

**Experimento da Fenda Dupla: Dualidade Onda-Partícula  
e sua Quantificação e um Exemplo de Tomografia**

Saulo Vicente Moreira

2014



**Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG**

**Instituto de Ciências Exatas - ICEx**

**Programa de Pós Graduação em Física**

**Experimento da Fenda Dupla: Dualidade Onda-Partícula e sua Quantificação  
e um Exemplo de Tomografia**

Saulo Vicente Moreira

Orientadora: Prof. Dr<sup>a</sup>. Maria Carolina Nemes

Co-orientador: Prof. Dr. José Geraldo de Oliveira Júnior

Dissertação apresentada ao departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para a obtenção do Título de Mestre em Física

Área de Concentração: Fundamentos de Física Quântica.

*À Carol.*

*“Estou te falando em abstrato e pergunto-me: sou uma aria cantabile? Não, não se pode cantar o que te escrevo. Por que não abordo um tema que facilmente poderia descobrir? mas não: caminho encostada à parede, escamoteio a melodia descoberta, ando na sombra, nesse lugar onde tantas coisas acontecem. Às vezes escorro pelo muro, em lugar onde nunca bate sol. Meu amadurecimento de um tema já seria uma aria cantabile - outra pessoa que faça então outra música - a música do amadurecimento do meu quarteto. Este é antes do amadurecimento. A melodia seria o fato.”*

Clarice Lispector, *Água Viva*

# Agradecimentos

Agradeço à Carol, orientadora deste trabalho, por todo aprendizado humano e acadêmico, desde a iniciação científica. Em especial, ressalto o seu desapego às hierarquias que são tão comuns no ambiente acadêmico, a sua capacidade de agregar e acolher, e seus esforços por uma construção de conhecimento coletiva, generosidade e inspiração. Ao Zezinho, co-orientador, com quem tudo começou e pelas discussões sempre tão enriquecedoras.

Agradeço a todos que participaram das reuniões de grupo, pelas sugestões, discussões e até mesmo colaborações, tanto no Departamento de Física quanto no Departamento de Filosofia da Fafich: Breno, Karen, Romeu, Patrícia, Pablo, Marcos, José Geraldo, Juvenil, Raul e cia.

À minha família: minha mãe, Sonia Maria, que sempre apoiou e possibilitou minhas escolhas. Não tenho palavras para agradecer tanta dedicação e amor. Às minhas irmãs, Juliana e Camila, pelo apoio e amizade.

Aos amigos: Julia, Leandrinho, Samuel, Bárbara Rosa, Barbara Costa. Sou muito grato por tudo que compartilhamos durante esses anos de Belo Horizonte, nos botecos, carnavais (mesmo que inventados), nos cafés depois do almoço, em aventuras e desventuras e vida compartilhadas de noite e de dia... Levo vocês no coração. Juju, não vou esquecer daquela noite em que envelhecemos juntos, de repente.

Meu agradecimento também aos professores, funcionários e colegas do Departamento de Física.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos a dualidade onda-partícula e também propomos a realização de uma tomografia de estado mínima em um único plano de detecção em um modelo para o experimento de interferência de *ondas de matéria* através da fenda dupla. Uma descrição quântica deste experimento é apresentada, e as situações intermediárias de conhecimento parcial das descrições ondulatória e corpuscular foram quantificadas, por meio das quantidades denominadas visibilidade (V) e previsibilidade (P), respectivamente, como é usual na literatura. Primeiramente, os cálculos destas quantidades foram realizados para o modelo do caso ideal de partículas livres enviadas através do obstáculo com a fenda dupla. Já na segunda parte, buscando uma aproximação com uma situação mais realística, efetuamos os mesmos cálculos para o caso em que a partícula interage com um ambiente - aqui, consideramos este ambiente constituído por um gás ideal de partículas, por simplicidade. Neste caso, emaranhamento com o ambiente é desenvolvido, e o estado do sistema é levado pela dinâmica - que por sua vez é regida por uma equação mestra - a um estado de mistura. Em ambos os casos, verificamos que a relação  $P^2 + V^2 \leq 1$  é obedecida e uma análise do comportamento dessas quantidades foi feita. Por fim, propomos uma tomografia de estado mínima em um único plano para o modelo do experimento aqui descrito.

**Palavras-chave:** dualidade onda-partícula, visibilidade, previsibilidade, tomografia

# Abstract

In this work, we studied the wave-particle duality and also proposed the implementation of a minimal tomography in the same plane of detection in a model for the interference experiment with *matter waves* through the double slit. A quantum mechanical description of this experiment is presented, and the intermediary situations of partial knowledge of the ondulatory and corpuscular descriptions were quantified, through the quantities called visibility (V) and predictability (P), respectively, as it is usual in the literature. First, the calculations of these quantities were done for the model of the ideal case of particles sent through the obstacle with the double slit. In the second part, we pursued an approximation with a more realistic situation and did the same calculations for the case in which the particle interacts with an environment - here, we have considered this environment made of an ideal gas of particles, for simplicity. In this case, entanglement with the environment is developed, and the state of the system becomes, after the acting of the dynamics - which is governed by a master equation - a mixed state. In both cases, we verified that the relationship  $P^2 + V^2 \leq 1$  is obeyed, and an analysis of the behaviour of these quantities were done. Finally, we proposed a minimal state tomography in the same plane in the model for the experiment here described.

**Keywords:** wave-particle duality, visibility, predictability, tomography

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Estados em Mecânica Quântica . . . . .	2
1.2 Sistemas Compostos, Emaranhamento e Matriz Densidade Reduzida . . . . .	3
1.3 Dualidade Onda-Partícula e Complementaridade de Bohr . . . . .	4
1.4 Casos Intermediários e a Quantificação da Dualidade . . . . .	6
1.5 Visibilidade e Indistinguibilidade . . . . .	9
1.6 Definições Gerais de Visibilidade e Previsibilidade . . . . .	12
<b>2 Propagação Livre e Dualidade Onda-Partícula</b>	<b>16</b>
2.1 A Dinâmica da Partícula Livre . . . . .	16
2.1.1 Alargamento do Pacote de Ondas e Conexão com o Princípio da Incerteza	19
2.2 Modelo Esquemático para o Experimento da Fenda Dupla . . . . .	19
2.2.1 Sobre os Estados de Fenda . . . . .	23
2.3 Interferência e os “Pacotes” Individuais . . . . .	24
2.4 Visibilidade e Previsibilidade no Modelo com Propagação Livre . . . . .	26
<b>3 Interação com o Ambiente e Dualidade Onda-Partícula</b>	<b>36</b>
3.1 Dinâmica da Partícula na Presença do Ambiente: Visão Geral da Decoerência e Modelo de Joos e Zeh . . . . .	37
3.1.1 Mecanismo Geral da Decoerência . . . . .	38
3.1.2 Processo de espalhamento e a Equação Mestra . . . . .	40



Decoerência Espacial . . . . .	42
Processo de Espalhamento - Ambiente Constituído de um Gás Ideal . . . . .	43
3.2 Modelo Esquemático para o Experimento de Difração Através da Fenda Dupla com Decoerência . . . . .	47
3.3 O Padrão de Interferência . . . . .	48
3.4 Visibilidade e Previsibilidade no Modelo com Decoerência . . . . .	49
<b>4 Perspectiva de Aplicação: Exemplo de Tomografia</b>	<b>55</b>
4.1 Tomografia . . . . .	55
4.1.1 Medição em um Sistema Quântico . . . . .	56
4.1.2 Medida Generalizada . . . . .	56
4.2 Tomografia Mínima para um Sistema de Dois Níveis . . . . .	57
4.3 Tomografia Mínima no Experimento da Fenda Dupla . . . . .	59
<b>5 Conclusão</b>	<b>62</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Esta dissertação abordará a dualidade onda-partícula, um tema de fundamental importância em Mecânica Quântica. Estudaremos o célebre experimento da fenda dupla, o qual está intimamente relacionado a esta dualidade, e como bem pontuou R. Feynman “é um fenômeno impossível, absolutamente impossível, de ser explicado de qualquer forma clássica e que contém o coração da mecânica quântica” [1]. Neste experimento um padrão de interferência pode ser observado ao enviarmos partículas através da fenda dupla. Uma descrição quântica deste experimento será apresentada, com vistas à quantificação da dualidade. Como veremos adiante, esta quantificação dos caracteres ondulatório e de partícula que será proposta dependerá inteiramente deste padrão [2]. Como perspectiva de aplicação, no Capítulo 4 será proposta uma tomografia de estado mínima em um único plano de detecção, na qual utilizaremos o modelo do experimento da fenda dupla aqui apresentado.

Nesta Introdução, primeiramente, discutiremos de forma breve alguns conceitos e ferramentas em Mecânica Quântica que serão utilizados aqui e ao longo dos capítulos posteriores, assim como faremos uma revisão dos aspectos relevantes para este trabalho do conceito da dualidade onda-partícula. Abordaremos a complementaridade de Bohr e, em seguida, percorreremos alguns trabalhos mais recentes, do final do século XX e do início do século XXI,

os quais propõem a possibilidade de obtermos informação parcial dos caracteres ondulatório e de partícula e sua quantificação, por meio das quantidades visibilidade e previsibilidade. Nos capítulos seguintes, apresentaremos descrições quânticas para o experimento da difração através da fenda dupla, para o caso de *ondas de matéria*, ou seja, as partículas que são enviadas pela fonte tem massa não-nula, conforme veremos em detalhes no Capítulo 2. No Capítulo 2, estudaremos a situação dinâmica em que não há nenhuma interação entre a partícula e outras eventuais partículas presentes, ou seja, consideraremos a propagação livre. Já no Capítulo 3, incluiremos os efeitos da presença de um ambiente constituído por um gás ideal de partículas, o que torna o modelo mais realístico. Por último, como já mencionado, proporemos uma estratégia de tomografia mínima em um único plano do modelo do experimento da fenda dupla do Capítulo 4.

## 1.1 Estados em Mecânica Quântica

Estados quânticos são representados por vetores em um espaço vetorial complexo, o *espaço de Hilbert* que, de forma mais geral, apresenta dimensão infinita. A dimensão do espaço de Hilbert será determinada pela grandeza física em questão. Por exemplo, o estudo da grandeza spin  $\frac{1}{2}$  realiza-se em um espaço vetorial de duas dimensões, enquanto se estamos interessados em graus de liberdade espaciais, temos que lançar mão de um espaço com dimensão infinita. Supõe-se que esse espaço é dotado de produto escalar [3] de forma que, dados dois vetores que se escrevem como  $|\varphi\rangle$  e  $|\psi\rangle$ , de acordo com a notação de Dirac [4] valha a propriedade  $(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)^*$ . Da condição de normalização das probabilidades, tem-se que estes vetores devem ter norma unitária. Estes estados são portadores da informação passível de ser extraída de um sistema quântico.

Um estado quântico é dito puro se sua representação pode ser feita simplesmente por um vetor pertencente ao respectivo espaço de Hilbert, ou seja, se  $|\psi\rangle$ . Neste ponto, é interessante introduzir a *matriz densidade*  $\rho$  de um sistema quântico, que no caso de um estado puro, escreve-se como  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ .

A definição geral da matriz densidade  $\rho$  é, entretanto,

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (1.1)$$

onde  $p_i$  são probabilidades, e que, por conseguinte, satisfazem  $\sum_i p_i = 1$ . De acordo com

esta definição, um estado puro seria tal que uma das probabilidades fosse 1, com as demais nulas. Em contrapartida, o sistema quântico terá um *estado de mistura*, se não houver uma probabilidade  $p_i$  unitária, com as demais, conseqüentemente, iguais a zero.

A matriz densidade  $\rho$  é hermitiana, de modo que

$$\rho^\dagger = \rho.$$

Ademais, as seguintes propriedades são obedecidas

$$\text{Tr}[\rho] = 1,$$

e

$$\text{Tr}[\rho^2] \leq 1.$$

Nesta última relação, a igualdade será válida somente se o estado do sistema for puro.

## 1.2 Sistemas Compostos, Emaranhamento e Matriz Densidade Reduzida

Nesta seção, abordaremos as situações em que faz-se necessário levar em conta dois ou mais graus de liberdade. Um tratamento que em muitas situações pode ser não apenas conveniente, mas também natural, consiste em considerar os sistemas que requerem mais de um grau de liberdade para a descrição de seu estado como constituídos de vários *subsistemas* [3].

Por simplicidade, tomaremos o caso de um sistema com dois graus de liberdade - a extensão para um número maior é imediata. Seja o estado  $|\psi\rangle$  pertencente ao espaço de Hilbert  $H_1$  e  $|\varphi\rangle$ , que, por sua vez, pertence ao espaço de Hilbert  $H_2$ . Cada um destes espaços corresponde a um subsistema. O estado do sistema será representado por um *produto tensorial*

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle, \quad (1.2)$$

e pertencerá ao espaço de Hilbert  $H = H_1 \otimes H_2$ .

Se o estado do sistema não pode ser escrito como na Equação (1.2), diz-se que os dois subsistemas estão *emaranhados*. Um estado emaranhado para o sistema implica em correlações entre os subsistemas que o compõem. Essas correlações são de natureza quântica [3], uma vez que não tem contrapartida na física clássica.

O estado do sistema que descreve apenas um dos subsistemas,  $H_1$  ou  $H_2$ , pode ser obtido por meio do *traço parcial* sobre um dos subsistemas. Este estado nos permitirá obter as predições físicas que se referem a medidas realizadas em somente um dos subsistemas.

Assim, por definição, o estado do subsistema 1 ( $\rho_1$ ) é obtido do estado do sistema ( $\rho$ ) por meio do traço parcial no subsistema 2:

$$\rho_1 = Tr_2[\rho]. \quad (1.3)$$

De forma completamente análoga, para  $\rho_2$ , tem-se

$$\rho_2 = Tr_1[\rho]. \quad (1.4)$$

### 1.3 Dualidade Onda-Partícula e Complementaridade de Bohr

A ideia de complementaridade em Mecânica Quântica foi introduzida por Niels Bohr, em 1927, em seu célebre trabalho intitulado "The Quantum Postulate and the Recent Developments of Atomic Theory"<sup>1</sup> [5], como tentativa de interpretação da teoria. Bohr, nesse trabalho, destaca que a Mecânica Quântica demanda uma nova atitude do ponto de vista filosófico, a qual ele chama de *complementaridade* [6]. Sobre o conceito de complementaridade, Camilleri [6] cita trecho da carta de Bohr a Schrödinger, em 23 de maio de 1928:

There remains always -as stated in the article- an absolute exclusion between the application of the concept of stationary states and the tracking of the behaviour of an individual particle in the atom. This exclusion provides in my opinion a particularly striking example of the general complementary nature of the description. As I have tried to show in my article, a quite definite meaning can be ascribed to the concept of stationary states as well as to the discrete energy values within their domain of applicability. <sup>2</sup> [7]

Bohr salienta, neste trecho, que as descrições em Mecânica Quântica seriam fundamentalmente mutuamente exclusivas. Essa exclusão mútua estender-se-ia, dessa forma, às descrições ondulatória e corpuscular, advindas da Física Clássica, evidenciando a limitação dos

<sup>1</sup>Tradução livre: "O Postulado Quântico e o Recente Desenvolvimento da Teoria Atômica".

<sup>2</sup>Tradução livre: *Persiste sempre -como exposto no artigo- uma exclusão absoluta entre a aplicação do conceito de estados estacionários e o acompanhamento do comportamento de uma partícula individual no átomo. Esta exclusão fornece em minha opinião um exemplo surpreendente da natureza complementar da descrição. Como tentei mostrar em meu artigo, um significado bem definido pode ser atribuído ao conceito de estados estacionários assim como aos valores discretos de energia dentro de seu limite de aplicabilidade.*

conceitos clássicos para a descrição em um nível quântico. No trecho a seguir, Bohr [8] relaciona complementaridade e exclusão mútua à aplicação dos conceitos e ideias da Física Clássica:

The term 'complementarity' denotes the relation of mutual exclusion characteristic of the quantum theory with regard to the application of the various classical concepts and ideas.<sup>3</sup>

Sobre a complementaridade e a *dualidade onda-partícula*, Bohr [5] escreve:

The two views of the nature of light are rather to be considered as different attempts at an interpretation of experimental evidence in which the limitation of the classical concepts is expressed in complementary ways<sup>4</sup>

e

We are not dealing with contradictory but with complementary pictures of the phenomena, which only together offer a natural generalization of the classical mode of description.<sup>5</sup>

Tendo em vista o exposto, a conexão entre complementaridade e a dualidade onda-partícula pode ser interpretada como a exclusão mútua dos fenômenos ondulatório - a manifestação da interferência - e corpuscular, sendo este último definido como a manifestação do conhecimento do caminho, em um dado experimento interferométrico. Entretanto, experimentos realizados nas últimas décadas do final do século XX motivaram estudos direcionados para a possibilidade de quantificação dessa dualidade, na medida em que informação dos caracteres ondulatório e de partícula eram passíveis de serem extraídos em um experimento de interferometria, como será visto na seção seguinte.

---

<sup>3</sup>Tradução livre: *O termo 'complementaridade' denota a relação de exclusão mútua característica da teoria quântica no que diz respeito à aplicação dos vários conceitos e ideias clássicas.*

<sup>4</sup>Tradução livre: *As duas visões da natureza da luz são na verdade para serem consideradas como diferentes tentativas de uma interpretação da evidência experimental na qual a limitação dos conceitos clássicos é expressa de forma complementar.*

<sup>5</sup>Tradução livre: *Nós não estamos lidando com aspectos contraditórios, mas complementares do fenômeno, os quais apenas juntos oferecem uma generalização natural do modo clássico de descrição.*

## 1.4 Casos Intermediários e a Quantificação da Dualidade

O experimento da fenda dupla mostra-se particularmente ilustrativo da dualidade onda-partícula. De fato, esse tipo de experimento foi usado por Young para demonstração da natureza ondulatória da luz e por C. Davisson [9] para demonstração da natureza ondulatória dos elétrons [10]. O princípio da complementaridade é uma tentativa de reconciliar esse resultado com o fato de fótons e elétrons apresentarem características que podem ser atribuídas a partículas, como serem individualmente detectáveis [10]. No contexto deste experimento, a complementaridade de Bohr é expressa pela exclusão mútua entre a observação de interferência -característica intrinsecamente ondulatória- e o conhecimento sobre o caminho, que nos remete à noção de partícula: ou observamos um padrão de interferência ou determinamos o caminho - por qual das fendas a partícula passou -, mas nunca ambos ao mesmo tempo [11].

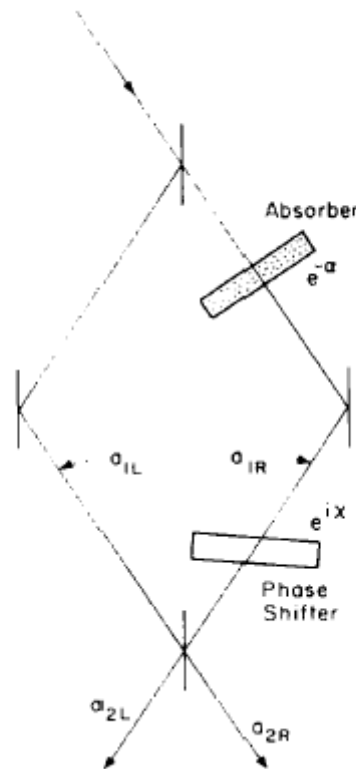


Figura 1.1: Arranjo experimental que possibilita obtenção de informação parcial do caminho da partícula. Figura retirada de [11].

Contudo, Wothers e Zurek [10] analisaram o experimento da fenda dupla e apontaram

a possibilidade de obtenção de informação incompleta sobre o caminho da partícula, o que implicaria em um padrão de interferência “borrado”. A dualidade onda-partícula, portanto, manifestar-se-ia também em casos intermediários. De fato, uma verificação experimental desse fenômeno foi feita por Rauch e Summhammer em 1984 [12] em um experimento de interferometria com nêutrons.

O interferômetro de Mach Zehnder é bastante utilizado na literatura para ilustrar esses casos intermediários. Este interferômetro consiste de dois divisores de feixes e dois espelhos (Figura 1.1). Ao inserirmos um defasador em um dos braços do interferômetro e variarmos a fase, observaremos um padrão de interferência. Esse padrão apresentará máximo contraste no caso em que não temos nenhum conhecimento sobre qual dos dois caminhos a partícula seguiu. Se for inserido, porém, um absorvedor parcial<sup>6</sup> em um dos braços do interferômetro, casos intermediários poderão ser obtidos: teremos algum conhecimento sobre o caminho que a partícula seguiu, o qual será tanto melhor quanto menor for a taxa de transmissão do absorvedor [11]. Este conhecimento parcial do caminho implicará, por sua vez, em uma diminuição do contraste entre as franjas do padrão de interferência.

Uma vez verificados experimentalmente esses casos intermediários, surge, naturalmente, a questão: haveria a possibilidade de quantificar esta dualidade? E ainda mais, seria possível estabelecer uma relação entre os parâmetros quantificadores de cada um dos modos de descrição, ondulatório e de partícula?

A. Zeilinger [11], propõe o uso da Teoria de Shannon [13] para quantificação desses casos de conhecimento parcial de dois tipos de informação. Em um experimento com  $n$  possíveis resultados que podem ocorrer com probabilidades  $p_i$ , devidamente normalizadas, a entropia  $S$  é definida como

$$S = - \sum_{i=1}^n p_i \log_n p_i. \quad (1.5)$$

Esta definição tem a propriedade de  $S$  resultar zero se um dos  $p_i$ 's for igual a um e todos os outros iguais a zero. Por sua vez, o valor máximo de  $S$ , que corresponde à unidade, será atingido quando todos os  $p_i$ 's forem iguais. Não pretendemos explorar esta definição neste trabalho. O leitor interessado poderá consultar as referências [11] e [14].

Motivados pelo experimento de H. Rauch e J. Summhammer [12], D. Greenberger e A.

---

<sup>6</sup>Uma alternativa ao absorvedor seria o primeiro divisor de feixes da montagem experimental com diferentes taxas de transmissão para cada um dos feixes emergentes.



