Aplicações de Métodos Perturbativos de TQC em Modelos de Baixa Dimensionalidade e Matéria Condensada

Gustavo Gazzola de Lima

Fevereiro de 2014

Aplicações de Métodos Perturbativos de TQC em Modelos de Baixa Dimensionalidade e Matéria Condensada

Gustavo Gazzola de Lima
Orientadora: Profa. Dra. Maria Carolina Nemes
Co-orientador: Prof. Dr. Marcos Donizetti Rodrigues Sampaio
Co-orientador: Prof. Dr. Luis Antônio Cabral

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de doutor em Física.

Fevereiro 2014

Dedicado a Maria Carolina Nemes
(in memoriam)

Agradecimentos

Em especial à Dra. Maria Carolina Nemes, a quem eu devo tantos agradecimentos que mal consigo expressar em palavras. Eu lhe agradeço mais do que pelo conhecimento passado e por todas as oportunidades profissionais criadas, mas por todo carinho e humanismo que fundamentou nossa relação desde 2004. Espero que você seja um exemplo para todos que interagiram com você por todos esses anos. Muito obrigado, de coração.

Agradeço também aos meus co-orientadores Dr. Marcos Sampaio e Dr. Luis Cabral pelo aprendizado e pelo eterno sentimento de colaboração.

À Dra. Brigitte Hiller, pela oportunidade, pelo aprendizado e pela amizade que pudemos estabelecer em Coimbra.

À minha família, pelo suporte incessante. Em especial à minha esposa Carla Soares pelo carinho e pelo momentos únicos que só ela pode criar.

Aos meus colegas de doutorado Helvécio, Adriano, Jean, Alexandre, Yuri, Joilson, Artur, Marcelo e Luísa, pela amizade e pelas colaborações.

Aos eternos companheiros Tutu, Croquete, Farofa e Pequi.

À Secretária e Coordenação de Pós-Graduação de Física da UFMG, pela constante dedicação.

À FAPEMIG, pelo suporte financeiro.

Resumo

Dado o sucesso do método de Regularização Implícita em separar e analisar as arbitrariedades espúrias, vindas do tratamento de integrais divergentes, nos propusemos a aplicá-lo em três casos distintos. No primeiro, calculamos a correção de Coulomb $\mathcal{C}$ para a condutividade a.c. de partículas de Dirac sem massa interagentes no grafeno, no limite sem colisão, utilizando a abordagem do tensor polarização. As arbitrariedades são fixadas somente pela invariância de rotação espacial $O(2)$ do modelo, que equivale à transversalidade do tensor de polarização. Consequentemente, $\mathcal{C}$ é determinada $(19-6\pi)/12$ neste modelo efetivo. No segundo caso, estudamos a QED$_3$, e as consequências da invariância de rotulação dos momentos na quebra da simetria da paridade da teoria. No terceiro caso, consideramos um modelo efetivo constituído pela QED$_4$ usual com a adição de uma interação não-mínima, que viola Lorentz (proporcional a um 4-vector b_μ fixo). Mostramos que a invariância de calibre da QED usual, considerada como um limite do modelo para $b_\mu \to 0$, desempenha um papel importante na discussão dos termos que violam Lorentz e que são induzidos radiativamente em ordem de 1-loop.

Abstract

Given the Implicit Regularization's success to separate and analyse spurious arbitrariness, which arise while treating divergent integrals, we proposed to apply this method in three distinct cases. In the first, we compute the Coulomb correction $\mathcal{C}$ to the a.c. conductivity of interacting massless Dirac particles in graphene using the polarization tensor approach. Arbitrary parameters are fixed on physical grounds exploiting only spatial $O(2)$ rotational invariance of the model which amounts to transversality of the polarization tensor. Consequently $\mathcal{C}$ is unequivocally determined to be $(19-6\pi)/12$ within this effective model. In the second case, we study the QED$_3$ and the consequences of momentum routing invariance for the violation of the theory's parity symmetry. In the third case, we consider an effective model formed by usual QED$_4$ with the addition of a nonminimal Lorentz violating interaction (proportional to a fixed 4-vector b_μ). We show that gauge invariance from usual QED, considered as a limit of the model for $b_\mu \to 0$, plays an important role in the discussion of the radiatively induced Lorentz violating terms at one-loop order.

Declaração

Essa tese é resultado das pesquisas feitas entre Março de 2010 e Fevereiro de 2014. O trabalho presente nesta tese não foi submetida em cumprimento de nenhum outro grau ou qualificação profissional.

Não faço nenhuma reivindicação de originalidade nos capítulos 1 e 2. O capítulo 3 foi fruto de uma colaboração minha com a Dra. Maria Carolina Nemes, Dr. Marcos Sampaio, Dr. Luis Cabral e o Me. Adriano Cherchiglia. Esta colaboração resultou na publicação [53]. O capítulo 4 foi desenvolvido durante o período de sanduíche do meu doutoramento na Universidade de Coimbra, em colaboração com a Dra. Brigitte Hiller. O capítulo 5 é fruto de uma colaboração minha com o Dr. Antônio Scarpelli, Dr. Helvécio Fargnoli, Dra. Maria Carolina Nemes e o Dr. Marcos Sampaio. Essa colaboração resultou na publicação [34]. As contas apresentadas no apêndice A são referentes aos extensos cálculos feitos em parceria minha com o Dr. Luis Cabral e o Me. Adriano Cherchiglia.

Sumário

“If there is a Universal and supreme Conscience I am an idea in it.
After I have died God will go on remembering me,
and to be remembered by God,
to have my consciousness sustained by the Supreme Conscience,
is no that, perhaps, to be immortal?”

Mighel de Unamuno[1]

[1] *Tragic Sense of Life* trans. J.E. Crawford Flitch, Dover, New York, 1954.

1 Introdução

Quando se utilizam métodos perturbativos em Teoria Quântica de Campos, frequentemente é necessário usar um método de regularização para lidar com divergências inerentes à análise das teorias. Alguns dos métodos mais comuns encontrados na literatura incluem a Regularização Dimensional, introduzida por Giambiagi e Bollini em [1, 2] e por 't Hooft e Veltman em [3], no qual os cálculos são feitos em $d + \epsilon$ dimensões e ao final é tomado o limite de $\epsilon \to 0$; Regularização Pauli-Villars, introduzida por Pauli e Villars em [4] que, a grosso modo, consiste em trocar o propagador $1/k^2 \to 1/k^2 - 1/(k^2 + M^2)$ e depois tomar o limite de $M \to \infty$; e a Regularização Cutoff que trabalha com a simples ideia de impor um limite superior nas integrais divergentes no espaço de momentos. Apesar de evitarmos escolher um destes como o melhor método, sempre nos confrontamos com algum nível de comparação, especialmente se os métodos de regularização computam diferentes valores para a mesma grandeza física. A razão dessa discrepância, encontrada com frequência na literatura, é devido ao modo que cada método lida com as divergências contidas nos cálculos. Essas diferenças acabam gerando um certo desconforto, e, por isso, seria interessante achar um método que fosse capaz de lidar com as divergências sem regularizar, criando uma estrutura independente de regularização.

O grupo de Teoria Quântica de campos de BH, sob coordenação da Profa. Dra. Maria Carolina Nemes e do Prof. Marcos Donizeti Sampio, criou em conjunto com o Prof. Orimar Battistel, no final da década de 90, um método com essa característica [5] chamado Regularização Implícita. Para explicar a ideia por trás do método, usamos as ideias discutidas em [19]: quando lidamos com um modelo onde as contribuições quânticas radiativas são finitas, há casos onde algumas dessas correções não podem ser determinadas pela teoria. Estas correções são arbitrariedades carregadas pelos cálculo da teoria, e é por causa destas correções deles que diferentes métodos de regularização são capazes de extrair diferentes valores. Então, como é sugerido pelo mesmo autor, o processo ideal é deixar estes termos, finitos mas indefinidos, sem calcular até o final das contas do modelo e deixar o encargo da definição dessas arbitrariedades para os experimentos ou simetrias físicas. É exatamente isso que conseguimos fazer com o método de Regularização Implícita, que está explicitado no capítulo 2.

Considerando o espaço crescente de pesquisas de métodos de TQC aplicadas ao estudo de materiais nanoestruturados, resolvemos estudar uma discrepância encontrada na literatura [6, 8, 13, 14, 15] nos valores da correção quântica da condutividade a.c. do grafeno. Este cálculo, apresentado no capítulo 3, é feito em um modelo baseado em teoria quântica de campos construído em 2+1 dimensões, mas que do ponto de vista prático acaba se tornando um estudo do método em 2 dimensões euclidianas, que a principio não tem nenhuma ambiguidade quanto a manipulação sobre sua dimensionalidade.

Apesar de não ser necessário no caso de 2 dimensões euclidianas, uma característica importante do método de Regularização Implícita é que ela opera na dimensão física do modelo. Isto significa que não há nenhuma continuação analítica ou manipulação dimensional. Como consequência, o método acaba se tornando um bom candidato para modelos sensíveis à dimensão, como por exemplo as teorias quirais e topológicas. Assim, aplicamos no capítulo 4 o método no estudo da QED_3, que é uma teoria topológica de Chern-Simons. A Regularização Dimensional, que é uma perfeita candidata para QED_4, falha devido à continuação analítica da álgebra do tensor antissimétrico de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ que não é bem definida em dimensões não-inteiras. Nosso interesse era explorar as consequências da simetria da invariância de rotulação dos momentos na anomalia de paridade e nas arbitrariedades dos cálculos da teoria. Uma motivação adicional para este estudo é devido ao uso das propriedades topológicas da QED_3 para construção de modelos de Isolantes Topológicos em Matéria Condensada.

Outro cenário interessante no qual destaca a importância de se atuar na dimensão física do modelo é a QED_4 estendida, que incluí termos tipo aether capazes de gerar radiativamente termos tipo Chern-Simons. Estes tipos de termo não estão presentes na QED_4 convencional, e foram mostrados [68, 69] ser capazes de produzir resultados ambíguos perturbativos para o Tensor de Polarização do Vácuo. Por isso, aplicamos o método de regularização implícita para entendermos a fonte de tais ambiguidades e se são possíveis de serem resolvidas baseando-se na invariância de gauge da teoria.

Os resultados deste estudo estão presentes no capítulo 5.

Em resumo, esta tese se divide da seguinte maneira: no capítulo 2 apresentamos o método da Regularização Implícita e como analisar os parâmetros arbitrários dos modelos; no capítulo 3 aplicamos o método de regularização para resolver as ambiguidades surgidas na correção quântica para a condutividade a.c. do grafeno; no capítulo 4 analisamos os efeitos diretos da invariância de rotulação de momentos em diagramas de Feynman na geração da anomalia da paridade em QED_3; no capítulo 5, utilizamos a Regularização Implícita em uma teoria estendida da QED_4 para prevermos sobre a produção de termos que violam a simetria de Lorentz; no capítulo 6 tecemos comentários gerais, conclusões e perspectivas futuras sobre as aplicações estudadas. Adicionalmente, o apêndice A serve de suporte para os cálculos mais extensos do capítulo 3.

2 Sobre a Regularização Implícita

A Regularização Implícita é um método no espaço de momentos que opera na dimensão física do espaço-tempo do modelo estudado. Ela assume a existência de uma regularização implícita (*e.g.* um cutoff de momento) para uma amplitude geral de Feynman em n-loop. Essa consideração é somente para podermos aplicar a identidade matemática

$$\frac{1}{[(k+p)^2-\mu^2]} = \frac{1}{(k^2-\mu^2)} - \frac{(p^2+2p\cdot k)}{(k^2-\mu^2)[(k+p)^2-\mu^2]}\,, \tag{2.1}$$

nos propagadores que demonstram seu conteúdo divergente como uma integral básica de divergência. Esse tipo de integral recebe esse nome pois é escrita somente em termos dos momentos internos. Como sua definição matemática depende do grau de divergência, podemos dar um exemplo de uma integral básica logaritmicamente divergente em n dimensões de Minkowski:

$$I_{log}(\mu^2) \equiv \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2-\mu^2)^{n/2}}. \tag{2.2}$$

Quando uma amplitude de n-loop é considerada, podemos reduzir os $n-1$ momentos internos pela subtração criteriosa das subdivergências. Uma integral básica de divergência pode ser absorvida na definição das constantes de renormalização sem ser calculada explicitamente, como veremos na seção 2.5. As derivadas dessas integrais em relação a uma escala arbitrária de massa são também exprimíveis em termos das próprias integrais básicas de divergência, mas possuem um grau de divergência superficial menor. Dessa forma, as funções do grupo de renormalização podem ser consistentemente avaliadas dentro desse método. A estratégia é compatível com a versão local da "BPHZ forest formula", que se baseia na subtração dos contratermos locais [39] e, por isso, concorda com a localidade, invariância de Lorentz e unitariedade. Podemos exemplificar tomando o caso onde o comportamento ultravioleta é logarítmico. Ali, uma amplitude de 1-loop de Feynman é composta como uma função finita de momentos externos, uma integral básica de divergência (*e.g.* $I_{log}(\lambda^2)$) e termos de superfície descritos pela derivada total de uma integral no espaço de momentos. A origem desses termos de superfície provêm das integrais de loop com divergência logarítmica $I_{log}^{\mu\nu\cdots}(\lambda^2)$, que podem conter um produto de momentos internos carregando índices de Lorentz $\mu, \nu, \ldots$ no integrando. Estas integrais de loop com divergência logarítmica podem ser expressas de uma forma precisa como o produto dos tensores da métrica simetrizados nos índices de Lorentz por uma integral de divergência básica $I_{log}(\lambda^2)$, acrescida de um termo de superfície. Esses termos de superfície, locais e dependentes de regularização, são intrinsecamente arbitrários no que diz respeito ao seu valor. Foi mostrado que colocá-los para zero corresponde a exigir invariância de rotulação de momentos nos loops de um diagrama de Feynman [18]. Além disso, foi provado [40] que uma versão com vínculos da regularização implícita, na qual os termos de superfície são sistematicamente colocados para zero, preserva as identidades de Ward para gauge e supersimetria. Essas arbitrariedades são distintas de parâmetros finitos relacionados com a liberdade da escolha das constantes de renormalização que usualmente são fixados pelas condições de renormalização (*i.e.* a escolha de um ponto de renormalização). Neste método de regularização, os termos de superfície podem ser extraídos de uma forma consistente, permitindo uma discussão clara sobre as ambiguidades envolvendo a manipulação de integrais divergentes.

Por agir na dimensão física de teoria, a regularização implícita é particularmente útil para modelos de dimensão específica. Nestas situações, métodos de regularização dimensional são falhos por causa das ambiguidades na continuação analítica da dimensão do espaço-tempo. Teorias de Campos supersimétrica, quiral e topológicas são exemplos de modelos sensíveis à dimensão. Como referência adicional sobre o estudo do método e suas aplicações, sugerimos os artigos [35, 37, 38, 39].

Para exemplificar o uso da Regularização Implícita e suas interpretações, mostramos suas relações em diferentes dimensões, das quais faremos uso ao longo da tese.

2.1 1+1 Dimensões: Modelo de Schwinger

Para ilustrar esse método em um caso simples, [1], discutiremos a geração quântica de massa para os fótons na eletrodinâmica quântica em 1+1 dimensões do espaço-tempo de Minkowski (conhecido como Modelo de Schwinger). Por simplicidade, consideramos os férmions sem massa. Além disso, a geração de massa do fóton é avaliada através de um tensor de polarização do vácuo, que, por sua vez, é finito, mesmo sendo superficialmente (logaritmicamente) divergente. Isso também é exatamente o que ocorre no caso do tensor polarização e função de vértice do cálculo da condutividade. Vamos verificar como simetrias do modelo podem ou não fixar os parâmetros intrínsecos arbitrários.

No modelo de Schwinger

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial\psi - e\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi - \frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 , \tag{2.3}$$

o fóton sem massa em nível árvore adquire a massa de e^2/π em correções a 1-loop, com e sendo a constante de acoplamento. Como o termo de massa para o campo de gauge A deve ser proporcional a A^2, precisamos calcular o tensor de polarização do vácuo

$$\Pi_S^{\mu\nu}(p) = i\mathrm{tr}\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\gamma^{\mu}\frac{i}{\not{k}}\gamma^{\nu}\frac{i}{\not{k}+\not{p}} . \tag{2.4}$$

Uma concepção possível para as matrizes de Dirac é $\gamma_0 = \sigma^2$, $\gamma_1 = i\sigma^1$, onde σ^j são as usuais matrizes de Pauli.

Podemos usar a Regularização Implícita para avaliar a amplitude acima. Após fazermos a álgebra do traço, separamos o conteúdo divergente em termos do momento de loop usando a identidade (2.1). Nesta identidade, μ é a massa fictícia para o elétron, que pode ser tomada para zero no final. Este limite é bem definido em modelos salvos de infravermelho. Com isso, é possível mostrar, como em [41],

$$\Pi_S^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\upsilon+2}{2}g^{\mu\nu} - \frac{p^{\mu}p^{\nu}}{p^2}\Big) , \tag{2.5}$$

no qual o parâmetro arbitrário *dependente de regularização* υ é a diferença entre duas

[1]Podemos fazer uma conexão deste caso de 1+1 dimensões com o caso da condutividade a.c. do grafeno, desenvolvida no capítulo 3. Pois após integrarmos as frequências nas integrais do modelo do grafeno, teremos integrais de momento em 2 dimensões de um espaço euclidiano.

integrais logaritmicamente divergentes:

$$\upsilon g_{\mu\nu} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{g_{\mu\nu}}{(k^2-m^2)} - 2\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^2} \equiv \Delta^{\rm 2D}_{\mu\nu}. \tag{2.6}$$

Se o parâmetro arbitrário for calculado explicitamente pela Regularização Dimensional ou Pauli-Villars, ele será avaliado como zero. Esse fato está em consonância com o caráter transversal do tensor polarização exigido pela invariância de gauge. A massa gerada radiativamente para o fóton é de $m_\gamma^2 = e^2/\pi$. Entretanto, seguindo R. Jackiw em [19] nós podemos considerar υ como um parâmetro arbitrário indeterminado. Esse é um bom exemplo de correções radiativas que são finitas mas indeterminadas, e como tais elas deveriam ser fixadas baseadas em simetrias ou fenomenologia. Dessa forma, podemos atribuir um termo nulo para υ tanto pela transversalidade quanto pelo valor "fenomenológico"gerado para a massa do fóton, caso essa massa existisse. Entretanto, na sua versão quiral, o Modelo de Schwinger Quiral exibe uma conservação não-simultânea anômala da corrente vetorial e quiral [42], similar à famosa anomalia de triângulo AVV [43]. A apresentação democrática da anomalia entre as duas identidades de Ward só pode ser realizada se υ é deixado como arbitrário. O cálculo por si só não decide qual identidade de Ward é satisfeita. Em outras palavras, como indicado em [19], a resposta para tal amplitude anômala não é intrínseca à própria amplitude, mas depende do contexto em que ela emerge. Por isso, como a regularização de Pauli-Villars ou Dimensional preservam invariância de gauge vetorial, é importante ressaltar que essa pode não ser a opção correta caso a invariância quiral precise ser garantida.

Por outro lado, é possível que $\Delta^{\rm 2D}_{\mu\nu}$ possa ser escrito[2] como um termo de superfície, isto é,

$$\Delta^{\rm 2D}_{\mu\nu} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\partial}{\partial k^\nu}\Big(\frac{k_\mu}{(k^2-m^2)}\Big). \tag{2.7}$$

Em [18, 40] foi discutido que diferenças particulares entre integrais divergentes de loop com o mesmo grau de divergência tal como $\Delta^{\rm 2D}_{\mu\nu}$ estão intimamente relacionadas com a invariância de rotulação de momento em um diagrama de Feynman arbitrário. Ou seja, designar os termos de superfície para zero implementa a invariância de rotulação. Tal propriedade acaba sendo uma condição necessária para qualquer regularização invariante de gauge e supersimétrica que opera na dimensão física do modelo teórico

[2]Transformar a equação (2.6) na (2.7) só é possível para uma classe de regularizadores que deixe a integral de superfície bem definida.

de campos. Essa abordagem pode ser generalizada a uma ordem arbitrária de loops [40] e é usada no capítulo 4.

Para concluir essa discussão envolvendo o modelo de Schwinger, o parâmetro dependente de regularização υ, que aparece como a diferença entre integrais logaritimicamente divergentes, deveria ser considerado indeterminado apesar da amplitude ser finita. Citando Jackiw em [19]: "Os gráficos de Feynman do modelo de Schwinger não necessitam ser regularizados, mas eles dão uma polarização de vácuo com uma parte local indeterminada."É essa indeterminação que deve ser fixada, tomando por premissa os argumentos físicos e não sua regularização. É claro que a regularização de Pauli-Villars ou Dimensional consentem com a invariância de gauge, e de fato o cálculo explícito dos termos de superfície, usando regularização dimensional, os avalia como zero. Estas discussões sugerem que quebras quânticas de simetrias em teoria de perturbação é de alguma forma conectada com o colapso da invariância de rotulação de momentos nos loops de diagramas de Feynman.

Como dito anteriormente, o cálculo explícito das integrais de loop é necessário. As constantes de renormalização em uma teoria quântica de campos renormalizável podem ser definidas em termos das integrais básicas de divergências. Neste caso de $1+1$ dimensões a 1-loop, em uma escala de massa arbitrária positiva (grupo de renormalização) λ, temos

$$I_{log}(m^2) = I_{log}(\lambda^2) - b_2 \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right), \tag{2.8}$$

com

$$b_2 = -\frac{i}{(4\pi)}. \tag{2.9}$$

Esta relação é conhecida como relação de escala.

É possível, entretanto, construir uma parametrização explícita geral para as integrais básicas de divergência exibindo os parâmetros arbitrários dependentes de regularização, e revelando o comportamento divergente através de um cutoff. Isso permite um cálculo que preserve simetria (por exemplo, em teorias de campos de gauge) ainda que seja utilizado um cutoff rígido, já que valores espúrios não serão atribuídos para os parâmetros intrinsecamente arbitrários. Exemplificando o argumento, considere a derivação independente de regularização de $I_{log}(m^2)$ em relação a m^2

$$\frac{dI_{log}(m^2)}{dm^2} = -\frac{b_2}{m^2}. \tag{2.10}$$

De mesma forma

$$\frac{dI^{\mu\nu}_{log}(m^2)}{dm^2} = -\frac{g^{\mu\nu}}{2}\frac{b_n}{m^2}, \tag{2.11}$$

onde

$$I^{\mu\nu}_{log}(m^2) \equiv \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)^2}. \tag{2.12}$$

Uma parametrização geral que respeita as relações acima é dada por

$$\begin{aligned} I_{log}(m^2) &= b_2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \alpha_1, \\ I^{\mu\nu}_{log}(m^2) &= \frac{g^{\mu\nu}}{2}\left[b_2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \alpha_1'\right], \end{aligned} \tag{2.13}$$

em que α_1, α_1' são constantes arbitrárias sem dimensão dependentes de regularização, e Λ é um cutoff ultravioleta.

A arbitrariedade do termo de superfície, definido em (2.7), se torna evidente já que

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu\nu}_{2\mathrm{D}} \equiv g^{\mu\nu} I_{log}(m^2) - 2I^{\mu\nu}_{log} &= (\alpha_1 - \alpha_1')g^{\mu\nu} \\ &= \upsilon g^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Termos de superfície com um número arbitrário de índices de Lorentz podem também ser definidos desde que sua geração em ordem arbitrária de loops esteja de acordo com o teorema BPHZ, tornando a abordagem unitária, local e invariante de Lorentz [18, 40].

Outras grandezas similares que podem ser definidas nessa dimensionalidade e que serão úteis no estudo do modelo para o grafeno são: a integral básica de divergência linear

$$I_{lin}(m^2) \equiv \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{(k^2-m^2)^{1/2}}; \tag{2.15}$$

e o termo de superfície da diferença entre integrais linearmente divergentes

$$\Xi^{2D}_{\mu\nu} \equiv \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{g_{\mu\nu}}{(k^2-m^2)^{1/2}} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^{3/2}}. \tag{2.16}$$

2.2 2+1 Dimensões

Podemos redefinir as grandezas da seção anterior para $2+1$ dimensões. Elas terão a mesma utilidade para o estudo da Regularização Implícita na QED_3 feito no capítulo 4. Começamos pela definição da integral básica de divergência linear

$$I_{lin}(m^2) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - m^2}. \tag{2.17}$$

Esta integral pode ser parametrizada como fizemos em (2.13):

$$I_{lin}(m^2) \equiv -\frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{m^2}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} + c_1\Lambda \tag{2.18}$$

onde c_1 é uma constante arbitrária de integração e Λ é o cutoff ultravioleta.

