

**O Gato de Cheshire quântico como um fenômeno de
interferência**

Raul Corrêa Silva

2015



Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG
Instituto de Ciências Exatas - ICEx
Programa de Pós Graduação em Física

O Gato de Cheshire quântico como um fenômeno de interferência

Raul Corrêa Silva

Orientador: Pablo Lima Saldanha

Dissertação apresentada ao departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais, para a obtenção de Título de Mestre em Física

Área de Concentração: Mecânica quântica

2015

Agradecimentos

Antes de tudo preciso agradecer imensamente aos meus pais, Zilá e Helder, e ao meu irmão, Izo. Dadas todas as instabilidades no meu ainda curto percurso profissional, eles me apoiaram de todas as formas possíveis em todas as mudanças. Não teria sido tão prazeroso chegar até aqui e nem possível ter feito tanta coisa sem o apoio e o amor incondicional de vocês!

No último ano da graduação, decidido a abandonar também da física, conheci a Maria Carolina Nemes. Ela foi responsável por trazer pra mim um entusiasmo com a física que não existia em mim, e que confesso que eu nem sabia que era possível! Sempre preocupada em permanecer com os pés no chão, a Carolina conseguiu me fazer sentir prazer na física como trabalho, fruto da curiosidade eterna que é a ignição. Terminar esse trabalho é minha homenagem a ela. Saudades, carinho, admiração e boas lembranças, sempre...

Ao Pablo, que eu conheci por causa da Carolina, não tenho como agradecer suficientemente a orientação leve, precisa, que sempre me deixa com vontade de trabalhar mais, e todos os conselhos. Esse trabalho com você me fez querer levar a sério a física como uma possibilidade profissional de fato (houve tempos em que tive certeza que com física eu não ia trabalhar nunca).

Agradeço imensamente ao Marcelo França e ao Carlos Monken, com quem, junto com o Pablo, escrevemos o trabalho que deu origem a essa dissertação. Muito obrigado pela abertura e todas as conversas!

Também a todos do Enlight, que além dos momentos de diversão me permitiram ter apresentado uma prévia desse trabalho logo depois de ter escrito com França, Monken e Pablo.

Obrigado a todos do departamento que facilitam as burocracias inevitáveis. Juliana, Ana

Luiza, Paulo Sérgio, Silvia, Bárbara e todo mundo que eu esqueço. E o que seria de mim sem a biblioteca da física? Shirley, Juliana e todo mundo que eu esqueço de novo.

Agradeço ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro imprescindível durante todo o mestrado e na iniciação científica durante a graduação.

Tem todos os meus amigos que dão sentido pra minha vida, não nessa ordem: Thyer, Carol, Daniel, Augusto, Felipe, Hélio, Gustavo, Gabo, Cris, Lulis, Tomaz, Raul, etc etc etc.

Por fim, dado o contexto tem três pessoas a quem eu queria agradecer especialmente. Não conseguiria sobreviver na física sem a Denise – queria sair correndo e ela tava sempre lá pra um café, ou mesmo quando já tô contente, você deixa tudo melhor. A Adriana é sem dúvida a razão por eu ter decidido estudar física a sério, e o FID e toda a experiência com dança que você me proporcionou são responsáveis por muuuuuuuuito da forma como eu vejo o mundo. E Otavinho, foi uma aventura incrível!!!

Resumo

Baseados no conceito de medição fraca, em 2013 Aharonov *et al.* propuseram um experimento em que, segundo sua interpretação dos resultados previstos, um fóton e sua polarização circular seriam separados espacialmente. Os autores chamaram esse fenômeno de “Gato de Cheshire quântico” [1], em referência ao personagem Gato de Cheshire, do livro Alice no País das Maravilhas de Lewis Carroll, cujo sorriso pode existir sem o próprio animal. Denkmayr *et al.*, em 2014, disseram ter realizado o Gato de Cheshire quântico experimentalmente, separando um nêutron de seu momento magnético intrínseco [3]. Mostramos como ambos os resultados decorrem de efeitos de interferência, e assim a conclusão de que uma partícula é separada de uma de suas propriedades intrínsecas não é necessária. Usando basicamente mecânica quântica a nível de graduação eliminamos o aparente paradoxo do Gato de Cheshire quântico.

Palavras-chave: Paradoxos em Física Quântica, Medição Fraca, Interferência Quântica

Abstract

Based on the concept of weak measurements, in 2013 Aharonov *et al.* proposed an experiment in which, according to their interpretation of the predicted results, a photon and its circular polarization were spatially separated, naming this phenomenon “quantum Cheshire Cat” [1]. This name is after a character in Lewis Carroll’s novel Alice In Wonderland, the Cheshire Cat – a cat whose grin can exist without the animal itself. Denkmayr *et al.*, in 2014, claimed they realized experimentally the quantum Cheshire Cat, separating a neutron from its intrinsic magnetic moment [3]. We show how both results follow from interference effects, and thus the conclusion that a particle is separated from one of its intrinsic properties is not a necessary one. Making use of mostly undergraduate level quantum mechanics, we rule out the apparent paradox of the quantum Cheshire Cat.

Keywords: Paradoxes in Quantum Physics, Weak Measurement, Quantum Interference

Sumário

Resumo	I
Abstract	II
Lista de Figuras	VI
Lista de Tabelas	VII
1 Introdução	1
2 Processos de medição	4
2.1 Medição projetiva	5
2.1.1 Interação geral	6
2.1.2 Interação de translação do medidor: ponteiro	7
2.2 Medição fraca e valor fraco	8
2.3 O valor fraco da polarização de um fóton	11
2.4 O que o valor fraco pode significar?	16
2.5 Valor fraco é resultado de interferência quântica	20
2.5.1 Descrição do estado do fóton	21
2.5.2 O valor fraco da polarização de um fóton	24
3 O Gato de Cheshire quântico	32
3.1 Proposição teórica de Aharonov <i>et al.</i>	34
3.1.1 Descrição do setup	34
3.1.2 Encontrando os valores fracos	37
3.2 Realização experimental de Denkmayr <i>et al.</i>	39

3.2.1	Descrição do setup	40
3.2.2	Padrões de interferência	41
4	O Gato de Cheshire quântico como interferência	45
4.1	Proposição teórica de Aharonov <i>et al.</i>	46
4.1.1	Medição dos observáveis	47
4.1.2	Descrição do ponteiro	49
4.2	Realização experimental de Denkmayr <i>et al.</i>	53
5	Conclusão	61
A	Valores fracos no experimento de Denkmayr <i>et al.</i>	63
B	Experimentos de escolha atrasada e apagadores quânticos	66
	Referências Bibliográficas	72

Lista de Figuras

2.1	Esquema do processo de medição projetiva.	6
2.2	Esquema do processo de medição fraca.	9
2.3	Montagem experimental simplificada.	14
2.4	Valor fraco da polarização S do fóton como função de θ' para os estados iniciais especificados na tabela 2.1: em vermelho $ \psi_i\rangle = H\rangle$, em verde $ \psi_i\rangle = V\rangle$ e em azul $ \psi_i\rangle = (H\rangle + V\rangle)/\sqrt{2}$	15
2.6	(a) Para $F(x) = Ke^{-x^2/W^2}$ e $g = 0.1W$, representamos em azul $F(x)/(\sqrt{2}K)$, que descreve o estado espacial não-normalizado de ambas as componentes horizontal e vertical de polarização do fóton antes de passar pelo cristal (eq. (2.37)). Em verde, $ F(x)/K ^2$ é a forma do perfil espacial de densidade de energia do fóton. (b) Em vermelho $F(x-g)/(\sqrt{2}K)$ e em azul $F(x+g)/(\sqrt{2}K)$, que são a forma dos estados espaciais das componentes horizontal e vertical, respectivamente, da polarização do fóton após a interação com o cristal (eq. (2.38)). Em verde, $(F(x-g) ^2 + F(x+g) ^2)/(2 K ^2)$, que é a forma do perfil espacial de densidade de energia do fóton.	26
2.7	Para $F(x) = Ke^{-x^2/W^2}$ e $g = 0.1W$, representamos em vermelho $\cos\theta'F(x-g)/(\sqrt{2}K)$, em azul $\sin\theta'F(x+g)/(\sqrt{2}K)$ e em verde $ \cos\theta'F(x-g) + \sin\theta'F(x+g) ^2/2 K ^2$ para (a) $\theta' = 0$, (b) $\theta' = 5\pi/8$ e (c) $\theta' = 3\pi/4$. Em (c), a escala vertical está multiplicada por 100 para a função verde.	28
2.8	Para $F(x) = Ke^{-x^2/W^2}$ e $g = 2W$, representamos em vermelho $\cos\theta'F(x-g)/K$, em azul $\sin\theta'F(x+g)/K$ e em verde $ \cos\theta'F(x-g) + \sin\theta'F(x+g) ^2/ K ^2$ para $\theta' = \pi/4$	30

3.1	(a) Interferômetro da proposição teórica de Aharonov <i>et al.</i> . (b) Representação dos estados de presença do fóton ao longo do setup.	35
3.2	Interferômetro da realização experimental de Denkmayr <i>et al.</i>	40
3.3	Detecções do experimento de Denkmayr <i>et al.</i> [3] em D_2 com absorvedores em cada caminho. Gráficos retirados da fig. 3 da ref. [3] (tradução nossa). . .	43
3.4	Detecções do experimento de Denkmayr <i>et al.</i> [3] em D_2 com o campo magnético B_z aplicado em cada caminho. Gráficos retirados da fig. 4 da ref. [3] (tradução nossa).	43
4.2	Esquema da interação do fóton com a placa de vidro.	47
4.3	Esquema da interação do fóton com o cristal birrefringente e a placa de quarto de onda.	48
4.4	Representação esquemática do perfil transversal das componentes $ I\rangle +\rangle$ (azul), $ I\rangle -\rangle$ (verde) e $ II\rangle H\rangle$ (vermelho) após a interação. O detector D_1 recebe as três componentes, com fases dependentes da pós-seleção.	50
4.5	Para $F(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/W^2}$ e $g = 0.1W$, representações de (a) $2F(x, y - g)$, (b) $F(x - g, y) - F(x + g, y)$ e (c) $ F(x - g, y) - F(x + g, y) + 2F(x, y - g) ^2$	52
B.1	Interferômetro Mach-Zehnder.	67

Lista de Tabelas

2.1	Valores fracos de S para diferentes estados iniciais.	14
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

A mecânica quântica é uma área do conhecimento científico normalmente retratada na cultura popular como dotada de previsões fantásticas: ações instantâneas à distância, gatos mortos-vivos, teletransporte, a prova do poder da consciência humana, inspira teorias conspiratórias, além de ser dotada de potencial psicoterapêutico. Essas histórias são criadas a partir de previsões e efeitos realmente estranhos com os quais lida essa teoria, e que geram explicações e interpretações diversas. De fato, as interpretações da mecânica quântica formam uma área da filosofia e história das ciências, dada a multiplicidade de pontos de vista. A dissertação aqui apresentada não está preocupada com essas diferentes interpretações, mas tem como centro um dos tais fenômenos estranhos: o que se denominou *Gato de Cheshire quântico*.

Esse fenômeno pode ser interpretado como algo paradoxal e fantástico, que é a separação entre uma partícula e uma propriedade que ela carrega, e nosso objetivo é propor uma interpretação que não apresenta esse paradoxo. O nome do efeito é baseado num personagem da famosa história Alice no País das Maravilhas, escrita por Lewis Carroll e recheada de acontecimentos irrealis: o Gato de Cheshire, que é um gato cujo sorriso pode existir sem

o próprio animal. “Gatos de Cheshire quânticos”¹ [1] é o título de um artigo publicado em 2013 por Yakir Aharonov, Sandu Popescu, Daniel Rohrlich e Paul Skrzypczyk. Em 1988, Aharonov, Albert e Vaidman propuseram um protocolo de medição chamado *medição fraca* [2], em que um sistema é medido por um ponteiro quântico e esse revela um número, denominado *valor fraco*. No trabalho de 2013 [1], os autores sugerem que, efetuando uma medição fraca em um sistema quântico específico, o ponteiro fornece valores fracos tais que sua interpretação pode ser a separação de uma partícula e sua propriedade intrínseca, análoga à separação entre o sorriso e o Gato de Cheshire. No experimento proposto “o Gato é um fóton, enquanto o sorriso é a sua polarização circular.” (AHARONOV *et al.*, 2013, ref. [1], tradução nossa)². Em 2014, Denkmayr *et al.* realizaram experimentalmente o que disseram ser a proposta do Gato de Cheshire quântico [3] de Aharonov *et al.* [1], mas agora a partícula é um nêutron e a propriedade o seu momento magnético intrínseco, ou spin. O efeito ganhou notoriedade, sendo que as conclusões de Aharonov *et al.* [1] foram reforçadas na seção *News and Views* da revista Nature Physics [4], e o experimento foi divulgado na mídia não-especializada [5], atingindo um grande número de pessoas.

Contudo, logo após a apresentação da idéia de medição fraca, a significação dos valores fracos foi questionada, e sua explicação como um efeito de interferência no ponteiro quântico foi imediatamente fornecida [6, 7, 8]. Baseado nessas idéias, vamos propor uma interpretação para o Gato de Cheshire quântico que não precisa considerar que uma partícula está separada de uma de suas propriedades intrínsecas. O conjunto de valores fracos apresentados por Aharonov *et al.* [1] e Denkmayr *et al.* [3] é correto e em nada contradiz a mecânica quântica. Ao incluir o ponteiro na descrição dos experimentos, podemos explicar como o Gato de Cheshire quântico é resultado de um efeito de interferência, e a partir daí não precisamos ir além e significá-los como a localização de uma partícula em um lugar e de sua propriedade em outro. Isto é, mostramos que essa interpretação fantástica não é necessária. Deixemos claro aqui que não é de nosso interesse discutir as chamadas “interpretações da mecânica quântica”, e sim a explicação de um resultado, o qual explicaremos baseados numa interpretação específica da mecânica quântica que não vê necessariamente esses resultados como reflexos de propriedades possuídas real e objetivamente pelos sistemas físicos medidos.

¹No original, “Quantum Cheshire Cats”.

²“The Cat is a photon, while the grin is its circular polarization.” (ref. [1], *abstract*)

No capítulo 2 iremos mostrar o que significa uma medição com um ponteiro quântico e no que consiste o protocolo de medição fraca, em que o valor fraco de um observável em um sistema quântico é indicado por um ponteiro que interage com ele. Em seguida, no capítulo 3, apresentaremos os resultados de Aharonov *et al.* [1] e Denkmayr *et al.* [3] e suas interpretações. O questionamento das interpretações dos valores fracos fornecida nos trabalhos originais será feita no capítulo 4, em que mostramos em que sentido um valor fraco é um fenômeno de interferência no ponteiro no caso da ref. [1] e como na ref. [3] as contagens da saída do interferômetro são explicadas com mecânica quântica simples. Nesse sentido, Gato de Cheshire quântico só existe como um conjunto de valores fracos, e não como propriedades sem partículas. Um artigo com os resultados originais do trabalho apresentado nesse capítulo foi submetido para publicação [9], realizado em colaboração com Marcelo França, Carlos Monken e Pablo Saldanha. Mostramos ainda no apêndice A como Denkmayr *et al.* [3] dizem obter valores fracos mesmo sem a presença de um ponteiro. No apêndice B discutimos experimentos de escolha atrasada e apagadores quânticos como exemplos de outras situações em que paradoxos surgem ao se atribuir uma realidade objetiva a componentes que se superpõem formando o estado quântico do sistema.

Capítulo 2

Processos de medição

A obtenção de valores de medições em mecânica quântica é uma questão importante desde a sua formulação. Normalmente nos livros-texto [10, 11] se define a medição de um sistema quântico como uma projeção em um autovetor do observável medido. Isso significa que, após a medição, o estado do sistema, que na base dos autovetores desse observável poderia ser uma superposição de autovetores, passa a ser descrito somente pelo autovetor cujo autovalor foi o resultado da medição¹. Esse tipo de medição pode modificar substancialmente o estado do sistema quântico medido, e essa é uma das grandes diferenças entre sistemas quânticos e clássicos. O procedimento de medição fraca foi desenvolvido por Aharonov, Albert e Vaidman [2] procurando extrair informação de um sistema quântico perturbando-o o mínimo possível, isto é, sem alterar significativamente o seu estado antes da medição — essa informação é obtida na forma de uma grandeza chamada *valor fraco*.

O objetivo do presente capítulo é descrever como se obtém o valor fraco de um observável de um sistema quântico. Para isso, precisaremos apresentar o processo de *medição projetiva* e de *medição fraca*. Ao fim, mostramos como é possível obter experimentalmente o valor

¹Ou por uma combinação linear de autovetores, caso o autovalor seja degenerado.

fraco da polarização de um fóton em um aparato simples.

2.1 Medição projetiva

Em mecânica quântica, medir projetivamente uma grandeza de um sistema significa projetá-lo em um dos autovetores do observável associado a essa grandeza [10, 11]. Se o estado do sistema antes da projeção, quando escrito na base de autovetores desse observável, estiver em uma superposição desses autovetores, cada um deles terá uma probabilidade de ser o resultado da projeção – essa probabilidade é o módulo ao quadrado da amplitude de cada componente do estado escrito nessa base. Nesse processo, o valor final de medida é o autovalor correspondente ao autovetor no qual o sistema foi projetado.

Usando propriedades de um estado emaranhado², podemos implementar uma medição projetiva de um sistema quântico usando um medidor que também é quântico. Descrevemos esse processo de medição em etapas (ver fig. 2.1):

- a) O sistema \mathcal{A} a ser medido é preparado em um determinado estado quântico. O sistema medidor \mathcal{M} é preparado em um estado quântico conhecido. Cada autoestado do operador a ser medido no sistema \mathcal{A} produz diferentes evoluções no estado do sistema \mathcal{M} .
- b) O sistema \mathcal{A} interage unitariamente com o medidor \mathcal{M} , terminando ambos em um estado emaranhado, uma vez que em geral o sistema \mathcal{A} estará em uma superposição dos autoestados do operador a ser medido. Isso resulta numa correlação entre os estados dos sistemas \mathcal{A} e \mathcal{M} .
- c) Faz-se uma projeção em \mathcal{M} , o que leva o sistema \mathcal{A} a ser projetado num autoestado do observável medido, devido ao emaranhamento. Como conhecemos a correlação, podemos inferir em qual autoestado está o sistema \mathcal{A} a partir do autovalor encontrado em \mathcal{M} .

A seguir vamos descrever esse processo com o formalismo de mecânica quântica. Num primeiro momento vamos considerar uma interação geral, e depois especificar a interação para um medidor do tipo “ponteiro”.

²O estado emaranhado de um sistema composto por dois sistemas \mathcal{A} e \mathcal{B} pode ser dito emaranhado quando o estado global do sistema $|\psi_{AB}\rangle$ não pode ser escrito como um produto de estados de cada sistema $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$. Ver complemento D-III da ref. [10] ou o cap. 12 de [11].

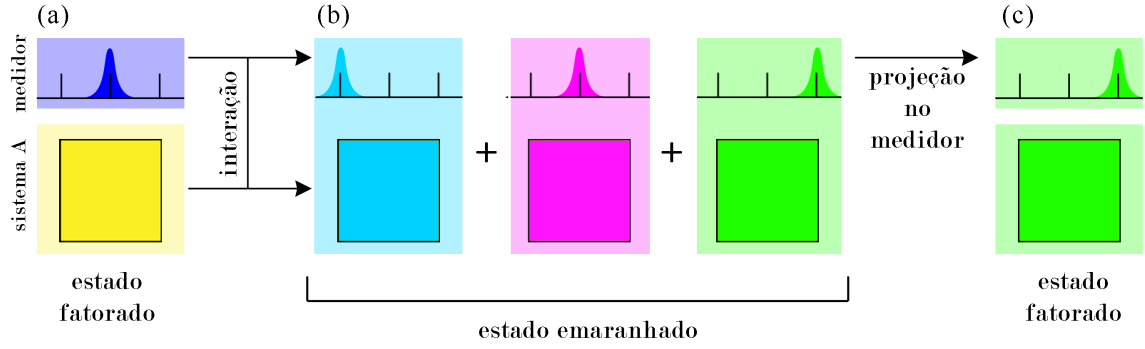


Figura 2.1: Esquema do processo de medição projetiva.

2.1.1 Interação geral

Para que esse tipo de medição funcione, a interação que gera o emaranhamento entre o sistema de interesse e o medidor deve gerar um estado em que cada autoestado do observável a ser medido em \mathcal{A} esteja associado com a menor ambiguidade possível a um estado final de \mathcal{M} [12]. Seja A o observável a ser medido e P o observável de \mathcal{M} usado na interação. Chamaremos $\{|a_j\rangle\}$ os autoestados com respectivos autovalores $\{a_j\}$ de A . $|\psi_i\rangle$ é o estado inicial do sistema \mathcal{A} e $|\phi_i\rangle$ de \mathcal{M} . Dado um parâmetro g relacionado à intensidade da interação entre os dois sistemas, ela será descrita pelo operador de evolução $U(g, A, P)$ – nesse momento não precisamos conhecer sua forma, mas sim designar o tipo de correlação do estado global do sistema após sua ação. Descrevemos o processo de medição em três passos:

$$|\Psi_i\rangle = |\psi_i\rangle \otimes |\phi_i\rangle = \left(\sum_j c_j |a_j\rangle \right) \otimes |\phi_i\rangle, \quad (2.1)$$

$$U(g, A, P)|\Psi_i\rangle = \sum_j c'_j |a_j\rangle |\phi_j\rangle, \quad (2.2)$$

$$\langle \varphi | U(g, A, P) |\Psi_i\rangle = \sum_j c'_j \langle \varphi | \phi_j \rangle |a_j\rangle. \quad (2.3)$$

A eq. (2.1) é o estado inicial fatorado do sistema $\mathcal{A} - \mathcal{M}$, e (2.2) descreve o sistema após a interação. Os estados $\{|\phi_j\rangle\}$ não são necessariamente autoestados de um observável de \mathcal{M} , mas simplesmente estados diferentes. A etapa da eq. (2.3) consiste em projetar o medidor em um estado qualquer $|\varphi\rangle$. Vemos que, como c'_j e $\langle \varphi | \phi_j \rangle$ são números complexos, terminamos com uma superposição de autoestados de A . Uma boa medição projetiva é aquela que deixa o sistema \mathcal{A} em um autoestado de A , pois dessa forma sabemos que, se medirmos esse

observável, encontraremos com certeza o autovalor correspondente. Dessa forma, é natural escolher $|\varphi\rangle = |\phi_k\rangle$, ou seja, usar um aparato de medição capaz de encontrar o medidor em algum dos estados $\{|\phi_j\rangle\}$ e informar qual ele é. Portanto, a medida será tanto melhor quanto mais ortogonais entre si forem esses estados, de forma que só conseguirmos associar um $|a_j\rangle$ a um respectivo $|\phi_j\rangle$. Essa condição pode ser escrita como $|\langle\phi_k|\phi_j\rangle| \approx \delta_{k,j}$, o que nos leva ao resultado desejado:

$$\langle\phi_k|U(g, A, P)|\Psi_i\rangle \approx c'_k|a_k\rangle. \quad (2.4)$$

A equação acima nos diz que, se pudermos selecionar os eventos em que o medidor \mathcal{M} foi projetado num estado $|\phi_k\rangle$, saberemos que, nesses eventos, se medirmos o observável A no sistema de interesse \mathcal{A} encontraremos o autovalor a_k .

2.1.2 Interação de translação do medidor: ponteiro

Iremos analisar o caso em que o medidor é um ponteiro localizado espacialmente, descrito por uma função de onda $\phi(x)$, e a interação é do tipo $\exp(-\frac{i}{\hbar}gA \otimes P)$, onde P é o operador momento linear [13, 14]. Uma interação desse tipo pode ser gerada, por exemplo, por um Hamiltoniano do tipo $H_{int} = g'(t)A \otimes P$, onde $g = \int_{t_i}^{t_f} dt g'(t)$ ³. Substituindo o vetor $|\phi_i\rangle$ pela função $\phi(x)$, as etapas (2.1) e (2.2) serão da forma

$$|\Psi_i\rangle = |\psi_i\rangle \otimes \phi(x) = \left(\sum_j c_j |a_j\rangle \right) \otimes \phi(x), \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} U(g, A, P)|\Psi_i\rangle &= \sum_j c_j \exp\left(-\frac{i}{\hbar}gA \otimes P\right) |a_j\rangle \otimes \phi(x) \\ &= \sum_j c_j |a_j\rangle \otimes \exp\left(-\frac{i}{\hbar}ga_jP\right) \phi(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Os estados evoluídos $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}ga_jP\right) \phi(x)$ são os correspondentes aos estados $|\phi_j\rangle$ em (2.2). Notando que o operador de evolução $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}ga_jP\right)$ se tornou o operador de translação da função de onda (comp. E_{II} da Ref. [10]), cujo efeito é $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}ga_jP\right) \phi(x) = \phi(x - ga_j)$, cada estado $|\phi_j\rangle$ é portanto uma função de onda com a mesma forma da função de onda inicial do medidor, mas deslocada de uma quantidade ga_j . Terminamos, portanto, com um estado

³Ver seção 12-2 da ref. [15].

emaranhado entre o medidor e o sistema \mathcal{A} , em que a cada autoestado $|a_j\rangle$ está associada uma função de onda do ponteiro em uma posição:

$$U(g, A, P)|\Psi_i\rangle = \sum_j c_j |a_j\rangle \phi(x - ga_j). \quad (2.7)$$

Na etapa (2.3) vamos projetar o ponteiro em um estado $\phi(x - ga_k)$ associado a $|\phi_k\rangle$, ou seja, selecionar uma de suas posições possíveis.

$$\int dx \phi^*(x - ga_k) U(g, A, P)|\Psi_i\rangle = \sum_j c_j |a_j\rangle \int dx \phi^*(x - ga_k) \phi(x - ga_j). \quad (2.8)$$

Somente quando as funções deslocadas são praticamente ortogonais poderemos obter uma resposta não-ambígua sobre o valor de A , dada a leitura do ponteiro em torno de ga_k . Nesse caso, $|\int dx \phi^*(x - ga_k) \phi(x - ga_j)| \approx \delta_{j,k}$ e temos:

$$\int dx \phi^*(x - ga_k) U(g, A, P)|\Psi_i\rangle \approx c_k |a_k\rangle. \quad (2.9)$$

A condição $|\int dx \phi^*(x - ga_k) \phi(x - ga_j)| \approx \delta_{j,k}$ pode ser obtida calibrando-se o parâmetro g da interação, de forma que ele seja suficientemente grande para que os deslocamentos ga_j sejam sempre maiores do que a dispersão de $\phi(x)$.