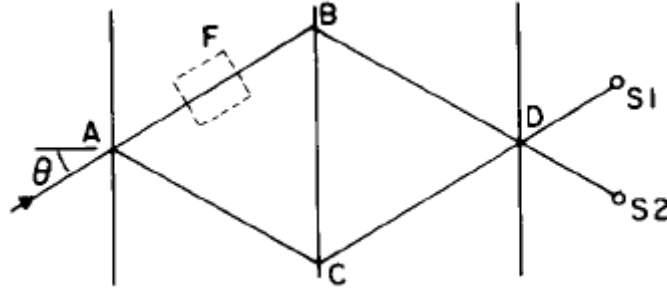


Figura 1.2: Esquema experimental de um experimento de interferometria de nêutrons. Figura retirada de [14].

Yasin [14] propõe a visibilidade  $V$  como medida das propriedades ondulatórias no experimento de interferência com nêutrons, uma vez que a mesma quantifica o contraste no padrão de interferência obtido por meio da variação da fase entre braços do interferômetro (Figura 1.2):

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (1.6)$$

onde  $I_{max}$  e  $I_{min}$  correspondem às intensidades máximas e mínimas do padrão de interferência, respectivamente. Assim, considerando o interferômetro mostrado na Figura 1.2, sendo  $a$  e  $b$  as amplitudes de cada um dos feixes de nêutrons que serão recombinados, pode-se escrever a função de onda em  $D$  como

$$\Psi = (ae^{ik_x x} + be^{i\phi} e^{-ik_x x})e^{ik_z z}, \quad (1.7)$$

$k_x, k_z$  na Equação (1.7) são determinados pelas condições de espalhamento de Bragg com  $a$  e  $b$  reais e  $\phi$  representa a diferença de fase entre os feixes, em um dado ponto. Assim,

$$|\Psi|^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(2k_x x + \phi), \quad (1.8)$$

e a visibilidade será

$$V = \frac{2ab}{a^2 + b^2}. \quad (1.9)$$

Se escrevermos  $a = R \cos \beta$  e  $b = R \sin \beta$ , resulta

$$W = \sin 2\beta. \quad (1.10)$$

Já para medir o caráter de partícula do feixe, D. Greenberger e A. Yasin [14] propõem o seguinte critério: supõe-se que todas as partículas se encontram no feixe mais intenso, e

compara-se a probabilidade desta suposição estar correta com a de não termos nenhuma ideia sobre em qual dos feixes a partícula se encontra. Portanto, se  $|a|^2 > |b|^2$ , definimos a previsibilidade  $P$  como

$$P = \frac{\frac{|a|^2}{(|a|^2+|b|^2)} - 1/2}{1/2} = \frac{|a|^2 - |b|^2}{|a|^2 + |b|^2} = \cos 2\beta. \quad (1.11)$$

Assim, quando os dois feixes tem a mesma intensidade, não temos nenhum conhecimento sobre por qual dos caminhos a partícula possa ter seguido, uma vez que ambos são igualmente prováveis, o que implica  $P = 0$ . Por outro lado, temos máxima visibilidade,  $V = 1$ . Quando todas as partículas seguirem por apenas um dos caminhos, teremos conhecimento total sobre o caráter de partícula, o que resultará  $P = 1$ . Nenhum contraste, porém, será obtido:  $V = 0$ . A relação

$$P^2 + V^2 = 1, \quad (1.12)$$

será satisfeita, e implica que a obtenção de algum conhecimento sobre o caminho afeta a visibilidade do padrão de interferência.

Do exposto, vê-se que um único parâmetro ( $\beta$ ), que varia de um conhecimento total do caráter de partícula à situação em que temos máximo contraste no padrão de interferência - manifestação exclusiva do caráter ondulatório -, governa o quanto de informação sobre cada um desses caracteres podemos obter.

A seguir, abordaremos a relação entre visibilidade e indistinguibilidade das possibilidades de caminho.

## 1.5 Visibilidade e Indistinguibilidade

L. Mandel [15] analisa a relação entre coerência e a indistinguibilidade das trajetórias das partículas - a obtenção de interferência está intimamente ligada a esta indistinguibilidade. O experimento da Figura 1.3 ilustra essa relação. Se existe a possibilidade de um fóton detectado pelo fotodetector D vir de qualquer das duas fontes na Figura 1.3, sendo os dois caminhos possíveis indistínguíveis, então a amplitude de probabilidade associada ao fóton de ser detectado em D é a soma das amplitudes de probabilidade associadas aos dois caminhos possíveis. Sendo a probabilidade de detecção dada pelo módulo quadrado da soma das amplitudes, teremos, por conseguinte, interferência. Consideremos o estado quântico  $|\Psi\rangle$

representado por

$$|\Psi\rangle = \alpha |1\rangle_1 |0\rangle_2 + \beta |0\rangle_1 |1\rangle_2, \quad (1.13)$$

com

$$(|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1).$$

$|n\rangle_j$  representa o estado em que  $n$  fótons se originam na fonte  $j$  ( $n = 0, 1; j = 1, 2$ ). O estado  $|\Psi\rangle$  é, portanto, uma superposição coerente, já que o fóton pode se originar tanto na fonte 1 com probabilidade  $|\alpha|^2$  ou na fonte 2 com probabilidade  $|\beta|^2$ .

Utilizando a matriz densidade, podemos escrever este estado como

$$\rho_{ID} = |\alpha|^2 |1\rangle_1 |0\rangle_{21} \langle 1|_2 \langle 0| + |\beta|^2 |0\rangle_1 |1\rangle_{21} \langle 0|_2 \langle 1| + (\alpha\beta^* |1\rangle_1 |0\rangle_{22} \langle 1|_1 \langle 0| + h.c.), \quad (1.14)$$

onde o subscrito ID denota indistinguibilidade e *h.c.*, o hermitiano conjugado.

Quando, por sua vez, o operador densidade tem a forma diagonal

$$\rho_D = |\alpha|^2 |1\rangle_1 |0\rangle_{21} \langle 1|_2 \langle 0| + |\beta|^2 |0\rangle_1 |1\rangle_{21} \langle 0|_2 \langle 1|, \quad (1.15)$$

temos uma mistura incoerente de estados. Embora  $|\alpha|^2$  e  $|\beta|^2$  sejam as probabilidades de que o fóton tenha se originado na fonte 1 ou na fonte 2 (Figura 1.3), é possível em um experimento identificar em qual das fontes o fóton se originou. O subscrito  $D$  sinaliza esta distinguibilidade.

Seja um estado

$$\rho = \rho_{11} |1\rangle_1 |0\rangle_{21} \langle 1|_2 \langle 0| + \rho_{22} |0\rangle_1 |1\rangle_{21} \langle 0|_2 \langle 1| + (\rho_{12} |1\rangle_1 |0\rangle_{22} \langle 1|_1 \langle 0| + h.c.) \quad (1.16)$$

É possível mostrar que existe uma decomposição de  $\rho$  em  $\rho_{ID}$  e  $\rho_D$ , dada por

$$\rho = P_{ID}\rho_{ID} + P_D\rho_D, \quad (1.17)$$

com

$$(P_{ID} + P_D = 1).$$

Na Equação (1.17),  $P_{ID}$  e  $P_D$  são as probabilidades de as fontes serem indistinguíveis ou distinguíveis. Esta decomposição é possível porque os dois elementos independentes de  $\rho_{ID}$ , juntamente com  $P_{ID}$ , são determinados pelos três elementos independentes de  $\rho$ . Utilizando as Equações (1.15), (1.16) e (1.17), teremos

$$\rho_{11} = |\alpha|^2$$

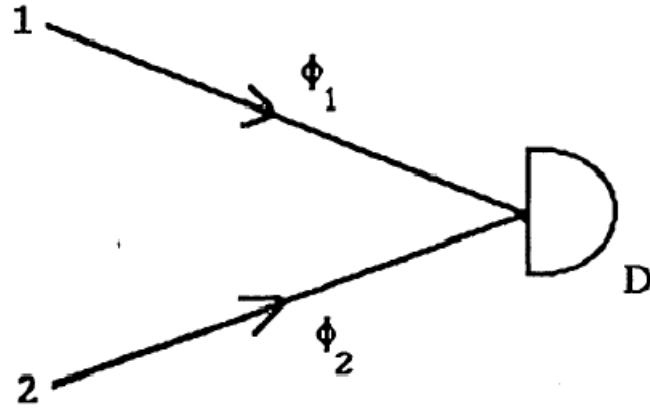


Figura 1.3: Esquema do experimento. Figura retirada de [15].

$$\rho_{22} = |\beta|^2$$

$$\rho_{12} = P_{ID}\alpha\beta^*, \quad (1.18)$$

donde segue que

$$\alpha\beta^* = (\rho_{11}\rho_{22})^{1/2} \exp(i \arg \rho_{12}), \quad (1.19)$$

$$P_{ID} = \frac{\rho_{12}}{(\rho_{11}\rho_{22})^{1/2}} \exp(-i \arg \rho_{12}) = \frac{|\rho_{12}|}{(\rho_{11}\rho_{22})^{1/2}}. \quad (1.20)$$

$P_{ID}$  é, portanto, um quantificador da indistinguibilidade no estado quântico geral  $\rho$  e corresponde à visibilidade dada pela Equação (1.6), uma vez que, usando o operador densidade, a intensidade pode ser escrita como [2]

$$I = |\rho_{11}| + |\rho_{22}| + 2|\rho_{12}| \cos(\arg[\rho_{12}]), \quad (1.21)$$

como será visto na Seção seguinte.

Dessa forma, numa base em que a matriz densidade não seja diagonal, visibilidade e indistinguibilidade podem ser vistas como equivalentes. Isso está de acordo com o fato de que, na situação de máxima coerência -elementos não diagonais do operador densidade não-nulos e com módulo máximo-, observaremos um padrão de interferência com perfeito contraste entre as franjas e visibilidade unitária. Um operador densidade com esta característica também corresponde ao estado maximamente indistinguível, de acordo com o quantificador  $P_{ID}$  (ou visibilidade, como vimos) de indistinguibilidade dado pela Equação (1.20).

## 1.6 Definições Gerais de Visibilidade e Previsibilidade

Definições gerais de visibilidade e previsibilidade foram obtidas por S. Dürr [2], considerando interferômetros em que não apenas dois feixes interferem. Seja um divisor de feixes com  $n$  saídas. As intensidades do feixe que deixam o primeiro divisor na Figura 1.4 são arbitrárias; já ao saírem do segundo, os feixes tem a mesma intensidade. Na representação em que os  $n$  feixes são utilizados como base, o estado que representa o feixe que emerge do segundo divisor pode ser escrito, de forma genérica, como

$$|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} e^{i\phi_1} \\ e^{i\phi_2} \\ \vdots \\ e^{i\phi_n} \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

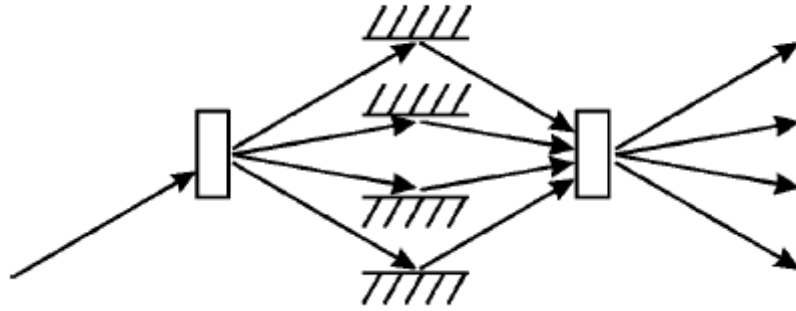


Figura 1.4: Interferômetro com quatro feixes. O feixe incidente é dividido em quatro feixes, os quais interferirão após serem refletidos por espelhos. Figura retirada de [2].

As fases  $\phi_j$  podem ser variadas independentemente por meio de modificações no segundo divisor de feixes. A intensidade do feixe após o segundo divisor escreve-se, usando o operador densidade  $\rho$ , como a seguir:

$$I = \langle b|\rho|b\rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \rho_{jk} e^{-i(\phi_j - \phi_k)}. \quad (1.23)$$

Sendo o operador densidade hermitiano ( $\rho^\dagger = \rho$ ) e também  $Tr[\rho] = 1$  (traço do operador de densidade unitário), podemos reescrever a Equação (1.23) como

$$I = \frac{1}{n} \left( 1 + \sum_{j=1}^n \sum_{k \neq j} |\rho_{jk}| \cos(\phi_j - \phi_k - \arg \rho_{jk}) \right). \quad (1.24)$$

Em sua busca por definições gerais de visibilidade e previsibilidade, S. Dürr [2], arrola uma série de critérios que seriam desejáveis para essas quantidades, dado o que se propõem a medir. A visibilidade, por exemplo deve corresponder à uma *macrovariável*<sup>7</sup> que corresponda à nossa noção de descrição ondulatória. Assim, esperamos que a visibilidade, que chamaremos de  $V$ , tenha as seguintes propriedades:

1. Deve ser possível dar uma definição que seja baseada somente no padrão de interferência  $I$ , sem que tenhamos que nos referir explicitamente aos elementos de  $\rho$ .
2.  $V$  deve variar continuamente como função dos elementos de matriz de  $\rho$ .
3. Se o sistema não exibir interferência (i.e.,  $I = 1/n$  independentemente de todos os  $\phi_j$ ),  $V$  deve atingir seu mínimo global.
4. Se  $\rho$  representa um estado puro (i.e.,  $\rho^2 = \rho$ ) e todos os  $n$  feixes são igualmente populados (i.e., todos  $\rho_{jj} = 1/n$ )  $V$  deve corresponder a um máximo global.
5.  $V$ , considerada uma função no espaço de parâmetros  $(\rho_{11}, \rho_{12}, \dots, \rho_{nn})$  deve ter como máximo apenas o global, e nenhum local.
6.  $V$  deve ser independente da nossa escolha de sistema de coordenadas, i.e., insensível à reescolha dos pontos de referência das fases  $\phi_j$  e insensível à mudança na numeração dos feixes.

Denotamos a média sobre todas as fases, qualquer que seja a função  $f = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ , por

$$\langle f \rangle_\phi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \dots \int_0^{2\pi} d\phi_n f. \quad (1.25)$$

Desse modo, o primeiro e o segundo momentos do padrão de interferência, a partir da Equação (1.23), serão dados por

$$\langle I \rangle_\phi = \frac{1}{n}, \quad (1.26)$$

---

<sup>7</sup>Como discutiremos no Capítulo 2, em um experimento de interferometria, o padrão de interferência constroi-se a partir de um grande número de detecções, e portanto, a partir do envio de um grande número de partículas através do interferômetro. Este padrão é, portanto, *macroscópico*. Neste sentido, sendo desejável a obtenção da visibilidade a partir desse padrão (como será especificado em um dos critérios), diz-se que ela deve corresponder a uma *macrovariável*.

e

$$\sqrt{\langle(\Delta I)^2\rangle_\phi} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{j=1} \sum_{k \neq j} |\rho_{jk}|^2}, \quad (1.27)$$

onde  $\Delta I = I - \langle I \rangle_\phi$  é o desvio de  $I$  de seu valor médio. Se não houver coerência entre os feixes, temos  $\Delta I = 0$  independente de todas as fases  $\phi_j$ . O desvio quadrático médio  $\sqrt{\langle(\Delta I)^2\rangle_\phi}$  é, portanto, uma medida da quantidade de interferência no sistema. Seu mínimo é zero e o máximo  $\sqrt{\frac{(n-1)}{n^3}}$  é alcançado quando todos os  $|\rho_{jk}| = 1/n$ . Assim, devidamente normalizada, a visibilidade é expressa por

$$V = \left( \frac{n^3}{n-1} \langle(\Delta I)^2\rangle_\phi \right)^{1/2}. \quad (1.28)$$

$V$ , conseqüentemente, assumirá valores no intervalo

$$0 \leq V \leq 1.$$

Utilizando a Equação (1.24),  $V$  pode ser escrita em termos dos elementos de matriz do operador densidade:

$$V = \left( \frac{n}{n-1} \sum_{j=1} \sum_{k \neq j} |\rho_{jk}|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.29)$$

Uma *macrovariável* que quantifique o conhecimento sobre o caráter de partícula estaria relacionada ao que, intuitivamente, relacionamos a este caráter: o nosso conhecimento, mesmo que parcial, do caminho da partícula. A previsibilidade,  $P$ , que quantifica este caráter, deve obedecer aos seguintes critérios:

1.  $P$  deve ser uma função contínua das probabilidades  $\rho_{jj}$ .
2. Se conhecemos o caminho da partícula (i.e.,  $\rho_{jj} = 1$  para um dos feixes, o que implica  $\rho_{jj} = 0$  para todos os outros),  $P$  deve atingir seu máximo global.
3. Se todos os caminhos são igualmente prováveis (i.e., todos os  $\rho_{jj} = 1/n$ ),  $P$  deve corresponder a seu mínimo global.
4. Qualquer alteração no sentido de tornar as probabilidades  $\rho_{11}, \rho_{22}, \dots, \rho_{nn}$  iguais deve corresponder a um decréscimo de  $P$ . Em outras palavras, qualquer operação de média nos  $\rho_{jj}$  da forma

$$\rho'_{jj} = \sum_k a_{jk} \rho_{kk}$$

onde  $\sum_j a_{jk} = \sum_k a_{jk} = 1$ , e todos  $a_{jk} \geq 0$ , deve corresponder a uma diminuição em  $P$ .

O valor médio das populações  $\rho_{jj}$  é  $\langle \rho_{jj} \rangle_{jj} = 1/n$ , uma vez que  $Tr[\rho] = 1$ . O desvio quadrático médio das populações é uma medida possível da informação sobre o caminho da partícula e está de acordo com os critérios listados. Analogamente à visibilidade, a definição da previsibilidade será dada pelo desvio quadrático médio normalizado:

$$P = \left[ \frac{n}{n-1} \sum_j \left( \rho_{jj} - \frac{1}{n} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1.30)$$

que assumirá valores no intervalo

$$0 \leq P \leq 1,$$

já que a expressão está devidamente normalizada.

Podemos reescrever  $P$  como

$$P = \left[ \frac{n}{n-1} \left( -\frac{1}{n} + \sum_j \rho_{jj}^2 \right) \right]^{1/2}. \quad (1.31)$$

Das Equações (1.29) e (1.31), temos

$$Tr[\rho^2] = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}(P^2 + V^2), \quad (1.32)$$

e como  $Tr[\rho^2] \leq 1$ , a relação geral entre previsibilidade e visibilidade será dada por

$$P^2 + V^2 \leq 1. \quad (1.33)$$

A igualdade na Equação (1.33) será obtida se, e somente se  $Tr[\rho^2] = 1$ , ou seja, se  $\rho$  é um estado puro.



## Capítulo 2

# Propagação Livre e Dualidade Onda-Partícula

Neste capítulo, analisaremos o caso ideal de partículas livres enviadas através da fenda dupla do ponto de vista da quantificação dos caracteres ondulatório e de partícula, apresentada no Capítulo 1. Antes da descrição do modelo para o experimento, apresentaremos a evolução temporal de um pacote de ondas gaussiano, que será um ingrediente fundamental em nosso modelo [3]. Por fim, calcularemos o padrão de interferência para o sistema em questão, e, em seguida, as quantidades visibilidade e previsibilidade (vide Capítulo 1).

### 2.1 A Dinâmica da Partícula Livre

A caracterização da dinâmica quântica de uma partícula livre é dada pelo hamiltoniano

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{2.1}$$

onde  $m$  é a massa da partícula e  $\vec{p}$  é o operador momento. Sendo os autovalores  $\vec{k}$  (vetores de onda) associados aos autoestados  $|\vec{k}\rangle$  do operador  $\vec{p}$ , pode-se escrever

$$\vec{p} |\vec{k}\rangle = \hbar \vec{k} |\vec{k}\rangle. \quad (2.2)$$

Em termos da função de onda  $\langle \vec{r} | \vec{k} \rangle$ ,

$$-i\hbar \nabla \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \hbar \vec{k} \phi_{\vec{k}}(\vec{r}). \quad (2.3)$$

As soluções dessa equação são “ondas planas”

$$\phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = N_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (2.4)$$

$N_{\vec{k}}$  será obtida da normalização da função de onda. Essas funções não são normalizáveis e correspondem, na representação da posição  $\{|\vec{r}\rangle\}$ , aos autovetores impróprios  $|\vec{k}\rangle$  do operador  $\vec{p}$ , ou seja,  $\phi_{\vec{k}} = \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle$ . Na representação do momento  $\{|\vec{k}\rangle\}$ , a função de onda associada a um estado qualquer  $|\varphi\rangle$  é dada pela amplitude

$$\tilde{\varphi}(\vec{k}) \equiv \langle \vec{k} | \varphi \rangle = \int d^3r \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \varphi \rangle = N_{\vec{k}} \int d^3r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \varphi(\vec{r}). \quad (2.5)$$

Essa transformação consiste numa *transformação de Fourier* da função de onda na representação da posição. A constante de normalização deve ser escolhida, portanto, como

$$N_{\vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (2.6)$$

para assegurar a unitariedade formal da transformação. A transformação inversa pode ser escrita, dessa forma, como

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \tilde{\varphi}(\vec{k}). \quad (2.7)$$

Combinadas, as Equações (2.5) e (2.7) fornecem

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}, \quad (2.8)$$

que é conhecida como *relação de completeza* na representação da posição, caracteriza o fato de as funções (2.4) constituírem uma base completa no espaço de Hilbert de dimensão infinita correspondente.

Retomemos o problema da dinâmica da partícula livre. Faremos uso da descrição de Schrödinger formulada em termos de funções de onda dependentes do tempo. Consequentemente, temos que obter soluções da equação

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.9)$$

que satisfaçam condições iniciais  $\varphi(\vec{r}, t=0)$  dadas.