O único termo de superfície necessário será

$$\Xi_{\mu\nu}(m^2) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{g_{\mu\nu}}{p^2 - m^2} - 2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2}. \tag{2.19}$$

Porém, outro termo com índices Lorentz adicionais também pode ser definido pela diferença de integrais básicas de divergência linear:

$$\begin{aligned}\Xi_{\mu\nu\alpha\beta}(m^2) \equiv &(g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - m^2} \\ &- 8\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

2.3 3+1 Dimensões

Para estudarmos o caso da QED$_4$ estendida, no capítulo 5, definimos as mesmas grandezas para $3+1$ dimensões. Começamos pelas integrais básicas de divergência logarítmica

$$I_{log}(m^2) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}. \tag{2.21}$$

Podemos escrever uma relação de escala como

$$I_{log}(m^2) = I_{log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right). \tag{2.22}$$

Da mema forma, definimos a integral básica de divergência quadrática como

$$I_{quad}(m^2) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}. \tag{2.23}$$

Um termo de superfície que será usado é a diferença de integrais quadraticamente divergentes

$$\Upsilon_{\mu\nu} \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - m^2} - 2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2}. \tag{2.24}$$

Outros dois termos utilizados são definidos pela diferença de integrais logaritmicamente divergentes:

$$\Delta_{\mu\nu} \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} - 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3}, \tag{2.25}$$

$$\Delta_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv g_{\{\mu\nu} g_{\alpha\beta\}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - 24 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4}, \tag{2.26}$$

3 Condutividade A.C. do Grafeno

O valor da condutividade a.c. do grafeno corrigido pela interação de Coulomb tem sido um assunto de debate na literatura recente. Sua forma geral para frequências pequenas pode ser obtido no contexto de técnicas de grupo de renormalização [6, 7, 8], baseado em relações de escala válidas perto do ponto quântico crítico, conforme se vê na notação:

$$\sigma(\omega) = \sigma_0 \left(1 + \mathcal{C} \frac{e^2}{v_F + \frac{e^2}{4} \ln \frac{\Lambda}{\omega}} \right). \tag{3.1}$$

Na relação acima $\sigma_0 = e^2/4\hbar$, é conhecida como "condutividade mínima" (na ausência de interações), medida em [10, 9] como $\sigma_0 = (1,01 \pm 0,04)e^2/4\hbar$, onde v_F é a velocidade do férmion de Dirac, que é renormalizada por $\frac{e^2}{4} \ln \frac{\Lambda}{\omega}$ devido à interação de Coulomb, e Λ é um cutoff superior [11]. Na referência [12], foi discutido dentro da abordagem perturbativa da Teoria Quântica de Campos que as divergências podem ser renormalizadas na velocidade de Fermi e funções de onda do elétron. Portanto, observáveis físicos que incluem as correções da interação de Coulomb para as propriedades ópticas do grafeno são independentes de cutoff. O coeficiente $\mathcal{C}$ é uma constante universal, que pode ser calculada por um modelo que leve em conta as interações de Coulomb entre os férmions. A fim de obter $\mathcal{C}$, a maioria dos cálculos dependem de uma análise perturbativa de elétrons interagentes por Coulomb sem desordem. Entretanto um cálculo completo da estrutura eletrônica baseado em um Hamiltoniano realístico de tight-binding foi feito em [46]. Em teoria perturbativa diagramática, em primeira ordem da interação elétron-elétron, os diagramas de Feynman que contribuem para a função resposta densidade-densidade e corrente-corrente (expressado juntos por um tensor de polarização) podem ser desenhados em analogia com a eletrodinâmica quântica teórica [47]. A estrutura geral do tensor polarização pode ser estabelecido em fundamentos geométricos, bem como pela equação de continuidade

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{3.2}$$

que expressa a função resposta densidade-densidade em termos da função resposta corrente-corrente. Embora a geometria do retículo do grafeno seja C_6 simétrico, o modelo efetivo de baixa energia pode ser tratado aqui como espacialmente $O(2)$ simétrico. Dessa forma, enquanto a invariância rotacional conduz para a transversalidade do tensor de polarização, a equação de continuidade restringe a forma da função de vértice de Coulomb, levando a uma identidade tipo-Ward-Takahashi similar em QED [13], [14]. Vamos explorar isso na seção 3.51. Entretanto, foi alegado em [47] que embora a equação de continuidade seja válida em um nível não interagente, ela falha quando as interações entre elétrons é levada em conta. Isso ocorre devido aos infintos ultravioletas que demandam um cutoff rígido de momento.

Os principais resultados encontrados na literatura são obtidos usando a Fórmula de Kubo [6, 15, 14, 13], o Operador de Polarização do Elétron [15, 13] e a Equação Cinética [15, 8], que produzem diferentes resultados para $\mathcal{C}$, dependendo de como cada método lida com as integrais divergentes intermediárias. Por exemplo, em [15] foi mostrado que quando regularizando o potencial coulombiano, um cutoff rígido na integral para grandes momentos produz os mesmos resultados pelos três métodos mencionados. Por outro lado, um cutoff suave resulta em $\mathcal{C} = (19 - 6\pi)/12$ em todos os métodos. Usando a Fórmula de Kubo e um cutoff rígido, $\mathcal{C}$ foi encontrada como $(25 - 6\pi)/12$ em [6], enquanto que em [13] o valor de $\mathcal{C}$ mostrado dependia da ordem em que se tomavam os limites das fronteiras de integração, resultando em $\mathcal{C} = (11 - 3\pi)/6$ ou em $\mathcal{C} = (25 - 6\pi)/12$. Além disso em [14], ainda no esquema da Fórmula de Kubo, $\mathcal{C}$ foi parametrizada como $\mathcal{C} = \frac{19-6\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln be^{-1/2}$, onde o parâmetro b depende de como o cutoff foi introduzido na contribuição principal para $\sigma(\omega)$. Os autores explicaram que se o cutoff for introduzido na integral de momento associada com o potencial de Coulomb, então $b = e^{1/2}$, resultando em $\mathcal{C} = (19 - 6\pi)/12$; enquanto que, se o mesmo cutoff for introduzido nas funções de Green, $b = e^{-1/2}$ resultando em $\mathcal{C} = (25 - 6\pi)/12$. Tendo em vista essa ambiguidade, os autores evocaram a conservação da carga expressa pela transversalidade do tensor polarização e da identidade tipo-Ward-Takahashi. Eles afirmaram, fazendo uso de uma mudança ingênua na variável de integração (exploraremos com mais detalhes na seção 3.2), que a transversalidade é compatível com ambos os valores de b. No entanto, se levamos em conta a identidade tipo-Ward-Takahashi, somente é possível o valor $b = e^{1/2}$.

O método que utiliza *tight-binding ab initio* feito em [46] afirma que a ambiguidade caracterizada pelas várias abordagens é relacionada à anomalia quiral no sistema. Isso seria consequência de uma separação obscura entre a física infravermelha e ultravioleta. Por isso a regularização do modelo efetivo é uma questão importante e essencial. Os autores em [46] também apontam que seus resultados são compatíveis com [13]; ou seja $\mathcal{C} = \frac{11-3\pi}{6}$, onde a Regularização Dimensional foi utilizada mesmo sabendo-se que ela é problemática quando usado em teorias anômalas em 2+1. Por esta razão, a Regularização Dimensional deve ser manipulada com cuidado quando for descrever anomalias quirais [48, 19]. É sabido que a regularização não deveria fazer nenhuma escolha em particular de uma identidade de Ward axial ou vetorial em presença de anomalias, tal como a anomalia quiral de Adler-Bardeen-Bell-Jackiw (ABJ) [43]. A regularização deveria exibir a anomalia em um "modo democrático" para que seja possível distinguir as anomalias espúrias das físicas.

A priori a Regularização Dimensional parece ser uma boa candidata para lidar com esse problema, se levarmos em conta seu sucesso em cálculos perturbativos baseados em diagramas de Feynman de teorias de gauge no Modelo Padrão de física de partículas. Nesse contexto, além de preservar as Identidades de Ward que codificam a invariância local de gauge U(1), uma biblioteca de integrais de Feynman está disponível em livros textos [17, 16]. De qualquer forma, cuidados devem ser exercidos com as validades dessas integrais em dimensões menores que 4 (ver apêndice A.2).

Em [13], os autores utilizaram a abordagem do Operador Polarização e a Regularização Dimensional para lidar com as integrais divergentes intermediárias no cálculo da condutividade. Nesse artigo eles afirmaram que em um resultado anterior publicado em [6], de mesma autoria, faltava uma continuação dimensional consistente para as matrizes de Pauli e, por isso, esse resultado violava a identidade tipo-Ward-Takahashi para a função de vértice de Coulomb, proveniente de (3.2). Ademais, foi alegado que um termo faltante (ausente na dimensão física), relacionado a continuação do espaço-tempo da algebra da matriz sigma, seria o culpado pela discrepância entre os resultados para $\mathcal{C}$, $(25 - 6\pi)/12$ em [6] e $(11 - 3\pi)/6$ em [13].

A proposta desta nossa contribuição é trazer alguma luz para essa controvérsia, aplicando o método do Operador de Polarização, assim como feito em [13], e usar uma abordagem independente de regularização que opera na dimensão física do modelo. Esta proposta que chamamos de Regularização Implícita foi explorada no capítulo 2. Uma peculiaridade importante da Regularização Implícita, que a faz ideal para calcular a condutividade, é sua forma clara de parametrizar termos arbitrários vindos de diferentes integrais logaritmicamente divergentes (termos de superfície), contendo apenas uma variável de integração (o momento de loop) de uma forma independente de regularização. Isto parece ser o cerne dos resultados controversos para $\mathcal{C}$. Em nossos cálculos, obtivemos para a condutividade a.c.

$$\mathcal{C} = 2\pi\alpha + \frac{19 - 6\pi}{12}, \tag{3.3}$$

onde α é uma constante arbitrária finita (termo de superfície definido em (2.6)), que parametriza a dependência da regularização. Como discutido no capítulo 2, parâmetros arbitrários, de teorias finitas, decorrentes do cancelamento de integrais divergentes, deveriam ser fixados por simetrias do modelo em questão ou de fenomenologia. No caso presente, mostraremos que α é inequivocamente fixado em zero somente pela estrutura transversal geral do tensor de polarização inferida pela invariância rotacional espacial $O(2)$. Consequentemente, temos que $\mathcal{C} = \frac{19-6\pi}{12}$. Dois aspectos são dignos de nota. O primeiro desses aspectos diz respeito à equação de continuidade (cuja validade é controversa quando interações são consideradas [47]) que leva à identidade tipo-Ward-Takashi para a função de vértice [13]. Vê-se que essa identidade não desempenha nenhum papel na determinação de α. Em segundo lugar, α pode ser calculada como sendo zero na Regularização Dimensional, o que indica, a principio, que tal regularização deveria concordar com o nosso resultado, mas esse não é o valor obtido em [13]. Mesmo não desempenhando o papel que esperaríamos, faremos um estudo do resultado da identidade tipo-Ward-Takashi para a função de vértice. É importante, contudo, manter em mente que o modelo é preditivo devido à transversalidade derivada de uma propriedade de simetria geral que ainda continua válida com a presença de interações. Desenharemos um mapa com os diferentes valores de $\mathcal{C}$ para diferentes avaliações do parâmetro dependente de regularização α que é, por si, arbitrário, devendo assim ser fixado com base em requerimentos de simetria.

Do ponto de vista experimental, a melhor área de prova para $\mathcal{C}$ - constante que os valores controversos diferem por uma ordem de grandeza em magnitude - reside na transparência óptica do grafeno, já que a transmitância é relacionada com a condutividade no regime óptico em $t(\omega) = (1 + 2\pi\sigma(\omega)/c)^{-2}$. Dados experimentais em transmissão óptica [10] sugerem uma correção negligenciável para a correção devido à interação de Coulomb, o que é compatível com o valor $\mathcal{C} = \frac{19-6\pi}{12} \approx 0.01$. Ainda de acordo com [10], as propriedades ópticas do grafeno residem sobretudo em sua estrutura bidimensional e em um espectro eletrônico sem gap, mas não envolve a quiralidade de seus portadores de carga [46].

3.1 O Modelo

Começando de um modelo com tight-binding com o vizinho mais próximo, a lei de dispersão eletrônica linear perto do nível de Fermi $E(p) = \pm v_F p$, $v_F \approx 10^8\, cm/s$ é consistente com a estrutura eletrônica de baixa energia do grafeno. O sinal de $\pm$ se refere a banda de condução (energia positiva) e banda de valência (energia negativa). Então o Hamiltoniano do grafeno monocamada pode ser descrito por quasipartículas sem massa de Dirac, bidimensionais, com a velocidade da luz substituída por v_F e o pseudo-spin correspondente aos índices da sub-rede [20]. Assim:

$$\hat{H} = \int d^2\vec{r}\,\psi^\dagger(\vec{r}) v_F \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\psi(\vec{r}) + e^2 \int d^2\vec{r} d^2\vec{r'} \frac{\psi^\dagger(\vec{r})\psi(\vec{r})\psi^\dagger(\vec{r'})\psi(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}, \tag{3.4}$$

onde $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$. Note que incluímos uma interação de Coulomb de dois-corpos entre os elétrons [21].

O modelo de Dirac para o grafeno foi proposto em 1984 por Semenoff, DiVincenzo e Mele [22, 23], vinte anos antes de sua descoberta experimental por Geim e Novoselov [24], que acabaram ganhando o prêmio Nobel em 2010 pelas inovações experimentais feitas com o grafeno. Tal analogia permite em principio uma investigação dos fenômenos quânticos relativísticos em experimentos de bancada. Ademais, pode-se à principio explorar as ferramentas teóricas de campos quânticos envolvendo férmions planares, nomeadamente a Eletrodinâmica Quântica em 2+1 dimensões, para calcular por exemplo o operador polarização definido através de uma ação efetiva dos férmions na presença de campos eletromagnéticos. O tensor de polarização pode ser interpretado em termos da condutividade do grafeno [13], assim como ser usado para descrever outros fenômenos interessantes, como os efeitos Hall e de Faraday, a taxa de absorção de luz em folhas de grafeno, e a interação de Casimir no grafeno [25, 26]. É claro que se deve ter em mente que estamos tratando as interações elétron-elétron efetivamente através de um potencial coulombiano não-relativístico. Alguns autores argumentam que a descrição teórica completa para as propriedades eletrônicas do grafeno deve ser caracterizada por cargas pontuais movendo-se em um espaço bidimensional enquanto os fótons se propagam em três dimensões espaciais, fazendo com que a descrição teórica através de campos quânticos reside em algum lugar entre a QED_3 e a QED_4 [21].

Baseado no teorema de flutuação-dissipação [27], o valor esperado do operador de tempo real da densidade de corrente elétrica $J(\vec{r},t)$ pode ser relacionado com o tensor polarização em tempo imaginário

$$\Pi_{\mu\nu}(\tau,\vec{r}) = \langle T[j_\mu(\tau,\vec{r})j_\nu(0,0)]\rangle, \tag{3.5}$$

com

$$j_\mu(\tau,\vec{r}) = (\psi^\dagger(\tau,\vec{r})\psi(\tau,\vec{r}), v_F\psi^\dagger(\tau,\vec{r})\vec{\sigma}\psi(\tau,\vec{r})), \tag{3.6}$$

onde $\mu = 0, 1, 2$, e $\psi(\tau,\vec{r})$ são campos sem massa com duas componentes.

A relação de dispersão linear também implica em uma densidade nula para os estados de partícula única no nível de Fermi, o que sugere que os efeitos da interação de Coulomb entre os elétrons são fracos. Além disso, o grafeno pode ser considerado um líquido de Fermi e por isso os parâmetros de interação efetiva decrescem em temperaturas e frequências pequenas, até atingirem uma saturação [28]. Em resumo, os efeitos devido às interações elétron-elétron parecem contribuir para uma pequena correção positiva para a condutividade [6].

A função correlação no espaço recíproco $\Pi_{\mu\nu}(q_\mu)$, com $q_\mu = (i\Omega,\vec{q})$ e $\vec{q} = (q_1,q_2)$, será calculada com a expansão da constante de acoplamento até a ordem de e^2, assim como em [13]. Isto é:

$$\Pi_{\mu\nu}(q_\mu) = \Pi^0_{\mu\nu}(q_\mu) + \delta\Pi_{\mu\nu}(q_\mu, V_{\vec{k}}), \tag{3.7}$$

onde $\Pi^0_{\mu\nu}$ representa a contribuição não-interagente que caracteriza a condutividade mínima, e $\delta\Pi_{\mu\nu}$ é a primeira correção devido a interação de Coulomb entre as quasi-partículas. Ainda,

$$V_{\vec{k}} = \int d^2\vec{r}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}V(\vec{r}) = \frac{2\pi e^2}{|\vec{k}|}. \tag{3.8}$$

Explicitamente, o termo principal em (3.7) é

$$\Pi^0_{\mu\nu}(q_\mu) = -4\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\mathrm{tr}[G_k(i\omega)\sigma_\mu G_{k+q}(i\omega+i\Omega)\sigma_\nu] \tag{3.9}$$

onde 4 é o número de cópias dos campos fermiônicos de duas componentes para o grafeno e G_k é o propagador fermiônico, que pode ser operacionalizado em

$$G_k(i\omega) = \frac{i\omega + \vec{\sigma}\cdot\vec{k}}{\omega^2 + \vec{k}^2}. \tag{3.10}$$

Definindo $\mathcal{P}^0_\mu$ como em [13]

$$\mathcal{P}^0_\mu(q_\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} G_k(i\omega)\sigma_\mu G_{k+q}(i\omega + i\Omega) \tag{3.11}$$

$\Pi^0_{\mu\nu}$ pode ser abreviado em

$$\Pi^0_{\mu\nu}(q_\mu) = -4\mathrm{Tr}[\mathcal{P}^0_\mu(q_\mu)\sigma_\nu]. \tag{3.12}$$

Em uma forma similar, a primeira correção para a função correlação pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{\mu\nu}(q_\mu) = &- 4\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \mathrm{Tr}[\mathcal{P}_\mu(\vec{p},\vec{q},\omega,\Omega) G_{p+q}(i\omega' + i\Omega)\sigma_\nu G_p(i\omega')] \\ &+ 4\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \{V_{\vec{k}-\vec{p}}\, \mathrm{Tr}[\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2]\},\end{aligned} \tag{3.13}$$

onde $\mathcal{P}_\mu$ é a função de vértice

$$\mathcal{P}_\mu(\vec{p}, i\omega; \vec{p}+\vec{q}, i\omega + i\Omega) = -\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} V_{\vec{k}-\vec{p}} G_k(i\omega)\sigma_\mu G_{k+q}(i\omega + i\Omega) \tag{3.14}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= G_k(i\omega)\sigma_\mu G_{k+q}(i\omega + i\Omega)\sigma_\nu G_k(i\omega) G_p(i\omega') \\ \mathcal{A}_2 &= G_k(i\omega)\sigma_\mu G_{k+q}(i\omega + i\Omega) G_{p+q}(i\omega' + i\Omega) G_{k+q}(i\omega + i\Omega)\sigma_\nu\end{aligned}$$

A correção para a condutividade pode ser relacionada com o segundo termo da expansão da componente espacial do tensor polarização [13, 15]

$$\sigma(\Omega, |q|) = \frac{e^2}{\hbar} \frac{i\Omega}{q^2 - \Omega^2} \delta\Pi_{xx}(\Omega + i0, |q|) \tag{3.15}$$

onde a condutividade a.c. é dada por $\lim_{q\to 0} \sigma(\Omega, |q|)$.

3.2 Restrições de Simetria

Como discutido em [19], em teorias onde as correções radiativas são finitas, os parâmetros arbitrários vindos do cancelamento de integrais divergentes devem ser fixados por simetrias do modelo estudado ou pela fenomenologia. Esse é exatamente a situação com a qual estamos nos confrontando quando fazemos o cálculo das correções de Coulomb para a condutividade a.c. do grafeno. A simetria rotacional espacial $O(2)$ é preservada tanto no caso não-interagente quanto no caso com a interação de Coulomb. Por este motivo, podemos construir a seguinte estrutura geral para o tensor polarização [49],[13]:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \Pi_A(q_\mu)A_{\mu\nu} + \Pi_B(q_\mu)B_{\mu\nu}, \tag{3.16}$$

com

$$B_{\mu\nu} = \delta_{\mu i}\Big(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{\vec{q}^2}\Big)\delta_{j\nu} \text{ e} \tag{3.17}$$

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{\vec{q}^2} - B_{\mu\nu}, \tag{3.18}$$

com $\Pi_B(q_\mu)$ sendo sua componente espacial transversa. Consequentemente, $\Pi_{\mu\nu}(q)$ é transverso: $q_\mu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0$. Utilizando a equação (3.7), podemos escrever:

$$q^\mu[\Pi^0_{\mu\nu}(q_\mu) + \delta\Pi_{\mu\nu}(q_\mu)] = [\Pi^0_{\mu\nu}(q_\mu) + \delta\Pi_{\mu\nu}(q_\mu)]q^\nu = 0. \tag{3.19}$$

Para olharmos a transversalidade do primeiro termo acima, começamos avaliando a parte não-interagente do operador de polarização $\mathcal{P}^0_\mu$ vindo das equações (3.11) e (3.12). Os detalhes desse cálculo podem ser encontrados no apêndice A.1 (e algumas observações sobre o uso das formulas de Regularização Dimensional em $D = 2$ neste contexto podem ser encontradas no apêndice A.2). Explicitamente

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^0_\mu(q_\mu) =& \frac{\sqrt{\Omega^2+q^2}}{64}\left[\sigma_\mu - 2\delta_{\mu 0} - \frac{(i\Omega + \vec{\sigma}\cdot\vec{q})\sigma_\mu(i\Omega + \vec{\sigma}\cdot\vec{q})}{\Omega^2+q^2}\right] \\ &- \frac{\sqrt{q^2}}{64}\left[\sigma_\mu - 2\delta_{\mu 0} - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\sigma_\mu\vec{\sigma}\cdot\vec{q}}{q^2}\right] + \frac{\pi}{64}\beta\delta_{\mu 0}\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde β é um parâmetro arbitrário (termo de superfície definido em (2.16)) com dimensões de momento definido como

$$\beta\delta_{lj} = \int_k \frac{\delta_{jl}}{(k^2+\Delta^2)^{1/2}} - \int_k \frac{k_j k_l}{(k^2+\Delta^2)^{3/2}} \tag{3.21}$$

e Δ^2 é definido em (A.4). Dessa forma a transversalidade da parte não-interagente pode ser calculada como

$$\begin{aligned}q^\mu \mathrm{Tr}\left(\mathcal{P}^0_\mu\sigma_\nu\right) =& 0 - \frac{\sqrt{q^2}}{64}q^\mu \mathrm{Tr}\left[\sigma_\mu\sigma_\nu - 2\delta_{\mu 0}\sigma_\nu - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\sigma_\mu\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\sigma_\nu}{q^2}\right] \\ &+ q^\mu\frac{\pi}{64}\beta\delta_{\mu 0}\mathrm{Tr}\sigma_\nu\end{aligned} \tag{3.22}$$

Note que apenas o primeiro termo do lado direito de (3.20) é transverso, enquanto o restante dos termos resulta, após alguma álgebra,

$$q^{\mu}\mathrm{Tr}\left(\mathcal{P}^{0}_{\mu}\sigma_{\nu}\right) = \left(\beta\frac{\pi}{2} - \sqrt{q^2}\right)\frac{(-i\Omega)\delta_{\nu 0}}{16} \tag{3.23}$$

que é transversa apenas se β é fixada como

$$\beta = \frac{2\sqrt{q^2}}{\pi}. \tag{3.24}$$

Assim, partimos para estudar as propriedades da transversalidade de ordem $O(e^2)$ da correção $\delta\Pi_{\mu\nu}(q)$. Por uma questão de conveniência e comparação com a literatura, definimos

$$\Sigma_{p,q}(i\Omega) = \int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}V_{k-p}G_{k+q}(i\omega' + i\Omega), \tag{3.25}$$

onde $\Sigma_{\Omega,p,0}$ é usualmente chamada de auto-energia do elétron, em analogia com a QED. Usando essa definição, podemos escrever formalmente

$$\begin{aligned} q^{\mu}\delta\Pi_{\mu\nu}(q_{\mu}) = 4\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\Big\{&\mathrm{Tr}[G_k(i\omega)\sigma_{\nu}G_k(i\omega)\Sigma_{p,0}(0)] \\ &- \mathrm{Tr}[G_{k+q}(i\omega+i\Omega)\sigma_{\nu}G_{k+q}(i\omega+i\Omega)\Sigma_{p,q}(i\Omega)]\Big\}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde usamos diretamente a identidade

$$\begin{aligned} q^{\mu}\sigma_{\mu} &= -i\Omega\mathbf{1}_{2\times 2} + \vec{q}\cdot\vec{\sigma} \\ &= G^{-1}_{\omega+\Omega,k+q} - G^{-1}_{\omega,k}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Devido à identidade do propagador

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}G_{k+q}(i\omega+i\Omega)G_{k+q}(i\omega+i\Omega) = 0 \tag{3.28}$$

e, usando a propriedade de ciclicidade do traço, o estudo da transversalidade de $\delta\Pi_{\mu\nu}$ equivale à investigação do comutador de $[G_{\omega+\Omega,k+q}, \Sigma_{\Omega,p,q}]$. Para esse propósito podemos desenvolver mais a expressão para $\Sigma_{\Omega,p,q}$. Partindo de (3.25), depois de fazer a parametrização de Feynman [16] para completar o quadrado da variável de integração no denominador, e uma prolongada álgebra (explorada com maior detalhamento no apêndice A.4), podemos escrever

$$\Sigma_{p,q} = \Sigma_{p+q,0} + e^2\pi\alpha\vec{\sigma}\cdot\vec{q}, \tag{3.29}$$

onde α é o mesmo termo de superfície que aparece no cálculo de $\mathcal{C}$, e é dada por

$$\alpha\delta_{ij} \equiv \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\delta_{ij}}{k^2+m^2} - 2\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_ik_j}{(k^2+m^2)^2} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\partial}{\partial k_j}\left(\frac{k_i}{k^2+m^2}\right). \quad (3.30)$$

Além disso, seguindo os passos dito anteriormente (explorados no apêndice A.3), podemos demonstrar que $\Sigma_{p+q,0} \propto \vec{\sigma}\cdot(\vec{p}+\vec{q})$, ou, de forma mais completa,

$$\Sigma_{p+q,0} = \frac{e^2}{8}\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}+\vec{q})\left[4\pi I_{log}(\lambda^2) - \ln\left(\frac{(\vec{p}+\vec{q})^2}{\lambda^2}\right) + 4\ln 2 - 4\pi\alpha\right]. \quad (3.31)$$

Com esses resultados podemos discutir a transversalidade de $\delta\Pi_{\mu\nu}$. Por causa de (3.31), podemos perceber que

$$[G_{k+q}(i\omega + i\Omega), \Sigma_{p+q,0}(i\Omega)] = 0. \quad (3.32)$$

Portanto, se tomarmos (3.29), logo

$$[G_{k+q}(i\omega + i\Omega), \Sigma_{p,q}(i\Omega)] = \pi e^2\alpha\left[G_{k+q}(i\omega + i\Omega), \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\right]. \quad (3.33)$$

Como o comutador no lado direito da equação acima não é nulo em geral, podemos concluir que a transversalidade da correção de Coulomb para o tensor de polarização implica em

$$\alpha = 0. \quad (3.34)$$

Note que esse é o mesmo argumento ilustrado na seção 2.5 para a QED_2, onde a invariância de gauge fixa o valor do parâmetro arbitrário como zero também.

