

Estevão Modolo de Souza

**Controle Preditivo Robusto Baseado em  
Modelo Aplicado a Sistemas Não-Lineares  
Incertos Linearizados por Realimentação de  
Estados**

Belo Horizonte - Brasil

2015



Estevão Modolo de Souza

**Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo  
Aplicado a Sistemas Não-Lineares Incertos Linearizados  
por Realimentação de Estados**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares

Coorientador: Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Torres

Belo Horizonte - Brasil

2015

*Este trabalho é dedicado à minha Tia Iracema,  
que desde pequeno, me incentivou à vida acadêmica.*

# Agradecimentos

Agradeço,

- a minha Família, por toda ajuda, carinho e amor.
- aos orientadores, Professor Reinaldo Martinez Palhares e Professor Leonardo A. B. Torres, pelo: apoio, competência, paciência, excepcional orientação e amizade.
- a Professora Adriana Pin pela revisão ortográfica e gramatical do texto e pela amizade.
- ao corpo docente e funcionários do PPGEE, pela colaboração e atenção.
- aos colegas do mestrado, pelo suporte e por propiciarem ótimos momentos juntos.
- ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo fomento.



# Resumo

Neste trabalho, o problema de controle de uma classe de sistemas não-lineares com presença de incertezas paramétricas e com restrição na entrada de controle é revistado sob a perspectiva do controle preditivo. A metodologia proposta consiste em inicialmente obter um modelo linear incerto, fruto da linearização por realimentação de estados de um sistema não-linear incerto, com restrição na entrada de controle. As incertezas são descritas na forma politópica e incluem as incertezas paramétricas do sistema original e erros de linearização. Por fim, o projeto do controle robusto preditivo para o sistema linear incerto obtido é desenvolvido utilizando condições relaxadas usuais baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs), mostrando ter desempenho superior quando comparado a formulações padrões.

**Palavras-chaves:** Linearização por Realimentação de Estados, Controle Preditivo Robusto, Sistemas Incertos, LMIs.



# Abstract

In this work the problem of controlling a class of nonlinear uncertain dynamical systems is revisited based on a Model Predictive Control (MPC) approach. The fundamental ideal in the proposed methodology is to consider an uncertain linear model associated with the attempt of feedback linearizing the nonlinear uncertain system, while taking into account the original nonlinear system's input constraints. Polytopic uncertainties are employed to encompass both parametric uncertainties in the nonlinear system model and remaining mismatches related to the non-exact feedback linearization. Finally, a Robust MPC (RMPC) controller synthesis procedure is outlined relying on usual relaxed Linear Matrix Inequalities (LMI) conditions that shows superior performance when compared to standard LMIs.

**Key-words:** Feedback Linearization, Robust Model Predictive Control (RMPC), Uncertain Systems, LMIs.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquemático do Controlador com o Sistema Linearizado por Realimentação de Estados . . . . .	18
Figura 2 – Fluxograma Esquemático do Controlador . . . . .	19
Figura 3 – Possíveis representações de Incertezas . . . . .	25
Figura 4 – Elipsoide limitando os estados do sistema. . . . .	43
Figura 5 – Estados do sistema incerto limitados por um elipsoide. Em verde um elipsoide de raio menor limitando os estados em um instante de tempo futuro. . . . .	46
Figura 6 – Trajetória do sistema inscrita em um conjunto de elipsoides. A cor azul para o controlador original e vermelha para o relaxado. . . . .	49
Figura 7 – Plano de fase do Oscilador de Van der Pol . . . . .	56
Figura 8 – Resposta no tempo para condição inicial fora ciclo limite para o oscilador de Van der Pol. . . . .	56
Figura 9 – Resposta no tempo para condição inicial interna ao ciclo limite no oscilador de Van der Pol. . . . .	57
Figura 10 – Oscilador linear fruto de uma particularidade do Oscilador de Van der Pol ( $\mu = 0$ ). . . . .	57
Figura 11 – Resposta no tempo e ação de controle para o oscilador de Van der Pol . . . . .	61
Figura 12 – Trajetória dos estados do sistema confinados em elipsoides . . . . .	61
Figura 13 – Resposta no tempo e ação de controle para o Oscilador de Van der Pol controlado pela versão relaxada do RMPC. . . . .	62
Figura 14 – Trajetória do sistema controlado pela versão relaxada do RMPC. . . . .	62
Figura 15 – Resposta no tempo e ação de controle para o Oscilador de Van der Pol controlado pela versão regular do RMPC sem restrições na entrada de controle. . . . .	63
Figura 16 – Resposta no tempo e ação de controle para o Oscilador de Van der Pol controlado pela versão relaxada do RMPC sem restrições na entrada de controle. . . . .	64
Figura 17 – Resultados para tempo de amostragem $T_s = 0,2s$ . . . . .	65
Figura 18 – Resultados para tempo de amostragem $T_s = 0,1s$ . . . . .	65
Figura 19 – Resultados para tempo de amostragem $T_s = 0,01s$ . . . . .	66
Figura 20 – Resposta no tempo para condição inicial $z_1 = 2$ e $z_2 = 0$ . . . . .	69
Figura 21 – Esforço do controlador para condição inicial $z_1 = 2$ e $z_2 = 0$ . . . . .	69
Figura 22 – Resposta no tempo para condição inicial $z_1 = 4$ e $z_2 = 0$ . . . . .	70
Figura 23 – Esforço do controlador para condição inicial $z_1 = 4$ e $z_2 = 0$ . . . . .	70

Figura 24 – Resposta no tempo para o controlador com restrições e condição inicial $z_1 = 2$ e $z_2 = 0$ . . . . .	71
Figura 25 – Esforço do controlador com restrição em norma e condição inicial $z_1 = 2$ e $z_2 = 0$ . . . . .	72
Figura 26 – Resposta no tempo para o controlador com restrições e condição inicial $z_1 = 4$ e $z_2 = 0$ . . . . .	72
Figura 27 – Esforço do controlador com restrição em norma e condição inicial $z_1 = 4$ e $z_2 = 0$ . . . . .	72
Figura 28 – Resposta no tempo e controle para o controlador com restrições ajustadas e condição inicial $z_1 = 2$ e $z_2 = 0$ . . . . .	73
Figura 29 – Resposta no tempo para o controlador com parâmetros diferentes do modelo e condição inicial $z_1 = 2$ e $z_2 = 0$ . . . . .	74
Figura 30 – Esforço do controlador utilizando parâmetros diferentes do modelo e condição inicial $z_1 = 2$ e $z_2 = 0$ . . . . .	74
Figura 31 – Resposta no tempo para o controlador com parâmetros diferentes do modelo e condição inicial $z_1 = 4$ e $z_2 = 0$ . . . . .	74
Figura 32 – Esforço do controlador, utilizando parâmetros diferentes do modelo e condição inicial $z_1 = 4$ e $z_2 = 0$ . . . . .	75

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Custos do esforço do controlador e dos estados para as respostas no tempo para o Oscilador de Van der Pol . . . . .	63
Tabela 2 – Valores de $\gamma$ para o Oscilador de Van der Pol. . . . .	63
Tabela 3 – Custos do esforço do controlador e dos estados para as respostas no tempo para o Oscilador de Van der Pol sem restrição no sinal de controle	64
Tabela 4 – Valores de $\gamma$ para o Oscilador de Van der Pol sem restrições no sinal de controle. . . . .	64
Tabela 5 – Custos do esforço do controlador e dos estados para as respostas no tempo para o Oscilador de Van der Pol para diferentes tempos de amostragem . . . . .	66
Tabela 6 – Valores de $\gamma$ para o Oscilador de Van der Pol para diferentes tempos de amostragem. . . . .	66
Tabela 7 – Custos do esforço do controlador regular e dos estados para as respostas no tempo para o sistema do exemplo genérico. . . . .	75
Tabela 8 – Valores de $\gamma$ do controlador regular para o sistema do exemplo genérico.	76
Tabela 9 – Custos do esforço do controlador relaxado e dos estados para as respostas no tempo para o sistema do exemplo genérico. . . . .	76
Tabela 10 – Valores de $\gamma$ do controlador relaxado para o sistema do exemplo genérico.	77



# Lista de abreviaturas e siglas

FL	Linearização por realimentação de estados.
MPC	Controle preditivo baseado em modelo.
RMPC	Controle preditivo robusto baseado em modelo.
NMPC	Controle não-linear preditivo baseado em modelo.
LMI	Desigualdade matricial linear.
PID	Controlador proporcional, integral e derivativo.
LQR	Regulador linear quadrático.
mp-QP	Programação quadrática multi-paramétrica.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos e Metodologia</b>	<b>18</b>
<b>1.2</b>	<b>Organização da Dissertação</b>	<b>20</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>Controlador Preditivo Baseado em Modelo</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Controlador Preditivo Robusto Baseado em Modelo</b>	<b>24</b>
2.2.1	Descrição das Incertezas	24
2.2.1.1	Incerteza Politópica	25
2.2.1.2	Incerteza Linear Fracionária	25
2.2.1.3	Incerteza Multimodelo	26
2.2.1.4	Entrada Incerta Limitada	26
2.2.2	Síntese do Controlador Robusto	26
2.2.2.1	Algoritmos Min-Max	27
2.2.2.2	Restrições aos estados e ao sinal de controle	27
<b>2.3</b>	<b>Controlador Preditivo Baseado em Modelo Não-Linear</b>	<b>28</b>
<b>2.4</b>	<b>MPC para Sistemas Não-Lineares por Realimentação Linearizante</b>	<b>29</b>
2.4.1	O Problema das Restrições no Controlador FL+MPC	30
<b>2.5</b>	<b>Controlador Rápido Preditivo Baseado em Modelo</b>	<b>31</b>
2.5.1	MPC Explícito	31
2.5.2	Otimização Rápida	32
<b>3</b>	<b>SISTEMA LINEAR INCERTO A PARTIR DE UM SISTEMA NÃO-LINEAR INCERTO</b>	<b>35</b>
3.0.1	Método 1 - Linearização por Realimentação de Estados	35
3.0.2	Método 2 - Linearização por Realimentação de Estados com Aproximação por Jacobiano	37
3.0.3	Método 3 - Linearização por Jacobiano	38
<b>3.1</b>	<b>Discretização de Sistemas Lineares Incertos</b>	<b>38</b>
<b>4</b>	<b>CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO BASEADO EM MODELO</b>	<b>41</b>
<b>4.1</b>	<b>Fundamentos Matemáticos do Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo</b>	<b>41</b>
<b>4.2</b>	<b>Relaxação das condições LMIs</b>	<b>46</b>
<b>4.3</b>	<b>Limitação em norma da ação de controle</b>	<b>50</b>
4.3.1	Versão Regular	50

4.3.2	Versão Relaxada . . . . .	52
<b>5</b>	<b>EXEMPLOS DE APLICAÇÕES . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>5.1</b>	<b>Oscilador de Van der Pol . . . . .</b>	<b>55</b>
5.1.1	Obtenção do Modelo Linear Incerto . . . . .	58
5.1.2	Resultados . . . . .	60
5.1.3	Influência do Tempo de Amostragem no Desempenho do Controlador . . . . .	64
<b>5.2</b>	<b>Exemplo Genérico . . . . .</b>	<b>66</b>
5.2.1	Obtenção do Modelo Linear Incerto . . . . .	67
5.2.2	Resultados . . . . .	68
<b>5.3</b>	<b>Considerações Sobre o Tipo de Sistema a ser Controlado . . . . .</b>	<b>75</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>6.1</b>	<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>6.2</b>	<b>Propostas de Trabalhos Futuros . . . . .</b>	<b>79</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>81</b>
	<b>APÊNDICE A – LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DE ES-</b>	
	<b>TADOS . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>A.1</b>	<b>Difeomorfismo . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>A.2</b>	<b>Derivada de Lie . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>A.3</b>	<b>Grau Relativo . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>A.4</b>	<b>Determinação da Lei de Controle Linearizante . . . . .</b>	<b>90</b>

# 1 Introdução

Sabe-se que a maior parte dos sistemas encontrados na natureza, ou na indústria, são não-lineares e o controle desse tipo de sistema tem sido tratado em muitos artigos e livros, como: (ISIDORI, 1995; SLOTINE; LI et al., 1991; VIDYASAGAR, 2002). Apesar do grande número de publicações sobre o tema, conceitos como estabilidade, controle ótimo e robustez a parâmetros incertos são discutidos mais de forma a descrever as características de um sistema, ao invés de ser desenvolvido um projeto de um controlador com essas características (KOKOTOVIĆ; ARCAK, 2001). Sendo assim, não há muita disponibilidade de métodos sistemáticos para o controle de uma classe mais ampla de sistemas não-lineares.

Normalmente, quando o projetista deseja fazer o controle de um sistema não-linear, primeiro considera uma aproximação linear do sistema em torno de um ponto de equilíbrio. Deste modo, tem-se a vantagem em poder utilizar os inúmeros controladores lineares, como o controlador proporcional, integral e derivativo (PID), que são em geral mais simples que os não-lineares. Porém, quando o sistema afasta-se do ponto de equilíbrio, a linearização torna-se pobre e pode levá-lo à instabilidade. Portanto, a depender do sistema, a combinação da linearização mais o controlador linear pode não se adequar bem aos fenômenos não-lineares. Uma outra desvantagem é que algumas características não-lineares não são facilmente traduzidas para uma aproximação linear. As não-linearidades difíceis de modelar incluem: saturação, zonas mortas e histerese. Para esses casos, ou quando o sistema possui características altamente não-lineares, é preferível utilizar técnicas de controle não-linear (SLOTINE; LI et al., 1991).