Seja o operador evolução na representação de Schrödinger

$$\begin{aligned} U(\vec{r}, t; \vec{r}', 0) &\equiv \langle \vec{r} | e^{-i\frac{H}{\hbar}t} | \vec{r}' \rangle = \int d^3k \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle e^{-i\frac{\hbar k^2 t}{2m}} \langle \vec{k} | \vec{r}' \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') - i\frac{\hbar k^2 t}{2m}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Em termos deste operador, a solução para o problema da partícula livre, dadas as condições iniciais, pode ser escrita como

$$\varphi(\vec{r}, t) = \langle \vec{r} | e^{-i\frac{H}{\hbar}t} | \varphi(t=0) \rangle = \int d^3r' U(\vec{r}, t; \vec{r}', 0) \varphi(\vec{r}', 0). \quad (2.11)$$

Mostra-se, integrando-se sobre  $\vec{k}$  na Equação (2.10), que  $U(\vec{r}, t; \vec{r}', 0)$  é dado por

$$U(\vec{r}, t; \vec{r}', 0) = \left( \frac{m}{2\pi\hbar t} \right)^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{m(\vec{r} - \vec{r}')^2}{2\hbar t}}. \quad (2.12)$$

Estamos em condições, finalmente, de considerar a evolução temporal de um pacote de ondas gaussiano como estado inicial, de largura  $b$  e vetor de onda  $\vec{k}_0$ :

$$\varphi(\vec{r}, 0) = \left[ \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \right]^{\frac{3}{2}} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{2b^2}}. \quad (2.13)$$

Utilizando as Equações (2.12) e (2.13), obtem-se

$$\varphi(\vec{r}, t) = \left( \frac{m}{2\pi\hbar t} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \right]^{\frac{3}{2}} \int d^3r' e^{i\frac{m(\vec{r} - \vec{r}')^2}{2\hbar t}} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}'} e^{-\frac{(\vec{r}' - \vec{r}_0)^2}{2b^2}}.$$

Avaliando-se essa integral, obtem-se

$$\varphi(\vec{r}, t) = \left[ \frac{1}{B(t)\sqrt{\pi}} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{(\vec{r} - \vec{r}' - \frac{\hbar\vec{k}_0 t}{m})^2}{2B^2(t)} \left( 1 - \frac{i\hbar t}{mb^2} \right) - \frac{i\hbar k_0^2 t}{2m} + i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}' \right] \quad (2.14)$$

onde  $B(t)$  é dado por

$$B(t) = b\sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 b^4}} = b\sqrt{1 + \frac{t^2}{\tau^2}}. \quad (2.15)$$

$\tau = \frac{mb^2}{\hbar}$  caracteriza a variação de  $B(t)$ .

### 2.1.1 Alargamento do Pacote de Ondas e Conexão com o Princípio da Incerteza

Consideremos o estado inicial representado pela função de onda gaussiana da Equação (2.13). Este é um estado de incerteza mínima, uma vez que, ao tomarmos sua transformada de Fourier para obter a função de onda no espaço dos momentos, teremos,

$$\tilde{\varphi}(\vec{k}, 0) = \left[ \frac{2b}{\sqrt{\pi}} \right]^{\frac{3}{2}} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}_0) \cdot \vec{r}_0} e^{-2b^2(\vec{k}-\vec{k}_0)^2}, \quad (2.16)$$

que é também gaussiana, com largura  $\frac{1}{2b}$ .

A dispersão quadrática média de quaisquer das componentes cartesianas do operador posição na condição inicial é  $\sigma_p(t=0) = \frac{b}{\sqrt{2}}$ . Logo, sendo este um estado de incerteza mínima, a dispersão correspondente no momento será  $\sigma_p = \frac{\hbar}{b\sqrt{2}}$ , a qual é preservada ao longo do tempo. A partir dessas dispersões,  $\tau$ , que é uma escala de tempo, pode ser escrito como

$$\tau = \frac{\sigma_q(t=0)}{\frac{\sigma_p}{m}}. \quad (2.17)$$

## 2.2 Modelo Esquemático para o Experimento da Fenda Dupla

Consideremos um modelo para o experimento da difração através da fenda dupla, assim como as condições em que o trataremos. Um anteparo, o qual é varrido por um detector de partículas **D**, é posicionado a uma distância  $x_0$  após um obstáculo com duas fendas distanciadas de  $d = 2y_0$  (Figura 2.1).

Uma fonte de partículas posicionada em **A** as envia, uma a uma, em direção ao obstáculo. O nosso foco é na análise do fenômeno após o obstáculo. Para tanto, supomos que as “ondas de matéria” sofrem difração ao alcançar o obstáculo com as fendas, na qual são gerados dois pacotes de onda gaussianos centrados em cada uma delas. Esses pacotes de onda produzidos pela difração são gaussianos dada a consideração das fendas como também gaussianas.<sup>1</sup>

Na análise que faremos neste capítulo, suporemos que haja vácuo entre o obstáculo e o anteparo, de forma que não seja possível nenhuma interação da partícula com eventuais outras partículas que poderiam estar presentes no ambiente. Após o envio de uma quantidade

---

<sup>1</sup>Esta hipótese foi considerada por simplicidade, uma vez que os cálculos utilizando um estado inicial gaussiano são analíticos.

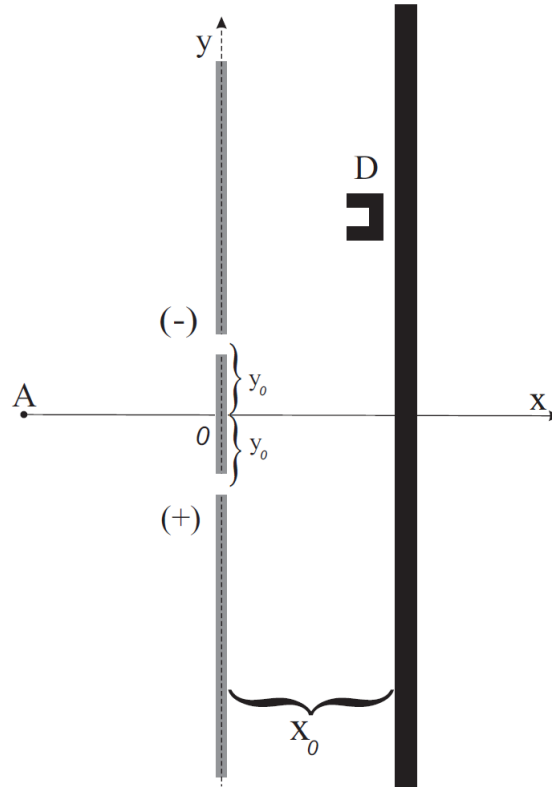


Figura 2.1: Esquema experimental para o experimento de difração através da fenda dupla. Supomos que as fendas (+) e (-), aqui representadas, são gaussianas. Figura adaptada de [16].

significativa de partículas, espera-se que um padrão de interferência seja construído como resultado da soma de um grande número de detecções no anteparo. De um ponto de vista experimental, a interferência de uma única partícula com ela mesma é garantida pela baixa intensidade dos feixes, disponível nos experimentos, de modo que podemos dizer que apenas uma partícula segue pelo interferômetro por vez. Esta é, portanto, uma assinatura de que cada partícula leva consigo a informação da coerência. É o que esperaríamos neste caso, uma vez que a função de onda descreve um conjunto de partículas identicamente preparadas [11].

Estudaremos também os efeitos que diferentes probabilidades *a priori* das partículas passarem por uma das fendas (+) ou (-) ocasionarão. Assim,  $p_+$  e  $p_-$  representam estas probabilidades *a priori* de a partícula seguir pela fenda (+) ou (-).

Dado que estamos considerando dois graus de liberdade - direções de propagação  $x$  e  $y$  - e assumindo sua fatorabilidade e invariância translacional ao longo da direção  $z$  [17] -

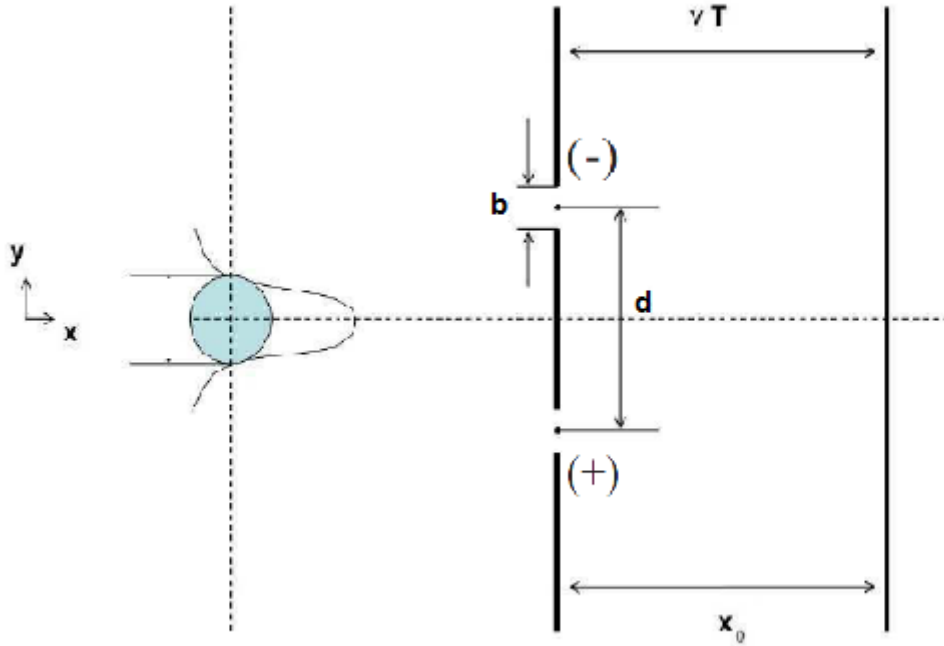


Figura 2.2: Montagem experimental com indicação de todos os parâmetros. Figura adaptada de [16].

perpendicular ao plano  $xy$ - o que é razoável do ponto de vista físico -, um estado inicial geral do sistema,  $|\Psi\rangle$ , deve ser escrito como

$$|\Psi\rangle = |\Psi_x\rangle \otimes |\Psi_y\rangle, \quad (2.18)$$

onde  $|\Psi_x\rangle$  e  $|\Psi_y\rangle$  são os estados em cada um dos espaços de Hilbert correspondentes a cada um dos graus de liberdade.

Entretanto, tomaremos a propagação na direção  $x$  como sendo aproximadamente clássica. Isso se justifica pelo fato de que consideraremos a componente do momento na direção  $x$ ,  $p_x$ , como sendo bem definida, ou seja,

$$\Delta p_x \ll p_x,$$

de modo que o comprimento de onda de de Broglie  $\lambda$  da função de onda inicial é também bem definido e se escreve como

$$\lambda \sim \frac{h}{p_x} \ll \Delta x. \quad (2.19)$$

Em palavras, podemos dizer que o comprimento de onda de de Broglie associado à propagação da partícula é suficientemente pequeno quando comparado à distância entre o obstáculo

e o anteparo, de forma que a consideração de sua propagação como sendo clássica se justifica. Essas condições são verificadas no experimento com moléculas de fulereno [18]. Os valores dos parâmetros físicos deste experimento estão na Tabela 2.1. Os pacotes de onda produzidos pela difração podem ser escritos, dessa forma, como

$$\psi_+(y, 0) = \frac{1}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}} \exp \left[ -\frac{(y + \frac{d}{2})^2}{2b^2} \right] \quad (2.20)$$

e

$$\psi_-(y, 0) = \frac{1}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}} \exp \left[ -\frac{(y - \frac{d}{2})^2}{2b^2} \right]. \quad (2.21)$$

onde o parâmetro  $b$  corresponde à largura de cada uma das fendas (+) e (-),  $d$  à separação entre elas, conforme ilustrado na Figura 2.2.

Assim, no anteparo distanciado de  $x_0$  do obstáculo (Figura 2.1), teremos, após a evolução livre desses pacotes de onda gaussianos (Equações (2.20) e (2.21)) durante o tempo  $T$ ,

$$\psi_+(y, T) = \frac{1}{\sqrt{B(T)\sqrt{\pi}}} \exp \left[ -\frac{(y + \frac{d}{2})^2(1 - i\frac{T}{\tau_0})}{2B^2(T)} \right] \quad (2.22)$$

e

$$\psi_-(y, T) = \frac{1}{\sqrt{B(T)\sqrt{\pi}}} \exp \left[ -\frac{(y - \frac{d}{2})^2(1 - i\frac{T}{\tau_0})}{2B^2(T)} \right], \quad (2.23)$$

sendo  $\tau$  definido como  $\tau = \frac{mb^2}{\hbar}$ . Da aproximação da propagação clássica na direção  $x$ , o instante de tempo  $T$ , nestas equações, será parametrizado pela velocidade média  $v$  das partículas e pela distância  $x_0$ :

$$T = \frac{x_0}{v}. \quad (2.24)$$

Aqui, analisaremos situações de interferometria utilizando os dados deste experimento com fulerenos em que a distância do obstáculo ao anteparo é da ordem de  $10^8$  vezes maior que  $\lambda$ , de modo que a propagação clássica na direção  $x$  também é justificável.

Na Subseção seguinte, faremos o cálculo para obter as condições em que as funções gaussianas associadas a cada uma das fendas podem ser consideradas ortogonais. Dessa forma, satisfeitas tais condições, poderemos associar *estados de fenda* ao sistema, os quais, por conseguinte, constituirão uma base na *representação das fendas*.

Tabela 2.1: Parâmetros físicos do experimento com fulerenos [17]	
Massa do fulereno $C_{60}$	$1,2 \times 10^{-24} Kg$
Raio do $C_{60}$	$3,5 \times 10^{-10} m$
Temperatura do $C_{60}$	$\approx 900K$
Temperatura ambiente	$\approx 300K$
Comprimento de onda médio do $C_{60}$	$\lambda \approx 2,5 \times 10^{-12} m$
Tempo médio de voo	$T = 6 \times 10^{-3} s$
Distância obstáculo-anteparo	$L = 1,25m$
Comprimento efetivo da fenda	$b = 3,6 \times 10^{-8} m$
Distância entre as fendas na rede de difração	$d = 10^{-7} m$

### 2.2.1 Sobre os Estados de Fenda

Na representação da posição para a direção  $y$ , a função de onda ou amplitude de probabilidade escrever-se-á como  $\langle y|\Psi_y\rangle = \psi(y)$ . A amplitude de probabilidade no anteparo (a uma distância  $x_0$  do obstáculo com as fendas), levando em conta as probabilidades  $p_+$  e  $p_-$  (tais que  $p_+ + p_- = 1/2$ ) e uma diferença de fase inicial  $\delta$ , pode ser escrita como

$$\psi(x_0, y) = \sqrt{p_+}\psi_+(x_0, y) + e^{i\delta}\sqrt{p_-}\psi_-(x_0, y). \quad (2.25)$$

Esta é, também, uma das formas de se escrever o estado inicial do sistema, cuja dinâmica foi discutida na Seção 2.1.

Nesta Subseção, calcularemos o produto interno das funções gaussianas das Equações (2.20) e (2.21). É desejável que este produto interno seja aproximadamente nulo, de maneira que uma associação com os *estados de fenda*  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  que representam cada uma das fendas, (+) e (-), respectivamente (Figura 2.1), possa ser feita. Assim sendo, a partir dessas Equações, temos

$$\int \psi_+(y, 0)^* \psi_-(y, 0) dy = e^{-\frac{d^2}{4b^2}}. \quad (2.26)$$

Neste sentido,  $\{|-\rangle, |+\rangle\}$  constituirá uma base na *representação das fendas*, ou seja,

$$|-\rangle \langle -| + |+\rangle \langle +| = 1, \quad (2.27)$$

se a relação entre a distância entre as fendas  $d$  e sua largura  $b$  for tal que o produto interno das funções de onda iniciais for desprezível, de modo que teremos uma boa aproximação.



Dado que a evolução livre do sistema é unitária, essa condição será preservada, de maneira que as definições das quantidades da Seção 1.6 do Capítulo 1 - visibilidade e previsibilidade - podem ser empregadas. Isso se deve ao fato de podermos associar a base  $\{|-\rangle, |+\rangle\}$  ao sistema, de modo que a representação de seu operador densidade  $\rho$  como

$$\rho(t) = \rho_{++}(y, y', t) |+\rangle \langle +| + \rho_{+-}(y, y', t) |+\rangle \langle -| + \rho_{-+}(y, y', t) |-\rangle \langle +| + \rho_{--}(y, y', t) |-\rangle \langle -|, \quad (2.28)$$

está definida para qualquer  $t$ .

Em particular, o estado inicial do sistema poderia ser escrito como

$$|\psi(0)\rangle = \sqrt{p_+} \psi_+(0, y) |+\rangle + e^{i\delta} \sqrt{p_-} \psi_-(0, y) |-\rangle. \quad (2.29)$$

sendo  $\rho(0) = |\psi(0)\rangle \langle \psi(0)|$ .

Para o caso do experimento com moléculas de fulereno [18], cujos valores dos parâmetros estão na Tabela 2.1, temos que o produto interno da Equação (2.26) será da ordem de  $10^{-1}$ .

Na próxima Seção, obteremos uma expressão para o padrão de interferência do nosso modelo, assim como analisaremos a difração através das fendas individuais. Será feita, também, uma comparação gráfica entre essas situações.

## 2.3 Interferência e os “Pacotes” Individuais

A probabilidade de detectarmos a partícula em um ponto qualquer  $(x_0, y)$  do anteparo, se a mesma tivesse passado pela fenda (+), é

$$P_+(y) = p_+ |\psi_+(x_0, y)|^2. \quad (2.30)$$

Analogamente, se a partícula tivesse seguido pela fenda (-), tem-se

$$P_-(y) = p_- |\psi_-(x_0, y)|^2. \quad (2.31)$$

Por outro lado, se não temos nenhum conhecimento do caminho da partícula, a intensidade medida no anteparo, definida como a densidade de probabilidade  $I(y) = |\psi(x_0, y)|^2$ , será

$$I(y) = p_+ |\psi_+(x_0, y)|^2 + p_- |\psi_-(x_0, y)|^2 + 2 |\sqrt{p_+ p_-} \psi_+(x_0, y) \psi_-(x_0, y)| \cos(\phi(y) + \delta), \quad (2.32)$$

tal que  $\phi(y) = \arg(\psi_+(x_0, y)) - \arg(\psi_-(x_0, y))$ .

As Figuras 2.3 e 2.4 mostram os gráficos de  $P_+ = P_+(y)$ ,  $P_- = P_-(y)$  (“pacotes individuais”) e  $I = I(y)$  para vários valores de  $\frac{T}{\tau}$ . Para este e para os outros gráficos que serão plotados neste Capítulo, esses valores de  $\frac{T}{\tau}$  estão no intervalo  $0 \leq \frac{T}{\tau} \leq 10$ , já que neste intervalo observa-se claramente a superposição dos pacotes de onda desde a situação inicial, sem nenhuma superposição, até a situação em que pode-se observar um padrão de interferência típico<sup>2</sup>. Foram escolhidos os valores  $p_+ = 0,2$  e  $p_- = 0,8$  para as probabilidades *a priori*. Dessas figuras, vemos que quanto maior seria a superposição dos pacotes individuais, para um mesmo valor de  $\frac{T}{\tau}$ , maior a definição do padrão de interferência.

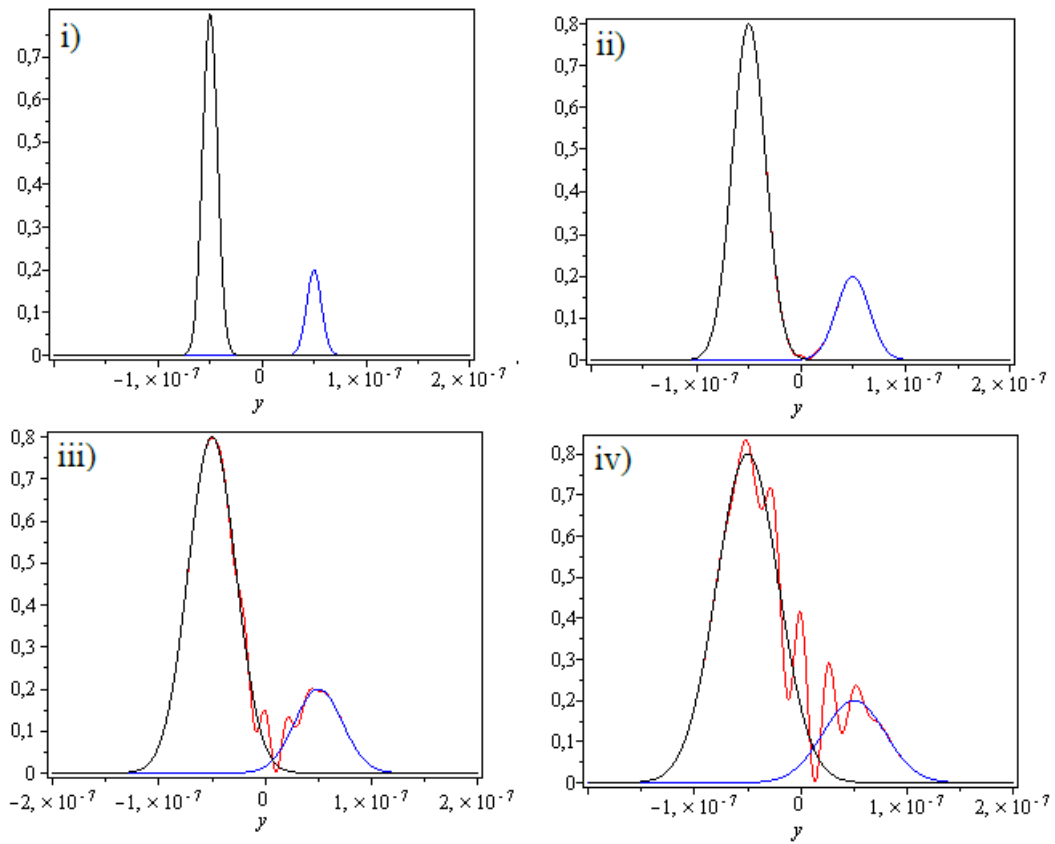


Figura 2.3:  $I = I(y)$  (em vermelho),  $P_+ = P_+(y)$  (em azul) e  $P_- = P_-(y)$  (em preto) em função da posição  $y$  no anteparo para  $p_+ = 0,2$  e  $p_- = 0,8$ . Os valores dos parâmetros utilizados em todos os gráficos foram  $b = 10^{-8}m$ ,  $d = 10^{-7}m$  e  $m = 10^{-24}kg$ . Variamos  $\frac{T}{\tau}$  em ordem crescente em cada um dos gráficos: i)  $\frac{T}{\tau} = 0$ , ii)  $\frac{T}{\tau} = 2$ , iii)  $\frac{T}{\tau} = 3$ , iv)  $\frac{T}{\tau} = 4$ .

