



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS
CONTÍNUAS DE POLIPROPILENO COM RESTRIÇÕES DE
TENSÃO BASEADAS EM CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO**

DIEGO FRANÇA OLINQUEVICZ

Belo Horizonte, 25 de Junho de 2015

Diego França Olinquevicz

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS
CONTÍNUAS DE POLIPROPILENO COM RESTRIÇÕES DE
TENSÃO BASEADAS EM CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Projeto Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Poley Martins Ferreira.

Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte

Escola de Engenharia da UFMG

2015



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA

Av. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha - 31.270-901 - Belo Horizonte – MG
Tel.: +55 31 3499-5145 - Fax.: +55 31 3443-3783
www.demec.ufmg.br - E-mail: cpgmec@demec.ufmg.br

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS
CONTÍNUAS DE POLIPROPILENO COM RESTRIÇÕES DE
TENSÃO BASEADAS EM CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO

DIEGO FRANÇA OLINQUEVICZ

Dissertação defendida e aprovada em 25, de junho de 2015, pela Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "**Mestre em Engenharia Mecânica**", na área de concentração de "**Projeto Mecânico**".

Prof. Dr. Ricardo Poley Martins Ferreira

Orientador – Departamento de engenharia Mecânica/UFMG

Prof. Dr. Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto

Examinador - Departamento de engenharia Mecânica/UFMG

Prof. Dr. Marcelo Greco

Examinador - Departamento de engenharia Civil/UFMG

À minha família,

AGRADECIMENTOS

Ao professor Ricardo Poley pela orientação deste trabalho.

Meus sinceros agradecimentos.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS	7
LISTA DE FIGURAS.....	9
LISTA DE TABELAS.....	13
LISTA DE ABREVIATURAS.....	14
RESUMO.....	15
ABSTRACT	17
1 INTRODUÇÃO	19
1.1 Objetivos.....	20
1.2 Organização do trabalho.....	21
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	22
2.1 Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e Elementos Finitos	22
2.1.1 Elasticidade linear infinitesimal	22
2.1.1.1 Tensões principais e invariantes	28
2.1.2 Propriedades Mecânicas	32
2.1.3 Critérios de falha	34
2.1.3.1 Critério da tensão máxima de cisalhamento	36
2.1.3.2 Critério da energia de distorção (vM).....	37
2.1.3.3 Critérios de falha considerando a pressão hidrostática.....	38
2.1.4 Método dos Elementos Finitos	41
2.2 Otimização Estrutural	46
2.2.1 Otimização de projetos	48
2.2.2 Tipos de problema de Otimização Estrutural	49
2.2.3 Formulação geral do problema de Otimização Estrutural	51
2.2.4 Aproximações convexas	51
2.2.4.1 Programação Linear Sequencial (PLS).....	52
2.2.4.2 Linearização Convexa (CONLIN).....	52
2.2.4.3 Método das Assíntotas Móveis (MMA)	54
2.2.5 Exemplo de solução aplicado a treliça	56
2.3 Otimização Topológica	59
2.3.1 Introdução.....	59

2.3.2	Formulação geral do problema de Otimização Topológica.....	61
2.3.3	Solid Isotropic Microstructure with Penalization (SIMP).....	65
2.3.4	Problemas numéricos.....	67
2.3.4.1	Instabilidade de tabuleiro.....	67
2.3.4.2	Dependência da malha.....	68
2.3.4.3	Mínimos locais	69
2.3.4.4	Métodos de restrição.....	70
2.3.5	Restrições de tensão	73
2.3.5.1	Problema da singularidade.....	75
2.3.5.2	Problema da restrição local.....	78
3	METODOLOGIA.....	81
3.1	Formulação do problema.....	81
3.1.1	Análise de sensibilidade	86
3.2	Descrição do programa.....	88
3.2.1	Descrição do algoritmo desenvolvido	89
4	RESULTADOS	92
4.1	Considerações.....	92
4.2	Propriedades mecânicas do polipropileno utilizado	93
4.3	Casos simulados	95
4.3.1	Teste do algoritmo	95
4.3.2	Primeiro caso - chapa em cisalhamento	98
4.3.3	Segundo caso – chapa quadrada	106
4.3.4	Terceiro caso – chapa com carga na extremidade	111
5	CONCLUSÕES	116
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	118
	APÊNDICE A – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO	124

LISTA DE SÍMBOLOS

A_j	Área de cada elemento de barra	
\mathbf{b}	Forças de corpo	[N/m ³]
\mathbf{B}	Matriz deslocamento -deformação	
\mathbf{D}	Tensor constitutivo do material	[N/m ²]
E	Módulo de elasticidade	[N/m ²]
\mathbf{f}	Vetor de forças no nó do elemento	[N]
\mathbf{F}	Vetor de forças no sistema global	[N]
G	Módulo de cisalhamento transversal	[N/m ²]
g_j	Função que representa a restrição no problema	
\mathbf{I}	Matriz identidade	
I_1, I_2 e I_3	Invariantes	
J_1, J_2 e J_3	Invariantes do tensor de tensões deviatório	
\mathbf{k}	Matriz de rigidez do elemento	[N/m]
k_j^0	Matriz de rigidez do elemento sem penalização	[N/m]
\mathbf{K}	Matriz de rigidez global	[N/m]
l_j^k e u_j^k	Limites móveis do método CONLIN	
L_j^k e U_j^k	Assíntotas móveis MMA	
N	Número de elementos finitos da malha	
p	Parâmetro de agregação	
R	Raio do filtro	
s	Parâmetro de controle de convergência	
S_{ij}	Tensor de tensões deviatório	[N/m ²]
\mathbf{t}	Vetor de trações superficiais	
u	Energia de deformação	
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos do elemento	
\mathbf{U}	Vetor de deslocamentos no sistema global	
V	Volume total	
w_j	Fator de peso no elemento	
\mathbf{x}	Vetor das variáveis de projeto	

σ_{ij} e σ	Tensor de tensões	[N/m ²]
σ_1, σ_2 e σ_3	Tensões principais	[N/m ²]
σ_m	Pressão hidrostática	[N/m ²]
σ_{yt}	Tensão de escoamento do material à tração	[N/m ²]
σ_{ct}	Tensão de escoamento do material à compressão	[N/m ²]
σ_{VM}	Tensão von Mises	[N/m ²]
σ_l	Tensão limite permitida	[N/m ²]
σ_j^{VM}	Tensão de von Mises calculada no elemento	[N/m ²]
ρ_{min}	Densidade mínima	
ρ	densidade	
ϵ, ϵ_{ij}	Tensor de deformações infinitesimal	
λ e μ	Constantes de Lamé	
ν	Coefficiente de Poisson	
τ_{max}	Tensão de cisalhamento máxima	[N/m ²]
τ_t	Tensão de cisalhamento máxima	[N/m ²]
α_0, α_1 e α_2	Constantes do critério de Pae (1977)	
α_j^k e β_j^k	Limites móveis MMA	
Ω	Domínio fixo	
Ω_d	Domínio desconhecido	
η	Fator de penalização	
ϵ	Parâmetro de relaxação	
φ^l	Vetor adjunto de pseudo-força	
λ^l	Vetor adjunto	

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Volume contínuo mostrando o plano de corte passando através do ponto P.	23
Figura 2.2 – Componentes de tensão do tensor de tensões.....	24
Figura 2.3 – Exemplo de deformação bidimensional.	25
Figura 2.4 – Estado plano de tensões representado em um elemento infinitesimal.	27
Figura 2.5 – Problema da mecânica dos sólidos. (a) Variáveis. (b) Inter-relações das variáveis.	28
Figura 2.6 – Estado de tensões principais.....	29
Figura 2.7 – Decomposição do estado de tensões em componente hidrostático e componente distorcional.	31
Figura 2.8 – Diagrama tensão-deformação típico para um material dúctil.....	33
Figura 2.9 – Corpo de prova típico para ensaio de tração de materiais.	34
Figura 2.10 – Representação gráfica do critério de Tresca para um carregamento biaxial.	37
Figura 2.11 – Representação gráfica do critério de von Mises para um carregamento biaxial.	38
Figura 2.12 – Representação gráfica do critério de Coulomb-Mohr para um carregamento biaxial.....	39
Figura 2.13 – Representação gráfica do critério de Drucker-Prager para um carregamento biaxial.....	40
Figura 2.14 – Representação da superfície de escoamento obtida experimentalmente de um polipropileno.	41
Figura 2.15 – Principais elementos finitos utilizados na prática.	43
Figura 2.16 – Estrutura de treliça de Michell para um caso de carregamento na extremidade de uma viga.	47
Figura 2.17 – Otimização da espessura de uma placa com bordas simplesmente apoiadas para maximizar a rigidez global.	48
Figura 2.18 – Comparação do a) método convencional de projeto e b) método de projeto ótimo.	49
Figura 2.19 – Tipos de otimização estrutural, com o problema inicial mostrado na esquerda e a estrutura otimizada mostrada na direita.....	50
Figura 2.20 – Treliça de 3 barras (unidades arbitrárias foram adotadas).	56

Figura 2.21 – Espaço de soluções do problema da treliça de 3 barras a) para $a=2$ b) para $a=4$	59
Figura 2.22 – Uma estrutura com microestrutura representando compósito.	61
Figura 2.23 – Definição do domínio do problema de otimização topológica.....	62
Figura 2.24 – Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica.....	64
Figura 2.25 – Microestrutura de material compósito representando as propriedades de material do SIMP para uma coeficiente de Poisson $\nu=1/3$	66
Figura 2.26 – Exemplo de resultado com instabilidade de tabuleiro.....	68
Figura 2.27 – Viga em balanço. a) Solução para uma discretização com 1200 elementos, b) solução com uma discretização de 4800 elementos.	69
Figura 2.28 – Viga em balanço discretizada com 1200 elementos. a) Solução obtida com um ponto de início de $\rho=0,5$, b) solução com obtida com um ponto de início de $\rho=1,0$	70
Figura 2.29 – Elementos participando na filtragem da densidade do elemento.	72
Figura 2.30 – Domínio factível degenerado de uma treliça de 3 barras.	76
Figura 2.31 – Domínio factível degenerado de uma treliça de 3 barras com parâmetro de relaxação $\epsilon=0.02$	77
Figura 3.1 - Viga em balanço discretizada com uma malha com 98 elementos.....	81
Figura 3.2 - Diagrama de blocos do algoritmo de otimização desenvolvido.	90
Figura 4.1 - Representação gráfica do critério de escoamento proposto por Pae (1977) para um polipropileno.	94
Figura 4.2 - Geometria e condições de contorno da estrutura de teste do algoritmo.....	96
Figura 4.3 - Topologia obtida no teste do algoritmo: a) critério de von Mises b) critério de Pae (1977).	96
Figura 4.4 - Convergência da função objetivo para o critério de von Mises e o critério de Pae (1977).	97
Figura 4.5 - Tensões von Mises a) critério de von Mises b) critério de Pae (1977).	97
Figura 4.6 - Geometria e condições de contorno da estrutura para o primeiro caso.....	98
Figura 4.7 - Topologia obtida na chapa em cisalhamento para o critério de von Mises com dados da Tabela 4.3.	99
Figura 4.8 - Tensões de von Mises para a chapa em cisalhamento com o critério de von Mises utilizando os dados da Tabela 4.3.	99
Figura 4.9 - Topologia obtida na chapa em cisalhamento para o critério de von Mises com dados da Tabela 4.4.	100

Figura 4.10 – Tensões de von Mises para a chapa em cisalhamento com o critério de von Mises utilizando os dados da Tabela 4.4.....	101
Figura 4.11 - Topologia obtida para a chapa em cisalhamento: a) critério de von Mises b) critério de Pae (1977).	102
Figura 4.12 - Convergência da função objetivo para o critério de von Mises e o critério de Pae (1977) para a chapa em cisalhamento.	104
Figura 4.13 - Tensões de von Mises para a chapa em cisalhamento com o critério de von Mises utilizando os dados da Tabela 4.5.....	104
Figura 4.14 - Tensões de von Mises para a chapa em cisalhamento com o critério de Pae (1977) utilizando os dados da Tabela 4.5.....	105
Figura 4.15 – Resultados da função de restrição com o critério de Pae (1977).....	106
Figura 4.16 - Geometria e condições de contorno da estrutura de para o segundo caso.	106
Figura 4.17 - Topologia obtida para o segundo caso: a) critério de von Mises b) critério de Pae (1977).	107
Figura 4.18 - Convergência da função objetivo para o critério de von Mises e o critério de Pae (1977) para o segundo caso.....	108
Figura 4.19 - Tensões de von Mises para o segundo caso com o critério de von Mises utilizando os parâmetros da Tabela 4.7.....	109
Figura 4.20 - Tensões de von Mises para o segundo caso com o critério de Pae (1977) utilizando os parâmetros da Tabela 4.7.....	110
Figura 4.21 – Resultados da função de restrição para o segundo caso com o critério de Pae (1977).	110
Figura 4.22 - Geometria e condições de contorno da estrutura para o terceiro caso.	111
Figura 4.23 - Topologia obtida para o terceiro caso: a) critério de von Mises b) critério de Pae (1977).	112
Figura 4.24 - Convergência da função objetivo para o critério de von Mises e o critério de Pae (1977) para o terceiro caso.....	113
Figura 4.25 - Tensões de von Mises para o terceiro caso com o critério de von Mises utilizando os dados da Tabela 4.9.	114
Figura 4.26 - Tensões de von Mises para o terceiro caso com o critério de Pae (1977) utilizando os parâmetros da Tabela 4.5.....	114
Figura 4.27 – Resultados da função de restrição com o critério de Pae (1977) para o terceiro caso.....	115

Figura A.1 – Representação do elemento retangular bilinear mostrando graus de liberdade, forças e numeração dos nós.....124

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1- Resultados da solução do problema da treliça de 3 barras.	58
Tabela 4.1 – Resultados experimentais de valores de tensão de escoamento a várias pressões para um polipropileno.	93
Tabela 4.2 - Parâmetros de simulação da estrutura de teste do algoritmo.....	96
Tabela 4.3 – Parâmetros de simulação do problema da chapa em cisalhamento.	98
Tabela 4.4 – Parâmetros de simulação do problema da chapa em cisalhamento.	100
Tabela 4.5 – Parâmetros de simulação do problema da chapa em cisalhamento.	101
Tabela 4.6 – Resultados para a chapa em cisalhamento.....	103
Tabela 4.7 – Parâmetros de simulação do problema do segundo caso.....	107
Tabela 4.8 – Resultados para o segundo caso.....	108
Tabela 4.9 – Parâmetros de simulação do problema do terceiro caso.	112
Tabela 4.10 – Resultados para o terceiro caso.....	113

LISTA DE ABREVIATURAS

SIMP	Solid Isotropic Microstructure with Penalization
VM	von Mises
PLS	Programação Linear Sequencial
CONLIN	Linearização Convexa
MMA	Método das Assíntotas Móveis
KS	Kreisselmeier-Steinhauser
MEF	Método dos Elementos Finitos

RESUMO

Neste trabalho é desenvolvido um método de otimização topológica para estruturas com propriedades mecânicas do polipropileno. Este método compara um critério de escoamento proposto para o polipropileno com o critério de escoamento da energia de distorção máxima (von Mises). O objetivo proposto para o problema de otimização é minimizar a quantidade de material com restrições de tensão baseadas em critérios de escoamento. Nós fizemos uma análise de tensões pelo Método dos Elementos Finitos. O domínio é discretizado usando elementos de quatro nós com funções de forma bilineares. Valores do tensor de tensões são computados no centro do elemento. Nós aplicamos uma função de densidade artificial com as variáveis de projeto variando continuamente entre 0 e 1 e a penalização do projeto é realizada através do SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*). Ocorrem três desafios ao se resolver problemas de otimização topológica com restrições de tensão. O primeiro desafio é a singularidade de tensão. Nós adotamos uma técnica de relaxação- ϵ para modificar o domínio de solução. O segundo desafio é o grande número de restrições; então a função de Kreisselmeier-Steinhauser é aplicada para agregar as restrições. E o último problema é a alta não-linearidade da restrição de tensão. As sensibilidades da função objetivo e restrições de tensão foram obtidas analiticamente e um filtro de sensibilidade foi utilizado para produzir um projeto independente da malha e evitar o problema da instabilidade de tabuleiro. Nós usamos o método das assíntotas móveis (MMA) para aproximação convexa e o método primal-dual de Newton para resolver o problema de otimização topológica. Nós resolvemos três problemas para testar a formulação proposta e a estratégia de solução para comparar um critério de escoamento proposto para o polipropileno com o critério da energia de distorção (von Mises). No primeiro caso uma chapa sujeita a cisalhamento foi otimizada. No segundo caso, uma chapa quadrada fixa nas extremidades com uma carga no centro foi otimizada. No terceiro caso, uma chapa com uma carga na extremidade foi otimizada. As soluções obtidas mostram a validade da aproximação proposta para satisfazer o critério de escoamento do polipropileno. Os resultados revelam que as estruturas obtidas com o critério de escoamento dependente da pressão hidrostática exibem uma topologia diferente da obtida com um critério de escoamento independente da pressão hidrostática (von Mises). As soluções obtidas também revelam que um leiaute não-simétrico aparece quando é usado um material que tem resistências em tração

e compressão diferentes. Estruturas com menor quantidade de material podem ser obtidas quando se aplicam critérios de escoamento diferentes.

Palavras chave: Otimização topológica, restrições de tensão, critério de falha de material, polipropileno

ABSTRACT

This paper develops a stress-based topology optimization method for structures with mechanical properties of polypropylene. This method compares a yield criteria proposed for polypropylene with the yield criteria of the distortion energy theory (von Mises). The objective of the proposed optimization problem is to minimize the amount of material to be used under local stress constraints based on a yield criteria. We make a stress analysis by using a Finite Element Method. The domain is discretized using four node square elements with bilinear shape functions. Values of the stress tensor are computed in the element center. We apply an artificial density function with design variables varying continuously between 0 and 1 and the design penalization is performed through the SIMP (Solid Isotropic Microstructure with Penalization). We have basically three challenges to solve stress constrained topology optimization problems. The first challenger is the stress singularity. We adopt the ε -relaxation technique to modify the feasible domain. The second challenger is the large number of nonlinear constraints; therefore the Kreisselmeier-Steinhauser aggregation function is employed. And the ultimate problem is that the stress is highly nonlinear with respect to the design. The sensitivities of the objective function and stress constraints were analytically derived and a filter of sensibility was used to produce a mesh independent design and avoid the checkerboard problem. We used the method of moving asymptotes (MMA) and a primal-dual Newton method algorithm to solve the topology optimization problem. We used three benchmark problems to test the proposed formulation and solution strategy to compare a yield criteria proposed for polypropylene with the yield criteria of the distortion energy theory (von Mises) results. In the first case is a sheet subject to shear. In the second case, a corner-supported square sheet with a load in the center was optimized. In the third case, a sheet loaded in the extremity was optimized. The obtained solutions show the validity of the proposed approach to satisfy the yield criteria with polypropylene. The results reveals that the design results with a pressure-dependent yield criteria exhibit a different topology from one obtained with a pressure-independent yield criteria (von Mises). The obtained solutions also reveal that a non-symmetric optimal layout appears when using a material that has different compression and tensile strengths. Structures with less amount of material can be obtained when applying different yield criteria.

Key words: Topology optimization, stress constraints, material failure criteria, polypropylene

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da engenharia levou à necessidade de metodologias eficientes para o projeto de mecanismos e estruturas, para redução de tempo e custo. Projetos mais leves e que resistam às condições de funcionamento são uma condição para se ter um produto competitivo e em muitas aplicações a otimização estrutural é utilizada como ferramenta para se obter um projeto ótimo que não poderia ser encontrado por intuição.

Um dos métodos de otimização estrutural é a otimização topológica (BENDSØE e KIKUCHI, 1988; BENDSØE e SIGMUND, 2003) para estruturas contínuas. Este método consiste na busca da distribuição ótima de material dentro de um volume pré-definido a partir da inserção de furos. O método de otimização topológica foi inicialmente aplicado para problemas de projeto mecânico em aplicações industriais, mas se espalhou para outras disciplinas físicas, incluindo mecânica dos fluidos, acústica, eletromagnetismo, óptica e as combinações destas (SIGMUND e MAUTE, 2013).

Para que o método da otimização topológica seja eficiente, é necessário que a formulação do problema represente de forma correta o comportamento da estrutura sendo analisada. Em problemas que exigem uma restrição no limite de tensão, adotar critérios de escoamento que representem adequadamente a falha da estrutura pode levar ao aparecimento de resultados completamente diferentes e com menor quantidade de material.

Neste trabalho é desenvolvido um método de otimização topológica para estruturas com propriedades mecânicas de polipropileno. Este método compara o critério de escoamento proposto por Pae (1977) com o critério de escoamento da energia de distorção máxima (von Mises) (SHIGLEY, MISCHKE e BUDYNAS, 2005). O objetivo proposto para o problema de otimização é minimizar a quantidade de material com restrições de tensão baseadas em critérios de escoamento.

Nós fizemos uma análise de tensões pelo método dos elementos finitos. O domínio é discretizado usando elementos de quatro nós com funções de forma bilineares. Valores do tensor de tensões são computados no centro do elemento. Nós aplicamos uma função de densidade artificial com as variáveis de projeto variando continuamente entre 0 e 1 e a penalização do projeto é realizada através do SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*) (BENDSØE e SIGMUND, 2003).

Ocorrem três desafios ao se resolver problemas de otimização topológica com restrições de tensão. O primeiro desafio é a singularidade de tensão. Nós adotamos uma técnica de relaxação- ϵ para modificar o domínio de solução (CHENG e GUO, 1997). O segundo desafio é o grande número de restrições; então a função de Kreisselmeier-Steinhauser é aplicada para agregar as restrições e o último problema é a alta não-linearidade da restrição de tensão.

As derivadas da função objetivo e as restrições de tensão foram obtidas analiticamente e um filtro de sensibilidade foi utilizado para produzir um projeto independente da malha e evitar o problema da instabilidade de tabuleiro. Nós usamos o método das assíntotas móveis (MMA) para aproximação convexa e o método primal-dual de Newton para resolver o problema de otimização topológica.

Nós usamos três problemas para testar a formulação proposta e a estratégia de solução para comparar o critério de escoamento proposto por Pae (1977) com o critério da energia de distorção (von Mises). No primeiro caso uma chapa sujeita a cisalhamento foi otimizada. No segundo caso, uma chapa quadrada fixa nas extremidades com uma carga no centro foi otimizada. No terceiro caso, uma chapa com uma carga na extremidade foi otimizada.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é implementar um método de otimização topológica para estruturas contínuas bidimensionais com propriedades mecânicas de polipropileno em estado plano de tensões para minimização da quantidade de material com restrição de tensão baseada no critério de escoamento proposto por Pae (1977). A aplicação deste método visa mostrar as diferenças nos resultados da otimização topológica com a utilização do critério de escoamento proposto por Pae (1977) em relação ao critério de falha da máxima energia de distorção.

Como objetivos específicos destacam-se:

- 1) Implementar um programa de otimização topológica de estruturas contínuas bidimensionais com propriedades mecânicas de polipropileno em estado plano de tensões, com critérios de escoamento do material como restrições para o problema, utilizando o software Octave.
- 2) Aplicar o método das assíntotas móveis (MMA) para solução do problema.

- 3) Implementar o critério de escoamento proposto por Pae (1977) para representar a falha de uma estrutura com propriedades mecânicas de polipropileno ao se aplicar um carregamento.
- 4) Mostrar as diferenças nos resultados obtidos na otimização topológica ao se usar propriedades mecânicas de um material que tem resistência à tração diferente da resistência à compressão (polipropileno) em relação a um material representado pelo critério da energia de distorção máxima (von Mises) que é independente da pressão hidrostática.

1.2 Organização do trabalho

Este trabalho está dividido da seguinte forma:

No Capítulo 2 são apresentados os fundamentos teóricos sendo dividido em três partes. Na primeira parte é feita uma introdução sobre a mecânica dos sólidos, os critérios de falha de materiais mais comuns para materiais isotrópicos e a técnica dos elementos finitos para a solução do problema proposto. Na segunda parte são apresentados os tipos de problema de otimização estrutural, métodos de aproximação convexa de funções e um exemplo de aplicação em treliça. Na terceira parte é feita uma revisão sobre o método da otimização topológica mostrando alguns problemas numéricos e uma revisão sobre restrições de tensão.

No Capítulo 3 é apresentada a formulação do problema de minimizar a quantidade de material de uma estrutura bidimensional com propriedades do material polipropileno, com restrição de tensão baseada em critérios de falha de material e sujeita a um carregamento e condições de contorno. Também é mostrada a estrutura do algoritmo utilizado para solução do problema.

No Capítulo 4 são mostrados os resultados e análises das simulações para os problemas clássicos propostos. No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões.

No Apêndice A é mostrada a formulação do elemento finito implementado.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são apresentados os fundamentos teóricos sendo dividido em três partes. Na primeira parte é feita uma introdução sobre a mecânica dos sólidos, os critérios de falha de materiais mais comuns e a técnica dos elementos finitos para a solução do problema proposto. Na segunda parte são apresentados os tipos de otimização estrutural, métodos de aproximação convexa de funções e um exemplo de aplicação em treliça. Na terceira parte é feita uma revisão sobre o método da otimização topológica mostrando alguns problemas numéricos e uma revisão sobre restrições de tensão.

2.1 Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e Elementos Finitos

Para aplicar as técnicas de otimização estrutural, deve-se resolver o problema de análise estática de uma estrutura sujeita a carregamentos e condições de contorno. Para a análise de tensão e deformação algumas hipóteses são adotadas: a análise estrutural é realizada dentro do regime elástico linear, ou seja, são desconsiderados efeitos da não-linearidade geométrica e do material, e também é desconsiderado que haja plastificação do material nos pontos de fixação e nas quinas. Também são desconsideradas mudanças no comportamento do material devido à velocidade de aplicação do carregamento. Neste trabalho são resolvidos casos com pequenas deformações em estado plano de tensões e as hipóteses adotadas são adequadas para a modelagem das estruturas propostas utilizando propriedades mecânicas do polipropileno.

Foi adotada a **teoria da elasticidade linear infinitesimal** para modelagem do problema, sendo que as equações de equilíbrio obtidas foram resolvidas numericamente através do **Método dos Elementos Finitos**.

2.1.1 Elasticidade linear infinitesimal

Nesta seção introduzimos os principais conceitos e equações da elasticidade que são utilizados neste trabalho. Timoshenko e Goodier (1951) e Malvern (1969) são livros clássicos do tema onde se pode encontrar a formulação completa da teoria da elasticidade.

Na Figura 2.1 está representado o problema de análise estática de um corpo de material isotrópico homogêneo, o qual possui uma superfície S e um volume V e está sujeito a forças arbitrárias F_i em sua superfície. Este corpo é seccionado e são mostrados a força e o momento agindo em sua superfície interna no ponto P .

Um material é considerado **homogêneo** se tem as mesmas propriedades em todos os pontos do corpo. Outra definição usada é a de material **isotrópico**, que é definido como um material que tem as mesmas propriedades mecânicas em todas as direções (HIBBELER, 2004).

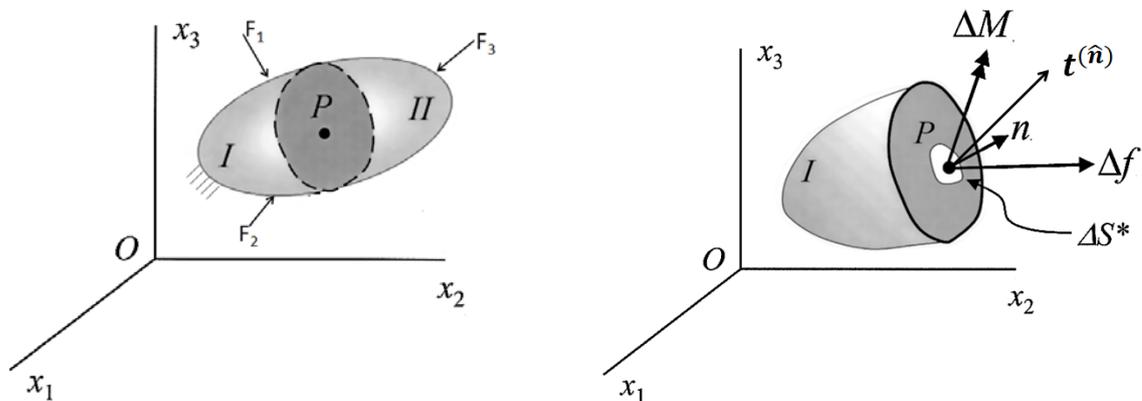


Figura 2.1 – Volume contínuo mostrando o plano de corte passando através do ponto P .

Fonte: Adaptado de MASE e MASE, 1999

O conceito de tensão em um ponto é obtido pelo limite da razão de $\Delta f / \Delta S^*$ quando a área ΔS^* tende a zero, na configuração deformada do corpo (BORESI, CHONG e LEE, 2011). Matematicamente isto pode ser definido pelo **vetor tensão** $t^{(\hat{n})}$ como:

$$t^{(\hat{n})} = \lim_{\Delta S^* \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta S^*} = \frac{df}{dS^*} \quad (2.1)$$

onde o sobrescrito \hat{n} indica que o vetor tensão t deve ser representado em conjunto com o vetor unitário \hat{n} que é normal ao plano da área ΔS^* no ponto P .

Então, para se definir o estado de tensão em um ponto qualquer de um corpo, é necessário definir o vetor normal \hat{n} ao plano que passa pelo ponto e o vetor tensão $t^{(\hat{n})}$ associado a este plano. Para cada plano com orientação diferente, será associado outro vetor

tensão. O estado de tensão em um ponto pode ser representado alternativamente na forma matricial conhecida como **tensor de tensões** (SADD, 2005):

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde σ_{11}, σ_{22} e σ_{33} são chamadas de **tensões normais** e $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}$ e σ_{32} são chamadas de **tensões de cisalhamento**. Uma tensão normal positiva é chamada de **tensão de tração** e uma tensão normal negativa é chamada de **tensão de compressão** (BORESI, CHONG e LEE, 2011). A unidade usada para tensão é Newton por metro quadrado (N/m^2), sendo chamada de **Pascal**. Para compatibilidade com os resultados geralmente obtidos na engenharia, tensões são geralmente expressas como Mega-Pascal (MPa) (HIBBELER, 2004).

Os componentes do tensor de tensões nas faces positivas são mostrados na Figura 2.2. O tensor de tensões é uma matriz simétrica e é válida a seguinte relação $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

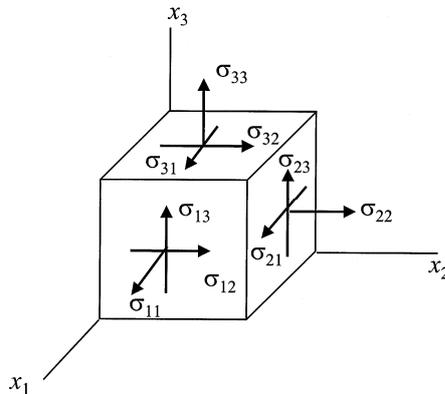


Figura 2.2 – Componentes de tensão do tensor de tensões.

Fonte: MASE e MASE, 1999

O vetor tensão $\mathbf{t}^{(\hat{n})}$ pode ser relacionado ao tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ através da **fórmula de tensão de Cauchy** (SADD, 2005):

$$\mathbf{t}^{(\hat{n})} = \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{n}} \quad (2.3)$$

Através de um balanço de forças no corpo da Figura 2.1 pode-se obter três equações diferenciais chamadas de **equações de equilíbrio** e são escritas na forma matricial como

$$\nabla \sigma + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

onde ρ é a densidade e \mathbf{b} são as forças de corpo.

Para a análise da deformação são consideradas duas configurações estacionárias do corpo, a primeira chamada de configuração não-deformada ou inicial e a segunda de configuração deformada. Desconsidera-se a sequência pela qual a configuração deformada é alcançada a partir da configuração inicial. Estas configurações são ilustradas na Figura 2.3.

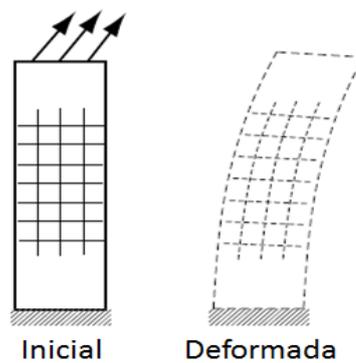


Figura 2.3 – Exemplo de deformação bidimensional.

Fonte: Adaptado de HOSFORD, 2005

A partir do campo de deslocamentos \mathbf{u} de um corpo, podem ser calculados os componentes do **tensor de deformação infinitesimal**, o qual é uma medida de deformação de engenharia (BORESI, CHONG e LEE, 2011). Esta relação é mostrada na Equação (2.5)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (2.5)$$

O tensor de deformação infinitesimal é escrito na forma matricial como

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

onde ε_{11} , ε_{22} e ε_{33} são chamadas de componentes de **deformações normais** e γ_{12} , γ_{21} , γ_{13} , γ_{31} , γ_{23} e γ_{32} são chamadas de componentes **deformações de cisalhamento**.

Para relacionar as tensões com as deformações é necessário estabelecer uma relação constitutiva. Esta relação, chamada de **lei de Hooke generalizada**, é mostrada na Equação (2.7):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.7)$$

onde \mathbf{D} é um tensor constitutivo de 4ª ordem que estabelece as propriedades de um material. Este tensor possui 81 componentes sendo 21 distintos devido à simetria do tensor para um material anisotrópico.

Para materiais elásticos isotrópicos em um domínio tridimensional pode-se escrever a lei de Hooke na forma matricial na notação de Voigt como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

onde λ e μ são as **constantes de Lamé** (MASE e MASE, 1999). Nesta matriz nota-se que um material isotrópico linear tem apenas duas componentes distintas para representar o comportamento mecânico do material.

