Efeitos da gravitação sobre a liberdade assintótica em teorias de calibre e violação de *Lorentz* no Modelo Padrão.

Jean Carlos Coelho Felipe

Orientador: Prof. Dr. Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Departamento de Física

Universidade Federal de Minas Gerais

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito
para obtenção do grau de *Doutor em Física.*

Setembro 2014

Essa tese é dedicada à Professora Maria Carolina Nemes (*in memorian*)

Acknowledgements

Se fosse falar de todos que me ajudaram para que essa tese se concretizasse, com certeza não caberia aqui. Logo, vou citar apenas alguns nomes, mas tenham plena ciência que a ajuda de vocês foi fundamental para a realização deste trabalho.

Agradeço a Deus, por ter me dado forças para que pudesse chegar até aqui e por tudo que ele representa em minha vida.

Agradeço a toda minha família, em especial aos meus pais Gerci e Maria Auxiliadora, pelo apoio e pela compreensão durtante este trabalho. Vocês são meu exemplo.

Aos meus irmãos Kênia, Gleisson, Alisson e Juninho pela torcida e pelas horas de alegria e descontração.

À minha esposa Estefânia, pela paciência, companherismo, cumplicidade, carinho e pelos (não foram poucos!) momentos ausentes durante este trabalho. Por tantas vezes ter me dado força e me feito acreditar que era capaz, mesmo quando eu mesmo achava que já não o podia.

Aos meus tios, em especial Sebastião e Laura pela acolhida em minha chegada à BH.

Ao Marcos Samapaio, por ter aceitado-me com seu orientando, pelo exemplo de orientação e por toda ajuda, conselhos e pelo companheirismo dispensados à mim no decorrer desses quatro anos, tornando possível a elaboração dessa tese. Muito obrigado!

À Maria Carolina Nemes. Gostaria que estivesse aqui para presenciar o desfecho desse trabalho que também é seu mas, infelizmente, quis o destino no surpreender com sua tão prematura partida. Fica aqui meu agradecimento por tudo o que fizestes por mim, por ter me

acolhido ainda no mestrado sem mesmo me conhecer, pelas conversas, conselhos e pelo seu exemplo e seriedade no fazer ciência, fazendo-me gostar ainda mais dessa tão bela e difícil área que é a Física. Muito obrigado!

Ao professor *David J. Toms* por ter aceito me receber como aluno durante meu período de estágio-sanduíche na *Newcastle University*, pela paciência e pelos ensinamentos os quais levarei sempre comigo.

À Dr. *Irina Neganova*, por ter me acolhido em sua casa durante meu período de estágio-sanduíche na cidade de *Newcastle*, por me acolher praticamente como um "filho"em lugar o qual não conhecia absolutamente nada. Fica aqui o meu muito obrigado!

Aos amigos do grupo de TQC da UFMG (Gustavo, Adriano, Alexandre, Yuri, Joilson, Arthur, Hélder) pela ajuda, pelas conversas (sobre física ou não) e pelos momentos de descontração.

Aos amigos do mestrado e do doutorado (em especial aos companheiros de sala: Lígia, Adriano, Clyffe e Alexandre Alberto (agregado) bem como os companheiros de Fifinha: Marcos Flávio (Mangos), Davi, Felipe Magalhães (Rapaiz), Tassius e Murilo), pelos momentos de alegria e descontração, fazendo com o que minha trajetória até aqui se tornasse mais leve.

Aos companheiros de república: Wanderson, Zé Ferraz, Adaílton, Rafael, Andreij e Arturo pelas longas conversas e momentos de descontração.

Aos amigos de Ouro Preto pelo apoio e pelos ensinamentos os quais levarei por toda a minha vida. Em especial aos amigos do GOU UFOP e do departamento de Física da UFOP.

Aos amigos do GOU UFMG, pelo incondicional companherismo em todos os momentos (acadêmicos ou não) e por mostrar-me um sentido maior para a vida que perpassa para além dos livros. Deus abençoe cada um de vocês!

Aos amigos de Rio Casca, pela presença e pela torcida, mesmo que distante.

Aos membros da banca por aceitarem avaliar-me neste trabalho.

Ao departamento de Física da UFMG pela oportunidade de realizar minha pós-graduação.

Aos funcionários da UFMG por fornecerem todas as condições necessárias para que esse trabalho pudesse ser realizado. Em especial as secretarias de graduação e de pós-graduação em Física, por mostrarem-se sempre prontas a ajudar no que fosse preciso.

Ao CNPq e CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

A presente tese versa majoritariamente sobre dois problemas relacionados ao papel da gravitação em Teoria Quântica de Campos (TQC). Problemas estes que tem sido intensamente explorados nos últimos anos. No primeiro problema, investigaremos a influência de efeitos gravitacionais na teoria da Eletrodinâmica Quântica (EDQ), particularmente analisando o comportamento da função β do modelo perante tais contribuições. Essa questão é particularmente interessante no sentido de que a presença de um termo oriundo do setor gravitacional para a função β implica que a EDQ se torna assintoticamente livre, o que não ocorre no modelo puro (sem contribuições gravitacionais). Porém, esse resultado tem sido controverso na literatura, sendo a discussão basicamente alicerçada na maneira como o modelo é tratado do ponto de vista operacional. Sob esse ponto de vista, apresentaremos uma maneira de tratar esse problema. Mostraremos que a contribuição gravitacional para o modelo existe, porém, a mesma sendo dependente de um parâmetro arbitrário o qual é dependente de regularização. Particularmente, mostraremos também que tal contribuição é dependente do parâmetro de *gauge* vindo do setor gravitacional.

No segundo problema, através do estudo do modelo fermiônico imerso em um espaço curvo contendo um termo de quebra de simetria de *Lorentz*, mostraremos que é possível gerar um termo do tipo *Chern-Simons* (CS) gravitacional. Todavia, veremos que tal termo é intrisecamente ambíguo e dependente de um parâmetro arbitrário, e que as simetrias impostas pelo modelo não são suficientes para fixar essas arbitrariedades, fazendo com que o termo de CS seja de fato ambíguo e dependente de regularização.

Abstract

The present thesis mostly deals about two problems related to the importance of gravitation in Quantum Field Theory (QFT). These problems have been intensively studied in the last years. First, we investigate the influence of gravitational effects on the Quantum Electrodynamics theory (QED), specially analysing the β function behaviour before such contributions. This issue is quite interesting since the presence of gravitational sector term in β function implies in the asymptotically free behaviour of QED, unlike what occurs in the pure model (without gravitational contributions). Nevertheless, this result has been controversial in literature, being essentially associated on how this problem is operationally treated. From this point of view, we show a way to treat this issue. We show that there is a gravitational contribution for the model although this contribution term has an arbitrary parameter which is regularization dependent. Furthermore, we shown that this contribution is gravitational gauge dependent.

In the second problem, through the study of a fermionic model embedded in a curved space time with a Lorentz-violating symmetry term, we shown that is possible to generate a gravitational Chern-Simons-like term (CS-like term). Nevertheless, we will see that term is intrinsecally ambiguous depending on an arbitrary parameter. We will see that the model symmetries are not sufficient to fix such arbitrariness, leading the CS-like term to be ambiguous and regularization dependent indeed.

Declaração

A presente tese consiste nos resultados dos trabalhos desenvolvidos durante o período de agosto de 2010 a julho de 2014. Os problemas desenvolvidos aqui não foram submetidos em prol de nenhum outro grau de qualificação profissional.

Com relação aos capítulos 2 e 4, não faço nenhuma reivindicação de originalidade. O Capítulo 3 foi fruto de uma colaboração minha com a Dr.ª Maria Carolina Nemes, Dr. Marcos Sampaio, Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito e Dr. Luis Cabral. Tal colaboração teve como resultados as publicações [90, 91]. O Capítulo 5 foi fruto de uma colaboração minha com o Dr. Marcos Sampaio, Me. Alexandre Rodrigues Vieira, Dr. Adriano Lana Cherchiglia, Dr. Antônio P. Baêta Scarpelli e Dr.ª Maria Carolina Nemes a qual resultou na publicação [100]. O Capítulo 6 dessa tese está relacionado aos trabalhos iniciados em meu período de doutorado-sanduíche na *Newcastle University* sob supervisão do Dr. *David Toms*, bem como conclusões e perspectivas para a mesma. As contas descritas nos Apêndices dessa tese são referentes a alguns detalhes sobre os problemas desenvolvidos nos capítulos 3 e 5 por mim e pelos colaboradores anteriormente citados.

Sumário

Sumário viii

Lista de Figuras x

1 Introdução 1

2 Efeitos da gravitação sobre a liberdade assintótica em Teoria Quântica de Campos 9

2.1 Divergências Quadráticas em Teoria Quântica de Campos 9

2.2 Divergências Quadráticas e liberdade assintótica em teorias de *gauge* 11

2.3 Parametrização de Divergências Quadráticas 13

3 Contribuições gravitacionais para a função beta da Eletrodinâmica Quântica 18

3.1 Apresentação do modelo 19

3.2 Regras de Feynman 22

3.3 Cálculo das amplitudes 27

3.4 Resultados e Discussões 31

3.5 Comentários Finais 33

4 Aspectos da violação de simetria de *Lorentz* e CPT em Teoria Quântica de Campos 34

4.1 Estado da Arte 35

4.2 Parâmetros arbitrários em integrais divergentes 37

4.3 Revisitando o termo de CS induzido radiativamente na EDQ extendida 41

5 Arbitrariedade em um termo do tipo *Chern-Simons* gravitacional induzido radiativamente **46**
5.1 Apresentação do modelo 47
5.2 Regras de Feynman 49
5.3 Cálculo das Amplitudes 51
5.4 Resultados e Discussões 55
5.5 Comentários Finais 59

6 Conclusões e perspectivas **61**
6.1 Perspectivas 63

Apêndice A - Aspectos sobre a Regularização Implícita **67**

Apêndice B - Cálculo do propagador do gráviton **72**

Apêndice C - Cálculo dos Vértices **81**
.1 Interação fóton-escalar-escalar 82
.2 Interação fóton-fóton-escalar-escalar 86
.3 Interação gráviton-fóton-fóton 88
.4 Interação fóton-fóton-gráviton-gráviton 92
.5 Interações férmion-gráviton-gráviton e férmion-férmion-gráviton-gráviton 94

Apêndice D - Tabela de Integrais **95**

Bibliografia **97**

Lista de Figuras

3.1 Propagador de uma partícula escalar com massa m e momento q. 23
3.2 Propagador do gráviton. 23
3.3 Propagador do campo de *gauge*. 24
3.4 Interação gráviton-fóton-fóton. 25
3.5 Interação gráviton-gráviton-fóton-fóton. 25
3.6 Interação fóton-escalar-escalar. 26
3.7 Interação fóton-fóton-escalar-escalar. 26
3.8 Correções gravitacionais para o propagador do fóton a nível de *1-loop*. A linha duplamente ondulada representa o propagador do gráviton e a linha ondulada representa o propagador do fóton. . . 27
3.9 Correções para o propagador do fóton a nível de *1-loop*. A linha pontilhada representa o propagador do campo escalar. 27

5.1 Propagador do férmion. 50
5.2 Interação gráviton-férmion-férmion. 50
5.3 Interação gráviton-gŕaviton-férmion-férmion. 51
5.4 Diagramas que contribuem a ordem de 1 *loop* para a correção do propagador do gráviton. Linhas sólidas e duplamente onduladas correspondem aos propagadores do férmion e do gráviton respectivamente. 52
5.5 Correção a 1 *loop* para o propagador do gráviton considerando um rotulamento arbitrário para o momento no *loop*. 57

Capítulo 1

Introdução

"Thus far the Lord has helped us."

I Samuel 7:12

A necessidade de uma teoria que incorpore a Teoria da Relatividade Geral (TRG) e Mecânica Quântica (MQ) vem sendo objeto de intenso estudo nos últimos anos. Porém, sabe-se que a TRG, do ponto de vista perturbativo, é uma teoria não-renormalizável. Tal condição é caracterizada pela dimensão negativa da constante de acoplamento da TRG ($\kappa = \sqrt{32\pi G}$). Dessa maneira, não se torna possível a construção de uma teoria da gravitação quântica seguindo a filosofia do Modelo Padrão (MP) [1, 2].

Apesar desse empecilho, ainda faz sentido pensarmos em uma possível teoria de gravitação quântica, olhando a mesma do ponto de vista de uma teoria quântica de campos efetiva, ou seja, tomando-a como uma aproximação no limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental. Uma teoria efetiva pode ser caracterizada como uma teoria onde todas as interações compatíveis com as simetrias do modelo em estudo são colocadas na Lagrangeana que o descreve, de maneira que, sob este ponto de vista, obtemos um cenário onde efeitos gravitacionais podem ser calculados [3, 4].

Alguns modelos foram propostos na tentativa de descrever uma possível teoria quântica da gravitação, dentre as quais podemos citar a *Higher Derivative Gravity*

[5, 6], que surgiu no final da década de 70, a *Loop Quantum Gravity (LQG)*[7] e, estando atualmente mais próximo de uma descrição quântica da gravitação, porém ainda sem comprovação experimental, a *String Theory* [8]. Dentre esse modelos, a *String Theory (ST)* e a LQG apresentaram bons avanços na direção de uma teoria mais fundamental para a gravitação quântica, porém ainda existem algumas questões a serem melhor esclarecidas pelas mesmas.

No sentido de uma teoria de unificação entre TRG e MQ, a ST tem mostrado resultados promissores. Um dos aspectos fundamentais para uma teoria unificada seria a questão finitude da mesma, o que já é bem estabelecido para a ST até a ordem de *1-loop*. Para ordens de *2-loops* e *3-loops*, resultados apontam na direção de finitude a todas as ordens da teoria [8, 9], embora tais resultados ainda careçam de uma melhor compreensão, uma vez que tais predições não possuem uma prova rigorosa no que diz respeito ao cancelamento das divergências e unicidade das amplitudes inerentes ao modelo. Entre algumas de suas características, a ST exige a existência de mais dimensões espaciais do que as três que podemos observar. Ela prevê também a existência de uma nova simetria entre as partículas, simetria essa conhecida como supersimetria, a qual seria uma extensão das simetrias espaço-temporais, relacionando os bósons (partículas de *spin* inteiro) e os férmions (partículas de *spin* semi-inteiro). Ou seja, cada partícula bosônica teria um "superparceiro"fermiônico. Todavia, ambas assertivas ainda não apresentaram nenhum indício de existência. Uma característica postulada pela ST (passível de verificação experimental) baseia-se no fato de que a simetria de *Lorentz* é a simetria fundamental do universo para qualquer escala, desprezando efeitos devido à curvatura do espaço-tempo e, portanto indo em sentido contrário as bases da TRG. [10].

Já no caso da LQG, outra teoria candidata à tentativa de unificação, bons resultados também foram alcançados, alguns até colocando-a com uma certa vantagem em relação à ST. Por exemplo, a LQG é compatível com a nossa experiência sensorial cotidiana de que vivemos em um universo com três dimensões espaciais e uma temporal, o que exclui a necessidade de dimensões extras (ou compactificadas) para que o modelo seja válido, bem como a existência também de outras simetrias, de maneira que a verificação ou não da existência da supersimetria não implicaria nenhum problema as suas bases. Porém, apesar

das compatibilidades citadas anteriormente, a LQG apresenta algumas questões a serem resolvidas, bem como a ST, como por exemplo se a mesma seria capaz de recuperar, no limite de baixas energias, soluções da TRG clássica acoplada com a matéria. Casos específicos indicam que sim, mas de uma maneira geral, este ainda é um problema em aberto para a LQG (para mais detalhes, ver [10, 11]).

Outra questão interessante no que tange a ideia de unificação, afetando diretamente os exemplos citados anteriormente, reside em uma questão um pouco mais fundamental, que é conhecido como o problema da (in)dependência de *background* [13]. O *background* consiste da estrutura sobre a qual uma teoria é construída ou alicerçada (por exemplo dimensão, topologia e assinatura) e assim, uma teoria pode ser dependente ou independente dessa estrutura. Uma teoria é dita ser independente de *background* quando as equações e os campos que descrevem a mesma não dependem da estrutura sobre a qual ela foi construída, ou seja, a estrutra espaço-temporal existe independente dos objetos materias (partículas, campos, etc...) e é sobre esse argumento que a LQG está baseada. A outra situação seria uma teoria dependente de um *background*, ou seja, é necessária a existência de objetos para que a estrutura do espaço-tempo seja fixada, sendo, por exemplo, a ST baseada em tal argumento. Um exemplo que talvez possa deixar claro essa diferença seria considerarmos uma teoria perturbativa, na qual a métrica é expandida fracamente como uma métrica fundamental (por exemplo *Minkowski*) mais uma perturbação quântica [1] ($g_{cd} = x_{cd} + h_{cd}$). Nesse caso, a quantização do campo h_{cd} seria fortemente dependente das informações acerca da métrica x_{cd}. Acredita-se que uma teoria candidata à teoria de unificação deveria ser independente de *background*, uma vez que a TRG é considerada uma teoria independente de *background*, ou seja, se forem retiradas as quantidades dinâmicas (partículas e campos) nada permanece. Essas quantidades estão imersas "no"espaço tempo (como se fossem entrelaçados) e não "sobre"o espaço tempo (para mais detalhes sobre essa discussão, *vide* [10, 11, 12, 13, 14]).

Além dos modelos apresentados anteriormente, outras teorias foram propostas como possíveis candidatas a um teoria de unificação [12], o que nos leva a refletir que a questão do tratamento da TRG do ponto de vista da TQC permanece em aberto, tanto do ponto de vista de teorias efetivas como do ponto de vista de uma

[1] Esse é o caso da aproximação de campo fraco, que será discutida mais adiante nessa tese.

teoria mais fundamental. De fato, considerando por exemplo o caso da *Higher Derivative Gravity* [5, 6] não é possível satisfazer duas condições importantes que são a renormalizabilidade e unitariedade da teoria. Ao acrescentar termos de ordem superior na ação de *Einstein-Hilbert* consegue-se apenas satisfazer os critérios individualmente e não os dois critérios simultaneamente.

Sobre a óptica de uma TQC efetiva da gravitação, alguns trabalhos tem sido feitos recentemente, tendo-se obtido resultados interessantes do ponto de vista perturbativo, quando se acopla a gravitação de Einstein com matéria (escalar, Maxwell, Yang-Mills) [2, 15, 16, 17, 18]. Um importante e interessante resultado obtido nesses trabalhos diz respeito ao comportamento da carga elétrica (constante de acoplamento) na Eletrodinâmica Quântica (EDQ). Toms [19] argumenta que a mesma depende da escala de energia, o que já era um resultdo esperado. Porém, ele afirma que a mesma é sensível a efeitos gravitacionais, ou seja, para uma escala de altas energias ela se torna menor, manifestando o efeito conhecido como liberdade assintótica, uma vez que a contribuição do setor gravitacional tende a se sobrepor a contribuição exclusivamente da EDQ. Isso implica que para regiões de altas energias (acima de $10^{15}Gev$), a carga elétrica desapareceria, diferentemente do que acontece na EDQ usual, ou seja, à medida em que vai-se aumentando na escalar de energia, a carga elétrica também vai aumentado.

Esse resultado, porém, é controverso. Parte dessa controvérisa se dá principalmente por que o termo que caracteriza o efeito de liberdade assintótica advém de divergências quadráticas, as quais segundo *Ellis* [20] podem ser evitadas, sendo assim desprovidas de algum significado físico, mantendo a liberdade assintótica inexistente na QED (para outros trabalhos seguindo essa mesma linha de raciocínio, ver [21, 22, 23, 24]). Já outros autores dizem que essa sensibilidade da constante de acoplamento da EDQ é também dependente de um calibre arbitrário e do esquema de regularização utilizado no desenvolvimento dos cálculos [25, 26, 27, 28, 29]. Logo, podemos ver que é um problema que apresenta ainda algumas questões em aberto.

Outro problema que vem sendo intensamente abordado está relacionado ao estudo da quebra de simetria de *Lorentz* [30]-[45]. Parte do interesse sobre tal tópico está relacionado ao fato da mesma ser uma simetria fundamental para o MP de física de partículas e se uma análise sobre desvios dessa simetria poderia

fornecer algum resultado interessante, do ponto de vista físico. Nesse sentido, em um dos primeiros trabalhos sobre o assunto, *Carrol et all* [35] verificaram que a adição de um quadrivetor constante a EDQ trazia interessantes resultados do ponto de vista tanto teórico quanto fenomenológico, como por exemplo o efeito da birrefringência do vácuo, inclusive com a obtenção, através de dados interestelares, de limites um tanto precisos para tal efeito [36].

Sob essa perspectiva, uma questão que também vem sendo abordada é sobre a possibilidade de que seja gerado um termo do tipo *Chern-Simons* (CS) induzido por correções radiativas quando um termo de quebra de simetria de *Lorentz* é introduzido. Um exemplo de que é possível a geração de tal termo ocorre no caso EDQ quando se introduz um termo axial proporcional ao quadrivetor b_μ [1], onde o termo do tipo CS surge quando consideramos correções radiativas para o propagador do fóton. Todavia, diferentes resultados tem sido obtidos para o coeficiente do termo do tipo CS [32, 37, 38, 39, 40], indicando que esse coeficiente depende do esquema de regularização utilizado. Por exemplo, em [32] foi utilizado o esquema de regularização conhecido como Paulli-Villars, obtendo-se resultado nulo para o coeficiente de CS, e já no caso da Regularização Dimensional (RD), o resultado depende ainda de com é tratada a presença da matriz γ_5, já que a mesma é originalmente definida em 4 dimensões [2] [43, 44, 41, 42]. Assim, de posse dessa análise, podemos nos perguntar se um termo do tipo CS pode ser gerado, do ponto de vista gravitacional. Implicações fenomenológicas importantes podem ser obtidas dessa análise, como por exemplo a existência de apenas dois graus de polarização para as ondas gravitacionais ao invés de quatro [45, 46].

Considerando o lagragiano fermiônico imerso em um espaço curvo (*background* gravitacional), em analogia ao caso da EDQ, é possível gerar um termo do tipo CS gravitacional considerando na mesma um termo do tipo $ee^\mu_a b_\mu \bar{\psi}\gamma^a\gamma_5\psi$. Porém, o mesmo é dependente de como as integrais divergentes que surgem em passos intermediários dos cálculos são regularizadas [47, 48, 49], o que pode conduzir

[1] A sua presença indica que uma direção preferencial para a propagação da luz está sendo considerada, causando uma anisotropia no espaço-tempo, ao contrário do que é previsto pela Teoria da Relatividade.

[2] A maneira de se resolver esse problema, por exemplo, seria utilizando a Redução Dimensional, introduzida para tentar curar esse tipo de problema na Regularização Dimensional [41, 42]. Basicamente, para as quantidades que não são definidas em uma dimensão arbitrária, eles usam uma dimensão específica e depois prosseguem de volta à dimensão arbitrária.

a diferentes resultados para o coeficiente do termo do tipo CS gravitacional. Assim, podemos notar que em ambos os problemas discutidos anteriormente, a divergência entre os resultados obtidos está alicerçada na maneira como as mesmas são tratadas, ou seja, métodos de regularização diferentes (consistentes ou não) proveem resultados diferentes, o que já é esperado.

Logo, pensando desse maneira, seria interessante que tais divergências, inerentes à TQC, pudessem ser tratadas utilizando uma maneira tal que as mesmas não precisassem ser regularizadas *a priori*, o que seria de grande valia até mesmo para verificar as possíveis discrepâncias entre os diferentes métodos de regularização existentes. Seguindo por esse pensamento, o grupo de TQC-UFMG desenvolveu um método de regularização, conhecido na literatura como Regularização Implícita (RI) [50] - [59]. Tal método é uma tentativa de sanar, de maneira sistemática, a questão das integrais divergentes.

As ideias por detrás da RI podem ser explicadas com base nas ideias apresentadas por Jackiw [60], o qual argumenta que quando correções radiativas calculadas em TQC são finitas, podem ocorrer situações em que tais correções não podem ser determinadas pelas simetrias do modelo em estudo. E são justamente essas arbitrariedades as responsáveis pelas discrepâncias dos resultados encontrados nos problemas discutidos anteriormente. Dessa forma, pela ideologia de [60], tais arbitrariedades devem ser levadas até o fim nos cálculos, deixando que as simetrias do modelo em estudo decida o que elas devem ser de fato. Para exemplos de como é feita essa abordagem, ver [60]. E justamente isso que a RI procura fazer "carregando"as arbitrariedades até o final dos cálculos e deixando que as simetrias do modelo possam fixá-las, podendo-se inclusive estabelecer uma relação entre tais arbitrariedades e os diferentes métodos de regularização, o que é interessante do ponto de vista de equivalência entre os métodos. Tais arbitrariedades são traduzidas pelo que chamamos de termos de superfície, que são diferenças entre integrais com o mesmo grau de divergência.

Com base nos problemas expostos, apresentaremos nessa tese uma possibilidade de tratamento para ambos, a luz das prescições da RI. No primeiro problema, mostraremos, considerando a EDQ escalar, que há de fato contribuições gravitacionais para o modelo, porém sendo tais contribuições intrinsecamente arbitrárias e dependentes do parâmetro de *gauge* vindo do setor gravitacional.

A arbitrariedade é traduzida pela presença de um parâmetro arbitrário que não pode ser fixado, fazendo com que tal contribuição possa ser desprovida de um significado físico. No segundo problema, considerando um modelo fermiônico imerso em um espaço tempo curvo com um termo de quebra de simetria de *Lorentz*, mostraremos que é possível gerar um termo do tipo CS gravitacional, como já era esperado. Porém, tal termo depende de um parâmetro arbitrário que não pode ser fixado pelas simetrias impostas pelo modelo (no caso a simetria de *gauge*, traduzida através da transversalidade da amplitude). Numa tentativa de fixá-la por um outro meio, tentaremos utilizar a simetria de rótulo, que é inerente aos diagramas de *Feynman* em TQC. Contudo, encontramos as mesmas relações entre as arbitrariedades que as encontradas sem levar em conta essa simetria, mostrando que o termo de CS gerado é de fato arbitrário e dependente de regularização.

Para uma melhor exposição dessa tese, apresentaremos um breve panorama da mesma. No Capítulo 2, serão mostrados alguns aspectos gerais sobre divergências quadráticas em TQC e também seu papel na liberdade assintótica, quando efeitos gravitacionais são levados em conta, bem como uma maneira de tratar essas divergências através de uma parametrização mais geral para as mesmas. No Capítulo 3, discutiremos o problema das contribuições gravitacionais, considerando como estudo a teoria da EDQ escalar. Analisaremos o papel das contribuições gravitacionais, bem como a influência dos parâmetros de *gauge* do setor gravitacional e do fóton, para o efeito de liberdade assintótica no modelo. No Capítulo 4, apresentaremos alguns aspectos sobre a invariância de *Lorentz* de maneira geral e exemplificando através do modelo da QED extendida a questão da geração radiativa de um termo do tipo CS. Um maneira de tratar os parâmetros arbitrários que surgem dos cálculos do modelo também será apresentado. No Capítulo 5, discutiremos o problema da geração de um termo do tipo CS gravitacional induzido radiativamente. Veremos se é possível gerar um termo do tipo CS gravitacional e, verificaremos o papel das simetrias impostas pelo modelo para fixar possíveis arbitrariedades decorrentes do mesmo. No Capítulo 6 apresentaremos as conclusões relacionadas aos trabalhos desenvolvidos nessa tese bem como perspectivas para a continuação dos trabalhos decorrentes da mesma. Apresentaremos também os trabalhos iniciados e durante o meu período

de doutorado sandúiche na universidade de *Newcastle*. Nos Apêndices apresentaremos com uma maiores detalhes o aparato utilizado para o desenvolvimento dos trabalhos dessa tese.

Nos trabalhos desenvolvidos nessa tese, usamos a convenção tal que $c = \hbar = 1$ e $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

Capítulo 2

Efeitos da gravitação sobre a liberdade assintótica em Teoria Quântica de Campos

"Anyone who is not shocked by the quantum theory has not understood it."

Niels Bohr

Como mencionado no final da Introdução dessa tese, nesse capítulo discutiremos a questão das divergências quadráticas, bem como sua relação com o problema da liberdade assintótica em TQC. Apresentaremos também uma maneira de como parametrizar tais divergências e, através de um exemplo, veremos que a mesma é intrinsecamente dependente da forma como as integrais são regularizadas.

2.1 Divergências Quadráticas em Teoria Quântica de Campos

A discussão sobre o papel das divergências quadráticas em TQC vem sendo retomada de maneira bastante intensa recentemente. A recente descoberta feita

pelo *Large Hadron Collider* (LHC) de uma partícula com massa de aproximadamente 126 Gev, a qual, com grande precisão, acredita-se ser o bóson de *Higgs* [82, 83] e também a ausência de evidências em direção à existência de uma teoria supersimétrica fizeram com que a necessidade de se encontrar explicações sobre o problema da hierarquia no setor eletrofaco, bem como o problema da naturalidade, fossem reacessados. Tais problemas estão intrisecamente relacionados à forma como as divergências quadráticas são interpretadas em TQC. A seguir apresentaremos uma breve explicação sobre os mesmo.

No âmbito do Modelo Padrão (MP) da física de partículas, podemos citar dois tipos básicos de problemas associados à questão da hierarquia [80]. O primeiro deles e, talvez o mais comum, que por vezes é citado somente como problema da hierarquia está associado às correções radiativas para a massa do *Higgs*. Tais correções advém de divergências quadráticas as quais supostamente são canceladas com grande precisão na escala eletrofaca para um determinado *cutoff*. Dessa maneria, a massa do bóson de *Higgs* fica quadraticamente sensível para um determinado *cutoff* Λ.