2.2 Medição fraca e valor fraco

Em 1988, Aharonov, Albert e Vaidman propuseram um novo conceito de medição, chamado *medição fraca* (weak measurement) [2], que possibilitou aplicações diversas nos anos seguintes em, por exemplo, amplificação de sinais acima de um ruído [16, 17], determinação de estados quânticos [18] e de fases geométricas [19], caracterização de comportamento não-clássico de sistemas quânticos [20], entre vários outros. Uma lista mais extensa de aplicações pode ser encontrada na ref. [21]. Analogamente ao autovalor obtido de uma medição projetiva⁴, na medição fraca o que se obtém na leitura do medidor é o *valor fraco* (weak value). Houve muita controvérsia imediatamente após a publicação do trabalho de 1988 [6, 7, 22, 8], e

⁴Na forma em que apresentamos, a analogia do valor fraco se faz com o autovalor. Em [2], contudo, Aharonov *et al.* fazem a analogia com o valor médio, já considerando que a interação entre o medidor e o sistema de interesse é fraca.

até atualmente há discussões a respeito da interpretação do que de fato significa o valor fraco [23, 24, 25, 26]. Na seção 2.4 faremos uma breve revisão dos principais trabalhos para entendermos a essência dessa discussão, mas aqui estaremos preocupados em simplesmente descrever operacionalmente os processos que permitem obter o valor fraco do observável de um sistema. O valor fraco é um número complexo que, a despeito de seu significado, pode ser encontrado para qualquer observável de qualquer sistema quântico.

O processo de medição fraca para se obter o valor fraco a princípio se parece com o processo de medição projetiva, mas possui algumas diferenças essenciais. Podemos sintetizá-lo em três etapas (ver fig. 2.2):

- O sistema de interesse \mathcal{A} é preparado em um estado *conhecido*.
- O sistema \mathcal{A} interage *fracamente* de forma conhecida com um medidor \mathcal{M} , terminando ambos em um estado *pouco* emaranhado⁵.
- Projeta-se \mathcal{A} em um estado específico, o que resulta num estado final *para o medidor*, que será lido e é de onde será extraído o valor fraco.

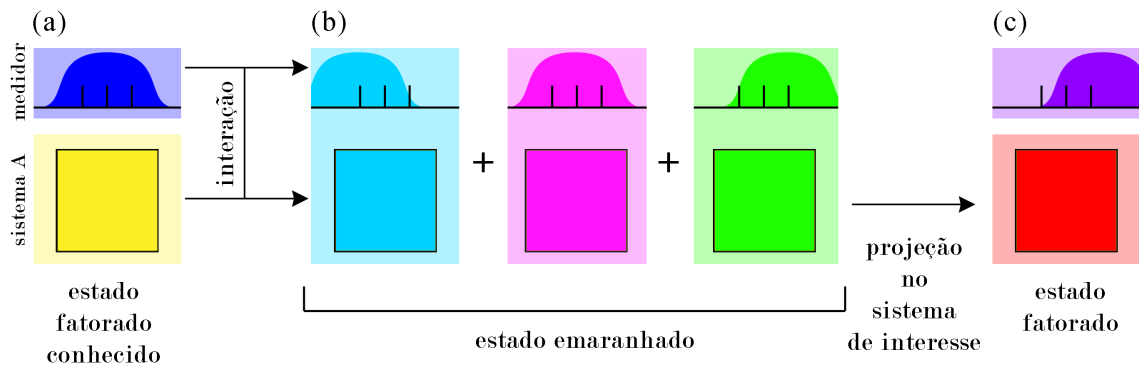


Figura 2.2: Esquema do processo de medição fraca.

As principais diferenças para o processo de medição projetiva estão na intensidade da interação (chamaremos de *interação fraca*) e na projeção do sistema \mathcal{A} (*pós-seleção*). O valor fraco dependerá essencialmente dos estados de pré- e pós-seleção.

⁵“Pouco” emaranhado, nesse contexto, significa que encontrar o medidor num estado leva o sistema a estar numa superposição de autoestados do observável medido. Em oposição, “muito” emaranhado significa que cada estado do medidor pode ser associado com pouca ambiguidade a somente um autoestado do observável medido no sistema de interesse.

Para descrever com mais detalhes o processo de obtenção do valor fraco, usaremos o mesmo sistema $\mathcal{A} - \mathcal{M}$ da seção 2.1 e repetiremos os mesmos passos (2.1) e (2.2), mas no passo (2.3) projetaremos não num estado $|\phi_k\rangle$ do medidor, mas num estado escolhido $|\psi_f\rangle$ do sistema \mathcal{A} :

$$\langle \psi_f | U(g, A, P) | \Psi_i \rangle = \sum_j c'_j \langle \psi_f | a_j \rangle |\phi_j\rangle. \quad (2.10)$$

Terminamos, assim, com uma superposição de estados do medidor. O valor fraco só pode aparecer, contudo, se os estados $|\phi_j\rangle$ forem muito superpostos entre si, isto é, se $|\langle \phi_k | \phi_j \rangle| \approx 1$ para qualquer j, k . O número correspondente ao valor fraco surge quando consideramos o medidor sendo um ponteiro, exatamente como na seção 2.1.2. Após a interação, o estado do sistema é o mesmo da eq. (2.7), e com a pós-seleção temos:

$$\langle \psi_f | U(g, A, P) | \Psi_i \rangle = \sum_j c_j \langle \psi_f | a_j \rangle \phi(x - ga_j). \quad (2.11)$$

Esse estado é uma superposição de funções de onda do ponteiro, com amplitudes dadas pelo produto dos números complexos c_j e $\langle \psi_f | a_j \rangle$. A *interação fraca* será caracterizada pelo fato de o parâmetro g ser pequeno o suficiente para que todas as componentes $\phi(x - ga_j)$ da função de onda final do ponteiro estejam muito sobrepostas entre si e possam interferir, que é a condição $|\langle \phi_k | \phi_j \rangle| \approx 1 \quad \forall j, k$. Para que possamos encontrar esse deslocamento [2, 14], vamos considerar a seguinte aproximação, válida para $\delta \ll \Delta$, onde Δ é a dispersão de $\phi(x)$:

$$\phi(x - \delta) \approx \phi(x) - \delta \frac{d\phi(x)}{dx}. \quad (2.12)$$

Introduzindo essa aproximação na eq. (2.11), temos, para g suficientemente pequeno, escrevendo $c_j = \langle a_j | \psi_i \rangle$ e lembrando que $\sum_j |a_j\rangle \langle a_j| = I$ e $\sum_j a_j |a_j\rangle \langle a_j| = A$:

$$\langle \psi_f | U(g, A, P) | \Psi_i \rangle \approx \sum_j c_j \langle \psi_f | a_j \rangle \left[\phi(x) - g a_j \frac{d\phi(x)}{dx} \right] \quad (2.13)$$

$$= \sum_j \left[\langle \psi_f | a_j \rangle \langle a_j | \psi_i \rangle \phi(x) - g a_j \langle \psi_f | a_j \rangle \langle a_j | \psi_i \rangle \frac{d\phi(x)}{dx} \right] \\ = \langle \psi_f | \psi_i \rangle \phi(x) - g \langle \psi_f | A | \psi_i \rangle \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (2.14)$$

$$\approx \langle \psi_f | \psi_i \rangle \phi \left(x - g \frac{\langle \psi_f | A | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \right). \quad (2.15)$$

Entre as linhas (2.14) e (2.15) assumimos que g é pequeno o suficiente também para que $g \frac{\langle \psi_f | A | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \ll \Delta$ (eq. (20) em [8]). Na ref. [2], o valor fraco de um observável A é definido:

$$\langle A \rangle_w = \frac{\langle \psi_f | A | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle}. \quad (2.16)$$

Assim, o valor fraco $\langle A \rangle_w$ é, a menos de uma constante g , a quantidade de deslocamento da função de onda do ponteiro⁶ após a interação entre \mathcal{A} e \mathcal{M} dadas a pré-seleção no estado $|\psi_i\rangle$ e a pós-seleção no estado $|\psi_f\rangle$:

$$\langle \psi_f | U(g, A, P) | \Psi_i \rangle \approx \langle \psi_f | \psi_i \rangle \phi(x - g \langle A \rangle_w). \quad (2.17)$$

2.3 O valor fraco da polarização de um fóton

Para compreender melhor o processo de obtenção do valor fraco de um observável de um sistema, vamos estudar um exemplo simples. O observável a ser “medido fracamente” será a polarização de um fóton, e o ponteiro será o centro do perfil transversal do feixe de fótons. Esse mesmo exemplo é usado na ref. [21], baseado numa proposta de [8], e pode ser explicado com eletromagnetismo clássico em termos de interferência de ondas eletromagnéticas, mas será útil aqui para entendermos o processo de interação entre o sistema de interesse e o ponteiro quânticos. O estado de um fóton pode ser descrito por uma função análoga ao perfil do campo eletromagnético clássico que descreve o caso de muitos fótons. Isto é, se medirmos qualquer grandeza clássica de muitos fótons preparados no mesmo estado do fóton

⁶Nota-se que o valor fraco pode ser um número complexo. Nesse caso, a interpretação de “deslocamento da função de onda” só se aplica à parte real do valor fraco. É possível se medir a parte imaginária do valor fraco [21], mas a análise desse problema não é necessária aos objetivos do nosso trabalho.

em questão, obteremos o mesmo valor previsto pelo campo clássico análogo – esse tipo de descrição é chamada *função de onda de fóton* [27, 28, 29, 30], e a usaremos para descrever o estado espacial do perfil transversal do fóton. Não é uma função de onda como a de Schrödinger, pois seu módulo ao quadrado não fornece a densidade de probabilidade de se encontrar o fóton num ponto do espaço, mas sim sua densidade de energia. O formalismo de função de onda de fótons será explicado um pouco mais detalhadamente na seção 2.5.

O estado espacial dos fótons é preparado usando uma lente colimadora após a fonte, que permite que a propagação seja feita no regime paraxial, em que o estado do fóton propagando na direção z é um produto entre uma função no plano xy (com parâmetros dependentes de z) e uma função que descreve a sua propagação [31] – a polarização é um parâmetro independente nesse regime. Se considerarmos uma distância curta percorrida pelo fóton no aparato, as propriedades do perfil do feixe não mudam significativamente desde a preparação até a detecção, e a parte transversal da função de onda pode ser considerada como somente função de x e y . Detalhes dessas aproximações serão apresentados na seção 2.5.

O processo de medição fraca desse experimento pode ser esquematizado nas seguintes etapas (ver fig. 2.3):

- *Pré-seleção*: preparação do estado de polarização do fóton com a utilização de uma placa de quarto de onda (QWP) seguida de uma placa de meia-onda (HWP). Sabendo o estado de polarização em que os fótons são emitidos da fonte, o uso das placas HWP e QWP prepara o fóton num estado de polarização conhecido

$$|\psi_i\rangle = \cos\theta|H\rangle + e^{i\alpha}\sin\theta|V\rangle. \quad (2.18)$$

$|H\rangle$ e $|V\rangle$ são os autoestados do operador polarização do fóton $S = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|$, onde H é a polarização horizontal e V a vertical. Os parâmetros θ e α são determinados pelo posicionamento das placas [32].

- *Interação*: o estado de polarização do fóton é acoplado ao ponteiro (seu perfil transversal) através de um cristal birrefringente, que tem índices de refração diferentes para cada componente de polarização. Aqui, esse fato é usado para gerar uma diferença na posição central do perfil transversal de cada componente de polarização H e V em um eixo do feixe após atravessar o cristal [32], uma vez que o ângulo de refração no

cristal depende do índice de refração. O deslocamento deve ser pequeno para que ainda estejamos no regime de medição fraca, isto é, para que as componentes do estado do ponteiro após a interação estejam ainda muito superpostas entre si. A evolução devido à interação pode ser descrita pelo operador⁷ $U(g, S, P_x) = e^{-\frac{i}{\hbar}gS \otimes P_x}$, e o perfil transversal é realmente um ponteiro com as propriedades mostradas na seção 2.1.2.

- *Pós-seleção*: com o uso de um polarizador depois do cristal birrefringente, faz-se a projeção no sistema de interesse (polarização) em um estado

$$|\psi_f\rangle = \cos \theta' |H\rangle + \sin \theta' |V\rangle, \quad (2.19)$$

em que o parâmetro θ' é determinado pela posição angular do polarizador [32] e pode ser escolhido.

- *Valor fraco*: um detector de fótons sensível a posição é colocado após o polarizador. Após muitas repetições do procedimento acima, um padrão que revela a distribuição espacial de energia do fóton pode ser construído, que é o perfil de intensidade no detector. Se não usamos o cristal birrefringente, isto é, se não há interação, pode-se construir o perfil de intensidade do feixe incidente. Como a densidade de energia do fóton é o módulo ao quadrado de sua função de onda, o valor fraco, que é a quantidade de deslocamento da função de onda a menos de uma constante, pode ser extraído a partir do deslocamento do perfil de intensidade quando se coloca o cristal.

O valor fraco do operador S dependerá dos parâmetros escolhidos θ , α e θ' , de acordo com as eqs. (2.16), (2.18) e (2.19):

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_w &= \frac{\langle \psi_f | S | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} = \frac{(\cos \theta' \langle H | + \sin \theta' \langle V |) (|H\rangle \langle H| - |V\rangle \langle V|) (\cos \theta |H\rangle + e^{i\alpha} \sin \theta |V\rangle)}{(\cos \theta' \langle H | + \sin \theta' \langle V |) (\cos \theta |H\rangle + e^{i\alpha} \sin \theta |V\rangle)} = \\ &= \frac{\cos \theta \cos \theta' - e^{i\alpha} \sin \theta \sin \theta'}{\cos \theta \cos \theta' + e^{i\alpha} \sin \theta \sin \theta'} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Usando estados $|\psi_i\rangle$ e $|\psi_f\rangle$ bem conhecidos (isto é, θ , α e θ' bem determinados), podemos medir a constante de proporcionalidade g , uma vez que o deslocamento do ponteiro é $g \langle S \rangle_w$

⁷Eq. (5) da ref. [21].

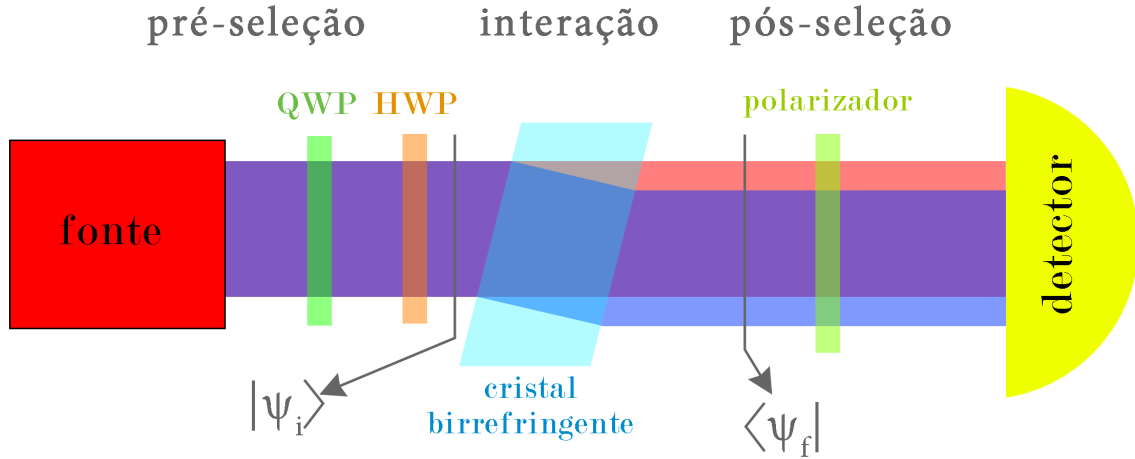


Figura 2.3: Montagem experimental simplificada.

(eq. (2.17)). Determinada g , podemos usar a leitura do valor fraco para medir algum parâmetro do arranjo do experimento como, por exemplo, o ângulo θ' do polarizador, dados θ e α .

Iremos analisar três casos específicos interessantes para estados iniciais, indicados na tabela 2.1:

θ	α	$ \psi_i\rangle$	$\langle S \rangle_w$
0	0	$ H\rangle$	+1
$\pi/2$	0	$ V\rangle$	-1
$\pi/4$	0	$\frac{ H\rangle+ V\rangle}{\sqrt{2}}$	$\frac{\cos \theta' - \sin \theta'}{\cos \theta' + \sin \theta'}$

 Tabela 2.1: Valores fracos de S para diferentes estados iniciais.

Vemos que, se o estado inicial é um autovetor do operador do qual obteremos o valor fraco, $\langle S \rangle_w$ é sempre igual ao autovalor correspondente ao autovetor que é $|\psi_i\rangle$. Isso é fácil de perceber quando vemos que, para $|\psi_i\rangle = |a_l\rangle = \sum_j \delta_{j,l} |a_j\rangle$, a eq. (2.2), que descreve o sistema após a interação, só tem um termo:

$$U(g, A, P)|\Psi_i\rangle = \sum_j \delta_{j,l} |a_j\rangle |\phi_j\rangle = |a_l\rangle |\phi_l\rangle \quad (2.21)$$

Assim, a pós-seleção só tem o efeito de atenuar o sinal que chega ao detector por um fator

$|\langle \psi_f | a_l \rangle|^2$, como vemos na eq. (2.11), que para $c_j = \delta_{j,l}$ é

$$\langle \psi_f | U(g, A, P) | \Psi_i \rangle = \sum_j \delta_{j,l} \langle \psi_f | a_j \rangle \phi(x - ga_j) = \langle \psi_f | a_l \rangle \phi(x - ga_l), \quad (2.22)$$

e o ponteiro sempre indica o autovalor correspondente, reescalado pela constante g .

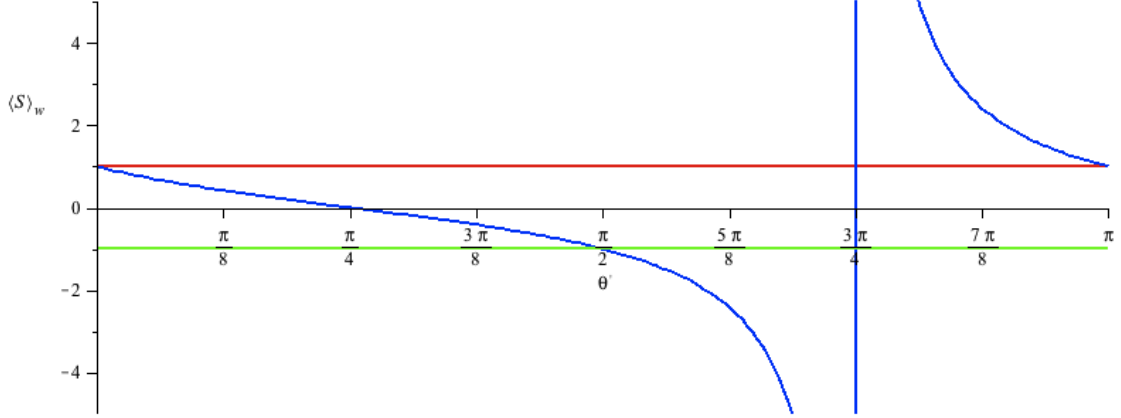


Figura 2.4: Valor fraco da polarização S do fóton como função de θ' para os estados iniciais especificados na tabela 2.1: em vermelho $|\psi_i\rangle = |H\rangle$, em verde $|\psi_i\rangle = |V\rangle$ e em azul $|\psi_i\rangle = (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$.

Na figura 2.4 representamos $\langle S \rangle_w = \langle S \rangle_w(\theta')$ para os três casos da tabela 2.1. Para o estado $(|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$ vemos que, quando $(\cos \theta' + \sin \theta') \rightarrow 0$, o valor fraco diverge. Os valores fracos fora do intervalo de autovalores do observável medido são chamados *valores fracos anômalos*, e vemos que, no nosso exemplo específico, nessa região $\langle S \rangle_w$ é muito sensível ao ângulo θ' de rotação do polarizador, isto é, $|\frac{d\langle S \rangle_w}{d\theta'}|$ cresce muito para $|\langle S \rangle_w| > 1$. Essa propriedade poderia ser usada para, por exemplo, aumentar a precisão da medida de algum parâmetro de um estado, ou (se conhecemos bem $|\psi_i\rangle$ e $|\psi_f\rangle$) da medida da constante de acoplamento g (por exemplo as refs. [16, 17]; ver lista extensa na ref. [21]). Contudo, como esses valores anômalos oferecem mais precisão quanto menor $|\langle \psi_f | \psi_i \rangle|$, a partir de (2.15) é fácil ver que a eficiência de detecção com essa pós-seleção é muito baixa, pois a intensidade do sinal do ponteiro deve ser proporcional a $|\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2$. Além disso, assumimos que $g \frac{\langle \psi_f | A | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \ll \Delta$ para passar da eq. (2.14) para a eq. (2.15), o que dificulta a leitura do valor fraco dada a dispersão. Esses fatos são objetos de discussão quando se questiona a real vantagem da medição fraca em relação aos protocolos de medição tradicionais, e esse debate pode ser encontrado nas refs. [33, 34, 35, 36]. Entretanto, esses trabalhos estão focados na discussão estatística do problema e, mesmo quando não há esse tipo de

vantagem, o uso da medição fraca pode superar impossibilidades técnicas – isso foi feito por Hosten e Kwiat em 2008 para se medir o efeito Hall de spin para a luz [16]. Efeitos Hall em geral são fenômenos em que, ao se aplicar em partículas um campo em uma dada direção, elas sofrem um deslocamento numa direção perpendicular ao campo. Para a luz, o efeito Hall de spin consiste em mapear um índice de refração variável de um meio como um gradiente do potencial vetor em uma direção, e isso gera um deslocamento dos fótons na direção perpendicular, deslocamento esse relacionado ao seu momento angular. Contudo, tais deslocamentos são da ordem de fração do comprimento de onda do fóton e, para a luz usada em [16], da ordem de 10^{-10}m , o que seria impossível de detectar dados impedimentos técnicos da montagem usada. Usando medição fraca, os autores conseguem elevar 4 ordens de grandeza no deslocamento na direção y do feixe, que é proporcional ao valor fraco do momento angular na direção z do fóton, e conseguem a sensibilidade necessária no seu aparato para medir o efeito Hall de spin para a luz.

2.4 O que o valor fraco pode significar?

Nessa seção serão apresentadas brevemente como a publicação de Aharonov, Albert e Vaidman (AAV) de 1988 [2] entendia o significado dos valores fracos, e as respostas em algumas publicações de 1989: um comment de A. J. Legget [6], outro de A. Peres [7], seguido da resposta de Aharonov e Vaidman [22], e o artigo de Duck, Stevenson e Sudarshan [8], que faz uma análise do valor fraco como resultado de interferência. Ao fim, mencionaremos uma publicação de 1990 de Aharonov e Vaidman que reinterpreta a proposta de medição fraca [37].

No trabalho de 1988 [2], AAV partem da noção do valor médio de um observável, medido por um ponteiro quântico do tipo da seção 2.1.2, para propor um método de se extrair uma parte dos valores menos prováveis do conjunto de todos os valores medidos sem fazer a seleção no próprio ponteiro. Apresentam então como isso pode resultar da pós-seleção dos dados no sistema de interesse, e chegam no valor fraco como apresentado na seção 2.2. Os autores não negam que o valor fraco é resultado de um fenômeno de superposição:

“Alguém pode se perguntar como a superposição de deslocamentos, todos meno-

res que a_{max} , leva a um deslocamento muito maior do que a_{max} .”⁸ (AHARONOV *et al.*, 1988, p. 1352, tradução nossa)

Contudo, dão um passo além e parecem interpretar o valor fraco como o valor real de uma grandeza do sistema:

“O valor medido da componente de spin correspondente a essa função de onda é $\tan(\alpha/2)$ [o valor fraco do spin na direção z calculado no artigo].”⁹ (AHARONOV *et al.*, 1988, p. 1353, tradução nossa)

e o próprio título do artigo reforça a visão realista para a interpretação do valor fraco: “Como o resultado da medição de uma componente de spin de uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ pode ser 100.”¹⁰

Em seu comment, Leggett [6] está preocupado em dizer que os conceitos de “valor” e “medida” usados por AAV em [2] levam a resultados pouco relevantes para a teoria de medições, mas tendo em vista as aplicações de valores fracos nos anos seguintes [16, 17, 18, 19, 20, 21] e a sutileza da discussão, não queremos abordá-la aqui. O que nos interessa em seu comment é principalmente a equação (2), que expressa o estado do ponteiro depois da pós-seleção no sistema de interesse como uma superposição de estados $|\chi_i\rangle$ do ponteiro¹¹,

$$|\chi\rangle = \sum_i \langle \phi'_i | \psi_f \rangle \langle \psi_{in} | \phi_i \rangle |\chi_i\rangle. \quad (2.23)$$

Em sua análise, o estado inicial do sistema+ponteiro $\sum_i |\phi_i\rangle |\chi_0\rangle$ (autofunções $|\phi_i\rangle$ do sistema medido) evolui, após a interação, para $\sum_i |\phi'_i\rangle |\chi_i\rangle$, isto é, não exige que os estados do sistema de interesse permaneçam inalterados, e por isso a pós-seleção aparece em $|\phi'_i\rangle$. Escreve, em seguida, sobre o significado do valor fraco A_w :

“Não é (trivialmente) nem o valor único e nem a média do conjunto: a única coisa que ele caracteriza é o efeito do conjunto de medições no sistema de interesse sobre o estado de um conjunto de medidores essencialmente iguais.”¹² (LEGGETT, 1989, p. 2325, tradução nossa)

⁸“One may wonder how a superposition of shifts, all smaller than a_{max} , leads to a shift which is much larger than a_{max} .” (ref. [2], p. 1352).

⁹“The measured value of the spin componente corresponding to this wave function is $\tan(\alpha/2)$.” (ref. [2], p. 1353).

¹⁰No original, “How the result of a measurement of a component of the spin of a spin- $\frac{1}{2}$ particle can turn out to be 100”.

¹¹No original, $\chi = \sum_i (\psi_f, \phi'_i)^* (\psi_{in}, \phi_i) \chi_i$.

¹²“It is (trivially) neither the unique value nor the ensemble mean: The only thing it characterizes is the effect of the S ensemble on the state of an ensemble of devices essentially identical to D.” (ref. [6], p. 2325).