<sup>2</sup>Optamos por graficar, neste e nos outros gráficos deste capítulo, a intensidade não-normalizada,  $I(y) \rightarrow \frac{1}{N'}I(y)$ , onde  $N'$  é a constante de normalização. Desse modo, pode-se “visualizar” o processo de superposição dos pacotes individuais.

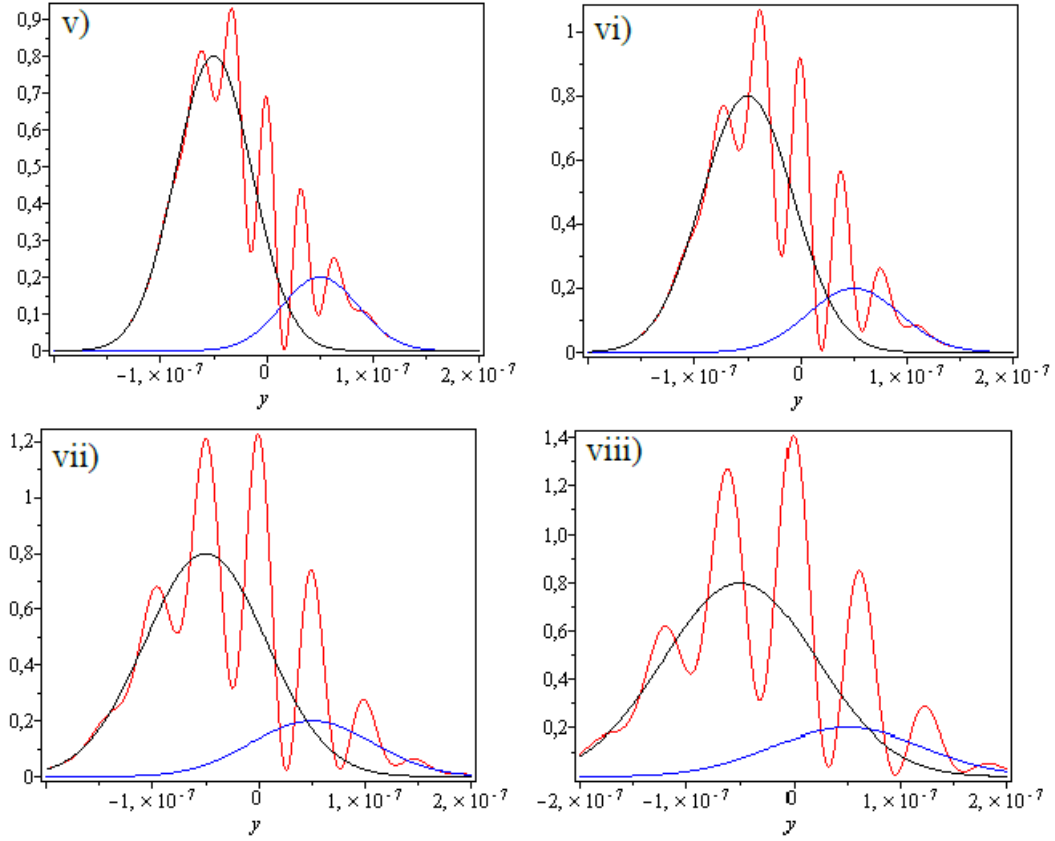


Figura 2.4:  $I = I(y)$  (em vermelho),  $P_+ = P_+(y)$  (em azul) e  $P_- = P_-(y)$  (em preto) em função da posição  $y$  no anteparo para  $p_+ = 0,2$  e  $p_- = 0,8$ . Os valores dos parâmetros utilizados em todos os gráficos foram  $b = 10^{-8}m$ ,  $d = 10^{-7}m$  e  $m = 10^{-24}kg$ . Variamos  $\frac{T}{\tau}$  em ordem crescente em cada um dos gráficos: v)  $\frac{T}{\tau} = 5$ , vi)  $\frac{T}{\tau} = 6$ , vii)  $\frac{T}{\tau} = 8$ , viii)  $\frac{T}{\tau} = 10$ .

Na Seção que segue, calcularemos a visibilidade e previsibilidade, introduzidas no Capítulo 1 no experimento da fenda dupla, cujo modelo foi apresentado na Seção 2.2.

## 2.4 Visibilidade e Previsibilidade no Modelo com Propagação Livre

Exploraremos, nesta Seção, as definições gerais de previsibilidade e visibilidade [2] do Capítulo 1, dadas pelas Equações (1.29) e (1.31). De início, faremos uma abordagem mais geral, que inclui as assimetrias introduzidas pelas probabilidades  $p_+$  e  $p_-$ . A seguir, investigaremos o caso especial simétrico, em que  $p_+ = p_- = 1/2$ , devido a sua instrutividade.

Como estamos lidando com a fenda dupla ( $n = 2$ ), a definição da Equação (1.31) reduz-se

a

$$P(y) = \left| \frac{P_+(y) - P_-(y)}{P_+(y) + P_-(y)} \right|, \quad (2.33)$$

já que

$$P = \left[ 2 \left( -\frac{1}{2} + \rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

e sendo  $Tr[\rho] = 1$ ,

$$\rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 = \frac{1}{2} [(\rho_{11} + \rho_{22})^2 + (\rho_{11} - \rho_{22})^2] = \frac{1}{2} + \frac{(\rho_{11} - \rho_{22})^2}{2},$$

teremos

$$P = |\rho_{11} - \rho_{22}|,$$

que, para o caso puro e considerando as probabilidades  $p_+$  e  $p_-$ , leva à Equação (2.33). Das Equações (2.30) e (2.31), teremos

$$P(y) = \left| \frac{p_+ |\psi_+(y)|^2 - p_- |\psi_-(y)|^2}{p_+ |\psi_+(y)|^2 + p_- |\psi_-(y)|^2} \right|. \quad (2.34)$$

A visibilidade, por sua vez, reduz-se a

$$V(y) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (2.35)$$

uma vez que, para  $n = 2$ , tem-se, a partir da Equação (1.29),

$$V = 2|\rho_{12}|.$$

Assim, para o caso puro, a menos da normalização, o termo  $|\sqrt{p_+ p_-} \psi_+(x_0, y) \psi_-(x_0, y)|$  pode ser identificado com  $|\rho_{12}|$  (vide Equações (1.21) e (2.32)).

Da Equação (2.32), a visibilidade fica

$$V(y) = \frac{2|\sqrt{p_+ p_-} \psi_+(x_0, y) \psi_-(x_0, y)|}{P_+(y) + P_-(y)}. \quad (2.36)$$

Como o estado inicial é puro e sua pureza será preservada pela evolução do sistema, espera-se que

$$P^2 + V^2 = 1, \quad (2.37)$$

Tal relação é prontamente verificada utilizando-se as Equações (2.34) e (2.36).

Já a intensidade no anteparo, considerando as probabilidades  $p_+$  e  $p_-$  será,

$$I(y, T = x_0/v) = |\sqrt{p_+} \psi_+(y, T = x_0/v) + e^{i\delta} \sqrt{p_-} \psi_-(y, T = x_0/v)|^2, \quad (2.38)$$

como visto na seção anterior.

Uma vez que temos uma expressão para a intensidade no anteparo, podemos, portanto, calcular a visibilidade  $V = V(y)$ . A substituição das das Equações (2.22) e (2.23) na Equação (2.36) leva a

$$V(y) = \frac{2\sqrt{p_+}\sqrt{p_-}}{(p_+ + p_-) \cosh\left(\frac{yd}{b^2\left[1+\left(\frac{T}{\tau}\right)^2\right]}\right) + (p_+ - p_-) \sinh\left(\frac{yd}{b^2\left[1+\left(\frac{T}{\tau}\right)^2\right]}\right)}. \quad (2.39)$$

Já a substituição das mesmas Equações (2.22) e (2.23) na Equação (2.34) nos dá a previsibilidade  $P = P(y)$ :

$$P(y) = \left| \frac{p_+ \exp\left[-\frac{(y+\frac{d}{2})^2}{B^2(T)}\right] - p_- \exp\left[-\frac{(y-\frac{d}{2})^2}{B^2(T)}\right]}{p_+ \exp\left[-\frac{(y+\frac{d}{2})^2}{B^2(T)}\right] + p_- \exp\left[-\frac{(y-\frac{d}{2})^2}{B^2(T)}\right]} \right|. \quad (2.40)$$

Os gráficos da visibilidade e previsibilidade, assim como o padrão de interferência correspondente, estão ilustrados nas Figuras 2.5 e 2.6 para vários valores de  $\frac{T}{\tau}$  para  $p_+ = 0,8$  e  $p_- = 0,2$ . Os valores utilizados para a massa da partícula, largura das fendas e distância entre elas para plotar esses gráficos são da ordem de grandeza dos utilizados por M. Arnt e colaboradores [18] em uma realização experimental de interferometria com moléculas de fulereno.

A relação [2]

$$[P(y)]^2 + [V(y)]^2 = 1,$$

será sempre satisfeita, uma vez que a pureza do estado inicial será preservada pela dinâmica.

Para o caso em que  $p_+ = p_- = 1/2$ , teremos, para  $V = V(y)$  e  $P = P(y)$ ,

$$V(y) = \frac{1}{\cosh\left(\frac{yd}{b^2\left[1+\left(\frac{T}{\tau}\right)^2\right]}\right)}, \quad (2.41)$$

e

$$P(y) = \left| \tanh\left(\frac{yd}{b^2\left[1+\left(\frac{T}{\tau}\right)^2\right]}\right) \right|. \quad (2.42)$$

A dependência com  $y$  das Equações (2.41) e (2.42) está de acordo com as expressões para essas quantidades obtidas na abordagem fenomenológica de A. Bramon e colaboradores [19].

Repetimos aqui os gráficos da visibilidade e previsibilidade, porém para  $p_+ = p_- = 1/2$ , assim como também graficamos o padrão de interferência correspondente (Figuras 2.7 e 2.8), para vários valores de  $\frac{T}{\tau}$ .

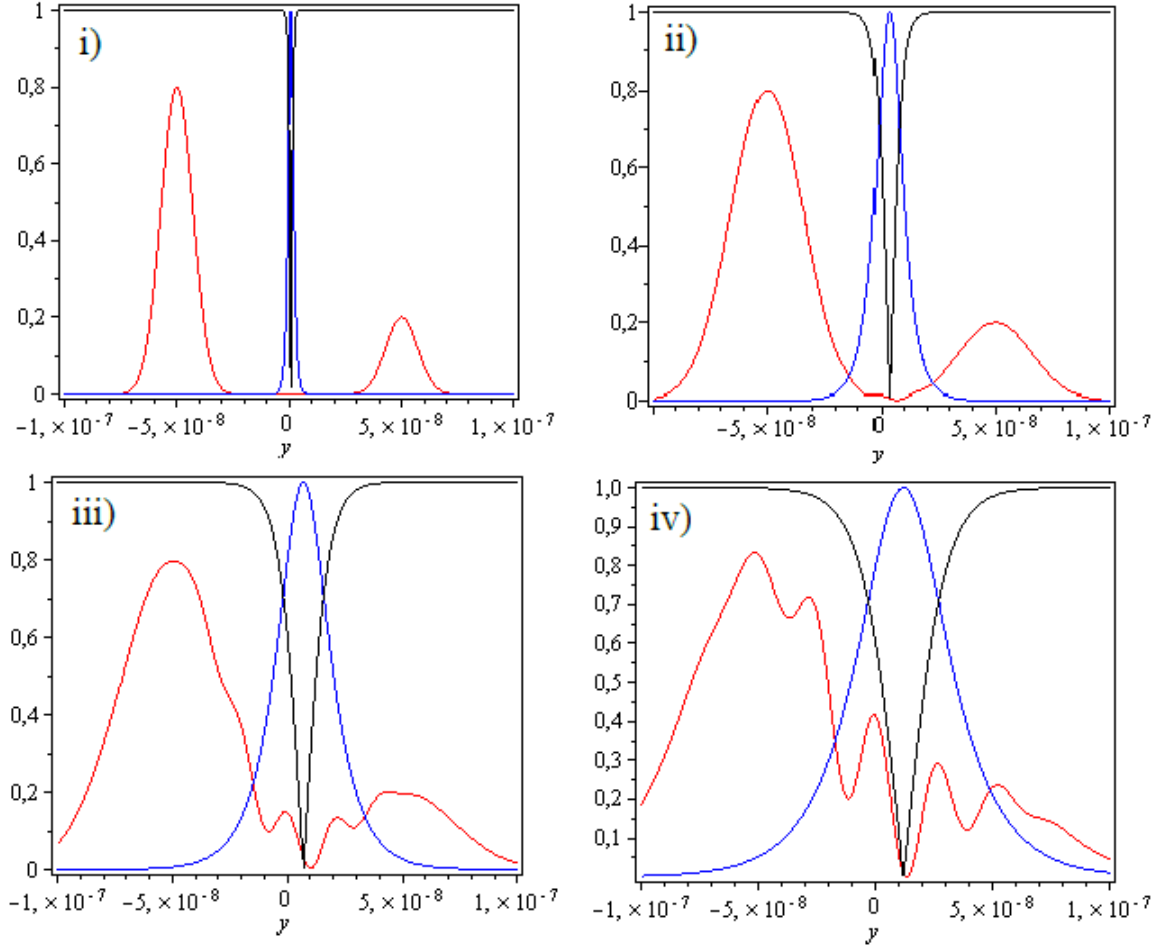


Figura 2.5: Intensidade (em vermelho), Visibilidade (em azul) e Previsibilidade (em preto) em função da posição  $y$  no anteparo para  $p_+ = 0,8$  e  $p_- = 0,2$ . Os valores dos parâmetros utilizados em todos os gráficos foram  $b = 10^{-8}m$ ,  $d = 10^{-7}m$  e  $m = 10^{-24}kg$ . Variamos  $\frac{T}{\tau}$  em ordem crescente em cada um dos gráficos: i)  $\frac{T}{\tau} = 0$ , ii)  $\frac{T}{\tau} = 2$ , iii)  $\frac{T}{\tau} = 3$ , iv)  $\frac{T}{\tau} = 4$ .

A visibilidade e previsibilidade dependem da posição do detector no anteparo, isto é, dependem de  $y$ , conforme ilustrado nos gráficos das Figuras 2.5 e 2.6. Isso decorre do fato de os elementos de matriz na representação das fendas também dependerem de  $y$ . Uma interpretação para este resultado, a partir dos gráficos das Figuras 2.7 e 2.8, pode ser dada nos seguintes termos: esperamos máxima visibilidade e mínima previsibilidade no centro do padrão quaisquer que sejam os valores dos parâmetros geométricos, já que neste ponto, devido à simetria da montagem experimental, sempre teremos mínima informação sobre a fenda pela qual a partícula possa ter passado. A partir deste mesmo raciocínio, espera-se que, à medida que nos afastamos do centro do padrão, a visibilidade decresça - há menor

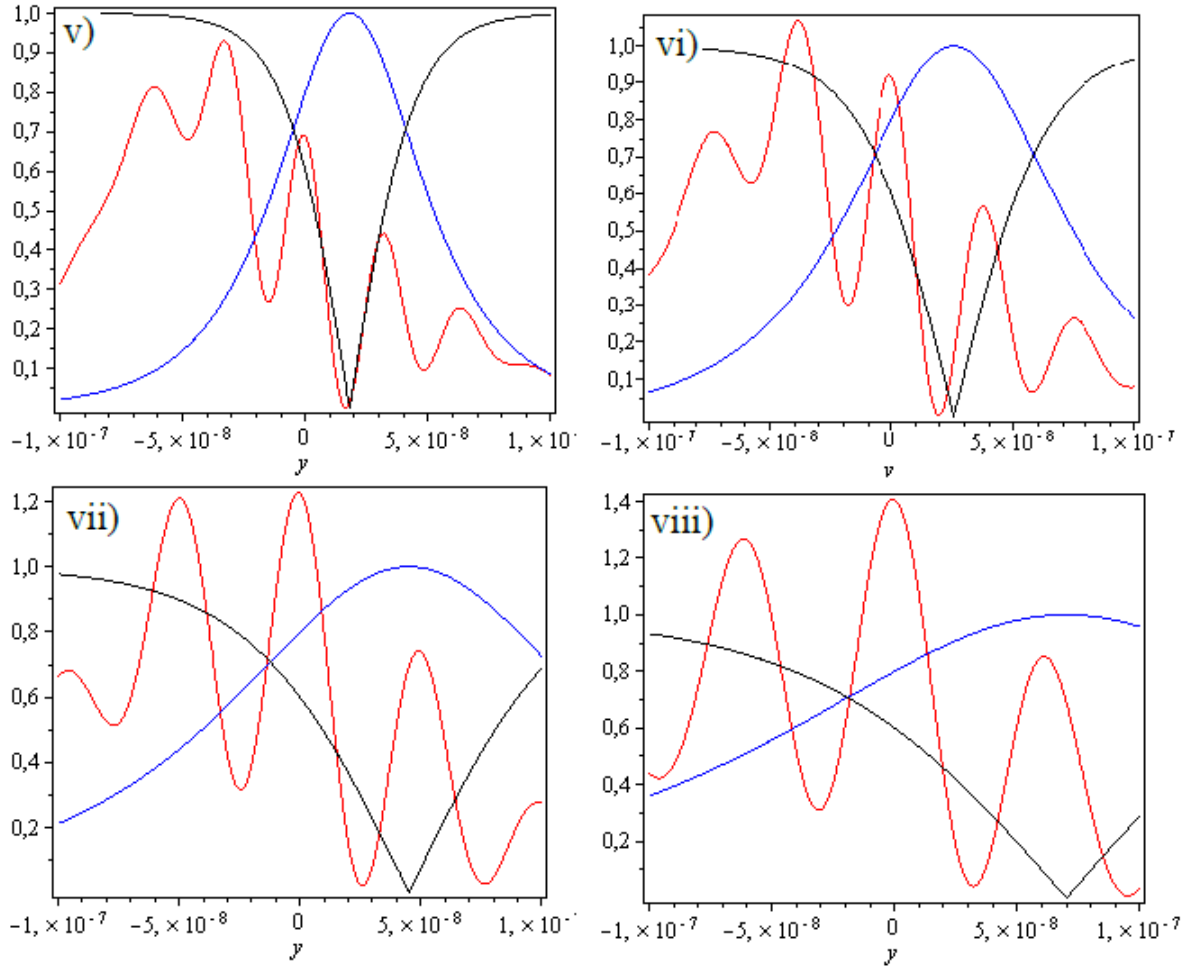


Figura 2.6: Intensidade (em vermelho), Visibilidade (em azul) e Previsibilidade (em preto) em função da posição  $y$  no anteparo para  $p_+ = 0,8$  e  $p_- = 0,2$ . Os valores dos parâmetros utilizados em todos os gráficos foram  $b = 10^{-7}m$ ,  $d = 10^{-6}m$  e  $m = 10^{-24}kg$ . Variamos  $\frac{T}{\tau}$  em ordem crescente em cada um dos gráficos: v)  $\frac{T}{\tau} = 5$ , vi)  $\frac{T}{\tau} = 6$ , vii)  $\frac{T}{\tau} = 8$ , viii)  $\frac{T}{\tau} = 10$ .

superposição dos pacotes de onda - e a previsibilidade, por sua vez, aumente. Devido à proximidade maior de uma das fendas, haveria uma maior chance de que a partícula que alcança o detector em dada posição  $y$  fosse proveniente da fenda mais próxima.

Nos gráficos das Figuras 2.5 e 2.6, observa-se um deslocamento a partir do centro do máximo da visibilidade e do mínimo da previsibilidade, na medida em que a distância do obstáculo ao anteparo é aumentada. Esse deslocamento se dá em direção ao pacote de onda associado à menor das probabilidades  $p_+$  e  $p_-$ . Dos gráficos das Figuras 2.3 e 2.4, nota-se que o pacote de onda associado à maior probabilidade penetra em direção ao outro pacote e o engloba, aproximando-se do seu máximo. Desse modo, é natural que a superposição seja

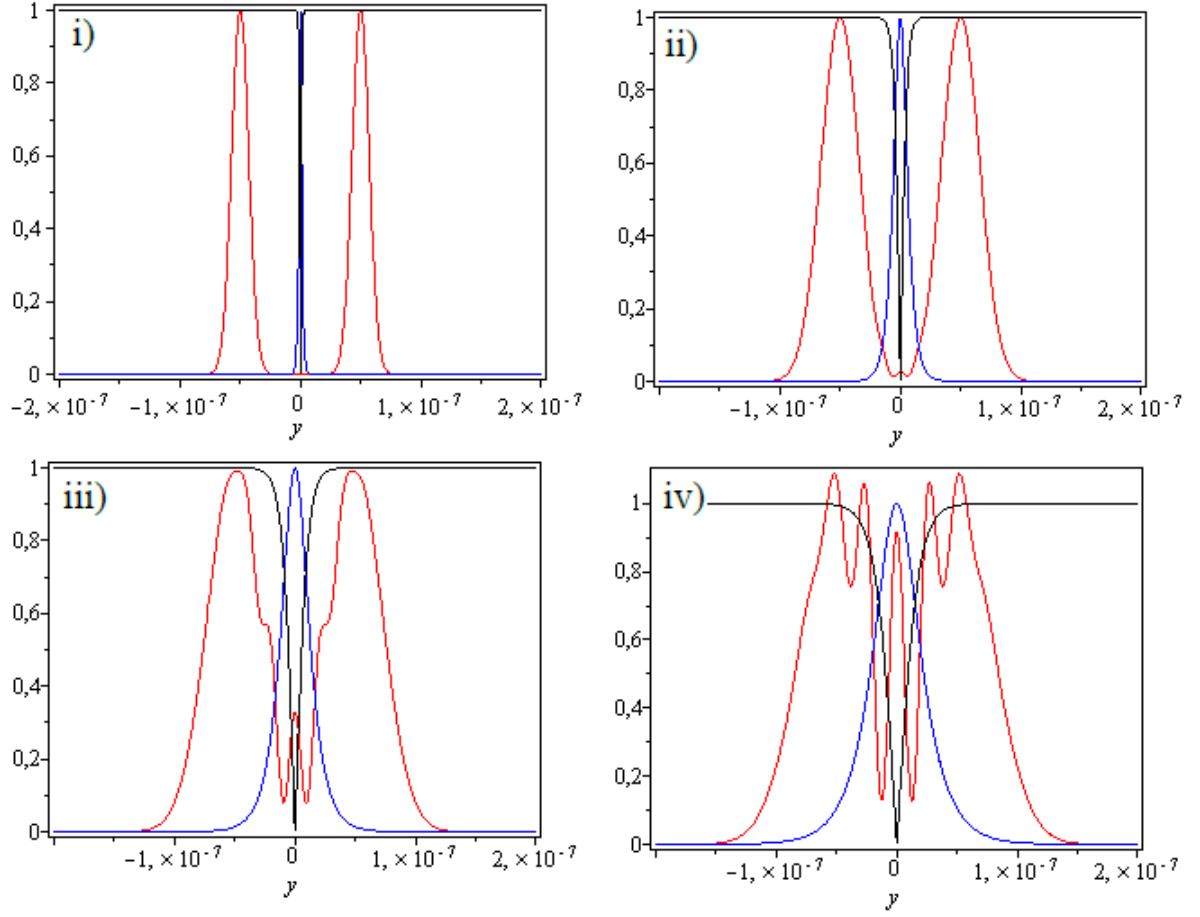


Figura 2.7: Intensidade (em vermelho), Visibilidade (em azul) e Previsibilidade (em preto) em função da posição  $y$  no anteparo para  $p_+ = p_- = 1/2$ . Os valores dos parâmetros utilizados em todos os gráficos foram  $b = 10^{-8}m$ ,  $d = 10^{-7}m$  e  $m = 10^{-24}kg$ . Variamos  $\frac{T}{\tau}$  em ordem crescente em cada um dos gráficos: i)  $\frac{T}{\tau} = 0$ , ii)  $\frac{T}{\tau} = 2$ , iii)  $\frac{T}{\tau} = 3$ , iv)  $\frac{T}{\tau} = 4$ .

mais pronunciada no entorno desse máximo do pacote associado à menor das probabilidades, de forma que interferência máxima também seja observada em suas imediações. Isso explica o deslocamento do máximo da visibilidade e, por conseguinte, do mínimo da previsibilidade.