Já o outro tipo de problema relacionado à questão da hierarquia está associado não com as divergências quadráticas e sim, com as divergências logarítmicas. Tais divergências tem importância do ponto de vista físico, uma vez que as mesmas estão associadas a maneira como as constantes de acoplamento de uma determinada teoria variam com a escala de energia considerada. Assim, temos a seguinte questão: A escala em que ocorre a quebra de simetria para a Teoria de Grande Unificação (GUT)[1] é da ordem de 10^{14} *Gev*, porém, a escala onde ocorre a quebra da simetria para a Teoria Eletrofraca é da ordem de 10^2 *Gev* [84]. A explicação para essa questão, ou seja, para esse gap de energia entre as escalas de energia é conhecido como o problema da hierarquia de *gauge* [85]. Podemos dizer então que solucionar o problema da hierarquia corresponde a encontrar uma forma para o tratamento das divergências quadráticas, as quais, diferente de outras divergências que aparecem nas teorias renormalizáveis, conduzem a uma renormalização subtrativa para a massa do *Higgs*, fazendo com que, para tal subtração, o problema da hierarquia seja reduzido ao problema da naturalidade.

[1] A escala de unificação da GUT é ponto onde onde Cromodinâmica Quântica (CDQ) e a Teoria Eletrofraca são unificadas

Como dito no início do capítulo, uma das candidatas a resolver o problema da hierarquia, bem como a questão da naturalidade, é a Supersimetria (Susy). Porém, ainda não há vestigíos da sua existência.

Dentre esse pontos levantados acerca da importância em se obter uma correta interpretação acerca das divergências quadráticas, vemos que não podemos simplesmente excluí-las, por exemplo, através de algum artefato decorrente de um processo de regularização [1]. Se considerarmos o MP da física de partículas como sendo um limite de baixas energias (teorias efetivas) para uma teoria mais completa, é importante introduzir um parâmetro limite Λ (*cutoff*) para deixar claro que, à partir dali, podem aparecer coisas que deem indícios de uma nova física. Tal argumento é usado quando analisamos, por exemplo, a gravitação de Einstein como uma Teoria Quântica de Campos Efetiva [4] e, também aqui, as divergências quadráticas tem um papel importante para explicar certos comportamentos quando levamos em conta efeitos gravitacionais em TQC.

2.2 Divergências Quadráticas e liberdade assintótica em teorias de *gauge*

Conforme mencionado ao final da seção anterior, divergências quadráticas tem um importante papel quando consideramos os efeitos gravitacionais em uma TQC. Um tópico que despertou muito interesse nos últimos anos está associado ao efeito conhecido como liberdade assintótica [2] e a maneira como a presença de efeitos gravitacionais pode influenciar nesse comportamento.

Vários trabalhos foram feitos recentemente analisando o problema sob os vários aspectos que poderiam ser relevantes à discussão. Um dos primeiros trabalhos a respeito do assunto foi desenvolvido por *Robinson* e *Wilczeck* [15]. Eles fizeram o estudo para a teoria de *Yang-Mills*, e mostraram que, quando

[1] Por exemplo, utilizando-se o procedimento da Regularização Dimensional (RD) a qual considera, por princípio, que as divergências quadráticas são nulas, sobrevivendo somente as divergências de origem logarítmicas.

[2] O efeito conhecido como liberdade assintótica está relacionado ao comportamento da constante de acoplamento do modelo em relação à escala de energia envolvida. Tal efeito é observado, analiticamente, através do estudo do sinal de uma das funções do grupo de renormalização - a função β. [86, 87]

leva-se em conta contribuições gravitacionais, o efeito conhecido como liberdade assintótica, já presente na teoria de *Yang-Mills*, torna-se mais acentuado. Tal resultado pode ser visto através da seguinte expressão para a função β

$$\beta(g, E) = -\frac{b_0}{(4\pi)^2} g^3 + \frac{a_0}{(4\pi)^2} E^2 \kappa^2 g, \tag{2.1}$$

na qual, (2.1), o primeiro termo representa o termo usual da Teoria de *Yang-Mills* e o segundo termo é devido à contribuição gravitacional para o modelo, com o termo E representando a escala de energia e a constante a_0 tendo um valor negativo. É importante salientar aqui que, independente de possuir ou não a contribuição gravitacional, a teoria apresenta o efeito de liberdade assintótica, devido ao sinal negativo na frente do parâmetro b_0.

Seguindo essa mesma linha e considerando ainda o modelo de *Einstein-Yang-Mills*, *Ebert et al* [16] argumentaram que divergências quadráticas, consideradas como responsáveis pelo efeito de liberdade assintótica do modelo cancelam-se durante passos intermediários dos cálculos. Os trabalhos citados anteriormente foram os primeiros a argumentar que as divergências quadráticas seriam as responsáveis pela liberdade assintótica em tais modelos.

Analisando essa mesma questão, porém do ponto de vista da teoria de *Einstein-Maxwell*, *Pietrykowski* [17] mostrou que as contribuições gravitacionais à função β são dependentes da escolha de *gauge*. Também considerando o modelo de *Einstein-Maxwell*, Toms [27, 28, 29], utilizando uma formulação independente de *gauge* e invariante de *gauge* do método da Ação Efetiva, argumenta que não há contribuição vinda do setor gravitacional para o *running charge* da EQD. Um ponto importante, contudo, é os autores utilizarem para cálculo o método da RD, o qual já é sabido ser insensível à presença de divergências quadráticas. Ainda dentro da mesma teoria, em um importante artigo, Toms [19], utilizando a técnica de regularização conhecida na literatura como *Proper Time Regularization* [1] [89], mostra explicitamente que a carga elétrica, que é dependente de como corre a escala de energia, sofre influência de contribuições gravitacionais, que pode ser

[1] Esse método consiste em uma versão do método de regularização por *cutoff*, o qual advoga respeitar as simetrias importantes para uma TQC, como por exemplo a invariânia de *gauge*.

visto através da expressão

$$\beta(e, E) = \frac{e^3}{12\pi^2} - \frac{\kappa^2}{32\pi^2} E^2 e, \tag{2.2}$$

onde, analogamente à expressão (2.1), o termo E representa a escala de energia.

Discutindo o problema sobre outro ponto de vista, *Ellis et all* [26, 20] argumenta que as divergências quadráticas podem ser suprimidas fazendo uma adequada redefinição dos campos. Os mesmos autores consideram, do ponto de vista da teoria de *Einstein-Maxwell* que um processo físico (como por exemplo, o processo de espalhamento) não pode depender de divergências quadráticas. Ou seja, nesse sentido tais termos seriam desprovidos de significado físico. Outros trabalhos, tanto do ponto de vista de *Yang-Mills* e *Maxwell-Einstein* argumentam que, além da dependência de *gauge*, o resultado pode também depender do método de regularização que é aplicado [18, 25, 23, 24]

Podemos perceber que a discrepância de resultados se alicerça na dependência de regularização, bem como na dependência ou não de um *gauge* preestabelecido. Com base nesses argumentos, propomos uma maneira de tratar essas divergências, parametrizando as mesmas de uma maneira independente de regularização, de forma a deixar a própria física definir o que elas devem ser. A maneira como essas divergências são parametrizadas será apresentado na próxima seção.

2.3 Parametrização de Divergências Quadráticas

Conforme discutido no final da Seção anterior, podemos perceber que a origem das discrepâncias nos resultados apresentados reside, basicamente, na maneira como as integrais que surgem em passos intermediários dos cálculos são regularizadas. Ou seja, diferentes regularizações levam a diferentes resultados para um mesmo problema. Assim, seria interessante que divergências, que são inerentes à TQC, pudessem ser tratadas através de uma forma onde as integrais divergentes não tivessem a necessidade de serem regularizadas *a priori*, o que seria de grande valia uma vez que dessa maneira, seria possível avaliar as discrepâncias entre os métodos de regularização existentes.

Baseados nisso, vamos aplicar as prescrições da Regularização Implícita (RI),

já apresentado na introdução e cujos maiores detalhes podem ser encontrados no Apêndice A dessa tese. O método da RI vem sendo aplicado nos mais diferentes problemas em TQC [52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 90, 91] e tem se mostrado eficiente no que concerne ao tratamento das divergências e arbitrariedades presentes nos mesmos.

Sabe-se que ao calcularmos uma amplitude em TQC, integrais divergentes inevitavelmente podem aparecer e elas devem ser tratadas de algumas forma. Para isso, aplicamos a seguinte identidade, a nível de integrando

$$\frac{1}{(p_i-k)^2-\mu^2}=\frac{1}{(k^2-\mu^2)}-\frac{p_i^2-2p_i\cdot k}{(k^2-\mu^2)\left[(p_i-k)^2-\mu^2\right]}, \tag{2.3}$$

a fim de separar as partes divergentes das partes finitas. Ela pode ser aplicada recursivamente dependendo do grau de divergência da integral de partida. As integrais divergentes são descritas em termos de integrais divergentes básicas (IDB's). Algumas das IDB's que podem surgir ao utilizar a relação (2.3) são

$$I_{log}(\mu^2)=\int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2-\mu^2)^2} \qquad \text{e} \qquad I_{quad}(\mu^2)=\int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2-\mu^2)}, \tag{2.4}$$

bem como

$$I^{\mu\nu}_{log}(\mu^2)=\int_k^\Lambda \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-\mu^2)^3} \qquad \text{e} \qquad I^{\mu\nu}_{quad}(\mu^2)=\int_k^\Lambda \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-\mu^2)^2}, \tag{2.5}$$

nas quais termo Λ indica que as integrais precisam ser regularizadas. Outras formas dessas integrais semelhantes às expressões (2.4) e (2.5) podem aparecer devido ao uso recursivo da expressão (2.3). Ao me referir a outras formas de integrais, estou me referindo à integrais com mais índices de *Lorentz*. Tais integrais, contudo, podem ser escritas sempre em termos das IDB's mostradas em (2.4) e (2.5). Como exemplo, temos

$$a_1\eta^{\mu\nu}=\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\frac{\partial}{\partial k_\nu}\frac{k_\mu}{(k^2-m^2)^2}\right\}=\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}I_{log}(\mu^2)-\int_k\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-\mu^2)^3}, \tag{2.6}$$

que mostra a diferença entre duas integrais logaritmicamente divergentes, onde o

termo $I_{log}(\mu^2)$ pode ser visto em (2.4). O termo que aparece do lado esquerdo da igualdade na expressão (2.6) é denominado termo de superfície. É justamente esse termo que traz consigo a questão da ambiguidade abordada ao final da seção anterior que está atrelada à maneira como as integrais divergentes são regularizadas. Tais ambiguidades são abordadas dentro desse mesmo contexto também em [60]. A idéia é manter essas arbitrariedades até o final dos cálculos e deixar que as simetrias do modelo possam fixá-las, independente de uma regularização *a priori* que possa vir a omitir alguma informação a respeito do modelo em estudo.

Apesar de ter sido mostrado aqui os tipos de IDB's que podem surgir, a partir desse ponto, vamos nos ater principalmente ao tratamento das IDB's quadraticamente divergentes, objeto central de estudo dessa seção. O tratamento para as IDB's logarítmicas será feito com o mesmo detalhe mais adiante, no Capítulo 4.

Vamos considerar então as IDB's quadráticas apresentadas nas expressões (2.4) e (2.5). Podemos estabelecer para ambas uma parametrização de uma forma geral [54]. Tomemos a segunda expressão em (2.4). Se a mesma satisfizer a seguinte relação independente de regularização

$$\frac{dI_{Iquad}(\mu^2)}{d\mu^2} = \frac{(D-2)}{2} I_{log}(\mu^2), \tag{2.7}$$

a parametrização mais geral possível envolvendo um *cutoff* $\Lambda \to \infty$ será

$$I_{quad}(\mu^2) = \frac{(D-2)}{2}\left[c_1\Lambda^2 + b\mu^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) + c_1'\mu^2\right], \tag{2.8}$$

onde $b = -\frac{i}{(4\pi^2)}$ e D representa a dimensão [1]. De maneira análoga, considerando agora a segunda expressão em (2.5), se a mesma satisfizer a relação, também independente de regularização

$$\frac{dI^{\mu\nu}_{Iquad}(\mu^2)}{d\mu^2} = \frac{D}{2} I^{\mu\nu}_{log}(\mu^2), \tag{2.9}$$

[1] Nesse caso específico, $D = 4$.

então a parametrização possível será

$$I^{\mu\nu}_{quad}(\mu^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{2}\left[c_2\Lambda^2 + b\mu^2\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) + c_2'\mu^2\right]. \tag{2.10}$$

É importante ressaltar que toda a dependência de regularização está embutida nas constantes $c_i's$ em (2.9) e (2.10), que são completamente arbitrárias. Tais arbitrariedades estão associadas a termos de superfície e são providas de um significado físico, carregando consigo, em princípio, a explicação por trás das discrepâncias entre os diferentes métodos de regularização. Termos de superfície serem nulos implicam a invariânica por roteamento em um diagrama de *Feynman*, como pode ser visto por exemplo, em [54]. Em um passo mais além, podemos dizer que o tratamento incorreto de tais termos de superfícies é responsável pela quebra de simetria por regularização em TQC's.

Fazendo uma analogia à expressão (2.6), podemos escrever o termo de superfície quadrático da seguinte maneira

$$a_2\eta^{\mu\nu} \equiv \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu}\frac{k^\nu}{(k^2-\mu^2)} = \frac{(D-2)}{2}\left[\frac{g^{\mu\nu}}{(D-2)}I_{quad}(\mu^2) - 4I^{\mu\nu}_{quad}(\mu^2)\right] \tag{2.11}$$

e, de maneira análoga, utilizando as expressões (2.9) e (2.10)

$$a_2\eta^{\mu\nu} \propto \eta^{\mu\nu}[(c_1-c_1')\Lambda^2 + (c_2'-c_2)\mu^2], \tag{2.12}$$

podemos ver que os termos de superfície são proporcionais a diferenças entre as constantes $c_i's$.

As parametrizações apresentadas nas expressões (2.8) e (2.10), mostram explicitamente o caráter dependente de regularização para as divergências quadráticas associadas, nesse caso, às constantes c_i e c_i'. Tais termos podem apresentar resultados diferentes, dependendo da técnica de regularização que é aplicada. Como exemplo, temos que, enquanto em Regularização Dimensional (RD) temos que

$$c_1 = c_2 = 0, \tag{2.13}$$

considerando a regularização por *Cutoff*, os mesmo termos valem

$$c_1 = c_2 = -\frac{i}{16\pi^2}. \tag{2.14}$$

Assim, após essa breve explanação sobre o papel das divergências quadráticas em TQC, bem como sua relação com termos de superfície e seu caratér dependente de regularização, apresentaremos no próximo Capítulo como isso está relacionado à contribuições gravitacionais para a EDQ-escalar. Mais especificamente, mostraremos que as divergências quadráticas, as quais acredita-se serem responsáveis pelo efeito de liberdade assintótica na QED, são ambíguas e dependentes de regularização. Realizando o cálculo, considerando arbitrários os *gauges* do setor gravitacional e do fóton, mostraremos que o resultado é também dependente do calibre (somente do setor gravitacional), porém sendo tal contribuição completamente arbitrária.

Capítulo 3

Contribuições gravitacionais para a função beta da Eletrodinâmica Quântica

"Tá vendo aquele edifício moço, ajudei a levantar..."

Lúcio Barbosa

Como mencionado ao final do capítulo anterior, apresentaremos no decorrer desse capítulo os principais resultados sobre o estudo das contribuições gravitacionais para a função beta da EQD. Mostraremos que as divergências quadráticas advindas do setor gravitacional, as quais são responsáveis pelo efeito da liberdade assintótica no modelo em questão, são arbitrárias (dependentes de regularização) e compatíveis com o valor nulo. Mostraremos também de maneira explicíta que tais arbitrariedades contribuem com a função beta de maneira dependente de *gauge* (somente do setor gravitacional). Esse capítulo deu origem as publicações [90] e [91].

3.1 Apresentação do modelo

Abaixo, apresentaremos alguns detalhes do modelo a ser estudado. O acoplamento da gravitação à EDQ se dá através da seguinte expressão

$$S_{EM} = S_E + S_M, \tag{3.1}$$

onde

$$S_E = \frac{2}{\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}R \tag{3.2}$$

representa a ação de *Einstein*. Na expressão (3.2), o termo R representa o escalar de curvatura, definido como

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{3.3}$$

em que, o termo $R_{\mu\nu}$ representa o tensor de *Ricci*, que é descrito pela expressão

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}, \tag{3.4}$$

onde os coeficientes $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ são conhecidos como símbolos de *Christoffel* e, na TRG de *Einstein*, são definidos como

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}). \tag{3.5}$$

O termo S_M na expressão (3.1) representa a ação da EDQ escalar. A mesma pode ser descrita como

$$S_M = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}) + g^{\mu\nu}(D_\mu\phi)(D_\nu\phi)^* - m^2\phi\phi^*\right]. \tag{3.6}$$

Na expressão (3.7), o termo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.7}$$

representa o Tensor de Maxwell da Eletrodinâmica, os termos A_μ e ϕ represetam os campos de *gauge* e escalar, respectivamente, e o termo

$$(D_\mu\phi) = (\partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi) \tag{3.8}$$

representa a derivada covariante. Ainda nas expressões (3.5) e (3.6),temos que os termo $g^{\mu\nu}$ e g representam o tensor métrico e, na expressão (3.2), o termo $k^2 = 32\pi G$ representa a constante de acoplamento da gravitação.

Assim, a partir das expressões (3.2) e (3.6), podemos obter as regras de *Feynman* para o modelo. Mas, primeiramente, mostraremos a ação que deixa explícita a maneira como o fóton e o gráviton interagem. Para isso, utilizaremos a aproximação conhecida como aproximação de campo fraco, onde a métrica $g_{\mu\nu}$ é expandida em torno da métrica de *Minkowski* $\eta^{\mu\nu}$ [1] da seguinte maneira

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}. \tag{3.9}$$

A inversa da métrica $g_{\mu\nu}$ também pode ser expandida no entorno da métrica de *Minkowski* de maneira similar

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^\mu_\alpha h^{\nu\alpha} + O(h^3). \tag{3.10}$$

O termo que representa a raíz quadrada do determinante da métrica g também deve ser expandido, porém com um pouco mais de cuidado. Podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} &= \sqrt{-detg_{\mu\nu}} \\ &= \sqrt{-1}exp\left(\frac{1}{2}Tr\ lng_{\mu\nu}\right),\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde, para o termo do lado direito da segunda igualdade em (3.11), utilizamos a seguinte identidade

$$detA_{\mu\nu} = exp(TrlnA_{\mu\nu}). \tag{3.12}$$

[1] Basicamente isso quer dizer que, como a métrica $g^{\mu\nu}$ varia de ponto à ponto sobre uma variedade e, ao linearizarmos a mesma, estamos tomando pontos sobre a variedade onde podemos afirmar que a métrica é localmente plana (Princípio da Equivalência).

Assim, substituindo a expressão (3.9) na expressão (3.11), temos

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} &= \sqrt{-1}exp\left(\frac{1}{2}Trln[\eta_{\mu\nu}+\kappa h_{\mu\nu}]\right)\\ &= \sqrt{-1}exp\left(\frac{1}{2}Trln[\eta_{\mu\alpha}(\delta^{\alpha}_{\nu}+\kappa h^{\alpha}_{\nu})]\right)\\ &= \sqrt{-1}exp\left(\frac{1}{2}Trln(\eta_{\mu\alpha})+\frac{1}{2}Trln(\delta^{\alpha}_{\nu}+\kappa h^{\alpha}_{\nu})\right)\\ &= \sqrt{-1}exp\left(\frac{1}{2}Trln(\eta_{\mu\alpha}))exp(\frac{1}{2}Trln(\delta^{\alpha}_{\nu}+\kappa h^{\alpha}_{\nu})\right)\\ &= \sqrt{-\eta}exp\left(\frac{1}{2}Trln(\delta^{\alpha}_{\nu}+\kappa h^{\alpha}_{\nu})\right).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Expandindo a exponencial do lado direto da igualdade em (3.13), obtemos o seguinte resultado

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\eta}\left\{1+\frac{1}{2}\kappa h^{\alpha}_{\alpha}+\frac{1}{8}\kappa^{2}\Big[(h^{\alpha}_{\alpha})^{2}-2h^{\beta}_{\alpha}h^{\alpha}_{\beta}\Big]\right\}, \tag{3.14}$$

que representa a expansão para o termo $\sqrt{g}$. Como mostraremos mais adiante, os resultados dessas expansões são de suma importância para o cálculo do propagador do gráviton.

Substituindo as expressões (3.9), (3.10), (3.14) em (3.2) e (3.6), obtemos a forma com se dão as interações e, por consequência, as regras de Feynman para o modelo. Basicamente o termo (R) dará origem ao propagador do *gráviton*, partícula intermediadora das interações gravitacionais, e o termo vindo do setor da eletrodinâmica nos mostrará como se dão as interações entre o fóton e o gráviton. A expressão que mostra explicitamente a forma dessa interação é

descrita pela seguinte expressão [1]

$$
\begin{aligned}
S_{EM} \;=\; & \int d^4x \Bigg\{ -\frac{1}{4}\kappa h\Big[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu)\Big] + \\
& + \frac{1}{2}\kappa h^{\beta\nu}\Big[(\partial^\mu A_\nu)(\partial_\mu A_\beta) + (\partial_\beta A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\mu A_\beta)(\partial_\nu A^\mu) - \\
& - (\partial_\beta A_\mu)(\partial^\mu A^\nu)\Big] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\kappa^2\Big(h^{\mu\alpha}h^{\nu\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(h^\delta_\gamma)(h^\gamma_\delta) - \\
& - \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}h^{\nu\beta}(h^\delta_\delta) - \frac{1}{2}\eta^{\nu\beta}h^{\mu\alpha}(h^\delta_\delta) + \frac{1}{8}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(h^\delta_\delta)(h^\alpha_\alpha) + \eta^{\mu\alpha}h^\nu_\gamma h^{\beta\gamma} + \\
& + \eta^{\nu\beta}h^\mu_\gamma h^{\alpha\gamma}\Big)\Bigg\}, \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

na qual o termo $F_{\mu\nu}$ representa o tensor de *Maxwell*, já mencionando anteriormente na equação (3.7). A partir dos resultados apresentados acima, podemos obter as regras de *Feynman* para o problema em estudo. Como estamos realizando o cálculo perturbativamente e sabendo como se dão as interações entre o fóton e o gráviton, somos capazes de construir os diagramas que mostram como os processos físicos decorrentes dessas interações ocorrem. Saliento ainda que estamos realizando cálculos à 1-*loop*, ou seja, em termos de uma teoria de perturbação, vamos até termo de ordem de κ^2.

3.2 Regras de Feynman

Como mencionado na Seção anterior, a seguir apresentaremos as regras de *Feynman* que fazer-se-ão necessárias para a presente proposta. Por serem um pouco extensas, apresentaremos somente a forma geral para os propagadores e vértices. Maiores detalhes podem ser vistos nos Apêndices B e C desta tese.

- Propagador do campo escalar

$$\Delta(q) = \frac{i}{q^2 - m^2}, \qquad (3.16)$$

[1] Como estamos interessados somente na contribuição gravitacional para o termo de *Maxwell*, origem das discrepâncias na literatura, não colocaremos aqui as interações entre o setor gravitacional e o setor escalar, mas deixamos claro que tais interações também estão presentes.

Diagramaticamente ele é descrito pela Figura (3.1).

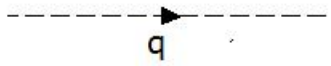

Figura 3.1: Propagador de uma partícula escalar com massa m e momento q.

- Propagador do gráviton

$$\Delta^{\alpha\lambda\sigma\beta}(k) = \frac{iP^{\alpha\lambda\sigma\beta}}{(k^2-\mu^2)} + \frac{1}{2}(\xi-1)\,\frac{iM^{\alpha\lambda\sigma\beta}}{(k^2-\mu^2)^2}, \tag{3.17}$$

onde os termos que aparecem no númerador da equação (3.17) são descritos por

$$P^{\alpha\lambda\sigma\beta} = \frac{1}{2}\Big(\eta^{\beta\lambda}\eta^{\sigma\alpha} + \eta^{\beta\alpha}\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\alpha\lambda}\eta^{\sigma\beta}\Big)$$

e

$$M^{\alpha\lambda\sigma\beta} = \big(\eta^{\alpha\sigma}(k^\lambda k^\beta) + \eta^{\alpha\beta}(k^\lambda k^\sigma) + \eta^{\lambda\sigma}(k^\alpha k^\beta) + \eta^{\lambda\beta}(k^\alpha k^\sigma)\big)$$

, respectivamente. O termo ξ representa o *gauge* gravitacional, o qual manteremos arbitrário nesse trabalho.

- Propagador do fóton.

$$\Delta^{\mu\nu}(k) = \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{(k^2-\mu^2)} - i\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-\mu^2)^2}, \tag{3.18}$$

o qual, diagramaticamente podem ser vistos nas Figuras (3.2) e (3.3), respectivamente.

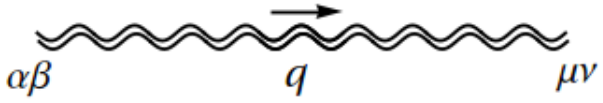

Figura 3.2: Propagador do gráviton.

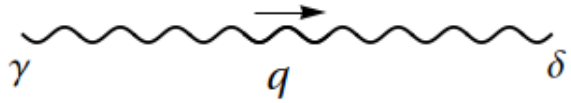

Figura 3.3: Propagador do campo de *gauge*.

Nas expressões (3.17) e (3.18), utilizou-se um regulador infravermelho μ, o qual será tomado como zero ao final dos cálculos. De maneira similar à expressão (3.17), o parâmetro de *gauge* α será mantido arbitrário na expressão (3.18) [61].

- Vértice para a interação do tipo gráviton-fóton-fóton

$$V^{\lambda\theta\gamma\delta}(p,p') = i\kappa\Big\{P^{\lambda\theta\gamma\delta}(p\cdot p') + \frac{1}{2}\left[\eta^{\gamma\delta}\left(p^{\theta}p'^{\lambda} + p^{\lambda}p'^{\theta}\right) + \eta^{\lambda\theta}p^{\delta}p'^{\gamma}\right.$$
$$\left.-\eta^{\lambda\delta}p'^{\gamma}p^{\theta} - \eta^{\lambda\gamma}p^{\delta}p'^{\theta} - \eta^{\theta\gamma}p^{\delta}p'^{\lambda} - \eta^{\theta\delta}p^{\lambda}p'^{\gamma}\right]\Big\}. \tag{3.19}$$

- Vértice para a interação do tipo gráviton-gráviton-fóton-fóton

$$V^{\sigma\tau\theta\delta\rho\xi}(p,p') = i\frac{\kappa^2}{4}\Big\{\eta^{\delta\theta}\eta^{\rho\sigma}\tilde{\Omega}^{\tau\xi} + 2\eta^{\tau\theta}\eta^{\sigma\delta}\tilde{\Omega}^{\rho\xi} + \eta^{\sigma\tau}\Big\{\eta^{\xi[\rho}\Omega^{\delta]\theta} + \eta^{\xi[\rho}\Omega^{\theta]\delta}$$
$$-\eta^{\rho(\delta}\Omega^{\theta)\xi}\Big\} + \eta^{\delta\theta}\Big\{\eta^{\xi[\rho}\Omega^{\sigma]\tau} + \eta^{\xi[\rho}\Omega^{\tau]\sigma} + \eta^{\tau[\sigma}\Omega^{\rho]\xi}\Big\} + 2\Big\{\eta^{\xi[\sigma}\Omega^{\delta][\tau}\eta^{\theta]\rho}$$
$$+\eta^{\xi[\tau}\Omega^{\theta][\sigma}\eta^{\delta]\rho}\Big\} + 4\eta^{\sigma\delta}\Big\{\eta^{\rho(\theta}\Omega^{\tau)\xi} + \eta^{\xi[\theta}\Omega^{\rho]\tau} + \eta^{\xi[\tau}\Omega^{\rho]\theta}\Big\}$$
$$+(p\cdot p')\Big\{\eta^{\delta\theta}\eta^{\tau[\rho}\eta^{\sigma]\xi} + \eta^{\tau\sigma}\eta^{\theta(\rho}\eta^{\delta)\xi} - 4\eta^{\sigma\delta}\eta^{\theta(\rho}\eta^{\xi)\tau}\Big\}\Big\}, \tag{3.20}$$

onde na expressão (3.20), podemos identificar os seguintes termos $\Omega^{\mu\nu} = p^{\mu}p'^{\nu}$ e $\tilde{\Omega}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}(p\cdot p') - \Omega^{\mu\nu}$. Os parênteses e os colchetes indicam a simetrização e a anti-simetrização dos respectivos índices [1]. Diagramaticamente, os vértices descritos pelas expressões (3.19) e (3.20) podem ser vistos através das Figuras (3.4) e (3.5) respectivamente.

[1] Essa notação foi introduzida na tentativa de reduzir o tamanho da expressão original para esse vértice.

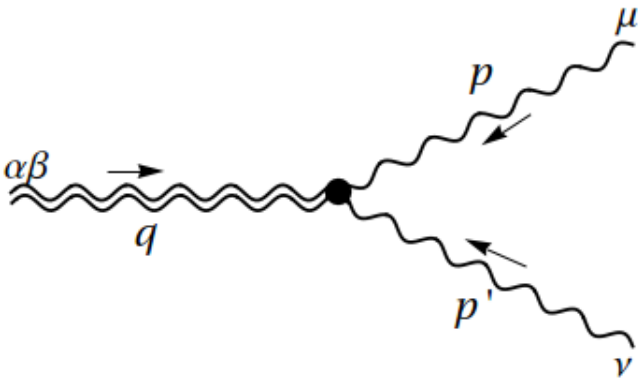

Figura 3.4: Interação gráviton-fóton-fóton.