Peres, em seu comment [7], mostra como no exemplo de medição do spin de uma partícula analisado por AAV em [2] o medidor está em um estado de superposição de deslocamentos diferentes para cada autovalor do spin. Além de fazer a consideração sobre interferência, ainda nota que não é uma surpresa um valor fraco fora do intervalo de autovalores, já que a própria dispersão da função de onda do ponteiro é bem maior que esse intervalo:

“Nesse caso, o valor médio de p [...] pode ser maior que 1 [autovalor do spin]. Isso não deve ser causa de preocupação porque o desvio padrão $(\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2)^{1/2}$ é ainda maior que 1 (isso é devido à interferência destrutiva mencionada acima, que faz com que as probabilidades não se somem de forma clássica). [...] Os resultados experimentais, se interpretados corretamente, obedecem as regras da mecânica quântica elementar.”¹³ (PERES, 1989, p. 2326, tradução nossa)

Aharonov e Vaidman respondem [22]:

“Apesar de $f(p)$ ser de fato uma superposição de duas Gaussianas deslocadas de ± 1 , ela é aproximadamente igual (no limite de $\Delta \rightarrow 0$) a uma Gaussiana deslocada do valor 100. Os dois picos só podem ser encontrados se é conhecido antecipadamente que $f(p)$ é uma superposição de duas Gaussianas. [...] Afirmamos novamente que nosso resultado *não* contradiz ‘as regras da mecânica quântica elementar’. Nosso resultado está escondido no formalismo padrão por trás da uma identidade matemática inesperada: nossa eq. (7). $[\sum_{n=-N}^N c_n e^{iqn/N} f(q) \cong e^{iaq} f(q)]$ ”¹⁴ (AHARONOV; VAIDMAN, 1989, p. 2327, tradução nossa)

Duck, Stevenson e Sudarshan apresentam não um comment, mas um novo artigo [8] em que fazem os cálculos com todas as aproximações devidamente explicitadas mostrando que o valor fraco é um fenômeno de interferência. Sua conclusão reforça os pontos de vista de

¹³“In that case, the average value of p [...] may be larger than 1. This should not be a matter of concern because the standar deviation $[\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2]^{1/2}$ is even larger than that (this is due to the destructive interference mentioned above, which causes probabilities not to add in the classical way). [...] The experimental results, if correctly interpreted, obey the rules of elementary quantum mechanics.” (ref. [7], p. 2326).

¹⁴“Although $f(p)$ is, indeed, a superposition of two Gaussians shifted by ± 1 , it is, approximately, equal (in the limit $\Delta \rightarrow 0$) to the Gaussian shifted by the value 100. The two peaks can be found only if it is known in advance that $f(p)$ is a superposition of two Gaussians. [...] We state again that our result *does not* contradict ‘the rules of elementary quantum mechanics.’ Our result is hidden in the standard formalism behind the unexpected mathematical identity: our Eq. (7).” (ref. [22], p. 2327).

Leggett e Peres:

“Foi mostrado que o efeito surpreendente apontado por AAV é consequência de interferência construtiva e destrutiva entre duas amplitudes complexas. Apesar de surpreendente, o efeito não é de modo algum paradoxal, e não envolve nada além de mecânica quântica comum.”¹⁵ (DUCK *et al.*, 1989, p. 2117, tradução nossa)

Após as discussões iniciais, em 1990 Aharonov e Vaidman publicaram um trabalho em que consideram propriedades de um sistema entre duas medições, sendo a medição fraca um dos casos [37]. Reapresentam a idéia de que o valor fraco surge da superposição de várias funções de onda deslocadas, como na sua fig. 2, que mostra a superposição de Gaussianas deslocadas de valores entre -1 e 1 resultando numa Gaussiana deslocada de 3 . Ainda assim, reforçam a significação do valor fraco como algo além de um mero fenômeno de interferência, dada a possibilidade de uma abordagem que não seja a padrão:

“O valor efetivo de A para *qualquer* interação (fraca o suficiente) com os sistemas pertencentes aos conjuntos pré- e pós-selecionados é, de fato, o valor fraco A_w . Esse resultado não contradiz a teoria padrão, mas sua explicação pela abordagem padrão é um tanto quanto sutil e é devido a uma interferência quântica peculiar.”¹⁶ (AHARONOV; VAIDMAN, 1990, p. 19, tradução nossa)

Nesse trabalho, adotamos as posições de Leggett, Peres e Duck *et al.*. Reconhecemos que a obtenção de valores fracos pode trazer resultados interessantes e são valores cuja obtenção não traz nenhum paradoxo à luz da mecânica quântica padrão. Contudo, vamos nos ater a entendê-lo como um fenômeno de interferência, que não representa o valor real de uma grandeza de um sistema quântico, e assim evitaremos paradoxos como o Gato de Cheshire quântico [1, 3, 4, 5].

¹⁵“The surprising effect pointed out by AAV has been shown to be a consequence of constructive and destructive interference between two complex amplitudes. Although surprising, the effect is in no way paradoxical, and involves nothing outside ordinary quantum mechanics.” (ref. [8], p. 2117).

¹⁶“The effective value of A for *any* (weak enough) interaction with the systems belonging to preselected and post-selected ensembles is, in fact, the weak value A_w . This result does not contradict the standard theory, but its explanation in the standard approach is rather subtle and is due to peculiar quantum interference.” (ref. [37], p. 19).

2.5 Valor fraco é resultado de interferência quântica

Essa seção tem por objetivo explicar como o valor fraco, apesar de ser inegavelmente um valor apontado pelo ponteiro dadas as condições de medição fraca, é resultado de um fenômeno de interferência, de forma parecida com como Duck *et al.* em [8] responderam o trabalho original de Aharonov, Albert e Vaidman [2].

Se olharmos para as equações (2.11) e (2.17),

$$\langle \psi_f | U(g, A, P) | \Psi_i \rangle = \sum_j c_j \langle \psi_f | a_j \rangle \phi(x - ga_j) \approx \langle \psi_f | \psi_i \rangle \phi(x - g\langle A \rangle_w), \quad (2.24)$$

onde $c_j = \langle a_j | \psi_i \rangle$, fica claro que o valor fraco surge a partir da superposição das funções $\phi(x - ga_j)$, que se combinam de acordo com as amplitudes $c_j \langle \psi_f | a_j \rangle$. Essa superposição é o que gera a *interferência*, que decorre do fato de que a detecção do sistema descrito por essa função obedece ao módulo ao quadrado da soma coerente dessas funções

$$\begin{aligned} p(x) &= \left| \sum_j c_j \langle \psi_f | a_j \rangle \phi(x - ga_j) \right|^2 \\ &= \sum_j |c_j \langle \psi_f | a_j \rangle \phi(x - ga_j)|^2 + \sum_{j,k} c_j^* c_k \langle \psi_f | a_k \rangle \langle a_j | \psi_f \rangle \phi^*(x - ga_j) \phi(x - ga_k), \end{aligned} \quad (2.25)$$

e portanto não à simples soma das densidades de probabilidade individuais de cada componente $\sum_j |c_j \langle \psi_f | a_j \rangle \phi(x - ga_j)|^2$. Podemos ver isso como sendo a soma coerente de várias funções de onda resultando em uma nova função de onda, cujo módulo ao quadrado descreve a densidade de probabilidade de detecção da posição do ponteiro – no caso da medição fraca, a nova função é aproximadamente $\phi(x - g\langle A \rangle_w)$.

Para entendermos como essa interferência acontece, vamos voltar ao caso do valor fraco da polarização de um fóton da seção 2.3 (fig. 2.3), estudado nas refs. [8] e [21], que apresentaremos de forma ainda mais detalhada. É essencial incluir a descrição do ponteiro para que possamos explicar o valor fraco como interferência, pois é nele que ocorre a superposição. Seu comportamento, contudo, fica oculto quando calculamos diretamente o valor fraco na eq. (2.16) – e nosso ponteiro é a distribuição de energia do fóton ao longo da direção de deslocamento do feixe, transversal à direção de propagação. Descreveremos o estado do fóton ao longo do experimento com o formalismo de função de onda de fóton, como sugerido na seção 2.3, que inclui tanto o estado de polarização (observável do qual extraímos o valor fraco) quanto do perfil transversal do campo eletromagnético associado ao fóton (ponteiro).

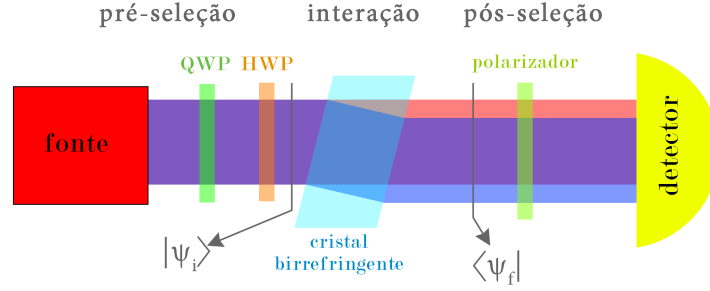


Figura 2.3: Montagem experimental simplificada. (repetida da p. 14)

2.5.1 Descrição do estado do fóton

Seja uma função escalar $V(x, y, z, t)$ composta por uma onda plana monocromática $e^{i(k_z z - \omega t)}$ e uma outra função $\psi(x, y, z)$ que limita a sua amplitude no espaço, denominada envelope:

$$V(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (2.26)$$

Se $V(x, y, z, t)$ descreve a parte escalar de um campo eletromagnético monocromático, é possível mostrar [31] que se o espectro de vetores de onda de $\psi(x, y, z)$ é estreito¹⁷ em torno de k_z , isto é, $k_z \approx \omega/c$, o alargamento de $\psi(x, y, z)$ é muito lento ao longo da direção de propagação e o campo V descreve um *feixe*. Nenhum feixe físico é estritamente monocromático ou se propaga somente em uma direção, mas nas condições anteriormente citadas podemos assumir esses fatos sem comprometer nossa descrição. Generalizamos o envelope do feixe para que possa também descrever um *pulso* se propagando na direção z com velocidade $v = \omega/k_z$, isto é,

$$\psi(x, y, z) \rightarrow \psi(x, y, z - vt, t). \quad (2.27)$$

Em uma distância curta de propagação podemos considerar que $\psi(x, y, z - vt, t) \approx \psi(x, y, z, t = 0)$, isto é, que o envelope se propaga sem se deformar, preservando a forma que tem em $t = 0$. Nesse regime não precisaremos considerar a dependência em t independente de z do envelope, que descreve sua deformação, e escreveremos $\psi = \psi(x, y, z - vt)$.

Vale notar que é possível que as dependências em x , y e $z - vt$ sejam independentes, e assim temos

$$V(x, y, z - vt, t) \approx \psi_x(x) \psi_y(y) \psi_z(z - vt) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (2.28)$$

¹⁷A transformada bidimensional de Fourier de $\psi(x, y, z = 0)$, $\tilde{\psi}(k_x, k_y, z = 0)$, só é apreciavelmente não-nula para $k_z^2 \gg k_x^2 + k_y^2$.

Precisaremos de uma função desse tipo se quisermos obter valores fracos de observáveis diferentes associadas a deslocamentos em direções independentes.

Até agora descrevemos um feixe clássico, mas as expressões que definem um campo eletromagnético clássico podem ser usada para descrever o estado de um fóton em um formalismo desenvolvido independentemente por I. Bialynicki-Birula e J. E. Sipe [27, 28, 29] que usa uma *função de onda de fóton* para descrever esse estado. A função de onda de fóton é uma função das coordenadas espaciais e temporal que descreve completamente o estado do fóton. Assim como os módulos ao quadrado dos campos elétrico e magnético fornecem a densidade de energia do campo eletromagnético [38]

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)|^2, \quad (2.29)$$

o módulo ao quadrado da função de onda de fóton fornece a densidade de energia do fóton.

A função de onda de um fóton no vácuo escrita a partir do vetor de Riemann–Silberstein¹⁸ pode ser posta [29, 30] na forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}_+(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_-(\mathbf{r}, t), \quad (2.30)$$

com

$$\mathbf{F}_\pm(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}} \mathbf{E}_\pm(\mathbf{r}, t) \pm i \sqrt{\frac{1}{2\mu_0}} \mathbf{B}_\pm(\mathbf{r}, t), \quad (2.31)$$

onde \mathbf{E}_\pm e \mathbf{B}_\pm são campos com helicidade (polarização circular) positiva e negativa, ortogonais entre si. Dessa forma,

$$\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F} = \frac{\epsilon_0}{2} (|\mathbf{E}_+|^2 + |\mathbf{E}_-|^2) + \frac{1}{2\mu_0} (|\mathbf{B}_+|^2 + |\mathbf{B}_-|^2), \quad (2.32)$$

que é a densidade de energia do campo eletromagnético no vácuo (eq. (2.29)). Assim, a detecção de vários fótons no estado $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ revela o mesmo padrão de intensidade de um campo eletromagnético descrito pelas funções $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ que compõem $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, e por isso toda a nossa discussão para a interferência de fótons é diretamente mapeada em interferência de campos eletromagnéticos clássicos.

Relembrando da seção 2.3, o experimento que queremos descrever consiste em: um fóton é preparado num estado de polarização $|\psi_i\rangle$; em seguida interage com um cristal birrefringente que desloca as partes da função de onda com polarizações horizontal e vertical em

¹⁸Vetor que reduz as equações de Maxwell a apenas duas, ver seq. 0.1.4 de [29].

sentidos opostos de uma mesma direção transversal à propagação; finalmente, o fóton é pós-selecionado num estado $|\psi_f\rangle$. Após muitas contagens, o perfil transversal de intensidade do fóton é revelado num detector.

Esse fóton será descrito com uma função de onda $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ com a forma das equações (2.30), (2.31), que inclui tanto a polarização quanto a distribuição espacial dos campos, que geram o padrão de intensidade dada a detecção de muitos fótons. Para isso, consideraremos que o fóton se propaga no vácuo, o que não incorpora erros significativos na descrição. Como os fótons se propagam praticamente em uma só direção e a interação com o cristal birrefringente só deve deslocar o perfil transversal em uma única direção, vamos usar um campo do tipo da eq. (2.28), em que a direção x será a direção de deslocamento do feixe ($U(g, S, P_x) = e^{-\frac{i}{\hbar}gS \otimes P_x}$). No vácuo, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ [38], onde $\hat{\mathbf{k}} \approx \hat{\mathbf{z}}$, e denominaremos $|H\rangle$, $|V\rangle$ a base de polarização $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, de forma que $|\pm\rangle = (|H\rangle \pm i|V\rangle)/\sqrt{2}$ corresponde à base $\hat{\mathbf{e}}_{\pm} = (\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$. Assim, os campos elétrico e magnético para se construir a função de onda de fóton são aproximadamente¹⁹

$$\mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z - vt)e^{i(k_z z - \omega t)}\hat{\mathbf{e}}_{\pm}, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{B}_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mp i}{c}\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z - vt)e^{i(k_z z - \omega t)}\hat{\mathbf{e}}_{\pm}. \quad (2.34)$$

Logo, de (2.30) e (2.31), incorporando a notação braket para os vetores de polarização da função de onda $\mathbf{F}_{\pm}(\mathbf{r}, t)$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_{\pm}(\mathbf{r}, t)\rangle &\approx \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z - vt)e^{i(k_z z - \omega t)} \left[\sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}} \pm i\sqrt{\frac{1}{2\mu_0}} \frac{(\mp i)}{c} \right] |\pm\rangle \\ &= \sqrt{2\epsilon_0}\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z - vt)e^{i(k_z z - \omega t)} |\pm\rangle. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Não queremos escrever toda essa expressão durante o trabalho, e vamos propor uma descrição abreviada do estado do fóton. O experimento da seq. 2.3 fornece o valor fraco pelo deslocamento do perfil transversal do fóton na direção x e seu estado de polarização. Como a parte que depende de y será sempre constante e a parte da propagação em $(z - vt)$ ²⁰ será sempre fatorável, vamos chamar de K o fator $\sqrt{2\epsilon_0}\psi_y(y)\psi_z(z - vt)e^{i(k_z z - \omega t)}$ multiplicado por qualquer eventual normalização necessária, e todo o nosso problema poderá ser discutido com

¹⁹Como $\hat{\mathbf{k}} \approx \hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{E}_{\pm} = E(\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}})$, então $\mathbf{B}_{\pm} \approx \frac{E}{c}(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}}) = \frac{E}{c}(\hat{\mathbf{y}} \mp i\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\mp iE}{c}(\pm i\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{x}})$.

²⁰ $e^{i(k_z z - \omega t)} = e^{ik_z(z - vt)}$

uma função do tipo

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)\rangle = K \psi_x(x)(a|H\rangle + b|V\rangle), \quad (2.36)$$

com $|a|^2 + |b|^2 = 1$ e $\psi_x(x)$ o envelope da função do fóton na direção x . O perfil transversal de intensidade do fóton será $|\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)|^2 = |K|^2 |\psi_x(x)|^2$. Note que escrevemos que a função de onda é *igual* à eq. (2.36), apesar de sabermos que a descrição do feixe monocromático que se propaga no vácuo numa direção bem especificada é uma *aproximação*.

Assim, $|\mathbf{F}\rangle = |\mathbf{F}_+\rangle + |\mathbf{F}_-\rangle$ representa um fóton propagando na direção z com polarização horizontal, uma vez que $(|+\rangle + |-\rangle) = \sqrt{2}|H\rangle$. Mas se a diferença de fase entre $|\mathbf{F}_+\rangle$ e $|\mathbf{F}_-\rangle$ é de π , $|\mathbf{F}\rangle$ descreve um fóton com polarização vertical, uma vez que $(|+\rangle - |-\rangle) = i\sqrt{2}|V\rangle$.

2.5.2 O valor fraco da polarização de um fóton

A partir da eq. (2.36), escrevemos o estado dos fótons antes do cristal (ou o campo eletromagnético correspondente) incluindo sua polarização $|\psi_i\rangle$ (eq. (2.18)). Trataremos somente $|\psi_i\rangle = (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$ (que é a eq. (2.36) com $a = b = 1/\sqrt{2}$), o caso da curva azul da figura 2.4, que sozinho elucida o fenômeno de interferência do ponteiro:

$$|\mathbf{F}_i(x)\rangle = F(x) \frac{(|H\rangle + |V\rangle)}{\sqrt{2}}. \quad (2.37)$$

Essa função representa um fóton propagando na direção z , polarizado a 45° do eixo x , cujo perfil transversal do campo na direção x tem a forma da função $F(x)$.

Após passar pelo cristal, já vimos que esse tipo de interação deve ser tal que $e^{-\frac{i}{\hbar}gS P_x} F(x) = F(x - gs)$, onde s é o autovalor de polarização do fóton. Dessa forma,

$$|\mathbf{F}'(x)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}gS \otimes P_x} F(x) \frac{(|H\rangle + |V\rangle)}{\sqrt{2}} = \frac{F(x - g)}{\sqrt{2}} |H\rangle + \frac{F(x + g)}{\sqrt{2}} |V\rangle, \quad (2.38)$$

pois $S = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|$ especifica os autovalores $s_H = +1$ para $|H\rangle$ e $s_V = -1$ para $|V\rangle$.

Consideraremos um perfil de distribuição Gaussiano para a densidade de energia do fóton, de forma que uma função de onda $F(x)$, não-normalizada, que gere tal distribuição seja

$$F(x) = K \exp\left[-\frac{x^2}{W^2}\right], \quad (2.39)$$

em que W é proporcional à largura do feixe e K é a constante da eq. (2.36) que incorpora as unidades necessárias, normalização e as dependências em y , z e t . Como o módulo ao quadrado da função de onda de fóton ($\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F} = \langle \mathbf{F} | \mathbf{F} \rangle$) fornece a densidade de energia

(eq. (2.32)), a densidade de energia do fóton incidente no estado $\mathbf{F}_i(x)$ será $|F(x)|^2$ – no caso $|F(x)|^2 = |K|^2 e^{-2x^2/W^2}$, que é uma distribuição Gaussiana. Vale notar aqui que, como estamos preocupados com a *posição* do ponteiro e com intensidades relativas, só nos interessam a forma das funções e razões de intensidades, não causando problemas o fato de ignorarmos normalizações.

Representamos na figura 2.6(a) as componentes do estado do fóton antes da interação com o cristal (eq. (2.37)), onde a função azul representa ambas as componentes de polarização horizontal e vertical sem deslocamento entre elas, $F(x)|H\rangle/(\sqrt{2}K)$ e $F(x)|V\rangle/(\sqrt{2}K)$, ignoradas as normalizações e unidades dimensionais. Em verde está representada a forma do perfil de densidade de energia do fóton, que é $(2|F(x)|^2)/(2|K|^2) = e^{-2x^2/W^2}$, uma função Gaussiana. Na fig. 2.6(b) representamos as componentes do fóton após a interação com o cristal (eq. (2.38)), isto é, com os respectivos deslocamentos. A função em vermelho representa a parte com polarização horizontal $F(x-g)|H\rangle/(\sqrt{2}K)$, e em azul a vertical $F(x+g)|V\rangle/(\sqrt{2}K)$. Em verde está representada a forma do perfil de densidade de energia do fóton, que é $(|F(x-g)|^2 + |F(x+g)|^2)/(2|K|^2)$. Escolhendo $g = 0.1W$, o perfil de densidade de energia total é ainda aproximadamente uma função Gaussiana equivalente a antes do cristal (fig. 2.6(a)), apenas com uma pequena diminuição da intensidade do pico. Portanto $g = 0.1W$ é um deslocamento pequeno o suficiente nas componentes $F(x \pm g)$ para que possamos operar no regime de interação fraca, pois não altera a forma do ponteiro perceptivelmente, mas é grande o suficiente para podermos percebê-lo com clareza.

A pós-seleção é feita com um polarizador que faz um ângulo θ' com o eixo x (lembrando que $|H\rangle$ é definido como a polarização ao longo do eixo $\hat{\mathbf{x}}$ e $|V\rangle$ de $\hat{\mathbf{y}}$), de acordo com a eq. (2.19): $|\psi_f\rangle = \cos \theta' |H\rangle + \sin \theta' |V\rangle$. A parte da função de onda que passa pelo polarizador é somente a parte paralela a $|\psi_f\rangle$, e portanto a sua ação equivale a efetuar o produto interno $\langle \psi_f | \mathbf{F}'(x) \rangle = \langle \psi_f | e^{-\frac{i}{\hbar} g S \otimes P_x} F(x) | \psi_i \rangle$. A partir de (2.38), temos portanto a situação da eq. (2.11):

$$\langle \psi_f | U(g, A, P) | \Psi_i \rangle \rightarrow \langle \psi_f | \mathbf{F}'(x) \rangle, \quad (2.40)$$

$$\sum_j c_j \langle \psi_f | a_j \rangle \phi(x - g a_j) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta' F(x - g) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta' F(x + g). \quad (2.41)$$

O módulo ao quadrado dessa função fornece o perfil espacial transversal de densidade de energia do fóton resultante da interferência entre as componentes de polarização horizontal

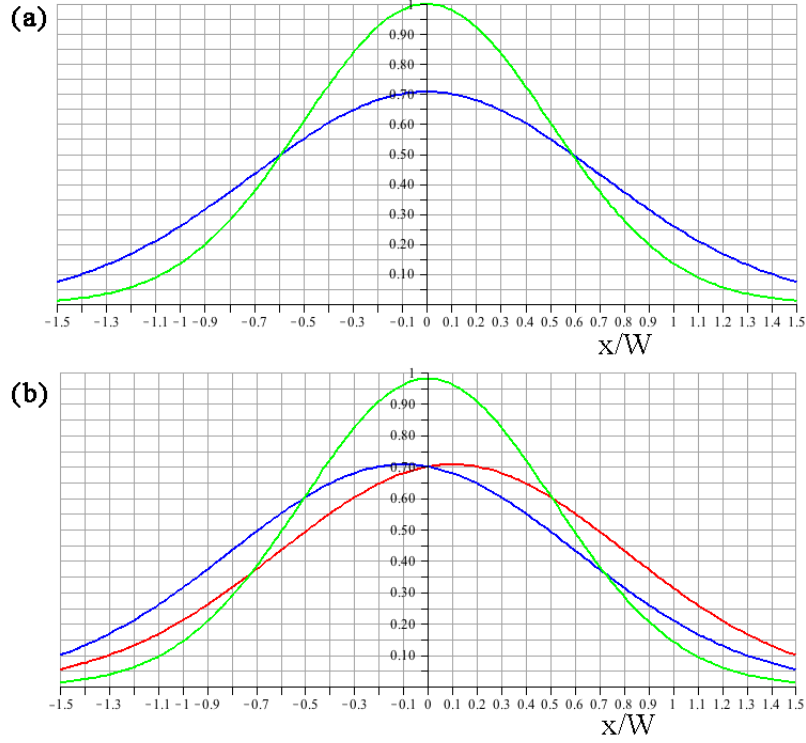


Figura 2.6: (a) Para $F(x) = Ke^{-x^2/W^2}$ e $g = 0.1W$, representamos em azul $F(x)/(\sqrt{2}K)$, que descreve o estado espacial não-normalizado de ambas as componentes horizontal e vertical de polarização do fóton antes de passar pelo cristal (eq. (2.37)). Em verde, $|F(x)/K|^2$ é a forma do perfil espacial de densidade de energia do fóton. (b) Em vermelho $F(x-g)/(\sqrt{2}K)$ e em azul $F(x+g)/(\sqrt{2}K)$, que são a forma dos estados espaciais das componentes horizontal e vertical, respectivamente, da polarização do fóton após a interação com o cristal (eq. (2.38)). Em verde, $(|F(x-g)|^2 + |F(x+g)|^2)/(2|K|^2)$, que é a forma do perfil espacial de densidade de energia do fóton.

e vertical do fóton após a pós-seleção. Usando a aproximação da eq. (2.12), $\phi(x-\delta) \approx \phi(x) - \delta \frac{d\phi(x)}{dx}$, uma vez que estamos no regime em que o deslocamento g é muito menor que a dispersão de $F(x)$, podemos descobrir a forma final aproximada dessa função:

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | \mathbf{F}'(x) \rangle &\approx \frac{\cos \theta'}{\sqrt{2}} F(x) - g \frac{\cos \theta'}{\sqrt{2}} \frac{dF(x)}{dx} + \frac{\sin \theta'}{\sqrt{2}} F(x) + g \frac{\sin \theta'}{\sqrt{2}} \frac{dF(x)}{dx} = \\ &= \frac{(\cos \theta' + \sin \theta')}{\sqrt{2}} \left[F(x) - g \frac{(\cos \theta' - \sin \theta')}{(\cos \theta' + \sin \theta')} \frac{dF(x)}{dx} \right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

O número $\frac{(\cos \theta' - \sin \theta')}{(\cos \theta' + \sin \theta')}$ é exatamente o valor fraco $\langle S \rangle_w$ que aparece na tabela 2.1 para $\theta = \pi/4$. Para deslocamentos $g \langle S \rangle_w$ pequenos em relação a $F(x)$ temos, finalmente,

$$\langle \psi_f | \mathbf{F}'(x) \rangle \approx \frac{(\cos \theta' + \sin \theta')}{\sqrt{2}} F(x - g \langle S \rangle_w), \quad (2.43)$$

onde $(\cos \theta' + \sin \theta')/\sqrt{2} = \langle \psi_f | \psi_i \rangle$ é o fator de atenuação da eq. (2.17). Um detector sensível à posição dos fótons irá registrar, após muitas contagens, um perfil de número de fótons igual ao perfil de densidade de energia

$$\begin{aligned} I(x) &= |\langle \psi_f | \mathbf{F}'(x) \rangle|^2 = \frac{1}{2} |\cos \theta' F(x-g) + \sin \theta' F(x+g)|^2 \\ &\approx \frac{(\cos \theta' + \sin \theta')^2}{2} |F(x-g\langle S \rangle_w)|^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Na figura 2.7 estão representados os casos em que a pós-seleção é feita para (a) $\theta' = 0$, (b) $\theta' = 5\pi/8$ e (c) $\theta' = 3\pi/4$. Esses três casos são interessantes pois, para $\theta' = 0$, o valor fraco coincide com um autovalor do operador medido, para $\theta' = 5\pi/8$ o valor fraco está fora do intervalo de autovalores, e em $\theta' = 3\pi/4$ fica claro que o perfil de intensidade transversal dos fótons não pode ser mais considerado um ponteiro. A função em vermelho é a parte pós-selecionada da componente de polarização horizontal do fóton

$$\langle \psi_f | H \rangle \langle H | \psi_i \rangle F(x - g s_H) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta' F(x - g), \quad (2.45)$$

em azul a parte da componente vertical

$$\langle \psi_f | V \rangle \langle V | \psi_i \rangle F(x - g s_V) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta' F(x + g), \quad (2.46)$$

e em verde a intensidade $I(x)$, que é o ponteiro propriamente dito, revelado pelo detector. Gráficos desse tipo são usados em outros trabalhos que explicam como fenômenos de interferência os resultados de propostas que usam valores fracos [8, 24].