3.3 O Cálculo da Condutividade A.C.

De acordo com a seção 3.1, o primeiro termo da função correlação (3.7) resulta na condutividade mínima. Para verificar esse fato, usamos $\mathcal{P}^0_\mu$ calculado na seção 3.2:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^0_\mu(q_\mu) =& \frac{\sqrt{\Omega^2+q^2}}{64}\left[\sigma_\mu - 2\delta_{\mu 0} - \frac{(i\Omega+\vec{\sigma}\cdot\vec{q})\sigma_\mu(i\Omega+\vec{\sigma}\cdot\vec{q})}{\Omega^2+q^2}\right] \\ &- \frac{\sqrt{q^2}}{64}\left[\sigma_\mu - 4\delta_{\mu 0} - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\sigma_\mu\vec{\sigma}\cdot\vec{q}}{q^2}\right]\end{aligned} \quad (3.35)$$

onde usamos $\beta = 2\sqrt{q^2}/\pi$ como dado pela equação (3.24).

Depois de tomar o traço em (3.12) e, usando a relação entre o tensor polarização e a condutividade (3.15), conseguimos encontrar a conhecida condutividade mínima

$$\sigma_0 = \frac{1}{4}\frac{e^2}{\hbar}. \tag{3.36}$$

Note, entretanto, que o valor de β não entra no cálculo da condutividade pois o termo proporcional a β some no limite onde q^2 vai para zero. Desta forma, a condutividade mínima é independente de regularização.

Para a correção da condutividade, nós tomamos a expansão em ordem de e^2, $\delta\Pi_{\mu\nu}(q_\mu)$, definida na seção 3.1 e a separamos em duas partes:

$$\delta\Pi_{\mu\nu}(i\Omega,0) = \delta\Pi^a_{\mu\nu}(i\Omega,0) + \delta\Pi^b_{\mu\nu}(i\Omega,0) \tag{3.37}$$

onde o primeiro termo $\delta\Pi^a_{\mu\nu}$ expressa a correção para chamada auto-energia (em analogia com a QED)

$$\begin{aligned}\delta\Pi^a_{\mu\nu}(i\Omega,0) = 8\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\omega'}{2\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{d^2p}{(2\pi)^2}V_{\vec{k}-\vec{p}} \\ \mathrm{tr}\left[G_{\vec{k}}(i\omega)\sigma_\mu G_{\vec{k}}(i\omega+i\Omega)\sigma_\nu G_{\vec{k}}(i\omega)G_{\vec{p}}(i\omega')\right],\end{aligned} \tag{3.38}$$

e o segundo $\delta\Pi^b_{\mu\nu}$ é chamado de correção para o vértice (continuando com a mesma analogia)

$$\begin{aligned}\delta\Pi^b_{\mu\nu}(i\Omega,0) = 4\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\omega'}{2\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{d^2p}{(2\pi)^2}V_{\vec{k}-\vec{p}} \\ \mathrm{tr}\left[G_{\vec{k}}(i\omega)\sigma_\mu G_{\vec{k}}(i\omega+i\Omega)G_{\vec{p}}(i\omega'+i\Omega)\sigma_\nu G_{\vec{p}}(i\omega')\right].\end{aligned} \tag{3.39}$$

Usando a equação (3.15) podemos verificar no apêndice A.5 que $\delta\Pi^a_{\mu\nu}$ resulta em contribuição

$$\sigma_a = -\sigma_0 e^2\left(\pi I_{log}(\lambda^2) + \frac{1}{4}\ln\lambda^2 - \pi\alpha + \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln\Omega\right) \tag{3.40}$$

enquanto $\delta\Pi^b_{\mu\nu}$, por sua vez, resulta

$$\begin{aligned}\sigma_b = \sigma_0 e^2\Bigg(\pi I_{log}(\lambda^2) + \frac{1}{4}\ln\lambda^2 + \pi\alpha + \frac{3}{2}\ln 2 \\ -\frac{1}{2}\ln\Omega - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{12}(4+3\pi) + \frac{4-\pi}{4}\Bigg).\end{aligned} \tag{3.41}$$

A fim de obter a correção para a condutividade, esses termos devem ser combinados para obtermos

$$\sigma_c = \sigma_0 e^2 \left(2\pi\alpha + \frac{19 - 6\pi}{12} \right). \tag{3.42}$$

É interessante notar que as divergências logarítmicas $I_{log}(\lambda^2)$ e a dependência da escala de renormalização expressa por $\ln(\lambda^2)$ acabam se cancelando no final como esperado. Também é importante ressaltar, como discutido no inicio deste capítulo, que o resultado da condutividade acima carrega um parâmetro intrinsecamente arbitrário que caracteriza a dependência dos resultados na regularização escolhida. Em nosso caso, utilizando os argumentos de simetria do modelo, explorados na seção 3.2, conseguimos determinar $\alpha = 0$, o que fixa o valor da correção da condutividade acima em

$$\mathcal{C} = \frac{19 - 6\pi}{12}. \tag{3.43}$$

Por outro lado, podemos proceder à discussão olhando para outros resultados para $\mathcal{C}$, que aparecem na literatura utilizando outros métodos de regularização.

Utilizando formulas de livros textos de Teoria Quântica de Campos [16, 17] na definição de α, pela equação (3.30), é possível mostrar que a Regularização Dimensional computa essa constante como zero. Esse resultado indica que a princípio esse método de regularização também deveria levar a $\mathcal{C} = \frac{19-6\pi}{12}$, contrariamente ao resultado achado em [13]. Uma avaliação direta de (3.30), utilizando um cutoff rígido, produz $1/(4\pi)$, que, por sua vez, se avaliado em (3.42), resulta em $\mathcal{C} = \frac{25-6\pi}{12}$. Surpreendentemente, essa avaliação viola a transversalidade, já que o comutador (3.33) não se anula.

A título de comparação com os nossos resultados, recordamos o cálculo apresentado em [14], no qual foi usado um regulador tipo cutoff no pontencial de Coulomb para obter o resultado da auto-energia

$$\Sigma^s(\vec{p}) = \frac{1}{4} e^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \ln \left[\frac{4\Lambda b}{p} \right], \tag{3.44}$$

onde a constante b pode assumir dois valores: $b = e^{1/2}$ e $b = e^{-1/2}$. Usando a versão euclidiana da parametrização geral para $I_{log}(\lambda^2)$, equação (2.13),

$$I_{log}(\lambda^2) = \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2} \right) + \tilde{b}, \tag{3.45}$$

podemos reescrever nosso resultado para $\Sigma_{p,0}$ (cálculado no apêndice A.3)

$$\Sigma_{p,0} = \frac{e^2}{8}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}\right) + \tilde{b} + \ln\lambda^2 - \ln p^2 + 4\ln 2 - 4\pi\alpha\right]. \tag{3.46}$$

Note que os parâmetros arbitrários α e $\tilde{b}$ são independentes. O primeiro é um termo de superfície discutindo na seção 2.5, enquanto o segundo é uma arbitrariedade na parametrização geral de $I_{log}(\lambda^2)$. Dessa forma, podemos reescrever $\tilde{b} = \ln b$, para reformular a equação acima como

$$\Sigma_{p,0} = \frac{e^2}{4}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left[\ln\left(\frac{4\Lambda b}{p}\right) - 2\pi\alpha\right], \tag{3.47}$$

que é basicamente a equação (3.44) com o termo de superfície. Em nosso cálculo, a arbitrariedade representada pelo parâmetro b se cancela na adição de (3.40) com (3.41), já que ela faz parte da integral divergente básica $I_{log}(\lambda^2)$, enquanto o termo de superfície α sobrevive (como mostrado no apêndice A.4) tanto no cálculo da condutividade 3.3 quanto na transversalidade (3.2).

3.3.1 Efeitos da Identidade tipo-Ward para a Função de Vértice

Nesta seção olhamos para a consideração feita em [13], de que uma identidade tipo-Ward-Takahashi poderia ser derivada, similar a uma que aparece na prescrição teórica de campos da QED. Para isso, foi definido a "função de vértice" Λ_μ derivada da transformada de Fourier da função matriz de quatro pontos $\pi_\mu(\vec{r_1} - \vec{r}, t_1 - t, \vec{r} - \vec{r_2}, t - t_2) = \langle T_t j_\mu(t,\vec{r})\psi(t_1,\vec{r_1})\psi^\dagger(t_2,\vec{r_2})\rangle$, de tal forma que

$$\pi^\mu_{\omega,k;\omega+\Omega,k+q} = G_{\omega,k}\Lambda^\mu_{\omega,k;\omega+\Omega,k+q}G_{\omega+\Omega,k+q}, \tag{3.48}$$

levando a

$$q_\mu\Lambda^\mu_{\omega,k;\omega+\Omega,k+q} = \Sigma_{\omega+\Omega,k+q,0} - \Sigma_{\omega,k,0}. \tag{3.49}$$

Para derivar (3.49) é importante notar que a equação de continuidade foi usada em sua forma ingênua $\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ que, de acordo com [47], não é satisfeita no sistema interagente. Assumindo que (3.49) é válida para a função de vértice de Coulomb até primeira ordem da constante de acoplamento,

$$\delta\Lambda_\mu(\Omega,p,q) = -\int_{\vec{k},\omega}\frac{2\pi e^2}{|\vec{p}-\vec{k}|}G_{\omega,k}\sigma_\mu G_{\omega+\Omega,k+q}, \tag{3.50}$$

que de acordo com (3.49) deve satisfazer

$$q^\mu \delta\Lambda_\mu(\Omega, p, q) = \Sigma_{\omega+\Omega,p+q,0} - \Sigma_{\omega,p,0}. \tag{3.51}$$

Para verificar explicitamente em quais condições essa identidade é satisfeita, resolvemos ambos os lados da equação (3.51), usando a técnica de Regularização Implícita. O lado direito da equação, calculado no apêndice A.4, resulta em

$$\begin{aligned}\Sigma_{p,q} - \Sigma_{p,0} = e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{p}&\left\{-\frac{1}{8}\ln\left[\frac{(\vec{p}+\vec{q})^2}{p^2}\right]\right\}\\ + e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{q}&\left\{\frac{\pi}{2}I_{log}(\lambda^2) + \frac{1}{8}\ln\lambda^2 + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{8}\ln(\vec{p}+\vec{q})^2\right\}\\ + e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{q}&\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right).\end{aligned} \tag{3.52}$$

O lado esquerdo de (3.51), calculado no apêndice A.6, é

$$\begin{aligned}q^\mu\mathcal{P}_\mu = e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{p}&\left\{-\frac{1}{8}\ln\left[\frac{(\vec{p}+\vec{q})^2}{\vec{p}}\right]\right\} + e^2 i\Omega\left\{\frac{1}{8} - \frac{\pi\alpha}{2}\right\}\\ + e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{q}&\left\{\frac{\pi}{2}I_{log}(\lambda^2) + \frac{1}{8}\ln\lambda^2 + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{8}\ln(\vec{p}+\vec{q})^2\right\}\\ + e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{q}&\left(\frac{1}{8}\right),\end{aligned} \tag{3.53}$$

onde α é exatamente o mesmo termo de superfície que aparece nos cálculos de $\mathcal{C}$ e no estudo da transversalidade de $\delta\Pi_{\mu\nu}$. Claramente a identidade tipo-Ward-Takahashi (3.51) somente é satisfeita se

$$\alpha = \frac{1}{4\pi}. \tag{3.54}$$

Esse resultado é incompatível com a transversalidade de $\delta\Pi_{\mu\nu}$, que exige que $\alpha = 0$, e curiosamente, o α acima leva para o resultado $\mathcal{C} = \frac{25-6\pi}{12}$.

Surpreendentemente, nossos cálculos sugerem que a Regularização Dimensional também seria incompatível com (3.51) já que ela avalia α em zero. Acreditamos que, de fato, a equação de continuidade precisa ser modificada como sugerido em [47], o que explicaria a violação da identidade tipo-Ward-Takahashi em sua forma ingênua. Certamente a transversalidade do tensor polarização de vácuo e a identidade de Ward Takashi [16] em QED_4 devem ser válidas em todas as ordens de teoria de perturbação. Reproduzimos estritamente essa propriedade com um único valor de $\alpha = 0$ [41, 35, 36, 40, 18], assim como a Regularização Dimensional, expressando invariância de gauge e de rotulação de momentos nos diagramas de Feynman. Entretanto, esse não é necessariamente o caso em um modelo efetivo não-relativístico, tal qual usamos aqui para descrever correções da interação de Coulomb de partículas de Dirac para o grafeno. Também não é garantido que, por respeitar a identidade tipo-Ward-Takahashi, o esquema de regularização vá produzir o exato valor de $\mathcal{C}$ para o sistema físico [47, 44]. Curiosamente, o valor $\alpha = 1/(4\pi)$ que satisfaz (3.51), resulta em uma correção $\mathcal{C} = \frac{25-6\pi}{12}$. Entretanto, o modelo efetivo representado pela Hamiltoniana (3.4) tem poder preditivo pois o único parâmetro livre α é inequivocamente fixado pela exigência da transversalidade do tensor de polarização, que é geral e é uma propriedade bem definida na presença das interações.

3.4 Considerações Finais

Empregamos uma análise independente de regularização que manifestadamente preserva parâmetros arbitrários dependentes de regularização que deveriam ser fixados pelas simetrias do modelo em questão. Por isso, essa análise é especialmente interessante para lidar com os cálculos da condutividade do grafeno, que envolvem contribuições separadas, e que são divergentes mas possuem somas finitas e dependentes de regularização. Baseando-se na simetria espacial $O(2)$, que é traduzida na transversalidade do tensor de polarização, um parâmetro livre α foi fixado em zero. Isso resulta em $\mathcal{C} = \frac{19-6\pi}{12} \approx 0.01$, que está de acordo com as medições experimentais [10] e está de acordo com a Regularização Dimensional, pois α é avaliado em zero se for calculado explicitamente por esse método (ver também [50]). Por outro lado, se esse parâmetro arbitrário for avaliado utilizando um cutoff rígido, por exemplo, $\alpha = 1/(4\pi)$, a transversalidade é quebrada, resultando em $\mathcal{C} = \frac{25-6\pi}{12} \approx 0.51$. É importante mencionar que não foi utilizado o recurso da identidade tipo-Ward-Takahashi para o vértice, pois sua validade na presença de interações foi contestada em [47], e a transversalidade é o suficiente para fixar o único parâmetro livre do modelo.

4 Anomalia da Paridade na QED$_3$

O interesse nos resultados da QED$_3$ se encontra ativo ainda hoje. Em parte, isso se deve à massa topológica induzida radiativamente [52], que é o principal ingrediente de modelos teóricos de Isolantes Topológicos [55] em Matéria Condensada. Interessantemente, esse termo de massa produzido quebra uma das simetrias da lagrangiana clássica: a paridade. Essa anomalia foi bem explorada em [52, 51], onde a Regularização Pauli-Villars foi utilizada para demonstrar que essa quebra de paridade é introduzida ao se aplicar uma regularização invariante de calibre. Isto é, é a escolha da regularização que promove a seleção de qual simetria ficaria respeitada.

Além do método de Pauli-Villars utilizado inicialmente, muito se debateu [56, 57, 59, 60, 61] sobre o uso de outros métodos de regularização, sobre suas consequências e das possíveis ambiguidades geradas pelos métodos no cálculo perturbativo. O caso da Regularização Dimensional é particularmente interessante. Por ser um método criado para respeitar a simetria de calibre, a priori parece ser uma boa proposta empregá-lo para compararmos com os resultados via Pauli-Villars. Mas como foi mostrado em [56], o uso ingênuo desse método não deixa a teoria bem definida, principalmente na parte finita dos cálculos. Isso se deve à álgebra do tensor antissimétrico de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho}$, que não é bem definida em dimensões não-inteiras. Além disso, ao resolver a parte divergente é necessário fazer uma continuação analítica das fórmulas encontradas em livros textos, já que a solução se encontra fora do limite de validade das fórmulas usuais.

Para evitar tais ambiguidades ao sair da dimensão física do problema e analisar ambiguidades provenientes da regularização, a Regularização Implícita foi utilizada em [35]. Os autores mostraram que o método se mostrou igualmente válido e mais simples, já que evita um primeiro passo necessário apontado por [58], que é a utilização da Regularização HCD (higher covariant derivative). Com o avanço do próprio método da Regularização Implícita [18], aprendemos que uma análise mais delicada do papel dos rótulos pode render uma melhor compreensão sobre as simetrias em questão no modelo. Nesse mesmo artigo foi mostrado que a invariância de rotulagem de diagramas de Feynman é uma condição necessária e suficiente para garantir a simetria de calibre abeliana em qualquer ordem de loop. Concluímos então que seria interessante voltar ao caso da QED_3 e implementar a mesma metodologia para compreendermos melhor o que o rótulo pode nos dizer sobre o caso levantado em [51, 52] das simetrias de calibre e paridade.

Outra razão para analisarmos o caso da QED_3 é devido à pesquisa teórica de Isolantes Topológicos em Matéria Condensada, que utiliza modelos construídos a partir de teorias de Chern-Simons [55]. Mesmo com as questões sobre o uso da Regularização Dimensional levantadas em [56], vemos artigos, *e.g.* [54], usando o método sem abordar as questões de ambiguidade vindas da continuação analítica dimensional usada pelo método. Ali os autores afirmam usar a Regularização Dimensional devido ao aparante sucesso do seu uso em um modelo tipo Teoria Quântica de Campos para o grafeno [13], cujo resultado foi debatido e contestado no capítulo 3.

Separamos nossa análise em duas seções diferentes: uma para o cálculo da QED_3 abeliana convencional e outra para um caso não-abeliano da QED_3.

4.1 Caso Abeliano

Dado a Lagrangiana do modelo

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{4.1}$$

começamos olhando para a expansão perturbativa da ação efetiva da QED_3 com rótulo arbitrário. A proposta é empregar a Regularização Implícita e analisar o efeito dos rótulos na simetria de calibre e, consequentemente, a simetria de paridade. Para isso olhamos, na expansão a 1-loop da ação, os termos capazes de produzir uma massa efetiva; ou seja, os termos quadráticos em A^μ:

$$\Gamma[A] = \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A_\nu(k)\Pi^{\nu\mu}(k)A_\mu(k), \tag{4.2}$$

onde $\Pi^{\nu\mu}$ é o tensor polarização do vácuo

$$\Pi^{\nu\mu}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{tr}\left[S(k+p+\alpha)\gamma^\nu S(p+\alpha)\gamma^\mu\right], \tag{4.3}$$

α é o rótulo arbitrário do diagrama de Feynman, e $S(p)$ é o propagador fermiônico

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}. \tag{4.4}$$

Para computar o traço do tensor polarização (4.3), usamos os resultados em 3D das matrizes γ^μ:

$$\mathrm{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 2g^{\mu\nu}, \tag{4.5}$$

$$\mathrm{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] = 2i\epsilon^{\mu\nu\rho}, \tag{4.6}$$

$$\mathrm{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 2\left(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}\right). \tag{4.7}$$

Com isso, obtemos três partes para o tensor polarização

$$\Pi^{\nu\mu}(p) = n^{\nu\mu} + m^{\nu\mu} + l^{\nu\mu}, \tag{4.8}$$

onde $n^{\nu\mu}$, $m^{\nu\mu}$ e $l^{\nu\mu}$ são as partes com as divergências lineares, logarítmicas e os termos finitos respectivamente:

$$n^{\nu\mu} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2\left[2\left(p+\alpha\right)^\nu \left(p+\alpha\right)^\mu - \left((p+\alpha)^2 - m^2\right) g^{\nu\mu}\right]}{\left[\left(k+p+\alpha\right)^2 - m^2\right]\left((p+\alpha)^2 - m^2\right)}, \tag{4.9}$$

$$m^{\nu\mu} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2\left[k^\nu (p+\alpha)^\mu + k^\mu (p+\alpha)^\nu - k \cdot (p+\alpha) g^{\nu\mu}\right]}{\left[\left(k+p+\alpha\right)^2 - m^2\right]\left((p+\alpha)^2 - m^2\right)}, \tag{4.10}$$

$$l^{\nu\mu} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2im\epsilon^{\rho\nu\mu}\left[(p+k+\alpha)_\rho - (p+\alpha)_\rho\right]}{\left[\left(k+p+\alpha\right)^2 - m^2\right]\left((p+\alpha)^2 - m^2\right)}. \tag{4.11}$$

Como existe a possibilidade de se fazer uma mudança na variável de integração nos termos finitos e com divergência logarítmica, os termos $m^{\nu\mu}$ e $l^{\nu\mu}$ produzem já um resultado conhecido [35]. Dessa forma, apenas resta olharmos para os termos em $n^{\nu\mu}$. Para separar as partes divergentes, finitas e as dependências dos rótulos, aplicamos a identidade (2.1) consecutivas vezes e obtemos

$$n^{\nu\mu} = 2g^{\nu\mu} I_{lin}(m^2) - 2f_1^{\nu\mu}(m^2) - 2f_2^{\nu\mu}(m^2) + 2f_3^{\nu\mu}(m^2) \tag{4.12}$$

onde definimos

$$I_{lin}(m^2) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - m^2}, \tag{4.13}$$

$$f_1^{\nu\mu}(m^2) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{g^{\nu\mu}\left[(k+\alpha)^2 + 2(k+\alpha)\cdot p\right]}{(p^2 - m^2)^2\left[(k+p+\alpha)^2 - m^2\right]}, \tag{4.14}$$

$$f_2^{\nu\mu}(m^2) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2(p+\alpha)^\nu (p+\alpha)^\mu\left[k^2 + 2k\cdot(p+\alpha)\right]}{\left((p+\alpha)^2 - m^2\right)^2\left[(k+p+\alpha)^2 - m^2\right]}, \tag{4.15}$$

$$f_3^{\nu\mu}(m^2) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2(p+\alpha)^\nu (p+\alpha)^\mu}{\left((p+\alpha)^2 - m^2\right)} \tag{4.16}$$

Podemos demonstrar que $f_1^{\nu\mu}(m^2) = -f_1^{\nu\mu}(m^2)$ fazendo duas mudanças consecutivas: $p \to -p-k$ e $p \to p+\alpha$. Sabemos que a mudança na variável de integração neste caso é permitido por estarmos lidando com termos finitos e com divergências logarítmicas. Isso nos permite concluir que $f_1^{\nu\mu}(m^2) = 0$. Já o termo $f_2^{\nu\mu}(m^2)$ pode ser demonstrado independente de α, pois como possui apenas termos finitos e divergências logarítmicas, podemos transformar $p + \alpha \to p$, obtendo assim um resultado já conhecido [35].