As constantes de Lamé podem ser escritas em termos do **módulo de Young** ou **módulo de elasticidade** e do **coeficiente de Poisson** a partir das expressões:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.9)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.10)$$

onde E é o módulo de elasticidade ou módulo de Young, ν é o coeficiente de Poisson e G é o **módulo de cisalhamento transversal**.

Para o desenvolvimento dos exemplos utilizados neste trabalho será adotada a hipótese do **Estado Plano de Tensões**. Este estado é definido em geometrias de corpos nas

quais uma dimensão é muito menor do que as outras duas e o carregamento está no plano das dimensões maiores (MASE e MASE, 1999). Como consequência deste carregamento no plano, as componentes de tensões σ_{33} , σ_{31} e σ_{32} em um elemento infinitesimal extraído de um corpo em estado plano de tensões serão desprezíveis se comparadas às demais, conforme é mostrado na Figura 2.4:

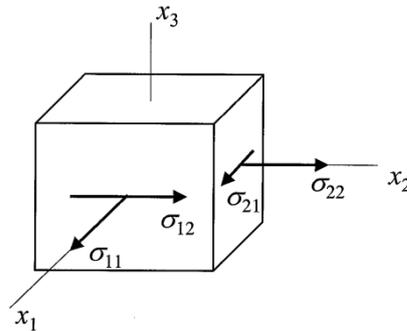


Figura 2.4 – Estado plano de tensões representado em um elemento infinitesimal.

Fonte: Adaptado de MASE e MASE, 1999

Para materiais elásticos isotrópicos em estado plano de tensões, pode-se escrever a lei de Hooke na forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

As equações desenvolvidas anteriormente para um caso geral de análise de uma estrutura, serão utilizadas para a solução de problemas da mecânica dos sólidos, considerando a hipótese da elasticidade linear infinitesimal. As equações da **elasticidade linear infinitesimal** apresentadas, tem como objetivo encontrar um total de 15 incógnitas para o problema: 6 tensões, 6 deformações e 3 deslocamentos (CHEN e HAN, 1988). O diagrama representado na Figura 2.5 ilustra as inter-relações das equações apresentadas. A forma de solução destas equações irá depender das condições de contorno e carregamento, as quais podem ser um deslocamento prescrito \mathbf{u}^* , ou uma força \mathbf{F}_i aplicada sobre a superfície de contorno.

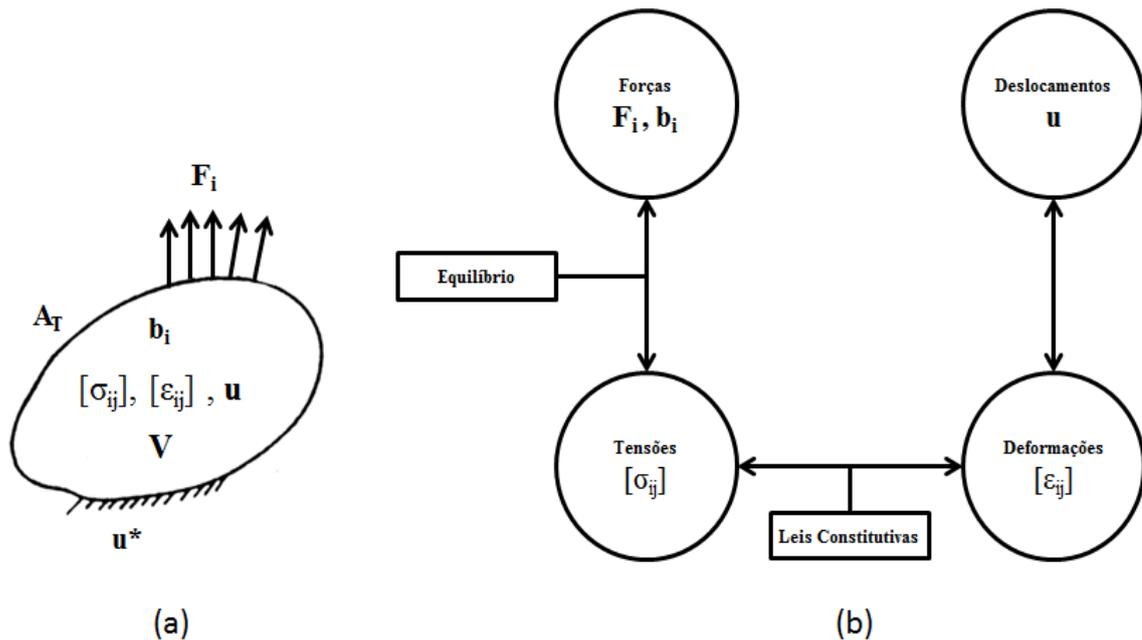


Figura 2.5 – Problema da mecânica dos sólidos. (a) Variáveis. (b) Inter-relações das variáveis.

Fonte: Adaptado de CHEN e HAN, 1988

2.1.1.1 Tensões principais e invariantes

Para a definição de critérios de falha de materiais, os conceitos de tensões principais e tensor de tensões deviatório são necessários. Todas as equações que serão deduzidas podem ser simplificadas para o estado plano de tensões fazendo σ_{31}, σ_{32} e σ_{33} iguais a zero.

Para o estado de tensões no ponto P em um corpo, existem direções onde o vetor tensão $\mathbf{t}^{(\hat{n})}$ age na direção do vetor unitário \hat{n} o qual é normal ao plano da área ΔS^* no ponto P, conforme foi mostrado na Figura 2.1. Estas direções do vetor unitário \hat{n} são chamadas de **direção principais** e as tensões associadas a estes planos são chamadas de **tensões principais** (SADD, 2005). Na Figura 2.6 são representados os componentes do tensor de tensões principais nos planos normais às direções principais. As tensões σ_1, σ_2 e σ_3 são as tensões principais e nestes planos não ocorrem tensões de cisalhamento.

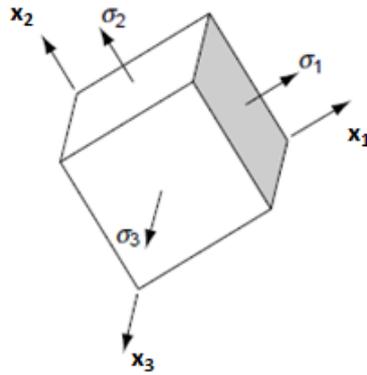


Figura 2.6 – Estado de tensões principais.

Fonte: Adaptado de MASE e MASE, 1999

A determinação do valor das tensões principais segue os procedimentos de determinação de valores principais e direções principais de um tensor de segunda-ordem simétrico. A formulação do problema de autovalores para um tensor de tensões qualquer é definido na Equação (2.12) como

$$|[\sigma_{ij}] - \sigma[I]| = 0 \quad (2.12)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade 3×3 , $[\sigma_{ij}]$ é o tensor de tensões e σ são as tensões principais. A solução desta equação produzirá a seguinte equação característica do tensor de tensões

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0 \quad (2.13)$$

cujas raízes são σ_1 , σ_2 e σ_3 as quais são as tensões principais e os coeficientes I_1 , I_2 e I_3 são conhecidos como primeiro, segundo e terceiro **invariantes**, respectivamente e são expressos como

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.14a)$$

$$I_2 = -\sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 + \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \quad (2.14b)$$

$$I_3 = \det([\sigma_{ij}]) = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (2.14c)$$

Um estado de tensões tendo todas as três tensões principais iguais é chamado de **estado esférico de tensões** (MASE e MASE, 1999). Um exemplo clássico é a pressão

exercida por um fluido sobre um corpo imerso e este estado é representado pela matriz diagonal $[\sigma_{ij}]$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

onde σ_m é a média aritmética das tensões normais, sendo chamado de **tensão média** ou **pressão hidrostática** e é obtida a partir do primeiro invariante

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (2.16)$$

Todo estado de tensão em um ponto de um corpo pode ser decomposto duas partes: uma devido ao estado esférico de tensões e outra devido ao **tensor de tensões deviatório** (SADD, 2005). Esta relação é mostrada na Figura 2.7 para as tensões principais, sendo que o componente deviatório (distorcional) provoca uma mudança de forma e o componente hidrostático uma mudança de volume. Na Equação (2.17) esta relação é mostrada como

$$[\sigma_{ij}] = [S_{ij}] + \sigma_m[I] \quad (2.17)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade 3 x 3 e $[S_{ij}]$ é o tensor de tensões deviatório, o qual pode ser obtido pela solução desta equação como

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

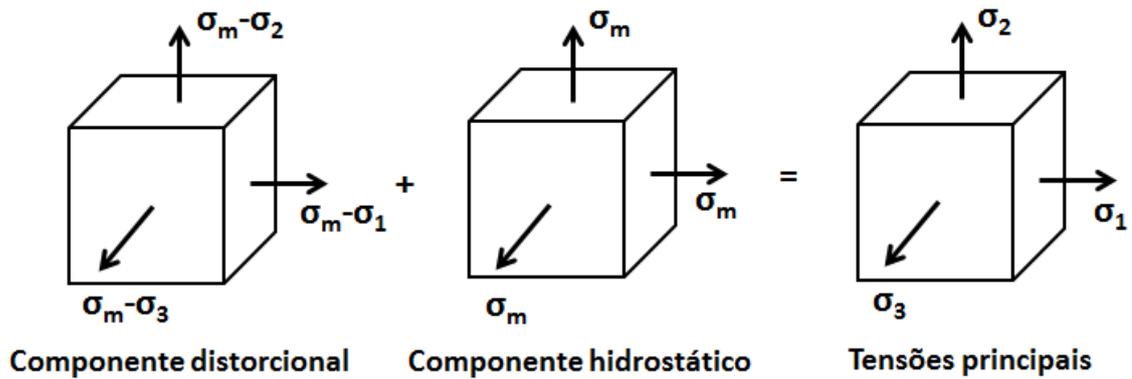


Figura 2.7 – Decomposição do estado de tensões em componente hidrostático e componente distorcional.

Fonte: Adaptado de MASE e MASE, 1999

Resolvendo o problema de autovalores $[[S_{ij}] - \sigma[I]] = 0$, encontra-se a seguinte equação característica para o tensor de tensões deviatório o qual apresenta as mesmas direções principais do tensor de tensões $[\sigma_{ij}]$

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0 \quad (2.19)$$

cujas raízes são $\sigma_1 - \sigma_m$, $\sigma_2 - \sigma_m$ e $\sigma_3 - \sigma_m$ e os coeficientes J_1 , J_2 e J_3 são conhecidos como primeiro, segundo e terceiro **invariantes** do tensor de tensões deviatório respectivamente e são expressos como

$$J_1 = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0 \quad (2.20a)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2S_{12}^2 + 2S_{23}^2 + 2S_{13}^2) \quad (2.20b)$$

$$J_3 = \det([s_{ij}]) = S_{11}S_{22}S_{33} + 2S_{12}S_{23}S_{13} - S_{33}S_{12}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{11}S_{23}^2 \quad (2.20c)$$

O valor do segundo invariante J_2 também pode ser calculado em termos dos componentes do tensor de tensões e das tensões principais (ABRATE, 2008).

$$J_2 = \frac{1}{6}\{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2\} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 \quad (2.21a)$$

$$J_2 = \frac{1}{6}\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} \quad (2.21b)$$

2.1.2 Propriedades Mecânicas

O comportamento elástico de um material é caracterizado pelas duas condições seguintes: uma onde a tensão de um material é uma função única da deformação e outra onde o material tem a propriedade de se recuperar sua forma original após a remoção das forças aplicadas. Também é conhecido que o comportamento elástico pode ser linear ou não-linear (MASE e MASE, 1999). Neste trabalho é adotada a hipótese de materiais elásticos lineares, portanto serão permitidas apenas pequenas deformações de modo que o material permaneça dentro do regime elástico linear. Quando ocorre uma deformação permanente no material esta é chamada de deformação plástica.

A resistência mecânica de um material depende de sua capacidade de suportar carga sem deformação excessiva ou ruptura. Esta propriedade deve ser determinada experimentalmente e os testes mais usados para este fim são os testes de tração e compressão. A partir destes testes várias propriedades mecânicas podem ser determinadas, entretanto a principal relação obtida é o diagrama de tensão-deformação de materiais como metais, cerâmicas, polímeros e materiais compostos. Este diagrama, o qual é mostrado na Figura 2.8, é muito importante em engenharia, pois permite obter dados de resistência à tração ou compressão do material sem considerar o tamanho o formato físico deste material para aplicação em projetos na seleção do material mais adequado (HIBBELER, 2004). Curvas de tensão-deformação podem ser usadas para prever o comportamento do material sobre outras formas de carregamento diferentes da tração uniaxial (HOSFORD, 2005) .

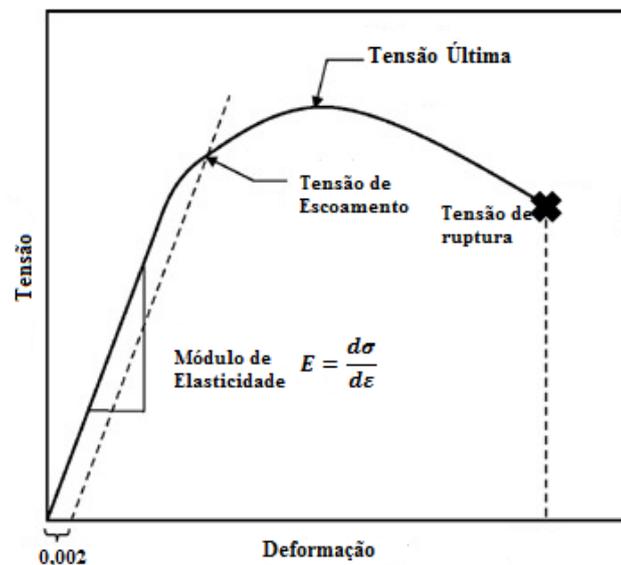


Figura 2.8 – Diagrama tensão-deformação típico para um material dúctil.

Fonte: Adaptado de HOSFORD, 2005

Na Figura 2.8 são mostrados os parâmetros básicos obtidos de uma curva obtida de um ensaio de tração os quais são: o módulo de elasticidade E , a tensão de escoamento do material, a tensão última e a tensão e deformação na ruptura. Segundo Hosford (2005) por causa da dificuldade em se definir um limite elástico para materiais devido à dependência da acurácia da medição, o início da deformação plástica do aço é usualmente descrito pela tensão de escoamento a 0.2%. Esta tensão é obtida pela construção de uma linha reta paralela à porção linear da curva tensão-deformação, estando deslocada de uma distância de 0.002 no eixo das abscissas em relação à origem do gráfico. O ponto de interseção desta linha com a curva tensão-deformação resulta na tensão de escoamento.

Para o caso de polímeros lineares, Hosford (2005) define a tensão de escoamento como a tensão máxima inicial (tensão última). No caso do polipropileno, Pae (1977) adota o valor de 2% de deformação para a origem da reta paralela para encontrar o valor da tensão de escoamento. Apesar de ser um valor alto para a origem da reta paralela, neste trabalho utiliza-se apenas as propriedades mecânicas do polipropileno fornecida por Pae (1977) para estudar a diferença de aplicação de critérios de falha diferentes. Para representar corretamente o modelo constitutivo de um polipropileno é necessário considerar outros fenômenos tais como a viscoelasticidade e não linearidade do material.

Para realizar o teste de tração ou compressão, é feito um corpo de prova do material em formato e tamanho padronizados. Uma máquina de teste é então usada para esticar o corpo de prova a uma taxa lenta até que ele atinja o ponto de ruptura (HIBBELER,

2004). Na Figura 2.9 é mostrado um corpo de prova do material típico utilizado no ensaio de tração de um material.

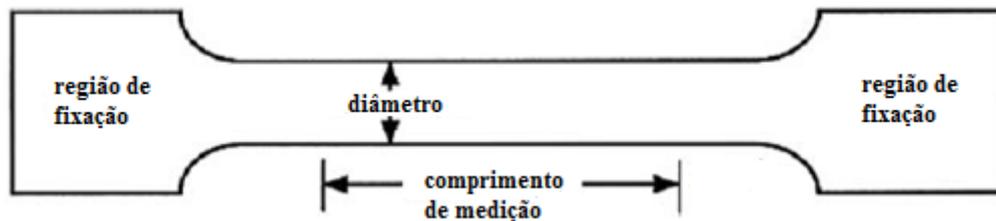


Figura 2.9 – Corpo de prova típico para ensaio de tração de materiais.

Fonte: Adaptado de HOSFORD, 2005

Segundo Shigley, Mischke e Budynas (2005), o comportamento dos metais estruturais é classificado tipicamente, como dúctil ou frágil. Os materiais dúcteis são normalmente classificados por terem a deformação elasto-plástica na fratura $\epsilon_f \geq 5\%$ e uma resistência ao escoamento identificável que geralmente é a mesma sob compressão e tração. Os materiais frágeis tem $\epsilon_f < 5\%$ e não exibem uma resistência ao escoamento identificável, sendo classificados segundo sua resistência à tração e à compressão. Neste trabalho são considerados apenas materiais dúcteis.

2.1.3 Critérios de falha

A palavra falha pode significar que uma peça se separou em dois pedaços; tornou-se permanentemente distorcida; teve sua confiabilidade depreciada; ou sua função comprometida (SHIGLEY, MISCHKE e BUDYNAS, 2005). Segundo Hibbeler (2004), se o material for dúctil, geralmente a falha será especificada pelo início do escoamento; se o material for frágil, ela será especificada pela fratura. Neste trabalho o conceito de falha é definido como o término do comportamento elástico de materiais dúcteis lineares elásticos isotrópicos. São aplicados critérios de falha baseados em tensão mais comumente usados para prever o fim da fase elástica.

O uso dos critérios de falha permite prever o comportamento de falha dos materiais em situações gerais baseado no conhecimento das cargas e dados mínimos de falha obtidos de testes (CHRISTENSEN, 2013). Não há uma teoria universal de falha para o caso geral de propriedades de materiais diferentes e estados de tensão. Várias hipóteses foram

testadas ao longo dos anos, levando a práticas aceitas na atualidade (SHIGLEY, MISCHKE e BUDYNAS, 2005).

Para se usar um critério de falha, antes é necessário calcular os componentes os componentes de tensão normal e cisalhamento no componente e uma vez estabelecido o estado de tensões, as tensões principais são determinadas para os pontos críticos. Um conceito importante usado na apresentação dos critérios de falha é a densidade de energia de deformação. A energia de deformação é a energia interna resultante da deformação de um corpo quando ele está sujeito a um carregamento externo. Essa energia é sempre positiva sendo gerada pela ação da tensão normal ou da tensão de cisalhamento (HIBBELER, 2004). A densidade de energia de deformação u é a energia por unidade de volume e é calculada como

$$u = \frac{1}{2} [\sigma_{ij}] [\varepsilon_{ij}] \quad (2.22)$$

A densidade de energia de deformação pode ser representada em termos do invariante I_1 do tensor de tensões e do invariante do tensor deviatório J_2 como mostra a Equação (2.23).

$$u = \frac{J_2}{G} + \frac{1 - 2\nu}{6E} I_1^2 \quad (2.23)$$

onde o primeiro termo representa a energia de deformação distorcional a qual provoca uma mudança de forma e o segundo termo é a energia de deformação correspondente ao carregamento hidrostático o qual provoca uma mudança de volume.

Sobre carregamento multiaxial, a pressão hidrostática tem efeitos negligenciáveis no escoamento de muitos metais e estes materiais são isotrópicos com resistência ao escoamento em tração e compressão iguais (ABRATE, 2008). Para materiais dúcteis, um número bem conhecido de critérios de falha refletem estes fatos, tais como o critério da **tensão máxima de cisalhamento** (critério de **Tresca**) e o critério da **energia de distorção** (critério de **von Mises**) os quais serão revisados por serem frequentemente usados na prática da engenharia.

Para representar os efeitos da pressão hidrostática e da diferença de resistência em tração e compressão na falha de materiais tais como polímeros, concreto e espumas, os critérios mais conhecidos são o critério de **Coulomb-Mohr** e o critério de **Drucker-Prager**

(ABRATE, 2008). Vários outros critérios de falha foram propostos para representar estes efeitos e uma versão proposta por Pae (1977) será adotada para o polipropileno.

A escolha de um critério de falha é determinada pelo critério que melhor representa o comportamento do material obtido de ensaios experimentais. A formulação destes critérios de falha para materiais dúcteis, os quais são aplicados para mostrar a diferença de sua aplicação nas formas obtidas durante uma otimização topológica, será mostrada a seguir.

2.1.3.1 Critério da tensão máxima de cisalhamento

A teoria da tensão máxima de cisalhamento, também chamada de critério de **Tresca**, prevê que o escoamento começa sempre que a tensão máxima de cisalhamento em qualquer região do material, iguala-se ou excede a tensão máxima de cisalhamento em um corpo de prova do mesmo material quando este começa a escoar sujeito a um ensaio de tração. À medida que um corpo de prova começa a escoar ao ser submetido à tração, linhas de deslizamento, conhecidas como linhas de Lüders, formam um ângulo de aproximadamente 45° com o eixo longitudinal. Essas linhas representam o começo do escoamento, sendo que a tensão de escoamento é máxima também no ângulo de 45° . Portanto faz sentido considerar este mecanismo de falha (SHIGLEY, MISCHKE e BUDYNAS, 2005).

Logo, para um estado de tensão geral, o critério de Tresca prevê que o escoamento do material não ocorre quando

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (2.24a)$$

$$\tau_{max} \leq \frac{\sigma_{yt}}{2} \quad (2.24b)$$

onde τ_{max} é a tensão de cisalhamento máxima, σ_1 e σ_3 são as tensões principais e $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ e σ_{yt} é a tensão de escoamento obtida em um ensaio de tração. Na Figura 2.10 é mostrado o gráfico do critério de Tresca, o qual representa o limite dentro da área hexagonal para o qual o material não escoará, não ocorrendo a falha para um carregamento biaxial.

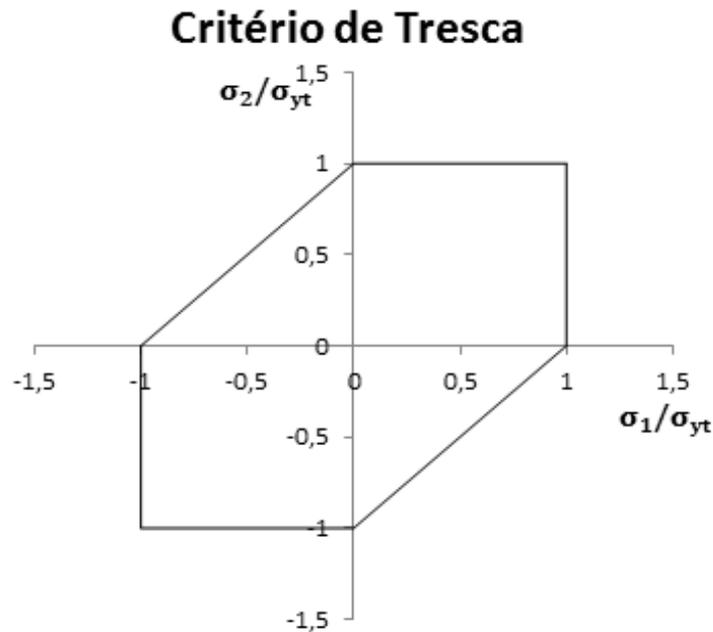


Figura 2.10 – Representação gráfica do critério de Tresca para um carregamento biaxial.

Fonte: Adaptado de SHIGLEY, MISCHKE e BUDYNAS (2005)

2.1.3.2 Critério da energia de distorção (vM)

O critério da energia de distorção, também conhecido como critério de von Mises prevê que o escoamento em um material dúctil ocorre quando a energia de distorção por unidade de volume do material é igual ou maior que a energia de distorção por unidade de volume do mesmo material quando ele começa a escoar ao ser submetido a um teste de tração simples (HIBBELER, 2004).

Igualando as energias de distorção referentes a um estado geral de tensões e a um ensaio de tração, o critério de von Mises pode ser escrito em termos do invariante do tensor deviatório J_2 , sendo independente do invariante do tensor de tensões I_1 . Logo, para um estado de tensão geral, o critério de von Mises prevê que o escoamento do material não ocorre quando

$$\sigma_{VM} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (2.25a)$$

$$\sigma_{VM} \leq \sigma_{yt} \quad (2.25b)$$

onde σ_{VM} é conhecida como tensão de von Mises. Na Figura 2.11 é mostrado o gráfico do critério de von Mises, o qual representa o limite dentro da área da elipse para o qual o material não escoará, não ocorrendo a falha para um carregamento biaxial. O critério de von Mises é visto como uma superfície cilíndrica no espaço de tensões principais (CHRISTENSEN, 2013).

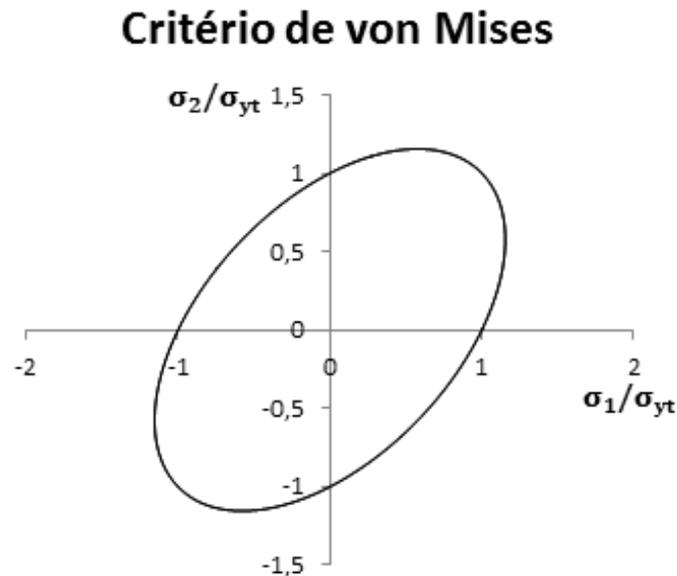


Figura 2.11 – Representação gráfica do critério de von Mises para um carregamento biaxial.

Fonte: Adaptado de SHIGLEY, MISCHKE e BUDYNAS (2005)

2.1.3.3 Critérios de falha considerando a pressão hidrostática

Muitos materiais tem sua resistência dependente da pressão hidrostática representada pela Equação (2.14) ou da segunda parcela da energia mostrada na Equação (2.23). Estes materiais incluem polímeros, concreto, solo, rochas e espumas e vários critérios de falha tem sido propostos para representar este comportamento em seu modo de falha (ABRATE, 2008). Alguns destes critérios são mostrados a seguir.

Para representar a falha de materiais que apresentam resistência ao escoamento em tração diferente da compressão, o critério de **Coulomb-Mohr** pode ser usado (SHIGLEY, MISCHKE e BUDYNAS, 2005). Segundo Chen e Han (1988) o critério de Coulomb-Mohr pode ser considerado como uma versão generalizada do critério de Tresca à qual leva em conta o efeito da pressão hidrostática. Este critério de falha foi baseado nos resultados de tração e compressão por meio da construção dos círculos de Mohr a fim de se definir o

envoltório de falha. Para um estado de tensão geral, o critério de Coulomb-Mohr prevê que o escoamento do material não ocorre quando

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{yt}} - \frac{\sigma_3}{\sigma_{ct}} \leq 1 \quad (2.26)$$

onde σ_{ct} é a tensão de escoamento obtida em um ensaio de compressão. Na Figura 2.12 é mostrado o gráfico do critério de Coulomb-Mohr, o qual representa o limite dentro da área do hexágono para o qual o material não escoará, não ocorrendo a falha para um carregamento biaxial. Nota-se o aumento da área do hexágono em relação ao critério de Tresca, devido à diferença nas tensões de escoamento de tração e compressão.

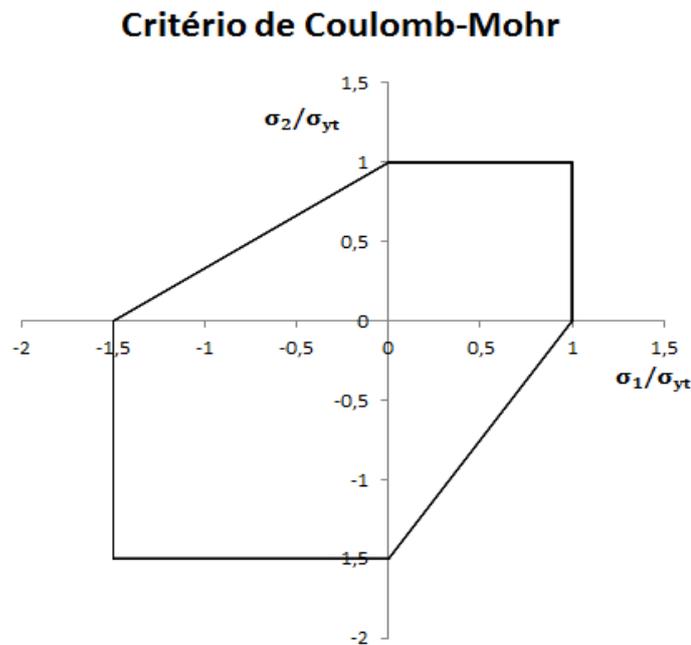


Figura 2.12 – Representação gráfica do critério de Coulomb-Mohr para um carregamento biaxial.

Fonte: Adaptado de SHIGLEY, MISCHKE e BUDYNAS (2005)

O critério formulado por Drucker e Prager (1952) foi obtido a partir do estudo de problemas de mecânica dos solos. Segundo Chen e Han (1988) o critério de **Drucker-Prager** é uma modificação do critério de von Mises, onde a influência da pressão hidrostática é introduzida pela inclusão do primeiro invariante mostrado na Equação (2.14a) no critério de von Mises representado pela Inequação (2.25b), conforme é mostrado na Inequação (2.27).

$$-\alpha_0 - \alpha_1 I_1 + \sqrt{J_2} \leq 0 \quad (2.27)$$

onde α_0 e α_1 são constantes do material extraídas de testes experimentais. Estas constantes podem ser reescritas em termos da resistência à compressão σ_{ct} e da resistência à tração σ_{yt} sendo que $\alpha_0 = 2\sigma_{ct}\sigma_{yt}/\sqrt{3}(\sigma_{ct} + \sigma_{yt})$ e $\alpha_1 = -(\sigma_{ct} - \sigma_{yt})/\sqrt{3}(\sigma_{ct} + \sigma_{yt})$. Quando $\sigma_{ct} = \sigma_{yt}$, o critério de von Mises é obtido.

Na Figura 2.13 é mostrado o gráfico do critério de Drucker-Prager, o qual representa o limite dentro da área da elipse fora de centro para o qual o material não escoará, não ocorrendo a falha para um carregamento biaxial. Nota-se que a elipse está fora de centro devido à diferença na resistência à tração e compressão do material.

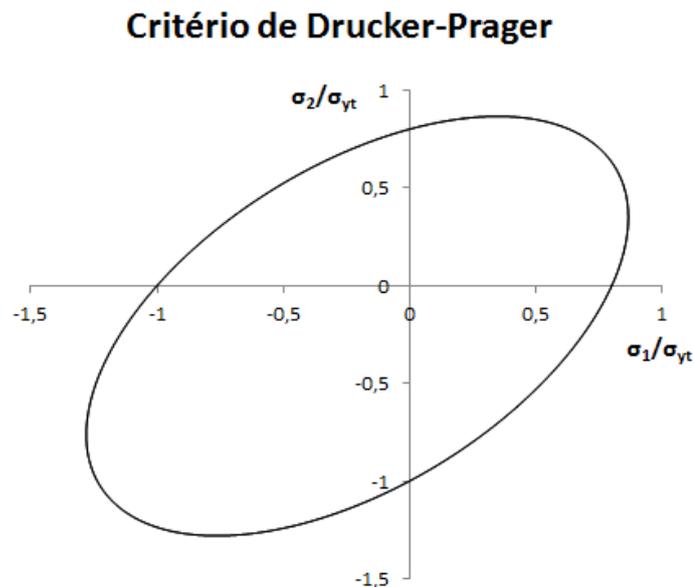


Figura 2.13 – Representação gráfica do critério de Drucker-Prager para um carregamento biaxial.

Fonte: Adaptado de SHIGLEY, MISCHKE e BUDYNAS (2005)

Para caracterizar a falha de um polipropileno Pae (1977) conduziu testes em corpos de prova pela superposição de estados de tensão simples tais como compressão uniaxial, tração uniaxial e cisalhamento puro em pressões hidrostáticas de várias intensidades. Seus resultados mostram um aumento na resistência do material com o aumento da pressão hidrostática conforme é mostrado na Figura 2.14.

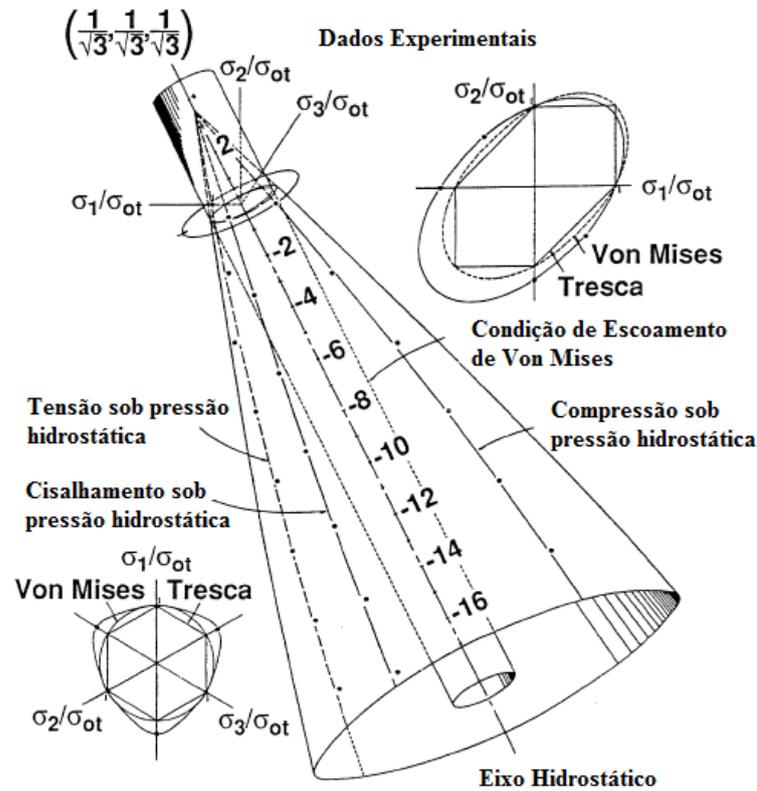


Figura 2.14 – Representação da superfície de escoamento obtida experimentalmente de um polipropileno.