Nas últimas décadas, o desenvolvimento da geometria diferencial tem impulsionado as pesquisas na área de controle de sistemas não-lineares, permitindo a investigação sobre o controle de uma classe mais geral deste tipo de sistema. Por meio dela, é possível desenvolver uma lei de controle linearizante, conhecida como linearização por realimentação de estados (FL - do inglês, *Feedback Linearization*). Essa técnica cancela os termos não-lineares do sistema, de forma que este possa ser visto como um sistema linear no sentido da entrada para a saída, ou da entrada para os estados (SLOTINE; LI et al., 1991; ISIDORI, 1995). Entretanto, a efetividade desta técnica depende de forma crucial do conhecimento acerca da estrutura e dos parâmetros do sistema a ser controlado.

Outra abordagem para se investigar o controle de sistemas não-lineares que, em princípio pode ser aplicada a uma classe ampla de sistemas são as estratégias de Controle Preditivo baseado em Modelo (MPC - do inglês, *Model Predictive Controller*), em que um dos principais atrativos para o projetista é a facilidade de incorporação de restrições nas entradas de controle (CAMACHO; BORDONS, 1998).

## 1.1 Objetivos e Metodologia

O objetivo deste trabalho é apresentar um procedimento sistemático que combina ambas as técnicas FL e MPC, visando controlar um sistema não-linear incerto com uma entrada e uma saída (SISO - do inglês, Single Input Single Output) tal que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, p) + g(x, p)u, \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (1.1)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  os estados,  $u \in \mathbb{R}$  a entrada de controle,  $y \in \mathbb{R}$  a saída e  $p \in \Omega_p \subset \mathbb{R}^q$  é um vetor de parâmetros incertos, o qual se assume ser limitado.

Além do sistema ser não-linear incerto, este também possui as entradas limitadas em norma, de forma que

$$\|u\| \leq u_{\max}. \quad (1.2)$$

O controlador que une ambas as técnicas está esquematizado na Figura 1. Em azul o sistema não-linear incerto; em vermelho um laço interno responsável pela linearização por realimentação de estados; e em verde o controlador preditivo.

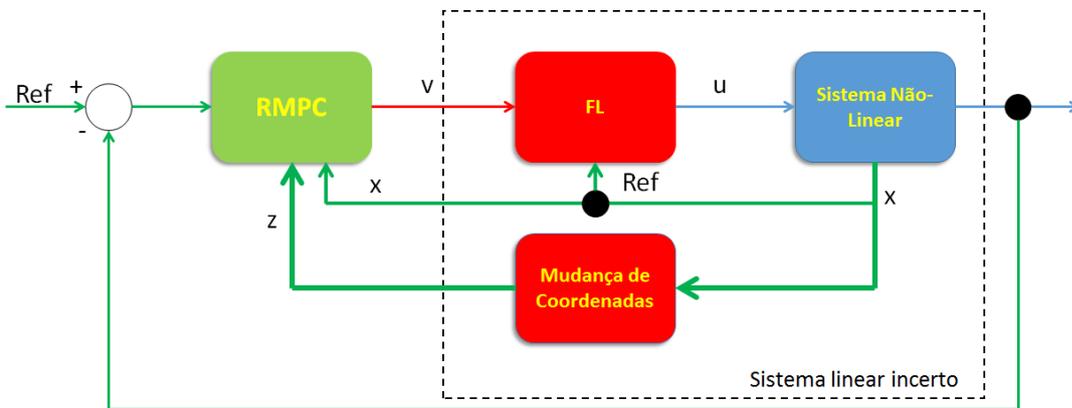


Figura 1 – Esquemático do Controlador com o Sistema Linearizado por Realimentação de Estados

Por ser o sistema (1.1) incerto, não é possível determinar com precisão uma FL. No entanto, uma lei linearizante aproximada, baseada nos valores nominais dos parâmetros incertos, pode ser aplicada ao sistema. Todavia, o produto da linearização aproximada é ainda um sistema não-linear incerto, conforme pode ser observado na Figura 2, onde mostram-se as etapas fundamentais para o projeto do controlador proposto.

Neste trabalho, foram criados métodos para que se possa escrever este sistema não-linear incerto como um sistema linear incerto. Tendo em vista que o sistema não possui todos os seus parâmetros previamente determinados, a ideia então é utilizar um controlador preditivo robusto baseado em modelo (RMPC - do inglês, Robust Model

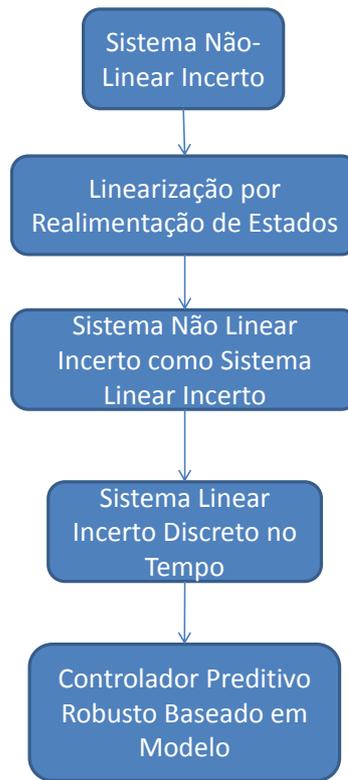


Figura 2 – Fluxograma Esquemático do Controlador

Predictive Controller) como apresentado em (KOTHARE; BALAKRISHNAN; MORARI, 1996). Note que na Figura 1 o controlador RMPC enxerga um sistema linear incerto.

Tais procedimentos são semelhantes ao encontrado no artigo escrito por Boom (1997). O autor combinou as técnicas FL e RMPC para fazer o controle de um sistema não-linear incerto. O sistema resultante da linearização foi aproximado por um sistema linear incerto em que as incertezas são descritas na forma linear fracionária.

A revisão bibliográfica feita no Capítulo 2 mostra que apesar do grande número de publicações sobre MPC, são poucos os trabalhos que unem os temas: controle de sistemas não-lineares incertos, controle preditivo baseado em modelo e linearização por realimentação de estados. O escrito por Boom (1997) é um dos que tratam de todos esses assuntos. Nesta dissertação, visa-se contribuir com este trabalho ao aproximar o sistema não-linear incerto por um sistema linear com incertezas descritas na forma politópica. Também foram feitas modificações nas condições em forma de desigualdade matricial linear (LMI - do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) do controlador RMPC de acordo com o trabalho de (CUZZOLA; GEROMEL; MORARI, 2002). Essas modificações aumentam o grau de liberdade do algoritmo de otimização. Além destas, novas LMIs de restrição ao sinal de controle foram determinadas para o sistema incerto descrito na forma politópica.

## 1.2 Organização da Dissertação

No Capítulo 2, faz-se a revisão da literatura na qual se apresentam diferentes formas de como o controlador preditivo robusto baseado em modelo foi tratado nos últimos anos, servindo de auxílio na escolha de uma técnica de controle preditivo específica. O Capítulo 3 trata de como escrever um sistema não-linear incerto como um sistema linear incerto e como fazer a discretização no tempo desse tipo de sistema. O desenvolvimento do controlador RMPC, as relaxações às condições LMIs, assim como as restrições no sinal de controle, são tratados no Capítulo 4. No Capítulo 5 são apresentados alguns exemplos de aplicação, por meio de simulações, ao aplicar o controlador proposto a sistemas não-lineares incertos. Esse Capítulo possui a finalidade de verificar a eficiência dos métodos apresentados. Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as considerações finais acerca do trabalho desenvolvido, assim como, sugestões para trabalhos futuros.

Durante o restante desta dissertação, será utilizada a seguinte notação:

- $x(k+i|k)$ ,  $y(k+i|k)$  estados e saídas do sistema respectivamente no tempo  $k+i$ , preditos baseados nas medidas no tempo  $k$ .
- $u(k+i|k)$  ação do controlador no tempo  $k+i$ , computado pelo algoritmo de otimização no tempo  $k$ .

## 2 Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresenta uma revisão bibliográfica a respeito dos conceitos, terminologias e estruturas envolvendo a proposta de controle desta dissertação. Na seção 2.1, revisam-se diferentes tipos de controladores aplicados a sistemas lineares. A seção 2.2 trata do MPC aplicado a sistemas lineares incertos. Na seção seguinte, o controle preditivo para sistemas não-lineares é revisto e, por fim, a seção 2.4 apresenta os elementos básicos de projeto MPC considerando o modelo da planta linearizado por FL.

### 2.1 Controlador Preditivo Baseado em Modelo

O controle preditivo baseado em modelo é construído a partir de uma lei de controle que envolve otimizar uma função custo. Inicialmente desenvolvido na década de 70, foi nos anos 90 que ganhou forças ao usar o formalismo de espaço de estados ao invés da função de transferência (LÖFBERG, 2003). Como a lei de controle é determinada através de algoritmos de otimização, gasta-se mais tempo computacionalmente, sendo assim, o MPC é muito popular nas indústrias petroquímicas onde a dinâmica dos sistemas são mais lentas (MINH; HASHIM, 2010), embora essa tendência venha sendo revertida na atualidade, por meio de controladores preditivos de alta velocidade (BEMPORAD et al., 2000).

O MPC não trata de uma única técnica de controle, mas de toda uma classe de controladores que utilizam explicitamente um modelo do sistema, para prever ações de controle que minimizam uma função objetivo (CAMACHO; BORDONS, 1998). Normalmente, essa função, também chamada de função custo, é escrita como uma equação quadrática nos estados e no sinal de controle, de modo que, ao ser minimizada, a trajetória do sistema segue para a origem como em um regulador linear quadrático (TROFINO; COUTINHO; BARBOSA, 2003). Utiliza-se de um algoritmo de otimização para determinar um conjunto de ações de controle ótimo sobre um horizonte de tempo, normalmente finito, tornando simples a incorporação de restrições a ação de controle, ou aos estados do sistema. De forma geral, um controlador MPC tem a seguinte estrutura (CAMACHO; BORDONS, 1998):

- Uso do modelo para prever os estados do sistema em instantes de tempo futuro (horizonte de tempo);
- Cálculo da sequência de controle que minimiza uma função objetivo;

- A cada instante de tempo, apenas o primeiro elemento do sinal de controle é aplicado ao processo, e o horizonte de tempo é deslocado para um instante de tempo futuro.

Normalmente, o MPC é aplicado a sistemas lineares discretos no tempo, tal qual

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\y(k) &= Cx(k),\end{aligned}\tag{2.1}$$

sendo que  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  e  $y(k) \in \mathbb{R}^p$  denotam os estados, entradas de controle e as saídas do sistema respectivamente.

Os estados e a ação de controle podem ser limitados de modo que,

$$\begin{aligned}x &\in X, \\u &\in U,\end{aligned}\tag{2.2}$$

em que os conjuntos  $X$  e  $U$  podem ser descritos pelas desigualdades lineares

$$\begin{aligned}X &= \{x : E_x x \leq f_x\}, \\U &= \{u : E_u u \leq f_u\},\end{aligned}\tag{2.3}$$

sendo que  $E_x \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ ,  $E_u \in \mathbb{R}^{2m \times m}$  denotam os pesos na desigualdade linear;  $f_x \in \mathbb{R}^{1 \times 2n}$  e  $f_u \in \mathbb{R}^{1 \times 2m}$  são os limites máximos e mínimos impostos aos estados e ação de controle respectivamente.

A função objetivo normalmente é uma função quadrática do tipo,

$$J(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(k+j|k)^T Q x(k+j|k) + u(k+j|k)^T R u(k+j|k),\tag{2.4}$$

onde  $N$  denota o tamanho do horizonte de predição, i.e., o número de vezes em sequência que o modelo da planta é utilizado para prever uma ação futura, e  $Q$  e  $R$  são matrizes semi-definidas positivas que representam as ponderações nos estados e controle respectivamente.

Desta forma, o controlador MPC deve encontrar um  $u$  que minimize  $J(k)$  tal que

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \arg \min_u J(k) \\&\text{sujeito a :} \\x &\in X, \\u &\in U,\end{aligned}\tag{2.5}$$

em que  $\bar{u}$  é um vetor com  $N$  valores da ação de controle  $u$ ,

$$\bar{u} = (u_{k|k} \ u_{k+1|k} \ \dots \ u_{k+N-1|k}),$$

determinados pelo algoritmo de otimização, que quando aplicados ao modelo (2.1) geram  $N$  valores preditos dos estados, tais como

$$\bar{x} = (x_{k|k} \ x_{k+1|k} \ \dots \ x_{k+N-1|k}).$$

Apesar de  $N$  valores serem preditos, apenas o primeiro elemento  $u(k|k)$  é aplicado à planta. Então, todo o procedimento é repetido.

Mesmo se repetindo inúmeras vezes, a estabilidade do sistema não pode ser garantida, sendo este um ponto fraco do controlador MPC (PLUYMERS et al., 2005). Em seu trabalho de revisão, Bemporad e Morari (1999) citaram diversas maneiras em que a estabilidade possa ser assegurada:

- *Restrição Terminal* (KWON; PEARSON, 1977; KWON; PEARSON, 1978). Acrescenta-se uma restrição terminal  $x(k + N - 1|k) = 0$  ao algoritmo MPC (2.5). Dessa forma, caso o controlador encontre uma solução factível, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 J(k) &= \sum_{j=0}^{N-2} x(k + j|k)^T Q x(k + j|k) + u(k + j|k)^T R u(k + j|k) + \\
 & x(k + N - 1)^T Q x(k + N - 1) + u(k + N - 1)^T R u(k + N - 1), \\
 J(k) &= \sum_{j=0}^{N-2} x(k + j|k)^T Q x(k + j|k) + u(k + j|k)^T R u(k + j|k) + \\
 & u(k + N - 1)^T R u(k + N - 1) + 0.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, a estabilidade é obtida ao observar que  $J(k + 1) < J(k)$ , portanto para  $k \rightarrow \infty$ , tem-se  $J \rightarrow 0$ .

