UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

Matemática, Metalógica e Construtivismo no *Tractatus Logico-Philosophicus*

Felipe Lopes

Belo Horizonte
Maio
2014

100
L864m
2014

Lopes, Felipe Oliveira Araújo

Matemática, metalógica e Construtivismo no Tractatus logico-philosophicus [manuscrito] / Felipe Oliveira Araújo Lopes. - 2014.

171 f. : il.

Orientador: Mauro L. Engelmann.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Filosofia – Teses. 2. Matemática - Teses. 3. Lógica - Teses. 4. Construtivismo (Filosofia) – Teses. I. Engelmann, Mauro Luiz II. Universidade Federal de Minas Gerais. Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Matemática, Metalógica e Construtivismo no Tractatus Logico-Philosophicus

FELIPE OLIVEIRA ARAÚJO LOPES

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FILOSOFIA, como requisito para obtenção do grau de Mestre em FILOSOFIA, área de concentração FILOSOFIA, linha de pesquisa Lógica e Filosofia da Ciência.

Aprovada em 30 de julho de 2014, pela banca constituída pelos membros:

Prof. Mauro Luiz Engelmann - Orientador
UFMG

Prof. Abílio Azambuja Rodrigues Filho
UFMG

Prof. João Vergílio Gallerani Cuter
USP

Belo Horizonte, 30 de julho de 2014.

"Naquela época, seu plano era infactível, hoje, é inútil...
Como os planos da máquina voadora de Da Vinci...".
W. Burroughs

AGRADECIMENTOS

Homenagem a João José de Oliveira, minha inspiração maior; dedicado a Julieta, Wander e Bruno, à minha família, aos amigos e amigas (muitos para citar, ver o catálogo telefônico), às senhoritas que aturaram (im)pacientemente conversas abstratas e um temperamento insano, ao Esteves da tabacaria, ao Baduim e o Pretim (a gente ainda se fala brothers), a Tição, Tizumba, Oli e Tobias.

Resumo

O objetivo do presente trabalho é elucidar a relação entre lógica e matemática no *Tractatus Logico-Philosophicus*. A partir disso, se esclarecerá como Wittgenstein trata o problema dos paradoxos lógicos e semânticos ao descartar tais construções como casos de uma pretensa metalógica. A rejeição dessa última deve-se, no que será defendido, à noção de que a *multiplicidade matemática* de um sistema de sinais não permite a representação, nele mesmo, de aspectos formais do próprio sistema. Nesse contexto, será questionada a hipótese de considerar a matemática como um tipo de metalógica a qual pretensamente 'enunciaria', por meio de equações, regras da sintaxe lógica na substituição de sinais uns pelos outros. Com esse objetivo, será mostrada a possibilidade de se antecipar certo construtivismo matemático já no *Tractatus*, onde o cálculo, em se tratando da aplicação de regras de substituição entre sinais quaisquer, possui autonomia em relação à eventual projeção simbólica desses sinais ao mundo – sendo propriamente tal autonomia o que nos permite distinguir matemática e lógica; e a qual servirá de argumento para a defesa de uma posição contrária ao logicismo usualmente atribuído ao *Tractatus*. Assim, não se poderia falar em metalógica quando da apresentação de uma equação matemática, como se estivéssemos a enunciar uma regra de substituição. Uma equação não enuncia uma regra, mas antes é ela mesma a *aplicação* de uma regra, de maneira ao cálculo – seja ele escrito, falado, pensado, etc. – nada mais fazer que apresentar, em seus próprios sinais, uma seqüência de instâncias da regra em questão: à medida que os escrevemos, falamos, pensamos, etc. Regras da sintaxe lógica não teriam, com isso, qualquer existência abstrata ou platônica para além dos sinais mesmos com que as exemplificamos *in concreto*.

Palavras Chave: Matemática, Metalógica, Construtivismo, Logicismo.

Sumário

Introdução

O tema da Dissertação será introduzido no que segue em dois itens. No primeiro, *(a)*, serão apresentadas as noções de sistemas de sinais e de sistemas simbólicos no *Tractatus Logico-Philosophicus*, bem como o papel da matemática e da lógica na estruturação de ambos. A relação entre *pseudoproposições* matemáticas e as *proposições sem sentido* da lógica permitirá lidar com a questão acerca da existência de um suposto logicismo no *Tractatus*, o que dará ensejo, ainda, a uma diferenciação entre matemática pura e matemática aplicada. No segundo item, *(b)*, em contraste com as pseudoproposições matemáticas, são apresentados outros tipos de pseudoproposições: *contrassensos*, *contrassensos metalógicos* e *paradoxos*[1]. A ênfase será dada ao tratamento dessas últimas pseudoproposições como uma violação da *sintaxe lógica* – e em particular, como uma violação da sintaxe matemática. A metalógica poderá ser evitada nesse contexto com base no construtivismo inerente às nossas operações recursivas para a geração de termos em um sistema de sinais qualquer: os sinais dos esquemas que expressam as regras da sintaxe lógica são, eles mesmos, instâncias da aplicação de tais regras, e não pretensas proposições com sentido que se projetariam simbolicamente em uma suposta representação das estruturas da linguagem.

[1] A rigor existem dois tipos de pseudoproposições no *Tractatus*: contrassensos propriamente ditos, ou seja, violações da sintaxe lógica, e pseudoproposições que expressam tais regras da sintaxe lógica por meio de esquemas. As pseudoproposições da matemática se enquadram nesse último caso, ao passo que pseudoproposições metalógicas e paradoxos, no primeiro. Ambos os tipos de pseudoproposição têm em comum o fato de não se projetarem simbolicamente ao mundo, não possuindo, portanto, valores verdade atribuídos.

a) A relação entre matemática e lógica deve ser entendida em termos da distinção, implícita no *Tractatus*, entre sistemas de sinais e sistemas simbólicos[2]. Um *sistema de sinais* se articula sobre um suporte lingüístico qualquer, seja ele sonoro, gráfico, tátil, mental, etc. O que é essencial a um sistema de sinais são seus possíveis arranjos, suas possíveis combinações *arbitrariamente*[3] estabelecidas de sinais, as quais lhe conferem uma multiplicidade, uma forma lógica. A sintaxe dos sistemas de sinais é arbitrária por duas razões: i) o suporte material particular utilizado tem características próprias e irredutíveis às de outros suportes e ii) em um mesmo suporte, podemos arbitrariamente selecionar quais características serão relevantes ao sistema de sinais em questão, e quais não. Acerca de (i), o sinal na pronúncia de "a casa está em chamas" se dá em um suporte sonoro, em contraste com o suporte gráfico de sua escrita em uma folha de papel, por exemplo. Em cada um desses suportes estabelecemos sistemas de sinais

[2] As seguintes passagens sustentam essa distinção: "3.12 O sinal por meio do que exprimimos o pensamento, chamo de sinal proposicional. E a proposição é o sinal proposicional em sua relação projetiva com o mundo." "3.31 A cada parte da proposição que caracteriza o sentido dela, chamo uma expressão (um símbolo). (A própria proposição é uma expressão.)". "3.32 O sinal é aquilo que é sensivelmente perceptível no símbolo." De *T3.12* temos que uma proposição é o sinal proposicional em projeção ao mundo, e de *T3.31* que um sinal proposicional em projeção é um símbolo. Como cada parte da proposição são igualmente expressões (*T3.31*), mesmo nomes são expressões, enquanto projeções de sinais a objetos, ao passo que proposições são projeções de sinais a possíveis combinações de objetos.

[3] Por arbitrário no *Tractatus* deve-se entender, em um primeiro momento, aquilo que é *contingente* na linguagem - seja referente às *convenções* linguísticas dos falantes, ao suporte representacional utilizado, a características historicamente acumuladas na linguagem natural, etc. Podem-se considerar dois tipos de arbitrariedade nesse caso: no estabelecimento de regras sintáticas e no estabelecimento de projeções simbólicas (nesse último, na determinação arbitrária de quais nomes projetamos a quais objetos, por exemplo). No entanto, no estabelecimento de tais convenções, algo mais deixa de ser arbitrário, e passa a ser *necessário*: o isomorfismo entre a forma lógica do sistema de sinais estabelecido e o mundo a que o projetamos simbolicamente - "3.342 Em nossas notações, é certo que algo é arbitrário, mas *isto* não é arbitrário: se já determinamos algo arbitrariamente, então algo mais deve ser o caso. (Isso depende da *essência* da notação)". Nessa passagem, a 'essência' da notação é seu isomorfismo com mundo, e que Wittgenstein esteja se referindo a tal isomorfismo fica evidente no seguinte trecho: "3.343 Definições são regras de tradução de uma linguagem para outra. Cada notação correta deve poder traduzir-se em cada uma das demais segundo tais regras: é *isso que todas elas têm em comum.*" (itálicos meus). No caso, é o isomorfismo lógico entre as notações o que permite a tradução de umas nas outras. Será argumentado na seção 2.5 que aquilo que é arbitrário em uma linguagem remete, propriamente, ao aspecto *construtivo* das linguagens em geral.

distintos por meio de regras de sintaxe distintas. No caso, em um suporte sonoro, o sistema é em parte estabelecido por meio de regras na relação temporal entre fonemas, enquanto em um suporte visual, por regras para a relação espacial entre grafismos. Dessa maneira, ao escolher arbitrariamente um suporte de representação, temos, ao mesmo tempo, uma arbitrariedade na determinação das regras a serem utilizadas na configuração do sistema de sinais. No que diz respeito a (ii), os fonemas e sua relação temporal podem ser tomados como relevantes na sintaxe de um sistema de sinais sonoro, enquanto a entonação de voz, seu timbre e volume, não. De maneira similar, na escrita de uma frase no papel não importa a cor da escrita, o tipo gráfico das letras ou o material utilizado para marcar a folha. No entanto, poderíamos perfeitamente imaginar outros sistemas de sinais em que timbre e volume sejam relevantes, ou em que a cor das letras faça parte da sintaxe que determina a multiplicidade dessa notação. Assim, também nesse aspecto a escolha de regras da sintaxe é arbitrária, no que diz respeito às características tomadas como relevantes em um mesmo suporte de representação[4].

Todos esses são aspectos *contingentes* da sintaxe dos sistemas sinais, em contraste com aquelas regras que devem ser entendidas como estritamente *necessárias* ao estabelecimento de uma representação, e que por sua vez configuram o que

[4] O mesmo pode ser estendido aos sistemas de sinais das linguagens naturais. Ainda que duas línguas se utilizem das mesmas características nos mesmos suportes (fonético ou gráfico, etc.) e tenham a mesma multiplicidade - a mesma capacidade representativa em relação ao mundo - temos que suas sintaxes diferem, por se aplicarem de maneira distinta a diferentes fonemas e grafismos. Nesse caso, temos então dois sistemas de sinais, ainda que isomórficos entre si, para os mesmos símbolos. Dessa maneira também aspectos históricos, culturais ou estéticos são incluídos entre o que se toma por arbitrário na sintaxe da linguagem, ao passo que à lógica importa somente o *isomorfismo necessário* entre sistemas de sinais e mundo em uma representação. No que diz respeito a possíveis *limitações expressivas* do próprio suporte representacional arbitrariamente escolhido - do suporte *físico* em que os sinais se dão - talvez se pudesse exigir, também dele, uma multiplicidade mínima à representação. No entanto, como toda representação pode ser realizada em linguagem binária, e como qualquer suporte nada mais é que um espaço de possíveis ligações e não-ligações de objetos, qualquer suporte material atende a essa exigência.

Wittgenstein chama de *sintaxe lógica*[5]. Tais regras seriam indispensáveis a qualquer sistema de sinais em uma representação do mundo, tendo entre seus exemplos a sintaxe das proposições elementares estruturada sob a forma argumento-função, assim como a sintaxe dos conectivos lógicos. No caso geral, toda regra sintática é introduzida recursivamente, e serão a partir de reiterações recursivas *quaisquer* que se estabelecerá a sintaxe dos números, expressa por meio de equações matemáticas. Dessa maneira, em se tratando a matemática de regras de substituição de sinais em geral, temos que ela figura como parte da sintaxe lógica dos sistemas de sinais, sem a qual seria impossível a configuração de um sistema, e tampouco a representação.

Um *sistema simbólico*, por sua vez, nada mais é que a projeção de um sistema de sinais ao mundo. Nesse contexto, uma proposição é a projeção simbólica de um sinal proposicional, de uma combinação sintaticamente correta de nomes a uma possível combinação de objetos. Essa projeção confere à proposição dois possíveis valores verdade, verdadeiro ou falso, de acordo com a correspondência ou não do arranjo de fato dos objetos aos quais ela se projeta. Posto isso, o que conecta os diversos símbolos proposicionais em um sistema simbólico são *operações verdade* - no caso geral, o operador lógico *N*, que realiza a negação conjunta das proposições em seu argumento, obtendo *funções verdade* dessas proposições por resultado[6]. Em outras palavras, o

[5] "6.124... Dissemos que muito nos símbolos que usamos seria arbitrário, muito não seria. Na lógica, só o que não é arbitrário exprime: isso quer dizer, porém, que na lógica *nós* não exprimimos, com a ajuda dos sinais, o que queremos, mas o que enuncia na lógica é a própria natureza dos sinais necessários por natureza: se conhecemos a sintaxe lógica de uma notação qualquer, já estão dadas então todas as proposições da lógica."

[6] O operador *N*, uma generalização do traço de Sheffer, teria multiplicidade suficiente para substituir os conectivos de conjunção, disjunção, negação etc., assim como para unificar o cálculo proposicional e o cálculo de predicados sob uma única notação. Na notação apresentada por Hatcher (Hatcher, 1968, p.10), no entanto, o traço de Sheffer é o dual da operação generalizada pelo operador *N*. O primeiro é representado por '|' ou '↑' e o segundo por '↓'. Enquanto *N* (ou '↓') realiza a conjunção da negação das proposições em seu argumento, o traço de Sheffer ('|' ou '↑') é dado pela negação da conjunção

operador mapeia os possíveis valores verdade das proposições em seu argumento a possíveis valores verdade da proposição resultante de sua aplicação, dispondo essas proposições, assim, em um mesmo sistema simbólico. Mesmo proposições elementares, ainda que logicamente independentes entre si, relacionam-se umas às outras *indiretamente* por meio da verdade ou falsidade das proposições moleculares das quais participam, e com isso, naturalmente, também participam da articulação do sistema de símbolos. Sendo assim, se um sistema de sinais é configurado por regras *sintáticas* recursivas na transformação de sinais proposicionais uns nos outros, um sistema simbólico, por sua vez, se configura por meio de relações internas entre os seus conteúdos *semânticos*, entre os valores verdade das proposições.

No Capítulo 1 será apresentada a forma como se estruturam sistemas simbólicos e o papel da lógica em sua articulação. No Capítulo 2, a forma como se estruturam de sistemas de sinais, com ênfase na ideografia do *Tractatus* e no papel exercido pela matemática nessa última. No entanto, apesar de essa divisão ser útil para explicitar as relações entre lógica e matemática, é preciso fazer uma ressalva sobre ela. Como visto, pode-se defender a existência de uma distinção entre sistemas de sinais e simbólicos na estruturação de sistemas linguagem no *Tractatus*. Apesar disso, não se deve falar em sistemas separados, um de sinais e um simbólico, mas antes em aspectos de um *mesmo* sistema: *o* sistema de linguagem. Tratar a ambos como sistemas ligados por relações

das proposições no argumento. Todos os demais operadores lógicos - como a conjunção, disjunção, negação, etc. - podem ser derivados do traço de Sheffer, de onde ele bastar à obtenção das relações entre as condições de verdade entre quaisquer proposições em um cálculo proposicional. Seu dual, *N*, naturalmente, pode fazer o mesmo. Ele será apresentado em detalhe no item 2.2, Capítulo 2.

externas equivaleria a uma metalógica, algo que o próprio *Tractatus* pretende evitar[7]. Mas se os consideramos ligados por relações internas, é possível tomá-los tão somente como diferentes *aspectos*, indissociáveis entre si, do sistema de linguagem. Feita essa ressalva, a seguir se apresentam algumas das questões referentes às relações entre matemática e lógica, a serem abordadas a partir da distinção entre sistemas de sinais e sistemas simbólicos. O caso permitirá introduzir *proposições bipolares*, as *proposições sem sentido da lógica* e *pseudoproposições matemáticas*.

[7] Como observa Goldfarb (Goldfarb, 1979), a concepção de sintaxe e semântica em Frege e Russell é distinta da contemporânea, a qual seria, por sua vez, mais próxima à Teoria de Modelos. Assim, sistemas de sinais e sistemas simbólicos não podem ser tomados como entidades estanques entre si, ao contrário do que ocorreria em abordagens com base na Teoria dos Modelos. Nessa última, especificamos o *vocabulário*, *axiomas* e *regras de inferência* de um sistema para, a seguir, *interpretá-las*, atribuindo *domínios* semânticos particulares à sintaxe assim estabelecida. Uma interpretação que satisfaça esse sistema formal, uma em que seus axiomas são verdadeiros, é denominada um *modelo* desse sistema - e nesse sentido se poderia falar na adequação ou não de sistemas à representação de uma determinada situação, de um determinado domínio. Esse tipo de abordagem, no entanto, não seria possível em Frege e Russell, e presumivelmente também não em Wittgenstein, para os quais há apenas um domínio de aplicação dos sistemas lógicos por eles propostos - o próprio universo. Para Russell, por exemplo, seria inviável o uso de *forcing* em seu projeto para a lógica: "Deve-se observar que o método de supor um axioma falso e então deduzir as consequências dessa suposição, algo que se mostrou admirável em casos como o do axioma das retas paralelas, não é universalmente válido aqui. Isso por todos os nossos axiomas serem princípios de dedução; e se eles são verdadeiros, as conseqüências que supostamente se seguem do uso de um princípio contrário não se seguirão de fato..." (Russell, 1996, p.15; Goldfarb, 1979, p.353). No caso de Frege, o uso da quantificação irrestrita, que tem por escopo o próprio universo, obtém um resultado similar, pela sintaxe lógica dever então atender qualquer domínio semântico possível. Dessa maneira, a própria *universalidade* inerente à lógica é o que torna inviável a pretensão de uma metalógica, visto com isso não ser possível cogitar sintaxes lógicas particulares que eventualmente sejam adequadas ou não a domínios semânticos particulares. Em específico, no que diz respeito a Wittgenstein, a ideografia por ele sugerida se pretende perspícua à sintaxe lógica necessária a toda e qualquer representação possível. Assim, e ao tomar a matemática como parte da sintaxe lógica, qualquer cálculo deve sempre poder ter aplicação, o que serve de chave para interpretar a passagem *T4.04*: "Deve ser possível distinguir na proposição tanto quanto seja possível distinguir na situação que ela representa. Ambas devem possuir a mesma multiplicidade lógica (matemática).". A princípio, nessa passagem pareceria estarmos diante de uma constatação metalógia: caso um sinal não tenha multiplicidade adequada à representação de uma dada situação, resultando em um contrassenso, ele ainda assim teria uma multiplicidade matemática, passível de *outras interpretações*. No entanto, tendo em vista a rejeição mencionada à metalógica, contrassensos não podem ter 'outra' multiplicidade matemática, como se a sua apenas fosse inadequada ao domínio que propomos como modelo - mas sim multiplicidade alguma. Na seção 2.5 será argumentado que o sinal de um contrassenso não se liga a nenhuma série e, por não possuir qualquer posição atribuída em um sistema, nenhum número poderia ser associado a ele, de modo a não configurar qualquer tipo de multiplicidade matemática.

Sistemas de sinais são projetados ao mundo por meio de sistemas simbólicos, de maneira a haver certa correspondência entre ambos no estabelecimento de uma representação: as características formais de um sistema de sinais devem encontrar correspondentes formais em sistemas simbólicos e vice-versa. Será isso o que permitirá distinguir e ao mesmo tempo relacionar lógica e matemática no *Tractatus*, por meio da correspondência entre tautologias e equações matemáticas. Na projeção de um sinal proposicional, temos que as possibilidades combinatórias dos nomes na proposição devem ser isomórficas com as possibilidades combinatórias dos objetos representados. É a correspondência ou não da possibilidade assinalada no sinal proposicional para com a possibilidade que de fato ocorre nas coisas que confere à *proposição* sua *bipolaridade*, seu sentido - sua possível verdade ou falsidade. Já a respeito das *proposições da lógica*, temos que a quaisquer possibilidades dos fatos correspondem, respectivamente, a verdade ou falsidade necessária de *tautologias* e *contradições*, o que faz delas *proposições sem sentido*, por não indicarem nenhuma possibilidade particular dos fatos em oposição a outras. Apesar de com isso tautologias e contradições não possuírem nenhum conteúdo informacional acerca do mundo, elas refletem relações necessárias entre os valores verdade das proposições, e assim mostram a conexão entre essas proposições na constituição de um sistema simbólico, explicitando sua estrutura. Tais relações semânticas entre proposições viabilizam a *análise lógica* das proposições, apresentada no Capítulo 1.

Já *pseudoproposições matemáticas* – ou *equações* – tornam explícitas interligações de sinais em um sistema de regras recursivas, em um sistema de sinais qualquer. Elas são ditas pseudoproposições por *aparentemente* afirmarem regras sintáticas[8]. No entanto, em contraste com as proposições sem sentido da lógica, necessariamente verdadeiras ou falsas, pseudoproposições matemáticas não possuem qualquer valor verdade atribuído, por serem meras instâncias de regras de substituição de sinais, e de onde elas não se projetarem simbolicamente ao mundo. Que o cálculo matemático é viável independentemente da projeção simbólica dos sinais envolvidos é algo evidenciado na apresentação da Forma Geral do Número, onde números são introduzidos como expoentes de operações[9]. Ao apresentar números como expoentes, Wittgenstein segue o procedimento de transformação de termos constantes em variáveis, descrito em *T3.315*[10]. Na aplicação desse procedimento, da Forma Geral da Proposição passa-se à Forma Geral da Operação, dessa à Forma Geral da Série e então à Forma Geral do Número[11]. A seqüencia de tal derivação será discutida no item 2.2, Capítulo 2. Nesse caso, operações lógicas têm o papel de projetar simbolicamente sinais proposicionais por meio de suas relações semânticas uns com os outros, interligando-os em um sistema

---

[8] Frascolla (Frascolla, 1994, p.27-30) aventa a eventualidade de considerarmos equações como pseudoproposições metalógicas, em contraste com o uso claramente legítimo de tautologias, visto o bicondicional em uma tautologia como *p≡~~p*, por exemplo, ser um operador lógico como qualquer outro, ao passo que a identidade não ocorre em proposições legítimas. Identidades, antes, refletem uma regra ou procedimento de substituição de sinais na passagem de uma proposição a outra, de onde elas aparentarem ser proposições metalógicas.

[9] "6.021 O número é o expoente de uma operação".

[10] "3.315 Se transformamos em variável uma parte constituinte de uma proposição, há uma classe de proposições que são todos os valores da proposição variável assim originada. Em geral, essa classe depende ainda do que nós, segundo uma convenção arbitrária, queremos significar com partes daquela proposição. Se transformamos em variáveis, porém, todos os sinais cujo significado foi arbitrariamente determinado, ainda assim continua a haver uma tal classe. Esta, porém, não depende mais de qualquer convenção, mas apenas da natureza da proposição. Ela corresponde a uma forma lógica – a um protótipo lógico de figuração."

[11] Na notação do *Tractatus*, da Forma Geral da Proposição, $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ (*T6*), chegamos à Forma Geral da Operação, $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'(\bar{\eta})(=[\bar{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})])$ (*T6.01*), e dessa à Forma Geral da Série em $[x, \xi, \Omega'\xi]$ (onde $\Omega = [\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$) (*T6.02*). Essa última é reformulada com uso de expoentes em $[\Omega^{0}{'}x, \Omega^{\nu}{'}x, \Omega^{\nu+1}{'}x]$ (*T6.02*) e dela, ao se tornar variável mesmo a operação Ω, obtemos a Forma Geral do Número, $[0, \xi, \xi+1]$ (*T6.03*).

simbólico, ao passo que na Forma Geral do Número a própria Forma Geral da Operação é tornada uma variável, de maneira a números resultarem de reiterações na aplicação de *operações sintáticas quaisquer* - e não necessariamente de uma *operação verdade*, uma *operação lógica*. Com isso, as regras sintáticas dos expoentes operacionais independem da operação particular sendo iterada, de modo à sintaxe dos números independer da projeção simbólica efetuada por operações lógicas. Dessa maneira, enquanto operações lógicas refletem por meio de tautologias e contradições as relações entre os valores verdade das proposições, a sintaxe dos números, dada por equações matemáticas, se abstrai de valorações verdade, refletindo com isso relações formais entre sinais em geral. Obtemos assim *pseudoproposições* sem atribuição de verdade, em contraste com as *proposições sem sentido* da lógica, as quais, ainda que igualmente não representem nenhuma possibilidade dos fatos, possuem valores verdade necessariamente atribuídos a elas. Em outras palavras, se por um lado tautologias e contradições resultam de casos limite na combinação dos possíveis valores verdade atribuídos a sinais proposicionais em sua projeção simbólica, pseudoproposições matemáticas, por sua vez, lidam com regras recursivas de substituições de sinais em geral, independentemente da projeção simbólica particular que se venha a fazer deles. As proposições da lógica refletem, portanto, a articulação de sistemas simbólicos, enquanto pseudoproposições matemáticas, a forma como se estruturam sistemas de sinais.

A independência da matemática em relação à aplicação simbólica é o que justifica a autonomia do cálculo[12], a partir da qual, por sua vez, se abre a possibilidade de um

[12] Engelmann (Engelmann, 2013; seção 1.5.4) considera que a matemática não é autônoma em relação à sua aplicação simbólica, no *Tractatus*, por números serem derivados a partir da Forma Geral da Proposição. No entanto, nas seções 2.2 e 2.4 será argumentado que essa derivação é obtida por meio de um procedimento de transformação de constantes em variáveis, de maneira que números devem ser

construtivismo no *Tractatus*. Essa autonomia, no entanto, deve ser compatível com a concepção de que a 'A matemática é um método da lógica' (*T6.2*), na medida em que, em última instância, a sua aplicação *ao mundo* é necessariamente simbólica, e de onde a matemática não se reduzir a um mero jogo de sinais. Teríamos com isso dois tipos de aplicação do cálculo. O primeiro deles apresentando, nos próprios sinais, à medida que os geramos, instâncias das regras da sintaxe lógica em aplicações recursivas de operações quaisquer na transformação de sinais uns nos outros. Esse seria o caso da *matemática pura*, cujos próprios sinais construídos de acordo com tais regras constituem sua aplicação. Já o segundo tipo de aplicação de um cálculo seria por meio das regras da sintaxe de proposições moleculares envolvendo números na descrição do mundo. Esse é o caso da *matemática aplicada*, por lidar com relações lógicas, simbólicas entre proposições, na qual *contamos* a aplicação reiterada de operações verdade na obtenção das proposições moleculares em questão[13]. A matemática é assim um método da lógica na medida em que nos permite calcular com sinais em geral, e ainda que somente se aplique ao mundo por meio de operações lógicas, possui autonomia por lidar com regras de substituição entre sinais quaisquer, cujas instâncias se apresentam nos sinais mesmos gerados ao longo do cálculo, à medida que o executamos.

Apesar dessa autonomia, se a matemática apenas se aplica ao mundo por meio da lógica, há uma correspondência formal entre tautologias e equações matemáticas em

---

considerados expoentes de operações sintáticas quaisquer na transformação de sinais uns nos outros, não se limitando a operações lógicas na transformação de proposições. A relação entre a ausência de autonomia do cálculo e a derivação dos números a partir da Forma Geral da Proposição, exemplificada por ele em citação às Observações Filosóficas (Wittgenstein, 2005; §109), seria atenuada por essa constatação.

[13] "6.211 Na vida, a proposição matemática nunca é aquilo de que precisamos, mas utilizamos a proposição matemática apenas para inferir, de proposições que não pertencem à matemática, outras que igualmente não pertencem à matemática.".

uma aplicação simbólica. Para verificar que o bicondicional $p \equiv \sim\sim\sim\sim\sim\sim p$ é uma tautologia, por exemplo, devemos literalmente contar os sinais da operação de negação em ambos os lados do bicondicional, de maneira a verificar a regra sintática de substituição $p=\sim\sim p$, que determina a negação. O correspondente aritmético dessa regra é a equação $y=2x$, a qual permite gerar recursivamente (pela substituição sucessiva dos valores de y em x) uma classe de equivalência entre expressões resultantes da dupla aplicação de uma operação qualquer a uma base de sinais. Temos nesse caso, assim, um exemplo claro de aplicação matemática como um método lógico, em um cálculo com sinais. A correspondência formal entre tautologias e equações que primeiramente viabiliza a aplicação simbólica da matemática será tratada na seção 2.3, Capítulo 2[14].

Tais relações entre lógica e a matemática em sua aplicação simbólica darão ensejo à discussão acerca do logicismo no *Tractatus*, na seção 2.4. A ênfase de Wittgenstein na matemática como um método da lógica favorece interpretações que identificam em sua abordagem um 'logicismo sem classes', na expressão de Marion[15], e algo similar é defendido por Frascolla, para quem a teoria da aritmética deve poder se reduzir a uma

[14] A matemática aplicada leva a uma correspondência entre tautologias e equações, visto números resultarem da reiteração de operações lógicas na obtenção de uma proposição, conforme será visto na seção 2.2. No entanto, em um primeiro momento o uso de números não é inferencial. Em atribuições numéricas como "há 3 laranjas no cesto", "chegaram 5 estudantes", etc., por exemplo, os numerais nelas constantes atuam como expoentes de operações as quais resultam, nesse caso, em um produto lógico, como "*x* é uma laranja e está no cesto e *y* é uma laranja e está no cesto e *z* é uma laranja e está no cesto". É apenas a partir de proposições moleculares assim estabelecidas que podemos, então, fazer *inferências* com o uso de equações. Apesar disso, no estabelecimento dessas proposições mesmas - e não apenas nas inferências feitas a partir delas - já é realizada uma atividade matemática na *reiteração* de operações, as quais *contamos* ao fazer essa atribuição numérica (e de onde o produto lógico no exemplo dado nos permitir *contar objetos físicos* que eventualmente satisfaçam as três funções proposicionais que são argumentos desse produto). Isso sugere uma concepção *ordinal* dos números e, na verdade, mesmo que se considere que vemos 'de um só relance' que há 3 laranjas no cesto – em uma tentativa de interpretação *cardinal* – o *fato* de haver 3 laranjas no cesto ocupa uma *posição* no espaço lógico, indicada pelo expoente da operação utilizada reiteradamente na descrição desse fato; algo que remete novamente a uma concepção ordinal.

[15] Marion, 1998, p.26.

teoria das operações[16]. Cuter, igualmente, segue uma leitura logicista do *Tractatus*[17]. Sem dúvida, equações matemáticas baseiam-se na aplicação reiterada de operações, de onde a aritmética ser derivada da sintaxe das operações. No entanto, como mencionado acima, ao tornar variável mesmo a Forma Geral da Operação, para com isso introduzir a Forma Geral do Número, temos que números aplicam-se não apenas a reiterações de *operações lógicas*, mas a reiterações de operações sintáticas *quaisquer* na transformação de sinais. Uma conseqüência direta desse argumento é atribuir à matemática uma amplitude de aplicações maior do que apenas a reiterações de operações lógicas[18]. Seria possível então supor – de maneira *errônea* – que a sintaxe dos números possui maior *generalidade* que a dos operadores lógicos, de maneira à sintaxe das proposições da lógica se reduzir assim a um caso particular da sintaxe das equações numéricas. Algo do tipo resultaria em um reducionismo 'às avessas', no qual a lógica se reduz à matemática, e não o contrário, visto essa última se apresentar então como a expressão de regras sintáticas mais gerais. No entanto, contrariamente a essa abordagem, será defendido que Wittgenstein não pode admitir, ao final das contas, nenhum dos dois tipos de redução, e que a matemática e a lógica devem ser consideradas igualmente fundamentais na estruturação da linguagem. De maneira análoga a como sistemas de sinais e simbólicos são meramente aspectos distintos de um

---

[16] Frascolla, 1994, p.38.

[17] Cuter, 2005. O artigo de Cuter será discutido em maior detalhe na seção 2.4.

[18] De fato, deve-se ser considerar no *Tractatus* a existência de operações com sintaxe distinta da de operações lógicas. A série sucessor, por exemplo, apresentada em *T4.1252* e *T4.1273* como aRb, $(\exists x): aRx.xRb$, $(\exists x, y): aRx.xRy.yRb$,..., não poderia ser obtida apenas por meio de aplicações reiteradas do operador *N*, visto a cada novo termo da série ser necessário a introdução de novas variáveis (*x*, *y*, etc.), algo que *N* não poderia fazer. Outra indicação é o fato da forma geral da série ser primeiramente introduzida por meio da *operação O* na expressão *[a,x,O'x]*, em *T5.2522*, numa notação distinta da utilizada para Forma Geral da Série $[x, \xi, \Omega'\xi]$, em *T6.02*, onde Ω representa a Forma Geral da Operação, dada por composições de aplicações do operador lógico *N*, em *T6.01*. Algo do tipo indicaria que *O* é uma variável que abarca outras operações, além de operações lógicas. Esses pontos igualmente serão tratados na seção 2.4, Capítulo 2.

sistema de linguagem, matemática e lógica são apenas aspectos distintos de nossas práticas lingüísticas cotidianas[19].

b) Uma vez apresentadas acima *proposições bipolares*, as *proposições sem sentido da lógica* e *pseudoproposições matemáticas*, a seguir serão introduzidos *contrassensos*, um caso particular de pseudoproposição, entre os quais os *paradoxos* são o principal exemplo. Paradoxos devem ser tomados um caso particular de *proposição metalógica*, proposições metalógicas como um caso particular de contrassensos e contrassensos um caso particular de pseudoproposição – sempre mantendo em vista a ressalva de que contrassensos são casos de pseudoproposição *distintos* daqueles dados por pseudoproposições matemáticas[20]. Pseudoproposições são arranjos de sinais que aparentam ter a estrutura de uma proposição, mas não possuem qualquer valor verdade atribuído, por não se projetarem ao mundo. Assim, tanto equações matemáticas como contrassensos são pseudoproposições. No entanto, equações matemáticas são pseudoproposições tendo em vista a autonomia do cálculo para com projeções simbólicas particulares, ao passo que contrassensos são igualmente pseudoproposições,

---

[19] O principal argumento a esse respeito será discutido no item 2.2, onde são apresentadas as duas versões da Forma Geral da Série, dadas em *T6.02*. A primeira, $[x, \xi, \Omega'\xi]$, não apresenta qualquer variável numérica, ao passo que a segunda versão, $[\Omega^{0}{}'x, \Omega^{v'}x, \Omega^{v+1'}x]$, possui números como expoentes de operações. A proposta reducionista de Frascolla se baseia justamente em considerar a primeira como mais fundamental que a última. Contrariamente a essa posição, será argumentado que números se encontram implícitos já na versão da Forma Geral da Série sem uso de expoentes – e que sua apresentação na versão com expoentes apenas explicita uma estrutura que já presente na primeira versão. Ambas as versões apenas apresentam aspectos distintos de uma mesma forma lógica.

[20] Em *T4.1272* Wittgenstein afirma que contrassensos são pseudoproposições ("...portanto, surgem pseudoproposições, contrassensos"), e em *T6.2* que também equações matemáticas são pseudoproposições ("As proposições da matemática são equações; portanto, pseudoproposições"). No entanto, em nenhum momento ele afirma que pseudoproposições matemáticas são contrassensos, visto que considerar algo do tipo resultaria em não haver qualquer distinção entre contrassensos e pseudoproposições. O argumento aqui defendido é o de que todo contrassenso é uma pseudoproposição, por não possuir valores verdade atribuídos, mas que nem toda pseudoproposição é um contrassenso, a exemplo das equações matemáticas. Outro caso de pseudoproposições que não resultam em contrassensos são os esquemas utilizados para expressar regras da sintaxe lógica, conforme será argumentado na seção 2.5.

mas de outro tipo, por constituírem uma violação da sintaxe lógica, não resultando com isso em um arranjo de sinais que se possa aplicar simbolicamente ao mundo[21]. De fato, se irá mostrar que contrassensos devem ser entendidos exatamente como uma violação da sintaxe matemática: um contrassenso é um conjunto de sinais para os quais não podemos assinalar um *número*, ou seja, nenhuma *posição* em uma série ou sistema. O caso dos paradoxos será apresentado, na seção 2.5, como exemplar a esse respeito.

Os paradoxos são, por si sós, temas de interesse na compreensão das estruturas essenciais à articulação de uma linguagem[22]. Ao configurarem um 'caso mais grave' de

---

[21] Assim como equações matemáticas, contrassensos, ainda que *aparentem* ser proposições com valores verdade atribuídos, são constituídos na verdade de seqüências de sinais que não se projetam ao mundo. No caso da matemática, o caráter ilusório se encontra em equações aparentarem ser afirmações acerca de supostos *objetos* abstratos, números, como pretendem Frege e Russell. Para Wittgenstein, no entanto, equações refletem regras de substituição de sinais, restringindo-se assim o papel dos números ao de variáveis formais. Dessa maneira, ao tomar números como objetos incorremos em certo tipo de metalógica, decorrente de um mal entendido acerca do papel da matemática na linguagem, sendo esse um dos pontos da crítica de Wittgenstein a Frege e Russell. Utilizar uma equação matemática nessa acepção resultaria assim em um contrassenso, em uma violação da sintaxe lógica.

[22] O mais célebre entre os paradoxos modernos foi, como se sabe, apontado por Russell no sistema de Frege (Russell, 1902), onde a possibilidade de quantificação irrestrita e o axioma da abstração (Frege, 1966, p.70-72) permitem a formulação de uma expressão para a classe de todas as classes, a qual, por sua vez, viabiliza a definição de um conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos. Caso esse conjunto pertença a si, pela definição é falso que ele pertence a si mesmo, e caso não pertença a si, temos novamente a verdade da suposição inicial, ao reaplicar a definição do conjunto. Dessa maneira, uma das premissas remete à outra e não há como resolver a contradição por meio da rejeição de uma delas. Seguindo o princípio da explosão, a partir de uma contradição qualquer, por *modus ponens*, podemos provar a verdade de *todas* as expressões sintaticamente corretas do sistema, inclusive as contraditórias entre si, o que resulta na impossibilidade de distinguir entre a verdade e a falsidade das proposições. Sem distinção entre verdade e falsidade, a linguagem perde capacidade de aplicação empírica assim como a de diferenciação significativa entre suas expressões. O projeto de se propor sistemas que se mostrem consistentes, livres de paradoxos, levou à formulação da teoria dos tipos, por Russell (aceita por Wittgenstein com ressalvas à apresentação de Russell, a qual introduziria os tipos de maneira aparentemente metalógica, como a pretender dizer o que apenas se poderia mostrar), mas também aos teoremas de limitação por Gödel, Tarski e Church, sendo eles a impossibilidade, em Gödel, de um sistema dado por um conjunto decidível de axiomas e que baste ao desenvolvimento da aritmética demonstrar, acerca de si mesmo, a propriedade *metalógica* de consistência; a impossibilidade, em Tarski, de definir na própria linguagem-objeto o metaconceito 'verdade', sob a iminência de paradoxos semânticos; e a impossibilidade, em Church, de um conjunto de regras algorítmicas, recursivo-primitivas (ou ainda, de uma máquina de Turing) decidir acerca do problema da parada (onde a propriedade de 'parar' pode ser entendida como uma propriedade *metalógica* acerca de máquinas de Turing). Os teoremas de limitação restringem assim a prática metalógica, mostrando a inviabilidade de certas aplicações sob pena da ocorrência de paradoxos. Obtidos na década de 30, são de certa maneira 'antecipados' no *Tractatus*, em 1918, com a diferença

contradição, em que uma premissa leva à sua oposta, não admitem solução por meio da rejeição de uma dessas premissas. Se aceitarmos, ainda, o princípio da explosão[23], temos que sistemas de sinais que permitam construções paradoxais viabilizam a demonstração, por *modus ponens*, da verdade e falsidade de todas as proposições sintaticamente corretas que se possa formular nesses sistemas. Uma linguagem em que todas as proposições acerca de um objeto, inclusive as contraditórias, podem ser provadas, afinal não permite qualquer afirmação acerca desse objeto, ou, mais propriamente, sequer articula uma linguagem.

Assim, os aspectos envolvidos na constituição de paradoxos são essenciais para o entendimento de como a linguagem deve - e como não deve - se estruturar. Ao contrário do que ocorre em uma contradição, um paradoxo não é simplesmente falso, mas *nonsense*, visto que a sua suposta falsidade implicaria novamente em sua verdade e vice-versa. Da mesma maneira, Russell não pretende resolver os paradoxos considerando *falsa* outra premissa em particular: a *Lei V* do sistema de Frege por ela viabilizar a quantificação irrestrita e com isso a construção de paradoxos[24]. Nesse caso,

---

de, nesse último (além de não ser realizada qualquer demonstração formal), a restrição como fonte de paradoxos é feita à metalógica como um todo, e não apenas a certas construções dela. Como se sabe, Frege e Russell igualmente não aceitam a metalógica (ver nota 7), mas a maior ênfase nos limites expressivos da linguagem decorrente dessa posição é feita por Wittgenstein. De qualquer maneira, em outra tentativa de aproximação com os desenvolvimentos na década de 30, vê-se que as demonstrações dos teoremas de limitação utilizam a própria metalógica na obtenção de seus resultados, algo que o *Tractatus*, à sua maneira, também faz, visto ele mesmo poder ser considerado um conjunto de contrassensos metalógicos (*T6.54*) - e de onde após sua leitura devermos 'jogar a escada fora'. Gödel, Tarski e Church se utilizariam da metalógica para demonstrar a inviabilidade de certas aplicações metalógicas, enquanto Wittgenstein a utiliza para rejeitar a própria metalógica como um todo. O interesse nesse tipo de abordagem se dá por ela buscar contextualizações entre o trabalho de Wittgenstein e os desenvolvimentos da filosofia e da lógica matemática no século XX distintas das usualmente feitas com foco nas suas relações com o intuicionismo e o formalismo (acerca dessa última linha, ver Marion, 1998).

[23] Se *p* e *~p* são consideradas simultaneamente verdadeiras, podemos, por *modus ponens*, segundo o princípio da explosão, provar a verdade de qualquer expressão sintaticamente correta de uma linguagem: *(p.~p)->q* para qualquer *q*.

[24] Russell, 1902.

o sentido (ou a falta de sentido) de uma proposição (o paradoxo) dependeria da verdade ou falsidade de outra proposição (a *Lei V*), o que é claramente rejeitado no *Tractatus* (ver seção 2.5), visto algo dessa natureza equivaler a um contrassenso metalógico. De fato, a restrição à quantificação tampouco poderia ser enunciada por uma *proposição* em qualquer um dos tipos na hierarquia de Russell, por então ela dever ser de tipo superior à de todos os tipos na hierarquia e, portanto, não participar da própria hierarquia[25]. Nesse caso, no sistema de Russell a *Lei V* da aritmética de Frege sem restrições à quantificação não poderia ser uma proposição falsa, mas sequer uma possibilidade sintática - um contrassenso, portanto, bem como o paradoxo obtido a partir ela[26]. Da mesma maneira, a restrição ao escopo das variáveis na Teoria dos Tipos que permite evitar a constituição de paradoxos tampouco é uma proposição, mas uma regra sintática. Com isso, tanto a Lei V em Frege quanto a restrição à quantificação na Teoria dos Tipos são pseudoproposições - com a diferença de essa última expressar uma regra sintática, enquanto a primeira viola essa mesma regra, configurando um contrassenso[27]. Como resultado, os paradoxos não poderiam ser tomados propriamente uma *impossibilidade lógica*, como seria o caso de contradições, mas como uma violação da *sintaxe lógica*, o que resulta na impossibilidade mesma de aplicação simbólica do sinal.

[25] A própria restrição feita aos escopos das variáveis na Teoria dos Tipos não poderia ser enunciada por nenhuma expressão, verdadeira ou falsa, em nenhum dos tipos na hierarquia, dado o escopo de uma variável que se tentasse utilizar para tal violaria as restrições impostas pela própria hierarquia, ao ter por possíveis valores termos de todos os tipos.

[26] Russell, 1910, p.69-88.

[27] Dessa forma, esquemas que expressam regras da sintaxe lógica - como a restrição ao escopo das variáveis que resulta em uma hierarquia de tipos - são pseudoproposições as quais, assim como equações matemáticas, não configuram contrassensos. Tais regras devem ser expressas por *esquemas*, e não por meio de proposições, visto do contrário, conforme mencionado acima, teríamos como resultado uma violação na hierarquia dos tipos. Nesse caso, o esquema em questão é o da própria estrutura recursiva da linguagem, a qual torna impossível a formulação de impredicações. Esse ponto é retomado na seção 2.5.