Fonte: Adaptado de PAE, 1977

Pae (1977) propõe um critério de falha modificado de Drucker-Prager para representar os resultados experimentais obtidos e este critério de falha é representado na Inequação (2.28).

$$-\alpha_0 - \alpha_1 I_1 - \alpha_2 I_1^2 + \sqrt{J_2} \leq 0 \quad (2.28)$$

onde α_0 , α_1 e α_2 são constantes do material extraídas de testes experimentais. Este critério será usado para representar o modo de falha do polipropileno e tem a representação gráfica similar ao critério de Drucker-Prager.

2.1.4 Método dos Elementos Finitos

Existem várias publicações e livros sobre o método dos elementos finitos. Livros clássicos do tema onde se pode encontrar a formulação completa do método são as referências Bathe, (1996) e Zienkiewicz e Taylor (2000). Os conceitos apresentados nesta seção foram baseados nos livros texto de Weaver e Johnston (1984), Avelino (2002) e Logan (2007). Este

trabalho não tem como propósito se aprofundar no método dos elementos finitos. Serão apresentados apenas os conceitos básicos para o entendimento e aplicação do método nos problemas abordados.

O método de solução para um problema estrutural baseado na teoria da elasticidade mostrado na Figura 2.5 é aplicável para estruturas com geometria simples, tais como barras, vigas, cascas ou placas. Porém para estruturas com forma, carregamentos e propriedades de materiais complexos é inviável a solução do problema pela forma analítica e uma das técnicas desenvolvidas para resolver este tipo de problema é o **Método dos Elementos Finitos** (MEF). A formulação de um problema pelo MEF resulta em um sistema de equações algébricas simultâneas mais simples de resolver do que equações diferenciais obtidas na solução analítica.

O MEF é um método numérico para a solução de problemas de engenharia que consiste em dividir ou discretizar um corpo em um sistema equivalente de corpos menores chamados de **elementos finitos**. Estes elementos são interconectados em pontos chamados nós.

A seguir serão apresentadas as etapas básicas para a análise estrutural de um modelo utilizando o MEF, considerando que sejam conhecidas a geometria da estrutura e as propriedades físicas dos materiais. Será adotado o método dos deslocamentos, o qual assume que as incógnitas do problema são os deslocamentos nos nós.

Etapas:

1 – Discretize a geometria e selecione o tipo de elemento

Esta etapa consiste em dividir a geometria da estrutura em um sistema equivalente de elementos finitos e escolher o tipo de elemento que melhor representa o seu comportamento físico. Os elementos devem ser pequenos o suficiente para representar variações devido a mudanças de geometria e grandes o suficiente para reduzir o tempo computacional. A discretização do corpo em elementos finitos é chamada de **malha**.

A escolha do elemento finito adequado para um problema particular depende do problema a ser resolvido e da experiência do projetista. Os elementos finitos mais comumente usados na prática são mostrados na Figura 2.15. Eles são definidos pelo seu número de nós, funções de deslocamento e dimensões.

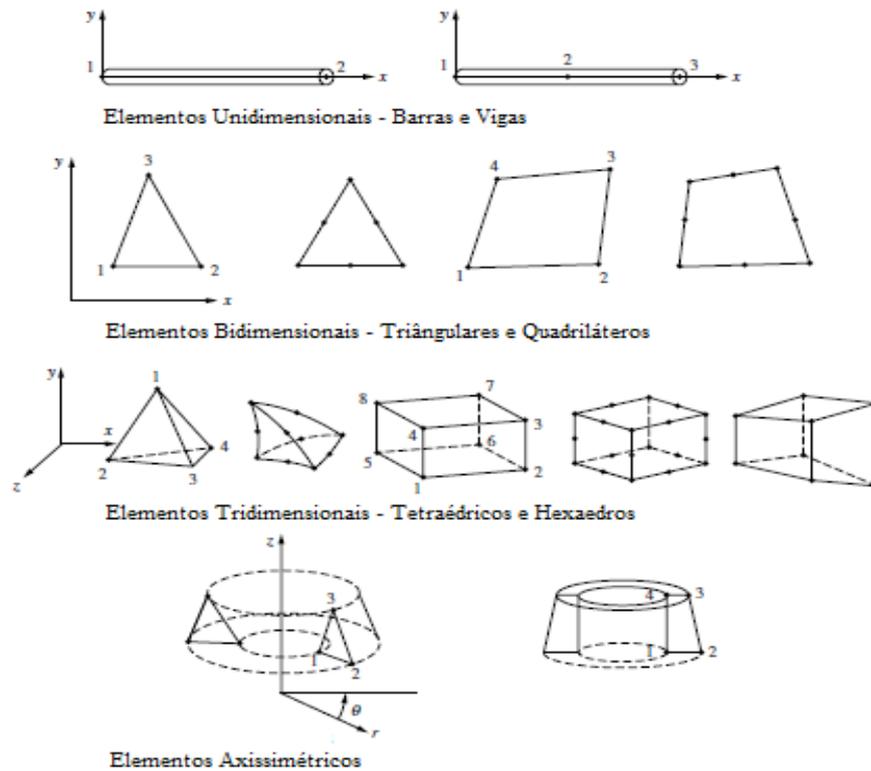


Figura 2.15 – Principais elementos finitos utilizados na prática.

Fonte: Adaptado de LOGAN, 2007

2 – Selecione uma função de deslocamentos

A função de deslocamentos consiste em uma função definida dentro do elemento a qual usa os valores dos deslocamentos nos nós para calcular de forma aproximada os deslocamentos dentro do elemento. Polinômios lineares, quadráticos e cúbicos são geralmente usados e esta escolha é determinada pelo número de nós e graus de liberdade do elemento.

3 – Obtenha a matriz de rigidez do elemento finito e equações

O desenvolvimento da matriz de rigidez e das equações de um elemento finito relacionando as forças aos deslocamentos nos nós, pode ser obtido usando condições de equilíbrio de forças junto com a relação de força/deformação. Este método é facilmente adaptado para elementos unidimensionais tais como molas, barras e vigas. Porém, para elementos bi e tridimensionais outros métodos são necessários tais como os métodos de energia ou trabalho ou os métodos de resíduos ponderados. Dos métodos de energia, os mais frequentemente usados são o **Princípio dos Trabalhos Virtuais**, o **Princípio da Mínima Energia Potencial** e o **Teorema de Castigliano**. A escolha do método adequado para deduzir

a matriz de rigidez do elemento para materiais lineares elásticos é uma questão de conveniência.

Para descrever o comportamento do elemento, escreve-se na forma matricial as equações relacionando força com deslocamento conforme mostrado na Equação (2.29).

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \dots & k_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ k_{n1} & & & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

ou em uma forma matricial compacta como

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u} \quad (2.30)$$

onde \mathbf{f} é um vetor das forças nos nós do elemento, \mathbf{k} é a matriz de rigidez do elemento e \mathbf{u} é o vetor dos deslocamentos ou graus de liberdade do elemento. A matriz de rigidez \mathbf{k} tem sua dimensão e coeficientes dependentes do tipo de elemento e pode ser obtida a partir do princípio do trabalho virtual.

4 - Reuna as equações dos elementos para obter as equações globais e introduza as condições de contorno

Nesta etapa, as equações de equilíbrio nos nós para cada elemento obtidas da Equação (2.29) são reunidas em uma equação de equilíbrio geral no sistema de coordenadas global. A equação global de equilíbrio da estrutura discretizada é mostrada na Equação (2.31).

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (2.31)$$

onde \mathbf{F} é um vetor das forças globais nos nós as quais são as forças aplicadas e as forças de reação, \mathbf{K} é uma matriz simétrica de rigidez global e \mathbf{U} é o vetor dos deslocamentos ou graus de liberdade de todos os nós em um sistema de coordenadas global. Para montagem da matriz de rigidez global \mathbf{K} , um método consiste em expandir a matriz de rigidez de cada elemento para a dimensão da matriz \mathbf{K} adicionando zeros nas posições referentes aos graus de liberdade não associados ao elemento em particular. A Equação (2.32) ilustra a aplicação deste método para a matriz de rigidez de cada elemento.

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \mathbf{k}_e \quad (2.32)$$

Outro método de superposição (chamado de **método da rigidez direta**) pode ser usado para a montagem da matriz de rigidez global \mathbf{K} como é mostrado na Equação (2.33)

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \begin{matrix} n \\ k_e \\ e=1 \end{matrix} \quad (2.33)$$

onde \mathbf{A} é o operador de superposição (*assembly*) o qual posiciona a matriz de rigidez de cada elemento em sua posição adequada em \mathbf{K} de acordo com a numeração dos nós do elemento.

Neste estágio a matriz de rigidez global \mathbf{K} é uma matriz singular e para remover esta singularidade condições de contorno da estrutura devem ser aplicadas tais como forças e restrições nos deslocamentos.

5 - Resolva para os graus de liberdade globais da estrutura (deslocamentos)

A equação de equilíbrio da estrutura mostrada na Equação (2.33), pode ser resolvida após a aplicação das condições de contorno e carregamentos usando o método da eliminação ou métodos iterativos.

6 – Encontre para os elementos as deformações e tensões

A partir dos resultados de deslocamento dos elementos e as relações constitutivas do material pode-se calcular as deformações e tensões diretamente. A Equação (2.34) mostra a fórmula geral para o cálculo da deformação em qualquer ponto do elemento.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.34)$$

onde a matriz \mathbf{B} é chamada de matriz **deslocamento-deformação** e é definida pelo tipo de elemento utilizado caracterizando o modo pelo qual se estabelece o campo de deformações.

A tensão é calculada em um ponto qualquer de um elemento finito a partir da Equação (2.7), substituindo a Equação (2.34).

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \quad (2.35)$$

onde a matriz \boldsymbol{D} é o tensor constitutivo do material escolhido.

7 – Interprete os resultados

Os resultados obtidos devem ser analisados para ver se a estrutura está dentro dos objetivos definidos para o projeto. Programas de pós processamento permitem interpretar os resultados e mostra-los em forma de gráficos.

A formulação detalhada do elemento finito retangular bilinear desenvolvido por Melosh (1963) implementado para a solução dos problemas deste trabalho é apresentada no Apêndice A.

2.2 Otimização Estrutural

Gordon (1978) citado por Christensen e Klarbring (2009), define uma estrutura como sendo uma reunião de materiais com a qual pretende-se sustentar cargas. A palavra latina *optimum*, derivada de *Ops*, o nome da deusa Sabina¹ da fertilidade e da abundância na agricultura, foi usado a primeira vez no século XVIII por Leibniz, para significar o melhor de todos possíveis (WILDE apud KIM, QUERIN e STEVEN, 2002). O termo otimização quer dizer fazer coisas da melhor maneira. A **otimização estrutural** é a matéria de fazer uma reunião de materiais sustentar cargas da melhor maneira possível (CHRISTENSEN e KLARBRING, 2009).

A otimização de um problema estrutural consiste em se realizar uma busca da solução ótima dentro de várias configurações possíveis. Esta busca pode ser feita através de um algoritmo de otimização o qual deve trabalhar em conjunto com um método de análise do sistema o qual tem o papel de verificar se a solução proposta pela otimização é factível. A aplicação da otimização na análise estrutural surgiu da necessidade da diminuição de peso e custo no projeto de novas estruturas para aeronaves e automóveis, mantendo o desempenho

¹ Um dos povos conquistados pelo Império Romano na Idade Antiga localizado em uma região próxima a Roma.

sem prejuízo à qualidade e integridade. A otimização aplicada no projeto de peças mecânicas consiste em se utilizar métodos computacionais para obter as dimensões, forma ou topologia ótima das peças (SILVA, 2003b).

Segundo Rozvany, Bendsøe e Kirsch (1995), o primeiro trabalho de otimização estrutural foi elaborado por Maxwell em 1872. Neste trabalho foram derivadas soluções analíticas para minimizar o volume de uma estrutura sujeita a diferentes tipos de carregamento utilizando a teoria da elasticidade. Para estas estruturas, as direções das tensões principais eram obtidas e são colocados elementos de treliça alinhados com estas direções.

Rozvany (2001) cita que a otimização de estruturas com frações de volume pequena tais como treliças, começou em 1904 com um inventor Australiano chamado Michell. Seguindo a ideia de Maxwell, Michell desenvolveu uma teoria de minimização do peso total de uma treliça com restrições de tensão. A teoria de Michell inclui em essência muitas características das teorias atuais. A Figura 2.16 ilustra uma estrutura ótima de Michell para uma viga em balanço.

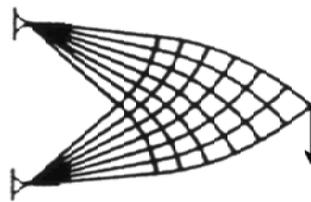


Figura 2.16 – Estrutura de treliça de Michell para um caso de carregamento na extremidade de uma viga.

Fonte: SANT'ANA et al., 2002

Para Sant'ana e Fonseca (2002), a publicação de Schimit (1960) marca o início da otimização estrutural moderna. Neste trabalho é combinado o método dos elementos finitos para treliças com a otimização por Programação Linear.

Com o desenvolvimento do método dos elementos finitos e dos computadores, Cheng e Olhoff (1980) estudaram a distribuição ótima de espessura em placas maximizando a rigidez global. Eles encontraram irregularidades geométricas na distribuição de espessuras que foram interpretadas como nervuras e concluíram que quanto mais refinada a malha, mais nervuras iriam aparecer. Neste estudo os autores mostram a influência do tamanho da malha nos resultados e a necessidade de se usar um modelo de microestrutura que represente a variação de densidade e orientação do material a partir do qual as propriedades mecânicas efetivas podem ser obtidas a partir de uma técnica de homogeneização. A Figura 2.17 mostra

a otimização da espessura de uma placa com bordas simplesmente apoiadas na qual a variação da espessura levou ao surgimento de reforços na placa.

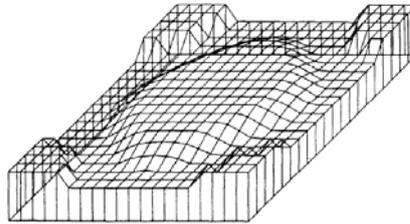


Figura 2.17 – Otimização da espessura de uma placa com bordas simplesmente apoiadas para maximizar a rigidez global.

Fonte: CHENG e OLHOFF, 1980

No final da década de 80 surge o método de **otimização topológica** para o projeto de estruturas. O método de otimização topológica foi desenvolvido por Bendsøe e Kikuchi (1988) com a aplicação do método da homogenização. Este método pode ser visto como uma continuação natural dos estudos de otimização de forma de compósitos onde se avalia a relação entre a microestrutura e o comportamento macroscópico de um material compósito (BENDSØE e SIGMUND, 2003). O método de otimização topológica é utilizado neste trabalho e será detalhado posteriormente.

Os conceitos apresentados nesta seção são baseados principalmente nos livros texto de Haftka e Gürdal (1992) e Arora (2004). Serão abordados alguns conceitos básicos de otimização e os métodos utilizados neste trabalho para solução de problemas de otimização estrutural.

2.2.1 Otimização de projetos

Ao se realizar o projeto de um sistema, o procedimento comum tem sido projetar, fabricar e usar um sistema sem considerar se este é o melhor. Usualmente seleciona-se um tipo de sistema já existente baseado em alguma análise preliminar e este sistema escolhido é projetado em detalhe.

O projeto é um processo iterativo. Iterativo implica em analisar vários projetos de tentativa até que um projeto aceitável é obtido. A introdução de computadores acelerou os processos iterativos de projeto devido ao seu poder de processamento, aumentando a produtividade dos projetos e a acurácia das análises, reduzindo trabalho e tempo (KIM, QUERIN e STEVEN, 2002).

Entretanto, pode-se formular o projeto de um sistema como um problema de otimização, no qual o desempenho é otimizado enquanto alguns requisitos são satisfeitos. Uma vez feito isto, vários métodos podem ser usados para resolver o problema (ARORA, 2004). Esta abordagem do problema permite a diminuição do número de iterações para o projeto de um componente e ainda permite que o mesmo apresente o melhor desempenho dentro dos requisitos estabelecidos. Na Figura 2.18 é mostrada a comparação da metodologia de projeto sem otimização e com otimização.

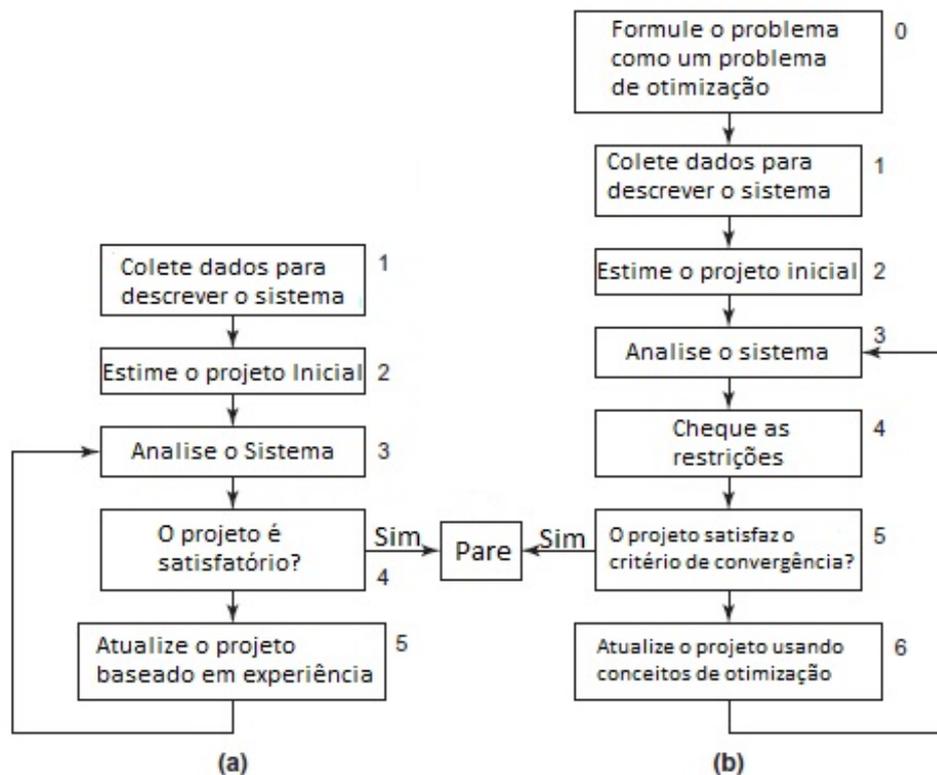


Figura 2.18 – Comparação do a) método convencional de projeto e b) método de projeto ótimo.

Fonte: Adaptado de ARORA, 2004

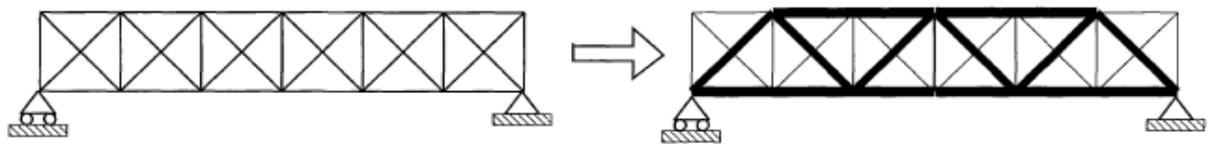
2.2.2 Tipos de problema de Otimização Estrutural

Pode-se dividir a otimização estrutural em três classes de problemas:

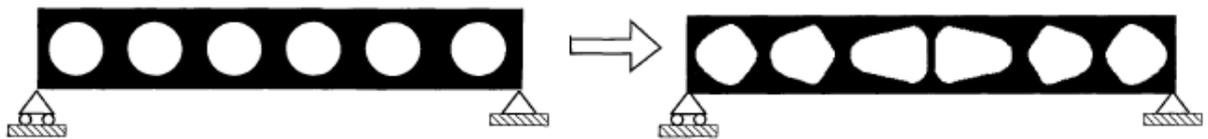
- Otimização Paramétrica: Neste tipo de problema as variáveis de projeto a serem otimizadas descrevem características geométricas da estrutura, tais como espessura ou a área da seção transversal das barras de uma treliça. A forma original da estrutura é mantida.

- Otimização de Forma: Consiste na parametrização das curvas do contorno do domínio da estrutura, para que seja encontrada a forma ótima, mantendo a conectividade original. Uma forma especial de otimização de forma, chamada de Otimização Topográfica, foi desenvolvida por Voth (1999) para otimizar reforços em estruturas de casca. A técnica consiste em otimizar a altura, largura e ângulo destes reforços (ZHOU et al., 2004).
- Otimização Topológica: Este método busca encontrar a melhor distribuição de material dentro de um domínio pela inserção de furos ou vazios em certas regiões do meio contínuo e tem a vantagem de não ser necessário mudar a malha em elementos finitos durante o processo de otimização.

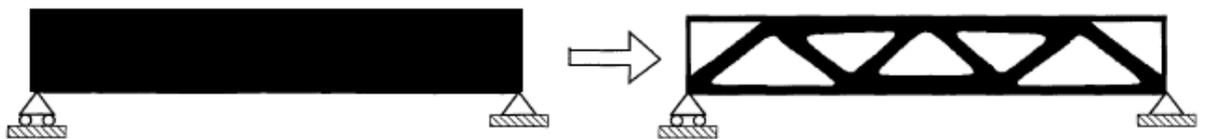
Na Figura 2.19 é ilustrada a aplicação dos tipos de problemas de otimização estrutural em uma viga bidimensional bi-apoiada a qual se deseja minimizar o volume total com uma restrição de rigidez.



(a) Otimização paramétrica



(b) Otimização de forma



(c) Otimização topológica

Figura 2.19 – Tipos de otimização estrutural, com o problema inicial mostrado na esquerda e a estrutura otimizada mostrada na direita.

Fonte: BENDSØE e SIGMUND, (2003)

2.2.3 Formulação geral do problema de Otimização Estrutural

A formulação geral de um problema de otimização estrutural na qual se deve minimizar a função de custo é representada da seguinte forma (HAFTKA e GÜRDAL, 1992; CHRISTENSEN e KLARBRING, 2009):

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} && f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\
 &\text{Sujeito a} && \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{F} \\
 & && g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0; i = 1, \dots, l \\
 & && \mathbf{x} \in \chi = \{x \in \mathbb{R}^n / x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, j = 1, \dots, n\}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

onde \mathbf{x} é vetor das variáveis de projeto, $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ é a matriz de rigidez global da estrutura, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos global, e \mathbf{F} é o vetor de forças externas globais.

Para simplificar o Problema (2.36), pode-se usar as equações de equilíbrio para escrever os deslocamentos como funções das variáveis de projeto \mathbf{x} , da seguinte forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F} \tag{2.37}$$

Utilizando a Equação (2.37) é possível reescrever a formulação do Problema (2.36) como

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} && \hat{f}(\mathbf{x}) \\
 &\text{Sujeito a} && \hat{g}_i(\mathbf{x}) \leq 0; i = 1, \dots, l \\
 & && \mathbf{x} \in \chi = \{x \in \mathbb{R}^n / x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, j = 1, \dots, n\}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Problemas de otimização estrutural podem ter sua função objetivo e restrições escritas como funções implícitas das variáveis de projeto e possuírem funções não convexas. Uma forma de resolver estes problemas é gerar uma sequência de subproblemas explícitos com funções convexas que são aproximações do problema original e resolvê-la (CHRISTENSEN e KLARBRING, 2009).

2.2.4 Aproximações convexas

Nesta seção são descritos alguns métodos para se obter uma aproximação explícita convexa do Problema (2.38) quando o problema apresenta funções não-convexas.

Os algoritmos de otimização utilizados para resolver os subproblemas gerados pelas aproximações convexas geralmente irão precisar de informações do valor da função e de suas derivadas. Os métodos de aproximação convexa da formulação geral do problema são classificados dependendo dos tipos de funções que são usadas para se obter a aproximação convexa e explícita. Um algoritmo é de ordem o se a mais alta ordem de suas derivadas usadas é o . A seguir serão apresentadas algumas aproximações convexas típicas para problemas não-lineares e o método das assíntotas móveis (MMA) que é o método utilizado neste trabalho.

2.2.4.1 Programação Linear Sequencial (PLS)

Na aproximação da **Programação Linear Sequencial (PLS)** do Problema (2.38) em \mathbf{x}^k , a função objetivo e todas as restrições são linearizadas através da expansão pela série de Taylor até o termo de primeira ordem na variável de projeto \mathbf{x}^k . Isto leva ao seguinte subproblema na iteração k :

$$(PLS) \quad \begin{cases} \text{Minimize} & \hat{f}(\mathbf{x}^k) + \nabla \hat{f}(\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \\ \text{Sujeito a} & \hat{g}_i(\mathbf{x}^k) + \nabla \hat{g}_i(\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \leq 0, i = 1, \dots, l \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ & -l_j^k \leq x_j - x_j^k \leq u_j^k, \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.39)$$

onde l_j^k e u_j^k , são conhecidos como limites móveis; estes são usados porque a linearização adotada é acurada apenas próximo à variável de projeto corrente e a eficiência da PLS depende da escolha destes limites.

Calculando-se $\hat{g}_i(\mathbf{x}^k)$ e $\nabla \hat{g}_i(\mathbf{x}^k)$, todas as expressões da PLS são funções explícitas de \mathbf{x} . Como as funções objetivo e restrições são lineares, elas são convexas e portanto o subproblema gerado pela PLS é um problema convexo.

2.2.4.2 Linearização Convexa (CONLIN)

Segundo Christensen e Klarbring (2009), o método da **Linearização Convexa (CONLIN)** desenvolvido por Fleury e Braibant (1986), consiste em uma aproximação de

primeira ordem que leva em consideração se a variável de projeto a ser linearizada é uma variável direta \mathbf{x} ou uma variável recíproca do tipo $1/\mathbf{x}$. Isto dependerá da formulação do problema a ser resolvido, por exemplo, se a variável de projeto for a área da seção transversal das barras de uma treliça e a restrição for a tensão de escoamento do material, então para a restrição de tensão a variável de projeto (área) será inversamente proporcional à tensão e será mais adequado linearizar a variável recíproca $1/\mathbf{area}$. Então lineariza-se as variáveis diretas da mesma forma que a PLS e as variáveis recíprocas de outra forma exata.

Então a aproximação pela série de Taylor para variáveis diretas é dada pela Equação (2.40) e a aproximação para variáveis recíprocas pelas Equação (2.41):

$$\hat{g}_i(\mathbf{x}) \approx \hat{g}_i(\mathbf{x}^k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{g}_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_j} (x_j - x_j^k) \quad (2.40)$$

$$\hat{g}_i(\mathbf{x}) \approx \hat{g}_i(\mathbf{x}^k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{g}_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_j} \frac{x_j^k (x_j - x_j^k)}{x_j} \quad (2.41)$$

Agora define-se uma regra para decidir quais variáveis devem ser linearizadas nas variáveis diretas x_j e quais devem ser linearizadas nas variáveis recíprocas $1/x_j$.

$$\hat{g}_i(\mathbf{x}) \approx \hat{g}_i(\mathbf{x}^k) + \sum_{j \in \Omega_D} \frac{\partial \hat{g}_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_j} (x_j - x_j^k) + \sum_{j \in \Omega_R} \frac{\partial \hat{g}_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_j} \frac{x_j^k (x_j - x_j^k)}{x_j} \quad (2.42)$$

onde Ω_D e Ω_R são conjuntos definidos como:

$$\Omega_D = \left\{ j: \frac{\partial \hat{g}_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_j} > 0 \right\} \quad \text{e} \quad \Omega_R = \left\{ j: \frac{\partial \hat{g}_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_j} \leq 0 \right\} \quad (2.43)$$

A partir da Equação (2.42), pode-se montar o subproblema com o método de Linearização Convexa na iteração k para a formulação geral do Problema (2.38). O problema (2.44) mostra a aproximação do Problema (2.38) pelo método CONLIN a qual é uma aproximação convexa e explícita.

$$(\text{CONLIN}) \quad \begin{cases} \text{Minimize } \hat{f}(\mathbf{x}^k) + \sum_{j \in \Omega_D} \frac{\partial \hat{f}(\mathbf{x}^k)}{\partial x_j} (x_j - x_j^k) + \sum_{j \in \Omega_R} \frac{\partial \hat{f}(\mathbf{x}^k)}{\partial x_j} \frac{x_j^k (x_j - x_j^k)}{x_j} \\ \text{Sujeito a } \hat{g}_i(\mathbf{x}^k) + \sum_{j \in \Omega_D} \frac{\partial \hat{g}_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_j} (x_j - x_j^k) + \sum_{j \in \Omega_R} \frac{\partial \hat{g}_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_j} \frac{x_j^k (x_j - x_j^k)}{x_j} \leq 0, i = 1, \dots, l \\ \chi = \{x \in \mathbb{R}^n / 0 < x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, j = 1, \dots, n\} \end{cases} \quad (2.44)$$

2.2.4.3 Método das Assíntotas Móveis (MMA)

Como uma evolução do método CONLIN, Svanberg (1987) desenvolveu um método chamado **Método das Assíntotas Móveis** (MMA) o qual pode ser interpretado como uma generalização do CONLIN. O MMA é um método para programação não-linear aplicado em otimização estrutural. Em cada etapa do processo iterativo do algoritmo de programação matemática, um subproblema de aproximação convexa é gerado e resolvido. A geração destes subproblemas é controlada pelas assíntotas móveis, as quais podem ambas estabilizar e acelerar a convergência do processo geral (SVANBERG, 1987). A curvatura da aproximação pode ser ajustada, gerando uma aproximação melhor da função original que define o problema. O MMA é adotado neste trabalho devido à necessidade de um método que permita maior controle da convergência por causa do grande número de iterações necessárias para a solução de um problema de otimização com restrição de tensão.

A aproximação de uma função pelo MMA é obtida pela linearização de uma função em variáveis do tipo $1/(x_j - L_j)$ ou $1/(U_j - x_j)$ dependendo dos sinais das derivadas da função em \mathbf{x}^k . Então, a aproximação pelo método MMA de uma função \hat{g}_i , na variável de projeto \mathbf{x}^k é dada por (SVANBERG, 1987):

$$\hat{g}_i^{M,k}(\mathbf{x}) = r_i^k + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^k}{U_j^k - x_j} + \frac{q_{ij}^k}{x_j - L_j^k} \right) \quad (2.45)$$

onde

$$p_{ij}^k = \begin{cases} (U_j^k - x_j^k)^2 \frac{\partial \hat{g}_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_j} & \text{se } \frac{\partial \hat{g}_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_j} > 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.46)$$

$$q_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{\partial \hat{g}_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_j} \geq 0 \\ -(x_j^k - L_j^k)^2 \frac{\partial \hat{g}_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_j} & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.47)$$

$$r_i^k = \hat{g}_i(\mathbf{x}^k) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^k}{U_j^k - x_j^k} + \frac{q_{ij}^k}{x_j^k - L_j^k} \right) \quad (2.48)$$

$$L_j^k < x_j^k < U_j^k \quad (2.49)$$

e as constantes L_j^k e U_j^k são chamadas de **assíntotas móveis** as quais são alteradas durante as iterações e devem satisfazer a Equação (2.49). Pela modificação das assíntotas durante cada iteração pode-se controlar a qualidade da aproximação pelo MMA.

A aproximação para a formulação geral mostrada no Problema (2.38) na iteração k é escrita como:

$$(MMA) \quad \begin{cases} \text{Minimize} & \hat{f}^{M,k}(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a} & \hat{g}_i^{M,k}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l \\ & \alpha_j^k \leq x_j \leq \beta_j^k, \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.50)$$

onde α_j^k e β_j^k são limites móveis para evitar a divisão por zero.

A aproximação pelo MMA mostrada no Problema (2.50) é uma aproximação convexa, explícita e separável que pode ser resolvida pelo método da dualidade de Lagrange. O MMA é uma aproximação de primeira ordem a qual pode lidar com restrições nas quais as derivadas de suas funções possam ser calculadas analiticamente ou numericamente com relação às variáveis de projeto (CHRISTENSEN e KLARBRING, 2009).

Para usufruir da vantagem do MMA de controle da convergência, é preciso definir um método para controlar as assíntotas móveis. O método adotado é uma aproximação heurística descrita em Svanberg (1987). Para a iteração $k \geq 2$, as assíntotas inferior L_j^k e superior U_j^k para a variável de projeto x^k são atualizadas de acordo com a seguinte regra:

$$L_j^k = x_j^k - s(x_j^{k-1} - L_j^{k-1}) \quad (2.51)$$

$$U_j^k = x_j^k + s(U_j^{k-1} - x_j^{k-1}) \quad (2.52)$$

onde s é um parâmetro controlado de acordo com os sinais dos resultados das variáveis de projeto a cada iteração do algoritmo para acelerar ou desacelerar o processo de convergência. As variáveis de projeto x_j^{k-1} e x_j^k são os valores de x_j na iteração k e $k - 1$ respectivamente. Para $k = 0$ e $k = 1$ são usados os valores de x_j^{min} e x_j^{max} dados no Problema (2.38) para se determinar os valores das assíntotas móveis.