Entretanto, uma desvantagem é que esse tipo de restrição requer um grande esforço do controlador para garantir que no último instante de tempo predito, a origem do sistema tenha sido alcançada. O problema torna-se ainda mais complicado para valores pequenos de  $N$ . A depender das restrições aos estados e a ação de controle (2.5), o problema de otimização torna-se infactível.

- *Conjunto invariante terminal* (SCOKAERT; RAWLINGS, 1996). A ideia é semelhante a anterior, porém ao invés de determinar que para o último instante predito  $x(k + N - 1|k) = 0$ , acrescenta-se o requisito de que o estado final pertença a um conjunto,  $x(k + N - 1|k) \in \Omega$ , relaxando a restrição anterior. Uma vez que essa condição é alcançada,  $k \geq N$ , a ação de controle por realimentação  $u(k + j|k) = Fx(k + j|k)$  é determinada de forma que  $\Omega$  seja um conjunto invariante para o sistema em malha fechada. A estabilidade pode ser demonstrada usando a teoria de Lyapunov.
- *Matriz peso terminal* (KWON; BRUCKSTEIN; KAILATH, 1983; KWON; BYUN, 1989). Consiste em modificar (2.4),

$$\begin{aligned}
 J(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} x(k + j|k)^T Q x(k + j|k) + u(k + j|k)^T R u(k + j|k) + \\
 & x(k + N - 1|k)^T P x(k + N - 1|k),
 \end{aligned}$$

adicionando um termo relacionado ao estado terminal. Ao escolher o peso  $P$  como a solução de uma desigualdade matricial de Riccati, a estabilidade pode ser garantida.

- *Contração na norma*(POLAK; YANG, 1993; ZHENG, 1995). A estabilidade é garantida ao requerer explicitamente que a norma do estado posterior, seja menor que a do estado atual. Assim,

$$\|x(k+1|k)\| \leq \alpha \|x(k|k)\|, \quad \alpha < 1.$$

- *Horizonte de predição infinito*(KEERTHI; GILBERT, 1988; MUSKE; RAWLINGS, 1993; ZHENG; MORARI, 1995). É conhecido da literatura que, para o MPC com horizonte de predição infinito, caso exista solução para o problema de otimização, garante-se a estabilidade assintótica do sistema. A demonstração é baseada em estabilidade segundo a teoria de Lyapunov.

## 2.2 Controlador Preditivo Robusto Baseado em Modelo

O controlador preditivo robusto baseado em modelo é uma técnica de controle aplicada a sistemas com incertezas paramétricas. O que difere do MPC é que o modelo utilizado para prever as saídas futuras da planta é incerto.

Dos trabalhos encontrados na literatura, o uso do controlador RMPC difere principalmente em três áreas: na descrição das incertezas, na síntese do controlador e nas condições que permitam a garantia de estabilidade.

### 2.2.1 Descrição das Incertezas

Uma representação adequada das incertezas é parte fundamental para o projeto do controlador RMPC, mas pode ser uma tarefa difícil por não haver uma maneira sistemática de obtê-la (BEMPORAD; MORARI, 1999). As incertezas a serem modeladas devem representar de forma adequada a planta real, caso contrário o controle poderá ser muito conservador. Um outro problema é que quanto mais complexa for a representação das incertezas no modelo, maior será a carga computacional exigida na execução do algoritmo de otimização, podendo tornar o problema intratável computacionalmente.

Deste modo, a descrição das incertezas de um sistema, normalmente, é feita ao representar o sistema por um conjunto de modelos diferentes, ou por um modelo nominal afetado por ruído, como mostrado a seguir.

## 2.2.1.1 Incerteza Politópica

O seguinte sistema linear,

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\y(k) &= Cx(k), \\[A \ B] &\in \Omega,\end{aligned}$$

é representado por um grupo de modelos pertencentes a um conjunto ,

$$\Omega = Co\{[A_1 \ B_1], [A_2 \ B_2], \dots, [A_L \ B_L]\},$$

inscrito em um politopo, Figura 3a, cujos elementos são definidos pela combinação convexa

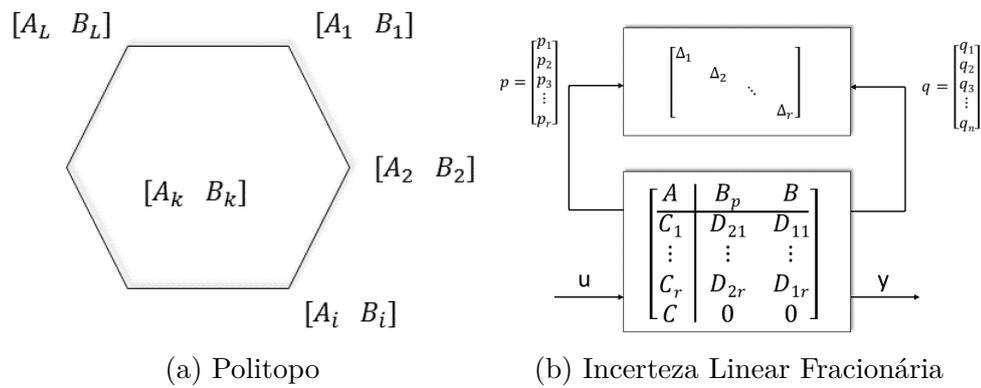


Figura 3 – Possíveis representações de Incertezas

dos seus vértices, ou seja:

$$\begin{aligned}[A \ B] &= \sum_{i=1}^L \lambda_i [A_i \ B_i], \\ \sum_{i=1}^L \lambda_i &= 1, \quad \lambda_i \geq 0,\end{aligned}$$

sendo que  $L$  é o número de vértices e  $[A_i \ B_i]$  são os vértices do politopo e podem ser determinados, tomando-se os extremos das incertezas do sistema. [Kothare, Balakrishnan e Morari \(1996\)](#) usaram este tipo de incerteza para representar um sistema linear variante no tempo.

## 2.2.1.2 Incerteza Linear Fracionária

As incertezas ou perturbações são acrescentadas ao modelo através de um laço de realimentação, Figura 3b, de modo que o sistema linear incerto possa ser representado por

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_p p(k), \\y(k) &= Cx(k), \\q(k) &= C_q x(k) + D_{qu} u(k), \\p(k) &= (\Delta q(k)),\end{aligned}$$

sendo que a matriz

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & & \\ & \Delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Delta_r \end{bmatrix},$$

possui os elementos da diagonal limitados em norma,  $\|\Delta_i\|_2 \leq 1$  (ZHOU et al., 1996). Os autores Cockburn e Morton (1997) usaram este tipo de incerteza para representar um sistema linear variante no tempo.

### 2.2.1.3 Incerteza Multimodelo

O modelo utilizado para prever as saídas futuras da planta pertence a um conjunto, onde há um número finito de outros modelos, que diferem um do outro devido à incerteza (BADGWELL, 1997). Desta forma, o sistema linear incerto é representado por uma lista de possíveis modelos lineares dados por:

$$\Sigma_i : \begin{cases} x(k+1) &= A_i x(k) + B_i u(k) \\ y(k) &= C_i x(k) \end{cases}$$

em que  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### 2.2.1.4 Entrada Incerta Limitada

Neste tipo de descrição da incerteza, assume-se que o modelo do sistema é conhecido e um ruído  $w(k)$ , limitado em um conjunto  $W$ , é somado ao sistema. Assim o modelo passa a ser

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Hw(k), \\ y(k) &= Cx(k), \\ w &\in W. \end{aligned}$$

O conjunto  $W$  é conhecido e limitado, e os elementos deste conjunto podem ser limitados em norma ou de uma outra forma, o conjunto pode ter uma descrição politópica por exemplo (MILANESE; VICINO, 1993) (MÄKILÄ; PARTINGTON; GUSTAFSSON, 1995).

## 2.2.2 Síntese do Controlador Robusto

Como foi comentado anteriormente, no controlador RMPC, o modelo utilizado para a predição de ações do controlador que minimizam uma função custo possui incertezas. Por conta disso, a síntese do controlador torna-se mais complexa devida a inexistência de um modelo nominal para se fazer as predições das saídas futuras dos sistemas a serem controlados. A seguir, será apresentado uma possível maneira de se projetar um controlador RMPC.

### 2.2.2.1 Algoritmos Min-Max

Ao se usar um modelo incerto para fazer as predições, dependendo de como as incertezas estão descritas, ao invés de valores conhecidos, obtém-se um conjunto de valores preditos sobre os estados futuros da planta (LÖFBERG, 2003). Dessa forma, não há como minimizar de maneira direta a função custo (2.4). Uma forma de contornar o problema é utilizar o algoritmo Min-Max, o qual minimiza a função custo utilizando um dos modelos incertos que a maximiza. Portanto, o algoritmo de otimização deve encontrar um conjunto de entradas de controle  $\bar{u}$ , de modo a minimizar  $J$  para o pior caso. Assim,

$$\bar{u} = \arg \min_u \max_{[A \ B] \in \Omega} J \quad (2.6)$$

onde  $\Omega$  é um conjunto de modelos dinâmicos, podendo ser formado por um politopo.

Otimização Min-Max, no contexto de MPC, foi inicialmente proposta por Campo e Morari (1987), e depois aplicada a sistemas SISO por Allwright (1994) e Zheng e Morari (1993). Kothare, Balakrishnan e Morari (1996) usaram o algoritmo min-max em um RMPC aplicado a sistemas incertos na forma politópica ou incerteza linear fracionária; Lee e Cooley (1997) para sistemas invariantes no tempo dependentes de parâmetros; e Scokaert e Mayne (1998) para sistemas com distúrbios na entrada. Pluymers et al. (2005) usaram min-max para fazer o controle de sistemas lineares com parâmetros variáveis inscritos em conjuntos invariantes na forma de poliedros.

O min-max, quando comparado com (2.5), pode ser muito conservador pois a lei de controle será determinada para o pior caso, e valerá para toda descrição incerta possível do sistema. Dependendo de como as incertezas são estabelecidas, o custo computacional poderá ser elevado.

### 2.2.2.2 Restrições aos estados e ao sinal de controle

As restrições ao sinal de controle são introduzidas no algoritmo de otimização e são independentes do modelo do sistema a ser controlado. Para os estados, supondo a existência de incertezas, as restrições devem ser consideradas para todos os possíveis modelos incertos. Como cada modelo possui uma dinâmica própria, impor a mesma restrição sobre todos os sistemas pode produzir resultados conservadores. Para diminuir o conservadorismo, é possível substituir as restrições mais rígidas impostas aos estados, por restrições suaves nas quais são adicionadas variáveis de folga.

Utilizando condições LMIs, o controlador desenvolvido por Kothare, Balakrishnan e Morari (1996) limita os estados da planta a conjuntos invariantes na forma de elipsoides independente das incertezas do modelo. Os autores Cuzzola, Geromel e Morari (2002) melhoraram os resultados anteriores ao criar para cada modelo do sistema um elipsoide diferente. Pluymers et al. (2005) também limita os estados do sistema em conjuntos invariantes, porém na forma de poliedros.

Em 1991, Gilbert e Tan (1991) desenvolveram o conceito de conjuntos admissíveis com saída máxima (MOAS - do inglês, *Maximum Admissible Output Set*). Ajustando-se  $C$ ,  $D$  e  $Y$  a ideia consiste em dado um sistema linear realimentado,

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad u(k) = Kx(k) \quad (2.7)$$

$$w(k) = Cx(k) + Du(k); \quad w(k) \in Y \quad (2.8)$$

com restrições rígidas (em inglês *hard constraints*) nos estados ou no sinal de controle, buscar um conjunto  $Z$  de forma que para toda condição inicial,  $x_0 \in Z$ , o sistema siga para  $Y$  quando  $k \geq 0$ . Em Gilbert e Kolmanovsky (1995), o conceito do MOAS foi aplicado em um sistema linear sujeito a ruídos limitados, garantindo condições para que não haja nem saturação no controle, nem falha no atendimento à restrições nos estados.

## 2.3 Controlador Preditivo Baseado em Modelo Não-Linear

A técnica de controle preditivo baseada em modelo, como o próprio nome diz, depende diretamente de um modelo que descreva bem o sistema a ser controlado, para poder prever de maneira correta as futuras saídas do processo e assim poder calcular as ações de controle que minimizam uma função custo. Por conta disso, muitas pesquisas têm sido feitas na área de controle preditivo não-linear (NMPC - do inglês, *Nonlinear Model Predictive Control*) (CHEN; BALLANCE; GAWTHROP, 2003) e (VALLURI; SOROUGH, 2003) que, quando comparado com o MPC linear, possui algumas vantagens significativas:

- O modelo linear é válido apenas para um pequeno intervalo em torno do ponto de equilíbrio, portanto o desempenho do controlador para intervalos grandes, em muitos casos, torna-se ruim ou o próprio sistema em malha fechada pode se tornar instável, e muitas vezes dentro deste intervalo é importante levar em consideração comportamentos não-lineares como saturações por exemplo.