A estrutura dos paradoxos tem a forma de contrassensos metalógicos em decorrência de uma circularidade na definição de seus termos. Contrassensos metalógicos violam a sintaxe lógica por ser o resultado de se tomar *variáveis livres*, ou *conceitos formais*, por conceitos próprios, como se pudéssemos falar acerca de supostos objetos formais aos quais atribuímos ou não esses conceitos (*T4.1272*). Isso, no entanto, deve ser inviável, visto os supostos objetos sob tais conceitos serem categorias lógico-sintáticas, as quais, primeiramente, estruturam a própria linguagem que pretensamente utilizamos para falar nessas categorias. Sendo assim, no caso dos paradoxos, seria violada a distinção entre *dizer* e *mostrar*, ou ainda, entre relações *externas* e *internas* dos termos utilizados em sua formulação. Relações internas dizem respeito às propriedades intrínsecas a um termo, dadas em sua *definição*, por exemplo, como condições de sentido das proposições de que eventualmente o termo sendo definido venha a participar, ao passo que relações externas dizem respeito à *aplicação* do termo, em suas possíveis ligações a outros termos em proposições verdadeiras ou falsas. O que ocorre no caso de impredicações, entre elas as que resultam em paradoxos, é envolverem, como mencionado, uma circularidade em sua definição[28]. Se uma variável em uma definição tem em seu escopo de quantificação o próprio termo sendo definido, poderíamos utilizar esse termo em uma pretensa afirmação acerca de si mesmo - o que justifica a tomada de paradoxos como casos de contrassensos metalógicos. No entanto, uma construção desse tipo deve ser impossível na ideografia do *Tractatus*, onde sinais proposicionais são gerados por recursão, passo a passo, não havendo como se fazer referência a um termo que ainda não tenha sido introduzido em uma etapa anterior; e de onde a quantificação

[28] Ver Russell, 1910; Capítulo 2 da Introdução.

impredicativa ser ilegítima[29]. Essa deve ser entendida como uma *restrição matemática* nas regras de um sistema visto a noção de número se basear em aplicações reiteradas de operações na geração de sinais proposicionais uns a partir dos outros - ao passo que, no caso de expressões que envolvam uma definição impredicativa, não haveria como ‘contar’ as operações aplicadas em sua formulação, tendo em vista a sua circularidade. Em outras palavras, o pretenso termo sendo definido não se liga ao restante do sistema, porque não há um conjunto finito de operações que o conecte, passo a passo, recursivamente, a esse sistema, de modo a não ser possível lhe atribuir qualquer *número* que o *posicione* em uma série.

Em suma, conceitos formais, enquanto variáveis livres, não expressam nenhuma ligação particular entre termos, mas antes deixam em aberto tais ligações, explicitando com isso suas relações internas, as possibilidades combinatórias entre sinais no sistema em questão. A metalógica se mostra inviável nesse contexto exatamente por conceitos formais serem *esquemas* de possíveis combinações de sinais e não uma combinação específica que se possa projetar simbolicamente em uma representação: ao refletirem aspectos da estrutura do sistema de posições, não podem ser eles mesmos nenhuma posição no sistema de referências. Por uma confusão entre categorias sintáticas, no entanto, usos legítimos de variáveis livres são eventualmente tomados como proposições com sentido, como sinais simbolicamente projetados a supostos objetos abstratos representados por elas. Essa seria a origem de confusões filosóficas, e em particular, do platonismo, onde equívocos acerca das categorias sintáticas essenciais a uma linguagem, ao se tomar conceitos formais por conceitos próprios, levam a

[29] Apenas poderíamos quantificar sobre a totalidade dos termos gerados *até então* em uma série, de maneira similar à lógica intuicionista. Desse modo, na definição recursiva de um termo qualquer seria impossível quantificar sobre uma totalidade que pressuponha o próprio termo sendo definido.

contrassensos, e com eles a intermináveis discussões *nonsense*. Tais equívocos decorrem da sintaxe altamente complexa da linguagem natural, e o papel da análise lógica será o de explicitar os elementos lingüísticos essenciais à representação, bem como a sua sintaxe, de maneira a evitar tais usos ilusórios. O Capítulo 1, a seguir, deve mostrar como essa análise é possível. Em seqüência, no Capítulo 2, será apresentada a ideografia do *Tractatus*, que se pretende perspícua a tais categorias sintáticas de modo a evitar esses equívocos. Por fim, nesse mesmo capítulo, a matemática é apresentada como parte da sintaxe lógica exatamente em seu aspecto recursivo; o qual é desconsiderado na constituição de contrassensos metalógicos.

CAPÍTULO 1

1.1 Da Análise Lógica

A noção de *multiplicidade* será essencial para esclarecer tanto o que Wittgenstein entende por *análise lógica* quanto por *cálculo matemático*. Que a noção de multiplicidade deve ser entendida como a de uma *multiplicidade matemática* é evidente nas seguintes passagens:

> 4.04 Deve ser possível distinguir na proposição tanto quanto seja possível distinguir na situação que ela representa.
>
> Ambas devem possuir a mesma multiplicidade lógica (matemática).
>
> 4.041 Essa multiplicidade matemática não pode ser, naturalmente, por sua vez afigurada. Dela não se pode sair no momento da afiguração.
>
> 5.475 Importa apenas constituir um sistema de sinais que tenha um determinado número de dimensões – uma determinada multiplicidade matemática.

Existem inicialmente duas acepções do conceito de multiplicidade nessas passagens. Uma notação, ou sistema de sinais, *como um todo*, possui uma multiplicidade matemática, conforme *T5.475*. No entanto, também aos elementos desses sistemas, aos sinais, é atribuída uma multiplicidade, como se vê no caso de sinais proposicionais em *T4.04*. Em suma, na primeira dessas acepções o conceito de multiplicidade diz respeito à multiplicidade de um *sistema de posições*, ao passo que na segunda à multiplicidade das *posições em um sistema*. No entanto, apesar dessa distinção inicial, é possível considerar ambas as acepções de certa maneira imbricadas: a multiplicidade de um sistema é dada pelas posições que o compõem e essas posições, por sua vez, determinam mutuamente a multiplicidade umas das outras, exatamente por serem *posições relativas*[30].

No que concerne à acepção de multiplicidade se referindo a sistemas, *T4.04* diz respeito ao isomorfismo necessário entre linguagem e mundo na representação dos fatos. *T5.475*, que duas notações que bastem à representação dos fatos são também isomórficas entre si. Já em *T4.041*, temos a rejeição da metalógica como uma impossibilidade matemática, resultante da inviabilidade de se representar o próprio isomorfismo entre a multiplicidade de um sistema de sinais e a situação a ser representada. Conseqüentemente, também o isomorfismo entre duas notações, como o mencionado em *T5.475*, tampouco pode se representar. Essa discussão será detalhada no item 2.5, em que a rejeição da metalógica será apresentada como uma impossibilidade matemática.

À presente discussão, importa a acepção de multiplicidade no que diz respeito às posições relativas entre sinais em um sistema. Isso permitirá esclarecer a motivação e a possibilidade tanto do cálculo matemático quanto da análise lógica. No caso do cálculo, as diversas identidades de que um sinal participa na configuração de um sistema de sinais mostram suas *posições relativas* a outros sinais, *aspectos* de sua posição no

[30] A multiplicidade de um nome é dada por suas possíveis ligações a todos os demais e, portanto, pelo sistema como um todo; e o mesmo se pode dizer acerca de objetos. Cada objeto é caracterizado por suas possíveis de ligação aos demais, de maneira que alterar uma única dessas possibilidades equivale a modificar o espaço lógico como um todo – e obter com isso, portanto, *outros* objetos (a forma lógica do espaço auditivo é diferente da do espaço visual: "2.0131 ...Não é preciso, por certo, que a mancha no campo visual seja vermelha, mas uma cor ela deve ter: tem à sua volta, por assim dizer, o espaço de cores. O som deve ter *uma* altura, o objeto do tato, *uma* dureza, etc.".). Assim um espaço de possibilidades funciona como um sistema de *posições relativas*, onde cada posição é dada em relação à totalidade das demais no sistema. Nesse contexto, as possíveis ligações de um objeto caracterizam suas *propriedades internas*, propriedades sem as quais ele deixa de ser o objeto que é, ao passo que suas ligações *de fato* a outros objetos caracterizam suas *propriedades externas*. Essas últimas não dizem respeito à natureza do objeto ou do sistema, mas a configurações particulares nesse sistema, ou ainda, às posições (ligações) particulares que os objetos podem assumir nesse sistema.

sistema como um todo. 2+3=5 e 4+1=5, por exemplo, mostram diferentes posições relativas do sinal 5 a diferentes sinais no sistema numérico, diferentes *perspectivas* da posição ocupada por esse número no sistema. O mesmo pode ser dito, por exemplo, acerca de identidades como *p*=~~*p*, *p*=~~~~*p*, etc., em um sistema de sinais proposicionais. Nesse contexto, a utilidade de se escrever 2+3 ao invés de 4+1, apesar do significado idêntico dessas expressões, se encontra em expressarmos na primeira delas, de maneira explícita, *no próprio sinal*, a posição relativa de 5 aos números 2 e 3 em um espaço ordenado pela adição. Com isso, a posição ocupada por um sinal em um sistema - sua multiplicidade ou forma lógica - não necessariamente é expressa no sinal utilizado, e o que fazemos em uma demonstração matemática é realizar sucessivas transformações desse sinal de maneira a tornar clara sua posição a outros sinais. Assim, a multiplicidade do sinal não é intrínseca à sua forma *aparente*, mas dada pelo papel que esse sinal exerce no sistema, a partir de sua posição em uma topologia. No item 2.2, tomando por base a notação ideográfica do *Tractatus*, números serão apresentados como sendo a forma geral de posições em séries, e o cálculo como a apresentação de uma seqüência de expressões distintas dessas posições.

Deve-se justificar a possibilidade da análise lógica em um sistema simbólico de modo análogo à explicação dada acima acerca de um cálculo com sinais. Um sistema simbólico é estruturado por meio das relações entre as condições de verdade das proposições, e sendo a multiplicidade de uma proposição dada por sua posição nesse sistema, ela pode ser obtida a partir dessas relações semânticas. Assim, em uma demonstração ou análise lógica, o que fazemos é reescrever sinais proposicionais de modo a tornar explícitas, em sua própria expressão, as relações lógicas dessas para com outras proposições. No caso de uma proposição *não analisada*, a multiplicidade da situação representada não se encontra totalmente expressa no sinal proposicional, de modo à sua complexidade se denunciar tão somente pelas relações entre as condições de verdade dessa proposição para com as condições de verdade das demais que compõem o sistema. De fato, um sinal proposicional relativamente simples, como, por exemplo, *"o déficit da balança comercial inverteu sua tendência de queda"*, não reflete a complexidade da situação representada, mas o sistema simbólico em que ela se insere sim, sem o que permaneceria inexplicável como nos é possível entender o sentido dessa proposição apenas a partir de seu sinal não analisado[31]. Dessa maneira, ainda que a complexidade da situação representada não se encontre totalmente expressa à superfície do sinal, o sistema em que ele se insere deve permitir transformações de modo a obter seus elementos. Algo dessa espécie equivale a um *princípio do contexto*[32] estendido para além do *contexto proposicional*, envolvendo ainda o *contexto do sistema* em que os

---

[31] E sem o que não haveria isomorfismo entre sistema de sinais e mundo. Dessa maneira, a projeção representativa de um sinal *não* analisado só é possível caso o sistema de sinais adotado *permita* o desenvolvimento da análise lógica em sua sintaxe: ainda que não levemos de fato a análise a cabo, o sistema como um *todo* é o que garante a multiplicidade correta ao sinal proposicional. Assim, é perfeitamente possível, por exemplo, que nos dicionários de português não haja nomes de objetos simples, mas sempre nos deve ser possível *gerar* esses nomes, por eles necessariamente terem uma posição no sistema sintático. A sua *possibilidade* é dada juntamente com o sistema de linguagem em questão, ainda que de maneira apenas *implícita* em sua sintaxe. Também por essa razão, a linguagem ordinária está em perfeita ordem da maneira como ela é, ou do contrário sequer poderia ser utilizada em uma representação.

[32] "3.3 Só a proposição tem sentido; é só no contexto da proposição que um nome tem significado". Apesar de essa ser uma referência explícita apenas ao contexto proposicional, sem o contexto do sistema de linguagem permaneceria inexplicável a possibilidade de uma análise lógica. Isso porque a análise se dá por meio de tautologias e contradições, as quais relacionam as condições de verdade da proposição sendo analisada às condições de verdade das demais proposições no sistema. Nesse caso, a linguagem somente existe em uso: um nome só o é em referência a um objeto, um sinal proposicional só o é em decorrência de suas condições de verdade e essas últimas o relacionam ao sistema de linguagem como um todo - de maneira a podermos atuar apenas a partir de 'dentro' do próprio sistema constituído. São as relações lógicas de proposições já dadas e interligadas em um sistema, das quais entendemos o sentido de antemão, que permitem a obtenção da sintaxe dos termos e de seus elementos fundamentais. Dessa maneira, uma ideografia não pode ser entendida como a proposta de se 'reformar' a linguagem ordinária, visto ela estar perfeitamente ordem antes de qualquer análise. Outra indicação de que o princípio do contexto deve ser estendido à noção de sistema pode ser observada em *T3.42*: "Embora a proposição possa determinar apenas um lugar do espaço lógico, por meio dela já deve ser dado todo o espaço lógico... (A armação lógica à volta da figuração determina o espaço lógico. A proposição alcança todo o espaço lógico).".

sinais se inserem, o que caracteriza certo tipo de *holismo* no *Tractatus* - ou 'inferencialismo', em analogia à leitura similar de Frege feita por Ricketts[33].

Assim, o que a análise lógica resolve é uma diferença de multiplicidade entre sinal e símbolo nos casos em que o sinal não reflete, em sua própria articulação, todas as possibilidades do símbolo que o projeta – de modo que a posição desse sinal no sistema simbólico associado deve, por si mesma, indicar a direção que a análise deve tomar. Com isso, apenas o entendimento das condições de verdade de uma proposição - de sua posição em um sistema simbólico - já deve bastar para que seja possível levar a cabo uma análise que apresente, no próprio sinal proposicional, a complexidade da situação representada. As relações entre os valores verdade das proposições são expressas por meio de operações lógicas, ou conectivos lógicos, cuja sintaxe deve, portanto, refletir de maneira perspícua as relações simbólicas entre as proposições. No item 1.2 será visto como a sintaxe das operações lógicas pode ser derivada a partir da estrutura de tautologias e contradições, além de como isso garante o isomorfismo da notação dos conectivos para com o espaço lógico representado. Inversamente, também as ligações necessárias entre proposições relacionadas por conectivos manifestam-se por meio de

[33] Naturalmente, a consideração de tautologias e contradições em primeiro plano na análise das proposições em lógica aplicada é característica apenas em Wittgenstein. De qualquer maneira, como observa Ricketts (Ricketts, 2010, p.156), Frege "não toma a noção de objeto e de nome designando um objeto como uma base independentemente dada para introduzir a generalidade...", antes "Frege toma como básica a *inferência* da generalização para sua instância, a relação *inferencial* entre a generalização e suas instâncias." (itálicos meus). Também no caso de Wittgenstein, é a rede inferencial, dada pelas relações entre as condições de verdade das proposições em um sistema, que primeiramente permite a análise dessas últimas e a obtenção de seus elementos. Tal interpretação 'inferencial' é corroborada por *T3.42*: "Embora a proposição possa determinar apenas um lugar do espaço lógico, por meio dela já deve ser dado todo o espaço lógico. (Caso contrário, por meio da negação, da soma lógica, do produto lógico, etc. seriam introduzidos – em coordenação – sempre novos elementos.)". A respeito à noção de espaço lógico – ou ainda, de *sistema* simbólico – ela será detalhada na seção 1.2, e corresponderia ao que aqui se apresenta como um sistema inferencial.

tautologias e contradições - e são expressões sob essa forma que caracterizam o resultado da análise. A seguir é discutido um exemplo de como isso dá.

Suponha-se uma proposição *p*, *não analisada*. Sua multiplicidade interna, exatamente por ela não ser analisada, não se reflete no próprio sinal *p*, mas nas relações lógicas de *p* com outras proposições. Fazendo uso somente dessas relações entre valores verdade devemos poder chegar à estrutura interna de *p*, ao apresentar tais ligações sob a forma de tautologias e contradições. Por exemplo, para que uma proposição $p \rightarrow q$ seja necessariamente verdadeira - refletindo assim as relações entre as condições de verdade de *p* e *q*, ou seja, suas posições relativas em um sistema simbólico - temos que ela deve ser uma tautologia, e, portanto, p e/ou q devem ser proposições compostas. Isso porque o conectivo '$\rightarrow$' obviamente não estabelece, por si só, nenhuma tautologia a partir das proposições em seu argumento: $p \rightarrow q$, a princípio, não é o sinal de uma tautologia e sim de uma proposição bipolar[34]. No entanto, na linguagem ordinária nada nos impede de reconhecer relações lógicas entre proposições ainda que elas não sejam explícitas em seu sinal, visto não ser a sua estrutura aparente, e sim seu método de projeção simbólica o que lhe garante uma posição no sistema. Nesse caso, se *p* é analisável, por exemplo, de modo que $p = q \cdot r$, então $p \rightarrow q$ é tautológica visto $q \cdot r \rightarrow q$ ser verdadeira para todos os possíveis valores verdade de q e r. Assim, a verdade necessária de $p \rightarrow q$ é uma expressão do posicionamento das proposições *p* e

[34] A aparente bipolaridade já indica um dos possíveis equívocos a que nos pode induzir uma forma não analisada como *p*→*q*. Essa é uma proposição necessária e a necessidade lógica não poderia ser expressa por uma proposição bipolar, apesar desse sinal erroneamente indicar algo do tipo. Pretender exprimir uma necessidade lógica por meio de uma proposição seria incorrer numa metalógica e, portanto, em um contrassenso.

q no sistema simbólico, e a análise de p em $q \cdot r$ apenas torna explícita essa posição em seu próprio sinal.

Deve-se observar ainda que ambas as expressões, tanto p quanto $q \cdot r$, ou seja, tanto a versão não analisada quanto analisada, são sinais igualmente aptos para expressar a mesma proposição: apesar de serem sinais distintos, ambas ocupam a mesma posição no sistema simbólico. Além disso, temos ainda que as *proposições elementares* resultantes de uma *análise completa* das proposições devem ser *logicamente independentes* entre si, sem o que a possibilidade de prosseguir a análise se estenderia indefinidamente, as condições de verdade das proposições permaneceriam indeterminadas e elas não teriam sentido[35]. Por fim, uma análise como essa apenas é possível exatamente pela multiplicidade de um símbolo não ser determinada pelo sinal que o apresenta, mas pela posição ocupada por ele em um sistema simbólico. Como mencionado, tal multiplicidade é dita *matemática* por números atuarem como a forma geral de *posições em séries*[36], e nesse caso em particular, pelas posições relativas entre proposições serem dadas por meio da aplicação reiterada de operações lógicas, cujos expoentes são numéricos. A matemática pode assim ser interpretada como um método da lógica, por um cálculo com sinais se viabilizar tendo números como expressões de posições em séries proposicionais.

---

[35] Na ordem de escrita do *Tractatus*, a partir de sua 'ontologia' ("1.121 Algo pode ser o caso ou não ser o caso e tudo o mais permanecer na mesma."), são os próprios fatos do mundo que mostram sua independência mútua. Na forma apresentada aqui, o mesmo resultado seria obtido a partir da análise das proposições. Para além de questões exegéticas, as duas vias são justificáveis. A análise das proposições por meio de tautologias e contradições de certa forma pressupõe a independência lógica dos fatos atômicos, visto as proposições da lógica refletirem o esgotamento das possibilidades combinatórias dos fatos. Por outro lado, apenas em haver tal esgotamento, em haver uma partição disjunta das possibilidades das coisas, a representação simbólica, da qual partimos, pode ser viável - e a independência dos fatos atômicos seria, portanto, demandada tão somente por nossas proposições terem sentido.

[36] Ver seção 2.2.

O exemplo acima diz respeito à análise lógica como um *cálculo proposicional*. No entanto, proposições são articuladas, delas participam *nomes*, *argumentos*, *funções*, *variáveis*, *quantificadores*, etc., e a princípio não é óbvio como essas estruturas poderiam ser indicadas numericamente, se o que apontamos com números são apenas posições relativas entre sinais proposicionais. Em outras palavras, também o *cálculo de predicados* deve se viabilizar a partir das posições relativas dos sinais proposicionais no sistema simbólico associado: devemos poder obter as estruturas de *argumento, função*, *variáveis*, etc. apenas a partir das relações entre os valores verdade das proposições. Tais estruturas internas à proposição não são *a princípio* indicadas numericamente (ainda que na seção 2.4, p.119, isso se mostre viável, e na verdade necessário), mas a sua projeção simbólica sim demanda a discriminação desses elementos no sistema de sinais como resultado da análise lógica[37]. A posição da proposição no sistema simbólico deverá ser expressa no próprio sinal por meio de termos sob as categorias sintáticas de nome, argumento, função, variável, operação, etc. e, inversamente, as ligações lógicas dessa proposição com outras proposições, sua posição no sistema simbólico, devem refletir a sua organização interna estruturada nessas categorias sintáticas - a possibilidade de realizar a análise das proposições se baseia em suas ligações lógicas com outras proposições refletirem de maneira exata a sua estrutura interna, e vice-versa. Assim, se relações lógicas nos são apresentadas de maneira explícita por meio de tautologias e contradições, essas últimas devem refletir a organização interna das

[37] Essa deve ser uma análise *lógica* e não matemática, visto sinais se dividirem entre as categorias sintáticas mencionadas de acordo com sua projeção simbólica e não simplesmente pela maneira como o sinal se apresenta. "3.143 Que o sinal proposicional seja um fato, isso é velado pela forma habitual de expressão escrita ou impressa. Pois a proposição impressa, p. ex. o *sinal proposicional* não parece essencialmente diferente da palavra. (Foi assim possível a Frege chamar a proposição de nome composto.)" - itálico meu. Essa passagem indica que o sinal, por si, não pode caracterizar uma categoria sintática, seja a de um nome ou de uma proposição, mas que somente a projeção simbólica o faz.

proposições em termos das categorias de nome, argumento, função, quantificação, etc. Uma vez mostrada a viabilidade disso, o uso do operador *N* deve permitir a Wittgenstein apresentar de maneira unificada o cálculo proposicional e de predicados, de maneira à sua sintaxe equivaler à de uma *lógica de primeira ordem*.

Esse é o 'projeto' do *Tractatus* para a *lógica aplicada*, o qual ele mesmo, enquanto livro de *lógica pura*, não realiza. Ainda que apenas indicado, no entanto, tal projeto deve se mostrar viável na obtenção dessas categorias sintáticas em uma análise das proposições, algo que decorre do caráter essencialmente *sistêmico* atribuído à linguagem pelo *Tractatus*: ainda que o sinal não analisado de uma proposição não dê indicações de sua estrutura interna, é a *posição* que ela ocupa no sistema de símbolos que determina sua *multiplicidade* ou *forma lógica*. É exatamente em decorrência desse caráter sistêmico que Wittgenstein poderá expressar a Forma Geral da Proposição por meio da variável $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$, a qual não fornece qualquer indicação a respeito da estrutura interna das proposições em termos de sua articulação em argumento-função, ou a respeito de quantas posições de argumento elas possuem, etc. No entanto, a Forma Geral da Proposição deve bastar por fornecer a *posição* da proposição no sistema, visto em seu sinal termos claramente expressos a *posição relativa*, $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$, da proposição molecular $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ em relação ao conjunto de elementares $\bar{p}$ no sistema simbólico – e tão somente a partir dessa posição relativa nos deve ser possível obter a estrutura das proposições elementares em argumento-função, bem como o número de argumentos nessas proposições elementares, etc[38]. No item 2.2, Capítulo 2, a Forma Geral da

[38] "5.55 Devemos agora responder *a priori* à questão de quais sejam todas as formas possíveis de proposições elementares. A proposição elementar consiste em nomes. Como não podemos, porém, especificar o número dos nomes com significados diferentes, tampouco podemos especificar a

Proposição será discutida em detalhes, mas para que ela se mostre viável como sendo a forma proposicional geral, devemos poder obter as categorias sintáticas mencionadas acima apenas partir da sintaxe de *N*; ou seja, apenas a partir das relações entre as condições de verdade das proposições. A seguir alguns casos que devem ser atendidos caso o projeto do *Tractatus* para a lógica aplicada se mostre viável:

i) Obter, de uma proposição não analisada e suas ligações lógicas, um sinal proposicional composto de outras proposições e conectivos lógicos relacionando essas proposições (*cálculo proposicional*); ii) obter, de uma proposição não analisada e a partir de suas ligações lógicas, estruturas compostas de argumento, função e, eventualmente, quantificadores (*cálculo de predicados*); iii) de uma proposição não analisada chegar à sintaxe dos nomes simples, visto também a forma das proposições elementares dever resultar da análise lógica; iv) de uma proposição não analisada e suas ligações obter proposições elementares com uma, duas, ou mais posições de argumento, como *fx*, *fxy*, *fxyz*, etc; e v) de uma proposição não analisada envolvendo descrições definidas, obter proposições analisadas onde termos complexos não ocorram (*teoria das descrições*).

O principal ponto a ser observado nos casos de i a v, como mencionado, é que aquilo que confere *multiplicidade* ou *forma lógica* a um sinal proposicional é a sua *posição* no sistema simbólico, dada por suas relações lógicas com outras proposições e expressa por meio de tautologias e contradições. Se, de fato, por meio de tautologias e contradições

composição da proposição elementar." A Forma Geral da Proposição contém todos os elementos para indicar a posição de uma proposição em um sistema - e, portanto, quantas posições de argumento, etc., as elementares de que ela se compõe possui. No entanto, por se tratar de uma variável, a Forma Geral da Proposição deve ainda ter seus parâmetros fixados em lógica aplicada, de maneira a se obter a real topologia do sistema de linguagem e com isso o número de posições de argumentos das elementares de que se compõe a proposição em questão, etc.

podemos obter a sintaxe dos elementos de que se compõem as proposições, temos assim uma maneira de obter regras de substituição *salva congruitate*, que delimitam as diversas categorias sintáticas[39], a partir de regras de substituição *salva veritate*, dadas por tautologias. Esse é exatamente o pressuposto para que possa ser levado a cabo o projeto do *Tractatus* para a lógica aplicada. Nesse caso, a reescrita de proposições sob a forma de tautologias e contradições seria suficiente para abarcar os exemplos de i a v e com isso justificar a Forma Geral da Proposição tal como é apresentada por Wittgenstein - por ela tão somente indicar posições relativas entre sinais proposicionais por meio do operador *N*. No que segue é feita uma rápida discussão desses casos.

i) No que diz respeito ao cálculo proposicional, foi apresentado acima (p.29) o exemplo da análise de $p \rightarrow q$ em $q \cdot r \rightarrow q$, tendo por ponto de partida apenas as relações entre os valores verdade das proposições, expressas por meio de conectivos. Na seção 2.2, Capítulo 2, será demonstrado como a sintaxe do operador *N* abarca a sintaxe dos demais conectivos, de maneira à notação do *Tractatus* bastar a um cálculo proposicional.

ii) No cálculo proposicional não são necessários nomes, posições de argumento, funções e variáveis que possivelmente venham a participar da composição de proposições não analisadas p, q e r, em um cálculo de predicados. Para mostrar como a análise deve permitir explicitar mesmo esses outros elementos internos às proposições, suponha-se que de *p* sigam-se *q*, *r*, *s*, *t*,..., de modo que ‘*p* então *q*’ seja uma proposição necessariamente verdadeira, mas, *aparentemente*, não tautológica; e o mesmo a respeito de ‘*p* então *r*’, ‘*p* então s’, etc. Nesse caso, apesar de os sinais $p \rightarrow q$, $p \rightarrow r$,

[39] Como exemplo de regra de substituição *salva congruitate*, temos a substituição de *a* por *b* na passagem de *fa* a *fb*. Tal substituição não preserva a verdade, mas tanto *a* quanto *b* devem ser *nomes*, para que o sinal resultante, *fb*, seja uma proposição. Assim substituições *salva congruitate* como essa permitem delimitar a categoria sintática de nome.

$p \rightarrow s$,..., não aparentarem ser tautologias, sua verdade necessária deve indicar a possibilidade de se os analisar de maneira a exprimir a estrutura tautológica subjacente. Assim, a expressão analisada de *p* poderia ser dada, por exemplo, por $p \equiv (x)fx$, onde *fx* indica a *forma lógica comum* às proposições *q*, *r*, *s*,..., e *(x)* é uma quantificação, equivalente à conjunção - eventualmente *infinita*[40] - dessas proposições. As proposições *q*, *r*, *s*,..., devem com isso ter as formas *fa*, *fb*, *fc*,..., de modo que a partir dos sinais não analisados $p \rightarrow q.r.s....$ obtemos a forma analisada $(x)fx \rightarrow fa.fb.fc....$

A distinção desse exemplo para com o cálculo proposicional está em aqui ter sido necessário explicitar a estrutura interna das proposições em termos de argumentos, funções, variáveis e da quantificação, em um cálculo de predicados. Isso porque a série de proposições implicada logicamente por *p* poderia, eventualmente, ser infinita, de onde nos valermos da forma geral *fx* para exprimir essa série de proposições. Como toda proposição pode a princípio ser generalizada, todas as proposições elementares necessariamente se estruturam em argumento e função. A análise das proposições em termos de argumento e função é a base da teoria da quantificação moderna - e ainda que Wittgenstein não dê indicações a respeito, sua justificativa para esse resultado seria muito provavelmente próxima à apresentada por Russell: “Um conceito infinitamente complexo... certamente não pode ser manipulado pela inteligência humana; mas coleções infinitas... podem ser manipuladas sem a introdução de qualquer conceito de

[40] No *Tractatus* é admitida a possibilidade de infinitas proposições elementares às quais eventualmente aplicamos uma operação, mas não a de infinitas aplicações sucessivas de uma operação: “4.2211 Ainda que o mundo seja infinitamente complexo, de modo que cada fato consista em uma *infinidade* de estados de coisas e cada estado de coisas seja composto de uma infinidade de objetos, mesmo assim deveria haver objetos e estados de coisas”; “5.32 Todas as funções verdade são resultados da aplicação sucessiva de um número *finito* de operações verdade às proposições elementares” (itálicos meus).

complexidade infinita"[41]. O correspondente a essa observação em Wittgenstein se encontra em podermos formular uma molecular envolvendo infinitas proposições elementares, mas não aplicar infinitas operações na formulação de uma molecular (ver nota 40). Entendemos perfeitamente o sentido e as conseqüências lógicas de uma proposição como "carros são poluentes", mesmo sem determinar de antemão todas as possíveis proposições que se seguem de sua verdade. Algo do tipo seria impossível se essas proposições não se organizassem em termos de argumento e função[42]. Ao partir de expressões generalizadas como *fx*, Wittgenstein pretende então que os quantificadores universal e existencial se possam substituir por produtos e somas lógicas, de maneira à necessidade lógica envolvendo quantificações igualmente se reduzir à forma de tautologias e contradições. Essa é a principal motivação para o uso do operador *N* na unificação do cálculo proposicional e de predicados, a ser apresentada no item 2.2.

iii) No caso do estabelecimento da sintaxe dos nomes simples pela análise, ela se daria por meio do escopo de quantificação da variável *x*, em *(x)fx*, por exemplo. Em outras palavras, seria possível à análise lógica obter a sintaxe dos nomes sob o escopo de *x* por meio das *proposições logicamente implicadas por (x)fx*. Isso porque os possíveis valores obtidos na fixação de *fx* resultam em proposições com sentido e, portanto, em sinais sintaticamente corretos, isomórficos com as possíveis ligações dos objetos representados.

---

[41] Russell, 1910, p. 73. A função proposicional *fx* pode assim ter infinitos possíveis valores, ainda que o termo *f* não seja infinitamente complexo.

[42] Todas as proposições, inclusive as elementares, devem poder ser analisadas em termos de argumento e função, visto a verdade de uma elementar qualquer sempre implicar, necessariamente, a verdade de uma proposição quantificada (a verdade da proposição *p*, dada sua forma analisada *fa*, por exemplo, implica a verdade de $(\exists x)\,fx$).

Para esclarecer o caso, note-se que a variável proposicional *fx* pode ser obtida tornando-se uma variável parte constante da expressão de uma proposição (*T3.315*) - por exemplo, tornando *c*, em *fc*, a variável *x*. Na expressão dessa última há uma parte fixa, em *f*, e o escopo de *x* deve ser dado pelos nomes de objetos aos quais a expressão na parte fixa pode se ligar. Em particular, se *fc* for uma atribuição de cor, tal como '*c* é azul', sob o escopo de *x*, em *fx*, devem ocorrer somente nomes de objetos passíveis de terem cor, objetos espaciais, digamos, e não objetos sonoros. Dessa maneira as possíveis ligações de nomes uns aos outros devem ser isomórficas às possíveis ligações uns aos outros dos objetos que eles representam e a sintaxe não deve permitir atribuições de timbre a uma cor ou de luminosidade a um som, visto algo do tipo resultar em um contrassenso. Assim, a posição de um nome no sistema de sinais é dada pelos nomes aos quais é *possível* que ele tenha uma ligação e pelos nomes aos quais é *impossível* essa ligação, e ao modificar uma única dessas possibilidades teremos modificado a topologia do sistema como um todo - passamos a tratar de *outros* objetos que não os tratados no sistema anterior; temos *outro sistema*, enfim. Nesse contexto, a variável *fx* expressa uma *traço topológico comum* a um conjunto de proposições que se posicionam relativamente segundo regras gramaticais (simbólicas) similares. Com isso, os nomes cuja sintaxe permite seu uso no lugar da variável *x* em *fx* podem ser expressos por meio das relações lógicas de *(x)fx*, visto *(x)fx* não implicar logicamente em contrassensos, mas em proposições com sentido. Dessa maneira, a implicação $(x)fx \rightarrow fa.fb.fc...$ explicita a sintaxe dos nomes *a*, *b*, *c*,..., assim como a da parte fixa *f* na variável proposicional *fx*.

Com isso se tem claro como obter uma regra de substituição *salva congruitate*, dada por substituições de termos de uma mesma categoria sintática, através de uma regra de substituição *salva veritate*, dada por uma tautologia. Outro exemplo na obtenção da sintaxe dos nomes é igualmente dado pela expressão tautológica $(fa \vee \sim fa) \leftrightarrow (fb \vee \sim fb) \leftrightarrow (fc \vee \sim fc)...$.

iv) A análise deve permitir a obtenção de proposições elementares com uma, duas ou mais posições de argumento. Casos de análise como esse se justificariam por meio das ligações lógicas de proposições com uma, duas, três ou mais *variáveis quantificadas*, ou seja, por meio de relações lógicas envolvendo a *múltipla quantificação*; de maneira similar a como a quantificação sobre uma variável permitiu a obtenção da estrutura em argumento-função em (ii). No entanto, Fogelin[43] apresenta sérias limitações expressivas da notação do *Tractatus* no que diz respeito ao uso de *N* com múltiplas variáveis. Elas serão discutidas no item 2.2.

v) No que diz respeito à *teoria das descrições*, a análise deve nos permitir distinguir, tendo por ponto de partida apenas as relações lógicas da proposição *fa*, se *a* é uma *descrição definida* ou um *nome simples*. Descrições definidas são meros recursos sintáticos e por poderem ser descartadas em uma linguagem analisada não são essenciais à representação: uma proposição molecular, seja em sua versão analisada ou expressa por meio de descrições definidas, tem exatamente o mesmo significado, com as mesmas relações lógicas, apresentada, porém, por meio de sinais distintos. Aqui novamente caberá à versão analisada expressar, no próprio sinal, toda a sua complexidade simbólica. No exemplo tradicional, em "o rei da França é calvo", a estrutura aparente do sinal indica essa se tratar de uma relação entre dois nomes, ao passo que Russell o analisa por meio da quantificação e da conjunção em "há um único

[43] Fogelin, 1987, p.78-9.

x que é rei da França e *x* é calvo"[44]. Como visto nos exemplos acima, em (i) e (ii), a ocorrência do produto e da quantificação se reflete nas ligações lógicas dessa com outras proposições, e assim, também nesse caso é possível obter a estrutura interna de uma proposição tão somente a partir de suas relações lógicas.

Os elementos resultantes da análise nos exemplos de i a v apresentados acima - como operações lógicas, a estrutura das elementares em argumento-função, o uso variáveis em expressões gerais, etc. - devem ser parte da *sintaxe lógica* necessária a qualquer linguagem em representação do mundo. Isso por tais elementos refletirem, em seus próprios sinais, a estrutura topológica do sistema em que se inserem. Por outro lado, uma violação na sintaxe de tais elementos implica na obtenção de um signo que não se liga a um sistema, não adquirindo com isso qualquer multiplicidade e tampouco capacidade de representação. Em particular, o caso de descrições definidas exemplifica bem como o uso de proposições não analisadas pode induzir a formulação de contrassensos filosóficos; e como a análise lógica nos permitiria evitar esses enganos. Uma análise completa das proposições resulta em proposições elementares logicamente independentes entre si, na quais apenas podem figurar *nomes simples indecomponíveis*. Isso porque nomes de complexos não poderiam participar de proposições elementares, visto, do contrário, elas dependeriam logicamente de outras elementares. No entanto, se consideramos 'o rei da França é calvo' na forma imediata em que esse sinal se apresenta[45], poderíamos ser induzidos a tomá-lo como uma ligação entre nomes simples, ao invés de uma estrutura com um nome de complexo na posição de argumento de uma função. Com isso, o sinal não analisado não indica todas as condições de

---

[44] Da Denotação (Russell, 1978, p.12).
[45] A que Russell chama de ocorrência primária da proposição, em *Da Denotação* (Russell, 1978, p.12).

verdade envolvidas na constituição de seu símbolo - e em particular, a proposição que afirma a existência de um rei da França na versão analisada não é aparente nesse sinal. Assim, a eventual não existência de um rei pareceria implicar a *rejeição* tanto de ‘o rei da França é calvo’ quanto na de ‘o rei da França *não* é calvo’, devido à ausência de referentes para um de seus nomes inviabilizar a atribuição de condições de verdade tanto a uma quanto à outra proposição. Sem valores verdade, temos um sinal que não se liga a um sistema simbólico e não adquire qualquer multiplicidade ou capacidade representativa, portanto. O equívoco sintático nesse caso se encontra em tomarmos um nome de complexo como um nome simples, de maneira que o *sentido* de ‘o rei da França é calvo’ aparentemente dependeria da *verdade* ou *falsidade* de outra proposição - a que afirma a existência de um rei na França. A análise proposicional, no entanto, nos indica que “há um único *x* que é rei da França” é ela mesma uma das *condições de verdade* de “o rei da França é calvo”, e não uma das *condições de seu sentido*. Tomar a verdade de “há um único *x* que é rei da França” como condição de sentido de outras proposições equivale a atribuir a ela a forma de um contrassenso metalógico, algo que se poderia evitar por meio de uma análise proposicional que evidencie sua real estrutura simbólica, explicitando, em seu próprio sinal, a complexidade da situação representada[46].

[46] Não obstante, sem uma análise adequada das proposições como essa sempre é possível prosseguir em confusões filosóficas cada vez mais “profundas” em casos como esse, como, por exemplo, atribuir ao ‘rei da França’ uma existência platônica além de espaço e tempo, como faz Meinong acerca da ‘Montanha de Ouro’, entre outros exemplos do tipo (Russell, 1978, p.12). Nessa interpretação platonista, a existência ou não de objetos simples diria respeito tão somente a ser verdadeira ou não uma atribuição espaço-temporal feita a eles, de maneira a proposições nas quais seus nomes ocorrem terem sentido independentemente da existência espaço-temporal desses objetos no mundo. A necessidade de apelo a entidades platônicas ou abstratas como essas seria um caso típico de má compreensão da lógica da linguagem.

Tais equívocos decorrem do aumento da complexidade sintática da linguagem natural, obscurescida à medida que os sinais proposicionais se tornam mais simplificados pelo uso de descrições definidas e de recursos lingüísticos que possuem outras funções que não a expressão clara da forma lógica das proposições[47]. A análise serve justamente a explicitar a complexidade da situação representada nos próprios sinais proposicionais, reduzindo suas ligações sintáticas ao restante do sistema àquelas essenciais à constituição de seu sentido. Esse tipo de análise permite ainda evitar a necessidade de considerar a existência de *entes intermediários* entre sinais e mundo no esclarecimento da natureza da linguagem. Tais entidades são certamente demandadas na concepção de Frege, mas não na de Russell e Wittgenstein, como observa Hylton[48]. Além disso, o caso permite também evitar o possível equívoco de se considerar, na filosofia de Wittgenstein, sistemas simbólicos atuando como intermediários dessa espécie entre sistemas de sinais e os objetos no mundo. Entes intermediários na projeção de sinais são introduzidos por Frege, na leitura de Hylton, exatamente por uma diferença entre a complexidade dos sinais utilizados e a da situação representada; de maneira que a estrutura projetiva entre eles deve assumir parte dessa complexidade de modo a se estabelecer um isomorfismo. Recursos como esses, no entanto, poderiam ser evitados por meio de uma análise - como a realizada nos exemplos de (i) a (v), acima - que apresente nos próprios sinais proposicionais a multiplicidade exata de sua posição no sistema simbólico. A seguir será feita a discussão a esse respeito, a qual permitirá ainda

[47] Sejam eles recursos estéticos, convencionados em determinadas culturas, etc.: “A linguagem é um traje que disfarça o pensamento... isso porque a forma exterior do traje foi constituída segundo fins inteiramente diferentes de tornar reconhecível a forma do corpo.” (*T4.002*). Outro exemplo de recurso arbitrário é no estabelecimento de descrições definidas de maneira a ‘resumir a informação’ expressa nos sinais proposicionais, ao mesmo tempo em que isso aumenta a complexidade sintática desses mesmos sinais dando ensejo às confusões que originam contrassensos.
[48] Functions and Propositional Functions in Principia Mathematica (Hylton, 2008).

relacionar a noção de *operação* no *Tractatus* com as noções de *função* e *função proposicional*, respectivamente, em Frege e Russell.

1.1.1 A Linguagem em Dois Estágios: Operações, Funções e Funções Proposicionais

Em *Sobre o Sentido e a Referência*, Frege enumera algumas motivações para distinguir o conteúdo semântico das expressões lingüísticas em sentido e referência. Entre elas: a) a não trivialidade de identidades como *a=b*; b) o conteúdo empírico de 'a Estrela da Manhã é a Estrela da tarde'; c) a possibilidade de compreendermos proposições com nomes sem referentes e d) a possibilidade de se estabelecer discursos indiretos. Nesse contexto, o sentido ou *intensão* de uma expressão lingüística é introduzido como sendo o 'modo de apresentação' de sua referência, e deve ter um caráter objetivo, sem o qual seria inviável a própria comunicação entre os falantes[49].

[49] Em *a=b*, temos que nomes próprios devem ter sentido, ou intensão, do contrário essa identidade não teria conteúdo informativo e seria trivial como *a=a* (a). Já proposições envolvendo descrições definidas como "a Estrela da Manhã é a Estrela da tarde" não poderiam conter informação empírica, dada a identidade de suas extensões, e seriam meramente analíticas caso não possuíssem um conteúdo intensional (b). Acerca de proposições com nomes sem referentes, somente poderíamos entender seu sentido devido a esses nomes, ainda que não tenham referentes, terem um sentido atribuído, levando em conta que o sentido de uma proposição é dado pela composição do sentido de suas partes (c). O uso de intensões poderia ainda explicar o discurso indireto pelos interlocutores terem conhecimento imediato das intensões de suas expressões, mas não das extensões correspondentes, de maneira à verdade da proposição "A crê que *p*" não depender da verdade de *p* ("A referência indireta de uma palavra é assim o seu sentido usual.", Frege, 2011, p.24) (d). Por fim, acerca de como a concepção de um sentido atribuído às expressões viabilizaria a própria possibilidade de comunicação, temos que "até em um mesmo homem, nem sempre a mesma representação está associada a um mesmo sentido... a representação de um homem não é a mesma de outro. Disso resulta uma variedade de diferentes representações associadas ao mesmo sentido. A representação, por tal razão, difere essencialmente do sentido de um sinal, o qual pode ser uma propriedade comum a muitos, e, portanto, não é uma parte ou modo de uma mente individual; pois dificilmente se poderá negar que a humanidade possui um tesouro comum de pensamentos, que é transmitido de uma geração para a outra" (Frege, 2011, p.24-25). Deve-se observar que aqui o análogo à 'representação' em Frege seriam *sinais*, no *Tractatus*.

Essa é a concepção que Hylton chama de análise da linguagem em *três estágios* – sinais, sentido e referência – em oposição à abordagem de Russell, em *dois estágios*, na qual os sinais remetem diretamente a seu conteúdo, sem intermediários. Essa última abordagem será adotada no presente texto e interpretada no que segue. Por conta da concepção em dois estágios, Russell deve se valer de *funções proposicionais* em oposição a *funções matemáticas* propriamente ditas, em contraste com Frege – e é exatamente o uso de funções matemáticas o que demanda de Frege seu comprometimento com uma análise em três estágios[50]. Exemplo claro disso é dado por expressões denotativas complexas, como 'o centro de gravidade do Sistema Solar', 'o professor de Alexandre o Grande' ou 'a raiz positiva de nove'[51]. Todos esses casos têm a forma de funções matemáticas: se *s(x)* é a função sucessor, poderíamos tomar *s(17)* como "uma expressão denotativa complexa para o número 18", ou ainda, se *f(x)* "mapeia cada pessoa a seu pai, então *'f(Alexandre)'* é uma expressão denotativa complexa que se refere a Filipe da Macedônia". O caso em funções como essas é que seu *resultado*, a extensão que denotamos por meio dessas expressões, não apresenta em si a complexidade da expressão que utilizamos para indicá-lo[52]. Nas palavras de Russell, "'o centro de massa do sistema solar no início do século XX' é altamente complexa em *significado*, mas sua *denotação* é um ponto determinado, que é simples. O sistema solar,

---

[50] "O grande resultado obtido por Frege não foi simplesmente logicizar a matemática, mas matematizar a lógica. Ele faz isso, acima de tudo, ao importar para a lógica uma versão estendida e clarificada da noção matemática de função. É a lógica construída com base nessa noção que será utilizada para logicizar a aritmética." (Hylton, 2008, p.137).