Em $\theta' = 0$ (fig. 2.7(a)), o estado de pós-seleção é $|\psi_f\rangle = |H\rangle$, portanto só a componente do ponteiro ligada à polarização horizontal passa pelo polarizador:

$$\langle \psi_f | H \rangle \langle H | \psi_i \rangle F(x - g s_H) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} F(x - g), \quad (2.47)$$

$$\langle \psi_f | V \rangle \langle V | \psi_i \rangle F(x - g s_V) \rightarrow 0. \quad (2.48)$$

Por essa razão, não há superposição entre as componentes e $\langle S \rangle_w = s_H$, ou seja, o ponteiro está exatamente na posição correspondente ao autovalor $s_H = 1$. Vemos claramente na fig. 2.7(a) que o centro do perfil transversal de intensidade é $g\langle S \rangle_w = 0.1W$.

Em $\theta' = 5\pi/8$ (fig. 2.7(b)), o estado de pós-seleção é $|\psi_f\rangle \approx -0.38|H\rangle + 0.92|V\rangle$, e além

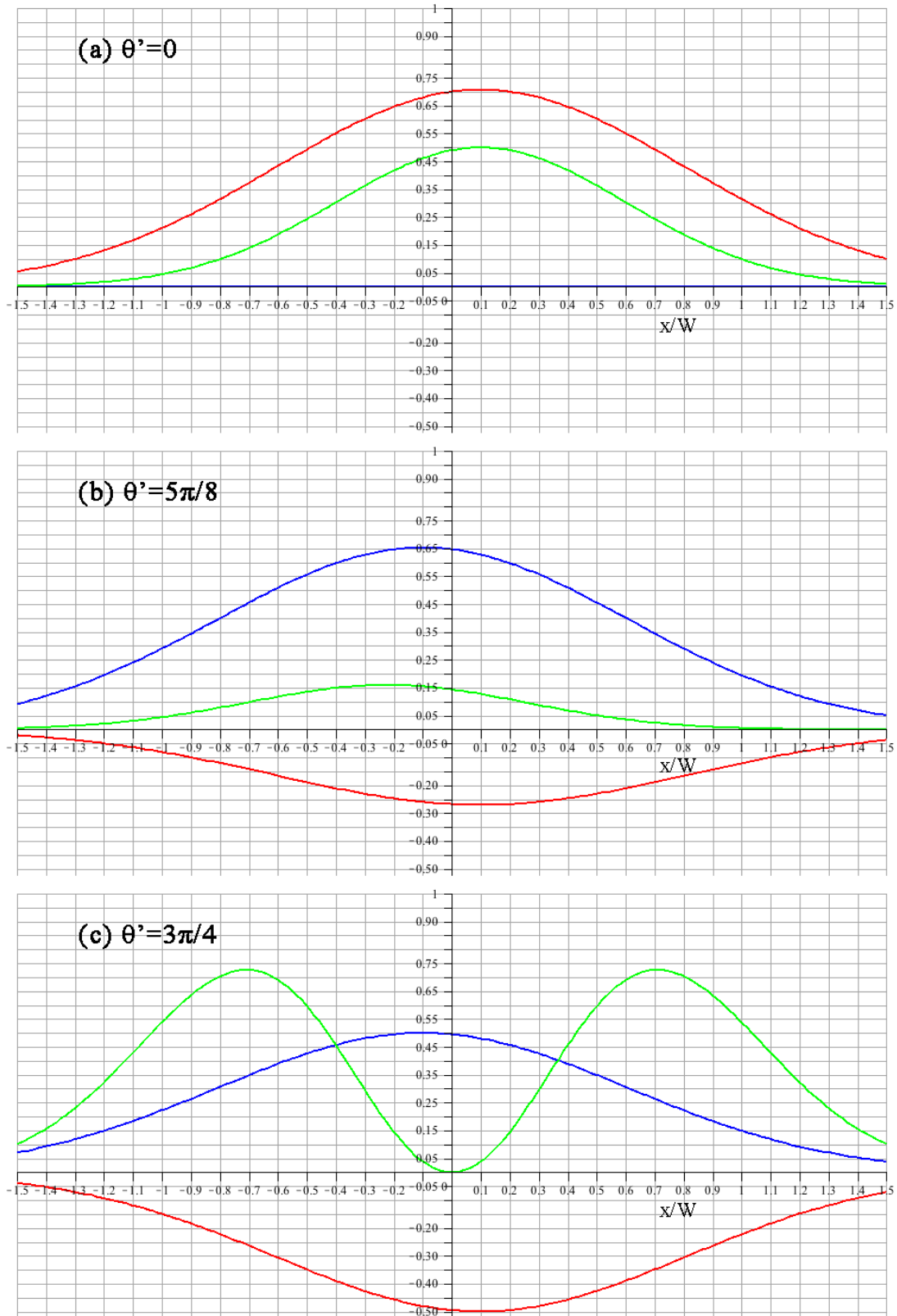


Figura 2.7: Para $F(x) = Ke^{-x^2/W^2}$ e $g = 0.1W$, representamos em vermelho $\cos \theta' F(x - g)/(\sqrt{2}K)$, em azul $\sin \theta' F(x + g)/(\sqrt{2}K)$ e em verde $|\cos \theta' F(x - g) + \sin \theta' F(x + g)|^2/2|K|^2$ para (a) $\theta' = 0$, (b) $\theta' = 5\pi/8$ e (c) $\theta' = 3\pi/4$. Em (c), a escala vertical está multiplicada por 100 para a função verde.

da diferença de tamanho entre as componentes, entre elas há uma fase -1 :

$$\langle \psi_f | H \rangle \langle H | \psi_i \rangle F(x - g_{s_H}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-0.38)F(x - g), \quad (2.49)$$

$$\langle \psi_f | V \rangle \langle V | \psi_i \rangle F(x - g_{s_V}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(0.92)F(x + g). \quad (2.50)$$

Assim, há interferência destrutiva entre as componentes, de forma que a componente horizontal (vermelha) subtrai muito da parte $(x/W) > 0$ da componente vertical (azul). O que resulta dessa interferência é uma função cujo pico está mais próximo do pico da função azul, que tem maior amplitude. Contudo, como a componente horizontal tem amplitude considerável, a interferência faz com que a região onde existia o pico da componente vertical (em $(x/W) = -0.1$) termine com amplitude menor do que a região mais à esquerda desse ponto. O pico da função resultante está próximo de $(x/W) = -0.2$, isto é, o valor fraco $\langle S \rangle_w \approx -0.2W/g = -2$ indicado pelo ponteiro está fora do intervalo de autovalores de S , que tem limite inferior em $s_V = -1$. Fica claro portanto que dar realidade a um valor fraco que seja diferente de um autovalor do observável medido, ou até mesmo anômalo (ver final da seq. 2.3), não é necessário quando entendemos a posição do ponteiro como resultante de um fenômeno de interferência.

Nota-se que o padrão resultante da interferência (verde) se parece com uma Gaussiana para $g\langle S \rangle_w = -0.2W$ (fig. 2.7(b)), que é um deslocamento ainda pequeno em relação à largura de $F(x)$. O caso limite em que $\langle \psi_f | \psi_i \rangle = 0$, para $\theta' = 3\pi/4$ ou $|\psi_f\rangle = (-|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$, está mostrado na fig. 2.7(c). Quando a diferença de fase entre as componentes deslocadas $F(x - g)$ e $F(x + g)$ é -1 , a forma da função resultante só é preservada se a diferença entre as amplitudes for grande, isto é, o resultado final é um pequeno desvio da função de maior amplitude. À medida que a diferença entre as amplitudes das componentes diminui, a interferência destrutiva faz com que o resultado da superposição seja cada vez menos parecido com qualquer uma das componentes, ou seja, menos parecido com a função $F(x)$ que gera o ponteiro. De forma geral, isso se relaciona ao fato de que quanto mais ortogonais os estados de pré- e pós-seleção, maior o valor fraco $\langle A \rangle_w = \langle \psi_f | A | \psi_i \rangle / \langle \psi_f | \psi_i \rangle$, e a aproximação feita entre as equações (2.42) e (2.43) deixa de valer, pois $g\langle S \rangle_w$ não é pequeno em relação à largura de $F(x)$. Nesses casos o valor fraco perde seu significado por não poder ser observado, já que o ponteiro perdeu a sua forma.

O fator de amplitude do ponteiro $|\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 = (\cos \theta' + \sin \theta')^2/2$ (eqs. (2.17) e (2.15))

também fica perceptível através da diferença da intensidade entre as figs. 2.7(a) e (b). O deslocamento do ponteiro além dos limites dos autovalores vem às custas da diminuição cada vez maior da intensidade absoluta do ponteiro. Na fig. 2.7(c) claramente esse fator não é uma boa aproximação, já que é nulo para $\theta' = 3\pi/4$ e ainda assim temos probabilidade de detecção não-nula, apesar de baixa (a escala a linha verde correspondente à intensidade está multiplicada por 100).

Também mostramos que, no caso de a interação ser forte, isto é, se g é maior do que a dispersão de $F(x)$, o detector mostra dois picos, cada um correspondente à parte da função de onda associada a uma polarização (fig. 2.8). Nesse sentido foi feita uma medida projetiva pois, se assumimos um raciocínio retroativo, pode-se concluir que praticamente todos os fótons que chegam próximo ao pico de $F(x - g)$ têm polarização horizontal, e os próximos ao pico de $F(x + g)$ têm polarização vertical, uma vez que essas componentes não se sobrepõem significativamente. Como não se sobrepõem, não há interferência, e isso pode ser visto na eq. (2.25), em que próximo aos picos o produto $\phi^*(x - ga_j)\phi(x - ga_k)$ é muito pequeno em relação a $|\phi^*(x - ga_j)|^2$. Portanto a intensidade de detecção é aproximadamente a soma das intensidades de cada componente

$$|\cos \theta' F(x - g) + \sin \theta' F(x + g)|^2 \approx \cos^2 \theta' |F(x - g)|^2 + \sin^2 \theta' |F(x + g)|^2. \quad (2.51)$$

A equação acima nos mostra ainda que, no caso de medida projetiva, a pós-seleção (traduzida no parâmetro θ') só muda o tamanho relativo entre os picos, uma vez que não há interferência.

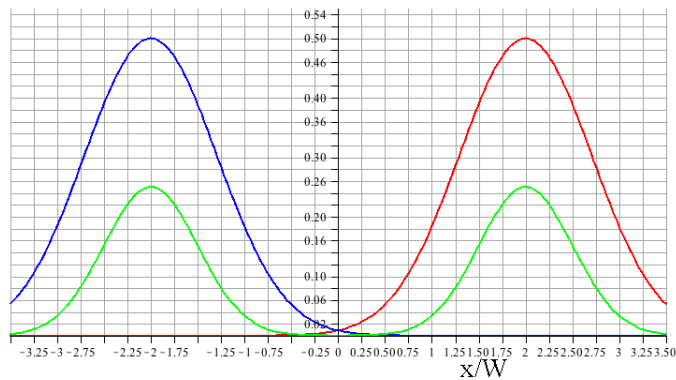


Figura 2.8: Para $F(x) = Ke^{-x^2/W^2}$ e $g = 2W$, representamos em vermelho $\cos \theta' F(x - g)/K$, em azul $\sin \theta' F(x + g)/K$ e em verde $|\cos \theta' F(x - g) + \sin \theta' F(x + g)|^2 / |K|^2$ para $\theta' = \pi/4$.

Fica claro, assim, como as amplitudes de cada componente da função de onda *interferem*, isto é, se superpõem gerando o padrão de intensidade $I(x)$ que aponta o valor fraco. O valor fraco, portanto, é um valor que realmente se pode obter experimentalmente e não contradiz a mecânica quântica, mas significá-lo como o valor de uma grandeza é um abuso e pode gerar paradoxos. Vale a pena aqui repetir o trecho do artigo de Duck *et al.* [8] presente na seção 2.4:

“Foi mostrado que o efeito surpreendente apontado por Albert, Aharonov e Vaidman é consequência de interferência construtiva e destrutiva entre duas amplitudes complexas. Apesar de surpreendente, o efeito não é de modo algum paradoxal, e não envolve nada além de mecânica quântica comum.”²¹ (DUCK *et al.*, 1989, p. 2117, tradução nossa)

Também lembramos que todo o raciocínio feito para a função $|\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\rangle$ poderia ser feito para um campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, ou seja, o experimento mostrará exatamente os mesmos resultados se for realizado com um feixe intenso de luz e eles serão explicados como interferência de ondas clássicas.

²¹“The surprising effect pointed out by AAV has been shown to be a consequence of constructive and destructive interference between two complex amplitudes. Although surprising, the effect is in no way paradoxical, and involves nothing outside ordinary quantum mechanics.” (ref. [8], p. 2117).

Capítulo 3

O Gato de Cheshire quântico

Utilizando o conceito de valor fraco, Aharonov *et al.* descrevem em um artigo de 2013 um efeito que chamaram de “Gato de Cheshire quântico” [1]. Esse fenômeno, já apresentado no livro *Quantum Paradoxes* de Aharonov e Rohrlich de 2005 (seç. 17.2, ref. [14]), consiste em encontrar um valor fraco unitário para a presença de uma partícula em um braço de um interferômetro e zero no outro braço, enquanto o valor fraco de uma propriedade da partícula é zero no primeiro braço e unitário no segundo. Como dito no capítulo anterior, a existência do valor fraco é indiscutível e pode ser encontrado para os operadores que representam tanto a presença da partícula em cada braço quanto para a propriedade em questão. A conclusão estranha derivada desses resultados nas refs. [1] e [14] é a de que esses valores fracos significam que a partícula se encontra em um braço do interferômetro, enquanto sua propriedade está no outro. Daí a nomeação do efeito como “Gato de Cheshire quântico”, em referência ao Gato de Cheshire de Lewis Carroll em *Alice no País das Maravilhas*, cujo sorriso existe onde não há gato. Escrevem:

“Nesse artigo apresentamos um Gato de Cheshire quântico. Num experimento com pré- e pós-seleção encontramos o Gato em um lugar, e seu sorriso em outro.

O Gato é um fóton, enquanto o sorriso é sua polarização circular.”¹ (AHARONOV *et al.*, 2013, *abstract*, tradução nossa).

“[...] como mostraremos aqui, o jeito curioso de ser da mecânica quântica permite que a polarização do fóton possa existir onde não há absolutamente nenhum fóton.”² (AHARONOV *et al.*, 2013, p. 2, tradução nossa).

“O momento magnético vai por um braço do interferômetro, mas o nêutron propriamente dito vai pelo outro braço!”³ (AHARONOV; ROHRLICH, 2005, p. 253, tradução nossa).

Um artigo na seção *News and Views* da revista *Nature Physics* [4] sobre o trabalho de Aharonov *et al.* [1] reforça as conclusões dos autores:

“A polarização foi efetivamente ‘desincorporada’ do fóton que viaja em um braço do interferômetro”⁴ (BANCAL, 2014, p. 12, tradução nossa).

Em 2014, Denkmayr *et al.* publicaram um trabalho no qual dizem ter realizado experimentalmente um “Gato de Cheshire quântico” [3]. Enquanto com Aharonov *et al.* em [1] a proposta é feita para fótons e a propriedade usada a sua polarização, em [3] o experimento é implementado com nêutrons e seu momento magnético. As conclusões apresentadas são do mesmo tipo que em [1]:

“Os resultados experimentais sugerem que o sistema se comporta como se os nêutrons seguissem por um caminho, enquanto seus momentos magnéticos vão pelo outro.”⁵ (DENKMAYR *et al.*, 2014, p. 2, tradução nossa).

Nesse capítulo vamos apresentar os argumentos usados por Aharonov *et al.* na proposição teórica do Gato de Cheshire quântico [1] e por Denkmayr *et al.* na realização experimental [3]

¹“In this paper we present a quantum Cheshire Cat. In a pre- and post-selected experiment we find the Cat in one place, and its grin in another. The Cat is a photon, while the grin is its circular polarization.” (ref. [1], *abstract*).

²“[...] as we will show here, in the curious way of quantum mechanics, photon polarization may exist where there is no photon at all.” (ref. [1], p. 2).

³“The magnetic moment takes one arm of the interferometer but the neutron itself takes the other arm!” (ref. [14], p. 253).

⁴“The polarization has then been effectively ‘disembodied’ from the photon travelling in one arm of the interferometer [...]” (ref. [4], p. 12).

⁵“The experimental results suggest that the system behaves as if the neutrons go through one beam path, while their magnetic moment travels along the other.” (ref. [3], p. 2).

que os levaram a concluir que é possível separar uma partícula de uma de suas propriedades intrínsecas. Iremos reproduzir e detalhar os respectivos desenvolvimentos sem questionar a sua interpretação. As sugestões de interpretação que fazemos para os resultados divergem de ambos os trabalhos e serão apresentadas no capítulo seguinte.

3.1 Proposição teórica de Aharonov *et al.*

O setup usado na proposição teórica de Aharonov *et al.* [1] tem a intenção de pré-selecionar um fóton no estado

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|I\rangle + i|II\rangle) |H\rangle \quad (3.1)$$

e pós-selecioná-lo no estado

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|I\rangle|V\rangle + |II\rangle|H\rangle), \quad (3.2)$$

onde $|I\rangle$ e $|II\rangle$ são estados espaciais do fóton representando sua presença em cada um dos respectivos braços I e II de um interferômetro, e $|H\rangle$ e $|V\rangle$ são estados de polarização do fóton representando as polarizações horizontal e vertical respectivamente.

Dados os estados de pré- e pós-seleção, as perguntas que se deseja responder são: (a) em qual braço o fóton se encontra entre a pré- e a pós-seleção? e (b) qual o valor da sua polarização circular em cada braço entre a pré- e a pós-seleção?

3.1.1 Descrição do setup

Iremos descrever detalhadamente como se pode fazer a pré- e pós-seleção nesses estados, a partir do interferômetro da fig. 3.1(a), que é um interferômetro de Mach-Zehnder adaptado para possibilitar a pós-seleção desejada. Para isso, vamos representar os caminhos pelos estados indicados na fig. 3.1(b).

A fim de obter esses estados, começamos com um fóton com polarização horizontal vindo pelo que seria a extensão do braço I (estado $|I\rangle|H\rangle$). Em seguida, o fóton encontra um divisor de feixes BS_1 , cujo operador de evolução é

$$U_{BS_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|I\rangle\langle I| + |II\rangle\langle II| + i(|I\rangle\langle II| + |II\rangle\langle I|)], \quad (3.3)$$

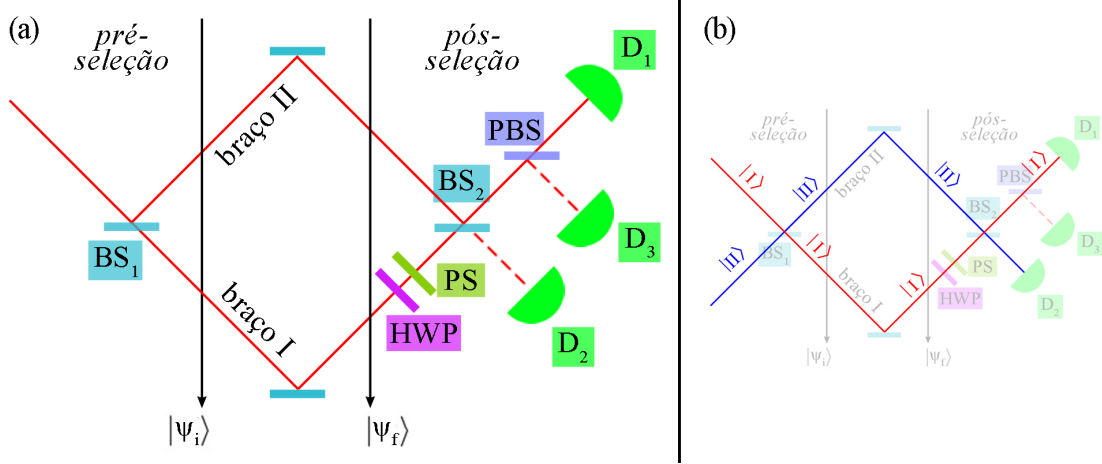


Figura 3.1: (a) Interferômetro da proposição teórica de Aharonov *et al.*. (b) Representação dos estados de presença do fóton ao longo do setup.

e portanto temos já o estado de pré-seleção

$$U_{BS1}|I\rangle|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|I\rangle + i|II\rangle) |H\rangle = |\psi_i\rangle. \quad (3.4)$$

Fazer a pós-seleção em $|\psi_f\rangle$ significa que evoluiremos esse estado de forma que ele tenha probabilidade 1 de clicar em um dado detector, enquanto qualquer estado ortogonal a ele tenha probabilidade 0 de clicar nesse mesmo detector. Portanto, partindo de $|\psi_f\rangle = (|I\rangle|V\rangle + |II\rangle|H\rangle)/\sqrt{2}$ (eq. (3.2)), serão colocados dispositivos que façam com que as exigências de probabilidades de detecção sejam cumpridas por um detector D₁. Para isso, precisamos que as duas componentes $|I\rangle|V\rangle$ e $|II\rangle|H\rangle$ interfiram de forma a sair por uma mesma saída do interferômetro, em direção a um único detector. A primeira coisa a se fazer é colocar uma placa de meia-onda (HWP na fig. 3.1(a)) que inverte polarizações H e V no braço I , pois polarizações ortogonais não podem interferir. Uma placa de quarto-de-onda pode ser descrita, numa determinada base de polarização linear, pela matriz [32]

$$U_{QWP} = e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

donde concluímos que a placa de meia-onda deve ser

$$U_{HWP} = U_{QWP}^2 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Ao girar⁶ essa placa de $\pi/4$, fica claro que temos o efeito desejado de inversão de polarizações

⁶A matriz de rotação B que gira uma matriz A de um ângulo θ (ou correspondentemente gira a base em

lineares

$$U'_{HWP} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Se compensamos a fase i adquirida⁷, podemos então escrever o operador de evolução da placa de meia-onda HWP

$$U_{HWP} = |H\rangle\langle V| + |V\rangle\langle H|, \quad (3.8)$$

e temos

$$U_{HWP}^{(I)}|\psi_f\rangle = U_{HWP}^{(I)} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|I\rangle|V\rangle + |II\rangle|H\rangle) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (|I\rangle + |II\rangle) |H\rangle. \quad (3.9)$$

O índice sobrescrito (I) indica que essa matriz só age no sub-espço do braço $|I\rangle$ ⁸. Colocamos um defasador (PS na fig. 3.1(a)) após HWP para controlar a intensidade das saídas do interferômetro, cujo efeito no estado é colocar uma fase θ no braço I :

$$U_{PS}^{(I)}U_{HWP}^{(I)}|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\theta}|I\rangle + |II\rangle \right) |H\rangle. \quad (3.10)$$

A saída do interferômetro é, portanto, para $U_{BS2} = U_{BS1}$, de (3.3),

$$U_{BS2}U_{PS}^{(I)}U_{HWP}^{(I)}|\psi_f\rangle = \frac{1}{2} \left[(e^{i\theta} + i)|I\rangle + (ie^{i\theta} + 1)|II\rangle \right] |H\rangle. \quad (3.11)$$

Se escolhermos $\theta = \pi/2$, então temos um estado que só pode emergir da saída em direção ao detector D_1 da fig. 3.1(a): $U_{BS2}U_{PS}^{(I)}U_{HWP}^{(I)}|\psi_f\rangle = i|I\rangle|H\rangle$. Precisamos excluir, contudo, a possibilidade de algum estado ortogonal a $|\psi_f\rangle = (|I\rangle|V\rangle + |II\rangle|H\rangle)/\sqrt{2}$ (eq. (3.2)) clicar nesse detector. Partimos de um estado genérico

$$|\psi\rangle = a|I\rangle|V\rangle + b|I\rangle|H\rangle + c|II\rangle|V\rangle + d|II\rangle|H\rangle, \quad (3.12)$$

com a, b, c, d complexos tais que $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$. Como $\langle\psi_f|\psi\rangle = (a + d)/\sqrt{2}$, então $d = -a$ é a condição mínima para que um estado seja ortogonal a $|\psi_f\rangle$. Portanto

$$|\psi_\perp\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}} (|I\rangle|V\rangle - |II\rangle|H\rangle) + b|I\rangle|H\rangle + c|II\rangle|V\rangle \quad (3.13)$$

que está representada de um ângulo $-\theta$) é $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. A matriz resultante A' é $A' = BAB^t$ [39].

⁷Poderíamos deixar a compensação da fase para o defasador PS, mas como queremos seguir a descrição da ref. [1], vamos usar as mesmas evoluções para os dispositivos do interferômetro.

⁸Mais precisamente, esse operador é $U_{HWP}^{(I)} = U_{HWP} \otimes |I\rangle\langle I| + I_\sigma \otimes |II\rangle\langle II|$, onde $I_\sigma = |H\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V|$ é o operador identidade de polarização.

representa qualquer estado ortogonal a $|\psi_f\rangle$, onde $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$. Vemos que esse estado não tem amplitude nula na saída em direção ao detector D_1 (componente $|I\rangle$) se $b + c \neq 0$,

$$U_{BS2}U_{PS}^{(I)}U_{HWP}^{(I)}|\psi_\perp\rangle = -|II\rangle \left[a|H\rangle + \frac{(b-c)}{\sqrt{2}}|V\rangle \right] + i\frac{(b+c)}{\sqrt{2}}|I\rangle|V\rangle, \quad (3.14)$$

mas nessa saída toda a luz é polarizada verticalmente. Assim, com um divisor de feixes polarizado (PBS na fig. 3.1(a)), que só transmite luz com polarização horizontal e sempre reflete luz polarizada verticalmente, evitamos que esse estado seja detectado em D_1 . Logo, como o estado $|\psi_f\rangle$ sempre é detectado em D_1 e qualquer estado ortogonal a ele nunca é detectado em D_1 , selecionar somente as contagens desse detector significa fazer a pós-seleção no estado $|\psi_f\rangle$.