Os limites móveis citados no Problema (2.50) são calculados a partir de

$$\alpha_j^k = \max(x_j^{min}, L_j^k + \mu(x_j^k - L_j^k)) \quad (2.53)$$

$$\beta_j^k = \min(x_j^{max}, U_j^k - \mu(U_j^k - x_j^k)) \quad (2.54)$$

onde $0 \leq \mu \leq 1$.

2.2.5 Exemplo de solução aplicado a treliça

Para exemplificar a solução de um problema de otimização estrutural, minimiza-se o peso total de uma treliça sujeita a restrições de tensão. Para resolver este problema utiliza-se o algoritmo de programação matemática explicado anteriormente, realizando a aproximação convexa das funções de restrição de tensão com MMA e a solução dos subproblemas é feita pela dualidade de Lagrange. Considera-se que a treliça de 3 barras, conforme é mostrada na Figura 2.20, é sujeita a um carregamento vertical e denota-se α_1 a área da barra 1 e a área das barras 2 e 3 possuem o mesmo valor de área α_2 . O comprimento L das barras é igual para todas as barras e um valor de peso específico γ é associado a cada barra, sendo que para a barra 1, é associada uma constante a a qual será variada para mostrar sua influência no resultado do problema. As restrições para a tensão σ estabelecem limites para a falha das barras. Unidades arbitrárias foram utilizadas para o problema.

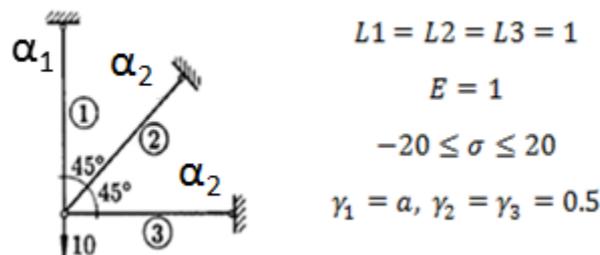


Figura 2.20 – Treliça de 3 barras (unidades arbitrárias foram adotadas).

Fonte: Adaptado de KIRSCH, 1990

As equações para as restrições de tensão para o problema são obtidas pelo equilíbrio de forças do sistema e condições geométricas. Na Equação (2.55a) e nas Inequações (2.55b-d) a formulação do problema de otimização é mostrada, para minimização do peso da treliça de 3 barras sujeita a uma restrição de tensão. Foram escritas apenas as restrições de tensão das barras 1 e 2 nas Inequações (2.55b) e (2.55c) respectivamente, porque apenas elas estarão ativas para a solução do problema, sendo que nesta etapa de solução apenas a restrição referente à barra 1 será utilizada.

$$\text{Minimize} \quad W = a\alpha_1 + \alpha_2 \quad (2.55a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \frac{60}{6\alpha_1 + 2\alpha_2} - 20 \leq 0 \quad (2.55b)$$

$$\frac{20\sqrt{2}}{6\alpha_1 + 2\alpha_2} - 20 \leq 0 \quad (2.55c)$$

$$-\alpha_1 \leq 0, -\alpha_2 \leq 0 \quad (2.55d)$$

onde W é a função de custo a qual calcula o peso da estrutura baseado no peso específico γ de cada barra e na área, sendo que o parâmetro a é variado para mostrar a sua influência no valor do ponto ótimo do problema.

Para iniciar a solução do problema define-se o valor do contador de iteração como $k = 0$, escolhe-se um valor inicial para as variáveis de projeto fazendo $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 2,5$ e utilizam-se as Equações (2.45-48) para aproximação da restrição de tensão da barra 3 pelo MMA. As Equações (2.59a-c) mostram o subproblema encontrado sendo que a função de custo W não é aproximada pelo MMA por se tratar de uma função linear.

$$\text{Minimize} \quad W = a\alpha_1 + \alpha_2 \quad (2.56a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \frac{7,175}{\alpha_1 + 0,4} + \frac{2,392}{\alpha_2 - 0,099} - 20,457 \leq 0 \quad (2.56b)$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_1 \leq 3 \\ 0,34 &\leq \alpha_2 \leq 3 \end{aligned} \quad (2.56c)$$

onde $a = 2$, a Inequação (2.56b) é a aproximação pelo MMA da restrição de tensão da barra 1 mostrada na Inequação (2.55b) e os limites móveis para as variáveis de projeto calculados a partir das Equações (2.53-54).

O subproblema da Equação (2.56a) e Inequações (2.56b-c) é resolvido utilizando o método da dualidade de Lagrange e o ponto ótimo obtido foi de $\alpha_1 = 0,094$ e $\alpha_2 = 0,503$. Incrementa-se o contador de iteração para $k = 1$ e repete-se o procedimento anterior utilizando o ponto ótimo obtido como valor inicial para as variáveis de projeto. A Tabela 2.1 resume os resultados obtidos para as 5 primeiras iterações. Neste problema o parâmetro de convergência s foi alterado por tentativa e erro. Em problemas mais complexos o valor de s é alterado dependendo da variação do sinal da variável de projeto.

Tabela 2.1- Resultados da solução do problema da treliça de 3 barras.

Iteração	$a = 2$		$a = 4$	
	Ponto ótimo			
	α_1	α_2	α_1	α_2
1	0,094087	0,502990	0,052006	0,621875
2	0,305830	0,323530	0,082760	0,95473
3	0,472256	0,106108	0,078078	1,248485
4	0,502419	0	0,018688	1,473636
5	0,500004	0	0	1,500329

O problema da treliça de 3 barras foi resolvido por Kirsch (1990) o qual obteve para $a = 2$, o valor de $\alpha_1 = 0,5$ e $\alpha_2 = 0$ e para $a = 4$, o valor de $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 1,5$. Os resultados apresentados na Tabela 1 na iteração 5 estão coerentes com os resultados obtidos por Kirsch (1990). Posteriormente será visto que estes resultados não representam o ponto de mínimo global do problema devido ao problema da “singularidade” relacionado à restrição de tensão. Na Figura 2.21 é mostrado o espaço das possíveis soluções na região rachurada de cinza para o problema com a função de custo W com $a = 2$ e $a = 4$. As curvas g_2 e g_3 representam as Inequações (2.55c e 2.55b) respectivamente e também são plotadas as curvas de isocusto da função W para mostrar graficamente que os pontos obtidos são pontos ótimos locais. Os gráficos ilustram como a alteração do parâmetro a levou à modificação do ponto ótimo local do problema do ponto A para o ponto B.

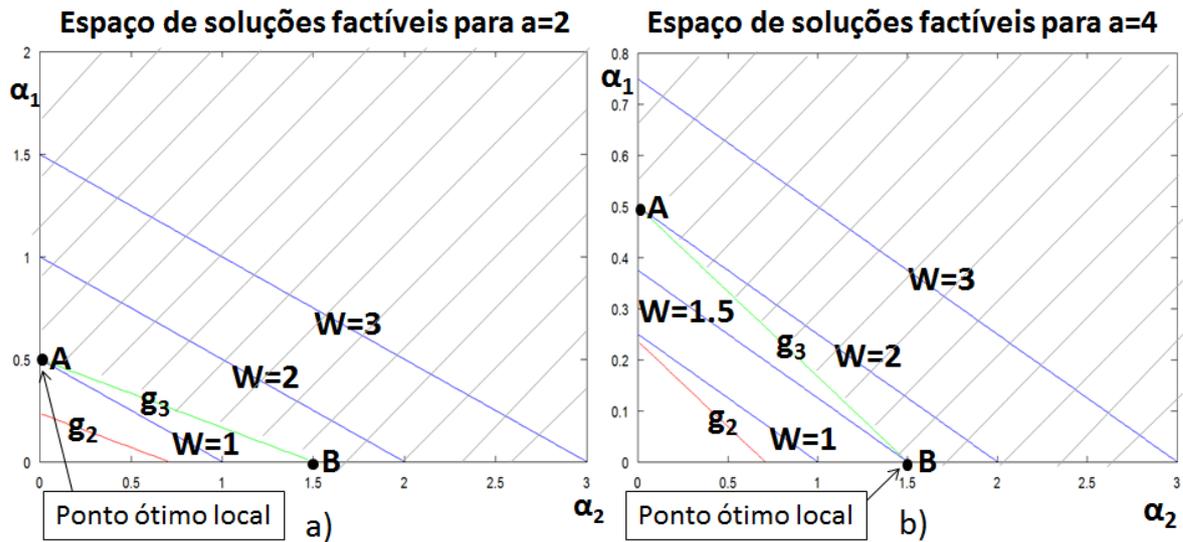


Figura 2.21 – Espaço de soluções do problema da treliça de 3 barras a) para a=2 b) para a=4.

Fonte: Elaborado pelo autor

2.3 Otimização Topológica

Conforme apresentado anteriormente, a otimização topológica é um tipo de algoritmo de otimização estrutural e nesta seção será feita uma introdução ao método mostrando sua formulação, problemas numéricos e características quando aplicado em problemas com restrições de tensão.

2.3.1 Introdução

A configuração ou leiaute de uma estrutura inclui informações da topologia, forma e tamanho. A topologia consiste na localização, quantidade, forma e conectividade dos furos internos em um domínio de um sólido. A **otimização topológica**, também chamada de otimização de forma generalizada, consiste em se achar a configuração ótima do material de uma estrutura dentro de uma região específica, pela introdução de furos em um domínio projeto inicialmente definido (BENDSØE e SIGMUND, 2003). Para um problema de otimização topológica em otimização estrutural, exemplos de quantidades conhecidas são os carregamentos aplicados, as condições de apoio, o volume da estrutura a ser projetada e algumas restrições adicionais de projeto tal como a área onde não é permitida a retirada de material.

A otimização da topologia de estruturas tem um grande impacto em seu desempenho, e a última década tem visto uma grande quantidade de trabalhos na área de otimização estrutural, principalmente na indústria aeroespacial e automotiva. Programas comerciais estão disponíveis e o método de otimização topológica é uma tecnologia padrão em muitas aplicações de problemas estruturais e não-estruturais (BENDSØE e SIGMUND, 2003). Segundo Kim, Querin e Steven (2002), a otimização topológica tem a vantagem de poder ser usada no estágio conceitual de um projeto, não dependendo de uma estrutura inicial definida, sendo capaz de alterar a topologia, tamanho e forma.

O método de otimização topológica para o projeto de estruturas foi introduzido como ferramenta computacional em Bendsøe e Kikuchi (1988) com o método da homogenização aplicado na solução de problemas de minimização do *compliance*.

Segundo Kim, Querin e Steven (2002), na mecânica estrutural, a homogenização é empregada para calcular as propriedades efetivas de um material na presença de vazios locais. Isto permite a homogenização em um nível macro de um sistema heterogêneo em nível micro. Aplicando este conceito na otimização topológica, pode-se determinar por exemplo a microestrutura ótima de uma estrutura feita de material compósito, tornando seus parâmetros locais como variáveis de projeto tais como a dimensão da área vazia e a orientação de uma célula do compósito. Então, a partir destes parâmetros, propriedades efetivas do material são calculadas a partir do método da homogenização. Na Figura 2.22 são mostrados alguns elementos ou células com vazios as quais são utilizadas para representar a microestrutura de um material compósito.

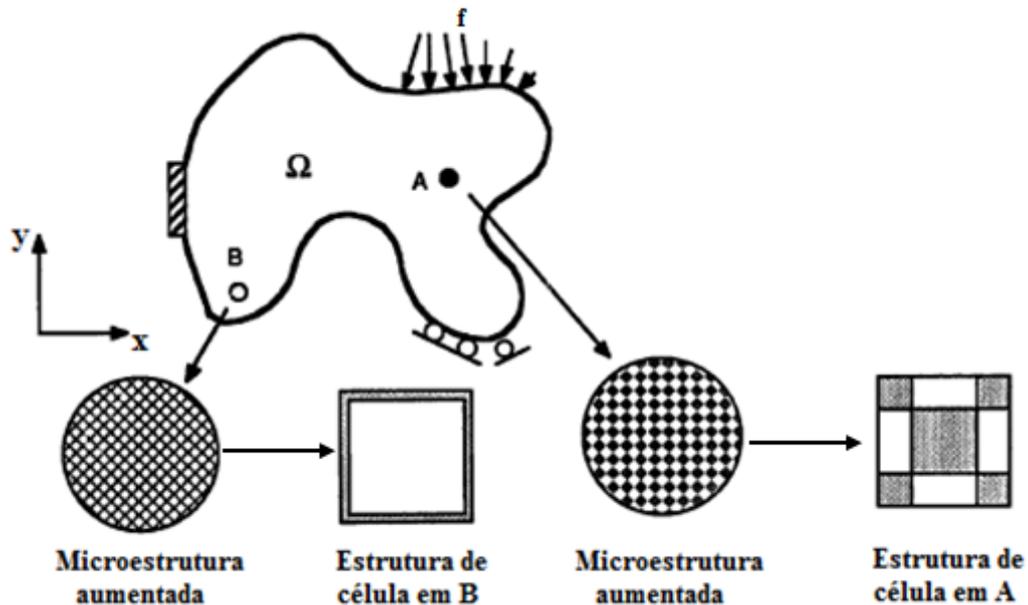


Figura 2.22 – Uma estrutura com microestrutura representando compósito.

Fonte: Adaptado de BENDSØE e KIKUCHI, 1988

Para Sigmund (2001), a aproximação do problema de otimização topológica baseada na homogeneização tem a desvantagem de que a determinação de estruturas microscópicas ótimas e suas orientações é difícil e às vezes sem solução. Também pode não ser possível construir as estruturas resultantes. Em contrapartida, segundo Rozvany (2001) as soluções obtidas podem ser usadas como o limite absoluto de economia de material para um problema de projeto dado, fornecendo uma base de referência para projetos obtidos factíveis.

O problema de projeto topológico pode ser lançado como um problema de achar a distribuição ótima da quantidade de material em um domínio fixo e foi implementado através do método dos elementos finitos (BENDSØE e SIGMUND, 2003). Várias técnicas de otimização foram usadas para solução do problema tais como o critério de optimalidade, programação linear sequencial (PLS), algoritmos genéticos, métodos das assíntotas móveis (MMA), etc. Para referência aos vários métodos já empregados para solução do problema de otimização topológica ver Svanberg (1987), Rozvany (2001), Eschenauer e Olhoff (2001) e Kim, Querin e Steven (2002) e Sigmund e Maute (2013).

2.3.2 Formulação geral do problema de Otimização Topológica

Para explicar a montagem do problema de otimização topológica para uma estrutura qualquer, considera-se um corpo ocupando um domínio Ω em \mathbb{R}^2 estando sujeito a forças de superfície \mathbf{f} e condições de contorno, conforme é mostrado na Figura 2.23.

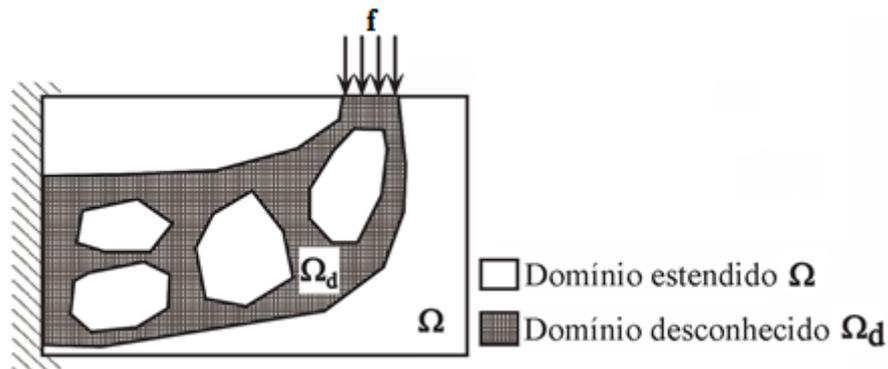


Figura 2.23 – Definição do domínio do problema de otimização topológica

Fonte: SILVA, (2003b)

Na Figura 2.23 é ilustrado o conceito de domínio do problema de otimização topológica. Inicialmente é gerado um domínio fixo Ω (estendido) de geometria simples o qual corresponde à totalidade do domínio com volume V . O domínio Ω_d corresponde à região onde ficará a distribuição ótima de material. Segundo Bendsøe e Sigmund (2003) o problema de projeto ótimo pode ser definido como o problema de achar o melhor tensor constitutivo \mathbf{D} para um material isotrópico, sem alterar a característica reológica do material, determinando assim o subconjunto Ω_d . A formulação geral para o problema de otimização topológica é mostrada no Problema (2.57).

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && f(\Theta(z)) \\
 &\text{Sujeito a} && \text{Volume}(\Omega_d) \leq V \\
 &&& \mathbf{D} = \Theta(z) \mathbf{D}^0, \quad \Theta(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \in \Omega_d \\ 0 & \text{se } z \in \Omega \setminus \Omega_d \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

onde $f(\Theta(z))$ é uma função qualquer, $\text{Volume}(\Omega_d) = \int_{\Omega} \Theta(z) d\Omega$ corresponde ao volume atual, V é o volume total permitido para o subconjunto Ω_d , \mathbf{D}^0 representa o tensor constitutivo de um material elástico isotrópico a partir do qual a estrutura será construída, \mathbf{D} representa o tensor constitutivo da estrutura obtida e $\Theta(z)$ a fração de volume em cada ponto z do material. Este problema é do tipo discreto (um problema 0-1) e consiste em se determinar em quais

pontos do domínio Ω haverá material e quais pontos estarão vazios dependendo da função objetivo e restrições impostas.

Segundo Rozvany (2001) a subclasse de problemas mais simples em otimização topológica é a distribuição ótima de um material isotrópico que pode assumir a forma de um sólido ou vazio. Este tipo de problema, de variáveis discretas (0-1), envolve 2^N soluções possíveis, onde N é o número de elementos finitos se o problema for discretizado. Métodos para tratar o problema desta forma não serão tratados neste trabalho devido ao grande número de restrições no problema.

A aproximação mais comumente usada para resolver o Problema (2.57) é substituir as variáveis inteiras por variáveis contínuas pela modificação do tensor constitutivo do material de modo que este dependa continuamente de uma função a qual é interpretada como densidade do material ou função de densidade artificial, a qual passa a ser a variável de projeto (BENDSØE e SIGMUND, 2003). Esta aproximação permite que o material possa assumir valores intermediários de densidade promovendo a relaxação do problema e permite o uso de algoritmos de solução que utilizam gradiente. O valor da propriedade efetiva do material \mathbf{D} em cada ponto do domínio é então definido em função da densidade do material $\rho(z)$ conforme é mostrado no Problema (2.58):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{Sujeito a} \quad & \text{Volume}(\Omega_d) \leq V \\ & \mathbf{D} = \rho(z) \mathbf{D}^0; \quad 0 \leq \rho(z) \leq 1 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Devido ao fato dos problemas de otimização topológica serem do ponto de vista computacional de larga escala, as primeiras formulações empregadas para o problema foram escritas em termos de função objetivo e restrições simples, tais como a maximização da rigidez global (*compliance*) sujeita a uma restrição de volume por exemplo. O *compliance* é definido como um trabalho realizado por uma força ou equivalentemente como a energia elástica armazenada (GOURNAY, ALLAIRE e JOUVE, 2008). Este tipo de problema é geralmente resolvido pela discretização do domínio do projeto em elementos finitos e fazendo a densidade artificial do material em cada elemento ser uma variável de projeto conforme é mostrado no Problema (2.59):

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && c(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \\
 &\text{sujeito a} && \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{U} = \mathbf{F} \\
 &&& \frac{V(\boldsymbol{\rho})}{V_0} \leq f, \\
 &&& 0 < \rho_{min} \leq \rho_j \leq 1 \\
 &&& \{j = 1, 2, \dots, N\}
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

onde c representa o *compliance*, \mathbf{U} e \mathbf{F} são os deslocamentos e forças globais, respectivamente, \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, $V(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^N \rho_j V_j$ e V_0 são o volume de material e o volume do domínio estendido de projeto respectivamente, f é a fração de volume permitida para o projeto, $\boldsymbol{\rho}$ é o vetor com as densidades de todos os elementos, ρ_{min} é um limite mínimo para o valor da densidade (para evitar a singularidade), N é o número de elementos usado para discretizar o domínio de projeto. Esta formulação tem a desvantagem de apresentar os resultados com elementos de densidade intermediária.

Na figura 2.24 é representado um procedimento típico de aplicação da otimização topológica para um domínio inicial estendido, onde são mostradas as etapas para se obter um projeto estrutural a partir do método dos elementos finitos para um problema de maximizar a rigidez global com uma restrição de quantidade de material. Este procedimento pode ser aplicado em problemas de otimização estrutural contínuos para vários tipos de função objetivo e restrições.

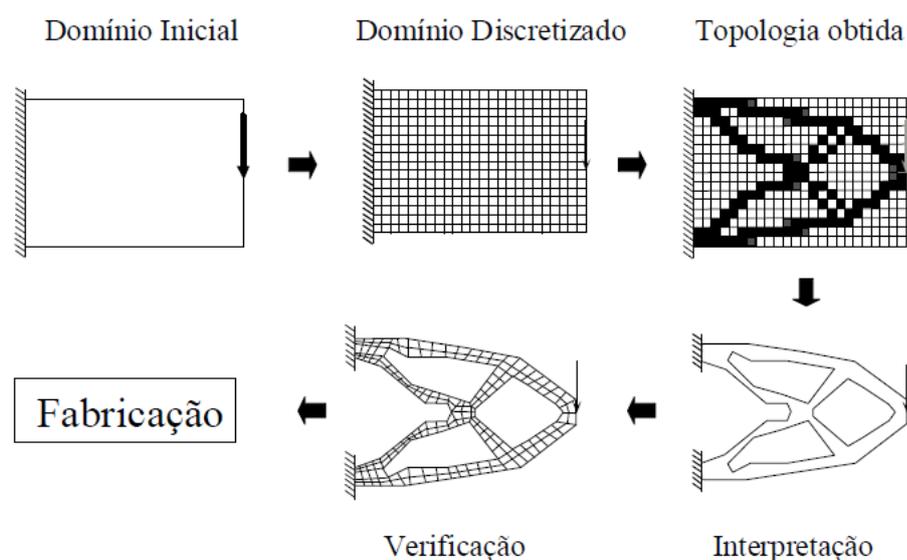


Figura 2.24 – Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica

Fonte: SILVA, (2003b)

2.3.3 Solid Isotropic Microstructure with Penalization (SIMP)

Valores intermediários de densidade entre 0 e 1 em uma estrutura podem ser construídos fisicamente como um compósito com poros ou podem ser um parâmetro de interpolação usado para facilitar a solução do problema. Uma alternativa ao método da homogenização que gera projetos que podem ser manufaturados utilizando um material linear isotrópico é o SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*) (BENDSØE, 1989).

O SIMP é uma aproximação do modelo de material para a solução do problema de otimização que penaliza as densidades intermediárias a fim de eliminá-las da estrutura final obtida. O termo foi sugerido por Rozvany, Zhou e Birker (1992) e também é chamado alternativamente de método da aproximação direta ou método da densidade artificial. Seu uso pode ser justificado pela sua simplicidade, por ser aplicável para qualquer combinação de restrições de projeto e por gerar formas com um menor custo de fabricação e do material para as formas obtidas em relação a outros métodos (ROZVANY, 2001).

Para o SIMP, as propriedades do material são assumidas constantes dentro de cada elemento finito usado para discretizar o domínio do modelo e as variáveis de projeto são as densidades “artificiais” relativas do elemento. As propriedades efetivas são modeladas como relativas à densidade do material elevado a uma potência vezes a propriedade do material sólido. Na Equação (2.60) é mostrada a parametrização do tensor constitutivo do material com o fator de penalização aplicado na densidade do material.

$$\mathbf{D}(\rho) = \rho^\eta \mathbf{D}^0 \quad (2.60)$$

onde \mathbf{D}^0 representa o tensor constitutivo do material que é caracterizado pelo módulo de elasticidade do material E e pelo coeficiente de Poisson ν , η é um fator de penalização e ρ a densidade no elemento. Caso $\rho = 0$ então $\mathbf{D}(0) = 0$ e caso $\rho = 1$ então $\mathbf{D}(1) = \mathbf{D}^0$, o que indica que um projeto final constituído apenas de densidades iguais a 0 e 1 têm um modelo físico representado por um material linear isotrópico.

Segundo Rozvany (2001), a penalização irá efetivamente suprimir valores de densidade intermediárias, porém se o problema for convexo, o mesmo se tornará não convexo e portanto o mínimo global não pode ser garantido. Estes resultados podem ser melhorados se nas primeiras iterações do algoritmo de solução for adotado um valor de $\eta = 1$ e então ir aumentando o valor de η gradualmente. O ganho deste método consiste em uma estrutura

final consistindo apenas de valores de densidade de 0 ou 1, ou seja, sólido e vazio. O resultado obtido é uma aproximação do resultado do problema discreto original antes da relaxação, o qual é o problema original de otimização topológica mostrado no problema (2.57).

Mesmo com o uso do SIMP, alguns valores de densidade intermediária podem aparecer nos resultados. Segundo Bendsøe e Sigmund (1999) estes valores de densidade podem ser construídos fisicamente a partir de um compósito constituído de um vazio e um dado material com densidade intermediária ρ se este material deve satisfazer as seguintes condições mostradas na Inequação (2.61) para estruturas bidimensionais:

$$\eta \geq \max \left\{ \frac{2}{1-\nu}, \frac{4}{1+\nu} \right\} \quad (2.61)$$

onde η é um fator de penalização e ν o coeficiente de Poisson. Para um valor de $\nu = 1/3$, por exemplo, o valor de η correspondente obtido da Inequação (2.61) é $\eta \geq 3$.

Na Figura 2.25 é mostrada a curva representando a parametrização do módulo de Elasticidade E pelo SIMP com $\eta = 3$ e a geometria básica de uma célula de um meio periódico que representa um material compósito correspondendo ao módulo de Elasticidade parametrizado e $\nu = 1/3$.

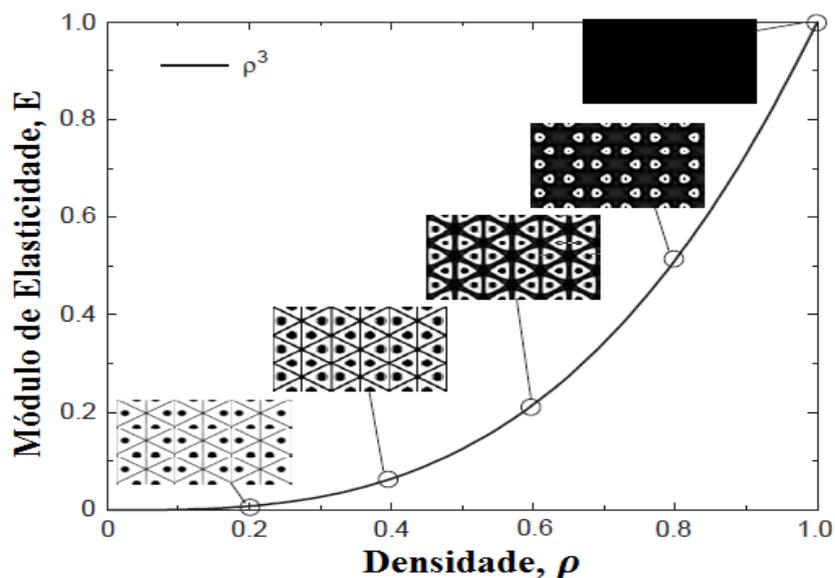


Figura 2.25 – Microestrutura de material compósito representando as propriedades de material do SIMP para uma coeficiente de Poisson $\nu=1/3$.

Fonte: Adaptado de BENDSØE e SIGMUND, 1999

Independente do valor do coeficiente de Poisson usado para o material, vários trabalhos adotaram o valor de η igual a três (3) para a penalização e buscaram resultados de estruturas apenas com valores de densidade 0 e 1. Como referência ver Duysinx e Sigmund (1998), Duysinx e Bendsøe (1998), Duysinx (1999), Bruggi e Venini (2008), Bruggi (2008), Le et al. (2010) e Holmberg, Torstenfelt e Klarbring (2013). Neste trabalho também será adotado o valor de η igual a três (3).

A aproximação do problema com o SIMP permite o uso de métodos de solução baseados na programação matemática. Segundo Sigmund (2001), vários artigos resolveram o problema de otimização topológica como um problema de variáveis inteiras, entretanto, estes métodos podem se tornar mais complicados à medida que se aumenta a complexidade da função objetivo e das restrições. Em contrapartida, algoritmos de programação matemática são simples de se implementar e computacionalmente eficientes.

2.3.4 Problemas numéricos

A modificação do problema original de otimização topológica fazendo a relaxação e a penalização da variável de projeto e a discretização pelo método dos elementos finitos faz surgir alguns problemas numéricos nos resultados obtidos. Esta seção trata dos principais problemas e os métodos mais comuns aplicados para solução.

2.3.4.1 Instabilidade de tabuleiro

O problema da instabilidade do tabuleiro é definido como um padrão periódico de valores altos e baixos de densidade ρ formando uma faixa parecida com um tabuleiro devido a instabilidade numérica (DÍAZ e SIGMUND, 1995; SIGMUND e PETERSSON, 1998). Na Figura 2.26 é mostrada uma estrutura onde foram obtidas faixas com este padrão na solução de um problema de maximizar a rigidez global com restrição da quantidade de material.



Figura 2.26 – Exemplo de resultado com instabilidade de tabuleiro.

Fonte: Elaborado pelo autor

Para explicar o problema da instabilidade de tabuleiro, Díaz e Sigmund (1995) compararam a rigidez de faixas de elementos bidimensionais lineares de 4 nós e elementos biquadráticos de 9 nós em uma distribuição homogênea com uma distribuição na forma de tabuleiro para um problema de maximizar a rigidez global de uma estrutura contínua. Os autores concluíram que quando elementos bidimensionais lineares de 4 nós são usados, uma alta rigidez artificial é introduzida levando à formação do efeito do tabuleiro.

Segundo Sant'ana e Fonseca (2002) este fenômeno é causado pela estimativa incorreta da energia de deformação pela malha em elementos finitos. Então, o resultado encontrado para o problema é realmente a solução mínima para o problema de elementos finitos, porém não para o problema contínuo.

Como forma de minimizar este problema, alguns autores usaram outros tipos de elementos finitos com funções de forma diferentes ou com ordem mais elevada. Para referência de algumas aplicações ver trabalhos de Duysinx e Bendsøe (1998), Sant'ana (2002), Silva (2012) e Ahmed (2013). Para Sigmund e Petersson (1998), um dos problemas de se usar elementos de ordem mais elevada consiste no aumento excessivo do tempo computacional e com o método SIMP o uso de valores elevados do fator de penalização p pode levar ao aparecimento do padrão de tabuleiro. Outras formas de solução do problema foram sugeridas e as mais comuns serão explicadas posteriormente.

2.3.4.2 Dependência da malha

A dependência da malha consiste na alteração dos resultados do problema quando a malha do modelo é refinada mantendo o mesmo domínio estendido e condições de contorno. O problema de dependência do tamanho da malha é ilustrado na Figura 2.27 onde é mostrada a topologia ótima para um problema de uma viga em balanço discretizada com 1200 e com 4800 elementos. Nota-se que com o refino da malha resultou em uma estrutura diferente e mais detalhada.

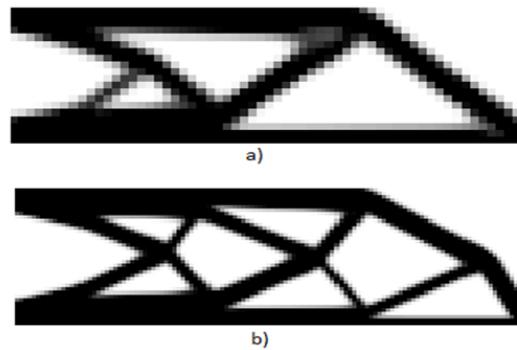


Figura 2.27 – Viga em balanço. a) Solução para uma discretização com 1200 elementos, b) solução com uma discretização de 4800 elementos.

Fonte: Elaborado pelo autor

Segundo Díaz e Sigmund (1995) o problema da malha pode ser dividido em duas categorias: a) Estruturas cada vez mais esbeltas são obtidas ao se refinar o tamanho do elemento da malha, indicando a inexistência da solução, e b) Problemas com vários pontos de ótimo iguais indicando não unicidade da solução.

Dependendo da função objetivo adotada, o Problema (2.58) apresenta um espaço de possíveis soluções aberto e a discretização pelo método dos elementos finitos torna o problema dependente do tamanho da malha. Então, quanto mais refinada for a malha para discretizar a estrutura, menor será o valor da função objetivo porque estruturas mais esbeltas e com maiores detalhes poderão ser criadas.

2.3.4.3 Mínimos locais

A característica de se obter diferentes soluções para o mesmo problema, quando se escolhe diferentes parâmetros para o algoritmo, é denominada de problema do mínimo local (SIGMUND e PETERSSON, 1998). As funções envolvidas no problema de otimização topológica são geralmente não-convexas, podendo dessa forma possuir inúmeros mínimos locais. Os mínimos locais não podem ser negligenciados em detrimento do mínimo global porque representam soluções as quais respeitam as restrições do problema oferecendo uma variedade de alternativas para o engenheiro de projeto (KIM, QUERIN e STEVEN, 2002).

Para problemas não-convexos, o algoritmo de programação matemática pode convergir para um ponto de mínimo local. Pequenas variações em parâmetros do algoritmo de solução, no domínio estendido do projeto e no ponto de início de solução podem mudar o resultado. O problema de maximizar a rigidez global de uma estrutura com restrição de

quantidade de material, por exemplo, têm funções convexas, porém a adição do fator de penalização pelo método SIMP torna o problema não-convexo. Na Figura 2.27 é ilustrado o efeito de se mudar o valor da densidade inicial ρ para solução devido à aplicação do SIMP e nota-se que foi obtida uma estrutura com detalhes diferentes.