[51] Todos os exemplos que seguem são os utilizados no artigo de Hylton, exceto a citação direta de Russell.

[52] O resultado da aplicação de funções descritivas ou funções matemáticas não preserva a 'informação' acerca da estrutura da base sobre a qual ela foi aplicada, nem a da função que aplicamos sobre essa base, como se vê no caso de "Filipe da Macedônia" ser o resultado da aplicação da função 'pai de' sobre a base "Alexandre": o objeto "Filipe da Macedônia" não tem, obviamente, qualquer indicação da função utilizada em sua obtenção, nem da base sobre a qual aplicamos tal função. Da mesma maneira, o número *18* não guarda qualquer indicação de ter sido gerado a partir da base *17*, em *s(17)=18*.

o século XX, etc., são constituintes do *significado*, porém a *denotação* não possui de modo algum constituintes”[53]. Em outras palavras, há claramente um conteúdo semântico nos constituintes dessa expressão denotativa, como ‘sistema solar’, ‘século XX’, etc., mas eles não participam do objeto assim denotado, por ele ser um ponto simples.

Isso resulta em um problema para a análise em dois estágios, por não haver como resolver a diferença de multiplicidade entre expressão denotativa e objeto denotado, mas que se poderia solucionar em três estágios, ao se atribuir complexidade semântica ao sentido, ao modo de apresentação ou intensão associado ao ponto assim denotado. Com isso, o sentido atuaria como um intermediário, como um *mapeamento* da descrição à ‘posição’ *eventualmente* ocupada por algum objeto, sendo tal sentido parte do conteúdo semântico associado às expressões em uma linguagem. No entanto, a teoria das descrições de Russell permite tratar casos como esses em uma concepção em dois estágios, por nela toda complexidade necessária se encontrar no próprio sistema de sinais: a teoria permite reescrever proposições envolvendo descrições definidas, as quais têm topologia similar à de *funções matemáticas*, como *funções proposicionais*, as quais apresentam, nos próprios sinais de seu resultado, toda a complexidade da situação representada. Assim, ao contrário do que ocorre em funções matemáticas, o *resultado* da aplicação de uma função proposicional apresenta expressos em seu sinal tanto a *base* quanto a *função* aplicada a essa base. Dessa maneira, toda informação se preserva no sinal resultante, de modo a não serem necessários supostos entes intermediários que ‘compensem’ uma complexidade que eventualmente se expresse nos sinais, mas não na

[53] Da Denotação (Russell, 1978), itálicos no original. Para manter a coerência com a tradução de *Sobre o Sentido e a Referência* talvez se possa substituir ‘significado’ por ‘sentido’ e ‘denotação’ por ‘referência’ nessa passagem.

situação representada; e vice-versa. Por exemplo, a forma aparente em que se apresenta uma proposição envolvendo uma descrição como “o F é G” se analisa, com auxílio da quantificação, em $(\exists x)[Fx \& (\forall y)(Fy \equiv y = x) \& Gx)]$. Caso não exista nenhum objeto que atenda a essas condições, nem por isso é necessário supor a existência de um ‘sentido’ platônico que corresponda à expressão lingüística “o F” para garantir que essa seja uma proposição significativa. No lugar de algo do tipo, temos que $[Fx \& (\forall y)(Fy \equiv y = x) \& Gx)]$ é simplesmente falsa para todo *x*. Em outro exemplo, “A função proposicional ‘ $\hat{x}$ é sábio’ aplicada a Sócrates resulta na proposição ‘Sócrates é sábio’, a qual contém Sócrates”, assim como contém ainda a função proposicional da qual essa proposição resulta: ‘ $\hat{x}$ é sábio’ (Hylton, 2008, p.132). Dessa maneira, a complexidade da expressão denotativa se desloca para o próprio sinal da proposição analisada: a projeção se dá de forma bijetiva, por meio de uma correspondência um para um entre linguagem e mundo, de modo que nenhuma complexidade adicional é demandada na estrutura de projeção desses sinais[54].

Wittgenstein certamente assume a abordagem de Russell, de maneira ao que no *Tractatus* se entende por sistema simbólico não pode ser tomado como um intermediário entre sinais e fatos no mundo. Em uma linguagem completamente analisada, teríamos o isomorfismo explícito na própria apresentação dos sinais, sem necessidade de entes abstratos a justificar essa complexidade por meio de uma estrutura de projeção intermediária. Já no caso de proposições *não analisadas*, são as próprias

[54] Assim, ainda segundo Hylton, “proposições e funções proposicionais contém elas mesmas as características ‘intensionais’ usualmente associadas a entidades intermediárias”, cuja principal motivação seria a de “refletir a complexidade e a estrutura de expressões referentes complexas” (Hylton, 2008, p.133 e 134). Aqui, Hylton se vale de aspas em ‘intensionais’ por naturalmente não fazer sentido atribuir intensionalidade à abordagem de Russell. Dessa maneira, devido ao fato de funções descritivas se analisarem em termos de funções proposicionais, Russell pode por fim adotar uma concepção da linguagem em dois estágios.

relações entre as condições verdade das proposições o que lhes confere a sua multiplicidade, as interligando em um sistema simbólico. Dessa maneira, a complexidade necessária se apresenta nas relações semânticas que configuram o sistema de símbolos - e não em uma estrutura intermediária na projeção do sinal não analisado. Tais relações simbólicas entre condições verdade são expressas sintaticamente por meio de conectivos lógicos (já subentendidos na sintaxe da linguagem natural), os quais permitem, assim, apresentar as relações internas entre as proposições nos próprios sinais proposicionais[55]. Visto serem as relações entre as condições de verdade das proposições o que nos permite dispensar o apelo a intensões - posto a análise de proposições envolvendo descrições definidas se basear nas relações entre as condições de verdade das proposições - operações lógicas substituem no *Tractatus* o papel usualmente atribuído a intensões no sistema de Frege. De fato, como observa Hylton, em outro artigo[56], existe certa semelhança entre operações e funções matemáticas no *Tractatus*. Assim como ocorre no caso dessas últimas, cujo resultado não necessariamente exibe a base e a função aplicada em sua obtenção (em contraste, portanto, com funções proposicionais), operações podem *desaparecer*, como se vê em *~~p=p*. Além disso, operações podem se aplicar sobre seu próprio resultado, como na reiteração de uma operação lógica em *~~p*, por exemplo, assim como na reiteração da função sucessor, em *s(s(17))*. Em contraste, uma função proposicional não pode ter seu próprio resultado por argumento: a seguir a definição de funções proposicionais, cujo resultado se constitui tanto da base de aplicação quanto da função aplicada, vê-se claramente que *F(fx)* é um

[55] "5.21 Podemos *realçar* essas relações internas em nossa notação representando uma proposição como o resultado de uma operação que a gera a partir de outras proposições (as bases da operação)". (itálico meu).
[56] Functions, Operations, and Sense in Wittgenstein's Tractatus, (Hylton, 2008 p.147).

resultado distinto de *F(F(fx))*, não havendo assim como funções proposicionais se aplicarem a si mesmas (seguindo o exemplo apresentado por Wittgenstein em *T3.333*)[57].

No entanto, apesar de tais semelhanças entre operações e funções matemáticas no *Tractatus*, as primeiras não podem ser tomadas como funções, ou pelo menos não na acepção fregeana, por não terem *sentido*. Nas palavras de Hylton, em Frege "o sentido da dupla negação de uma sentença é distinto do sentido da sentença em si, porque a primeira contém, ao passo que a segunda não, o sentido do símbolo de negação" (Hylton, 2008, p.148). Com isso, *p* e *~~p* têm sentidos ou modos de apresentação distintos, em decorrência de haver a contribuição do sinal '~' em ~~*p*, mas não em *p*; ao passo que para Wittgenstein essas devem ser exatamente a *mesma proposição*, simplesmente por não haver sentido atribuído a operações lógicas em sua concepção de linguagem: *p* e *~~p* têm as mesmas condições de verdade e por isso ocupam a mesma posição no sistema simbólico, ainda que sejam sinais distintos. Nesse caso, a possibilidade de diferentes sinais na apresentação de uma mesma proposição se mostrará essencial à sintaxe dos contectivos, como se verá no item 1.2. Tal sintaxe é introduzida por pontos de anulação na aplicação de operações, os quais viabilizam as

[57] Em *T3.333*, temos que "uma função não pode ser seu próprio argumento", onde, segundo a interpretação de Hylton no referido artigo, devemos entender 'função' como sendo uma 'função proposicional'. No entanto, em *T5* Wittgenstein afirma que "A proposição elementar é uma função de verdade de si mesma". Isso implica em devermos distinguir *funções verdade*, em *T5*, de *funções proposicionais*, em *T3.333*, visto funções verdade poderem ter a si como argumento, ao passo que funções proposicionais, não. Uma função verdade é uma proposição dada como resultado da aplicação de uma operação lógica (ou seja, uma operação verdade) sobre condições de verdade. Já uma função proposicional tem por resultado igualmente uma proposição, mas que não se aplica sobre condições de verdade, como se vê no caso de *fx*, que de maneira alguma poderia ter proposições em sua posição de argumento *x*. Pode-se então dizer que uma função verdade, resultado da aplicação de uma operação lógica, é uma proposição cujas condições de verdade (ou *sentido*, na acepção wittgensteiniana) resultam de uma composição a partir das *condições de verdade* de outras proposições, ao passo que uma função proposicional realiza uma *composição de sinais*. Já funções matemáticas, por sua vez, não necessariamente resultam em uma *composição* de sinais, e sim em sua *transformação*. Será defendido, (seção 2.4, subitem b, p.114), que operações - em um sentido amplo, e não apenas restritas a operações lógicas - atuam exatamente como funções matemáticas.

recursões que determinam essa sintaxe. As diferentes expressões de uma mesma proposição apresentam com isso distintos *aspectos* de sua forma lógica, as diferentes *posições relativas* ocupadas por essa proposição no sistema simbólico como um todo. Dessa maneira, o sentido ou modo de apresentação fregeano se substitui no *Tractatus* pelas propriedades internas dos termos, por suas regras de sintaxe - de modo a podermos dispensar intermediários entre esses termos e o mundo por toda complexidade necessária se apresentar nas próprias regras do sistema de sinais[58].

[58] Ao dispensar tais entidades intermediárias, evitam-se possíveis aberturas a interpretações metalógicas e platônicas dadas pela possibilidade de se tomar essas entidades como objetos ou fatos abstratos a relacionar linguagem e mundo, como se essas fossem relações externas. Para Wittgenstein, tudo o que é necessário nesse caso se encontra no plano da sintaxe, na topologia do sistema de sinais, e se apresenta *in concreto* nesses sinais mesmos, em suas *relações internas* (tanto sinais proposicionais quanto as situações que eles representam verdadeira ou falsamente são igualmente *fatos* e, uma vez que não se demandam intermediários, tudo se passa sem apelo a entes abstratos). Assim, os casos levantados por Frege na justificativa para a distinção entre sentido e referência (vide nota 49) podem se explicar como segue, em uma interpretação baseada em relações internas, sintáticas entre sinais: (a) Que *a* e *b* são um mesmo nome, é algo que se mostra por seu uso, mas que igualmente poderia ser dado pela *definição a=b*, a relacionar *internamente* esses dois sinais - e em uma ideografia, naturalmente, pelo simples uso de nomes distintos para objetos distintos, tais definições seriam dispensáveis. (b) Que "a estrela da manhã é a estrela da tarde" é uma afirmação empírica é algo que decorre de 'estrela da manhã' e 'estrela da tarde' serem descrições definidas distintas - e o fato de elas se referirem a um mesmo objeto é, portanto, contingente. (c) O caso de nomes sem referentes é igualmente excluído pela teoria das descrições. A análise desses nomes de complexos decorre das relações entre as condições de verdade das proposições em que essas descrições ocorrem, de suas relações internas, portanto. Ao final de sua análise, restam apenas nomes simples indecomponíveis, os quais necessariamente têm referentes. (d) Por fim, no discurso indireto, a questão acerca de "*A* crê que *p*" se reduz à questão acerca de como se estrutura a forma "'*p'* diz *p*", em que temos uma *relação interna* entre objetos: "não se trata aqui de uma coordenação de um fato e um objeto, mas da coordenação de fatos por meio da coordenação de seus objetos" (*T5.542*). Os objetos relacionados internamente nesse caso são os nomes no sinal proposicional *'p'* e os objetos na situação representada por *p*, ao passo que os fatos relacionados são, de um lado, o sinal proposicional '*p*' (um sinal proposicional é um fato; nesse caso, digamos, na mente de *A*) e, de outro, a situação representada, a qual pode corresponder ou não ao que *p* diz. "*A* crê que *p*" é assim uma proposição bipolar por dizer respeito à ocorrência ou não do sinal proposicional '*p*' na mente de *A*, uma vez já dadas as relações internas entre os nomes em '*p*' e os objetos que *p* representa, resultando na projeção de '*p*' como uma proposição. Caso o sinal proposicional '*p*' não ocorra na mente de *A*, naturalmente, é falso que "*A* crê que *p*". Com isso, não temos uma relação entre um objeto *A*, a pessoa que crê, e um fato, dado pelo sinal '*p*', mas uma relação interna (relação representativa) entre o fato dado pelo sinal proposicional 'p' e o fato representado pela proposição *p*. Deve-se observar ainda que "'*p'* diz *p*" é uma *regra da sintaxe lógica*, talvez expressa de maneira mais perspícua por meio de uma tabela verdade, ao passo que "*A* crê que *p*" é uma *proposição bipolar*, verdadeira caso o *fato* do sinal proposicional *'p'* se dê na mente de *A*, uma vez dadas as *relações internas*, representativas, entre os nomes em *'p'* e os objetos em *p*.

Apesar dessas ressalvas em relação à noção fregeana de função, operações no *Tractatus* aparentam de fato ser bastante próximas à noção de funções matemáticas em sua acepção usual. No item 2.4, Capítulo 2, será defendido que tais operações não se resumem a operações lógicas, tratando-se antes de *transformações de sinais em geral*, o que as torna ainda mais similares ao que usualmente se entende por funções matemáticas. Números seriam com isso expoentes na reiteração de funções de sinais *quaisquer*, de modo a serem associados a *recursões* em seu aspecto mais geral[59]. De qualquer maneira, a possibilidade de se apresentar a estrutura interna das proposições em seu próprio sinal baseia-se nas relações entre as condições verdade da proposição em análise com as condições das demais no sistema simbólico. Essas relações se expressam sintaticamente por meio de operações lógicas, de onde a sintaxe dessas últimas deve ser parte da sintaxe lógica. Na seção a seguir, será mostrado como a sintaxe dos operadores pode ser obtida por meio de tautologias e contradições de modo a refletir a multiplicidade do espaço lógico. Dessa maneira, tautologias vêm a viabilizar a análise - e com ela uma concepção em dois estágios da linguagem - ao tornar explícita, nos próprios sinais, toda a complexidade da situação representada.

[59] De onde se pode dizer que a lógica opera com *símbolos*, enquanto a matemática opera com *sinais*. Nesse caso, funções como '*f(Alexandre)= Filipe da Macedônia*' ou '*s(17)=18*' devem ser entendidas como transformações de sinais, e não remetendo ao significado dos termos assim substituídos.

1.2 Da Sintaxe das Operações Lógicas

As seguintes passagens permitem uma introdução incial da questão acerca de como é possível obter a sintaxe das operações lógicas - e porque ela figura como parte da sintaxe lógica como uma das condições mínimas para a representação em um sistema de sinais:

> 5.2 As estruturas das proposições mantêm entre si relações internas.
>
> 5.21 Podemos realçar essas relações internas em nossa notação representando uma proposição como o resultado de uma operação que a gera a partir de outras proposições (as bases da operação).
>
> 5.23 A operação é o que deve acontecer com uma proposição para que dela se faça outra.
>
> 5.233 A operação só pode intervir onde uma proposição resulta de uma outra de maneira logicamente significativa. Portanto, ali onde começa a construção lógica da proposição.
>
> 5.241 A operação não assinala uma forma, mas apenas a diferença de formas.
>
> 5.253 Uma operação pode anular o efeito de outra. Operações podem cancelar-se mutuamente.
>
> 5.254 A operação pode desaparecer (p.ex., a negação em "~~*p*"; ~~*p*=*p*).

A sintaxe dos conectivos se estabelece a partir da possibilidade de operações se *anularem* mutuamente; o que se expressa por meio de regras de substituição de sinais, como p=~~p, por exemplo (*T5.254*). Visto conectivos refletirem posições relativas entre proposições, aplicar uma seqüência de operações equivale a 'percorrer' o espaço simbólico e eventualmente retornar a um mesmo ponto. Esses 'pontos de anulação' se apresentam em um sistema de símbolos como tautologias e contradições, sinais proposicionais que não se projetam aos fatos, mas antes refletem as relações entre as proposições no estabelecimento de um sistema. A tautologia $p \equiv \sim\sim p$, por exemplo, indica p e ~~p serem um mesmo símbolo, de onde a regra de substituição $p = \sim\sim p$ ser o correspondente sintático, no sistema de sinais, dessa equivalência lógica. Essa correspondência entre tautologias e regras da sintaxe das operações lógicas permitirá tornar explícito o isomorfismo entre sistema de sinais e simbólico em uma linguagem analisada; e mostrar como é possível derivar a sintaxe das operações a partir da forma como se articula um sistema simbólico de representação.

O que determina o sentido de uma proposição são suas condições de verdade, as quais indicam sua posição no espaço simbólico. Ao aplicar à proposição uma operação, obtemos dela outra proposição, outra projeção com outras condições de verdade e outro sentido, de onde se dizer que "a operação é o que deve acontecer com uma proposição para que dela se faça outra" (*T5.23*). Além disso, temos que "a operação só pode intervir onde uma proposição resulta de uma outra de maneira logicamente significativa. Portanto, ali onde começa a constituição lógica da proposição" (*T5.233*). Nessa última passagem, o 'começo' da 'constituição lógica da proposição' se dá a partir de suas *ligações em um sistema*[60] - e é esse sistema de símbolos que a sintaxe das operações lógicas nos permite *ordenar* sintaticamente. Com isso, proposições, ou funções verdade, marcam *posições* em um sistema simbólico, enquanto operações apenas indicam, ao *ordenar sintaticamente* essas condições de verdade em um sistema de sinais, *posições relativas* entre proposições. Exatamente por tratarem meras posições relativas se justificará a possibilidade de operações se anularem em certas seqüências de aplicação, viabilizando com isso o estabelecimento das regras de sintaxe das operações lógicas.

---

[60] Tanto se vê que é a interligação em sistema o que confere significado à proposição pela "construção lógica da proposição" apenas começar onde "uma proposição resulta de outra de maneira logicamente significativa" (*T5.233*). As *relações internas* entre proposições, mencionadas em *T5.2* e *T5.21*, refletem propriamente tais ligações em sistema.

Em *T5.241*, por exemplo, temos que "A operação não assinala uma forma, mas apenas a *diferença* de formas" (itálico meu). Com isso, ela não assinala uma *posição*, mas uma *posição relativa*. A forma lógica de uma proposição é dada com sua posição no sistema simbólico, ou seja, por suas condições de verdade, de maneira que, na passagem de uma proposição a outra por meio de uma operação, a diferença de formas que caracteriza essa operação se dá em haver diferentes condições de verdade entre sua base e seu resultado. Por sempre existir uma diferença entre as condições de verdade da base e do resultado de uma operação, ao aplicar uma seqüência adequada de operações *teremos eventualmente percorrido todas as combinações de valores verdade nesse espaço simbólico* – ou, pelo menos, todas as possíveis condições verdade que podemos discernir por meio do uso dessa operação – de maneira a retornarmos à posição inicial da qual partimos no sistema de símbolos, obtendo então uma seqüência de operações que se anula completamente. Assim, seqüências que se anulam na aplicação de uma operação permitem estabelecer as regras de substituição que determinam a sintaxe dessa operação, em acordo com a estrutura do sistema simbólico. A seguinte explanação gráfica deverá deixar mais claro o ponto em questão.

Podemos representar todas as possíveis cominações de valores verdade de duas proposições *p* e *q* por meio do seguinte quadro[61].

FF	FV
VF	VV

Tabela1

[61] Todos os exemplos na argumentação a seguir se referem a tabelas verdade e, portanto, a um cálculo proposicional. No entanto, dado o uso proposto para o operador *N* por Wittgenstein, o caso deve estendido ao cálculo de predicados (ver item 2.2). Para tanto, devem ser consideradas ainda a existência outras séries formais que não apenas as geradas por *N*; ver seção 2.4, subitem b, p.114.

Esse é a *estrutura do espaço lógico* a ser representado, ou ainda, o *espaço de possibilidades*[62]. Já aquilo que se pretende por *espaço lógico*, propriamente, é esclarecido nas seguintes passagens:

> 2.013 Cada coisa está como que num espaço de possíveis estados de coisas. Esse espaço, posso concebê-lo vazio, mas não a coisa sem o espaço.
>
> 3.4 A proposição determina um lugar no espaço lógico. A existência desse lugar lógico é assegurada tão somente pela existência das partes constituintes, pela existência da proposição com sentido.
>
> 3.41 O sinal proposicional e as coordenadas lógicas: isso é o lugar lógico.
>
> 3.42 Embora a proposição possa determinar apenas um lugar do espaço lógico, por meio dela já deve ser dado todo o espaço lógico. (Caso contrário, por meio da negação, da soma lógica, do produto lógico, etc. seriam introduzidos – em coordenação – sempre novos elementos.) (A armação lógica à volta da figuração determina o espaço lógico. A proposição alcança todo o espaço lógico.)

Conforme *T2.013*, um *espaço de possibilidades* é dado pelas possíveis ligações entre os objetos a serem representados, de maneira à Tabela 1 apresentar todos os possíveis estados de coisas do espaço de possibilidades em questão[63]. O espaço de possibilidades

[62] Espaço de possíveis ligações entre objetos.

[63] Naturalmente, apenas existe *o* espaço lógico: supor 'outros' espaços seria aceitar a possibilidade de diversos *domínios* que servissem como *interpretação* para esse sistema formal *em particular*; ao passo que algo do tipo faria a lógica depender de questões empíricas acerca de como o mundo é, tornando-a contingente. Da mesma maneira, o *número* de objetos no mundo não pode entrar em questão, assim como quais ligações são possíveis ou não entre objetos. Com isso, outros *mundos possíveis* apenas podem ser entendidos como outros possívies arranjos dos *mesmos* objetos, e não como envolvendo *outros* objetos, em um resultado que decorre diretamente da rejeição da metalógica na filosofia da linguagem de Wittgenstein. Assim, a Tabela 1 apenas pode ser entendida como parte da estrutura *do* espaço lógico, e não de *um* espaço lógico. No contexto dessa tabela, no entanto, devem existir pelo menos quatro objetos no mundo (ou então dois objetos com duas possíveis ligações distintas entre si, o que originaria as duas possíveis ligações logicamente independentes representadas por *p* e por *q*, de onde as quatro possíveis combinações dessas ligações na Tabela 1). Algo do tipo mais uma vez remete a uma dependência da necessidade lógica para com *interpretações* adequadas de sistemas formais *particulares* – e a depender de quantos objetos existem no mundo, nossa notação deve ficar restrita a certo número de proposições elementares. Isso cria sérias dificuldades para o *Tractatus* no que diz respeito ao caráter *a priori* da lógica pura, visto que não poderíamos lidar com o número de objetos no mundo por meio de variáveis, uma vez que variáveis distintas devem ser instanciadas por objetos distintos (*T5.53*, *T5.532*), demandando, portanto, tantas variáveis quantos objetos para que a suposta notação não seja um conjunto de contrassensos. A lógica pura não deveria ter restrições desse tipo para seu desenvolvimento.

(ou *estrutura do espaço lógico*) é a *estrutura* na qual se baseia o *espaço lógico* ou *sistema simbólico*, o qual, por sua vez, é dado por todas as proposições que se podem estabelecer a partir desse espaço de possibilidades. Assim, o espaço lógico é composto de todos os *conjuntos* de possíveis ligações entre objetos no espaço de possibilidades, de onde em *T3.4* termos que uma proposição indica um *lugar* ou *posição* no espaço lógico. Uma proposição é verdadeira se o lugar que ela aponta no espaço é o que de fato se dá, ou seja, se uma dentre as possíveis ligações entre objetos indicada por ela de fato ocorre, e falsa do contrário. Assim, na Tabela 1 a proposição *p* indica as posições *p*V*q*F e *p*V*q*V (*p* aponta os possíveis estados de coisas ou fatos que a verificam, dados por VF e VV na tabela), enquanto a proposição *q*, as posições *p*F*q*V e *p*V*q*V (FV e VV na tabela). Já uma tautologia, como *pv~p*, aponta todas as posições na Tabela 1, enquanto uma contradição, como *p.~p*, nenhuma. Uma proposição com sentido é, portanto, a delimitação de um subconjunto dentre todas as possíveis combinações de objetos no mundo, ao passo que tautologias e contradições não realizam qualquer delimitação entre essas possibilidades dos objetos, não representam nenhum fato - antes refletindo a própria *estrutura do espaço lógico,* o qual viabiliza essas possibilidades mesmas, do que posições particulares nele. Isso será esclarecido no que segue.

O número de possíveis combinações de objetos na estrutura do espaço lógico, no espaço de poossibilidades, dado pela Tabela 1, é apresentada em *T4.27* por $K_n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v}$, o somatório das possíveis combinações simples, sem repetições, dos possíveis valores verdade de *p* e *q*. Aqui, *n* deve ser entendido como o número de proposições elementares do sistema, no caso, *n=2*, enquanto *v* variando de 0 a *n* deve ser entendido como indicando quantas, dentre essas proposições elementares, tomamos por verdadeiras, até que se complete todas as possíveis combinações desses valores. No exemplo em questão, K_n=4, visto, nesse caso, termos:

$K_n=\Sigma(n!/(v!(n-r)!))$=(2!/(0!(2-0)!))+(2!/(1!(2-1)!))+(2!/(2!(2-2)!))=2/2+2/1+2/2=4.

A estrutura do espaço lógico dado pela Tabela 1 se desdobra em um *sistema simbólico* ou *espaço lógico*, representado pela Tabela 2, a seguir, na qual se apresenta o conjunto de *todas as proposições*, ou seja, o conjunto de todos os conjuntos de possíveis combinações de valores verdade das proposições *p* e *q*[64]. Assim, as diversas proposições moleculares que poderíamos formular com base nesse espaço de possibilidades são dadas em *T4.42* por $\sum_{K=0}^{K_n} (K_{n \atop k}) = L_n$. Nesse caso, temos o somatório das possíveis combinações, sem repetições, das combinações dos possíveis valores verdade de *p* e *q*. No exemplo, L_n=16, visto:

$L_n =\Sigma(K_n!/(k!(K_n -k)!))$=(4!/(0!(4-0)!)+ (4!/(1!(4-1)!)+ (4!/(2!(4-2)!)+ (4!/(3!(4-3)!)+ (4!/(4!(4-4)!) = 4!/4!+4!/3!+4!/ (2!.2!)+4!/3!+4!/4!=1+4+6+4+1=16.

Esse é o número de tabelas verdade, ou de proposições moleculares, que podemos formular com base em um espaço de possibilidades dado por duas proposições elementares *p* e *q*. Essas 16 proposições podem ser apresentadas por meio da seguinte tabela:

[64] Combinações de possíveis *valores verdade*, e não possíveis *combinações de objetos*, visto que tautologias e contradições, ainda que façam parte do sistema simbólico, não correspondem a nenhuma ligação particular entre objetos, a nenhuma possibilidade dos fatos. As possibilidades simbólicas são apresentadas por Wittgenstein em *T5.101*: "As funções de verdade de um número qualquer de proposições elementares podem ser inscritas num esquema da seguinte espécie: (VVVV)(*p*,*q*) Tautologia... (FVVV)(*p*,*q*) em palavras: Não ambos *p* e *q*. *(~(p.q))*; (VFVV)(*p*,*q*) " " Se q, então *p.(qɔp)*... (FFFF)(*p*,*q*) Contradição...".

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Tabela 2

A Tabela 2 é um *sistema simbólico* ou *espaço lógico*, onde cada posição corresponde a uma proposição molecular[65], a uma das possíveis projeções de um sinal proposicional às combinações de valores verdade de *p* e *q* na estrutura do espaço lógico, na Tabela1. Na verdade, o sistema simbólico em questão nada mais é que um desdobramento da estrutura do espaço lógico, visto a *possibilidade* mesma das delimitações realizadas pelas proposições na Tabela 2 ser dada juntamente com o espaço de possibilidades da Tabela 1, algo que mais uma vez realça o caráter *sistêmico* da linguagem: uma proposição é dada juntamente com um sistema de proposições que permita a descrição completa da estrutura do espaço lógico em questão[66]. Assim, de *T3.42* temos que "por meio da negação, da soma lógica, do produto lógico, etc." não introduzimos novos

[65] Na qual podemos tomar as proposições moleculares 1, 2, etc. (onde 1, 2,... são as posições na tabela), como tendo as seguintes condições de verdade: 1 = pFqF, pFqV, pVqF, pVqV; 2 = pVqV, pVqF; 3 = pVqV, pFqV ; 4 = pVqV; 5=... ; 16 = ϕ (vazio). Nesse caso, as posições 1 e 16 seriam uma tautologia e uma contradição, respectivamente; a posição 2 equivalente à proposição *p*; a posição 3 equivalente à proposição *q*; a posição 4 equivalente a *p.q*, etc.

[66] Seria apropriado considerar o espaço lógico ou sistema simbólico como dado pelas possíveis ligações entre objetos (ou seja, pelo espaço de possibilidades, na Tabela 1) *juntamente* com as proposições que as representam. Isso faz o espaço lógico corresponder à Tabela 2, ao passo que a Tabela 1 à *estrutura* desse espaço, a qual *primeiramente* viabilizaria as possibilidades da Tabela 2. No entanto, de *T3.4* temos que "A proposição determina um lugar no espaço lógico. A existência desse lugar lógico é assegurada tão somente pela existência das partes constituintes, pela existência da proposição com sentido."; ou seja, o espaço lógico é dado a partir das proposições de uma linguagem já dada, e não a partir de uma ontologia de objetos a partir da qual derivamos a linguagem. O espaço de possibilidades na Tabela 1 é a estrutura do espaço lógico no sentido de ela equivaler à estrutura subjacente às relações entre condições de verdade das proposições no espaço lógico da Tabela 2. Mas não seria possível falar em uma relação de anterioridade entre as tabelas sendo que ambas articulam um mesmo sistema – ambas são a expressão de meras possibilidades.

elementos - e que o sistema simbólico é dado juntamente com qualquer uma das proposições que o compõem.

Nesse contexto, uma projeção da Tabela 2 à Tabela 1 gera *redundâncias* entre as condições de verdade das proposições estabelecidas por meio dessa projeção. As proposições *p.q* e *pvq*, por exemplo, possuem a condição de verdade *pVqV* em comum. Com isso, ainda que a Tabela 2 possua 16 posições, o espaço de possibilidades ao qual ela se projeta, dado pela Tabela 1, possui 4 posições, de maneira a haver um maior número de possibilidades simbólicas que o de possíveis situações representadas. Tautologias e contradições, em particular, não expressam nenhuma delimitação no espaço de possibilidades, sendo antes específicas ao sistema simbólico. Essa é uma característica intrínseca a sistemas simbólicos, por necessariamente haver uma diferença de multiplicidade entre proposições moleculares e as proposições elementares de que elas se compõem: a molecular *pvq*, por exemplo, possui 2 possíveis valores verdade, ao passo que *p* e *q* possuem conjuntamente 4 possíveis combinações de valores verdade. Essa diferença de multiplicidade se resolve no sistema de símbolos pela existência de *outras* proposições moleculares que permitem discernir entre essas possibilidades elementares. Isso, no entanto, origina as redundâncias mencionadas, decorrentes da sobreposição entre as condições de verdade das proposições moleculares que se *complementam* na representação do espaço de possibilidades. Dessas redundâncias, por sua vez, resultam as relações lógicas entre as proposições, as quais se manifestam por meio de tautologias e contradições no sistema simbólico. Com isso, ainda que o espaço lógico em questão tenha 16 posições possíveis, suas sobreposições resultam em uma redução da multiplicidade do sistema de maneira adequada à representação de uma estrutura com 4 possibilidades. Assim, tautologias e contradições são possibilidades do simbolismo, mas não da situação representada, refletindo antes a organização do sistema simbólico do que possibilidades particulares na estrutura do espaço lógico: elas refletem a estrutura do próprio sistema de posições, ao invés de posições particulares nele.

Nesse caso, a sintaxe das operações lógicas deve igualmente refletir essa estrutura, para que ela tenha a multiplicidade correta na representação dos fatos. Na Tabela 2, um conectivo ou operação lógica expressa a *passagem* de uma ou mais dessas posições a outra, de maneira que uma seqüência de operações que percorra esse espaço lógico em uma linguagem analisada - ou seja, em uma notação com a multiplicidade *correta* para a representação de todas essas possibilidades - eventualmente *repete posições* ao longo do percurso, simplesmente pelo fato de que em algum momento teremos percorrido cada uma das 16 projeções possíveis (ou de um subconjunto qualquer delas que a operação em questão possa discernir). Tais pontos de anulação em uma sequência de operações determinam assim a sintaxe dessas operações, como se vê no caso da regra ou esquema de substituição p=~~p=~~~~p=..., dada por um ponto de anulação como o mencionado. Nesse caso, a cada regra de sinais como p=~~p corresponde uma tautologia, como p≡~~p, de onde a sintaxe dos conectivos ser obtida diretamente a partir da estrutura do sistema simbólico de projeção, o que a caracteriza, portanto, como parte da sintaxe lógica. Dessa maneira, temos uma correspondência entre *possibilidades mutuamente exclusivas* em um espaço de possibilidades e a sua *representação recursiva* por meio de sinais, a qual nada mais é que umas das bases para a concepção de linguagem de Wittgenstein[67].

Dessa maneira, operações *ordenam* o sistema simbólico originalmente dado pela Tabela 2, descrevendo *percursos* sobre ela[68]. Se, nessa tabela, tomarmos a posição 2 como equivalente à proposição *p*, a posição 5 correspondendo à proposição *q* e a posição 11 a *p.q*, a aplicação operação do produto lógico sobre *p* e *q* resulta na seguinte ordenação:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Tabela 3

[67] A representação em sinais de possibilidades mutuamente exclusivas demanda *necessariamente* a recursão, posto, caso utilizássemos o sinal *q* para representar a possibilidade oposta a *p*, isso mascararia que ambas se referem aos mesmos objetos, assim como a oposição entre as possibilidades representadas. Em contraste, a representação de oposições de maneira recursiva pelo uso da negação torna perspícua essas características em sinais como *p* e *~p*. A ocorrência de *p* em ambos os sinais indica que eles se referem aos mesmos objetos. Além disso, exatamente pela oposição entre possibilidades ser simétrica, temos regras de anulação entre operações como *p=~~p*, as quais originam a recursão. As observações aqui feitas podem facilmente ser estendidas, com poucas modificações, às demais operações lógicas.

[68] *Combinações simples* são dadas pela fórmula *n!/(n-r)!*, a qual fornece o número de combinações com r elementos de um total de *n*, onde *não ocorrem repetições* de elementos e *não importa a sua ordem*. Essa é a fórmula utilizada na obtenção das tabelas 1 e 2, ao se realizar o somatório dos valores obtidos com *r* variando de *0* a *n*. A *ausência de repetições* e de *ordenação* reflete o caráter *extensional* das possíveis combinações de valores verdade nas tabelas 1 e 2 (em *T4.27* e *T4.42*). Já *arranjos simples*, dados por n^r, são combinações onde repetições de elementos são possíveis e a ordem de sua ocorrência importa. Dessa maneira, arranjos simples são apropriados para enumerar quantas possíveis operações podemos definir a partir de um espaço de possibilidades dado – de modo que a possibilidade de *posições se repetirem*, assim como a sua *ordenação importar*, reflete o aspecto *intensional* das operações lógicas. Por fim, *permutações* fornecem o número possíveis ordenações de *n* elementos sem repetição, dado por *n!*. Sendo assim, o número de operações *não redundantes* que podemos definir sobre um espaço de possibilidades com *n* proposições elementares é dado por n^n – *n!*, onde subtraímos do total de possíveis ordenações, n^n, todas aquelas em que não há repetições de posições no espaço simbólico, *n!*. É preciso subtrair as ordenações sem repetição visto a sintaxe das operações ser dada a partir de pontos de anulação, ou seja, pelos pontos em que as posições percorridas se repetem (sobre as definições de combinações simples, arranjos simples e permutações, ver Meyer, 1983, p.29-38).

No desenho acima foi apresentada a aplicação da conjunção apenas a *p* e *q*, mas ela igualmente se aplica a quaisquer duas posições na tabela. Representar todas elas, no entanto, tornaria ilegível o desenho, e de qualquer maneira o leitor pode se fazer uma imagem mental dessa ordenação. Deve-se observar ainda que tal ordenação, para ter a multiplicidade adequada, deve levar em consideração as relações entre as condições de verdade das proposições, de maneira que a aplicação do produto lógico a *p* e *q* aponta a posição *p.q*, mas também a posição *pvq*, por exemplo, visto as condições de verdade de *p.q* estarem contidas entre as de *pvq*[69]. Assim, a Tabela 1 representa um *espaço de possibilidades*, a Tabela 2 um *sistema simbólico* e a Tabela 3, supondo seu desenho completo, o modo como o produto lógico *ordena sintaticamente* esse espaço simbólico em um *sistema de sinais*. Deve-se observar, no entanto, que, apesar da distinção feita em três tabelas, elas compõem um único sistema de linguagem, antes refletindo aspectos desse sistema como um todo do que entidades estanques entre si. Naturalmente, o uso apenas da conjunção não viabiliza uma notação completa na representação do sistema simbólico, visto, a se contar somente com ela, não temos *acessibilidade plena* a todos os pontos a partir de quaisquer outros pontos na tabela; e apenas com o acréscimo da negação obtemos enfim uma notação que baste à representação. Dessa maneira, o que a análise das proposições faz é gerar sinais que *ordenem* as proposições de um sistema simbólico, expressando as suas posições

[69] Em outras palavras, a Tabela 2 já possui uma ordenação em que toda proposição aponta a si mesma e a todas as que contenham suas condições de verdade. O produto lógico na Tabela 3 apenas se sobrepõe a essa ordenação prévia. Como resultado dessa sobreposição, temos que aplicações de operações que resultem em contradições preenchem todo o espaço de possibilidades, visto todas as proposições conterem, por vacuidade, as condições de verdade de uma contradição (princípio da explosão), ao passo que aquelas que resultam em uma tautologia o deixam vazio, visto nenhuma proposição conter todas as condições de verdade de uma tautologia.

relativas em uma notação onde todas as posições nesse espaço lógico possam se expressar em termos de quaisquer outras.

Existem inúmeras trajetórias capazes de percorrer completamente o mesmo espaço simbólico conferindo acesso pleno entre suas posições, de onde ser possível se propor diversos sistemas de conectivos. O produto lógico, por exemplo, pode ser apresentado por meio de *p.q*, *~(~pv~q)*, *(p|p)|(q|q)*, etc., os quais, ainda que sejam sinais distintos, são um mesmo símbolo, a mesma proposição. Algo do tipo somente é possível dado o caráter *normativo* das operações lógicas[70]. Temos assim também a possibilidade de definir conectivos uns a partir dos outros, dado o isomorfismo entre essas diversas notações na representação de um mesmo espaço de possibilidades: qualquer notação que represente, como no exemplo, as 16 possibilidades na Tabela 2, possui a multiplicidade correta na representação do espaço de possibilidades. Dentre esses sistemas, Wittgenstein propõe como mais fundamental o dado pela generalização do traço de Sheffer, simbolizada pelo operador *N*. Visto qualquer um desses sistemas ser igualmente suficiente na análise completa das proposições, a escolha de *N* se dá por sua homogeneidade de uso, em contraste com notações que se valem de mais de um conectivo, como as de Frege e Russell. Com o uso de um único conectivo obtemos uma sintaxe uniforme e, portanto, perspícua à topologia do sistema simbólico.

[70] Os sistemas de Frege e Russell, utilizando, respectivamente, a implicação e a negação e o produto e a negação, ou ainda, o sistema de Sheffer, com um único operador, têm todos eles multiplicidade suficiente para representar o espaço lógico, sendo distintas tão somente as *intensões* dos termos no estabelecimento de cada um desses sistemas. Poderíamos com isso construir uma infinidade de percursos distintos sobre a Tabela 3 (com repetições de posições), de onde haver uma abertura ao construtivismo na elaboração dessas notações. Naturalmente, a acepção de 'intensionalidade' aqui pretendida se distingue da fregeana, e não remete a qualquer tipo de objetividade material, mas sim a regras de sintaxe convencionalmente estabelecidas.

Em suma, qualquer *percurso fechado* na ordenação sintática da Tabela 3 equivale a uma seqüência de operações que se anula completamente. A sintaxe das operações é dada a partir de tais pontos de anulação em uma seqüência de aplicações, como *p=~~p*, os quais funcionam como *esquemas* a partir dos quais estabelecemos recursões, como *p=~~p=~~~~p=~~~~~~p...* – sendo essas regras *parte* da sintaxe da negação[71]. O mesmo pode ser dito acerca de outras regras da sintaxe das operações expressas por meio de identidades, como *p.q=~(~pv~q)* ou *p→q=qv~p*, por exemplo: todas elas determinam *percursos fechados* por partirem de uma mesma posição - as proposições *p* e *q* - e chegarem a uma mesma posição, indicada em ambos os lados da identidade. Cada uma dessas regras tem como correspondente tautologias como *(p.q)≡~(~pv~q)*, ou *(p→q)≡(qv~p)*, etc., de onde elas nada mais serem que o reflexo da estrutura do espaço lógico. Tais regras recursivas ordenam, assim, no sistema de sinais (Tabela 3), a apresentação de um sistema simbólico (Tabela 2), o qual, por sua vez, se estrutura de maneira refletir todas as possíveis combinações de estados de coisas em um espaço de possibilidades (Tabela 1). É essa correspondência entre o espaço de possibilidades e a sintaxe dos conectivos o que confere a esses últimos seu caráter de sintaxe lógica, necessária a qualquer sistema de sinais em uma representação do mundo. A correlação entre as três tabelas torna-se assim explícita por meio de dois pontos: *a)* A correspondência entre sistemas de sinais e simbólicos (tabelas 3 e 2, respectivamente), através da correspondência entre regras sintáticas de substituição, como *p=~~p*, e tautologias, como *p≡~~p*; e *b)* a correspondência entre sistemas simbólicos e o espaço de possibilidades representado (tabelas 2 e 1, respectivamente), em decorrência de

---

[71] A sintaxe da negação deve envolver ainda regras que a associem ao produto lógico ou à soma lógica, ou ainda, a qualquer outra operação a qual, junto à negação, configure uma notação completa. Não é possível se estabelecer apenas 'partes' de sistemas sintáticos, mas somente sistemas como um todo.

tautologias e contradições refletirem, no sistema simbólico, a estrutura do espaço lógico. No presente item o ponto *(a)* foi explanado por meio de percursos fechados na Tabela 3, ao passo que o ponto *(b)* será o tema do próximo item, que trata o papel de tautologias e contradições na estruturação da linguagem. Antes de passar a essa discussão, no entanto, três observações finais devem ser feitas acerca dos resultados aqui obtidos:

I) O próprio espaço de possibilidades, ou estrutura do espaço lógico (Tabela 1), abre a *possibilidade* de se estabelecer um sistema simbólico, ou espaço lógico, de representação (Tabela 2), juntamente com um sistema de sinais que lhe sirva de suporte (Tabela 3). Inversamente, poderíamos considerar que o espaço de possibilidades apenas é dado a partir de uma linguagem já constituída (Tabela 2), cuja notação ou sintaxe (Tabela 3) nos leva por meio da análise à estrutura do espaço lógico (espaço de possibilidades) representado (Tabela 1). Em outras palavras, espaço de possibilidades, sistema simbólico e sistema de sinais na verdade configuram *um mesmo sistema* - de maneira a não se poder estabelecer a anterioridade de um entre esses aspectos perante os demais. Por um lado, a possibilidade de se desenvolver um sistema simbólico e um sistema de sinais a partir do espaço de possibilidades caracteriza uma *propriedade interna* desse último: intrínseca e, portanto, indissociável dele. O desenvolvimento de um sistema simbólico por meio da projeção do espaço de possibilidades a um sistema de sinais seria mero desdobramento de um sistema que já é dado com a própria estrutura do espaço lógico. Isso, no entanto, não garante ao espaço de possibilidades uma anterioridade em relação a sistemas simbólicos e de sinais, visto, inversamente a essa interpretação, dado um sinal proposicional na linguagem ordinária devemos poder chegar às suas condições de verdade – um subconjunto das posições na Tabela 1 –

apenas através da sua *sintaxe*, a qual nos permite realizar uma análise das proposições que de maneira alguma poderia ser antecipada de forma *a priori*. Assim, também é possível partir dos sinais em uma notação qualquer e chegar à estrutura do espaço lógico, de modo a não se poder falar em anterioridade de um ou outro sistema. Com isso, as tabelas 1, 2 e 3 encontram-se em um mesmo plano, configuram um mesmo sistema, e não propriamente sistemas distintos correlacionados[72].