Em suma, esses gráficos mostram como essas quantidades se comportam com o aumento de  $\frac{T}{\tau}$ , que dá o amadurecimento do pacote de ondas em unidades de  $\tau$  (vide Seção 2.1). A visibilidade aumenta em todos os pontos do anteparo (com exceção do ponto de máximo, onde se mantém unitária) indicando uma maior superposição coerente dos pacotes de onda. A previsibilidade, por sua vez, diminui em todos os pontos (novamente, com exceção do ponto de mínimo, onde se mantém nula), o que também reflete essa maior superposição dos



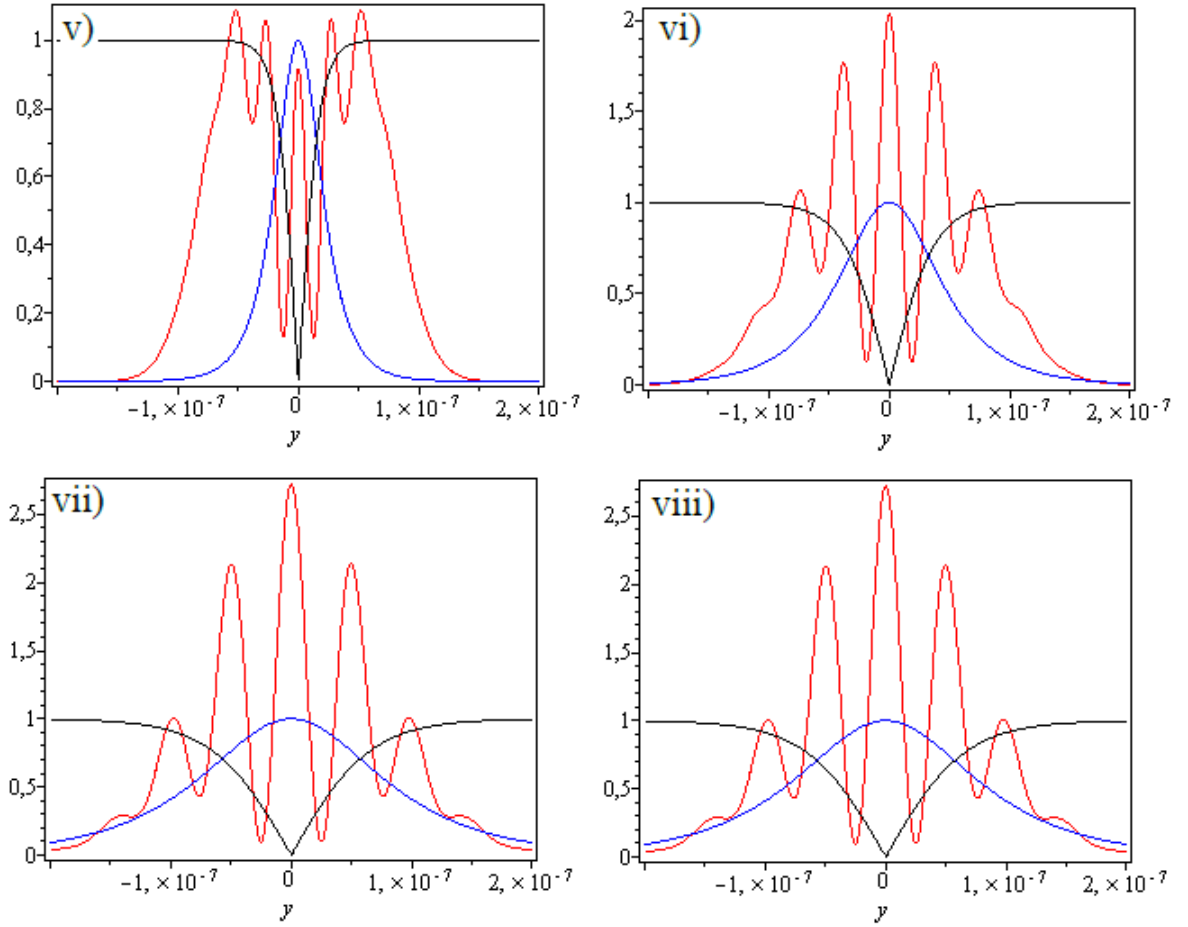


Figura 2.8: Intensidade (em vermelho), Visibilidade (em azul) e Previsibilidade (em preto) em função da posição  $y$  no anteparo para  $p_+ = p_- = 1/2$ . Os valores dos parâmetros utilizados em todos os gráficos foram  $b = 10^{-7}m$ ,  $d = 10^{-6}m$  e  $m = 10^{-24}kg$ . Variamos  $\frac{T}{\tau}$  em ordem crescente em cada um dos gráficos: v)  $\frac{T}{\tau} = 5$ , vi)  $\frac{T}{\tau} = 6$ , vii)  $\frac{T}{\tau} = 8$ , viii)  $\frac{T}{\tau} = 10$ .

pacotes e, por conseguinte, a menor possibilidade de saber por qual das fendas a partícula passou.

É interessante que essas mesmas expressões sejam reescritas em termos  $\tau = \frac{mb^2}{h}$ , o que leva a

$$V(y) = \frac{1}{\cosh\left(\frac{yd}{\frac{h\tau}{m}\left(1+\left(\frac{T}{\tau}\right)^2\right)}\right)}, \quad (2.43)$$

e

$$P(y) = \left| \tanh\left(\frac{yd}{\frac{h\tau}{m}\left(1+\left(\frac{T}{\tau}\right)^2\right)}\right) \right|. \quad (2.44)$$

O estudo do comportamento da visibilidade e previsibilidade em função de  $\tau$  um determinado ponto do anteparo nos permite obter os efeitos da variação da largura das fendas sobre essas quantidades. O gráfico da Figura 2.9 mostra esse comportamento. A minimização de  $V = V(y)$  dada pela expressão da Equação (2.43) em relação a  $\tau$  fornece, para o ponto de mínimo observado nos gráficos (e, por sua vez, de máximo para a previsibilidade),

$$\tau_0 = T.$$

Para finalizar a análise da influência dos parâmetros geométricos do experimento, o gráfico da Figura 2.10 ilustra o comportamento da visibilidade e previsibilidade em um dado ponto do anteparo em função da distância entre as fendas. Novamente, o gráfico mostra um fato que nos é completamente intuitivo: o aumento da distância entre as fendas diminui a visibilidade. De fato, a superposição dos pacotes evoluídos temporalmente será prejudicada pelo aumento da distância entre elas.

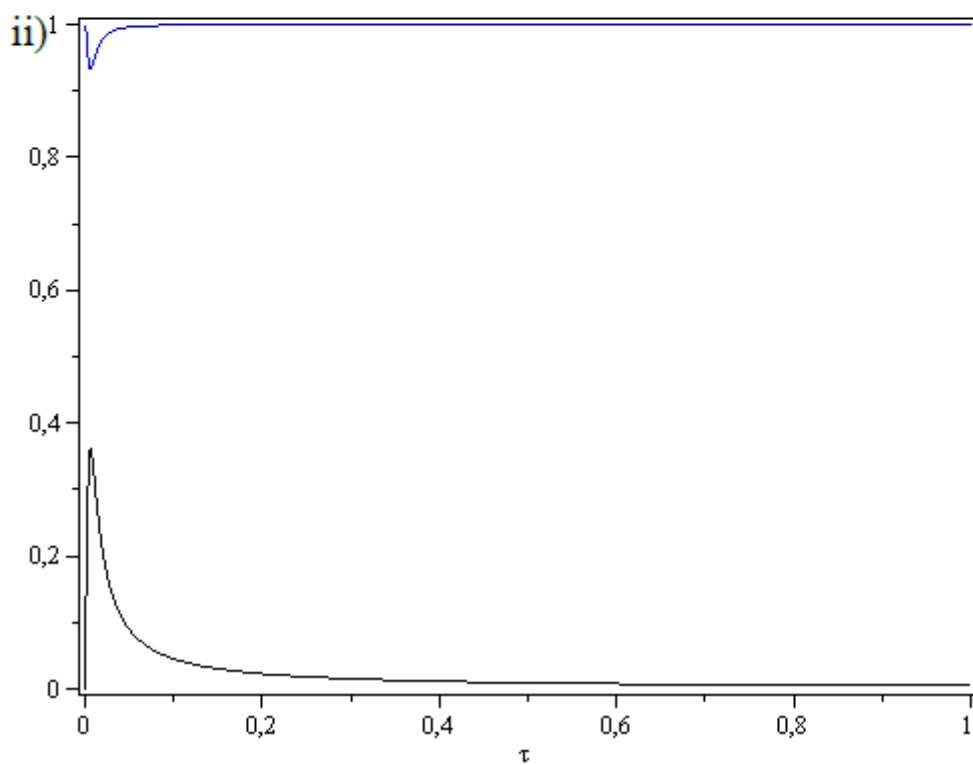
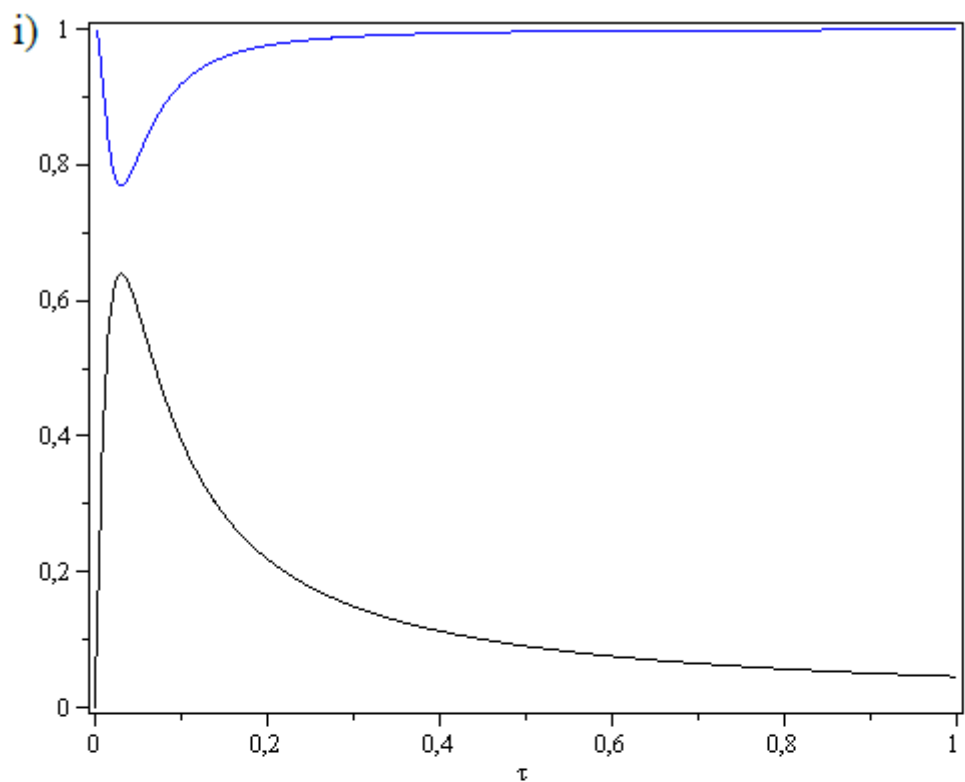


Figura 2.9: Visibilidade (em azul) e Previsibilidade (em preto) em função de  $\tau$ . Os valores utilizados dos parâmetros em cada um dos gráficos foram: i)  $y = 3 \times 10^{-7}m$ ,  $T = 3 \times 10^{-2}s$   $d = 10^{-4}m$  e  $m = 10^{-24}kg$  e ii)  $y = 3 \times 10^{-7}m$ ,  $T = 6 \times 10^{-3}s$   $d = 10^{-5}m$  e  $m = 10^{-24}kg$

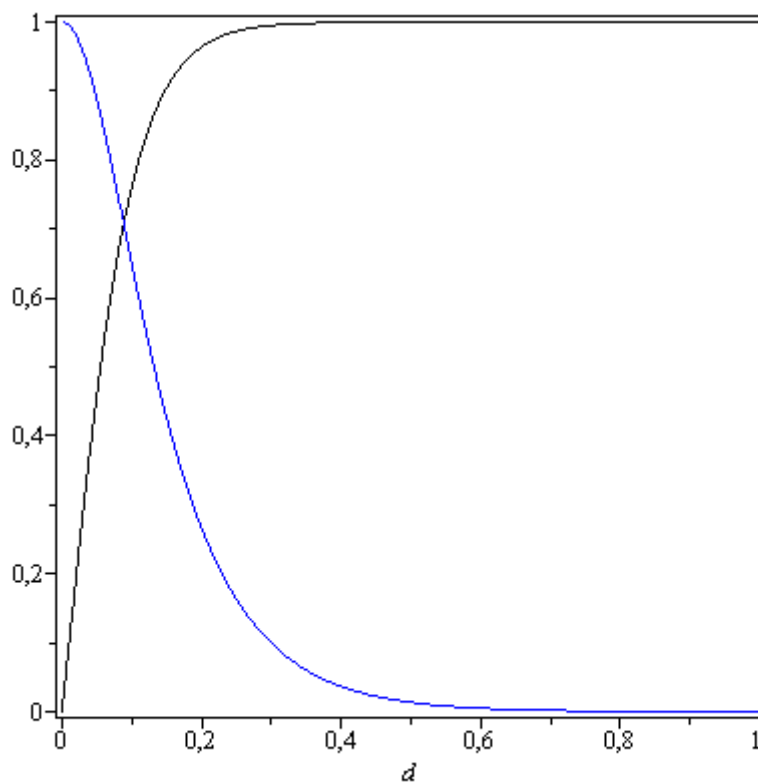


Figura 2.10: Visibilidade (em azul) e Previsibilidade (em preto) em função da distância entre as fendas  $d$ . Os valores utilizados dos parâmetros foram  $y = 3 \times 10^{-7}m$ ,  $T = 3 \times 10^{-2}s$ ,  $\tau = 10^{-4}s$  e  $m = 10^{-24}kg$ .

## Capítulo 3

# Interação com o Ambiente e Dualidade Onda-Partícula

Trataremos, neste capítulo, do caso em que um ambiente composto por um gás ideal de partículas está presente entre o obstáculo e o anteparo no experimento descrito no Capítulo 2. Como motivação, temos a realização experimental com moléculas de fulereno ([18], [17]). A interação entre a partícula e este ambiente, que aqui será descrita, levará a um processo de perda de coerência que será, obviamente, refletido no padrão de interferência observado no anteparo. No experimento com fulerenos, o padrão de difração detectado no anteparo mostra um padrão de interferência típico com contribuições incoerentes [17]. Novamente, buscaremos quantificar os caracteres ondulatório e corpuscular, recorrendo às definições mais gerais de visibilidade e previsibilidade dadas por S. Dürr [2]. Antes de abordarmos o experimento, derivaremos a dinâmica do sistema, influenciada por essa interação.

### 3.1 Dinâmica da Partícula na Presença do Ambiente: Visão Geral da Decoerência e Modelo de Joos e Zeh

O Modelo de E. Joos e H. D. Zeh [20] é uma aproximação para a descrição da dinâmica da partícula interagente com um ambiente formado por um gás a baixa pressão [17], à qual também nos referiremos como *subsistema* ou *sistema*<sup>1</sup>. A dinâmica exata, no caso, seria regida pela equação [17]

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \nabla_{\vec{r}}^2 \Psi + H_A \Psi + H_{int} \Psi, \quad (3.1)$$

onde  $\Psi = \Psi(\vec{r})$  é a função de onda total, e  $H_A$  e  $H_{int}$  são os hamiltonianos do ambiente e de interação, respectivamente.

Este modelo simplifica a dinâmica de uma partícula quântica que interage com um meio quântico em seu caminho e nos fornece uma descrição fenomenológica dos processos que induzem perda de coerência [17] ou decoerência, que se manifesta por meio do “amortecimento” do padrão de interferência.

A seguir, basearemos-nos no trabalho de E. Joos e colaboradores [21] para tratarmos de alguns aspectos gerais do mecanismo de interação de um sistema com seu ambiente e de sua dinâmica.

Em Mecânica Quântica, as interações, em geral, resultam em um estado não-separável para o sistema total, mesmo que o estado inicial seja fatorável. Estabelecem-se, dessa forma, correlações que não podem ser descritas como puramente estatísticas entre sistemas locais, uma vez que o estado do sistema total torna-se emaranhado. E. Joos [21] enfatiza esse caráter que fundamentalmente contrasta as correlações da Física Clássica com estas intrinsecamente quânticas:

Even if a complete set of density matrices for all subsystems were given, such a description should remain incomplete in an essential way, in contrast to classical physics, where the specification of the state for each degree of freedom implies a complete characterization of the global state. Moreover, even a statistical description, including correlations between subsystems, cannot fully encompass quantum correlations.<sup>2</sup> [21]

---

<sup>1</sup>Para evitar possíveis ambiguidades, usaremos *sistema total* para nos referirmos ao sistema composto formado pela partícula e o ambiente

<sup>2</sup>Tradução livre: *Mesmo se o conjunto de todas as matrizes densidade para todos os subsistemas for*

Dado que um sistema que interage com seu ambiente não pode ser representado por um estado puro, já que o ambiente influencia seu estado, a única representação possível é por meio de sua matriz densidade. A *matriz densidade local*  $\rho$  nos fornecerá as probabilidades para os resultados das medidas que podem ser realizadas no sistema. Sempre que nos referirmos a *sistemas locais* ou a *matrizes densidade locais* estaremos focados em alguns dos graus de liberdade destacados da totalidade das coordenadas necessárias para descrever o sistema total, isto é, definição de subsistema está ligada a certos graus de liberdade “relevantes” ou “acessíveis” que são destacados e aos quais nos referimos como sistema ou subsistema. Tendo isto em vista, a equação de Heisenberg

$$i\frac{\partial\rho}{\partial t} = [H, \rho],$$

é, em geral, substituída por alguma equação mestra, como veremos adiante. A evolução do subsistema, portanto, não pode mais ser tratada em termos da equação de Schrödinger para uma partícula, uma vez que o emaranhamento com o ambiente, resultado da interação, pode ser rapidamente desenvolvido.

### 3.1.1 Mecanismo Geral da Decoerência

O comportamento típico de um sistema que interage de maneira irreversível com um ambiente será descrito nesta seção. Em geral, um estado fatorável inicialmente evoluirá para um estado emaranhado, se houver alguma interação entre o sistema e o ambiente. Essa interação levará a uma matriz densidade reduzida do subsistema,  $\rho_S$ , com características bastante diferentes daquelas exibidas pelo sistema isolado. Aqui, utilizaremos um sistema discreto e ilustraremos este processo.

Em muitas situações, um sistema interage com seu ambiente tal que a reação das vizinhanças no sistema em consideração é tomada como sendo pequena o suficiente para ser desprezada. Para este caso, muitos aspectos importantes da decoerência podem ser discutidos de forma simplificada.

Trataremos, a seguir, da interação entre um sistema de interesse, o *sistema local*, com um segundo sistema, o ambiente. Para este propósito, consideraremos a interação tratada por

---

*fornecido, tal descrição deverá permanecer essencialmente incompleta, em contraste com a física clássica, onde a especificação do estado para cada grau de liberdade implica na caracterização completa do estado global. Além disso, mesmo uma descrição estatística, que inclua correlações entre os subsistemas, não consegue englobar correlações quânticas.*

von Neumann [22] na qual uma hamiltoniana de interação, para um subsistema de dimensão  $k$ , é dada por

$$H_{int} = \sum_n^k |n\rangle \langle n| \otimes A_n, \quad (3.2)$$

onde  $A_n$  é um operador que atua no espaço de Hilbert do ambiente, e os  $|n\rangle$  os autoestados do observável em questão do sistema. O ambiente adquirirá informação sobre o estado  $|n\rangle$ , pois seu estado é levado a um outro que depende de  $n$ , de modo que o estado total torna-se emaranhado:

$$|n\rangle |\varphi_0\rangle \rightarrow \exp(-iH_{int}t) |n\rangle |\varphi_0\rangle = |n\rangle \exp(-iA_n t) |\varphi_0\rangle = |n\rangle |\varphi_n(t)\rangle. \quad (3.3)$$

Para um estado geral do sistema, a linearidade da equação de Schrödinger também levará a um estado emaranhado, que representará superposição de todos os *resultados de medida*:

$$\left( \sum_n^k c_n |n\rangle \right) |\varphi_0\rangle \rightarrow \sum_n^k c_n |n\rangle |\varphi_n(t)\rangle. \quad (3.4)$$

Assim, diz-se que o ambiente *mede* o subsistema, mas apenas em um sentido de que a interação possibilitará uma melhor discriminação dos estados  $|n\rangle$  do sistema, como veremos a seguir. Isso é consequência do emaranhamento que é desenvolvido entre o subsistema e o ambiente.