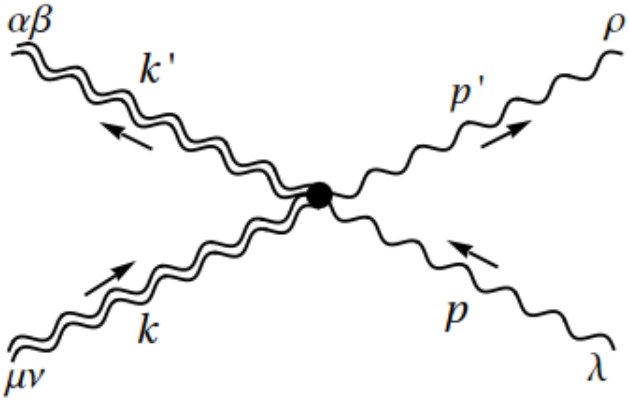

Figura 3.5: Interação gráviton-gráviton-fóton-fóton.

- Vértice para a interação do tipo fóton-escalar-escalar

$$V^{\gamma}(p,p') = -ie(p+p')^{\gamma} \tag{3.21}$$

- Vértice pra a interação do tipo fóton-fóton-escalar-escalar

$$V^{\gamma\beta} = 2ie^2\eta^{\gamma\beta} \tag{3.22}$$

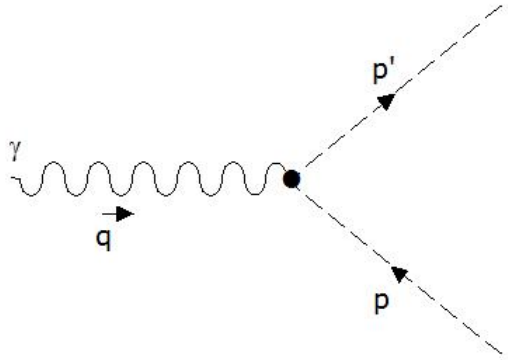

Figura 3.6: Interação fóton-escalar-escalar.

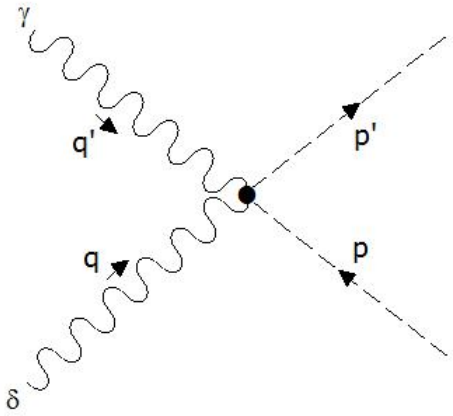

Figura 3.7: Interação fóton-fóton-escalar-escalar.

Diagramaticamente, as expressões (3.21) e (3.22) são representadas pelas Figuras (3.6) e (3.7), respectivamente.

A partir das expressões (3.16) a (3.22), podemos calcular as contribuições gravitacionais para a EDQ. A ordem de *1-loop*, as contribuições gravitacionais para a EDQ escalar podem ser vistas através das Figuras 3.8 e 3.9, respectivamente.

Dados os diagramas (3.6) e (3.7), podemos montar, utilizando as prescrições de *Feynman*, as amplitudes que os descrevem. Tal construção, cálculos e os principais resultados serão apresentados na próxima seção.

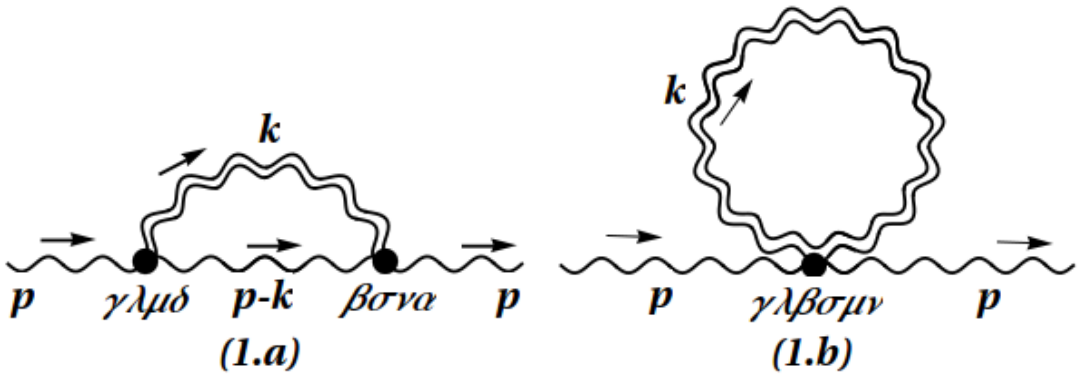

Figura 3.8: Correções gravitacionais para o propagador do fóton a nível de *1-loop*. A linha duplamente ondulada representa o propagador do gráviton e a linha ondulada representa o propagador do fóton.

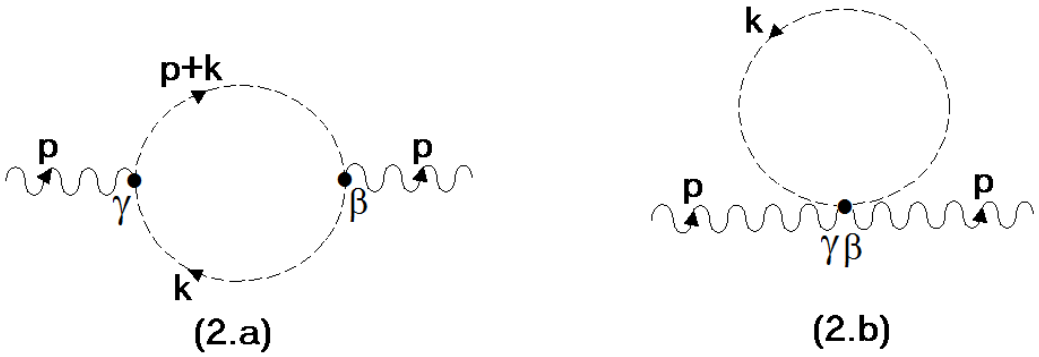

Figura 3.9: Correções para o propagador do fóton a nível de *1-loop*. A linha pontilhada representa o propagador do campo escalar.

3.3 Cálculo das amplitudes

Partindo das Regras de *Feynman* vistas na Seção 3.2, podemos construir de analiticamente as amplitudes correspondentes aos diagramas mostrados nas Figuras (3.8) e (3.9). Tais amplitudes podem ser descritas da seguinte forma

$$\Pi_{1a}^{\mu\nu}(p) = \int_k \Delta_{\alpha\delta}(k) V^{\gamma\lambda\mu\delta}(p, p-k) \Delta_{\gamma\lambda\beta\sigma}(k) \times V^{\beta\sigma\nu\alpha}(p-k, p), \tag{3.23}$$

$$\Pi_{1b}^{\mu\nu}(p) = \int_k V^{\alpha\lambda\sigma\beta\mu\nu}(p, p') \Delta_{\alpha\lambda\sigma\beta}(k), \tag{3.24}$$

$$\Pi_{2a}^{\mu\nu}(p) = \int_k V^{\mu}(p+2k) \Delta(p) V^{\nu}(p+2k) \times \Delta(p+k), \tag{3.25}$$

$$\Pi_{2b}^{\mu\nu}(p) = \int_k V^{\mu\nu}(p, p') \Delta(k), \tag{3.26}$$

onde o símbolo $\int_k$ nas expressões de (3.23) à (3.26) deve ser identificado como $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$. Cada um dos termos contidos dentro do sinal de integração nas expressões anteriores (propagadores e vértices), podem ser lidos das expressões de (3.16) a (3.22). Montadas as amplitudes, basta agora calculá-las. O resultado final será dado pela soma das amplitudes individuais

$$\Pi_{total}^{\mu\nu}(p) = \Pi_{1a}^{\mu\nu}(p) + \Pi_{1b}^{\mu\nu}(p) + \Pi_{2a}^{\mu\nu}(p) + \Pi_{2b}^{\mu\nu}(p). \tag{3.27}$$

Neste ponto, é importante fazermos o seguinte comentário. Analisando as expressões de (3.23) a (3.26), podemos notar, por simples contagem de potências, que a diferença relativa no número de momentos de integração no numerador e no denominador indica que tais amplitudes são divergentes. Assim, nesse ponto, precisamos utilizar alguma prescrição decorrente de algum método de regularização para tratar os infinitos que surgem naturalmente em passos intermediários dos cálculos. Nesse ponto, utilizaremos a prescrição para a regularização de integrais divergentes desenvolvida pelo grupo de TQC-UFMG, conhecida como Regularização Implícita (RI) [51, 58, 59], a qual foi mencionada

brevemente na Seção 2.3. [1].

Aplicando a prescrição da RI nas expressões (3.23), (3.24), (3.25) e (3.26) separadamente e, após um longo cálculo, obtemos o resultado final para a amplitude total (3.27). Ele é dado por [2]

$$\Pi^{\mu\nu}_{total}(p) = -\kappa^2\left[\frac{(9\xi+1)}{24}F(p^2)p^2 + \frac{(13\xi-5)}{4}I_{quad}(\mu^2) + \frac{(1-\alpha)}{6\alpha}F(p^2)p^2 + \frac{(\xi-1)(1-\alpha)}{4\alpha}F(p^2)p^2\right]\left(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu\right) - \kappa^2\left[\Upsilon^{\mu\nu}_2 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\Upsilon^{\mu\nu}_3 + (\xi-1)\Upsilon^{\mu\nu}_4 + (\xi-1)\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\Upsilon^{\mu\nu}_5\right] - e^2\left[\frac{1}{3}F(p^2)(\eta^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu) - 4\Upsilon^{\mu\nu}_1\right]. \tag{3.28}$$

Alguns comentários sobre o restultado apresentado na expressão (3.28) são importantes. Os termos ξ e α representam os *gauges* do gráviton e do fóton, respectivamente. Como a proposta era analisar a contribuição desses termos para o problema das contribuições gravitacionais à EDQ, eles foram deixados arbitrários até o final dos cálculos. O termo indicado por $F(p^2)$ é descrito como sendo

$$F(p^2) = I_{log}(\mu^2) - \frac{i}{16\pi^2}\ln\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right). \tag{3.29}$$

Podemos notar na expressão (3.29) que o regulador infravermelho representado pelo termo $\ln(\mu^2)$ cancela-se com um termo semelhante vindo da expressão $I_{log}(\mu^2)$ através da seguinte relação

$$I_{log}(\mu^2) = I_{log}(\lambda^2) - \frac{i}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right), \tag{3.30}$$

que nada mais é que a relação de escala para esse termo ($I_{log}\mu^2$), onde o fator λ^2

[1] Para uma discussão mais detalhada sobre essa abordagem, *vide* Apêndice *A*.

[2] Para realização desses cálculos, devido à sua extensividade, foram utilizados como auxílio rotinas implementadas através dos *softwares* Maple 11 e Mathematica 8.

é um parâmetro não-nulo que faz o papel da escala do grupo de renormalização.

Ainda na expressão (3.28), podemos notar que aparecem termos do tipo $\Upsilon_i^{\mu\nu}$, com $i = 1 \cdots 5$. Esse termos, como já apontado na Seção 2.3, são os chamados termos de superfície [1], que são determinados a partir da diferença das DBI's. Cada um dos termos $\Upsilon_i^{\mu\nu}$ na expressão (3.28) é descrito do seguinte modo

$$\Upsilon_1^{\mu\nu} = a_2\eta^{\mu\nu} - \left(a_1 - \frac{1}{6}a_3\right)(\eta^{\mu\nu}p^2 + 2p^\mu p^\nu), \tag{3.31}$$

$$\Upsilon_2^{\mu\nu} = \frac{a_1}{12}p^2\left(13p^2\eta^{\mu\nu} - 20p^\nu p^\mu\right) - \left[\frac{a_2}{2} - \frac{8a_3}{3}p^2\right]\left(\eta^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu\right), \tag{3.32}$$

$$\Upsilon_3^{\mu\nu} = (\eta^{\mu\nu}p^4 - p^2p^\mu p^\nu)[2a_3 - a_1], \tag{3.33}$$

$$\Upsilon_4^{\mu\nu} = \left[2(a_3 + a_1)p^2 + a_2\right](p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu), \tag{3.34}$$

$$\Upsilon_5^{\mu\nu} = \left[\frac{3a_1}{2} - a_3\right]p^2\left(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu\right), \tag{3.35}$$

com termos do tipo a_i $(i = 1, \cdots, 3)$, expressos da forma

$$a_1\eta^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}I_{log}(\mu^2) - \int_k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \mu^2)^3}, \tag{3.36}$$

$$a_2\eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}I_{quad}(\mu^2) - \int_k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \mu^2)^2}, \tag{3.37}$$

$$a_3\eta^{\{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta\}} = \frac{1}{24}\eta^{\{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta\}}I_{log}(\mu^2) - \int_k \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^4}, \tag{3.38}$$

representando os chamados termos de superfície já mencionados na Seção 2.3. É importante frisar que, ao contrário do exposto na Seção citada, onde foi dado um

[1] Na verdade, aqui, os termos $\Upsilon_i^{\mu\nu}$ representam a soma de termos de superífice, uma vez que cada um dos $\Upsilon's$ é proveniente de termos diferentes.

enfoque maior nas IDB's quadráticas, há também as IDB's logarítmicas, como podemos observar nas expressões (3.36) e (3.38).

Com base no cálculos apresentados nessa Seção, estamos aptos a proceder com as discussões dos resultados obtidos a partir dos mesmos. Isso será feito na próxima Seção.

3.4 Resultados e Discussões

Analisando o resultado obtido na expressão (3.28), podemos observar que, além do resultado usual para a EDQ escalar, correspondente ao termo proporcional a e^2, há também contribuições advindas do setor gravitacional, representado pelos termos proporcionais a κ^2. Essas contribuições gravitacionais são o principal ponto de discussão. Ao mantermos os parâmetros de *gauge* arbitrários (α e ξ), mostramos que as contribuições gravitacionais são dependentes de ambos, tanto considerando cada termo em separado, como também um produto de ambos os parâmetros, como pode ser visto, por exemplo, através do quarto termo do lado direito da igualdade na equação (3.28).

Particularmente, ainda tendo em vista a equação (3.28), notamos que as divergências quadráticas, para o caso dos diagramas representados na Figura (3.9) se cancelam, enquanto que para os diagramas representados na Figura (3.8), essa divergência sobrevive. E é justamente essa divergência que dá origem à discussão a respeito da liberdade assintótica para a EDQ conforme discutido no Capítulo 2 e apontado também por Toms em [19].

Conseguimos mostrar, através do resultado obtido na equação (3.28), que a origem dessa divergência vem exclusivamente do setor gravitacional do modelo e que a mesma é dependente do parâmetro de *gauge* ξ e também intrinsecamente indeterminada, como podemos ver através das expressões (2.8), (2.9), (2.13) e (2.14), respectivamente. Podemos verificar também a existência de outras arbitrariedades oriundas da expressão (3.28), que são os termos de superfície $\Upsilon_i^{\mu\nu}$. Analisando as equações de (3.36) à (3.38), vemos que os termos a_i podem fornecer resultados diferentes, dependendo da prescrição que é usada para a regularização das mesmas. No caso da Regularização Dimensional (RD), por exemplo, todos os três termos são nulos, o que faz com que a expressão (3.17) seja transversa,

conforme esperado. Já sob a ótica da regularização por *Cutoff*, esses mesmos termos apresentam os seguintes resultados

$$a_1 = \frac{i}{128\pi^2}, \qquad a_2 = -\frac{i\Lambda^2}{64\pi^2} \qquad \text{e} \qquad a_3 = \frac{5i}{2304\pi^2}, \tag{3.39}$$

respectivamente [1]. Agora, considerando a prescrição da RI, conseguimos demonstrar que tanto a invariância de *gauge* e a invariânica de rótulo são preservadas se tomarmos os termos de superfície como sendo nulos [54]. É importante salientar que dentro desta prescrição os termos de superfície não são calculados de antemão, mas são fixados através das simetrias impostas pelo modelo considerado.

Mais algumas discussões são importantes. Da equação (3.28) podemos inferir se a função β para o modelo estudado apresenta contribuições vindas do setor gravitacional do modelo, lembrando que tal termo mostra o comportamento da constante de acoplamento do modelo com relação à escala de energia em que o mesmo é válido. A partir da expressão (3.28), podemos dizer que a função β teria uma contribuição do setor gravitacional da seguinte forma

$$\beta = \frac{e^3}{12\pi^2} - (13\xi - 5)\frac{ic_1}{4}\Lambda^2\kappa^2 e, \tag{3.40}$$

onde podemos notar que a presença do parâmetro arbitrário c_1, já apresentada na Seção 2.3. Tal parâmetro não pode ser fixado pela condição de invariância de *gauge*. Analisando a expressão (3.40), vemos que há a contribuição da divergência quadrática para a função β, o que poderia levar ao efeito de liberdade assintótica para a teoria. Porém tal contribuição, além de ser dependente de um *gauge* arbitrário, é instrinsecamente ambígua e indeterminada, o que poderia fazer com que, através de uma escolha do parâmetro c_1, tais contribuições fossem eliminadas, mantendo o modelo a salvo do efeito de liberdade assintótica. Alguns autores argumentam que tais divergências não devem existir quando processos físicos (como cálculos de espalhamento, por exemplo) são levados em conta [23, 24, 92].

[1] Para uma comparação entre os resultados encontrados na literatura, na referência [90] é calculada também a amplitude (3.28) pelas prescrições da RD e *Cutoff*, onde vê-se explicitamente a ausência de arbitraridades considerando a primeira prescrição e a presença das mesmas na segunda. Porém na última, a invariância de *gauge* não é respeitada, devido a presença das arbitrariedades apresentadas em (3.39).

3.5 Comentários Finais

Através desse trabalho conseguimos mostrar, utilizando um esquema independente de regularização, que as divergências quadráticas que poderiam deixar a EDQ assintoticamente livre próximo à escala de Planck são indeterminadas e dependendente de um calibre arbitrário. Particularmente, é interessante notar que tais divergências vem exclusivamente do setor gravitacional do modelo.

Analisando por outro ponto de vista, podemos perceber que talvez a condição de invariância de *gauge* pudesse eliminar a dependência do parâmetro de *gauge*, bem como as divergências quadráticas na expressão (3.28). Porém, essa condição poderia estabelecer vínculos entre os termos de superfície a_i, o que continuaria fazendo as divergências quadráticas, bem como o parâmetro de *gauge*, sobreviverem. Mas, como tais parâmetros são também arbitrários e dependentes de regularização, o resultado se manteria, pelo menos a princícpio, ainda intrinsecamente indeterminado. Em [93], *Nielsen*, também considerando o modelo de *Einstein-Maxwell*, argumenta que a dependência de *gauge* para a função β decorre do fato de o cálculo ser realizado considerando a expansão da métrica em torno da métrica de *Minkowski*, o que pode indicar que as equações de *Einstein* podem não ser satisfeitas. Esse mesmo argumento é também apontado pelos autores nas referências [17, 94, 95, 96].

Contudo, em [23, 24, 92], os autores argumentam que a dependência de um parâmetro de *cutoff* Λ, como mostrado na expressão (3.40), não tem influência quando preocessos físicos, como um espalhamento, por exemplo, são levados em conta. Já os autores de [21, 22], através de uma construção intitulada *Asymptotic Safe*, atribuem um significado físico ao parâmetro de *cutoff* expresso na equação (3.40). Essa discussão vem reforçar nosso resultado mostrando que realmente há uma arbitrariedade relacionada a esse parâmetro, expresso através do constante c_1 na expressão (3.10).

Capítulo 4

Aspectos da violação de simetria de *Lorentz* e CPT em Teoria Quântica de Campos

"A mente que se abre a uma nova ideia, jamais voltará ao seu tamanho original."

Albert Einstein

Nesse capítulo será apresentado um panorama sobre os estudos da violação de *Lorentz* e simetria CPT, bem como aspectos da indução radiativa de termos tipo *Chern-Simons* (CS). Mostraremos também, em analogia com o Capítulo 2, como se dá a parametrização mais geral possível para integrais logaritimicamente divergentes e, ligado a isso, mostraremos que a invariância de rótulo em um diagrama de *Feynman* exige que as arbitrariedades que surgem em passos intermediários dos cálculos, conhecidas como termos de superfície devem ser nulas. Para exemplificar essa questão das arbitrariedades e invariância de rótulo, revisitaremos o problema da indução radiativa de um termo do tipo CS na QED extendida. Veremos que, de fato, o termo induzido radiativamente é arbitrário e não pode ser fixado, por exemplo, por invariância de *gauge*.

4.1 Estado da Arte

Considerando o modelo padrão da física de partículas, as simetrias de *Lorentz* e CPT são consideradas como simetrias fundamentais para a estrutura do mesmo. Contudo, desde meados dos anos de 1990, vem sendo dado bastante enfoque ao estudo de possíveis violações dessas simetrias [30]-[62]. Um dos primeiros modelos a ser estudado, considerando tanto as consequências teóricas quanto práticas, foi introduzido por *Carrol at all.* [35], onde o mesmo estuda as consequências decorrentes de se adicionar à EDQ um termo do tipo CS proporcional a um quadrivetor constante p_α. Basicamente, *Carroll at all* propuseram que a Lagrangiana da EDQ fosse modificada da seguinte maneira

$$\mathcal{L}_{mod} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}p_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}A_\beta \partial_\mu A_\nu - A_\mu J^\mu, \tag{4.1}$$

o qual acarretaria às seguintes modificações nas equações de *Maxwell*

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho - \vec{p}\cdot\vec{B}, \tag{4.2}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{4.3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \tag{4.4}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = -4\pi\vec{J} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{p}\times\vec{E} - p_0\vec{B}. \tag{4.5}$$

Olhando para a equações de (4.2) a (4.5), podemos tirar algumas consequências, como mencionado anteriormente. A primeira delas é que essas expressões não são mais invariantes de *Lorentz*, o que implica que a luz se propaga no vácuo com uma velocidade diferente da velocidade usual (velocidade da luz). Já a invariância de *gauge* continua mantida nessa equação de maneira que a luz continua com dois modos de polarização bem definidos. Porém, a paridade é perdida, ou seja, cada uma das polarizações da luz viaja com uma velocidade diferente em relação à outra, efeito esse conhecido como birrefringência do vácuo [45].

Experimentalmente, alguns dados obtidos por medidas astrofísicas estabeleceram um limite rigoroso para os parâmetros que medem o quão essas simetrias (*Lorentz* e CPT) são desviadas [35, 36]. Contudo, segundo *Kostelecký et al* [30], esse efeitos podem vir da quebra espontânea de simetria associada à simetria de *Lorentz* em uma teoria considerada mais completa, como a teoria de cordas, por exemplo.

Além dessa discussão, outro aspecto interessante que vem sendo amplamente estudado está relacionado a possibilidade de um termo do tipo CS poder ser gerado radiativamente. Como um exemplo de como isso pode ocorrer, podemos tomar a versão extendida da EDQ onde acrescentamos um termo axial $(\bar{\psi}b_\mu\gamma^\mu\gamma_5\psi)$, na qual o termo do tipo CS aparece quando correções radiativas para o propagador do fóton são consideradas. Todavia, seguindo por essa linha de raciocínio, tem se encontrado diferentes resultados para o coeficiente do termo tipo CS [32], [37]-[50]. Tendo em vista o panorama desses resultados, o coeficiente induzido, originado do cancelamento de divergências em passos intermediários dos cálculos é, de fato, dependente da prescrição utilizada para regularizar tais divergências. Por exemplo, utilizando a prescrição de *Pauli-Villars*, o coeficiente do termo CS é calculado, obtendo-se um resultado nulo para o mesmo [32, 60], enquanto, utilizando as ideias prescritas pela regularização dimensional, o resultado depende ainda de como a continuação analítica da matriz γ_5 é realizada [41, 42, 43, 44].

Dentro desse contexto do estudo do termo do tipo CS na EDQ extendida, poderiamos nos perguntar o que aconteceria também se olharmos do ponto de vista gravitacional. Alguns trabalhos foram feitos nesse sentido [45, 47, 48, 49], considerando se um termo do tipo CS gravitacional poderia ser induzido considerando uma teoria fermiônica em um espaço-tempo curvo. A existência de um termo desse tipo no cenário gravitacional também traz consigo algumas consequências, análogas até aos efeitos da EDQ para a mesma. Considerando a versão linearizada da TRG, onde a métrica $g_{\mu\nu}$ é expandida em torna da métrica de *Minkowski* $\eta_{\mu\nu}$, as ondas gravitacionais continuam a propagar-se com a velocidade da luz c de forma que, sob esse ponto de vista, o problema da birrefringência apresentado pela EDQ deixa de existir. Já o número de graus de liberdade (polarizações), devido à inavriância de gauge, é reduzido de quatro para apenas dois, embora, a paridade seja quebrada, uma vez que essas duas

polarizações se deslocam com intensidades diferentes [45]. Contudo, em analogia com a EDQ extendida, o coeficiente do termo de CS induzido, também nesse modelo, é dependente de como as integrais divergentes que surgem no decorrer dos cálculos são regularizadas [47, 48]. Além do contexto gravitacional, o estudo de termos do tipo CS induzidos através da inclusão do termo axial no modelo a ser considerado tem despertado interesse também em matéria condensada, como por exemplo, a presença de tal termo pode ser mapeada para representar a presença de impurezas presentes em uma nova classe de materias, recentemente estudas, conhecidas como Semimetais de *Weyl* [97], onde o termo do tipo CS induzido está relacionado com a resposta desses metais à presença de um campo magnético externo.

Diante do exposto anteriormente, vemos que a presença de um termo violador de simetria de *Lorentz* induz um termo do tipo CS radiativamente. Os coeficientes associados a tais termos são finitos, porém, indeterminados, ou seja, podem ou não ser fixados pelas simetrias impostas pela teoria bem como pela fenomelogia que perpassa pelo mesmo. Essa maneira de olhar para essas arbitrariedades proposta por *Jackiw* [60], está por trás das ideias relacionadas à prescrição da RI, onde, tais parâmetros são levados até o final dos cálculos e é deixado à própria física o papel de definir o que eles devem ser [1]. Na próxima Seção, em analogia ao que foi feito no Capítulo 2, apresentaremos uma forma mais geral para a parametrização dessas arbitrariedades, relacionando-as com as ideias propostas em [60] e analisando também como uma simetria inerente aos diagramas de *Feynman*, que a simetria de rótulo, está ligada com tais parâmetros.

4.2 Parâmetros arbitrários em integrais divergentes

Como mencionado ao final da Seção anterior, podem aparecer algumas arbitrariedades que são inerentes aos cálculos em TQC. E a maneira como essas arbitrariedades são tratadas está associada às simetrias que o modelo em estudo

[1] No caso da RI, esses termos estão associados a termos de superfície, conforme mencionado no Capítulo 2.

pode apresentar. Essa ideia, apresentada primeiramente por [60] está relacionada ao fato de existirem algumas arbitrariedades que surgem naturalmente no decorrer dos cálculos. Essas arbitrariedades podem ser, inclusive, finitas, apesar das integrais de partida apresentarem algum grau superficial de divergência. A ideia por trás da RI segue essa linha de raciocínio, ou seja, carregamos essas arbitrariedades até o final dos cálculos e deixamos que as simetrias impostas pelo modelo venham a fixá-las. Vale ressaltar que pode ser que mesmo as simetrias do modelo não sejam suficientes para fixar esses parâmetros, permanecendo os mesmos indeterminados.

De maneira análoga ao feito para divergências quadráticas na Seção 2.3, podemos também escrever uma parametrização geral para as IDB's logarítmicas. Essas IDB's aparecem ao separarmos as amplitudes na sua parte divergente e na sua parte finita[1]. Algumas das IDB's logarítmicas que podem surgir são, por exemplo

$$I_{log}(\mu^2) = \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2-\mu^2)^2} \qquad \text{e} \qquad I^{\mu\nu}_{log}(\mu^2) = \int_k^\Lambda \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-\mu^2)^3}. \tag{4.6}$$

As integrais apresentadas em (4.6) também podem, em analogia às IDB's quadráticas, parametrizadas de uma maneira geral e independente de regularização [54]. Tomando a primeira expressão em (4.6), temos que se ela obedecer a seguinte relação

$$\frac{dI_{Ilog}(\mu^2)}{d\mu^2} = -\frac{b}{\mu^2}, \tag{4.7}$$

então a parametrização mais geral possível será dada por

$$I_{log}(\mu^2) = b\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) + b_1. \tag{4.8}$$

De forma análoga, tomando agora a segunda expressão em (4.6), temos que se a mesma obedecer a seguinte relação

$$\frac{dI^{\mu\nu}_{Ilog}(\mu^2)}{d\mu^2} = -\frac{g^{\mu\nu}}{D}\frac{b}{\mu^2}, \tag{4.9}$$

[1] *Vide* Seção 2.3

então a parametrização mais geral possível será

$$I^{\mu\nu}_{log}(\mu^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{D}\left[b\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) + b_1^{'}\right]. \tag{4.10}$$

Nas expressões (4.8) e (4.10), os parâmetros b_1 e $b_1^{'}$ são constantes adimensionais dependentes de regularização. E, da mesma maneira que as integrais quadraticamente divergentes, são esses parâmetros que carregam as arbitrariedades que, por sua vez, estão associados a termos de superfície e, a princípio, detém toda a informação a respeito de discrepâncias entre métodos de regularização e também estão associados à maneira como as simetrias podem ser fixadas.