Portanto, um controlador NMPC é mais preciso do que o MPC linear, especialmente nos casos mencionados acima. Apesar disso, a maior parte das aplicações com o MPC utiliza os modelos lineares (KOUVARITAKIS; CANNON, 2001), que, normalmente, são mais fáceis de serem identificados e, em muitas aplicações industriais, dão resultados com precisão suficiente.

Outro fator é que o NMPC é muito custoso computacionalmente, e em geral a otimização não é convexa, de modo que não se pode dizer que uma dada solução ótima obtida é global. Já o MPC linear, com o uso de uma função objetivo quadrática, assegura soluções ótimas globais, tendo em vista o caráter convexo do problema, e com um eficiente e rápido algoritmo de otimização.

Na próxima seção, será discutida uma forma de utilizar o MPC linear em um sistema não-linear.

## 2.4 MPC para Sistemas Não-Lineares por Realimentação Linearizante

Nos últimos anos, a linearização por realimentação de estados (FL) vem ganhando destaque nas pesquisas. Diferente do processo de linearização tradicional, a FL não é válida apenas em torno do ponto de equilíbrio, mas em toda uma região onde o difeomorfismo é válido (ver Apêndice A.1). Uma outra vantagem é que, devido à forma como a FL é feita, a planta linearizada resulta em um sistema linear desacoplado, tornando o projeto do controlador mais simples.

A FL possibilita, por meio da introdução de um novo vetor de entradas de controle virtuais  $v$  e do uso de uma mudança não-linear de coordenadas (difeomorfismo), o uso de controladores Lineares e Invariantes no Tempo para o sistema linearizado. A lei de controle FL pode ser escrita como (vide Apêndice A.4):

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (2.9)$$

que é dependente dos estados do sistema, e por isso precisa-se que estes sejam completamente medidos e caso não seja possível, faz-se necessário o uso de um observador. A variável  $v$  representa a ação do controlador linear, a qual é aplicado diretamente ao sistema linearizado.

Como a FL depende do conhecimento exato do modelo do sistema, não é uma técnica robusta, pois é sensível as suas incertezas e perturbações. Na prática, como o modelo é apenas uma aproximação da planta real, usando a técnica não se consegue cancelar todas as não-linearidades do sistema. Por conta disso, a FL é normalmente combinada com técnicas de controle linear robusto tais como, controle  $H_2/H_\infty$  (KOLAVENNU; PALANKI; COCKBURN, 2001),  $\mu$ -síntese (REINER; BALAS; GARRARD, 1996) ou controle preditivo robusto baseado em modelo (RMPC), (BOOM, 1997). Os autores (WISE et al., 1999), (CHOI; CHWA; KIM, 2000), (GILI; BATTIPEDE, 2001) e (WALLNER; WELL, 2003) de forma a aumentar a robustez, combinaram FL com controle adaptativo, no qual os parâmetros incertos considerados podem ser atualizados durante o processo, fazendo-se estimativas.

Na próxima seção, será discutido um problema com as restrições no controlador MPC quando combinado com FL.

### 2.4.1 O Problema das Restrições no Controlador FL+MPC

Como foi comentado, uma vantagem do controlador MPC é a facilidade em se incorporar restrições tanto nos estados, quanto na ação de controle. Essa vantagem é perdida ao se combinar o MPC linear com a FL, pois as restrições na ação de controle  $u$  (2.9) tornam-se restrições não-lineares para a entrada de controle linear virtual  $v$ .

Em um sistema real, as restrições no controlador são impostas por limites físicos dos atuadores, como os limites de atuação encontrados para o acelerador e o profundor de um avião, por exemplo. Neste caso, as restrições são definidas como a mínima e a máxima aceleração possíveis e a deflexão máxima e mínima do profundor. Uma vez que o sistema é linearizado por FL, o controlador MPC não considera mais o sistema não-linear real, mas o linearizado com as novas entradas de controle  $v$ . Portanto, o problema é definir limites nessa nova entrada de controle  $v$ , de forma, que os limites na entrada de controle real  $u$  sejam atendidos.

Matematicamente, esse problema pode ser colocado da seguinte maneira. Considere os limites máximos e mínimos do vetor das entradas de controle  $u$  tais como

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}. \quad (2.10)$$

Substituindo-se a equação (2.9) em (2.10), obtém-se a relação do controle virtual  $v$  com os limites do controlador real  $u$

$$u_{\min} - \alpha(x) \leq \beta(x)v \leq u_{\max} - \alpha(x),$$

e supondo que  $\beta(x) > 0$ , tem-se

$$\frac{u_{\min} - \alpha(x)}{\beta(x)} \leq v \leq \frac{u_{\max} - \alpha(x)}{\beta(x)}. \quad (2.11)$$

Ao observar a equação anterior, fica evidente o problema de combinar FL+MPC. As restrições em  $v$  dependem diretamente dos estados do sistema, dificultando o seu uso durante as predições, pois os estados preditos dependem de futuras entradas de controle  $v(k+i)$  na busca por um controle ótimo. Em Kurtz e Henson (1997), é tratada uma solução para esse problema de duas maneiras. Nos dois casos, é feito um mapeamento entre os estados  $x$  e a restrição que deve ser imposta em  $v$  na equação (2.9). No primeiro caso, o mapeamento é fixo e o autor usa o estado atual do sistema  $x(k)$  para definir as restrições sobre todo o horizonte de predição. Assim, os limites em  $v$  são definidos como,

$$\begin{aligned} v_{\min} &= \min_u (a(x) + b(x)u) \\ v_{\max} &= \max_u (a(x) + b(x)u) \\ u_{\min} &\leq u \leq u_{\max}, \end{aligned}$$

onde  $a(x) = \beta^{-1}(x)\alpha(x)$ ,  $b(x) = \beta^{-1}(x)$  e  $x \equiv x(k)$ . Dessa forma, apesar da otimização ser trivial, não há garantias que, para instantes futuros, a restrição seja adequada. A outra

maneira proposta pelo autor é fazer o uso de um mapeamento dinâmico, no qual as últimas entradas de controle determinadas na última amostragem de tempo são utilizadas para determinar as restrições futuras do controlador no instante de tempo atual. O segundo método é claramente mais eficaz que o primeiro, mas ainda assim continua sendo apenas uma aproximação, de forma que não há garantias de que as restrições futuras calculadas serão satisfeitas no tempo atual.

Fica claro que o problema do mapeamento ideal é que, para estimar as restrições aos controles e estados futuros, é necessário utilizar o MPC, porém o MPC não pode ser aplicado até que as restrições sejam definidas. A solução ideal para o problema de otimização seria utilizar programação não-linear para estimar esses limites, porém o custo computacional elevado tiraria toda a vantagem em se combinar FL com MPC linear.

Outros autores trataram do problema. [Deng, Becerra e Stobart \(2009\)](#) propuseram uma solução para as regiões de factibilidade das restrições com mapeamento fixo, quando há mais de uma entrada de controle. [Margellos e Lygeros \(2010\)](#) e [Kong, Liu e Yao \(2013\)](#) utilizaram métodos iterativos para determinar os limites de  $v$  ao longo da trajetória percorrida pelo sistema. Por ser os limites de  $v$ ,  $v_{max}$  e  $v_{min}$ , funções não-lineares com o tempo, [Simon, Löfberg e Glad \(2013\)](#) através de métodos iterativos, estabeleceu uma região interna a estes limites, usando aproximações através de politopos. Dentro dessa região, os limites de  $v$  têm uma relação linear com o tempo. O autor também garantiu a factibilidade e convergência do método.

## 2.5 Controlador Rápido Preditivo Baseado em Modelo

Parte das pesquisas mais recentes em MPC tratam do desenvolvimento do chamado MPC rápido, ou *Fast MPC* em inglês. Tais estudos visam reduzir o tempo computacional gasto pelos controladores MPC de modo a poder implementá-los *on-line*.

Estes esforços em diminuir o tempo de máquina podem ser divididos em duas vertentes, uma dedicada em se obter uma solução explícita para os problemas de otimização envolvendo MPC, e uma outra ocupada em desenvolver algoritmos de otimização mais rápidos.

### 2.5.1 MPC Explícito

[Bemporad et al. \(2002\)](#) apresentaram a solução para o problema do regulador linear quadrático (LQR - do inglês, *Linear Quadratic Regulator*) para sistemas sujeitos a restrições. Como normalmente o LQR depende dos estados do sistema, a região de trabalho foi dividida em poliedros e para cada parte do todo, foi obtida uma solução *off-line* diferente. Desta forma, o cômputo da solução *on-line* se reduz em determinar em que região o sistema se encontra e aplicar a lei de controle correspondente consultando uma tabela. Os autores

mostraram que este tipo de controle é afim por partes em relação aos estados e contínuo e a técnica faz uso da chamada Programação Quadrática Multi-Paramétrica (mp-QP - do inglês, *multi parametric Quadratic Programming*). Em (BEMPORAD; BORRELLI; MORARI, 2000), os resultados foram aplicados em sistemas com incertezas.

Em seu trabalho de revisão sobre controladores MPC, Lee (2011) comenta que o problema deste tipo de abordagem é que a medida que o número de variáveis do sistema, o horizonte de predição ou o número de restrições aumentam, o número de regiões do poliedro crescem rapidamente, tornando a abordagem mp-QP difícil de ser implementada na prática.

Em seguida, muitos trabalhos foram publicados na tentativa de melhorar o desempenho do controlador MPC explícito. Dentre estes, vale a pena ressaltar o trabalho de ToNdel, Johansen e Bemporad (2003), que desenvolveram uma nova estratégia ao evitar particionar regiões de trabalho desnecessárias analisando geometricamente os poliedros.

Ainda sobre o desenvolvimento do MPC explícito, Jones e Morari (2010) trocaram a complexidade de se obter uma solução explícita por uma solução aproximada que dá origem a problemas paramétricos de otimização convexa. Foi mostrado que o controlador é factível e estabilizante.

## 2.5.2 Otimização Rápida

Uma outra forma de melhorar o desempenho de um controlador MPC é melhorando os algoritmos de otimização. Muitos pesquisadores na tentativa de obter controladores mais rápidos, para poderem ser implementados *on-line*, exploraram a particularidade de cada problema MPC para produzirem algoritmos de otimização customizados os quais mostraram-se ordens de grandeza mais rápidos que os já existentes.

Rao, Wright e Rawlings (1998) propuseram um método de pontos interiores, no qual o custo cresce linearmente com o tamanho do horizonte de predição, ao contrário de um crescimento cúbico para uma abordagem mais tradicional. Ferrau, Bock e Diehl (2007) usaram informações de soluções anteriores de problemas convexos de programação quadrática (QP - do inglês, *Quadratic Programming*), supondo que o conjunto de soluções não muda muito de um problema QP para o próximo. Com esta estratégia, os autores mostraram que seu algoritmo é cerca de uma ordem de magnitude mais rápido que os algoritmos de QP tradicionais.

Lee (2011) avalia que, os algoritmos de otimização rápida quando comparados com a obtenção explícita de uma solução MPC, são vantajosos quando aplicados em sistemas com muitos estados, restrições, ou ainda para horizontes de predições maiores. Para o MPC explícito, uma mudança nos parâmetros do sistema implicaria na construção de toda uma nova tabela para atender um novo problema mp-QP. No método da otimização

rápida, uma nova solução poderia ser encontrada sem grandes complicações.



## 3 Sistema Linear Incerto a partir de um Sistema Não-Linear Incerto

A técnica de linearização por FL descrita no apêndice A é uma técnica de controle que, por meio de um procedimento sistemático, é possível combinar uma mudança de coordenadas,  $z = \phi(x)$ , e uma lei de controle,  $u(x)$ , que ao serem aplicadas em um sistema não-linear do tipo (A.1), este possa ser escrito como um sistema linear (A.3). Entretanto, a efetividade desta técnica depende de forma crucial do perfeito conhecimento acerca da estrutura e dos parâmetros do sistema a ser controlado.

Neste capítulo, esta técnica é aplicada em um sistema não-linear incerto, de modo que, a lei de controle linearizante não pode ser completamente determinada e por ser apenas uma aproximação, não lineariza o sistema completamente. Portanto, serão definidos procedimentos sistemáticos para que este sistema não-linear resultante possa ser aproximado por um sistema linear incerto.

### 3.0.1 Método 1 - Linearização por Realimentação de Estados

Inicialmente, define-se um sistema não-linear incerto afim na entrada de controle:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, p) + g(x, p)u, \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados;  $u \in \mathbb{R}$  é a entrada de controle;  $y \in \mathbb{R}$  é a saída;  $p \in \Omega_p \subset \mathbb{R}^q$  é um vetor de parâmetros incertos, porém constantes e limitados; e  $f(x, p)$  e  $g(x, p)$  são campos vetoriais suaves de deriva (*drift*) e de direcionamento (*steering*), respectivamente. Além disso, considera-se que o grau relativo, Apêndice A.3,  $r$  do sistema é bem definido, e é tal que  $r = n$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  e  $\forall p \in \Omega_p$ .