Por sua vez, a mudança correspondente na matriz densidade local  $\rho_S$  será, uma vez tomado o traço parcial sobre o ambiente,

$$\rho_S = \sum_{nm} c_m^* c_n |m\rangle \langle n| \rightarrow \sum_{nm} c_m^* c_n \langle \varphi_m | \varphi_n \rangle |m\rangle \langle n|. \quad (3.5)$$

Os elementos de matriz não-diagonais são, dessa forma, ponderados por um fator que é dado pelo produto interno dos estados  $|\varphi_n(t)\rangle$  que correspondem aos seus respectivos números quânticos. Se os estados do ambiente são levados a estados ortogonais, isto é

$$\langle \varphi_m | \varphi_n \rangle = \delta_{nm},$$

então o ambiente discrimina os estados do sistema (se este não fosse o caso, não haveria razão para nos referirmos ao ambiente como aparato), a matriz densidade se torna diagonal nesta base,

$$\rho_S \rightarrow \sum_n^k |c_n|^2 |n\rangle \langle n|. \quad (3.6)$$



Assim, durante esta evolução, os termos de interferência são destruídos localmente nesta base, a qual é definida pela hamiltoniana de interação. Nenhum efeito de interferência pode ser observado neste sistema se o processo é tomado como sendo irreversível.

Consideremos, agora, o caso em que o ambiente pode ser descrito por um *ensemble* dos estados  $|\varphi_n\rangle$ ,

$$\rho_A(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n|. \quad (3.7)$$

Por simplicidade, suponhamos que a interação com  $|n\rangle$  “desloca” o estado  $|\varphi_n\rangle$  entre seus  $N$  estados possíveis de  $n$ . A evolução, então, correspondente a (3.4), fica

$$\rho_{tot}(0) = \sum_{nm} c_m^* c_n |n\rangle \langle m| \otimes \frac{1}{N} \sum_k |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k| \rightarrow \rho_{tot}(T) = \frac{1}{N} \sum_{nmk} c_m^* c_n |n\rangle |\varphi_{k-n}\rangle \langle \varphi_{k-n}| \langle m|. \quad (3.8)$$

Nenhuma informação pode ser obtida dos estados  $|\varphi_n\rangle$ , já que

$$\rho_A(T) = tr_S \rho_{tot} = \frac{1}{N} \sum_{nk} |c_n|^2 |\varphi_{k-n}\rangle \langle \varphi_{k-n}| = \frac{1}{N} \sum_k |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k| = \rho_A(0). \quad (3.9)$$

Não obstante, interferência entre os diferentes  $n$  será, da mesma forma, destruída, pois

$$\rho_S(T) = tr_A \rho_{tot}(T) = \sum_n^k |c_n|^2 |n\rangle \langle n|. \quad (3.10)$$

Logo, o mecanismo fundamental para a destruição local da interferência é a formação de correlações como em (3.4).

### 3.1.2 Processo de espalhamento e a Equação Mestra

A ação conjunta da dinâmica interna e o acoplamento entre o sistema e o ambiente dão origem a uma dependência temporal complicada da matriz densidade local. No caso dos processos de espalhamento, podemos obter simplificações. Se a duração de um único processo de espalhamento é pequena comparada à escala de tempo típica da evolução do sistema quando considerada apenas a dinâmica interna, a evolução total pode ser aproximada pela combinação dinâmica descrita pela equação

$$i \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H_{int}, \rho] + i \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} \right]_{esp}. \quad (3.11)$$

$\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} \right]_{esp}$  poderá, dessa maneira, ser expresso por meio de uma matriz  $S$  apropriada, que representará os efeitos do processo de espalhamento, como veremos adiante. A evolução de  $\rho$  será devida, dessa forma, às contribuições decorrentes da dinâmica interna e aos processos

de espalhamento. A matriz densidade em (3.11) já é a matriz densidade reduzida, ou seja, o traço parcial sobre os graus de liberdade das partículas espalhadas foi tomado. Equações deste tipo são chamadas de *Equações Mestras*.

A Equação (3.11) oferece a vantagem técnica advinda do fato de que as contribuições da dinâmica interna e dos processos de espalhamento podem ser calculadas separadamente. Fazendo uso da linguagem das teorias de sistema-reservatório, isso se justifica ao se levar em conta a hipótese de que as correlações decaem muito rapidamente quando comparadas à escala de tempo típica da dinâmica do sistema - o tempo em que os processos de colisão ocorrem são comparativamente menores. Em geral, o segundo termo na Equação (3.11) representará o efeito de vários processos de espalhamento independentes.

Neste sentido, se o recuo da partícula puder ser desconsiderado, os elementos de matriz da matriz densidade local, após cada evento de espalhamento, serão multiplicados por um fator que dá o produto interno dos estados  $|\varphi_n\rangle$  e  $|\varphi_m\rangle$  que “espalham” os estados  $|n\rangle$  e  $|m\rangle$ , respectivamente. A Figura 3.1 ilustra essa situação. Dada a matriz  $S$ , teremos, após um único evento de espalhamento,

$$\rho_{nm} \rightarrow \rho_{nm} \langle \varphi_m | \varphi_n \rangle = \rho_{nm} \langle \varphi_0 | S_m^\dagger S_n | \varphi_0 \rangle. \tag{3.12}$$

Se este fator é próximo da unidade - isto é, um único evento de espalhamento não “invi-

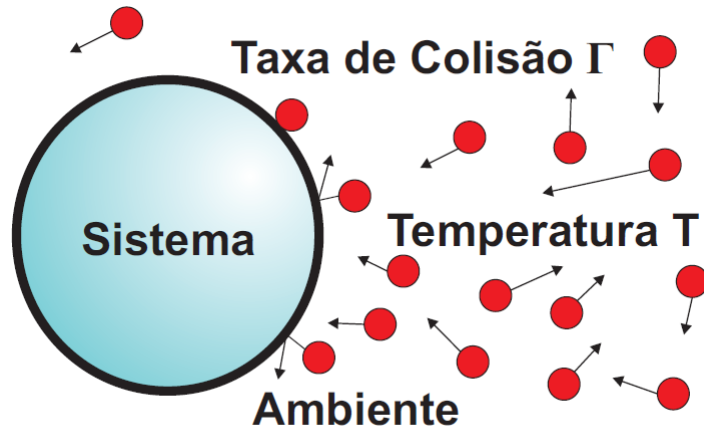


Figura 3.1: Representação da interação do sistema com o ambiente. Figura adaptada de [23].

dualiza” os estados do sistema, isto é, os estados do ambiente não são levados a estados ortogonais -, pode-se escrever

$$\langle \varphi_0 | S_m^\dagger S_n | \varphi_0 \rangle = 1 - \epsilon. \tag{3.13}$$

Por outro lado, se considerarmos muitos eventos de colisão, os quais ocorrem com uma taxa  $\Gamma$ , os termos não-diagonais serão destruídos exponencialmente, uma vez que

$$\rho_{nm} \rightarrow \rho_{nm}(1 - \epsilon)^{\Gamma t} \approx \rho_{nm} \exp(-\Gamma \epsilon t). \quad (3.14)$$

Assim,

$$\left[ \frac{\partial \rho_{nm}}{\partial t} \right]_{esp} = -\lambda \rho_{nm}(t), \quad (3.15)$$

donde segue da Equação (3.13) que

$$\lambda = \Gamma \left( 1 - \langle \varphi_0 | S_m^\dagger S_n | \varphi_0 \rangle \right). \quad (3.16)$$

### Decoerência Espacial

Sejam os autoestados de uma partícula com massa na representação da posição dados por  $|x\rangle$  e  $|\chi\rangle$  o estado da partícula com a qual colidirá. Durante o processo de espalhamento, usaremos a aproximação de que não haverá recuo, de modo que  $|x\rangle$  não será alterado. Utilizando a matriz  $S$ , um processo com o estado inicial dado abaixo pode ser representado como

$$|x\rangle |\chi\rangle \rightarrow |x\rangle |\chi_x\rangle = S_x |x\rangle |\chi\rangle. \quad (3.17)$$

Como vimos, o uso da matriz  $S$  justifica-se para tempos de evolução grandes quando comparados à duração do evento de espalhamento.

Se o estado da partícula é descrito por uma função de onda  $\varphi(x)$ , temos

$$\int d^3x \varphi(x) |x\rangle |\chi\rangle \rightarrow \int d^3x \varphi(x) |x\rangle S_x |\chi\rangle. \quad (3.18)$$

Dessa forma, a matriz densidade reduzida da partícula será multiplicada por um fator que representa a superposição dos estados espalhados correspondentes (de forma análoga ao que acontece na Equação (3.4)),

$$\rho(x, x') = \varphi(x) \varphi^*(x') \rightarrow \varphi(x) \varphi^*(x') \langle \chi | S_{x'}^\dagger S_x | \chi \rangle. \quad (3.19)$$

Consideraremos, aqui, o caso em que uma única colisão não resolve a distância  $|x - x'|$ , ou seja, suporemos que o comprimento de onda  $\lambda$  da partícula espalhada é bem maior que esta distância,  $\lambda \gg |x - x'|$ . Caso contrário, os termos de interferência seriam rapidamente destruídos.

### Processo de Espalhamento - Ambiente Constituído de um Gás Ideal

Analisemos, então, o processo de colisão unidimensional no nosso sistema específico. Seguiremos a análise feita em [23]. Uma análise mais geral que utiliza a matriz  $S$  foi feita por E. Joos e H.D. Zeh [20]. O leitor interessado poderá consultar esta referência.

Sejam  $y_S$  e  $y_A$  as posições iniciais do sistema e da partícula do ambiente, e  $\varphi(p_S, p_A)$  a função de onda na representação do momento, tem-se, imediatamente após a colisão

$$\tilde{\psi}(y_A, y_S) = \int \frac{d\tilde{p}_A d\tilde{p}_S \varphi(\tilde{p}_A, \tilde{p}_S)}{2\pi\hbar} e^{\frac{i(\tilde{p}_A y_A + \tilde{p}_S y_S)}{\hbar}} = \int |J| \frac{dp_A dp_S \varphi(\tilde{p}_A, \tilde{p}_S)}{2\pi\hbar} e^{\frac{i(\tilde{p}_A y_A + \tilde{p}_S y_S)}{\hbar}}, \quad (3.20)$$

sendo que a relação entre os momentos pós e pré colisão, considerando um processo ideal com conservação de momento e energia (ver referência [24] para mais detalhes) são dadas por

$$\tilde{p}_S = \frac{m_S - m_A}{m_S + m_A} p_S + \frac{2m_S}{m_S + m_A} p_A \quad (3.21)$$

e

$$\tilde{p}_A = \frac{2m_A}{m_S + m_A} p_S - \frac{m_S - m_A}{m_S + m_A} p_A. \quad (3.22)$$

onde  $m_S$  e  $m_A$  são as massas da partícula que constitui o sistema e da partícula do ambiente, respectivamente, e  $|J|$  na Equação (3.20) é o valor absoluto do Jacobiano.

Se  $m_S$  for muito maior que  $m_A$ , das Equações (3.21) e (3.22), teremos

$$\tilde{p}_S \approx p_S + 2p_A \quad (3.23)$$

e

$$\tilde{p}_A \approx \frac{2m_A}{m_S} p_S - p_A. \quad (3.24)$$

Da aproximação também razoável para muitos casos, inclusive o que aqui será tratado, de que a partícula do ambiente tem uma velocidade bem maior que a partícula que constitui o sistema, então  $\frac{p_A}{m_A}$  é muito maior que  $\frac{p_S}{m_S}$ , de forma que, das Equações (3.23) e (3.24), tem-se

$$\tilde{p}_S \approx p_S + 2p_A \quad (3.25)$$

e

$$\tilde{p}_A \approx -p_A. \quad (3.26)$$

Destas últimas aproximações (Equações (3.25) e (3.26)), o valor absoluto do Jacobiano é  $|J| = 1$ . Também destas aproximações, e definindo  $\tilde{\varphi}(p_A, p_S) = \varphi(\tilde{p}_A, \tilde{p}_S)$ , teremos

$$\tilde{\psi}(y_A, y_S) \approx \int \frac{dp_A dp_S \tilde{\varphi}(p_A, p_S)}{2\pi\hbar} e^{i(p_A(2y_S - y_A) + p_S y_S)/\hbar} \approx \int \frac{dp_A dp_S \tilde{\varphi}(p_A, p_S)}{2\pi\hbar} e^{i(p_A \tilde{y}_A + p_S \tilde{y}_S)/\hbar}. \quad (3.27)$$

Suponhamos, então, que o ambiente no qual o sistema está imerso seja constituído de um gás ideal (Figura 3.1). A matriz densidade do sistema total, inicialmente, pode ser escrita como

$$\rho = \rho_S \otimes \rho_A, \quad (3.28)$$

onde  $\rho_S$  e  $\rho_A$  são as matrizes densidade do sistema e do ambiente, respectivamente. Os elementos de matriz de  $\rho$  (Equação (3.28)), são, portanto

$$(\langle y_S | \otimes \langle y_A |) \rho (| y'_S \rangle \otimes | y'_A \rangle) = \langle y_S | \rho_S | y'_S \rangle \otimes \langle y_A | \rho_A | y'_A \rangle, \quad (3.29)$$

sendo  $y_S$  e  $y'_S$  coordenadas arbitrárias do sistema e  $y_A$  e  $y'_A$ , da partícula do ambiente.

Logo, dado que os fatores são escalares, o produto tensorial reduz-se a

$$\rho(y_S, y'_S, y_A, y'_A) = \rho_S(y_S, y'_S) \rho_A(y_A, y'_A). \quad (3.30)$$

Sendo a colisão entre as partícula do ambiente e a do sistema a única interação, teremos, após a colisão,

$$\tilde{\rho}(y_S, y'_S, y_A, y'_A) = \rho(\tilde{y}_S, \tilde{y}'_S, \tilde{y}_A, \tilde{y}'_A) = \rho_S(\tilde{y}_S, \tilde{y}'_S) \rho_A(\tilde{y}_A, \tilde{y}'_A). \quad (3.31)$$

A matriz densidade do subsistema, tal como definida no Capítulo 1, é obtida tomando-se o traço parcial sobre os graus de liberdade do ambiente sobre a matriz densidade do sistema total,

$$\tilde{\rho}_S(y_S, y'_S) = Tr_A(\tilde{\rho}(y_S, y'_S, y_A, y'_A)) = \rho_S(\tilde{y}_S, \tilde{y}'_S) Tr_A(\rho_A(\tilde{y}_A, \tilde{y}'_A)) = \rho_S(y_S, y'_S) Tr_A(\rho_A(2y_S - y_A, 2y'_S - y'_A)). \quad (3.32)$$

Da continuidade da base na representação da posição, o traço é, logo, uma integral ao invés de uma soma. Dado que tomaremos o traço, interessa-nos os elementos da diagonal, ou seja,  $y_A = y'_A$ , de modo que [25]

$$\eta \equiv Tr_A(\rho_A(2y_S - y_A, 2y'_S - y'_A)) = \int dy_A \rho_A(2y_S - y_A, 2y_S - y_A) = \int d\xi \rho_A(\xi + 2(y_S - y'_S), \xi), \quad (3.33)$$

onde  $\xi = 2y'_S - y_A$ .

Em um experimento no laboratório localizado no espaço, a matriz densidade e suas derivadas são consideravelmente pequenas para grandes distâncias  $|y_S - y'_S|$ . Da expansão do integrando na Equação (3.33) em potências de  $2(y_S - y'_S)$  até segunda ordem, obtemos

$$\eta \approx \int d\xi \rho_A(\xi, \xi) + 2(y_S - y'_S) \left( \int d\xi \frac{\partial}{\partial X} \rho_A(X, \xi) \right)_{X=\xi} + 2(y_S - y'_S)^2 \left( \int d\xi \frac{\partial^2}{\partial X^2} \rho_A(X, \xi) \right)_{X=\xi}. \quad (3.34)$$

Do traço unitário da matriz densidade, temos

$$\int d\xi \rho_A(\xi, \xi) = \text{Tr}(\rho_A) = 1.$$

Para calcular os dois últimos termos, utilizaremos a definição de operador momento  $P = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial X}$  na representação da posição:

$$\left( \int d\xi \frac{\partial}{\partial X} \rho_A(X, \xi) \right)_{X=\xi} = - \int d\xi \frac{P}{i\hbar} \rho(\xi, \xi) = -\frac{1}{i\hbar} \text{Tr}(P\rho_A) = -\frac{1}{i\hbar} \langle P \rangle = 0.$$

$\langle P \rangle$  é nulo porque consideramos que as partículas do ambiente tem velocidades aleatórias [25].

Analogamente,

$$\left( \int d\xi \frac{\partial^2}{\partial X^2} \rho_A(X, \xi) \right)_{X=\xi} = -\frac{1}{\hbar^2} \langle P^2 \rangle.$$

Portanto, da Equação (3.34), teremos

$$\eta = 1 - \frac{2(y_S - y'_S)^2}{\hbar} \langle P^2 \rangle. \quad (3.35)$$

Como já referido, o ambiente será suposto constituído de um gás ideal, para o qual vale

$$\frac{\langle P^2 \rangle}{m_A} = \frac{1}{2} k \tilde{T}. \quad (3.36)$$

Na Equação (3.36),  $k$  é a constante de Boltzmann,  $\tilde{T}$  é a temperatura e  $m_A$  a massa da partícula do ambiente [26].

Após decorrido um intervalo de tempo  $\Delta t$  e para uma taxa de colisão  $\Gamma$ , a variação total da matriz densidade é

$$\Delta \rho_S = \Gamma \Delta t (\tilde{\rho}_S(y_S, y'_S) - \rho_S(y_S - y'_S)) = \Gamma \Delta t (\eta - 1) \rho_S(y_S, y'_S). \quad (3.37)$$

Substituindo as Equações (3.35) e (3.36), a Equação (3.37) fica

$$\Delta \rho_S = -2\Gamma \Delta t (y_S - y'_S)^2 \frac{m_A k \tilde{T}}{\hbar^2} \rho_S(y_S, y'_S). \quad (3.38)$$

Logo, a taxa de variação dos elementos de matriz devido apenas a colisões é

$$\frac{\partial \rho_S}{\partial t} = -2(y_S - y'_S)^2 \frac{\Gamma m_A k \tilde{T}}{\hbar^2} \rho_S. \quad (3.39)$$

Da Equação (3.11) e definindo  $y_S = y$ , pode-se escrever a equação de movimento para o sistema:

$$\frac{\partial \rho_S}{\partial t}(y, y', t) = i \frac{\hbar}{2m_S} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \rho_S - 2(y - y')^2 \frac{\Gamma m_A k \tilde{T}}{\hbar^2} \rho_S. \quad (3.40)$$

O primeiro termo na Equação (3.40) representa a dinâmica livre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho &= \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle \langle \psi| = \left( \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle \right) \langle \psi| + |\psi\rangle \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi| \right) \\ &= \frac{P^2}{i\hbar 2m_S} |\psi\rangle \langle \psi| - |\psi\rangle \langle \psi| \frac{P^2}{i\hbar 2m_S}, \end{aligned}$$

pois, da equação de Schrödinger, que rege a dinâmica da partícula livre, como visto no Capítulo 1,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \frac{p^2}{2m_S} |\psi\rangle.$$

Da hermiticidade da matriz densidade,  $\rho = \rho^\dagger$ , tem-se também

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi| = \frac{P^2}{2m_S} \langle \psi|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(y, y', t) &= \left\langle y \left| \frac{\partial}{\partial t} \rho \right| y' \right\rangle = \frac{1}{i\hbar 2m_S} (\langle y | P^2 | \psi \rangle \langle \psi | y' \rangle - \langle y | \psi \rangle \langle \psi | P^2 | y' \rangle) \\ &= i \frac{\hbar}{2m_S} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right). \end{aligned}$$

A solução para a Equação (3.40) será dada por [17]

$$\rho(y, y', t) = \int \int dy_0 dy'_0 K(y, y', t; y_0, y'_0, 0) \rho_0(y_0, y'_0), \quad (3.41)$$

onde

$$\begin{aligned} K(y, y', t; y_0, y'_0, 0) &= \frac{m}{2\pi\hbar t} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar t} [(y - y_0)^2 - (y' - y'_0)^2] \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\Lambda t}{3} [(y - y')^2 + (y_0 - y'_0)^2 + (y - y') \times (y_0 - y'_0)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde  $\Lambda \equiv \frac{\Gamma m_A k \tilde{T}}{\hbar^2}$  é chamada de *constante de acoplamento* [21].

A primeira exponencial na Equação (3.42) representa a dinâmica livre, enquanto a segunda leva em conta os efeitos da interação do sistema com o ambiente [17], que será responsável pelo processo de decoerência.

Apresentaremos, na seção seguinte, um modelo para o experimento de difração na fenda dupla com decoerência.

### 3.2 Modelo Esquemático para o Experimento de Difração Através da Fenda Dupla com Decoerência

As considerações para a construção do estado inicial no modelo para o experimento de difração através da fenda dupla, que estudaremos nesta seção, são as mesmas da Seção 2.2 do Capítulo 2. Da análise já feita na seção mencionada, suporemos que o estado inicial do sistema se fatoriza, assim como assumiremos também que haja simetria translacional ao longo da direção perpendicular ao plano  $xy$  (Figura 2.1), de modo que o grau de liberdade que o varre verticalmente não aparecerá explicitamente na expressão do estado inicial. O estado do sistema logo após a difração através do obstáculo pode, assim, ser escrito como na Equação (2.25). Por razões também já discutidas naquela seção, temos que o tratamento quântico do problema será feito apenas na direção  $y$ , já que na direção  $x$  podemos considerar a propagação da partícula como sendo clássica (Figura 2.1).