II) Operações foram apresentadas como recursos sintáticos a *ordenar* proposições e assim refletir *posições relativas* entre as suas condições de verdade em um sistema de sinais. Com isso, operações lógicas não caracterizam o sentido de uma proposição (*T4.0621*)[73], mas antes relações entre proposições. Além disso, existem inúmeras ordenações possíveis da Tabela 3, de onde nenhuma operação lógica em particular ser fundamental no estabelecimento do sentido de uma proposição (ao contrário do que ocorre com os nomes que constam em uma proposição, por exemplo). Com isso, operações lógicas apenas refletem a própria estrutura topológica do sistema - e não posições no espaço de possibilidades que pudessem vir a ser representadas por meio de proposições. Assim, operações lógicas não podem ser tomadas como *objetos platônicos* no sentido de Frege e Russell - e nem mesmo como *objetos,* visto serem características

[72] Afinal, a expressão de qualquer possibilidade demanda o uso de sinais, de maneira a não se poder sequer conceber a própria possibilidade enquanto tal a não ser por meio deles. Um exercício filosófico interessante a esse respeito é exemplificado na observação de um copo sobre uma mesa. A consideração desse fato como uma possibilidade contingente das coisas apenas pode se dar na suposição da possibilidade contrária: o copo poderia *não* estar sobre a mesa. Essa suposição, no entanto, apenas se dá na linguagem, de maneira que o próprio fato do copo sobre a mesa somente pode ser entendido como uma *possibilidade* das coisas no contexto de uma representação. Assim, não há abertura de possibilidades a não ser na pressuposição do sistema linguagem como um todo.

[73] "4.0621 É importante, porém, que os sinais "*p*" e "*~p*" *possam* dizer o mesmo. Pois isso mostra que ao sinal "~" nada corresponde na realidade. Que a negação ocorra em uma proposição não chega a ser uma característica de seu sentido (*~~p=p*). As proposições "*p*" e "*~p*" têm sentido oposto, mas a elas corresponde uma e a mesma realidade." Acerca dessa última passagem, "*p*" e "*~p*" correspondem a uma mesma realidade, mas têm sentido oposto por serem *projeções simbólicas distintas* de uma mesma realidade.

formais do próprio sistema de que nos valemos para falar acerca de objetos, propriamente.

III) Há uma possível restrição ao infinito atual no argumento apresentado nesta seção. No *Tractatus* podemos ter infinitos estados de coisas elementares[74], mas apenas um número finito de operações aplicadas[75]. Supondo-se uma pretensa operação dada por uma *composição* de *infinitas reiterações* de *N*, temos que a sua aplicação nunca chega a um *ponto de anulação*, por não haver uma última etapa que enfim conclua essa aplicação: o que torna impossível o próprio estabelecimento da *sintaxe* dessa operação. Não havendo sequer como se traçar uma sintaxe, nos encontramos diante de uma inviabilidade expressiva da linguagem e, portanto, de um contrassenso. Essa mesma linha de argumento pode ser estendida à consideração de *proposições indecidíveis* como contrassensos por Wittngenstein no *Período Intermediário*[76] e, portanto, também a questões relativas ao caráter computacional da linguagem. No Anexo A é apresentada a equivalência entre o formalismo do *Tractatus* e o de *Funções Recursivas Primitivas*, o que igualmente reforça essa interpretação.

Apesar disso, Wittgenstein aceita a hipótese de se reunir todos os termos de uma série sob um total, em um infinito atual, por meio do uso de esquemas de regras de séries em *T5.501*[77]. Fixar os valores da variável que expressa a regra de uma série com infinitos

---

[74] "4.2211 Ainda que o mundo seja infinitamente complexo, de modo que cada fato consista em uma infinidade de estados de coisas e cada estado de coisas seja composto de uma *infinidade* de objetos, mesmo assim deveria haver objetos e estados de coisas." (itálico meu).

[75] "5.32 Todas as funções verdade são resultados da aplicação sucessiva de um número *finito* de operações verdade às proposições elementares." (itálico meu).

[76] Período abarcando a produção filosófica de Wittgenstein entre 1929-1935 (Marion, 2009, p.198).

[77] "5.501 (...) Os valores da variável são fixados. A fixação é a descrição das proposições que a variável substitui (...) Podemos distinguir três espécies de descrição: (...) 3. A especificação de uma lei formal segundo a qual tais proposições sejam constituídas. Nesse caso, os termos da expressão entre parênteses são *todos* os termos de uma série formal. " (itálico meu) (ver nota 102). Essa última

termos equivaleria a indicar a totalidade desses termos sem a necessidade de listá-los um a um. Isso, no entanto, implica em incorrer de maneira sub-reptícia nas *impredicações* necessárias ao *fechamento* de uma série infinita sob uma totalidade (ver nota 161, p.154; acerca das limitações do *Tractatus* no desenvolvimento da matemática). Essa parece ser uma inconsistência interna ao *Tractatus* e, posteriormente, nas *Observações Filosóficas*, Wittgenstein viria de fato a considerar a aceitação do infinito atual como um dos equívocos cometidos por ele em seu primeiro livro.

1.3 Proposições da Lógica: Tautologias e Contradições

Abaixo são apresentados novamente os desenhos das tabelas utilizadas para apresentar as relações internas entre *espaço de possibilidades*, *sistema simbólico* e *sistema de sinais* - respectivamente, tabelas 1, 2 e 3:

FF	FV
VF	VV

Tabela1

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Tabela 2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Tabela 3

Como mencionado ao final do item anterior, as relações internas entre essas tabelas se esclarecem pelos seguintes pontos: *a)* a necessidade lógica de tautologias e contradições se apresenta nos termos de um isomorfismo entre linguagem e mundo, ou seja, pelo modo como tautologias e contradições refletem, no sistema simbólico (Tabela 2), a

---

passagem resulta na possibilidade de reunir os infinitos termos de uma série sob um *total* - o que equivale à aceitação de um *infinito atual* - ao passo que a rejeição da possibilidade mesma de *totalizar* séries infinitas resulta na aceitação de um *infinito potencial*, apenas.

estrutura do espaço lógico representado (Tabela 1); e *b)* as relações internas entre tautologias e contradições e as identidades que configuram a sintaxe das operações em seus pontos de anulação refletem o isomorfismo entre sistema simbólico e sistema de sinais, ou seja, o modo como a sintaxe das operações lógicas expressam, no sistema de sinais (Tabela 3), o sistema simbólico (Tabela 2). A partir desses dois pontos, *(a)*, acerca do isomorfismo entre espaço de possibilidades e sistema simbólico, e *(b)*, acerca do isomorfismo entre sistema de sinais e sistema simbólico, temos por resultado o isomorfismo entre sistema de sinais e espaço de possibilidades representado, o que garante a uma notação em conformidade com essa correspondência a *multiplicidade correta* na representação do mundo (*T5.475*)[78].

O ponto *(b)* foi apresentado no item anterior como resultante da correspondência entre regras sintáticas de substituição, como p=~~p, e tautologias, como p≡~~p - visto percursos fechados na Tabela 3 equivalerem a seqüências de operações lógicas que se anulam completamente. No presente item será tratado, portanto, *(a)*: como tautologias e contradições caracterizam o isomorfismo entre o *espaço de possibilidades* representado, dado pela Tabela 1, e o *sistema simbólico* de representação, na Tabela 2.

Tautologias são verdadeiras e contradições falsas independentemente do que for o caso. Sendo assim, não se projetam a nenhuma possibilidade dos fatos - tautologias são compatíveis com todas as possibilidades da estrutura do espaço lógico e contradições com nenhuma, de onde não refletirem qualquer *informação* acerca do mundo, resultando em *proposições sem sentido*. No entanto, a verdade das primeiras e a falsidade das últimas, necessariamente e independente do que ocorra, refletem as

[78] "5.475 Importa apenas constituir um sistema de sinais que tenha um determinado número de dimensões – uma determinada multiplicidade matemática."

relações internas entre os conteúdos das proposições envolvidas. Por exemplo, a verdade de tautologias como $p\rightarrow\sim\sim p$, $p\vee\sim p$, $p\leftrightarrow\sim\sim p$, etc., não descreve a ocorrência de nenhum estado de coisas, mas mostra as relações necessárias entre as proposições envolvidas em sua composição, a forma como suas condições de verdade se sobrepõem ou se complementam na representação dos possíveis estados de coisas em um sistema simbólico, estruturando-o. Isso permite esclarecer as seguintes passagens:

> 5.14 Se uma proposição se segue de outra, esta diz mais que aquela, aquela menos do que esta.
>
> 5.141 Se *p* se segue de *q* e *q* de *p*, elas são uma e a mesma proposição.
>
> 5.142 A tautologia se segue de todas as proposições: o que ela diz é nada.
>
> 5.143 A contradição é o que de comum às proposições nenhuma proposição tem em comum com uma outra. A tautologia é o que é comum a todas as proposições que nada têm em comum uma com a outra. A contradição desaparece, por assim dizer, fora, e a tautologia dentro, de todas as proposições. A contradição é o limite exterior das proposições, de que a tautologia é o centro sem substância.
>
> 5.152 Proposições que não tenham em comum nenhum argumento de verdade, chamamos de mutuamente independentes. (...)

O que determina simbolicamente uma proposição são suas condições de verdade. Assim, se *todas* as condições de verdade de uma proposição *p* são também condições verdade de uma proposição *q*, temos que *q* segue-se de *p*, em *T5.14*. Se *p* e *q* possuem as *mesmas* condições de verdade, ambas são uma mesma proposição, conforme *T5.141*. Já em *T5.142*, como uma tautologia é verdadeira para todos os possíveis estados de coisas, todas as condições de verdade de qualquer proposição são igualmente condições dela, e assim tautologias seguem-se de quaisquer proposições. Inversamente, como uma contradição não possui condições de verdade, visto nenhuma possibilidade dos fatos a satisfazer, temos que de uma contradição seguem-se a totalidade das proposições, já que 'todas' as suas condições de verdade, por vacuidade, são também condições de verdade de qualquer outra - e de onde o princípio da explosão.

Na mesma linha deve-se entender *T5.143*. Todas as proposições têm suas condições de verdade em comum com as de uma tautologia, mesmo as proposições que não têm nenhuma condição de verdade comum entre si. Dessa maneira, uma tautologia é "o que é comum a todas as proposições que nada têm em comum uma com a outra". Já uma contradição não tem nenhuma condição de verdade em comum com nenhuma proposição, visto ser incompatível com todas. Assim, na contradição, o que de "comum às proposições nenhuma proposição tem em comum com uma outra" é a *diferença* entre suas condições de verdade: duas proposições têm condições verdade distintas entre si da mesma forma que todas as proposições têm suas condições de verdade distintas das de uma contradição. O "centro sem substância" das proposições é, portanto, dado pelo conjunto de condições *comum* a todas as proposições, enquanto seu "limite exterior", pela *diferença* entre suas condições de verdade[79].

[79] Como mencionado na seção 1.2, essas relações entre os conteúdos semânticos das proposições implicam na Tabela 2 não ser 'plana', mas organizada em termos das condições verdade de proposições *contidas* ou não nas condições verdade de outras proposições - e é exatamente essa topologia que deve ser refletida pela sintaxe dos conectivos (ver nota 69). Em outras palavras, tais relações entre as condições de verdade das proposições mostram que a Tabela 2 já possui uma estrutura interna, a qual deve se refletir nos pontos de anulação resultantes da ordenação apresentada na Tabela 3. Outro ponto a se observar é que tautologias e contradições 'garantem' que o sistema simbólico não apresente mais possibilidades que as dadas no espaço lógico representado, viabilizando com isso um isomorfismo. Isso porque a Tabela 1 possui 4 possíveis combinações de estados de coisas a partir dos quais, na Tabela 2, podemos estabelecer 16 proposições moleculares. No entanto, essas proposições possuem *redundâncias* entre si no que diz respeito a suas condições de verdade, por elas se sobreporem de diversas formas na representação desse espaço de possibilidades - algo que se reflete em tautologias e contradições relacionarem internamente essas 16 proposições. Não fossem tais redundâncias, não haveria como estabelecer o mapeamento isomórfico entre as 16 possibilidades simbólicas e as 4 possíveis combinações de objetos no espaço lógico – dada a diferença numérica óbvia entre elas. Da mesma maneira, uma sintaxe é dada por regras, esquemas de substituições de sinais uns pelos outros. Algumas dessas regras de substituição, como no caso de *p=~~p* - ao estabelecerem uma *classe de*

Essas últimas observações devem permitir esclarecer como tautologias e contradições refletem, no sistema simbólico, a estrutura do espaço lógico, mostrando com isso o isomorfismo entre eles. A tautologia *pv~p*, por exemplo, abarca *todos* os possíveis valores verdade de *p* e *~p* na Tabela 1, mostrando assim o espaço *comum* a essas duas proposições. O fato de essa disjunção perpassar as possibilidades da estrutura do espaço lógico representado por *p* e *~p* reflete um aspecto específico de como esse espaço é estruturado: o *total* de suas possibilidades. Em contraste, *pv~q*, onde p e q são proposições elementares ou proposições logicamente independentes entre si, não resulta em uma tautologia, mas em uma proposição *bipolar*, visto ela não abarcar a *totalidade* das possibilidades da estrutura do espaço lógico compartilhado pelas proposições *p* e *~q*. Essa totalidade, no entanto, poderia se explicitar em tautologias como *(p.q)v(p.~q)v(~p.q)v(~p.~q)*. Assim, o caso de *pv~p* ser uma tautologia e *pv~q* não ser espelha *p* e *~p* realizarem uma partição do espaço de possibilidades diferente da realizada por *p* e *~q* . A Tabela 1, que apresenta as possíveis situações no mundo a serem representadas, é distinta em cada um desses casos, o que se reflete em quais arranjos de símbolos resultam em uma tautologia e quais não: a Tabela 1, com *quatro posições* no caso das proposições *p* e *~q*, é um espaço lógico dado pelas possibilidades *pV~qV, pV~qF, pF~qV* e *pF~qF*, ao passo que no caso das proposições *p* e *~p* a partição correspondente do espaço lógico é dada pelas possibilidades *pV~pF* e *pF~pV*, uma

equivalência entre expressões, como a dada recursivamente por meio da série *p=~~p=~~~~p=...* - servem a 'reduzir' a multiplicidade do sistema de sinais de maneira adequada a seu isomorfismo para com o espaço lógico representado, de modo similar a como as redundâncias entre as condições verdade das proposições na Tabela 2 resultam em tautologias e contradições. Exatamente por isso a regra *p=~~p*, enquanto correspondente sintático da tautologia *p≡~~p*, tem uma motivação semântica, por refletir a estrutura do espaço lógico represeentado, sendo, propriamente, parte da sintaxe lógica, perspícua à multiplicidade do espaço de possibilidades representado.

tabela com apenas *duas posições* (visto, naturalmente, *pV~pV* e *pF~pF* não serem uma possibilidade dos fatos).

Dessa maneira, tautologias mostram o que há de *comum* (*T5.143*) entre as proposições envolvidas em sua formulação - o total das possibilidades do espaço lógico compartilhado por elas. Por outro lado, uma contradição como *p.~p* deve mostrar a *diferença* (*T5.143*) ou os "limites exteriores" entre as proposições *p* e *~p* com relação a seu conteúdo, dado em sua projeção à Tabela 1. O fato de *p.~p* ser sempre falsa explicita as condições de verdade *opostas* das proposições envolvidas nessa aplicação da conjunção. Em outras palavras, a contradição mostra que as proposições *p* e *~p* são *partições disjuntas* do espaço de possibilidades. Em contraste com esse caso, e de maneira similar ao exemplo de uma tautologia no parágrafo anterior, *p.~q* não explicita qualquer limite entre *p* e *~q* por não resultar em uma contradição, e sim em uma mera proposição bipolar. Os "limites exteriores" entre as condições de verdade de *p* e *~q*, nesse caso, se refletem em contradições como *~((p.q)v(p.~q)v(~p.q)v(~p.~q)),* por exemplo, mas não em uma proposição contingente como *pv~q*.

Assim, a verdade necessária de tautologias e a falsidade de contradições reflete a estrutura do espaço lógico, cuja partição é feita por meio de símbolos como *p, ~p, q* e *~q* em sua representação. Esse mesmo ponto pode ser apresentado de maneira mais clara por meio de tabelas verdade. Uma *disjunção* se dá na seguinte tabela pela projeção simbólica de um sinal proposicional molecular *r* - onde *r* é a soma lógica de *p* e *q*:

p	q	r
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Essa não é uma tautologia, em decorrência da forma como se estrutura o espaço lógico representado pelas proposições *p* e *q*. No entanto, essa mesma *forma de projeção*[80], a disjunção, teria a seguinte tabela por resultado, no caso de sua aplicação a *p* e *~p*:

p	~p	r
F	V	V
V	F	V

A tabela acima não possui a primeira e última linhas do exemplo anterior, visto *pF~pF* e *pV~pV* serem uma *impossibilidade* do próprio espaço de possibilidades sendo representado. O caráter tautológico se mostra aqui em *pv~p* ser verdadeira independente de como se configuram as possibilidades da situação representada. Isso porque uma tautologia como *pv~p* não representa qualquer possibilidade particular dentre as possíveis configurações do espaço de possibilidades representado, mas reflete a forma mesma como esse espaço se estrutura pela *mútua exclusão* entre as possibilidades

[80] Uma proposição é uma projeção simbólica e, portanto, *p*, *q*, *p.q*, *pvq*, etc., são *projeções*. Já por *forma de projeção* deve-se entender aquilo que há *em comum* entre diversas projeções, como o produto lógico em *p.q*, *r.s*, *p.~p*, *p.q.r*, etc. Por meio desses casos, pareceria que uma forma de projeção equivale ao que pretendemos expressar por meio de conectivos. No entanto, isso não pode ser. A tabela verdade de *pvq*, por exemplo, tem uma forma de projeção que poderia ser expressa sem o uso da disjunção, por exemplo, em *~(~p.~q)*. Conectivos são a expressão sintática de uma forma de projeção simbólica, e podemos ter inúmeras expressões sintáticas distintas para uma mesma forma de projeção.

representadas por *p* e *~p*, e pela ausência de um terceira possibilidade além dessas. Da mesma maneira, a tautologia *(p.q)v(p.~q)v(~p.q)v(~p.~q)* reflete a estrutura do espaço lógico representado por *p* e *q*, dada a *independência* entre as possibilidades representadas por *p* e *q*.

Analogamente, a projeção do produto lógico *p.~p* tem como resultado uma contradição:

p	~p	r
F	V	F
V	F	F

Acima, mais uma vez a ausência da primeira e última linhas na tabela verdade de *p.~p* decorre da forma como se estrutura o espaço de possibilidades. Assim, *pv~p* ser uma tautologia e *p.~p* uma contradição reflete a estrutura do espaço lógico - algo que por sua vez se mostra na sintaxe pelo uso do *mesmo nome* de variável proposicional, *p*, nas duas posições de argumento em *pv~p* e *p.~p* (em contraste com o que ocorre nos sinais *pv~q* e *p.~q*, os quais resultam em proposições bipolares, e não em tautologias).

Tautologias são sempre verdadeiras e contradições sempre falsas em decorrência de proposições elementares representarem exatamente uma dentre duas possibilidades *mutuamente exclusivas* no espaço de possibilidades. A falsidade de uma contradição reflete ser impossível a ocorrência simultânea dessas duas possibilidades, enquanto a verdade de uma tautologia ser impossível que pelo menos uma delas não ocorra (sendo esses, respectivamente, os *princípios da contradição* e do *terceiro excluído*, os quais se expressam justamente por meio de tautologias e contradições). Tautologias são assim verdadeiras e contradições falsas *em conseqüência da bipolaridade das proposições*, ou ainda, como mencionado, em conseqüência da própria forma do espaço de possibilidades representado[81]. Voltando às três tabelas reproduzidas no início do presente item - e seguindo a analogia de Wittgenstein, de que tautologias são o 'centro sem substância' das proposições e contradições seu 'limite exterior' (*T5.143*) - seria possível dizer que tautologias são o correspondente, no sistema simbólico (Tabela 2), às *bordas externas* da Tabela 1, aquelas que envolvem o *total* das possibilidades representadas, mostrando assim o que elas têm em *comum*, enquanto contradições correspondem às *bordas internas*, as que *separam entre si* cada uma das possíveis combinações mutuamente exclusivas de estados de coisas no desenho da Tabela 1, mostrando com isso a *diferença* entre as condições de verdade das proposições que representam, na Tabela 2, esses estados de coisas[82].

Por fim, dessa maneira tautologias esgotam as possibilidades combinatórias dos fatos representados ao abarcarem todas (ou nenhuma, no caso de uma contradição) as possíveis *combinações* de valores verdade das proposições - refletindo no sistema

---

[81] Esse argumento se encontra ainda de acordo com *T6.124*: "*As proposições lógicas descrevem a armação do mundo*, ou melhor, representam-na. Não "tratam" de nada. Pressupõem que nomes tenham significado e proposições elementares tenham sentido: e essa é sua ligação com o mundo. É claro que *algo sobre o mundo deve ser denunciado por serem tautologias certas ligações de símbolos* – que têm essencialmente um caráter determinado." (itálicos meus).

[82] Essa observação não deve ser tomada como uma simples *metáfora* se levarmos em conta as passagens *T4.441* e *T4.442*. Elas dizem respeito à forma como se estrutura o *sinal* de uma tabela verdade. Tanto a expressão de uma proposição por meio de conectivos quanto sua expressão gráfica em uma tabela verdade devem ter multiplicidade equivalente: "4.441 É claro que ao complexo dos sinais "F" e "V" não corresponde nenhum objeto (ou complexo de objetos); como tampouco aos *traços horizontais e verticais*, ou aos parênteses – Não há 'objetos lógicos'. Algo análogo vale naturalmente para *todos os sinais que exprimem o mesmo que os esquemas dos "V" e "F"*" (itálicos meus). Entre "outros sinais" que segundo Wittgenstein exprimem o mesmo que os esquemas das tabelas verdade estão, naturalmente, conectivos lógicos, como os utilizados em *p.q*, *pvq*, etc. Da mesma maneira, o desenho das tabelas 1, 2 e 3 apresentadas no início dessa seção são igualmente *sinais* que mostram a estrutura da representação - assim como o são tabelas verdade ou uma notação envolvendo conectivos lógicos. As bordas internas e externa da Tabela 1, a distribuição dos sinais 'V' e 'F' em seu interior, etc., compõem um sinal *tautológico* para com o espaço de possibilidades representado. Assim como conectivos lógicos, esses sinais são recursos sintáticos utilizados com o objetivo de refletir, no sistema de sinais, a forma de projeção simbólica, explicitando com isso a complexidade da situação representada.

simbólico toda a complexidade da situação representada e viabilizando com isso uma concepção da linguagem em *dois estágios*, conforme mencionado na seção 1.1.1. Esse resultado, o da correspondência entre tautologias e contradições e as partições do espaço de possibilidades - juntamente com o obtido no item anterior, no qual as regras da sintaxe dos conectivos como $p{=}{\sim}{\sim}p$ foram apresentadas em correspondência com tautologias como $p{\equiv}{\sim}{\sim}p$ - garante haver a mesma multiplicidade entre *espaço de possibilidades*, *sistema simbólico* e *sistema de sinais*: entre as tabelas 1, 2 e 3, apresentadas ao início desta seção. Se no item anterior foi obtida a correspondência entre *tautologias* em um sistema simbólico e as *identidades* que determinam a sintaxe dos conectivos em um sistema de sinais, aqui obtivemos a correspondência entre as proposições da lógica em um sistema simbólico e o espaço de possibilidades. Tais correspondências não devem ser entendidas, no entanto, como uma relação entre *sistemas distintos*, conforme já mencionado ao final da última seção, mas como aspectos de *um único sistema de linguagem*: a estrutura do espaço lógico já contém em si a possibilidade de ser representado simbolicamente e, conseqüentemente, por um sistema de sinais; da mesma maneira que a sintaxe de um sinal já deve conter a possibilidade de sua análise, dado o uso simbólico feito dele em sua projeção a um possível estado de coisas. Ambos os casos - tanto a projeção simbólica a partir de um espaço de possibilidades quanto a análise de um sinal a partir de sua posição em um sistema de sinais - são desdobramentos em um mesmo sistema, ou ainda, *construções* que efetuamos nesse sistema. O caso é discutido no que segue por exemplificar como espaço lógico, sistema simbólico e sistema de sinais na verdade configuram um único sistema, mas também por explicitar o *construtivismo* inerente às nossas práticas lingüísticas.

Ao projetar simbolicamente o espaço de possibilidades certamente devemos *gerar* os sinais aos quais realizamos a projeção. “Gerar”, nesse caso, pode perfeitamente ser entendido como simplesmente “escrevê-los”, “pronunciá-los”, etc., mas é igualmente possível tomar qualquer fato *já existente* como um sinal proposicional[83], como ao utilizar um copo e um cinzeiro sobre uma mesa em uma representação das posições de dois carros na rua. Nesse último caso, *geramos* o sinal no sentido de que o *ligamos* ao sistema de linguagem, tomando-o como a representação de um fato. O ‘*ato*’ de tomar um fato qualquer no mundo como sinal proposicional participa daquilo que é *arbitrário* na constituição de uma linguagem - e por isso se pode dizer que essa ligação é *construída*, na medida em que a estabelecemos arbitrariamente[84]. Apesar disso, o sistema de posições em que geramos esses sinais já é introduzido com o próprio espaço de possibilidades a ser representado, de maneira a tais construções serem meros desenvolvimentos em um sistema dado. Não fosse assim, não haveria *relação interna* entre sinais e mundo, e apenas por um acaso nossas manipulações com sinais teriam a multiplicidade correta na representação dos fatos. Já a análise lógica toma o sentido inverso ao da geração de sinais a partir de um espaço de possibilidades e se viabiliza exatamente pela multiplicidade de um sinal não analisado ser dada a partir de sua posição no sistema sintático. Assim, uma proposição apenas pode ser analisada em decorrência da posição que ela assinala no sistema de sintaxe determinar, por si só, a sua multiplicidade, e indicar a direção que a análise deve tomar na *geração* de sinais que reflitam a complexidade do espaço de possibilidades representado nos próprios

[83] O sinal proposicional é ele mesmo um fato: “3.314 O sinal proposicional consiste em que seus elementos, as palavras, nele estão, uns para os outros, de uma determinada maneira. O sinal proposicional é um fato.”.
[84] “3.322 A marca comum de dois objetos nunca pode ser denunciada por nós os designarmos com o mesmo sinal, mas através de diferentes *modos de designação*. Pois o sinal é, sem dúvida, arbitrário.”

sinais proposicionais. Com isso, a possibilidade mesma de análise se dá por ser implícita na sintaxe de um sinal *não analisado* a sua posição no sistema como um todo. O resultado dessa análise, no entanto, não pode ser antecipado *a priori* (*T5.5571*), de onde não haver anterioridade do espaço de possibilidades em relação ao sistema sintático no qual o representamos - e vice-versa (a esse respeito, ver nota 72, p.64). Dessa maneira, na análise lógica *geramos* sinais tão somente a partir do sistema de sintaxe, algo que não seria possível se *espaço de possibilidades*, *sistema simbólico* e *sistema de sinais* fossem entidades estanques entre si e não aspectos de um mesmo sistema: não fosse assim, os sinais gerados a partir do sistema de sinais em uma análise apenas teriam a multiplicidade correta na representação do espaço de possibilidades por meio de uma feliz coincidência.

Em ambos os casos, na projeção de um espaço de possibilidades a um sistema de sinais e, inversamente, na análise de sinais de modo a explicitar a estrutura do espaço de possibilidades, tão somente geramos *séries de sinais* de acordo com as regras da sintaxe lógica. O Capítulo 2, a seguir, trata justamente sistemas de sinais em geral, constituídos por cruzamentos entre tais séries, com ênfase na ideografia do *Tractatus* por ela pretender apresentar de maneira perspícua a estrutura de tais sistemas. Nesse contexto, proposições metalógicas se mostrarão inviáveis exatamente por violarem a sintaxe lógica em seu aspecto matemático-recursivo: o holismo do *Tractatus* impede a distinção entre metalinguagem e linguagem-objeto – as quais devem ser consideradas como um mesmo sistema – e as impredicações resultantes dessa indistinção em uma pretensa metalógica violam a recursividade expressa em pseudoproposições matemáticas[85]. Com isso, não há como se obter *pontos de anulação* como os que primeiramente permitiram estabelecer a *sintaxe* das operações lógicas no item 1.2 - e tampouco a correspondência entre *espaços de possibilidades mutuamente exclusivas* e *sistemas sintáticos recursivos*, na qual se baseia o isomorfismo entre as tabelas 1, 2 e 3, apresentadas acima, no estabelecimento de uma representação.

[85] Sem distinção entre metalinguagem e linguagem-objeto, uma quantificação, na metalinguagem, sobre proposições da linguagem-objeto deve ter sob o escopo de sua variável a própria proposição em que essa quantificação ocorre, por exemplo.

CAPÍTULO 2

2.1 Lógica Pura, Lógica Aplicada e a Ideografia

Existem dois tipos de análise lógica no *Tractatus*, uma por meio da transformação de constantes em variáveis, dada pelo procedimento em *T3.315*[86], e outra por meio de tautologias e contradições, equivalendo a primeira à *lógica pura* e a segunda à *lógica aplicada*. A *tautologia* $(x)(fx \vee \sim fx)$, por exemplo, é utilizada em lógica aplicada na análise das proposições, ao passo que a *variável livre* $(fx \vee \sim fx)$ resulta do processo de substituição de constantes por variáveis em *T3.315*, e se trata, portanto, de um resultado em lógica pura. Deve-se observar, apesar disso, que todos os usos da expressão 'análise' no *Tractatus* remetem à lógica aplicada. No entanto, o procedimento *T3.315* é claramente um tipo de análise, ao decompor sinais proposicionais nas variáveis livres que o estruturam[87]. A noção de análise lógica em Frege e Russell é a de um procedimento que conduz de termos previamente definidos aos termos indefiníveis, primitivos, de uma linguagem. Wittgenstein parece, por sua vez, identificar dois objetivos distintos nessa concepção de análise, o que resulta em dois procedimentos

[86] "3.315 Se transformamos em variável uma parte constituinte de uma proposição, há uma classe de proposições que são todos os valores da proposição variável assim originada. Em geral, essa classe depende ainda do que nós, segundo uma convenção arbitrária, queremos significar com partes daquela proposição. Se transformamos em variáveis, porém, todos os sinais cujo significado foi arbitrariamente determinado, ainda assim continua a haver uma tal classe. Esta, porém, não depende mais de qualquer convenção, mas apenas da natureza da proposição. Ela corresponde a uma forma lógica – a um protótipo lógico de figuração."

[87] Tais variáveis são *fixadas* novamente em seu *cruzamento mútuo* no sinal proposicional, por meio do procedimento inverso ao *T3.315*, apresentado em *T5.501*. A esse respeito, na seção 2.4, subitem (b) (p.114-119), será argumentado que as possíveis fixações de variáveis são dadas pelos pontos de cruzamento entre séries formais (um termo em uma série formal é ele mesmo a fixação de uma variável, dada por cruzamentos desta com outras séries). Se *T3.315* é um procedimento *analítico*, pela decomposição do sinais proposicionais em variáveis livres, em certo sentido *T5.501* pode ser entendido como um procedimento de *síntese*, de maneira *análoga* ao ato de *gerar* termos em uma série, ou ao ato *arbitrário* de estabelecer (fixar) um significado para um sinal. O procedimento de fixação *T5.501* será tratado no item 2.5.

distintos. De um lado, a obtenção, a partir de proposições dadas, de expressões proposicionais envolvendo apenas termos primitivos (sendo tais termos nomes simples, conectivos, etc.), e por outro lado, a expressão da *sintaxe* desses termos primitivos. O primeiro tipo de análise seria conduzido por meio dos recursos da lógica aplicada, tautologias e contradições, ao passo que o segundo por meio da lógica pura, na transformação de constantes em variáveis. Essa separação permite a Wittgenstein contornar as dificuldades de Frege e Russell em estabelecer seus sistemas sem apelar a uma metalógica. Ao indicar a sintaxe de tais termos primitivos, o problema de Frege e Russell se encontra em como fazê-lo sem com isso parecer estarem apresentando suas *definições* - uma vez que, caso fossem definidos, esses não seriam sinais primitivos[88]. Em contrapartida, ao transformar constantes de um sinal proposicional em variáveis, Wittgenstein pretende mostrar como é possível obter meros *esquemas* da aplicação de tais regras. Assim, enquanto livro de lógica pura, o *Tractatus* nada mais faz que introduzir tais esquemas, sem com isso incorrer em uma metalógica no estabelecimento de sua ideografia (esse ponto será retomado na seção 2.5).

Variáveis livres não chegam a constituir uma proposição, ao contrário do que ocorre com tautologias, mas antes se tratam de fragmentos de um sinal proposicional. Sendo assim, enquanto *variáveis proposicionais*, elas não se projetam simbolicamente, mas antes delimitam uma categoria sintática dada por meio dos possíveis valores que essa variável pode assumir. Refletem, portanto, *regras de sintaxe*. Por outro lado, uma

[88] Exemplos dessa dificuldade se encontram em Frege ter de apelar a contrassensos como "o conceito *cavalo* não é nenhum conceito" (Frege, 1974, p.63), bem como na questão acerca de como Russell poderia enunciar a sua hierarquia de tipos sem ser por meio de expressões que a violem: a sintaxe dos tipos não poderia ser dada por nenhuma expressão em nenhum dos tipos, por ela dever se aplicar a todos eles e necessariamente ser, portanto, de um tipo acima de todos eles. A hierarquia, dessa maneira, não forma uma totalidade que pudesse ser expressa por qualquer proposição.

proposição da lógica, como $(x)(fx \vee \sim fx)$, baseia-se em uma projeção simbólica, onde os valores da variável livre *x* se encontram *fixados* por meio do uso do quantificador. Variáveis proposicionais obtidas em lógica pura remetem com isso à estrutura de *sistemas de sinais* e, portanto, à *sintaxe lógica*, ao passo que proposições da lógica remetem à articulação de *sistemas simbólicos*, conforme argumentado ao longo do Capítulo 1[89].

Com isso, uma variável livre equivale a um *conceito formal*[90], e por se tratar de um sinal proposicional *incompleto*, não configura uma projeção simbólica, delimitando antes uma categoria sintática sob a qual caem expressões da linguagem. Uma variável obtida pela transformação de constantes em variáveis na lógica pura deve, portanto, independer da projeção simbólica em questão, e com isso refletir aspectos mais amplos da topologia da linguagem que os resultados obtidos em lógica aplicada. No caso de proposições elementares, por exemplo, pelo procedimento em *T3.315* temos que a sua forma deve se estruturar em termos de argumento e função, ao passo que somente em lógica aplicada poderíamos concluir acerca do número de posições de argumento nessas funções, acerca de quais nomes podem atuar como seus argumentos, etc. (*T5.5571*). Dessa maneira, se em lógica aplicada apresentamos de maneira explícita em um sinal proposicional particular a sua posição no sistema de linguagem por meio de tautologias e contradições, em lógica pura, por sua vez, explicitamos as categorias sintáticas essenciais a sistemas de linguagem em geral por meio do procedimento de substituição de constantes por variáveis. Será através da lógica pura que Wittgenstein obtém os

---

[89] A lógica aplicada lida assim com sinais proposicionais projetados simbolicamente e, portanto, com valores verdade atribuídos, ao passo que a lógica pura lida com esquemas, fragmentos de sinais proposicionais que não se projetam como símbolos, com isso não têm valores verdade atribuídos e podem, dessa maneira, ser propriamente entendidos como *pseudoproposições* (ver seção 2.5).

[90] "4.1271 Toda variável é o sinal de um conceito formal."

elementos da sintaxe lógica a partir dos quais irá propor sua *ideografia*, visto que essa última deve poder se estabelecer de maneira independente do resultado da análise das proposições em lógica aplicada. Esse ponto é detalhado no que segue.

No item 1.1 obtivemos, entre outros elementos da sintaxe das proposições, as categorias sintáticas de *nome*, *função*, *operação*, etc. Tais elementos podem ser obtidos em lógica aplicada tão somente a partir das relações entre as condições de verdade das proposições em análise: por meio de regras de substituição *salva veritate* nos deve ser possível obter regras de substituição *salva congruitate*, através do uso de tautologias e contradições. Assim, na ideografia do *Tractatus* é necessário expressar apenas relações entre condições de verdade, visto podermos, com o uso delas, obter as demais categorias da sintaxe lógica que estruturam as proposições particulares em questão. Tais relações entre as condições verdade das proposições são expressas na notação de Wittgenstein por meio do operador *N* na Forma Geral da Proposição, $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. Nela, não temos indicação de categorias sintáticas como *nome* e *função*, por exemplo, mas apenas a posição relativa $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ ocupada pelo sinal proposicional $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ em relação às proposições elementares $\bar{p}$. Tais categorias sintáticas não precisam ser expressas por essa se tratar de uma *forma geral* – um fragmento proposicional que expressa uma *regra de sintaxe*, e não uma proposição completa – capaz de expressar posições na topologia de um sistema de linguagem *qualquer*, ao passo que os *nomes*, *funções*, etc., que de fato obtemos em *lógica aplicada* dependem da '*topologia particular*'[91] do

[91] Em outras palavras, a Forma Geral da Proposição é *indiferente* à forma particular que assumem as proposições elementares, exatamente por atender a quaisquer formas que elas venham a assumir. Essa ressalva deve ser feita porque em certo sentido não é correto falar em 'topologias particulares' do sistema simbólico, como se fosse possível haver 'diversas linguagens'. Existe apenas *o* sistema de linguagem, e caso nele o sinal *fxyz* seja um contrassenso, isso não quer dizer que em 'outra topologia', ou em 'outra linguagem', esse poderia ser o sinal de uma proposição elementar. Apesar disso, caso a

sistema simbólico em questão, e com isso escapam ao escopo da *lógica pura*. A obtenção dos nomes e funções que participam das proposições elementares é assim restrita à *lógica aplicada*, por ela tratar a estrutura de projeção simbólica de fato dos sinais proposicionais ao mundo, ao passo que em *lógica pura* lidamos com *conceitos formais*, variáveis proposicionais que não se projetam simbolicamente por não constituírem sinais proposicionais completos. Assim, tratam-se em lógica pura regras de sinais que independem do resultado da análise das proposições e, portanto, da topologia específica do sistema simbólico[92].

Nesse contexto, a forma das proposições elementares obtida por meio da análise em lógica aplicada – ou seja, aquilo em sua forma lógica que diz respeito, por exemplo, a serem elas relações diádicas, ou triádicas, etc. – certamente faz parte da sintaxe lógica. No entanto, tais aspectos de sua forma não participam daquela parte da sintaxe lógica que é relevante ao estabelecimento de uma ideografia, visto que essa última deve ser obtida de maneira independente dos resultados da análise aplicada. Em sendo um livro de lógica pura, o *Tractatus* não se ocupa da análise das proposições, mas por outro lado deve apresentar uma ideografia adequada à expressão da forma geral dessas proposições. Parte da ideografia de Wittgenstein é apresentada nas passagens *T6, T6.01, T6.02* e *T6.03*, onde são introduzidas a *Forma Geral da Proposição*, a *Forma Geral da Operação*, a *Forma Geral da Série* e a *Forma Geral do Número*, as quais equivalem a

análise das proposições de fato resulte em uma elementar com a forma *fxyz*, a Forma Geral da Proposição deve poder exprimir sua posição no sistema de linguagem, por essa ser uma possível fixação das variáveis *implícitas* em $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ (e que serão discutidas na próxima seção). É nesse sentido que se deve entender a Forma Geral da Proposição como abrangendo diversas 'possíveis topologias': ela permite exprimir posições em um sistema de linguagem independente de qual venha a ser a forma de suas proposições elementares – e exatamente por isso a Forma Geral da Proposição é um resultado da lógica pura.

[92] Vale aqui a mesma ressalva feita na nota anterior.

regras sintáticas de uma notação ideal[93]. Todas elas são apresentadas como esquemas para a geração de sinais em uma notação que deve ser, pretende-se, perspícua a essas formas lógicas. Por meio da expressão dessas formas de maneira explícita à superfície dos sinais devemos ter, portanto, clara a posição desses sinais no sistema de linguagem, e assim ter um método para *mecanicamente* evitar a construção de contrassensos, bastando para tanto seguir um procedimento algorítmico na *conferência* ou na *geração* de sinais. A derivação de tais formas lógicas por meio do procedimento transformação de constantes em variáveis é apresentada na seção a seguir.

2.2 Da Forma Geral da Proposição à Forma Geral do Número

A determinação da conceitografia conduzida pelo *Tractatus Logico-Philosophicus* leva de conceitos formais menos a mais abstratos, como sugerido pelo procedimento em *T3.315*. Da Forma Geral da Proposição, $[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$ (*T6*), chegamos à Forma Geral da Operação, $[\overline{\xi}, N(\overline{\xi})]'(\overline{\eta})(=[\overline{\eta}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})])$ (*T6.01*), e dessa à Forma Geral da Série em $[x, \xi, \Omega'\xi]$ (onde $\Omega = [\overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$) (*T6.02*). Essa última é reformulada com uso de expoentes em $[\Omega^{0}{}'x, \Omega^{v}{}'x, \Omega^{v+1}{}'x]$ (*T6.02*) e dela, ao tornar variável mesmo a Forma Geral da Operação, Ω, obtemos a Forma Geral do Número, $[0, \xi, \xi + 1]$ (*T6.03*). Nesse processo são expressos, a cada passo, aspectos mais amplos da topologia dos sistemas de sinais. Assim, um agrupamento de sinais que não se enquadre nessas formas não configura posição alguma em um sistema de linguagem, resultando, portanto, em um

[93] A ideografia se expressa, ainda, no uso de sinais distintos para símbolos distintos, em apresentações por meio de tabelas verdade, na sintaxe do operador *N*, etc., de onde ela na verdade não se resumir a tais formas lógicas apenas.

contrassenso. Com isso, por outro lado, contrassensos podem ser identificados diretamente pela inspeção dos sinais, ao verificarmos se eles se encontram ou não conforme os esquemas de substituição fornecidos por meio dessas formas lógicas - e de onde elas configurarem, propriamente, uma *ideografia*[94].

Antes da discussão acerca da estrutura dessas fórmulas, é preciso esclarecer alguns dos elementos que as compõem, como as variáveis ξ e $\bar{\xi}$ e o operador *N*. De *T5.501*, temos que, se a variável proposicional ξ pode assumir três valores, P, Q e R, então $\bar{\xi}$ equivale ao conjunto de proposições (P, Q, R). Assim a variável barrada $\bar{\xi}$ *fixa*[95] os valores de ξ. Por exemplo, se $\xi = fx$, então $\bar{\xi} = (fa, fb, fc, ...)$ (*T5.501*). Em outras palavras, $\bar{\xi}$ equivale ao conjunto das proposições que podem ser valores da *função* ou *variável proposicional* fx, de onde se poder dizer que ξ (nesse exemplo, fx) expressa a *forma lógica comum* a $fa, fb, fc, ...$. Além disso, se $\bar{\xi}$ é apresentada diante do sinal de uma operação ou na posição de argumento de uma função, então as proposições (P, Q, R) formam a base ou argumento dessa operação ou função - como se vê em cada uma das ocorrências do sinal da variável $\bar{\eta}$ na Forma Geral da Operação, $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'(\bar{\eta})(=[\bar{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})])$. Por outro lado, se ao invés de $\bar{\xi}$ temos ξ como base de

[94] Naturalmente, a ideografia não se resume a esse conjunto de fórmulas. Como mencionado na nota 93, ela envolve ainda, por exemplo, a utilização de sinais distintos para símbolos distintos (e, conseqüentemente, nomes distintos para objetos distintos): “3.325 Para evitar esses equívocos, devemos empregar uma notação que os exclua, não empregando o mesmo sinal em símbolos diferentes e não empregando superficialmente da mesma maneira sinais que designem de maneiras diferentes. Uma notação, portanto, que obedeça à gramática *lógica* – à sintaxe lógica”.

