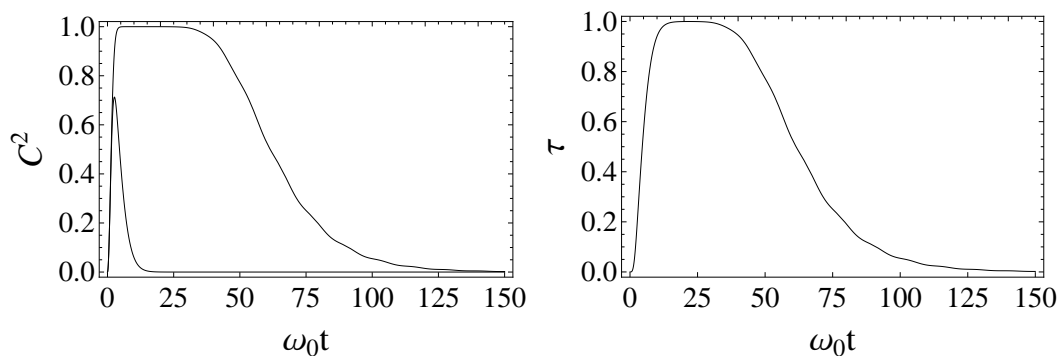


FIGURA 5.3: Figura da esquerda: Curva interna corresponde a $C_{(c,A)}^2 + C_{(c,B)}^2$, e curva mais externa corresponde a $C_{(c,AB)}^2$. Figura da direita: emaranhamento residual. Para construção desses gráficos usamos $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle = e^{-18}$ e a partição A continha 100 osciladores.

Agora vamos analisar a situação em que o *overlap* é próximo de um e vale $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \approx 0.98$. A figura (5.4) traz um gráfico comparando a concorrência ao

quadrado entre as bipartições ($C_{(c,AB)}^2$ e $C_{(c,A)}^2 + C_{(c,B)}^2$), gráfico da esquerda. E um gráfico do emaranhamento entre as tripartições, gráfico da direita.

Novamente, como na figura (5.2), não conseguimos perceber, nessa escala, diferença entre as curvas $C_{(c,AB)}^2$ e $C_{(c,A)}^2 + C_{(c,B)}^2$, indicando dessa forma que o emaranhamento residual é pequeno comparado com o emaranhamento entre as bipartições. Vemos, no gráfico da direita da figura (5.4) que o emaranhamento entre as tripartições é da ordem de (10^{-3}). De fato, ele é pequeno comparado com o emaranhamento bipartido, porém ele é maior comparado ao caso estudado na subseção anterior (ver figura (5.2)).

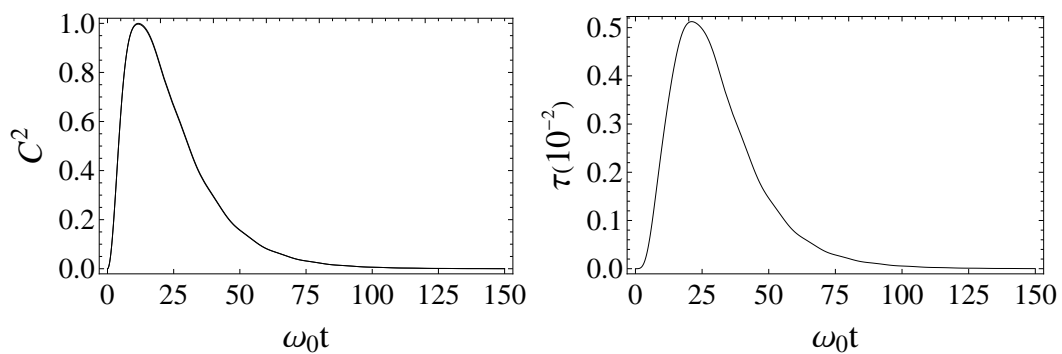


FIGURA 5.4: Figura da esquerda: Curva interna corresponde a $C_{(c,A)}^2 + C_{(c,B)}^2$, e curva mais externa corresponde a $C_{(c,AB)}^2$. Figura da direita: emaranhamento residual. Para construção desses gráficos usamos $\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle \approx 0.98$ e a partição A continha 100 osciladores.