Podemos escrever o termo de superfície apresentado na equação (2.6) da forma

$$a_1\eta^{\mu\nu} = \int^{\Lambda}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\frac{\partial}{\partial k_\nu}\frac{k_\mu}{(k^2-m^2)^2}\right\} = D\left[\frac{g^{\mu\nu}}{D}I_{log}(\mu^2) - I^{\mu\nu}_{log}(\mu^2)\right], \tag{4.11}$$

ou, considerando as expressões (4.8) e (4.10)

$$a_1\eta^{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}(b_1 - b_1^{'}), \tag{4.12}$$

onde notamos que o termo de superfície é proporcional a diferença entre as constantes arbitrárias b_1 e $b_1^{'}$. E são essas constantes que carregam a informação acerca da dependência de regularização. Dependendo do método utilizado, elas podem apresentar um resultado diferente. Tomando como exemplo novamente, no caso da RD, a expressão (4.12) apresenta resultado nulo. Já considerando a regularização por *Cutoff*, temos que

$$(b_1 - b_1^{'}) = \frac{i}{128\pi^2}. \tag{4.13}$$

Devido a essa discrepância é que se torna interessante que essas arbitrariedades sejam mantidas até o final dos cálculos e que as mesmas se deixem fixar ou pela fenomenologia do modelo ou então por alguma simetria imposta pelo mesmo.

Seguindo essa prescrição, um exemplo simples mas bem interessante relacionado a essa abordagem foi apresentado em [60, 98], considerando a EDQ em

$1+1$ dimensões, conhecido também como modelo de *Schwinger* para geração dinâmica de massa para o fóton. Nesse modelo, ao nível de 1 *loop*, o fóton adquire uma massa proporcional à $\frac{e^2}{\pi}$, onde o parâmetro e representa a constante de acoplmaneto da EDQ. Como o termo de massa é proporcional ao termo do tipo A^2, teremos que calcular o tensor de polarização do vácuo que é expresso da seguinte forma

$$\Pi_s^{\mu\nu}(p) = i\ tr \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\gamma^\mu \frac{i}{\not{k}}\gamma^\nu \frac{i}{\not{k}+\not{p}}. \tag{4.14}$$

Aplicando as prescrições da RI para determinar o resultado da expressão (4.14), após separar as partes divergentes das partes finitas, encontramos conforme ([98]), o seguinte resultado

$$\Pi_s^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(a_1+2)}{2}g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right]. \tag{4.15}$$

Podemos ver na expressão (4.15) a presença do parâmetro arbitrário e dependente de regularização a_1, que é o mesmo que pode ser visto na expressão (4.11). Se optarmos por calcularmos diretamente esse parâmetro por exemplo, pelo método da RD, obteremos de maneira direta o valor nulo para o mesmo, o que deixa o resultado transverso, como deveria ser, uma vez que a invariância de *gauge* deve ser respeitada e o fóton adquire uma massa $m_\gamma^2 = \frac{e^2}{\pi}$. Todavia, seguindo as prescrições apresentadas por [60], esse é o tipo de parâmetro que é finito, porém indeterminado. Essa arbitrariedade deveria ser definida ou pela simetria ou então por alguma fenomenologia que determinasse a massa do fóton experimentalmente. No caso do modelo de *Schwinger*, a imposição da invariância de *gauge* é uma condição de simetria simples que fixa o parâmetro a_1 como sendo nulo, garantindo a transversalidade. Porém, existem alguns modelos em TQC onde essa arbitrariedade não pode ser determinada, como é o caso da versão Quiral do Modelo de *Schwinger*, em que uma escolha específica para essas arbitrariedades implica na não-conservação simultânea das correntes quiral e axial do modelo [99], o que seria um caso onde algum experimento ou dado fenomenológico seria necessário para fixá-lo.

Um outro exemplo onde as simetrias não podem ser fixadas de forma suficiente pelas simetrias impostas pelo modelo está relacionado ao termo do tipo CS

induzido radiativamente. Na próxima Seção será apresentado um exemplo no qual é considerado a geração do termo tipo CS na EDQ extendida e veremos que o coeficiente para o termo do tipo CS permanece arbitrário, sendo dependente de regularização. O interessante em apresentar esse exemplo é que o mesmo servirá de base para a compreensão do problema que será apresentado no Capítulo 4, que está relacionado a indução radiativa de um termo de CS num *background* gravitacional.

4.3 Revisitando o termo de CS induzido radiativamente na EDQ extendida

Como mencionado ao final da Seção anterior, vamos apresentar agora um exemplo que serve como motivação e melhor entendimento da questão que será abordada no próximo Capítulo, sobre a geração radiativa de um termo do tipo CS. Aqui vamos considerar o caso da EDQ extendida [1] e mostrar que o coeficiente do termo do tipo CS é intrinsecamente arbitrário.

Temos que a ação para a EDQ extentida é dada por

$$S_{QED}^{ext} = \int d^4x\, \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - A\!\!\!/ - m - b\!\!\!/\gamma_5)\psi. \tag{4.16}$$

Já é conhecido que o coeficiente para o termo de *CFJ* induzido é ambíguo, sendo o mesmo calculado seguindo diferentes prescrições e, por conseguinte, fornecendo vários resultados diferentes. Nesse caso particular, vamos nos ater ao cálculo realizado em [50], no qual as precrições da RI foram utilizadas e, por questões de simplicidade, vamos considerar o caso onde o férmion tem massa nula. No caso do propagador não-massivo, podemos decompor o mesmo da seguinte maneira [64]

$$\frac{i}{k\!\!\!/ - b\!\!\!/\gamma_5} = \frac{i}{k\!\!\!/ - b\!\!\!/} P_L + \frac{i}{k\!\!\!/ + b\!\!\!/} P_R, \tag{4.17}$$

[1] Esse termo também é conhecido na literatura como termo de *Carrol-Field-Jackiw (CFJ)*.

onde foi usado os operadores de projeção quiral

$$P_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}. \tag{4.18}$$

Podemos perceber que, utilizando a decomposição mostrada pela relação (4.18), realizar o cálculo ao nível de $1-loop$ se torna uma tarefa relativamente simples, uma vez que não há a necessidade em expandir o propagador, devido a presença do termo $\not{b}\gamma_5$. Temos assim, de fato, um cálculo não perturbativo no parâmetro b_μ e o problema fica reduzido apenas ao cálculo de um diagrama de *Feynman*.

Seguindo as precrições de *Feynman* para a construção da representação analítica a partir da sua representação pictórica, obtemos a seguinte expressão para auto energia do fóton, à ordem de $1-loop$

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left\{\Pi_{+}^{\mu\nu} + \Pi_{-}^{\mu\nu} + \Pi_{5+}^{\mu\nu} + \Pi_{5-}^{\mu\nu}\right\}, \tag{4.19}$$

onde cada um dos termos de (4.19) são dados pelas expressões

$$\Pi_{\pm}^{\mu\nu}(p, \alpha p \pm b) = \int_k^\Lambda \mathrm{tr}\left\{\frac{\gamma^\nu(\not{k} + \alpha\not{p} \pm \not{b})\gamma^\mu\left[\not{k} + (\alpha+1)\not{p} \pm \not{b}\right]}{(k + \alpha p \pm b)^2\left[k + (\alpha+1)p \pm b\right]^2}\right\} \tag{4.20}$$

e

$$\Pi_{5\pm}^{\mu\nu}(p, \alpha p \pm b) = \pm\int_k^\Lambda \mathrm{tr}\left\{\frac{\gamma^\nu(\not{k} + \alpha\not{p} \pm \not{b})\gamma^\mu\left[\not{k} + (\alpha+1)\not{p} \pm \not{b}\right]\gamma_5}{(k + \alpha p \pm b)^2\left[k + (\alpha+1)p \pm b\right]^2}\right\}, \tag{4.21}$$

respectivamente. Nas amplitudes apresentadas em (4.20) e (4.21) foi considerado o roteamento arbitrário no diagrama através da presença do parâmetro αp nas amplitudes, uma vez que a invariância por roteamento em digramas de *Feynman* está relacionado a nulidade dos termos de superfície (arbitrariedades), o que por sua vez pode estar relacionado à invariância de *gauge* do modelo [54]. O termo sobrescritado Λ, presente nas integrais é somente para indicar que alguma regularização no espaço tempo qadridimensional foi utilizado. Como nenhuma regularização particular foi utilizada, a presença do parâmetro α será mantida até o final dos cálculos. Uma escolha particular para o rótulo implica fixar um valor para α. Mas isso é somente para ilustrar o procedimento, uma vez que não

há como separar a presença desse parâmetro (roteamento em um diagrama de *Feynman*) e a escolha de um esquema de regularização.

Examinando as expressões anteriores, vemos que o termo de CS induzido vem do resultado das expressões em (4.21). Dessa forma temos

$$\Pi_5^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\Pi_{5+}^{\mu\nu}(p,\alpha p+b) + \Pi_{5-}^{\mu\nu}(p,\alpha p-b)\right] = \frac{1}{2}\left[\Pi_{5+}^{\mu\nu}(p,b_1) - \Pi_{5+}^{\mu\nu}(p,b_2)\right], \tag{4.22}$$

onde temos $b_1 = \alpha p + b$ e $b_2 = \alpha p - b$. Logo, precisamos então determinar o valor da amplitude $\Pi_{5+}^{\mu\nu}(p,b)$. Após realizar a álgebra das matrizes de *Dirac*, podemos escrever a amplitude como sendo

$$\Pi_{5+}^{\mu\nu}(p,b) = 4ip_\beta\epsilon^{\nu\alpha\mu\beta}\int_k^\Lambda \frac{(b+k)_\alpha}{(k+b)^2(k+p+b)^2} = 4ip_\beta\epsilon^{\nu\alpha\mu\beta}(b_\alpha I + I_\alpha), \tag{4.23}$$

onde as integrais I e I_α são descritas como

$$I, I_\alpha = \int_k^\Lambda \frac{1, k_\alpha}{(k+b)^2(k+p+b)^2}. \tag{4.24}$$

Após as manipulações anteriores ao nível do integrando, o próximo passo é calcular as integrais em (4.24). Podemos perceber que as mesmas apresentam um grau superficial de divergência, sendo necessário adotar algum esquema de regularização para tratar tais infinitos. Seguiremos as prescrições da RI, como mencionado ao início dessa Seção. Detalhes sobre o método serão apresentados no Apêndice *A*. Aplicando a identidade (2.3) para separar as partes divergentes das partes finitas e após alguma álgebra, o resultado das integrais I e I_α podem ser descritos como

$$I = I_{log}(\lambda^2) - \frac{i}{16\pi^2}\left[\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - 2\right] \tag{4.25}$$

e

$$I_\alpha = -\frac{(p+2b)_\alpha}{2}\left\{I_{log}(\lambda^2) - \frac{i}{16\pi^2}\left[\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - 2\right] - a_1\right\}, \tag{4.26}$$

respectivamente. O parâmetro dependente de regularização é o termo de superfície descrito na equação (4.11) e o fator λ faz o papel da escala do grupo de renormalização, conforme já mencionado no Capítulo 3.

Substituindo o resultado das expressões (4.25) e (4.26) em (4.23), obtemos o seguinte resultado

$$\Pi_{5+}^{\mu\nu}(p,b) = 4ia_1 b_\alpha p_\beta \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta}. \tag{4.27}$$

A partir do resultado (4.27), substituindo em (4.22), obtemos o resultado para o termo $\Pi_5^{\mu\nu}$. Ele é dado por

$$\Pi_5^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[4ia_1(\alpha p + b)_\alpha p_\beta \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta} - 4ia_1(\alpha p - b)_\alpha p_\beta \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta}\right] = 4ia_1 b_\alpha p_\beta \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta}. \tag{4.28}$$

. Partindo do resultado (4.28), obtemos que o coeficiente para o termo de CS é

$$\Delta c_\mu = 2ia_1 b_\mu. \tag{4.29}$$

Podemos observar que o coeficiente para o termo de CS induzido é proporcional à um parâmetro indeterminado a_1. Comparando com o resultado obtido por *Jackiw* em [37], vemos que o resultado exato obtido para o coeficiente está associado ao esquema de regularização utilizado, o qual previamente já determina o valor para as arbitrariedades que surgem. Seguindo a prescrição da RI, mantemos essa arbitrariedade até o final dos cálculos e a dependência da mesma está expressa através do parâmetro a_1. Em [64], é argumentado que o resultado de [37] apresenta, em segunda ordem na constante b_μ, quebra da invariância de *gauge*. Porém, em [65], o autor argumenta que, utilizando a regularização de *Pauli-villars* de maneira adequada, a invariância de *gauge* é preservada em segunda ordem no termo b_μ, mesmo numa aproximação não perturbativa. Corroborando esse resultado, em [50], o cálculo é realizado a $1-loop$ no âmbito da RI e o resultado obtido para ordem zero e para segunda ordem em b_μ é dado por

$$\begin{aligned}\Pi_0^{\mu\nu} &= F(p^2)(p^\mu p^\nu - p^2\eta^{\mu\nu}) - 4a_2\eta^{\mu\nu} - \frac{4}{3}\{a_1(p^\mu p^\nu - p^2\eta^{\mu\nu}) + \\ &\quad + (2p^\mu p^\nu + p^2\eta^{\mu\nu})(a_3 - 2a_1)\},\end{aligned} \tag{4.30}$$

onde o termo $F(p^2)$ é dado pela expressão (3.29). O termo de ordem 2 em b_μ é dado por

$$\frac{1}{2}\left(\Pi_{bb-}^{\mu\nu} + \Pi_{bb+}^{\mu\nu}\right) = -4\left\{\left(b^2\eta^{\mu\nu} + 2b^\mu b^\nu\right)(a_3 - 2a_1)\right\}, \tag{4.31}$$

com os termos a_1, a_2 e a_3 dados pelas expressões (3.36), (3.37) e (3.38), respectivamente. Observando o resultado das expressões (4.30) e (4.31), alguns comentários são importantes. Podemos notar que considerando os resultados para os termos de superfície em (3.39), a invariância de *gauge* é quebrada a ordem zero em b_μ, bem como em segunda ordem no mesmo. Considerando os parâmetros arbitrários, a condição de transversalidade é garantida somente se tivermos $a_2 = 0$ e $a_3 = 2a_1$. A utilização de uma prescrição que respeita a invariância de *gauge* como por exemplo, *Pauli-Villars*, respeitaria as relações impostas pelos termos de superfície, calculando os mesmo diretamente [65]. Podemos notar também que mesmo com o vínculo entre os termos de superfície, um deles (o termo a_1) não pode ser fixado, o que garante que o termo do tipo CS é, de fato, dependente de regularização.

O exemplo apresentado nessa seção é somente para exemplificar e esclarecer um pouco as ideias por trás da geração radiativa de um termo CS, que pode produzir arbitrariedades que podem não encontrar condições suficientes no modelo para serem fixadas. E é isso que será apresentado no próximo Capítulo. Verificaremos se é possível gerar um termo do tipo CS considerando um *background* curvo e que, sendo tal termo possível de ser gerado, o mesmo é arbitrário e dependerá de uma combinação de parâmetros os quais não poderão ser fixados de uma maneira direta, baseado somente nas simetrias do modelo, destacando assim seu caráter arbitrário e dependente de regularização.

Capítulo 5

Arbitrariedade em um termo do tipo *Chern-Simons* gravitacional induzido radiativamente

"Sê todo em cada coisa. Põe quanto és no mínimo que fazes."

Fernando Pessoa

De acordo com o que foi mencionado ao final do Capítulo 4, nesse Capítulo apresentaremos o cálculo a 1 loop para a correção do propagador do gráviton, considerando uma teoria fermiônica [1] imersa em um espaço-tempo curvo. Procuraremos responder se é possível gerar um termo do tipo CS gravitacional e veremos que, de fato, é possível gerar tal termo. Porém, veremos que o mesmo é intrinsecamente ambíguo e dependente de um conjunto de parâmetros arbitrários que, a princípio não podem ser fixados ao mesmo tempo por simetrias, implicando que o termo de CS gravitacional é, de fato, indeterminado e dependente de regularização. Discutiremos também o possível papel da invariância de rótulo para fixação de tais termos. Os estudos desse capítulo deram origem à publicação [100].

[1] Para fins de simplicidade, trataremos aqui o modelo não-massivo.

5.1 Apresentação do modelo

O modelo a ser estudado pode ser descrito pela ação

$$S = \int d^4x \left(\frac{i}{2} e\, e_a^\mu \bar{\psi} \gamma^a \overleftrightarrow{D}_\mu \psi - e\, e_a^\mu b_\mu \bar{\psi} \gamma^a \gamma_5 \psi \right), \tag{5.1}$$

a qual representa a interação entre férmions não-massivos com um *background* gravitacional com a presença de um termo violador de simetria de *Lorentz* caracterizado por $\bar{\psi} b_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \psi$, onde o termo b_μ representa um quadrivetor constante que caracteriza uma direção preferencial para a propagação da luz, o que caracteriza uma anisotropia espaço-temporal. Na ação (5.1), os termos γ_μ representam as matrizes de *Dirac*, o termo $e = dete_a^\mu$ representa o determinante do objeto e_a^μ, denominado de *vierbein* ou tetrada.

A presença desse termo é necessária para a correta descrição de férmions em espaço curvo, o que pode ser visto pela presença na *vierbein* de índices do tipo "mundo", que são associados ao espaço-tempo e índices que podemos chamar de tipo "frame"os quais são associados ao espaço tempo de *Minkowski*. Essa construção se deve ao fato de que um espinor se transforma de formas diferentes considerando o espaço curvo e o espaço plano (*Minkowski*). Porém, o fato de em uma variedade do tipo espaço-tempo sempre podermos realizar localmente transformações de *Lorentz* garante que possamos relacionar objetos que só podem ser definidos localmente em um variedade onde, a princípio, ele não poderia ser definido. Nesse argumento está alicerçado o objeto já apresentado anteriormente como *vierbein*.

Ainda na expressão (5.1), a fim de acoplar os férmions com o campo gravitacional, definimos a derivada covariante $\overleftrightarrow{D}_\mu$ como [1]

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} \omega_{\mu cd} \sigma^{cd} \psi, \tag{5.2}$$

onde, na expressão (5.2), temos o termo $\sigma^{cd} = \frac{i}{4}[\gamma^c, \gamma^d]$, e o termo $\omega_{\mu cd}$ representa a conexão de spin e é descrito como uma combinação de produtos da *vierbein* da

[1] A notação $\overleftrightarrow{D}$ indica que, se tivermos dois campos A e B, a derivada atua sobre os mesmos da seguinte forma: $A \overleftrightarrow{D}_\mu B = A D_\mu B - (D_\mu A) B$.

seguinte forma

$$\omega_{\mu cd} = \frac{1}{2}e_{c\nu}\partial^{\mu}e_{d\nu} + \frac{1}{2}e_{c}^{\nu}e_{d\sigma}\partial^{\sigma}g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}e_{d\nu}\partial^{\mu}e_{c\nu} - \frac{1}{2}e_{d}^{\nu}e_{c\sigma}\partial^{\sigma}g_{\mu\nu}. \tag{5.3}$$

Precisamos agora extrair como se dá a interação entre férmions e grávitons. Para isso, vamos utilizar a expansão de campo fraco, descrita pelas expressões (3.9) e (3.10) e, através das mesmas, escrever a expansão para a *vierbein* de forma similar. Dessa maneira, na aproximação de campo fraco, podemos escrever a *vierbein* da seguinte forma

$$e_{a}^{\mu} = \delta_{a}^{\mu} - \frac{1}{2}\kappa h_{a}^{\mu} + \frac{3}{8}\kappa^{2}h_{\rho}^{\mu}h_{a}^{\rho} + O(h^{3}), \tag{5.4}$$

e, de forma congênere, a sua inversa

$$e_{\mu}^{a} = \delta_{\mu} + \frac{1}{2}\kappa h_{\mu}^{a} - \frac{1}{8}\kappa^{2}h_{\rho}^{a}h_{\mu}^{\rho} + O(h^{3}). \tag{5.5}$$

Como não se fará necessário termos de ordens maiores, as equações (5.4) e (5.5) estão descritas somente até segunda ordem na constante de acoplamento κ. O termo e é definido como sendo a raíz quadrada do determinante da métrica $g^{\mu\nu}$, ou seja, $e = \sqrt{-g}$, onde a expansão no limite de campo fraco para $\sqrt{-g}$ pode ser vista na expressão (3.14).

Partindo das expressões descritas acima (5.4) e (5.5), podemos obter a expansão para a conexão de spin ao substituí-las na expressão (5.2), obtendo a expressão

$$\begin{aligned}\omega_{\mu cd} \;=\; & \frac{\kappa}{2}\partial_{d}h_{c\mu} + \frac{\kappa^{2}}{4}h_{d}^{\nu}\left(\partial_{c}h_{\mu\nu} - \partial_{\nu}h_{c\mu} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}h_{\nu c}\right) - \frac{\kappa}{2}\partial_{c}h_{d\mu} - \\ & - \frac{\kappa^{2}}{4}h_{c}^{\nu}\left(\partial_{d}h_{\mu\nu} - \partial_{\nu}h_{d\mu} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}h_{\nu d}\right).\end{aligned} \tag{5.6}$$

Tendo em vistas todas as expansões necessárias, temos que substituindo as expressões (3.9), (3.10), (3.14), (5.4), (5.5) e (5.6) na expressão (5.1), obtemos

que a expansão para ação em termos dos campos $h_{\mu\nu}$ é dada por

$$S = \int d^4x \Bigg\{ \frac{1}{2} i\bar{\psi} \overleftrightarrow{\not{D}} \psi + \frac{1}{2} i\kappa \Big[h\bar{\psi} \overleftrightarrow{\not{D}} \psi - \frac{1}{2} h^{\mu}_{a} \gamma^{a} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\not{D}} \psi + \\ + \frac{1}{4} \bar{\psi} \partial_b h_{ca} \gamma^{\{a} \gamma^b \gamma^{c\}} \psi - \frac{1}{4} \bar{\psi} \partial_c h_{ba} \gamma^{\{a} \gamma^b \gamma^{c\}} \psi \\ + \bar{\psi} h^{\mu}_{a} b_{\mu} \gamma^{a} \gamma_5 \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} h \not{b} \gamma_5 \psi \Big] - \bar{\psi} \not{b} \gamma_5 \psi \Bigg\} + O(\kappa^2), \tag{5.7}$$

até segunda ordem na constante de acoplamento κ e o termo $\overleftrightarrow{\not{D}}$ é definido como $\overleftrightarrow{D_\mu} \gamma^\mu$. Os índices de *Lorentz* que aparecem entre chaves na expressão (5.7) indicam a simetrização do respectivo termo ou seja, $A^{\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}} = A^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$ + a soma das demais permutações dos demais índices $\alpha_1 \cdots \alpha_n$.

A partir da expressão (5.7), podemos inferir quais são as interações possíveis do modelo até dada ordem e construir as regras de *Feynman* e, a partir dessas regras, construir as amplitudes e calculá-las. Na próxima Seção apresentaremos as regras de *Feynman* para o modelo.

5.2 Regras de Feynman

Como mencionado ao final da Seção anterior, apresentaremos as Regras de *Feynman* para o modelo. As mesmas podem ser lidas da expressão (5.7).

- Propagador do férmion.
  O propagador do campo fermiônico é dado pela seguinte expressão

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - \not{b}\gamma_5}, \tag{5.8}$$

  e diagramaticamente pode ser visto na Figura 5.1.

- Vértice para a interação gráviton-férmion-férmion.
  A expressão para essa interação é descrita por

$$V^{\alpha\beta}(k_2, k_3) = \frac{i\kappa}{8} [2\eta^{\alpha\beta}(\not{k}_2 + \not{k}_3) - \gamma^{\alpha}(k_2 + k_3)^{\beta} - \gamma^{\beta}(k_2 + k_3)^{\alpha}], \tag{5.9}$$

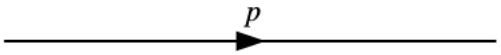

Figura 5.1: Propagador do férmion.

e sua descrição diagramática através da Figura 5.2.

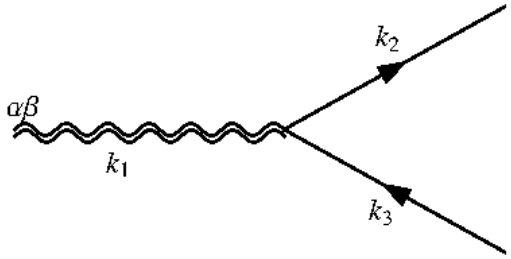

Figura 5.2: Interação gráviton-férmion-férmion.

- Vértice para interação gráviton-gráviton-férmion-férmion.
  Para essa interação, temos a seguinte expressão analítica

$$
\begin{aligned}
V^{\alpha\beta\mu\nu}(k_1,k_2,k_4) = i\kappa^2\Bigg\{ & \frac{5}{16}(\not{k}_1+\not{k}_2)\left[\frac{2}{5}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}+\gamma^{\{\alpha}\eta^{\beta\}\{\mu}\gamma^{\nu\}}+\gamma^{\{\mu}\eta^{\nu\}\{\alpha}\gamma^{\beta\}}\right] \\
& + \frac{1}{8}\gamma^{\{\alpha}\eta^{\beta\}\{\mu}(3k_4+4k_2-3k_1)^{\nu\}} - \frac{1}{8}\gamma^{\{\alpha}(2k_4+k_1)^{\beta\}}\eta^{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{8}\gamma^{\{\mu}\eta^{\nu\}\{\alpha}(3k_4+4k_1-3k_2)^{\beta\}} - \frac{1}{8}\gamma^{\{\mu}(2k_4+k_2)^{\nu\}}\eta^{\alpha\beta} \\
& - \frac{1}{2}\not{k}_4 P^{\mu\nu\alpha\beta}\Bigg\}. \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

  Uma representação pictórica do mesmo pode ser visto na Figura 5.3.

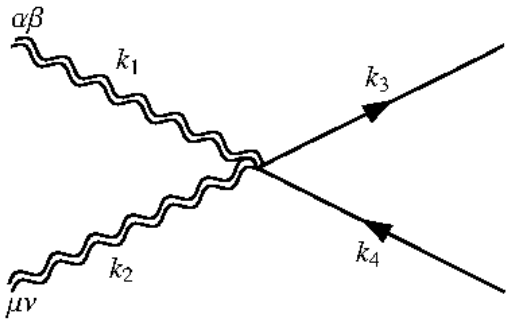

Figura 5.3: Interação gráviton-gŕaviton-férmion-férmion.

A linha duplamente ondulada que representa o propagador do gráviton pode ser vista na expressão (3.17), bem como na Figura 3.2. A partir das expressões para os vértices e para o propagador, podemos construir os diagramas que contribuirão para o cálculo, nesse caso, à ordem de 1 *loop*. Como estamos interessados no termo de CS induzido, precisamos levar em conta somente o termo linear em b_μ que contribui para a correção do propagador do gráviton a 1 loop. Tais contribuições podem ser vistas através dos diagramas representados pela Figura 5.4. De posse dos diagramas que contribuem para o cálculo da amplitude, o próximo passo consiste em construir suas respectivas representações analíticas e calculá-las. A montagem das amplitudes bem como os cálculos serão apresentados na próxima Seção.

5.3 Cálculo das Amplitudes

Como já mencionado ao final da Seção anterior, vamos proceder com a parte que, podemos dizer, é o cerne desse capítulo. Montaremos as amplitudes correspondentes aos diagramas da Figura 5.4, para em seguida determinarmos os respectivos resultados.

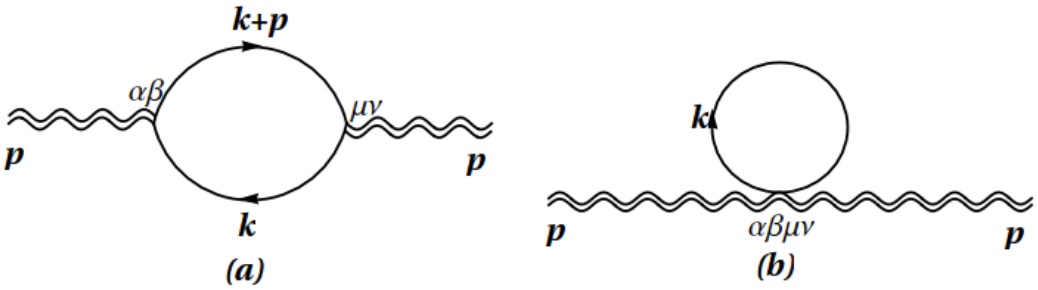

Figura 5.4: Diagramas que contribuem a ordem de 1 *loop* para a correção do propagador do gráviton. Linhas sólidas e duplamente onduladas correspondem aos propagadores do férmion e do gráviton respectivamente.

Seguindo as prescrições necessárias para descrever a amplitude matemática dos diagramas, temos que para a Figura 5.4 (a) e 5.4 (b), as expressões que o descrevem são dadas por

$$\Pi^{\mu\nu\alpha\beta}_{(a)}(p) = i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr[V^{\mu\nu}(k+p,k)S(k+p)V^{\alpha\beta}(k,k+p)S(k)] \tag{5.11}$$

e por

$$\Pi^{\mu\nu\alpha\beta}_{(b)}(p) = i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr[S(k)V^{\alpha\beta\mu\nu}(p,p,k)], \tag{5.12}$$

respectivamente. Os vértices $V^{\mu\nu}$, $V^{\mu\nu\alpha\beta}$ e o propagador S que surgem nas expressões (5.11) e (5.12) são descritos pelas expressões (5.8), (5.9) e (5.10).