O termo $f_3^{\nu\mu}(m^2)$ ainda pode ser decomposto usando a identidade (2.1)

$$\begin{aligned} f_3^{\nu\mu}(m^2) =& \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2p^\nu p^\mu}{(p^2-m^2)^2} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2\alpha^\nu \alpha^\mu}{(p^2-m^2)^2} \\ & - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{4(p+\alpha)^\nu (p+\alpha)^\mu (\alpha^2 + 2p\cdot\alpha)}{(p^2-m^2)^2\left((p+\alpha)^2-m^2\right)} \\ & + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2(p+\alpha)^\nu (p+\alpha)^\mu (\alpha^2 + 2p\cdot\alpha)^2}{(p^2-m^2)^2\left((p+\alpha)^2-m^2\right)^2}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

O primeiro termo acima pode ser somado ao I_{lin} da eq.(4.12), obtendo o termo de superfície definido em (2.19)

$$\Xi^{\nu\mu} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{g^{\nu\mu}}{p^2-m^2} - 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^\nu p^\mu}{(p^2-m^2)^2}. \tag{4.18}$$

Para mostrar o resultado dos outros termos, completamos o quadrado, adicionamos e subtraímos massa $(\alpha^2 + 2p\cdot\alpha)^2 \to (\alpha^2+2p\cdot\alpha)[(p+\alpha)^2 - m^2 + m^2 - p^2]$ no último termo de (4.17) para somar com o penúltimo, obtendo

$$\begin{aligned} & - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2(p+\alpha)^\nu (p+\alpha)^\mu (\alpha^2 + 2p\cdot\alpha)}{(p^2-m^2)^2\left[(p+\alpha)^2-m^2\right]} \\ & \qquad - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2(p+\alpha)^\nu (p+\alpha)^\mu (\alpha^2 + 2p\cdot\alpha)}{(p^2-m^2)\left[(p+\alpha)^2-m^2\right]^2}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Para juntar os dois termos, fazemos uma mudança no segundo $p \to -p-\alpha$. Da junção ainda podemos fazer o mesmo procedimento de completar o quadrado, somar e subtrair massa

$$-\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2\alpha^\nu \alpha^\mu}{(p^2-m^2)^2} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2(p^\nu\alpha^\mu + p^\mu\alpha^\nu + \alpha^\nu\alpha^\mu)}{(p^2-m^2)[(p+\alpha)^2-m^2]}. \tag{4.20}$$

Note que o primeiro termo aparece com sinal trocado em (4.17). Já o segundo termo pode ser mostrado nulo, pois uma mudança de $p + \alpha \to -p$ o transforma apenas em um sinal global, como $f_1^{\nu\mu}(m^2)$.

Somando os resultados, podemos escrever

$$n^{\nu\mu} = 2\Xi^{\nu\mu} - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{4p^\nu p^\mu \left[k^2 + 2k\cdot p\right]}{(p^2-m^2)^2\left[(k+p)^2 - m^2\right]}. \tag{4.21}$$

É valido ressaltar que os procedimentos de completar o quadrado ou de adição e subtração podem alterar os graus de divergência, com consequências visíveis no resultado das integrais. Para assegurar-nos, também resolvemos as integrais de forma explícita e achamos os mesmos resultados aqui apresentados.

O mais importante é que agora demonstramos diretamente que o resultado não depende dos rótulos. Assim, resta-nos apenas o cálculo das integrais do Tensor Polarização

$$\begin{aligned}\Pi^{\nu\mu}(p) =\ & 2\Xi^{\nu\mu} - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{4p^\nu p^\mu \left[k^2 + 2k\cdot p\right]}{(p^2-m^2)^2\left[(k+p)^2 - m^2\right]} \\ & + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2\left[k^\nu p^\mu + k^\mu p^\nu - k\cdot p g^{\nu\mu}\right]}{\left[(k+p)^2 - m^2\right](p^2-m^2)} \\ & + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2im\epsilon^{\rho\nu\mu}\left[(p+k)_\rho - p_\rho\right]}{\left[(k+p)^2 - m^2\right](p^2-m^2)}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

O resultado é conhecido [35]

$$\Pi^{\nu\mu}(p) = 2\Xi^{\nu\mu} + 2H_1(p^2,m^2)\epsilon^{\nu\mu\rho}p_\rho + 2H_2(p^2,m^2)\left(\frac{p^\nu p^\mu}{p^2} - g^{\nu\mu}\right), \tag{4.23}$$

onde

$$H_1(p^2,m^2) = \frac{i}{4\pi}\left[\frac{m}{\sqrt{p^2}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{p^2/4m^2}}{1-\sqrt{p^2/4m^2}}\right)\right], \tag{4.24}$$

$$H_2(p^2,m^2) = \frac{1}{4\pi}\left[\sqrt{m^2} - \frac{1}{4\sqrt{p^2}}(p^2+4m^2)\ln\left(\frac{1+\sqrt{p^2/4m^2}}{1-\sqrt{p^2/4m^2}}\right)\right]. \tag{4.25}$$

Como conhecemos o termo de superfície $\Xi^{\nu\mu}$, ele deve ser fixado pelas simetrias da teoria ou medidas experimentais [53, 19]. Neste caso da QED$_3$ abeliana, as duas simetrias da lagrangiana clássica são: Gauge e Paridade. A discussão levantada em [51, 52] é justamente sobre a anomalia quântica criada pelos termos resultantes em (4.23). Enquanto os termo que acompanham $H_1(p^2,m^2)$ e $H_2(p^2,m^2)$ são invariantes de calibre, o termo que acompanha $H_1(p^2,m^2)$ não é invariante por paridade.

A priori, poderíamos dizer que o termo de superfície deveria ser capaz de reproduzir dois possíveis resultados. Cada um preservando uma simetria específica.

Dessa forma, poderíamos concluir que a escolha da regularização é o que determinaria qual simetria sobreviveria no resultado. Para analisarmos de uma forma mais completa, podemos partir de uma versão mais completa de $\Xi^{\nu\mu}$ incluindo uma possível dependência do rótulo α, como se vê abaixo:

$$\Xi^{\nu\mu}(\alpha, m^2) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{g^{\nu\mu}}{(p+\alpha)^2 - m^2} - 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(p+\alpha)^\nu (p+\alpha)^\mu}{\left((p+\alpha)^2 - m^2\right)^2}. \tag{4.26}$$

Para primeiramente analisarmos a dependência em m^2 iniciamos derivando

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dm^2}\Xi^{\nu\mu}(\alpha, m^2) &= g^{\nu\mu} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left((p+\alpha)^2 - m^2\right)^2} - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{4(p+\alpha)^\nu (p+\alpha)^\mu}{\left((p+\alpha)^2 - m^2\right)^3} \\
&= \frac{i}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{m^2}} g^{\nu\mu} - \frac{i}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{m^2}} g^{\nu\mu} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Com isso, concluímos que $\Xi^{\nu\mu}(\alpha)$ não depende de m^2. A seguir, aplicamos o mesmo procedimento para α

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha^\lambda}\Xi^{\nu\mu}(\alpha) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2(p+\alpha)^\nu (p+\alpha)^\mu 2(p+\alpha)^\lambda}{\left((p+\alpha)^2 - m^2\right)^3} \\
&\quad - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2\left(g^{\nu\lambda}(p+\alpha)^\mu + g^{\mu\lambda}(p+\alpha)^\nu\right)}{\left((p+\alpha)^2 - m^2\right)^2} \\
&= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{4p'^\nu p'^\mu p'^\lambda}{(p'^2 - m^2)^3} - 2\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{g^{\nu\lambda}p'^\mu + g^{\mu\lambda}p'^\nu}{(p'^2 - m^2)^2} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Ambas as partes são nulas pois são ímpares em p. Os únicos parâmetros livres que restam em $\Xi^{\nu\mu}$ são uma constante de integração c' e o grau de divergência Λ. Utilizando a parametrização da divergência linear (2.18), podemos analisar a primeira parte de (4.26)

$$-g^{\nu\mu} \frac{i}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\pi m^2} - c'_1 \Lambda g^{\nu\mu}, \tag{4.29}$$

e a segunda

$$g^{\nu\mu} \frac{i}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\pi m^2} + c'_2 \Lambda g^{\nu\mu}. \tag{4.30}$$

Somando-as temos a forma geral possível para o termo de superfície

$$\Xi^{\nu\mu} = -(c'_1 - c'_2)\Lambda g^{\nu\mu}. \tag{4.31}$$

A dependência em m^2 foi cancelada, como o esperado de (4.27). A única opção para obtermos um resultado finito para o termo de superfície é caso c_1' seja o mesmo que c_2', ou seja $c_1' = c_2'$; desta forma $\Xi^{\nu\mu} = 0$.

Como o único termo não-invariante de calibre no Tensor Polarização foi aqui demonstrado ser zero. Podemos concluir que as parametrizações (4.29) e (4.30) nesta analise estão conectadas com a invariância de calibre da teoria. Então, podemos concluir que

$$\Pi^{\nu\mu}(p) = 2H_1(p^2, m^2)\epsilon^{\nu\mu\rho}p_\rho + 2H_2(p^2, m^2)\left(\frac{p^\nu p^\mu}{p^2} - g^{\nu\mu}\right). \tag{4.32}$$

No limite $m \to \infty$, o Tensor Polarização vai para

$$\Pi^{\nu\mu}(p) = \frac{i}{4\pi}\frac{m}{|m|}\epsilon^{\nu\mu\rho}p_\rho. \tag{4.33}$$

Apesar dos resultados estarem de acordo com os achados anteriores, pela Regularização Pauli-Villars [51, 52] e pelo primeiro uso da Regularização Implícita [35], o método aplicado neste caso foi conceitualmente diferente. Diferentemente de propor usar uma regularização invariante de calibre *ab initio*, o que já supostamente levaria à quebra da paridade, pudemos empregar um método olhando para a liberdade de rotulação dos momentos da perturbação da lagrangiana original da QED. O uso de método capaz de reproduzir um resultado que deixe a paridade como a boa simetria, deverá quebrar a invariância de calibre necessariamente. Caso seja interessante estudar uma teoria sem a violação da paridade, seria necessário partir de uma QED$_3$ com uma ação modificada, como por exemplo [62].

4.2 Caso não-Abeliano

Outro caso não menos interessante de se estudar, nem que seja por uma questão de curiosidade matemática, é o caso não-abeliano da QED$_3$. Nesta seção, nos restringimos a um caso especifico de não-comutatividade, também estudado em [51], onde o campo de calibre é constante (A^μ_a =constante) mas não comuta: $[A^\mu, A^\nu] \neq 0$, onde $A^\mu = gA^\mu_a\tau_a/2i$ e τ_a são as matrizes de Pauli. Para a teoria não-abeliana:

$$I_{eff}[A] = -i\mathrm{tr}\ln(\not{D} + m), \tag{4.34}$$

$$\not{D}(x) = -i(\not{\partial} + \not{A}). \tag{4.35}$$

Como A^μ =constante, a integração em $\int d^3x$ nada mais é que o volume. Então, podemos olhar direto para a Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{eff}[A] = i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ln\det(\not p + \not\alpha - i\not A + m), \tag{4.36}$$

onde α é novamente um rótulo arbitrário.

Por questões de conveniência, passamos para o cálculo da ação efetiva no espaço Euclidiano. Para isso, fazemos uma rotação de Wick e introduzimos $(-iA^0, A^1, A^2) \to (A^3, A^1, A^2)$:

$$\mathcal{L}_{eff}[A] = i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ln\det[\sigma^\mu(p^\mu + \alpha^\mu - iA^\mu) + im]. \tag{4.37}$$

A matriz A^μ_a pode ser diagonalizada fazendo rotações no espaço e no espaço de isospin. Dessa forma, o determinante da equação acima se torna

$$\begin{aligned}\det\left[\sigma^\mu\left((p+\alpha)^\mu - \frac{g}{2}A^\mu_a\tau_a\right) + im\right] &= \left((p+\alpha)^2 + m^2\right)^2 + 2(p+\alpha)^2\mathrm{tr}A^2 + \Delta \qquad (4.38)\\ &\quad - 4\left[(p_1+\alpha_1)^2A_1^2 + (p_2+\alpha_2)^2A_2^2 + (p_3+\alpha_3)^3A_3^3\right],\\ \Delta &= 2m^2\mathrm{tr}A^2 + \left(A^2\right)^2 - \mathrm{tr}^*F^2 + 8im\det A. \qquad (4.39)\end{aligned}$$

Podemos normalizar I_{eff} adicionando um termo tal que $I_{eff}[A] - I_{eff}[A=0] = 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{eff} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big\{\ln\Big[\left((p+\alpha)^2+m^2\right)^2 + 2(p+\alpha)^2\mathrm{tr}A^2 + \Delta\\ &\qquad - 4\left[(p_1+\alpha_1)^2A_1^2 + (p_2+\alpha_2)^2A_2^2 + (p_3+\alpha_3)^3A_3^3\right]\Big]\\ &\qquad - \ln\left(p^2+m^2\right)^2\Big\}\\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ln\Big[1 + \frac{2(p+\alpha)^2\mathrm{tr}A^2}{\left((p+\alpha)^2+m^2\right)^2} + \frac{\Delta}{\left((p+\alpha)^2+m^2\right)^2}\\ &\qquad - \frac{4\left[(p_1+\alpha_1)^2A_1^2 + (p_2+\alpha_2)^2A_2^2 + (p_3+\alpha_3)^3A_3^3\right]}{\left((p+\alpha)^2+m^2\right)^2}\Big].\end{aligned}$$

Expandindo o logaritmo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{eff} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Bigg\{&\frac{2(p+\alpha)^2\mathrm{tr}A^2}{\left((p+\alpha)^2+m^2\right)^2} - \frac{4\left[(p_1+\alpha_1)^2A_1^2 + (p_2+\alpha_2)^2A_2^2 + (p_3+\alpha_3)^3A_3^3\right]}{\left((p+\alpha)^2+m^2\right)^2}\\ &+ \frac{\Delta'}{\left((p+\alpha)^2+m^2\right)^2} + \frac{2m^2\mathrm{tr}A^2}{\left((p+\alpha)^2+m^2\right)^2}\Bigg\} + \ldots,\end{aligned} \tag{4.40}$$

onde $\Delta' = (\mathrm{tr}A^2)^2 - \mathrm{tr}^*F^2 + 8im\det A$. Neste estágio, podemos notar que as integrais são muito similares às do caso abeliano. Elas são iguais às (4.12), mas com os índices

μ e ν contraídos. Dessa forma, é possível fazer a mesma análise feita na seção anterior, para concluirmos que o resultado é independente dos rótulos. Por isso, a partir desse ponto, deixaremos de denotar os termos α nos cálculos.

Ao levarmos em conta os termos quadráticos A^μ, já que são capazes de quebrar a invariância de calibre da teoria, podemos ignorar o resto dos termos da expansão. Olhando para os termos divergentes, podemos juntar o primeiro e último termo da equação (4.40) e abrir o traço da matriz A que agora está diagonalizada:

$$\begin{aligned}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{2\left(p^2+m^2\right)\left(A_1^2+A_2^2+A_3^2\right)}{\left(p^2+m^2\right)^2} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{2\left(A_1^2+A_2^2+A_3^2\right)}{\left(p^2+m^2\right)} \\ &= 2\left(A_1^2+A_2^2+A_3^2\right) I_{lin}(m^2), \qquad (4.41)\end{aligned}$$

onde $I_{lin}(m^2)$ foi definido em (4.13).

A outra parte divergente está no segundo termo da eq.(4.40), que podemos separar nas coordenadas:

$$\begin{aligned}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_1^2}{\left(p^2+m^2\right)^2} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int p^2dp\int_0^\pi \sin(\theta)d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\frac{p^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi)}{\left(p^2+m^2\right)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty dp\frac{p^4}{\left(p^2+m^2\right)^2} \qquad (4.42)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_2^2}{\left(p^2+m^2\right)^2} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int p^2dp\int_0^\pi \sin(\theta)d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\frac{p^2\sin^2(\theta)\sin^2(\phi)}{\left(p^2+m^2\right)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty dp\frac{p^4}{\left(p^2+m^2\right)^2} \qquad (4.43)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_3^2}{\left(p^2+m^2\right)^2} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int p^2dp\int_0^\pi \sin(\theta)d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\frac{p^2\cos^2(\theta)}{\left(p^2+m^2\right)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty dp\frac{p^4}{\left(p^2+m^2\right)^2}. \qquad (4.44)\end{aligned}$$

Podemos transformar as integrais acima em

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dp\frac{p^4}{\left(p^2+m^2\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{4\pi}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p^2}{\left(p^2+m^2\right)^2}, \qquad (4.45)$$

obtendo para o segundo termo de (4.40)

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-4\left(p_1^2A_1^2+p_2^2A_2^2+p_3^3A_3^3\right)}{\left(p^2+m^2\right)^2} = -\frac{4}{3}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p^2\left(A_1^2+A_2^2+A_3^2\right)}{\left(p^2+m^2\right)^2}. \qquad (4.46)$$

Para parametrizar a integral divergente acima, primeiramente derivamos em m^2 para podermos obter uma integral finita em p

$$-\frac{4}{3}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-2p^2\left(A_1^2+A_2^2+A_3^2\right)}{\left(p^2+m^2\right)^3} = \frac{2\sqrt{\pi}\left(A_1^2+A_2^2+A_3^2\right)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{m^2}}. \qquad (4.47)$$

Integrando de volta em m^2 parametrizamos o segundo termo de (4.40)

$$+4\left(A_1^2+A_2^2+A_3^2\right)\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{m^2}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}-2c_1\Lambda, \tag{4.48}$$

onde c_1 é uma constante arbitrária e Λ é a divergência.

Já que na lagrangiana original não há termos quadráticos em A^μ para absorver as divergências via Renormalização, partimos para analisar as divergências lineares da equação (4.40) encontrados nas partes (4.41) e (4.48). Podemos utilizar a relação de escala (2.18) da integral básica de divergência linear:

$$I_{lin}=-\frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{m^2}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}+c_2\Lambda. \tag{4.49}$$

Deixamos c_2 como uma constante diferente daquela presente em (4.48), já que ambas surgem de fontes diferentes. Dessa forma, podemos somar os termos (4.41) e (4.48) parametrizados:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{eff}^{div}&=\left(A_1^2+A_2^2+A_3^2\right)\left[-4\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{m^2}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}+2c_2\Lambda+4\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{m^2}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}-2c_1\Lambda\right]\\&=2\left(A_1^2+A_2^2+A_3^2\right)\left(c_2-c_1\right)\Lambda.\end{aligned} \tag{4.50}$$

Para que a parte divergente de $\mathcal{L}_{eff}$ seja nula, podemos explorar a arbitrariedade da parametrização do I_{lin} fixando $c_1=c_2$. O mesmo resultado é obtido via Regularização Implícita, caso optássemos por somar e subtrair massa ao termo da equação (4.46) ao invés de usar o procedimento de derivar e integrar em m^2. Se tivéssemos escolhido esse caminho, teríamos as mesmas constantes de integração multiplicando Λ, porém os coeficientes seriam diferentes. A única forma de lidarmos com o termo quadrático $\mathrm{tr}A^2$ seria colocar as constantes para zero e, com isso, não poderíamos preservar a divergência linear de cada integral. Por isso, escolhemos a forma mais geral apresentada nesta seção pois conseguimos lidar com os termos quadráticos em A^μ sem eliminar a priori o caráter divergente das integrais.

Este mesmo resultado pode ser encontrado no caso da Regularização Dimensional. O único problema que pode surgir dá-se no caso de tentarmos usar a continuação analítica (ver apêndice A.2) das fórmulas de integrais em N-dimensões [16]. Se fosse adicionado e subtraído massa, como explicado no parágrafo anterior, a parte divergente das integrais não se cancelam. Neste caso, diferentemente da parametrização usada em (4.49) na Regularização Implícita, não há liberdade para colocarmos o termo restante para zero.

5 QED$_4$ COM ACOPLAMENTO NÃO-MINIMO

A covariança de Lorentz e a simetria CPT são ingredientes básicos para a construção de teorias de campos quânticos locais. Consequentemente, elas estão presentes na construção do Modelo Padrão das interações fundamentais. Entretanto, modelos que violam Lorentz e CPT tem sido uma área de intensa investigação na última década, [63]-[110] como um possível limite de uma teoria mais fundamental. A formulação de um Modelo Padrão Estendido (SME) [63]-[66] abre um leque de possibilidades de estudo, dentre os quais nos interessam particularmente os setores de gauge e fermiônico.

No setor de gauge, percebemos que os estudos são normalmente concentrados em dois tipos de termos: o termo tipo-Chern-Simons CPT-impar de Carroll-Field-Jackiw [77] e um termo quadrático CPT-par no tensor de campo eletromagnético [64]. No setor fermiônico, as pesquisas têm sido focadas em um termo axial que viola Lorentz e CPT, basicamente por ter havido uma controvérsia sobre a geração do termo Carroll-Field-Jaciw radiativamente [83]-[31].

Recentemente, o interesse em termos CPT-par cresceu devido ao desenvolvimento do conceito de aether e do estudo de dimensões extras. Em [67], os autores discutem o uso de campos tensoriais (aether) que violam Lorentz com valores esperados, alinhados com dimensões extras para mantê-las escondidas. Os termos que violam Lorentz dos setores de gauge, de férmions e de escalares viriam da interação entre estes campos com os campos aether. Em [68] e [69], a geração quântica desses termos de interação aether foram estudadas. Particularmente, no caso da eletrodinâmica [69], o termo de acoplamento mínimo foi substituído por um não-mínimo que viola Lorentz. O termo de interação aether foi gerado quando a auto-energia do fóton foi calculada, com um coeficiente que é dependente de regularização no caso de 4 dimensões do espaço-tempo. Mais especificamente, foram feitos os cálculos em 3, 4 e 5 dimensões com diferentes métodos de regularização, e apenas em 4 dimensões foi detectado ambiguidades nos cálculos.

Nesta parte do trabalho, consideramos um versão modificada da Eletrodinâmica Quântica em 4 dimensões com o acoplamento entre o fóton e o férmion composto por dois termos: um não-mínimo e um mínimo. Este modelo já foi considerado em outros trabalhos [70, 71, 72] no contexto da Mecânica Quântica Relativística. Em [71] o modelo foi usado para calcular correções do espectro de Hidrogênio e colocar fortes restrições na magnitude do parâmetro que viola Lorentz. Em [72] o modelo foi usado para estudar a geração de momento magnético vindo do acoplamento não-mínimo, já que um pequeno momento de dipolo magnético de partículas neutras podem assinalar uma violação da simetria de Lorentz. Aqui analisaremos as correções quânticas para o setor fotônico, considerando a teoria como um modelo efetivo. Este é apenas um de muitos outros possíveis termos não-renormalizáveis que violam Lorentz. Além do rico conteúdo físico explorado a nível árvore em [70, 71, 72], a motivação para a investigação presente é o aspecto interessante com que é possível gerar radiativamente ambos termos CPT-par e de Carroll-Field-Jackiw (CFJ). Embora a geração quântica do termo CFJ de um termo axial no setor fermiônico já ter sido investigada, a presente possibilidade ainda não foi explorada.

O fato do modelo ser invariante de calibre nos permite fazer uma análise interessante dos valores de ambos os coeficientes dos hipotéticos termos gerados radiativamente CPT-par e ímpar. De fato, mostramos que as correções finitas a 1-loop que violam Lorentz são suprimidas caso seja usado uma regularização que respeite a invariância de gauge. Entretanto, um método que viola gauge, seguido por um contratermo que restaura simetria no setor simétrico em Lorentz abre a possibilidade de tais induções. Em cálculos de ordem superior para o parâmetro que viola Lorentz, as restrições que foram construídas em [71] colocam fortes vínculos para a estrutura dos contratermos. Para um modelo efetivo, a energia de cutoff é um parâmetro importante e deve ser estabelecido por motivos físicos subjacentes. Características desejadas de uma Teoria Quântica de Campos, como causalidade e estabilidade, podem ser perdidas em energias muito altas [75, 76]. Por isso, propomos uma condição que o cutoff deve satisfazer a fim de prevenir a proliferação de novos termos em ordens acima de 1-loop.

Esta parte da pesquisa está organizada da seguinte maneira: a primeira seção é dedicada à apresentação do modelo; a segunda seção apresenta uma análise na geração a 1-loop de termos que violam Lorentz no setor puramente de gauge; na terceira seção apresentamos os cálculos, que utilizando a invariância de gauge é capaz de fixar os coeficientes das correção quânticas a 1-loop; na quarta seção analisamos, em bases gerais, a predizibilidade do modelo em ordens superiores a 1-loop usando argumentos de simetria. Por fim, apresentamos nossos comentários finais na quinta seção.

5.1 O Modelo

Começamos considerando a ação usada em [69] em 4 dimensões do espaço-tempo, na qual o termo de acoplamento mínimo da QED é substituído por um termo de interação não-minima que viola Lorentz $-e\bar{\psi}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\beta b_\mu F_{\nu\alpha}\psi$, com b_μ sendo um vetor constante que seleciona uma direção fixa do espaço-tempo. Este termo pode ser mostrado como invariante de gauge, bastando para isso transformar $\psi \to e^{i\alpha(x)}\psi$ e $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha(x)$, para notarmos que o termo não varia. Ainda assim, a ação toda não é invariante devido à falta do acoplamento mínimo. Como os autores mostraram, quando a correção de 1-loop para a função de dois pontos do fóton é calculada, um termo aether dependente de regularização é gerado. Para tal modelo não há uma forma de fixar o coeficiente desse termo.