Aqui, porém, faremos um tratamento mais realístico, visto que consideraremos possíveis interações do sistema com um ambiente. Suporemos que este ambiente é constituído por um gás ideal de partículas, presente entre o obstáculo e o anteparo.

Consideraremos que a superposição entre as funções de onda que emergem de cada uma das fendas é suficientemente pequena, de maneira que o estado inicial do sistema possa ser escrito como na Equação (2.29).

Contudo, é conveniente escrever o estado inicial em termos de seu operador densidade  $\rho$ , uma vez que a dinâmica para o sistema será dada em termos do mesmo. Como estamos interessados principalmente nos efeitos dos processos de decoerência, tomaremos  $p_+ = p_- = 1/2$ . Logo, sendo o estado inicial puro,  $\rho(0) = |\psi(0)\rangle \langle\psi(0)|$ ,

$$\begin{aligned} \rho(0) = & \rho_{++}(y, y', 0) |+\rangle \langle +| + \rho_{+-}(y, y', 0) |+\rangle \langle -| + \rho_{-+}(y, y', 0) |-\rangle \langle +| + \rho_{--}(y, y', 0) |-\rangle \langle -| = \\ & N(\psi_+(y)\psi_+^*(y') |+\rangle \langle +| + \psi_+^*(y)\psi_-(y') |+\rangle \langle -| + \psi_+(y)\psi_-^*(y') |-\rangle \langle +| + \psi_+(y)\psi_+^*(y') |-\rangle \langle -|), \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde

$$N = \frac{1}{\psi_+(y)\psi_+^*(y') + \psi_-(y)\psi_-^*(y')}$$

é a normalização.



Das Equações (2.20) e (2.21), teremos, para os elementos de matriz do estado inicial,

$$\rho_{++}(y, y', 0) = N \exp \left[ -\frac{(y + \frac{d}{2})^2}{2b^2} \right] \exp \left[ -\frac{(y' + \frac{d}{2})^2}{2b^2} \right], \quad (3.44)$$

$$\rho_{--}(y, y', 0) = N \exp \left[ -\frac{(y - \frac{d}{2})^2}{2b^2} \right] \exp \left[ -\frac{(y' - \frac{d}{2})^2}{2b^2} \right], \quad (3.45)$$

e

$$\rho_{+-}(y, y', 0) = \rho_{-+}(y, y', 0) = N \exp \left[ -\frac{(y + \frac{d}{2})^2}{2b^2} \right] \exp \left[ -\frac{(y' - \frac{d}{2})^2}{2b^2} \right]. \quad (3.46)$$

O estado evoluído do sistema, cuja dinâmica será regida pela Equação (3.41), poderá, por sua vez, ser escrito em um tempo  $t$  arbitrário como

$$\rho(t) = \rho_{++}(y, y', t) |+\rangle \langle +| + \rho_{+-}(y, y', t) |+\rangle \langle -| + \rho_{-+}(y, y', t) |-\rangle \langle +| + \rho_{--}(y, y', t) |-\rangle \langle -|, \quad (3.47)$$

ou, de forma equivalente,

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{++}(y, y', t) & \rho_{+-}(y, y', t) \\ \rho_{-+}(y, y', t) & \rho_{--}(y, y', t) \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Da linearidade da equação mestra, a evolução dos elementos de matriz da matriz densidade poderá ser feita termo a termo.

### 3.3 O Padrão de Interferência

Na Seção 2.4 do Capítulo 2, apresentamos a definição das quantidades visibilidade e previsibilidade que utilizamos neste trabalho. Essas quantidades foram obtidas a partir do padrão de interferência, tendo o mesmo sido expresso a partir dos elementos de matriz do operador densidade  $\rho$  (Equação (1.24)), a fim de possibilitar uma definição de visibilidade e previsibilidade mesmo para estados não-puros ou mistos. Para o caso do operador densidade  $\rho = \rho(T)$  da Equação (3.47), teremos, portanto,

$$I(y) = \rho_{++}(y, y, T) + \rho_{--}(y, y, T) + 2|\rho_{+-}(y, y, T)| \cos(\arg[\rho_{+-}]). \quad (3.49)$$

Da Equação (3.41), fazendo  $y = y'$ , e sendo a normalização dada por

$$N' = \frac{1}{\rho_{++}(y, y, T) + \rho_{--}(y, y, T)},$$

obtem-se

$$\rho_{++}(y, y, T) = N' \exp \left[ -\frac{1}{4} \frac{(2y + d)^2}{\frac{\hbar\tau}{m} \left( \frac{4\Lambda\hbar\tau^2(\frac{T}{\tau})^3}{3m} + (\frac{T}{\tau})^2 + 1 \right)} \right], \quad (3.50)$$

$$\rho_{--}(y, y, T) = N' \exp \left[ -\frac{1}{4} \frac{(2y - d)^2}{\frac{\hbar\tau}{m} \left( \frac{4\Lambda\hbar\tau^2(\frac{T}{\tau})^3}{3m} + (\frac{T}{\tau})^2 + 1 \right)} \right], \quad (3.51)$$

$$|\rho_{+-}(y, y, T)| = N' \exp \left[ -\frac{1}{4} \frac{d^2 \frac{4\Lambda\hbar\tau^2(\frac{T}{\tau})^3}{3m} + d^2 + 4y^2}{\frac{\hbar\tau}{m} \left( \frac{4\Lambda\hbar\tau^2(\frac{T}{\tau})^3}{3m} + (\frac{T}{\tau})^2 + 1 \right)} \right] \quad (3.52)$$

e

$$\arg[\rho_{+-}(y, y, T)] = \frac{yd\frac{T}{\tau}}{\frac{\hbar\tau}{m} \left( \frac{4\Lambda\hbar\tau^2(\frac{T}{\tau})^3}{3m} + (\frac{T}{\tau})^2 + 1 \right)}. \quad (3.53)$$

Para escrever a Equação (3.49), já utilizamos a definição [17]

$$I(y) = \rho(y, y, T). \quad (3.54)$$

Na próxima Seção, utilizaremos as definições mais gerais de visibilidade e previsibilidade das Equações (1.29) e (1.31) e faremos o cálculo dessas quantidades para o modelo do experimento descrito nesta Seção, incluindo, portanto, o processo de decoerência.

### 3.4 Visibilidade e Previsibilidade no Modelo com Decoerência

Retomando as Equações (1.29) e (1.31), efetuaremos o cálculo da visibilidade e previsibilidade para o modelo descrito na Seção 2.2. Como trata-se da fenda dupla,  $n = 2$ . Da Equação (3.47), podemos obter a visibilidade ( $V_D$ ) e previsibilidade ( $P_D$ ) para um dado tempo  $t = T$ .  $T$  parametrizará a distância do obstáculo ao anteparo, dada a consideração razoável de propagação clássica na direção  $x$  (vide Seção 2.2 do Capítulo 2).

Assim, aqui também omitiremos a dependência dessas quantidades com  $t$ . Isso se justifica porque consideramos  $t = T$  fixo, ou seja, numa dada realização experimental, por exemplo, este parâmetro está ligado a uma dada posição  $x = x_0$  fixa do anteparo.

Para a visibilidade, das Equações (1.29) e (3.47), teremos

$$V_D(y) = 2|\rho_{+-}(y, y, T)|. \quad (3.55)$$

Já para a previsibilidade, dadas as Equações (1.31) e (3.47), obtem-se

$$P_D(y) = |\rho_{++}(y, y, T) - \rho_{--}(y, y, T)|. \quad (3.56)$$

Da substituição das Equações (3.50), (3.51) e (3.52) nas Equações (3.55) e (3.56), tem-se os resultados

$$V_D(y) = \exp \left[ \frac{-d^2 \left(\frac{T}{\tau}\right)^3 \Lambda \tau}{3 \left( \frac{4\Lambda \hbar \tau^2 \left(\frac{T}{\tau}\right)^3}{3m} + \left(\frac{T}{\tau}\right)^2 + 1 \right)} \right] \frac{1}{\cosh \left[ \frac{yd}{\frac{\hbar \tau}{m} \left( \frac{4\Lambda \hbar \tau^2 \left(\frac{T}{\tau}\right)^3}{3m} + \left(\frac{T}{\tau}\right)^2 + 1 \right)} \right]}, \quad (3.57)$$

e

$$P_D(y) = \left| \tanh \left[ \frac{yd}{\frac{\hbar \tau}{m} \left( \frac{4\Lambda \hbar \tau^2 \left(\frac{T}{\tau}\right)^3}{3m} + \left(\frac{T}{\tau}\right)^2 + 1 \right)} \right] \right|. \quad (3.58)$$

Como esperado, as Equações (2.41) e (2.42) podem ser obtidas a partir das Equações (3.57) e (3.58) se  $\Lambda = 0$ , ou seja, caso desconsideremos a interação com o ambiente - propagação livre, equivalentemente.

Os gráficos dessas quantidades, assim como da intensidade  $I = I(y)$  (Equação (3.49)), estão plotados<sup>3</sup> na Figuras 3.2 e 3.3. Como no caso da propagação livre, os valores dos parâmetros utilizados foram os do experimento realizado com moléculas de fulereno (Tabela 2.1). Para o *acoplamento com o ambiente*  $\Lambda$ , utilizamos  $\Lambda = 10^{15} m^2 s^{-1}$ , da ordem do valor estimado em [17], para o caso de espalhamento com moléculas de ar.

A destruição da interferência, se o processo de decoerência é considerado ( $\Lambda \neq 0$ ), leva, portanto, a um decaimento exponencial da visibilidade (Equação (3.57)). Destacamos, aqui, que esse decaimento será função da distância do obstáculo ao anteparo, ou seja, de  $\frac{T}{\tau}$ . Esse resultado é esperado, na medida em que quanto maior for o tempo de interação do subsistema com o ambiente (ou, equivalentemente, a distância do obstáculo até o anteparo), maiores serão os efeitos de destruição da coerência, dado que um maior número de colisões pode ocorrer.

Da Equação (3.58), vemos que, para a dinâmica regida pela equação mestra considerada, a previsibilidade aumentará irrisoriamente em todos os pontos do anteparo quando  $\Lambda \neq 0$ , quando comparada à Equação (2.42).

<sup>3</sup>Optamos por graficar, como no Capítulo 2, a intensidade não-normalizada,  $I(y) \rightarrow \frac{1}{N'} I(y)$ , onde  $N'$  é a constante de normalização. Desse modo, pode-se “visualizar” o processo de superposição dos pacotes individuais.

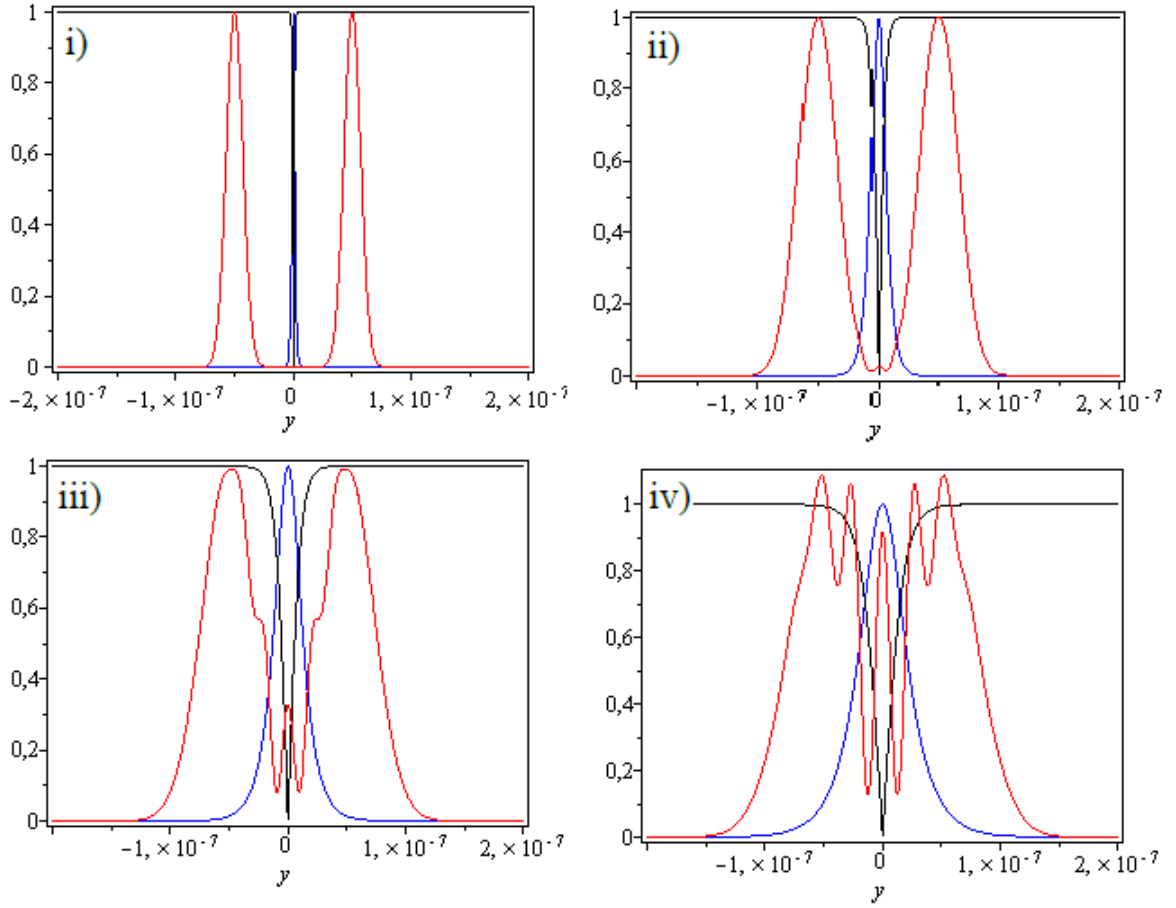


Figura 3.2: Intensidade (em vermelho), Visibilidade (em azul) e Previsibilidade (em preto) em função da posição  $y$  no anteparo. Os valores dos parâmetros utilizados em todos os gráficos foram  $b = 10^{-8}m$ ,  $d = 10^{-7}m$  e  $m = 10^{-24}kg$ . Variamos  $\frac{T}{\tau}$  em ordem crescente em cada um dos gráficos: i)  $\frac{T}{\tau} = 0$ , ii)  $\frac{T}{\tau} = 2$ , iii)  $\frac{T}{\tau} = 3$ , iv)  $\frac{T}{\tau} = 4$ .

Em resumo, uma interpretação para este resultado é a seguinte: quanto mais tempo o subsistema interage com o ambiente (ou seja, quanto mais distanciado estiver o anteparo do obstáculo), maior será a evidenciação de sua descrição corpuscular durante os estágios iniciais da superposição, uma vez que a visibilidade irá decair exponencialmente.

As Equações (3.57) e (3.58) satisfazem a relação

$$[P_D(y)]^2 + [V_D(y)]^2 < 1. \quad (3.59)$$

Isso se deve ao fato de o estado do sistema para qualquer  $T > 0$  ser misto, de modo que vale a desigualdade da Equação (3.59) [2].

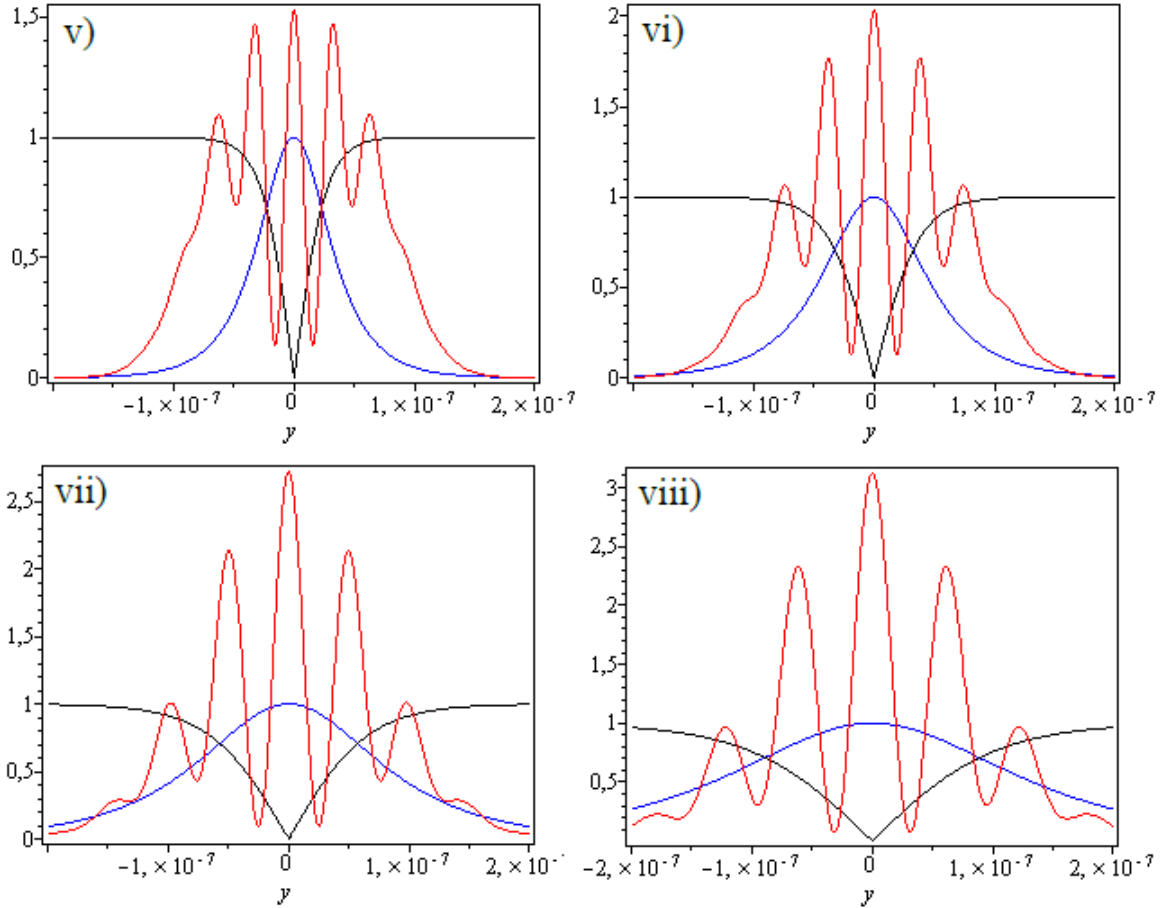


Figura 3.3: Intensidade (em vermelho), Visibilidade (em azul) e Previsibilidade (em preto) em função da posição  $y$  no anteparo. Os valores dos parâmetros utilizados em todos os gráficos foram  $b = 10^{-8}m$ ,  $d = 10^{-7}m$  e  $m = 10^{-24}kg$ . Variamos  $\frac{T}{\tau}$  em ordem crescente em cada um dos gráficos: v)  $\frac{T}{\tau} = 5$ , vi)  $\frac{T}{\tau} = 6$ , vii)  $\frac{T}{\tau} = 8$ , viii)  $\frac{T}{\tau} = 10$ .

A partir dos gráficos das Figuras 3.2 e 3.3, nota-se que os efeitos da decoerência não são muito pronunciados no intervalo em que focamos nossos estudos neste trabalho, ou seja,  $0 \leq \frac{T}{\tau} \leq 10$ , quando comparados com os do caso estudado no Capítulo 2 (Figuras 2.7 e 2.8) - propagação livre.

Para  $\frac{T}{\tau}$  suficientemente grandes, a visibilidade e a previsibilidade serão constantes, visto que o inverso do cosseno hiperbólico tende a 1 e o módulo da tangente hiperbólica tende a zero em todos os pontos do anteparo à medida que  $\frac{T}{\tau}$  aumenta. A Figura 3.4 mostra a comparação do gráfico da propagação livre com o do caso em que  $\Lambda \neq 0$  -ou seja, efeitos de decoerência são levados em consideração - para  $\frac{T}{\tau}$  grande. Desta comparação, nota-se que a

visibilidade diminui para o caso com decoerência, sendo que seu valor será dado, portanto, pelo fator exponencial (Equação (3.57)).

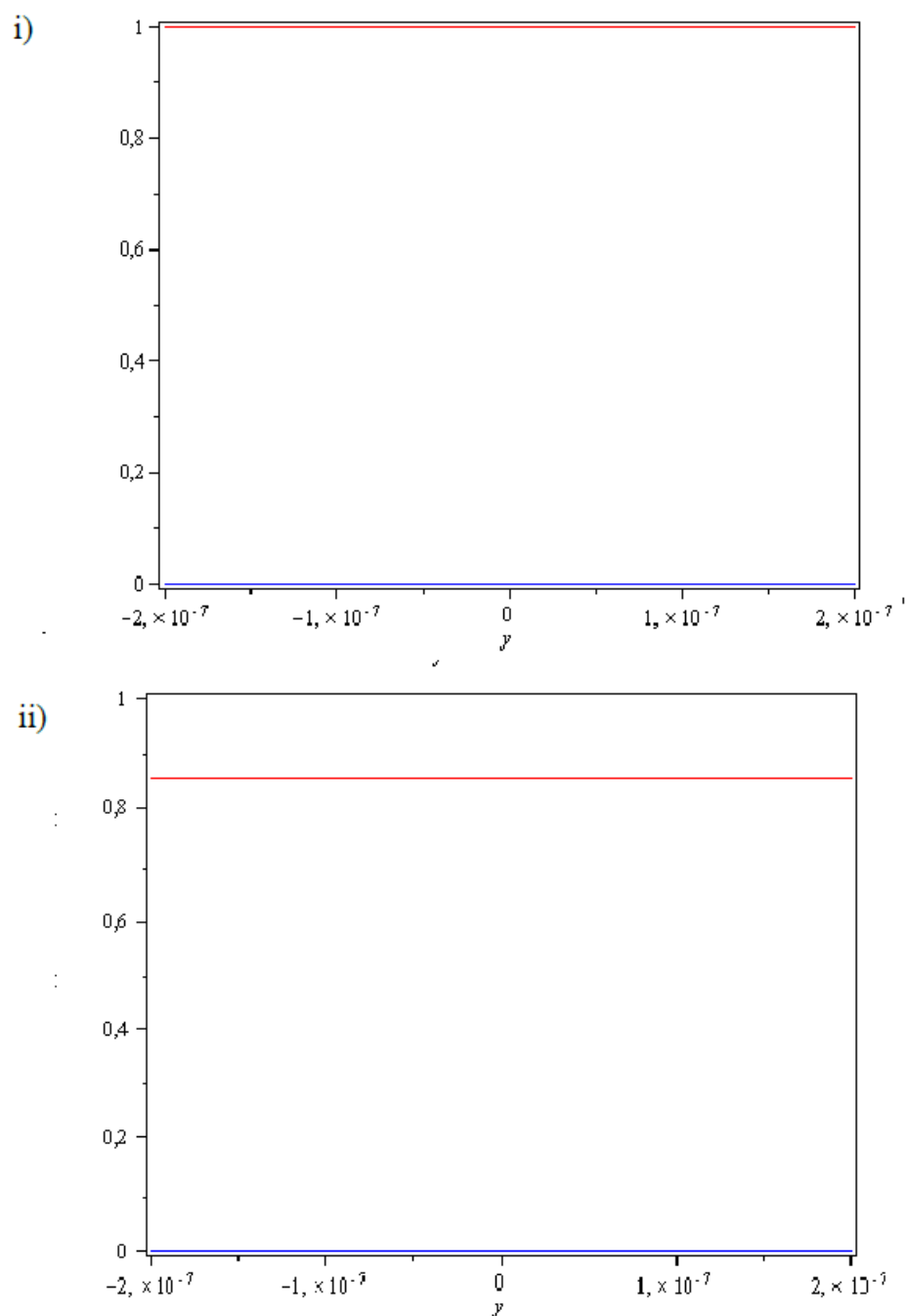


Figura 3.4: Visibilidade (em vermelho) e Previsibilidade (em azul) em função da posição  $y$  no anteparo. Os valores dos parâmetros utilizados em todos os gráficos foram  $b = 10^{-8}m$ ,  $d = 10^{-7}m$  e  $m = 10^{-24}kg$ , para  $\frac{T}{\tau} = 5 \times 10^4$ . No gráfico i), temos o caso da propagação livre; no ii) os efeitos de decoerência estão incluídos ( $\Lambda = 10^{15}m^2s^{-1}$ ).