Um comentário se faz necessário nesse ponto. Ao invés de considerarmos o termo $\not{b}\gamma_5$ como um inserção no propagador do férmion (Figura 5.1), optaremos por escrever a expressão para o propagador em sua forma completa, cuja expansão é descrita pelo seguinte termo

$$\frac{i}{\not{k}-\not{b}\gamma_5} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i}{\not{k}}\left\{-i\not{b}\gamma_5\frac{i}{\not{k}}\right\}^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(k). \tag{5.13}$$

Como o termo que estamos interessados aqui é o termo linear em b_μ, que é o termo que dá origem ao termo tipo CS, tomando a expansão da expressão (5.13) em primeira ordem em b_μ, as expressões (5.11) e (5.12) podem ser reescritas da

forma

$$\Pi^{\mu\nu\alpha\beta}_{(a)CS}(p) = i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}Tr[V^{\mu\nu}(k+p,k)S_0(k+p)V^{\alpha\beta}(k,k+p)S_0\not{b}\gamma_5 S_0(k)] + i\int\frac{d^4}{(2\pi)^4}Tr[V^{\alpha\beta}(k,k+p)S_0(k)V^{\mu\nu}(k+p,k)S_0(k+p)\not{b}\gamma_5 \times S_0(k+p)] \quad (5.14)$$

e

$$\Pi^{\mu\nu\alpha\beta}_{(b)CS}(p) = i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}Tr[S_0(k)\not{b}\gamma_5 S_0(k)V^{\alpha\beta\mu\nu}(p,p,k)], \quad (5.15)$$

respectivamente, onde o termo S_0 representa o propagador fermiônico sem o termo $\not{b}\gamma_5$, ou seja, $S_0 = \frac{i}{\not{k}}$.

Montadas as amplitudes, nosso próximo passo será calculá-las. Algo importante que se percebe analisando as expressões (5.14) e (5.15) é que elas são simétricas sob a troca de índices $\mu \leftrightarrow \nu$ e $\alpha \leftrightarrow \beta$, como era esperado. Apesar de ser superficialmente divergente, a amplitude (5.15) tem resultado nulo já quando tomamos o traço sobre o produto das matrizes de *Dirac*. Assim, sob esse aspecto, poderíamos dizer que tal diagrama não contribui para o cálculo, sendo necessário somente o cálculo da amplitude descrita pela expressão (5.14), que por sua vez apresenta um grau superficial de divergência cúbico e não se anula de partida, ao contrário do que aconteceu com a amplitude anterior.

Considerando o grau superficial de divergência da amplitude, precisamos nos munir de alguma prescrição para tratar essas divergências. Precisamente nesse trabalho, seguiremos as prescrições da RI, já mencionada no Capitulo 2 dessa tese, bem como no Apêndice A para separar as partes divergentes das partes finitas, e para o tratamento das integrais divergentes remanescentes.

Aplicando a expressão (2.3) na expressão (5.14), separando as partes divegentes e as partes finitas [1], obtemos, após um longo cálculo, o seguinte resultado

[1] Devido ao cálculo ser bastante extenso, utilizamos como ferramenta de apoio o *software Mathematica* 8. Para o cálculo das partes finitas utilizamos a prescrição dos parâmetros de *Feynman* [101], bem como o *software* anteriormente mencionado.

para a amplitude $\Pi^{\mu\nu\alpha\beta}_{(a)CS}(p)$ [1]

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu\alpha\beta}_{(a)CS}(p) &= \frac{-i}{8}\kappa^2\left[\left(\frac{i}{48\pi^2}-64a_4-4a_1+4a_3\right)p^\alpha p^\nu - \right.\\ &\left.-\left(\frac{i}{48\pi^2}+32a_4\right)\eta^{\alpha\nu}p^2\right]\epsilon^{\lambda\rho\beta\mu}b_\lambda p_\rho\\ &\frac{-i}{8}\kappa^2\left[\left(\frac{i}{48\pi^2}-64a_4-4a_1+4a_3\right)p^\beta p^\nu - \right.\\ &\left.-\left(\frac{i}{48\pi^2}+32a_4\right)\eta^{\beta\nu}p^2\right]\epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu}b_\lambda p_\rho\\ &\frac{-i}{8}\kappa^2\left[\left(\frac{i}{48\pi^2}-64a_4-4a_1+4a_3\right)p^\alpha p^\mu - \right.\\ &\left.-\left(\frac{i}{48\pi^2}+32a_4\right)\eta^{\alpha\mu}p^2\right]\epsilon^{\lambda\rho\beta\nu}b_\lambda p_\rho\\ &\frac{-i}{8}\kappa^2\left[\left(\frac{i}{48\pi^2}-64a_4-4a_1+4a_3\right)p^\beta p^\mu - \right.\\ &\left.-\left(\frac{i}{48\pi^2}+32a_4\right)\eta^{\beta\mu}p^2\right]\epsilon^{\lambda\rho\alpha\nu}b_\lambda p_\rho, \end{aligned} \tag{5.16}$$

na qual os termos a_1, a_3 e a_4 são IDB's logaritmicamente divergentes, sendo o termo a_4 descrito como

$$a_4\eta^{\{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta\}} = \frac{1}{192}\eta^{\{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta\}}I_{log}(m^2) - \int_k \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta k^\gamma k^\delta}{(k^2-m^2)^5}, \tag{5.17}$$

e os termos a_1 e a_3 definidos pelas expressões (3.36) e (3.38), respectivamente.

Dado o resultado obtido em (5.16) para as amplitudes (5.14), estamos aptos a discutir e inferir algumas consequências decorrentes do mesmo. Isso será feito na próxima Seção.

[1] As integrais utilizadas nesses cálculos estão apresentadas no Apêndice *D*.

5.4 Resultados e Discussões

Analisando a expressão (5.16), podemos ver que, de fato, um termo do tipo CS é gerado radiativamente. Salientamos também que tal termo, apesar de ser finito, apresenta algumas arbitrariedades explicitadas atraveś dos termos a_1, a_3 e a_4, o que também exemplifica novamente as ideias de *Jackiw* [60], onde podem existir correções radiativas de natureza finita, porém indeterminada.

Vamos então tentar fixar essas arbitrariedades através de alguma simetria imposta pelo modelo. Uma simetria respeitada pela ação (5.1) está relacionada a invariância de *gauge*, a qual é vista explicitamente através da transversalidade

$$p_{\mu\cdots\beta}\Pi^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = 0 \tag{5.18}$$

da amplitude final (5.16)[1]. Impondo a condição (5.18), obtemos o resultado

$$\frac{-i}{8}\kappa^2(4a_3 - 4a_1 - 96a_4)(\epsilon^{\lambda\rho\beta\mu}p^\nu + \epsilon^{\lambda\rho\beta\nu}p^\mu)p^2 b_\lambda p_\rho = 0. \tag{5.19}$$

Para que a equação acima seja satisfeita, ao menos uma das duas quantidades entre parênteses necessariamente deve ser identicamente nula. O segundo termo entre parênteses na equação (5.19) não se anula pois depende de quantidades que, a princípio, são diferentes de zero. A única solução possível corresponde ao primeiro parênteses na equação (5.19) ser nulo, ou seja

$$a_3 - a_1 - 24a_4 = 0. \tag{5.20}$$

Para que a relação (5.20) seja satisfeita, há mais duas condições. A primeira delas é que os termos de superfície sejam zero individualmente, ou seja

$$a_3 = a_1 = a_4 = 0. \tag{5.21}$$

A condição (5.21) determina o termo do tipo CS finito e sem ambiguidades. Porém, há ainda uma segunda condição que a relação (5.20) pode satisfazer que

[1] O termo $p_{\mu\cdots\beta}$ indica que a transversalidade é respeitada em todos os índicies da amplitude.

é dada por

$$a_3 - a_1 = 24a_4. \tag{5.22}$$

Esta última condição não fixa os termos de superfície de maneira unívoca e, por consequência, não determina o termo do tipo CS de forma não ambígua. Essa última consideração pode ser vista ao substituirmos a relação (5.22) na expressão (5.16), de forma que obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu\alpha\beta}_{(a)CS}(p) &= \frac{-i}{24}\kappa^2\epsilon^{\lambda\rho\beta\mu}b_\lambda p_\rho\left(\frac{i}{16\pi^2}+96a_4\right)(p^\alpha p^\nu-\eta^{\alpha\nu}p^2)\\
&\quad \frac{-i}{24}\kappa^2\epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu}b_\lambda p_\rho\left(\frac{i}{16\pi^2}+96a_4\right)(p^\beta p^\nu-\eta^{\beta\nu}p^2)\\
&\quad \frac{-i}{24}\kappa^2\epsilon^{\lambda\rho\beta\nu}b_\lambda p_\rho\left(\frac{i}{16\pi^2}+96a_4\right)(p^\alpha p^\mu-\eta^{\alpha\mu}p^2)\\
&\quad \frac{-i}{24}\kappa^2\epsilon^{\lambda\rho\alpha\nu}b_\lambda p_\rho\left(\frac{i}{16\pi^2}+96a_4\right)(p^\beta p^\mu-\eta^{\beta\mu}p^2).
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Como já mencionado anteriormente, vemos que, pela expressão (5.23), a condição de transversalidade (5.18) não é suficiente para fixar todos os termos de superfície, o que conduz a um resultado arbitrário para o termo do tipo CS gravitacional induzido radiativamente. E mais, o resultado é totalmente dependente de regularização, o que pode ser visto pela presença do termo de superfície reminiscente a_4 em (5.23). Dependendo da escolha do método de regularização, o termo a_4 pode assumir valores diferentes, de maneira que podemos também recuperar os resultados obtidos na literatura por *Mariz et all* [47, 48, 49]. Na expressão (5.23), os quatro termos que compõem o resultado apresentam a simetria sob a troca dos indícies $\mu \leftrightarrow \nu$ and $\alpha \leftrightarrow \beta$, de maneira que, no limite de campo fraco (expansão em torno da métrica de *Minkowski*[1]) eles podem ser descritos em termos de um único termo

$$\mathcal{L}_{CS} = \left(\frac{1}{96\pi^2} - 16ia_4\right)\kappa^2 b^\lambda h^{\mu\nu}\epsilon_{\alpha\mu\lambda\rho}\partial^\rho(\partial^2 h^\alpha_\nu - \partial_\nu\partial_\gamma h^{\gamma\alpha}), \tag{5.24}$$

[1] *Vide* Seção 2.1 para maiores detalhes.

onde a expressão (5.24) representa o termo da ação efetiva referente ao termo do tipo CS. Se tomarmos o termo a_4 na expressão (5.24) como sendo zero, o resultado estará de acordo com [47], onde foi aplicada a prescrição da Regularização Dimensional (RD). Tal resultado já era esperado uma vez que nesse método os termos de superfície são avaliados explicitamente como sendo nulos.

Visto que a condição de transversalidade (5.18) não é suficiente para fixar os termos de superfície, mostrando de fato que o termo do tipo CS é arbitrário, poderíamos nos perguntar se existe alguma outra simetria que possa ser invocada de forma a tentar fixar a arbitrariedade remanescente. Dessa maneira, uma outra possibilidade seria invocar a invariância por roteamento do diagrama (ou *Momentum Routing Invariance* (MRI)) para o diagrama de *Feynman*, a qual foi mostrada estar intrisecamente relacionada com os termos de superífice mencionados anteriormente [54]. Para verificar se essa poderia ser uma condição suficiente, basta considerar o diagrama mostrado na Figura 5.4, considerando agora um rotulamento l arbitrário para o diagrama e realizar o mesmo cálculo na amplitude (5.11). O diagrama da Figura 5.4 com o rótulo arbitrário pode ser visto na Figura 5.5. O cálculo da amplitude referente ao diagrama da Figura

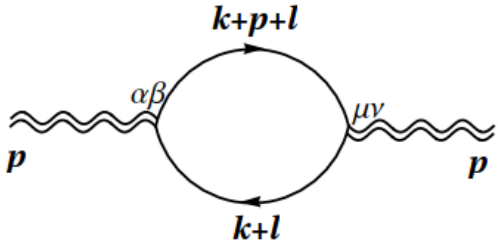

Figura 5.5: Correção a 1 *loop* para o propagador do gráviton considerando um rotulamento arbitrário para o momento no *loop*.

5.5 é feito de maneira análoga ao cálculo do diagrama mostrado na Figura 5.4. Devemos montar a amplitude e aplicar as prescrições da RI para separar as partes divergentes das partes finitas da amplitude e manter as arbitrariedades até o final dos cálculos afim de verificar se elas podem ou não ser fixadas. A condição de

invariância de rótulo é aplicada através da seguinte relação

$$\Pi^{\mu\nu\alpha\beta}_{(a)}(p,l) - \Pi^{\mu\nu\alpha\beta}_{(a)}(p,l') = 0, \tag{5.25}$$

a qual deve ser respeitada para quaisquer valores de l ou l'. Como pode ser visto em [54], a expressão (5.25) contem somente termos de superfície, os quais estão relacionados com os rótulos de maneira coerente a satisfazer a invariância de rótulo. Claro que, de forma semelhante à amplitude sem o parâmetro de roteamento, no caso em que o mesmo está presente, fazer com que todos os termos de superfície sejam nulos continua sendo uma condição para que a invariância de rótulo seja satisfeita. Porém, também de forma congênere, teremos relações menos restritivas. Particularmente, poderíamos nos perguntar se impor a condição de invariância de rótulo seria equivalente a impor a invariância de *gauge* (traduzida na transversalidade da amplitude) para a amplitude, no sentido de que as relações entre os termos de superfície devam ser respeitadas de maneira equivalente.

Se considerarmos o rótulo $l = cp$, onde c é uma constante arbitrária, após realizar os cálculos da amplitude correspondente ao digrama da Figura 5.5 (a qual é idêntica expressão (5.11)) obtemos o seguinte resultado [1]

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu\alpha\beta}_{(a)CS}(p,l) \;=\; & -\frac{3}{4}(c^2-c)i\kappa^2[p^2\eta^{\alpha\nu}(a_1-a_3+24a_4) \\
& +2p^\alpha p^\nu(3a_1-2a_3+24a_4)]\epsilon^{\lambda\rho\beta\mu}b_\lambda p_\rho \\
& -\frac{3}{4}(c^2-c)i\kappa^2[p^2\eta^{\beta\mu}(a_1-a_3+24a_4) \\
& +2p^\beta p^\mu(3a_1-2a_3+24a_4)]\epsilon^{\lambda\rho\alpha\nu}b_\lambda p_\rho \\
& -\frac{3}{4}(c^2-c)i\kappa^2[p^2\eta^{\beta\nu}(a_1-a_3+24a_4) \\
& +2p^\beta p^\nu(3a_1-2a_3+24a_4)]\epsilon^{\lambda\rho\alpha\mu}b_\lambda p_\rho \\
& -\frac{3}{4}(c^2-c)i\kappa^2[p^2\eta^{\alpha\mu}(a_1-a_3+24a_4) \\
& +2p^\alpha p^\mu(3a_1-2a_3+24a_4)]\epsilon^{\lambda\rho\beta\nu}b_\lambda p_\rho \\
& +\Pi^{\mu\nu\alpha\beta}_{(a)CS}(p,l=0),
\end{aligned} \tag{5.26}$$

[1] Devido aos cálculos serem bastante extensos, aqui também utilizamos como suporte o *software Mathematica* 8.

onde o termo $\Pi^{\mu\nu\alpha\beta}_{(a)CS}(p, l = 0)$ é descrito pela expressão (5.16).

Ao olharmos para a equação (5.26), vemos que se impormos a condição de invariância de rótulo, além do resultado trivial (que seria todos os termos de superfície identicamente nulos) ela nos fornece duas relações entre os termos de superfície que são

$$a_3 - a_1 = 24a_4 \tag{5.27}$$

e

$$2a_3 - 3a_1 = 24a_4. \tag{5.28}$$

Podemos observar que a equação (5.27) é a mesma obtida anteriormente em (5.22) ao impormos a condição de transversalidade, ou seja, continuariamos com um parâmetro a ser fixado, o que não altera o resultado já obtido. Dessa maneira, a condição de invariância de rótulo nos fornece mais uma relação entre os termos de superfície. Contudo, temos duas equações e três incógnitas a serem determinadas de forma que, essa condição também não é suficiente para fixar a arbitrariedade reminiscente, corroborando o fato de que o termo do tipo CS gravitacional induzido radiativamente é, de fato, arbitrário.

5.5 Comentários Finais

No trabalho desenvolvido nesse Capítulo estudamos a possibilidade de um termo do tipo CS ser gerado radiativamente considerando um modelo fermiônico não-massivo com um termo de quebra de simetria de *Lorentz* em um espaço-tempo curvo. Adotando as prescições da RI, a qual mostra-se bastante eficiente para o tratamento de arbitrariedades que possam surgir no decorrer dos cálculos dos mais variados modelos em TQC, realizamos um cálculo não perturbativo no parâmetro violador da simetria de *Lorentz* b_μ, o qual pode ser traduzido pelos diagramas apresentados na Figura 5.4.

Através dos cálculos apresentados nas Seções anteriores, vimos que, de fato, um termo de CS é gerado radiativamente, porém sendo o mesmo intrinsecamente arbitrário, arbitrariedade essa traduzida pela presença dos termos de superfície (3.36), (3.38) e (5.17). Para tentar fixar estes parâmetros, procuramos por simetrias inerentes ao modelo que, a princípio, pudessem fazê-lo. Logo, impomos

a condição de invariância de *gauge*, traduzida na transversalidade da amplitude (5.16). Porém, percebemos que a relação imposta por essa simetria aos termos de superfície não é suficiente para todos de uma maneira única, deixando um dos parâmetros livre, indicando que o termo de CS gravitacional induzido é, de fato, arbitrário.

Podemos fazer uma comparação entre o resultado obtido na Seção 5.4 e o resultado para o termo de *Carrol-Field-Jackiw* no caso da EDQ extendida, considerando o espaço plano (*Minkowski*), apresentado na Seção 4.3. Neste caso, a condição de transversalidade para o tensor de polarização do vácuo é facilmente respeitada pelo termo *CFJ*, devido à presença de um único termo antissimétrico (tensor de *Lévi-Cività*) contraído com o momento externo p_μ. Nesse caso, podemos notar que a transversalidade não foi uma alternativa para tentar fixar a referida arbitrariedade. Ainda neste caso, o uso da condição de invariância de rótulo também não foi necessária, uma vez que os termos em α (rótulos) se cancelaram naturalmente no cálculo, fazendo com que o resultado tivesse um parâmetro indeterminado.

No caso do termo do tipo CS gravitacional, a dinâmica é diferente, uma vez que não é trivial que essas simetrias sejam satisfeitas. Para que as mesmas sejam respeitadas, é necessário estabelecer uma relação entre os três parâmetros (termos de superfície) arbitrários. Um ponto interessante é que a condição de invariância de rótulo é uma condição suficiente para garantir a transversalidade da parte da amplitude responsável por gerar o termo do tipo CS, ou seja, proporcional ao quadrivetor b_μ, o que pode ser visto através das relações (5.20) e (5.24), onde a primeira vem da condição de transversalidade e a segunda vem da condição de invariância de rótulo, sendo idênticas ambas as relações. É importante salientar aqui que a invariância de rótulo não é uma simetria particular para esse modelo nem para nenhum outro em TQC e sim, uma simetria que deve ser respeitada por qualquer diagrama de *Feynman*.

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

"Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse essa gota."

Madre Tereza de Calcutá

Nessa tese procuramos apresentar os principais resultados obtidos durante o período de doutorado, bem como futuros projetos que surgiram no decorrer do mesmo, mas que não puderam ser implementados no tempo oportuno.

No Capítulo 3, vimos que ocorrem modificações importantes quando consideramos efeitos gravitacionais na EDQ escalar. Particularmente, observamos alguns aspectos bem interessantes relacionados a tal acoplamento. Concluímos que, de fato, as divergências quadráticas responsáveis por tornar a EDQ assintoticamente livre existem, porém são intrinsecamente ambíguas e dependentes de um parâmetro arbitrário, o qual por sua vez é dependente de regularização [91]. Mantendo explícitos também os parâmetros de *gauge* gravitacional e do fóton, percebemos que tais contribuições são circunstacialmente dependentes do *gauge* relacionado ao setor gravitacional do modelo, o qual, dependendo da escolha pode levar ao mapeamento de resultados encontrados na literatura [18, 19, 25].

Observamos também que a ambiguidade, traduzida na expressão (3.40) pelo parâmetro arbitrário c_1, não pode ser fixada impondo-se a condição de invariância

de *gauge*. Porém ambas (invariânica de *gauge* e de rótulo) são preservadas quando tomamos os termos de superfície, expressos através das equações (3.31) a (3.35), iguais a zero [91].

Em [20, 24], *Ellis et al* argumentam que a dependência de uma divergência quadrática não deveria existir ao considerarmos por exemplo, um processo de espalhamento. Tal argumento baseia-se no fato de que as divergências que devem contribuir para a função β seriam necessariamente de origem logarítmica, caracterizando-as, assim, como desprovidas de significado físico. Considerando o resultado obtido em (3.40), percebemos que o fato da contribuição quadrática ser dependente de um parâmetro arbitrário (dependente de regularização) e também do parâmetro de *gauge* gravitacional aponta no sentido de que, de fato, tal contribuição não seja fisicamente relevante.

No Capítulo 5, considerando um modelo fermiônico não-massivo em um *background* gravitacional com um termo de violação de simetria de *Lorentz*, mostramos que é possível gerar um termo do tipo CS gravitacional. Esse termo é gerado considerando a expansão em ordem b_μ na expressão (5.13), em conformidade com o obtido em [47, 48, 49]. Porém, através do resultado (5.24), vimos que há uma ambiguidade associada ao termo do tipo CS expressa através do termo de superfície a_4 (expressão (5.17)). Considerando a simetria de *gauge* do modelo que é expressa através da transversalidade da amplitude (5.14) que dá origem ao termo do tipo CS, concluímos que a mesma não é suficiente para fixar os três parâmetros arbitrários decorrentes da imposição da mesma na equação (5.16), fazendo com que o termo do tipo CS gerado seja arbitrário e dependente da prescrição de regularização utilizada. A dependência desse parâmetro permite com que resultados obtidos na literatura sejam mapeados, dependendo da escolha do mesmo [47], incluindo-se nessa análise até mesmo a não existência de tal termo, a depender da maneira como ele for avaliado.

Na tentativa de fixar essa arbitrariedade, procuramos por uma simetria adicional à simetria de *gauge* que fosse respeitada pela teoria. E uma simetria encontrada foi a simetria de rotulamento, que é uma simetria respeitada não só por esse modelo em especial, mas por qualquer diagrama de *Feynman*. Essa simetria está associada ao fato de que o cálculo de uma amplitude não pode depender de como os momentos são dispostos no diagrama. Dessa forma,

realizamos os cálculos da amplitude (5.14) considerando um rótulo l arbitrário e, ao final dos cálculos, obtemos duas relações entre os termos de superfície, expressas através das equações (5.27) e (5.28), onde notamos que a primeira dessas duas relações é idêntica à obtida para o caso em que o rotulamento não foi considerado (expressão (5.20)). Dessa maneira, obtemos duas equações e três incógnitas a serem determinadas, o que não é suficiente para fixar todos os parâmetros, a não ser que seja considerada a solução trivial (onde todos os termos são nulos individualmente). Concluímos então que a simetria de rótulo também não é suficiente para fixar as arbitrariedades, corroborando com o caráter ambíguo para o termo do tipo CS gravitacional encontrado.

6.1 Perspectivas

Nos últimos meses do doutorado, algumas propostas interessantes surgiram como perspectivas para a continuação da mesmas, sendo algumas não ligadas diretamente à gravitação, tema majoritário da mesma.

Uma perspectiva imediata é a continuação dos trabalhos iniciados durante o período de doutorado sanduíche na *Newcastle University* - Inglaterra, sob supervisão do *Prof. Daivd J. Toms*. Esse trabalho tem por objetivo analisar a TRG acoplada à matéria (escalar, *Maxwell*, *Yang-Mills*) sob um ponto de vista semelhante ao estudado no Capítulo 3 dessa tese, porém utilizando o método conhecido na literatura como *Local Momentum Representation*, onde é feita uma expansão do propagador de *Feynman* $G(x, x')$ em um espaço curvo [105, 106]. Essa expansão nos momentos para o propagador já é bem estabelecida para o tratamento de divergências ultravioletas, considerando o espaço tempo de *Minkowski*. Porém, ao tentarmos fazer a transição dessa analogia para o espaço-tempo curvo, a ideia da expansão local dos momentos é perdida, uma vez que quantidades que são definidas de forma única do ponto de vista do espaço tempo de *Minkowski*, acabam por ter essa característica ao considerarmos o espaço-tempo curvo [107]. Todavia, sabemos que em uma variedade curva, pelo princípio da equivalência pode ser vista como localmente plana, de maneira que nessa região ela pode ser tratada como *Minkowski*, permitindo-nois fazer uso da expansão local para os momentos num ponto x dessa variedade e uma região infinitesimalmente

próxima, a qual denotaremos como x' (também nessa mesma variedade) de forma a possibilitar o mapeamento para o espaço tempo curvo. Esse mapeamento é feito via o que chamamos de Coordenadas Normais de *Riemann* (CNR). A vantagem em utilizar essa expansão é que basicamente as quantidades como a métrica $g_{\mu\nu}$ e os coeficientes de *Christoffel* $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ são descritas em termos do tensor de *Riemann* e contrações possíveis do mesmo. Isso garante que o método seja invariante por transformações gerais de coordenadas, por construção. O uso da RNC também torna-se extremamente útil para a determinação de contratermos, por se tratarem de quantidades locais (para maiores detalhes, *vide* [108]).

Para compreender método de maneira tanto teórica quanto prática, estudamos suas principais características e vimos como o mesmo é aplicado considerando um modelo mais simples, mas não menos complicado. Consideramos o cálculo do tensor energia momento para o campo escalar acoplado com a gravitação, descrito pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{S} = \int d^n \frac{1}{2}\sqrt{g}\Big(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2 - \xi R\phi^2\Big), \tag{6.1}$$

onde ξ é a constante adimensional conhecida como constante de acoplamento conforme [106]. Utilizando a expressão

$$T^{\mu\nu} = -2\sqrt{g}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{6.2}$$

e após realizarmos alguam álgebra, obtemos a seguinte expressão para o tensor energia momento simétrico

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla^\rho\phi\nabla_\rho\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \xi\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)\phi^2 \\ &\quad +\xi\Big(g^{\mu\nu}\Box(\phi^2) - \nabla^\mu\nabla^\nu(\phi^2)\Big). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Partindo da expressão (6.3), considerando o método CNR, conseguimos mostrar que o tensor energia momento é finito para $N = 2$ e $N = 4$ dimensões, bem como a nulidade do seu traço, o que era esperado uma vez que estamos tratando o modelo classicamente. Para esses cálculos utilizamos as prescrições da RD, daí o

motivo da expressão (6.1) estar escrita para uma dimensão N arbitrária, o que não impede de aplicarmos outras prescrições para o cálculo, o que seria interessante pois, o cálculo do traço do tensor energia momento está diretamente relacionado com o problema da anomalia de *Weyl* o qual por sua vez pode estar vinculado com o esquema de regularização utilizado, o qual poderia dar indícios da origem do problema. O próximo passo seria avaliar a finitude do modelo considerando interações. Estamos avaliando também esse caso considerando uma interação do tipo $\lambda\phi^4$ na expressão (6.1) e a parte da pesquisa em questão encontra-se em andamento.

Outra perspectiva de trabalho, também relacionada ao estudo de TQC em espaços curvos e que vem chamando a atenção dos pesquisadores recentemente está relacionado a estudos sobre os efeitos do emaranhamento de um estado quântico quando um *background* curvo é considerado, como o emaranhamento é afetado e o quanto ele pode ser afetado. Pesquisadores importantes tem trabalhado nessa frente de pesquisa e obtido resultados extremamentes relevantes como a questão da perda de informação por um buraco negro bem como uma redução no emaranhamento para um sistema de partículas [109, 110]. Nesse caso, estamos interessados em analisar a teoria do ponto de vista interagente, ou seja, como a interação afeta o emaranhamento e a geração de partículas e o quando esse emaranhamento é desviado em comparação com uma teoria livre. O emaranhamento de partículas nessa caso está associado a parâmetros cosmólogicos, como a medida com que o universo se expande. O grau de emaranhamento de um sistema nessa caso apresenta diferenças se o observador encontra-se acelerado (com uma aceleração constante) ou em repouso [110]. Uma outra proposta está relacionada a geração radiativa de um termpo do tipo CS com aplicações agora em matéria condensada. Foi mostrado que é possível mapear a ação EDQ com um termo de quebra de simetria de *Lorentz* para a descrição de certas propriedades de uma nova classe de semimetais descobertos recentemente, conhecidos como semimetais de *Weyl* [111]. Com isso, é possível determinar a função-resposta ao movimento dos elétrons nesses materiais na presença de um campo eletromagnético externo utilizando métodos de TQC. Dessa maneira, pretendemos aplicar as prescrições da RI para determinar tal coeficiente de maneira não-ambígua, na tentativa de detectar e relacionar os possíveis problemas

relacionados aos diferentes valores obtidos para o mesmo.

Apêndice A - Aspectos sobre a Regularização Implícita

Apresentaremos nesse Apêndice alguns aspectos sobre as prescrições do método da Regularização Implícita (RI), utilizada ao longo desta tese como ferramental para o tratamento das amplitudes divergentes. Mais detalhes podem ser encontrados em [51, 52, 53, 55, 56, 58] e referências nelas contidas.