Nossa intenção nessa parte do trabalho é analisar uma versão modificada desse modelo [70], [71], [72], no qual a invariância de gauge da ação original é restaurada pela presença do termo de acoplamento mínimo juntamente com o não-mínimo que viola Lorentz:

$$\Sigma = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m - eA\!\!\!/ - e\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\beta b_\mu F_{\nu\alpha}\right)\psi \right\}. \tag{5.1}$$

O termo de interação contém duas contribuições: o vértice tradicional da QED e o que viola Lorentz. Além do fato de Σ ser invariante de gauge, nós veremos que suas correções quânticas de 1-loop podem produzir dois tipos de termos que violam Lorentz no setor fotônico: o termo aether CPT-par e o termo tipo-Chern-Simons de Carroll-Field-Jackiw CPT-ímpar [77]. Interessa-nos a possibilidade de fixar os coeficientes desses termos, baseado em argumentos de invariância de calibre. Estas contribuições são geradas pelo tensor de polarização do vácuo, composto em ordem de 1-loop por apenas um diagrama. Efetivamente, essa amplitude pode ser decomposta em quatro partes, já que do ponto de vista calculacional o problema é equivalente ao de que existem dois vértices diferentes,

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = \Pi^{\mu\nu}_{11}(p) + \Pi^{\mu\nu}_{12}(p) + \Pi^{\mu\nu}_{21}(p) + \Pi^{\mu\nu}_{22}(p). \tag{5.2}$$

Os índices inferiores são referentes aos vértices, onde 1 (2) se refere ao acoplamento mínimo (não-mínimo). Na equação acima, o primeiro termo corresponde à QED tradicional, os dois termos cruzados são responsáveis pelo termo de Chern-Simons e o último termo gera a parte CPT-par. Podemos tecer alguns comentários se considerarmos toda a amplitude. Os termos que possivelmente violam Lorentz, nomeadamente os últimos três, são individualmente invariantes de gauge. Dessa forma, se focarmos simplesmente nestas peças não conseguimos trazer nenhuma luz à discussão, se nossa intenção for usar a simetria de gauge para fixar os coeficientes arbitrários do modelo. É importante reforçar que estamos considerando a invariância de gauge da ação (transversalidade do tensor de polarização do vácuo), que é uma condição um pouco menos restritiva à principio, e que permite um termo tipo-Chern-Simons.

Primeiramente, escrevemos todas as contribuições de 1-loop para a auto-energia do fóton:

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}_{11} &= -\mathrm{tr}\int_k ie\gamma^\nu s(p+k) ie\gamma^\mu s(k) \\
&= e^2 \mathrm{tr}\int_k \gamma^\nu s(p+k)\gamma^\mu s(k) = e^2 T^{\mu\nu}, && (5.3)\\
\Pi^{\mu\nu}_{12} &= -\mathrm{tr}\int_k \left(-2ie\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_\rho \gamma^\rho b_\alpha(-p_\beta)\right) s(p+k) ie\gamma^\mu s(k) \\
&= 2e^2 \varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_\rho b_\alpha p_\beta T^{\mu\rho}, && (5.4)\\
\Pi^{\mu\nu}_{21} &= -2e^2 \varepsilon^{\alpha\beta\mu}{}_\rho b_\alpha p_\beta T^{\rho\nu} && (5.5)
\end{aligned}$$

e

$$\Pi^{\mu\nu}_{22} = -4e^2 (\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_\rho b_\alpha p_\beta)(\varepsilon^{\lambda\sigma\mu}{}_\delta b_\lambda p_\sigma) T^{\rho\delta}, \tag{5.6}$$

onde

$$T^{\mu\nu} = \mathrm{tr}\int_k \gamma^\nu s(p+k)\gamma^\mu s(k), \tag{5.7}$$

com $s(k)$ sendo o propagador fermiônico e $\int_k$ significa $\int d^4k/(2\pi)^4$. Observamos que, devido à estrutura de Lorentz de $T^{\mu\nu}$, é possível concluir que $\Pi^{\mu\nu}_{12} = \Pi^{\mu\nu}_{21}$.

5.2 As correções radiativas violadoras de Lorentz

As correções de 1-loop para a auto-energia do fóton são dadas pelas equações (5.3)-(5.6). Agora focaremos nas últimas três contribuições, que são as possíveis fontes de violação de Lorentz no setor puramente fotônico. Começamos considerando a forma geral do tensor $T^{\mu\nu}$, sem calcular explicitamente a amplitude, para então focar na parte de interesse da amplitude e determinar os coeficientes.

Analisando primeiro as duas contribuições idênticas vindas das equações (5.4) e (5.5), que podem produzir um termo CPT-ímpar tipo-Chern-Simons de Carroll-Field-Jackiw. Temos

$$\Pi_{12}^{\mu\nu} + \Pi_{21}^{\mu\nu} = 4e^2 \varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho} b_\alpha p_\beta T^{\mu\rho}, \tag{5.8}$$

no qual

$$T^{\mu\rho} = \left(p^\mu p^\rho - p^2 g^{\mu\rho}\right) \Pi(p^2) + \alpha m^2 g^{\mu\rho} + \beta p^\mu p^\rho \tag{5.9}$$

é a expressão mais geral para $T^{\mu\rho}$. $\Pi(p^2)$ é a função que pode incorporar as divergências e α, β são constantes adimensionais. O termo tipo-Chern-Simons é dado por

$$\Pi_{CS}^{\mu\nu} = \lim_{p^2 \to 0} \left(\Pi_{12}^{\mu\nu} + \Pi_{21}^{\mu\nu}\right). \tag{5.10}$$

Então vemos que

$$\Pi_{CS}^{\mu\nu} = 4\alpha m^2 e^2 \varepsilon^{\alpha\beta\nu\mu} b_\alpha p_\beta. \tag{5.11}$$

Podemos realizar uma análise similar para o termo CPT-par:

$$\Pi_{22}^{\mu\nu} = -4e^2 (\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho} b_\alpha p_\beta)(\varepsilon^{\lambda\sigma\mu}{}_{\delta} b_\lambda p_\sigma) T^{\rho\delta}. \tag{5.12}$$

Agora precisamos apenas das partes de $T^{\rho\delta}$ com $p^2 = 0$. Então

$$\begin{aligned}\Pi_{par}^{\mu\nu} &= -4\alpha e^2 m^2 (\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho} b_\alpha p_\beta)(\varepsilon^{\lambda\sigma\mu\rho} b_\lambda p_\sigma) \\ &= -4\alpha e^2 m^2 g^{\nu\kappa} b^\alpha p^\beta b_\lambda p_\sigma \varepsilon_{\alpha\beta\kappa\rho} \varepsilon^{\lambda\sigma\mu\rho}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Usando as propriedades do tensor de Levi-Civita, podemos fazer as contrações para obter

$$\begin{aligned}\Pi_{par}^{\mu\nu} = -4\alpha e^2 m^2 \Big\{ &\left(p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}\right) b^2 \\ &+ (p \cdot b)^2 g^{\mu\nu} - (p \cdot b)\left(p^\mu b^\nu + p^\nu b^\mu\right) + p^2 b^\mu b^\nu \Big\}.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Os primeiros dois termos juntos possuem a forma de Maxwell e não são de interesse. As últimas quatro contribuições dão a seguinte correção para a densidade de Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{aether} = 2\alpha e^2 m^2 \left(b^\mu F_{\mu\nu}\right)^2 , \tag{5.15}$$

que é o termo tipo-aether analisado em [67] e gerado em [68] e [69], no qual b^μ desempenha o papel de um campo aether. Esse termo pode ser mapeado em um termo CPT-par clássico proposto em [64],

$$\mathcal{L}_{par} = -\frac{1}{4}\kappa_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}, \tag{5.16}$$

desde que possamos estabelecer a relação

$$\kappa_{\mu\nu\alpha\beta} = -2\alpha e^2 m^2 \left(g_{\mu\alpha}b_\nu b_\beta - g_{\nu\alpha}b_\mu b_\beta + g_{\nu\beta}b_\mu b_\alpha - g_{\mu\beta}b_\nu b_\alpha\right). \tag{5.17}$$

Na sequência, realizamos uma tentativa de avaliar a constante α. Como discutido acima, podemos escrever $\alpha m^2 g^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}(p=0)$. Então temos

$$\begin{aligned}
\alpha m^2 g^{\mu\nu} &= \int_k^\Lambda \frac{\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu(\not{k}+m)\gamma^\nu(\not{k}+m)\right]}{(k^2-m^2)^2} \\
&= 4\int_k^\Lambda \frac{2k^\mu k^\nu - (k^2-m^2)g^{\mu\nu}}{(k^2-m^2)^2} \\
&= 4\int_k^\Lambda \left\{2\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)^2} - \frac{g^{\mu\nu}}{(k^2-m^2)}\right\} \\
&= -4\int_k^\Lambda \frac{\partial}{\partial k_\mu}\left\{\frac{k^\nu}{(k^2-m^2)}\right\},
\end{aligned} \tag{5.18}$$

onde o índice Λ indica que as integrais são divergentes e necessitam de alguma regularização.

O cálculo acima revela que α é originado de um termo de superfície vindo da diferença entre duas integrais quadraticamente divergentes, igual ao termo (2.24). Como foi observado em [68], note que esse coeficiente é totalmente dependente de regularização. Na próxima seção, faremos uma discussão mais geral, a fim de determinar essa constante, nos baseando em argumentos de simetria [19].

5.3 A correção de 1-loop da auto-energia transversal do fóton

Quando levamos em conta as correções radiativas, uma questão que naturalmente surge é a possibilidade de violação de alguma identidade de Ward-Takahashi. Em outras palavras, nos questionamos se existe alguma anomalia no modelo. Nesta seção, mostraremos que, já que a QED convencional é invariante de gauge, não é possível haver um tensor de polarização de vácuo não-transverso no presente modelo.

Começaremos contraindo o momento externo p_μ com a amplitude total. Temos

$$\begin{aligned} p_\mu \Pi^{\mu\nu} &= e^2 p_\mu T^{\mu\nu} + 2e^2 \varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho} b_\alpha p_\mu p_\beta T^{\mu\rho} \\ &-2e^2 \varepsilon^{\alpha\beta\mu}{}_{\rho} b_\alpha p_\mu p_\beta T^{\rho\nu} - 4e^2 (\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho} b_\alpha p_\beta)(\varepsilon^{\lambda\sigma\mu}{}_{\delta} b_\lambda p_\mu p_\sigma) T^{\rho\delta}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Podemos notar que os últimos termos são identicamente nulos pois o tensor antissimétrico de Levi-Civita está contraído com o produto simétrico $p_\mu p_\beta$. O segundo termo também é nulo pela mesma razão, já que a estrutura de Lorentz de $T^{\mu\rho}$ é do tipo apresentada na equação (5.9). Desta forma, ficamos apenas com a primeira contribuição, que não é nada além do termo da QED convencional. Isto mostra que, para o tensor de polarização do vácuo, uma violação da simetria de gauge em um modelo modificado é possível somente se a mesma violação ocorrer na QED tradicional.

Para concluir esta seção, podemos obter algumas condições que o esquema de regularização deve satisfazer a fim de respeitar a transversalidade de $\Pi^{\mu\nu}$. Como veremos, isso está intimamente conectado na possibilidade de geração de termos que violam Lorentz, que foram discutidos na última seção. Se analisarmos o primeiro termo da equação (5.19), ou seja

$$\begin{aligned} p_\mu T^{\mu\nu} &= \int_k \mathrm{tr}\left\{\gamma^\nu s(k)\, \not{p}\, s(k+p)\right\} \\ &= -\int_k \mathrm{tr}\left\{\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-m}\, \not{p}\, \frac{1}{\not{k}+\not{p}-m}\right\}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Usando a identidade $\not{p} = (\not{k}+\not{p}-m) - (\not{k}-m)$, temos que

$$\begin{aligned} p_\mu T^{\mu\nu} &= -\int_k^\Lambda \mathrm{tr}\left\{\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-m}\right\} + \int_k^\Lambda \mathrm{tr}\left\{\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{p}-m}\right\} \\ &= -4\int_k^\Lambda \frac{k^\nu}{(k^2-m^2)} + 4\int_k^\Lambda \frac{(k+p)^\nu}{[(k+p)^2-m^2]}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Na expressão acima, o primeiro termo é nulo e o segundo difere dele apenas por uma mudança no momento de integração. Já que o segundo termo é linearmente divergente, ele difere do primeiro apenas por um termo de superfície. O índice Λ indica que, já que as integrais são divergentes, elas precisam ser regularizadas. Em vez de usarmos uma regularização em particular, a deixaremos implicitamente como explicado no capítulo 2. Para a identificação do termo de superfície, usamos recursivamente, no segundo termo acima, a identidade (2.1) para obter

$$p_\mu T^{\mu\nu} = -4p^\nu \left\{\alpha_1 + p^2(\alpha_3 - 2\alpha_2)\right\}, \tag{5.22}$$

onde os α_i's são os termos de superfície definidos em (2.24), (2.25) e (2.26):

$$\alpha_1 g_{\mu\nu} \equiv \int_k^\Lambda \frac{g_{\mu\nu}}{k^2-m^2} - 2\int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^2} = \int_k^\Lambda \frac{\partial}{\partial k^\mu}\left(\frac{k_\nu}{(k^2-m^2)}\right), \tag{5.23}$$

$$\alpha_2 g_{\mu\nu} \equiv \int_k^\Lambda \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2-m^2)^2} - 4\int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3} = \int_k^\Lambda \frac{\partial}{\partial k^\mu}\left(\frac{k_\nu}{(k^2-m^2)^2}\right) \tag{5.24}$$

e

$$\alpha_3 g_{\{\mu\nu}g_{\alpha\beta\}} \equiv g_{\{\mu\nu}g_{\alpha\beta\}}\int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2-m^2)^2} - 24\int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2-m^2)^4}, \tag{5.25}$$

o que significa que

$$g_{\{\mu\nu}g_{\alpha\beta\}}(\alpha_3 - \alpha_2) = \int_k^\Lambda \frac{\partial}{\partial k^\beta}\left[\frac{4k_\mu k_\nu k_\alpha}{(k^2-m^2)^3}\right]. \tag{5.26}$$

Vemos que a fim de obter um tensor de polarização do vácuo transverso, existem duas possibilidades: a primeira fixa todos os termos de superfície para zero ($\alpha_i = 0$) e a segunda fixa $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_3 = 2\alpha_2$. É importante notar que nas duas possibilidades $\alpha_1 = 0$ é uma condição necessária para a preservação da simetria de gauge. Por fim, podemos identificar a constante α, vista na última seção, com a relação

$$\alpha m^2 = -4\alpha_1. \tag{5.27}$$

Faz-se necessário explorar a discussão deste resultado. Os valores das constantes α_i são determinados pelo procedimento de regularização usado para calculá-las. Dessa forma, elas são dependentes de regularização. Se uma técnica de regularização for usada, que preserva a invariância de gauge da QED tradicional, α_1 será zero. Entretanto, é sempre possível escolher um procedimento não-invariante de gauge e depois restaurar a simetria de gauge por meios de um contratermo não-simétrico.

Nesse caso, já que os setores de violação e preservação de Lorentz são independentes um do outro, os termos que quebram Lorentz sobreviveriam. Isso seria equivalente a usar diferentes procedimentos de regularização nos diferentes setores (invariante de Lorentz e que viola Lorentz). De qualquer forma, acreditamos que a estrutura natural seria escolher uma regularização única para o cálculo das integrais da mesma amplitude. Neste caso, o cálculo que preservasse a transversalidade não geraria, em ordem de 1-loop, os dois termos que violam Lorentz (CPT-par e CPT-ímpar).

Reforçamos que isso não é uma condição forte o suficiente para a invariância de gauge que, por consequência, proibiria a geração a priori de termos Chern-Simons. Esse seria o caso de impor invariância de gauge da densidade de Lagrangiana, que é muito mais forte do que a da ação. Este último é obtido simplesmente pela transversalidade da auto-energia do fóton, que por sua vez permite o aparecimento de um termo de Chern-Simons. Enfatizamos que foi usada uma condição mais fraca: a invariância da ação. A transversalidade do tensor de polarização do vácuo fixa $\alpha_1 = 0$.

A fim de ilustrar que isso não é uma condição restritiva no que diz respeito à indução de um termo de Chern-Simons, podemos apresentar os resultados publicados em [31] e [36]. Nesses trabalhos, a indução do termo que viola Lorentz que vem do termo axial no setor fermiônico ($b_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$) foi estudada baseada nos mesmos fundamentos utilizados aqui. Eles obtiveram os seguintes resultados: até a primeira ordem na constante b_μ, para a auto-energia do fóton a 1-loop (no caso sem massa para simplificar):

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu} &= \Pi(p^2)(p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) - 4\alpha_1 g^{\mu\nu} \\
&-\frac{4}{3}\left\{\alpha_2(p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) + (2p^\mu p^\nu + p^2 g^{\mu\nu})(\alpha_3 - 2\alpha_2)\right\} \\
&+4i\alpha_2 p_\alpha b_\beta \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{5.28}$$

no qual os α_i's são os mesmos definidos aqui nas equações (5.23)-(5.25). Note que nesse caso a condição de transversalidade exige que $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_3 = 2\alpha_2$, assim como apresentado neste presente estudo. A diferença é que na equação acima, o coeficiente do termo de Chern-Simons é proporcional a α_2, que por sua vez não é exigido ser nulo. Por isso, o procedimento que adotamos não é restritivo à geração de um termo de Chern-Simons. Esse resultado é simplesmente uma particularidade deste modelo.

5.4 Discussão sobre contribuições de ordens superiores

Quando cálculos de ordem superiores são realizados e linhas internas de fótons são consideradas, o grau de divergência das contribuições crescem por unidade para cada vértice interno não-mínimo. Nesta seção, discutiremos a capacidade preditiva do modelo para quando estes cálculos são executados. Estamos interessados nas correções dos setores do fóton. Para cálculos multi-loop, podemos identificar dois tipos de contribuição, que se distinguem entre si pelo aparecimento ou não dos vértices internos não-mínimos.

Para o cálculo em n-loop do tensor de polarização do vácuo, para cada topologia temos que considerar todas as combinações dos dois tipos de vértices. No caso onde os vértices não-mínimos aparecem apenas nos pontos externos do diagrama, podemos separar em quatro grupos, da mesma forma que fizemos no cálculo de 1-loop: o primeiro com acoplamentos mínimos; o segundo com acoplamento não-mínimo no primeiro vértice; o terceiro no qual o acoplamento não-mínimo ocorre no segundo vértice; o quarto no qual os dois vértices externos são não-mínimos.

Suponhamos que temos na ordem n a seguinte expressão para a auto-energia do fóton da QED pura:

$$T^{(n)}_{\mu\nu} = T^{(n)1}_{\mu\nu} + T^{(n)2}_{\mu\nu} + \cdots + T^{(n)k}_{\mu\nu}, \tag{5.29}$$

onde cada $T^{(n)i}_{\mu\nu}$ corresponde a um gráfico diferente. Tomando como exemplo o grupo onde o acoplamento não-mínimo ocorre no primeiro vértice externo $ie\varepsilon^{\mu\rho\sigma\lambda}b_\rho p_\sigma \gamma_\lambda$, é possível ver que a contribuição desse grupo é dada por

$$\Pi^{(n)21}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\rho\sigma}{}^{\lambda} b^\rho p^\sigma T^{(n)}_{\lambda\nu}. \tag{5.30}$$

Entre os possíveis grupos que citamos, o segundo e o terceiro vão contribuir para o termo de Chern-Simons. Assim como na análise de 1-loop,

$$T^{(n)}_{\lambda\nu} = \left(p_\lambda p_\nu - p^2 g_{\lambda\nu}\right)\Pi^{(n)}(p^2) + \alpha^{(n)} m^2 g_{\lambda\nu} + \beta^{(n)} p_\lambda p_\nu \tag{5.31}$$

é a expressão mais geral para a auto-energia do fóton da QED pura. O termo CPT-ímpar é obtido pelo limite $p^2 \to 0$ e seu coeficiente é proporcional a $\alpha^{(n)}$. O tensor de polarização do vácuo em ordem n é dado por

$$\Pi^{(n)}_{\mu\nu} = T^{(n)}_{\mu\nu} + \Pi^{(n)21}_{\mu\nu} + \Pi^{(n)12}_{\mu\nu} + \Pi^{(n)22}_{\mu\nu} + I^{(n)}_{\mu\nu}, \tag{5.32}$$

onde $I^{(n)}_{\mu\nu}$ inclui todos os gráficos com acoplamentos não-mínimos internos. Podemos notar que a fim de obter $p^\mu T^{(n)}_{\mu\nu} = 0$, $\alpha^{(n)} = 0$ é uma condição inevitável, da mesma forma que temos no caso a 1-loop. Portanto, os gráficos nos quais os acoplamentos não-mínimos ocorrem apenas nos fótons externos não contribuem para a geração radiativa do termo CPT-ímpar que viola Lorentz se o procedimento de regularização usado for invariante de gauge. O mesmo argumento pode ser estendido para o termo CPT-par. Portanto esses termos podem ser gerados radiativamente somente pela contribuição do acoplamento não-mínimo para os fótons internos.

O próximo passo é considerar as contribuições incluídas em $I^{(n)}_{\mu\nu}$ que possuem acoplamentos não-mínimos nos fótons internos. Consideramos novamente a geração do termo CPT-ímpar, já que uma análise similar pode ser feita para o termo CPT-par. As contribuições sempre são de potência ímpar em b_μ. Para exemplificar, pegamos para a discussão os gráficos lineares em b_μ em loop de ordem arbitrária, ou seja, que possuem uma interação não-mínima. Por contagem de potências, eles são superficialmente divergentes cúbicos. Considere que o momento do fóton interno que acopla com o vetor de fundo é k; dessa forma, o vértice é dado por $ie\varepsilon^{\rho\kappa\alpha\beta}b_\kappa k_\alpha \gamma_\beta$. A amplitude, então, será dada por

$$A_{\mu\nu} = \varepsilon^{\rho\kappa\alpha\beta} b_\kappa I_{\mu\nu\rho\alpha\beta}, \tag{5.33}$$

com $I_{\mu\nu\rho\alpha\beta}$ sendo uma integral multi-loop.

A integral acima tem dimensão de m^3 e estamos interessados no limite $p^2 \to 0$. Considerando sua estrutura de Lorentz, podemos ter todas as combinações de índices em dois tipos de termos: o primeiro tem a forma $p_\mu p_\nu p_\rho g_{\alpha\beta}$ e resultará em uma contribuição nula, devido ao tensor antissimétrico; o segundo tem a forma $m^2 p_\beta g_{\mu\alpha} g_{\nu\rho}$. Concluímos que os termos não nulos são todos do segundo tipo e darão uma contribuição proporcional a

$$m^2 \varepsilon_{\mu\nu\kappa\beta} b^\kappa p^\beta. \tag{5.34}$$

É interessante notar que, diferente do que acontece no caso de mesma ordem quando o vértice não-mínimo é externo, a contribuição tipo-Chern-Simons neste caso vem do produto entre o tensor Levi-Civita e o termo quadrático no tensor da métrica. Isso é um efeito da potência extra do momento interno no número do integrando. Embora o fator m^2 sugira que esse coeficiente é também originado de integrais quadraticamente divergentes, não é possível assegurar que ele esteja ligado a algum termo de quebra de simetria de gauge no setor da QED pura sem um cálculo explícito. Uma vez que esse termo CPT-ímpar respeita a invariância de gauge da ação, não há nenhuma restrição para impedir que ele seja gerado em ordem de loop superior. Apesar dessa análise ter sido feita em primeira ordem do vetor de fundo b_μ, ela pode ser estendida para potências superiores de b_μ. Para a contribuição cúbica em b, teremos algo proporcional a

$$m^4 b^2 \varepsilon_{\mu\nu\kappa\beta} b^\kappa p^\beta \tag{5.35}$$

e assim sucessivamente.

Outra questão a ser pontuada é o fato do aumento na ordem da constante de acoplamento permitir contribuições de ordem superior do vetor de fundo, juntamente com o aumento do grau de divergência das integrais. Porém, foi mostrado em [71] que a magnitude do parâmetro de Lorentz nesse modelo é extremamente pequeno. Por isso, é razoável impor a condição $|b^2|\Lambda^2 << 1$, a fim de recuperar a QED. O efeito das divergências pode ser visto, de forma simplificada, substituindo m^2 por Λ^2 nos coeficientes. Para exemplificar, tomemos os termos CPT-ímpar. Na contribuição linear em b, temos que $\Lambda^2 \varepsilon_{\mu\nu\kappa\beta} b^\kappa p^\beta$. Para a contribuição cúbica em b, temos que $\Lambda^4 b^2 \varepsilon_{\mu\nu\kappa\beta} b^\kappa p^\beta$, e assim por diante. Embora a geração dos termos que violam Lorentz seja inevitável além da primeira ordem, a previsibilidade do modelo efetivo é assegurada pela desigualdade do cutoff acima. Isso ocorre porque, em mesma ordem de loop, vértices não-mínimos adicionais contribuem com potências positivas de b_μ, enquanto ordens superiores de loop para um número fixo de vértices não-mínimos são controladas pela pequeneza da constante de estrutura.