Feitas as hipóteses anteriores é possível mostrar (ISIDORI, 1995; SLOTINE; LI et al., 1991) que o seguinte difeomorfismo, ou transformação não-linear de coordenadas<sup>1</sup>,

$$\begin{aligned}z &= \Phi(x), \\ \Phi(x) &= \begin{bmatrix} y & dy/dt & \cdots & d^{r-1}(y)/dt^{r-1} \end{bmatrix}, \\ \Phi(x) &= \begin{bmatrix} h(x) & L_f h(x) & \cdots & L_f^{r-1} h(x) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

em que  $L_f^k h(x, p)$  é a  $k$ -ésima derivada de Lie (Apêndice A.2) de  $h(x, p)$  na direção de  $f(x, p)$ , pode ser empregado para representar (3.1) como,

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \Upsilon z \\ \hat{f}(z, p) + \hat{g}(z, p)u \end{bmatrix},\tag{3.2}$$

<sup>1</sup> Considera-se que o vetor  $z$  pode ser obtido sem a necessidade de se conhecer o vetor  $p \in \Omega_p$ .

sendo  $z \in Z \subset \mathbb{R}^n$  os estados;  $u \in U \subset \mathbb{R}$  é a entrada de controle;  $\hat{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\hat{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ ; e

$$\Upsilon = \left[ \begin{array}{c|c} 0_{(n-1),1} & I_{n-1} \end{array} \right],$$

em que  $0_{(n-1),1} \in \mathbb{R}^{n-1}$  é um vetor coluna de zeros e  $I_{n-1}$  é a matriz identidade de ordem  $n-1$ . Além disso, assume-se que os estados e os parâmetros do sistema estão limitados em uma região limitada  $\Omega$  definida por

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(z, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q; z \in Z, p \in \Omega_q\}, \\ Z &= \{z \in \mathbb{R}^n; |z_i| \leq z_{i,\max}, i = 1, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

e o sinal de controle deve atender ao requisito de exibir amplitude limitada tal que

$$U = \{u \in \mathbb{R}; |u| \leq u_{\max}\}. \quad (3.4)$$

Assume-se também que  $\hat{f}(z, p)$  possa ser escrito como,

$$\hat{f}(z, p) = \hat{F}(z, p)z,$$

em que  $\hat{F}(z, p)$  é limitado para todo  $z \in Z$  e  $p \in \Omega_q$ .

Uma vez feita a mudança de variáveis, a lei de controle linearizante baseada nos valores nominais  $p_0$  do vetor de parâmetros incertos  $p$ , necessária para linearizar o sistema é definida como:

$$u = \alpha(z, p_0)z + \beta(z, p_0)v, \quad (3.5)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &= -\hat{g}(z, p_0))^{-1} \hat{F}(z, p_0) \\ \beta &= \hat{g}(z, p_0))^{-1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

e  $p_0 \in \Omega_q$  é um vetor contendo os valores nominais de  $p$ .

Ao aplicar (3.5) em (3.2), obtêm-se:

$$\dot{z} = \left[ \begin{array}{c} \Upsilon \\ \hat{F}(z, p) - \hat{g}(z, p)\hat{g}^{-1}(z, p_0)\hat{F}(z, p_0) \end{array} \right] z + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \hat{g}(z, p)\hat{g}^{-1}(z, p_0) \end{array} \right] v. \quad (3.7)$$

Nota-se que, o sistema (3.7), permanece um sistema não-linear incerto. Contudo, como os termos não-lineares são limitados, este sistema parcialmente linearizado admite uma representação como sistema linear incerto descrito na forma politópica. Portanto, seja  $L$  o número de vértices do politopo e  $\lambda_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^L \lambda_i = 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c(z, p)z + B_c(z, p)v, \\ A_c(z, p) &= \sum_{i=1}^L \lambda_i A_c^i, \quad A_c^i = \begin{bmatrix} \Upsilon \\ M_i \end{bmatrix}, \\ B_c(z, p) &= \sum_{i=1}^L \lambda_i B_c^i, \quad B_c^i = \begin{bmatrix} 0 \\ N_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Os valores  $M_i$  e  $N_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , são tais que

$$\begin{aligned}\hat{F}(z, p) - \hat{g}(z, p)\hat{g}^{-1}(z, p_0)\hat{F}(z, p_0) &= \sum_{i=1}^L \lambda_i M_i, \\ \hat{g}(z, p)\hat{g}^{-1}(z, p_0) &= \sum_{i=1}^L \lambda_i N_i.\end{aligned}$$

Os valores de  $M_i$  e  $N_i$  podem ser obtidos, de maneira conservadora, ao variar os valores dos elementos de (3.7), de forma a se obter os seus valores máximos e mínimos para todo  $(z, p) \in \Omega$ .

O sistema (3.8) é a representação linear incerta equivalente do sistema não-linear incerto (3.1). Neste trabalho, além desta, foram determinadas outras duas representações lineares, porém, estas são aproximações as quais em algum momento os termos não-lineares são aproximados pelos termos lineares da série de Taylor.

### 3.0.2 Método 2 - Linearização por Realimentação de Estados com Aproximação por Jacobiano

A partir do sistema não-linear incerto (3.1), aplica-se uma mudança de coordenadas,  $z = \phi(x)$ , de forma a obter o sistema na forma controlável (3.2). Após aplicar a lei de controle linearizante (3.5), obtém-se o sistema parcialmente linearizado (3.7).

Ao invés de se tentar escrever este sistema como uma combinação convexa de sistemas lineares, a ideia é cancelar as não-linearidades, considerando apenas os termos lineares da expansão de Taylor em torno do ponto de equilíbrio  $z = 0$  dos termos não-lineares restantes. Esta linearização será definida como o operador Jacobiano  $J(\cdot)$  daqui em diante. Assim,

$$\dot{z} = J \left( \begin{bmatrix} \Upsilon \\ \hat{F}(z, p) - \hat{g}^{-1}(z, p_0)\hat{g}(z, p)\hat{F}(z, p_0) \end{bmatrix} \right) z + J \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{g}(z, p)\hat{g}^{-1}(z, p_0) \end{bmatrix} \right) v. \quad (3.9)$$

Ao aplicar o Jacobiano, considera-se o vetor de termos incertos  $p$  constante. Portanto, o resultado dessa operação é um sistema linear incerto que admite representação semelhante a (3.8), porém, os termos  $M_i$  e  $N_i$ , agora função apenas de  $p$ , são tais que

$$\begin{aligned}J(\hat{F}(z, p) - \hat{g}(z, p)\hat{g}^{-1}(z, p_0)\hat{F}(z, p_0)) &= \sum_{i=1}^L \lambda_i M_i, \\ J(\hat{g}(z, p)\hat{g}^{-1}(z, p_0)) &= \sum_{i=1}^L \lambda_i N_i.\end{aligned}$$

Os valores  $M_i$  e  $N_i$  podem ser obtidos de maneira conservadora a partir dos valores máximos e mínimos de  $p \in \Omega_q$  em (3.9).

### 3.0.3 Método 3 - Linearização por Jacobiano

No terceiro método não há uma tentativa inicial de linearizar o sistema não-linear por FL. Os termos não-lineares de (3.2) são linearizados diretamente pelo operador Jacobiano. Assim,

$$\dot{z} = J \left( \begin{bmatrix} \Upsilon \\ \hat{F}(z, p) \end{bmatrix} \right) z + J \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{g}(z, p) \end{bmatrix} \right) u. \quad (3.10)$$

Novamente considera-se constante o vetor de valores incertos  $p$ .

Como há presença de incertezas, após o processo de linearização, o sistema admite a seguinte representação:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c(p)z + B_c(p)u, \\ A_c(p) &= \sum_{i=1}^L \lambda_i A_c^i, \quad A_c^i = \begin{bmatrix} \Upsilon \\ M_i \end{bmatrix}, \\ B_c(p) &= \sum_{i=1}^L \lambda_i B_c^i, \quad B_c^i = \begin{bmatrix} 0 \\ N_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Os termos  $M_i$  e  $N_i$ , são tais que

$$\begin{aligned} J(\hat{F}(z, p)) &= \sum_{i=1}^L \lambda_i M_i, \\ J(\hat{g}(z, p)) &= \sum_{i=1}^L \lambda_i N_i. \end{aligned}$$

Os valores  $M_i$  e  $N_i$  podem ser obtidos de maneira conservadora a partir dos valores máximos e mínimos de  $p \in \Omega_q$  em (3.10).

## 3.1 Discretização de Sistemas Lineares Incertos

Na maior parte dos casos, o sinal de controle de um controlador RMPC é determinado através de um algoritmo de otimização. Por conta disso, normalmente os controladores são formulados no contexto de sistemas lineares a tempo discreto.

As técnicas de discretização exatas, como vistas em (CHEN, 1995), não podem ser aplicadas diretamente ao sistema linear incerto (3.8),

$$\dot{z} = A_c(p)z + B_c(p)v,$$

devido à grande dificuldade de tratar com precisão exponenciais de matrizes incertas. Porém, quando o sistema possui as incertezas descritas na forma politópica, cada vértice do politopo é escrito como um sistema linear exato. Portanto, uma possibilidade é obter

matrizes discretizadas associadas a cada um dos vértices, isto é,

$$\begin{aligned}
 z(k+1) &= Az(k) + Bv(k), \\
 A &= \sum_{i=1}^L \lambda_i A_i, \quad A_i = e^{A_c^i T_s}, \\
 B &= \sum_{i=1}^L \lambda_i B_i, \quad B_i = \int_0^{T_s} e^{A_c^i t} B_c^i dt,
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

em que  $T_s$  é o intervalo de amostragem, e  $\lambda_i \geq 0$ , com  $\sum_{i=1}^L \lambda_i = 1$ . Entretanto, o procedimento acima, quando  $T_s$  não é adequadamente escolhido para ser suficientemente pequeno, geralmente leva a modelos que representam de forma incorreta o impacto que as incertezas no sistema em tempo contínuo têm sobre a dinâmica em tempo discreto. (BRAGA et al., 2013).

Um modelo discreto de (3.5) é dado por:

$$u = \alpha(z(k, p_0)z(k) + \beta(z(k), p_0)v(k)). \tag{3.13}$$



## 4 Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo

Uma vez que foi possível obter uma representação de um sistema não-linear incerto como um sistema linear em tempo discreto (3.12), será discutido neste capítulo o controlador linear robusto que leva este tipo de sistema à estabilidade.

De todos os tipos de controladores MPC discutidos na revisão bibliográfica, Capítulo 2, a escolha do controlador RMPC desenvolvida por Kothare, Balakrishnan e Morari (1996) é a que mais se adequa ao tipo de sistema tratado nesta dissertação. A robustez do controlador às incertezas descritas na forma politópica é uma propriedade muito importante na facilitação do projeto do sistema de controle, para o sistema incerto fruto da linearização aproximada por FL.

O fato do controlador preditivo utilizar otimização baseada em LMIs faz com que o custo computacional na busca por um controle ótimo possa ser pequeno, conforme o número de vértices descrevendo o politopo e variáveis matriciais envolvidas, justificando a combinação de FL mais RMPC. Como será discutido nas seções seguintes, o controlador restringe os estados em um conjunto invariante, facilitando a solução do problema envolvendo as restrições às ações de controle quando se combina ambas as técnicas.

### 4.1 Fundamentos Matemáticos do Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo

O modelo discreto para os sistemas lineares obtidos no capítulo 3 pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} z(k+1) &= Az(k) + Bv(k), \\ y(k) &= Cz(k), \\ [A \ B] &\in \Omega, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $v(k) \in \mathbb{R}$  é a entrada de controle,  $z(k) \in \mathbb{R}^n$  são os estado da planta e  $y(k) \in \mathbb{R}$  a saída de interesse. O conjunto  $\Omega$  é definido como:

$$\Omega = Co\{[A_1 \ B_1], [A_2 \ B_2], \dots, [A_L \ B_L]\}, \tag{4.2}$$

em que  $L$  é o número de vértices do politopo o qual descreve a incerteza do sistema (4.1).

O controlador RMPC desenvolvido por (KOTHARE; BALAKRISHNAN; MORARI, 1996) utiliza o algoritmo min-max para encontrar uma ação de controle por realimentação,

$v(k) = Fz(k)$ , que minimize um limitante superior para uma função custo com horizonte de predição infinito, tal que,

$$\min_{v(k)} \max J_{\infty}(k),$$

em que,

$$J_{\infty}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} [z(k+i|k)^T R_1 z(k+i|k) + v(k+i|k)^T R_2 v(k+i|k)], \quad (4.3)$$

onde  $R_1 > 0$  e  $R_2 > 0$  são matrizes simétricas de dimensões apropriadas e correspondem à ponderações sobre os estados e sinal de controle respectivamente.

A função  $V(z(k)) = z(k)^T P z(k)$ , com  $P > 0$ , dos estados de (4.1), é limitante superior de (4.3) se,

$$\begin{aligned} V(z(k+i+1|k)) - V(z(k+i|k)) &\leq -[z(k+i|k)^T R_1 z(k+i|k) \\ &\quad + v(k+i|k)^T R_2 v(k+i|k)], \end{aligned} \quad (4.4)$$

para  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Por questões de estabilidade e para que  $J_{\infty}(k)$  seja finita,  $z(\infty|k)$  deve ser igual a zero, desta forma,  $V(z(\infty|k)) = 0$ . Ao somar ambos os lados das desigualdades (4.4), de  $i = 0$  até  $i = \infty$ , chega-se em:

$$V(z(k|k)) \geq J_{\infty}(k).$$

Como  $V(z(k|k))$  é função apenas da condição inicial  $z(k|k)$ , este é limitante superior da função custo para qualquer modelo  $[A \ B]$  em  $\Omega$ . Assim,

$$\max_{[A \ B] \in \Omega, i \geq 0} J_{\infty}(k) \leq V(z(k|k)). \quad (4.5)$$

Claramente o algoritmo min-max é conservador, porém, é um procedimento sistemático com robustez garantida.