3.1.2 Encontrando os valores fracos

Queremos saber onde o fóton se encontra e qual a sua polarização em cada braço entre a pré- e pós-seleção. A primeira análise feita na ref. [1] é baseada em medições projetivas entre a pré- e pós-seleção. Apesar de já apresentarem o Gato de Cheshire quântico nesse regime, medições projetivas alteram o estado medido e, quando se quer medir as duas grandezas simultaneamente, o efeito some e ficamos “tentados a concluir que o paradoxo não passa de uma ilusão de ótica”⁹ (AHARONOV *et al.*, 2013, p. 4, tradução nossa). Assim, é proposto o uso do processo de medição fraca, cuja perturbação é pequena o suficiente para que seja possível encontrar simultaneamente os valores fracos para a presença do fóton e sua polarização em cada braço.

Os operadores que medem a presença do fóton são os projetores de cada braço:

$$\Pi_I = |I\rangle\langle I|, \quad \Pi_{II} = |II\rangle\langle II|. \quad (3.15)$$

O operador de polarização circular equivale ao operador de momento angular intrínseco para o fóton, cujos autovetores são $|\pm\rangle = (|H\rangle \pm i|V\rangle)/\sqrt{2}$, e é escrito como

$$\sigma_z = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| = i(|V\rangle\langle H| - |H\rangle\langle V|), \quad (3.16)$$

de forma que a polarização circular em cada braço é, naturalmente,

$$\sigma_{z,I} = \Pi_I\sigma_z, \quad \sigma_{z,II} = \Pi_{II}\sigma_z. \quad (3.17)$$

⁹“[...] one is tempted to conclude that the paradox is nothing other than an optical illusion.” (ref. [1], p. 4)

Qualquer sistema quântico com as propriedades exigidas na seção 2.2 pode ser usado como um ponteiro que indicará os valores fracos para esses observáveis. Aharonov *et al.* [1] sugerem que o perfil transversal da distribuição espacial de intensidade do feixe de fótons (equivalente à densidade espacial de energia de cada fóton) seja o sistema usado na medição, de forma similar à seção 2.3. Na seção 4.1 descreveremos exatamente como gerar os deslocamentos que medem propriamente os observáveis desejados, de acordo com interações do tipo $\exp(-\frac{i}{\hbar}gA \otimes P)$ (seç. 2.1.2). Para a presente discussão, é necessário apenas termos em mente que podemos medir simultaneamente dois valores fracos independentemente se cada um deles gerar um deslocamento em eixos ortogonais x ou y de um feixe que propaga na direção z .

Partindo do princípio de que os valores fracos de Π_I , Π_{II} , $\sigma_{z,I}$ e $\sigma_{z,II}$ podem ser obtidos em um ponteiro (eq. (2.17)), os valores apontados por ele podem ser calculados a partir da eq. (2.16). Com $I_\sigma = |H\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V|$ sendo o operador identidade para a polarização do fóton, vemos que

$$\begin{aligned} \langle \Pi_I \rangle_w &= \frac{\langle \psi_f | (|I\rangle\langle I| \otimes I_\sigma) | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \\ &= \frac{(\langle I| \langle V| + \langle II| \langle H|) (|I\rangle\langle I| \otimes I_\sigma) (|I\rangle + i|II\rangle) \otimes |H\rangle}{(\langle I| \langle V| + \langle II| \langle H|) (|I\rangle\langle H| + i|II\rangle\langle H|)} \\ &= \frac{\langle V| I_\sigma | H \rangle}{i} = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{z,I} \rangle_w &= \frac{\langle \psi_f | [|I\rangle\langle I| \otimes i(|V\rangle\langle H| - |H\rangle\langle V|)] | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \\ &= \frac{(\langle I| \langle V| + \langle II| \langle H|) [|I\rangle\langle I| \otimes i(|V\rangle\langle H| - |H\rangle\langle V|)] (|I\rangle + i|II\rangle) \otimes |H\rangle}{(\langle I| \langle V| + \langle II| \langle H|) (|I\rangle\langle H| + i|II\rangle\langle H|)} \\ &= \frac{i \langle V| (|V\rangle\langle H| - |H\rangle\langle V|) | H \rangle}{i} = 1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Analogamente calculamos $\langle \Pi_{II} \rangle_w$ e $\langle \sigma_{z,II} \rangle_w$, terminando com os valores fracos

$$\begin{aligned} \langle \Pi_I \rangle_w &= 0, & \langle \Pi_{II} \rangle_w &= 1 \\ \langle \sigma_{z,I} \rangle_w &= 1, & \langle \sigma_{z,II} \rangle_w &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

A partir desses números, a conclusão apresentada é a seguinte:

“[...] a história contada pelos valores fracos é a de que o fóton está no braço II (uma vez que $\langle \Pi_{II} \rangle_w = 1$ e $\langle \Pi_I \rangle_w = 0$) enquanto o momento angular está no braço I (uma vez que $\langle \sigma_{z,II} \rangle_w = 0$ e $\langle \sigma_{z,I} \rangle_w = 1$).

O ponto crucial é que a princípio todos esses valores se aplicam simultaneamente, uma vez que todas as medições fracas podem ser feitas ao mesmo tempo. No nosso esquema específico podemos somente medir quaisquer dois ao mesmo tempo, por exemplo $\langle \sigma_{z,I} \rangle_w$ e $\langle \Pi_I \rangle_w$, que indicam que há um sorriso e nenhum gato no braço I . Qualquer outro par medido, na verdade, mostrará resultados que serão consistentes com o paradoxo. Encontramos finalmente nosso Gato de Cheshire.”¹⁰ (AHARONOV *et al.*, 2013, p. 6, tradução nossa.)

3.2 Realização experimental de Denkmayr *et al.*

A intenção de Denkmayr *et al.* no trabalho experimental da ref. [3] é encontrar o Gato de Cheshire quântico num interferômetro de nêutrons, onde a propriedade a ser separada da partícula é o momento magnético em uma dada direção.

O nêutron é pré-selecionado no estado

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|I\rangle|x+\rangle + |II\rangle|x-\rangle) \quad (3.21)$$

e pós-selecionado em

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|I\rangle + |II\rangle) |x-\rangle, \quad (3.22)$$

onde $|I\rangle$ e $|II\rangle$ são estados de caminho exatamente como na seção 3.1, mas $|x+\rangle$ e $|x-\rangle$ são autoestados do operador de momento magnético intrínseco na direção x do nêutron, representado pelo operador¹¹ $\sigma_x = |x+\rangle\langle x+| - |x-\rangle\langle x-|$.

Dados os estados de pré- e pós-seleção, o setup pretende responder às perguntas: (a) em qual braço do interferômetro se encontra o nêutron entre a pré- e a pós-seleção? e (b) em qual braço se localiza o seu momento magnético entre a pré- e a pós-seleção?

¹⁰“[...] the story as told by the weak values is that the photon is in the left arm (since $\langle \Pi_L \rangle_w = 1$ and $\langle \Pi_R \rangle_w = 0$), while the angular momentum is in the right arm (since $\langle \sigma_z^{(L)} \rangle_w = 0$ and $\langle \sigma_z^{(R)} \rangle_w = 1$). The crucial point is that in principle all of these values apply simultaneously, since all of the weak measurements can be performed at the same time. In our specific scheme we can only measure any two at the same time, for example $\langle \sigma_z^{(R)} \rangle_w$ and $\langle \Pi_R \rangle_w$, which indicate that there is a grin but no cat in the right arm. Alternatively we can measure any other pair and all results will be consistent with the paradox. We have finally found our Cheshire Cat.” (ref. [1], p. 6). Na tradução a notação foi adaptada para a do presente texto.

¹¹Os operadores σ_j ($j = x, y, z$) são na verdade as matrizes de Pauli (ver complemento A-IV de [10]), e o operador de momento magnético na direção de um vetor unitário arbitrário \mathbf{u} é proporcional a uma combinação linear delas, $S_u = \frac{\hbar}{2} \sigma \cdot \mathbf{u}$. Para manter os autovalores iguais ao momento angular do fóton na seção 3.1, chamaremos de operador de momento magnético na direção j as próprias matrizes σ_j .

3.2.1 Descrição do setup

O setup usado por Denkmayr *et al.* [3] se parece com o proposto por Aharonov *et al.* [1], mas o valor fraco não aparece no deslocamento de um ponteiro, e sim no número de contagens dos detectores. A figura 3.2 esquematiza o setup da montagem experimental, e os nomes dos caminhos serão os mesmos que na figura 3.1(b).

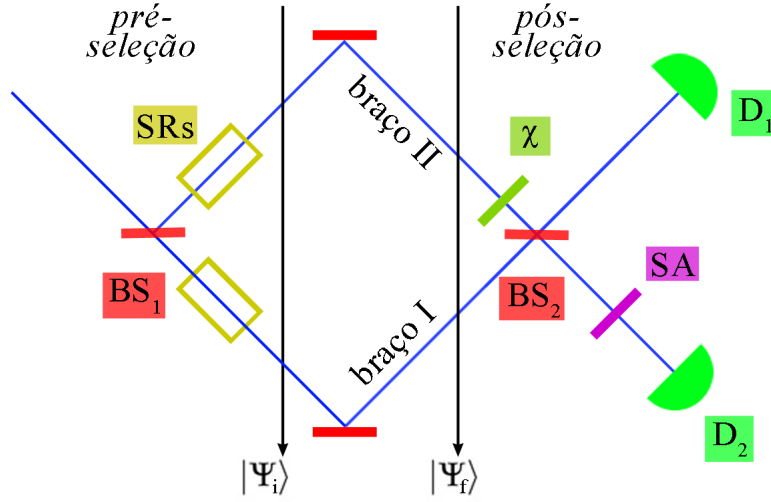


Figura 3.2: Interferômetro da realização experimental de Denkmayr *et al.*.

O nêutron entra no interferômetro pela extensão do braço *I* e com spin positivo na direção *x* (estado $|I\rangle|x+\rangle$). Em seguida encontra um divisor de feixes BS_1 , cujo efeito no estado é ligeiramente diferente do caso dos fótons da seção 3.1:

$$U_{BS1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle\langle I| + |II\rangle\langle II| + |I\rangle\langle II| - |II\rangle\langle I|), \quad (3.23)$$

e portanto temos

$$U_{BS1}|I\rangle|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle + |II\rangle)|x+\rangle. \quad (3.24)$$

Em seguida, giradores de spin SR^{12} deixam o spin no braço *II* no estado $|x-\rangle$, terminando o spin e a localização do nêutron emaranhados, no estado de pré-seleção:

$$U_{SR}U_{BS1}|I\rangle|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle|x+\rangle + |II\rangle|x-\rangle) = |\psi_i\rangle. \quad (3.25)$$

¹²Em [3] chamam-se *spin rotators*, e correspondem a campos magnéticos que podem girar o spin em quantidades controladas.

Assim como na seção 3.1.1, garantir a pós-seleção em $|\psi_f\rangle$ (eq. (3.22)) significa garantir que esse estado tenha probabilidade 1 de clicar em um certo detector, e que qualquer estado ortogonal a ele tenha probabilidade 0 de clicar nesse mesmo detector. Ao passar por um divisor de feixes BS_2 , que gera as saídas do interferômetro, o nêutron que estava no estado $|\psi_f\rangle$ sai do interferômetro somente em direção ao detector D_2 . Vamos escrever a representação do operador de evolução de BS_2 para mostrar esse fato. Ele deve ser escrito como o transposto do operador de BS_1 , pois agora os estados $|I\rangle$ e $|II\rangle$ estão em posições invertidas¹³ (ver fig. 3.1(b)). Temos, logo,

$$U_{BS_2}|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle\langle I| + |II\rangle\langle II| - |I\rangle\langle II| + |II\rangle\langle I|) \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle + |II\rangle)|x-\rangle = |II\rangle|x-\rangle. \quad (3.26)$$

Vamos repetir o raciocínio da seção 3.1.1 para garantir que qualquer estado ortogonal a $|\psi_f\rangle$ tenha probabilidade 0 de clicar em D_2 . Seguindo a mesma estratégia, mostra-se que $\langle\psi_\perp|\psi_f\rangle = 0$ para qualquer estado do tipo

$$|\psi_\perp\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}(|I\rangle - |II\rangle)|x-\rangle + (b|I\rangle + c|II\rangle)|x+\rangle, \quad (3.27)$$

onde $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$. Mas

$$U_{BS_2}|\psi_\perp\rangle = |I\rangle \left[a|x-\rangle + \frac{(b-c)}{\sqrt{2}}|x+\rangle \right] + \frac{(b+c)}{\sqrt{2}}|II\rangle|x+\rangle, \quad (3.28)$$

isto é, para $b+c \neq 0$ esse estado pode gerar contagens no detector D_2 . Analogamente ao caso do fóton, a única parte desse estado que chega em D_2 tem spin positivo na direção x . Por essa razão, um analisador de spin SA que só permite que nêutrons com spin negativo na direção x passem é colocado em frente a D_2 , garantindo que qualquer estado perpendicular a $|\psi_f\rangle$ nunca clique nele. Dessa forma, coletar somente as detecções feitas em D_2 significa pós-selecionar os nêutrons no estado $|\psi_f\rangle$.

3.2.2 Padrões de interferência

Os valores fracos e os efeitos do Gato de Cheshire quântico considerados pelos autores nesse experimento não aparecerão como deslocamentos de um ponteiro, e sim nas diferenças de contagens de um dos detectores. Para se comparar os padrões de interferência, um defasador

¹³Na seção 3.1.1, U_{BS_1} era simétrica e sua transposta era ela própria, tornando tal consideração irrelevante.

é colocado no braço II , que adiciona uma fase $e^{i\chi}$ e leva a pós-seleção a ser feita no estado

$$|\psi'_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\chi/2}|I\rangle + e^{i\chi/2}|II\rangle)|x-\rangle \quad (3.29)$$

no detector D_2 .

Seja uma interação descrita por um operador de evolução U que acontece entre a pré- e a pós-seleção. As probabilidades de detecção em D_2 serão dadas por

$$P = |\langle\psi'_f|U|\psi_i\rangle|^2, \quad (3.30)$$

com $|\psi_i\rangle$ de (3.21) e $|\psi'_f\rangle$ de (3.29).

A interação será usada para se verificar a presença do nêutron em cada um dos braços do interferômetro, assim como o momento magnético também em cada braço, a partir das mudanças nos padrões de interferência. Para a verificação da presença do nêutron, usa-se um absorvedor de partículas em um dos braços ($U_{abs,j}$, j é o braço da interação), e para o momento magnético, coloca-se um campo magnético de direção z em um dos braços ($U_{mag,j}$). O absorvedor tem o efeito de diminuir a amplitude do braço em que atua, e o campo magnético gira o spin do nêutron, isto é, pode transformar uma componente de momento magnético em outra. Detalhes sobre a atuação das interações estão no apêndice A.

Quando não há interação ou só um absorvedor, os estados de momento magnético em cada braço são ortogonais ($U_{abs,j}|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[a|I\rangle|x+\rangle + b|II\rangle|x-\rangle]$), e por isso os padrões $P_{abs,j} = |\langle\psi'_f|U_{abs,j}|\psi_i\rangle|^2$ não devem depender da fase χ (discussão detalhada na seção 4.2). Os padrões encontrados e presentes na ref. [3] estão representados na figura 3.3. Na figura, vemos que só há diminuição da intensidade de detecção em relação ao caso sem absorvedores quando o absorvedor é colocado no braço II . Por essa razão, os autores concluem que os nêutrons que são pós-selecionados em D_2 passam pelo braço II dentro do interferômetro.

Quando a interação é devido ao campo magnético B_z , observam-se oscilações em cada um dos detectores D_1 e D_2 . Os padrões de detecção obtidos e presentes na ref. [3] estão representados na figura 3.4.

Vemos que, para os nêutrons detectados em D_1 – onde não há seleção de componente de spin –, não importa em qual braço se aplica o campo magnético, em ambos os casos aparece um padrão oscilatório perceptível. Já para as detecções em D_2 – onde somente a componente $|x-\rangle$ de spin é selecionada –, somente se o campo B_z é aplicado no braço I o padrão oscilatório

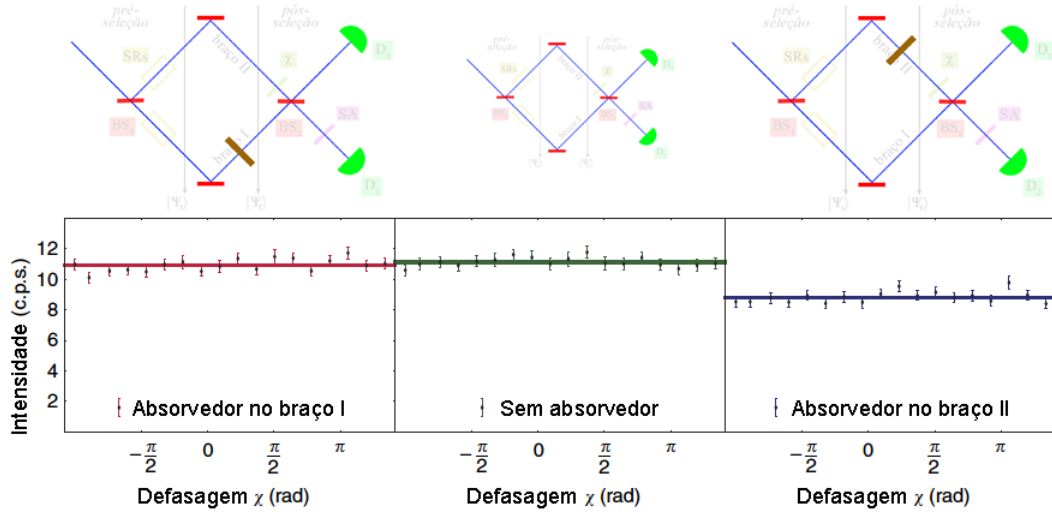


Figura 3.3: Detecções do experimento de Denkmayr *et al.* [3] em D_2 com absorvedores em cada caminho. Gráficos retirados da fig. 3 da ref. [3] (tradução nossa).

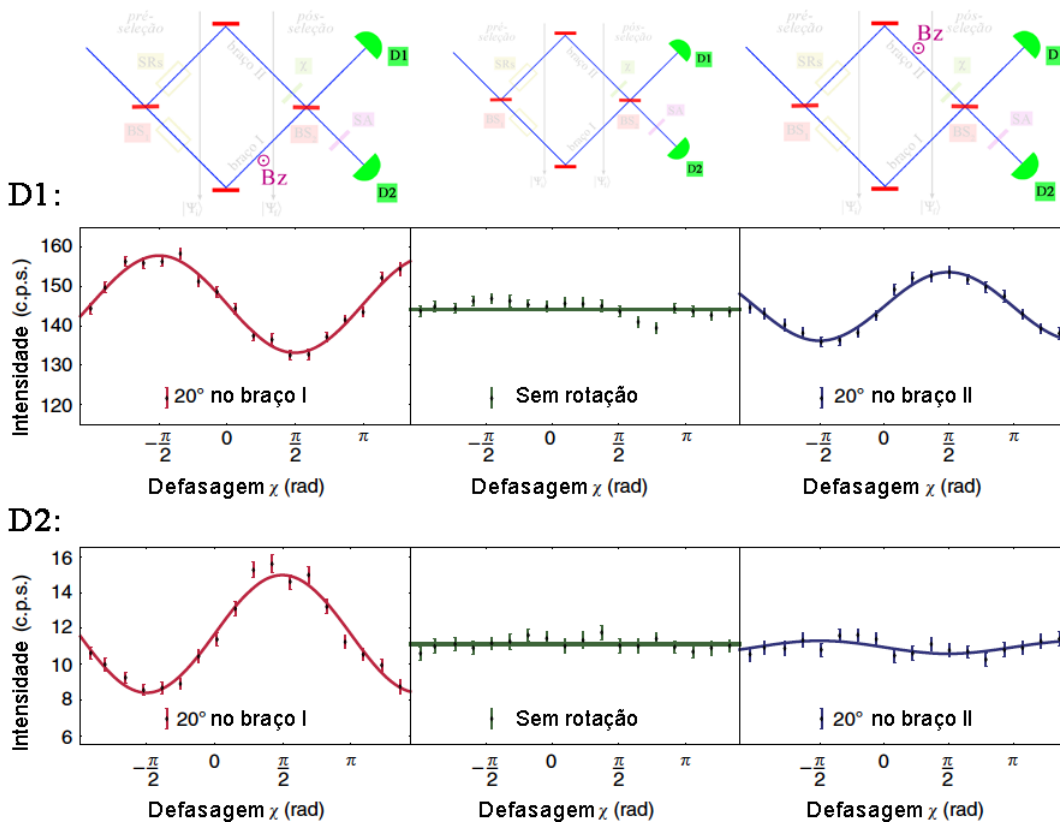


Figura 3.4: Detecções do experimento de Denkmayr *et al.* [3] em D_2 com o campo magnético B_z aplicado em cada caminho. Gráficos retirados da fig. 4 da ref. [3] (tradução nossa).

aparece. Como essa oscilação é resultado da interação entre o campo e o momento magnético do nêutron (formalizada na eq. (A.8)), os autores concluem que o momento magnético dos

nêutrons que foram pós-selecionados em D_2 passa pelo interferômetro no braço I . Os autores também encontram valores fracos para os observáveis em acordo com os valores fracos previstos (eqs. (A.6), (A.13): $\langle \Pi_I \rangle_w = 0$, $\langle \Pi_{II} \rangle_w = 1$, $|\langle \sigma_z \Pi_I \rangle_w|^2 = 1$, $|\langle \sigma_z \Pi_{II} \rangle_w|^2 = 0$) e encontrados (eqs. (A.7), (A.14): $\langle \Pi_I \rangle_w = 0.14(4)$, $\langle \Pi_{II} \rangle_w = 0.96(6)$, $|\langle \sigma_z \Pi_I \rangle_w|^2 = 1.07(25)$, $|\langle \sigma_z \Pi_{II} \rangle_w|^2 = 0.02(24)$). A descrição de como esses valores são encontrados não são importantes na nossa análise, mas está apresentada no apêndice A. Os autores escrevem na discussão dos resultados:

“Na média, uma interação fraca envolvendo um acoplamento à função de onda espacial dos nêutrons não tem efeito sobre o caminho I , enquanto um acoplamento fraco envolvendo a função de onda de spin do nêutron tem consequências perceptíveis, em média, somente quando o acoplamento se dá no caminho I . Consequentemente, qualquer sistema de prova que interaja com o sistema do Gato de Cheshire de forma fraca o suficiente será na média afetado como se o nêutron e seu spin estivessem espacialmente separados. A proposta desse artigo é relatar a observação experimental do Gato de Cheshire quântico que foi recentemente previsto teoricamente.”¹⁴ (DENKMAYR *et al.*, 2014, p. 5, tradução nossa).

¹⁴“A weak interaction involving a coupling to the neutrons spatial wavefunction has on average no effect along path I , while a weak coupling involving the neutron spin wavefunction has observational consequences on average only when the coupling takes place along path I . Consequently, any probe system that interacts with the Cheshire Cat system weakly enough will on average be affected as if the neutron and its spin are spatially separated. The purpose of this article is to report an experimental observation of the quantum Cheshire Cat which was recently predicted theoretically.” (ref. [3], p. 5).

Capítulo 4

O Gato de Cheshire quântico como interferência

Nesse capítulo vamos apresentar os resultados de Aharonov *et al.* [1] e Denkmayr *et al.* [3] como consequência de fenômenos de interferência quântica. Com essa abordagem, evitamos atribuir realidade ao valor fraco de um observável, no sentido de que esse número não significa necessariamente o valor real e intrínseco da grandeza associada a ele. Apesar de ambos os resultados serem decorrentes de interferência, o primeiro é observado na forma da função de onda do ponteiro usado na medição fraca, e o segundo na diferença de contagens da saída do interferômetro. Interpretações enfatizando o papel da interferência para explicar o deslocamento do ponteiro foram feitas logo após o trabalho introdutório de medição fraca de Aharonov, Albert e Vaidman [2, 6, 7, 8], como discutido na seção 2.4, e mais recentemente na discussão de outros trabalhos sobre o assunto [24, 25, 40, 41, 42, 43]. No caso das contagens na saída do interferômetro, caímos em problemas de interpretação a respeito da realidade de partículas e suas propriedades no interior de interferômetros. Evitamos esses problemas simplesmente fazendo os cálculos de probabilidades de detecção dos nêutrons nas saídas do

interferômetro, sem precisar tirar conclusões paradoxais dos resultados.

Um artigo com os resultados originais do trabalho apresentado nesse capítulo foi submetido para publicação [9], em colaboração com Marcelo França, Carlos Monken e Pablo Saldanha.

4.1 Proposição teórica de Aharonov *et al.*

Na seção 2.5 discutimos por que interpretar o fato de um ponteiro apontar o valor fraco num procedimento de medição fraca é um fenômeno de interferência, e fizemos isso para o ponteiro sendo o perfil transversal de intensidade de um fóton. No experimento proposto por Aharonov *et al.* [1], ilustrado na fig. 3.1, esse é exatamente o caso, e nos resta simplesmente mostrar como medir os observáveis Π_I , Π_{II} , $\sigma_z\Pi_I$ e $\sigma_z\Pi_{II}$ nesse setup, e como as componentes da função de onda interferem para se obter os valores fracos calculados.