Para um modelo efetivo, a energia de cutoff é um parâmetro muito importante e deveria ser estabelecida por motivos físicos. Características desejadas de uma Teoria Quântica de Campos, como a causalidade e estabilidade, podem ser perdidas em energias muito altas [75, 76]. A condição imposta pela desigualdade $|b^2|\Lambda^2 << 1$ é tal que potências superiores em b_μ não proliferam em uma mesma dada ordem de loop. Em [71] foi configurado um limite tal que $e \cdot |b_\mu| < 10^{-32}\,(eV)^{-1}$. Esse limite, adicionalmente à desigualdade que propomos, garante que esse modelo efetivo não é considerado em escalas de energia além da escala de Planck.

5.5 Comentários Finais

Estudamos neste capítulo uma modificação para a Eletrodinâmica Quântica, que inclui um acoplamento não-mínimo, além do mínimo usual, que viola a simetria de Lorentz. Este é um modelo parecido com o analisado em [69], no qual o acoplamento mínimo não foi considerado. Além disso, a adição da interação mínima abre a possibilidade da indução quântica de um termo tipo-Chern-Simons.

As correções radiativas de 1-loop para a função de dois pontos do fóton, nesse modelo, tem quatro distintas contribuições: uma vinda da QED convencional; dois termos cruzados idênticos que teriam a forma de Carroll-Field-Jackiw; e uma última que produziria um termo CPT-par que viola Lorentz com a forma discutida em [67] para a interação entre os campos de gauge e aether. Mostramos que a 1-loop a invariância de gauge do modelo fixa os coeficientes das correções CPT-par e CPT-ímpar, que violam Lorentz, para zero, se for usado um procedimento de regularização que seja invariante de gauge. Entretanto, é sempre possível escolher uma técnica não-invariante de gauge e restaurar a simetria de gauge através de um contratermo não-simétrico. Neste caso, já que os setores que violam e preservam Lorentz são independentes um do outro, os termos que quebram Lorentz sobreviveriam. Este resultado é desconfortável, já que é equivalente ao uso de diferentes procedimentos de regularização em cada setor e acreditamos que a forma mais correta seria escolher uma única forma de regularizar para calcular as integrais da mesma amplitude. Dessa forma, utilizando um método de cálculo que preserve a transversalidade não geraria, em ordem de 1-loop, esses tipos de termo que violam Lorentz (CPT-par e CPT-ímpar).

A análise sintetizada acima é muito próxima daquela feita em [31], onde foi considerado a geração quântica de um termo tipo-Chern-Simons em uma QED modificada com um termo axial no setor fermiônico utilizando os argumentos de invariância de gauge. Nesse caso, entretanto, foi mostrado que a invariância de gauge não desempenha nenhum papel na determinação do coeficiente em questão. Embora sendo um termo de superfície, o termo α_2, definido na equação (5.24), pode ser considerado indeterminado se for usado a condição $\alpha_3 = 2\alpha_2$.

Apesar do uso de um procedimento invariante de gauge produzir um coeficiente nulo para os termos que violam Lorentz no setor puramente fotônico a um 1-loop, a não-renormalizabilidade do modelo nos impossibilita de declarar afirmações gerais de ordens superiores. Entretanto, na última seção deste capítulo fomos capazes de exibir a forma geral dos termos de quebra (no limite $p^2 \to 0$) além de ordem de 1-loop.

6 Conclusões

Aplicamos o método de Regularização Implícita para o Tensor Polarização em três problemas distintos: no modelo tridimensional com férmions de Dirac interagentes; na QED_3; e em uma QED_4 estendida. Em todos os casos, lidamos com o cálculo de grandezas finitas contaminadas com integrais divergentes, que necessitavam ser regularizadas. Essa contaminação deu origem à arbitrariedades, as quais fomos capazes de identificar e tratar utilizando as simetrias subjacentes à física dos modelos.

No caso do modelo com férmions de Dirac interagentes por Coulomb, nos baseamos na simetria espacial $O(2)$ para fixar o único parâmetro livre α em zero. Este parâmetro se encontrava na correção quântica para a condutividade a.c. do grafeno, que pode ser fixada em $\mathcal{C} = \frac{19-6\pi}{12} \approx 0.01$.

Na QED_3 pudemos entender que a invariância de calibre, e não o método de regularização propriamente dito, é quem gera a anomalia da paridade e preserva a invariância de gauge.

No caso da QED_4 estendida, nos baseamos na invariância de gauge da teoria para limitar as arbitrariedades ligadas à geração de termos de Chern-Simons no setor puramente fotônico. Apesar da não-renormalizabilidade do modelo, pudemos analisar também a forma geral dos termos que quebram a simetria de Lorentz em ordens acima de 1-loop.

Uma possível extensão deste trabalho seria a aplicação do método de Regularização Implícita em uma Eletrodinâmica Quântica Reduzida: $RQED_{4,3}$, onde 4 é a dimensão dos fótons e 3 é a dimensão dos férmions da teoria. Considerando as limitações teóricas do modelo apresentado no capítulo 3, uma teoria $RQED_{4,3}$ serviria para a construção de modelo relativístico para o grafeno. Apontamos ainda outra possível extensão, o estudo de Isolantes Topológicos, que utilizam as mesmas propriedades topológicas da QED_3.

A Cálculos para o Grafeno

A.1 Cálculo de $\mathcal{P}^0_\mu$

Começando pela (3.11)

$$\mathcal{P}^0_\mu\,(q_\mu) = \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{(i\omega + \vec{\sigma}\cdot\vec{k})\sigma_\mu[i(\omega+\Omega) + \vec{\sigma}\cdot(\vec{k}+\vec{q})]}{(\omega^2+\vec{k}^2)[(\omega+\Omega)^2 + (\vec{k}+\vec{q})^2]}, \tag{A.1}$$

podemos fazer uma parametrização de Feynman para obter

$$\mathcal{P}^0_\mu\,(q_\mu) = \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2}\int_0^1 dy \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{(i\omega + \vec{\sigma}\cdot\vec{k})\sigma_\mu[i(\omega+\Omega) + \vec{\sigma}\cdot(\vec{k}+\vec{q})]}{[(\omega+\Omega y)^2 + M^2]^2}, \tag{A.2}$$

onde $M^2 = (\vec{k}+\vec{q}y)^2 + (q^2+\Omega^2)y(1-y)$.

Para tentar aliviar a notação, vamos denotar $\int d^2k/(2\pi)^2 \equiv \int_k$, $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega/(2\pi) \equiv \int_\omega$ e $\int_0^1 dy \equiv \int_y$.

A integral em ω é finita e resulta em

$$\mathcal{P}^0_\mu\,(q_\mu) = \int_k\int_y\int_\omega \left[\frac{-\omega^2\sigma_\mu}{(\omega^2+M^2)^2} + \frac{\mathcal{N}_\mu}{(\omega^2+M^2)^2}\right], \tag{A.3}$$

onde $\mathcal{N}_\mu = \Omega^2 y(1-y)\sigma_\mu - i\Omega y(k+q)_l\sigma_\mu\sigma_l + i\Omega(1-y)k_l\sigma_l\sigma_\mu + k_l(k+q)_j\sigma_l\sigma_\mu\sigma_j$.

Se fizermos uma mudança $\vec{k}\to\vec{k}' = \vec{k}+\vec{q}y$, e definirmos

$$\Delta^2 = (q^2+\Omega^2)y(1-y), \tag{A.4}$$

a equação acima pode ser reescrita em

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^0_\mu\,(q_\mu) =& \frac{1}{4}\int_y\int_k \frac{-\sigma_\mu}{(k'^2+\Delta^2)^{1/2}}\\ &+\frac{1}{4}\int_y\int_k\frac{1}{(k'^2+\Delta^2)^{3/2}}\Big\{\Omega^2 y(1-y)\sigma_\mu - i\Omega y(1-y)q_l\sigma_\mu\sigma_l\\ &\qquad - i\Omega y(1-y)q_l\sigma_l\sigma_\mu + k_lk_j\sigma_l\sigma_\mu\sigma_j - q_lq_jy(1-y)\sigma_l\sigma_\mu\sigma_j\Big\}.\end{aligned} \tag{A.5}$$

O primeiro e quarto termos do lado esquerdo são linearmente divergentes e podem ser somados, produzindo

$$-\sigma_\mu \int_k \frac{1}{(k^2+\Delta^2)^{1/2}} + \sigma_l \sigma_\mu \sigma_j \int_k \frac{k_l k_j}{(k^2+\Delta^2)^{3/2}}. \tag{A.6}$$

Definindo a divergência linear básica, no espírito da seção 2.5, têm-se

$$L_\mu^\infty \equiv -\sigma_\mu \int_k \frac{1}{(k^2+\Delta^2)^{1/2}} + \sigma_l \sigma_\mu \sigma_j \int_k \frac{k_l k_j}{(k^2+\Delta^2)^{3/2}}. \tag{A.7}$$

A fim de explicitar a ambiguidade como um termo de superfície, usamos

$$\beta \delta_{lj} = \int_k \frac{\partial}{\partial k_l}\left(\frac{k_j}{(k^2+\Delta^2)^{1/2}}\right) = \int_k \frac{\delta_{jl}}{(k^2+\Delta^2)^{1/2}} - \int_k \frac{k_j k_l}{(k^2+\Delta^2)^{3/2}}. \tag{A.8}$$

Usando a definição da integral básica de divergência linear (2.15), temos

$$I_{lin}(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2+\Delta^2)^{1/2}}. \tag{A.9}$$

Inserindo a definição acima na equação (A.7), encontramos

$$\begin{aligned} L_\mu^\infty &= -\sigma_\mu I_{lin}(\Delta^2) + \sigma_l \sigma_\mu \sigma_j (\delta_{jl} I_{lin}(\Delta^2) + \beta \delta_{jl}) \\ &= (-\sigma_\mu + 2\delta_{\mu 0}\hat{1}) I_{lin}(\Delta^2) + 2\beta\delta_{\mu 0}, \end{aligned} \tag{A.10}$$

onde $\hat{1}$ é a matriz unidade 2x2.

Subtraindo o modo de frequência-zero $\mathcal{P}_\mu^0 \to \mathcal{P}_\mu^0(\Omega = 0) - \mathcal{P}_\mu^0$ e integrando em k, achamos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu^0(q_\mu) =& \frac{1}{4}\int_y \left\{\frac{\Delta' - \Delta}{2\pi}(2\delta_{\mu 0} - \sigma_\mu) + \beta'\delta_{\mu 0}\right\} \\ &+ \frac{1}{16}\int_y \frac{2}{\sqrt{\Delta'^2}} q_l q_j y(1-y)\sigma_l\sigma_\mu\sigma_j \\ &+ \frac{1}{16\pi}\int_y \frac{2}{\sqrt{\Delta^2}}\Big[\Omega^2 y(1-y)\sigma)\mu - i\Omega y(1-y) q_l \sigma_\mu \sigma_l - i\Omega y(1-y) q_l \sigma_l \sigma_\mu \\ &\qquad + k_l k_j \sigma_l \sigma_\mu \sigma_j - q_l q_j y(1-y)\sigma_l\sigma_\mu\sigma_j\Big] \end{aligned} \tag{A.11}$$

onde $\Delta'^2 = q^2 y(1-y)$ e $\beta' = 2\beta(\Delta^2) - 2\beta(\Delta'^2)$. Note que essa subtração elimina a divergência linear. A integração em y nos fornece o resultado final para $\mathcal{P}_\mu^0$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu^0(q_\mu) =& \frac{\sqrt{\Omega^2+q^2}}{64}\left[\sigma_\mu - 2\delta_{\mu 0} - \frac{(i\Omega + \vec{\sigma}\cdot\vec{q})\sigma_\mu(i\Omega + \vec{\sigma}\cdot\vec{q})}{\Omega^2+q^2}\right] \\ &- \frac{\sqrt{q^2}}{64}\left[\sigma_\mu - 2\delta_{\mu 0} - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\sigma_\mu\vec{\sigma}\cdot\vec{q}}{q^2}\right] + \frac{\pi}{64}\beta'\delta_{\mu 0}. \end{aligned} \tag{A.12}$$

A.2 Regularização Dimensional no Cálculo de $\mathcal{P}^0_\mu$

Discutiremos aqui o cálculo explícito da (A.8) à luz da Regularização Dimensional. As integrais na equação (A.8) têm a forma

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^j}{(k^2+M^2)^A}, \tag{A.13}$$

com valores diferentes para D, A e j.

Vemos que a expressão (A.13) é divergente para $D+j > 2A$, que é o caso particular presente em $\mathcal{P}^0_\mu$:

$$\int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{k^2+M^2}}, \tag{A.14a}$$

$$\int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{(k^2+M^2)^{3/2}}. \tag{A.14b}$$

Isso significa que qualquer procedimento de regularização em (A.14) deve implicar em um resultado contendo termos divergentes. Para enfatizar esse aspecto, podemos reescrever (A.13) usando a parametrização de Schwinger (truque de Schwinger)

$$a_1^{-n_1} a_2^{-n_2} \cdots a_m^{-n_m} = \frac{1}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n_i)} \int_0^\infty dt_1 \cdots dt_m t_1^{n_1-1} \cdots t_m^{n_m-1} e^{-t_{a_1} \cdots - t_{a_m}}, \tag{A.15}$$

onde podemos usar $a_1 = k^2 + M^2$ e $n_1 = A$ em (A.13) para produzir

$$\frac{1}{(k^2+M^2)^A} = \frac{1}{\Gamma(A)} \int_0^\infty dt\, t^{A-1} e^{-t(k^2+M^2)}. \tag{A.16}$$

Se usarmos (A.16) na (A.13), para o caso particular de $j=0$, teremos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2+M^2)^A} &= \frac{1}{\Gamma(A)} \frac{1}{2^D \pi^{D/2}} \int_0^\infty dt' t'^{(A-1-\frac{D}{2})} e^{-t' M^2} \\
&= \frac{1}{\Gamma(A)} \frac{1}{2^D \pi^{D/2}} (M^2)^{\frac{D}{2}-A} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{A-\frac{D}{2}-1} \qquad \text{(A.17a)} \\
&= \frac{\Gamma(A-D/2)}{\Gamma(A)} \frac{(M^2)^{\frac{D}{2}-A}}{2^D \pi^{D/2}}. \qquad \text{(A.17b)}
\end{aligned}$$

Neste ponto, podemos notar que somente é possível derivar um resultado finito para (A.17b) de (A.17a) se $A - D/2 > 0$.

Em (A.17a), reescrevemos

$$\int_0^\infty dt e^{-t} t^{x-1} = \Gamma(x) \ , \qquad x = A - \frac{D}{2} > 0. \tag{A.18}$$

Para o outro intervalo de x, podemos considerar uma continuação analítica $\tilde{\Gamma}(x)$ tal que

$$\tilde{\Gamma}(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \int_0^\infty dt\ t^{x-1}(e^{-t} - 1)\ , \qquad -1 < x < 0. \tag{A.19}$$

Neste caso, temos que $\tilde{\Gamma}(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$ in (A.19) e $\Gamma(-1/2)$ é indeterminado em (A.18) já que está fora do intervalo de x.

Adicionalmente, usando (A.19), podemos reescrever

$$\int_0^\infty dt\ t^{x-1}e^{-1} = \tilde{\Gamma}(x) + \int_0^\infty dt\ t^{x-1}\ , \qquad -1 < x < 0. \tag{A.20}$$

Na equação acima, o lado esquerdo é divergente para $-1 < x < 0$, enquanto o lado direito exibe uma contribuição finita ($\tilde{\Gamma}(x)$), além de uma parte divergente para $-1 < x < 0$.

Substituindo (A.20) em (A.17a) com $x = A - D/2$, obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{1}{(k^2+M^2)^A} =& \frac{(M^2)^{\frac{D}{2}-A}}{\Gamma(A)2^D\pi^{D/2}} \\ & \times \left\{\tilde{\Gamma}\left(A - \frac{D}{2}\right) + \int_0^\infty dt\ t^{A-\frac{D}{2}-1}\right\}\ , \quad -1 < x < 0. \end{aligned} \tag{A.21}$$

Nota que o último termo do lado direito aparece somente no caso onde a integral esteja sendo avaliada fora da região $\Re(A - N/2) > 0$ e $\Re(N/2) > 0$. No caso particular de (A.21), onde $A = 1/2$ e $D = 2$, temos que

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{\sqrt{k^2+M^2}} = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{M^2} + \frac{\sqrt{M^2}}{2\pi^{3/2}}\lim_{t\to 0} t^{-1/2}, \tag{A.22}$$

onde $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ e $\tilde{\Gamma}(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$ (continuação analítica). Esse resultado mostra que se não considerarmos corretamente a região de validade, a equação (A.21) apareceria finita, produzindo apenas o primeiro termo da equação (A.22). Como esse não é o caso aqui, a equação acima mostra explicitamente o comportamento divergente da integral. Essa expressão é diferente daquela obtida em [13] em seu apêndice A. Em [45] uma integral divergente foi considerada exclusivamente finita em uma situação similar (equações (A9) e (A10) de [45]). A razão para isso reside na substituição direta de $A = 1/2$ e $D = 2$ em (A.17b). Essa substituição é indevida, já que foi feita fora do intervalo permitido que foi definido na transição de (A.17a) para (A.17b).

Se realizarmos uma análise similar para equação (A.14b), podemos ter

$$\int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{k^2}{(k^2+M^2)^A} = \frac{D}{2}\frac{(M^2)^{\frac{D+2}{2}-A}}{\Gamma(A)2^D\pi^{D/2}}\left\{\tilde{\Gamma}\left(A-\frac{D+2}{2}\right)\right. \tag{A.23}$$
$$\left. + \int_0^\infty dt\, t^{A-\frac{D}{2}-2}\right\}, \quad -1 < A - \frac{D+2}{2} < 0.$$

Como um caso particular de (A.23), com $A = 3/2$ e $D = 2$, temos

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k^2}{(k^2+M^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\pi}\sqrt{M^2} + \frac{\sqrt{M^2}}{\pi^{3/2}}\lim_{t\to 0} t^{-1/2}. \tag{A.24}$$

Podemos observar que as integrais em (A.22) e (A.24) podem ser combinadas a fim de eliminar as contribuições divergentes encontradas em ambas as expressões. Isto está relacionado com o fato de que

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\partial}{\partial k_i}\left(\frac{k_j}{\sqrt{k^2+M^2}}\right) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{k^2+M^2}} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_ik_j}{(k^2+M^2)^{3/2}}$$
$$= \beta\delta_{ij}. \tag{A.25}$$

Podemos fazer uma contração nos índices da equação acima para obter

$$\beta = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{\sqrt{k^2+M^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k^2}{(k^2+M^2)^{3/2}} = 0, \tag{A.26}$$

onde usamos as expressões (A.22) e (A.24).

Concluímos que as integrais apresentadas inicialmente em (A.14) podem gerar um resultado finito somente quando combinadas da maneira apresentada em (A.26).

A.3 Cálculo de $\Sigma_{p,0}$

: Começando da definição de $\Sigma_{p,0}(i\Omega)$

$$\Sigma_{p,0}(i\Omega) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}V_{\vec{k}-\vec{p}}\,G_k(i\omega'+i\Omega)$$
$$= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\frac{e^2}{|\vec{k}-\vec{p}|}\frac{i(\omega'+\Omega)+\vec{\sigma}\cdot\vec{k}}{(\omega'+\Omega)^2+k^2} \tag{A.27}$$

e integrando em ω', temos que

$$\Sigma_{p,0}(i\Omega) = \pi e^2\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{k}}{[(\vec{k}-\vec{p})^2]^{1/2}|\vec{k}|}. \tag{A.28}$$

Ainda podemos fazer a parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{A^{1/2}B^{1/2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}\int_k \frac{1}{[y(\vec{k}-\vec{p})^2+(1-y)k^2]}, \tag{A.29}$$

onde $A = (\vec{k}-\vec{p})^2$ e $B = k^2$, do qual se obtêm:

$$\Sigma_{p,0}(i\Omega) = e^2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}\int_k \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{k}}{(\vec{k}-\vec{p}y)^2+M^2}, \tag{A.30}$$

onde $M^2 = -p^2y(y-1)$.

Usando a identidade (2.1) duas vezes, expandimos

$$\begin{aligned}\Sigma_{p,0}(i\Omega) = e^2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}\Big\{&2y\sigma^i p^j I_{log}^{ij}(M^2) - p^2y^2\sigma^j \mathcal{J}_j \\ &- 2y^3p^2\sigma^i p^j \mathcal{J}_{ij} + 4y^2\sigma^i p^j p^k \mathcal{J}_{ijk}\Big\},\end{aligned} \tag{A.31}$$

onde

$$I_{log}^{ij}(M^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_i k_j}{(\vec{k}^2+M^2)^2}, \tag{A.32}$$

$$\mathcal{J}_j = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_j}{(k^2+M^2)[(\vec{k}-\vec{p}y)^2+M^2]}, \tag{A.33}$$

$$\mathcal{J}_{ij} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_i k_j}{(\vec{k}^2+M^2)^2[(\vec{k}-\vec{p}y)^2+M^2]}, \tag{A.34}$$

$$\mathcal{J}_{ijk} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_i k_j k_k}{(\vec{k}^2+M^2)^2[(\vec{k}-\vec{p}y)^2+M^2]}. \tag{A.35}$$

$I_{log}^{ij}(M^2)$ pode ser transformada em uma integral divergente básica (independente do momento $\vec{p}$) se usarmos a identidade independente de regularização, o que resulta em

$$\begin{aligned}I_{log}^{ij}(M^2) &= I_{log}^{ij}(\lambda^2) - \frac{\delta^{ij}}{8\pi}\ln\left(\frac{M^2}{\lambda^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\delta^{ij}I_{log}(\lambda^2) - \frac{\delta^{ij}}{8\pi}\ln\left(\frac{M^2}{\lambda^2}\right) - \frac{1}{2}\alpha\delta^{ij}.\end{aligned} \tag{A.36}$$

Na última igualdade usamos a definição (3.30) e introduzimos a constante do grupo de renormalização λ. Essa constante deverá ser cancelada naturalmente no final dos cálculos, dado que o modelo é finito.