Feitas as considerações, a ação de controle por realimentação que estabiliza um sistema linear incerto do tipo (4.1) pode ser determinada pelo seguinte teorema:

**Teorema 4.1.1** *Para uma dada condição inicial  $z_0(k) = z(k|k)$  e ao fazer  $P = \gamma Q^{-1}$ , a matriz de realimentação  $F$  pode ser determinada a cada instante de tempo  $k$  ao se resolver*

o seguinte problema de otimização com restrições LMIs:

$$\min_{\gamma, Q} \gamma$$

sujeito a

$$Q > 0,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & z^T \\ z & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} Q & QA_i^T + B_i^T Y^T & QR_1^{1/2} & Y^T R_2^{1/2} \\ A_i Q + B_i Y & Q & 0 & 0 \\ R_1^{1/2} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R_2^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.7)$$

para  $i = 1, \dots, L$ .

$$F = YQ^{-1}. \quad (4.8)$$

**Demonstração** Ao impor ao controlador a condição,

$$V(z(k|k)) = z(k|k)^T P z(k|k) \leq \gamma, \quad (4.9)$$

os estados do sistema passam a ser limitados por um elipsoide (Figura 4). Dessa maneira,

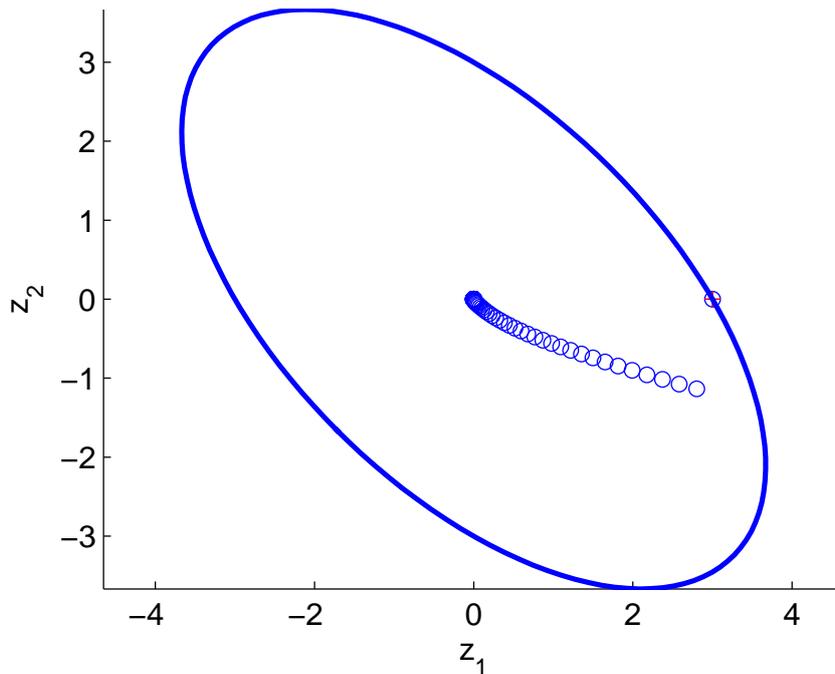


Figura 4 – Elipsoide limitando os estados do sistema.

a estabilidade do sistema é alcançada ao minimizar-se  $\gamma$ .

A desigualdade (4.9) pode ser escrita como uma LMI ao fazer a substituição,  $P = \gamma Q^{-1}$ ,  $Q > 0$ . Ao aplicar o complemento de Schur obtém-se a LMI (4.6).

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito à} \\ & Q > 0, \\ & \begin{bmatrix} 1 & z^T \\ z & Q \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

sendo  $\gamma$  o maior autovalor de (4.10).

Para garantir que  $V(z(k))$  seja um limitante superior de (4.3), a condição (4.4) deve ser satisfeita. Substituindo  $v(z+i|k) = Fz(k+i|k)$  e  $V(z(k)) = z(k)^T P z(k)$  em (4.4) tem-se,

$$\begin{aligned} & z(k+i+1|k)^T P z(k+i+1|k) - z(k+i|k)^T z(k+i|k) \leq \\ & -[z(k+i|k)^T R_1 z(k+i|k) (Fz(k+i|k))^T R_2 (Fz(k+i|k))]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

De acordo com (4.1),  $z(k+i+1|k) = (A + BF)z(k+i|k)$ . Então,

$$z(k+i|k)^T \{P - (A_i + B_i F)^T P (A_i + B_i F) - R_1 - F^T R_2 F\} z(k+i|k) \geq 0. \quad (4.12)$$

A desigualdade matricial (4.12) será definida positiva se,

$$P - (A_i + B_i F)^T P (A_i + B_i F) - R_1 - F^T R_2 F \geq 0. \quad (4.13)$$

Aplicando o complemento de Schur, tem-se

$$\begin{bmatrix} P & (A_i + B_i F)^T P \\ P(A_i + B_i F) & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_1^{1/2} & F^T R_2^{1/2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^{1/2} & 0 \\ R_2^{1/2} F & 0 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.14)$$

Fazendo-se a substituição  $P = \gamma Q^{-1}$ ,

$$\begin{bmatrix} \gamma Q^{-1} & (A_i + B_i F)^T \gamma Q^{-1} \\ \gamma Q^{-1}(A_i + B_i F) & \gamma Q^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_1^{1/2} & F^T R_2^{1/2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^{1/2} & 0 \\ R_2^{1/2} F & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.15)$$

e multiplicando pela matriz

$$\begin{bmatrix} I/\gamma & 0 \\ 0 & I/\gamma \end{bmatrix}$$

tem-se,

$$\begin{bmatrix} Q^{-1} & (A_i + B_i F)^T Q^{-1} \\ Q^{-1}(A_i + B_i F) & Q^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_1^{1/2} & F^T R_2^{1/2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I/\gamma & 0 \\ 0 & I/\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^{1/2} & 0 \\ R_2^{1/2} F & 0 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.16)$$

Aplicando novamente o complemento de Schur, obtém-se a seguinte desigualdade matricial,

$$\begin{bmatrix} Q^{-1} & (A_i + B_i F)^T Q^{-1} & Q_1^{1/2} & F^T R^{1/2} \\ Q^{-1}(A_i + B_i F) & Q^{-1} & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} F & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.17)$$

Ao multiplicar-se à esquerda e à direita por

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

e fazendo a substituição linearizante  $Y = FQ$ , determina-se a LMI (4.7):

$$\begin{bmatrix} Q & QA_i^T + Y^T B_i^T & QR_1^{1/2} & Y^T R_2^{1/2} \\ A_i Q + B_i Y & Q & 0 & 0 \\ R_1^{1/2} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R_2^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.18)$$

Por ser o sistema (4.1) incerto, a matriz (4.18) tem que ser semidefinida positiva para todo par  $[A \ B]$  em  $\Omega$ , de modo a garantir a robustez no controle. A matriz (4.18) é afim nas variáveis de busca, portanto é uma LMI. Como esta LMI é linear em  $A_i$  e  $B_i$ , ao se garantir que (4.18) seja semidefinida positiva para os vértices do politopo em  $\Omega$ , garante-se essa propriedade para todo o conjunto, pois a solução de uma LMI é convexa (TROFINO; COUTINHO; BARBOSA, 2003).

Como acontece na maior parte dos controladores MPC, apesar de se calcular sinais de controle preditos por todo o horizonte de tempo, apenas o primeiro é aplicado ao sistema. Dessa forma, para cada instante de tempo  $k$ , uma nova lei de controle é determinada, ao resolver o problema de otimização segundo o teorema 4.1.1, e aplicada ao sistema.

Uma vez que o algoritmo de otimização encontre solução factível para todas as condições iniciais a cada instante  $k$ , esse processo iterativo leva o sistema à estabilidade, pois, a condição (4.4), além de garantir que  $z(k)^T P z(k)$  seja um limitante superior para a função objetivo (4.3), garante a estabilidade do sistema (4.1). Tendo os estados limitados por um elipsoide, a condição LMI (4.18) estabelece uma lei de controle,  $v(k) = Fz(k)$ , tal que os estados futuros sejam também limitados por elipsóides, porém de raios menores, como mostra a Figura 5.

Essa condição pode ser demonstrada, utilizando a desigualdade (4.4) com  $V(z(k)) = z(k)^T P z(k)$ . Desta forma tem-se,

$$\begin{aligned} z(k+i|k)^T P z(k+i|k) &\geq [z(k+i|k)^T Q_1 z(k+i|k) + \\ & z(k+i|k)^T F^T R F z(k+i|k)] + z(k+1+i|k)^T P z(k+1+i|k). \end{aligned} \quad (4.19)$$

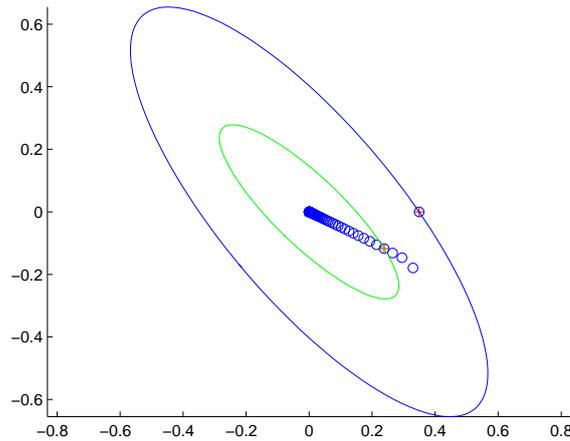


Figura 5 – Estados do sistema incerto limitados por um elipsoide. Em verde um elipsoide de raio menor limitando os estados em um instante de tempo futuro.

O primeiro termo à esquerda da inequação é claramente definido positivo, dessa forma garante-se, para  $z \neq 0$ , que

$$z(k+i|k)^T P z(k+i|k) > z(k+1+i|k)^T P z(k+1+i|k). \quad (4.20)$$

Dessa forma, tem-se que  $z \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ .

Antes de seguir para a próxima seção, faz-se a seguinte definição:

**Definição** Para um sistema incerto do tipo (4.1) e um controlador do tipo,  $v(k) = Fz(k)$ , um conjunto  $S$  é robusto invariante se  $\forall z \in S$ , e  $\forall [A \ B] \in \Omega$ ,  $(A - BF)z \in S$ .

Portanto, o elipsoide que limita os estados no seu interior é um conjunto invariante de acordo com a definição acima.

## 4.2 Relaxação das condições LMIs

Na seção anterior (4.1), demonstrou-se que, para uma dada condição inicial, o algoritmo de otimização sujeito às restrições LMIs do Teorema 4.1.1 estabelece uma restrição aos estados, de forma a manter a trajetória do sistema interna a um elipsoide. Para uma lei de controle,  $v(k) = Fz(k)$ , não há como garantir que o sistema incerto siga uma trajetória específica, porque, para cada modelo  $[A \ B] \in \Omega$ , a planta se comporta de maneira diferente. De modo a garantir a robustez do controlador às incertezas da planta, a lei de controle deve manter todas as possíveis trajetórias internas ao elipsoide.

A depender de como estas trajetórias se comportam, o controlador desenvolvido por Kothare, Balakrishnan e Morari (1996) pode ser conservador, pois há um único elipsoide limitando as possíveis trajetórias para cada par em (4.2).

Uma forma de diminuir este conservadorismo seria determinar para cada par do sistema em  $\Omega$  um elipsoide diferente, limitando os seus respectivos estados. Porém, a matriz de realimentação,  $F = YQ^{-1}$ , obtida pelo teorema 4.1.1 no contexto de estabilidade quadrática, depende diretamente da inversa da matriz de Lyapunov, que da forma aos elipsoides. A solução seria relaxar as condições LMIs, de modo que  $F$  seja independente de  $Q$ .

Os autores Oliveira, Bernussou e Geromel (1999), com o objetivo de reduzir o conservadorismo no teste de estabilidade quadrática de sistemas incertos, desenvolveram um teste em que é possível usar funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Inspirado em seu trabalho, Cuzzola, Geromel e Morari (2002) obtiveram condições suficientes para se obter as relaxações desejadas, gerando o seguinte lema:

**Lema 4.2.1** *Fazendo  $P = \gamma Q^{-1}$  e  $v(k) = Fz(k)$ , as seguintes afirmações abaixo são equivalentes:*

1.  $V(z(k)) = z(k)^T P z(k)$ , é um limitante superior para a função objetivo (4.3).
2. Existe uma matriz simétrica  $Q > 0$  tal que,

$$\begin{bmatrix} Q & QA^T + Y^T B^T & QR_1^{1/2} & Y^T R_2^{1/2} \\ AQ + BY & Q & 0 & 0 \\ R_1^{1/2} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R_2^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.21)$$

3. Existe uma matriz simétrica  $Q > 0$  e uma matriz  $W$  tal que,

$$\begin{bmatrix} W + W^T - Q & WA^T + E^T B^T & WR_1^{1/2} & E^T R_2^{1/2} \\ AW^T + BE & Q & 0 & 0 \\ R_1^{1/2} W^T & 0 & \gamma I & 0 \\ R_2^{1/2} E & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.22)$$

**Demonstração** Assumindo (4.21) como verdadeira, ao multiplicá-la à esquerda por

$$\begin{bmatrix} WQ^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

e à direita pela transposta da matriz anterior, e fazer a substituição  $E = FV^T$ , obtêm-se

$$\begin{bmatrix} WQ^{-1}W^T & WA^T + E^T B^T & WR_1^{1/2} & E^T R_2^{1/2} \\ AW^T + BE & Q & 0 & 0 \\ R_1^{1/2} W^T & 0 & \gamma I & 0 \\ R_2^{1/2} E & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.23)$$

Como essa matriz é semidefinida positiva, a sua diagonal também deve ser. Desse modo, se  $Q^{-1} > 0$ , então  $WQ^{-1}W^T \geq 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} (Q - W)Q^{-1}(Q - W)^T &\geq 0 \\ Q - W^T - W + WQ^{-1}W^T &\geq 0 \\ WQ^{-1}W^T &\geq W + W^T - Q. \end{aligned}$$

Portanto, tem-se que  $WQ^{-1}W^T \geq W + W^T - Q$ , então se a matriz (4.22) for semi-definida positiva, automaticamente a matriz (4.23) também será.