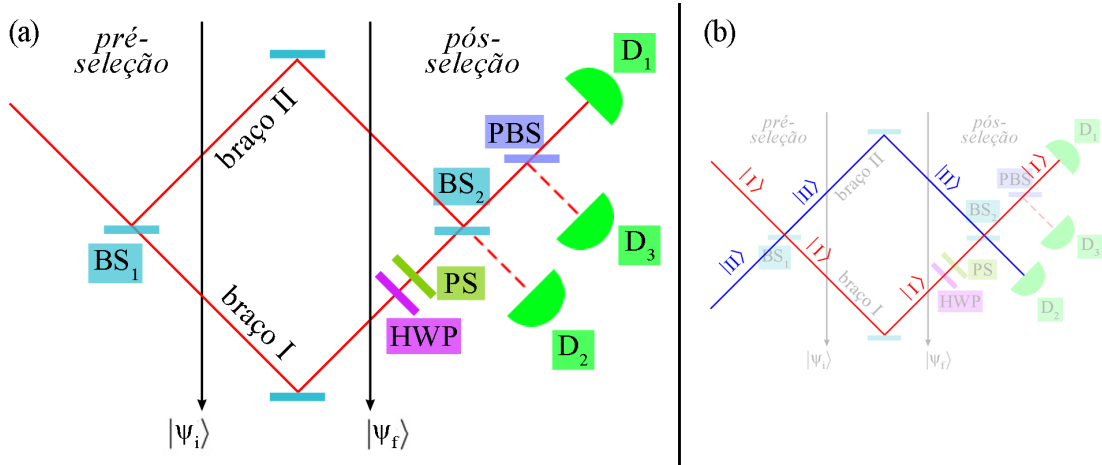


Figura 3.1: (a) Interferômetro da proposição teórica de Aharonov *et al.*. (b) Representação dos estados de presença do fóton ao longo do setup. (repetida da p. 35)

Iremos aqui, portanto, usar o mesmo formalismo apresentado na seção 2.5.1, mas agora a parte $\psi_y(y)$ da eq. (2.35) também será usada como ponteiro e não será incorporada em K na função de onda de fóton da eq. (2.36). A função de onda que descreve um fóton com polarização genérica ($a|H\rangle + b|V\rangle$) e perfil transversal $\psi_x(x)\psi_y(y) \equiv F(x, y)/K$ é, logo,

$$|\mathbf{F}(x, y)\rangle = F(x, y)(a|H\rangle + b|V\rangle). \quad (4.1)$$

4.1.1 Medição dos observáveis

Para medir os observáveis Π_I e Π_{II} , isto é, a presença do fóton em cada braço do interferômetro, basta colocar uma placa de vidro em um dos braços, que desloca o feixe de fótons numa direção (y , por exemplo) de uma quantidade g (ver fig. 4.2). Isto é, para caminhos j, k tais que $k \neq j$,

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}g\Pi_j \otimes P_y\right)F(x, y)[a|j\rangle + b|k\rangle] = aF(x, y - g)|j\rangle + bF(x, y)|k\rangle. \quad (4.2)$$

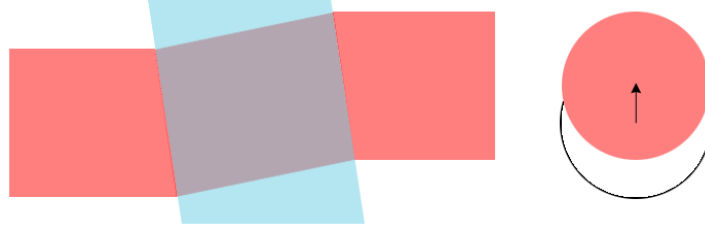


Figura 4.2: Esquema da interação do fóton com a placa de vidro.

Para medir $\sigma_z\Pi_I$ e $\sigma_z\Pi_{II}$, usaremos um cristal birrefringente como na seção 2.3. Contudo, queremos medir $\sigma_z = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|$, e não $S = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|$. Para isso, vamos converter os estados de polarização $|+\rangle$ em $|H\rangle$ e $|-\rangle$ em $|V\rangle$ para realizar a medição, já que possuem os mesmos autovalores, e depois converter de volta ao original. Fazemos isso com uma placa de quarto de onda (QWP). Esse tipo de placa é descrito pela matriz [32]

$$U_{QWP} = e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

numa base de polarização linear $(\alpha \ \beta)^t$ equivalente a $\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$, e transforma polarização circular $|\pm\rangle = (|H\rangle \pm i|V\rangle)/\sqrt{2}$ em polarização linear a 45° dessa base $(|H\rangle \mp |V\rangle)/\sqrt{2}$, a menos de uma fase global. Mas como estados de polarização circular são invariantes por rotação, a menos de uma fase global,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = e^{\mp i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

se girarmos a placa a -45° teremos

$$U'_{QWP} \equiv \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

donde pode-se calcular que

$$U'_{QWP}|+\rangle = i|H\rangle, \text{ e} \quad (4.6)$$

$$U'_{QWP}|-\rangle = |V\rangle. \quad (4.7)$$

Para um estado de perfil e polarização arbitrários, logo,

$$U'_{QWP}F(x, y)(a|+\rangle + b|-\rangle) = F(x, y)[ia|H\rangle + b|V\rangle] \quad (4.8)$$

Após a placa e o cristal, o estado do fóton é, logo,

$$e^{-\frac{i}{\hbar}gS \otimes P_x} U'_{QWP}F(x, y)(a|+\rangle + b|-\rangle) = iaF(x - g, y)|H\rangle + bF(x + g, y)|V\rangle. \quad (4.9)$$

Se após isso o fóton atravessa uma placa de quarto de onda girada a $+45^\circ$

$$U''_{QWP} \equiv \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ -1+i & 1+i \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

tal que

$$U''_{QWP}|H\rangle = i|+\rangle, \text{ e} \quad (4.11)$$

$$U''_{QWP}|V\rangle = -|-\rangle, \quad (4.12)$$

teremos

$$U''_{QWP}[e^{-\frac{i}{\hbar}gS \otimes P_x} U'_{QWP}F(x, y)(a|+\rangle + b|-\rangle)] = -aF(x - g, y)|+\rangle - bF(x + g, y)|-\rangle. \quad (4.13)$$

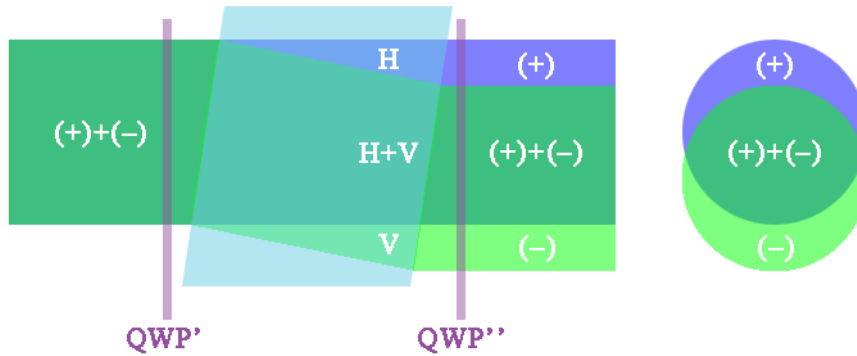


Figura 4.3: Esquema da interação do fóton com o cristal birrefringente e as placas de quarto de onda.

Essa operação como um todo, representada na fig. 4.3, adicionou uma fase $e^{i\pi}$ ao estado, mas deve ser feita em apenas um dos braços (medimos na verdade $\sigma_z \Pi_j$, e não somente σ_z). Assim, basta que ao fim de tudo se coloque um defasador de $e^{i\pi}$ em qualquer um dos braços para que fase adquirida na interação com o cristal e as placas não altere o resultado da pós-seleção. Iremos chamar, para simplificar, $U_{\sigma,j,x} \equiv e^{i\pi} U''_{QWP} [e^{-\frac{i}{\hbar} g S \otimes P_x}] U'_{QWP}$, onde j é o braço onde é feita a interação e x a direção do deslocamento.

4.1.2 Descrição do ponteiro

Podemos finalmente descrever a propagação do fóton no interferômetro incluindo o ponteiro, isto é, a evolução da função de onda que gera o seu perfil transversal de distribuição de energia. Os estados de pré- (3.1) e pós-seleção (3.2) são $|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|I\rangle + i|II\rangle) |H\rangle$ e $|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|I\rangle |V\rangle + |II\rangle |H\rangle)$, respectivamente. Isso quer dizer que preparamos um fóton, incluindo seu perfil transversal, no estado $|\mathbf{F}_i(x, y)\rangle = F(x, y) |\psi_i\rangle$, e a pós-seleção só é feita nos graus de liberdade de caminho e polarização. Terminaremos, portanto, após as devidas interações, apenas com uma função de onda do perfil transversal do fóton, como na eq. (2.11), $\langle \psi_f | U(g, A, P) | \Psi_i \rangle = \sum_j c_j \langle \psi_f | a_j \rangle \phi(x - g a_j)$, que é uma superposição de funções do ponteiro.

Como dito na seção 3.1.2, podemos medir pares dos observáveis de presença e polarização circular do fóton em cada braço, pois temos duas direções independentes x e y do perfil transversal da função de onda para usar como ponteiros. Escolhemos Π_{II} e $\sigma_z \Pi_I$, pois sabemos que ambos possuem valor fraco unitário, levando a princípio à conclusão estranha de o fóton estar presente no braço II e sua polarização circular no braço I . Portanto, a placa de vidro será colocada no braço II , e a combinação de placas de onda e cristal birrefringente no braço I . Escolhemos que Π_{II} está associado a um deslocamento na direção y e $\sigma_z \Pi_I$ em x . Após a interação, teremos o fóton no estado

$$\begin{aligned}
|\mathbf{F}'(x, y)\rangle &\equiv e^{-\frac{i}{\hbar} \Pi_{II} \otimes P_y} U_{\sigma, I, x} |\mathbf{F}_i(x, y)\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \Pi_{II} \otimes P_y} U_{\sigma, I, x} F(x, y) (|I\rangle + i|II\rangle) |H\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \Pi_{II} \otimes P_y} U_{\sigma, I, x} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} F(x, y) |I\rangle |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} F(x, y) |I\rangle |-\rangle + i F(x, y) |II\rangle |H\rangle \right] \\
&= \frac{1}{2} F(x - g, y) |I\rangle |+\rangle + \frac{1}{2} F(x + g, y) |I\rangle |-\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} F(x, y - g) |II\rangle |H\rangle. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Lembrando que $|\mathbf{F}'(x, y)\rangle$ não está necessariamente normalizada, mas isso não nos importa,

pois estamos apenas interessados na sua forma e nas amplitudes relativas entre suas componentes. Na figura 4.4 representamos esquematicamente as componentes da função de onda que vêm pelo braço I e II . No braço I , a interação gerou um deslocamento $+g$ na componente $|+\rangle$ (azul) e $-g$ na componente $|-\rangle$ (verde) no eixo x ; no braço II , ocorreu o deslocamento de $+g$ no eixo y (eq. (4.14)).

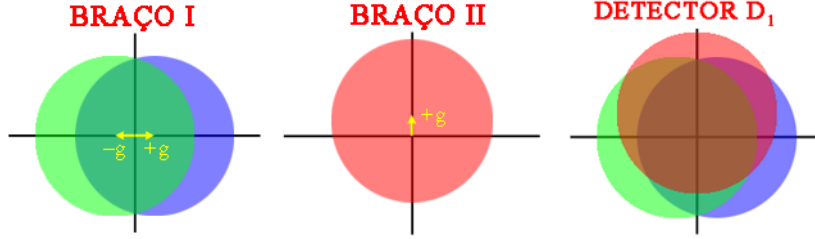


Figura 4.4: Representação esquemática do perfil transversal das componentes $|I\rangle|+\rangle$ (azul), $|I\rangle|-\rangle$ (verde) e $|II\rangle|H\rangle$ (vermelho) após a interação. O detector D_1 recebe as três componentes, com fases dependentes da pós-seleção.

Devemos fazer a pós-seleção de $|\psi_f\rangle$ em $|\mathbf{F}'(x, y)\rangle$, isto é, contar somente as detecções em D_1 . Teremos, assim, a função de onda não-normalizada

$$\begin{aligned}
& \langle \psi_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \Pi_{II} \otimes P_y} U_{\sigma, I, x} | \mathbf{F}_i(x, y) \rangle \\
&= \frac{(\langle I | \langle V | + \langle II | \langle H |)}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} F(x - g, y) |I\rangle |+\rangle + \frac{1}{2} F(x + g, y) |I\rangle |-\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} F(x, y - g) |II\rangle |H\rangle \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} F(x - g, y) \langle V | + \rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}} F(x + g, y) \langle V | - \rangle + \frac{i}{2} F(x, y - g) \langle H | H \rangle \\
&= \frac{i}{4} [F(x - g, y) - F(x + g, y) + 2F(x, y - g)] \tag{4.15}
\end{aligned}$$

chegando em D_1 (fig. 4.4).

A pós-seleção, assim como na seção 2.5, modifica as fases e tamanhos das componentes do ponteiro de acordo com a eq. (2.11) $\langle \psi_f | U(g, A, P) | \Psi_i \rangle = \sum_j \langle \psi_f | a_j \rangle \langle a_j | \psi_i \rangle \phi(x - ga_j)$. No nosso caso,

$$\langle \psi_f | (|I\rangle|+\rangle \langle I|\langle +|) | \psi_i \rangle F(x - g, y) = \frac{i}{4} F(x - g, y), \tag{4.16}$$

$$\langle \psi_f | (|I\rangle|-\rangle \langle I|\langle -|) | \psi_i \rangle F(x + g, y) = -\frac{i}{4} F(x + g, y), \tag{4.17}$$

$$\langle \psi_f | (|II\rangle|H\rangle \langle II|\langle H|) | \psi_i \rangle F(x, y - g) = \frac{i}{2} F(x, y - g). \tag{4.18}$$

Os dois primeiros termos do lado direito da eq. (4.15) $[F(x - g, y) - F(x + g, y)]$ são resultado da pós-seleção sobre a parte da função de onda que veio do braço I , e o último

termo $2F(x, y - g)$ do braço *II*. Se o detector é sensível à posição de detecção do fóton, após muitas contagens irá revelar o perfil de intensidade resultado da interferência

$$\begin{aligned}
I(x, y) &= |F(x - g, y) - F(x + g, y) + 2F(x, y - g)|^2 \\
&= |F(x - g, y)|^2 + |F(x + g, y)|^2 + 4|F(x, y - g)|^2 \\
&\quad - 2\text{Re}[F(x - g, y)F(x + g, y)] + 4\text{Re}[F(x - g, y)F(x, y - g)] \\
&\quad - 4\text{Re}[F(x + g, y)F(x, y - g)].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Os três primeiros termos do lado direito da eq. (4.19) são as intensidades de cada componente separadamente, enquanto os outros são os termos de interferência, resultado da superposição entre elas. No caso de a medição ser projetiva, as superposições são pequenas comparadas à intensidade dos três primeiros termos, e isso ocorre para g maior que a dispersão de $F(x, y)$. A medição fraca acontece quando g é pequeno e a superposição é significativa para que os *termos de interferência* sejam relevantes no padrão detectado. Fazendo as aproximações $F(x \pm g, y) \approx F(x, y) \pm g \frac{\partial F}{\partial x}$ e $F(x, y - g) \approx F(x, y) - g \frac{\partial F}{\partial y}$, válidas para g muito menor que a dispersão de $F(x, y)$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \psi_f | \mathbf{F}'(x, y) \rangle &= F(x - g, y) - F(x + g, y) + 2F(x, y - g) \\
&\approx F(x, y) - g \frac{\partial F}{\partial x} - F(x, y) - g \frac{\partial F}{\partial x} + 2F(x, y) - 2g \frac{\partial F}{\partial y} \\
&= 2 \left[F(x, y) - g \frac{\partial F}{\partial x} - g \frac{\partial F}{\partial y} \right] \approx 2F(x - g, y - g).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Os termos de interferência, logo, fazem com que o padrão detectado tenha a forma

$I(x, y) \approx |2F(x - g, y - g)|^2$. Como medimos $\sigma_z \Pi_I$ em x e Π_{II} em y , o ponteiro aponta realmente $\langle \sigma_z \Pi_I \rangle_w = 1$ e $\langle \Pi_{II} \rangle_w = 1$ devido à interferência.

Para compreendermos melhor esse efeito, vamos considerar uma distribuição Gaussiana do feixe $F(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/W^2}$. Já vimos na seção 2.5 que o deslocamento $g = 0.1W$ é suficientemente pequeno para que $F(x - g \langle \sigma_z \Pi_I \rangle_w, y - g \langle \Pi_{II} \rangle_w)$ seja uma descrição aproximadamente correta do estado final do ponteiro. Na figura 4.5 representamos as componentes após a pós-seleção, isto é, com as devidas fases e amplitudes. A componente associada ao braço *II* (fig. 4.5(a)) é simplesmente a função de onda do ponteiro apontando $+g$ em y . A componente associada ao braço *I* (fig. 4.5(b)), entretanto, é a soma de duas funções deslocadas da mesma quantidade em direções opostas e com fases inversas, assim como na fig. 2.7(c). Os máximos do módulo dessa função são bem pequenos (~ 0.15 em comparação a

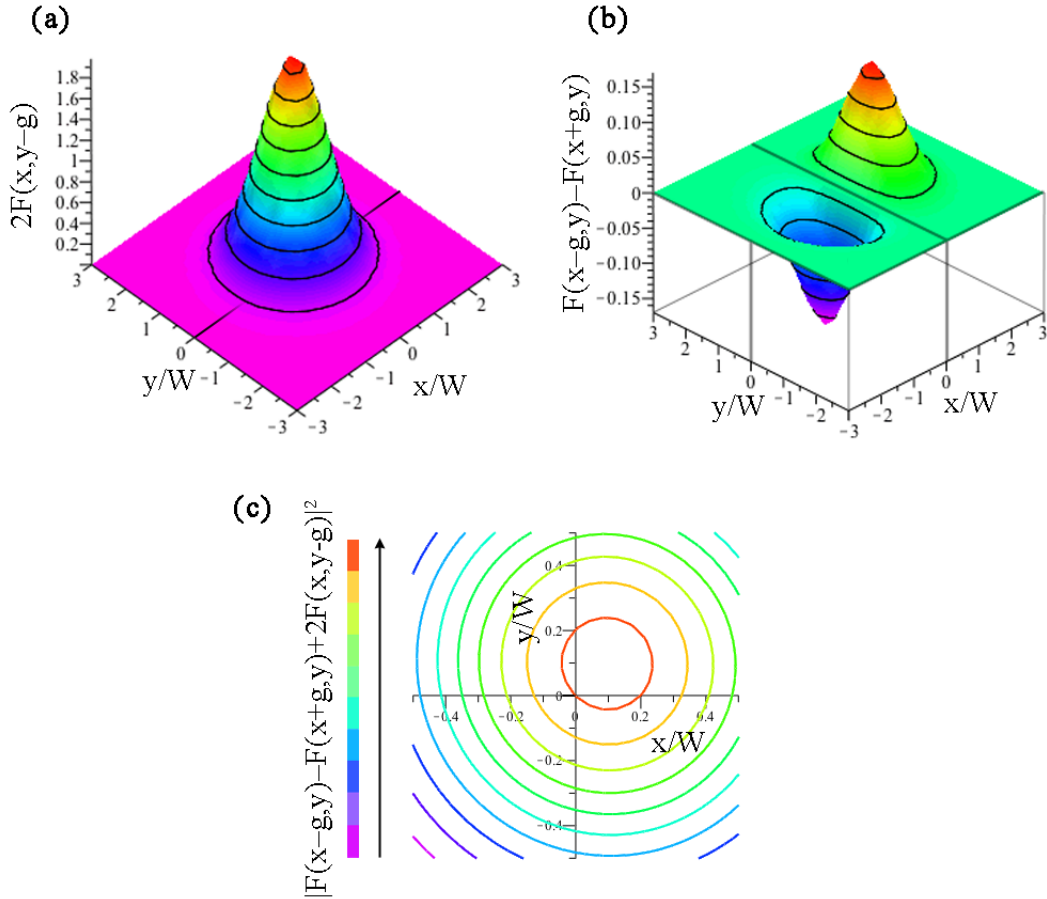


Figura 4.5: Para $F(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/W^2}$ e $g = 0.1W$, representações de (a) $2F(x, y - g)$, (b) $F(x - g, y) - F(x + g, y)$ e (c) $|F(x - g, y) - F(x + g, y) + 2F(x, y - g)|^2$.

~ 1.8 de $2F(x, y - g)$, e quando superposto a $2F(x, y - g)$, $[F(x - g, y) - F(x + g, y)]$ adiciona amplitude na porção positiva de x da função do braço *II* e subtrai da porção negativa. O efeito final é a aparência de deslocamento de $2F(x, y - g)$ no sentido positivo de x , resultando em algo próximo de $2F(x - g, y - g)$. O padrão de intensidade $I(x, y)$ está representado na figura 4.5(c) e fica bastante claro que é realmente algo próximo a $|2F(x - g, y - g)|^2$.

Tudo o que podemos falar sobre os valores fracos, então, é que são resultado de um fenômeno de interferência da função de onda do medidor usado na medição fraca. Interpretar esses valores como significando um real valor da grandeza associada ao observável medido é portanto ir além do que a mecânica quântica nos apresenta. Tais valores são exatamente o que essa teoria prevê para o deslocamento do ponteiro e isso não é de se espantar, uma vez que o protocolo de medição fraca é completamente baseado nela e não traz nada de novo na forma de operá-la. Dizer que o fóton se encontra em um braço do interferômetro e sua

polarização em outro *não* é, portanto, algo que se possa concluir diretamente dos valores fracos encontrados. Essa interpretação dos resultados é uma escolha dos autores na ref. [1] e não é a única possível. Como mostramos aqui, uma interpretação em termos de interferência é muito mais simples e não leva a conclusões paradoxais, como a separação entre um fóton e sua polarização.

4.2 Realização experimental de Denkmayr *et al.*

Para explicar os resultados do experimento de Denkmayr *et al.* [3] como interferência quântica não vamos precisar falar de medições fracas, uma vez que os valores fracos em seu experimento só aparecem nas contagens de uma das saídas do interferômetro, e não em um ponteiro. As interações entre a pré- e pós-seleção nesse experimento não envolvem observáveis de espectro contínuo¹, e nesse sentido não há um ponteiro como definido na seção 2.1.2. Não será pertinente, portanto, uma análise como a das seções 2.5 e 4.1, pois não precisaremos de nenhuma função de onda contínua para explicar os resultados. Vale notar que os valores fracos encontrados por esse experimento (eqs. (A.6), (A.13)), no regime de esses operadores de evolução serem muito próximos da identidade, não são questionados. Os números são medidos corretamente e as aproximações são feitas sem nenhum erro, e se o Gato de Cheshire quântico for simplesmente o conjunto de valores fracos específicos (mesmo que sem um ponteiro), ele está lá. O que queremos questionar é a interpretação das mudanças nos padrões de interferência como evidência desse Gato estar realmente separado do seu sorriso, isto é, nêutrons separados de seus momentos magnéticos.

Esse experimento se assemelha muito a experimentos do tipo *escolha atrasada* [44, 45] e *apagadores quânticos* [46, 47, 48], e consideramos que o Gato de Cheshire quântico apresentado em [3] é mais um falso paradoxo de interpretação do mesmo tipo discutido por esses experimentos.

Experimentos do tipo escolha atrasada estão preocupados com a definição dos chamados comportamentos ondulatório ou corpuscular de uma partícula em um interferômetro, de acordo com os respectivos padrões de detecção. O aparato experimental usado só define a presença de interferência (ondulatório) ou não (corpuscular) na probabilidade de detecção

¹No apêndice A, mostramos que as interações são modeladas por $U_{abs,j} = \exp[-M_j \Pi_j]$ (A.2) e $U_{mag,j} = \exp[i\alpha \sigma_z \Pi_j / 2]$ (A.8).

da partícula depois que esta já entrou no interferômetro. A partir dessa idéia, as refs. [44, 45] indicam que não faz sentido dizer que definição do comportamento ondulatório ou corpuscular da partícula é algo que ela carrega. Consequentemente, uma interpretação interferométrica sem atribuir essas características às partículas evita paradoxos.

Já os experimentos do tipo apagador quântico se preocupam com o que pode ou não ser o valor real de uma grandeza de uma partícula em um interferômetro, no sentido de que a medição do observável dessa grandeza fornece um determinado autovalor com certeza. A grandeza, no caso, é a presença da partícula em um dos braços do interferômetro, e mostram que, na tentativa de medi-la, os padrões de interferência desaparecem. Dizendo de outra forma, organizar as partículas detectadas em “partículas que passaram pelo braço I ” e “partículas que passaram pelo braço II ” impede que a detecção mostre características de interferência. Contudo, as refs. [46, 47, 48] mostram como podemos organizar as partículas detectadas em grupos que não revelam por que braço passaram e, mesmo após as detecções na saída do interferômetro, os dados podem ser organizados de forma mostrar a interferência. Com isso, concluem que não é necessária a atribuição de realidade ao valor dessa grandeza no interferômetro, e a mecânica quântica prevê corretamente todos os resultados. A medição fraca, no contexto do Gato de Cheshire quântico, é uma tentativa de se medir observáveis da partícula dentro do interferômetro, mas já vimos que, pelo fato de o medidor interferir consigo mesmo, o valor fraco não é uma boa resposta para, por exemplo, a pergunta “por onde no interferômetro passou a partícula?”.

O apêndice B contém uma discussão mais detalhada desses experimentos de escolha atrasada e apagadores quânticos, que são bastante interessantes para mostrar que as interpretações que tentam atribuir realidade a estados quânticos de superposição não são necessárias e podem levar a paradoxos.

Vamos mostrar agora como os resultados do experimento de Denkmayr *et al.* [3], da fig. 3.2, são explicados com mecânica quântica padrão e a interpretação que leva ao Gato de Cheshire como a real separação entre um nêutron e seu momento magnético não é necessária. Cálculos desse tipo foram feitos por Stuckey, Silberstein e McDevitt [26].

Como já mostrado na seção 3.2, o divisor de feixes BS_1 e os giradores de spin SR preparam

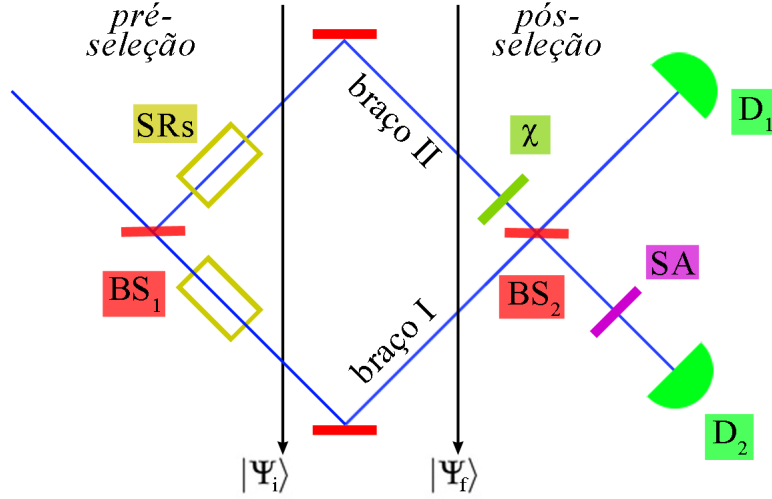


Figura 3.2: Interferômetro da realização experimental de Denkmayr *et al.*. (repetida da p. 40)

os nêutrons no estado

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|I\rangle|x+\rangle + |II\rangle|x-\rangle). \quad (3.21)$$

O padrão de detecção resultante da pós-seleção no detector D_2 , isto é, no estado

$$|\psi_f'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\chi/2}|I\rangle + e^{i\chi/2}|II\rangle)|x-\rangle, \quad (3.29)$$

não deve mostrar interferência. Isso porque as componentes de momento magnético associadas aos caminhos no estado de pré-seleção são ortogonais ($|x+\rangle$ no caminho I e $|x-\rangle$ no caminho II). Vemos que a probabilidade de detecção de um nêutron em D_2 é independente de χ dada a pré-seleção em $|\psi_i\rangle$ da eq. (3.21):

$$\begin{aligned} P_{D_2} &= |\langle\psi_f'|\psi_i\rangle|^2 = \left| \frac{(e^{i\chi/2}\langle I|x-\rangle + e^{-i\chi/2}\langle II|x-\rangle)(\langle I|x+\rangle + \langle II|x-\rangle)}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \right|^2 \\ &= \left| \frac{e^{i\chi/2}\langle x-|x+\rangle + e^{-i\chi/2}\langle x-|x-\rangle}{2} \right|^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Quando os absorvedores são colocados em cada braço, sua ação só muda a amplitude da componente de momento magnético do braço respectivo. Dessa forma, um absorvedor de qualquer intensidade no braço I , correlacionado à componente $|x+\rangle$, não tem nenhum efeito sobre as contagens em D_2 , que só pode detectar a componente $|x-\rangle$. Se são colocados

absorvedores em ambos os braços, podemos modelar a evolução pelo operador²

$$U_{abs} = e^{-(M_I|I\rangle\langle I| + M_{II}|II\rangle\langle II|)}, \quad (4.22)$$

e só o parâmetro M_{II} da parte que age em $|II\rangle$ tem efeito em D_2 :

$$\begin{aligned} P_{D_2,abs} &= |\langle \psi_f' | U_{abs} | \psi_i \rangle|^2 = \left| \frac{(e^{i\chi/2} \langle I | \langle x- | + e^{-i\chi/2} \langle II | \langle x- |) (e^{-M_I} | I \rangle | x+ \rangle + e^{-M_{II}} | II \rangle | x- \rangle)}{\sqrt{2}} \right|^2 \\ &= \left| \frac{e^{-M_I} e^{i\chi/2} \langle x- | x+ \rangle + e^{-M_{II}} e^{-i\chi/2} \langle x+ | x+ \rangle}{2} \right|^2 = \frac{e^{-2M_{II}}}{4}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Os gráficos da fig. 3.3 mostram exatamente esse fenômeno, em que somente o absorvedor no braço II altera a intensidade das detecções em D_2 .