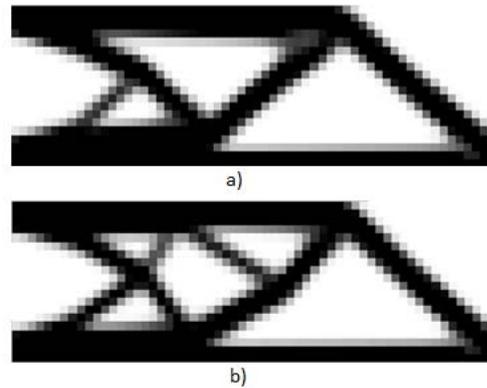


Figura 2.28 – Viga em balanço discretizada com 1200 elementos. a) Solução obtida com um ponto de início de $\rho=0,5$, b) solução com obtida com um ponto de início de $\rho=1,0$.

Fonte: Elaborado pelo autor

Um procedimento sugerido para minimizar o efeito do problema dos mínimos locais em algoritmos de otimização que utilizam valores de gradiente da função objetivo e restrições é o método da **continuação** (SIGMUND e PETERSSON, 1998). Aplicado no método SIMP, o método da continuação consiste em se ir aumentando gradualmente o valor do fator de penalização de $\eta = 1$ no início da solução do problema até o valor escolhido para a penalização final do problema, melhorando assim os resultados obtidos, mas não garantindo que seja encontrado o mínimo global.

2.3.4.4 Métodos de restrição

Para garantir a existência de soluções para o problema de otimização topológica discretizado pelo método dos elementos finitos, evitando a formação do efeito do tabuleiro e resultados dependentes do tamanho da malha, algum tipo de restrição ou modificação na formulação do problema deve ser feita para tornar o conjunto de soluções compacto (SIGMUND e PETERSSON, 1998). Segundo Sigmund (2001), para garantir a existência da solução da aproximação pelo SIMP, o problema de otimização topológica deve ser combinado com uma restrição no perímetro da estrutura, uma restrição no gradiente ou uma técnica de

filtragem e as mesmas técnicas usadas para evitar o problema da instabilidade de tabuleiro podem ser usada para controlar a dependência da malha.

Existem vários métodos de restrição aplicados ao problema de otimização topológica para resolver o problema de instabilidade de tabuleiro e dependência do tamanho da malha. Para uma revisão completa sobre o tema e trabalhos específicos ver Sigmund e Petersson (1998), Zhou, Shyy e Thomas (2001), Bendsøe e Sigmund (2003), Cardoso e Fonseca, (2003) e Pedersen et al. (2006).

Segundo Sigmund (2007), a categoria dos métodos de restrição do problema mais utilizados é a dos filtros baseados em densidade e no gradiente. Estes métodos são heurísticos e serão apresentados os dois casos mais comuns aplicados em problemas de otimização topológica.

O filtro de densidade, introduzido por Bruns e Tortorelli (2001), consiste na alteração da densidade de um elemento a partir da média da densidade deste elemento com seus vizinhos. Esta nova densidade chamada de densidade física $\tilde{\rho}_e$ é calculada a partir de:

$$\tilde{\rho}_e = \frac{\sum_{j \in \Omega_e} \rho_j w_j}{\sum_{j \in \Omega_e} w_j} \quad (2.62)$$

onde Ω_e é o conjunto de índices de variáveis de projeto relacionadas aos centroides dos elementos dentro de um filtro de raio R , medido a partir do centro do centroide do elemento e , como visualizado na Figura 2.29. O fator de peso w_j é definido por uma função com a forma de cone, i. e. o peso é decrescido linearmente com r_j , a qual é a distância entre os centroides dos elementos j relacionados com e . Na Equação (2.63) é mostrado o cálculo do valor do fator de peso w_j :

$$w_j = \frac{R - r_j}{R} \quad (2.63)$$

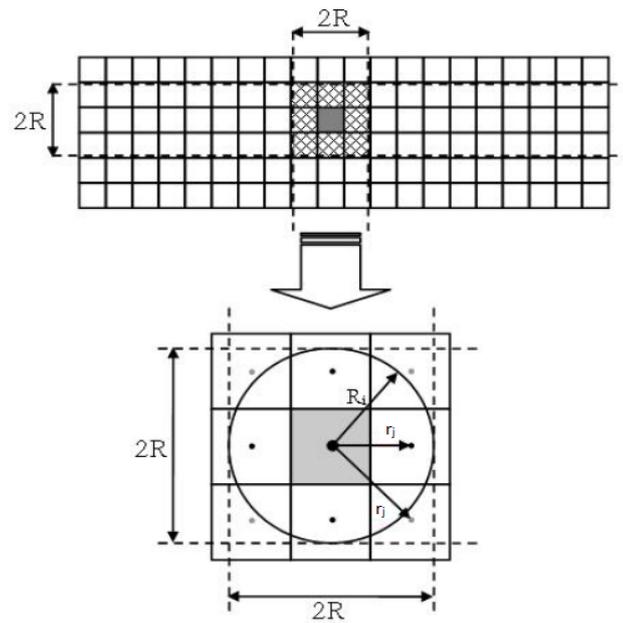


Figura 2.29 – Elementos participando na filtragem da densidade do elemento.

Fonte: Adaptado de PEDERSEN et al., 2006

O filtro de sensibilidade introduzido por Sigmund (1997) altera o gradiente usado em cada iteração pelo algoritmo de solução pela modificação da sensibilidade de cada elemento da estrutura baseado no peso médio das sensibilidades dos elementos em uma vizinhança determinada por um raio. A formulação deste filtro é mostrada na Equação (2.64) como:

$$\frac{\widetilde{\partial f}}{\partial \rho_e} = \frac{\sum_{j \in \Omega_e} \left(\rho_j w_j \frac{\partial f}{\partial \rho_j} \right)}{\rho_e \sum_{j \in \Omega_e} (w_j)} \quad (2.64)$$

onde $\widetilde{\partial f}/\partial \rho_e$ é a sensibilidade da função objetivo alterada pelo filtro de sensibilidade. O cálculo do fator de peso w_j e a determinação dos elementos que irão ser considerados no cálculo da nova sensibilidade de um elemento seguem o mesmo procedimento do filtro de densidade.

Devido à vantagem do filtro de sensibilidade não adicionar restrições extras ao problema e de ser de fácil implementação, este filtro foi adotado neste trabalho.

2.3.5 Restrições de tensão

Restrições de tensão no projeto de uma estrutura são obrigatórias para propósitos de engenharia e vem sendo estudadas desde o início da otimização topológica. Como referência a trabalhos onde foram resolvidos problemas de otimização topológica com restrições de tensão em estruturas contínuas, ver Duysinx e Sigmund (1998), Duysinx e Bendsøe (1998), Duysinx (1999), Pereira, Fancello e Barcellos (2004), Guilherme e Fonseca (2007), Bruggi e Venini (2008), Bruggi (2008) e Holmberg, Torstenfelt e Klarbring (2013).

Uma restrição de tensão para um problema de otimização topológica de estruturas contínuas discretizado pelo método dos elementos finitos pode ser escrita como mostra a Inequação (2.65):

$$\begin{aligned} \sigma_j &\leq \sigma_l \\ \{j = 1, 2, \dots, N\} \end{aligned} \quad (2.65)$$

onde σ_j é a tensão no elemento j obtida a partir da Equação 2.35 e σ_l é a tensão admissível.

Como o problema de otimização topológica passou a ter variáveis de projeto contínuas, é necessário representar corretamente as tensões para elementos com densidade intermediária que represente adequadamente o comportamento da tensão na microestrutura. Se o problema é tratado apenas com os valores inteiros 0-1, a restrição de tensão é bem definida.

Para representar corretamente a tensão local em elementos de densidade intermediária, Duysinx e Bendsøe (1998) desenvolvem um critério para a restrição de tensão do elemento em materiais compósitos o qual representa o comportamento físico dos elementos com densidade intermediária. Um material poroso suporta menos tensão e este efeito deve ser considerado para se determinar a falha do material. Então os autores assumiram que a tensão no elemento é dada a partir de:

$$\sigma_j^r = \frac{\sigma_j}{\rho^q} \quad (2.66)$$

em que σ_j^r é a tensão corrigida no elemento e q é uma constante que deve ser escolhida com o mesmo valor do fator de penalização η aplicado no SIMP. A tensão σ_j^r é substituída pela σ_j na Inequação (2.65), fazendo com que a tensão no elemento seja penalizada para valores de

densidade intermediários e permaneça finita quando a densidade do elemento for próxima de zero.

A maioria dos trabalhos de otimização topológica com restrições de tensão em estruturas contínuas foi resolvido utilizando o critério de falha da energia de distorção (von Mises) para o cálculo da tensão no elemento finito. O primeiro trabalho a tratar de outros critérios de falha foi elaborado por Duysinx (1999), o qual considera os critérios de falha de Raghava e de Ishaia para restrição nas tensões. Estes critérios incluem os efeitos da pressão hidrostática e valores limites diferentes para resistência à tração e compressão.

Jeong et al. (2012) desenvolveram uma metodologia para utilizar os critérios de Tresca e de Coulomb-Mohr. Como as fórmulações que representam estes critérios não tem derivada definida em alguns pontos com relação às variáveis de projeto, Jeong et al. (2012) aproximaram as regiões com quinas com por funções que substituem os operados de máximo e mínimo, e o operador lógico *if*.

O critério de Drucker-Prager, o qual possui características similares ao critério de Pae (1977) para o polipropileno, utilizado neste trabalho, foi implementado em trabalhos de otimização topológica com restrições de tensão por Luo e Kang (2012), Bruggi e Duysinx (2012) e Bruggi e Taliercio (2013). Porém não foram usadas propriedades mecânicas de materiais extraídas de ensaios físicos.

A aplicação da restrição de tensão requer que alguns problemas sejam resolvidos, dentre os principais pode-se citar o comportamento não linear da tensão, o fenômeno da singularidade e a restrição ser local (LE et al., 2009).

O comportamento não linear da tensão consiste na variação não linear da tensão quando há mudança da densidade dos elementos em regiões vizinhas. Este fenômeno é agravado em regiões com concentração de tensão, tais como quinas. A restrição de tensão pelo fato de não ser convexa também causa o problema da presença de mínimos locais que tornam o problema dependente do ponto de início do algoritmo de solução (LE et al., 2009). Segundo Yang e Chen (1996), devido à restrição de tensão ser altamente não linear, o controle dos limites móveis das variáveis de projeto é essencial para convergência do processo de otimização.

O problema da singularidade e da restrição de tensão ser local será visto em maior detalhes nas sessões seguintes.

2.3.5.1 Problema da singularidade

Para problemas estruturais estáticos de otimização topológica, a matriz de rigidez global da estrutura se torna singular quando a área ou densidade de um elemento se torna nula e alguns nós da estrutura não se conectam a outros nós. Além disso, a tensão em um elemento que não existe não pode ser considerada e isto gera uma descontinuidade. Este problema pode ser evitado se os elementos de baixa densidade e os nós que não se conectam a outros nós forem removidos da estrutura quando a densidade atingir um determinado valor mínimo. Entretanto, o elemento removido pode ser parte da estrutura ótima e é difícil adicionar o elemento removido para a estrutura novamente (CHENG, 1995). Para resolver o problema da singularidade da matriz de rigidez, é adotado um limite mínimo pequeno para o valor da densidade ou área e quando o algoritmo atinge a convergência, os elementos que tiverem atingido o valor mínimo estabelecido são eliminados da estrutura.

Porém, ao se adotar uma restrição de tensão nos elementos da estrutura, ocorre um fenômeno chamado de “singularidade” das restrições de tensão (KIRSCH, 1990). A restrição de tensão apresenta uma descontinuidade quando a densidade ou a área de um elemento se aproxima de zero, fazendo com que a tensão tenda ao infinito e a restrição de tensão seja violada. Segundo Duysinx e Bendsøe (1998), o fenômeno da singularidade devido às restrições de tensão consiste na existência de um espaço de solução “degenerado” de menor dimensão onde se localiza o ponto de ótimo singular do problema e os algoritmos de solução baseados nas condições KKT são incapazes de alcançar este ponto convergindo para pontos ótimos locais.

O estudo da singularidade devido à restrição de tensão foi inicialmente realizado no estudo de treliças. Para referência ao tema com aplicação em treliças ver Sved e Ginos (1968), Kirsch (1990), Cheng e Jiang (1992), Rozvany e Birker (1994), Cheng (1995), Hoback (1996) e Cheng e Guo (1998).

Para exemplificar o problema da singularidade na restrição de tensão, recorre-se novamente ao exemplo da treliça mostrado na Figura 2.20. Neste exemplo o algoritmo de solução utilizado conseguiu alcançar um ponto de mínimo local, porém o ponto mínimo global do problema é identificado pelo ponto G no gráfico localizado no segmento de linha que vai do ponto G ao ponto B.

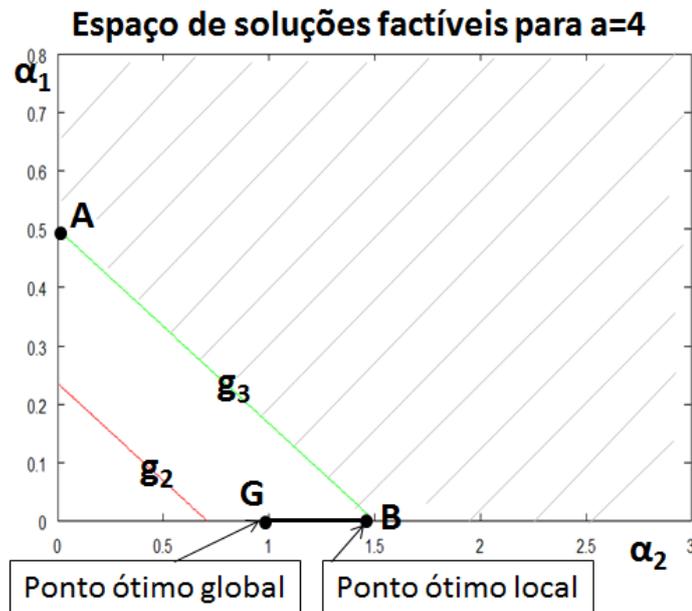


Figura 2.30 – Domínio factível degenerado de uma treliça de 3 barras.

Fonte: Elaborado pelo autor

Para resolver o problema da singularidade da restrição de tensão na otimização de treliças, Cheng e Guo (1997) desenvolveram um método chamado de **relaxação- ε** . Este método gera uma “perturbação” no problema original pela adição de um parâmetro adicional ε chamado de parâmetro de relaxação, o qual modifica a forma do domínio factível para a restrição de tensão. O parâmetro ε cria um espaço de solução onde o ponto ótimo é colocado em um região não-nula e permite que algoritmos de solução baseados nas condições KKT achem este ponto. Na Inequação (2.67) é mostrada a aplicação do método na restrição de tensão em elementos de treliça, sendo que esta equação é reformulada como uma restrição de força usando a metodologia proposta por Cheng (1995) para resolver o problema da descontinuidade da tensão.

$$A_j \left(\frac{\sigma_j}{\sigma_l} - 1 \right) \leq \varepsilon, \quad \{j = 1, 2, \dots, N\} \quad (2.67)$$

$$\varepsilon^2 = A_{min} \leq A_j$$

onde A_j é a área de cada elemento de barra, ε é o parâmetro de relaxação, σ_j é a tensão em cada barra e σ_l é a tensão limite permitida.

Para ilustrar a aplicação do método da relaxação- ε , o problema da treliça de 3 barras mostrado na Figura 2.20 é resolvido novamente utilizando a formulação da Inequação

(2.67). Na Figura 2.31 é mostrado o gráfico com o novo domínio factível para um parâmetro de relaxação $\varepsilon = 0.02$. Desta forma, o domínio factível foi alterado e o algoritmo de solução encontrará o ponto P que é um ponto mais próximo do ponto ótimo global G mostrado na Figura 2.30. Cheng e Guo (1997) provaram que o problema convergirá para o resultado do problema original quando ε tende a zero, então basta que o valor de ε seja diminuído à medida que o problema seja resolvido para que o ponto P fique mais próximo do ponto G.

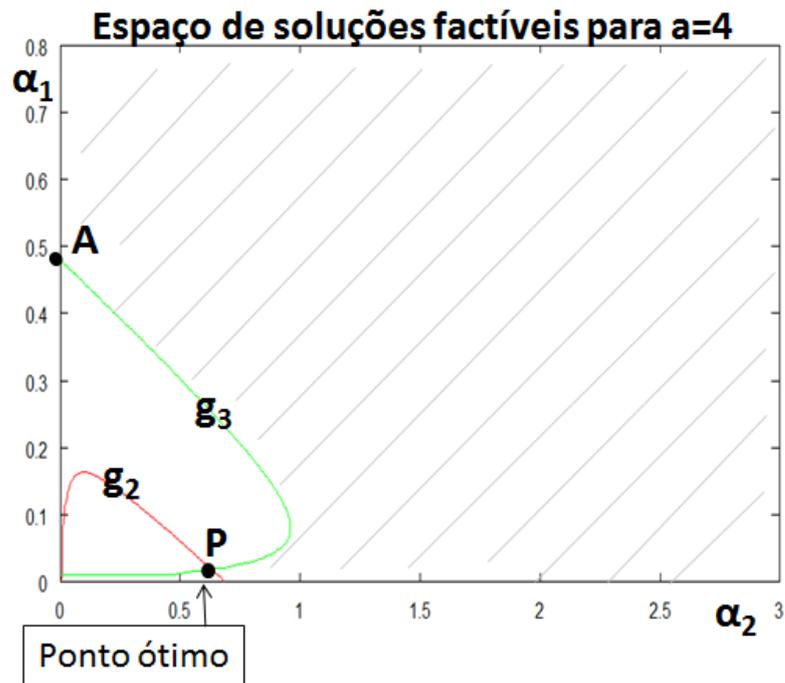


Figura 2.31 – Domínio factível degenerado de uma treliça de 3 barras com parâmetro de relaxação $\varepsilon=0.02$

Fonte: Elaborado pelo autor

A aplicação pela primeira vez da técnica da relaxação- ε em problemas contínuos foi realizada por Duysinx e Bendsøe (1998). Baseado no método proposto por Cheng e Guo (1997), os autores propuseram a seguinte restrição de tensão:

$$\rho_j \left(\frac{\sigma_j^{YM}}{\rho_j^q \sigma_l} - 1 \right) \leq \varepsilon, \quad \{j = 1, 2, \dots, N\} \quad (2.68)$$

$$\rho_{min} \leq \rho_j \leq 1$$

onde ε é o parâmetro de relaxação e σ_j^{VM} é a tensão de von Mises calculada no elemento. O parâmetro de relaxação ε tem o efeito de aumentar a tensão limite permitida no elemento para valores baixos de densidade ρ_j .

Segundo Duysinx e Sigmund (1998), o método de relaxação proposto por Cheng e Guo (1997) não é satisfatório para problemas de otimização topológica contínuos porque a influência da perturbação desaparece apenas quando a variável de projeto $\rho_j \rightarrow \infty$. Então os autores propuseram uma formulação na qual o efeito da perturbação desaparece para $\rho_j = 1$. A aplicação da técnica de relaxação elaborada por Duysinx e Sigmund (1998) na restrição de tensão do elemento utilizada neste trabalho é mostrada na Inequação (2.69) como:

$$\frac{\sigma_j^{VM}}{\rho_j^q \sigma_l} - 1 - \frac{\varepsilon}{\rho_j} + \varepsilon \leq 0, \quad \{j = 1, 2, \dots, N\} \quad (2.69)$$

$$\rho_{min} \leq \rho_j \leq 1$$

onde ε é o parâmetro de relaxação o qual é obtido a partir de $\varepsilon = \sqrt{\rho_{min}}$. Caso o valor da densidade do elemento seja $\rho_j = 1$, a restrição de tensão relaxada será equivalente à restrição original. Quanto maior o valor de ε e menor for o valor de ρ_j , maior será o efeito da relaxação.

Outros métodos para tratar topologias “singulares” são as funções de contorno suave propostas por Rozvany (1996) e a técnica qp proposta por Bruggi (2008), as quais apresentam resultados similares.

2.3.5.2 Problema da restrição local

O fato da tensão ser uma restrição local, leva a um grande número de restrições para o problema e esta quantidade de restrições de tensão dependerá do número de elementos finitos usados para discretizar a forma da estrutura, afetando diretamente o tempo de solução do problema. Uma aproximação conhecida para este problema é utilizar uma restrição global à qual integra todas as restrições locais tornando o problema mais simples e mais rápido de se resolver (HAFTKA e GÜRDAL, 1992).

A maneira mais simples de representar a tensão em cada elemento como uma restrição de tensão única máxima, é usar o operador de máximo para selecionar a tensão máxima nos elementos da malha, conforme mostrado na Inequação (2.70):

$$\max_{j=1,2,\dots,N} \left(\frac{\sigma_j^{VM}}{\rho_j^q} \right) \leq \sigma_l \quad (2.70)$$

onde σ_j^{VM} é a tensão Von Mises calculada no elemento e σ_l é a tensão limite permitida.

Entretanto, o operador de máximo não é diferenciável. De acordo com Qiu e Li (2010), duas aproximações são normalmente usadas para uma aproximação global de restrições locais, que são a **norma-p** e as funções **Kresselmeier-Steinhausser** (KS).

Na Inequação (2.71) é mostrada a formulação da norma-p.

$$\left[\sum_{j=1}^N (g_j)^p \right]^{1/p} \leq 0, \quad (2.71)$$

onde p é um parâmetro de agregação para penalizar a violação das restrições locais e g_j é uma função que representa a restrição de tensão em um elemento finito representada pela Inequação (2.69).

Segundo estudo realizado por Duysinx e Sigmund (1998) utilizando a norma-p, embora o uso de uma restrição integrada para a tensão leve a uma redução de tempo computacional de uma a duas ordens de magnitude, este método pode levar a um fraco controle dos níveis das tensões locais e podendo levar a soluções que são diferentes. Este método depende de um valor alto de p para poder ter uma melhor aproximação do valor da tensão máxima nos elementos, porém altos valores de p tornam o processo de convergência instável podendo ocorrer oscilações ou até mesmo não convergência (YANG e CHEN, 1996).

Neste trabalho para a formulação de restrição global para tensão foi adotada a função de Kresselmeier-Steinhausser (KS), conforme apresentado por Yang e Chen (1996). Na Inequação (2.72) é mostrada a formulação da função KS aplicada em uma restrição de tensão g_j .

$$\frac{1}{p} \ln \left[\sum_{j=1}^N e^{p g_j} \right] \leq 0, \quad (2.72)$$

onde p é um parâmetro de agregação e g_j é uma função que representa a restrição de tensão em um elemento finito qualquer mostrada na Inequação 2.69. Para $p \rightarrow \infty$, a aproximação da

Inequação (2.72) tende ao valor máximo da função g_j . Também para a função KS ocorrem os mesmos problemas relacionados ao uso de um valor alto para p .

3 METODOLOGIA

Este capítulo apresenta a formulação do problema de minimizar a quantidade de material de uma estrutura bidimensional. São adotadas as propriedades do material polipropileno e os problemas são resolvidos considerando restrições de tensão baseadas no critério de escoamento proposto por Pae (1977) e no critério de von Mises. Também é mostrada a estrutura do algoritmo utilizado para elaboração do programa e solução do problema.

3.1 Formulação do problema

Para o tratamento do problema proposto, algumas etapas foram necessárias para a montagem do problema na forma adequada para sua solução e estas serão apresentadas a seguir. Na Figura 3.1 é mostrada a discretização de uma chapa com uma força aplicada na extremidade pelo método dos elementos finitos para explicação da formulação do problema.

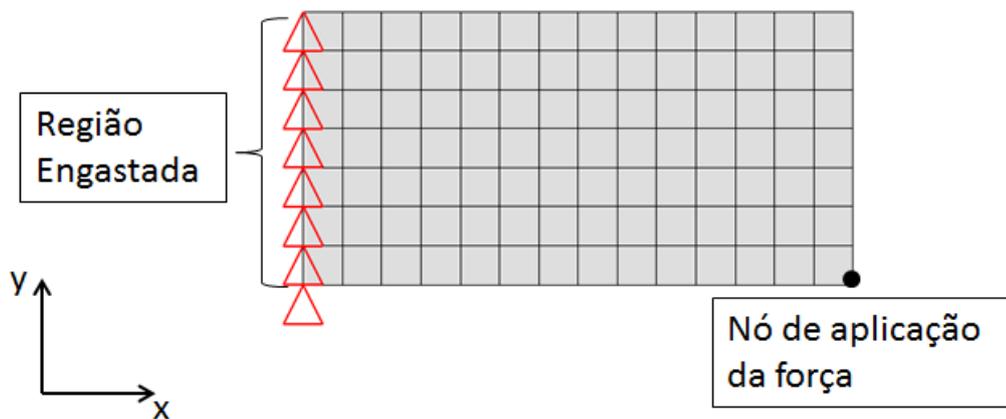


Figura 3.1 - Viga em balanço discretizada com uma malha com 98 elementos.

Fonte: Elaborado pelo autor

O problema geral de minimizar a quantidade de material de uma estrutura bidimensional em estado plano de tensões sujeita a restrições de tensão baseadas em um critério de falha de material é apresentado nas equações (3.1a-c) na forma discretizada em elementos finitos. Para cada elemento da malha é atribuída uma densidade ρ_j a qual determina a rigidez e volume do elemento.

$$\text{Minimizar } V(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^N \rho_j V_j \quad (3.1a)$$

$$\text{sujeito a } g_j^{(cf)}(\boldsymbol{\rho}) \leq 0, \quad \{j = 1, 2, \dots, N\} \quad (3.1b)$$

$$0 < \rho_{min} \leq \rho_j \leq 1 \quad (3.1c)$$

onde $V(\rho)$ representa o volume de material, ρ_j é a densidade de um elemento da malha, V_j é o volume de um elemento da malha, $g_j^{(cf)}$ é a função que representa a restrição de tensão no elemento sendo que sua formulação depende do critério de falha a ser adotado, N é o número de elementos usados para discretizar o domínio de projeto e ρ_{min} é um limite mínimo para o valor da densidade (para evitar a singularidade da matriz de rigidez).

A Equação (3.1a) mostra a função objetivo do problema onde se deseja minimizar a quantidade de material variando-se a variável de projeto ρ_j para cada elemento. Como é adotada uma malha homogênea com elementos finitos quadrados, o cálculo de $V(\rho)$ dependerá apenas dos valores de densidade ρ_j em cada elemento.

Para o cálculo das restrições de tensão mostrada na Inequação (3.1b), antes é necessário resolver as equações de equilíbrio do sistema para obter os deslocamentos nos nós da malha. Para isto, é necessário calcular a matriz de rigidez em cada elemento retangular bilinear de 4 nós a partir da Equação (A.4a). Como todos os elementos tem o mesmo material e dimensões este cálculo será executado apenas uma vez, valendo para todos os elementos.

Como material das estruturas a serem otimizadas é adotado o polipropileno e para a representação de suas propriedades mecânicas necessárias no cálculo da matriz do elemento foi adotada a hipótese de material isotrópico em regime linear elástico. As propriedades mecânicas do polipropileno utilizado foram extraídas de Pae (1977).

O método SIMP é adotado para parametrizar o tensor constitutivo do material e foi adotado um coeficiente de penalização η igual a três (3). A Equação (3.2) mostra a penalização aplicada na matriz de rigidez do elemento.

$$\mathbf{k}_j = \rho_j^\eta \mathbf{k}_j^0 \quad (3.2)$$

onde k_j^0 corresponde à matriz de rigidez do elemento sem a penalização e ρ_j à densidade do elemento. A matriz de rigidez global $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$ é montada a partir do somatório da matriz de rigidez penalizada de cada elemento na dimensão da matriz global, a partir de:

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^N \rho_j^\eta \mathbf{K}_j^0 \quad (3.3)$$

E os deslocamentos globais $\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})$ são calculados a partir da Equação (2.37) como:

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{F} \quad (3.4)$$

onde \mathbf{F} representa o vetor de forças globais aplicado nos nós da malha e seu valor independe da densidade $\boldsymbol{\rho}$. Para evitar problemas de concentração de tensão no ponto de aplicação da força, esta deve ser distribuída em um número maior de nós da malha.

Na Inequação (3.1c) são definidos os limites para a densidade em cada elemento. O valor de ρ_{min} igual a 0,01 é adotado para a solução dos problema para evitar problemas de singularidade da matriz de rigidez global e elementos que possuem este valor de densidade serão considerados “vazios”. O limite superior de valor igual a um para a densidade do elemento indica que este elemento é um “sólido” com propriedades mecânicas iguais à do material escolhido para a estrutura.

Com os valores de deslocamento obtidos da Equação (3.4), o cálculo das tensões $\boldsymbol{\sigma}_j$ é realizado a partir da Equação (2.35) no centro de cada elemento, sendo que a penalização do tensor constitutivo do material é realizada pelo SIMP.

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \rho_j^\eta \mathbf{D}^0 \mathbf{B} \mathbf{u} = \rho_j^\eta \mathbf{T}_0 \mathbf{u} \quad (3.5)$$

onde \mathbf{D}^0 representa o tensor constitutivo do material e é obtido da Equação (2.11), \mathbf{B} é a matriz deslocamento-deformação dada pela Equação (A.2) e $\mathbf{T}_0 = \mathbf{D}^0 \mathbf{B}$.

Com o valor da tensão no elemento, pode-se definir a fórmula da restrição de tensão $g_j^{(cf)}$ mostrada na Inequação (3.1b). Neste trabalho serão desenvolvidas aplicações com o objetivo de comparar o uso do critério de Pae (1977) e o critério da máxima energia de

distorção ou von Mises. Então, as funções referentes a estes critérios serão rerepresentadas a seguir:

$$g^{(VM)} = \sqrt{3J_2} - \sigma_{yt} \quad (3.6)$$

$$g^{(PP)} = -\alpha_0 - \alpha_1 I_1 - \alpha_2 I_1^2 + \sqrt{J_2} \quad (3.7)$$

onde $g^{(VM)}$ é a função que representa o critério de escoamento de von Mises, $g^{(PP)}$ é a função que representa o critério de escoamento proposto por Pae (1977) para o material polipropileno, J_2 corresponde ao segundo invariante do tensor de tensões deviatório e é calculado a partir da Equação (2.20b), σ_{yt} é a tensão de escoamento obtida em um ensaio de tração, I_1 é o primeiro invariante e é obtido a partir da Equação (2.14a) e α_0 , α_1 e α_2 são constantes extraídas do material obtidas a partir de ensaios de tração, compressão e cisalhamento em pressões hidrostáticas de várias intensidades.

A Equação (3.6) respectiva ao critério de escoamento de von Mises pode ser obtida a partir da Equação (3.7) fazendo α_1 e α_2 iguais a zero. Para aplicação no programa, a Equação (3.7) deve ser escrita na forma matricial. Então, os invariantes I_1 e J_2 são reescritos como:

$$I_1 \left(\frac{\sigma_j}{\rho_j^q} \right) = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{\rho_j^q} = \mathbf{w}^T \frac{\sigma_j}{\rho_j^q} = \mathbf{w}^T \mathbf{T}_0 \mathbf{u} \quad (3.8)$$

$$J_2 \left(\frac{\sigma_j}{\rho_j^q} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_j}{\rho_j^q} \right)^T \mathbf{V} \left(\frac{\sigma_j}{\rho_j^q} \right) = \frac{1}{3} \mathbf{u}^T \mathbf{T}_0^T \mathbf{V} \mathbf{T}_0 \mathbf{u} = \frac{1}{3} \mathbf{u}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u} \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{M}_0 = \mathbf{T}_0^T \mathbf{V} \mathbf{T}_0$. A tensão σ_j foi corrigida para representar corretamente a tensão em elementos com densidades intermediárias conforme a Equação (2.66). Foi assumido que o termo de penalização η é igual a q , permitindo assim a simplificação das equações. As matrizes \mathbf{w} e \mathbf{V} são introduzidas para o cálculo dos invariantes de tensão e para o estado plano de tensões são definidas a partir de:

$$\mathbf{w} = \{1 \quad 1 \quad 0\}^T \quad (3.10a)$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (3.10b)$$

A restrição do critério de escoamento $g^{(PP)}$ proposta por Pae (1977) para o polipropileno mostrada na Equação (3.7) é reescrita como:

$$g^{(PP)} = -\alpha_0 - \alpha_1 \mathbf{w}^T \mathbf{T}_0 \mathbf{u} - \alpha_2 (\mathbf{w}^T \mathbf{T}_0 \mathbf{u})^2 + \sqrt{\frac{1}{3} \mathbf{u}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}} \quad (3.11)$$

Devido ao problema da singularidade da restrição de tensão, seguindo a técnica de relaxação- ε proposta na Inequação (2.69), na Equação (3.12) é adicionado um termo referente à parcela de relação. A função de restrição de tensão $g^{(PP)}$ em cada elemento para ser utilizada na solução do problema ficará na forma:

$$\frac{1}{\alpha_0} \left(-\alpha_1 \mathbf{w}^T \mathbf{T}_0 \mathbf{u}_j - \alpha_2 (\mathbf{w}^T \mathbf{T}_0 \mathbf{u}_j)^2 + \sqrt{\frac{1}{3} \mathbf{u}_j^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_j} \right) - \phi_j \leq 0 \quad (3.12a)$$

$$\phi_j = 1 + \frac{\varepsilon}{\rho_j} - \varepsilon, \{j = 1, 2, \dots, N\} \quad (3.12b)$$

onde ε é um parâmetro de relaxação, para o qual foi adotado o valor de 0,1 para todos os problemas resolvidos, obtido a partir de $\varepsilon = \sqrt{\rho_{min}}$.