Para demonstrar que (4.22) implica em (4.21), basta multiplicar (4.23) à esquerda por

$$\begin{bmatrix} QW^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

e à direita pela transposta. Note que se (4.22) é factível e  $Q > 0$ , então  $W + W^T - Q \geq 0$  ou  $W + W^T > 0$ , implicando que  $W$  é invertível. ■

O resultado do Lema 4.2.1 é importante, pois permite a proposição do próximo teorema.

**Teorema 4.2.2** *Considere o sistema incerto (4.1) com a descrição politópica das incertezas (4.2). Para uma dada condição inicial  $z_0(k) = z(k|k)$ , a lei de controle por realimentação,  $v(k) = Fz(k)$ , pode ser determinada por um algoritmo de otimização sob as seguintes condições:*

Para  $Q_i > 0$

$$\min_{\gamma, Q_i} \gamma$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 1 & z^T \\ z & Q_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} W + W^T - Q_i & WA_i^T + Z^T B_i^T & WR_1^{1/2} & E^T R_2^{1/2} \\ A_i W^T + B_i E & Q_i & 0 & 0 \\ R_1^{1/2} W^T & 0 & \gamma I & 0 \\ R_2^{1/2} Z & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.25)$$

para  $i = 1, \dots, L$ .

$$F = E(W^T)^{-1}.$$

**Demonstração** Tendo como base o Teorema 4.1.1, como a matriz de realimentação  $F$  não possui mais dependência com a variável matricial  $Q$ , esta pode ser substituída por diferentes  $Q_i$  para cada vértice do politopo.

De acordo com o Lema 4.2.1 as LMIs (4.7) podem ser substituídas pelas LMIs (4.25). ■

Uma propriedade das LMIs é que o seu conjunto de soluções é convexo. Portanto, ao garantir a factibilidade das LMIs (4.24) e (4.25) para os pares  $[A_i \ B_i]$  e  $P_i$ , que representam os vértices do politopo, garante-se a factibilidade para todo o conjunto em  $\Omega$ .

Portanto, o resultado alcançado por Kothare, Balakrishnan e Morari (1996) é um caso particular, no qual a solução das LMIs foram obtidas utilizando apenas uma matriz de Lyapunov  $P$ . Usando-se novamente a propriedade de convexidade das LMIs, o conjunto invariante que anteriormente fora definido por um único  $P$ , em  $z(k)^T P z(k) \leq \gamma$ , agora vale para um novo

$$P = Co\{P_1, P_2, \dots, P_L\}. \quad (4.26)$$

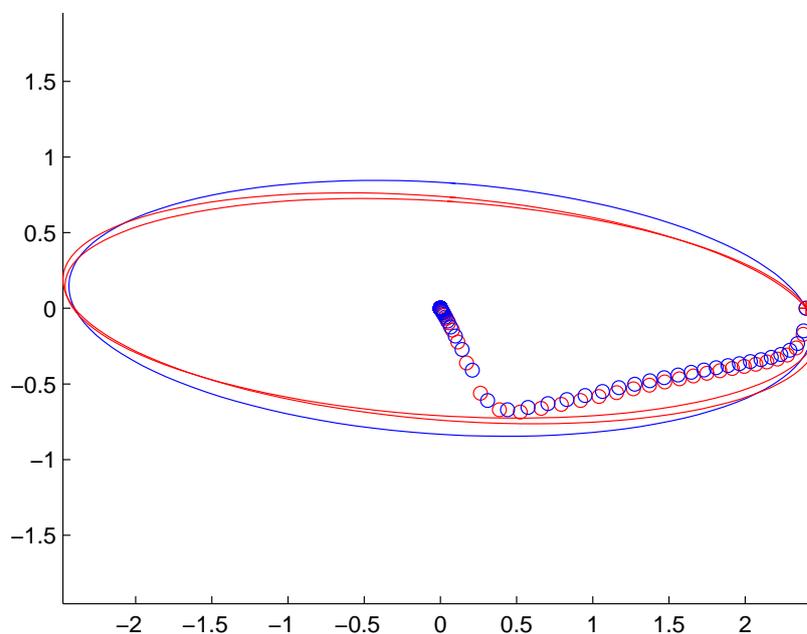


Figura 6 – Trajetória do sistema inscrita em um conjunto de elipsoides. A cor azul para o controlador original e vermelha para o relaxado.

Com o conjunto invariante e a região de factibilidade dimensionados para cada elemento em  $\Omega$ , ver Figura 6, o algoritmo de otimização possui mais graus de liberdade

para obter a matriz de realimentação  $F$ , resultando em uma maior conjunto solução para o controlador relaxado.

### 4.3 Limitação em norma da ação de controle

Uma das dificuldades em se juntar a técnica de linearização por realimentação de estados e controle preditivo baseado em modelo é restringir a ação de controle virtual  $v$  de maneira que a restrição na ação de controle real  $u$  seja adequada. Nesta seção, uma nova condição LMI será adicionada aos algoritmos dos teoremas 4.1.1 e 4.2.1, de forma que, durante toda a trajetória percorrida pelo sistema, a ação de controle seja limitada dentro de valores pré-estabelecidos.

Antes, define-se como controlador regular aquele onde a ação de controle  $v$  é obtida pelo teorema 4.1.1, e relaxado onde é obtida pelas LMIs alternativas do teorema 4.2.1.

#### 4.3.1 Versão Regular

Ao observar a equação (3.13),

$$\begin{aligned} u(k) &= \alpha(z, p_0)z(k) + \beta(z, p_0)v(k) \\ v(k) &= Fz(k) \end{aligned} \quad (4.27)$$

nota-se que um dos fatores que dificultam a restrição é a dependência da lei de controle  $u$  com os estados do sistema  $z$ , normalmente não-linear. Assim, uma restrição fixa sobre o controle virtual  $v$  não garante que os limites impostos sobre  $u$  sejam satisfeitos por toda a trajetória percorrida pelo sistema.

Como foi comentado, a técnica de controle estudada é aplicada em sistemas incertos, tornando impossível a predição precisa de estados futuros pelo RMPC. Pelas condições LMIs do teorema (4.1.1), sabe-se que os estados do sistema são restritos a um conjunto invariante, portando, a lei de controle por realimentação  $F$  deve ser restrita, de forma que a norma de  $u$  fique limitada para todos os estados inscritos no conjunto. Uma condição LMI adicional pode ser determinada para que essa restrição seja satisfeita. Para escrever esta LMI, a equação (4.27) deve ser linearizada.

Uma forma de linearizá-la é escrevê-la como uma função linear incerta com incertezas na forma politópica. Sendo assim, para  $\lambda_j \geq 0$  e  $\sum_{j=1}^L \lambda_j = 1$ , considere a seguinte equação,

$$\begin{aligned} u(k) &= Cz(k) + Dv(k), \\ u(k) &= \sum_{j=1}^L \lambda_j [C_j z(k) + D_j v(k)], \end{aligned} \quad (4.28)$$

em que  $C_j$  e  $D_j$  são ajustados para que (4.27) possa ser escrita como uma combinação convexa de (4.28).  $L$  é o número de vértices do politopo.

Sendo assim, primeiro, limita-se a norma de  $u$  a um limitante superior. Desse modo,

$$\max_{i \geq 0} \|u(k+i|k)\|_2 = \max_{i \geq 0} \|C_j z(k+i|k) + \quad (4.29)$$

$$D_j v(k+i|k)\|_2. \quad (4.30)$$

Usando o fato de que os estados estão inscritos e limitados por um elipsoide, tal que  $z(k)^T Q^{-1} z(k) \leq 1$ , e substituindo  $v(k+i|k) = Fz(k+i|k)$  pode-se obter:

$$\begin{aligned} \max \| [C_j + D_j F] x \|_2 \leq \\ \max_{w^T Q^{-1} w = 1} \| [C_j + D_j F] w \|_2, \end{aligned}$$

sendo a majoração dada em termos de uma variável auxiliar  $w$ . Ao fazer a mudança de variáveis  $w = Q^{1/2} m$ , obtém-se o majorante abaixo para (4.29), o que permite obter uma condição por LMIs mais a frente:

$$\begin{aligned} \max_{i \geq 0} \|u(k+i|k)\|_2 &\leq \max_{m^T m = 1} \| [C_j + D_j F] Q^{1/2} m \|_2 \\ &= \sigma[(C_j + D_j F) Q^{1/2}] \end{aligned}$$

onde  $\sigma$  representa o valor singular máximo.

Assumindo que  $\|u(k)\|_2 \leq u_{\max}$ , o valor singular máximo da norma também fica limitado. Assim,

$$\sigma[(C_j + D_j F) Q^{1/2}] \leq u_{\max}$$

ou,

$$Q^{1/2} (C_j + D_j F)^T (C_j + D_j F) Q^{1/2} \leq u_{\max}^2 I.$$

Multiplicando a direita e a esquerda por  $Q^{1/2}$ ,

$$u_{\max}^2 Q - Q (C_j + D_j F)^T (C_j + D_j F) Q \geq 0,$$

e definindo a mudança de variáveis linearizante,  $F = YQ^{-1}$ , obtém-se

$$u_{\max}^2 Q - (C_j + D_j Y)^T (C_j + D_j Y) \geq 0,$$

que também pode ser escrito como,

$$Q - (C_j + D_j Y)^T u_{\max}^{-2} (C_j + D_j Y) \geq 0.$$

Aplicando o complemento de Schur chega-se a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} Q & (C_j + D_j Y)^T \\ C_j + D_j Y & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0.$$

Como a matriz é linear em  $\begin{bmatrix} C_j & D_j \end{bmatrix}$ , a norma de  $u(k)$  é limitada em  $u_{\max}$  para qualquer combinação Co  $\left\{ \begin{bmatrix} C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_2 & D_2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} C_L & D_L \end{bmatrix} \right\}$  se e somente se

$$\begin{bmatrix} Q & (C_j Q + D_j Y)^T \\ C_j Q + D_j Y & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.31)$$

$$j = 1, 2, \dots, L$$

forem satisfeitas.

Para o sistema linear obtido pelo *método 3*, como não há uma lei de controle linearizante, a limitação em norma da ação de controle é idêntica ao que foi feito em [Kothare, Balakrishnan e Morari \(1996\)](#).

$$\begin{aligned} \|u(k+i|k)\| &\leq u_{\max} \quad i \geq 0 \\ \max_{i \geq 0} \|u(k+i|k)\|_2 &= \max_{i \geq 0} \|YQ^{-1}x(k+i|k)\|_2 \\ &\leq \max_{w^T Q w \leq 1} \|YQ^{-1}w\|_2 \\ &= \sigma(Q^{-1/2}Y^T Y Q^{-1/2}), \end{aligned}$$

$$\sigma(Q^{-1/2}Y^T Y Q^{-1/2}) \leq u_{\max}.$$

Seguindo os procedimentos anteriores e aplicando o complemento de Schur, tem-se

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.32)$$

### 4.3.2 Versão Relaxada

A versão relaxada do controlador, Teorema 4.2.2 é incompatível com a condição LMI (4.31). Diferente do caso regular, Teorema 4.1.1, as relaxações permitem que para cada par  $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \in \Omega$ , a norma do controlador  $u$  seja limitada para os estados inscritos pelos respectivos conjuntos invariantes, diminuindo o conservadorismo e aumentando o grau de liberdade do algoritmo de otimização na busca por uma solução factível.

Para criar uma condição LMI que limite a ação do controlador nessas condições, a LMI (4.31) deve ser relaxada. Assim, se (4.31) for semidefinida positiva, após as multiplicações,

$$\begin{bmatrix} WQ_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & (C_j Q + D_j Y)^T \\ C_j Q + D_j Y & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} WQ_j^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T$$

a matriz

$$\begin{bmatrix} W + W^T - Q_j & WC^T + E^T D_j^T \\ CW^T + DE & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.33)$$

$$E = FW^T \quad j = 1, \dots, L,$$

também será definida positiva.

No caso da LMI (4.32), a sua versão relaxada é obtida ao se multiplicar a matriz pela esquerda e pela direita tal como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & WQ_j^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & WQ_j^{-1} \end{bmatrix}^T \\ & \begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & E \\ W^T & W + W^T - Q_j \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

$j = 1, \dots, L.$



## 5 Exemplos de aplicações

Neste capítulo, apresentam-se comparações numéricas do controle RMPC aplicado em sistemas não-lineares com parâmetros incertos, linearizados pelos diferentes métodos apresentados nesta dissertação. De modo a verificar algum ganho em desempenho, a versão regular do controle RMPC proposta por [Kothare, Balakrishnan e Morari \(1996\)](#) será também comparada com a versão relaxada proposta por [Cuzzola, Geromel e Morari \(2002\)](#) e apresentada nesta dissertação.

Uma métrica custo definida como,

$$J_1 = \sum_{k=1}^n x^T(k)R_1x(k) + u(k)^T R_2u(k), \quad (5.1)$$

é utilizada para auxiliar no comparativo, avaliando os estados e esforço do controlador.