[95] A *fixação* de valores de uma variável, dado por *T5.501*, se apresenta como sendo o procedimento *inverso* ao de transformação de constantes em variáveis, em *T3.315*: “5.501 (...) Os valores da variável são fixados. A fixação é a descrição das proposições que a variável substitui (...) Podemos distinguir três espécies de descrição: 1. A enumeração direta. Nesse caso, podemos simplesmente colocar, no lugar da variável, seus valores constantes. 2. A especificação de uma função *fx*, cujos valores para todos os valores de *x* sejam as proposições a serem descritas. 3. A especificação de uma lei formal segundo a qual tais proposições sejam constituídas. Nesse caso, os termos da expressão entre parênteses são todos os termos de uma série formal”.

uma operação ou argumento de função, como acontece na Forma Geral da Série e na Forma Geral do Número, $[x, \xi, \Omega' \xi]$ e $[0, \xi, \xi + 1]$, seu papel deve ser o de um *esquema* para a geração de expressões. Dessa maneira, a distinção entre $\bar{\xi}$ e ξ deve ser tomada como a existente entre uma *variável livre* propriamente dita e uma *letra esquemática* - $\bar{\xi}$ possui um *escopo fixo*, trata-se de uma enumeração de proposições que perfaz uma *totalidade* sobre a qual podemos quantificar (ou aplicar uma operação lógica, como *N*)[96], enquanto ξ equivale a uma letra esquemática que se deixa substituir de maneira recursiva por expressões com determinada forma lógica. Em outras palavras, $\bar{\xi}$ é uma variável livre com um escopo delimitado, cujo esquema é dado por ξ.

Temos com isso que $\bar{\xi}$ deve ser tomada como uma simples *enumeração de sinais proposicionais*[97] - e não uma *proposição* como, por exemplo, o produto lógico das proposições correspondentes aos sinais proposicionais sob $\bar{\xi}$. Em outras palavras, em $\bar{\xi}$ não temos atribuições de valores verdade aos sinais listados, de modo que essa variável apenas reúne sob uma totalidade aplicações da letra esquemática ξ. Somente obtemos uma proposição *após* a aplicação de alguma *operação lógica* sobre $\bar{\xi}$, como em $N(\bar{\xi})$. Que seja esse o caso se mostrará útil para explicar porque tautologias não afirmam nada acerca do mundo: por resultarem de operações que se anulam completamente, obtemos com elas variáveis livres, sinais desligados, exatamente como

---

[96] A aplicação de uma operação lógica sobre ξ, sem barra, resulta em uma expressão de segunda ordem.

[97] Caso ξ tenha infinitos possíveis valores, $\bar{\xi}$ não pode ser listada ou apresentada por extenso, naturalmente, mas ainda assim indica a reunião desses infinitos valores sob uma totalidade. Cada um desses valores é um sinal proposicional, apenas, e não uma proposição, conforme será argumentado a seguir.

os que ocorrem na simples enumeração de sinais proposicionais em $\bar{\xi}$ *antes* da aplicação de alguma operação sobre eles.

O operador *N*, por sua vez, é uma generalização do traço de Sheffer, onde $N(p,q,r)$, por exemplo, equivale a $\sim p.\sim q.\sim r$ (*T5.502*). Em uma notação mais usual, nesse caso escreveríamos $(p \mid q \mid r)$, de maneira que os demais conectivos podem ser definidos como $\sim p = (p \mid p)$; $p \cdot q = ((p \mid p) \mid (q \mid q))$; $p \vee q = ((p \mid q) \mid (p \mid q))$; etc. (*T5.1311*)[98]. Esse operador deve ser entendido como uma generalização do traço de Sheffer por Wittgenstein pretender, por meio dele, envolver ainda o cálculo de predicados e, portanto, a lógica de primeira ordem. Se por ξ tomamos a variável proposicional fx, por exemplo, então $N(\bar{\xi})$ equivale à negação conjunta de todos os valores que essa variável pode assumir, em $\sim fa.\sim fb.\sim fc....$. Nesse caso, $N(N(\bar{\xi}))$ equivaleria a $(\exists x) fx$ (*T5.52*). Por outro lado, o quantificador universal pode ser obtido da seguinte forma: se $\xi = N(fx)$, (observe-se que, ao contrário do caso do quantificador existencial, a variável a ser barrada aqui é $N(fx)$, e não fx) então $\bar{\xi} = (\sim fa, \sim fb, \sim fc, ...)$, de maneira que $N(\bar{\xi})$ equivale a $\sim\sim fa.\sim\sim fb.\sim\sim fc... = fa.fb.fc... = (x) fx$ (onde, primeiramente, foi barrada a variável $\xi = N(fx)$, obtendo $\bar{\xi} = (\sim fa, \sim fb, \sim fc, ...)$, e somente após isso aplicamos $N(\bar{\xi})$)[99]. Assim, Wittgenstein pretende dar um tratamento uniforme ao cálculo proposicional e ao cálculo de predicados, ainda que ressalvas

[98] Em Hatcher (Hatcher, 1968, p.10-11) o sinal | na verdade é utilizado como o dual da operação pretendida por Wittgenstein, a qual por sua vez é expressa por $\downarrow$. Mantenho a notação do *Tractatus*.

[99] Ou seja, o quantificador existencial se escreve por $N(N(\bar{\xi}))$, ao passo que o quantificador universal, por $N(\overline{N(\xi)})$. A diferença entre eles é qual a variável a ser barrada; se ξ ou $N(\xi)$. No Anexo B é feita uma discussão a respeito do momento em que barramos variáveis na constituição de somas e produtos, tanto lógicos quanto aritméticos.

tenham sido feitas acerca da viabilidade dessa redução. Como observa Fogelin[100], a *múltipla quantificação* seria inviável na notação do *Tractatus*, visto o operador N manipular simultaneamente todas as posições de argumento de uma expressão, o que tornaria $(\exists x)(y)\,fxy$ inexprimível, por exemplo, e, conseqüentemente, a lógica de primeira ordem. Geach propõe solucionar o problema estendendo a notação de Wittgenstein de maneira a cada operação N apontar a posição de argumento específica à qual ela se aplica[101]. Independentemente desse ponto, deve-se observar que ao barrar uma variável, como em $\bar{\xi} = (fa, fb, fc, \ldots)$, reunimos a *totalidade* dos termos de uma série dada pela forma geral $\xi = fx$. Assim, seria hipoteticamente possível reunir sob $\bar{\xi}$ infinitas expressões, caso existam infinitos objetos no mundo sob o escopo de *x* em *fx*; o que, posteriormente ao *Tractatus*, Wittgenstein irá rejeitar por equivaler a uma quantificação sobre infinitos termos[102].

A partir dessas observações preliminares é então possível apresentar a Forma Geral da Proposição:

> 6 A forma geral da função de verdade é: $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. Isso é a forma geral da proposição.

---

[100] Fogelin, 1987, p.78-9.

[101] Geach, 1981, p. 169. Algo do tipo, no entanto, inviabiliza a distinção clara entre generalização e operações lógicas pretendida por Wittgenstein, visto o uso de índices em *N* para indicar a variável à qual o operador se aplica tornar difusa essa distinção: "5.521 Separo o conceito *todo* da função de verdade. Frege e Russell introduziram a generalidade em conexão com o produto lógico ou a soma lógica. Assim, tornou-se difícil entender as proposições $(\exists x).fx$ e $(x).fx$, em que estão encerradas ambas as ideias". A esse respeito, ver nota 134, onde é discutida a oposição apresentada por Cuter entre *operações seletivas* e *operações construtivas*.

[102] Wittgenstein aceita a possibilidade de infinitos objetos no *Tractatus* e, portanto, de infinitas proposições elementares, em *T4.2211*. Por outro lado, ele restringe as aplicações de operações lógicas a um número finito delas (*T5.32*). No entanto, em *T5.501* é aceita a possibilidade de se reunir todos os termos de uma série formal sob uma totalidade, o que aparentemente é contraditório com a limitação de aplicações de operações lógicas a um número finito delas. O caso aparenta ser uma inconsistência interna ao livro, conforme mencionado ao final da seção 1.2, p.65-66. Posteriormente ao *Tractatus*, nas *Observações Filosóficas*, ele viria a rejeitar qualquer pretensão de um infinito atual como um contrassenso (Wittgenstein, 2005).

> 6.001 Isso nada diz senão que toda proposição é um resultado da aplicação sucessiva da operação $N(\bar{\xi})$ às proposições elementares.
>
> 6.002 Dada a forma geral como uma proposição é construída, com isso já está dada também a forma geral como, a partir de uma proposição e por meio de uma operação, uma outra pode ser gerada.

Em $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$, $\bar{p}$ equivale à fixação da totalidade das proposições elementares, enquanto a expressão $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ corresponde ao esquema da aplicação *reiterada* da operação $N(\bar{\xi})$, conforme *T6.001*, onde a cada passo a expressão à esquerda, $\bar{\xi}$, se substitui novamente pela expressão à direita, $N(\bar{\xi})$. Nesse caso, não é indicado o *número* de iterações realizadas, e também por isso essa se trata de uma forma *geral*. O esquema de reiteração é apresentado por meio de $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$, visto nessa expressão termos explicitamente a base, $\bar{\xi}$, e o resultado, $N(\bar{\xi})$, de cada passo iterativo. Dessa maneira, $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ é uma operação resultante de uma *composição* de aplicações da operação *N*. A respeito de como se dão essas reiterações, um ponto é crucial para a viabilidade da formulação apresentada por Wittgenstein. Ela deve ser interpretada não somente por simples iterações da operação *N* sobre o conjunto de proposições elementares dadas ou sobre o resultado de cada aplicação a elas. Isso porque em cada iteração a fixação dos valores de $\bar{\xi}$ deve realizar uma *nova seleção* entre as proposições geradas até então, sem o que seria impossível gerar todas as proposições moleculares que podemos construir sobre uma base de proposições elementares $\bar{p}$. Para esclarecer o ponto, digamos que o conjunto inicial de proposições elementares seja dado por $\bar{p} = (r, s, t)$. A primeira aplicação da operação *N* resulta em $(\sim r. \sim s. \sim t)$, enquanto uma segunda aplicação, realizada sobre esse último resultado, obtém $\sim(\sim r. \sim s. \sim t)$. Já uma terceira aplicação, realizada sobre $\sim(\sim r.\sim s.\sim t)$, resulta em $\sim\sim(\sim r.\sim s.\sim t)$, a qual equivale a $(\sim r.\sim s.\sim t)$, o mesmo resultado da primeira aplicação da operação. Qualquer outra iteração não nos leva mais longe, e sendo assim, por meio de simples reiterações sobre o resultado de uma mesma operação não seria possível sequer gerar o conjunto das proposições moleculares que podemos construir a partir de *r*, *s* e *t*[103]. A solução seria considerar que a cada passo recursivo podemos realizar fixações distintas de valores em $\bar{\xi}$, tomando a cada vez diferentes subconjuntos de $\bar{p}$ ou das proposições geradas ao longo da série. Nesse caso, cada nova operação pode aplicada sobre um dos conjuntos $\bar{\eta}=(r)$, $\bar{\theta}=(s)$, $\bar{\psi}=(t)$, $\bar{\sigma}=(r,s)$, $\bar{\alpha}=(r,t)$, $\bar{\beta}=(s,t)$, $\bar{\varpi}=(r,s,t)$ ou algum outro subconjunto dentre as proposições geradas até então no procedimento. Com isso, a cada nova iteração da operação *N* é realizada uma nova fixação de ξ, o que gera, a cada passo, uma *ramificação*[104] distinta na série das proposições. A fixação dos valores de ξ deve, portanto, se dar *ao longo* das aplicações de operações em $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ se valendo de qualquer um dos procedimentos apresentados em *T5.501*[105] - e no caso de sua fixação por meio de regras formais, as diferentes fixações podem ser entendidas como diferentes *pontos de cruzamento* entre a série gerada por *N* e essas séries (ver seção 2.4, p.118-119). Cuter também chega a uma conclusão similar a respeito da

[103] Poderíamos tentar considerar ainda que a fixação de $\bar{\xi}$ reúne todas as proposições geradas até então na série. Nesse caso, a primeira aplicação resulta em $(\sim r.\sim s.\sim t)$, a segunda em $\sim(\sim r.\sim s.\sim t)$ e a terceira em $\sim(\sim r.\sim s.\sim t).(\sim r.\sim s.\sim t)$, uma contradição, o que igualmente é inaceitável, por não podermos levar a série adiante.

[104] Sobre o que se pretende por *ramificação*, no que segue, tomem-se as seguintes duas séries de sinais *(a, b, c, d, e, f,...)* e *(a, b, c, w, x, y,...)*. Elas podem ser tomadas como sendo uma só série, que se *ramifica*, ou *bifurca*, no ponto *c*. As duas ramificações obtidas nesse caso correspondem a duas fixações distintas de ξ na *quarta* iteração de *N*.

[105] Ver nota 95.

necessidade de serem selecionados novos subconjuntos das proposições geradas até então em cada passo recursivo na aplicação de N [106].

A Forma Geral da Proposição $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ deve ser comum a quaisquer proposições que venhamos a construir tendo por base um conjunto de proposições elementares $\bar{p}$. Em sendo uma *variável proposicional*, para obter uma instância sua, ou seja, uma *proposição,* devemos então *fixar*: i) os valores de $\bar{p}$, ii) o número de iterações $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ e iii) as diferentes fixações de valores de ξ em cada passo iterativo, na obtenção das diferentes ramificações da série. A fixação desses três itens é expressa na Forma Geral da Proposição exatamente pelo uso das variáveis *barradas* $\bar{p}$ e $\bar{\xi}$. A variável $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ pode apresentar assim de maneira perspícua as posições de sinais proposicionais em um sistema de linguagem, por seus possíveis valores serem exatamente posições nesse sistema. Já em sentido inverso, seguindo o procedimento *T3.315* e dada uma *proposição qualquer*, ao tomar por variáveis os valores fixados nesses três itens obtemos novamente a Forma Geral da Proposição.

Em *T6.002* temos que juntamente com a Forma Geral da Proposição já é introduzida a Forma Geral da Operação[107]. Isso deve se justificar pela aplicação do procedimento *T3.315* sobre a Forma Geral da Proposição, na obtenção da Forma Geral da Operação. Mais especificamente, a Forma Geral da Operação é obtida ao tornarmos variável o sinal do conjunto dos termos iniciais da série de proposições, o próprio conjunto das proposições elementares $\bar{p}$. Com isso, operações aplicam-se a qualquer conjunto de

---

[106] Cuter, 2005. Apenas tive contato com o artigo de Cuter nas revisões finais da presente dissertação. De qualquer maneira, apresento meus pontos de objeção e de concordância a certos argumentos do referido artigo na seção 2.4, p.114-124.

[107] "6.002 Dada a forma geral como uma proposição é construída, com isso já está dada também a forma geral como a partir de uma proposição e por meio de uma operação, um outra pode ser gerada."

proposições – e não necessariamente apenas a proposições elementares – quando da fixação novamente dos valores do esquema $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. *Aplicar* uma operação significa exatamente fixar esses valores, ao se tomar $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ novamente no contexto de uma proposição, como em $[\overline{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. Nesse caso, uma proposição com a forma $[\overline{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ é o resultado da aplicação da operação $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ sobre o conjunto de proposições $\overline{\eta}$; de onde a Forma Geral da Operação ser dada por $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'(\overline{\eta})(=[\overline{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})])$. Nessa expressão, o apóstrofo em $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'$ corresponde à *aplicação* da operação $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ sobre $\overline{\eta}$, obtendo com isso o resultado $[\overline{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$, apresentado após o sinal de igualdade entre parênteses em *T6.01*[108].

Como visto, o traço sobre uma variável proposicional, como η, fixa seus valores, em $\overline{\eta}$. Assim, o sinal de uma operação *antes* de sua aplicação pode ser apresentado por meio de $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'\eta$ ou $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})](\eta)$ - ou ainda, $[\eta, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. Aqui, η, enquanto letra esquemática, equivale à *forma* de proposições quaisquer, de onde a aplicação da operação se dar no momento em que fixamos os valores de η, obtendo a proposição $[\overline{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. *Aplicar* uma operação não equivaleria, portanto, ao fragmento de sinal proposicional $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'\eta$, *antes* de sua aplicação, nem à proposição $[\overline{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$, obtida *após* sua aplicação, mas à própria *fixação* dos valores de η na variável

[108] Frascolla (Frascolla, 1994, p.8 e 9) associa o apóstrofo ao uso desse mesmo sinal por Russell em funções descritivas. Em Russell, dada uma relação *aRb*, temos que *(aR)'=b*. No entanto, nesse caso o apóstrofo se aplica sobre uma expressão incompleta, *(aR)*, tendo por resultado um nome, *b*, enquanto aqui ele se aplica sobre um conjunto de sinais proposicionais, tendo por resultado uma proposição. Apesar disso, na seção 2.4 será apresentado o argumento de que operações tratam transformações de sinais em geral, não se resumindo a operações lógicas - o que corrobora a interpretação de Frascolla a esse respeito (algo que igualmente se verifica pelo uso do apóstrofo em *T5.2521*, onde temos "*O'O'O'a*", por exemplo, e *O* não se trata necessariamente de uma operação lógica).

operacional $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'\eta$ - a qual exprimimos por meio do uso do apóstrofo. Dessa maneira, se por um lado obtemos o sinal da operação a partir da proposição $[\bar{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ ao abstrair $\bar{\eta}$, tomando-a pela variável não barrada η em $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'\eta$ (seguindo com isso o procedimento *T3.315*), por outro lado a *aplicação* da operação se dá no momento em que fixamos novamente os valores de sua base em $\bar{\eta}$, obtendo por resultado $[\bar{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. Assim, a variável da Forma Geral da Operação é dada pelo sinal $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$, ao passo que a expressão $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'(\bar{\eta})(=[\bar{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})])$ equivale mais propriamente à *aplicação* dessa operação a um conjunto de proposições $\bar{\eta}$. Como mencionado na discussão acima acerca da Forma Geral da Proposição, o sinal $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ expressa uma seqüência de reiterações de *N*, de maneira a $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ ser uma variável para qualquer operação definida a partir de *composições* da operação *N*.

É por meio do sinal $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ que Wittgenstein pretende expressar, de maneira perspícua em sua ideografia, que "o que é comum às bases e ao resultado da operação são precisamente as bases" (*T5.24*) - algo que se vê claramente em $\bar{\xi}$ figurar tanto na primeira quanto na segunda posição de $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. Por outro lado, esse sinal refletiria ainda que "a operação dá expressão à diferença das formas" (*T5.24*) - algo que se manifesta na diferença entre os sinais da base $\bar{\xi}$ e o do resultado $N(\bar{\xi})$ de cada iteração. Com isso Wittgenstein *mostra*, no próprio sinal ideográfico $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ em *T6.01*, aquilo que aparentemente é 'dito' de maneira metalógica, e portanto *nonsense*, em *T5.24*. Isso porque a apresentação ideográfica em *T6.01* se vale expressamente de variáveis livres, ao passo que pseudoproposições em linguagem natural, como em

T5.24, poderiam ser erroneamente interpretadas como tomando conceitos formais por conceitos próprios[109].

A partir de então, a Forma Geral da Série $[x, \xi, \Omega' \xi]$ pode ser obtida em uma nova aplicação do procedimento em *T3.315*. Nesse caso, da Forma Geral da Proposição $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ tornamos não apenas $\bar{p}$ uma variável não barrada (obtendo η na Forma Geral da Operação, acima, e x no que segue), mas também $\bar{\xi}$, obtendo ξ[110]. Dessa maneira, de $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ passamos à Forma Geral da Operação $[\eta, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ e dessa última passamos a $[x, \xi, \Omega' \xi]$, a Forma Geral da Série, na qual Ω é a variável para uma operação qualquer $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. Aqui a variável não barrada ξ funciona como esquema

[109] "4.126 No sentido em que falamos de propriedades formais, podemos falar também de conceitos formais. (Introduzo essa expressão para deixar claro o que funda a confusão entre os conceitos formais e os conceitos propriamente ditos, que perpassa toda a antiga lógica.) Que algo caia sob um conceito formal como seu objeto não pode ser expresso por uma proposição. Isso se mostra, sim, no próprio sinal desse objeto." Com isso, *esquemas* que expressem regras da sintaxe lógica como *variáveis livres* são construções legítimas - e ainda que sejam pseudoproposições ao não constituírem sinais proposicionais completos, essas expressões, assim como ocorre em equações matemáticas, não são contrassensos. O problema com expressões em linguagem natural se encontra em elas aparentarem sinais proposicionais completos, proposições bipolares, e não esquemas. No entanto, apesar da expressão de aspectos da Forma Geral da Operação em linguagem natural em *T5.24* poder nos induzir a uma leitura metalógica dessa passagem, será argumentado na seção 2.5 que tanto essa quanto sua versão ideográfica $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ poderiam ser interpretadas, ambas, como esquemas que refletem regras da sintaxe lógica, de maneira a *T5.24* também não ser considerada um contrassenso. Com isso, os sinais em linguagem natural em *T5.24* e em linguagem ideográfica em *T6.01* igualmente expressariam variáveis livres: a expressão ideográfica tão somente torna explícita, em seu próprio sinal, a estrutura formal em questão, ao passo que a linguagem natural dá abertura a *possíveis* interpretações metalógicas. Isso, no entanto, não quer dizer que haja algo intrinsecamente incorreto na expressão em linguagem natural, mas sim que leituras incorretas poderiam ser evitadas em sua versão ideográfica. Obviamente, em *T6.54* Wittgenstein claramente afirma que as proposições em linguagem natural do *Tractatus* são contrassensos, e não somente pseudoproposições. Apesar disso, por razões a serem apresentas em 2.5, tomar as proposições em linguagem natural do *Tractatus* como pseudoproposições que não são contrassensos permitiria evitar complicações no que diz respeito à coerência interna do livro.

[110] Ao tornar uma variável a base de proposições elementares $\bar{p}$, temos que operações podem ser aplicadas a partir de qualquer ponto da série de proposições, assim como séries podem se iniciar em qualquer ponto da série de proposições. Já em contraste com operações e séries, uma proposição apenas é dada em termos de sua posição relativa ao conjunto de proposições elementares *fixas* $\bar{p}$.

para substituição de expressões em si mesmas, onde a cada passo ξ se substitui por $\Omega'\xi$ na geração da *série* ξ, $\Omega'\xi$, $\Omega'\Omega'\xi$, $\Omega'\Omega'\Omega'\xi$,....

Com isso, os sinais $\bar{\xi}$ e ξ devem cumprir papéis distintos, respectivamente, na Forma Geral da Proposição, $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$, e na Forma Geral da Série, $[x, \xi, \Omega'\xi]$. Conforme visto no início desta seção, variáveis barradas como $\bar{\xi}$ expressam a fixação de ξ, de modo que $\bar{\xi} = (fa, fb, fc)$, por exemplo, ao passo que variáveis não barradas como ξ expressam a *forma comum* a tais valores, como em $\xi = fx$. Assim, variáveis barradas delimitam uma *totalidade* específica de expressões, ao passo que variáveis não barradas deixam em aberto esse total, por expressarem tão somente a forma comum aos termos em questão. No caso da Forma Geral da Proposição, o uso de $\bar{\xi}$ no esquema de reiteração $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ indica uma totalidade específica de iterações e, portanto, uma *posição específica* na série de sinais proposicionais. Já na Forma Geral da Série, o uso de ξ no esquema de reiteração $[\xi, \Omega'\xi]$ não indica um total, mas a *possibilidade infinita* de sempre gerar novos termos em uma série, cuja forma geral é dada pela regra de substituição de ξ por $\Omega'\xi$. Em outras palavras, temos que variáveis barradas como $\bar{\xi}$ indicam uma *extensão*, ao passo que esquemas não barrados, como ξ, indicam *intensionalmente* um conjunto de expressões.

Na apresentação da Forma Geral da Proposição foi argumentado que a cada passo na aplicação reiterada de N em $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ devemos fixar novamente os valores de $\bar{\xi}$, sem o que a notação proposta por Wittgenstein não poderia gerar todas as possíveis proposições moleculares obtidas a partir de um conjunto de proposições elementares $\bar{p}$.

Com isso, ao fixar os valores de $\bar{\xi}$ em cada passo iterativo em $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ obtemos uma *ramificação específica* dentre as possíveis na geração da série das proposições, bem como um *número específico* de iterações. Já na Forma Geral da Série, deixamos em aberto essa fixação devido ao uso do esquema não barrado ξ, de maneira a não se obter nenhuma *ramificação* ou *número* de iterações *em particular*, e sim uma variável para as possíveis ramificações e para o número de iterações que se venha realizar no caso de ξ ser fixada em cada passo recursivo. Temos assim, na Forma Geral da Série, uma variável para a *topologia de séries de proposições em geral*, em contraste com a Forma Geral da Proposição, uma variável para *posições* em tais séries.

Uma conseqüência dessa interpretação é que devemos ter já implícita, na Forma Geral da Série, uma *variável numérica*. Na Forma Geral da Proposição, $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$, a operação composta $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ é dada por um *número* (finito) de iterações da operação *N*. Já na Forma Geral da Série, $[x, \xi, \Omega' \xi]$, em que os valores de ξ não são fixados em $\bar{\xi}$, não há um número particular atribuído às iterações de Ω, apenas a possibilidade *potencialmente* infinita dessas iterações. A variável numérica subentendida em $[\xi, \Omega'(\xi)]$ é então tornada explícita por Wittgenstein em sua *segunda versão* da Forma Geral da Série, com expoentes, em $[\Omega^{0}{}' x, \Omega^{\nu}{}' x, \Omega^{\nu+1}{}' x]$ (*T6.02*). Essas duas versões devem ter exatamente a *mesma multiplicidade*, por apenas apresentarem, em notações distintas, a mesma estrutura. Com isso, uma delas não poderia ser *mais fundamental* que a outra, antes apresentando diferentes *aspectos* de uma mesma forma lógica. No entanto, no que a princípio parece ser contrário a essa interpretação, Wittgenstein introduz a segunda versão da Forma Geral da Série envolvendo expoentes numéricos,

$[\Omega^{0}{}'x, \Omega^{\nu'}x, \Omega^{\nu+1'}x]$, a partir *definições* baseadas em sua versão *sem expoentes*, $[x, \xi, \Omega'\xi]$, conforme *T6.02*. Esse é um dos pontos utilizados por Frascolla para justificar a existência de um *logicismo* no *Tractatus*: visto *expoentes numéricos* serem introduzidos a partir de *definições* baseadas em *operações lógicas*, a Teoria da Aritmética poderia ser reduzida a uma Teoria das Operações Lógicas. A discussão acerca dessa interpretação logicista será apresentada na seção 2.4, a seguir, e permitirá considerar equações matemáticas como regras da sintaxe lógica para a substituição de sinais em geral. Antes disso, no entanto, deve-se introduzir a Forma Geral do Número.

A partir da Forma Geral da Série com o uso de expoentes, $[\Omega^{0}{}'x, \Omega^{\nu'}x, \Omega^{\nu+1'}x]$, chega-se à Forma Geral do Número $[0, \xi, \xi+1]$ lançando mão, mais uma vez, do procedimento *T3.315*. Uma vez assim introduzidos os *números, numerais* são definidos por Wittgenstein como *0+1=1 Def.*, *0+1+1=2 Def.*, *0+1+1+1=3 Def.*, etc., em *T6.02*. Aquilo que se pretende aqui com a terminologia de 'números' e 'numerais' não deve ser entendido, de maneira alguma, como considerar os primeiros sendo *objetos* nomeados pelos últimos, mas sim indicar que numerais são recursos sintáticos similares a descrições definidas, no sentido de que os utilizamos como forma abreviada de expressões numéricas - algo que se vê precisamente pelo *numeral 3* atuar como forma abreviada do *número 0+1+1+1*. Tal distinção entre numerais e números será útil na refutação do logicismo, apresentada na seção 2.4.

No que diz respeito à relação entre a Forma Geral da Série e a Forma Geral do Número, Wittgenstein já poderia tomar *v* como variável numérica na primeira dessas expressões - e ela de fato o é – mas ele opta por tornar variável mesmo o sinal Ω na apresentação da Forma Geral do Número. Isso tem conseqüências relevantes na relação entre matemática e a lógica. A variável operacional Ω tem por valores *operações verdade*, resultantes da composição de aplicações reiteradas da operação *N* sobre uma variável proposicional. Ao se tornar variável mesmo o sinal Ω na Forma Geral do Número, temos que números determinam uma sintaxe para *operações em geral*, e não apenas *operações lógicas*, ou seja, obtemos com isso uma sintaxe para transformações de *sinais quaisquer*. No Capítulo 1, a sintaxe das operações lógicas foi derivada de tautologias e contradições e, portanto, em última análise, decorre da *bipolaridade das proposições*. A sintaxe dos números, por sua vez, ao não fixar a categoria sintática da operação da qual eles são expoentes, trata regras de substituição de sinais em geral, cuja aplicação a operações lógicas configura tão somente uma instância. Nesse contexto, a aplicação da matemática *ao mundo* certamente apenas se dá por meio de operações lógicas, mas o cálculo matemático igualmente se aplica na transformação de sinais em geral - o que garantiria certa autonomia do cálculo em relação à sua eventual aplicação simbólica.

Voltamos assim à discussão acerca do logicismo, visto a notação do *Tractatus* viabilizar, como argumentado acima, a aplicação de números a outras operações na transformação de sinais que não apenas operações lógicas. O ponto é relevante por permitir delimitar precisamente o papel da matemática, dizendo com isso indiretamente respeito ao construtivismo e à rejeição da metalógica por Wittgenstein. A aplicação da matemática ao mundo envolve operações lógicas, operações verdade, mas por ela não se restringir a essas últimas, é com isso uma característica da sintaxe lógica na *construção* de sistemas de sinais quaisquer. Dessa maneira, o 'ato' *gerar* sinais *em um sistema* deve ser algo distinto de sua geração de maneira *aleatória*, resultando esse último caso numa violação da sintaxe matemática e, portanto, em um contrassenso – e o mesmo pode ser dito acerca de pseudoproposições metalógicas. O construtivismo e a metalógica relacionados a essa interpretação serão tratados na seção 2.5, enquanto no item 2.4 é discutida a questão do logicismo. Antes de passar a esses pontos, no entanto, o item a seguir busca esclarecer as relações entre tautologias e equações aritméticas.

2.3 Tautologias e Equações

A Formal Geral da Proposição fornece um esquema para a indicação, em seus próprios sinais, das posições relativas das proposições em um sistema de linguagem. Não há circularidade nessa indicação por cada uma se dar recursivamente a partir das demais posições no sistema - de onde as *posições em um sistema* e o *sistema de posições* se determinarem mutuamente. Apesar de tal determinação mútua dos sinais proposicionais, é possível considerar ainda uma *origem* para esse sistema de referências, da qual decorre a topologia do sistema como um todo: a forma lógica dos objetos representados. Sintomaticamente, o correspondente à forma dos objetos em uma série de sinais é dado pela posição indicada pelo número *zero*[111].

Que seja esse o caso é algo que se pode ver a partir da Forma Geral da Proposição e da Forma Geral da Operação; na primeira delas, $[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$, temos que $\overline{p}$ corresponde ao conjunto dos *sinais proposicionais elementares*, e na segunda, que a aplicação de um número *0* de operações lógicas sobre $\overline{p}$ resulta em $\overline{p}$, conforme $[\overline{\delta}, N(\overline{\delta})]^{0'}(\overline{p}) = \overline{p}$. No entanto, deve-se observar que a variável *barrada* $\overline{p}$ não representa uma *proposição*,

[111] Como observa Hylton (Hylton, 2008, The Theory of Descriptions, p.191 e 192), acerca de Russell, os objetos aos quais uma proposição se refere são partes constituintes da proposição. E de maneira similar, aqui os objetos representados devem ser tomados como parte do sistema de linguagem, ou ainda, como a origem desse sistema de referências - de maneira similar a como zero é dito ser a origem do plano cartesiano.

mas um conjunto de *sinais proposicionais* elementares *sem atribuição de valores verdade*: apenas obtemos uma proposição após a aplicação de uma operação lógica sobre $\bar{p}$, e no caso da ideografia, do operador *N*. De fato, dada uma lista de sinais proposicionais *(p,q,r)*, para obter uma proposição a partir deles é preciso determinar ainda se as suas condições de verdade serão relacionadas por meio de uma conjunção, ou de uma disjunção, ou por condicionais, etc.[112] Sinais barrados, como $\bar{\xi}$, devem ser tomados como *variáveis livres* (ao passo que sinais não barrados, como ξ, por *esquemas*), e $\bar{\xi}$ apenas se torna uma *proposição* ao aplicarmos uma operação sobre ela, como *N*, obtendo $N(\bar{\xi})$, por exemplo.

Com isso é possível tornar clara a relação entre tautologias e equações aritméticas. Tautologias são dadas por seqüências de operações que se anulam completamente e, portanto, equivalem à aplicação de *0* operações lógicas sobre um conjunto de sinais proposicionais. O resultado de uma tautologia é uma proposição sem sentido, que não delimita nenhuma possibilidade de ligação de objetos em oposição às demais, deixando com isso em aberto todas as suas possíveis ligações e assim refletindo a estrutura do espaço lógico representado. O caso se justifica pela seguinte passagem:

> 4.466 A uma determinada ligação lógica de sinais corresponde uma determinada ligação lógica de seus significados; *toda* e *qualquer* ligação só corresponde aos sinais desligados. Isso quer dizer que as proposições verdadeiras para toda situação não podem ser, de modo algum, ligações de sinais, pois, do contrário, a elas só poderiam corresponder ligações determinadas de objetos. (E a nenhuma ligação lógica corresponde *nenhuma* ligação dos objetos). Tautologia e contradição são os casos-limite da ligação de sinais, ou seja, sua dissolução.

[112] Tomar a lista de sinais *(p, q, r)* como a afirmação da verdade dessas proposições já é aplicar a elas o produto lógico, de maneira que $\bar{\xi}$ não pode ser uma proposição, mas meramente uma lista de sinais proposicionais não projetados simbolicamente.

O correspondente desse caso na ideografia é o conjunto de sinais proposicionais $\overline{p}$, dada por $[\overline{\delta}, N(\overline{\delta})]^{0'}(\overline{p}) = \overline{p}$. Por esse se tratar de um mero conjunto de sinais proposicionais, de uma variável livre, e não de sinais proposicionais projetados simbolicamente, ela igualmente deixa em aberto as possíveis ligações entre os nomes envolvidos - em correspondência clara às possíveis ligações entre objetos deixadas em aberto por uma tautologia. É o que explica Wittgenstein tratar tautologias como um "método zero":

> 4.461 Tautologia e contradição não são, porém, contrassensos; pertencem ao simbolismo, analogamente à maneira, na verdade, como o "0" pertence ao simbolismo da aritmética.
>
> 6.121 As proposições da lógica demonstram as propriedades lógicas das proposições, ao ligá-las em proposições que não dizem nada. Esse método poderia também chamar-se um método-zero.

Na seção 1.3, tautologias como $p \equiv \sim\sim p$ foram apresentadas em correspondência com regras dos sinais como $p = \sim\sim p$, as quais teriam por correspondentes aritméticos equações como *y=2x*, conforme mencionado na Introdução. Essa apresentação apenas nos permite associar a equações tautologias envolvendo *bicondicionais*, ou seja, tautologias que expressam regras de substituição; mas não tautologias como $p \vee \sim p$ ou $(p \cdot (p \rightarrow q)) \rightarrow q$. Essas últimas, no entanto, têm por correspondentes aritméticos equações como *x+y=0*, por exemplo, e na verdade, como qualquer equação pode ser reescrita como uma identidade a zero, temos que tautologias em geral têm por correspondentes identidades desse tipo, de onde o "método zero", mencionado em *T6.121*. Com isso, o correspondente no sistema de sinais às tautologias que estruturam o sistema simbólico são equações, as quais sempre podem ser reescritas na forma de identidades com 0 - a origem do sistema de referências de uma série (origem essa que tem por correspondente, no sistema simbólico, o próprio espaço de possibilidades representado, as possíveis ligações entre objetos que servem como referência 'absoluta' a um sistema símbolos). Assim - e exatamente por ser possível expressar tautologias e contradições por meio de sistemas de equações - é possível tomar a matemática como um *método lógico*.

Dessa interpretação tem-se por fim que na ideografia do *Tractatus* mesmo proposições elementares resultam da aplicação de operações, visto, em caso contrário, elas resultariam na posição 0 de uma série – em uma simples enumeração de sinais proposicionais, como $\overline{p}$, e não em uma proposição. Esse seria mais um ponto em favor da consideração de que, ainda que *numerais* não participem de *proposições elementares*, tendo em vista a sua independência mútua, elas ainda assim têm um *número* atribuído, dado por sua posição em uma série de proposições. Tal argumento é parte do que será utilizado no item a seguir, contra interpretações logicistas do *Tractatus*.

2.4 A Ideografia e o Logicismo

Como mencionado no item 2.2, o argumento contra a existência de um logicismo no *Tractatus* irá se basear em dois pontos: a) as duas versões da Forma Geral da Série antes apresentam *aspectos* distintos da mesma forma lógica - tendo, portanto, a mesma multiplicidade - ao invés de uma hierarquia entre notações, onde uma seria mais fundamental que a outra no estabelecimento da ideografia; e b) a Forma Geral do Número toma como variável mesmo a Forma Geral da Operação, Ω, baseada em reiterações do operador lógico *N*, de maneira a ela refletir regras de substituições de sinais em geral, e não apenas a sintaxe dos operadores lógicos. Além desses dois argumentos, ao final da presente seção é acrescentado o tópico (c), onde é feita a discussão acerca dos usos legítimos e ilegítimos da identidade no *Tractatus*.

a) A redução da matemática à lógica se justifica na leitura logicista por expoentes de operações, números, serem introduzidos na segunda versão da Forma Geral da Série por meio de *definições*, realizadas tendo por base a sua primeira versão, em que constam apenas operações lógicas e o esquema recursivo. Algo do tipo permitiria, no argumento de Frascolla[113], seguido por Marion[114] e Cuter[115], uma redução da Teoria da Aritmética a uma Teoria das Operações Lógicas. Nesse caso, as definições por meio das quais foram introduzidos expoentes numéricos funcionariam de maneira similar a *descrições definidas*. De fato, a forma analisada de “há três carros na garagem” se escreve como $(\exists x).fx.(\exists y).fy.(\exists z).fz.\sim(Ew,x,y,z).fw.fx.fy.fz$, na qual não ocorre nenhum *numeral*,

[113] Frascolla, 1994, p.38.
[114] Marion, 1998, p.26.
[115] Cuter, 2005.

conforme *T5.5321*[116]. O numeral 'três' no caso encontra aplicação por meio do plural da descrição definida 'carros na garagem' - como em "há exatamente três carros na garagem" - podendo ser descartado juntamente com ela em uma proposição analisada, de modo ao uso de numerais em proposições se reduzir, nesse exemplo, a um produto lógico.

Expedientes como descrições definidas, e também o uso de numerais na acepção logicista do *Tractatus* acima, têm por objetivo *resumir a informação*. Sua principal motivação são limitações humanas empíricas de *memória* e *processamento* dos sinais, visto que a comunicação utilizando apenas proposições analisadas tornaria inviáveis atividades corriqueiras do dia a dia, ao passo que, com o uso de descrições definidas, parte da complexidade da situação sendo representada se desloca para as regras sintáticas do sistema notacional, ao invés de se apresentar no próprio sinal a ser comunicado[117]. Esse é o argumento de Frascolla ao afirmar haver uma limitação

---

[116] "A proposição 'apenas um x satisfaz f()' formula-se: $(\exists x).fx :\sim (Ex, y).fx.fy$" (*T5.5321*). Aqui Wittgenstein se vale de sua concepção de variáveis 'mutuamente exclusivas'. Dadas as variáveis proposicionais *fw*, *fx*, *fy* e *fz*, o escopo de *w*, *x*, *y* e *z* é o mesmo, por ser dado pelas possíveis ligações de uma mesma parte fixa, *'f'*. No entanto, *w*, *x*, *y* e *z* nunca podem assumir simultaneamente os mesmos valores na notação pretendida pelo Tractatus (*T5.53*, *T5.532*). Isso garante que a expressão apresentada expresse que exatamente três objetos têm a propriedade *f*. No entanto, parece haver um grave problema nessa abordagem. Com essa notação Wittgenstein pode descartar a existência de classes - caso nenhum objeto satisfaça as condições da proposição, não obtemos uma classe vazia, mas simplesmente uma proposição *falsa* para todo *w*, *x*, *y* e *z*. O problema se dá quando não temos objetos no mundo o suficiente para instanciar simultaneamente as variáveis *w*, *x*, *y* e *z*. Ou seja, para que a proposição apresentada tenha sentido, devem existir pelo menos quatro objetos no mundo. Isso é inviável porque devemos poder construir proposições com sentido envolvendo números quaisquer, o que demandaria a existência de infinitos objetos.

[117] Quanto mais resumida a informação no sinal proposicional, mais complexo o sistema de sintaxe em que ele se insere, de onde a linguagem natural constituir um emaranhado de regras: "*T4.002* O homem possui a capacidade de construir linguagens com as quais se pode exprimir todo sentido, sem fazer idéia de como e do que cada palavra significa – como também falamos sem saber como se produzem os sons particulares. A linguagem corrente é parte do organismo humano, e não menos complicada que ele. É humanamente impossível extrair dela, de modo imediato, a lógica da linguagem. A linguagem é um traje que disfarça o pensamento. E, na verdade, de um modo tal que não se pode inferir, da forma exterior do traje, a forma do pensamento trajado; isso porque a forma exterior do traje foi constituída segundo fins

cognitiva que nós, seres humanos finitos, teríamos em relação a um hipotético "deus extensional-onisciente", "com visão extensionalmente completa das relações formais entre expressões lingüísticas" (Frascolla, 1994, p.31), o qual, portanto, não necessitaria lançar mão de recursos como descrições em sua práxis com a linguagem. Naturalmente, o *deus ex machina* de Frascolla não é um recurso utilizado no *Tractatus* e na verdade algo do tipo parece contradizer o próprio prefácio do livro[118]. De qualquer maneira, essa interpretação aparentemente é motivada pelas seguintes passagens:

> 6.126 Pode-se calcular se uma proposição pertence à lógica calculando-se as propriedades lógicas do *símbolo*. É o que fazemos quando "demonstramos" uma proposição lógica. Pois, sem nos preocuparmos com um sentido e um significado, constituímos a proposição lógica a partir de outras segundo meras *regras notacionais*. (...). Naturalmente, essa maneira de mostrar que suas proposições são tautologias não é de modo algum essencial para a lógica. Já porque as proposições de que parte a demonstração devem mostrar, sem demonstração, que são tautologias.
>
> 6.1262 A demonstração na lógica é apenas um expediente mecânico para facilitar o reconhecimento da tautologia, quando ela é complicada.

T6.126 e *T6.1262* se aplicam tanto a proposições não analisadas, envolvendo descrições definidas, quanto a proposições analisadas, as quais, devido a sua complexidade, não são imediatamente *lidas* por nós em toda extensão de suas relações lógicas. O cálculo com sinais seria, portanto, perfeitamente dispensável e se justifica tão somente por nossas limitações cognitivas, empíricas, no processamento da informação apresentada nesses sinais. Tendo em vista esse contexto, o contra-argumento ao logicismo deve se dividir em três pontos: i) mostrar que, ainda que *numerais* atuem em proposições de

---

inteiramente diferentes de tornar reconhecível a forma do corpo. Os acordos tácitos que permitem o entendimento da linguagem corrente são enormemente complicados.".

[118] Wittgenstein se vale de 'deus' em passagens tratando a lógica da linguagem apenas para realçar que mesmo o suposto deus não poderia violar a lógica, e não para atribuir a ele poderes maiores que os nossos na manipulação de símbolos, como parece pretender Frascolla. Segundo o prefácio, o limite para a expressão dos pensamentos "só poderá, pois, ser tralado na linguagem, e o que estiver além do limite será simplesmente um contrassenso" (Wittgenstein, 1994, Prefácio, p.131); e o mesmo vale para pretensas divindades. Em uma linguagem geramos, manipulamos e transformamos sinais, sendo esse um traço intrínseco a ela, do qual mesmo deus não poderia escapar.

modo similar a descrições definidas, a introdução dos *números*, feita na segunda versão da Forma Geral da Série, não se dá à maneira de uma descrição definida, não *resume* qualquer informação (ver p.97 acerca da acepção de ‘numeral’ e ‘número’ aqui pretendida); ii) as notações apresentadas pela primeira e segunda versão da Forma Geral da Série possuem exatamente a *mesma multiplicidade*, e portanto não poderiam ser consideradas como sendo uma ‘mais fundamental’ que a outra; e iii) ainda que venhamos a apreender ‘de uma só vez’ as relações lógicas das proposições a partir de seus sinais, como faz o deus proposto por Frascolla, temos que o cálculo, mesmo em uma linguagem completamente analisada, expressa *aspectos* da posição do sinal em um sistema, sendo a possibilidade mesma dessa expressão uma característica intrínseca a qualquer sistema notacional e, portanto, não descartável, como seria o uso de descrições definidas.