A Regularização Implícita consiste de um método de regularização que atua no espaço dos momentos (para uma contrapartida no espaço das posições, ver [104]) e atua na dimensão física do modelo, o que é uma característica bastante positiva quando se precisa tratar modelos que apresentam quantidades que são definidas na dimensão inteira [1]. Para que a RI possa ser aplicada, devemos assumir que exista algum tipo de regularização nas amplitudes que permita manipulações algébricas no integrando.

Uma das características principais da RI consiste em separar, de maneira consistente, as parte divergentes das partes finitas para uma determina amplitude. Para isso, fazemos uso da identidade

$$\frac{1}{[(p_i \pm k)^2 - m^2]} = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j (p_i^2 \pm 2p_i \cdot k)^j}{(k^2 - m^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{N+1}(p_i^2 \pm 2p_i \cdot k)^{N+1}}{(k^2 - m^2)^{N+1}[(p \pm k)^2 - m^2]}, \quad (4)$$

com a finalidade de descartar os momentos externos p_i e permanecer somente com as integrais divergentes básicas (IDB's) nos momentos internos k, além dos termos finitos. Em (4), o parâmetro N é tal que o último termo é finito sob integração em k. A identidade (4) pode ser aplicada recursivamente, a depender

[1] Por exemplo, teoria com a presença da matriz γ_5.

do grau superficial de divergência da amplitude a ser avaliada.

Tomemos como exemplo a integral

$$I^1(p^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)[(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon]}, \tag{5}$$

onde em (5) m representa o parâmetro de massa, p o momento externo e k o momento interno (momento de integração). Podemos notar, por simples contagem de potências, que a integral (5) é divergente logaritmicamente no ultravioleta ($k \to \infty$). Dessa maneira, precisamos aplicar a identidade (4) uma vez, de forma a separar as partes divergentes das partes finitas. Aplicando (4) em (5) temos

$$I^1(p^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \left\{ \frac{1}{(k^2 - m^2)} - \frac{(p^2 - 2p \cdot k)}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \right\} \tag{6}$$

ou, explicitamente

$$I^1(p^2) = \int^{\Lambda} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - \int^{\Lambda} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2[(k-p)^2 - m^2]}, \tag{7}$$

onde fizemos a simplificação $\int^{\Lambda} = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^2}$. O fator Λ presente na integral (7) indica que alguma regularização está sendo utilizada no integrando. Olhando para a expressão (7) vemos que o primeiro termo do lado direito da igualdade é independente do momento externo p_i. Essa integral pertence ao grupo de integrais que chamamos de IDB'S. A integral em questão é uma IDB logarítmica. O segundo termo do lado direito da igualdade em (7) é finita e pode ser calculado através da prescrição dos parâmetros de *Feynman*, por exemplo [61, 101].

Algumas IDB's que podem surgir em algum cálculo particular são dadas pelas seguintes expressões:

$$I_{log}(m^2) = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}, \tag{8}$$

$$I_{quad}(m^2) = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)}, \tag{9}$$

$$I^{\mu\nu}_{log}(m^2) = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^3}, \tag{10}$$

e

$$I^{\mu\nu}_{quad}(m^2) = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^2}. \tag{11}$$

Podemos notar que, nesse caso, a integral (6) é massiva, o que permite com que esse parâmetro de massa m faça o papel da escala do grupo de renormalização. No caso de uma teoria não massiva, o parâmetro m tem outro papel. A saber, ele representa um regulador infravermelho o qual deve ser tomado como zero ao final dos cálculos. Sob esse ponto de vista, devemos introduzir um parâmetro λ que fará o papel da escala do grupo de renormalização, em analogia com a teoria massiva. Isso nos permite introduzir a seguinte relação

$$I_{log}(m^2) = I_{log}(\lambda^2) - bln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right), \tag{12}$$

que é relação de escala para a IDB logarítmica, onde na expressão (12), temos que $b = \frac{i}{(4\pi)^2}$ é um parâmetro constante. Fazendo uso da relação (12) em (7) e calculando a parte finita através dos parâmetros de *Feynman*, obtemos o seguinte resultado para a integral

$$I^1(p^2) = I_{log}(\lambda^2) - bln\left(\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + 2b. \tag{13}$$

Outro ingrediente extremamente importante, no sentido de se identificar os possíveis termos violadores de simetria e que se trata de um dos cernes da RI, é a relação de consistência descrita como diferenças entre integrais divergentes. A seguir faremos a demonstração para um relação de consistência e algumas outras serão apenas listadas.

Tomemos por exemplo, a derivada da expressão

$$G(k) = \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \tag{14}$$

com relação à variável k_ν. Temos:

$$\frac{\partial}{\partial k_\nu}\frac{k_\mu}{(k^2-m^2)^2} = \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2-m^2)^2} - \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3}. \tag{15}$$

Agora, realizando a integração em ambos os lados de (15) temos:

$$\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\frac{\partial}{\partial k_\nu}\frac{k_\mu}{(k^2-m^2)^2}\right\} = g_{\mu\nu}\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-m^2)^2} - 4\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3}. \tag{16}$$

Podemos ver que do lado direito igualdade em (16) temos a diferença de duas integrais divergentes, porém com o mesmo grau de divergência em ambas. O termo do lado esquerdo da igualdade de (16) é o que chamamos de termo de superfície (TS). É justamente esse termo que carrega consigo as arbitrariedades e que, na maioria das vezes, são responsáveis por violar ou quebrar simetrias (invariância de *gauge*, simetria quiral, etc) em TQC. O ponto chave que faz com que a RI seja um bom método de regularização a ser aplicado reside no fato de mantermos os TS até o final dos cálculos (como mostrado anteriormente) e deixar que as simetrias do modelo ou então vínculos experimentais (caso houver) fixem esse termos. Isso não acontece por exemplo quando é usada a Regularização Dimensional (RD), a qual já determina, *a priori*, os valores desses termos como sendo zero nesse caso específico. Dessa forma, a invariância de *gauge* é preservada, pois em RD tais termos não existem. Mas como exposto nos Capítulos 3 e 5, vimos que esses termos nem sempre são nulo e, algumas vezes, também indeterminados.

Após essa breve explicação, dando continuidade ao cálculo, vamos passar o segundo termo do lado direito da igualdade em (16) para o lado esquerdo. Assim, temos a seguinte expressão:

$$\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}I_{log}(m^2) - c_1\eta_{\mu\nu}. \tag{17}$$

Além da relação mostrada em (17), outras identidades foram utilizadas neste

trabalho. São elas:

$$
\begin{aligned}
\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^2} &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} I_{quad}(m^2) - c_2 \eta_{\mu\nu}, \\
\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2-m^2)^3} &= \frac{1}{8}\Big[g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\Big] I_{quad}(m^2) \\
&\quad - c_3\Big[g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\Big], \\
\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2-m^2)^4} &= \frac{1}{24}\Big[g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\Big] I_{log}(m^2) \\
&\quad - c_4\Big[g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\Big].
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Além das relações de consistência mostradas em (18), há outras como mostrado nos Capítulos 3 e 5.

Apêndice B - Cálculo do propagador do gráviton

Conforme mencionado no Capítulo 3, apresentaremos nesse Apêndice o cálculo detalhado do propagador do gráviton, descrito através da expressão (3.17). O mesmo será importante para o cálculo dos diagramas a 1 *loop* para a correção do propagador do campo de *gauge*. O cálculo aqui apresentado será feito considerando um *gauge* específico para o gráviton ($\xi = 1$). Para o cálculo do propagador com o *gauge* arbitrário, deve-se proceder da mesma maneira. O procedimento será indicado ao final desse Apêndice.

Para proceder com o cálculo do propagador, partimos da expressão que mostra a ação de *Einstein-Hilbert* da Relatividade Geral descrita como

$$S_E = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R. \tag{19}$$

Na expressão (19), o termo R representa o escalar de curvatura, definido como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{20}$$

onde o termo $R_{\mu\nu}$, expresso em (20), representa o tensor de *Ricci* que é descrito pela expressão

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}. \tag{21}$$

Na expressão (21), os coeficientes $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ são conhecidos como símbolos de *Christoffel*

e, na teoria de *Einstein*, são definidos como

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}). \tag{22}$$

O próximo passo consiste em escrever a métrica $g_{\mu\nu}$ como uma soma da contribuição da métrica de Minkowski usual $\eta_{\mu\nu}$ mais um termo do tipo $\kappa h_{\mu\nu}$ (aproximação de campo fraco). Tal expansão é feita da seguinte maneira:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}. \tag{23}$$

Da mesma forma, faremos também a expansão da matriz inversa da métrica $g^{\mu\nu}$. Ela é dada por:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu}_{\alpha} h^{\nu\alpha} + O(h^3). \tag{24}$$

Logo, vamos expandir a ação dada em (19) em termos das expressões (23) e (24), de maneira que ela possa ser reescrita de uma forma quadrática no campo h, afim de calcularmos o propagador do gráviton na teoria quântica.

Primeiramente, note que o termo $\sqrt{-g}$ que aparece na expressão (19) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &= \sqrt{-detg_{\mu\nu}} \\ &= \sqrt{-1} exp\big(\frac{1}{2} Tr\ lng_{\mu\nu}\big), \end{aligned} \tag{25}$$

onde foi usou-se a seguinte identidade:

$$detA_{\mu\nu} = exp(TrlnA_{\mu\nu}). \tag{26}$$

Substituindo a expressão (23) em (26), temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} &= \sqrt{-1}exp\Big(\frac{1}{2}Trln[\eta_{\mu\nu}+\kappa h_{\mu\nu}]\Big)\\ &= \sqrt{-1}exp\Big(\frac{1}{2}Trln[\eta_{\mu\alpha}(\delta^{\alpha}_{\nu}+\kappa h^{\alpha}_{\nu})]\Big)\\ &= \sqrt{-1}exp\Big(\frac{1}{2}Trln(\eta_{\mu\alpha})+\frac{1}{2}Trln(\delta^{\alpha}_{\nu}+\kappa h^{\alpha}_{\nu})\Big)\\ &= \sqrt{-1}exp(\frac{1}{2}Trln(\eta_{\mu\alpha}))exp(\frac{1}{2}Trln(\delta^{\alpha}_{\nu}+\kappa h^{\alpha}_{\nu}))\\ &= \sqrt{-\eta}exp(\frac{1}{2}Trln(\delta^{\alpha}_{\nu}+\kappa h^{\alpha}_{\nu})).\end{aligned} \tag{27}$$

Agora, expandindo a expressão (27) como uma série de Taylor em torno do campo h, obtemos que a expressão (25) pode ser escrita como[1]:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\eta}\Big\{1+\frac{1}{2}\kappa h^{\alpha}_{\alpha}+\frac{1}{8}\kappa^2\Big[(h^{\alpha}_{\alpha})^2-2h^{\beta}_{\alpha}h^{\alpha}_{\beta}\Big]\Big\}, \tag{28}$$

onde a equação (28) foi expandida até segunda ordem nos campos h. O próximo passo consiste em expandirmos também a expressão (20) em termos das expressões (23) e (24). Novamente, para o cálculo do propagador, queremos uma expressão até segunda ordem no campo h. Primeiramente, serão expandidos os coeficientes de Christoffel. Assim, substituindo (23) e (24) em (22), temos (com os respectivos índices):

$$\begin{aligned}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} &= \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\alpha}-\kappa h^{\lambda\alpha}+\kappa^2 h^{\lambda}_{\mu}h^{\mu\alpha})(\partial_{\mu}(\eta_{\lambda\alpha}+\kappa h_{\lambda\alpha})+\partial_{\lambda}(\eta_{\mu\alpha}+\kappa h_{\mu\alpha})\\ &\quad -\partial_{\alpha}(\eta_{\mu\lambda}+\kappa h_{\mu\lambda}))\\ &= \frac{1}{2}\kappa\{\eta^{\lambda\alpha}\partial_{\mu}h_{\lambda\alpha}+\eta^{\lambda\alpha}\partial_{\lambda}h_{\mu\alpha}+\eta^{\lambda\alpha}\partial_{\alpha}h_{\mu\lambda}\}\\ &\quad -\frac{1}{2}\kappa^2\{h^{\lambda\alpha}\partial_{\mu}h_{\lambda\alpha}+h^{\lambda\alpha}\partial_{\lambda}h_{\mu\alpha}-h^{\lambda\alpha}\partial_{\alpha}h_{\mu\lambda}\}.\end{aligned} \tag{29}$$

Assim, basta proceder de maneira análoga para os outros termos da expressão

[1]Na expressão (28) temos que $\eta = det\eta_{\mu\nu}$.

(21). Dessa forma, tem-se para os outros termos:

$$\begin{aligned}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\kappa\{\eta^{\lambda\beta}\partial_\mu h_{\nu\beta} + \eta^{\lambda\beta}\partial_\nu h_{\mu\beta} + \eta^{\lambda\beta}\partial_\beta h_{\mu\nu}\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\kappa^2\{h^{\lambda\beta}\partial_\mu h_{\nu\beta} + h^{\lambda\beta}\partial_\nu h_{\mu\beta} - h^{\lambda\beta}\partial_\beta h_{\mu\nu}\}, \qquad (30)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} &= \frac{1}{2}\kappa\{\eta^{\sigma\beta}\partial_\mu h_{\lambda\beta} + \eta^{\sigma\beta}\partial_\lambda h_{\mu\beta} + \eta^{\sigma\beta}\partial_\beta h_{\mu\lambda}\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\kappa^2\{h^{\sigma\beta}\partial_\mu h_{\lambda\beta} + h^{\sigma\beta}\partial_\lambda h_{\mu\beta} - h^{\sigma\beta}\partial_\beta h_{\mu\lambda}\}, \qquad (31)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} &= \frac{1}{2}\kappa\{\eta^{\lambda\alpha}\partial_\nu h_{\sigma\alpha} + \eta^{\lambda\alpha}\partial_\sigma h_{\nu\alpha} + \eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha h_{\nu\sigma}\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\kappa^2\{h^{\lambda\alpha}\partial_\nu h_{\sigma\alpha} + h^{\lambda\alpha}\partial_\sigma h_{\nu\alpha} - h^{\lambda\alpha}\partial_\alpha h_{\nu\sigma}\}, \qquad (32)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\kappa\{\eta^{\sigma\beta}\partial_\mu h_{\nu\beta} + \eta^{\sigma\beta}\partial_\nu h_{\mu\beta} + \eta^{\sigma\beta}\partial_\beta h_{\mu\nu}\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\kappa^2\{h^{\sigma\beta}\partial_\mu h_{\nu\beta} + h^{\sigma\beta}\partial_\nu h_{\mu\beta} - h^{\sigma\beta}\partial_\beta h_{\mu\nu}\}, \qquad (33)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} &= \frac{1}{2}\kappa\{\eta^{\lambda\alpha}\partial_\sigma h_{\lambda\alpha} + \eta^{\lambda\alpha}\partial_\lambda h_{\sigma\alpha} + \eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha h_{\sigma\lambda}\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\kappa^2\{h^{\lambda\alpha}\partial_\sigma h_{\lambda\alpha} + h^{\lambda\alpha}\partial_\lambda h_{\sigma\alpha} - h^{\lambda\alpha}\partial_\alpha h_{\sigma\lambda}\}. \qquad (34)\end{aligned}$$

Substituindo as expressões de (29) a (34) e também a expressão (24) em (20), e após uma série de simplificações algébricas, chegar-se-á a expressão, até segunda ordem em h, do tensor de curvatura escalar mostrado em (20). Com esse

resultado, a expressão (19) pode ser reescrita como[1]:

$$\begin{aligned} S_g &= \frac{2}{\kappa^2}\int dx^4\sqrt{-g}R \\ &= \int dx^4\sqrt{-\eta}\Big\{-\frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h)+\frac{1}{2}(\partial_\beta h_{\mu\lambda})(\partial^\beta h^{\mu\lambda})+(\partial_\nu h)(\partial_\alpha h^{\nu\alpha})- \\ &(\partial_\beta h_{\mu\nu})(\partial^\mu h^{\nu\beta})\Big\}. \end{aligned} \tag{35}$$

Neste ponto, vamos adicionar a expressão (35) um termo de fixação de *gauge*. Neste caso, usar-se-á o *gauge* harmônico [4], que em termos da ação, é descrito por[2]:

$$S_{fg} = \int d^4x\sqrt{-\eta}\Big\{h^{;\nu}_{\mu\nu}h^{\mu\lambda}_{;\lambda}-\frac{1}{2}h^{;\nu}_{\mu\nu}h^{;\mu}-\frac{1}{2}h_{;\mu}h^{\mu\lambda}_{;\lambda}+\frac{1}{4}h_{;\mu}h^{;\mu}\Big\}. \tag{36}$$

Agora, tomando os dois termos intermediários da equação (36) e fazendo uma manipulação de índices, podemos escrevê-los como:

$$-\frac{1}{2}h^{;\nu}_{\mu\nu}h^{;\mu}-\frac{1}{2}h_{;\mu}h^{\mu\lambda}_{;\lambda} = -h^{;\nu}_{\mu\nu}h^{;\mu}. \tag{37}$$

Assim, substiutindo (37) em (36) obtemos:

$$S_{fg} = \int d^4x\sqrt{-\eta}\Big\{h^{;\nu}_{\mu\nu}h^{\mu\lambda}_{;\lambda}-h^{;\nu}_{\mu\nu}h^{;\mu}+\frac{1}{4}h_{;\mu}h^{;\mu}\Big\}, \tag{38}$$

onde a expressão (38) está escrita em termos de derivadas covariantes já apresentada em (36). Explicitamente, os três termos da expressão (38) podem ser escritos da seguinte maneira:

$$h^{\mu\lambda}_{;\lambda} = D_\lambda h^{\mu\lambda} = \partial_\lambda h^{\mu\lambda}+\Gamma^\mu_{\lambda\nu}h^{\nu\lambda}, \tag{39}$$

$$h^{;\mu} = \partial^\mu h, \tag{40}$$

[1] Esse cálculo é bastante extenso e muito trabalhoso, por isso, neste ponto, nos limitaremos apenas ao seu resultado, levando em conta todas as simplificações necessárias. Estamos utilizando também nesse ponto o *gauge* $\xi = 1$.

[2] A notação utilizada na expressão (36) será explicada posteriormente.

$$h_{;\mu} = \partial_\mu h, \tag{41}$$

$$h^{;\nu}_{\mu\nu} = D^\nu h_{\mu\nu} = \partial^\nu h_{\mu\nu} - \Gamma^{\nu\sigma}_{\mu} h_{\sigma\nu}. \tag{42}$$

Agora, substituindo as expressões de (39) a (42) em (36), obtém-se, preservando apenas os termos de ordem quadrática em h, uma vez que para o cálculo do propagador esta estrutura se faz necessária, a seguinte expressão:

$$S_{fg} = \int d^4x\sqrt{-\eta}\Big\{(\partial^\nu h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h^{\mu\lambda}) - (\partial^\nu h_{\mu\nu})(\partial^\mu h) + \frac{1}{4}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h)\Big\}. \tag{43}$$

Dessa forma, somando a expressão (35) à expressão (43), obtemos a ação quadrática em h dada por[1]:

$$\begin{aligned} S_q &= S_g + S_{fg} \\ &= \int d^4x\Big\{ -\frac{1}{4}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + \frac{1}{2}(\partial_\beta h_{\mu\lambda})(\partial^\beta h^{\mu\lambda}) - (\partial_\beta h_{\mu\nu})(\partial^\mu h^{\nu\beta}) + \\ &\quad (\partial^\nu h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h^{\mu\lambda})\Big\}. \end{aligned} \tag{44}$$

Reescrevendo os termos da expressão (44) como:

$$(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) = \partial_\mu(h\partial^\mu h) - h\partial_\mu\partial^\mu h, \tag{45}$$

$$(\partial_\beta h_{\mu\lambda})(\partial^\beta h^{\mu\lambda}) = \partial_\beta(h_{\mu\lambda}\partial^\beta h^{\mu\lambda}) - h_{\mu\lambda}\partial_\beta\partial^\beta h^{\mu\lambda}, \tag{46}$$

$$(\partial_\beta h_{\mu\nu})(\partial^\mu h^{\nu\beta}) = \partial_\beta(h_{\mu\nu}\partial^\mu h^{\nu\beta}) - h_{\mu\nu}\partial_\beta\partial^\mu h^{\nu\beta}, \tag{47}$$

$$(\partial^\nu h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h^{\mu\lambda}) = \partial^\nu(h_{\mu\nu}\partial_\lambda h^{\mu\lambda}) - h_{\mu\nu}\partial^\nu\partial_\lambda h^{\mu\lambda}, \tag{48}$$

e substituindo-se as expressões de (45) a (48) em (44), levando em conta que os termos de superfície desaparecem quando integramos sobre todo o espaço, chega-

[1] Aqui, fez-se $\sqrt{-\eta} = 1$.

se ao seguinte resultado:

$$S_q = -\frac{1}{2}\int d^4x\Big(h_{\mu\lambda}\partial_\mu\partial^\mu h^{\mu\lambda} - \frac{1}{2}h\partial_\mu\partial^\mu h\Big). \tag{49}$$

Agora, vamos escrever os campos h do segundo termo de (49) como $h = \eta^{\alpha\lambda}h_{\alpha\lambda}$ e $h = \eta^{\beta\sigma}h_{\beta\sigma}$. Ainda na expressão (49), vamos reescrever o termo $h^{\mu\lambda}$ como

$$h^{\mu\lambda} = \eta^{\beta\lambda}\eta^{\sigma\mu}h_{\beta\sigma}. \tag{50}$$

Dessa forma, o termo entre parênteses da expressão (50) pode ser reescrito como:

$$h_{\mu\lambda}\partial_\mu\partial^\mu h^{\mu\lambda} - \frac{1}{2}h\partial_\mu\partial^\mu h = h_{\mu\lambda}\eta^{\beta\lambda}\eta^{\sigma\mu}\partial_\mu\partial^\mu h_{\beta\sigma} - \frac{1}{2}h_{\lambda\alpha}\eta^{\lambda\alpha}\eta^{\sigma\beta}\partial_\mu\partial^\mu h_{\sigma\beta}. \tag{51}$$

Agora, no primeiro termo da expressão (51), será feita a seguinte troca de índices: $(\mu \to \alpha)$. Portanto, (51) pode ser reescrita novamente como:

$$h_{\mu\lambda}\partial_\mu\partial^\mu h^{\mu\lambda} - \frac{1}{2}h\partial_\mu\partial^\mu h = h_{\alpha\lambda}\eta^{\beta\lambda}\eta^{\sigma\alpha}\partial_\mu\partial^\mu h_{\beta\sigma} - \frac{1}{2}h_{\alpha\lambda}\eta^{\lambda\alpha}\eta^{\sigma\beta}\partial_\mu\partial^\mu h_{\sigma\beta}. \tag{52}$$

Assim, substituindo (52) em (49), temos que a ação será dada por:

$$S_q = -\frac{1}{2}\int d^4x\Big(h_{\alpha\lambda}\eta^{\beta\lambda}\eta^{\sigma\alpha}\partial_\mu\partial^\mu h_{\beta\sigma} - \frac{1}{2}h_{\alpha\lambda}\eta^{\lambda\alpha}\eta^{\sigma\beta}\partial_\mu\partial^\mu h_{\sigma\beta}\Big), \tag{53}$$

ou de uma maneira mais compacta

$$S_q = -\frac{1}{2}\int d^4x h_{\alpha\lambda}\Big(D^{\alpha\lambda\beta\sigma}\partial_\mu\partial^\mu\Big)h_{\beta\sigma}, \tag{54}$$

onde

$$D^{\alpha\lambda\beta\sigma} = \frac{1}{2}\Big(\eta^{\beta\lambda}\eta^{\sigma\alpha} + \eta^{\beta\alpha}\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\alpha\lambda}\eta^{\sigma\beta}\Big). \tag{55}$$

Para obtermos o propagador do gráviton, temos que encontrar um operador inverso e simétrico para $D^{\alpha\lambda\beta\sigma}$ dado em (55). Este operador é simétrico na troca $(\alpha \to \lambda)$, $(\beta \to \sigma)$ e também na troca $(\alpha\lambda \to \beta\sigma)$. Isto equivale a encontrarmos

uma solução do tipo $P_{\alpha\lambda\gamma\delta}$ para a equação

$$D^{\alpha\lambda\beta\sigma}P_{\alpha\lambda\gamma\delta} = I^{\beta\sigma}_{\gamma\delta} \tag{56}$$

e para

$$\partial_\mu\partial^\mu, \tag{57}$$

onde, em (57), definimos

$$I^{\beta\sigma}_{\gamma\delta} = \eta^{\beta\mu}\eta^{\sigma\nu}I_{\mu\nu\gamma\delta}, \tag{58}$$

com a identidade no espaço dos tensores simétricos definida por:

$$I_{\mu\nu\gamma\delta} = \frac{1}{2}\Big(\eta_{\mu\gamma}\eta_{\nu\delta} + \eta_{\mu\delta}\eta_{\nu\gamma}\Big). \tag{59}$$

Logo, pode-se observar que o operador inverso de $D^{\alpha\lambda\beta\sigma}$ é dado por

$$P_{\alpha\lambda\gamma\delta} = \frac{1}{2}\Big(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\lambda\delta} + \eta_{\alpha\delta}\eta_{\gamma\delta} - \eta_{\alpha\lambda}\eta_{\gamma\delta}\Big), \tag{60}$$

uma vez que

$$\begin{aligned} D^{\alpha\lambda\beta\sigma}P_{\alpha\lambda\gamma\delta} &= \{\frac{1}{2}\Big(\eta^{\beta\lambda}\eta^{\sigma\alpha} + \eta^{\beta\alpha}\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\alpha\lambda}\eta^{\sigma\beta}\Big)\} \times \\ &\quad \{\frac{1}{2}\{\Big(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\lambda\delta} + \eta_{\alpha\delta}\eta_{\gamma\delta} - \eta_{\alpha\lambda}\eta_{\gamma\delta}\Big)\} \qquad (61) \\ &= \frac{1}{2}\Big[\delta^\sigma_\gamma\delta^\beta_\delta + \delta^\beta_\gamma\delta^\sigma_\delta\Big] \qquad (62) \end{aligned}$$

onde a expressão (61) obedece à expressão (56).

No espaço dos momentos, o inverso do operador diferencial dado em (57) é o propagador de uma partícula bosônica com massa m, onde sua forma analítica e gráfica pode ser vista através da expressão (3.16) e da Figura 3.1.

Sendo assim, podemos escrever a expressão para o propagador do gráviton no *gauge* harmônico da maneira como se segue:

$$\Delta^{\alpha\lambda\sigma\beta}(q) = \frac{iP^{\alpha\lambda\sigma\beta}}{(q^2 - \mu^2)}, \tag{63}$$

onde

$$P^{\alpha\lambda\sigma\beta} = \frac{1}{2}\Big(\eta^{\beta\lambda}\eta^{\sigma\alpha} + \eta^{\beta\alpha}\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\alpha\lambda}\eta^{\sigma\beta}\Big), \tag{64}$$

como mostrado na expressão (3.16).

O cálculo apresentado para o propagador do gráviton difere um pouco do resultado de (3.16) no sentido de que aqui tomamos o parâmetro fixador de calibre ξ como sendo 1, eliminando assim o o segundo termo do lado direito da igualdade em (3.16). Para obter a expressão geral, basta proceder da mesma maneira que fizemos aqui, mas considerando agora o termo [105]

$$\begin{aligned} S'_{fg} \;=\; & \int \sqrt{-\eta}\Bigg\{\left(\frac{1}{\xi}-1\right) g^{\mu\nu}\left(h^{;\rho}_{\mu\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\rho}h^{\beta;\rho}_{\beta}\right)\left(h^{;\sigma}_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}h^{\beta;\sigma}_{\beta}\right) \\ & + \frac{1}{2}h^{;\rho}_{\mu\nu}\left(h^{\mu\nu}_{;\rho} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}h^{\beta}_{\beta;\rho}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{65}$$

em detrimento do termo (36). Considerando essa mudança e realizando os cálculos de maneira idêntica à desenvolvida nesse Apêndice, chegar-se-á expressão para o propagador em sua forma mais geral expressa em (3.16).

Apêndice C - Cálculo dos Vértices

Neste Apêndice, apresentaremos a maneira como foram calculados os vértices utilizados para a construção das amplitudes calculadas nos Capítulos 3 e 5. Mostraremos explicitamente os cálculos de alguns vértices e os outros serão deixadas indicações de como calculá-los, uma vez que maneira de calculá-los será sempre a mesma.

A ação que descreve a interação entre a gravitação e o campo de *gauge* pode ser vista na expressão (3.15). Por uma questão de praticidade, repetiremos aqui a mesma expressão, incluíndo os termos de interação entre o campo escalar e o campo de*gauge*. Feitas essas considerações, podemos escrever a ação da seguinte forma [1]

$$
\begin{aligned}
S_{EM} \;=\; & \int d^4x \Bigg\{ -\frac{1}{4}\kappa h\Big[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu)\Big] + \\
& + \frac{1}{2}\kappa h^{\beta\nu}\Big[(\partial^\mu A_\nu)(\partial_\mu A_\beta) + (\partial_\beta A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\mu A_\beta)(\partial_\nu A^\mu) - \\
& - (\partial_\beta A_\mu)(\partial^\mu A^\nu)\Big] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\kappa^2\Big(h^{\mu\alpha}h^{\nu\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(h^\delta_\gamma)(h^\gamma_\delta) - \\
& - \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}h^{\nu\beta}(h^\delta_\delta) - \frac{1}{2}\eta^{\nu\beta}h^{\mu\alpha}(h^\delta_\delta) + \frac{1}{8}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(h^\delta_\delta)(h^\alpha_\alpha) + \eta^{\mu\alpha}h^\nu_\gamma h^{\beta\gamma} + \\
& + \eta^{\nu\beta}h^\mu_\gamma h^{\alpha\gamma}\Big) + \Big(ieA^\mu\phi^*(\partial_\mu\phi) - ieA^\mu\phi(\partial_\mu\phi^*)\Big) + e^2A_\mu A^\mu|\phi|^2\Bigg\}, \quad (66)
\end{aligned}
$$

onde todos os terms em (66) foram definidos no Capítulo 2. É importante

[1] Aqui foi usado novamente que $\sqrt{-\eta} = 1$

colocar que, como estamos interessados somente a correções a ordem de 1 *loop*, todos os termos necessários estão presentes na expressão (66). Caso estivéssemos interessados em correções a ordens maiores, bastaria acrescentarmos mais termos presentes na expansão da métrica $g_{\mu\nu}$ em torno do campo $h_{\mu\nu}$.