O que mudamos da subseção anterior para esta foram praticamente as funções Θ_A e Θ_B . Na subseção anterior o número médio de excitações em cada partição era bem distinto e Θ_A era muito maior do que Θ_B . Já no segundo caso, Θ_A é próximo de Θ_B . Vimos que, quanto mais equidistribuídas entre as partições ficam as excitações, maior será o emaranhamento residual.

Capítulo 6

Conclusão

Em nosso trabalho estudamos um sistema de muitos corpos, que consiste de um oscilador linearmente acoplado a N outros. Estávamos interessados em estudar a evolução desse sistema e ver como é a dinâmica do emaranhamento entre o oscilador principal e o banho.

Conseguimos resolver analiticamente a dinâmica desse sistema, considerando o estado inicial do oscilador principal sendo uma superposição de estados coerentes. Vimos que tanto para a dinâmica da concorrência quanto para a do emaranhamento residual que o *overlap* e a distribuição do número médio de excitações desempenham um papel fundamental.

Quando estudamos emaranhamento entre bipartições vimos que a concorrência pode ser dividida em dois termos: o de contribuição interna $\mathcal{D}_c \mathcal{D}_m$ e o de contribuição externa $|\langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle|^{\Theta(t) - \Theta_m}$. Vimos que dependendo do valor do *overlap*, um termo se sobrepõe ao outro. Se o *overlap* é próximo de um, quem governa a dinâmica é o termo de contribuição interna. Agora se o *overlap* é próximo de zero, a dinâmica do emaranhamento é governada pelo termo de contribuição externa. Ou seja, dependendo de certas condições, a parte de fora do sistema de interesse pode influenciar na dinâmica do emaranhamento. Vimos que o emaranhamento se distribui de forma hierárquica $C_{(c,k)} \leq C_{c,kj} \leq C_{c,kj\dots m} \cdots \leq C_{c,N}$.

Ao estudar o emaranhamento entre tripartições vimos que ele está sempre presente e, a dependência do *overlap* e da distribuição de excitações é da seguinte forma: quanto mais próximo de zero for o *overlap* maior será o emaranhamento

residual; e quanto mais equidistribuídas entre as partições do banho ficam as excitações maior será o emaranhamento tripartite.

Por fim, podemos dizer que, apesar de sua simplicidade, o modelo é bem rico. Podemos extrair muitas informações ao não traçarmos fora as variáveis do banho. O método de resolução que utilizamos facilitou a obtenção das expressões. Deixando-as de certa forma gerais, de modo que podemos alterar as condições iniciais, como por exemplo a distribuição do acoplamento, e ainda assim teremos as mesmas expressões para a concorrência e o emaranhamento residual.

Apêndice A

Cálculo da Concorrência

Considere a matriz densidade arbitária de um sistema composto por dois subsistemas \mathcal{A} e \mathcal{B} , dada por:

$$\rho = G (p|\alpha, \lambda\rangle\langle\alpha, \lambda| + q|\beta, \chi\rangle\langle\beta, \chi| + z|\alpha, \lambda\rangle\langle\beta, \chi| + z^*|\beta, \chi\rangle\langle\alpha, \lambda|), \quad (\text{A.1})$$

endo p , q e G números reais, e $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$ ($\{|\lambda\rangle, |\chi\rangle\}$) estados coerentes pertencentes ao subsistema \mathcal{A} (\mathcal{B}).

Para encontrar a expressão da concorrência de Wootters [10], precisamos escrever o sistema como um par de qubits. Portanto, assim como foi feito no capítulo 4, vamos escrever os estados coerentes em função das bases de qubits $\{|1\rangle, |0\rangle\}$ e $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$.