(i)

Numerais atuam de maneira similar a descrições definidas ao *resumir* a informação apresentada em sinais proposicionais, mas não se pode dizer o mesmo acerca de *números*. Os *numerais* 1, 2, 3, etc. são introduzidos em *T6.02* por meio das definições *0+1=1 Def.*, *0+1+1=2 Def.*, *0+1+1+1=3 Def.* etc.; ou seja, a partir da sintaxe dos *números*: *0, 0+1, 0+1+1,...* (ver p.97). Ocorre, no entanto, que *numerais* de fato resumem a informação expressa em sinais proposicionais, de maneira similar a descrições, mas o mesmo não se dá em expressões com *números,* como se deve mostrar no que segue. A expressão $\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x$, por exemplo, na notação da primeira versão da Forma Geral da Série, se escreve em uma notação com numerais como $\Omega^{5}{}'x$, onde claramente lançamos mão de menos sinais para exprimir o mesmo símbolo. Já na notação da segunda versão da Forma Geral da Série, tal símbolo se escreve como $\Omega^{0+1+1+1+1+1}{}'x$, e nesse caso não há qualquer economia na quantidade de sinais utilizados (pelo contrário, temos nela catorze sinais, ao invés de somente onze). Assim, a obtenção da segunda versão da Forma Geral da Série a partir da primeira versão não é *arbitrária* como seria no caso das *convenções* por meio das quais introduzimos descrições definidas para facilitar a manipulação cotidiana de sinais, mas *intrínseca* à forma lógica em questão. Ainda que *numerais* possam ter seu uso interpretado de maneira similar ao uso de descrições definidas, o mesmo não pode ser feito acerca de *números,* dada forma como eles são introduzidos na segunda versão da Forma Geral da Série. Esses últimos refletem a própria ideia de *multiplicidade* por indicarem a posição de termos em séries em geral - sendo, portanto, um traço característico do próprio conceito de séries de sinais. Com isso, a função dos expoentes na segunda versão da Forma Geral da Série não é a de resumir a informação expressa nos sinais tendo em vista nossas limitações cognitivas, mas antes apresentar um *aspecto* dessa mesma informação. Esse será o principal argumento em (ii), a seguir.

(ii)

Por meio de definições introduzimos novas notações[119]. Definições são dadas por meio de identidades, sendo esse um dos dois usos legítimos dessas últimas no *Tractatus*: identidades na definição das *regras de um cálculo* e identidades em aplicações dessas regras, ao longo da *execução do cálculo*. Em ambos os casos realizamos *construções*

[119] "*T3.343* Definições são regras de tradução de uma linguagem para outra. Cada notação correta deve poder traduzir-se em cada uma das demais segundo tais regras: é *isso* que todas elas têm em comum."

lingüísticas, no primeiro *introduzimos* uma nova notação e no segundo *geramos* sinais em uma notação. Exemplos do primeiro tipo são: i) 0+1+1=2 Def. (*T6.02*), ii) $a=b$ Def. (*T4.241*)[120], iii) $x = \Omega^{0'}x$ Def. e $\Omega'\Omega^{\nu'}x = \Omega^{\nu+1'}x$ Def. (*T6.02*). Exemplos do segundo, iv) $\Omega'\Omega'x = \Omega^{0+1+1'}x = \Omega^{2'}x$ (*T6.02*), v) 1+1+1+1=(1+1)+(1+1) (*T6.231*) e vi) em cada um dos passos na demonstração de 2x2=4, em *T6.241*.

Vê-se claramente o uso sintático atribuído à identidade em todos esses casos, seja na *definição* de regras para substituições de sinais (regras essas cuja definição é ela mesma uma instância, enquanto esquema) ou na *demonstração* de outras regras de sinais baseadas nessas definições (desdobramentos das definições desse sistema). Em todos eles, ou a identidade atua em pontos de cruzamento entre séries em uma mesma notação ou a apontar o *isomorfismo* entre as expressões envolvidas na *tradução* de uma notação pela outra[121]. Por isomorfismo se deve entender aqui a identidade entre *formas lógicas*, dada pela indicação da mesma *posição* em um sistema - de uma mesma *multiplicidade* - apesar do uso de sinais distintos. Assim, a multiplicidade equivalente que a identidade indica entre sinais pode ser explicada como uma identidade de *significado* – ao se tomar por 'significado' a noção de 'posição em um sistema'[122].

---

[120] "4.241... (Se introduzo, por meio de uma equação, um novo sinal "*b*", determinando que lhe cumpre substituir um sinal "*a*" já conhecido, escrevo a equação – definição – na forma "*a=b* Def." (como Russell). A definição é uma regra notacional.)"

[121] Outro uso da identidade seria ainda em cada etapa na geração dos termos de uma *mesma* série, a cada aplicação do esquema que a define (não se tratando, portanto, de um cruzamento entre séries). A definição se dá como uma regra de anulação, que estabelece um esquema de substituições e assim delimita a classe de equivalência que engloba os termos dessa série.

[122] Essa interpretação permite esclarecer a aparente confusão entre *significado* e *referência* no *Tractatus*. Como observa Frascolla (Frascolla, 1994, p. 27-30), em *T6.2322* e *T6.2323* Wittgenstein fala na identidade de significado das expressões nos dois lados de uma identidade ou de uma equação. Por outro lado, por significado usualmente se entende a *referência* de um nome - o objeto que ele nomeia. Se por significado toma-se a posição de um termo no sistema de linguagem, temos que uma identidade, ou uma equação, indica que as expressões em ambos os lados de seu sinal ocupam a mesma posição. Já no caso de um nome, sua posição no sistema é dada pelo objeto que ele nomeia, de onde significado e

As *definições* por meio das quais Wittgenstein introduz a Forma Geral da Série, com expoentes, a partir de sua formulação sem expoentes, são as que seguem:

> 6.02 E assim chegamos aos números: defino
>
> $x = \Omega^{0'} x$ Def. (i)
> $\Omega'\Omega^{v'} x = \Omega^{v+1'} x$ Def. (ii)

Nomeei acima a base e o passo indutivo como (i) e (ii). Essas duas expressões *entrelaçam* as séries de sinais $[x, \xi, \Omega'\xi]$ e $[\Omega^{0}{}' x, \Omega^{v'} x, \Omega^{v+1'} x]$ da seguinte forma. Em (i) temos, ao lado esquerdo da identidade, o primeiro termo da série $[x, \xi, \Omega'\xi]$, e do lado direito o primeiro termo da série $[\Omega^{0}{}' x, \Omega^{v'} x, \Omega^{v+1'} x]$. Aplicando a $\Omega^{0'} x$ uma iteração da operação Ω, obtemos $\Omega'\Omega^{0'} x$, e dessa última expressão, juntamente de (i), por substituição, que $\Omega' x = \Omega'\Omega^{0'} x$. A partir desse último passo e de (ii) temos então $\Omega' x = \Omega^{0+1'} x$, onde o lado esquerdo da identidade corresponde ao segundo termo da série $[x, \xi, \Omega'\xi]$ e o lado direito ao segundo termo da série $[\Omega^{0}{}' x, \Omega^{v'} x, \Omega^{v+1'} x]$. O mesmo procedimento pode ser aplicado a qualquer membro da série $[x, \xi, \Omega'\xi]$ resultando em um termo na série $[\Omega^{0}{}' x, \Omega^{v'} x, \Omega^{v+1'} x]$ e mantendo a ordenação entre ambas. Temos assim identidades, na mesma ordem, entre os elementos de uma e outra série em $x = \Omega^{0'} x$, $\Omega' x = \Omega^{0+1'} x$, $\Omega'\Omega' x = \Omega^{0+1+1'} x$,..., de onde a definição recursiva em *T6.02* também se pode escrever como[123]: $[x, \xi, \Omega'\xi] = [\Omega^{0}{}' x, \Omega^{v'} x, \Omega^{v+1'} x]$.

---

referência coincidirem *nesse caso*. Já operações lógicas, por exemplo, possuem um significado, visto que elas obviamente participam de um sistema de linguagem, mas não uma referência, de onde, nesse exemplo, significado e referência não coincidem.

[123] Onde ξ se deixa substituir, a cada passo recursivo, por $\Omega'\xi$, enquanto v por $v+1$. Temos então:
$\xi \rightarrow \Omega'\xi \rightarrow \Omega'\Omega'\xi \rightarrow \Omega'\Omega'\Omega'\xi \rightarrow \ldots$ e
$v \rightarrow v+1 \rightarrow (v+1)+1 \rightarrow ((v+1)+1)+1\ldots$

A *identidade* termo a termo em cada notação resulta em uma *multiplicidade equivalente* entre as *notações*. Ao início da seção 1.1, a respeito das passagens *T4.04*, *T4.041* e *T5.475*, foi mencionado que o conceito de *multiplicidade* tem duas acepções no *Tractatus*: a primeira referindo-se à multiplicidade determinada por uma posição em um sistema e a segunda à multiplicidade do próprio sistema de posições (ou notação) - sendo ambas as acepções indissociáveis, visto se tratar de sistemas de *posições relativas*[124]. A identidade $[x, \xi, \Omega'\xi] = [\Omega^{0}{}'x, \Omega^{\nu'}x, \Omega^{\nu+1'}x]$ indica assim uma multiplicidade equivalente entre notações, à qual corresponde uma multiplicidade equivalente entre os respectivos termos em uma e outra.

No caso de descrições definidas igualmente introduzimos uma nova notação, a qual deve ter exatamente a mesma multiplicidade da original. Não fosse assim, a nova notação envolvendo descrições não teria a multiplicidade correta na representação dos fatos: ainda que a complexidade da situação representada não se encontre toda ela expressa à superfície do sinal não analisado, o *sistema de sintaxe* em que ele se insere deve permitir transformações de sinais de modo a obter seus elementos. No entanto, na correspondência termo a termo dada por $x = \Omega^{0'}x$ Def. e $\Omega'\Omega^{\nu'}x = \Omega^{\nu+1'}x$ se dá algo distinto. Nela, como visto no subitem (i) (p.106), não há qualquer multiplicidade *não expressa* nos sinais de cada termo na versão da série com expoentes, de maneira que os sinais $\Omega'x$ e $\Omega^{0+1'}x$, por exemplo, têm exatamente a mesma multiplicidade, e com isso $[x, \xi, \Omega'\xi]$ e $[\Omega^{0}{}'x, \Omega^{\nu'}x, \Omega^{\nu+1'}x]$ antes expressam *aspectos distintos* de um *mesmo*

---

[124] João Matias é a mesma pessoa, seja na hierarquia em seu trabalho ou na hierarquia da sociedade secreta de que participa (essas são relações externas de João Matias, e não internas). O mesmo não se dá aqui: a posição de um termo em um sistema é uma propriedade interna sua, de maneira a não se poder imaginá-lo 'fora' do sistema e, inversamente, um sistema não é o mesmo se modificarmos qualquer uma de suas posições.

conceito formal – o conceito de Série – do que a ‘subordinação’ de uma notação à outra. Mudamos apenas a forma de apresentação do conceito de Série de maneira a tornar explícita, em $[\Omega^{0}{}'x, \Omega^{\nu'}x, \Omega^{\nu+1'}x]$, a variável numérica *subentendida* na expressão $[x, \xi, \Omega'\xi]$.

(iii)

Como observa Frascolla, a possibilidade de expressar um mesmo significado por meio de sinais distintos é a resposta apresentada por Wittgenstein para o problema de como identidades poderiam ter ‘conteúdo informacional’ (Frascolla, 1994, p.27). Na passagem dos *Notebooks* citada por ele (*NB, 6/9/14*) essa se trata da “velha objeção de que se 2x2 fosse realmente o mesmo que 4, então essa proposição [“2x2=4”] não diria nada mais que *a*=*a*”. Já por meio da “pluralidade de maneiras de se ver um símbolo” (Frascolla, 1994, idem), Wittgenstein pode solucionar o problema sem apelar à distinção entre sentido e referência de Frege[125], sendo nessa acepção que se deve entender o fato de os lados da identidade 2x2=4 tão somente apresentarem *aspectos* distintos da *mesma* informação[126]. Essa interpretação pode ser estendida à relação entre as duas versões da Forma Geral da Série, visto que elas - dadas as identidades utilizadas termo a termo na definição da versão com expoentes a partir da versão sem expoentes - satisfazem a identidade $[x, \xi, \Omega'\xi] = [\Omega^{0}{}'x, \Omega^{\nu'}x, \Omega^{\nu+1'}x]$.

No entanto, como visto, Frascolla considera tais usos da identidade dispensáveis por um ‘deus extensional-onisciente’, para o qual não seria necessário nenhum cálculo com uso de identidades para apresentar de maneira perspícua o significado de uma expressão em

[125] Vide nota 58, item 1.1.1.
[126] “6.2323 A equação assinala apenas o *ponto de vista* do qual considero as duas expressões, a saber, o ponto de vista de sua igualdade de significado” (itálico meu).

seu próprio sinal. Isso deve ocorrer mesmo em linguagens *completamente analisadas,* e não apenas naquelas que se valem de descrições definidas, visto transformações tautológicas simplificarem a apresentação explícita das ligações lógicas das proposições em questão, ainda que que tais ligações já estivessem contidas nas expressões originais, sem necessidade de qualquer transformação. Dessa maneira, o cálculo com sinais, e com ele a matemática, seriam dispensáveis não fossem nossas limitações empíricas no processamento da informação - a matemática seria somente um recurso na apresentação explícita de relações lógicas que não percebemos de *imediato* nos sinais e, portanto, não seria essencial no uso da linguagem.

Contra esse argumento, deve-se notar que mesmo o hipotético deus ainda assim deve se valer de *sinais* no uso da linguagem, e existem potencialmente infinitas formas de expressar o mesmo conteúdo por meio de diferentes sinais em uma mesma notação. Por exemplo, a identidade 2+3=7-2 expressa a *mesma* posição em um sistema numérico sob *aspectos* distintos: o lado esquerdo da identidade expressa a *posição relativa* de 5 para com 2 e 3, e o lado direito sua *posição relativa* a 7 e 2. Mesmo a expressão de 5 sob a forma 0+1+1+1+1+1 expressa uma posição relativa; no caso, a 0 e 1 – e também o número 0 tem infinitas formas de expressão, como 2+3-5, 25-25, etc. Além disso, 0 não poderia ser considerado uma posição absoluta por ser arbitrariamente estabelecido como a origem da série: a Forma Geral da Série não possui uma origem fixada, sendo ela expressa pela variável não barrada *x*, ao contrário do que ocorre com a Forma Geral da Proposição, que tem o conjunto de proposições elementares $\overline{p}$ por origem (de maneira similar a como a origem do plano cartesiano é arbitrariamente estabelecida na descrição de um objeto geométrico). Em outras palavras, *não há como expressar a posição em uma série de sinais a não ser relativamente a outras posições*; sendo essa uma conseqüência da própria estrutura matemática de nossa linguagem. Tentar exprimir a '*posição absoluta*' de um símbolo demandaria apresentar sua posição relativamente a *todas* as (potencialmente) infinitas posições na série, algo que mesmo um deus extensional-onisciente não poderia fazer[127]. O mesmo pode ser dito acerca das possíveis expressões tautológicas de uma mesma proposição: também o suposto deus deve se expressar por meio de *alguma* delas, e nenhuma entre essas expressões pode ser considerada como *mais fundamental* que as outras[128]. Assim, ainda que possamos de fato dispensar o cálculo no reconhecimento de tautologias (*T6.1262*), a possibilidade de apresentar aspectos de um mesmo símbolo por meio de sinais diversos é uma *propriedade interna* da linguagem, característica de sistemas de sinais quaisquer, e não um recurso arbitrário como no caso de descrições definidas.

A possibilidade de se obter potencialmente infinitas expressões de uma mesma proposição é justificada pela forma como foi determinada a sintaxe lógica de um sistema de sinais a partir da ordenação apresentada na Tabela 3, seções 1.2 e 1.3. Regras de sintaxe são determinadas a partir de *pontos de anulação* ao se percorrer a Tabela 2 por meio da aplicação de operações. Com isso, obtemos classes de equivalência potencialmente infinitas de expressões, de onde o estabelecimento da sintaxe de sinais quaisquer necessariamente ter um caráter recursivo, e originar dessa maneira um sistema potencialmente infinito de *posições relativas*. Essa é uma característica

---

[127] Seria possível atribuir capacidades que se queira a tal deus imaginário, mas ainda que o façamos, em *T5.32* Wittgenstein claramente limita as reiterações de operações a um número finito delas (ver nota 40). Além disso, ao final do item 1.2 foi argumentado que uma operação composta de infinitos passos não chega a ponto de anulação algum - e com isso não configura qualquer regra de sintaxe - antes resultando em um contrassenso. Dessa maneira, a expressão de uma 'posição absoluta' para com o sistema de sinais como um todo é uma impossibilidade da própria sintaxe.

[128] Mesmo na ideografia, lançando mão apenas do operador *N*, há infinitas formas de se expressar a mesma proposição, como se vê em *N(p,p)=N(N(N(p,p))*. Da mesma maneira, podemos apresentar uma proposição por meio de tabelas verdade, por meio de sinais proposicionais, por meio de uma pintura, etc., sem que se perca capacidade expressiva entre essas apresentações.

intrínseca a qualquer sistema de sinais e, portanto, essencial à linguagem. Além disso, o simples 'ato' de *gerar sinais* mediante regras recursivas em um sistema – algo do qual mesmo o hipotético deus não poderia escapar no uso da linguagem – deve ser considerado uma atividade matemática, por envolver certo *número* de iterações das regras do sistema.

b) Por meio do procedimento *T3.315*, da Forma Geral da Série $[\Omega^{0}{}' x, \Omega^{\nu'} x, \Omega^{\nu+1'} x]$ chega-se à Forma Geral do Número, $[0, \xi, \xi+1]$, ao tornarmos variável mesmo a Forma Geral da Operação Lógica, Ω - sendo essa última ela mesma uma variável para operações compostas de aplicações reiteradas do operador lógico *N*. Com isso, os possíveis valores de Ω são *operações verdade*, ao passo que, ao tornar variável mesmo o sinal Ω na Forma Geral do Número, a ideografia do *Tractatus* dá abertura à possibilidade de outros tipos de *operações* na transformação de sinais, que não apenas operações lógicas. Assim, ainda que números apenas se apliquem *ao mundo* por meio de operadores lógicos, os quais relacionam os valores verdade das proposições em um *sistema simbólico*, eles também devem poder se aplicar à sintaxe de sinais quaisquer na constituição de *sistemas de sinais* em geral, e não apenas na sintaxe de conectivos. Que esse seja o caso justifica equações matemáticas serem pseudoproposições sem valores verdade atribuídos, ao contrário do que ocorre com tautologias, exatamente por lidarem com substituições de sinais dadas por operações quaisquer, e não apenas por operações verdade, o que garante ainda à matemática certa autonomia para com sua aplicação simbólica.

Esse é o segundo argumento contra o logicismo no *Tractatus*, por permitir a aplicação da matemática a outras regras de sinais que não apenas operações lógicas. No entanto, essa maior amplitude de aplicações poderia sugerir um reducionismo inverso, da lógica à matemática, visto a sintaxe das operações configurar apenas um caso particular dentre os possíveis usos de equações. A regra sintática *p=~~p*, por exemplo, teria por correspondente aritmético a classe de equivalência gerada pela equação *y=2x*, como mencionado na seção 2.3, a qual poderia, no entanto, igualmente ter aplicação em outras categorias de sinais que não operações lógicas. Apesar de ser esse o caso, o tipo de *generalidade* de que trata o procedimento de transformação de constantes em variáveis em *T3.315* deve ser qualificado - e uma vez feito isso, ambos os tipos de *redução* irão se mostrar inviáveis, como se verá adiante. A seguir é apresentada a impossibilidade de redução da matemática à lógica, e na sequência a impossibilidade de redução da lógica à matemática.

No que diz respeito à impossibilidade de se reduzir a matemática à lógica, a existência de outras operações na transformação de sinais que não apenas operações lógicas permite explicar como é possível obter séries formais que não poderiam se valer de *composições* do operador *N* como regra para a geração de seus termos. A Série Sucessor, por exemplo, apresentada em *T4.1273* como aRb, $(\exists x): aRx.xRb$, $(\exists x, y): aRx.xRy.yRb, ...$, introduz a cada termo novas variáveis *x*, *y*, *z*, etc., e não há indício de como a sintaxe de *N* poderia realizar algo do tipo[129]. Em outras palavras, "*b* é

[129] Em outro exemplo, uma série de proposições envolvendo *numerais* apresenta relações entre as condições de verdade de seus termos, visto eles se excluírem mutuamente, mas ela introduz novas variáveis a cada passo, algo que *N* não poderia fazer. Se a proposição "há três carros no pátio" se escreve como $(\exists x).fx.(\exists y).fy.(\exists z).fz. \sim (Ew, x, y, z).fw.fx.fy.fz$, podemos iniciar a contagem em 'zero', $\sim (Ew).fw$, e então gerar a série:
$\sim (Ew).fw$, $(\exists x).fx. \sim (Ew, x).fw.fx$, $(\exists x).fx.(\exists y).fy. \sim (Ew, x, y).fw.fx.fy$, $(\exists x).fx.(\exists y).fy.(\exists z).fz. \sim (Ew, x, y, z).fw.fx.fy.fz$,.... O desenvolvimento dessa série encontra o mesmo problema mencionado anteriormente: deveríamos ter *infinitos objetos* no mundo para que a regra que gera tal série não origine contrassensos a partir de certo número de aplicações, visto a introdução de novas variáveis a cada passo demandar objetos que as instanciem para que a proposição

o sucessor de *a*" certamente pode ser entendida, por exemplo, como uma *disjunção* entre os termos dessa série, mas tais termos não podem ser gerados *uns a partir dos outros* por meio da operação *N*. Isso porque a sintaxe de *N* se baseia nas relações entre as condições de verdade das proposições para expressar a posição de uma proposição em uma série, ao passo que os termos da Série Sucessor são *logicamente independentes* entre si: $(\exists x):aRx.xRb$ não implica na verdade ou falsidade de aRb e vice-versa, e o mesmo para quaisquer pares termos na série. Naturalmente, a relação de sucessão, *R*, *pode* ser considerada *transitiva*, de maneira a $(\exists x):aRx.xRb$ implicar logicamente em aRb; mas então as proposições aRb, *aRx*, *xRb*, *xRy*, *yRb*, etc. não poderiam ser *proposições elementares*, e os termos *a* e *b* deveriam ser nomes de complexos para que essas proposições tenham ligações lógicas entre si. Como não parece haver nenhuma razão para a relação de sucessão não ser permitida para proposições elementares (posto que a proposição "*aRb*", onde *a* e *b* são nomes simples, certamente faz sentido), deve ser necessária outra operação na transformação de sinais, que não *N*, para gerar os

obtida tenha sentido. Como dito, esse seria um problema grave para a notação proposta no *Tractatus*. De qualquer modo, mais um exemplo de série que a princípio não poderia ser gerada pela aplicação de composições de *N* é o de séries de termos de diversas ordens ou tipos. Na seção 2.5 será apresentada a série *fx*, *ϕ(fx)*, *ψ(ϕ(fx))*, *w(ψ(ϕ(fx)))*,..., onde *fx* é de primeira ordem, *ϕ(fx)* de segunda ordem, *ψ(ϕ(fx))* de terceira, etc. Em *T5.252*, Wittgenstein afirma claramente a possibilidade de se gerar uma série de termos de ordens sucessivamente superiores: "*T5.251* Uma função não pode ser seu próprio argumento, mas o resultado de uma operação pode muito bem vir a ser base dela própria."; "*T5.252* Só assim é possível a progressão de *termo a termo em uma série formal* (*de tipo a tipo na hierarquia de Russell e Whitehead*...)." (itálicos meus). No entanto, caso tais expressões fossem geradas por meio do operador *N*, então proposições em segunda ordem deveriam ser *funções verdade* de proposições em primeira ordem, e assim sucessivamente. Com isso, os conjuntos das pretensas proposições em segunda, terceira ordens, etc. colapsariam em proposições de primeira ordem, visto o uso da operação *N* na realidade não resultar em termos de ordens superiores à de sua base de aplicação. Em outras palavras, séries de sinais em uma hierarquia de tipos devem ser gerados por operações sintáticas distintas de operações lógicas - e as reiterações de tais operações, naturalmente, têm expoentes numéricos, podendo ser *contadas*. Certamente, existem proposições de segunda ordem que são funções verdade de proposições em primeira ordem, como '*a* tem todas as propriedades de um bom general', dada pela conjunção da atribuição de todas as propriedades de um bom general a '*a*' em um produto lógico de primeira ordem. No entanto, no caso apenas obtemos a conjunção a partir da proposição em segunda ordem, ao passo que a série das propriedades de um bom general não poderia ser gerada por composições de *N*.

termos dessa série a partir do termo inicial *aRb* - de modo que as *reiterações* de operações sintáticas que venham a gerar tal série podem, naturalmente, ser *contadas*; e de onde essas operações terem expoentes numéricos.

De fato, na passagem *T5.2521* Wittgenstein introduz operações utilizando uma notação distinta da apresentada na Forma Geral da Série em *T6.01*. Nela, temos [*a*,*x*,*O*'*x*], ao invés de $[x, \xi, \Omega' \xi]$. Assim, no lugar da variável Ω para composições de *N*, temos a variável operacional *O*, de onde essa notação aparentemente servir como indicação da possibilidade de outros tipos de operadores no *Tractatus*, a se levar em conta o princípio ideográfico de utilizar sinais distintos para símbolos distintos. No entanto, tal notação pode ter sido utilizada apenas por Wittgenstein ainda não ter introduzido sua notação ideográfica para operações lógicas, algo feito somente a partir de *T6*. Apesar dessa ressalva, no contexto geral parece claro que números podem se aplicar a séries de sinais quaisquer, de onde [*a*,*x*,*O*'*x*] de fato aparenta ser uma indicação da existência de outros tipos de séries que não ordenadas pelo operador *N*. Dessa maneira, a se interpretar operações no *Tractatus* abarcando transformações de sinais quaisquer, teríamos uma equivalência entre operações e *funções matemáticas em sua acepção usual*, como mencionado no item 1.1.1 acerca do artigo de Hylton a esse respeito. Tal interpretação daria à matemática um papel similar ao de Gramáticas Gerativas na obtenção do conjunto das *linguagens recursivas*[130], o que implica em atribuir a ela a capacidade expressiva de uma Máquina de Turing Universal, ou ainda, a de um *lambda calculus*,

---

[130] Vieira, 2004. Exemplo de regra de substituição em uma gramática gerativa é *A->Abb*, onde *A* é um *esquema* de substituição e as letras *b constantes*, ou *termos* - nesse caso, temos uma regra que gera qualquer seqüência com um número *par* de *b*'s. Existem diversos níveis de expressividade entre as gramáticas gerativas de acordo com sua complexidade. Das menos às mais expressivas, temos, em [Vieira, 2004, p.234] Linguagens Regulares, Linguagens Livres do Contexto, Linguagens Sensíveis ao Contexto, Linguagens Recursivas e Linguagens Recursivamente Enumeráveis.

dada a multiplicidade equivalente entre esses formalismos - algo que também permitiria antever no *Tractatus* certa conexão para com as noções de *cálculo*, *computação* e *decidibilidade* do *Período Intermediário*. No Anexo A será apresentada a correspondência entre a notação de Wittgenstein e a de funções recursivo-primitivas, o que reforça essa interpretação.

Como mencionado, a possibilidade da aplicação de números a outras sintaxes que não a de *N* pareceria apontar um reducionismo às avessas, da lógica à matemática, em que essa última teria maior *generalidade* que a primeira. De certo modo, na passagem da Forma Geral da Proposição à Forma Geral da Operação, e então à Forma Geral da Série e à Forma Geral do Número, passamos de *formas lógicas* menos a mais 'gerais', no sentido de que com elas expressamos, a cada passo, aspectos mais *amplos* da topologia de um sistema de sinais. Como mesmo Marion observa, "a forma geral da proposição é um *caso particular* da forma geral de uma 'operação'" (Marion, 1998, p.21; itálico meu). Tal generalidade, no entanto, não pode ser entendida à maneira de uma *teoria dos conjuntos*. Nessa última, a classe dos 'mortais' *contém* a classe dos 'homens', de modo a todo homem ser mortal. No entanto, uma proposição não é, obviamente, uma operação, e com isso uma suposta *hierarquia* entre conceitos formais não poderia refletir o tipo de generalidade em questão. A Forma Geral da Operação, da Série e do Número foram obtidas da Forma Geral da Proposição por meio da transformação de constantes em variáveis, e a Forma Geral da Proposição pode igualmente ser obtida pelo mesmo procedimento a partir de proposições *particulares* quaisquer. Assim, todas as formas lógicas expressas na ideografia já se encontram *em concreto* na expressão de qualquer *proposição particular*[131], de modo que elas não se articulam de modo hierárquico, mas antes se entrelaçam na configuração de um sistema ao apresentar, cada uma, um *aspecto* da topologia do sistema no próprio sinal proposicional. O caso será mais bem esclarecido no que segue.

Tomando a topologia de um sistema de sinais por um *grafo*, *proposições* corresponderiam aos *vértices*, enquanto *operações* às *arestas* que interligam esses vértices. *Séries*, por sua vez, delimitam diferentes *percursos* pelo grafo, e enfim, os pontos de cruzamentos entre tais séries mostram como elas se *entrelaçam*, articulando com isso um *sistema* de sinais. Tais pontos de cruzamento entre séries são estabelecidos por meio de *identidades* entre seus termos, as quais, por remeterem às *posições* de cada termo em sua respectiva série, podem ser expressas por meio de *equações matemáticas*. Passamos, assim, do aspecto mais *local* ao mais *amplo* na topologia de um sistema de sinais, mas com isso não obtemos uma hierarquia, por essas formas lógicas se encontrarem todas elas *sobrepostas* na Forma Geral da Proposição e, portanto, também em qualquer proposição ordinária. Isso se dá pela Forma Geral da Proposição apontar em seu próprio sinal a sua posição em um sistema, devendo necessariamente se valer de conceitos formais que indiquem essa posição, como os de *operação*, *série*, *número*, etc. Assim, na determinação de uma posição em um sistema de linguagem, devemos fixar a *operação* sendo reiterada, a *série* em que se dá a reiteração – ou seja, qual a seqüência particular de *ramificações* ou *bifurcações* ao longo das reiterações – e o *número* dessas

[131] E mesmo que *numerais* não possam participar de proposições elementares, ainda assim elas possuem uma *posição* em uma série, o que nos permite associar a elas um *número*.

iterações. Feito isso, os pontos de cruzamento entre as diversas séries na articulação desse *sistema* podem, então, ser expressos por meio de equações[132].

Enfim, nenhuma dessas formas lógicas pode ser tomada de maneira independente das demais na determinação da posição de uma proposição no sistema, e essa relação *horizontal* entre conceitos formais inviabiliza um ou outro tipo de reducionismo. A matemática e a lógica expressam tão somente aspectos distintos da estrutura de um sistema de linguagem - com a última remetendo às relações entre valores verdade das proposições na articulação de um *sistema simbólico* e a primeira ao cruzamento de séries na articulação de um *sistema de sinais*. É a distinção entre esses dois papéis permitirá relacionar o *construtivismo* do *Tractatus* à sua rejeição à *metalógica*, na seção 2.5, a seguir. Em conclusão, deve ser mencionado que Cuter (Cuter, 2005, p.64-66) igualmente percebe a necessidade de outras operações no *Tractatus* que não operações lógicas e interpreta a fórmula [*a*,*x*,*O*'*x*] assim como aqui. No entanto, ele considera que números seriam meros artifícios para resumir informação de maneira similar a descrições definidas, por defender o logicismo, ao passo que em (i), nesta seção, foi argumentado que algo do tipo pode ser correto acerca de *numerais*, mas não no que diz respeito a *números*. Além disso, pareceria estranho Wittgenstein incluir a Forma Geral do Número $[0,\xi,\xi+1]$ em sua ideografia caso números fossem simples artifícios dispensáveis: se podem ser reduzidos a iterações de operações lógicas, eles certamente

[132] Na associação com a Tabela 3, item 1.2, uma seqüência de operações percorre essa tabela em uma série, e o entrelaçamento das diversas séries configura o sistema de sinais (lembrando que são demandadas outras séries, que não apenas baseadas no operador *N*, para obter um cálculo de predicados, para além do cálculo proposicional – ver seção 2.4, p.114-124). Pontos de cruzamento entre séries podem ser expressos por equações, onde os números indicam as respectivas posições dos termos em cada uma das séries, como em 2+3=5. Assim, o ato de *fixar* os valores das variáveis formais de *operação*, *série* e *número* é de certa maneira análogo a fixar as coordenadas de um ponto em um plano cartesiano, obtendo com isso uma proposição.

não são essenciais à representação, e não deveriam constar numa ideografia. Contrariamente a essa interpretação, no entanto, temos que toda e qualquer iteração recursiva na geração de sinais subentende o uso de números.

À parte esse ponto em específico, Cuter observa que "Operações como O_i e O_{ii} se encontram subentendidas em variáveis proposicionais como ξ e η (Cuter, p.70)"[133], ao passo que, de maneira similar, ao começo da seção 2.2 foi argumentado serem necessárias novas fixações de ξ e η a cada etapa iterativa para a obtenção de todas as moleculares possíveis de se constituir a partir de um conjunto inicial de proposições elementares. Cuter considera que essas novas fixações podem ser executadas por *operações seletivas*, em contraste com *operações construtivas*, como *N* (ainda que *N* igualmente possa atuar como operação seletiva, em sua concepção) - e também essas operações se apresentam por meio de *séries*: no caso, séries formais. Isso faz a topologia de um sistema de sinais bastante similar à de um *grafo*, assim como argumentado no penúltimo parágrafo, estruturado por *pontos de cruzamento* entre *séries* os quais, por sua vez, podem ser descritos por *equações matemáticas* - sendo precisamente isso o que faz a matemática refletir os aspectos mais amplos da topologia de sistemas de sinais em geral.

Apenas como observação final aos paralelos e oposições entre a interpretação aqui apresentada e a de Cuter, em *T5.501* Wittgenstein afirma que a fixação de uma variável

[133] Cutter toma O_i como a operação que gera a série *aRb*, O_i'*aRb*, O_i'O_i'*aRb*,..., enquanto O_{ii} a que gera a série $\sim (Ew).fw$, $(\exists x).fx.\sim (Ew,x).fw.fx$, $(\exists x).fx.(\exists y).fy.\sim (Ew,x,y).fw.fx.fy$,.... Essas séries podem ser expressas, respectivamente, por $[aRb, x, O_i{}'x] = (\bar{\xi})$ e $[\sim (\exists x)\, fx, x, O_{ii}{}'x] = (\bar{\xi})$. Naturalmente, podem-se supor ainda outras séries formais como operações de seleção que atuem nas *bifurcações* de séries de composições de *N*, como mencionado na seção 2.2 (ver nota 104).

dada por uma regra formal resulta na *totalidade* dos eventualmente infinitos termos passíveis de ser gerados por essa série. No entanto, em *T5.32* temos que apenas podemos aplicar um número *finito* de *operações verdade* a proposições elementares. Cuter resolve essa aparente contradição com uma sutileza: não podemos ter infinitas aplicações de uma *operação verdade* por isso tornar indeterminado o sentido da proposição resultante – infinitas aplicações da operação *N* à proposição *p* não resultam nem em um número *par* nem *ímpar* de tais aplicações, de onde restar indeterminado se o resultado dessas aplicações é *p* ou *~p* (Cutter, 2005, p.68), ao passo que uma aplicação de *N* à *série formal infinita p, Np, NNp,...*, tem um resultado determinado, dado por *p.~p* (idem). Em outras palavras, podemos reunir uma série formal infinita sob uma totalidade, e apenas não o poderíamos fazer nos casos em que isso leve a uma indeterminação de sentido[134]. Cuter faz ainda a ressalva de que apenas ao final da década de 20 Wittgenstein viria a levar em consideração questões temporais a respeito do cálculo, o qual demandaria um tempo finito em sua execução. Com isso, não haveria outras restrições ao infinito atual no *Tractatus* que não a da determinação do sentido das proposições; e uma *subjetividade transcendental*, para além do espaço e do tempo, realizaria a reunião das infinitas instâncias da aplicação de uma operação sob uma totalidade. Apesar disso, e distintamente a essa leitura, deve-se observar que a própria regra de substituição que gera uma série, como, por exemplo, o esquema *p=~~p*, fornece a forma comum a todos os seus termos - e é exatamente essa forma o que nos permite reuni-los sem a necessidade de citação um a um, da mesma maneira que a

[134] Esses dois tipos de séries são dados, respectivamente, por *operações seletivas* e *operações construtivas*, no argumento de Cuter. A distinção é interessante por permitir esclarecer o contraste pretendido por Wittgenstein, em *T5.521*, entre a generalização e a aplicação de operações lógicas em sua abordagem da quantificação. Operações seletivas poderiam atuar primeiramente realizando a generalização, ao fixarem o valor de uma variável ξ em $\overline{\xi}$, sobre a qual somente então operações construtivas (ou seja, operações lógicas) são aplicadas. A esse respeito, ver nota 101, seção 2.2.

fixação de *fx* nos permite obter os eventualmente infinitos termos *fa*, *fb*, *fc*,...: sem que seja preciso escrevê-los em uma lista infinita e sem apelo a subjetividades transcendentais. O próprio esquema *fx* exibe a forma comum a qualquer uma de suas instâncias e, portanto, a *todas* elas.

Aparentemente, Wittgenstein apenas aceita um infinito atual no *Tractatus* em decorrência da possibilidade de infinitos objetos no mundo, caso em que nossas *operações formais* devem poder gerar *variáveis suficientes*, ou seja, infinitas, para representá-los. De fato, em *T5.501* ele propõe o uso de esquemas de regras de séries como uma forma de reunir os infinitos termos de uma série formal sem enumerá-los um por um (ver nota 77: considerar os elementos de uma série infinita como uma *totalidade* equivale a reuni-los em um *infinito atual*). Algo do tipo, no entanto, equivale a implicitamente aceitar as *impredicações* envolvidas na totalização de séries infinitas, como faz Frege (a esse respeito, ver nota 161, p.154, acerca das limitações do *Tractatus* no desenvolvimento da matemática), o que resulta uma incoerência interna ao *Tractatus*. Além disso, foi proposto ao final da seção 1.2 que uma restrição finitista se faz necessária por não ser possível estabelecer a sintaxe de uma *composição* de infinitas operações, e isso pelo simples fato de não haver qualquer *ponto de anulação* o qual, após certo *número* de iterações, pudesse servir como regra de sintaxe dessa composição, como faz o esquema *p=~~~~p*, por exemplo. O resultado de uma operação infinita resulta em um contrassenso por assim não obtermos nenhum sinal a se ligar, passo a passo, a um sistema de sinais, violando o caráter *recursivo* da sintaxe lógica. Não por acaso, sabe-se que Wittgenstein viria a considerar a aceitação da possibilidade de um infinito atual um dos equívocos do *Tractatus*, nas *Observações Filosóficas* (Wittgenstein, 2005), e *talvez* não por questões *exógenas* a ele – como a *temporalidade* envolvida em um cálculo, pretendida por Cuter – mas por uma questão de *coerência interna* ao livro. Sendo a sintaxe lógica apresentada no próprio *Tractatus* recursiva, seria impossível determinar a sintaxe de uma operação na ausência de um ponto de anulação que venha a exprimi-la sob a forma de um esquema. Tratar infinitas variáveis seria, com isso, uma impossibilidade da sintaxe lógica.

c) Frascolla cita a favor da redução da matemática à lógica o fato de identidades não constarem em qualquer proposição legítima da linguagem, em contraste, por exemplo, com o que ocorre com o bicondicional em lógica (Frascolla, 1994, p.27-29). No entanto, a identidade indica a aplicação de um *procedimento* na transformação de sinais, e não o resultado desse procedimento, de onde ela não participar de proposições. Com isso, identidades possuem um uso corriqueiro na linguagem – precisamente na transformação ou constituição de sinais. Esse é exatamente o argumento apresentado por Wittgenstein em *T6.211*[135], ao passo que a interpretação de Frascolla aparenta ser motivada por *T5.533*, onde temos que "O sinal de igualdade não é, portanto, um constituinte essencial da ideografia.". No entanto, nessa passagem Wittgenstein se refere à identidade aplicada a nomes simples e variáveis para objetos, como se vê nos exemplos apresentados em *T5.534*: "$a = a$", "$a = b.b = c. \supset a = c$", "$(x).x = x$" e "$(\exists x).x = a$". Tais casos poderiam ser evitados em uma ideografia pelo uso de sinais distintos para símbolos distintos, de onde o uso de identidades em *proposições* de fato não ser essencial em uma notação[136]. Algo do tipo, no entanto, de forma alguma impede seu uso em definições, no

---

[135] "6.211 Na vida, a proposição matemática nunca é aquilo de que precisamos, mas utilizamos a proposição matemática apenas para inferir, de proposições que não pertencem à matemática, outras que igualmente não pertencem à matemática.".

[136] Na verdade, a se levar em conta a teoria dos tipos, a identidade entre *indivíduos* sequer poderia ser definida a não ser de maneira impredicativa, se tratando, por tanto, de um contrassenso, conforme observa Hatcher (Hatcher, 1968, p.131-133). A definição de $x=y$ por meio da expressão

cálculo proposicional ou no cálculo matemático – e Wittgenstein mesmo lança mão de tais usos da identidade ao longo do *Tractatus*.

A esse respeito, no subitem (ii) desta seção (p.107), os usos de identidades foram divididos em *definições* (regras ou esquemas de séries) e em *aplicações* dessas definições (na geração de termos de tais séries ou em demonstrações de identidades entre séries). Esses usos diferem do que ocorre na identidade entre nomes simples, e por isso são legítimos, ao expressarem diferentes *aspectos*, diferentes *posições relativas* ocupadas pelos termos em um sistema. A possibilidade de duas expressões distintas para um mesmo símbolo não é *casual* nessas situações, ao contrário do que se dá na tradução de um mesmo nome em línguas diferentes, mas *essencial* ao símbolo. Os pontos de anulação que determinam a sintaxe das operações estabelecem potencialmente infinitas *posições relativas* entre as bases e os resultados de tais operações, ao passo que nomes simples ligam-se a *objetos*, ou seja, à única *referência absoluta* de um sistema de linguagem, não havendo como os lados da identidade exprimirem, no caso de nomes simples, diferentes aspectos, diferentes posições relativas entre termos, contrariamente do que se dá nos usos legítimos da identidade[137].

Acerca de tais usos legítimos da identidade, eles foram divididos em (a) *definições* e (b) *aplicações* de definições, aos quais podemos acrescentar ainda um terceiro, (c): a possibilidade de se *propor* equações matemáticas para verificação, para serem

---

$(\forall z^{(t)})(z^{(t)}(x) \equiv z^{(t)}(y))$, onde *x* e *y* são termos de tipo *t* e *z* de tipo *(t)*, é impredicativa visto a identidade ser uma relação de ordem *(t)*, enquanto a sua definição se dá em ordem *((t))*, em decorrência da quantificação sobre $z^{(t)}$. A identidade apenas poderia se estabelecer para termos de tipo 1 ou superior, por meio de $x^{(t)} = y^{(t)} \equiv (\forall z^{t})(x^{(t)}(z^{t}) \equiv y^{(t)}(z^{t}))$ (Hatcher, 1968, p.132).