Outro problema associado ao emprego de restrições de tensão está associado ao grande número de restrições que é proporcional ao número de elementos da malha utilizada. Para diminuir o tempo computacional e evitar problemas de convergência do algoritmo é adotada uma restrição global que agrega todas as restrições locais. Utilizando a formulação da função de **Kreisselmeier-Steinhauser** (KS) mostrada na Inequação (2.72) a restrição global de tensão $G^{(PP)}$ ficará da seguinte forma:

$$\frac{1}{p} \ln \left[\sum_{j=1}^N e^{(p g_j^{(PP)})} \right] \leq 0 \quad (3.13)$$

onde p é um parâmetro de agregação, tendo sido utilizado o valor de p igual a quinze (15) para todos os problemas resolvidos.

A formulação final do problema é mostrada na Equação (3.14a) e Inequações (3.14b-c) para o critério proposto por Pae (1977) para o polipropileno. Para aplicar o critério de von Mises basta fazer α_1 e α_2 iguais a zero na Inequação (3.12a) e calcular $\alpha_0 = \sigma_{yt}/\sqrt{3}$.

$$\text{Minimizar } V(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^N \rho_j V_j \quad (3.14a)$$

$$\text{sujeito a } \frac{1}{p} \ln \left[\sum_{j=1}^N e^{(p g_j^{(PP)})} \right] \leq 0 \quad (3.14b)$$

$$0 < \rho_{min} \leq \rho_j \leq 1 \quad (3.14c)$$

3.1.1 Análise de sensibilidade

Para realizar a aproximação convexa pelo MMA são necessárias as derivadas com relação à variável de projeto das funções apresentadas nas Equações (3.14a-b). O procedimento de obter estas derivadas, ou sensibilidades, é chamado de análise de sensibilidade. Como métodos para obter as sensibilidades estão os métodos numéricos, analíticos e semianalíticos; como referência a estes métodos ver Haftka e Gürdal (1992), Christensen e Klarbring (2009) e Choi e Kim (2005). Neste trabalho será utilizado o método analítico.

Para a função objetivo mostrada na Equação (3.14a), a derivada é obtida facilmente como:

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_j} = \frac{\partial \sum_{j=1}^N \rho_j V_j}{\partial \rho_j} = V_j \quad (3.15)$$

O desenvolvimento da derivada da Equação (3.14b) é realizado em algumas etapas. Primeiro é realizada a derivada da função de restrição de tensão $g^{(PP)}$ mostrada na Inequação (3.12a) e obtêm-se a seguinte inequação:

$$\frac{\partial g_l^{(PP)}}{\partial \rho_j} = \frac{1}{\alpha_0} \left(-\alpha_1 \mathbf{w}^T \mathbf{T}_0 - 2\alpha_2 (\mathbf{w}^T \mathbf{T}_0 \mathbf{u}_l) (\mathbf{w}^T \mathbf{T}_0) + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\mathbf{u}_l^T \mathbf{M}_0}{\sqrt{\mathbf{u}_l^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_l}} \right) L_l \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_j} - \frac{\partial \phi_l}{\partial \rho_j} \quad (3.16a)$$

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial \rho_j} = \begin{cases} -\varepsilon / \rho_j^2 & \text{se } l = j \\ 0 & \text{se } l \neq j \end{cases} \quad (3.16b)$$

onde \mathbf{u}_l são os deslocamentos no elemento l , \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos globais dos nós da estrutura e L_l é uma matriz com termos 0 e 1 de localização dos deslocamentos do elemento nos deslocamentos globais a partir da qual é válida a relação $\mathbf{u}_l = L_l \mathbf{u}$.

Na Equação (3.16a) ainda é necessário fazer o cálculo da derivada do vetor deslocamento \mathbf{u} em relação a ρ_j . Para isto, é feita a derivada da equação de equilíbrio do sistema mostrada na Equação (3.4) como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_j} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \rho_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{u} \right) \quad (3.17)$$

onde \mathbf{K}^{-1} é a inversa da matriz de rigidez global. Como é assumido que o valor do vetor de forças globais nos nós \mathbf{F} independe da densidade ρ , o termo $\partial \mathbf{F} / \partial \rho_j$ é igual a zero. O termo $\partial \mathbf{K} / \partial \rho_j$ é facilmente obtido a partir da derivada da Equação (3.2) em relação a ρ_j .

Para um cálculo de sensibilidade eficiente, o método da variável adjunta é empregado porque há um número maior de variáveis do que funções de restrição já que será usada apenas uma restrição global para a tensão. Para montar o problema adjunto, define-se o vetor adjunto de pseudo-força $\boldsymbol{\varphi}^l$ a partir do termo entre parênteses na Equação (3.16a) como:

$$\boldsymbol{\varphi}^l = \left\{ \left(-\alpha_1 \mathbf{w}^T \mathbf{T}_0 - 2\alpha_2 (\mathbf{w}^T \mathbf{T}_0 \mathbf{u}_l) (\mathbf{w}^T \mathbf{T}_0) + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\mathbf{u}_l^T \mathbf{M}_0}{\sqrt{\mathbf{u}_l^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_l}} \right) L_l \right\}^T \quad (3.18)$$

Substituindo as Equações (3.17) e (3.18) na Equação (3.16a) obtêm-se:

$$\frac{\partial g_l^{(PP)}}{\partial \rho_j} = -\frac{1}{\alpha_0} (\varphi^l) \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{u} - \frac{\partial \phi_l}{\partial \rho_j} \quad (3.19)$$

Então, o problema adjunto é resolvido pela introdução dos vetores adjuntos λ^l ($l = 1, 2, \dots, N$), os quais são soluções das equações:

$$\{\lambda^1 \quad \lambda^2 \quad \dots \quad \lambda^N\} = \mathbf{K}^{-1} \{\varphi^1 \quad \varphi^2 \quad \dots \quad \varphi^N\} \quad (3.20)$$

As Equações (3.20) podem ser resolvidas simultaneamente com a vantagem de ser necessário calcular a inversa da matriz \mathbf{K} apenas uma vez e seu resultado é aplicado na Equação (3.19) como:

$$\frac{\partial g_l^{(PP)}}{\partial \rho_j} = -\frac{1}{\alpha_0} (\lambda^l)^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{u} - \frac{\partial \phi_l}{\partial \rho_j} \quad (3.21)$$

Para finalizar, aplica-se a regra da cadeia na derivada da restrição global de tensão $G^{(PP)}$ mostrada na Inequação (3.14b) em relação à variável de projeto ρ_j . Obtêm-se:

$$\frac{\partial G^{(PP)}}{\partial \rho_j} = \frac{\sum_{l=1}^N \left\{ e^{(p g_l^{(PP)})} \frac{\partial g_l^{(PP)}}{\partial \rho_j} \right\}}{\sum_{l=1}^N e^{(p g_l^{(PP)})}} \quad (3.22)$$

3.2 Descrição do programa

Um dos objetivos deste trabalho é o desenvolvimento de um programa de otimização topológica de estruturas contínuas bidimensionais com propriedades mecânicas de polipropileno em estado plano de tensões, com critérios de escoamento do material como restrições para o problema utilizando o software Octave. O Octave é um *software open-source* (GNU OCTAVE, 2014) usado para resolver problemas lineares e não lineares numericamente e geração de gráficos, sendo particularmente projetado para cálculo matricial: resolvendo conjunto de equações simultâneas, autovetores e autovalores, etc. O Octave tem a vantagem de apresentar uma vasta biblioteca de rotinas. Mais detalhes sobre o software e manual de uso podem ser encontrados em Long (2005) e Gnu Octave (2014). Para as análises realizadas neste trabalho foi utilizada a versão 3.2.4 do Octave em um computador com processador

AMD Phenom(tm) II X4 910 2.60GHz com 4 GB de memória RAM e com o sistema operacional de 64 bits WINDOWS 7 Ultimate.

Para o desenvolvimento do programa de otimização em Octave foram usados como referência os trabalhos de Sigmund (2001), Andreassen et al. (2010) os quais disponibilizam o código de programas para otimização topológica para maximizar a rigidez global de uma estrutura com restrição de quantidade de material. O algoritmo de solução pelo método primal-dual de Newton foi obtido de Svanberg (1987).

Para simplificar o programa, os domínios de projeto utilizados são retangulares, possibilitando a discretização por elementos finitos quadrados de mesmo tamanho e desta forma permitindo que seja necessário calcular a matriz de rigidez apenas uma vez para a montagem da matriz de rigidez global.

3.2.1 Descrição do algoritmo desenvolvido

O algoritmo de otimização estrutural implementado neste trabalho consiste em um algoritmo de busca iterativo em que a partir da estimativa inicial da solução do problema, aproximações convexas do problema original vão sendo resolvidas e gerados novos pontos de solução, até que um determinado critério é satisfeito. Este tipo de algoritmo é um algoritmo de programação matemática e é apresentado no diagrama de blocos apresentado na Figura 3.2.

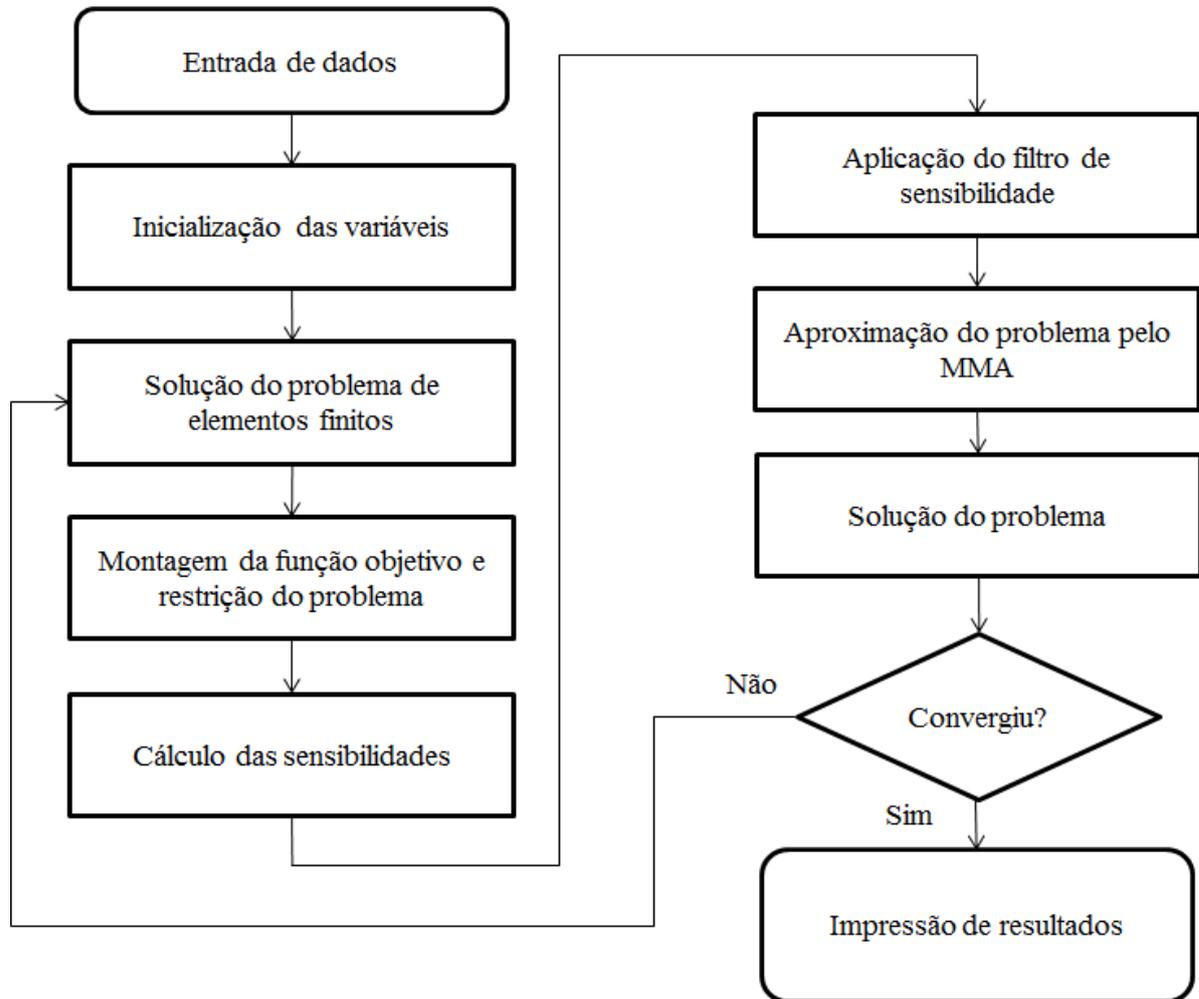


Figura 3.2 - Diagrama de blocos do algoritmo de otimização desenvolvido.

Fonte: Elaborado pelo autor

O algoritmo é iniciado a partir da entrada de dados necessários para a montagem do problema que são: número de elementos da malha, condições de contorno e carregamento, valor inicial para a variável de projeto ρ , propriedades do material, critério de escoamento escolhido para restrição de tensão, parâmetro de penalização e raio do filtro de densidade ou de sensibilidade.

A inicialização das variáveis utilizadas para armazenar as funções do problema, matriz de rigidez global e matrizes com as sensibilidades é realizada para uma pré-alocação de memória a fim de acelerar o algoritmo.

O contador de iterações do algoritmo é iniciado e para solução do problema de elementos finitos é feita a montagem da matriz de rigidez global a partir da matriz de rigidez de cada elemento alterada pela densidade do elemento. Então o vetor de deslocamentos globais \mathbf{u} é calculado a partir da inversa da matriz de rigidez global e forças aplicadas nos nós da malha. Em seguida são calculados os valores de tensão no centro de cada elemento.

As matrizes contendo os valores da função objetivo e restrição de tensão são calculadas usando o valor da variável de projeto inicial (atual). Também são calculadas as matrizes de sensibilidade da função objetivo e da função de restrição de tensão a partir da solução do problema adjunto.

A função objetivo e as restrições de tensão são aproximadas por funções convexas a partir do MMA utilizando os valores das funções nas variáveis de projeto atuais e as matrizes de sensibilidade. As assíntotas móveis são calculadas a partir dos últimos valores obtidos para as variáveis de projeto ρ para o controle da convergência do algoritmo, sendo que nas duas primeiras iterações do algoritmo seus valores serão iguais ao valor mínimo e máximo da densidade ρ estabelecido para o problema.

O subproblema aproximado pelo MMA é resolvido pelo método primal-dual de Newton, o qual é baseado na dualidade de Lagrange, e um novo projeto é encontrado. Após a solução, o resultado obtido para a variável de projeto é comparado com o resultado obtido na iteração anterior e se a diferença máxima for inferior ou igual a 0,01 os resultados são impressos na tela e o algoritmo é interrompido.

Se o critério de convergência não é obtido, o contador de iterações é incrementado e uma nova iteração do algoritmo é iniciada. Os resultados obtidos para a variável de projeto são utilizados como dados para a nova iteração.

4 RESULTADOS

Este capítulo apresenta as hipóteses e propriedades mecânicas utilizadas na solução dos problemas e os resultados obtidos a partir da metodologia desenvolvida. Foram estudados três casos clássicos de estruturas geralmente otimizadas em trabalhos na área de otimização topológica, todos eles submetidos à minimização da quantidade de material com restrições de tensão baseadas nos critérios de escoamento de von Mises e do critério de escoamento desenvolvido por Pae (1977) para polipropileno. No primeiro caso uma chapa pequena sujeita a cisalhamento foi otimizada. No segundo caso, uma chapa quadrada fixa nas extremidades com uma carga no centro foi otimizada. No terceiro caso, uma chapa com uma carga na extremidade foi otimizada.

4.1 Considerações

Neste trabalho serão analisadas estruturas com espessura de 1 mm, sendo aplicada a hipótese do estado plano de tensões. Os domínios estendidos de projeto são assumidos retangulares para simplificar a aplicação da malha, possibilitando a discretização por elementos finitos quadrados de mesmo tamanho e permitindo desta forma que seja necessário calcular a matriz de rigidez apenas uma vez para a montagem da matriz de rigidez global.

O elemento finito utilizado para a discretização do modelo é o elemento retangular bilinear de estado plano de tensões com 4 nós conforme mostrado no Apêndice A. A dimensão do elemento empregado é especificada de acordo com o problema de modo a não aumentar desnecessariamente o tempo computacional e apresentar resultados adequados de tensão. Para os resultados de tensão obtidos, a tensão é calculada no centro do elemento e é considerado que a tensão permaneça no regime elástico linear do material.

Para cada elemento da malha é atribuído um valor de densidade relativa adimensional o qual é a variável de projeto do problema. Para os valores iniciais das variáveis de projeto, é assumido o mesmo valor de densidade para cada elemento. Nos gráficos dos resultados de densidade, elementos com valores de densidade iguais a um indicam que o material do elemento apresenta as propriedades mecânicas do material escolhido para a estrutura, enquanto o valor de densidade igual a 0,01 indica um espaço vazio no domínio da

estrutura. Ao serem apresentados os resultados de tensão, os resultados dos elementos “vazios” serão plotados quando necessário.

Para a simulação, quando não especificado, foram utilizados os seguintes parâmetros. Para o método SIMP foi utilizado um valor do fator de penalização η igual a três (3). A fim de evitar o problema da singularidade da restrição de tensão, foi adotada a técnica de relaxação- ε com um valor de ε igual a 0,01. Para a agregação das restrições de tensão locais em um uma restrição única, foi utilizado um valor de p igual a doze (12).

Na vizinhança do ponto de aplicação de força pode ocorrer concentração de tensão, então, para suavizar este efeito distribui-se a carga sobre uma pequena região da estrutura quando necessário.

4.2 Propriedades mecânicas do polipropileno utilizado

Para as simulações consideradas neste trabalho foram utilizados os dados experimentais de um polipropileno fornecidos no trabalho de Pae (1977). Na Tabela 4.1 são mostrados os resultados dos limites de tensão de escoamento para ensaios de tração, compressão e torção a diferentes valores de pressão hidrostática (corpo de prova imerso em um fluido à alta pressão).

Tabela 4.1 – Resultados experimentais de valores de tensão de escoamento a várias pressões para um polipropileno.

Pressão Hidrostática [kbar]	Tensões de escoamento [MPa]		
	Compressão σ_{ct}	Tração σ_{yt}	Cisalhamento τ_t
Atmosférica	45,5	37,2	24,1
1	74,5	61,4	40,0
2	113,8	99,3	57,2
3	134,4	117,2	73,1
4	155,1	135,1	80,7
5	175,8	160,0	87,6
6	189,6	176,5	95,1

Fonte: Adaptado de PAE, (1977)

A partir dos dados da Tabela 4.1, Pae (1977) encontrou os coeficientes para serem aplicados na Inequação (2.28), a qual é reescrita a seguir:

$$-\alpha_0 - \alpha_1 I_1 - \alpha_2 I_1^2 + \sqrt{J_2} \leq 0 \quad (4.1)$$

onde $\alpha_0 = 23,4$, $\alpha_1 = -0,0567$ e $\alpha_2 = -0,000119$ são os coeficientes ajustados por Pae (1977) na Inequação (4.1) para representar os dados experimentais na Tabela 4.1. A representação gráfica da projeção bidimensional destes valores na pressão atmosférica é apresentada na Figura 4.1.

Critério de escoamento - Pae (1977)

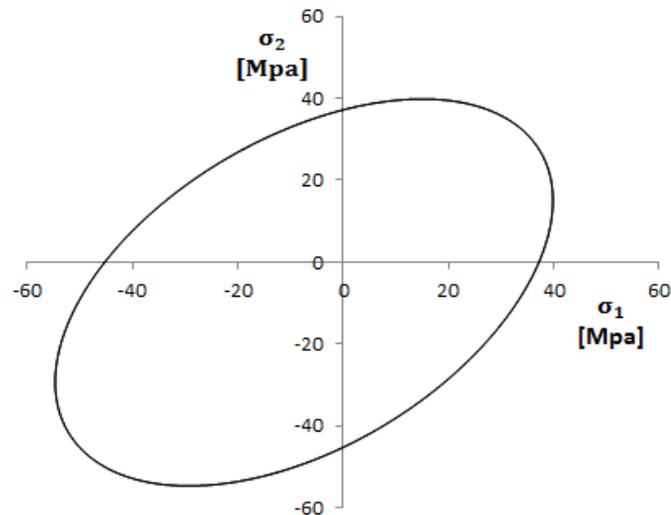


Figura 4.1 - Representação gráfica do critério de escoamento proposto por Pae (1977) para um polipropileno.

Fonte: Elaborado pelo autor

Para gerar os coeficientes da Inequação (4.1) a partir de dados experimentais obtidos de ensaios de tração, compressão e torção de polipropileno à pressão atmosférica, basta usar as seguintes relações:

$$\alpha_0 = \tau_t \quad (4.2a)$$

$$\alpha_2 = \frac{-\tau_t \left(\frac{\sigma_{ct}}{\sigma_{yt}} + 1 \right) + \frac{2\sigma_{ct}}{\sqrt{3}}}{\sigma_{ct}(\sigma_{ct} + \sigma_{yt})} \quad (4.2b)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\tau_t}{\sigma_{yt}} - \alpha_2 \sigma_{yt} \quad (4.2c)$$

Como forma de comparação entre dos critérios de escoamento de Pae (1977) e do critério de von Mises, é utilizada a tensão de escoamento à tração $\sigma_{yt} = 37,2$ MPa à pressão atmosférica para o critério de von Mises.

Como não há informações a respeito do módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν no trabalho de Pae (1977), é assumido o valor de $E = 1500$ MPa e $\nu = 0,3$ para o polipropileno usado conforme valores gerais estabelecidos por Maier e Calafut (1998).

4.3 Casos simulados

Nesta seção serão mostrados os resultados para três casos de estruturas clássicas e também é realizado um teste do funcionamento do algoritmo. Todos os problemas de otimização estrutural resolvidos consistem na minimização da quantidade de material com restrições de tensão baseadas nos critérios de escoamento de von Mises e do critério desenvolvido por Pae (1977).

4.3.1 Teste do algoritmo

Como forma de verificar o funcionamento básico do algoritmo desenvolvido sem parâmetros para corrigir problemas de instabilidade numérica, é realizada uma análise de uma estrutura para a qual já se conhece o projeto ótimo. A estrutura de teste analisada consiste em uma chapa retangular de polipropileno cujas propriedades mecânicas foram fornecidas na sessão 4.2, com dimensões 35 mm x 70mm x 1mm e sujeita às condições de contorno e carregamento conforme é mostrado na Figura 4.2. O domínio de projeto é discretizado utilizando-se uma malha “grosseira” com 98 elementos finitos a qual resultou em elementos com dimensões de 5 mm x 5 mm. Na Tabela 4.2 são mostrados os parâmetros utilizados na simulação, sendo que os valores utilizados para o problema foram definidos de forma que não haja penalização, relaxação da restrição de tensão e influência do filtro de sensibilidades. O problema foi resolvido com restrições de tensão locais para o critério de von Mises e para o critério de Pae (1977).

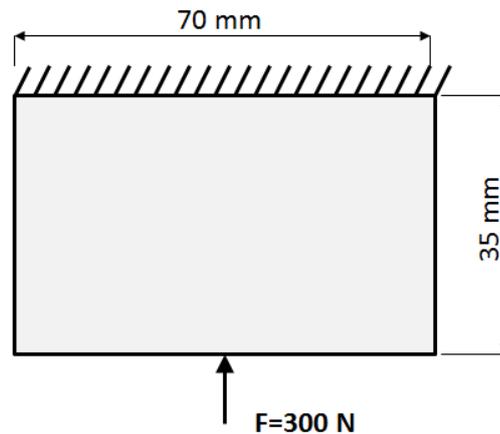


Figura 4.2 - Geometria e condições de contorno da estrutura de teste do algoritmo.

Tabela 4.2 - Parâmetros de simulação da estrutura de teste do algoritmo.

densidade Inicial	fator de penalização	raio do filtro	parâmetro de relaxação	parâmetro de agregação
$\rho = 0,5$	$\eta = 1$	$R = 1,0$	$\epsilon = 0$	-

Os resultados das topologias obtidas com os parâmetros da Tabela 4.2 são apresentados na Figura 4.3 para o critério de escoamento de von Mises e para o critério de escoamento de Pae (1977).

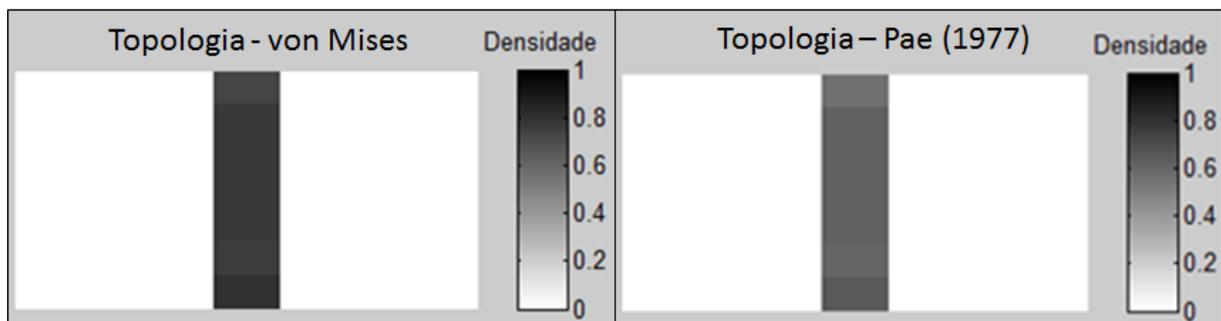


Figura 4.3 - Topologia obtida no teste do algoritmo: a) critério de von Mises b) critério de Pae (1977).

As topologias obtidas para ambos os critérios encontraram o melhor leiaute para suportar o carregamento aplicado de compressão com menor quantidade de material. Neste caso não ocorreram mudanças nos resultados ao se alterar a densidade inicial do algoritmo para $\rho = 1,0$. O histórico da convergência da função objetivo é mostrado na Figura 4.4 para os dois critérios.

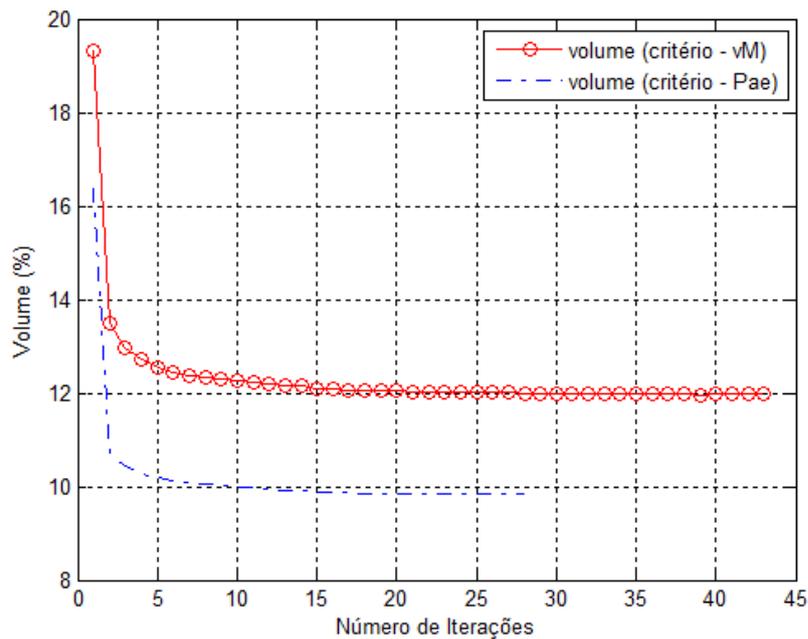


Figura 4.4 - Convergência da função objetivo para o critério de von Mises e o critério de Pae (1977).

Nas simulações executadas, os dois problemas convergiram para o critério de parada estabelecido, sendo que o critério de Pae (1977) convergiu mais rapidamente. A diferença nos valores obtidos para o volume mínimo para a estrutura se devem à diferença na formulação dos critérios de escoamento. Os valores de tensão obtidos com a restrição de tensão baseada no critério de von Mises e no critério de Pae (1977) são apresentados na Figura 4.5.

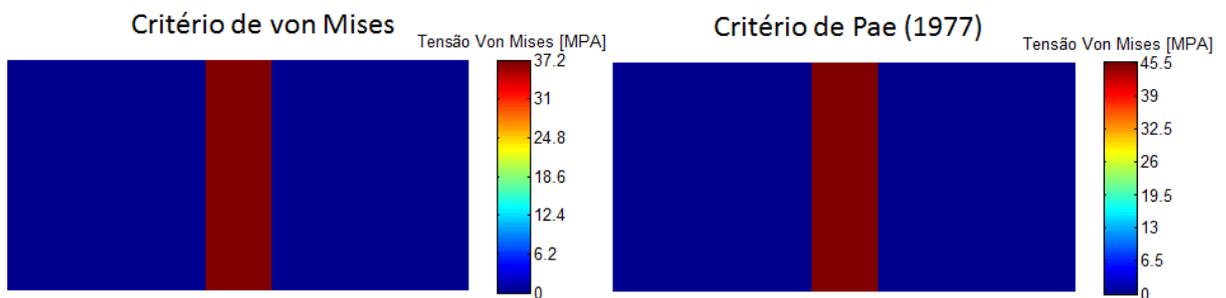


Figura 4.5 - Tensões von Mises a) critério de von Mises b) critério de Pae (1977).

Os resultados de tensão de elementos com densidade mínima foram eliminados para melhor visualização dos resultados, sendo que na peça física as regiões referentes a estes elementos não irão existir. A distribuição de tensões nos elementos foram representadas em termos de tensões de von Mises para poder comparar os critérios. Nota-se que o critério de

Pae (1977) permitiu uma tensão maior na estrutura por considerar a resistência à compressão do polipropileno, enquanto o critério de von Mises considera apenas a tensão de escoamento $\sigma_{yt} = 37,2 \text{ Mpa}$.

4.3.2 Primeiro caso - chapa em cisalhamento

O primeiro caso a ser analisado consiste em uma chapa pequena com propriedades mecânicas de polipropileno cujas propriedades foram fornecidas na sessão 4.2, com dimensões 20 mm x 80 mm x 1mm. A estrutura é sujeita às condições de contorno e carregamento conforme é mostrado na Figura 4.6 de modo que ocorra o cisalhamento da mesma.

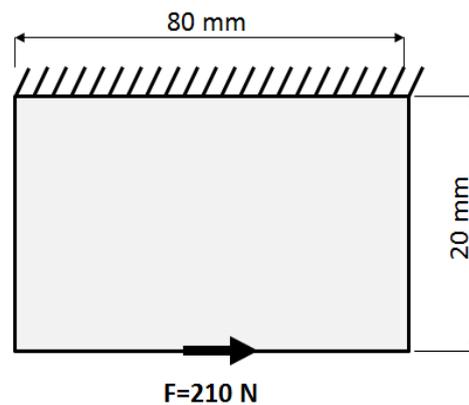


Figura 4.6 - Geometria e condições de contorno da estrutura para o primeiro caso.

O domínio de projeto é discretizado utilizando uma malha com 400 elementos a qual resultou em elementos com dimensões de 2 mm x 2 mm. Na Tabela 4.3 são mostrados os parâmetros utilizados na primeira simulação, sendo utilizado na primeira análise da estrutura com o critério de escoamento de von Mises com um parâmetro de relaxação ϵ igual a zero para testar se há presença do fenômeno da singularidade para a restrição de tensão. Também é aplicado um valor do raio do filtro R como sendo igual a **um** (1) para eliminar sua influência e testar se ocorre a instabilidade de tabuleiro.

Tabela 4.3 – Parâmetros de simulação do problema da chapa em cisalhamento.

densidade Inicial	fator de penalização	raio do filtro	parâmetro de relaxação	parâmetro de agregação
$\rho = 0,5$	$\eta = 3$	$R = 1,0$	$\epsilon = 0$	-

As análises para o primeiro caso são executadas com restrições de tensão locais. Para os parâmetros da Tabela 4.3, a topologia obtida para a chapa em cisalhamento com restrição de tensão com o critério de von Mises é apresentada na figura seguinte:

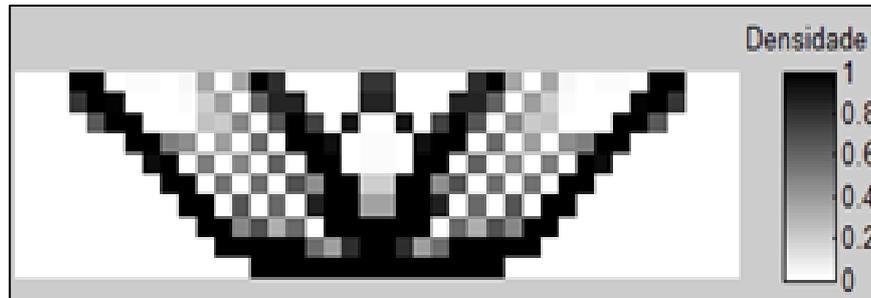


Figura 4.7 - Topologia obtida na chapa em cisalhamento para o critério de von Mises com dados da Tabela 4.3.

A topologia obtida mostrada da Figura 4.7 obteve um volume de **33,57%** do volume da estrutura inicial em **75** iterações do algoritmo. Nota-se o aparecimento do fenômeno da instabilidade de tabuleiro e alguns elementos com valores baixos de densidade que indicam a presença do fenômeno da singularidade da restrição de tensão. O mapa de distribuição de tensões de von Mises obtidos é mostrado na figura seguinte, sendo que as tensões nos elementos com densidade mínima ρ_{min} também são apresentadas.