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= S_+|1\rangle - S_-|0\rangle; \\ |\beta\rangle &= e^{-i\theta}(S_+|1\rangle + S_-|0\rangle); \\ |\lambda\rangle &= S'_+|\uparrow\rangle - S'_-|\downarrow\rangle; \\ |\chi\rangle &= e^{-i\theta'}(S'_+|1\rangle + S'_-|0\rangle), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\begin{aligned}
 S_{\pm} &= \sqrt{\frac{1 \pm |\langle \alpha | \beta \rangle|}{2}}; & S'_{\pm} &= \sqrt{\frac{1 \pm |\langle \lambda | \chi \rangle|}{2}}; \\
 e^{i\theta} &= \frac{\langle \beta | \alpha \rangle}{|\langle \alpha | \beta \rangle|}; & e^{i\theta'} &= \frac{\langle \chi | \lambda \rangle}{|\langle \lambda | \chi \rangle|}.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Substituindo os estados coerentes na equação (A.1) pelas as bases de qubits, obtemos a matriz densidade na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \rho = G & \left(S_+^2 S_+^{\prime 2} r |1 \uparrow\rangle \langle 1 \uparrow| + S_+^2 S_+^{\prime} S'_- u |1 \uparrow\rangle \langle 1 \downarrow| + S_+ S_- S_+^{\prime 2} u |1 \uparrow\rangle \langle 0 \uparrow| \right. \\
 & + S_+ S_- S_+^{\prime} S'_- r |1 \uparrow\rangle \langle 0 \downarrow| + S_+^2 S_+^{\prime} S'_- u^* |1 \downarrow\rangle \langle 1 \uparrow| + S_+^2 S_+^{\prime 2} v |1 \downarrow\rangle \langle 1 \downarrow| \\
 & + S_+ S_- S_+^{\prime} S'_- v |1 \downarrow\rangle \langle 0 \uparrow| + S_+ S_- S_+^{\prime 2} u^* |1 \downarrow\rangle \langle 0 \downarrow| + S_+ S_- S_+^{\prime 2} u^* |0 \uparrow\rangle \langle 1 \uparrow| \\
 & + S_+ S_- S_+^{\prime} S'_- v |0 \uparrow\rangle \langle 1 \downarrow| + S_+^2 S_+^{\prime 2} v |0 \uparrow\rangle \langle 0 \uparrow| + S_+^2 S_+^{\prime} S'_- u^* |0 \uparrow\rangle \langle 0 \downarrow| \\
 & + S_+ S_- S_+^{\prime} S'_- r |0 \downarrow\rangle \langle 1 \uparrow| + S_+ S_- S_+^{\prime 2} u |0 \downarrow\rangle \langle 1 \downarrow| + S_+^2 S_+^{\prime} S'_- u |0 \downarrow\rangle \langle 0 \uparrow| \\
 & \left. + S_+^2 S_+^{\prime 2} r |0 \downarrow\rangle \langle 0 \downarrow| \right), \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

onde fizemos:

$$\begin{aligned}
 r &= p + q + z e^{i(\theta+\theta')} + z^* e^{-i(\theta+\theta')}; \\
 u &= -p + q + z e^{i(\theta+\theta')} - z^* e^{-i(\theta+\theta')}; \\
 v &= p + q - z e^{i(\theta+\theta')} - z^* e^{-i(\theta+\theta')}.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

E sua representação matricial fica na forma:

$$\rho = G \begin{pmatrix} S_+^2 S_+^{\prime 2} r & S_+^2 S_+^{\prime} S'_- u & S_+ S_- S_+^{\prime 2} u & S_+ S_- S_+^{\prime} S'_- r \\ S_+^2 S_+^{\prime} S'_- u^* & S_+^2 S_+^{\prime 2} v & S_+ S_- S_+^{\prime} S'_- v & S_+ S_- S_+^{\prime 2} u^* \\ S_+ S_- S_+^{\prime 2} u^* & S_+ S_- S_+^{\prime} S'_- v & S_+^2 S_+^{\prime 2} v & S_+^2 S_+^{\prime} S'_- u^* \\ S_+ S_- S_+^{\prime} S'_- r & S_+ S_- S_+^{\prime 2} u & S_+^2 S_+^{\prime} S'_- u & S_+^2 S_+^{\prime 2} r \end{pmatrix}. \tag{A.6}$$