Calculando o primeiro termo da equação (A.31), usando (A.36), encontramos

$$\begin{aligned}\Sigma^1_{p,0} =& e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\int_0^1 dy\sqrt{\frac{y}{1-y}}I_{log}(\lambda^2) - e^2\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{4\pi}\int_0^1 dy\sqrt{\frac{y}{1-y}}\ln\left(\frac{M^2}{\lambda^2}\right)\\ &-\alpha e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\int_0^1 dy\sqrt{\frac{y}{1-y}} \end{aligned} \qquad \text{(A.37)}$$

O primeiro e último termos podem ser calculados usando $\int_0^1 dy\sqrt{y/(1-y)} = \pi/2$. O segundo termo é calculado abaixo

$$-\frac{e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{4\pi}\int_0^1 dy\sqrt{\frac{y}{1-y}}\ln\left[\frac{p^2y(1-y)}{\lambda^2}\right] = -\frac{e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{8}\ln\frac{p^2}{\lambda^2} + \frac{e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2}\ln 2. \qquad \text{(A.38)}$$

Logo

$$\Sigma^1_{p,0} = e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left(\frac{\pi}{2}I_{log}(\lambda^2) - \frac{1}{8}\ln\frac{p^2}{\lambda^2} - \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{1}{2}\ln 2\right) \qquad \text{(A.39)}$$

Passamos agora para o segundo termo da equação (A.31)

$$\begin{aligned}\Sigma^2_{p,0} &= -e^2\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}p^2y^2\sigma^j\mathcal{J}_j\\ &= e^2\int_0^1 dy\frac{(-p^2y^2\vec{\sigma}\cdot\vec{p}y)}{\sqrt{y(1-y)}}\int_0^1 dx(1-x)\int_{k'}\frac{1}{[k'^2+M'^2]^2}, \end{aligned} \qquad \text{(A.40)}$$

onde $M'^2 = p^2y^2(1-x)x - p^2y(y-1)$ e $\vec{k}' = \vec{k} - \vec{p}y(1-x)$. Integrando em k' temos

$$\begin{aligned}\Sigma^2_{p,0} &= -\frac{e^2}{4\pi}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\int_0^1 dyy\sqrt{\frac{y}{1-y}}\int_0^1 dx\frac{(1-x)}{p^2y(1-x)x - p^2(y-1)}\\ &= -\frac{e^2}{4\pi}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left(\frac{7}{27}\pi^2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned} \qquad \text{(A.41)}$$

Para o cálculo do terceiro termo em (A.31)

$$\Sigma^3_{p,0} = -2e^2\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}y^3p^2\sigma^ip^i\mathcal{J}_{ij}, \qquad \text{(A.42)}$$

usamos a parametrização de Feynman e a mesma definição de M'^2 e $\vec{k}'$ usada antes. Dessa forma $\mathcal{J}_{ij}$ resulta em

$$\mathcal{J}_{ij} = 2\int_0^1 dx\, x\int_{k'}\frac{(k'_i + p_iy(1-x))(k'_j + p_jy(1-x))}{(k'^2+M'^2)^3}. \qquad \text{(A.43)}$$

Integrando $\mathcal{J}_{ij}$ em k', $\Sigma^3_{p,0}$ se torna

$$\begin{aligned}\Sigma^3_{p,0} =& -\frac{e^2}{\pi}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\int_0^1\int_0^1 dydx\left\{\frac{1}{2}y\sqrt{\frac{y}{1-y}}\frac{x}{[y(1-x)x+(1-y)]}\right.\\ &\left. +y^2\sqrt{\frac{y}{1-y}}\frac{x(1-x)^2}{[y(1-x)x+(1-y)]^2}\right\}. \end{aligned} \qquad \text{(A.44)}$$

Resolvendo as integrais em x e y, podemos encontrar

$$\begin{aligned}\Sigma^3_{p,0} &= \frac{-e^2}{2\pi}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left[\frac{7}{27}\pi^2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right]-\frac{e^2}{2\pi}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left[\frac{1}{27}\pi^2\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}\right]\\ &= -\frac{e^2}{2\pi}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left(\frac{9}{27}\pi^2\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}\right).\end{aligned} \tag{A.45}$$

Para o último termo de (A.31),

$$\Sigma^4_{p,0} = e^2\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}4y^2\sigma^i p^j p^k \mathcal{J}_{ijk}, \tag{A.46}$$

primeiramente fazemos o cálculo de $\mathcal{J}_{ijk}$ usando a parametrização de Feynman e as mesmas definições de k' e M'^2, para obter

$$\mathcal{J}_{ijk} = 2\int_0^1 dx\, x\int_{k'}\frac{(k'^i+p^iy(1-x))(k'^j+p^jy(1-x))(k'^k+p^ky(1-x))}{(k'^2+M'^2)^3}. \tag{A.47}$$

Após uma certa álgebra, podemos integrar em k', resultando em

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{ijk} =&2\int_0^1 dx\, x\left[\frac{p^ky(1-x)\delta^{ij}}{16\pi M'^2}+\frac{p^jy(1-x)\delta^{ik}}{16\pi M'^2}\right.\\ &\left.+\frac{p^iy(1-x)\delta^{jk}}{16\pi M'^2}+\frac{p^iy(1-x)p^jy(1-x)p^ky(1-x)}{8\pi M'^4}\right].\end{aligned} \tag{A.48}$$

Na equação acima, o primeiro, segundo e terceiro termos produzem o mesmo resultado

$$\begin{aligned}&\frac{e^2}{2\pi}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\int_0^1 dy\sqrt{\frac{y}{1-y}}y\int_0^1 dx\frac{x(1-x)}{[yx(1-x)+(1-y)]} =\\ &\qquad\frac{e^2}{2\pi}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left(\frac{2}{27}\pi^2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\right),\end{aligned} \tag{A.49}$$

enquanto o quarto termo produz outro diferente:

$$\begin{aligned}&\frac{e^2}{\pi}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\int_0^1 dyy^2\sqrt{\frac{y}{1-y}}\int_0^1 dx\frac{x(1-x)^3}{[yx(1-x)+(1-y)]^2} =\\ &\qquad\frac{e^2}{\pi}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left(\frac{1}{27}\pi^2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned} \tag{A.50}$$

Integrando e somando todos os quatro termos da equação (A.48), ficamos com

$$\Sigma^4_{p,0} = \frac{e^2}{4\pi}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left(\frac{16}{27}\pi^2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right). \tag{A.51}$$

Finalmente, somando todas as partes de $\Sigma_{p,0}$, calculadas nas equações (A.39), (A.41), (A.45) e (A.51), temos o resultado final

$$\Sigma_{p,0} = \frac{e^2}{8}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left[4\pi I_{log}(\lambda^2)+\ln\lambda^2-\ln p^2+4\ln 2-4\pi\alpha\right] \tag{A.52}$$

A.4 Cálculo de $\Sigma_{p,q}$

Se definirmos a função $F(\vec{k})$ como

$$F(\vec{k}) = \frac{\sigma_i k_i}{(\vec{k}-\vec{R})^2 + M^2}, \tag{A.53}$$

onde $\vec{R} = (\vec{p}+\vec{q})y$ e $M^2 = -(\vec{p}+\vec{q})^2 y(1-y)$, podemos usar o apêndice A.3 para verificar que

$$\Sigma_{p,q} = e^2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} \int_k F(\vec{k}+\vec{q}), \tag{A.54}$$

$$\Sigma_{p+q,0} = e^2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} \int_k F(\vec{k}). \tag{A.55}$$

Expandindo a função $F(\vec{k}+\vec{q})$ em potências de q, temos

$$F(\vec{k}+\vec{q}) = F(\vec{k}) + q^j \frac{\partial}{\partial k_j} F(\vec{k}) + \cdots . \tag{A.56}$$

Podemos usar a derivada de $F(\vec{k})$

$$\frac{\partial}{\partial k_j} F(\vec{k}) = \frac{\sigma_i \delta_{ij}}{(\vec{k}-\vec{R})^2 + M^2} - 2\sigma_i k_i \frac{(k_j - R_j)}{[(\vec{k}-\vec{R})^2 + M^2]^2} \tag{A.57}$$

e integrar a equação acima para achar que

$$\begin{aligned}\Sigma_{p,q} =& \Sigma_{p+q,0} \\ &+ e^2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} q^j \int_k \left[\frac{\sigma_j}{(\vec{k}-\vec{R})^2 + M^2} - 2\frac{\sigma_i k_i (k_j - R_j)}{[(\vec{k}-\vec{R})^2 + M^2]^2} \right].\end{aligned} \tag{A.58}$$

O primeiro termo da direita é dado por (A.52), e por isso focaremos no segundo termo. Usando a identidade (2.1) obtemos

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{p,q} =&\Sigma_{p+q,0} + e^2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}(\alpha\vec{\sigma}\cdot\vec{q}) \\
&+ e^2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} \int_k \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\left(\frac{-R^2 + 2\vec{k}\cdot\vec{R}}{(k^2+M^2)[(\vec{k}-\vec{R})^2+M^2]}\right) \\
&+ \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} 2\sigma_i q^j \int_k \Bigg[k_i R_j \frac{2\vec{R}\cdot\vec{k} - R^2}{(k^2+M^2)^2[(\vec{k}-\vec{R})^2+M^2]} \\
&\qquad + k_i R_j \frac{2\vec{R}\cdot\vec{k} - R^2}{(k^2+M^2)[(\vec{k}-\vec{R})^2+M^2]^2}\Bigg] \\
&- 2\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} 2\sigma_i q^j \int_k \Bigg[k_i k_j \frac{2\vec{R}\cdot\vec{k} - R^2}{(k^2+M^2)^2[(\vec{k}-\vec{R})^2+M^2]} \\
&\qquad + k_i k_j \frac{2\vec{R}\cdot\vec{k} - R^2}{(k^2+M^2)[(\vec{k}-\vec{R})^2+M^2]^2}\Bigg]. \qquad (A.59)
\end{aligned}
$$

Note que a segunda integral carrega uma arbitrariedade (definida em (3.30)), mas a integral em y é simples e resulta em π. O resto dos termos, que são finitos, são nulos, como mostraremos abaixo. Começamos pelo terceiro termo:

$$
\mathcal{F}_1 = e^2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} \int_k \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\left(\frac{-R^2 + 2\vec{k}\cdot\vec{R}}{(k^2+M^2)[(\vec{k}-\vec{R})^2+M^2]}\right). \qquad (A.60)
$$

Considerando que ele é finito, podemos fazer uma mudança $\vec{k}' = \vec{k} - \vec{R}(1-x)$ e redefinir $M'^2 = R^2 x(1-x) + M^2 = R^2[x(1-x) + (1-y)/y]$, de modo que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 =& e^2 \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} \int_{k'} \int_0^1 dx \Bigg(\frac{-R^2}{(k'^2+M'^2)^2} \\
&\qquad + \frac{2(\vec{k}' + \vec{R}(1-x))\cdot\vec{R}}{(k'^2+M'^2)^2}\Bigg). \qquad (A.61)
\end{aligned}
$$

Integrando em k', achamos

$$
\mathcal{F}_1 = e^2 \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} \int_0^1 dx \left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{M'^2} + \frac{2R^2}{4\pi}\frac{(1-x)}{M'^2}\right). \qquad (A.62)
$$

Essa integral pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\frac{e^2}{4\pi}\int_0^1\int_0^1 dydx \left[\frac{2(1-x)-1}{\sqrt{y(1-y)}(x(1-x)+\frac{(1-y)}{y})}\right] \qquad (A.63) \\
&= 0. \qquad (A.64)
\end{aligned}
$$

Agora focando na quarta parte de (A.59), podemos reescrever a equação

$$\mathcal{F}_2 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} 2\sigma_i q^j \int_k \left[k_i R_j \frac{2\vec{R}\cdot\vec{k} - R^2}{(k^2+M^2)^2[(\vec{k}-\vec{R})^2+M^2]} \right.$$
$$\left. + k_i R_j \frac{2\vec{R}\cdot\vec{k} - R^2}{(k^2+M^2)[(\vec{k}-\vec{R})^2+M^2]^2} \right], \tag{A.65}$$

e fazer uma parametrização de Feynman. Definindo $\int_{y*} = \int_0^1 dy/\sqrt{y(1-y)}$ para simplificar a notação, temos

$$\mathcal{F}_2 = 2\sigma_i q^j \int_{y*}\int_k k_i R_j (2\vec{R}\cdot\vec{k} - R^2) \left[2\int_0^1 dx \frac{(1-x)}{[(\vec{k}-x\vec{R})^2 + M'^2]^3} \right.$$
$$\left. + 2\int_0^1 dx \frac{x}{[(\vec{k}-x\vec{R})^2 + M'^2]^3} \right]. \tag{A.66}$$

Considerando que uma integral cancela parte da outra, o cálculo se torna um pouco mais fácil:

$$\mathcal{F}_2 = 4\sigma_i q^j \int_{y*}\int_x\int_k \left\{ \frac{k_i 2R_j \vec{R}\cdot\vec{k} + xR_iR_j2R^2x - xR_iR_jR^2}{[k^2+M'^2]^3} \right\}. \tag{A.67}$$

Integramos o primeiro termo em k para obter

$$\mathcal{F}_2 = \frac{1}{2\pi}\sigma_i q^j \frac{(p_i+q_i)(p_j+q_j)}{(\vec{p}+\vec{q})^2} \int_{y*}\int_x \left[\frac{1}{x(1-x)+(1-y)/y} \right.$$
$$\left. + \frac{x(2x-1)}{[x(1-x)+(1-y)/y]^2} \right]. \tag{A.68}$$

Deixamos $\mathcal{F}_2$ na mesma forma, já que ela se tornará mais simples quando somada com $\mathcal{F}_3$. Partimos então para analisar o último termo (quinto) de (A.59), e retornaremos para $\mathcal{F}_2$ logo após,

$$\mathcal{F}_3 = -2\int_{y*} 2\sigma_i q^j \int_k \left[k_i k_j \frac{2\vec{R}\cdot\vec{k} - R^2}{(k^2+M^2)^2[(\vec{k}-\vec{R})^2+M^2]} \right.$$
$$\left. + k_i k_j \frac{2\vec{R}\cdot\vec{k} - R^2}{(k^2+M^2)[(\vec{k}-\vec{R})^2+M^2]^2} \right]. \tag{A.69}$$

O mesmo processo usado para o cálculo de $\mathcal{F}_2$ pode ser aplicado para o termo acima, e o resultado é

$$\mathcal{F}_3 = -2\sigma_i q^j \int_{y*}\int_x\int_k \left\{ \frac{k^2[g_{ij}(2x-1)R^2 + 2R_iR_j2x] + 2RiRjR^2x^2(2x-1)}{[k^2+M'^2]^3} \right\}. \tag{A.70}$$

A diferença neste caso está nos termos ímpares que serão todos nulos devido à simetria. Integrando em k, podemos conferir que o primeiro termo da equação acima pode ser escrito como

$$\mathcal{F}_3^{1st} = \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\frac{e^2}{4\pi}\int_0^1\int_0^1 dydx\frac{1-2x}{\sqrt{y(1-y)}\left[x(1-x)+\frac{(1-y)}{y}\right]}. \tag{A.71}$$

Note que $\mathcal{F}_3^{1st}$ é o mesmo que $\mathcal{F}_1$ (equação (A.63)), que é zero. Os outros termos em (A.70) podem ser adicionados à $\mathcal{F}_2$ resultando em

$$\mathcal{F}_3^{rest} + \mathcal{F}_2 = \frac{1}{2\pi}\sigma_i q^j\frac{(p_i+q_i)(p_j+q_j)}{(\vec{p}+\vec{q})^2}\int_{y*}\int_x\left[\frac{(1-2x)}{x(1-x)+(1-y)/y}\right.$$
$$\left.+\frac{x(2x-1)-x^2(2x-1)}{[x(1-x)+(1-y)/y]^2}\right]. \tag{A.72}$$

Calculando a integral em x e y, podemos descobrir que o resultado é nulo.

Com estes cálculos concluímos que o terceiro, quarto e quinto termos de (A.59) são zero. Ficamos então com o resultado

$$\Sigma_{p,q} = \Sigma_{p+q,0} + \pi e^2\alpha\vec{\sigma}\cdot\vec{q} \tag{A.73}$$

A.5 Cálculo de $\delta\Pi_{xx}$

Nesse apêndice, calcularemos o Tensor Polarização com a interação de Coulomb até ordem em e^2. De acordo com as equações (3.38) e (3.39), $\delta\Pi_{\mu\nu} = \delta\Pi^a_{\mu\nu} + \delta\Pi^b_{\mu\nu}$ onde

$$\delta\Pi^a_{\mu\nu}(i\Omega,0) = 8\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\omega'}{2\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{d^2p}{(2\pi)^2}V_{\vec{k}-\vec{p}}$$
$$\mathrm{tr}\left[G_{\vec{k}}(i\omega)\sigma_\mu G_{\vec{k}}(i\omega+i\Omega)\sigma_\nu G_{\vec{k}}(i\omega)G_{\vec{p}}(i\omega')\right], \tag{A.74}$$

$$\delta\Pi^b_{\mu\nu}(i\Omega,0) = 4\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\omega'}{2\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{d^2p}{(2\pi)^2}V_{\vec{k}-\vec{p}}$$
$$\mathrm{tr}\left[G_{\vec{k}}(i\omega)\sigma_\mu G_{\vec{k}}(i\omega+i\Omega)G_{\vec{p}}(i\omega'+i\Omega)\sigma_\nu G_{\vec{p}}(i\omega')\right]. \tag{A.75}$$

Tomando $\mu=\nu=x$, podemos usar a equação (3.25) para reescrever $\delta\Pi^a_{\mu\nu}$ como

$$\delta\Pi^a_{xx}(i\Omega,0) = 8\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\mathrm{tr}\left[G_{\vec{k}}(i\omega)\sigma_x G_{\vec{k}}(i\omega+i\Omega)\sigma_x G_{\vec{k}}(i\omega)\Sigma_k(i\Omega)\right]. \tag{A.76}$$

Utilizando o resultado (A.52) para $\Sigma_{k,0}$, ainda podemos reescrever a equação acima como

$$\delta\Pi^a_{xx}(i\Omega,0) = 8\frac{e^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2} \\ \mathrm{tr}\left[G_{\vec{k}}(i\omega)\sigma_x G_{\vec{k}}(i\omega+i\Omega)\sigma_x G_{\vec{k}}(i\omega)\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\left(A+B\ln k^2\right)\right], \quad (A.77)$$

onde $A = 2\pi I_{log}(\lambda^2) + 1/2\ln\lambda^2 + 2\ln 2 - 2\pi\alpha$ e $B = -1/2$. Usando a definição do propagador fermiônico (3.10), temos que

$$\delta\Pi^a_{xx}(i\Omega,0) = \frac{4e^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{A+B\ln k^2}{(\omega^2+k^2)^2[(\omega+\Omega)^2+k^2]} \\ \times\,\mathrm{tr}\left[(i\omega+\vec{\sigma}\cdot\vec{k})\sigma_x(i(\omega+\Omega)+\vec{\sigma}\cdot\vec{k})\sigma_x(i\omega+\vec{\sigma}\cdot\vec{k})\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\right]. \quad (A.78)$$

Calculando os traços das matrizes de Pauli, achamos

$$\delta\Pi^a_{xx}(i\Omega,0) = \frac{4e^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{A+B\ln k^2}{(\omega^2+k^2)^2[(\omega+\Omega)^2+k^2]} \\ \times\left[-4\omega(\omega+\Omega)k^2 + 2(k_x^4-k_y^4) - 2\omega^2(k_x^2-k_y^2)\right]. \quad (A.79)$$

A integração dos dois últimos termos, na verdade, é nula, já que $\int_k(k_x^4-k_y^4)f(k)=0$ e $\int_k(k_x^2-k_y^2)f(k)=0$. Então, integrando em ω, podemos obter

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{(-4k^2)[\omega^2+\omega\Omega]}{(\omega^2+k^2)^2[(\omega+\Omega)^2+k^2]} = \frac{|\vec{k}|(\Omega^2-4k^2)}{(\Omega^2+4k^2)^2}, \quad (A.80)$$

de tal forma que

$$\delta\Pi^a_{xx}(i\Omega,0) = 4e^2\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{|\vec{k}|(\Omega^2-4k^2)}{2(\Omega^2+4k^2)^2}(A+B\ln k^2). \quad (A.81)$$

Subtraindo o modo de frequência-zero, obtemos

$$\delta\Pi^a_{xx}(i\Omega,0) = 4e^2\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\Omega^2(\Omega^2+12k^2)}{8|\vec{k}|(\Omega^2+4k^2)^2}(A+B\ln k^2). \quad (A.82)$$

Considerando que o termo envolvendo A não carrega nenhuma dependência em k, podemos integrar em k e encontrar

$$\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\Omega^2(\Omega^2+12k^2)A}{8|\vec{k}|(\Omega^2+4k^2)^2} = \frac{1}{32}|\Omega|A. \quad (A.83)$$

A outra parte (envolvendo B) é

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\Omega^2(\Omega^2+12k^2)B\ln k^2}{8|\vec{k}|(\Omega^2+4k^2)^2} = \frac{1}{(2\pi)^2}B[\Omega\pi - 2\pi\Omega\ln 2 - \pi\Omega\ln\Omega^{-2}]. \tag{A.84}$$

Isso nos fornece o resultado $\delta\Pi^a_{xx}(i\Omega,0)$, o qual é a primeira contribuição para a correção quântica para a condutividade do grafeno:

$$\sigma_a = -\sigma_0 e^2\left(\pi I_{log}(\lambda^2) + \frac{1}{4}\ln\lambda^2 - \pi\alpha + \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln\Omega\right), \tag{A.85}$$

onde $\sigma_0 = \frac{e^2}{4\hbar}$.

Para o cálculo de $\delta\Pi^b_{xx}(i\Omega,0)$, podemos seguir os mesmos passos técnicos feitos para $\delta\Pi^a_{xx}(i\Omega,0)$. Por isso apenas apresentamos o resultado

$$\begin{aligned}\sigma_b = \sigma_0 e^2\bigg(\pi I_{log}(\lambda^2) + \frac{1}{4}\ln\lambda^2 + \pi\alpha + \frac{3}{2}\ln 2 \\ -\frac{1}{2}\ln\Omega - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{12}(4+3\pi) + \frac{4-\pi}{4}\bigg).\end{aligned} \tag{A.86}$$

A.6 Cálculo de $\mathcal{P}_\mu$ and $q^\mu\mathcal{P}_\mu$

$\mathcal{P}_\mu$, definido em (3.14), é

$$\mathcal{P}_\mu(\vec{q},\vec{p},i\Omega) = -\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{2\pi e^2}{|\vec{p}-\vec{k}|}G_k(i\omega)\sigma_\mu G_{k+q}(i\omega+i\Omega). \tag{A.87}$$

Reescrevendo essa equação, seperando a integral em ω

$$\mathcal{P}_\mu(\vec{q},\vec{p},i\Omega) = -\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{2\pi e^2}{|\vec{p}-\vec{k}|}I_\omega, \tag{A.88}$$

onde

$$I_\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{(i\omega+\vec{\sigma}\cdot\vec{k})\sigma_\mu[i(\omega+\Omega)+\vec{\sigma}\cdot(\vec{k}+\vec{q})]}{(\omega^2+k^2)[(\omega+\Omega)^2+(\vec{k}+\vec{q})^2]}. \tag{A.89}$$

Após uma certa álgebra (apresentada no apêndice A.1), obtemos

$$I_\omega = \int_0^1 dy\left(\frac{-\sigma_\mu}{4M}+\frac{\mathcal{N}_\mu}{4M^3}\right), \tag{A.90}$$

onde $M^2 = (\vec{k}+\vec{q}y)^2 + (q^2+\Omega^2)y(1-y)$ e

$$\mathcal{N}_\mu = \Omega^2 y(1-y)\sigma_\mu - i\Omega y(k+q)_l\sigma_\mu\sigma_l + i\Omega(1-y)k_l\sigma_l\sigma_\mu + k_l(k+q)_l\sigma_l\sigma_\mu\sigma_l. \tag{A.91}$$

Usando os resultados acima na equação (A.88), temos que

$$\mathcal{P}_\mu = -\int_k \int_0^1 dy \left[\frac{-\sigma_\mu}{4M} + \frac{\mathcal{N}_\mu}{4M^3}\right] \frac{2\pi e^2}{4[(\vec{p}-\vec{k})^2]^{1/2}} \equiv \mathcal{P}_\mu^1 + \mathcal{P}_\mu^2. \tag{A.92}$$

Após fazermos uma parametrização de Feynman, o primeiro termo em (A.92) se torna

$$\mathcal{P}_\mu^1 = \frac{e^2}{2}\sigma_\mu \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_k \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \frac{1}{[(\vec{k}+\vec{q'})^2 + M'^2]}, \tag{A.93}$$

onde $\vec{q'} = \vec{p}(x-1) + \vec{q}xy$ e $M'^2 = (\Omega^2 + q^2)xy(1-y) + x(1-x)(\vec{p}+\vec{q}x)^2$.

Como a equação acima é logaritmicamente divergente na integral k, podemos usar (2.1) para separar essa divergência. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\mu^1 =& \sigma_\mu \frac{e^2}{2}\left[\pi I_{log}(\lambda^2) - \frac{1}{4\pi}\int_{x,y} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\right. \\ & \left.\times \left(\ln\left(\frac{M'^2}{\lambda^2}\right) - \int_k \frac{q'^2 + 2\vec{k}\cdot\vec{q'}}{(k^2+M'^2)[(\vec{k}+\vec{q'})^2 + M'^2]}\right)\right],\end{aligned} \tag{A.94}$$

onde está implícito que $\int_{x,y} = \int_0^1 \int_0^1 dxdy$. O último termo da equação (A.94) resulta em zero, o que pode ser visto imediatamente após a parametrização de Feynman. Podemos reescrever $\mathcal{P}_\mu^1$ como

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\mu^1 = \sigma_\mu \frac{e^2}{2}&\left[\pi I_{log}(\lambda^2) + \frac{\ln\lambda^2}{4}\right. \\ & \left. - \frac{1}{4\pi}\int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \ln\left[(a+b)x - ax^2\right]\right],\end{aligned} \tag{A.95}$$

onde

$$a = (p^2) + (2\vec{p}\cdot\vec{q})y + (q^2)y^2, \tag{A.96}$$

$$b = -(\Omega^2 + q^2)(y^2 - y). \tag{A.97}$$

A outra parte de (A.92) é

$$\mathcal{P}_\mu^2 = -\frac{\pi e^2}{2}\int_0^1 dy \int_k \frac{\mathcal{N}_\mu}{[M^2]^{3/2}} \frac{1}{[(\vec{p}-\vec{k})^2]^{1/2}}. \tag{A.98}$$

Definindo $A = M^2$ e $B = (\vec{p}-\vec{k})^2$, escrevemos

$$\frac{1}{A^{3/2}B^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)}\int_0^1 dx \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{1}{(xM^2 + (1-x)(\vec{p}-\vec{k})^2)^2} \tag{A.99}$$

e fazemos, por questões de conveniência, uma mudança de variável $\vec{k} \rightarrow \vec{k} - \vec{q}'$ que resulta em

$$\mathcal{N}_\mu \rightarrow \mathcal{N}'_\mu = \Omega^2 y(1-y)\sigma_\mu - i\Omega(1-y)q'_l\sigma_l\sigma_\mu + (q'_l q'_j - q'_l q_j)\sigma_l\sigma_\mu\sigma_j \\ + i\Omega y(q'-q)_l\sigma_\mu\sigma_l + k_l k_j\sigma_l\sigma_\mu\sigma_j. \quad \text{(A.100)}$$

Dessa forma

$$\mathcal{P}^2_\mu = \mathcal{P}^{2\,(\infty)}_\mu + \sum_{i=1}^{4}\mathcal{P}^{2\,(i)}_\mu, \quad \text{(A.101)}$$

onde $\mathcal{P}^{2\,(\infty)}_\mu$ contém a parte divergente de $\mathcal{P}^2_\mu$ e pode ser lida de acordo com as regras da regularização implícita como

$$\mathcal{P}^{2\,(\infty)}_\mu = -e^2\int_{x,y}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\left[\frac{\delta^{lj}}{2}\left(I_{log}(\lambda^2) - \frac{1}{4\pi}\ln\frac{M'^2}{\lambda^2}\right) - \frac{\alpha\delta^{lj}}{2}\right]\sigma_l\sigma_\mu\sigma_j, \quad \text{(A.102)}$$

onde $M'^2 = x(1-x)(\vec{p}+\vec{q}y)^2 + xy(1-y)(\Omega^2+q^2)^2$. Na equação acima usamos

$$\int_k \frac{k_l k_j}{(k^2+M'^2)^2} = \delta_{lj}/2 I_{log}(M'^2) - \frac{\alpha\delta_{lj}}{2} \quad \text{(A.103)}$$

e a relação de escala

$$I_{log}(M'^2) = I_{log}(\lambda^2) - 1/4\pi\ln{(M'^2/\lambda^2)}. \quad \text{(A.104)}$$

Procedemos com o cálculo dos termos finitos $\mathcal{P}^{2\,(i)}_\mu$ com $i = 1,2,3,4$. Após integrarmos em x e k, $\mathcal{P}^{2\,(1)}_\mu$ resulta em

$$\mathcal{P}^{2\,(1)}_\mu = -\frac{e^2}{4\pi}\Omega^2\sigma_\mu\int_y y(1-y)I_1, \quad \text{(A.105)}$$

onde

$$I_1 = \int_x \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\frac{1}{[a(1-x)+b]} = \frac{\pi}{\sqrt{(a+b)+b}}. \quad \text{(A.106)}$$

As definições para a e b são as equações (A.96) e (A.97) respectivamente.