[137] A ligação de um nome a um objeto é, por assim, dizer, a última etapa na fixação das variáveis na composição de uma proposição. A partir desse momento não temos apenas esquemas a indicar posições relativas, mas uma referência absoluta para o sistema de posições.

demonstradas. A seguir é feita uma discussão acerca de como esses usos devem ser interpretados no contexto do *Tractatus*, de que como eles equivalem a *construções* com sinais, e porque devem ser tomados como legítimos. (a) Definições participam do que é *arbitrário* no estabelecimento de uma linguagem, são o '*ato*' pelo qual duas expressões *devem* ser tomadas como tendo o mesmo significado. Por meio delas estabelecemos descrições definidas, típicas de sinais não analisados, mas também regras como *p=~~p Def.*, $\Omega'\Omega^{v'}x = \Omega^{v+1'}x$ *Def.* ou $\Omega^{v\times\mu'}x = (\Omega^{v})^{\mu'}x$ *Def.*, por exemplo. Usualmente, definições são feitas em uma metalinguagem - como que em um 'juízo performativo' - ao passo que nas definições do *Tractatus* não há nenhuma *proposição completa* a afirmar regras, e sim meros *esquemas* para geração de novos sinais a partir de uma estrutura inicial. Por meio de tais esquemas temos regras para séries, dadas por uma forma lógica comum a todos os seus termos que não é enunciada, mas apresentada em uma distribuição de sinais para a qual *chamamos atenção* por meio de letras esquemáticas e da identidade. Identidades esquemáticas permitem assim gerar séries e correlacioná-las em um sistema, de maneira que a *atividade* mesma de se constituir sistemas por meio de definições corresponde ao *arbitrário* em nossa linguagem, à *construção* da linguagem mesma; ainda que ela deva necessariamente se restringir às limitações dadas pelas regras da sintaxe lógica. (b) Uma vez dadas regras iniciais arbitrariamente estabelecidas, obtemos desdobramentos *necessários* a elas em sua *aplicação*, decorrentes de sua forma lógica. Na demonstração de uma equação colocada à prova, como 2x2=4, por exemplo, tomamos o lado esquerdo ou direito da identidade e aplicamos as definições iniciais até obter, ou não, o termo do outro lado na equação (sendo a impossibilidade de se chegar ao outro termo obtida por uma redução ao absurdo, como 2=0). Nesse caso, o ponto de partida da *série da demonstração* é dado ao fixarmos as variáveis *v* e *μ* como '2' em $\Omega^{v \times \mu'} x$, e a seguir pela aplicação dessa e outras definições esquemáticas previamente dadas até a obtenção de '4' (*T6.241*). Essa nova série - a série da demonstração - é assim obtida pelo cruzamento das demais séries dadas em definição. O que importa nesse caso é que *geramos* os termos da série da demonstração em cada passo, assim como geramos termos em séries quaisquer: *criamos* novos sinais a partir das regras iniciais e de uma base de aplicação. Esses passos são necessários na medida em que decorrem das formas lógicas dadas em definição, mas sua execução é um *procedimento*, um '*ato*' linguístico cujas etapas o uso da identidade na seqüência da prova ordena em uma *memória de cálculo*. (c) Podemos ainda *propor* equações para cálculo, como 2x2=4, 5+7=12 ou 319x527=168113. Seria como se perguntássemos: "*veja*, as expressões dos dois lados têm o mesmo significado?" – mas são os lados da identidade que nos *mostram* isso e não a própria identidade, a qual simplesmente coloca as expressões para comparação[138]. É isso o que conferiria à equação sua *possível* 'verdade' ou 'falsidade', ainda que certamente não em uma acepção de verdadeiro e falso à maneira da lógica. A 'verdade' e 'falsidade' matemáticas não resultam da representação de fatos contingentes, mas são necessárias em decorrência das convenções sintáticas adotadas inicialmente em (a), e como visto em (b), sua demonstração é *construída* à medida que geramos novos sinais por meio das

[138] Uma 'pergunta' matemática teria a seguinte forma: "essas duas séries, a do lado esquerdo e a do lado direito da identidade, cruzam-se nesse ponto?". Cada um dos lados de uma identidade é dado pela fixação de um ponto em uma série, e o que pretendemos saber, portanto, é se os pontos assim fixados são pontos de contato entre essas duas séries. Por exemplo, as séries *x* e *y* na equação *y=2x* têm por pontos de contato (0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8),..., mas não (1,3), de maneira que *3=2.1* é uma pseudoproposição matemática 'falsa' (ver sobre 'verdade' e 'falsidade' matemáticas na nota 159). A equação *y=2x*, dadas inicialmente duas séries *x* e *y*, equivale a uma *terceira série*, que realiza o entrelaçamento das duas primeiras *por definição*. Assim, propor *x=1* e *y=3* é sintaticamente correto, por essas serem posições legítimas nas séries *x* e *y*. No entanto, elas não resultam em nenhum ponto na série *y=2x*, visto *x=1* e *y=3* resultarem em posições distintas no entrelaçamento dado por *y=2x*. Apesar de essas serem posições distintas, ambas se encontram em um mesmo sistema, visto que bastaria somar 1 a *x* e a *y*, por exemplo, para obter uma posição na série dada por *y=2x* (no caso, (2,4)).

regras da *série da prova* dessa equação. Assim, a possível ‘verdade’ ou ‘falsidade’ de uma equação - seu ‘sentido’ - deve ser entendida como equivalente à *possibilidade* de se aplicar as regras de uma série qualquer na *geração* de seus sinais[139]. Já sua ‘verdade’ ou ‘falsidade’ propriamente ditas resultam da *construção* da demonstração, do resultado obtido ao se *gerar* termos na série da demonstração. Uma equação como 319x527=168113 atua assim como uma proposta para cálculo - e não como uma proposição que *afirma* essa igualdade, como se ela tivesse uma existência independente de nossos sistemas de sintaxe.

A esse respeito, é possível antever pelo menos uma característica da filosofia da matemática do *Período Intermediário* já no *Tractatus*: nas *Observações Filosóficas* a possibilidade de propor uma equação para demonstração apenas se dá por haver um *método* para a sua verificação - o que no contexto do *Tractatus* equivale a haver uma *regra* para gerar a série da demonstração. A questão acerca da ‘verdade’, da ‘falsidade’ e do ‘sentido’ de pseudoproposições matemáticas será retomada ao final da seção a seguir. De qualquer maneira, a matemática *opera* com sinais, *realiza* substituições sintáticas em um cálculo de modo a explicitar diferentes aspectos do significado em questão. Ela se dá em nossa própria *prática* diária na manipulação dos signos, sendo, portanto, uma *atividade* lingüística corriqueira. Assim, por meio de pseudoproposições matemáticas não se pretende *representar* nada, mas apenas *apresentar*, nos próprios sinais, a seqüência desses procedimentos, como que em uma ‘memória de cálculo’.

[139] E somente assim podem ser entendidas demonstrações por absurdo. O uso de uma equação *posteriormente* provada ‘falsa’ como se fosse ‘verdadeira’ não implica contrassensos, visto com ela simplesmente realizarmos as substituições recursivas expressas por essa equação da mesma maneira que *geramos sinais* em séries quaisquer. Após se demonstrar a ‘falsidade’ dessa equação, os passos que se valeram dela são igualmente reconhecidos substituições incorretas, e eventualmente tomados como regras da sintaxe matemática em outras demonstrações por absurdo. Uma equação matemática *demonstrada* ‘falsa’ exprime uma regra sintática da mesma maneira que uma equação *demonstrada* ‘verdadeira’.

Tomando-a então como uma atividade, a matemática resulta em ser bastante próxima a algo uma construção com sinais; ainda que de maneira incipiente no *Tractatus*.

2.5 Matemática, Metalógica e Construtivismo

O procedimento de transformação de constantes em variáveis em *T3.315* foi apresentado como característico à *lógica pura*, na seção 2.1. Por esse procedimento, passo a passo, tornamos variáveis termos em um sinal proposicional, o *desligamos*, em parte, do restante de um sistema de linguagem. Com isso, obviamente, não obtemos nenhuma proposição, nenhuma projeção desse sinal ao mundo, mas antes uma *pseudoproposição*, sem qualquer valor verdade atribuído. O *pseudossinal*[140] resultante, no entanto, possui ainda uma estrutura a qual, por meio das regras de sinais dessa notação, pode ser outra vez ligada ao sistema de linguagem, configurando novamente uma proposição. Esse último procedimento, dado em *T5.501*, equivale ao de *fixar* o valor de uma variável, e resulta ser um procedimento *inverso* ao da transformação de constantes em variáveis em *T3.315*[141].

[140] Um sinal apenas o é no contexto de seu uso em uma linguagem. Ao tornar variáveis as ligações de um sinal ao restante do sistema, o desconectamos desse sistema, obtendo com isso um pseudossinal, na terminologia aqui proposta. Apesar dessa retirada do sinal do contexto de uma proposição, pode-se considerar que ele ainda assim preserva *parte* das ligações que lhe conferem significado. Dessa maneira, um pseudossinal equivale a uma variável livre, cujas instâncias são dadas pelas possíveis ligações que o conectariam novamente a um sistema de linguagem. O pseudossinal *fx* poderia ser fixado em *fa*, por exemplo, ou ainda, pelo conjunto de sinais proposicionais (*fa*, *fb*, *fc*,...) no caso da *generalização*, de maneira a conectá-lo novamente a um sistema de linguagem. É exatamente essa última forma de ligação que viabiliza a generalidade no *Tractatus*.

[141] "5.501 (...) Os valores da variável são fixados. A fixação é a descrição das proposições que a variável substitui (...) Podemos distinguir três espécies de descrição: 1. A enumeração direta. Nesse caso, podemos simplesmente colocar, no lugar da variável, seus valores constantes. 2. A especificação de uma função *fx*, cujos valores para todos os valores de *x* sejam as proposições a serem descritas. 3. A

O pseudossinal *antes* da aplicação das regras que o *fixam* se apresenta como uma *variável* - e isso pelas regras da sintaxe de um sinal se estabelecerem através de seqüências de aplicação que se *anulam* completamente, o que permite gerar recursivamente *classes de equivalência* entre expressões[142]. A *generalidade* de *fx* decorre, portanto, da diversidade de valores que as regras da sintaxe de *fx permitem* obter a partir desse pseudossinal, dado o caráter recursivo dessas regras (e de onde o caráter *geral* da proposição *(x)fx* decorrer das possíveis instâncias de tais regras na ligação do fragmento proposicional *fx* a um sistema de sinais). Já a *aplicação* propriamente dita dessas regras determina um *subconjunto* entre as possíveis expressões sob a classe de equivalência delimitada por elas, fixando assim os valores da variável. Dessa maneira, fixar os valores de $\xi = fx$, por exemplo, em $\bar{\xi} = (fa, fb, fc, ...)$[143], é análogo a *gerar* termos de uma série, do mesmo modo que na passagem da Forma Geral da Série, $[x, \xi, \Omega'\xi]$, à Forma Geral da Proposição, $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$, são fixadas as variáveis não barradas x e ξ, obtendo-se assim *instâncias* da regra da série em questão - e o mesmo vale para quaisquer variáveis utilizadas no *Tractatus*.

---

especificação de uma lei formal segundo a qual tais proposições sejam constituídas. Nesse caso, os termos da expressão entre parênteses são todos os termos de uma série formal".

142 Como visto na apresentação da Tabela 3, nos itens 1.2 e 1.3, *regras de anulação* na aplicação de operações são dadas por identidades como *p=~~p*, as quais indicam percursos fechados em um sistema simbólico, ordenando-o. Identidades ou pontos de anulação como esses funcionam como esquemas que viabilizam recursões na geração de séries, como *p*, *~~p*, *~~~p*,..., originando assim uma *classe de equivalência*, dada pela *forma geral* dessa série, entre os sinais *p*, *~~p*, *~~~p*,.... Nesse caso, se por um lado *p=~p* é um mero esquema para a aplicação da negação, e que origina a série mencionada, por outro a sua *fixação* equivale a tomar um subconjunto dentre os possíveis valores que esse esquema nos permite gerar. O mesmo se pode dizer de regras sintáticas em geral: seus pontos de anulação equivalem a esquemas cujas instâncias são possíveis fixações de seus valores, formando classes de equivalência entre eles.

143 Ver item 2.2, a respeito do uso de variáveis barradas e não barradas e seus usos na Forma Geral da Proposição, da Operação, da Série e do Número. A *fixação* de valores em $\bar{\xi}$ fornece posições em uma série, enquanto a *transformação de constantes em variáveis*, obtendo ξ, fornece a própria regra de uma série.

Essa leitura permite em certo sentido atribuir ao procedimento *T3.315* um papel *analítico*, enquanto ao procedimento *T5.501* o papel de uma *síntese* de sinais mediante regras, visto nesse último caso *construirmos* a ligação do pseudossinal ao restante do sistema de linguagem. É um *arbítrio* nosso, ainda que sujeito às regras da sintaxe lógica, gerar ou transformar sinais em um sistema. Isso, no entanto, vale para qualquer prática lingüística, por todas elas demandarem o uso de sinais, e, portanto, também para a transformação de constantes em variáveis em *T3.315*, onde do sinal *fa passamos* ao sinal *fx*, por exemplo. Assim, mesmo a lógica pura, em sua descontextualização de termos, demanda transformações de sinais - demanda a sua *construção*. O pseudossinal *fx*, por exemplo, tem essencialmente a mesma estrutura que qualquer um dos sinais *fa*, *fb*, *fc*,..., por ser *gerado* exatamente pelas *mesmas regras* que eles *à exceção* daquelas regras que ligariam o termo *x* novamente ao restante do sistema - o que deixa em aberto as instâncias das regras de ligação de *x* a objetos e assim confere generalidade a expressões como *fx*.

Com isso, pseudossinais como *fx* – ou seja, *conceitos formais, variáveis livres*[144] – atuam eles mesmos como *instâncias*[145] das regras que determinam a forma lógica expressa por eles. A expressão da Forma Geral da Proposição, por exemplo, não é ela mesma uma proposição, mas uma expressão de *regras dos sinais* comuns a qualquer proposição, de maneira ao sinal que expressa essa forma geral exemplificar, em si mesmo, essas regras. Em outras palavras, tais regras formais são apresentadas *in concreto* no *sinal da variável* - e não como uma suposta representação de entidades

[144] "4.271 Toda variável é o sinal de um conceito formal. Pois toda variável representa uma forma constante, que todos os seus valores possuem e que pode ser entendida como propriedade formal desses valores".
[145] "4.12721 O conceito formal já é dado com um objeto que sob ele caia."

abstratas ou *platônicas*. Por outro lado, *sinais proposicionais completos* igualmente instanciam essa mesma forma lógica, mas são ainda complementados pela aplicação de outras regras que completam a sua ligação ao restante do sistema de linguagem. Como mencionado no parágrafo anterior , a forma lógica *fx*, por exemplo, é a mesma de *fa*, na medida em que ela é dada pelas mesmas regras que *fa* com exceção daquelas regras que ligam o nome *a* a objetos. Assim, se *não* são levadas em conta as ligações do nome *a* em um sistema de símbolos (exceto a sua ligação a *f*, naturalmente), temos que a estrutura da variável *fx* é a *mesma* da proposição *fa*, de onde ela *aparentar* ser uma proposição legítima e Wittgenstein denominar casos como esse *pseudoproposições*.

A esse respeito, na Introdução deste trabalho foi argumentado haver dois tipos de pseudoproposições no *Tractatus*. Contrassensos, como proposições metalógicas e paradoxos, por um lado, e pseudoproposições que expressam regras da sintaxe lógica, como equações matemáticas, por outro. As primeiras não possuem nenhuma ligação a um sistema de linguagem, e por isso não adiquirem qualquer multiplicidade representativa nem valores verdade atribuídos, ao passo que as últimas, ao se tornar variável *parte* de suas ligações a um sistema, do mesmo modo não resultam em uma projeção simbólica. A diferença entre elas se encontra em contrassensos serem uma violação da sintaxe lógica, enquanto as pseudoproposições da sintaxe lógica propriamente expressam essas regras. Entre pseudoproposições desse último tipo constam as séries formais apresentadas na ideografia, e também a Forma Geral da Proposição, da Operação, da Série e do Número; assim como quaisquer variáveis livres, por todas serem expressões de regras da sintaxe. Assim, variáveis livres são pseudoproposições por não chegarem a constituir proposições, mas antes se tratam de *fragmentos* de um sinal proposicional, os quais com isso não poderiam se projetar simbolicamente. Algo do tipo, no entanto, dá a esses pseudossinais a *aparência* de serem proposições acerca da própria sintaxe da linguagem: exatamente por preservarem traços da sintaxe de uma proposição, eles aparentam certo aspecto assertivo, e ao exemplificarem a sintaxe lógica em seus próprios sinais, pareceriam afirmar essas regras, o que lhes conferiria um suposto caráter metalógico. No entanto - e contrariamente a tais leituras equivocadas - as regras da sintaxe se apresentam no *próprio sinal* das pseudoproposições da sintaxe lógica, e não abstratamente como entidades platônicas *representadas* por eles; ao passo que uma leitura metalógica resultaria exatamente na necessidade de se considerar a existência *abstrata* de tais regras[146].

Assim, ainda que não possuam atribuição de valores verdade, visto terem-se tornado variáveis parte de suas ligações ao sistema de linguagem, pseudoproposições como as mencionadas não são contrassensos, por não violarem a sintaxe lógica - e tampouco contrassensos metalógicos. Pelo contrário, elas são exatamente instâncias dessa sintaxe, e por expressarem regras dos sinais, refletem aspectos *formais*, *topológicos* da estrutura do sistema. Isso se dá pelo procedimento de transformação de constantes em variáveis ter como ponto de partida *proposições*, de maneira ao resultado do procedimento manter traços da estrutura proposicional – sendo exatamente por isso que tais formas servem a

---

[146] Nesse último caso temos um uso *ilegítimo* de conceitos formais como pretensamente *afirmando* propriedades formais da linguagem, como se vê em *T4.1272*: "Não se pode dizer, por exemplo, "há objetos" como se diria "há livros"". A quantificação, enquanto operação lógica, realiza a projeção simbólica dos sinais proposicionais aos quais se aplica, ao passo que, em exemplos como em *T4.1272*, não a aplicamos a nenhum sinal proposicional, e sim a pseudoproposições, ainda que o quantificador confira a essas últimas a aparência de proposições metalógicas; como se houvesse valores verdade atribuídos a pseudossinais que tão somente exemplificam regras formais do sistema. Em outras palavras, o operador lógico *N* não se aplica ao pseudossinal *fx*, mas à fixação de seus valores. Ou seja, $N(\bar{\xi})$ é o sinal de uma proposição, enquanto $N(\xi)$ permanece um pseudossinal. Isso, naturalmente, não quer dizer que $N(\xi)$ é um contrassenso, mas que tomá-lo como uma *proposição* é um contrassenso, ao passo que o sinal $N(\xi)$ é tão somente a expressão de uma regra.

exemplificar regras da sintaxe lógica. Dessa maneira, Wittgenstein pode contornar as dificuldades de Frege e Russell em introduzir seus respectivos sistemas sem apelar a uma metalógica e, portanto, a contrassensos[147]. O que o *Tractatus* faz é tão somente elencar variáveis que exemplificam regras, sem a pretensão de enunciá-las, e uma vez que *vemos* a forma lógica em questão nesses pseudossinais, os tomamos como um *esquema*, como um protótipo para a sua aplicação simbólica. Com isso, e em oposição ao que ocorre em contrassensos, os quais não possuem qualquer *uso* lingüístico, as pseudoproposições da sintaxe lógica devem ter pelo menos duas aplicações na linguagem: a) na *composição* de sinais proposicionais completos, tendo em vista a forma *fx* estar contida em proposições como *(x)fx* e *fa*, por exemplo[148]; e b) como *esclarecimentos* acerca do uso das palavras, exatamente por essas pseudoproposições exemplificarem, em seus próprios sinais, regras da sintaxe lógica. Esses devem equivaler aos usos considerados legítimos de conceitos formais, conforme *T4.1272*, em contraste com usos ilegítimos, que tomariam tais esquemas por proposições[149]. Em (a) temos o uso corriqueiro de variáveis na linguagem em geral, e no que diz respeito a (b), temos como exemplos as próprias pseudoproposições de que se compõe o *Tractatus*. Nesse último caso, (b), conceitos formais ocorrem como *variáveis livres*, visto não

---

[147] Como observado na nota de rodapé 7, Frege e Russell não poderiam admitir a possibilidade de uma metalógica. Isso, no entanto, gera dificuldades no estabelecimento de seus sistemas. Frege, por exemplo, precisa lançar mão de expressões como "o conceito *cavalo* não é nenhum conceito" (Frege, 1974, p.63-64), ao passo que Russell não teria como enunciar suas restrições à quantificação na teoria dos tipos sem apelar a contrassensos: a impossibilidade de se quantificar sobre expressões de mesmo tipo ou superior à proposição em questão vale para todos os tipos, e assim não poderia ser enunciada por nenhuma proposição na hierarquia. Wittgenstein busca contornar o problema apresentando suas regras como *esquemas*, ao passo que a notação de Russell dá a essas regras a aparência de *proposições*, ou seja, de proposições metalógicas (*T3.331*: "o erro de Russsell revela-se no fato de ter precisado falar do significado do sinais ao estabelecer regras notacionais").

[148] Assim como a Forma Geral da Proposição, da Operação, da Série e do Número participam de qualquer proposição.

[149] "4.1272 Onde quer que a palavra "objeto" (coisa, etc.) seja usada corretamente, será expressa na ideografia pelo nome variável... Onde quer que ela seja usada de outra maneira, como um termo conceitual propriamente dito, portanto, surgem pseudoproposições, contrassensos".

afirmarem nada, por não se encontrarem em um contexto proposicional, ao contrário do que ocorre em (a).

O argumento acima permite esclarecer a natureza pretendida por Wittgenstein para um livro como o *Tractatus*. Por ele se tratar de um livro de *lógica pura*, não busca realizar a análise das proposições da linguagem natural por meio de tautologias e contradições, mas antes se vale do procedimento *T3.315* para explicitar as regras da sintaxe lógica. De fato, seus aforismos não podem ser entendidos como tautologias por não serem *funções verdade* de outras proposições, ainda que expressem certo tipo de *necessidade lógica*. Seu caráter necessário não se dá como o de tautologias, *verdadeiras* para quaisquer arranjos de objetos no mundo, mas antes por elas serem *variáveis livres* ou *esquemas*, sem valor verdade atribuído, os quais apresentam, exemplificam em seus sinais mesmos, regras da sintaxe lógica. Esquemas como esses delimitam assim categorias sintáticas e servem como esclarecimentos acerca da linguagem, de maneira a, uma vez tornadas claras essas categorias essenciais à linguagem ao longo da leitura do livro - e *após se ter estabelecido uma ideografia que evite eventuais equívocos acerca delas* - podermos "jogar fora a escada" (*T6.54*), e assim dispensar o uso de pseudoproposições como as do próprio *Tractatus*. Deveria-se enfatizar, então, que apenas podemos jogar a escada fora *após* o estabelecimento de uma linguagem ideográfica, a qual evite eventuais equívocos e com eles a necessidade mesma de esclarecimentos gramaticais - e *não* pelas pseudoproposições do *Tractatus* serem contrassensos. Infelizmente, não é isso o que Wittgenstein pretende, ou pelo menos não no que diz respeito às proposições escritas em *linguagem natural* ao longo do livro, o gera uma série de problemas interpretativos a esse respeito.

A alternativa à leitura acima seria tomar o *Tractatus* como um livro de *metalógica* e, portanto, como um conjunto de contrassensos – como de fato é feito em *T6.54*: "Minhas proposições elucidam dessa maneira: quem me entende acaba por reconhecê-las como contrassensos, após ter escalado através delas, para além delas. (Deve, por assim dizer, jogar fora a escada após ter subido por ela)". No entanto, nesse caso seria preciso ainda explicar o que distingue os contrassensos apresentados ao longo do livro de contrassensos completos como "abracadabra", "fnjdnfodw", etc. - os quais não fornecem qualquer esclarecimento sobre a linguagem[150]. Algo do tipo envolve malabarismos retóricos além do que parece razoável: como seria possível diferenciar aspectos estruturais entre sinais que são declaradamente *inarticulados* para distinguir contrassensos que esclarecem acerca da linguagem de contrassensos completos? Como contrassensos poderiam ser meticulosamente organizados, à maneira como ocorre na numeração dos aforismos do *Tractatus*, se eles não têm qualquer estrutura? Onde há diferença, se não temos como traçar nuances entre ruídos igualmente aleatórios? Caso os contrassensos do *Tractatus* não sejam simples aleatoriedade, eles realmente podem ser tomados por contrassensos? Além disso, Wittgenstein critica Russell por se valer de

[150] Marion considera haver uma distinção desse tipo, em (Marion, 2009). Ele afirma existirem dois tipos de *contrassensos* no *Tractatus* - ao passo que aqui se propõe haver dois tipos de *pseudoproposições*: contrassensos propriamente ditos, de um lado, e de outro, variáveis livres ou esquemas que expressam regras da sintaxe lógica. O problema na leitura de Marion é apelar a 'contrassensos sofisticados' em distinção a 'contrassensos puros', categorias que não são mencionadas em momento algum no *Tractatus*. Diz Marion: "Uma das conseqüências desta leitura "austera" ou "resoluta" é que as proposições do *Tractatus* transformam-se todas em "contrassensos reais, puros e simples contrassensos". Não existe mais a categoria dos contrassensos sofisticados que gesticulariam na direção de algumas verdades inefáveis, pois tais verdades não existem... Isso quer dizer que poderíamos substituir tudo aquilo que está no interior da moldura por, digamos, um texto como *Jabberwocky*, e então republicar o *Tractatus*?" (Marion, 2009, p.203). *Jabberwocky* remete aqui a um poema nonsense de Lewis Carroll. Marion afirma não pretender entrar em detalhes a respeito no mencionado artigo, mas parece difícil entender como um contrassenso 'sofisticado' poderia dar indicações a respeito da sintaxe lógica enquanto contrassensos 'puros' não o poderiam, ao passo que, a se considerar as pseudoproposições do *Tractatus* como esquemas, temos uma resposta direta a essa questão, sem necessidade de apelar a classificações de 'tipos' de contrassensos.

contrassensos metalógicos, e soa estranho que ele faça o mesmo em seu livro. O que distingue *seus* contrassensos dos de Russell? Simplesmente afirmar ao final do livro que o *Tractatus* é um contrassenso é igualmente um contrassenso, e não nos leva mais longe.

Seria um caminho menos tortuoso para contornar essas dificuldades[151] perserverar na distinção entre pseudoproposições e contrassensos mesmo nos casos de sua expressão em linguagem natural. Um dos pilares da filosofia de Wittgenstein em qualquer época é que a linguagem natural se encontra em perfeita ordem da maneira como está, sendo a função de uma ideografia tão somente evitar *possíveis* equívocos. O mesmo também deveria valer para pseudoproposições expressas em linguagem natural – não ideográfica – como as que ocorrem ao longo do *Tractatus*, de onde teríamos uma abertura a elas não serem tomadas por contrassensos, e menos ainda como contrassensos metalógicos. Dessa maneira, os aforismos em linguagem natural do livro, vistos de maneira *correta*, deveriam servir como esclarecimentos gramaticais por serem *esquemas* de regras, ao passo que, entendidos incorretamente, tão somente *aparentam* ser contrassensos metalógicos. Isso evitaria a série de complicações mencionadas no parágrafo acima, as quais resultam em um debate filosófico interminável. Além disso, no *Período Intermediário* Wittgenstein continuará utilizando proposições da linguagem natural

[151] E na verdade, seria possível uma versão mais radical desse argumento. Ao se tornar constantes variáveis, obtendo com isso sinais proposicionais incompletos, *desligamos* sinais de um sistema, e então, levando em conta o *holismo* do *Tractatus*, deveríamos considerar mesmo as suas fórmulas ideográficas como *contrassensos*: um sinal do qual se desfaça parte de suas ligações a um sistema não deveria resultar em articulação nenhuma, em ligação alguma a esse sistema. Caso seja assim, o mesmo deve valer para a matemática, uma vez que equações foram obtidas tomando constantes por variáveis, *descontextualizando* sinais - por mais que isso soe um insulto ao trabalho cotidiano dos matemáticos. Essa leitura aparenta ser por demais 'niilista' mesmo para Wittgenstein. Uma saída para ela seria utilizar a noção de 'ver aspectos'. Ao se tornar a constante *a* uma variável, passando do sinal *fa* a *fx*, devemos notar que tanto *fa* quanto *fx* têm exatamente a mesma estrutura, de maneira a estarmos meramente chamando atenção a um aspecto de como *fa* é constituído. Tal aspecto é, propriamente, a sintaxe da parte fixa *f*, dada por suas possíveis ligações.

como expressões de regras da sintaxe lógica, sem voltar a atribuir a elas o caráter de contrassensos – ou, antes, as tratando como variáveis. Uma abordagem similar a essa poderia ser realizada no contexto do *Tractatus* como a seguir.

Frascolla menciona três casos de pseudoproposições aparentemente metalógicas que exemplificam as que ocorrem no *Tractatus*; todos eles envolvendo conceitos formais em sua estrutura (Frascolla, 2007, p.156): 1) “A proposição ‘está chovendo’ é verdadeira se e somente se está chovendo”; 2) “Azul é uma cor” e 3) “5+7=12”. Seguindo o argumento do parágrafo anterior, todas essas pseudoproposições seriam passíveis de uma leitura correta, as tratando por variáveis livres, como fragmentos proposicionais a despeito de sua aparência superficial, e uma incorreta, as tomando como articuladas em argumento-função, como proposições com sentido. Em (1), “A proposição ‘está chovendo’ é verdadeira se e somente se está chovendo” aparenta *dizer*, na *linguagem natural*, aquilo que *mostramos* por meio de uma tabela verdade. No entanto, se nos parece ser *necessário* que “A proposição ‘está chovendo’ é verdadeira se e somente se está chovendo”, é tão somente por reconhecermos, quando de sua leitura *correta*, a expressão de uma regra. Na sua formulação em linguagem natural, essa pseudoproposição *aparenta* uma estrutura *vero-funcional* (dada pelo uso não ideográfico de ‘se e somente se’) aplicada estruturas em *argumento-função*, o que poderia induzir a uma leitura metalógica, de maneira à sua apresentação em tabelas verdade ser mais perspícua à regra em questão. Na apresentação em tabela, os sinais ‘V’ e ‘F’ possuem uma sintaxe explícita na expressão de *possibilidades mutuamente exclusivas*[152], ao passo que em (1) o conceito formal de ‘verdade’ (correspondente ao

[152] A sintaxe de *leitura* da tabela é linha a linha, de onde nenhuma proposição no cabeçalho da tabela poder assumir simultaneamente dois valores verdade. Por ter tantas linhas quantas necessárias para

sinal ‘V’ na tabela) tem a aparência de ser uma *propriedade*, um *conceito próprio* acerca de proposições. Obviamente, a possível verdade ou falsidade de uma proposição é uma relação interna entre os conceitos formais de *proposição* e de *verdade*, e não uma relação externa entre *objetos*, como poderia parecer em sua expressão na linguagem natural. Apesar disso, como mencionado, é possível uma leitura correta e legítima de (1) quando a tomamos por um esquema, como uma variável a exprimir uma regra, sendo exatamente isso o que ocorre ao percebermos certo tipo de necessidade lógica em expressões como essa. No que diz respeito a “Azul é uma cor”, em (2), ‘cor’ é um conceito formal e, portanto, delimita uma categoria sintática. Escreva-se ‘o lápis é azul’ como fa, onde a é a constante ‘lápis’ e f o conceito próprio ou função ‘...é azul’. Essa última é obtida ao se tornar variável a constante a, em fx. A variável x tem por escopo objetos de certo tipo, no caso, *objetos espaciais*, por eles serem passíveis de ter cor - em oposição a objetos sonoros, por exemplo. ‘Objetos espaciais’ são, portanto, um conceito formal, sob o qual caem expressões ou termos com determinada sintaxe. Da mesma maneira, *cor* é um conceito formal a delimitar uma sintaxe compartilhada por nomes de *objetos-cores*, como *verde*, *vermelho*, *azul*, etc. Assim, a aparente estrutura em argumento e função do sinal ‘azul é uma cor’ induz que se tome a variável ‘cor’ por um objeto que participa daquilo que se predica de ‘azul’, de maneira a essa aparentar ser uma proposição metalógica acerca da sintaxe dos termos, ao invés da expressão de uma variável, de uma *regra*, quando de sua leitura correta[153]. Por fim, em (3), tomar “5+7=12” como uma proposição metalógica equivaleria a levar ao pé da letra a sua

esgotar as possibilidades dos fatos, e com eles os valores verdade das proposições, a expressão de uma proposição qualquer por meio de uma tabela verdade é tautológica (assim como *pv~p* é uma tautologia), de onde ela servir como um tipo de *análise* da expressão em linguagem natural dada em (1).

[153] Assim, em pseudoproposições de tipo (1) temos uma aparente metalógica acerca das atribuições semânticas de condições de verdade às proposições, ao passo que em pseudoproposições de tipo (2), uma aparente metalógica da sintaxe dos termos.

versão em linguagem natural “cinco mais sete é igual a doze”, cuja estrutura aparente em argumento-função remeteria a uma afirmação acerca de *números*, os quais, por sua vez, seriam *objetos* (o que novamente aponta haver uma relação entre metalógica e platonismo). Da mesma maneira que nos exemplos anteriores, apesar da versão de “5+7=12” em linguagem natural não se apresentar em uma notação perspícua, ainda assim nada impede que as pessoas se entendam fazendo uso dela no dia a dia, como ao explicar a alguém o cálculo que fez - e sem, portanto, tomá-la como uma proposição metalógica, mas sim como uma variável, um esquema.

Independentemente da discussão acima, o uso de esquemas na ideografia do *Tractatus* permite mostrar claramente a relação entre *construtivismo* e *metalógica* no intento de excluir essa última. Esquemas, em linguagem natural ou ideográfica, são *construções* no mesmo sentido em que qualquer sinal é construído. Nós, *arbitrariamente*, estabelecemos o sinal como tal, atribuímos-lhe um significado. Dessa maneira, esquemas não remetem a entidades, abstratas ou platônicas, *preexistentes* a seu estabelecimento, mas antes apresentam, em sua própria constituição, as regras que eles expressam. É dessa maneira que o construtivismo serve de ocasião a se evitar uma leitura metalógica do *Tractatus*. Por meio das pseudoproposições da sintaxe lógica no livro pretende-se apresentar *in concreto* a aplicação de regras, ao invés de supostamente fazer *afirmações* acerca de regras, como se essas possuíssem uma existência externa às suas instâncias[154]. O sinal constituído *é* a própria regra, visto ser um esquema. Com isso, a regra se apresenta no próprio sinal da pseudoproposição que a expressa e não

[154] *T4.12721*: “O conceito formal já é dado com um objeto que sob ele caia. Portanto, não se pode introduzir, como conceitos básicos, objetos de um conceito formal e o próprio conceito formal. Portanto, não se podem introduzir como conceitos básicos, p.ex., o conceito de função e também funções particulares (como fez Russell); ou o conceito de número e números determinados.”

abstratamente como uma entidade platônica *representada* por ele - ao passo que a metalógica deve ter por resultado exatamente a necessidade de se considerar a existência abstrata de tais regras. É possível assim a Wittgenstein contornar o apelo à metalógica no estabelecimento de sua ideografia – algo em que Frege e Russell teriam falhado[155] – mas isso ainda não explica as razões mesmas para que a metalógica deva ser rejeitada. Será argumentado, a seguir, que o caso se dá por contrassensos metalógicos serem uma violação do aspecto *matemático-recursivo* da sintaxe lógica, o que resulta, em conseqüência, na impossibilidade de qualquer pretensão platonista acerca do que pode ser expresso pela linguagem.

As razões para a rejeição à metalógica devem ser entendidas em termos do caráter *sistêmico* da filosofia da linguagem de Wittgenstein, por ser a topologia do sistema de linguagem *como um todo* que confere sentido às proposições. Nesse caso, contrassensos metalógicos não poderiam se ligar *recursivamente* a nenhum sistema de sinais, não adquirindo com isso qualquer multiplicidade matemática ou capacidade expressiva – o que pode ser explicado pelo que segue. Dado o caráter *holístico* da noção de sistema, não haveria como distinguir entre as proposições de uma suposta metalinguagem das proposições de uma linguagem-objeto à qual ela se aplique, por elas necessariamente serem parte de um *mesmo* sistema. As condições de sentido de uma proposição são dadas pela *topologia do sistema como um todo* - de onde as condições de sentido de uma de suas proposições serem igualmente condições das demais. Dessa maneira, dada

[155] *T3.331*: "o erro de Russsell revela-se no fato de ter precisado falar do significado do sinais ao estabelecer regras notacionais". No caso, Wittgenstein não fala a respeito do significado de regras, mas simplesmente apresenta seus esquemas. Dessa maneira, as restrições à quantificação na teoria dos tipos - as quais não poderiam ser expressas em nenhum tipo, por perpassarem todos eles - podem ser apresentadas por meio de um esquema recursivo, como se verá a seguir. O mesmo permitiria evitar contrassensos como 'o conceito *cavalo* não é nenhum conceito', em Frege (Frege, 1974, p.63).

uma suposta metapropriedade *S* que implique nos sinais aos quais ela se aplica serem proposições com sentido, seria possível formular metaproposições como *S(p)*, assim como metaproposições que tenham *S(p)* por argumento, como *S(S(p))*. Nesse contexto, a se levar em conta a teoria dos tipos, as duas ocorrências de *S* nessa última expressão são de ordens distintas e teriam, portanto, *escopos de aplicação distintos*. No entanto, uma vez que *S* se trata de uma propriedade estruturante do próprio sistema de linguagem – sendo com isso uma das condições de sentido de quaisquer proposições nele – não haveria como estabelecer diferentes escopos de aplicação para essa propriedade, dado o caráter holístico da noção de sistema. No caso, por *S(p)* e *p* participarem do mesmo sistema, as condições de sentido de *p* são igualmente condições de *S(p)*, de onde *S(p)* ter um caráter *circular*, e a função *S(x)* poder ter a si mesma por argumento[156].

A possibilidade de uma variável que participa de uma proposição ter sob seu escopo a própria proposição em que ela ocorre viabiliza paradoxos semânticos, como “a

[156] Assim, como mencionado, seja *S* uma metapropriedade acerca de sinais proposicionais que implique em eles terem sentido, em serem proposições bipolares. Se uma proposição *p* tem sentido, então sua negação, *~p*, igualmente tem sentido, de onde $S(p) \leftrightarrow S(\sim p)$. Nesse contexto, tome-se a proposição *q*, dada por $q = \forall p.S(p)$. Sendo *S* uma propriedade aplicável a qualquer sinal no sistema, ela igualmente se aplica a *q*, de onde a verdade de *q* - ou seja, de $\forall p.S(p)$ - implicar em *S(q)* como uma de suas instâncias. Isso claramente viola a teoria dos tipos, mas as condições de sentido de uma proposição são dadas pela *topologia do sistema como um todo*, de onde as condições de sentido de uma de suas proposições ser igualmente condição das demais, e o suposto predicado *S* se aplicar a qualquer proposição, inclusive de maneira impredicativa. Com isso, se *S(q)* é falsa, então $\forall p.S(p)$ deve ser *falsa*. No entanto, a eventual falsidade de *S(q)* implica ainda em $\forall p.S(p)$ não ter sentido, e não em ser falsa, o que resulta em uma *contradição*: se *S(q)* for *falsa*, ela é uma proposição com sentido, de onde *S(q)* ser verdadeira por definição, ao passo que a suposição inicial era a da falsidade de *S(q)*. Com isso, *S(q)* não poderia ser uma das condições de verdade de $\forall p.S(p)$, mas a indistinção entre metalinguagem e linguagem-objeto não permite evitar casos como esse. Essa contradição apenas não resulta em um *paradoxo* se for possível considerar *~S(q)* uma proposição *sempre falsa* - caso em que essa é a premissa a ser rejeitada nessa suposta contradição - e *S(q) sempre verdadeira*. Isso, no entanto, não pode se dar, tendo em conta que as mesmas regras de sintaxe que permitem construir sinais como $\forall p.S(p)$ permitiriam a constituição de paradoxos, de onde elas não poderem fazer parte da sintaxe lógica. O sentido de uma proposição *q* não poderia depender da verdade ou falsidade de qualquer outra proposição *p* porque isso faria, dado o caráter sistêmico do *Tractatus*, com que o sentido de *p* dependa da sua própria verdade.

proposição *p* é falsa”, onde *p* = “a proposição *p* é falsa”, ou ainda, paradoxos como o de Russell, onde a quantificação na definição de um “conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos” tem sob seu escopo o próprio conjunto sendo definido. Em oposição a tais construções, Wittgenstein afirma que “Uma função não pode ser seu próprio argumento, porque o sinal da função já contém o protótipo de seu argumento e ele não pode conter a si próprio. (*T3.333*)”. Essa impossibilidade é uma conseqüência do caráter essencialmente *recursivo* das formas lógicas apresentadas na ideografia do *Tractatus*, onde os termos de uma série apenas podem ser gerados com base em termos previamente dados nessa série. No exemplo em *T3.333*, temos que a função externa e a função interna *F*, em $F(F(fx)$, têm necessariamente *significados distintos*, de maneira a *F* não se aplicar a si mesma, algo que se justifica porque: “a interna tem a forma $\phi(fx)$, a externa, a forma $\psi(\phi(fx))$. Ambas têm em comum apenas a letra *“F”*, que sozinha, porém, não designa nada”; em uma alusão clara ao princípio do contexto. Assim, é a estrutura recursiva dos sinais que determina suas posições em um sistema e distingue as duas ocorrências do sinal *F*, fazendo delas *símbolos* distintos, como se mostra claramente nas expressões $\phi(fx)$ e $\psi(\phi(fx))$: o símbolo $F(fx)$ contém o protótipo de seu argumento, *fx*, mas esse último não poderia conter a si mesmo, do contrário sua forma seria $\phi(fx)$, e não *fx*.

A seqüência recursiva que gera os sinais em questão acima é dada por meio da série *fx*, $\phi(fx)$, $\psi(\phi(fx))$, $w(\psi(\phi(fx)))$,.... Nela, a própria estrutura dos sinais gerados mostra que um protótipo lógico que contenha a si mesmo não poderia assumir nenhuma *posição* nessa série, visto algo do tipo levar a um regresso infinito nas substituições desse sinal em si mesmo. O esquema da regra que gera a série não pode assim ser tomado como um dos termos dessa série, por isso gerar uma circularidade na determinação da suposta posição de tal termo na série. Da mesma maneira, tampouco poderíamos atribuir um *número* à pretensa posição ocupada por uma expressão impredicativa, de onde essa ser uma impossibilidade *matemática*: não haveria como *contar*, passo a passo, as aplicações da regra de uma série na obtenção de expressões impredicativas. Assim, contrassensos metalógicos e paradoxos não poderiam se ligar a um sistema de sinais, não adquirindo, portanto, multiplicidade matemática, e com isso qualquer capacidade de representativa dos fatos. Em particular, uma proposição que envolva uma impredicação não poderia ter uma análise completa, exatamente por seu caráter circular, e não se liga à *origem* das séries de um sistema de linguagem qualquer: os objetos do mundo acerca dos quais falamos[157].

Em conclusão, o contraste entre matemática e lógica mais uma vez ganha relevo nesse ponto. Uma impossibilidade lógica é dada por uma *contradição*, por uma impossibilidade *combinatória* dos fatos, de onde ela ser necessariamente *falsa*, ao passo que contrassensos metalógicos são uma inarticulação *matemática*, ao violarem a sintaxe lógica naquilo que diz respeito a seu caráter recursivo na geração de sinais em um sistema. Contradições refletem uma *combinação* impossível de *possibilidades*, enquanto contrassensos, *possibilidade alguma*: nem o conjunto total delas, como em uma tautologia, nem seu conjunto vazio, resultado de uma contradição, e nem algum subconjunto próprio delas, em proposições bipolares. Por não articularem possibilidades, contrassensos não determinam qualquer posição em nenhuma série e não poderiam ter valores verdade atribuídos. Nesse contexto, as pseudoproposições da

[157] A restrição impredicativa parece assim se relacionar com a restrição à aplicação de operações lógicas a um número *finito* delas. Um número *infinito* de operações não pode ligar, *passo a passo*, a proposição em análise a proposições elementares envolvendo nomes simples. O caso pode ser relacionado à reunião de um número infinito de elementos sob uma totalidade ser realizada em Frege por meio da definição de propriedades hereditárias, as quais, por sua vez, envolvem impredicações (ver Conclusões).

sintaxe lógica refletem propriamente o limite entre o que é ou não um contrassenso - ou seja, entre o que configura uma possibilidade no espaço lógico e o que não é nenhuma[158]. Assim, os esquemas que expressam as regras da sintaxe lógica tampouco poderiam ter eles mesmos valores verdade atribuídos, visto do contrário contrassensos exprimiriam possibilidades ou combinações de possibilidades legítimas. O mesmo, é claro, se aplica às pseudoproposições da matemática, de onde a questão acerca da 'verdade' ou 'falsidade' de equações, introduzida ao final do item 2.4, se apresentar novamente[159].

A menos que se venha a incorrer em uma metalógica, as pseudoproposições matemáticas não podem ser verdadeiras ou falsas à maneira de proposições bipolares ou das proposições da lógica. Se as regras da sintaxe lógica, e as regras da sintaxe matemática em particular, primeiramente abrem um espaço lógico de possibilidades combinatórias, elas por isso mesmo não poderiam corresponder a possibilidades ou conjuntos de possibilidades nesse espaço. A esse respeito, foi argumentado ao longo da

[158] A rigor, tautologias e contradições não são possibilidades, por não serem contingentes. No entanto, elas resultam de composições de possibilidades, são casos limite dessas combinações, ao contrário do que ocorre em contrassensos. Em uma contradição, por exemplo, basta rejeitar uma das premissas de que ela se compõe para obter uma proposição verdadeira, ao passo que em um paradoxo cada premissa implica em sua oposta, no que se tem claro eles não serem composições de possibilidade alguma. É precisamente isso o que faz de tautologias e contradições expressões legítimas em um simbolismo, ao passo que paradoxos, não.