Segundo Wootters, a concorrência é dada por $C = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)$, sendo λ_i os autovalores em ordem decrescente da matriz $R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$, onde $\tilde{\rho}$ obtida através da operação *spin-flip*, definida como:

$$\tilde{\rho} = \sigma_y \rho^* \sigma_y = (\sigma_{1y} \otimes \sigma_{2y}) \rho^* (\sigma_{1y} \otimes \sigma_{2y}). \quad (\text{A.7})$$

Note que podemos escrever a concorrência como $C = \max(0, 2\lambda_{\max} - \text{Tr}\{R\})$. Temos que $\text{Tr}\{R\} = \text{Tr}\{\sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}\}$. Usando $\sqrt{\rho} = U\sqrt{\rho_D}U^\dagger$, onde ρ_D é forma diagonal de ρ e U é a matriz que diagonaliza ρ , e as propriedades cíclicas do traço, temos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{R\} &= \text{Tr}\{\sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}\} \\ &= \text{Tr}\{U\sqrt{\sqrt{\rho_D}U^\dagger}\sqrt{\tilde{\rho}}U\sqrt{\sqrt{\rho_D}U^\dagger}\} \\ &= \text{Tr}\{\sqrt{\rho_D}U^\dagger\sqrt{\tilde{\rho}}U\} \\ &= \text{Tr}\{\sqrt{\rho\tilde{\rho}}\} = \text{Tr}\{\sqrt{M}\}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde $M = \rho\tilde{\rho}$.

Como $\text{Tr}\{R\} = \sum_i \lambda_i$, onde λ_i são os autovalores de R , e $\text{Tr}\{\sqrt{M}\} = \sum_i \sqrt{m_i}$, onde m_i são os autovalores de M , temos que $\lambda_i = \sqrt{m_i}$. Portanto para encontrar a expressão da concorrência devemos obter M e encontrar seus autovalores.

Para encontrar M , primeiro precisamos calcular $\tilde{\rho}$ através da operação (A.7). A matriz σ_y em função das nossas bases fica da forma:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= (-i|1\rangle\langle 0| + i|0\rangle\langle 1|) \otimes (-i|\uparrow\rangle\langle \downarrow| + i|\downarrow\rangle\langle \uparrow|) \\ &= -|1\uparrow\rangle\langle 0\downarrow| - |0\downarrow\rangle\langle 1\uparrow| + |1\downarrow\rangle\langle 0\uparrow| + |0\uparrow\rangle\langle 1\downarrow|. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Realizando a operação da equação (A.7), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho} = & G \left(S_+^2 S_+^{\prime 2} r |0 \downarrow\rangle \langle 0 \downarrow| + S_+^2 S_-^{\prime 2} v |0 \uparrow\rangle \langle 0 \uparrow| + S_-^2 S_+^{\prime 2} v |1 \downarrow\rangle \langle 1 \downarrow| \right. \\
 & + S_-^2 S_-^{\prime 2} r |1 \uparrow\rangle \langle 1 \uparrow| + \{-S_+^2 S_+^{\prime} S_-^{\prime} u |0 \uparrow\rangle \langle 0 \downarrow| - S_+ S_- S_+^{\prime 2} u |1 \downarrow\rangle \langle 0 \downarrow| \\
 & + S_+ S_- S_+^{\prime} S_-^{\prime} v |1 \downarrow\rangle \langle 0 \uparrow| + S_+ S_- S_+^{\prime} S_-^{\prime} r |1 \uparrow\rangle \langle 0 \downarrow| - S_+ S_- S_-^{\prime 2} u^* |1 \uparrow\rangle \langle 0 \uparrow| \\
 & \left. - S_-^2 S_+^{\prime} S_-^{\prime} u^* |1 \uparrow\rangle \langle 1 \downarrow| + c.h \right), \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

e sua representação matricial fica da forma:

$$\tilde{\rho} = G \begin{pmatrix} S_-^2 S_-^{\prime 2} r & -S_-^2 S_+^{\prime} S_-^{\prime} u^* & -S_+ S_- S_-^{\prime 2} u^* & S_+ S_- S_+^{\prime} S_-^{\prime} r \\ -S_-^2 S_+^{\prime} S_-^{\prime} u & S_-^2 S_+^{\prime 2} v & S_+ S_- S_+^{\prime} S_-^{\prime} v & -S_+ S_- S_+^{\prime 2} u \\ -S_+ S_- S_-^{\prime 2} u & S_+ S_- S_+^{\prime} S_-^{\prime} v & S_+^2 S_-^{\prime 2} v & -S_+^2 S_+^{\prime} S_-^{\prime} u \\ S_+ S_- S_+^{\prime} S_-^{\prime} r & -S_+ S_- S_+^{\prime 2} u^* & -S_+^2 S_+^{\prime} S_-^{\prime} u^* & S_+^2 S_+^{\prime 2} r \end{pmatrix}. \tag{A.11}$$

Encontrada $\tilde{\rho}$, podemos obter $M = \rho \tilde{\rho}$. Calculada M , obtemos os seguintes autovalores:

$$\begin{aligned}
 m_1 = 2G^2 S_+^2 S_-^2 S_+^{\prime 2} S_-^{\prime 2} & \left\{ r^2 + v^2 - u^2 - u^{*2} \right. \\
 & \left. - \sqrt{(-r^2 - v^2 + u^2 + u^{*2}) - (4r^2 v^2 - 8r|u|^2 v - 4|b|^4)} \right\}; \\
 m_2 = 2G^2 S_+^2 S_-^2 S_+^{\prime 2} S_-^{\prime 2} & \left\{ r^2 + v^2 - u^2 - u^{*2} \right. \\
 & \left. + \sqrt{(-r^2 - v^2 + u^2 + u^{*2}) - (4r^2 v^2 - 8r|u|^2 v - 4|b|^4)} \right\}. \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

Substituindo r , u e v pelos seus respectivos valores e fazendo algumas simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned}
 m_1 & = 16G^2 S_+^2 S_-^2 S_+^{\prime 2} S_-^{\prime 2} (|z| - \sqrt{pq})^2; \\
 m_2 & = 16G^2 S_+^2 S_-^2 S_+^{\prime 2} S_-^{\prime 2} (|z| + \sqrt{pq})^2. \tag{A.13}
 \end{aligned}$$

Dessa forma os autovalores de R são:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 4GS_+S_-S'_+S'_-|\sqrt{pq} - |z||, \\
 \lambda_2 &= 4GS_+S_-S'_+S'_-(\sqrt{pq} + |z|).
 \end{aligned}
 \tag{A.14}$$

Como para o caso em que estamos estudando $\sqrt{pq} > |z|$, temos que a concorrência será dada por:

$$C = \lambda_2 - \lambda_1 = 8GS_+S_-S'_+S'_-|z|.
 \tag{A.15}$$

Note que partimos de uma matriz densidade geral. Apenas consideramos que o sistema é composto por estados coerentes. Se usarmos um caso particular, como por exemplo, a matriz densidade do oscilador principal com o k -ésimo do banho (equação (4.23)), temos:

$$G = \mathcal{N}^2; \quad p = |a|^2; \quad q = |b|^2; \quad z = ab^* \langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle^{\Theta - \Theta_k}.
 \tag{A.16}$$

Logo:

$$C = 2\mathcal{N}^2 |ab| |\langle \beta_0 | \alpha_0 \rangle|^{\Theta - \Theta_k} \sqrt{1 - |\langle \alpha | \beta \rangle|^2} \sqrt{1 - |\langle \lambda | \chi \rangle|^2}.
 \tag{A.17}$$