Dado que

$$\mathcal{P}^{2\,(2)}_\mu = \frac{ie^2\Omega}{4\pi}\int_y (1-y)\left\{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\vec{\sigma}_\mu I_2 + y\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\vec{\sigma}_\mu I_2 - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\sigma_\mu I_1\right\}, \quad \text{(A.107)}$$

onde

$$I_2 = \int_x \sqrt{\frac{x}{(1-x)}}\frac{1}{[a(1-x)+b]} = \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{a+b}{b}} - \frac{\pi}{a}, \quad \text{(A.108)}$$

podemos, após alguma álgebra, integrar em k e x, $\mathcal{P}_\mu^{2\,(3)}$ para obter

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\mu^{2\,(3)} = -\frac{e^2}{4\pi}\int_y \{&\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\sigma_\mu\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\ \ [-I_1 - 2I_2 + I_3]+\\ &+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\sigma_\mu\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\ \ [I_1 - (y+1)I_2 + yI_3]+\\ &+\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\sigma_\mu\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\ \ [-yI_2 + yI_3]+\\ &+\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\sigma_\mu\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\ \ [-yI_2 + y^2I_3]\}\,,\end{aligned} \tag{A.109}$$

onde

$$I_3 = \int_x \sqrt{\frac{x}{(1-x)}}\frac{x}{[a(1-x)+b]} = \frac{\pi}{a^2}\left[\frac{(a+b)^2}{\sqrt{b(a+b)}}\right] - \frac{\pi}{a^2}\left[\frac{3a+2b}{2}\right]. \tag{A.110}$$

Finalmente, o último termo

$$\mathcal{P}_\mu^{2\,(4)} = -\frac{ie^2}{4\pi}\Omega\sigma_\mu\int_y y\{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}I_2 - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}I_1 + y\vec{\sigma}\cdot\vec{q}I_2 - \vec{\sigma}\cdot\vec{q}I_1\}, \tag{A.111}$$

no qual deixamos em evidência alguns termos em comum que podem ajudar quando contrairmos q^μ com $\mathcal{P}_\mu$.

Isso conclui essa parte dos cálculos. Somando todas as partes computadas (A.95) com (A.102), (A.105), (A.107), (A.109) e (A.111), obtemos

$$\mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}_\mu^1 + \mathcal{P}_\mu^{2\,(\infty)} + \mathcal{P}_\mu^{2\,(1)} + \mathcal{P}_\mu^{2\,(2)} + \mathcal{P}_\mu^{2\,(3)} + \mathcal{P}_\mu^{2\,(4)}. \tag{A.112}$$

Com este resultado, partimos agora para contrair q^μ com $\mathcal{P}_\mu$. Podemos decompor $q^\mu\mathcal{P}_\mu$ da seguinte maneira

$$q^\mu\mathcal{P}_\mu = q^\mu\mathcal{P}_\mu^{(\Omega)} + q^\mu\mathcal{P}_\mu^{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})} + q^\mu\mathcal{P}_\mu^{(\vec{\sigma}\cdot\vec{q})} \tag{A.113}$$

onde o sobrescrito denota cada parte da contração envolvendo termos multiplicando Ω, $\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$ ou $\vec{\sigma}\cdot\vec{q}$. Primeiramente

$$\begin{aligned}q^\mu\mathcal{P}_\mu^{(\Omega)} =&ie^2\Omega\frac{1}{4\pi}\left\{-1(\Omega^2+q^2)\int_y y(1-y)I_2 + q^2\int_y y[I_1 + (1-2y)I_2]\right.\\ &\left.+2\vec{p}\cdot\vec{q}\int_y y(I_1 - I_2) + 2\vec{p}\cdot\vec{q}\int_y y(I_3 - I_2)\right\} - ie^2\Omega\frac{\pi\alpha}{2}\\ &+\left[\Omega^2\int_y y(1-y)I_1 + p^2\int_y (I_1 - 2I_2 + I_3) + q^2\int_y(-yI_2 + y^2I_3)\right] \qquad (A.114)\\ =&ie^2\Omega\frac{1}{4\pi}\left[\int_y b(I_1 - I_2) + \int_y a(I_1 + I_3 - 2I_2)\right] - ie^2\Omega\frac{\pi\alpha}{2}. \qquad (A.115)\end{aligned}$$

Para simplicar ainda mais, usamos as propriedades que são extraídas da definição de (A.106), (A.108) e (A.110)

$$I_3 - I_2 = -\frac{1}{2}\frac{\pi}{a} + I_2\frac{b}{a}, \tag{A.116}$$

$$I_1 - I_2 = \frac{\pi}{a} - \frac{b}{a}I_1. \tag{A.117}$$

Com elas, obtemos

$$q^\mu \mathcal{P}_\mu^{(\Omega)} = ie^2\Omega\frac{1}{8} - ie^2\Omega\frac{\pi\alpha}{2}. \tag{A.118}$$

De forma similar, podemos mostrar que

$$q^\mu \mathcal{P}_\mu^{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})} = \frac{e^2}{8}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left[-\ln(\vec{p}+\vec{q})^2 + \ln(p^2)\right]. \tag{A.119}$$

Por último avaliamos

$$\begin{aligned} q^\mu \mathcal{P}_\mu^{(\vec{\sigma}\cdot\vec{q})} = e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\Bigg\{ & \frac{\pi}{2}I_{log}(\lambda^2) + \frac{1}{8}\ln\lambda^2 + \frac{1}{2}\ln 2 \\ & - \frac{1}{4}\int_y \ln(\sqrt{a+b}+\sqrt{b}) + \frac{-1}{4\pi}\int_y \Omega^2 y(1-y)I_1 \\ & + \left(\frac{1}{4\pi}\right)\int_y \left[q^2(y^2I_3 - yI_2) - p^2(I_3 + I_1 - 2I_2)\right] \\ & + \left(\frac{\Omega^2}{4\pi}\right)\int_y \left[y(1-y)I_2 - y(yI_2 - I_1)\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{A.120}$$

Usando a equação algébrica abaixo

$$\begin{aligned} \int_y \ln(\sqrt{a+b}+\sqrt{b}) = & \frac{1}{2}\ln(\vec{p}+\vec{q})^2 - \int_y y\frac{(yq^2 + \vec{p}\cdot\vec{q})}{a} \\ & - \frac{1}{2}\int_y \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a+b}}\left[a\left(\frac{1-2y}{1-y}\right) - 2y(yq^2 + \vec{p}\cdot\vec{q})\right], \end{aligned} \tag{A.121}$$

podemos simplificar, assim como fizemos antes, para obter

$$q^\mu \mathcal{P}_\mu^{(\vec{\sigma}\cdot\vec{q})} = \frac{e^2}{8}\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\left[4\pi I_{log}(\lambda^2) + \ln(\lambda^2) - \ln(\vec{p}+\vec{q})^2 + 4\ln(2) - 1\right]. \tag{A.122}$$

Dessa forma, podemos adicionar todos os termos (A.118), (A.119) e (A.122) juntos

$$\begin{aligned} q^\mu \mathcal{P}_\mu = & e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\left\{-\frac{1}{8}\ln\left[\frac{(\vec{p}+\vec{q})^2}{\vec{p}}\right]\right\} + e^2 i\Omega\left\{\frac{1}{8} - \frac{\pi\alpha}{2}\right\} \\ & + e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\left\{\frac{\pi}{2}I_{log}(\lambda^2) + \frac{1}{8}\ln\lambda^2 + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{8}\ln(\vec{p}+\vec{q})^2\right\} \\ & + e^2\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\left(\frac{1}{8}\right). \end{aligned} \tag{A.123}$$

Referências Bibliográficas

[1] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, *Nuovo Cim.* **12B**, 20 (1972); G. 't Hooft, M. J. Veltman, *Nucl. Phys. B* **44**, 189 (1972); J. F. Ashmore, *Lett. Nuovo Cim.* **4**, 289 (1972).

[2] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, *Phys. Lett.* **47B**, 566 (1972).

[3] G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys. B* **44**, 189 (1972).

[4] W. Pauli, F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 434 (1949).

[5] O. A. Battistel, A. L. Mota, M. C. Nemes, *Mod. Phys. Lett.* **A13**, 1597 (1998).

[6] I. F. Herbut, V. Juričić, O. Vafek, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 046403 (2008).

[7] D. E. Sheehy, J. Schmalian, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 226803 (2007).

[8] E. G. Mishchenko, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 216801 (2007).

[9] A. B. Kuzmenko, E. van Heumen, F. Carbone, D. van derMarel, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 117401 (2008).

[10] R. R. Nair, P. Blake, A. N. Grigorenko, K. S. Novoselov, T. J. Booth, T. Stauber, N. M. R. Peres, A. K. Geim, *Science* **320**, 1308 (2008).

[11] J. González, F. Guinea, M. A. H. Vozmediano, *Phys. Rev. B* **59**, R2474 (1999).

[12] F. de Juan, A. G. Grushin, M. Vozmediano, *Phys. Rev. B* **82**, 125409 (2010).

[13] V. Juričić, O. Vafek, I.F. Herbut, *Phys. Rev. B* **82**, 235402 (2010).

[14] D. E. Sheehy, J. Schmalian, *Phys. Rev. B* **80**, 193411 (2009).

[15] E. G. Mishchenko, *Europhys. Lett.* **83**, 17005 (2008).

[16] P. Ramond, "*Field Theory: A Modern Primer*" (Westview Press, 2001).

[17] L. H. Ryder, "*Quantum Field Theory*" (Cambridge University Press, 1996).

[18] L. C. Ferreira, A. L. Cherchiglia, Brigitte Hiller, Marcos Sampaio, M. C. Nemes, *Phys. Rev. D* **86**, 025016 (2012).

[19] R. Jackiw, *Int. J. Mod. Phys. B* **14**, 2011-2022 (2000).

[20] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, A. K. Geim, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109 (2009).

[21] M. A. H. Vozmediano, F. Guinea, *Phys. Scr. T* **146**, 014015 (2012).

[22] G. W. Semenoff, *Phys. Rev. Lett* **53**, 2449 (1984).

[23] D. P. DiVincenzo, E. J. Mele, *Phys. Rev. B* **29**, 1685 (1984).

[24] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, A. A. Firsov, *Science* **306**, 666 (2004).

[25] I. V. Fialkovsky, V. N. Marachevsky, D. V. Vassilevich, *Phys. Rev. B* **84**, 035446 (2011).

[26] I. V. Fialkovsky, D. V. Vassilevich, *Eur. Phys. J. B* **85**, 384 (2012).

[27] R. Kubo, *Rep. Prog. Phys.* **29**, 255 (1986).

[28] I. F. Herbut, *Physics* **2**, 57 (2009).

[29] O. A. Battistel, M. C. Nemes, *Phys. Rev.* **D59**, 055010 (1999).

[30] M. Sampaio, A. P. Baêta Scarpelli, B. Hiller, A. Brizola, M. C. Nemes, S. Gobira, *Phys. Rev.* **D65**, 125023 (2002).

[31] A.P. Baêta Scarpelli, M. Sampaio, M.C. Nemes, B. Hiller, *Eur. Phys. J.* ***C*** **56**, 571 (2008).

[32] L. C. T. Brito, H. G. Fargnoli, A. P. Baêta Scarpelli, Marcos Sampaio, M. C. Nemes, *Phys. Lett.* **B673**, 220 (2009).

[33] H. G. Fargnoli, et al, *Eur. Phys. J.* **C71**, 1633 (2011).

[34] G. Gazzola, H. G. Fargnoli, A. P. Baêta Scarpelli, Marcos Sampaio, M. C. Nemes, *J. Phys.* **G39**, 035002 (2012).

[35] A.P. Baêta Scarpelli, M. Sampaio, M.C. Nemes, *Phys. Rev. D* **63**, 046004 (2001).

[36] A. P. B. Scarpelli et al., *Phys. Rev.* **D64**, 046013 (2001).

[37] E. W. Dias, A. P. Baêta Scarpelli, L. C. T. Brito, Marcos Sampaio, M. C. Nemes, *Eur. Phys. J.* ***C* 55**, (2008) 667;

[38] E. W. Dias, A. P. Baêta Scarpelli, L. C. T. Brito, H. G. Fargnoli,*Braz. J. Phys.* **40**, (2010) 228;

[39] A. L. Cherchiglia, M. Sampaio, M. C. Nemes, *Int. J. Mod. Phys.* **A26**, 2591 (2011).

[40] A. L. Cherchiglia, L. A. Cabral, M. C. Nemes, Marcos Sampaio, *Phys. Rev. D* **87**, 065011 (2013).

[41] L. A. M. Souza, Marcos Sampaio, M. C. Nemes, *Phys. Lett.* **B632** (2006) 717.

[42] M. A. Shifman, *Phys. Rep.* **209**, 341 (1991).

[43] S. Adler, *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1969); J. S. Bell, R. Jackiw, *Nuovo Cimento* **60A**, 47 (1969).

[44] S. H. Abedinpour, G. Vignale, A. Principi, M. Polini, W. Tse, A. H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **84**, 045429 (2011).

[45] D. T. Son, *Phys Rev B* **75**, 235423 (2007).

[46] B. Rosenstein, M. Lewkowicz and T. Maniv, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 066602 (2013).

[47] S. H. Abedinpour and G. Vignale, *Phys. Rev. B* **84**, 045429 (2011)

[48] R. Bertlmann, "*Anomalies in Quantum Field Theory*", Int.Series of Monographs in Physics 91, Oxford (2000).

[49] O. Vafek and Z. Tesanovic, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 237001 (2003)

[50] I. Sodemann, M. M. Fogler, *Phys. Rev. B* **86**, 115408 (2012).

[51] A. N. Redlich, *Phys. Rev. D* **29**, 2366-2374 (1984).

[52] A. N. Redlich, *Phys. Rev. Let.* **52**, 18 (1984).

[53] G. Gazzola, A. L. Cherchiglia, L. A. Cabral, M. C. Nemes, Marcos Sampaio, *Europhys. Lett.* **104** 27002 (2013).

[54] Hiroaki T. Ueda, Akihito Takeuchi, Gen Tatara, Takehito Yokoyama, *Phys. Rev. B* **85**, 115110 (2012).

[55] X.-L. Qi, S.-G., *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011).

[56] M. Chaichian, W. F. Chen, *Phys Rev D* **58**, 125004 (1998).

[57] G. Giavarini, C. P. Martin, F. Ruiz Ruiz, *Phys. Lett. B* **332**, 345 (1994); **314**, 328 1993.

[58] C. P. Martin, *Phys. Lett. B* **241**, 513 (1990); G. Giavarini, C. P. Martin, F. Ruiz Ruiz, *Phys. Nucl. B* **381**, 222 (1992).

[59] K. Nittoh, T. Ebihara, *Mod. Phys. Lett. A* **13**, 2231 (1998).

[60] W. Chen, G. W. Semenoff, Y.-S. Wu, *Phys. Rev. D* **46**, 5521 (1992); **44**, 1625 (1991).

[61] M. Asorey, F. Falceto, J. L. López, G.Luzón, *Phys. Rev. D* **49**, 5377 (1994).

[62] H. Belich Jr, O. M. Del Cima, M. M. Ferreira Jr, J. A. Helayël-Neto, *J. Phys. G* **29**, 1431 (2003); M. A. De Andrade, O. M. Del Cima, J. A. Helayël-Neto, *Il Nuovo Cimento* **111**, 1145 (1998).

[63] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev.* ***D*** **55**, (1997) 6760.

[64] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev.* ***D*** **58**, (1998) 116002.

[65] S. Coleman and S. L. Glashow, *Phys. Lett.* ***B*** **405**, (1997) 249.

[66] S. Coleman and S. L. Glashow, *Phys. Rev.* ***D*** **59**, (1999) 116008.

[67] S. Carroll and H. Tam, *Phys. Rev.* ***D*** **78**, (2008) 044047.

[68] M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, *Phys. Rev.* ***D*** **81**, (2010) 045018.

[69] M. Gomes, J.R. Nascimento, A.Yu. Petrov, A.J. da Silva, "On the aether-like Lorentz-breaking action for the electromagnetic field", arxiv:1008.0607.

[70] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, *Eur. Phys. J.* ***C*** **42**, (2005) 127; H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, M. T. D. Orlando, *Int. J. Mod. Phys* ***A*** **21**, (2006) 6211.

[71] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, F. M. O Moucherek, *Phys. Rev.* ***D*** **74**, (2006) 065009.

[72] H. Belich, L.P. Colatto, T. Costa-Soares, J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, *Eur. Phys. J.* ***C*** **62**, (2009) 425.

[73] M. Botta Cantcheff, C. F. L. Godinho, A. P. Baêta Scarpelli, J. A. Helayel-Neto, *Phys. Rev.* ***D*** **68**, (2003) 065025.

[74] B. Goncalves, Y. N. Obukhov, I. L. Shapiro, *Phys.Rev.* ***D*** **80**, (2009) 125034.

[75] V. A. Kostelecky and R. Lehnert, *Phys. Rev.* ***D*** **63**, (2001) 065008.

[76] J. Alfaro, A. A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi, R. Soldati, *Int.J.Mod.Phys.* ***A*** **25**, (2010) 3271;

[77] S.M. Carroll, G.B. Field and R. Jackiw, *Phys. Rev.* ***D*** **41**, (1990) 1231.

[78] A. P. Baêta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, J. A. Helayel-Neto, *Phys. Rev.* ***D*** **67**, (2003) 085021; A. P. Baêta Scarpelli and J. A. Helayel-Neto, *Phys.Rev.* ***D*** **73**, (2006) 105020.

[79] C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys.* ***B*** **607**, (2001) 247; C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys.* ***B*** **657**, (2003) 214.

[80] A.A. Andrianov and R. Soldati, *Phys. Rev.* ***D*** **51**, (1995) 5961; A. A. Andrianov and R. Soldati, *Phys. Lett.* ***B*** **435**, (1998) 449; A. A. Andrianov, R. Soldati and L. Sorbo, *Phys. Rev.* ***D*** **59**, (1998) 025002; A. A. Andrianov, D. Espriu, P. Giacconi, R. Soldati, *J. High Energy Phys.* **0909**, (2009) 057; V. Ch. Zhukovsky, A. E. Lobanov, E. M. Murchikova, *Phys.Rev.* ***D*** **73**, (2006) 065016.

[81] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, *Phys. Rev.* ***D*** **67**, (2003) 125011.

[82] M.S. Berger, V. A. Kostelecky, *Phys.Rev.* ***D*** **65**, (2002) 091701; H. Belich , J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, A.L.M.A. Nogueira, *Phys.Rev.* ***D*** **68**, (2003) 065030; A. P. Baêta Scarpelli, H. Belich, J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, A.L.M.A. Nogueira, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **127**, (2004) 105.

[83] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. Lett.* **82**, (1999) 3572.

[84] J. M. Chung and B. K. Chung, *Phys. Rev.* ***D*** **63**, (2001) 105015.

[85] J. M. Chung, *Phys.Rev.* ***D*** **60**, (1999) 127901.

[86] W. F. Chen, *Phys. Rev.* ***D*** **60**, (1999) 085007.

[87] M. Perez-Victoria, *Phys. Rev. Lett.* **83**, (1999) 2518.

[88] M. Perez-Victoria, *J. High. Energy Phys.* **0104**, (2001) 032.

[89] O.A. Battistel and G. Dallabona, *Nucl. Phys.* ***B*** **610**, (2001) 316; *J. Phys.* ***G*** **27**, (2001) L53; O.A. Battistel and G. Dallabona, *J. Phys.* ***G*** **28**, (2002) L23.

[90] T. Mariz, J.R. Nascimento, E. Passos, R.F. Ribeiro and F.A. Brito, *J. High. Energy Phys.* **0510** (2005) 019.

[91] J. R. Nascimento, E. Passos, A. Yu. Petrov, F. A. Brito, *J. High. Energy Phys.* **0706**, (2007) 016.

[92] B. Altschul, *Phys. Rev.* ***D*** **70**, (2004) 101701.

[93] F.A. Brito, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, *Phys. Lett.* ***B*** **664**, (2008) 112.

[94] Oswaldo M. Del Cima, J. M. Fonseca, D.H.T. Franco, O. Piguet, *Phys. Lett.* ***B*** **688**, (2010) 258.

[95] F.A. Brito, L.S. Grigorio, M.S. Guimaraes, E. Passos, C. Wotzasek, *Phys.Rev.* ***D*** **78**, (2008) 125023.

[96] R. Lehnert and R. Potting, *Phys. Rev. Lett.* **93**, (2004) 110402.

[97] R. Casana, M. M. Ferreira Jr. and J. S. Rodrigues, *Phys. Rev.* ***D*** **78**, (2008) 125013; M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A.Yu. Petrov, A. F. Santos, and A. J. da Silva, *Phys. Rev.* ***D*** **81**, (2010) 045013; F.A. Brito, L.S. Grigorio, M.S. Guimaraes, E. Passos, C. Wotzasek, *Phys. Lett.* ***B*** **681**, (2009) 495.

[98] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **87**, (2001) 251304.

[99] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Phys. Rev.* ***D*** **66**, (2002) 056005.

[100] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Phys. Rev.* ***D*** **80**, (2009) 015020.

[101] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **97**, (2006) 140401.

[102] V.A. Kostelecky and R. Potting, *Phys.Rev.* ***D*** **79**, (2009) 065018; Q. G. Bailey, *Phys.Rev.* ***D*** **82**, (2010) 065012; V.B. Bezerra, C.N. Ferreira, J.A. Helayel-Neto, *Phys.Rev.* ***D*** **71**, (2005) 044018; J.L. Boldo, J.A. Helayel-Neto, L.M. de Moraes, C.A.G. Sasaki, V.J. Vasquez Otoya, *Phys. Lett.* ***B*** **689**, (2010) 112; A.F. Ferrari, M. Gomes, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, A. J. da Silva, *Phys. Lett.* ***B*** **652**, (2007) 174.

[103] T. Jacobson, S. Liberati, D.Mattingly, *Nature* **424**, (2003) 1019; T. Jacobson, S. Liberati, D.Mattingly, *Phys.Rev.* ***D*** **67**, (2003) 124011.

[104] L. Maccione, Stefano Liberati, Gunter Sigl, *Phys. Rev. Lett.* **105**, (2010) 021101; L. Shao, Z. Xiao, Bo-Qiang Ma, *Astropart. Phys.* **33**, (2010) 312; L. Maccione, S. Liberati, A. Celotti, J. G. Kirk, P. Ubertini, *Phys. Rev* ***D*** **78**, (2008) 103003; M. Galaverni, G. Sigl, *Phys. Rev. Lett.* **100**, (2008) 021102.

[105] C.D. Carone, M. Sher, and M. Vanderhaeghen, *Phys. Rev.* ***D*** **74**, (2006) 077901.

[106] J.-P. Bocquet et at., *Phys. Rev. Lett.* **104**, (2010) 241601.

[107] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, P. R. D. Pinheiro, *Phys. Rev.* ***D*** **80**, (2009) 125040.

[108] B. Altschul, *Phys. Rev. Lett.* **98**, (2007) 041603.

[109] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, Carlos E. H. Santos, *Phys. Rev.* ***D*** **78**, (2008) 105014.

[110] Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira, Adalto R. Gomes, Frederico E. P. dos Santos, *Phys. Rev.* ***D* 82**, (2010) 125006, arxiv:1010.2776.