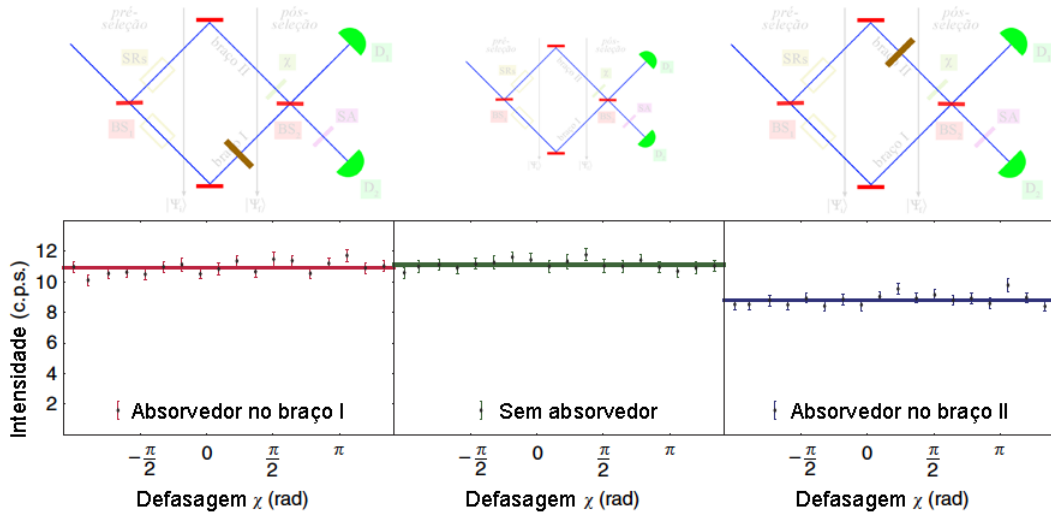


Figura 3.3: Detecções do experimento de Denkmayr *et al.* [3] em D_2 com absorvedores em cada caminho. Gráficos retirados da fig. 3 da ref. [3] (tradução nossa). (repetida da p. 43)

Os operadores que modelam a interação com o campo magnético² $U_{mag,j} = e^{[i\alpha\sigma_z|j\rangle\langle j|/2]}$, diferentemente dos operadores de absorção que só mudam a população de cada componente separadamente, são operadores de transição na base $|x\pm\rangle$, isto é, podem transferir amplitude de uma componente a outra. Podemos escrever³ $e^{i\alpha\sigma_z/2} = I_\sigma \cos(\alpha/2) + i\sigma_z \sin(\alpha/2)$, onde I_σ é o operador identidade para o momento magnético. Sabendo que

²Ver a seção *Methods* em [3] e as eqs. (A.2) e (A.8) do nosso ap. A.

³De modo geral, para uma direção $\hat{\mathbf{u}}$ arbitrária, $e^{i\alpha\sigma_{\hat{\mathbf{u}}}/2} = I_\sigma \cos(\alpha/2) + i(\sigma \cdot \hat{\mathbf{u}}) \sin(\alpha/2)$. Ver seção 2 do complemento A-IX em [10].

$\sigma_z = |z+\rangle\langle z+| - |z-\rangle\langle z-| = |x+\rangle\langle x-| + |x-\rangle\langle x+|^4$, então,

$$\begin{aligned} & e^{i\alpha\sigma_z/2}(c_+|x+\rangle + c_-|x-\rangle) \\ &= c_+ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)|x+\rangle + ic_+ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)|x-\rangle + c_- \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)|x-\rangle + ic_- \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)|x+\rangle. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sua ação em cada braço, portanto, pode fazer piorar a correlação, no sentido de cada braço não ficar mais perfeitamente associado a uma só componente de spin. Por exemplo, se o campo atuar no braço I ,

$$e^{i\alpha\sigma_z|I\rangle\langle I|/2}|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)|I\rangle|x+\rangle + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)|I\rangle|x-\rangle + |II\rangle|x-\rangle \right]. \quad (4.25)$$

Isso permite que haja interferência em D_2 , pois o analisador de spin, que só permite a transmissão da componente $|x-\rangle$, permite a passagem das componentes de caminho $|I\rangle$ e $|II\rangle$, que adquirem a diferença de fase $e^{i\chi}$. Contudo, para o campo no braço II

$$e^{i\alpha\sigma_z|II\rangle\langle II|/2}|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|I\rangle|x+\rangle + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)|II\rangle|x-\rangle + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)|II\rangle|x+\rangle \right]. \quad (4.26)$$

O analisador de spin em D_2 ainda só permite a transmissão da componente de caminho $|II\rangle$, e nesse caso portanto não deve haver interferência dependente de χ .

Vamos mostrar como a ação dos campos magnéticos e a diferença de fase aparecem nos padrões detectados em D_1 e D_2 . As detecções em D_2 são descritas pela pós-seleção em

$$|\psi'_f\rangle = \frac{(e^{-i\chi/2}|I\rangle + e^{i\chi/2}|II\rangle)|x-\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (3.29)$$

enquanto em D_1 a pós-seleção é feita sem o analisador de spin, no estado

$$|\psi''_f\rangle = \frac{(e^{-i\chi/2}|I\rangle - e^{i\chi/2}|II\rangle)}{\sqrt{2}}, \quad (4.27)$$

e somamos a probabilidade de cada componente de momento magnético separadamente⁵.

A detecção em D_2 para o campo aplicado no braço I (eq. (4.25)) é

$$\begin{aligned} P_{D2,mag,I} &= |\langle \psi'_f | e^{i\alpha\sigma_z|I\rangle\langle I|/2} |\psi_i\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{(e^{i\chi/2}\langle I| + e^{-i\chi/2}\langle II|)\langle x-|}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)|I\rangle|x+\rangle + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)|I\rangle|x-\rangle + |II\rangle|x-\rangle \right] \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| ie^{i\chi/2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + e^{-i\chi/2} \right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1 + 2\text{Re}[ie^{i\chi} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)]}{4} \\ &= \frac{1/2 - \cos(\alpha)/2 + 1 - 2\sin(\chi)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4} = \frac{3 - \cos(\alpha)}{8} - \frac{\sin(\chi)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

⁴ $|z\pm\rangle = (|x+\rangle \pm |x-\rangle)/\sqrt{2}$.

⁵Como na eq. (B.2) do ap. B.

que é exatamente a eq. (13) de [3] e as contagens tem dependência com a fase χ .

A detecção em D_2 para o campo aplicado no braço II (eq. (4.26)) é

$$\begin{aligned}
P_{D2,mag,II} &= |\langle \psi'_f | e^{i\alpha\sigma_z|II}\langle II|/2 | \psi_i \rangle|^2 \\
&= \left| \frac{(e^{i\chi/2}\langle I| + e^{-i\chi/2}\langle II|)\langle x- |}{\sqrt{2}} \frac{[|I\rangle|x+\rangle + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)|II\rangle|x-\rangle + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)|II\rangle|x+\rangle]}{\sqrt{2}} \right|^2 \\
&= \frac{1}{4} \left| e^{-i\chi/2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right|^2 = \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4},
\end{aligned} \tag{4.29}$$

que é exatamente a eq. (14) de [3] e as contagens *não* tem dependência com a fase χ . Essa independência é causada pela pós-seleção em $|x-\rangle$, como mencionado após a eq. (4.26).

A detecção em D_1 para o campo aplicado no braço I (eq. (4.25)), omitindo alguns passos para evitar a repetição exaustiva, é

$$\begin{aligned}
P_{D1,mag,I} &= |\langle \psi''_f | \langle x+ | e^{i\alpha\sigma_z|I}\langle I|/2 | \psi_i \rangle|^2 + |\langle \psi''_f | \langle x- | e^{i\alpha\sigma_z|I}\langle I|/2 | \psi_i \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{4} \left| e^{i\chi/2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right|^2 + \frac{1}{4} \left| ie^{i\chi/2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - e^{-i\chi/2} \right|^2 \\
&= \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1 + 2\text{Re}[-ie^{i\chi} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)]}{4} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sin(\chi) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2},
\end{aligned} \tag{4.30}$$

que é exatamente a eq. (15) de [3] e as contagens tem dependência com a fase χ .

A detecção em D_1 para o campo aplicado no braço II (eq. (4.26)) é

$$\begin{aligned}
P_{D1,mag,II} &= |\langle \psi''_f | \langle x+ | e^{i\alpha\sigma_z|II}\langle II|/2 | \psi_i \rangle|^2 + |\langle \psi''_f | \langle x- | e^{i\alpha\sigma_z|II}\langle II|/2 | \psi_i \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{4} \left| e^{i\chi/2} - ie^{-i\chi/2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right|^2 + \frac{1}{4} \left| -e^{-i\chi/2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right|^2 \\
&= \frac{1 + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2\text{Re}[-ie^{i\chi} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)] + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sin(\chi) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2},
\end{aligned} \tag{4.31}$$

que é exatamente a eq. (16) de [3] e as contagens tem dependência com a fase χ .

As equações (4.28), (4.29), (4.30) e (4.31) descrevem as intensidades encontradas experimentalmente, apresentadas na fig. 3.4, e estão apresentadas em [3], apesar de sem os cálculos detalhados. Também no próprio artigo, Denkmayr *et al.* já indicam a explicação dos resultados como fenômenos de interferência nos seguintes trechos do texto:

“Para a medição de referência, os estados de spin dentro do interferômetro são

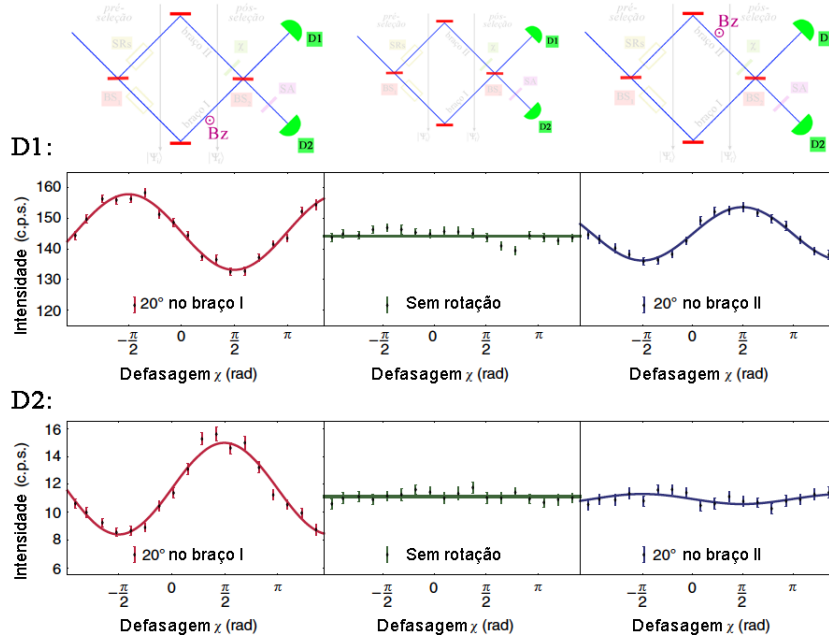


Figura 3.4: Detecções do experimento de Denkmayr *et al.* [3] em D_2 com o campo magnético B_z aplicado em cada caminho. Gráficos retirados da fig. 4 da ref. [3] (tradução nossa). (repetida da p. 43)

ortogonais. Dessa forma, o interferograma não mostra oscilação da intensidade.”⁶
(DENKMAYR *et al.*, 2013, p. 4, tradução nossa).

“As medições fracas para a componente de spin dos nêutrons em cada caminho são obtidas aplicando-se um campo magnético adicional em um dos caminhos do feixe. Isso causa uma pequena rotação do spin, que permite verificar a presença do momento magnético dos nêutrons no respectivo caminho. Se há momento magnético presente no caminho, o campo tem um efeito na medição das franjas de interferência.”⁷ (DENKMAYR *et al.*, 2013, p. 4, tradução nossa).

No segundo trecho, apesar de dizerem corretamente que os campos magnéticos causam um giro no spin, desconectado do fato de que há um analisador de spin que organiza os subconjuntos de detecções os autores são levados à conclusão estranha de existência ou não de momento magnético pelo aparecimento das franjas. Esse tipo de conclusão, entretanto,

⁶“For the reference measurement, the spin states inside the interferogram shows no intensity oscillation” (ref. [3], p. 4).

⁷“The weak measurements of the neutrons’ spin component in each path are achieved by applying additional magnetic fields in one or the other beam path. This causes a small spin rotation, which allows to probe the presence of the neutrons’ magnetic moment in the respective path. If there is a magnetic moment present in the path, the field has an effect on the measured interference fringes.” (ref. [3], p. 4).

não é necessária, uma vez que todos os padrões de interferência, dependentes ou não de χ , são explicados sem precisar dizer qualquer coisa sobre a presença dos nêutrons ou de seus momentos magnéticos. Os mesmos padrões de interferência foram inclusive obtidos por Atherton *et al.* usando luz intensa, descrita por campos clássicos [49]. Como no caso dos experimentos de escolha atrasada e do apagador quântico, inferências a respeito do passado das partículas detectadas pode levar a paradoxos. O Gato de Cheshire quântico, como um fenômeno que realmente significa que há um nêutron sem momento magnético num braço do interferômetro e um momento magnético sem nêutron no outro, não é nada mais que um falso paradoxo causado por uma interpretação realista de resultados que a mecânica quântica permite explicar somente como propriedades estatísticas de um sistema emaranhado com um medidor. Além disso, Stuckey *et al.* [26] notam que, quando o campo magnético é colocado no braço *II*, mesmo que não haja dependência em χ ($P_{D2,mag} = \cos^2(\alpha_{II}/2)/4$, eq. (4.29)), há sim uma diferença no número de contagens em relação à contagem de referência $P_{D2} = 1/4$, que é o fator $\cos^2(\alpha_{II}/2)$. Esse fator surge devido à transição da componente $|x-\rangle$ para $|x+\rangle$, causada pelo campo magnético, e impede que digamos que o campo no braço *II* não tem efeito sobre as detecções. Nesse caso, mesmo sem as franjas dependentes da fase χ , a amplitude da detecção é modificada pela presença do campo. Portanto a afirmação de que a presença de momento magnético só pode ser percebida através de um efeito nas franjas de interferência é falsa. No caso de $\alpha_{II} \ll 1$, então $P_{D2,mag} \approx P_{D2}$, mas ainda assim o efeito da rotação do spin pelo campo está presente. Isso nos leva ao fato de que não precisamos tratar da intensidade de nenhuma interação, presente nos parâmetros de absorção M_I e M_{II} , e nos parâmetros do campo α_I e α_{II} . Todos os nossos cálculos foram feitos para esses parâmetros de tamanho arbitrário. Com isso não podemos encontrar os valores fracos mostrados no apêndice A, que dependem da interação ser fraca, mas explicamos todos os padrões de interferência de forma clara e sem o surgimento de nenhum paradoxo, fazendo todos os cálculos com mecânica quântica padrão.

Capítulo 5

Conclusão

Nesse trabalho, mostramos como o Gato de Cheshire quântico, proposto por Aharonov *et al.* [1] e realizado experimentalmente por Denkmayr *et al.* [3], não nos leva necessariamente à conclusão de que uma partícula foi separada de uma de suas propriedades intrínsecas se for visto como um fenômeno de interferência explicado pela mecânica quântica. O passo determinante para se chegar a essa conclusão foi a inclusão do ponteiro quântico na descrição, que torna explícita sua interferência que indica os valores fracos que caracterizam o Gato de Cheshire quântico.

Primeiramente, revimos no capítulo 2 brevemente o processo de medição projetiva com um ponteiro e explicamos, a partir dele, o que define uma medição fraca [2], que tem como resultado a indicação do valor fraco em um ponteiro. Também mostramos, nesse capítulo, como o valor fraco é um fenômeno de interferência, de uma maneira parecida com Duck *et al.* [8], e para isso precisamos considerar explicitamente o ponteiro como parte do sistema tratado quanticamente. Introduzimos, para isso, o formalismo de função de onda de fóton [27, 28, 29], que descreve o estado de um fóton com uma função de onda distribuída espacialmente, cumprindo a necessidade de o ponteiro, que é o perfil transversal de intensidade de um fóton, ser descrito por uma função contínua.

O Gato de Cheshire quântico é um fenômeno em que, num interferômetro de dois braços do tipo Mach-Zehnder, o valor fraco para a presença de uma partícula em um dos braços é nulo, enquanto para uma de suas propriedades intrínsecas no mesmo braço é unitário; no outro braço, o valor fraco para encontrar a partícula é unitário, e o da sua propriedade é nulo. No capítulo 3 mostramos como Aharonov *et al.* [1] e Denkmayr *et al.* [3] concluem, a partir desses valores fracos e, no caso da ref. [3] também a partir de padrões de interferência, que a partícula se encontra no braço onde o valor fraco de sua presença é unitário, mas sua propriedade no outro. Detalhes para a obtenção dos valores fracos sem o uso de um ponteiro na ref. [3] estão no apêndice A.

No capítulo 4, com o formalismo de função de onda de fóton pudemos incluir o ponteiro na descrição do experimento proposto por Aharonov *et al.* [1], deixando claro por que o ponteiro indica tais valores fracos. Eliminamos assim a necessidade de significação desses valores como a separação entre os fótons e suas polarizações. Para explicar os resultados do experimento de Denkmayr *et al.* [3], que não utiliza um ponteiro para registrar os valores fracos, mas os obtém a partir das contagens de uma saída de um interferômetro Mach-Zehnder, fizemos os cálculos de probabilidades nas saídas do interferômetro usando mecânica quântica simples. Todos os resultados do experimento puderam ser explicados dessa forma e sem precisar falar dos valores fracos, eliminando assim a interpretação das mudanças dos padrões de interferência como a separação entre os nêutrons e seus momentos magnéticos intrínsecos.

Esperamos ter mostrado, com esse trabalho, que os valores fracos do Gato de Cheshire quântico [1, 3] não precisam ser interpretados como a separação entre uma partícula e uma de suas propriedades intrínsecas. Fenômenos de interferência são resultado do princípio de superposição da mecânica quântica, que desafia a nossa interpretação da teoria como algo que descreve coisas reais no mundo. É esse princípio que deu origem aos estranhos “paradoxos” do Gato de Schrödinger [50] e EPR [51], e as previsões fora da experiência cotidiana provenientes dele aparecem claramente nos experimentos de escolha atrasada [44, 45] e apagadores quânticos [46, 47, 48] (ver apêndice B). Nenhuma interpretação ainda mais estranha do que a mecânica quântica nos exige, entretanto, precisa ser invocada para se explicar o Gato de Cheshire quântico. Se nos atermos ao mínimo necessário para se compreender a teoria, esses paradoxos não existem.

Apêndice A

Valores fracos no experimento de Denkmayr *et al.*

Os valores fracos no experimento de Denkmayr *et al.* [3] não aparecem como deslocamentos de um ponteiro, e sim nas diferenças de contagens de um dos detectores. Seja uma interação descrita por um operador de evolução U que acontece entre a pré- e a pós-seleção. As probabilidades de detecção em D_2 (fig. 3.2) serão dadas por

$$P = |\langle \psi_f | U | \psi_i \rangle|^2. \quad (\text{A.1})$$

A interação será usada para que sejam obtidos os valores fracos da presença do nêutron em cada um dos braços do interferômetro e do momento magnético também em cada braço. Para o valor fraco da presença do nêutron, usa-se um absorvedor de partículas em um dos braços, e para o momento magnético, coloca-se um campo magnético de direção z em um dos braços.

O absorvedor pode ser modelado pela evolução não-unitária (ver a seção *Methods* em [3])

$$U_{abs,j} = \exp[-M_j \Pi_j], \quad (\text{A.2})$$

onde M_j é um número real conhecido relacionado diretamente à quantidade de absorção, e $\Pi_j = |j\rangle\langle j|$ é o projetor em um dos braços $j = I, II$. Dessa forma, para uma absorção suficientemente pequena, vale a aproximação

$$U_{abs,j} \approx 1 - M_j \Pi_j, \quad (\text{A.3})$$

e temos

$$\begin{aligned}
 P_{abs,j} &\approx |\langle \psi_f | 1 - M_j \Pi_j | \psi_i \rangle|^2 = \\
 &= (\langle \psi_i | \psi_f \rangle - M_j \langle \psi_i | \Pi_j | \psi_f \rangle) (\langle \psi_f | \psi_i \rangle - M_j \langle \psi_f | \Pi_j | \psi_i \rangle) \approx \\
 &\approx |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 - M_j (\langle \psi_i | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \Pi_j | \psi_i \rangle + \langle \psi_i | \psi_f \rangle^* \langle \psi_f | \Pi_j | \psi_i \rangle^*) = \\
 &= |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 [1 - 2M_j \text{Re}(\langle \Pi_j \rangle_w)], \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

onde pelo fato de $M_j \ll 1$ (a interação é fraca) desconsideramos o termo proporcional a M_j^2 . Em relação ao caso sem absorção $P_{ref} = |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2$, a eq. (A.4) mostra como o valor fraco do operador Π_j pode ser extraído ao se usar um absorvedor no braço j a partir das contagens em D_2 . No caso de um valor fraco real,

$$\langle \Pi_j \rangle_w \approx \frac{1}{2M_j} \left[1 - \frac{P_{abs,j}}{P_{ref}} \right]. \tag{A.5}$$

Para $|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle|x+\rangle + |II\rangle|x-\rangle)$ e $|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I\rangle + |II\rangle)|x-\rangle$ (eqs. (3.21), (3.22) e (2.16)), e $I_\sigma = |x+\rangle\langle x+| + |x-\rangle\langle x-|$ o operador identidade para o momento magnético do nêutron,

$$\begin{aligned}
 \langle \Pi_I \rangle_w &= \frac{\langle \psi_f | (|I\rangle\langle I| \otimes I_\sigma) | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} = \\
 &= \frac{\langle x- | (|I\rangle + |II\rangle) (|I\rangle\langle I| \otimes I_\sigma) (|I\rangle|x+\rangle + |II\rangle|x-\rangle)}{\langle x- | (|I\rangle + |II\rangle) (|I\rangle|x+\rangle + |II\rangle|x-\rangle)} = \\
 &= \frac{\langle x- | x+\rangle}{\langle x- | x+\rangle + \langle x- | x-\rangle} = 0. \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

Analogamente, encontramos $\langle \Pi_{II} \rangle_w = 1$. Os valores experimentais obtidos em [3] são

$$\langle \Pi_I \rangle_w = 0.14(4), \quad \langle \Pi_{II} \rangle_w = 0.96(6). \tag{A.7}$$

A ação do campo magnético B_z num braço $j = I, II$ é descrita pelo operador de evolução (ver a seção *Methods* na ref. [3])

$$U_{mag,j} = \exp \left[i \frac{\alpha \sigma_z \Pi_j}{2} \right], \tag{A.8}$$

onde α é um fator que incorpora a intensidade do campo e o tempo de interação, e σ_z é o operador de momento magnético na direção z do nêutron, $\sigma_z = |z+\rangle\langle z+| - |z-\rangle\langle z-| = |x+\rangle\langle x-| + |x-\rangle\langle x+|$ ¹. Para α suficientemente pequeno, podemos aproximar o operador

¹ $|z\pm\rangle = (|x+\rangle \pm |x-\rangle)/\sqrt{2}$

de evolução por

$$U_{mag,j} \approx 1 + i \frac{\alpha \sigma_z \Pi_j}{2} - \frac{\alpha^2 \Pi_j}{8}, \quad (\text{A.9})$$

onde usamos os fatos de que $\sigma_z^2 = 1$ e $\Pi_j^2 = \Pi_j$. Assim, com essa interação entre a pré- e pós-seleção, as contagens no detector D_2 serão

$$\begin{aligned} P_{mag,j} &\approx |\langle \psi_f | 1 + i \frac{\alpha \sigma_z \Pi_j}{2} - \frac{\alpha^2 \Pi_j}{8} | \psi_i \rangle|^2 \approx \\ &\approx |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 + i \frac{\alpha}{2} (\langle \psi_i | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \sigma_z \Pi_j | \psi_i \rangle - \langle \psi_f | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \sigma_z \Pi_j | \psi_f \rangle) \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{8} (\langle \psi_i | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \Pi_j | \psi_i \rangle + \langle \psi_f | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \Pi_j | \psi_f \rangle) + \frac{\alpha^2}{4} |\langle \psi_f | \sigma_z \Pi_j | \psi_i \rangle|^2 = \\ &= |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 \left[1 - \alpha \text{Im}(\langle \sigma_z \Pi_j \rangle_w) - \frac{\alpha^2}{4} \text{Re}(\langle \Pi_j \rangle_w) + \frac{\alpha^2}{4} |\langle \sigma_z \Pi_j \rangle_w|^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde desprezamos os termos de ordem acima de α^2 . No caso de valores fracos reais (que é o caso de interesse, uma vez que os valores fracos no gato de Cheshire quântico são 0 ou ± 1),

$$P_{mag,j} \approx |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{4} \langle \Pi_j \rangle_w + \frac{\alpha^2}{4} |\langle \sigma_z \Pi_j \rangle_w|^2 \right]. \quad (\text{A.11})$$

Novamente, o número de contagens em D_2 depende de valores fracos quando há a interação, mas agora não só de $\langle \Pi_j \rangle_w$, mas também $|\langle \sigma_z \Pi_j \rangle_w|^2$, onde $\sigma_z \Pi_j$ é o operador de momento magnético na direção z no braço j . Como já foi medido $\langle \Pi_j \rangle_w$, pode-se obter

$$|\langle \sigma_z \Pi_j \rangle_w|^2 \approx \langle \Pi_j \rangle_w - \frac{4}{\alpha^2} \left[1 - \frac{P_{mag,j}}{P_{ref}} \right]. \quad (\text{A.12})$$

Com as eqs. (3.21), (3.22) e (2.16), calculamos

$$\begin{aligned} |\langle \sigma_z \Pi_I \rangle_w|^2 &= \left| \frac{\langle \psi_f | [I] \langle I | \otimes \sigma_z | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{\langle x - | (\langle I | + \langle II |) [I] \langle I | \otimes (|x+\rangle \langle x- | + |x-\rangle \langle x+ |) (|I\rangle |x+\rangle + |II\rangle |x-\rangle)}{\langle x - | (\langle I | + \langle II |) (|I\rangle |x+\rangle + |II\rangle |x-\rangle)} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{\langle x - | (|x+\rangle \langle x- | + |x-\rangle \langle x+ |) |x+\rangle}{\langle x - |x+\rangle + \langle x - |x-\rangle} \right|^2 = \left| \frac{\langle x - |x-\rangle \langle x+ |x+\rangle}{\langle x - |x-\rangle} \right|^2 = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Analogamente, encontramos $|\langle \sigma_z \Pi_{II} \rangle_w|^2 = 0$. Uma vez encontrados $\langle \Pi_I \rangle_w$ e $\langle \Pi_{II} \rangle_w$, os valores obtidos experimentalmente foram

$$|\langle \sigma_z \Pi_I \rangle_w|^2 = 1.07(25), \quad |\langle \sigma_z \Pi_{II} \rangle_w|^2 = 0.02(24). \quad (\text{A.14})$$

Os valores fracos obtidos experimentalmente estão, portanto, de acordo com o efeito do gato de Cheshire quântico, como proposto por Aharonov *et al.* [1], $\langle \Pi_I \rangle_w = 0$, $\langle \Pi_{II} \rangle_w = 1$, $\langle \sigma_z \Pi_I \rangle_w = 1$ e $\langle \sigma_z \Pi_{II} \rangle_w = 0$, da eq. (3.20).