[159] 'Verdade' e a 'falsidade' matemáticas não podem ser entendidas da mesma maneira que a verdade e falsidade de proposições empíricas ou de proposições lógicas, dado seu fundamento puramente sintático. No entanto, tampouco seria adequado propor no lugar desses termos expressões como 'equação correta' e 'equação incorreta', visto uma equação matemática *reconhecida como falsa* não ser, propriamente, uma expressão sintaticamente incorreta, mas conseqüência das definições sintáticas das séries em questão. A equação matemática 'falsa', se a reconhecemos *como tal*, não é por si um contrassenso e pode muito bem guiar um cálculo no que diz respeito a *evitar* substituições ilegítimas as quais, elas sim, gerariam contrassensos exatamente por indicarem uma posição inexistente na série da prova. Dessa maneira, uma equação provada 'falsa', assim como qualquer equação demonstrada 'verdadeira' e reconhecida como tal, é uma regra de sintaxe decorrente de definições, a qual, no entanto, seria talvez mais bem expressa por meio do sinal '≠' ao invés de lançando mão do conceito formal de 'falsidade', visto esse último ser característico às proposições da lógica e a proposições empíricas.

presente seção que as pseudoproposições da sintaxe lógica não se projetam ao mundo, por se terem tornado variáveis parte das constantes que ligam esses pseudossinais ao restante de um sistema de linguagem. No caso específico da matemática, são tornadas variáveis todas as constantes que não digam respeito ao aspecto exclusivamente *recursivo* da geração de sinais em geral. Tal caráter recursivo perpassa as formas lógicas apresentadas na ideografia do *Tractatus* (ver seção 2.2 e Anexo A) e permite a ela evitar equívocos metalógicos. Assim, o que caracteriza a 'verdade' da equação 2+3=5 é que a seqüência de iterações de uma regra qualquer dada ao lado esquerdo dessa identidade equivale à seqüência de iterações expressa à direta dela: ambas apontam uma *mesma posição* no sistema. Já o reconhecimento da 'falsidade' de 2+3=7 indica que as seqüências de iterações em cada lado da identidade resultam em *posições distintas* em um sistema de sinais. Em outras palavras, com a 'falsidade' de 2+3=7 não obtemos um contrassenso, visto as seqüências de iterações 2+3 e 7 em cada lado da identidade serem ainda assim parte de um mesmo sistema - elas apenas resultam em posições diferentes quando de sua construção, bastando, para obter 2+3, subtrair 2 de 7, por exemplo. Em contraste, contrassensos gerados por impredicações não podem ser obtidos por meio de recursões e assim resultam de fato em uma violação da sintaxe matemática: nenhuma equação matemática, seja 'verdadeira' ou 'falsa', poderia relacionar expressões que não participam de um *mesmo sistema*. Com isso, a 'verdade' e a 'falsidade' matemáticas são construídas da mesma maneira que os termos gerados por meio das regras esquemáticas de uma série, de onde uma demonstração nada mais fazer que gerar as recursões indicadas por uma equação de modo a verificar se obtemos a mesma posição em cada lado da identidade. Temos, assim, certa autonomia do cálculo em relação à sua aplicação simbólica, baseada no mesmo construtivismo que permitiu evitar concepções metalógicas: esquemas não remetem a nada além de si mesmos, não são representações de regras, mas antes a apresentação dessas regras mesmas em seus próprios sinais. Assim, tem-se justificada a possibilidade de uma *matemática pura*, independente da aplicação simbólica por meio de operações lógicas que posteriormente se venha a fazer dela, e de onde os sinais gerados em um cálculo constituem, eles mesmos, a aplicação da matemática.

Conclusões

Alguns dos principais pontos defendidos ao longo deste trabalho podem ser sumarizados no que segue.

Proposições não se projetam isoladamente aos fatos em uma respresentação, mas apenas em sistema. Sem isso, não haveria como explicar ser possível a análise de proposições que não expressem, em seu próprio sinal, a complexidade total da situação representada. É exatamente isso o que se observa nas proposições não analisadas da linguagem natural, onde sinais relativamente simples expressam proposições altamente complexas. Nesse caso, a complexidade não expressa diretamente no sinal proposicional se apresenta na complexidade do sistema sintático em que esse sinal se insere, no emaranhado de acordos tácitos que compõem a linguagem (*T4.002*). Dessa maneira, a sintaxe altamente complexa das proposições do dia a dia mascara a real forma lógica das proposições e induz a eventuais equívocos - como os que ocorrem em contrassensos metalógicos e na discussão filosófica em geral. O objetivo da análise lógica é então expressar essa complexidade no próprio sinal proposicional de maneira a evitar tais equívocos interpretativos. Com isso, as ligações sintáticas de um sinal analisado ao restante de um sistema se reduzem apenas àquelas que são essenciais ao estabelecimento de uma representação: as regras da sintaxe lógica[160].

---

[160] Há com isso uma proporção inversa entre a complexidade do sinal proposicional e a complexidade de sua sintaxe na representação de um fato. Quanto menor a complexidade do sinal proposicional, maior deve ser a complexidade da sua sintaxe para expressar essa mesma informação e, inversamente, quanto maior a complexidade do sinal proposicional, menor a da sintaxe que o liga ao sistema de linguagem. No entanto, existe um limite para esse último caso: uma proposição completamente analisada ainda assim possui uma sintaxe ligando-a ao sistema - a sintaxe lógica, essencial a qualquer representação. Dessa maneira, uma proposição não se projeta aos fatos de maneira isolada, mas em conjunto com o sistema ao qual ela se liga por meio das regras da sintaxe lógica.

Na seção 2.1 foi argumentado haver dois procedimentos de análise lógica no *Tractatus*: em lógica aplicada, por meio de tautologias e contradições, e em lógica pura, pela transformação das constantes em uma proposição em variáveis. A primeira serve à obtenção de sinais proposicionais completamente analisados a partir de proposições não analisadas, enquanto a segunda, à obtenção de esquemas que reflitam a sintaxe lógica dos termos de que se compõem as proposições. No que diz respeito à lógica aplicada, tautologias e contradições permitem exprimir toda a complexidade de uma situação nos próprios sinais proposicionais por elas esgotarem as possibilidades combinatórias dos fatos representados - sendo com isso, respectivamente, sempre verdadeiras ou falsas independentemente do que ocorra no mundo, independente de qual combinação de fatos se dá ou não. As proposições da lógica são assim necessárias e refletem a complexidade da situação representada nas proposições de que elas se compõem, por elas abarcarem todas (ou nenhuma, no caso de uma contradição) as combinações de valores verdade de tais proposições. Destarte, a lógica aplicada se viabiliza pela reescrita dos sinais proposicionais de modo às relações entre suas condições de verdade serem apresentadas sob a forma de tautologias e contradições, nas quais exaurimos, em toda a sua complexidade, as possibilidades combinatórias dos fatos representados. Com isso, a complexidade das proposições deve necessariamente se refletir nas relações entre suas condições de verdade – de modo a tais relações configurarem um *sistema simbólico*.

As relações entre as condições de verdade das proposições se expressam em um sistema de sinais por meio do uso de operações lógicas, de maneira que a sintaxe dessas últimas deve ser perspícua à estrutura do sistema simbólico. A esse respeito, na seção 1.2 foi apresentada a correspondência entre tautologias como $p \equiv \sim\sim p$ e regras sintáticas como $p = \sim\sim p$, as quais atuam como esquemas de substituição baseados na identidade. Tais esquemas *ordenam* o sistema simbólico em um sistema de sinais no qual os sinais proposicionais expressam claramente as suas *posições relativas* (ver tabelas 2 e 3, seção 1.2). Exatamente por expressarem posições relativas ao se valerem de esquemas - e ao contrário de nomes, por exemplo, que determinam *posições fixas* em um sistema - operações não representam nada acerca do mundo, mas antes apresentam *aspectos* da posição ocupada pelos sinais proposicionais em sua projeção representativa. Dessa maneira, abre-se a possibilidade de inúmeras expressões para a mesma posição em um sistema simbólico, como em p=~~p=~~~~p=.... Nesse caso, a possibilidade dessas expressões diversas é intrínseca à constituição de uma sintaxe, uma vez que ela apenas se estabelece através de regras dadas por pontos de anulação entre operações, como p=~~p. Tais pontos de anulação determinam com isso a estrutura recursiva de sistemas de sinais em geral, e permitem a geração de séries cujo entrelaçamento articula, propriamente, esses sistemas.

O caráter recursivo da sintaxe dos sinais configura, portanto, parte da sintaxe lógica – e apesar de ter sido explicitado a partir da correspondência entre a estrutura de sistemas simbólicos e sistemas de sinais, não se resume a reiterações de operações lógicas, conforme argumentado no item 2.4. Isso por necessariamente o *Tractatus* dever levar em conta outros tipos de operações na geração de sinais, que não apenas operações lógicas. Certas séries formais, como a série sucessor, séries de termos em diversas ordens e séries envolvendo números cardinais, apresentadas no próprio *Tractatus*, por exemplo, não podem ser geradas por operações lógicas. A possibilidade de outras operações que não operações verdade na geração de sinais é indicada ainda pelo uso da expressão $[a,x,O'x]$, em *T5.2521*, onde não ocorre a variável de composições de N, Ω; e em particular, pela Forma Geral do Número ser introduzida exatamente ao se tornar variável mesmo Ω na Forma Geral da Série com expoentes. Algo do tipo implica em dificuldades na leitura logicista usualmente feita do *Tractatus*, por então números serem expoentes de operações quaisquer na transformação de sinais, e não apenas de operações lógicas. Equações matemáticas resultam assim do caráter recursivo de regras de sinais quaisquer em que os dois lados de uma identidade expressam seqüências de recursões que resultam na mesma posição em uma série. Dessa maneira, matemática e lógica não se reduziriam uma à outra, seja no logicismo ou na tentativa inversa de redução da lógica à matemática. Elas antes refletiriam aspectos distintos, ainda que imbricados, de sistemas de linguagem em geral, de modo à lógica refletir a estrutura de sistemas simbólicos, por lidar com as relações entre as condições de verdade das proposições, ao passo que a matemática reflete a estrutura de sistemas de sinais, por tratar esquemas recursivos na geração de séries de sinais quaisquer.

Ao lidar com transformações de sinais independentemente da projeção simbólica particular que se venha a fazer deles, o cálculo matemático teria autonomia em relação à sua aplicação como um método da lógica. Com isso, o cálculo mesmo pode ser considerado uma construção, no sentido de com ele gerarmos termos em uma série. A atribuição de significados a sinais é um arbítrio nosso, como se vê no uso de rabiscos em um papel de maneira significativa ou na distribuição de objetos em uma mesa para representar pessoas na rua. Da mesma maneira, sinais gerados em uma série apenas ganham significado à medida que os constituímos como tais. Nesse caso, equações, enquanto expressões dos pontos de cruzamento entre séries na constituição de um sistema, apenas são demonstradas gerando propriamente os termos das séries em questão e verificando se eles resultam posições iguais ou não. Assim, a ‘verdade’ e a ‘falsidade’ de equações matemáticas, discutidas ao final das seções 2.4 e 2.5, apenas se estabelecem como regras da sintaxe no momento em que construímos a sua demonstração, não possuindo, portanto, qualquer existência abstrata ou platônica anterior a ela.

O mesmo pode ser dito acerca dos esquemas apresentados ao longo do *Tractatus* para expressar as regras da sintaxe lógica - e obtidos em lógica pura por meio do procedimento de transformação de constantes em variáveis. Tais esquemas *apresentam*, em seus próprios sinais, *exemplos* dessas regras, não pretendendo com isso remeter a supostas entidades abstratas preexistentes que elas estivessem a *representar*. Assim, a rejeição da metalógica resulta, por meio de uma abordagem construtivista, na rejeição do platonismo, visto tais regras somente se constituírem quando de sua aplicação mesma, nos próprios sinais que as expressam. No caso, exemplos de esquemas são as formas lógicas apresentadas em notação ideográfica, como a Forma Geral da Proposição, da Operação, da Série e do Número, mas também todas as variáveis e séries formais apresentadas ao longo do livro. Dessa maneira, devem-se distinguir dois tipos de pseudoproposições no *Tractatus* - pseudoproposições que expressam regras da sintaxe lógica e contrassensos propriamente ditos.

As razões para a rejeição à metalógica, por sua vez, encontram justificativa no holismo que perpassa o livro. Não se pode constituir metalinguagem e linguagem objeto como sistemas distintos, uma vez que é o sistema de linguagem como um todo que determina o significado dos termos. Dessa maneira, supostas proposições metalógicas que se pretendam afirmações acerca do significado de outras expressões acabam por remeter às suas próprias condições de sentido. Algo do tipo, no entanto, é inviável, pela circularidade envolvida nesse caso violar a sintaxe matemática em seu caráter recursivo, de modo a essas pretensas proposições metalógicas não poderem se ligar a um sistema de linguagem. As disputas filosóficas, em específico, devem se mostrar como casos de contrassensos metalógicos, em que tomamos certos aspectos necessários da linguagem, que deveriam ser expressos por meio de esquemas ou variáveis livres, e os consideramos como tendo valores verdade atribuídos em decorrência da complexidade sintática da linguagem natural. Uma série de equívocos sem solução segue-se como conseqüência desse primeiro erro, ao se tomar propriedades formais da linguagem como objetos, algo que em particular se mostra saliente no discurso platonista. Em uma postura filosófica correta, no entanto, busca-se esquivar de tais esquívocos lançando mão do ferramental da análise lógica, de onde ela resultar em uma *crítica* da linguagem.

Em conclusão, deve-se observar que a filosofia da matemática e da lógica de Wittgenstein tem forte apelo explicativo. A matemática e a lógica não afirmam nada acerca do mundo, mas antes refletem a própria estrutura da linguagem em representação do mundo, de onde sua necessidade *a priori* e a sua aplicabilidade nas diversas áreas da ciência e em atividades do dia a dia. Além desse aspecto explicativo, uma filosofia dessa natureza tem ainda a vantagem de ser ontologicamente mais econômica que o platonismo, não demandando entidades abstratas para além de espaço e tempo que justifiquem o caráter *a priori* da lógica e da matemática. No caso, a forma lógica em questão não é uma entidade abstrata, mas se mostra nos próprios sinais que temos ou geramos diante de nós e que refletem as regras da sintaxe lógica em sua própria estrutura, como um esquema. Por outro lado, tal abordagem encontra dificuldades no que diz respeito a diversos ramos da matemática moderna - como na análise dos números reais, na teoria de conjuntos transfinitos e por sua própria rejeição à metalógica[161]. Afinal, o uso de impredicações não é problemático caso se considere os objetos definidos por meio delas como *preexistentes* às nossas definições; algo que, no

---

[161] Na análise dos reais, os cortes de Dedekind na obtenção dos números irracionais são impredicativos em decorrência da definição da noção de *limite superior mínimo*. O menor limite superior B de um conjunto de números reais G (onde cada número real é um conjunto eventualmente infinito de racionais) é ele mesmo um conjunto de números racionais, definido, no entanto, de maneira impredicativa a partir de G, visto esse último ser um conjunto de conjuntos de números racionais (ver Hatcher, 1968, p.139). No que diz respeito ao argumento de Cantor, sua diagonal é um subconjunto dos números naturais, definido por meio de quantificação sobre o conjunto de todos os subconjuntos de números naturais, de onde ela ser, portanto, impredicativa (Vieira, 2005, p.26). Além disso, tais restrições a impredicações resultam ainda no finitismo. Wittgenstein apela a esquemas de regras de séries para lidar com o infinito no *Tractatus*, algo que, no entanto, implica de maneira sub-reptícia em impredicações. Isso porque o *Tractatus* rejeita o axioma do infinito de Russell e sem esse axioma a postular um conjunto infinito seria necessário definir a propriedade de "seguir-se em uma série", como faz Frege: "A proposição "se todo objeto com o qual *x* mantém uma relação Φ cai sob o conceito *F*, e da proposição de que *d* cai sob *F* segue, universalmente, qualquer que seja *d*, que todo objeto com o qual *d* mantém a relação Φ cai sob o conceito *F*, então *y* cai sob *F*, qualquer seja o conceito *F*" significa o mesmo que "*y* segue na série Φ após *x*"." (Frege, 1950, p.92). Caso Φ seja a série dos números naturais, temos que o conceito 'seguir-se de 0' reune a totalidade dos naturais como sua extensão (o que por sua vez permite a dedução do teorema da indução matemática, como se vê em Hatcher, 1968, p.103-104). No entanto, a definição do conceito de 'seguir-se em uma série' é impredicativa, por esse conceito ser de primeira ordem, mas definido através de uma quantificação sobre conceitos de primeira ordem: '*qualquer* que seja o conceito *F*' (onde *F* é qualquer propriedade que se prove de zero e do sucessor de qualquer número, por exemplo). Wittgenstein certamente considera o conceito 'seguir-se em uma série' como um conceito formal, como um esquema, e não como um conceito próprio, o que serviria a contornar o problema da impredicação. No entanto, reunir os termos sob tal conceito em uma totalidade aparenta incorrer sub-repticiamente em impredicações como a na definição de Frege para a hereditariedade (ver final da seção 1.2, subitem III, p.65-66). Por fim, no que diz respeito à metalógica, os teoremas da incompletude de Gödel são demonstrados utilizando métodos estritamente recursivos, de maneira que a sua validade deveria ser aceita por Wittgenstein. O segundo teorema da incompletude, a princípio, não parece problemático, visto por ele uma suposta demonstração da *consistência* de um sistema formal que baste ao desenvolvimento da aritmética resultar em um paradoxo. Uma vez que a consistência de um sistema é uma propriedade metalógica, para Wittgenstein a demonstração dessa propriedade deve certamente ser um contrassenso, no caso, um paradoxo, de onde, a princípio, não haver conflito para com esse resultado. No entanto, a incompletude é ela mesma uma propriedade metalógica - e sua demonstração deveria igualmente ser um contrassenso na concepção de Wittgenstein. Um argumento de conciliação nesse caso seria observar que uma demonstração matemática não *afirma* nada e, portanto, não pretende *dizer* o aspecto do sistema de linguagem que ela tão somente *mostra*. De qualquer maneira, no primeiro teorema da completude, obtido pela demonstração recursiva da existência de proposições matemáticas verdadeiras, mas indecidíveis, a oposição entre Wittgenstein e os resultados Gödel é bastante clara. Uma verdade matemática independente de nossos cálculos é diametralmente contra o construtivismo proposto por Wittgenstein e favorece, assim como os resultados lógico-matemáticos obtidos por meio de impredicações, uma postura platonista acerca da natureza da matemática. Naturalmente, as demonstrações de Gödel se deram posteriormente à publicação do *Tractatus*, e a resposta de Wittgenstein a eles somente ocorre já no contexto de seus desenvolvimentos no *Período Intermediário* (ver Floyd, 2000). No caso, uma 'conciliação' como a proposta para o segundo teorema da incompletude pode ainda ser tentada no que diz respeito ao primeiro teorema: a proposição 'verdadeira', mas indecidível *nesse* sistema, se dá em *outro* sistema matemático, no qual ela é decidível (lançando mão aqui, naturalmente, da noção de múltiplos sistemas matemáticos, ainda inexistente no *Tractatus*). A

entanto, tem por conseqüência o platonismo, em oposição direta ao construtivismo do *Tractatus*. Essa é uma dificuldade nem um pouco trivial a ser contornada por uma filosofia que pretenda a matemática e a lógica reduzidas a meras estruturas da linguagem. Apesar disso, há que se reconhecer a existência de uma relação bastante próxima entre linguagem, lógica e matemática, sobre a qual o *Tractatus Lógico-Philosophicus* permite, sem dúvidas, lançar alguma luz.

demonstração desse teorema não resultaria em uma metalógica pela 'verdade' matemática não equivaler à afirmação de uma propriedade, mas à simples exposição de uma regra. Independente disso, o caráter recursivo das demonstrações de Gödel coloca uma forte dificuldade às pretensões tractarianas de rejeitar a metalógica por meio de uma concepção de sintaxe lógica baseada em recursões primitivas.

ANEXO A
Da Notação do *Tractatus* e Funções Recursivo-Primitivas

Os elementos sintáticos da ideografia do *Tracatus* devem ser capazes de atender a certos requisitos mínimos. A notação da Forma Geral da Série, por exemplo, deve, a princípio, ter multiplicidade equivalente à de Funções Recursivas Primitivas. Isso porque a Forma Geral do Número se baseia na Forma Geral da Série - e deve ser possível, *pelo menos*, a obtenção da Aritmética Primitivo-Recursiva a partir da ideografia do *Tractatus*, para que ela se mostre viável no desenvolvimento da matemática. Além disso, a redução da aritmética do *Tractatus* a um tipo de Aritmética Primitivo-Recursiva permite antecipar, no *Tractatus* mesmo, motivações para a posterior rejeição de problemas *indecidíveis* como contrassensos no *Período Intermediário*. Entre problemas indecidíveis se encontram aqueles expressos por meio de funções μ-Recursivas não limitadas[162] - ao

[162] Uma função μ-recursiva retorna o menor número de iterações de uma função recursiva tal que o resultado dessa função seja zero. Tais funções podem ser expressas por $f(z_1,...,z_n) = \min y(h(z_1,...,z_n, y) = 0)$, onde '*min y*' equivale ao "menor *y* tal que", *h* é a função recursiva à qual aplicamos a função *min* e *y* é o número de iterações de *h*. Caso a função *h* nunca seja igual a zero, a função *min* será reiterada infinitamente, visto nenhum valor de *y* resultar em *h=0*. Esse caso é o equivalente ao problema de máquinas de estados que *não param* na abordagem computacional. Em certas situações, não há como provar que um processamento não pára para nenhum valor natural de *y* em se considerando que o conceito de 'computação' remete a um cálculo em um número *finito* de passos. Nesses casos, a questão acerca da existência de algum *y* para o qual *h=0* é *indecidível*, porque seria necessário um processamento infinito na obtenção de sua resposta. No *Período Intermediário* Wittgenstein considera questões indecidíveis como contrassensos, o que implica em limitar o poder expressivo da linguagem a funções recursivo-primitivas, descartando, portanto, a μ-recursão *irrestrita* (na qual os passos iterativos *y* não se limitam a um número finito). Um ponto de interesse a esse respeito ocorre quando se observa que a questão acerca de se uma função *h* resulta em zero para algum *y* natural é, propriamente, uma questão metalógica, uma vez que 'se igualar a zero para algum *y*' é uma propriedade acerca de funções recursivas. Além disso, a oposição entre infinito atual e potencial igualmente se coloca, visto, caso fosse possível verificar os valores de *h* para *todo y* - sendo que *y* tem por domínio o conjunto dos números naturais – então o problema da parada não seria indecidível: ele apenas o é no caso de uma computação finita. Assim, caso se restrinja a função *min* para ser aplicada a um número finito de iterações *y* de *h*, temos que passa a ser sempre possível decidir acerca da parada de uma função – e na verdade, funções μ-recursivas *restringidas* de fato se reduzem a funções recursivo-primitivas. O caso de se descartar proposições indecidíveis assim como o infinito atual como contrassensos, em forte relevo no *Período Intermediário*, pode dessa maneira, em certos aspectos, ser antecipado no *Tractatus*, por sua notação equivaler em capacidade expressiva a funções recursivo-primitivas.

passo que, se restringirmos nossa notação a regras sintáticas primitivo-recursivas, funções como essas não poderiam sequer ser formuladas, tratando-se antes de sequências de sinais inarticulados, *nonsense*. O que segue não pretende ser uma apresentação exaustiva, naturalmente, mas antes um esboço para uma interpretação da notação do *Tractatus* baseada nos requisitos mínimos que ela deve atender na obtenção da Aritmética Recursivo-Primitiva.

Recursões Primitivas são introduzidas a partir da *fixação* das variáveis contidas nas seguintes duas expressões[163]:

(i) $f(z_1,...,z_n,0) = g(z_1,...,z_n)$

(ii) $f(z_1,...,z_n, y+1) = h(z_1,...,z_n, y, f(z_1,...,z_n, y))$

Em (i) temos uma variável para a *base* de recursão, o primeiro termo da série gerada, enquanto em (ii) temos o *passo recursivo* utilizado na geração de novos termos na série. Nessas expressões, g e h são variáveis para funções recursivas iniciais, funções de substituição ou funções recursivas primitivas[164], enquanto f é a função recursivo-primitiva sendo definida a partir de g e h. As variáveis $z_1,...,z_n$ são parâmetros iniciais no argumento dessas funções, ao passo que $y+1$, y e $f(z_1,...,z_n, y)$, na expressão

[163] Seguindo a notação de Hatcher (Hatcher, 1968, p.214).

[164] As funções iniciais são: $Z(x) = 0$ para todo $x \in N$, a função zero; $v(x) = x+1$ para todo $x \in N$, a função sucessor; e $U_i^n(z_1,...,z_i,...,z_n) = z_i$, a função projeção. Já a função substituição é dada por $f(z_1,...,z_m) = g(h_1(z_1,...,z_m), h_2(z_1,...,z_m),...,h_n(z_1,...,z_m))$.

(ii), constituem a estrutura de argumento que propriamente caracteriza a expressividade de uma Recursão Primitiva[165].

O principal objetivo no que segue é mostrar que a notação ideográfica proposta por Wittgenstein tem a mesma estrutura de argumento de funções recursivo-primitivas - dada pelo uso de y e $f(z_1,...,z_n,y)$ como argumento na determinação do valor de *f* em *y+1* (ou ainda, de maneira simplificada, pelo uso de *(y,f(y))* como argumento de *h*, em *f(y+1)=h(y,f(y))*, onde foram omitidos os parâmetros $z_1,...,z_n$, ver nota 165). Para tanto, é preciso identificar correspondentes entre elementos sintáticos da recursão primitiva como formulada acima e os elementos obtidos na *reiteração* da Forma Geral da Proposição, como apresentada no *Tractatus*, o permitirá tomar a recursão primitiva como equivalente à Forma Geral da Série. Primeiramente, no que diz respeito ao paralelo com a expressão (i), a base recursiva, temos que na Forma Geral da Proposição, $[\bar{p},\bar{\xi},N(\bar{\xi})]$, os parâmetros iniciais $z_1,...,z_n$ podem ser tomados como correspondendo ao conjunto de proposições elementares $\bar{p}$, enquanto a função g teria por correspondente a operação $[\bar{\xi},N(\bar{\xi})]$, a qual se aplica sobre $\bar{p}$ na obtenção do primeiro

---

[165] Em Hacher (Hatcher, 1968, p.186-187), a estrutura de argumento de uma função recursivo-primitiva *f* é apresentada da seguinte maneira: dados um conjunto A, uma função f: (w x A)-> A e um elemento $a \in A$ quaisquer, existe uma *única* função *t:w->A* tal que *t(0)=a* e *t(n')=f(n,t(n))*, onde w representa o conjunto dos números naturais. A função *f* tem duas posições de argumento, *n* e *t(n)*, o que lhe garante expressividade maior do que se ela tivesse uma única posição de argumento – como no caso de ter apenas *t(n)* como argumento, em uma *recursão simples* (e, portanto, em contraste com a *recursão primitiva*, com duas posições *(n,t(n))*). No caso da recursão primitiva, *n* equivale ao argumento de *t* na iteração anterior e *t(n)* ao resultado de *t* na iteração anterior, *informações* utilizadas na determinação do valor de *t* na iteração atual, e por isso constarem em seu argumento. Tal estrutura de argumento de função garante maior poder expressivo à recursão primitiva que à simples recursão, ao permitir 'contar' as reiterações até certo ponto da série, e utilizar essa informação como posição de argumento em iterações posteriores. O objetivo principal no que segue é mostrar que a notação de Wittgenstein apresenta estruturas de argumento com a forma *(n,t(n))*, ou seja, com a forma da recursão primitiva. Para fins de clareza, ao invés de *t(n')=f(n,t(n))* será utilizado no que segue *f(y+1)=h(y,f(y))*, que equivale à fórmula $f(z_1,...,z_n,y+1)=h(z_1,...,z_n,y,f(z_1,...,z_n,y))$ sem uso dos parâmetros $z_1,...,z_n$.

termo[166] da série, $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. Dessa maneira, à expressão $f(z_1,...,z_n,0)$, em (i), teríamos por correspondente a variável proposicional $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$, o primeiro termo da série gerada pela regra $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ (ou *g*, em (i)) tendo por base um conjunto de proposições elementares $\bar{p}$ (parâmetros $z_1,...,z_n$, em (i)).

Já na associação da Forma Geral da Proposição com a expressão do passo recursivo (ii), suponha-se que o primeiro termo da série de proposições obtido acima seja a proposição $\bar{q} = [\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. Nesse caso, o segundo termo da série é dado por $\bar{r} = [\bar{q}, \bar{\eta}, N(\bar{\eta})]$, o terceiro por $\bar{s} = [\bar{r}, \bar{\chi}, N(\bar{\chi})]$, etc. Aqui, o uso de diferentes letras $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ e $\bar{\chi}$ pretende expressar as diferentes bifurcações possíveis (ver item 2.2, nota 104) ao longo das reiterações de *N* na geração da série em questão. Na recursão primitiva, diferentes bifurcações são obtidas por variações nos valores de $z_1,...,z_n$ ao longo das iterações *y*, algo que, conforme argumentado no item 2.2, já se encontra subentendido nas variáveis $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ e $\bar{\chi}$. Assim, se em (i) os parâmetros $z_1,...,z_n$ tiveram papel correspondente ao conjunto inicial de proposições elementares $\bar{p}$, a variação nos valores de $z_1,...,z_n$ em (ii), a gerar bifurcações na série recursiva, tem por correspondente as diferentes fixações de $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ e $\bar{\chi}$ ao longo das reiterações de *N*. Assim, resta apenas identificar na notação de Wittgenstein a estrutura de argumento *(y,f(y))*, em *f(y+1)=h(y,f(y))* (com omissão dos parâmetros $z_1,...,z_n$).

Em outras palavras, cada *novo termo* da série (*f(y+1)*, na notação da recursão primitiva) deve ter, por argumento da regra $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$, tanto o *termo anterior* da série (ou *f(y)*, em

---

[166] O primeiro termo da série gerada pela regra $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$, com seu número específico de reiterações de *N*, bifurcações, etc., ver item 2.2.

recursão primitiva) quanto o *argumento do termo anterior* (ou *f(y)*, em recursão primitiva). Substituindo a expressão de $\overline{q}$, o primeiro termo da série, no segundo termo da série, $\overline{r}$, obtemos $\overline{r} = [[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})], \overline{\eta}, N(\overline{\eta})]$. É nessa expressão onde se deve identificar, como argumento da operação $[\overline{\eta}, N(\overline{\eta})]$, os correspondentes a *y* e *f(y)*. Isso pode ser feito por inspeção direta: $\overline{p}$ é a *base* de aplicação da operação $[\overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$ no *passo recursivo anterior*, enquanto $[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$ é o *resultado* da aplicação da operação $[\overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$ no *passo recursivo anterior*[167]. Assim, na comparação de $\overline{r} = [[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})], \overline{\eta}, N(\overline{\eta})]$ com a expressão *f(y+1)=h(y,f(y))*, $\overline{p}$ cumpre o papel atribuído a *y*[168], $[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$ o papel atribuído a $f(z_1, ..., z_n, y)$, $[\overline{\eta}, N(\overline{\eta})]$ o papel atribuído a *h* e $[\overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$ o papel atribuído a *f* na iteração anterior.

Em conclusão, na notação do *Tractatus*, a forma geral das reiterações apresentadas acima é dada pela Forma Geral da Série, $[x, \xi, \Omega' \xi]$, um esquema de substituição que deve, portanto, subentender os passos recursivos (i) e (ii) – e assim, a princípio, corresponder à recursão primitiva. No entanto, na obtenção da Aritmética Recursivo-Primitiva devemos lidar com números, e não com proposições. Apesar disso, algo do tipo pode ser facilmente obtido reescrevendo a Forma Geral da Série em sua versão com expoentes, $[\Omega^{0}{}' x, \Omega^{v'} x, \Omega^{v+1'} x]$, e a seguir tornando variável Ω, na obtenção da Forma

[167] Mais uma vez deve-se observar a distinção entre funções matemáticas e funções proposicionais apontada por Hylton (seção 1.1.1). Na notação da recursão primitiva, utilizando funções matemáticas, devemos escrever o argumento da etapa anterior, *y*, em uma posição de argumento separada do resultado da etapa anterior, *f(z₁,...,Zₙ,y)* na expressão h(*z₁,...,Zₙ,y, f(z₁,...,Zₙ,y)*). Algo do tipo não é necessário no caso de funções proposicionais, visto $[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$ ser o resultado do passo anterior e apresentar em sua própria estrutura a base de aplicação anterior, $\overline{p}$ (ao passo que o *resultado* da função matemática *f(z₁,...,Zₙ,y)* não guarda vestígios do argumento utilizado em sua obtenção).

[168] Na segunda iteração da série, o papel de y passa a ser cumprido por $\overline{r}$, na terceira, por $\overline{s}$, e assim sucessivamente.

Geral do Número, $[0, \xi, \xi + 1]$. Assim, se na recursão primitiva os sinais *y* e *y+1* realizam a *contagem* das iterações na aplicação de *f*, temos um correspondente direto a esse no papel exercido por números em séries quaisquer no *Tractatus*.

ANEXO B
Somas e Produtos Aritméticos e Lógicos

O presente anexo pretende ser apenas um *esboço* de interpretação da demonstração de 2x2=4 no *Tractatus*. Na seção 2.2, nota 99, foi argumentado que o equivalente à quantificação existencial se escreve por $N(N(\bar{\xi}))$ no *Tractatus*, enquanto a quantificação universal por $N(\overline{N(\xi)})$. A diferença entre eles é o ponto em que a variável é barrada ao longo da recursão, se em ξ ou em $N(\xi)$; resultando o primeiro em uma *soma lógica* entre os valores sob ξ e o segundo em um *produto lógico*. Será argumentado que algo similar ocorre na soma e no produto aritméticos.

Na demonstração de *2x2=4*, Frascolla acrescenta à notação do *Tractatus* a regra A: $(\Omega'\Omega)'\xi = \Omega'\Omega'\xi$, conforme abaixo (Frascolla, 1994, p.15-19).

[1] $\Omega^{(2\times2)'}x = (\Omega^{2})^{2'}x$ [por definição em $\Omega^{\nu\times\mu'}x = (\Omega^{\nu})^{\mu'}x$]

[2] $= (\Omega^{2})^{1+1'}x$ [pela definição do numeral *2*, *T6.02*]

[3] $= \Omega^{2'}\Omega^{2'}x$ [pela definição indutiva em *T6.02*,
com Ω^{2} no lugar de Ω]

[4] $= \Omega^{1+1'}\Omega^{1+1'}x$ [pela definição do numeral *2*, *T6.02*]

[5] $= (\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x$ [a ser tratado na discussão abaixo]

[6] $= (\Omega'\Omega)'\Omega'\Omega'x$ [pela definição da regra A]

[7] $= \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x$ [pela definição da regra A]

[8] $= \Omega^{1+1+1+1'} x$ [pela definição indutiva em *T6.02*]

[9] $= \Omega^{4'} x$ [pela definição do numeral *4*]

[A] $(\Omega'\Omega)'\xi = \Omega'\Omega'\xi$

O passo [6] não ocorre no *Tractatus*, mas é introduzido por Frascolla quando ele afirma não haver como explicar a passagem direta de [5] para [7] senão por intermédio de uma regra como [A], também acrescentada por ele à demonstração original.

O exemplo utilizado por Wittgenstein talvez não seja o mais adequado, visto o resultado de *2x2* ser o mesmo que *2+2*, o que não permite destacar claramente as diferenças entre ambas. Tome-se o caso *2x3*, o qual se escreve por $(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega'\Omega)'\xi$. A ser utilizada a regra [A] proposta por Frascolla, $(\Omega'\Omega)'\xi = \Omega'\Omega'\xi$, temos que $(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega'\Omega)'\xi = \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\xi$ - um resultado obviamente incorreto[169], visto *2x3≠5*. No que segue o objetivo será, portanto, realizar um esboço para uma interpretação da notação do *Tractatus* que nos permita distinguir a soma da multiplicação evitando, sempre que possível, o acréscimo de novos elementos à notação do *Tractatus*.

O caso que leva Frascolla a estender a notação do *Tractatus* é o da expressão $(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x$, a qual, a partir da definição de Ω ($\Omega = [\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$), se reescreve, *a princípio*, da seguinte forma:

$$([\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})])'([\bar{\eta}, N(\bar{\eta})]'[\bar{\eta}, N(\bar{\eta})])'x$$

---

[169] Não pretendo dizer que Frascolla comete um erro tão trivial como esse, até porque isso demandaria uma discussão mais aprofundada do seu argumento do que caberia fazer aqui. O objetivo é somente propor, e *apenas em esboço*, uma interpretação que não demande a introdução de tantos novos elementos como a que ele faz (como, por exemplo, a de um expoente à direita de Ω para diferenciar a adição da multiplicação; Frascola, 1994, p.17).

A respeito do uso de variáveis distintas, $\bar{\xi}$ e $\bar{\eta}$, em cada um dos parênteses acima, foi argumentado na seção 2.2 que $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ possui uma variável numérica subentendida na fixação dos valores de $\bar{\xi}$, a expressar o *número* de reiterações de N em Ω. Assim, em $(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x$ temos que as variáveis Ω no primeiro parênteses podem expressar em um número distinto de reiterações de N em relação às variáveis operacionais Ω no segundo parênteses; de onde o uso de $\bar{\xi}$ e $\bar{\eta}$ de maneira a diferenciá-los.

No intuito de completar a expressão acima, deve-se ainda observar a ausência do apóstrofo na segunda operação em cada um dos parênteses em $(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x$. Também na seção 2.2, foi dito que o papel do apóstrofo é novamente fixar ou barrar a variável η no sinal da operação $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]\eta$, de maneira a se obter a proposição $[\bar{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. No que segue, a variável não barrada em decorrência da ausência do apóstrofo é expressa por λ:

$$([\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]\lambda)'([\bar{\eta}, N(\bar{\eta})]'[\bar{\eta}, N(\bar{\eta})]\lambda)'x$$

A *ausência* do apóstrofo deve indicar, portanto, que não é a variável λ que está sendo fixada pelo apóstrofo na parte externa dos parênteses, mas sim a variável operacional $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ naquilo que diz respeito ao número de iterações de N realizadas por ela. O número de tais iterações no primeiro parênteses será fixado (através da aplicação do apóstrofo externo ao primeiro parênteses) pelo segundo parênteses na expressão acima, $([\bar{\eta}, N(\bar{\eta})]'[\bar{\eta}, N(\bar{\eta})]\lambda)$. Assim, cada ocorrência de $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ no primeiro parênteses deve ser substituída por $([\bar{\eta}, N(\bar{\eta})]'[\bar{\eta}, N(\bar{\eta})]\lambda)$, o que resulta na multiplicação entre o número de ocorrências de $[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ no primeiro parênteses e o número de ocorrências de $[\overline{\eta}, N(\overline{\eta})]$ no segundo parênteses. Uma vez realizada a substituição, não resta outra variável a ser fixada que não λ - e $(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x$ pode então se reescrever por $\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\xi$. A ausência do apóstrofo diante de Ω em $(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x$ apenas serve para indicar que a variável a ser fixada não é λ, mas sim o número de aplicações de N na variável operacional do primeiro parênteses. Assim, uma vez realizada essa fixação, não deve restar nenhuma variável Ω sem apóstrofo. O caso *2x3* resulta na expressão abaixo:

$$([\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]\lambda)'([\overline{\eta}, N(\overline{\eta})]'[\overline{\eta}, N(\overline{\eta})]'[\overline{\eta}, N(\overline{\eta})]\lambda)'x$$

O que equivale a $(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega'\Omega)'x$. Uma dificuldade nesse argumento diz respeito à ausência de apóstrofo também em $(\Omega'\Omega'\Omega)'$ no *segundo* parênteses. Talvez isso possa ser interpretado como indicação que $(\Omega'\Omega'\Omega)'$ no segundo parêntese servirá para fixar o número de aplicações de *N* em $(\Omega'\Omega')$ no primeiro parênteses, e não para fixar a posição λ, propriamente[170]. Assim, a *soma 2+3* seria dada por $(\Omega'\Omega')'(\Omega'\Omega'\Omega')'x$, enquanto o *produto 2x3* por $(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega'\Omega)'x$.

Algo do tipo seria análogo à soma e ao produto lógico, respectivamente, em $N(N(\bar{\xi}))$ e $N(\overline{N(\xi)})$. Nessas duas expressões tem-se claro o momento distinto em que ocorre a fixação das variáveis, com ξ no lugar de λ e *N* no lugar de Ω. No produto lógico, apenas fixamos valores *após* a aplicação de *N* ao esquema ξ, da mesma maneira que no

[170] Se for esse o caso, uma expressão como $(\Omega'\Omega)'\Omega'\Omega'x$ não faz sentido: 2x2 é dada por $(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x$ e 2+2 por $(\Omega'\Omega')'(\Omega'\Omega')'x$. De fato, $(\Omega'\Omega)'\Omega'\Omega'x$ não ocorre no Tractatus, mas é introduzida por Frascolla no passo [6] da demonstração acima. Em contrapartida, há que se admitir que Wittgenstein tampouco faz uso de $(\Omega'\Omega')'(\Omega'\Omega')'x$, mas essa aparenta ser uma notação mais natural para a soma onde os apóstrofos indicam que se está fixando, a cada passo, a posição de argumento diante da operação - e não o número de iterações de *N* em cada operação.

produto aritmético a fixação de valores se dá apenas *após* serem realizadas as composições de Ω indicadas pela multiplicação. O ‘momento’ da fixação indica o ponto de cruzamento entre as séries envolvidas, de onde se tem mais uma vez claro o papel da matemática na interligação de séries em um sistema. No caso da demonstração de *2x2=4*, temos envolvidas quatro séries de sinais: $\Omega^{\nu\times\mu'}x$, $(\Omega^{\nu})^{\mu'}x$, $[x,\xi,\Omega'\xi]$ e a série das definições dos numerais *1*, *2*, *3*,.... Uma vez dada a posição *ν=2*, *μ=2* na primeira série, por meio das posições correspondentes na segunda série, das definições dos numerais e da Forma Geral da Série, concluímos via cálculo que, na série dos numerais, a posição 4 corresponde à posição indicada por 2x2 na série $\Omega^{\nu\times\mu'}x$. Em outras palavras, 2x2=4 é uma regra sintática em decorrência das correspondências entre as posições na série $\Omega^{\nu\times\mu'}x$ e as posições nas demais séries, dadas por suas respectivas definições. Se cada série pode ser entendida como sendo uma notação distinta, podemos considerar o cálculo como operando por meio de correspondências ou traduções entre notações, e mesmo a equação 2x2=4 pode ser vista como duas seqüências de sinais que chegam ao mesmo ponto por meio de séries distintas. A correlação entre duas séries quaisquer sempre pode ser expressa pela correlação entre duas seqüências numéricas interligando suas posições, de maneira similar a como é definido o conceito de recursão (apresentada como uma correlação entre uma seqüência de números qualquer e a série dos números naturais; ver Hatcher, 1968, p.186-187). Assim, o cálculo matemático trata, propriamente, o *entrelaçamento* de séries de sinais em um *Sistema de Séries*. Sendo as linguagens naturais nada mais que um emaranhado de séries entrecruzadas, chegamos com isso ao aspecto mais amplo no que diz respeito à topologia de uma linguagem - o próprio conceito de Sistema - e também por essa razão, tem-se que a multiplicidade constituída por uma notação, por um sistema, se diz ser uma *multiplicidade matemática* em *T4.04* e *T5.475*.

Bibliografia

- Cuter, João. (2005) Operations and Truth Operations in the Tractatus. Philosophical Investigations, 28:1, p.64.

- Engelmann, Mauro. (2013) Wittgenstein's Philosophical Development. Palgrave Macmillan.

- Floyd, Juliet. Putnam, Hilary. (2000) A Note on Wittgenstein's "Notorious Paragraph" about the Gödel Theorem. The Journal of Philosophy, Vol. 97, No. 11, p. 624-632.

- Fogelin, Robert. (1987) Wittgenstein. Routledge.

- Frascolla, Pasquale. (1994) Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. Routledge.

- Frascolla, Pasquale. (2007) Understanding Wittgenstein's Tractatus. Routledge.

- Frege, Gotlob. (1879) Begriffsschrift.

- Frege, Gotlob. (1950) The Foundations of Arithmetic. Oxford.

- Frege, Gotlob. (1966) The Basic Laws of Arithmetic. Berkley.

- Frege, Gotlob. (1974) Sobre Concepto y Objeto. Escritos Lógico-Semanticos, Editorial Tecnos.

- Frege, Gotlob. (2011) Sobre o Sentido e a Referência. Fundamento – Rev. de Pesquisa em Filosofia, v. 1, n. 3.

- Geach, Peter. (1981) "Wittgenstein's Operator N". Analysis, no.4, Oxford Journals.

- Goldfarb, Warren. (1979) Logic in the Twenties: The Nature of the Quantifier. The Journal of Symbolic Logic, vol.44, no. 3, p.351-368.

- Hatcher, William. (1968) Foundations Of Mathematics. Saunders Company.

- Hylton, Peter. (2008) Propositions, Functions and Analysis. Oxford.

- Marion, Mathieu. (1998) Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics. Oxford.

- Marion, Mathieu. (2009) Jogando o bebê junto com a água do banho: Wittgenstein, Goodstein e o cálculo equacional. Revista doispontos, vol.6.

- Meyer, Paul. (1983) Probabilidade, Aplicações à Estatística. Livros Técnicos e Científicos Editora.

- Ricketts, Thomas. Potter, Michael. (2010) The Cambridge Companion to Frege Grundlagen. Cambridge University Press.

- Russell, Bertrand. (1902) Letter to Frege. From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931 (1999). Harvard University Press.

- Russell, Bertrand. (1910) Principia Mathematica. Cambride University Press.

- Russell, Bertrand. (1996) The Principles of Mathematics. Northon & Company.

- Russell, Bertrand. (1978) Da Denotação. Coleção Os Pensadores. Abril Cultural.

- Vieira, Newton. (2004) Linguagens Formais e Autômatos. Universidade Federal de Minas Gerais.

- Wittgenstein, Ludwig. (1994) Tractatus Logico-Philosophicus. Editora USP.

- Wittgenstein, Ludwig. (2005) Observações Filosóficas. Edições Loyola.