Referências Bibliográficas

- [1] E. Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, (31):555–563, 1935.
- [2] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?. *Physical Review*, (47):777–780, 1935.
- [3] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. Quantum computation and quantum information. 2000.
- [4] T. Gao and Y. Hong. Detection of genuinely entangled and nonseparable n-partite quantum states. *Physical Review A*, (82):062113, 2010.
- [5] M. Huber, F. Mintert, A. Gabriel, and B. C. Hiesmayr. Detection of high-dimensional genuine multipartite entanglement of mixed states. *Physical Review Letters*, (104):210501, 2010.
- [6] Z.-H. Chen, Z.-H. Ma, J.-L. Chen, and S. Severini. Improved lower bounds on genuine-multipartite-entanglement concurrence. *Physical Review A*, (83):062320, 2012.
- [7] Z.-H. Ma, Z.-H. Chen, J.-L. Chen, C. Spengler, A. Gabriel, and M. Huber. Measure of genuine multipartite entanglement with computable lower bounds. *Physical Review A*, (83):062325, 2011.
- [8] C. H. Bennett, A. Grudka, M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki. Postulates for measures of genuine multipartite correlations. *Physical Review A*, (83):012312, 2011.
- [9] S. Hill and W. K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Physical Review Letters*, (78):5022–5025, 1997.

-
- [10] W. K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, (80):2245–2248, 1998.
- [11] V. Coffman, J. Kundu, and W. K. Wootters. Distributed entanglement. *Physical Review A*, (61):052306, 2000.
- [12] W. H. Louisell. *Quantum Statistical of Properties of Radiation*. John Wiley et Sons, 1990.
- [13] M. O. Scully and M. S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [14] A. L. de Paula Jr., J. G. G. de Oliveira Jr., J. G. Peixoto de Faria, D. S. Freitas, and M. C. Nemes. Entanglement dynamics of many-body systems: Analytical results. *Physical Review A*, (89):022303, 2014.
- [15] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Quantum Mechanics*. John Wiley et Sons, 1977.
- [16] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [17] A. F. R. de Toledo Piza. *Mecânica Quântica*. Editora da Universidade de São Paulo, 2009.
- [18] B. Amaral, A. T. Baraviera, , and M. O. T. Cunha. *Mecânica quântica para matemáticos em formação*. IMPA, 2011.
- [19] J. G. G. de Oliveira Júnior. *Inibindo a decoerência de memórias quânticas em cavidades de microondas realístico*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.
- [20] A. F. R. de Toledo Piza. *Sistemas quânticos compostos e emaranhamento, sistemas quânticos abertos e decoerência*. II Escola de Física Teórica do Departamento de Física Matemática, 2009.
- [21] H. P. Breuer and F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum System*. Oxford University Press, 2002.
- [22] M. P. de Araújo. *Dinâmica do Emaranhamento num Sistema Tripartite*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.

-
- [23] G. G. Rigolin. *Estados Quânticos Emaranhados*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, 2005.
- [24] M. de O. Terra Cunha. *Emaranhamento: caracterização, manipulação e consequências*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2005.
- [25] D. C. Santos. *Em busca de um entendimento completo acerca do emaranhamento*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.
- [26] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Physical Review A*, (53):2046–2052, 1996.
- [27] B. M. Terhal. Is entanglement monogamous? *arXiv:quant-ph/0307120*, 2003.
- [28] J. S. Kim, G. Gour, and B. C. Sanders. Limitations to sharing entanglement. *Contemporary Physics*, (53):417–432, 2012.
- [29] B. C. Sanders and J. S. Kim. Monogamy and polygamy of entanglement in multipartite quantum systems. *Applied Mathematics & Information Sciences*, (4):281, 2010.
- [30] M. F. Cornelio. Multipartite monogamy of the concurrence. *Physical Review A*, (87):032330, 2013.
- [31] H. J. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equation and Fokker-Planck Equations*. Springer, 1999.
- [32] A. N. de São José, P. M. Dias, A. R. Bosco de Guimelhães, and J. G. Peixoto de Faria. Toward irreversibility with a finite bath of oscillators. *Physical Letters A*, (377):39–48, 2012.
- [33] R. C. Drumond and M. C. Nemes. Non-markovian dynamics a of dissipative quantum harmonic oscillator for several reservoir structure functions. *preprint*.
- [34] R. T. F. Paulinelli. *Discriminação e decoerência: um modelo em cavidades de microondas*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.
- [35] D. Bruß. Characterizing entanglement. *Journal of Mathematical Physics*, (43):4237–4251, 2002.