²Ver complemento A-IV e seção 2c-II de [10].

Apêndice B

Experimentos de escolha atrasada e apagadores quânticos

Pode-se dizer que até o surgimento da mecânica quântica duas classes de fenômenos físicos distintas, a dos fenômenos *corpúsculares* e a dos *ondulatórios*, só existiam para objetos distintos. Colisões entre corpos rígidos ou situações tratadas pela eletrostática são exemplos de fenômenos corpúsculares, descritos basicamente por posições e momentos de partículas ou distribuições de massa e carga que interagem por meio de campos. Já fenômenos ondulatórios, como a propagação de ondas acústicas ou a descrição clássica de ondas eletromagnéticas, usam parâmetros como amplitude e fase para caracterizar seus objetos. Com a mecânica quântica, percebeu-se que os dois tipos de descrição podem ser úteis no estudo de um mesmo objeto. Bohr sugeriu que comportar-se como um corpúsculo ou como uma onda não era uma propriedade do objeto em si, mas sim de como ele é medido [52]. É para tentar discutir esse tipo de problema e contornar a idéia de que o objeto deve saber como se comportar de acordo com o experimento à sua frente que se propuseram os experimentos de escolha atrasada e os apagadores quânticos.

Ambos têm por base interferômetros de duas possibilidades, ou dois caminhos, que podem ser traduzidos num interferômetro de Mach-Zehnder (fig. B.1), o mesmo usado por Aharonov *et al.* [1] e Denkmayr *et al.* [3].

Uma partícula passa por um divisor de feixes que a reflete ou transmite com 50% de chance, e fica num estado de superposição de componentes dos braços do interferômetro,

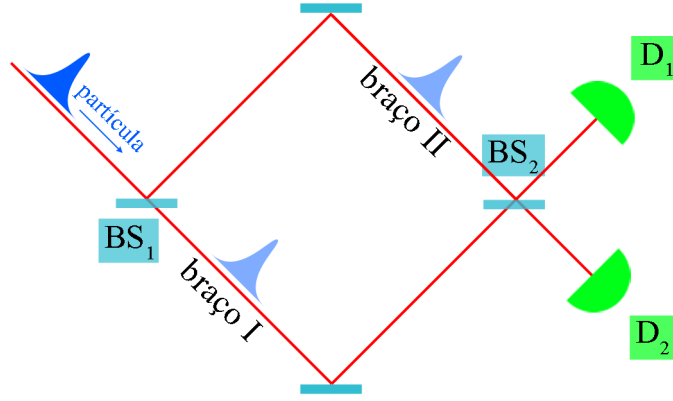


Figura B.1: Interferômetro Mach-Zehnder.

$|\psi\rangle = (|I\rangle + i|II\rangle)/\sqrt{2}$. Ao mover sutilmente, por exemplo, o espelho do braço I , podemos adicionar um fator de fase $e^{i\varphi}$ na componente desse braço, $|\psi'\rangle = (|I\rangle + ie^{i\varphi}|II\rangle)/\sqrt{2}$. Sem a presença de um segundo divisor de feixes, a probabilidade de o detector D_1 clicar será $P_{D_1} = |\langle I|\psi'\rangle|^2 = 1/2$, e de D_2 , $P_{D_2} = |\langle II|\psi'\rangle|^2 = 1/2$, independentemente da fase adicionada. Esse experimento poderia ser explicado dizendo que cada partícula que entra no interferômetro tem 50% de chance de ser refletida ou transmitida pelo divisor de feixes, num comportamento tipicamente *corpúscular*, e são essas probabilidades que os detectores estão vendo. Além disso, seria possível afirmar que as partículas que chegam em D_1 passaram pelo braço I , enquanto as que chegam em D_2 passaram por II .

Vamos supor agora que um segundo divisor de feixes esteja no caminho das partículas antes dos detectores. Após passar pelo segundo divisor de feixes, se a explicação corpuscular acima está correta, ainda teremos 50% de detecções em cada detector, pois cada partícula que vier por cada braço I ou II terá probabilidade $1/2$ de chegar em D_1 ou D_2 . Contudo, quando o segundo divisor de feixes está presente, as detecções dependem da diferença de fase φ entre os caminhos, e isso pode ser explicado como a interferência das componentes de cada caminho. Como

$$U_{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}}[|I\rangle\langle I| + |II\rangle\langle II| + i(|I\rangle\langle II| + |II\rangle\langle I|)], \quad (3.3)$$

a detecção em D_1 não mais significa projetar o estado em $|I\rangle$, mas sim em $|D_1\rangle \equiv (|I\rangle - i|II\rangle)/\sqrt{2}$, e em D_2 significa projetar em $|D_2\rangle \equiv (|I\rangle + i|II\rangle)/\sqrt{2}$. Assim, a probabilidade de uma partícula chegar em D_1 é

$$P_{D_1} = |\langle D_1|\psi'\rangle|^2 = \left| \frac{\langle I| + i\langle II|}{\sqrt{2}}|\psi'\rangle \right|^2 = \left| \frac{\langle I|I\rangle - e^{i\varphi}\langle II|II\rangle}{2} \right|^2 = \sin^2(\varphi/2), \quad (B.1)$$

e analogamente $P_{D_2} = |\langle D_2 | \psi' \rangle / \sqrt{2}|^2 = \cos^2(\varphi/2)$. O divisor de feixes mistura e combina as fases adquiridas em cada caminho, que causam a interferência nas componentes de saída do detector $|D_1\rangle$ e $|D_2\rangle$. Não é mais possível portanto usar o raciocínio corpuscular e dizer por qual braço a partícula passou no interferômetro a partir das detecções.

Esse comportamento, mesmo que só perceptível estatisticamente com a realização de várias detecções, é típico de um fenômeno *ondulatório* por envolver interferência, enquanto o comportamento sem o segundo divisor de feixes pode ser visto como *corpuscular*. É nesse sentido que Bohr propõe que cada experimento deve produzir um tipo de comportamento, corpuscular ou ondulatório. No exemplo apresentado, os aparatos experimentais com e sem o segundo divisor de feixes são aparatos distintos e provocam comportamentos distintos.

Seria possível dizer, entretanto, que a partícula antes de entrar no interferômetro “sabe” como deve se comportar a partir do que está diante dela, e assim a propriedade ainda está no objeto através de um tipo de “variável escondida”. A proposta de Wheeler em 1978 [44] consiste em somente depois que a partícula tiver passado pelo primeiro divisor de feixes decidir pela presença ou não do segundo divisor de feixes. Ou seja, a escolha entre as bases de medida $|I\rangle, |II\rangle$ ou $|D_1\rangle, |D_2\rangle$ só é feita com a partícula dentro do interferômetro. Esse experimento foi realizado em 2007 por Jacques *et al.* [45], em que a presença ou não do segundo divisor de feixes para cada partícula é escolhida aleatoriamente. Ao se coletar os dados de todas as realizações em que o divisor de feixes estava presente, a estatística revela a interferência através da relação das contagens nos detectores com a fase diferença de fase entre os braços; nas realizações sem o divisor de feixes, ambos os detectores clicam com igual probabilidade. Elimina-se assim a idéia de que havia algo determinado antes da detecção, e a mecânica quântica fornece a explicação dos resultados sem a necessidade de se dizer que um objeto se comporta como onda ou corpúsculo.

Se, mesmo com o segundo divisor de feixes, quisermos saber por qual braço cada partícula passou, podemos pensar num medidor do tipo projetivo (ver seção 2.1) em um dos braços, por exemplo em II . Esse medidor (que pode ser um grau de liberdade externo à partícula, como o número de fótons em uma cavidade [46, 47], ou interno, como a polarização de um fóton, sendo o fóton a partícula [48])¹, inicialmente num estado $|1\rangle$, devido a uma interação com a

¹As três referências apresentadas discutem interferência de dois caminhos do tipo dupla-fenda. Para o apagador quântico de um sistema de dois níveis, como apresentado aqui, ver a ref. [53].

partícula vai para um estado $|2\rangle$, ortogonal a $|1\rangle$. Dessa forma, teremos após essa interação partícula e medidor emaranhados, $|\Psi'\rangle = (|I\rangle|1\rangle + ie^{i\varphi}|II\rangle|2\rangle)/\sqrt{2}$. Como $\langle 1|2\rangle = 0$, basta olharmos para o medidor que saberemos que se ele estiver no estado $|1\rangle$ a partícula passou pelo braço I , e se estiver em $|2\rangle$, por II . Entretanto, a metade das partículas vai para o detector D_1 e a outra metade para D_2 independentemente da diferença de fase φ , como no caso sem o segundo divisor de feixes. A detecção em D_1 indistingue os estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ do medidor, e é portanto a soma das probabilidades de cada componente separadamente

$$\begin{aligned} P_{D_1} &= |\langle D_1|\langle 1|\Psi'\rangle|^2 + |\langle D_1|\langle 2|\Psi'\rangle|^2 = \\ &= \left| \frac{\langle I| + i\langle II|}{\sqrt{2}} \frac{|I\rangle}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{\langle I| + i\langle II|}{\sqrt{2}} \frac{ie^{i\varphi}|II\rangle}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left| \frac{1}{2} \right|^2 + \left| \frac{-e^{i\varphi}}{2} \right|^2 = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

e em D_2 analogamente $P_{D_2} = 1/2$. Ou seja, se queremos saber com certeza por qual braço a partícula passou, não podemos ver nenhum padrão de interferência nos detectores³. Nem é necessário fazer uma medição no sistema medidor para que a interferência desapareça, basta que a informação sobre o braço que a partícula passou esteja disponível no medidor.

O apagamento quântico consiste em, depois de cada detecção em D_1 e D_2 , fazer uma projeção no medidor em uma base específica a fim de revelar novamente o padrão de interferência. Partindo da idéia de que o padrão some quando a informação sobre o caminho está disponível, podemos fazer as projeções numa base que é uma superposição de $|1\rangle$ e $|2\rangle$, isto é, que *apague* a informação disponível deixando as componentes de cada braço $|I\rangle$ e $|II\rangle$ indistinguíveis por uma projeção do medidor. Isso significa de fato que vamos separar os dados dos detectores D_1 e D_2 de forma conveniente após a detecção, e vamos mostrar em que sentido isso pode ser dito. Sejam os vetores ortogonais $|\pm\rangle \equiv (|1\rangle \pm |2\rangle)/\sqrt{2}$, tal que

$$|\Psi'\rangle = \frac{(|I\rangle + ie^{i\varphi}|II\rangle)}{2}|+\rangle + \frac{(|I\rangle - ie^{i\varphi}|II\rangle)}{2}|-\rangle. \quad (\text{B.3})$$

²Esse tipo de afirmação que deriva conclusões sobre o passado da partícula a partir de uma detecção é um abuso. Como apontado por Englert, Scully e Walther no apêndice da ref. [47], ao invés de “a partícula esteve no braço I ”, a detecção permite afirmar que “essa partícula pertence ao subconjunto cujas propriedades estatísticas respeitam a amplitude de probabilidade da componente $|I\rangle$ ”. O apêndice 1 da ref. [47] traz uma discussão breve mas interessante sobre o vocabulário usado quando se fala de experimentos de mecânica quântica.

³É possível obter casos intermediários em que, por exemplo, há uma chance maior que 50% de acertar por qual braço a partícula passou ao mesmo tempo em que há alguma interferência [54, 55, 56, 57].

Evidentemente, as contagens nos detectores não mudam ao se calcular numa base diferente,

$$\begin{aligned}
 P_{D_1} &= |\langle D_1 | \langle + | \Psi' \rangle|^2 + |\langle D_1 | \langle - | \Psi' \rangle|^2 = \\
 &= \left| \frac{\langle I | + i \langle II | \rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle I | + i e^{i\varphi} | II \rangle}{2} \right|^2 + \left| \frac{\langle I | + i \langle II | \rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle I | - i e^{i\varphi} | II \rangle}{2} \right|^2 \\
 &= \left| \frac{1 - e^{i\varphi}}{2\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{1 + e^{i\varphi}}{2\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{2}. \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

Mas após detectar uma partícula em D_1 ou D_2 , será feita uma medição no medidor na base $|+\rangle, |-\rangle$, e não em $|1\rangle, |2\rangle$. Se olharmos entre as partículas de D_1 somente para os eventos em que se detectou $|+\rangle$, por exemplo, $P_{D_1,+} = |\langle D_1 | \langle + | \Psi' \rangle|^2 = \frac{1}{2} \cos^2(\frac{\varphi}{2})$, a dependência com a fase reaparece. Separando com medidas em $|1\rangle$ e $|2\rangle$, que revelam o caminho de cada partícula, não se recupera a interferência, uma vez que $P_{D_1,1} = P_{D_1,2} = \frac{1}{4}$. Assim, separando os dados de D_1 e D_2 em “ D_1 e medidor em $|+\rangle$ ”, “ D_1 e medidor em $|-\rangle$ ”, etc., podemos ver os padrões de interferência porque “apagamos” a informação, no sentido de que esses estados do medidor não dão nenhuma informação sobre por qual braço a partícula passou (ver nota 2 na p. 69). A presença de interferência fica ainda mais difícil de ser pensada como uma característica do objeto estudado ou de sua relação oculta com o aparato experimental, pois o medidor é projetado e os dados são arranjados *após* as detecções em D_1 e D_2 . Incorporando a idéia da escolha atrasada, poderíamos escolher aleatoriamente após as detecções em D_1 e D_2 se o medidor será projetado na base $|1\rangle, |2\rangle$ (que revela o caminho de cada partícula detectada) ou $|+\rangle, |-\rangle$ (que revela o padrão de interferência). Reconstrói-se a estatística para cada caso com ou sem interferência agrupando os eventos em que se detectou em uma ou outra base após todas as detecções.

A medição fraca é uma das tentativas de se medir a localização da partícula dentro do interferômetro, mas ainda mantendo o medidor praticamente não-emaranhado com a partícula, e a condição para isso é a de que $|\langle 1 | 2 \rangle| \approx 1$. Contudo, pelo fato de o medidor interferir consigo mesmo, o resultado da medição fraca (o valor fraco) não é uma boa resposta para a pergunta “por onde no interferômetro passou a partícula?”.

No experimento de Denkmayr *et al.* [3] apresentado na seção 4.2 temos uma situação bastante parecida com as apresentadas nesse apêndice, mas ainda mais simples, sem a alternância presença/ausência do segundo divisor de feixes e nem a variação na escolha da base de projeção. Por exemplo, podemos entender que o momento magnético na direção x dos nêutrons é um medidor de caminho, pois está emaranhado com os autovalores da presença

em cada braço,

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|I\rangle|x+\rangle + |II\rangle|x-\rangle), \quad (3.21)$$

analogamente a $|\Psi'\rangle = (|I\rangle|1\rangle + ie^{i\varphi}|II\rangle|2\rangle)/\sqrt{2}$, exceto pelas fases. Os resultados de experimentos de escolha atrasada e apagadores quânticos nos ajudam a mostrar que normalmente somos levados a contradições desnecessárias quando pensamos em partículas dentro de interferômetros como sendo corpúsculos localizados (que é o caso do Gato de Cheshire quântico, em que se afirma que a partícula e sua propriedade intrínseca são localizadas). Se abrimos mão de dizer onde uma partícula se localiza dentro do interferômetro, os paradoxos não existem.

Referências Bibliográficas

- [1] AHARONOV, Y.; POPESCU, S.; ROHRLICH, D.; SKRZYPCZYK, P. Quantum Cheshire Cats. *New J. Phys.*, v. 15, p. 113015, 2013.
- [2] AHARONOV, Y.; ALBERT, D. Z.; VAIDMAN, L. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin- $\frac{1}{2}$ particle can turn out to be 100. *Phys. Rev. Lett.*, v. 60, p. 1351, 1988.
- [3] DENKMAYR, T. et al. Observation of a quantum Cheshire Cat in a matter-wave interferometer experiment. *Nat. Commun.*, v. 5, p. 4492, 2014.
- [4] BANCAL, J.-D. Quantum physics: isolate the subject. *Nat. Phys.*, v. 10, p. 11, 2014.
- [5] MORGAN, J. ‘Quantum Cheshire cat’ becomes reality. *BBC News - Science & Environment*, 2014. Em: <<http://www.bbc.com/news/science-environment-28543990>>. Acesso em: 13 de janeiro de 2015.
- [6] LEGGETT, A. J. Comment on “How the result of a measurement of a component of the spin of a spin- $\frac{1}{2}$ particle can turn out to be 100”. *Phys. Rev. Lett.*, v. 62, p. 2325, 1989.
- [7] PERES, A. Quantum measurements with postselection. *Phys. Rev. Lett.*, v. 62, p. 2326, 1989.
- [8] DUCK, I. M.; STEVENSON, P. M. The sense in which a “weak measurement” of a spin- $\frac{1}{2}$ particle’s spin component yields a value 100. *Phys Rev. D*, v. 40, p. 2112, 1989.
- [9] CORRÊA, R.; SANTOS, M. F.; MONKEN, C. H.; SALDANHA, P. L. ‘Quantum Cheshire Cat as simple quantum interference’. *arxiv:1409.0808*, 2014.
- [10] COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. *Quantum Mechanics*. 2nd (in english). ed. Paris: Hermann by John Wiley & Sons, 1977.

- [11] GRIFFITHS, J. D. *Introduction to quantum mechanics*. 2nd. ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2005.
- [12] BELINFANTE, F. J. *Measurements and time reversal in objective quantum theory*. [S.l.]: Pergamon Press, 1975. (International series in natural philosophy, v. 75). Sec. 1.17: Conventional formalism of the theory of measurements.
- [13] NEUMANN, J. von. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1955.
- [14] AHARONOV, Y.; ROHRLICH, D. *Quantum paradoxes*. Weinheim: Wiley-VCH, 2005.
- [15] PERES, A. *Quantum theory: concepts and methods*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [16] HOSTEN, O.; KWIAT, P. Observation of the spin Hall effect of light via weak measurements. *Science*, v. 319, p. 787, 2008.
- [17] DIXON, P. B.; STARLING, D. J.; JORDAN, A. N.; HOWELL, J. C. Ultrasensitive beam deflection measurement via interferometric weak value amplification. *Phys. Rev. Lett.*, v. 102, p. 173601, 2009.
- [18] LUNDEEN, J. S.; SUTHERLAND, B.; PATEL, A.; STEWART, C.; BAMBER, C. Direct measurement of the quantum wavefunction. *Nature*, v. 474, p. 188, 2011.
- [19] SJOQVIST, E. Geometric phase in weak measurements. *Phys. Lett. A*, v. 359, p. 187, 2006.
- [20] PALACIOS-LALOY, A. et al. Experimental violation of a Bell's inequality in time with weak measurement. *Nat. Phys.*, v. 6, p. 442, 2010.
- [21] DRESSEL, J.; MALIK, M.; MIATTO, F. M.; JORDAN, A. N.; BOYD, R. W. Colloquium: Understanding quantum weak values: Basics and applications. *Rev. Mod. Phys.*, v. 86, p. 307, 2014.
- [22] AHARONOV, Y.; VAIDMAN, L. Aharonov and Vaidman reply. *Phys. Rev. Lett.*, v. 62, p. 2327, 1989.

- [23] SOKOLOVSKI, D. Are the weak measurements really measurements? *Quanta*, v. 2, p. 50, 2013.
- [24] SALDANHA, P. L. Interpreting a nested Mach-Zehnder interferometer with classical optics. *Phys. Rev. A*, v. 89, p. 033825, 2014.
- [25] FERRIE, C.; COMBES, J. How the result of a single coin toss can turn out to be 100 heads. *Phys. Rev. Lett.*, v. 113, p. 120404, 2014.
- [26] STUCKEY, W. M.; SILBERSTEIN, M.; MCDEVITT, T. The quantum Cheshire Cat experiment of Denkmayr *et al.* *arxiv:1410.1522*, 2014.
- [27] BIALYNICKI-BIRULA, I. On the wave function of the photon. *Acta Phys. Pol. A*, v. 86, p. 97, 1994.
- [28] SIPE, J. E. Photon wave functions. *Phys. Rev. A*, v. 52, p. 1875, 1995.
- [29] BIALYNICKI-BIRULA, I. Photon wave function. *Progress in Optics*, XXXVI, 1996.
- [30] SALDANHA, P. L.; MONKEN, C. H. Interaction between light and matter: a photon wave function approach. *New J. Phys.*, v. 13, n. 073015, 2011.
- [31] MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical coherence and quantum optics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. Seção 5.6.
- [32] HECHT, E. *Optics*. 4th. ed. San Francisco: Addison Wesley, 2002. 375 p.
- [33] FEIZPOUR, A.; XING, X.; STEINBERG, A. M. Amplifying single-photon nonlinearity using weak measurements. *Phys. Rev. Lett.*, v. 107, p. 133603, 2011.
- [34] COMBES, J.; FERRIE, C.; JIANG, Z.; CAVES, C. M. Quantum limits on postselected, probabilistic quantum metrology. *Phys. Rev. A*, v. 89, p. 052117, 2014.
- [35] JORDAN, A. N.; MARTÍNEZ-RINCÓN, J. J.; HOWELL, J. C. Technical advantages for weak-value amplification: When less is more. *Phys. Rev. X*, v. 4, p. 011031, 2014.
- [36] ALVES, G. B.; ESCHER, B. M.; FILHO, R. L. de M.; ZAGURY, N.; DAVIDOVICH, L. Weak-value amplification as an optimal metrological protocol. *arxiv:1410.7415*, 2014.

- [37] AHARONOV, Y.; VAIDMAN, L. Properties of a quantum system during the time interval between two measurements. *Phys. Rev. A*, v. 41, p. 11, 1990.
- [38] GRIFFITHS, J. D. *Introduction to electrodynamics*. 3rd. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999.
- [39] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. 3rd. ed. [S.l.]: Addison-Wesley, 2001. Seções 4.2 e 4.3.
- [40] DANAN, A.; FARFURNIK, D.; BAR-AD, S.; VAIDMAN, L. Asking photons where they have been. *Phys. Rev. Lett.*, v. 111, p. 240402, 2013.
- [41] VAIDMAN, L. Comment on “How the result of a single coin toss can turn out to be 100 heads”. *arxiv:1409.5386*, 2014.
- [42] SOKOLOVSKI, D. Why there are no ‘anomalous’ weak values in a classical theory. *arxiv:1410.0570*, 2014.
- [43] DRESSEL, J. Weak values are interference phenomena. *arxiv:1410.0943*, 2014.
- [44] WHEELER, J. A. *Mathematical foundations of quantum theory*. [S.l.]: Academic Press, 1978. 9 a 48 p. Editado por MARLOW, A. R.. Cap. “The ‘past’ and the ‘delayed-choice double-slit experiment”.
- [45] JACQUES, V. et al. Experimental realization of Wheeler’s delayed-choice gedanken experiment. *Science*, v. 315, p. 966, 2007.
- [46] SCULLY, M. O.; ENGLERT, B.-G.; WALTHER, H. Quantum optical tests of complementarity. *Nature*, v. 351, p. 111, 1991.
- [47] ENGLERT, B.-G.; SCULLY, M. O.; WALTHER, H. Quantum erasure in double-slit interferometers with which-way detectors. *Am. J. Phys.*, v. 67, p. 325, 1999.
- [48] WALBORN, S. P.; CUNHA, M. O. T.; PÁDUA, S.; MONKEN, C. H. Double-slit quantum eraser. *Phys. Rev. A*, v. 65, p. 033818, 2002.
- [49] ATHERTON, D. P.; RANJIT, G.; GERACI, A. A.; WEINSTEIN, J. D. Observation of a classical Cheshire cat in an optical interferometer. *Opt. Lett.*, v. 40, p. 879, 2015.

- [50] TRIMMER, J. D. The present situation in quantum mechanics: a translation of Schrodinger's 'cat paradox' paper. *Proceedings of the american philosophical society*, v. 124, p. 323, 1980. Tradução do artigo de E. Schrodinger: "Die gegenwartige Situation in der Quantenmechanik, *Naturwissenschaften*, v. 23, pp. 807–812; 823–828; 844–849 (1935).
- [51] EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, v. 47, p. 777, 1935.
- [52] BOHR, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, v. 48, p. 696, 1935.
- [53] BASDEVANT, J.-L.; DALIBARD, J. *The quantum mechanics solver*. 2nd. ed. [S.l.]: Springer, 2006. Cap. 16.
- [54] GREENBERGER, D. M.; YASIN, A. Simultaneous wave and particle knowledge in a neutron interferometer. *Phys. Lett. A*, v. 128, p. 391, 1988.
- [55] MANDEL, L. Coherence and indistinguishability. *Opt. Lett.*, v. 16, p. 1882, 1991.
- [56] ENGLERT, B.-G. Fringe visibility and which-way information: an inequality. *Phys. Rev. Lett.*, v. 77, p. 2154, 1996.
- [57] JAKOB, M.; BERGOU, J. A. Quantitative complementarity relations in bipartite systems. *arxiv:0302075*, 2003.