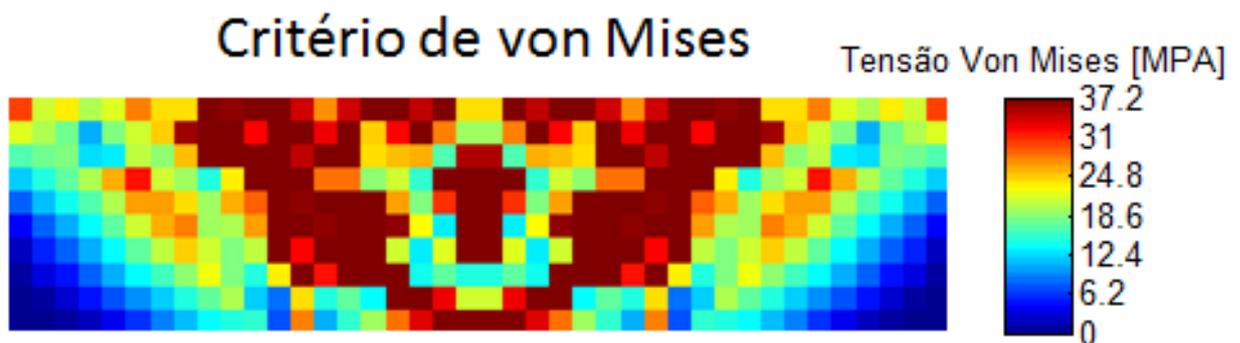


Figura 4.8 - Tensões de von Mises para a chapa em cisalhamento com o critério de von Mises utilizando os dados da Tabela 4.3.

A partir dos resultados da Figura 4.8 nota-se que vários elementos com densidade mínima tem valores de tensão no limite da tensão de escoamento à tração $\sigma_{yt} = 37,2$ MPa permitido para o critério de von Mises, o que é um indicativo da presença do fenômeno da

singularidade da restrição de tensão. Como todos os valores de tensão de von Mises estão abaixo do limite σ_{yt} , nenhuma restrição de tensão está sendo violada.

Para resolver o problema da instabilidade de tabuleiro, o filtro de sensibilidade é adicionado ao problema anterior, sendo que o raio do filtro é um parâmetro adimensional que deve ser multiplicado pelo tamanho do elemento usado para encontrar o raio de influência do filtro para cada elemento. Uma nova simulação é realizada segundo os dados da Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Parâmetros de simulação do problema da chapa em cisalhamento.

densidade Inicial	fator de penalização	raio do filtro	parâmetro de relaxação	parâmetro de agregação
$\rho = 0,5$	$\eta = 3$	$R = 1,1$	$\epsilon = 0$	-

Para os parâmetros da Tabela 4.4, a topologia obtida para a chapa em cisalhamento com restrição de tensão com o critério de von Mises é apresentada na figura seguinte:

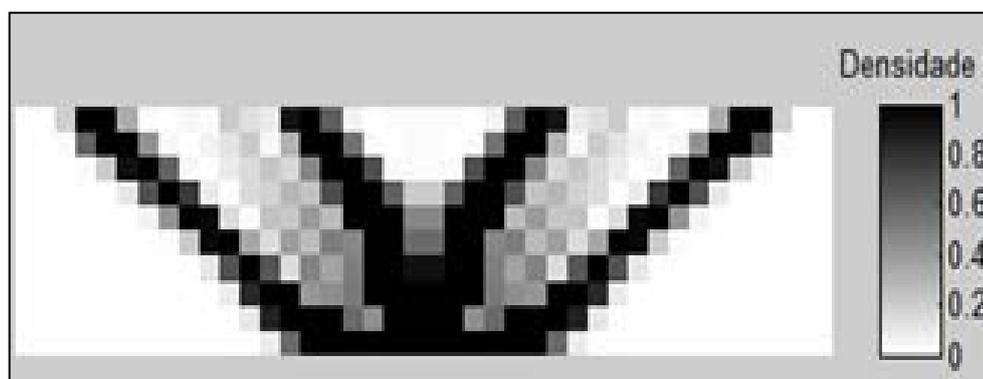


Figura 4.9 - Topologia obtida na chapa em cisalhamento para o critério de von Mises com dados da Tabela 4.4.

A topologia obtida mostrada na Figura 4.9 obteve um volume de **34,27%** do volume da estrutura inicial em **68** iterações do algoritmo. Nota-se que o fenômeno da instabilidade de tabuleiro foi suavizado com a aplicação do filtro de sensibilidade, porém ainda há a presença de vários elementos com densidade intermediária.

O mapa de distribuição de tensões de von Mises obtidos é mostrado na figura seguinte, sendo que as tensões nos elementos com densidade mínima ρ_{min} também são apresentadas.

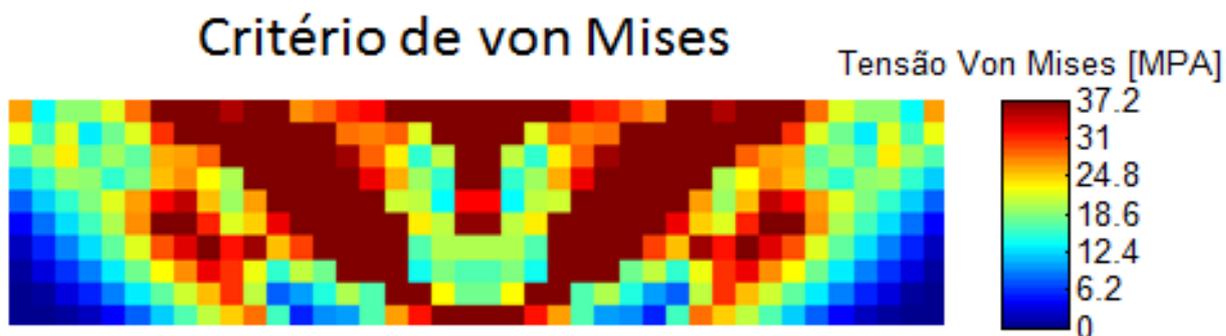


Figura 4.10 - Tensões de von Mises para a chapa em cisalhamento com o critério de von Mises utilizando os dados da Tabela 4.4.

A partir dos resultados da Figura 4.10 nota-se que vários elementos com densidade intermediária tem valores de tensão no limite da tensão de escoamento à tração ($\sigma_{yt} = 37,2$ MPa) permitido para o critério de von Mises, o que é um indicativo da presença do fenômeno da singularidade da restrição de tensão. O algoritmo é forçado a criar zonas com densidades intermediárias com a quantidade mínima de material capaz de passar o limite imposto pela restrição de tensão. Como todos os valores de tensão de von Mises estão abaixo do limite σ_{yt} , nenhuma restrição de tensão está sendo violada.

A fim de minimizar o fenômeno da singularidade de tensão, o parâmetro de relaxação ε é adicionado ao problema anterior e uma nova simulação é realizada segundo os parâmetros da Tabela 4.5 para restrições de tensão baseadas no critério de von Mises e no critério de Pae (1977).

Tabela 4.5 – Parâmetros de simulação do problema da chapa em cisalhamento.

densidade Inicial	fator de penalização	raio do filtro	parâmetro de relaxação	parâmetro de agregação
$\rho = 0,5$	$\eta = 3$	$R = 1,1$	$\varepsilon = 0,1$	$p = 12$

Para aplicação do método da relaxação- ε é necessário utilizar o método da continuação, o qual consiste em se diminuir o valor do parâmetro de relaxação ε a partir da iteração na qual o algoritmo converge. Nas análises do caso da chapa em cisalhamento, o valor de ε foi dividido por dois em cada iteração a partir da iteração em que o algoritmo atinge a diferença máxima da variável de projeto de 0,015 entre iterações sucessivas.

Os resultados das topologias obtidas com os parâmetros da Tabela 4.5 são apresentados na Figura 4.11, para uma restrição de tensão baseada no critério de escoamento de von Mises e no critério de escoamento de Pae (1977).

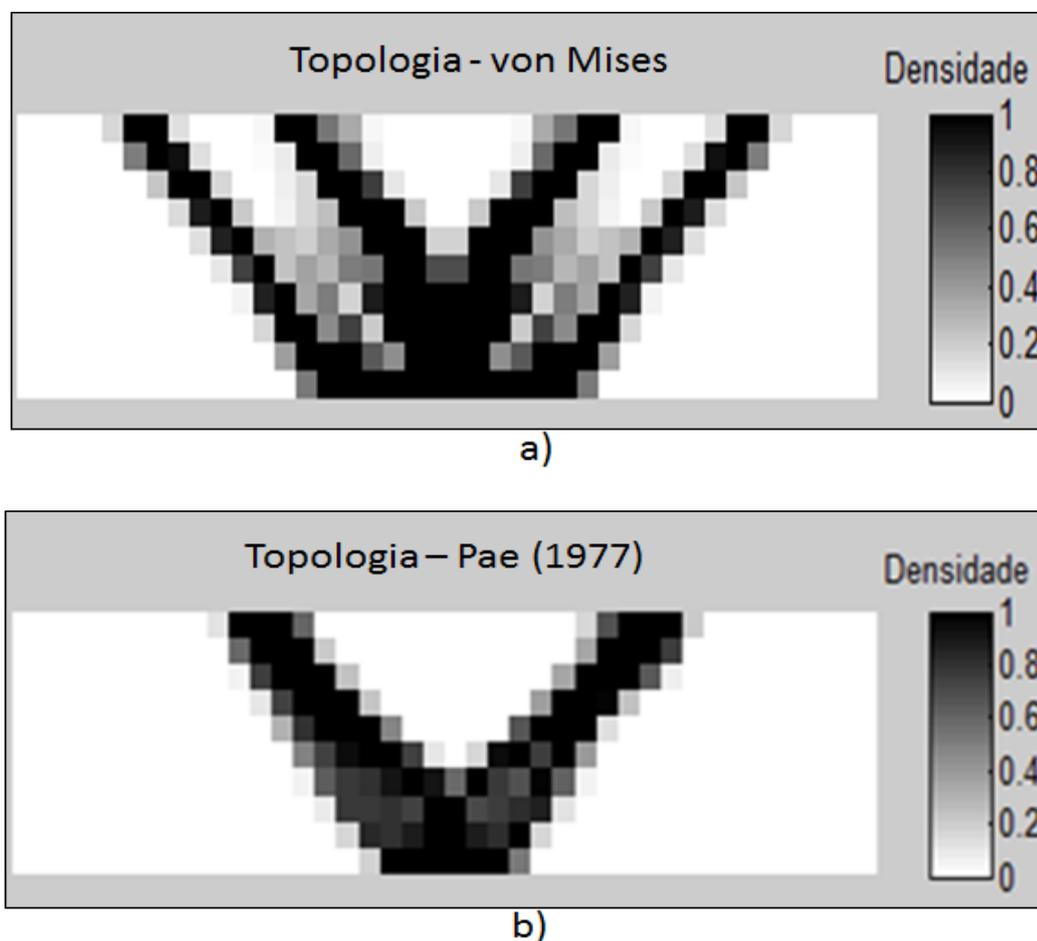


Figura 4.11 - Topologia obtida para a chapa em cisalhamento: a) critério de von Mises b) critério de Pae (1977).

As topologias mostradas na Figura 4.11 revelam que estruturas com padrões diferentes foram obtidas para o critério de von Mises e de Pae (1977). A topologia obtida para o critério de von Mises mostra uma estrutura simétrica com 4 barras. Há vários elementos com densidades intermediárias entre as barras e alguns ajustes nos parâmetros utilizados na simulação devem ser feitos para eliminá-los. A topologia obtida para o critério de Pae (1977) na Figura 4.11b representa uma estrutura clássica de duas barras. A barra da esquerda trabalha em tração e a barra da direita em compressão. A barra da direita apresenta menor quantidade de material devido à resistência à compressão do polipropileno ser maior do que a resistência à tração.

Na tabela 4.6 são resumidos os resultados obtidos das simulações para o critério de von Mises e de Pae (1977) para a chapa em cisalhamento com os parâmetros da Tabela 4.5.

Tabela 4.6 – Resultados para a chapa em cisalhamento.

Critério de escoamento	Número de iterações	Volume final - [%]	Tempo computacional - [s]	Convergiu
von Mises	145	31,37	3679	sim
Pae (1977)	95	21,24	2662	sim

A diferença no número de iterações entre os métodos pode ser explicada pela quantidade de elementos com densidade intermediária obtidos no critério de von Mises que tornam difícil a convergência do algoritmo devido ao efeito do parâmetro de relaxação- ϵ na restrição de tensão. Além disso, a aplicação do método da relaxação- ϵ leva a um aumento do tempo computacional porque são necessárias mais iterações para aplicar o método da continuação.

A topologia obtida com o critério de Pae (1977) apresentou um menor volume porque considera a resistência à compressão do polipropileno. Outra possível causa de parte desta diferença pode estar também relacionada à diferença na topologia obtida para os critérios.

A aplicação do método da relaxação- ϵ para o critério de von Mises permitiu uma diminuição do volume obtido para a estrutura em relação à simulação realizada com os parâmetros da Tabela 4.4 com o parâmetro de relaxação ϵ igual a zero. Houve uma diminuição de 4,1% do volume total da estrutura e isto pode estar relacionado à existência do problema da singularidade da restrição de tensão.

O histórico da convergência da função objetivo é mostrado na Figura 4.12 para os dois critérios:

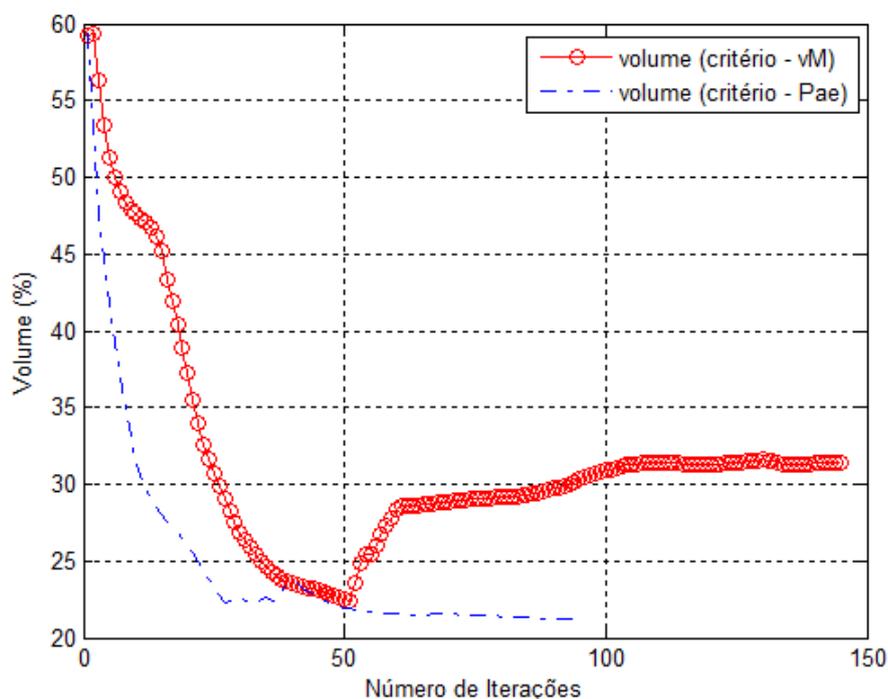


Figura 4.12 - Convergência da função objetivo para o critério de von Mises e o critério de Pae (1977) para a chapa em cisalhamento.

Nota-se um aumento progressivo do volume da estrutura para o critério de von Mises a partir da iteração 51. A partir deste ponto do gráfico, o parâmetro de relaxação ϵ foi diminuído progressivamente para eliminar sua influência nos resultados.

O mapa de distribuição de tensões von Mises para a restrição de tensão baseada no critério de von Mises é mostrado na Figura 4.13, sendo que as tensões nos elementos com densidade mínima ρ_{min} não foram representadas para melhor visualização das tensões da estrutura obtida.

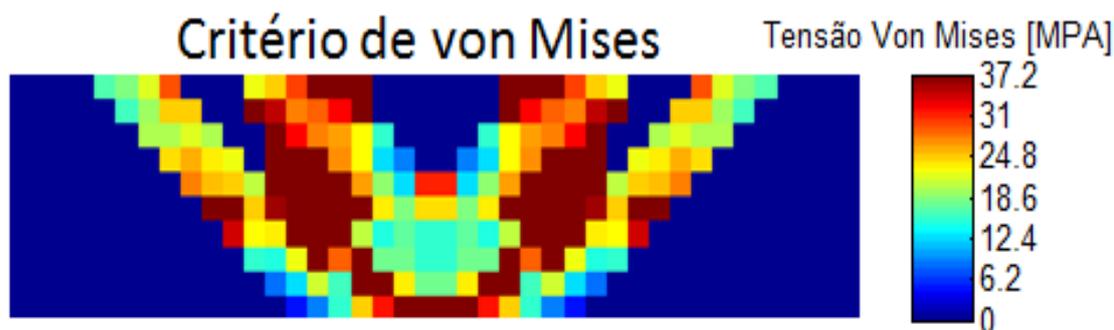


Figura 4.13 – Tensões de von Mises para a chapa em cisalhamento com o critério de von Mises utilizando os dados da Tabela 4.5.

Os resultados mostram que as tensões na estrutura estão abaixo do limite da tensão de escoamento à tração ($\sigma_{yt} = 37,2$ MPa) permitido para o critério de von Mises, indicando que nenhuma restrição de tensão está violada.

O mapa de distribuição de tensões von Mises para a restrição de tensão baseada no critério de Pae (1977) é mostrado na Figura 4.14. Os resultados são representados em termos de tensões von Mises a fim de compararmos os resultados com o critério de von Mises. As tensões nos elementos com densidade mínima ρ_{min} não foram representadas para melhor visualização das tensões da estrutura obtida.

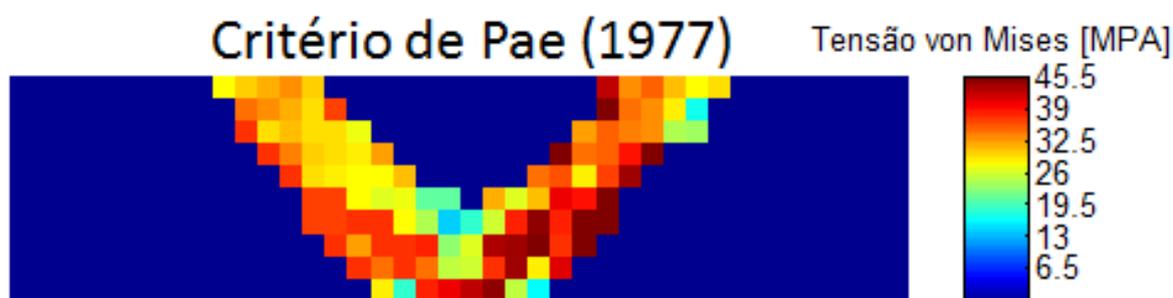


Figura 4.14 - Tensões de von Mises para a chapa em cisalhamento com o critério de Pae (1977) utilizando os dados da Tabela 4.5.

Nos resultados de tensão von Mises apresentados pela estrutura com o critério de escoamento de Pae (1977), pode-se ver que a barra da direita tem um valor de tensão em alguns elementos próximo ao limite de resistência à compressão do polipropileno ($\sigma_{ct} = 45,5$ MPa). A barra da esquerda tem uma maior quantidade de material e o valor máximo de tensão von Mises apresentado por seus elementos é igual ao limite de resistência à tração do polipropileno ($\sigma_{yt} = 37,2$ MPa).

Como forma de verificar se as restrições de tensão baseadas no critério de Pae (1977) foram violadas, a Inequação (4.1) foi reescrita da seguinte forma:

$$-\alpha_1 I_1 - \alpha_2 I_1^2 + \sqrt{J_2} \leq \alpha_0 \quad (4.3)$$

onde $\alpha_0 = 23,4$, $\alpha_1 = -0,0567$ e $\alpha_2 = -0,000119$ são os coeficientes ajustados por PAE.

Então os valores do lado esquerdo da Inequação (4.3) são mostrados na Figura 4.15 para cada elemento.

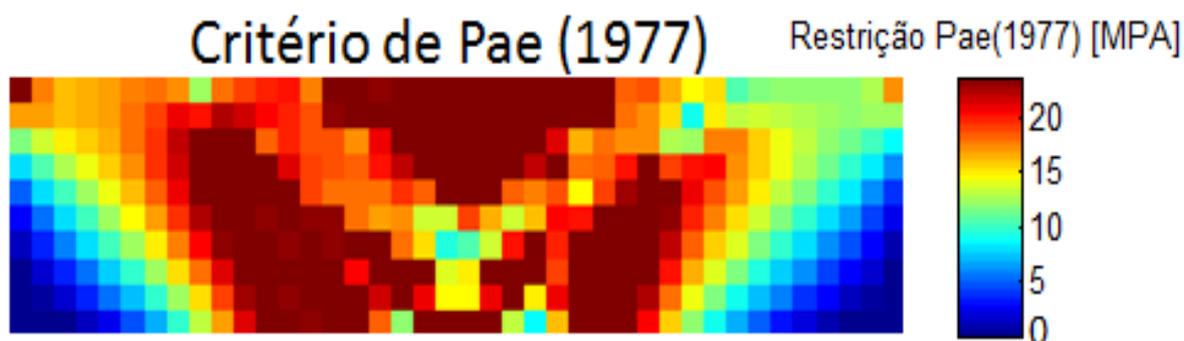


Figura 4.15 – Resultados da função de restrição com o critério de Pae (1977).

Os resultados da Figura 4.15 mostram que todas as restrições de tensão baseadas no critério de Pae (1977) estão abaixo do valor de $\alpha_0 = 23,4$ MPa.

Os resultados da simulação com a restrição global não foram apresentados porque o programa não conseguiu realizar o controle adequado das tensões e não convergiu.

4.3.3 Segundo caso – chapa quadrada

O segundo caso a ser analisado consiste em uma chapa quadrada com propriedades mecânicas de polipropileno cujas propriedades foram fornecidas na sessão 4.2, com dimensões 40 mm x 40mm x 1 mm. A estrutura é sujeita às condições de contorno e carregamento conforme é mostrado na Figura 4.16.

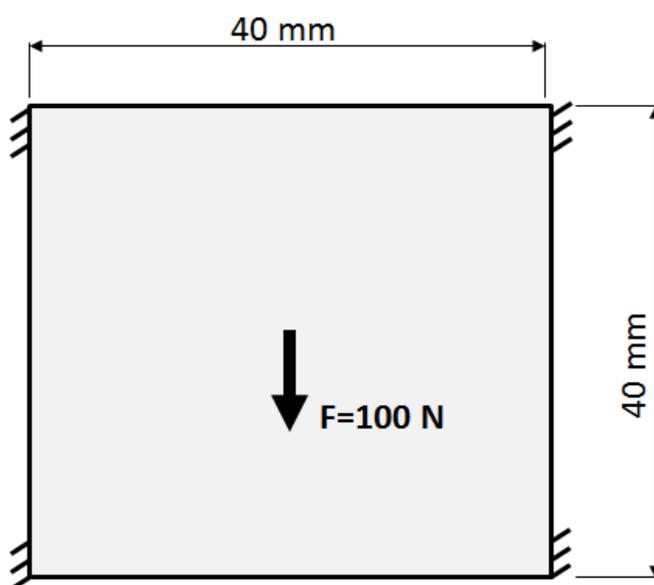


Figura 4.16 - Geometria e condições de contorno da estrutura para o segundo caso.

O domínio de projeto é discretizado utilizando uma malha com 400 elementos a qual resultou em elementos com dimensões de 2 mm x 2 mm. Na Tabela 4.7 são mostrados os parâmetros utilizados na simulação, sendo que as análises foram realizadas com restrições de tensões locais baseadas no critério de von Mises e no critério de Pae (1977).

Tabela 4.7 – Parâmetros de simulação do problema do segundo caso.

densidade Inicial	fator de penalização	raio do filtro	parâmetro de relaxação	parâmetro de agregação
$\rho = 0,5$	$\eta = 3$	$R = 1,1$	$\varepsilon = 0,1$	$p = 12$

Os resultados das topologias obtidas com os parâmetros da Tabela 4.7 são apresentados na Figura 4.17, para uma restrição de tensão baseada no critério de escoamento de von Mises e no critério de escoamento de Pae (1977).

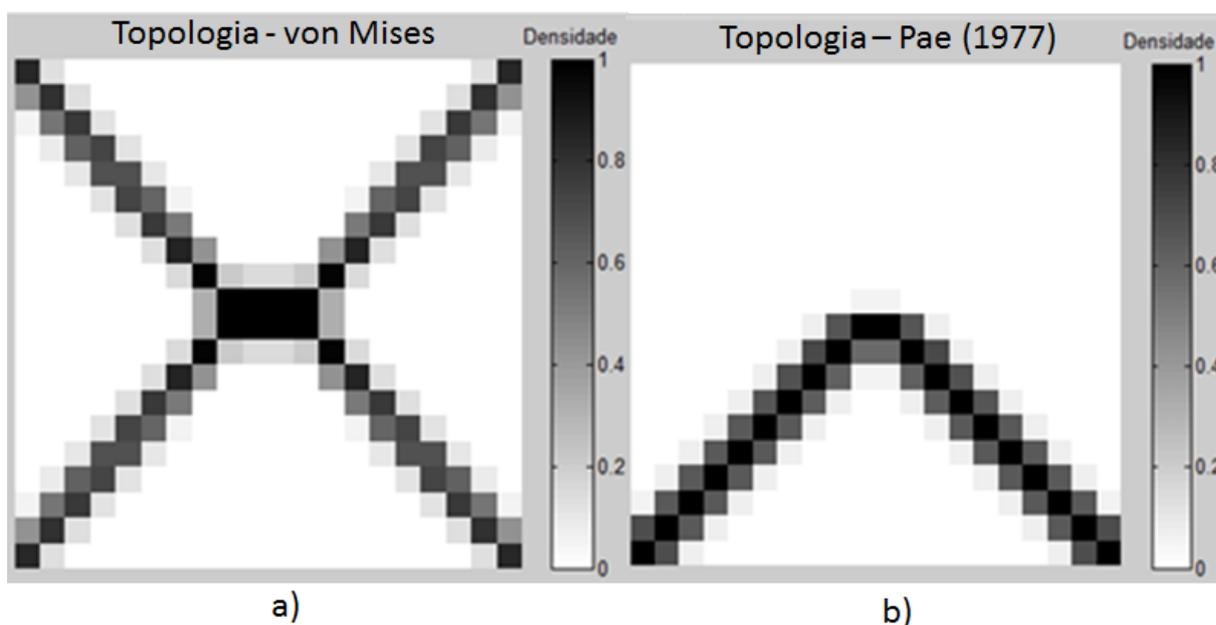


Figura 4.17 - Topologia obtida para o segundo caso: a) critério de von Mises b) critério de Pae (1977).

As topologias mostradas na Figura 4.17 revelam que estruturas com padrões diferentes foram obtidas para o critério de von Mises e de Pae (1977). A topologia obtida para o critério de von Mises mostra uma estrutura simétrica com quatro barras. A topologia obtida para o critério de Pae (1977) representa uma estrutura de duas barras com maior quantidade de material na região das barras inferiores em relação ao critério de von Mises.

Na tabela 4.8 são resumidos os resultados obtidos das simulações para o critério de von Mises e de Pae (1977) para a estrutura do segundo caso com os parâmetros da Tabela 4.7.

Tabela 4.8 – Resultados para o segundo caso.

Critério de escoamento	Número de iterações	Volume final - [%]	Tempo computacional - [s]	Convergiu
von Mises	62	15,88	1548	sim
Pae (1977)	46	12,34	1193	sim

A tabela 4.8 mostra que houve uma diminuição de **3,54%** do volume total da estrutura ao se utilizar o critério de escoamento de Pae (1977) em relação ao resultado obtido pelo critério de von Mises.

O histórico da convergência da função objetivo é mostrado na Figura 4.18 para os dois critérios:

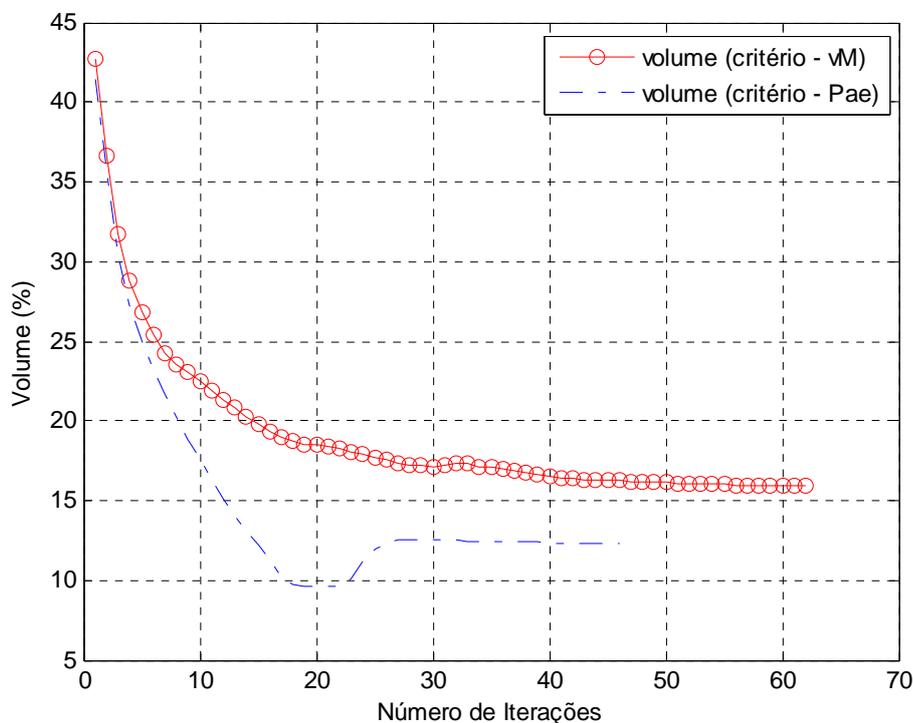


Figura 4.18 - Convergência da função objetivo para o critério de von Mises e o critério de Pae (1977) para o segundo caso.

O histórico da convergência mostra um aumento do volume relativo da estrutura para o critério de Pae (1977) a partir da iteração 20. Este aumento ocorreu devido à eliminação de todo material na parte superior da estrutura mostrada na Figura 4.17b na iteração 20 e um aumento progressivo da quantidade de material das barras inferiores.

O mapa de distribuição de tensões von Mises para a restrição de tensão baseada no critério de von Mises é mostrado na Figura 4.19, sendo que as tensões nos elementos com densidade mínima ρ_{min} não foram representadas para melhor visualização das tensões na estrutura obtida.

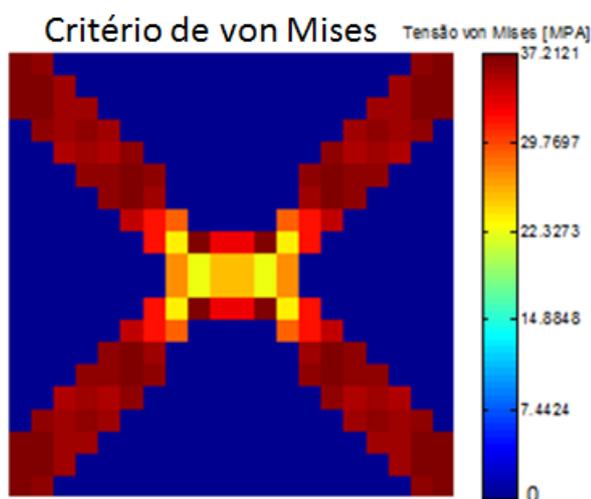


Figura 4.19 - Tensões de von Mises para o segundo caso com o critério de von Mises utilizando os parâmetros da Tabela 4.7.

Os resultados mostram que as tensões na estrutura estão próximas do limite da tensão escoamento à tração ($\sigma_{yt} = 37,2$ MPa) permitido para o critério de von Mises. As barras superiores estão em tração e as inferiores em compressão. Este tipo de projeto é chamado de *fully stressed*. Para que nenhuma restrição seja violada, é necessário usar um critério de parada do algoritmo mais rigoroso.

O mapa de distribuição de tensões von Mises para a restrição de tensão baseada no critério de Pae (1977) é mostrado na Figura 4.20. Os resultados são representados em termos de tensões von Mises a fim de compararmos os resultados com o critério de von Mises. As tensões nos elementos com densidade mínima ρ_{min} não foram representadas para melhor visualização das tensões da estrutura obtida.

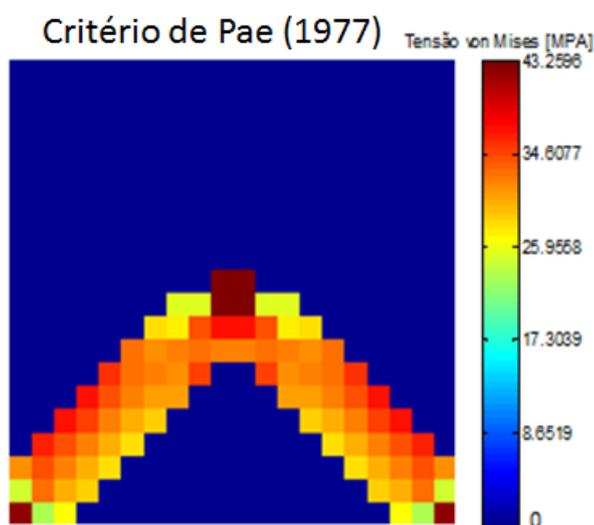


Figura 4.20 - Tensões de von Mises para o segundo caso com o critério de Pae (1977) utilizando os parâmetros da Tabela 4.7.

Nos resultados de tensão von Mises apresentados pela estrutura com o critério de escoamento de Pae (1977), pode-se ver que as barras inferiores têm um valor de tensão em alguns elementos próximo ao limite da tensão de escoamento à compressão do polipropileno ($\sigma_{ct} = 45,5$ MPa).