Assim, de posse da maneira como se dão as interações, o próximo passo consiste em cálcular as expressões para os vértices.

A expressão mais geral para o cálculo dos vértices no espaço dos momentos é dada por [103]:

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu_1\nu_1\ldots\mu_m\nu_n} &= i\int d^4x d^4x_1\cdots d^4x_n d^4y_1\cdots d^4y_m e^{i[p_1x_1+\ldots+p_nx_n+q_1y_1+\ldots+q_my_m]}\\ &\times\frac{\delta}{\delta\phi_1(x_1)}\times\ldots\times\frac{\delta}{\delta\phi_n(x_n)}\times\frac{\delta}{\delta H_1^{\mu_1\nu_1}(y_1)}\times\ldots\times\frac{\delta}{\delta H_m^{\mu_m\nu_n}(y_m)}\\ &\times\frac{\delta}{\delta A_1^{\mu_1}(y_1)}\times\ldots\times\frac{\delta}{\delta A_m^{\mu_m}(y_m)}\\ &\times L_{int}(\phi_1,\ldots,\phi_n,H_1,\ldots,H_m,A_1,\ldots,A_m)(x),\end{aligned}\tag{67}$$

onde L_{int} representa a lagrangeana de interação, $\phi_1\ldots\phi_n$ representam o campo escalar, $H_1^{\mu_1\nu_1}(y_1)\ldots H_m^{\mu_m\nu_n}(y_m)$ representam o campo gravitacional, $A_1^{\mu_1}(y_1)\ldots A_m^{\mu_m}(y_m)$ representam o campo de *gauge* e as grandezas $p_1,\ldots,p_n$ e $q_1,\ldots,q_m$ representam os momentos externos dos campos escalar e dos campos de *gauge* e gravitacional, respectivamente.

Tendo todo o ferramental em mãos, o próximo consiste em calcular e determinar as expressões para os vértices.

.1 Interação fóton-escalar-escalar

Da expressão (67), temos que o termo na lagrangeana que descreve tal interação é dado por:

$$\mathcal{L}_{int} = -(-ieA_\mu\phi^*(\partial^\mu\phi) + ieA_\mu\phi(\partial^\mu\phi^*)).\tag{68}$$

Substituindo a expressão (68) na expressão (67) temos:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma}(p^{'},p) &= -i\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[px_1-p'x_2+qx_3]} \\ &\times\frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}\frac{\delta}{\delta\phi^*(x_2)}\frac{\delta}{\delta A_{\gamma}(x_3)}(-ieA_{\mu}\phi^*(\partial^{\mu}\phi)+ieA_{\mu}\phi(\partial^{\mu}\phi^*)). \quad (69)\end{aligned}$$

Agora, vamos aplicar cada função à sua respectiva derivada. Aplicando primeiramente ao campo de fóton A_{γ}, vemos que ela implicará numa seguinte troca de índices: $\mu \to \gamma$. Dessa maneira, temos para o campo de fóton:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma}(p^{'},p) &= -i\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[px_1-p'x_2+qx_3]} \\ &\times\frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}\frac{\delta}{\delta\phi^*(x_2)}(-ie\delta(x-x_3)\phi^*(\partial^{\gamma})\phi) \\ &+ie\delta(x-x_3)\phi(\partial^{\gamma}\phi^*)). \quad (70)\end{aligned}$$

Aplicando as derivadas aos campos escalares teremos:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma}(p^{'},p) &= -i\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[px_1-p'x_2+qx_3]} \\ &\times\Big(-ie\delta(x-x_3)\delta(x-x_2)(\partial^{\gamma}\delta(x-x_1)) \\ &+ie\delta(x-x_3)\delta(x-x_1)(\partial^{\gamma}\delta(x-x_2))\Big). \quad (71)\end{aligned}$$

Agora, temos que escrever as funções $\delta(x-x_1)$ e $\delta(x-x_2)$ no espaço dos momentos. Elas são definidas da seguinte maneira:

$$\delta(x-x_1)=\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}e^{ip_1(x-x_1)} \quad (72)$$

e

$$\delta(x-x_2)=\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}e^{ip_2(x-x_2)}. \quad (73)$$

Substituindo (72) e (73) em (71) temos:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma}(p^{'},p) &= -i\int d^4xd^4x_1d^4x_2d^4x_3e^{i[px_1-p'x_2+qx_3]}\\ &\times\Big\{-ie\delta(x-x_3)\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}e^{ip_2(x-x_2)}\partial^{\gamma}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}e^{ip_1(x-x_1)}\\ &+ie\delta(x-x_3)\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}e^{ip_1(x-x_1)}\partial^{\gamma}\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}e^{ip_2(x-x_2)}\Big\}. \qquad (74)\end{aligned}$$

Aplicando as derivadas em (74) obtemos:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma}(p^{'},p) &= -i\int d^4xd^4x_1d^4x_2d^4x_3e^{i[px_1-p'x_2+qx_3]}\\ &\times\Big\{-ie\delta(x-x_3)\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}e^{ip_2(x-x_2)}(ip_{1\gamma})\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}e^{ip_1(x-x_1)}\\ &+ie\delta(x-x_3)\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}e^{ip_1(x-x_1)}(ip_{2\gamma})\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}e^{ip_2(x-x_2)}\Big\}. \qquad (75)\end{aligned}$$

Agora, agrupando os termos em (75) temos:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma}(p^{'},p) &= -i\int d^4xd^4x_1d^4x_2\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}e^{i[(p-p_1)x_1-(p'+p_2)x_2+(p_1+p_2)x]}\\ &\times\int d^4x_3e^{iqx_3}\delta(x-x_3)\times\Big\{ie(ip_{2\gamma})-ie(ip_{1\gamma})\Big\}. \qquad (76)\end{aligned}$$

Agora, temos o seguinte resultado:

$$\int d^4x_3e^{iqx_3}\delta(x-x_3)=e^{iqx}. \qquad (77)$$

Substituindo (77) em (76) temos:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma}(p^{'},p) &= -i\int d^4xd^4x_1d^4x_2\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}e^{i[(p-p_1)x_1-(p'+p_2)x_2+(p_1+p_2+q)x]}\\ &\times\Big\{ie(ip_{2\gamma})-ie(ip_{1\gamma})\Big\}. \qquad (78)\end{aligned}$$

O próximo passo consiste em tratar as integrais em x_1, x_2 e x_3 separadamente. Para isso vamos reorganizar a expressão (78) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma}(p^{'},p) &= -i\int d^4x e^{i(p_1+p_2+q)x}\int d^4x_1 e^{i(p-p_1)x_1}\int d^4x_2 e^{-i(p'+p_2)x_2}\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\\ &\times\Big\{ie(ip_{2\gamma})-ie(ip_{1\gamma})\Big\}. \end{aligned} \tag{79}$$

Temos também os seguintes resultados para integrais em (79):

$$\int d^4x_1 e^{i(p-p_1)x_1} = (2\pi)^4\delta(p_1-p) \tag{80}$$

e

$$\int d^4x_2 e^{-i(p'+p_2)x_2} = (2\pi)^4\delta(p'+p_2). \tag{81}$$

Substituindo (80) e (81) em (79) temos:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma}(p^{'},p) &= -i\int d^4x e^{i(p_1+p_2+q)x}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta(p_1-p)\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}(2\pi)^4(p'+p_2)\\ &\times\Big\{ie(ip_{2\gamma})-ie(ip_{1\gamma})\Big\}\\ &= -ie\int d^4x e^{i(p_1+p_2+q)x}\\ &\times\Big\{\int d^4p_1\delta(p_1-p)(ip_{1\gamma})\int d^4p_2\delta(p'+p_2)(ip_{2\gamma})\Big\}. \end{aligned} \tag{82}$$

Da expressão (82) temos os seguintes resultados para as integrais:

$$\int d^4p_1\delta(p_1-p)(ip_{1\gamma}) = ip_{\gamma} \tag{83}$$

e

$$\int d^4p_2\delta(p'+p_2)(ip_{2\gamma}) = -ip'_{\gamma}. \tag{84}$$

Agora, substituindo (83) e (84) em (82) obtemos o seguinte resultado:

$$\Theta^{\gamma}(p^{'},p) = -ie\int d^4x e^{i(p_1+p_2+q)x}\Big(p_{\gamma}+p'_{\gamma}\Big) \tag{85}$$

Mas sabemos que:

$$\int d^4x e^{i(p_1+p_2+q)x} = (2\pi)^4\delta(p-p'+q) \tag{86}$$

Logo, substituindo (86) em (85) obtemos a expressão para o vértice. Ela é dada por:

$$\Theta^{\gamma}(p^{'},p) = (2\pi)^4\delta(p-p^{'}+q)\Big[-ie\Big(p_\gamma + p'_\gamma\Big)\Big]. \tag{87}$$

onde podemos notar explicitamente a conservação dos momentos no vértice através da função delta de Dirac. Essa expressão corresponde à expressão (3.21) a Figura 3.6.

.2 Interação fóton-fóton-escalar-escalar

Da expressão (66), o termo que descreve tal interação é dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= e^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2 \\ &= e^2\eta^{\mu\nu}A_\mu A_\nu \phi^*\phi.\end{aligned} \tag{88}$$

Substituindo a expressão (88) na expressão (67) e tomando o cuidado em substituir os campos e os momentos da maneira adequada, temos a seguinte expressão para o vértice:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma\beta}(p',p) &= i\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i[px_1 - p'x_2 + qx_3 - q'x_4]} \\ &\times \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}\frac{\delta}{\delta\phi^*(x_2)}\frac{\delta}{\delta A_\gamma(x_3)}\frac{\delta}{\delta A_\beta(x_4)}\Big(e^2\eta^{\mu\nu}A_\mu A_\nu\phi^*\phi\Big).\end{aligned} \tag{89}$$

Agora, procedendo como na Seção anterior, vamos aplicar cada derivada a seu respectivo campo, lembrando que no caso dos fótons, faremos a troca do campo

H pelo campo A. Aplicando a primeira derivada temos:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma\beta}(p',p) &= ie^2\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i[px_1-p'x_2+qx_3-q'x_4]} \\ &\times\frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}\frac{\delta}{\delta\phi^*(x_2)}\frac{\delta}{\delta A_\gamma(x_3)}\Big(\eta^{\mu\beta}A_\mu\delta(x-x_4)\phi^*\phi \\ &+\eta^{\beta\nu}A_\nu\delta(x-x_4)\phi^*\phi\Big),\end{aligned} \tag{90}$$

onde no primeiro e no segundo termo entre parênteses da expressão (90) houve uma troca de índices do tipo $(\nu \to \beta)$ e $(\mu \to \beta)$ respectivamente. Pode-se perceber que ao aplicar a outra derivada com relação ao campo do fóton, também haverá uma troca de índices do tipo $(\mu \to \gamma)$ e $(\nu \to \gamma)$ respectivamente na expressão (90). Dessa maneira, aplicando esta derivada e também as respectivas derivadas dos campos escalares na expressão (90), obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma\beta}(p',p) &= 2ie^2\eta^{\gamma\beta}\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i[px_1-p'x_2+qx_3-q'x_4]} \\ &\times\Big(\delta(x-x_1)\delta(x-x_2)\delta(x-x_3)\delta(x-x_4)\Big).\end{aligned} \tag{91}$$

Agora, reorganizando as integrais em (91) de modo a tratá-las separadamente temos:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma\beta}(p',p) &= 2ie^2\eta^{\gamma\beta}\int d^4x\int d^4x_1 e^{ipx_1}\delta(x-x_1)\int d^4x_2 e^{-ip'x_2}\delta(x-x_2)\times \\ &\times\int d^4x_3 e^{iqx_3}\delta(x-x_3)\int d^4x_4 e^{-iq'x_4}\delta(x-x_4).\end{aligned} \tag{92}$$

Tomando os seguintes resultados para as integrais em (92):

$$\begin{aligned}\int d^4x_1 e^{ipx_1}\delta(x-x_1) &= e^{ipx}, \\ \int d^4x_2 e^{ip'x_2}\delta(x-x_2) &= e^{-ip'x}, \\ \int d^4x_3 e^{iqx_3}\delta(x-x_3) &= e^{iqx}, \\ \int d^4x_4 e^{iq'x_4}\delta(x-x_{34}) &= e^{-iq'x},\end{aligned} \tag{93}$$

e substituindo os resultados de (93) na expressão (92) temos o seguinte resultado:

$$\Theta^{\gamma\beta}(p',p) = 2ie^2\eta^{\gamma\beta}\int d^4x e^{i[p-p'+q-q']x}. \tag{94}$$

Tomando o seguinte resultado para a integral em (94):

$$\int d^4x e^{i(p-p'+q-q')x} = (2\pi)^4\delta(p-p'+q-q'), \tag{95}$$

e substituindo o resultado de (95) em (94) chegamos ao resultado final para a expressão do vértice que é dada por:

$$\Theta^{\gamma\beta}(p',p) = (2\pi)^4\delta(p-p'+q-q')\Big\{2ie^2\eta^{\gamma\beta}\Big\}. \tag{96}$$

onde a função delta representa a conservação dos momentos no vértice, o que pode ser visto através da Figura (3.7) e a expressão (3.22).

.3 Interação gráviton-fóton-fóton

Da expressão (66) obtemos o termo que descreve tal interação. Ele é do tipo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= -\frac{1}{4}\kappa\eta^{\alpha\beta}\eta^{\nu\sigma}h_{\alpha\beta}\Big[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A_\sigma) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A_\sigma)\Big] \\ &\quad +\frac{1}{2}\kappa h_{\alpha\beta}\Big[\eta^{\beta\sigma}\eta^{\alpha\rho}(\partial^\mu A_\sigma)(\partial_\mu A_\rho) + (\partial^\alpha A_\mu)(\partial_\beta\eta^{\mu\sigma}A_\sigma) - (\partial^\mu\eta^{\alpha\rho}A_\rho)(\partial^\beta A_\mu) \\ &\quad -(\partial^\alpha A_\mu)(\partial^\mu\eta^{\beta\sigma}A_\sigma)\Big].\end{aligned} \tag{97}$$

Substituindo a expressão (97) em (67) chega-se a seguinte expressão para o vértice:

$$\begin{aligned}\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p,p') &= i\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[px_1-p'x_2+qx_3]}\times\frac{\delta}{\delta A_\gamma(x_1)}\frac{\delta}{\delta A_\delta(x_2)}\frac{\delta}{\delta H_{\lambda\theta}(x_3)} \\ &\quad\times\Big\{-\frac{1}{4}\kappa\eta^{\alpha\beta}\eta^{\nu\sigma}h_{\alpha\beta}\Big[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A_\sigma) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A_\sigma)\Big] \\ &\quad +\frac{1}{2}\kappa h_{\alpha\beta}\Big[\eta^{\beta\sigma}\eta^{\alpha\rho}(\partial^\mu A_\sigma)(\partial_\mu A_\rho) + (\partial^\alpha A_\mu)(\partial_\beta\eta^{\mu\sigma}A_\sigma) \\ &\quad -(\partial^\mu\eta^{\alpha\rho}A_\rho)(\partial^\beta A_\mu) - (\partial^\alpha A_\mu)(\partial^\mu\eta^{\beta\sigma}A_\sigma)\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{98}$$

Na expressão (98) vamos aplicar as derivadas aos campos. Aplicando primeiramente ao ao gráviton temos:

$$\begin{aligned}\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p,p') &= i\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[px_1-p'x_2+qx_3]}\times\frac{\delta}{\delta A_\gamma(x_1)}\frac{\delta}{\delta A_\delta(x_2)}\\ &\times\Big\{-\frac{1}{4}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\nu\sigma}\delta(x-x_3)\Big[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A_\sigma)-(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A_\sigma)\Big]\\ &+\frac{1}{2}\kappa\delta(x-x_3)\Big[\eta^{\theta\sigma}\eta^{\lambda\rho}(\partial^\mu A_\sigma)(\partial_\mu A_\rho)+(\partial^\lambda A_\mu)(\partial_\theta\eta^{\mu\sigma}A_\sigma)\\ &-(\partial^\mu\eta^{\lambda\rho}A_\rho)(\partial^\theta A_\mu)-(\partial^\lambda A_\mu)(\partial^\mu\eta^{\theta\sigma}A_\sigma)\Big]\Big\}. \qquad (99)\end{aligned}$$

Agora, aplicando as derivadas aos campos de *gauge* temos:

$$\begin{aligned}\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p,p') &= i\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[px_1-p'x_2+qx_3]}\\ &\times\Big\{-\frac{1}{4}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\delta\gamma}\delta(x-x_3)\partial_\mu\delta(x-x_2)\partial^\mu\delta(x-x_1)\\ &-\frac{1}{4}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\gamma\delta}\delta(x-x_3)\partial_\nu\delta(x-x_1)\partial^\mu\delta(x-x_2)\\ &+\frac{1}{4}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\nu\gamma}\delta(x-x_3)\partial_\nu\delta(x-x_2)\partial^\delta\delta(x-x_1)\\ &+\frac{1}{4}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\nu\delta}\delta(x-x_3)\partial_\nu\delta(x-x_1)\partial^\mu\delta(x-x_2)\\ &+\frac{1}{2}\kappa\delta(x-x_3)\eta^{\theta\delta}\eta^{\lambda\gamma}\partial^\mu\delta(x-x_2)\partial_\mu\delta(x-x_1)\\ &+\frac{1}{2}\kappa\delta(x-x_3)\eta^{\theta\gamma}\eta^{\lambda\delta}\partial^\mu\delta(x-x_1)\partial_\mu\delta(x-x_2)\\ &+\frac{1}{2}\kappa\delta(x-x_3)\eta^{\gamma\delta}\partial^\lambda\delta(x-x_2)\partial_\theta\delta(x-x_1)\\ &+\frac{1}{2}\kappa\delta(x-x_3)\eta^{\gamma\delta}\partial^\lambda\delta(x-x_1)\partial_\theta\delta(x-x_2)\\ &-\frac{1}{2}\kappa\delta(x-x_3)\eta^{\lambda\delta}\partial_\gamma\delta(x-x_2)\partial^\theta\delta(x-x_1)\\ &-\frac{1}{2}\kappa\delta(x-x_3)\eta^{\lambda\gamma}\partial^\delta\delta(x-x_1)\partial^\theta\delta(x-x_2)\\ &-\frac{1}{2}\kappa\delta(x-x_3)\eta^{\theta\gamma}\partial^\lambda\delta(x-x_2)\partial^\delta\delta(x-x_1)\\ &-\frac{1}{2}\kappa\delta(x-x_3)\eta^{\theta\delta}\partial^\lambda\delta(x-x_2)\partial^\gamma\delta(x-x_1)\Big\}. \qquad (100)\end{aligned}$$

Os passos seguintes são os mesmos adotados para o cálculo dos vértices anteriores. Primeiramente, substituímos os resultados das expressões (72) e (73) na expressão (100), agrupamos os termos de maneira a separar as integrais em suas variáveis correspondentes, depois utilizamos o resultado da expressão (77) para a integral no momento q. Obtemos então o seguinte resultado:

$$
\begin{aligned}
\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p,p') \;=\; & i\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{i[px_1-p'x_2+qx]} \\
& \times\Big\{ -\frac{1}{4}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\delta\gamma}\partial_\mu \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)}\partial^\mu \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \\
& -\frac{1}{4}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\gamma\delta}\partial_\nu \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)}\partial^\mu \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \\
& +\frac{1}{4}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\nu\gamma}\partial_\nu \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)}\partial^\delta \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \\
& +\frac{1}{4}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\nu\delta}\partial_\nu \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)}\partial^\mu \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \\
& +\frac{1}{2}\kappa\eta^{\theta\delta}\eta^{\lambda\gamma}\partial^\mu \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)}\partial_\mu \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \\
& +\frac{1}{2}\kappa\eta^{\theta\gamma}\eta^{\lambda\delta}\partial^\mu \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)}\partial_\mu \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \\
& +\frac{1}{2}\kappa\eta^{\gamma\delta}\partial^\lambda \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)}\partial_\theta \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \\
& +\frac{1}{2}\kappa\eta^{\gamma\delta}\partial^\lambda \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)}\partial_\theta \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \\
& -\frac{1}{2}\kappa\eta^{\lambda\delta}\partial_\gamma \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)}\partial^\theta\delta \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \\
& -\frac{1}{2}\kappa\eta^{\lambda\gamma}\partial^\delta \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)}\partial^\theta \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \\
& -\frac{1}{2}\kappa\eta^{\theta\gamma}\partial^\lambda \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)}\partial^\delta \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \\
& -\frac{1}{2}\kappa\eta^{\theta\delta}\partial^\lambda \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)}\partial^\gamma \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)}\Big\}. \qquad (101)
\end{aligned}
$$

Aplicando as derivadas, utlizando o resultado de (77) para a integral no momento q e agrupando os termos, a expressão (101) torna-se:

$$\begin{aligned}\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p,p') &= i\int d^4x e^{i(p_1-p_2+q)x}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\int d^4x_1 e^{i(p-p_1)x_1}\\ &\int d^4x_2 e^{-i(p_2+p')x_2}\Big\{-\frac{1}{2}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\delta\gamma}(ip_{1\mu})(ip^{2\mu})\\ &+\frac{1}{4}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\nu\gamma}(ip_{2\nu})(ip^{1\delta})+\frac{1}{4}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\nu\delta}(ip_{1\nu})(ip^{2\gamma})\\ &+\frac{1}{2}\kappa\eta^{\theta\delta}\eta^{\lambda\gamma}(ip^{2\mu})(ip_{1\mu})+\frac{1}{2}\kappa\eta^{\theta\gamma}\eta^{\lambda\delta}(ip^{1\mu})(ip_{2\mu})\\ &+\frac{1}{2}\kappa\eta^{\gamma\delta}(ip^{2\lambda})(ip_{1\theta})+\frac{1}{2}\kappa\eta^{\gamma\delta}(ip^{1\lambda})(ip_{2\theta})-\frac{1}{2}\kappa\eta^{\lambda\delta}(ip_{2\gamma})(ip^{1\theta})\\ &-\frac{1}{2}\kappa\eta^{\lambda\gamma}(ip^{1\delta})(ip^{2\theta})-\frac{1}{2}\kappa\eta^{\theta\gamma}(ip^{2\lambda})(ip^{1\delta})\\ &-\frac{1}{2}\kappa\eta^{\theta\delta}(ip^{1\lambda})(ip^{2\gamma})\Big\}. \qquad (102)\end{aligned}$$

Utilizando o resultado das expressões (79) e (80) em (102) para realizar as integrações em x_1 e x_2, e em seguida, reorganizando os termos e resolvendo as integrais nos momentos, a expressão (102) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p,p') &= i\kappa\int d^4x e^{i(p-p'+q)x}\Big\{-\frac{1}{2}\eta^{\lambda\theta}\eta^{\delta\gamma}(p\cdot p')+\frac{1}{4}\eta^{\lambda\theta}\eta^{\nu\gamma}(p^\delta p'_\nu)\\ &+\frac{1}{4}\eta^{\lambda\theta}\eta^{\nu\delta}(p_\nu p'^\gamma)+\frac{1}{2}\eta^{\theta\delta}\eta^{\lambda\gamma}(p\cdot p')+\frac{1}{2}\eta^{\theta\gamma}\eta^{\lambda\delta}(p\cdot p')\\ &+\frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}(p'^\lambda p^\theta)+\frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}(p^\lambda p'^\theta)-\frac{1}{2}\eta^{\lambda\delta}(p'^\gamma p^\theta)-\frac{1}{2}\eta^{\lambda\gamma}(p^\delta p'^\theta)\\ &-\frac{1}{2}\eta^{\theta\gamma}(p'^\lambda p^\delta)-\frac{1}{2}\eta^{\theta\delta}(p^\lambda p'^\gamma)\Big\}. \qquad (103)\end{aligned}$$

Agora, contratindo alguns termos em (103) e utilizando o resultado da expressão (95), obtemos o resultado:

$$\begin{aligned}\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p,p') &= i\kappa(2\pi)^4\delta(p-p'+q)\Big\{\Big(-\frac{1}{2}\eta^{\lambda\theta}\eta^{\delta\gamma}+\frac{1}{2}\eta^{\theta\delta}\eta^{\lambda\gamma}+\frac{1}{2}\eta^{\theta\gamma}\eta^{\lambda\delta}\Big)(p\cdot p')\\ &+\frac{1}{4}\eta^{\lambda\theta}(p^\delta p'^\gamma)+\frac{1}{4}\eta^{\lambda\theta}(p^\delta p'^\gamma)+\frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}(p'^\lambda p^\theta)+\frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}(p^\lambda p'^\theta)\\ &-\frac{1}{2}\eta^{\lambda\delta}(p'^\gamma p^\theta)-\frac{1}{2}\eta^{\lambda\gamma}(p^\delta p'^\theta)-\frac{1}{2}\eta^{\theta\gamma}(p'^\lambda p^\delta)-\frac{1}{2}\eta^{\theta\delta}(p^\lambda p'^\gamma)\Big\}. \qquad (104)\end{aligned}$$

Agora escrevendo

$$P^{\lambda\theta(\gamma\delta)} = \frac{1}{2}\Big(\eta^{\theta\gamma}\eta^{\lambda\delta} + \eta^{\theta\delta}\eta^{\lambda\gamma} - \eta^{\lambda\theta}\eta^{\gamma\delta}\Big), \tag{105}$$

obtém-se o seguinte resultado para o vértice:

$$\begin{aligned}\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p,p') &= i\kappa(2\pi)^4\delta(p-p'+q)\Bigg\{P^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p\cdot p') + \frac{1}{2}\Bigg[\eta^{\lambda\theta}(p^\delta p'^\gamma) \\ &+\eta^{\gamma\delta}\Big(p^\theta p'^\lambda + p^\lambda p'^\theta\Big) - \Big[\eta^{\lambda\delta}(p'^\gamma p^\theta) + \eta^{\lambda\gamma}(p^\delta p'^\theta) + \eta^{\theta\gamma}(p^\delta p'^\lambda) \\ &+\eta^{\theta\delta}(p^\lambda p'^\gamma)\Big]\Bigg]\Bigg\},\end{aligned} \tag{106}$$

onde a função delta em (106) mostra a conservação dos momentos no vértice e o termo entre parênteses de $\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}$ indica os índices referentes aos fótons. Essa expressão pode ser vista em (3.19) e pctoricamente na Figura 3.4.