## Capítulo 4

# Perspectiva de Aplicação: Exemplo de Tomografia

Investigaremos, neste capítulo a possibilidade de fazer uma *tomografia de estado*, que consiste na determinação experimental de um estado quântico desconhecido [27], no modelo esquemático para o experimento de difração através da fenda dupla que estudamos no Capítulo 2. Uma sugestão para o experimento é apresentada.

### 4.1 Tomografia

A medição em um dado sistema quântico altera o seu estado. Como, então, poderíamos determinar o estado em que um sistema quântico foi preparado, cuja representação, de forma mais geral, pode ser feita pela sua matriz densidade  $\rho$ ? A tomografia quântica é um procedimento experimental utilizado para essa finalidade. A realização deste procedimento exige um grande *ensemble* de cópias de um estado inicialmente desconhecido, de forma que as várias medições em estados identicamente preparados nos permitirão, com uma aproximação razoável, reconstruir  $\rho$ . No caso que aqui analisaremos, essas realizações consistem no envio



de várias partículas pela fonte. As várias detecções no anteparo (ou medições) possibilitam, por sua vez, a construção do padrão de interferência, conforme discutido no Capítulo 2. Um conjunto de operadores de medida informacionalmente completo é que possibilita a realização da tomografia, conforme discutiremos na próxima Seção.

### 4.1.1 Medição em um Sistema Quântico

Em Mecânica Quântica, aos vários resultados possíveis ao se realizar uma *medição* em um sistema são, em geral, associados *autoestados*. Uma representação de um estado puro  $|\psi\rangle$  do sistema, em termos dos autoestados, é dada por

$$|\Psi\rangle = \sum_n^k c_n |\phi_n\rangle, \quad (4.1)$$

de modo que a relação de completeza

$$\sum_n^k |\phi_n\rangle \langle\phi_n| = 1, \quad (4.2)$$

é satisfeita.

A representação do processo de medida pode ser feita através da atuação do projetor  $P_i$

$$P_i = |\phi_i\rangle \langle\phi_i|, \quad (4.3)$$

sobre o estado  $|\Psi\rangle$  do sistema, de forma que, após a medida, o estado do sistema será dado pelo autoestado correspondente  $|\phi_i\rangle$ :

$$P_i |\Psi\rangle = |\phi_i\rangle \langle\phi_i|\Psi\rangle = c_i |\phi_i\rangle. \quad (4.4)$$

Anteriormente à medição, a probabilidade  $p_i$  de de obtermos o resultado correspondente a esta probabilidade é, por sua vez, expresso de forma mais geral como

$$p_i = Tr[P_i \rho]. \quad (4.5)$$

### 4.1.2 Medida Generalizada

Sejam  $\Pi_i \geq 0$  operadores definidos positivos<sup>1</sup>, que aqui tomaremos com o objetivo de generalizar os projetores  $P_i$ , tal que a probabilidade  $p_i$  de se obter um determinado resultado é [28]

$$p_i = Tr(\rho \Pi_i). \quad (4.6)$$

---

<sup>1</sup>Um operador  $O$  é definido positivo se para qualquer estado  $|\Psi\rangle$  vale  $\langle\Psi|O|\Psi\rangle \geq 0$ .

No caso da medição projetiva apresentada na seção anterior, os resultados possíveis quando medições são realizadas em um sistema quântico correspondem à dimensão  $k$  do espaço de Hilbert. Esses novos operadores  $\Pi_i$  são introduzidos de forma a manter a positividade e a normalização das probabilidades, de maneira que sejam possíveis  $m \geq k$  alternativas, associadas a operadores não necessariamente ortogonais [28].

Como a soma das probabilidades  $p_i$  deve ser unitária,

$$\sum_i p_i = \sum_i \text{Tr}(\rho \Pi_i) = \text{Tr}(\rho \sum_i \Pi_i) = 1.$$

Da normalização do estado, temos que o traço da matriz densidade é unitário. Postula-se, então, que [28]

$$\sum_i \Pi_i = 1. \quad (4.7)$$

Esses operadores positivos definidos, que somam para a identidade, são ditos constituírem um POVM (*Positive Operator Valued Measure*, do inglês). Portanto, cada  $\Pi_i$  é um elemento do POVM, sendo que as alternativas estão associadas a cada um deles. Esses elementos, como já referido, não precisam ser ortogonais. A obtenção de um POVM informacionalmente completo para um dado sistema possibilita, dessa forma, que uma tomografia de estado possa ser realizada.

## 4.2 Tomografia Mínima para um Sistema de Dois Níveis

Abordaremos, nesta seção, a construção de um POVM de alta simetria interna para um sistema de dois níveis [29].

Seja um sistema de dois níveis, que é usualmente descrito pelo operador de Pauli  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ . Tomando este sistema como sendo a polarização, então os operadores  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  escrevem-se como

$$\sigma_x = |h\rangle \langle v| + |v\rangle \langle h|,$$

$$\sigma_y = i(|h\rangle \langle v| - |v\rangle \langle h|),$$

$$\sigma_z = |v\rangle \langle v| - |h\rangle \langle h|.$$

onde  $|h\rangle$  e  $|v\rangle$  são autoestados que representam a polarizações horizontal e vertical, respectivamente.

A matriz densidade do sistema, por sua vez,

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}) \quad (4.8)$$

é parametrizada pelo *vetor de Pauli*  $\vec{s} = \langle \sigma \rangle = Tr\{\sigma\rho\}$ . A reconstrução do estado do sistema requer, dessa forma, a determinação completa de  $\vec{s}$  com precisão suficiente. O procedimento que permite a obtenção dessa determinação, como já mencionado, é a tomografia de estado. A seguir, apresentaremos um POVM de alta simetria que possibilitaria esse procedimento, o qual é constituído de quatro elementos. Dado que são necessárias as medidas de quatro probabilidades, tem-se informação suficiente para a determinação das três componentes do vetor  $\vec{s}$ .

Constrói-se um POVM mínimo de alta simetria interna ao tomarmos quatro vetores unitários,  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$  e  $\vec{a}_4$ , com ângulos iguais entre eles:

$$\vec{a}_j \cdot \vec{a}_k = \frac{4}{3}\delta_{jk} - \frac{1}{3}. \quad (4.9)$$

Geometricamente, este conjunto de vetores constitui um tetraedro, ou equivalentemente, são vetores do centro de um cubo que apontam em direção a vértices não adjacentes do mesmo (Figura 4.1).

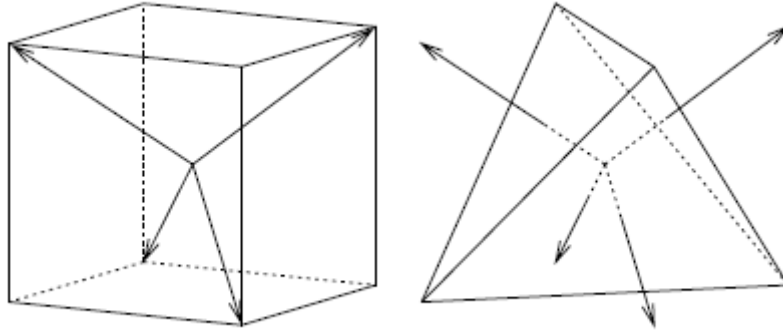


Figura 4.1:

Representação geométrica dos vetores  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$  e  $\vec{a}_4$ . Figura retirada de [29].

Como exemplo, seja o conjunto

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),$$

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1) \\ \vec{a}_4 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1).\end{aligned}\tag{4.10}$$

Os  $\vec{a}_j$ 's são linearmente dependentes, já que

$$\sum_{j=1}^4 \vec{a}_j = 0,\tag{4.11}$$

Cada conjunto  $\{\vec{a}_j\}$ , com quatro elementos, define um POVM para uma tomografia mínima de um sistema de dois níveis, visto que

$$\sum_{j=1}^4 \Pi_j = 1,\tag{4.12}$$

com  $\Pi_j \equiv \frac{1}{4}(1 + \vec{a}_j \cdot \vec{\sigma})$ .

Este POVM é um exemplo de "POVM simétrico informacionalmente completo." Determinando-se as probabilidades,

$$p_j = \langle \Pi_j \rangle = \frac{1}{4}(1 + \vec{a}_j \cdot \vec{s}),\tag{4.13}$$

obtem-se prontamente o vetor de Bloch,

$$\vec{s} = 3 \sum_j p_j \vec{a}_j.\tag{4.14}$$

Tem-se, nesse ponto, as condições para a determinação de  $\rho$ ,

$$\rho = 6 \sum_j p_j \Pi_j - 1.\tag{4.15}$$

Na seção seguinte, abordaremos a obtenção de um POVM deste tipo para uma tomografia mínima no modelo para o experimento do Capítulo 2.

### 4.3 Tomografia Mínima no Experimento da Fenda Dupla

O nosso objetivo, nesta seção, é propor uma tomografia mínima em um único plano de detecção (anteparo), descrito no Capítulo 2. Em outras palavras, queremos determinar o estado em que o sistema foi preparado,  $\rho$ , por meio da realização de apenas quatro medições de probabilidades  $p_j$  em um único plano do anteparo, ou seja, para um mesmo  $\frac{T}{\tau}$ . G. Taguchi e colaboradores [30] propõe e realiza uma tomografia em um único plano, mas utiliza seis medições. Assim, buscamos um esquema que torne possível esta tomografia mínima, que determinaria um possível desbalanceamento no sistema, isto é, diferentes probabilidades  $a$

*priori*  $p_+$  e  $p_-$  (vide Capítulo 2) - termos da diagonal, ou seja, as *as populações* - e a diferença de fase inicial que possa existir - que aparecerá nos termos da não-diagonal, devido à hermiticidade de  $\rho$ . Aqui, escreveremos este estado inicial, na *representação das fendas*, como

$$\rho = \begin{pmatrix} c_{++} & c_{+-} \\ c_{-+} & c_{--} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Os operadores no anteparo, para uma dada distância deste do obstáculo (Figura 2.1), ou, equivalentemente, para um dado  $\frac{T}{\tau}$ , são da forma

$$\Pi(y, t) = \begin{pmatrix} |\psi_+(y, T)|^2 & \psi_+^*(y, T)\psi_-(y, T) \\ \psi_-^*(y, T)\psi_+(y, T) & |\psi_-(y, T)|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

onde

$$\psi_{\pm}(y, T) = \frac{1}{\sqrt{B(T)}\sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{(y \pm \frac{d}{2})^2(1 - i\frac{T}{\tau_0})}{2B^2(T)} \right]. \quad (4.18)$$

Fazendo a mudança de variáveis  $\frac{y}{b} \rightarrow \xi$ ,  $\frac{d}{2b} \rightarrow \delta$  e  $\frac{T}{\tau} \rightarrow z$ , pode-se escrever os elementos do projetor como

$$|\psi_{\pm}(y, T)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+z^2)} \exp \left[ -\frac{\xi^2 + \delta^2}{2(1+z^2)} \right] \exp \left[ \mp \frac{2\xi\delta}{1+z^2} \right] \quad (4.19)$$

e

$$\psi_+^*(y, T)\psi_-(y, T) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+z^2)} \exp \left[ -\frac{\xi^2 + \delta^2}{(1+z^2)} \right] \exp \left[ \pm \frac{i2\xi\delta z}{1+z^2} \right]. \quad (4.20)$$

Um possível POVM para este sistema se realizaria, portanto, por meio de medições projetivas no anteparo, ou seja, associadas ao espaço de Hilbert de dimensão infinita das funções de onda transversais.

Mostraremos, a seguir, que é possível obter um POVM mínimo informacionalmente completo, do tipo introduzido na seção anterior, em um único plano definido para um dado  $\frac{T}{\tau}$ , o qual é varrido pelo detector  $\mathbf{D}$  (Figura 2.1).

Com uma nova mudança de variáveis,  $\frac{2\xi\delta}{1+z^2} \rightarrow \alpha$ , e com uma nova normalização, o operador  $\Pi$  pode ser escrito como

$$\Pi(\alpha, z) = \frac{1}{e^\alpha + e^{-\alpha}} \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & e^{-i\alpha z} \\ e^{i\alpha z} & e^\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \tanh(\alpha) & \operatorname{sech}(\alpha)e^{-i\alpha z} \\ \operatorname{sech}(\alpha)e^{i\alpha z} & 1 + \tanh(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Desse modo, o lugar geométrico desses projetores na esfera de Bloch é

$$s(\alpha, z) = (\operatorname{sech}(\alpha) \cos(\alpha z), \operatorname{sech}(\alpha) \sin(\alpha z), -\tanh(\alpha)). \quad (4.22)$$

Os vetores que definem o vértice de um tetraedro, satisfazem a Equação (4.9). Uma procura numérica fornece os seguintes valores de  $\alpha$  e  $z$  que definem o tetraedro na esfera de Bloch,

$$z = 3.4678, \alpha_1 = -1.0287, \alpha_2 = -0.268044, \alpha_3 = 0.268044 \text{ e } \alpha_4 = 1.0287.$$

Os vetores  $\vec{a}_i$  correspondentes, por sua vez, são

$$\vec{a}_1 = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, -0.261804, 0.773386 \right), \vec{a}_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, 0.261804, 0.773386 \right) \quad (4.23)$$

$$\vec{a}_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -0.261804, -0.773386 \right), \vec{a}_4 = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0.261804, -0.773386 \right) \quad (4.24)$$

Essa não é a única solução. Existem outras para maiores valores de  $z$ . Entretanto, esta solução é particularmente interessante, porque nos dá um POVM para uma tomografia mínima em único plano de detecção no intervalo  $0 \leq z \leq 10$ , o qual estudamos nos capítulos anteriores e calculamos a visibilidade e previsibilidade. Como vimos, essas quantidades, no intervalo estudado, apresentam uma dependência com a posição do detector no anteparo. Concluimos, neste capítulo, que existe um plano nesta região em que se pode realizar uma tomografia do estado em que o sistema foi preparado.

## Capítulo 5

# Conclusão

Investigamos, neste trabalho, a dualidade onda-partícula em um modelo esquemático para o experimento de interferência com ondas de matéria através da fenda dupla. As situações intermediárias de conhecimento parcial das descrições ondulatória e corpuscular foram quantificadas, por meio das quantidades visibilidade e previsibilidade. Tanto no caso da propagação livre das partículas enviadas ao obstáculo com as fendas quanto no caso da presença de interação com um ambiente formado por um gás ideal de partículas, essas quantidades exibem o seguinte comportamento no intervalo  $0 \leq \frac{T}{\tau} \leq 10$ : dependência com a posição que varre o anteparo durante o processo de superposição dos pacotes de onda individuais que emergem de cada uma das fendas, sendo que a visibilidade e a previsibilidade tendem a ficar constantes em todos os pontos do anteparo à medida que a distância do anteparo ao obstáculo aumenta, evidenciando o processo de superposição e a aproximação cada vez maior de uma situação de interferência típica (com visibilidade unitária). De forma geral, a relação

$$P^2 + V^2 \leq 1$$

é obedecida.

Da comparação entre a situação ideal - propagação livre - com a situação mais realística em que o ambiente é incluído, no intervalo  $0 \leq \frac{T}{\tau} \leq 10$ , conclui-se que os efeitos do ambiente não são muito pronunciados para o caso do experimento com moléculas de fulereno ([18], [17]). O fator exponencial que multiplica a visibilidade na Equação (3.57) mostra-se, neste sentido, um parâmetro para esta avaliação dos efeitos da decoerência na destruição da interferência para o caso específico que aqui tratamos.

Mostramos, ainda, no Capítulo 4, um exemplo de tomografia mínima em um único plano de detecção utilizando o modelo esquemático experimento da fenda dupla, e que existe pelo menos um plano no intervalo  $0 \leq \frac{T}{\tau} \leq 10$  em que esta tomografia possa ser realizada.



# Referências Bibliográficas

- [1] Leighton R. B. and Sands M. Feynman, R. P. *Lectures on Physics*. Addison Wesley, 1971.
- [2] S. Dürr. Quantitative wave-particle duality in multibeam interferometers. *Phys. Rev. A*, 64:042113, Sep 2001.
- [3] A. F. R. de Toledo Piza. *Mecânica Quântica*. Editora da Universidade de São Paulo, 2003.
- [4] Diu B. Cohen-Tanoudji, C. and Laloë F. *Mécanique Quantique*. Hermann, 1973.
- [5] N. Bohr. The quantum postulate and the recent development of atomic theory. *Nature*, 121, July 1928.
- [6] Kristian Camilleri. Bohr, heisenberg and the divergent views of complementarity. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 38(3):514 – 528, 2007.
- [7] In J. Kalckar(Ed) N. Bohr. *Collected works*. Amsterdam North Holland, 1985.
- [8] N. Bohr. *Atomic theory and the description of nature*. Camb. Univ. Press, 1934.
- [9] C. J. Davisson. The diffraction of electrons by a crystal of nickel. *Bell Syst. Technology J.*, 7:90.
- [10] W. K. Wootters and W. H. Zurek. Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of bohr’s principle. *Phys. Rev. D*, 19:473–484, Jan 1979.
- [11] A. Zeilinger. Complementarity in neutron interferometry. *Physica B+C*, 137:235 – 244, 1986.

- [12] H. Rauch and J. Summhammer. Static versus time-dependent absorption in neutron interferometry. *Physics Letters A*, 104(1):44 – 46, 1984.
- [13] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Technology J.*, 27, July 1948.
- [14] D. M. Greenberger and A. Yasin. Simultaneous wave and particle knowledge in a neutron interferometer. *Physics Letters A*, 128(8):391 – 394, 1988.
- [15] L. Mandel. Coherence and indistinguishability. *Opt. Lett.*, 16(23):1882–1883, Dec 1991.
- [16] Jose G. G. de Oliveira Junior Saulo Moreira Marcos D. R. Sampaio Luis A. Cabral, Irismar G. da Paz and Maria C. Nemes. In Prof. Ahmed Kishk (Ed.). *Solutions and Applications of Scattering, Propagation, Radiation and Emission of Electromagnetic Waves*.
- [17] A. Viale, M. Vicari, and N. Zanghì. Analysis of the loss of coherence in interferometry with macromolecules. *Phys. Rev. A*, 68:063610, Dec 2003.
- [18] Nairz Olaf Vos-Andreae Julian Keller Claudia van der Zouw Gerbrand Zeilinger Anton Arndt, Markus. Wave-particle duality of c60 molecules. *Nature*, 401, Oct 1999.
- [19] A. Bramon, G. Garbarino, and B. C. Hiesmayr. Quantitative complementarity in two-path interferometry. *Phys. Rev. A*, 69:022112, Feb 2004.
- [20] E. Joos and H.D. Zeh. The emergence of classical properties through interaction with the environment. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 59(2):223–243.
- [21] C. Kiefer J. Kupsch I.O. Stamatescu H. D. Zeh D. Giulini, E. Joos. *Decoherence and the appearance of a classical world in quantum mechanics*. Springer-Verlag, 1996.
- [22] J. von Neumann. *Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1955.
- [23] John King Gamble and John F. Lindner. Demystifying decoherence and the master equation of quantum brownian motion. *American Journal of Physics*, 77(3):244–252, 2009.
- [24] J. Walker D. Halliday, R. Resnick. *Fundamentals of Physics*. Wiley, 7 edition, 2005.

- [25] J. J. Halliwell. Two derivations of the master equation of quantum brownian motion. *J. Phys. A*, 40:3067–3080, March 2007.
- [26] C. Kittel and H. Kroemer. *Thermal Physics*. 2 edition.
- [27] Michel A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Computação Quântica e Informação Quântica*. Bookman, 2005.
- [28] Miguel Ángel Solís Prosser. Estudio de la medición de qubits y qudits espaciales codificados en fotones individuales y aplicaciones, 2011.
- [29] Jaroslav Řeháček, Berthold-Georg Englert, and Dagomir Kaszlikowski. Minimal qubit tomography. *Phys. Rev. A*, 70:052321, Nov 2004.
- [30] Gen Taguchi, Tatsuo Dougakiuchi, Nobuaki Yoshimoto, Katsuya Kasai, Masataka Iinuma, Holger F. Hofmann, and Yutaka Kadoya. Measurement and control of spatial qubits generated by passing photons through double slits. *Phys. Rev. A*, 78:012307, Jul 2008.