Como forma de verificar se as restrições de tensão baseadas no critério de Pae (1977) foram violadas, a Inequação (4.3) é representada na Figura 4.21:

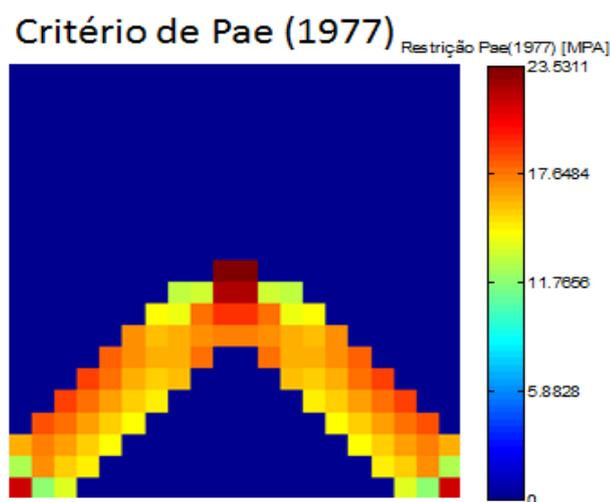


Figura 4.21 – Resultados da função de restrição para o segundo caso com o critério de Pae (1977).

Os resultados da Figura 4.21 mostram que todas as restrições de tensão baseadas no critério de Pae (1977) estão próximas do valor de $\alpha_0 = 23,4$ MPa. Para uma melhor aproximação um critério de parada mais rigoroso deve ser usado.

Estruturas similares ao segundo caso foram resolvidas por Luo e Kang (2012) e Bruggi e Duysinx (2012) para o critério de Drucker-Prager, porém não foram usadas propriedades mecânicas de materiais extraídas de ensaios físicos. Os resultados da simulação com a restrição global não foram apresentados porque o programa não conseguiu realizar o controle adequado das tensões e não convergiu.

4.3.4 Terceiro caso – chapa com carga na extremidade

O terceiro caso a ser analisado consiste em uma chapa com uma carga na extremidade com propriedades mecânicas de polipropileno cujas propriedades foram fornecidas na Seção 4.2, com dimensões 30 mm x 60 mm x 1 mm. A estrutura é sujeita às condições de contorno e carregamento conforme é mostrado na Figura 4.22.

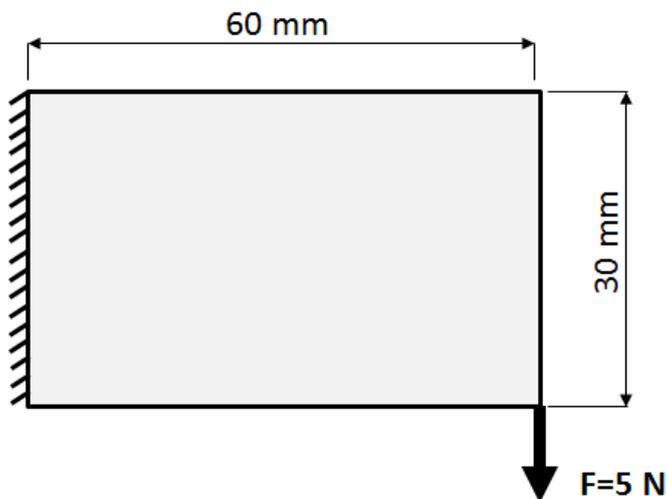


Figura 4.22 - Geometria e condições de contorno da estrutura para o terceiro caso.

O domínio de projeto é discretizado utilizando uma malha com 450 elementos a qual resultou em elementos com dimensões de 2 mm x 2 mm. Na Tabela 4.9 são mostrados os parâmetros utilizados na simulação, sendo que as análises foram realizadas com restrições de tensões locais baseadas no critério de von Mises e no critério de Pae (1977) e o filtro de

sensibilidade foi aumentado em relação ao primeiro caso para melhor convergência dos resultados.

Tabela 4.9 – Parâmetros de simulação do problema do terceiro caso.

densidade Inicial	fator de penalização	raio do filtro	parâmetro de relaxação	parâmetro de agregação
$\rho = 0,5$	$\eta = 3$	$R = 1,2$	$\varepsilon = 0,1$	-

Os resultados das topologias obtidas com os parâmetros da Tabela 4.9 são apresentados na Figura 4.23, para restrições de tensão locais baseadas no critério de escoamento de von Mises e no critério de escoamento de Pae (1977).

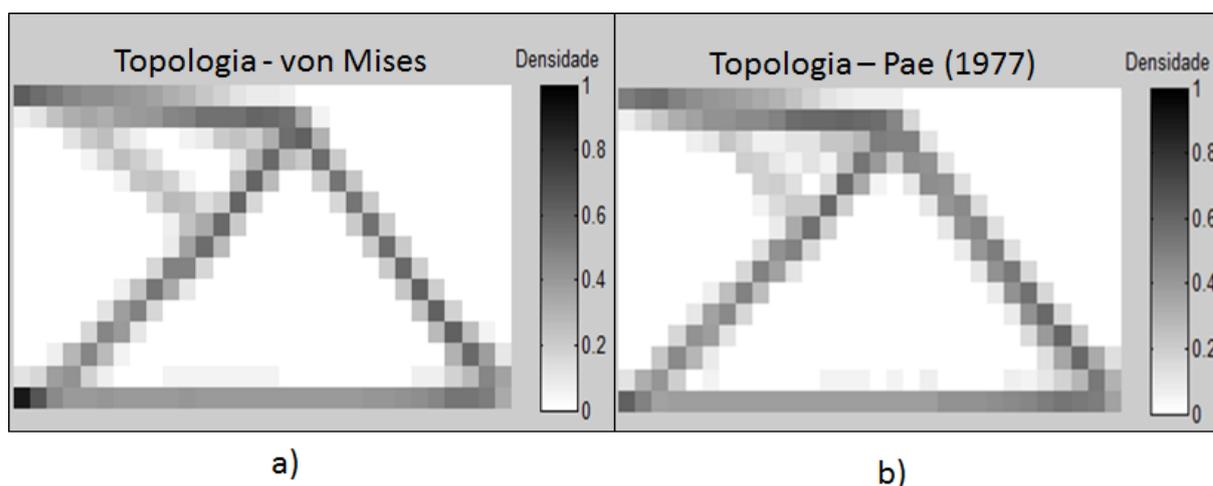


Figura 4.23 - Topologia obtida para o terceiro caso: a) critério de von Mises b) critério de Pae (1977).

As topologias mostradas na Figura 4.23 revelam que estruturas com padrões similares foram obtidas para o critério de von Mises e de Pae (1977). A estrutura obtida para o critério de von Mises apresenta uma região superior melhor definida. Para o critério de Pae (1977) houve um maior acúmulo de material na barra da direita e a região superior apresentou muitos elementos com densidade intermediária. Refinamento da malha e alteração do valor do fator de penalização podem corrigir este problema.

Na Tabela 4.10 são resumidos os resultados obtidos das simulações para o critério de von Mises e de Pae (1977) para a estrutura do terceiro caso com os parâmetros da Tabela 4.9.

Tabela 4.10 – Resultados para o terceiro caso.

Critério de escoamento	Número de iterações	Volume final - [%]	Tempo computacional - [s]	Convergiu
von Mises	102	13,68	3437	sim
Pae (1977)	117	13,41	3964	sim

A Tabela 4.10 mostra que não houve uma diminuição significativa do volume total obtido para a estrutura ao se utilizar o critério de escoamento de Pae (1977) em relação ao resultado obtido pelo critério de von Mises.

O histórico da convergência da função objetivo é mostrado na Figura 4.24 para os dois critérios:

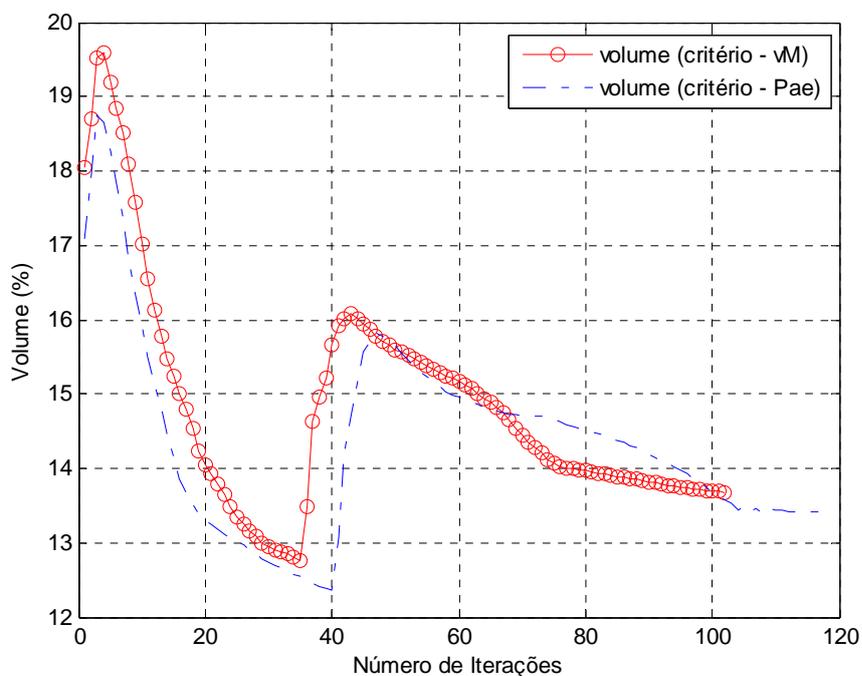


Figura 4.24 - Convergência da função objetivo para o critério de von Mises e o critério de Pae (1977) para o terceiro caso.

O histórico da convergência mostra um aumento do volume relativo da estrutura para ambos os critérios com a aplicação do método da continuação para eliminar a relaxação do problema.

O mapa de distribuição de tensões von Mises para a restrição de tensão baseada no critério de von Mises é mostrado na Figura 4.25, sendo que as tensões nos elementos com

densidade mínima ρ_{min} não foram representadas para melhor visualização das tensões na estrutura obtida.

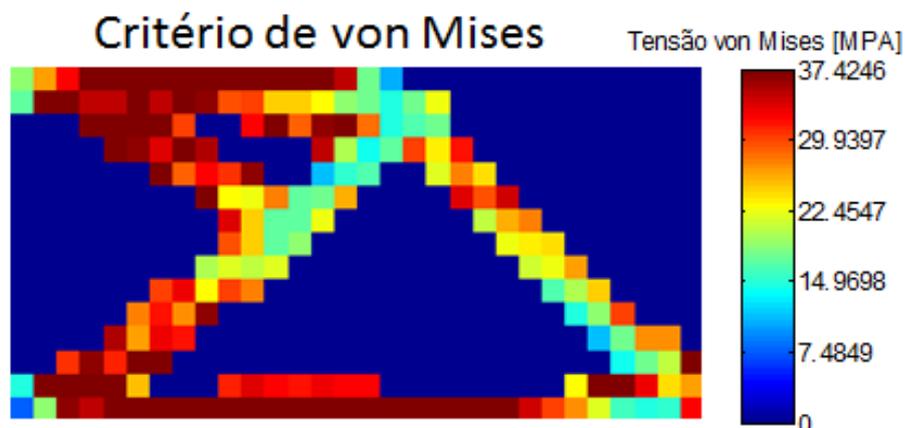


Figura 4.25 – Tensões de von Mises para o terceiro caso com o critério de von Mises utilizando os dados da Tabela 4.9.

Os resultados mostram que as tensões na estrutura estão próximas do limite da tensão escoamento à tração ($\sigma_{yt} = 37,2$ MPa) permitido para o critério de von Mises. Para que nenhuma restrição seja violada, é necessário usar um critério de parada mais rigoroso.

O mapa de distribuição de tensões von Mises para a restrição de tensão baseada no critério de Pae (1977) é mostrado na Figura 4.26. Os resultados são representados em termos de tensões von Mises a fim de compararmos os resultados com o critério de von Mises. As tensões nos elementos com densidade mínima ρ_{min} não foram representadas para melhor visualização das tensões da estrutura obtida.



Figura 4.26 - Tensões de von Mises para o terceiro caso com o critério de Pae (1977) utilizando os parâmetros da Tabela 4.5.

Nos resultados de tensão von Mises apresentados pela estrutura com o critério de escoamento de Pae (1977) pode-se ver que a barra inferior tem um valor de tensão em alguns elementos próximo da tensão limite de escoamento à compressão do polipropileno ($\sigma_{ct} = 45,5$ MPa).

Como forma de comprovar que nenhuma restrição de tensão do critério de Pae (1977) foi violada, a Inequação (4.3) é representada na Figura 4.27:



Figura 4.27 – Resultados da função de restrição com o critério de Pae (1977) para o terceiro caso.

Os resultados da Figura 4.27 mostram que todas as restrições de tensão baseadas no critério de Pae (1977) estão próximas do valor de $\alpha_0 = 23,4$ MPa. Para uma melhor aproximação um critério de parada mais rigoroso deve ser usado.

Os resultados da simulação com a restrição global não foram apresentados porque o programa não conseguiu realizar o controle adequado das tensões e não convergiu.

5 CONCLUSÕES

O objetivo principal deste trabalho foi implementar e estudar um método de otimização topológica para estruturas contínuas em estado plano de tensões com propriedades mecânicas de polipropileno, para minimização da quantidade de material com restrições de tensão baseadas no critério de escoamento proposto por Pae (1977). Para alcançar este objetivo, foram testados alguns casos de estruturas cujos resultados obtidos comprovaram a validade do método de otimização topológica empregado.

O software Octave foi utilizado para implementar o algoritmo de programação matemática desenvolvido apresentando como único problema o alto tempo computacional nas simulações.

O método das assíntotas móveis (MMA) foi aplicado como aproximação convexa para as funções objetivo e de restrição dos problemas resolvidos, sendo que o controle da convergência do algoritmo pode ser alterado quando necessário para acelerar ou desacelerar a convergência para o resultado ótimo local.

O problema de otimização topológica foi desenvolvido para o critério de escoamento de von Mises e para o critério de escoamento de Pae (1977). Para o critério de Pae (1977), foi desenvolvida a formulação adequada para aplicação em um problema de otimização topológica e realizado o cálculo das derivadas para aplicação no MMA. Os resultados de tensão para ambos os critérios ficaram próximos dos limites de tensão permitidos após a convergência do algoritmo, ou seja, as soluções obtidas mostram a validade da aproximação proposta para satisfazer o critério de escoamento de Pae (1977).

Os parâmetros utilizados na simulação foram efetivos em controlar os problemas numéricos que podem surgir no problema de otimização topológica com restrições de tensão. O método SIMP permitiu a penalização das densidades intermediárias e os leiautes obtidos foram constituídos em sua maior parte de elementos “cheios” e “vazios”. O filtro de densidades eliminou resultados com instabilidade de tabuleiro, porém houve casos onde foi necessário variar seu raio de atuação. O método da relaxação- ϵ foi aplicado nas restrições de tensão e permitiu resultados com valores para a função objetivo menores, mas com o preço do aumento do número de iterações para convergência do algoritmo. A restrição de tensão global não permitiu o controle adequado das tensões locais e a convergência do algoritmo.

Para a otimização topológica de estruturas com propriedades mecânicas de polipropileno com restrição de tensão, a aplicação do critério de escoamento de Pae (1977) que leva em consideração a resistência ao escoamento do polipropileno na compressão, levou ao aparecimento de estruturas com configurações diferentes e não-simétricas e uma menor quantidade de material em relação ao critério de escoamento de von Mises. Esta diferença de quantidade de material pode implicar em um menor custo de projeto sem aumento da complexidade da forma da estrutura. Ao se utilizar um critério de escoamento diferente, os limites estabelecidos para as restrições do problema de otimização topológica são alterados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRATE, S. Criteria for yielding or failure of cellular Materials. **Journal of Sandwich Structures and Materials**, 10, 2008. 15-51.

AHMED, S. **Topology Optimization of load-carrying structures using three different types of finite elements**. Dissertação (Mestrado) - Royal Institute of Technology. Stockholm, p. 84. 2013.

ANDREASSEN, E. et al. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 43, 2010. 1-16.

ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design**. 3^a. ed. Waltham: Elsevier, 2004. 919 p. ISBN 978-0-12-381375-6.

AVELINO, A. F. **Elementos finitos - A base da tecnologia CAE**. 3^a. ed. São Paulo: Érica, 2002. 292 p. ISBN 85-7194-7414.

BATHE, K. **Finite Element Procedures**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1996. 1050 p. ISBN 0-13-301458-4.

BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural optimization**, 1, 1989. 193-202.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 71(2), 1988. 197-224.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics**, 69(9-10), 1999. 635-654.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization: theory, methods, and applications**. Berlin: Springer-Verlag, 2003. 393 p. ISBN 3-540-42992-i.

BORESI, A. P.; CHONG, K. P.; LEE, J. D. **Elasticity in Engineering Mechanics**. 3^a. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2011. 638 p. ISBN 978-0-470-40255-9.

BRUGGI, M. On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization. **Struct Multidisc Optm**, 36(2), 2008. 125-141.

BRUGGI, M.; DUYSINX, P. Topology optimization for minimum weight with compliance and stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 46(3), 2012. 369-384.

BRUGGI, M.; TALIERCIO, A. Topology optimization of the fiber-reinforcement retrofitting existing structures. **International Journal of Solids and Structures**, 50(1), 2013. 121-136.

BRUGGI, M.; VENINI, P. A mixed FEM approach to stress-constrained topology optimization. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, 73(12), 2008. 1693-1714.

BRUNS, E. T.; TORTORELLI, D. A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 190(26-27), 2001. 3443–3459.

CARDOSO, E. L.; FONSECA, J. S. O. Complexity control in the topology optimization of continuum structures. **J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.**, 25(3), 2003. 293-301.

CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1988. 506 p. ISBN 0-387-96711-7.

CHENG, G. Some Aspects of truss topology optimization. **Structural Optimization**, 10(3-4), Dezembro 1995. 173-179.

CHENG, G. D.; GUO, X. Epsilon-relaxed approach in structural topology optimization. **Structural Optimization**, 13(4), Junho 1997. 285-266.

CHENG, G.; GUO, X. A note on a jellyfish-like feasible domain in structural topology optimization. **Engineering Optimization**, 31(1), 1998. 1-24.

CHENG, G.; JIANG, Z. Study on topology optimization with stress constraints. **Engineering Optimization**, 20(2), 1992. 129-148.

CHENG, K. T.; OLHOFF, N. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. **Int. J. of Solids Structures**, 17(3), 1980. 305-323.

CHOI, K. K.; KIM, N. H. **Structural Sensitivity Analysis and Optimization 1 - Linear Systems**. New York: Springer, 2005. 446 p. ISBN 0-387-23232-X.

CHRISTENSEN, M. R. **The theory of materials failure**. [S.l.]: Oxford University Press, 2013. 277 p. ISBN 978-0-19-966211-1.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An Introduction to Structural Optimization**. [S.l.]: Springer, 2009. 211 p. ISBN 978-1-4020-8666-6.

DÍAZ, A.; SIGMUND, O. Checkerboard patterns in layout optimization, 10, 1995. 40-45.

DRUCKER, D. C.; PRAGER, W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. **Quart Appl Math**, 10(2), 1952. 157-165.

DUYSINX, P. Topology optimization with different stress limits in tension and compression. **WCSMO-3-Proc 3d World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization**, Buffalo NY, 1999.

DUYSINX, P.; BENDSØE, M. P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 43(8), Dezembro 1998. 1453-1478.

DUYSINX, P.; SIGMUND, O. New developments in handling stress constraints in optimal material distribution. **Proc of the 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symp on Multidisciplinary Analysis and Optimization**, 1, 1998. 1501-1509.

ESCHENAUER, A. H.; OLHOFF, N. Topology optimization of continuum structures: A review. **Appl Mech Rev**, 54, n. 4, Julho 2001. 331-390.

FLEURY, C.; BRAIBANT, V. Structural optimization: A new dual method using mixed variables. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 23, 1986. 409-428.

GNU Octave, 2014. Disponível em: <<http://www.gnu.org/software/octave/>>. Acesso em: julho 2014.

GORDON, J. E. **Structures or why things don't fall down**. [S.l.]: Penguin Books, 1978. 395 p. ISBN 978-1-4615-9076-7.

GOURNAY, F.; ALLAIRE, G.; JOUVE, F. Shape and topology optimization of the robust compliance via the level set method. **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, 14(1), 2008. 43-70.

GUILHERME, C. E. M.; FONSECA, J. S. O. Topology optimization of continuum structures with ϵ -relaxed stress constraints. **Mechanics of Solids in Brazil**, 2007.

HAFTKA, R.; GÜRDAL, Z. **Elements of structural optimization**. 3ª. ed. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1992. 481 p. ISBN 0-7923-1504-9(HB).

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 5ª. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004. 670 p. ISBN 85-87918-67-2.

HOBACK, A. S. Optimization of singular problems. **Structural Optimization**, 12(2-3), Outubro 1996. 93-97.

HOLMBERG, E.; TORSTENFELT, B.; KLARBRING, A. Stress constrained topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 48, 2013. 33-47.

HOSFORD, W. F. **Mechanical behavior of materials**. New York: Cambridge University Press, 2005. 425 p. ISBN 978-0-511-11575-2.

JEONG, S. H. et al. Topology optimization considering static failure theories for ductile and brittle materials. **Computers and Structures**, 110-11, 2012. 116-132.

KIM, H.; QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P. On the development of structural optimisation and its relevance in engineering design. **Design Studies**, 23(1), 2002. 85-102.

KIRSCH, U. On singular topologies in optimum structural desing. **Structural Optimization**, 2(3), 1990. 133-142.

LE, C. et al. Stress-based topology optimization for continua. **Structural and Multidisciplinary Optimization** , 41(4), 2010. 605-620.

LOGAN, D. L. **A first course in the finite element method**. 4^a. ed. [S.l.]: Thomson, 2007. 808 p. ISBN 0-534-55298-6.

LONG, P. J. G. Introduction to Octave, 2005. Disponivel em: <<http://www-mdp.eng.cam.ac.uk/web/CD/engapps/octave/octavetut.pdf>>. Acesso em: Novembro 2014.

LUO, Y. J.; KANG, Z. Topology optimization of continuum structures with Drucker–Prager yield stress constraints. **Computers & Structures**, 90-91, 2012. 65-75.

MAIER, C.; CALAFUT, T. **Polypropylene - The definitive user's guide and databook**. New York: Plastics Design Library, 1998. 432 p. ISBN 1-884207-58-8.

MALVERN, L. E. **Introduction to the mechanics of a continuous medium**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1969. 713 p. ISBN 13-487603-2.

MASE, G. T.; MASE, G. E. **Continuum Mechanics for Engineers**. 2^a. ed. [S.l.]: CRC PRESS, 1999. 380 p. ISBN 0-8493-1855-6.

MELOSH, R. J. Basis for the derivation of matrices for the direct stiffness method. **AIAA Journal**, 1, n. 7, Julho 1963. 1631-1637.

PAE, K. D. The Macroscopic yielding behaviour of polymers in multiaxial stress fields. **Journal of Materials Science**, 12(6), 1977. 1209-1214.

PEDERSEN, C. G. et al. Topology optimization - Improved checker-board filtering with sharp contours. **Proceedings of the 19th Nordic Seminar on Computational Mechanics**, 2006. 182-185.

PEREIRA, J. T.; FANCELLO, E. A.; BARCELLOS, C. S. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 26(1-2), 2004. 50-56.

QIU, G. Y.; LI, X. S. A note on the derivation of global stress constraints. **Struct Multidisc Optim**, 40, 2010. 625-628.

ROZVANY, G. I. N. Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system stability constraints. **Structural Optimization**, 11(3-4), 1996. 213-217.

ROZVANY, G. I. N. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 21(2), 2001. 90-108.

ROZVANY, G. I. N.; BIRKER, T. On singular topologies in exact layout optimization. **Structural Optimization**, 8(4), 1994. 228-235.

ROZVANY, G. I. N.; ZHOU, M.; BIRKER, T. Generalized shape optimization without homogenization. **Structural Optimization**, 4(3-4), 1992. 250-254.

ROZVANY, G.; BENDSØE, M. P.; KIRSCH, U. Layout Optimization of Structures. **Applied Mechanical Review**, 48, 1995. 41-119.

SADD, M. H. **Elasticity: theory, applications, and numeric**. Kingston: Elsevier, 2005. 461 p. ISBN 0-12-605811-3.

SANT'ANA, H. M. **Otimização Topológica de estruturas de estruturas bidimensionais contínuas submetidas a restrições de flexibilidade e tensão**. Dissertação (Mestrado) - UFRGS. Porto Alegre, p. 161. 2002.

SANT'ANA, H. M.; FONSECA, J. S. O. Topology optimization of continuum two-dimensional structures unde compliance and stress constraints. **Mecânica Computacional**, Santa Fé, 21, 2002. 2732-2751.

SCHIMIT, L. A. Structural design by systematic synthesis. **Proceedings 2nd ASCE Conference on Electronic Computation**, 1960. 105-132.

SHIGLEY, J. E.; MISCHKE, C. R.; BUDYNAS, R. G. **Projeto de engenharia mecânica**. 7^a. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. 960 p. ISBN 85-363-0562-2.

SIGMUND, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. **Mechanics of Structures and Machines**, 25(4), 1997. 493-524.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Struct Multidisc Optim**, Structural and Multidisciplinary Optimization, 21(2), 2001. 120-127.

SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters. **Structural Multidisciplinary Optimization**, 33, 2007. 401-424.

SIGMUND, O.; MAUTE, K. Topology optimization approaches - a comparative review. **Structural Multidisciplinary Optimization**, 48, 2013. 1031-1055.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural optimization**, 16, 1998. 68-75.

SILVA, E. **Uma formulação de otimização topológica com restrição de tensão suavizada**. Dissertação (Mestrado) - UFRGS. Porto Alegre, p. 85. 2012.

SILVA, E. C. N. Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos, 2003a. Disponível em: <<http://sites.poli.usp.br/d/pmr5215/otimizacao.pdf>>. Acesso em: Outubro 2013.

SILVA, E. C. N. Técnicas de otimização aplicadas no projeto de peças mecânicas, 2003b. Disponível em: <<http://sites.poli.usp.br/d/pmr5215/otimizacao.pdf>>. Acesso em: julho 2013.

SVANBERG, K. The method of moving asymptotes – a new method for structural. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 24(2), 1987. 359–373.

SVED, G.; GINOS, Z. Structural optimization under multiple loading. **International Journal of Mechanical Sciences**, 10, 1968. 803-805.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. **Theory of elasticity**. 2ª. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1951.

VOTH, B. Using automatically generated shape variables to optimize stamped plates. **Altair Internal Report**, Troy, MI, 1999.

WEAVER, W.; JOHNSTON, P. R. **Finite elements for structural analysis**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1984. 403 p. ISBN 0-13-317099-3.

WILDE, D. J. **Globally optimal design**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1978. 302 p. ISBN 0471038989.

YANG, R. J.; CHEN, C. J. Stress-based topology optimization. **Structural Optimization**, 12(2-3), 1996. 98-105.

ZHOU, M. et al. An integrated approach to topology, sizing, and shape optimization. **Structural Multidisciplinary Optimization**, 26, 2004. 308-317.

ZHOU, M.; SHYY, Y. K.; THOMAS, H. L. Checkerboard and minimum member size control in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2001. 152-158.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**. 5ª. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, v. 1, 2000. ISBN 0 7506 5049 4.

APÊNDICE A – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO

Para a derivação da matriz de rigidez do elemento de estado plano de tensões retangular linear ou elemento retangular bilinear, de 4 nós, será mostrada a formulação utilizada para aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Com a matriz de rigidez de cada elemento e as condições de contorno e carregamentos pode-se determinar os deslocamentos nos nós da malha da estrutura. Com o valor dos deslocamentos é possível calcular o valor da tensão e da deformação no elemento.

A representação do elemento retangular bilinear é mostrada na Figura A.1. São mostrados os 8 graus de liberdade, forças e numeração dos 4 nós do elemento. Os parâmetros a , b e t são as dimensões geométricas do elemento. Este elemento é utilizado para representar chapas em estado plano de tensões.

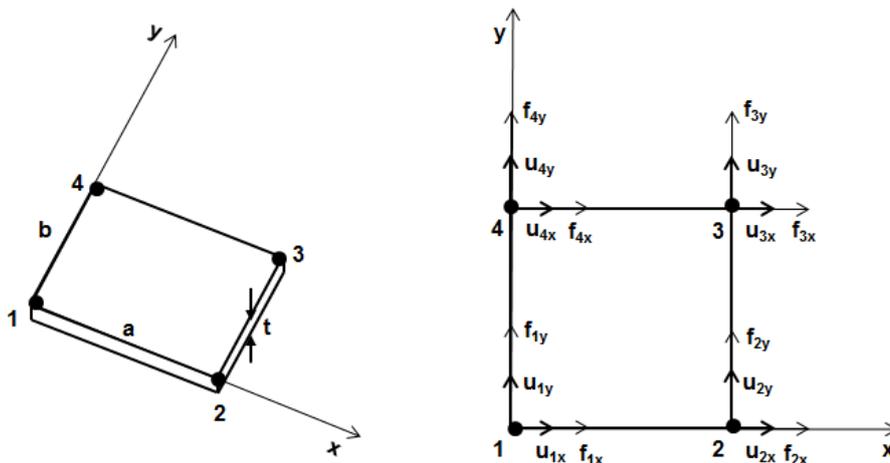


Figura A.1 – Representação do elemento retangular bilinear mostrando graus de liberdade, forças e numeração dos nós.

A primeira etapa consiste em se definir as funções de interpolação dos deslocamentos dentro do elemento a partir dos deslocamentos nos nós. A Equação A.1 mostra esta relação como

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{N}(x, y)\mathbf{u} \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathbf{N}(x, y)$ é o vetor das **funções de forma** que representa o comportamento físico do elemento a qual permite achar os deslocamentos dentro do elemento a partir dos deslocamentos nos nós e \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos nos nós do elemento.

A partir dos deslocamentos nos nós \mathbf{u} e da derivada das funções de forma $N(x, y)$, pode-se calcular a deformação em qualquer ponto do elemento como foi mostrado na Equação (2.32). A matriz deslocamento-deformação \mathbf{B} do elemento retangular bilinear é mostrada na Equação (A.2)

$$\mathbf{B} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} -b + y & 0 & b - y & 0 & 0 & y & -y & 0 \\ 0 & -a + x & 0 & -x & -x & 0 & 0 & a - x \\ -a + x & -b + y & -x & b - y & b - y & x & a - x & -y \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

A tensão é calculada pela substituição da matriz constitutiva do material \mathbf{D} para o estado plano de tensões mostrada na Equação (2.12), da matriz \mathbf{B} mostrada na Equação (A.2) e dos deslocamentos dos nós \mathbf{u} na Equação (2.34).

A partir do Princípio dos Trabalho Virtuais, a contabilização da energia na condição deformada do elemento e a igualdade com o trabalho externo realizado pelas forças nos nós permite obter-se a matriz de rigidez do elemento. A equação geral para o cálculo da matriz de rigidez de um elemento qualquer é dada pela Equação (A.3a) e para o elemento retangular bilinear pela Equação (A.3b).

$$\mathbf{k}_e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (\text{A.3a})$$

$$\mathbf{k}_e = t \int_0^b \int_0^a \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \quad (\text{A.3b})$$

onde V é o volume do elemento finito. Na Equação (A.4a) é mostrada a matriz de rigidez para o elemento retangular bilinear representada como a soma de dois componentes que correspondem ao termo de rigidez correspondente à deformação normal ε e à deformação por cisalhamento γ . Nas Equações (A.4b e A.4c) são mostrados os componentes destas matrizes.

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{k}_e^\varepsilon + \mathbf{k}_e^\gamma \quad (\text{A.4a})$$

$$k_e^{\varepsilon} = \frac{Et}{12(1-\nu)} \begin{bmatrix} \frac{4}{\alpha} & 3\nu & -\frac{4}{\alpha} & 3\nu & -\frac{2}{\alpha} & -3\nu & \frac{2}{\alpha} & -3\nu \\ & 4\alpha & -3\nu & 2\alpha & -3\nu & -2\alpha & 3\nu & -4\alpha \\ & & \frac{4}{\alpha} & -3\nu & \frac{2}{\alpha} & 3\nu & -\frac{2}{\alpha} & 3\nu \\ & & & 4\alpha & -3\nu & -4\alpha & 3\nu & -2\alpha \\ & & & & \frac{4}{\alpha} & 3\nu & -4\alpha & 3\nu \\ & & & & & \frac{4}{\alpha} & -3\nu & 2\alpha \\ & & & & & & \frac{4}{\alpha} & -3\nu \\ & & & & & & & 4\alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A.4b})$$

$$k_e^{\gamma} = \frac{Et}{24(1+\nu)} \begin{bmatrix} 4\alpha & 3 & 2\alpha & -3 & -2\alpha & -3 & -4\alpha & 3 \\ & \frac{4}{\alpha} & 3 & -\frac{4}{\alpha} & -3 & -\frac{2}{\alpha} & -3 & \frac{2}{\alpha} \\ & & 4\alpha & -3 & -4\alpha & -3 & -2\alpha & 3 \\ & & & \frac{4}{\alpha} & 3 & \frac{2}{\alpha} & 3 & -\frac{2}{\alpha} \\ & & & & 4\alpha & 3 & 2\alpha & -3 \\ & & & & & \frac{4}{\alpha} & 3 & -\frac{4}{\alpha} \\ & & & & & & 4\alpha & -3 \\ & & & & & & & \frac{4}{\alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4c})$$

onde $\alpha = a/b$, a e b são as dimensões do elemento, E corresponde ao módulo de elasticidade ou módulo de Young do material, t é a espessura e ν é o coeficiente de Poisson.