.4 Interação fóton-fóton-gráviton-gráviton

Da expressão (66), temos que o termo que contribui para esse vértice é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\kappa^2\Big(h^{\mu\alpha}h^{\nu\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(h^\delta_\gamma)(h^\gamma_\delta) - \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}h^{\nu\beta}(h^\delta_\delta) - \frac{1}{2}\eta^{\nu\beta}h^{\mu\alpha}(h^\delta_\delta) \\ &+\frac{1}{8}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(h^\delta_\delta)(h^\alpha_\alpha) + \eta^{\mu\alpha}h^\nu_\gamma h^{\beta\gamma} + \eta^{\nu\beta}h^\mu_\gamma h^{\alpha\gamma}\Big).\end{aligned} \tag{107}$$

Para obtermos a expessão para o vértice associada ao termo (107), basta procedermos como no caso dos vértices anteriores. Substituímos a expressão (107) na expressão (67), aplicamos as derivadas nos campos A e h e utilizamos as relações para as deltas de *Dirac* em termos dos momentos e aplicamos o resultado (86) para garantir a conservação do momento no vértice, obtendo assim

a expressão final para o mesmo. Tal expressão é dada por

$$\begin{aligned}
\tau^{\sigma\tau,\theta\delta,\rho\xi}(p,p') &= i\frac{\kappa^2}{4}\Big\{\eta^{\tau\sigma}\eta^{\gamma\theta}\eta^{\delta\xi}(p\cdot p') + \eta^{\tau\sigma}\eta^{\theta\xi}\eta^{\delta\rho}(p\cdot p') \\
&+\eta^{\delta\theta}\eta^{\tau\rho}\eta^{\sigma\xi}(p\cdot p') + \eta^{\delta\theta}\eta^{\tau\xi}\eta^{\sigma\rho}(p\cdot p') \\
&+2\eta^{\tau\theta}\eta^{\sigma\delta}\eta^{\rho\xi}(p\cdot p') - \eta^{\sigma\tau}\eta^{\delta\theta}\eta^{\rho\xi}(p\cdot p') \\
&-4\eta^{\sigma\delta}\eta^{\theta\rho}\eta^{\tau\xi}(p\cdot p') - 4\eta^{\sigma\delta}\eta^{\theta\xi}\eta^{\tau\rho}(p\cdot p') \\
&+\eta^{\rho\xi}\eta^{\sigma\tau}(p^{\delta}p'^{\theta}) + \eta^{\rho\xi}\eta^{\sigma\tau}(p^{\theta}p'^{\delta}) + \eta^{\rho\xi}\eta^{\delta\theta}(p^{\sigma}p'^{\tau}) \\
&+\eta^{\rho\xi}\eta^{\delta\theta}(p^{\tau}p'^{\sigma}) - \eta^{\sigma\tau}\eta^{\delta\xi}(p^{\rho}p'^{\theta}) - \eta^{\sigma\tau}\eta^{\delta\rho}(p^{\theta}p'^{\xi}) \\
&-\eta^{\delta\theta}\eta^{\sigma\xi}(p^{\rho}p'^{\tau}) - \eta^{\delta\theta}\eta^{\sigma\rho}(p^{\tau}p'^{\xi}) - \eta^{\sigma\tau}\eta^{\theta\rho}(p^{\delta}p'^{\xi}) \\
&-\eta^{\theta\xi}\eta^{\sigma\tau}(p^{\rho}p'^{\delta}) - \eta^{\delta\theta}\eta^{\rho\tau}(p^{\sigma}p'^{\xi}) - 2\eta^{\tau\theta}\eta^{\sigma\delta}(p^{\rho}p'^{\xi}) \\
&+\eta^{\delta\theta}\eta^{\sigma\tau}(p^{\rho}p'^{\xi}) - \eta^{\delta\theta}\eta^{\xi\tau}(p^{\rho}p'^{\sigma}) - 2\eta^{\delta\rho}\eta^{\theta\xi}(p^{\tau}p'^{\sigma}) \\
&-2\eta^{\delta\xi}\eta^{\theta\rho}(p^{\sigma}p'^{\tau}) - 2\eta^{\rho\sigma}\eta^{\xi\tau}(p^{\theta}p'^{\delta}) - 2\eta^{\sigma\xi}\eta^{\rho\tau}(p^{\delta}p'^{\theta}) \\
&+2\eta^{\rho\delta}\eta^{\xi\tau}(p^{\theta}p'^{\sigma}) + 2\eta^{\delta\xi}\eta^{\rho\tau}(p^{\sigma}p'^{\theta}) + 2\eta^{\rho\sigma}\eta^{\theta\xi}(p^{\tau}p'^{\delta}) \\
&+2\eta^{\sigma\xi}\eta^{\theta\rho}(p^{\delta}p'^{\tau}) + 4\eta^{\sigma\delta}\eta^{\theta\rho}(p^{\tau}p'^{\xi}) + 4\eta^{\sigma\delta}\eta^{\theta\xi}(p^{\rho}p'^{\tau}) \\
&+4\eta^{\sigma\delta}\eta^{\tau\rho}(p^{\theta}p'^{\xi}) + 4\eta^{\sigma\delta}\eta^{\tau\xi}(p^{\rho}p'^{\delta}) - 4\eta^{\sigma\delta}\eta^{\rho\xi}(p^{\tau}p'^{\theta}) \\
&-4\eta^{\sigma\delta}\eta^{\rho\xi}(p^{\theta}p'^{\tau})\Big\}. \qquad (108)
\end{aligned}$$

Para escrever a equação (108) de uma forma mais compacta, podemos fazer a seguinte escolha de variáveis: $\Omega^{\mu\nu} = p^{\mu}p'^{\nu}$ e $\tilde{\Omega}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}(p\cdot p') - \Omega^{\mu\nu}$. Assim, a equação (108) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
&V^{\sigma\tau\theta\delta\rho\xi}(p,p') = i\frac{\kappa^2}{4}\Big\{\eta^{\delta\theta}\eta^{\rho\sigma}\tilde{\Omega}^{\tau\xi} + 2\eta^{\tau\theta}\eta^{\sigma\delta}\tilde{\Omega}^{\rho\xi} + \eta^{\sigma\tau}\Big\{\eta^{\xi[\rho}\Omega^{\delta]\theta} + \eta^{\xi[\rho}\Omega^{\theta]\delta} \\
&-\eta^{\rho(\delta}\Omega^{\theta)\xi}\Big\} + \eta^{\delta\theta}\Big\{\eta^{\xi[\rho}\Omega^{\sigma]\tau} + \eta^{\xi[\rho}\Omega^{\tau]\sigma} + \eta^{\tau[\sigma}\Omega^{\rho]\xi}\Big\} + 2\Big\{\eta^{\xi[\sigma}\Omega^{\delta][\tau}\eta^{\theta]\rho} \\
&+\eta^{\xi[\tau}\Omega^{\theta][\sigma}\eta^{\delta]\rho}\Big\} + 4\eta^{\sigma\delta}\Big\{\eta^{\rho(\theta}\Omega^{\tau)\xi} + \eta^{\xi[\theta}\Omega^{\rho]\tau} + \eta^{\xi[\tau}\Omega^{\rho]\theta}\Big\} \\
&+(p\cdot p')\Big\{\eta^{\delta\theta}\eta^{\tau[\rho}\eta^{\sigma]\xi} + \eta^{\tau\sigma}\eta^{\theta(\rho}\eta^{\delta)\xi} - 4\eta^{\sigma\delta}\eta^{\theta(\rho}\eta^{\xi)\tau}\Big\}\Big\}, \qquad (109)
\end{aligned}$$

que a forma como é apresentada em (3.20), no Capítulo 3.

.5 Interações férmion-gráviton-gráviton e férmion-férmion-gráviton-gráviton

O procedimento para obtenção dos vértices para o modelo apresentado no Capítulo 5 (expressões ((5.9) e 5.10) são obtidas de maneira idêntica à apresentada anteriormente. Tomando a expressão (5.7) e substituindo na expressão (67), aplicando as derivadas nos campos fermiônicos e gravitacional (caso houver), obtemos os resultados mostrados pelas expressões (5.9) e (5.10).

Apêndice D - Tabela de Integrais

Apresentaremos nesse apêndice algumas integrais em $4D$ no espaço dos momentos que foram utilizadas nos cálculos desenvolvidos nos Capítulos 3 e 5. Essas integrais foram cálculadas seguindo as precrições da Regularização Implícita (RI).

$$\int_k \frac{k^2}{k^4(k+p)^2} = I_{log}(\lambda^2) + 2\tilde{b} - \tilde{b}\ln(-\frac{p^2}{\lambda^2}) \tag{110}$$

$$\int_k \frac{k^2 k^\alpha}{k^4(k+p)^2} = \frac{1}{2}p^\alpha \left[-I_{log}(\lambda^2) + a_1 - 2\tilde{b} + \tilde{b}\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right)\right] \tag{111}$$

$$\int_k \frac{k^\alpha k^\beta}{k^4(k+p)^2} = \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\left[I_{log}(\lambda^2) - a_1 + 2\tilde{b} - \tilde{b}\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right)\right] + \frac{1}{2}\tilde{b}\frac{p^\alpha p^\beta}{p^2} \tag{112}$$

$$\int_k \frac{k^\mu k^\alpha k^\beta}{k^4(k+p)^2} = \frac{1}{12}p^{\{\mu}\eta^{\alpha\beta\}}\left[-I_{log}(\lambda^2) + a_3 + \tilde{b}\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{5}{3}\tilde{b}\right] - \frac{1}{3}\tilde{b}\frac{p^\mu p^\alpha p^\beta}{p^2} \tag{113}$$

$$\begin{aligned}\int_k \frac{k^2 k^\alpha k^\beta}{k^4(k+p)^2} &= -\frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}p^2[I_{log}(\lambda^2) - a_1] + \frac{1}{6}(p^2\eta^{\alpha\beta} + 2p^\alpha p^\beta)[I_{log}(\lambda^2) - a_3] + \\ &+\frac{1}{2}\tilde{b}p^2\eta^{\alpha\beta}\left[\frac{1}{6}\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{4}{9}\right] - \tilde{b}p^\alpha p^\beta\left[\frac{1}{3}\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{13}{18}\right]\end{aligned} \tag{114}$$

$$\int_k \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta}{k^4(k+p)^2} = -\frac{1}{24}\eta^{\{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta\}}p^2[I_{log}(\lambda^2) - a_3] + \frac{1}{48}(p^2\eta^{\{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu\}} + p^{\{\alpha}p^\beta\eta^{\mu\nu\}})$$
$$\times[I_{log}(\lambda^2) - a_3 - 24a_4] + \frac{1}{8}\tilde{b}p^2\eta^{\{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta\}}\left[\frac{1}{6}\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{4}{9}\right]$$
$$-\frac{1}{72}\tilde{b}p^{\{\alpha}p^\beta\eta^{\mu\nu\}}\left[\frac{3}{2}\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{5}{2}\right] + \frac{1}{4}\tilde{b}\frac{p^\alpha p^\beta p^\mu p^\nu}{p^2} \quad (115)$$

$$\int_k \frac{k^2 k^\mu k^\alpha k^\beta}{(k^4(k+p)^2} = \frac{1}{6}p^{\{\mu}\eta^{\alpha\beta\}}p^2[I_{log}(\lambda^2) - a_3] - \frac{1}{8}\left(p^2p^{\{\mu}\eta^{\alpha\beta\}} + 2p^\alpha p^\beta p^\mu\right)$$
$$\times[I_{log}(\lambda^2) - a_3 - 24a_4] - \frac{1}{4}\tilde{b}p^2p^{\{\mu}\eta^{\alpha\beta\}}\left[\frac{1}{6}\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{4}{9}\right]$$
$$+\tilde{b}p^\alpha p^\beta p^\mu\left[\frac{1}{4}\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{7}{12}\right] \quad (116)$$

$$\int_k \frac{1}{k^2(k-p)^2} = I_{log}(\lambda^2) - b\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + 2b \quad (117)$$

$$\int_k \frac{k_\mu}{k^2(k-p)^2} = \frac{p_\mu}{2}\left[I_{log}(\lambda^2) - b\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + 2b\right] \quad (118)$$

$$\int_k \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k-p)^2} = \frac{1}{3}p_\mu p_\nu\left[I_{log}(\lambda^2) - b\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + \frac{11}{6}b\right] - \quad (119)$$
$$- \frac{1}{6}p^2 g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}I_{log}(\lambda^2) - \frac{1}{2}b\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + \frac{2}{3}b\right] \quad (120)$$

$$\int_k \frac{k_\mu}{k^4(k-p)^2} = b\frac{p_\mu}{p^2} \quad (121)$$

$$\int_k \frac{k_\mu k_\nu}{k^4(k-p)^2} = \frac{g_\mu\nu}{4}\left(I_{log}(\lambda^2) - b\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + 2b\right) + \frac{b}{2}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (122)$$

onde nas equações de (110) a (122), λ representa a escala do grupo de renormalização e nas equações de (110) a (116), temos que $\tilde{b} \equiv \frac{i}{(4\pi)^2}$

Bibliografia

[1] t Hooft, G. and Veltman, M. One-loop divergencies in the theory of gravitation. In *Annales de L'Institut Henri Poincare Section Physique Theorique*, volume 20, 69–94, (1974). 1

[2] Deser, S. and van Nieuwenhuizen, P. One-loop divergences of quantized einstein-maxwell fields. *Physical Review* **D10**, 401–410, Jul (1974). 1, 4

[3] Weinberg, S. Phenomenological lagrangians. *Physica* **A96**(1–2), 327 – 340 (1979). 1

[4] Donoghue, J. General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections. *Physical Review* **D50**(6), 3874–3888 (1994). 1, 11, 76

[5] Stelle, K. S. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Physical Review* **D16**, 953–969, Aug (1977). 2, 4

[6] Julve, J. and Tonin, M. Quantum gravity with higher derivative terms. *Il Nuovo Cimento B Series 11* **46**(1), 137–152 (1978). 2, 4

[7] Perez, A. Regularization ambiguities in loop quantum gravity. *Physical Review* **D73**, 044007, Feb (2006). 2

[8] Polchinski, J. *String Theory. Vol.1: An introduction to the bosonic string.* Cambridge, UK: Univ. Pr., (1998). 2

[9] D'Hoker, Eric and Phong, D. H. Two loop superstrings. I. Main formulas Physics Letters **B529**, 241-255 (2002). 2

[10] Smolin, Lee How far are we from the quantum theory? [Arxiv:hep-th/0303185v2]. 2, 3

[11] Smolin, Lee An invitation to Loop Quantum Gravity [Arxiv:hep-th/0408048v3]. 3

[12] Smolin, Lee The case for background dependence [Arxiv:hep-th/0507235v1]. 3

[13] Rickles, D. Who's Afraid of Background Independence? [Preprint] URL: http://philsci-archive.pitt.edu/id/eprint/4223. 3

[14] Carlo Rovelli *Quantum Gravity.* Cambridge, UK: Univ. Pr., (2004). 3

[15] Robinson, S. P. and Wilczek, F. Gravitational correction to running of gauge couplings. *Physical Review Letters* **96**, 231601, (2006). 4, 11

[16] Ebert, D., Plefka, J., and Rodigast, A. Absence of gravitational contributions to the running yang-mills coupling. *Physics Letters* **B660**(5), 579 – 582 (2008). 4, 12

[17] Pietrykowski, A. Gauge dependence of gravitational correction to running of gauge couplings. *Physical Review Letters* **98**(6), 61801 (2007). 4, 12, 33

[18] Folkerts, S., Litim, D. F., and Pawlowski, J. M. Asymptotic freedom of yang–mills theory with gravity. *Physics Letters* **B709**(3), 234 – 241 (2012). 4, 13, 61

[19] Toms, D. J. Quantum gravitational contributions to quantum electrodynamics. *Nature* **468**(7320), 56–59 (2010). 4, 12, 31, 61

[20] John Ellis, Nick E. Mavromatos Does gravity correct gauge couplings? *Nature* **479**, (2011). 4, 13, 62

[21] Daum, J.-E., Harst, U., and Reuter, M. Running gauge coupling in asymptotically safe quantum gravity. *Journal of High Energy Physics* **2010**(1), 1–23 (2010). 4, 33

[22] Harst, U. and Reuter, M. QED coupled to QEG. *Journal of High Energy Physics* **2011**(5), 1–20 (2011). 4, 33

[23] Anber, M. M., Donoghue, J. F., and El-Houssieny, M. Running couplings and operator mixing in the gravitational corrections to coupling constants. *Physical Review* **D83**, 124003, Jun (2011). 4, 13, 32, 33

[24] Anber, M. M. and Donoghue, J. F. Running of the gravitational constant. *Physical Review* **D85**, 104016, May (2012). 4, 13, 32, 33, 62

[25] Yong, T. and Yue-Liang, W. Quantum gravitational contributions to gauge field theories. *Communications in Theoretical Physics* **57**(4), 629 (2012). 4, 13, 61

[26] John Ellis, Nick E. Mavromatos On the interpretation of gravitational corrections to gauge couplings *Physics Letters* **B711**, 139–142 (2012). 4, 13

[27] Toms, D. J. Quantum gravity and charge renormalization. *Physical Review* **D76** 045015 (2007). 4, 12

[28] Toms, D. J. Cosmological Constant and Quantum Gravitational Corrections to the Running Fine Structure Constant. *Physical Review Letters* **101** 131301 (2008). 4, 12

[29] Toms, D. J. Quantum gravity, gauge coupling constants, and the cosmological constant. *Physical Review* **D80** 064040 (2009). 4, 12

[30] Kostelecký, V. A. e Samuel, S. Spontaneous Breaking of Lorentz symmetry in string theory. *Physical Review* **D39**, 683 (1989). 4, 35, 36

[31] Colladay, D. e Kostelecký, V. A. CPT violation and the standard model *Physical Review* **D55**, 6760 (1997).

[32] Colladay, D. e Kostelecký, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. *Physical Review* **D58**, 116002, Oct (1998). 5, 36

[33] Coleman, S. e Glashow, S. L. Cosmic ray and neutrino tests of special relativity. *Physics Letters* **B405**, 249 (1997).

[34] Coleman, S. e Glashow, S. L. High-energy tests of Lorentz invariance. *Physical Review* **D59**, 116008 (1999).

[35] Carroll, S. M., Field, G. B. e Jackiw, R. Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics. *Physical Review* **D41**, 1231-1240 (1990). 5, 35, 36

[36] Goldhaber, M. e Trimble, V. Limits on the chirality of interstellar and intergalactic space. *Journal of Astrophysics and Astronomy* **17**, 17-21 (1996). 5, 36

[37] Jackiw, R. e Kostelecký, V. A. Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Electrodynamics. *Physical Review Letters* **82**, 3572 (1999). 5, 36, 44

[38] Perez-Victoria, M. Exact Calculation of the Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in QED *Physical Review Letters* **83**, 2518 (1999). 5

[39] Perez-Victoria, M. Physical (ir)relevance of ambiguities to Lorentz and CPT violation in QED. *Journal of High Energy Physics* **0104**, 032 (2001). 5

[40] J.M. Chung and P. Oh, Lorentz and CPT violating Chern-Simons term in the derivative expansion of QED *Physical Review* **D60**, 067702 (1999). 5

[41] Siegel, W. Supersymmetric dimensional regularization via dimensional reduction. *Physics Letters* **B84**(2), 193 – 196 (1979). 5, 36

[42] Siegel, W. Inconsistency of supersymmetric dimensional regularization. *Physics Letters* **B94**(1), 37 – 40 (1980). 5, 36

[43] Tsai, E. Gauge invariant treatment of γ_5 in the scheme of 't Hooft and Veltman. *Physical Review* **D83**, 025020 (2011). 5, 36

[44] Tsai, E. Maintaining gauge symmetry in renormalizing chiral gauge theories. *Physical Review* **D83**, 065011 (2011). 5, 36

[45] Jackiw, R. e Pi, S. -Y. Chern-Simons modification of general relativity. *Physical Review* **D68**, 104012 (2003). 4, 5, 35, 36, 37

[46] Jackiw, R. 4-Dimensional Einstein Theory Extended by a 3-Dimensional Chern-Simons Term. [ArXiv:gr-qc/0310115] 5

[47] Mariz, T., Nascimento, J. R., Passos, E., and Ribeiro, R. F. Chern-simons-like action induced radiatively in general relativity. *Physical Review* **D70**, 024014, Jul (2004). 5, 36, 37, 56, 57, 62

[48] Mariz, T., Nascimento, J., Petrov, A., Santos, L., and da Silva, A. Lorentz violation and the proper-time method. *Physics Letters* **B661**(4), 312 – 318 (2008). 5, 36, 37, 56, 62

[49] Gomes, M., Mariz, T., Nascimento, J. R., Passos, E., Petrov, A. Y., and da Silva, A. J. Ambiguities in the effective action in lorentz-violating gravity. *Physical Review* **D78**, 025029, Jul (2008). 5, 36, 56, 62

[50] Scarpelli, A. P. B., Sampaio, M., Nemes, M. C., Hiller, B. Gauge invariance and the CPT and Lorentz violating induced Chern–Simons-like term in extended QED. *European Physical Journal* **C56**, 571-578 (2008). 6, 36, 41, 44

[51] BATTISTEL, O. A., MOTA, A. L., and NEMES, M. C. Consistency conditions for 4-d regularizations. *Modern Physics Letters* **A13**(20), 1597–1610 (1998). 28, 67

[52] Scarpelli, A. P. B., Sampaio, M., Nemes, M. C., and Hiller, B. Chiral anomaly and CPT invariance in an implicit momentum space regularization framework. *Physical Review* **D64**, 046013, Jul (2001). 14, 67

[53] Cherchiglia, A., Sampaio, M., and Nemes, M. Systematizing implicit regularization for multi-Loop Feynman diagrams. *PoS* **ICFI2010**, 016 (2010). 14, 67

[54] Ferreira, L. C., Cherchiglia, A. L., Hiller, B., Sampaio, M., and Nemes, M. C. Momentum routing invariance in Feynman diagrams and quantum

symmetry breakings. *Physical Review* **D86**, 025016, Jul (2012). 14, 15, 16, 32, 38, 42, 57, 58

[55] Scarpelli, A. P. B., Sampaio, M., and Nemes, M. C. Consistency relations for an implicit n-dimensional regularization scheme. *Phys. Rev.* **D63**, 046004, Jan (2001). 14, 67

[56] Dias, E., Baeta Scarpelli, A., Brito, L., Sampaio, M., and Nemes, M. Implicit regularization beyond one loop order: Gauge field theories. *European Physics Journal* **C55**, 667–681 (2008). 14, 67

[57] Souza, L. A., Sampaio, M., and Nemes, M. Arbitrary parameters in implicit regularization and democracy within perturbative description of 2-dimensional gravitational anomalies. *Physics Letters***B632**, 717–724 (2006). 14

[58] Carneiro, D. E., Baeta Scarpelli, A., Sampaio, M., and Nemes, M. Consistent momentum space regularization / renormalization of supersymmetric quantum field theories: The Three loop beta function for the Wess-Zumino model. *JHEP* **0312**, 044 (2003). 14, 28, 67

[59] Battistel, O. A. and Nemes, M. C. Consistency in regularizations of the gauged njl model at the one loop level. *Physical Review* **D59**, 055010, Feb (1999). 6, 14, 28

[60] JACKIW, R. When radiative corrections are finite, but undetermined. *International Journal of Modern Physics* **B14**(19n20), 2011–2021 (2000). 6, 15, 36, 37, 38, 39, 40, 55

[61] Ryder, L. H. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, (2006). 24, 68

[62] Bonneau, G. Lorentz and CPT violations in QED: A Short comment on recent controversies. [hep-th/0109105]. 35

[63] Adam, C. e Klinkhamer, F. R. Causality and radiatively induced CPT violation. *Physics Letters* **B513**, 245-250 (2001).

[64] Altschul, B. Failure of gauge invariance in the nonperturbative formulation of massless Lorentz-violating QED. *Physical Review* **D69**, 125009 (2004). 41, 44

[65] Altschul, B. Gauge invariance and the Pauli-Villars regulator in Lorentz- and CPT-violating electrodynamics. *Physical Review* **D70**, 101701 (2004). 44, 45

[66] Lehnert, R. and Potting, R. Vacuum Čerenkov Radiation. *Physical Review Letters* **93**, 110402 (2004).

[67] Belich, H., Costa-Soares, T., Ferreira Jr., M. M. and Helayel-Neto, J. A. Non-minimal coupling to a Lorentz-violating background and topological implications. *European Physical Journal* **C41**, 421 (2005).

[68] Belich, H., Costa-Soares, T., Ferreira Jr., M. M. and Helayel-Neto, J. A., Classical solutions in a Lorentz violating scenario of Maxwell-Chern-Simons-Proca electrodynamics *European Physical Journal* **C42**, 127 (2005).

[69] Belich, H., Costa-Soares, T., Ferreira Jr., M. M., Helayel-Neto, J. A., and Mouchereck, F. M. O. Lorentz-violating corrections on the hydrogen spectrum induced by a nonminimal coupling. *Physical Review* **D74**, 065009 (2006).

[70] Belich, H, Colatto, L. P., Costa-Soares, T., Helayel-Neto, J. A., and Orlando, M. T. D. Magnetic moment generation from non-minimal couplings in a scenario with Lorentz-symmetry violation *European Physical Journal* **C62**, 425 (2009).

[71] Adam, C. and F. R. Klinkhamer, Causality and CPT violation from an Abelian Chern–Simons-like term Nuclear Physics **B607**, 247 (2001).

[72] Adam, C. and F. R. Klinkhamer, Photon decay in a CPT-violating extension of quantum electrodynamics Nuclear Physics **B657**, 214 (2003).

[73] Casana, R., Ferreira Jr., M. M., Gomes, A. R. and Pinheiro, P. R. D. Gauge propagator and physical consistency of the CPT-even part of the standard model extension. *Physical Review* **D80**, 125040 (2009).

[74] Kostelecky, V. A. and Potting, R. Gravity from spontaneous Lorentz violation *Physical Review* **D79**, (2009) 065018;

[75] Bailey, Q. G. Lorentz-violating gravitoelectromagnetism *Physical Review* **D82**, 065012 (2010).

[76] Brito, L. C. T., Fargnoli, H. G., e Scarpelli, A. P. B. Aspects of quantum corrections in a Lorentz-violating extension of the Abelian Higgs model. *Physical Review* **D87**, 125023 (2013).

[77] Shan-quan Lan, Feng Wu, *Phys. Rev.* ***D*87**, 125022 (2013); Shan-quan Lan, Feng Wu, *Electrodynamics Modified by Some Dimension-five Lorentz Violating Interactions: Radiative Corrections*, [arXiv:1312.1505].

[78] Kostelecký, V. A. e Mewes, M. Fermions with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *Physical Review* **D88**, 096006 (2013).

[79] Cambiaso, M., Lehnert, R. e Potting, R. Asymptotic states and renormalization in Lorentz-violating quantum field theory. [arXiv:1401.7317]

[80] Aoki, Hajime and Iso, Satoshi Revisiting the naturalness problem: Who is afraid of quadratic divergences?, *Physical Review* **D86**, 013001, (2012) 10

[81] Ernest Ma Vanishing Higgs one-loop quadratic divergence in the scotogenic model and beyond, *Physics Letters* **B732**, 167 - 168, (2014)

[82] ATLAS-CONF-2013-034 Combined coupling measurements of the Higgs-like boson with the ATLAS detector using up to 25 fb^{-1} of proton-proton collision data *Atlas Notes*, (2013) 10

[83] ATLAS-CONF-2013-005 Combination of standard model Higgs boson searches and measurements of the properties of the new boson with a mass near 125 GeV *Atlas Notes*, (2013) 10

[84] Langacker, P. Grand unified theories and proton decay *Physics Reports* **72**, 185-385, (1981) 10

[85] Guildener, E. Gauge-symmetry hierarchies *Physical Review* **D14**, 1667, (1976) 10

[86] Politzer, H. David Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Physical Review Letters***30**, 1346-1349, (1973) 11

[87] Gross, David J., Wilczek, F. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories *Physical Review Letters* **30**, 1343-1346, (1973) 11

[88] Veltman, M. The infrared-ultraviolet connection *Acta Physica Polonica* **B12**, 437, (1981)

[89] T. Varin, D. Davesne, M. Oertel, M. Urbanc How to preserve symmetries with cut-off regularized integrals? *Nuclear Physics* **A791**, 422–433 (2007). 12

[90] Felipe, J., Brito, L., Sampaio, M., and Nemes, M. Quantum gravitational contributions to the beta function of quantum electrodynamics. *Physics Letters* **B700**(1), 86 – 89 (2011). vii, 14, 18, 32

[91] FELIPE, J. C. C., CABRAL, L. A., BRITO, L. C. T., SAMPAIO, M., and NEMES, M. C. Ambiguities in the gravitational correction of quantum electrodynamics. *Modern Physics Letters* **A28** (18), 1350078 (2013). vii, 14, 18, 61, 62

[92] Toms, D. J. Quadratic divergences and quantum gravitational contributions to gauge coupling constants. *Physical Review* **D84**, 084016, Oct (2011). 32, 33

[93] Nielsen, N. K. The Maxwell–Einstein system, Ward identities and the Vilkovisky construction. *Annals of Physics* **327** 861-892 (2012). 33

[94] Bolware, David G. Gauge dependence of the effective action. *Physical Review* **D33** 861-892 (1981). 33

[95] Wu, Feng and Zhong, Ming The Lee–Wick fields out of gravity. *Physics Letters* **12** 1401 (1995) 33

[96] Kalmykov, M. Yu Gauge and parametrization dependencies of the one-loop counterterms in Einstein gravity. *Classical and Quantum Gravity* **B659** 694-697 (2008) 33

[97] Grushin, A. G. Consequences of a condensed matter realization of Lorentz-violating QED inWeyl semi-metals. *Physical Review* **D86**, 045001 (2012). 37

[98] Lima, G. G., Cherchiglia, A. L., Cabral, L. A. and Sampaio, M. Conductivity of Coulomb interacting massless Dirac particles in graphene: Regularization dependent parameters and symmetry constraints. *Europhysics Letters*, **104**, 27002 (2013). 39, 40

[99] Jackiw, R. and Rajaraman, R. Vector-Meson Mass Generation by Chiral Anomalies. *Physical Review Letters*, **54**, 1219 (1985). 40

[100] Felipe, J. C. C., Vieria, A. R., Cherchiglia, A. L., Scarpelli, A. P. B., and Sampaio, M. Arbitrariness in the gravitational Chern-Simons-like term induced radiatively *Physical Review* **D89**, 105034 (2014). vii, 46

[101] Peskin, Michael E. and Schroeder, Daniel V. An Introduction to Quantum Field Theory. *Perseus Books Group Massachusetts* (1995). 53, 68

[102] Toms, D. J. and Moss, I. Invariants of the heat equation for non-minimal operators *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **47**, 215401 (2014). 63, 80

[103] Bjerrum-Bohr, N. Quantum gravity as an Effective Field Theory. *Master's thesis, University of Copenhagen - The Niels Bohr Institute, Copenhagen*, (2001). 82

[104] Pérez-Victoria, M. Constrained differential renormalization of Yang-Mills theories *Physics Letters* **B442**, 315-325 (1998). 67

[105] Toms, David J. Local Momentum Space Methods in Quantum Field Theory. *To be published* 63, 80

[106] Parker, Leonard E. and Toms, David J. Quantum Field Theory in Cuverd Spacetime. *Cambridge University Press*, (2009). 63, 64

[107] Bunch, T. S. and Parker, L. Feynman propagator in curved spacetime: A momentum-space representation *Physical Review* **D20**, 2499 (1979). 63

[108] Petrov, A. Z. Einstein Spaces. *Pergamon Press*, (1969). 64

[109] Ball, Jonathan L., Fuentes-Schuller, I. and Schuller, Frederic Entanglement in a expanding spacetime. *Physics Letters* **A76**, 550-554 (2006). 65

[110] Fuentes, I. Lecture Series on Relativistic Quantum Information, (2010). 65

[111] Grushin, Adolfo G. Consequences of a condensed matter realization of Lorentz-violation QED in Weyl semi-metals realization. *Physical Review* **D86**, 045001 (2012). 65