Também serão comparados os valores de  $\gamma$  obtidos pelo controlador regular e relaxado no instante de tempo inicial. Este valor é minimizado através do problema de otimização dos Teoremas [4.1.1](#) e [4.2.1](#). Assim, se espera que o algoritmo que obter o menor valor de  $\gamma$  foi o mais bem sucedido na busca de uma lei de controle que o minimize.

Os algoritmos foram implementados em Matlab, versão 7.14.0.739 (R2012a), usando os pacotes lmittoolbox, Yalmip ([LOFBERG, 2004](#)), e Sedumi ([STURM, 1999](#)) de otimização matemática.

### 5.1 Oscilador de Van der Pol

O oscilador de Van der Pol é um sistema não-linear instável e amortecido. Consiste em um oscilador não-linear autossustentável produzido por um circuito de triodos ([GINOUX; LETELLIER, 2012](#)). Sua dinâmica é representada pela equação diferencial de segunda ordem,

$$\ddot{y} - \mu(1 - y^2)\dot{y} + y = u, \quad (5.2)$$

em que  $y \in \mathbb{R}$  é função do tempo e  $p = \mu \in \Omega_q$  é um parâmetro que representa a não-linearidade do sistema. Nesse exemplo, considera-se que  $\mu$  não é completamente conhecido e pode variar entre 0 e 1, i.e,  $\Omega_q \equiv [0; 1] \in \mathbb{R}$ .

A dinâmica deste sistema pode ser observada no plano de fases (Figura 7), onde nota-se que o sistema se comporta como um atrator em forma de ciclo limite. Para condições iniciais externas a esse ciclo, são produzidas oscilações positivamente amortecidas (Figura 8), em que as amplitudes decaem até atingirem um valor de equilíbrio. Condições iniciais

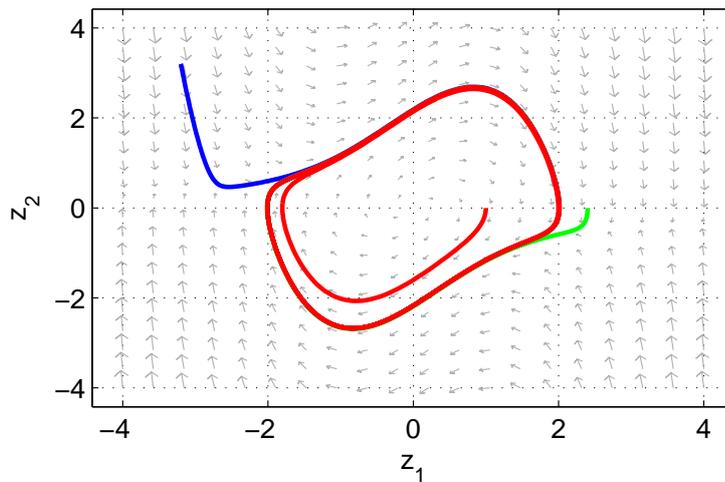


Figura 7 – Plano de fase do Oscilador de Van der Pol

internas ao ciclo limite produzem oscilações negativamente amortecidas (Figura 9) onde se nota que as amplitudes crescem até atingirem um valor limite (MARION; THORNTON, 2003). Para o caso em que o fator de não-linearidade e de amortecimento  $\mu$  for nulo, o

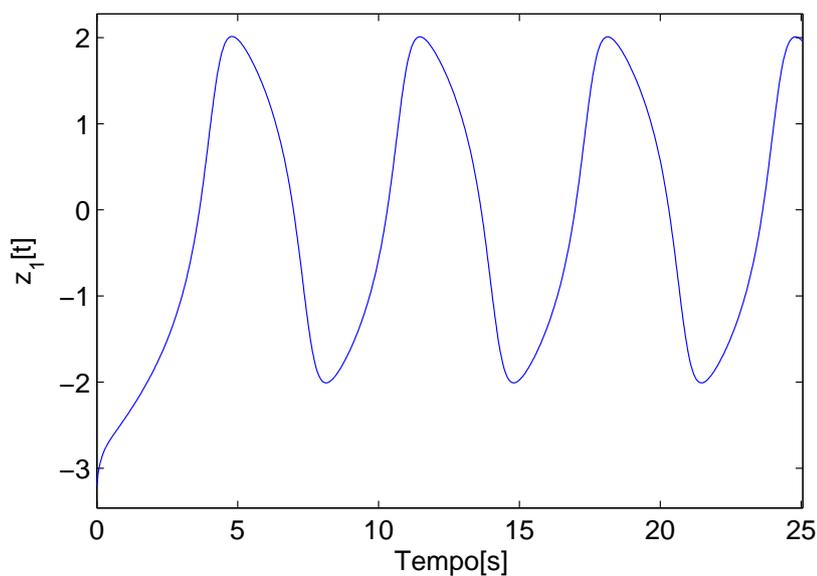


Figura 8 – Resposta no tempo para condição inicial fora ciclo limite para o oscilador de Van der Pol.

sistema reduz-se a um oscilador linear (Figura 10).

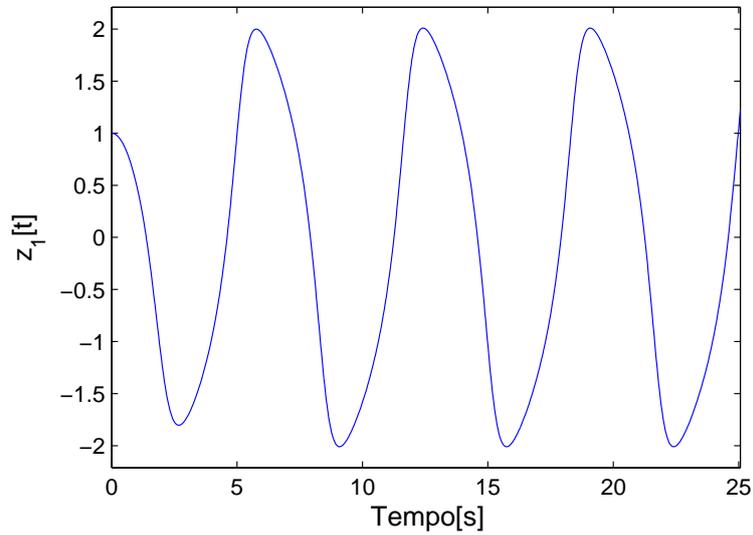


Figura 9 – Resposta no tempo para condição inicial interna ao ciclo limite no oscilador de Van der Pol.

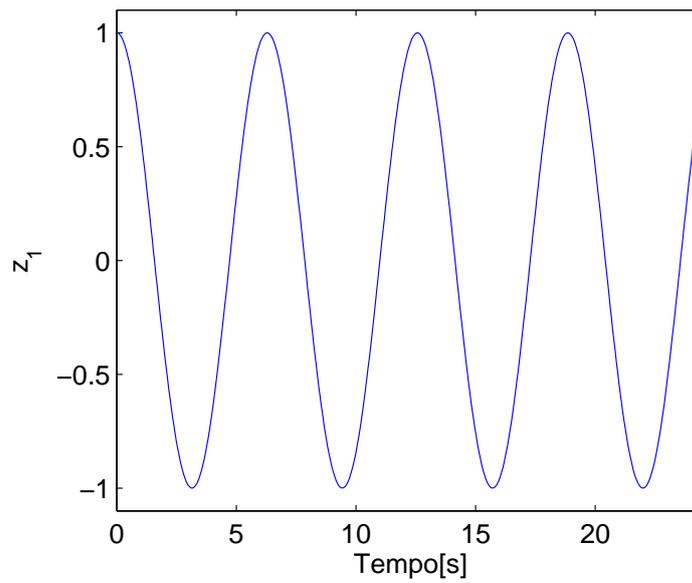


Figura 10 – Oscilador linear fruto de uma particularidade do Oscilador de Van der Pol ( $\mu = 0$ ).

### 5.1.1 Obtenção do Modelo Linear Incerto

O modelo linear incerto do oscilador de Van der Pol pode ser obtido, seguindo as etapas do Capítulo 3. Primeiro, deve-se procurar escrever a equação (5.2) na forma controlada tal como em (3.2). Fazendo-se a mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} z_1 &= y, \\ z_2 &= \dot{y}, \end{aligned}$$

é possível escrever a equação dinâmica na forma de espaços de estados,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z_2 \\ -z_1 + \mu(1 - z_1^2)z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= z_1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Assume-se que os estados  $z \in Z$  e a ação de controle  $u \in U$ , tais que

$$\begin{aligned} Z &= \{z \mid |z_1| \leq 3\}, \\ U &= \{u \mid |u| \leq 10\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Seguindo a notação do Capítulo 3, a matriz (5.3) é reescrita como,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu(1 - z_1^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (5.5)$$

Comparando-se (5.5) e (3.2) tem-se:

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \hat{F}(z, p) &= \begin{bmatrix} -1 & \mu(1 - z_1^2) \end{bmatrix} \\ \hat{g}(z, p) &= 1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ao considerar o valor nominal de  $p_0 = \mu = 1$ , a lei de controle (3.5) é obtida, substituindo os valores de (5.6) em (3.6). Assim,

$$u = \left( v - \begin{bmatrix} -1 & (1 - z_1^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right). \quad (5.7)$$

Aplicando (5.7) em (5.5) chega-se a

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & (\mu - 1)(1 - z_1^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v. \quad (5.8)$$

A equação não-linear (5.8) pode ser escrita como um sistema linear incerto, no qual a incerteza é representada na forma politópica (3.8), cujo os vértices são determinados

tomando-se os valores extremos de  $z$  e  $\mu$ . Sendo assim, para  $\lambda_i \geq 0$  e  $\sum_i^2 \lambda_i = 1$ , tem-se que,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c z + B_c v, \\ A_c &= \sum_{i=1}^L \lambda_i A_c^i, \quad A_c^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_c^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \\ B_c &= \sum_{i=1}^L \lambda_i B_c^i, \quad B_c^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_c^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Além disso, ao escrever a lei de controle como,

$$\begin{aligned} u &= Cz + Dv, \\ u &= \begin{bmatrix} 1 & -(1 - z_1^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + 1v, \end{aligned}$$

por comparação, podem ser determinadas as LMIs (4.31) e (4.33) que restringem a ação de controle. Os vértices do politopo  $C_i$  e  $D_i$  são obtidos, ao variar aos extremos o valor de  $z_1$ . Assim,

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 8 \end{bmatrix}, \\ D_1 &= D_2 = 1. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Pelo *método 2*, seção 3.0.2, o sistema linear incerto do oscilador de Van der Pol é obtido, linearizando (5.8) por Jacobiano. Deste modo, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= J \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & (\mu - 1)(1 - z_1^2) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + J \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) v = \\ \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \mu - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Os vértices do politopo que definem o sistema linear incerto são obtidos nos valores extremos do parâmetro incerto  $\mu$ , portanto, a equação (5.11) pode ser escrita, para  $\lambda_i \geq 0$  e  $\sum_i^2 \lambda_i = 1$ , como:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c z + B_c v, \\ A_c &= \sum_{i=1}^L \lambda_i A_c^i, \quad A_c^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_c^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_c &= \sum_{i=1}^L \lambda_i B_c^i, \quad B_c^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_c^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Para limitar a ação de controle a equação (5.7) também deve ser linearizada usando o Jacobiano. Assim,

$$\begin{aligned} u &= J \left( \begin{bmatrix} 1 & -(1 - z_1^2) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + J([1])v \\ u &= Cz + Dv \\ u &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + [1]v. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Pelo método 3, seção 3.0.3, o sistema linear incerto é obtido, linearizando por Jacobiano a equação (5.3). Deste modo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= J \left( \begin{bmatrix} z_2 \\ -z_1 + \mu(1 - z_1^2)z_2 \end{bmatrix} \right) + J \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) u \\ \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Os vértices do politopo que definem o sistema linear incerto são obtidos nos valores extremos do parâmetro incerto  $\mu$ , de modo que, a equação (5.14) possa ser escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c z + B_c u, \\ A_c &= \sum_{i=1}^L \lambda_i A_c^i, \quad A_c^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_c^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_c &= \sum_{i=1}^L \lambda_i B_c^i, \quad B_c^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_c^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Esta é a forma mais clássica de linearizar um sistema não-linear e como não houve uma linearização por realimentação de estados, a restrição ao controlador  $u$  se dá segundo a equação (4.32).

### 5.1.2 Resultados

Considere o oscilador de Van der Pol na forma de espaço de estados (5.3). Para o projeto RMPC, o sistema foi discretizado segundo (3.12). De forma a verificar a propriedade de robustez, o parâmetro incerto  $\mu$  passado para o controlador foi o seu valor nominal  $\mu = 1$  e para o modelo dinâmico  $\mu = 0,5$ . Os testes foram realizados para a condição inicial  $z_0 = [3 \ 0]^T$  e pesos da função custo (4.3),  $R_1 = 10I$  e  $R_2 = 1$ .

Uma vez definidos os parâmetros acima, a lei de controle linear RMPC é definida para cada instante de tempo  $k$  segundo o teorema 4.1.1 para o controlador regular e segundo o teorema 4.2.1 para o controlador relaxado. Os resultados da simulação são apresentadas na Figura 11a.

Em vermelho, a resposta no tempo dos estados  $z_1$  e  $z_2$  para o sistema (5.3) linearizado pelo método 1 com restrições na ação de controle determinada por (5.10). Na cor verde, o mesmo Oscilador de Van der Pol, porém, linearizado pelo método 2 (5.12) com as restrições ao controlador tal qual (5.13). Em azul, o sistema linearizado por Jacobiano (5.15).

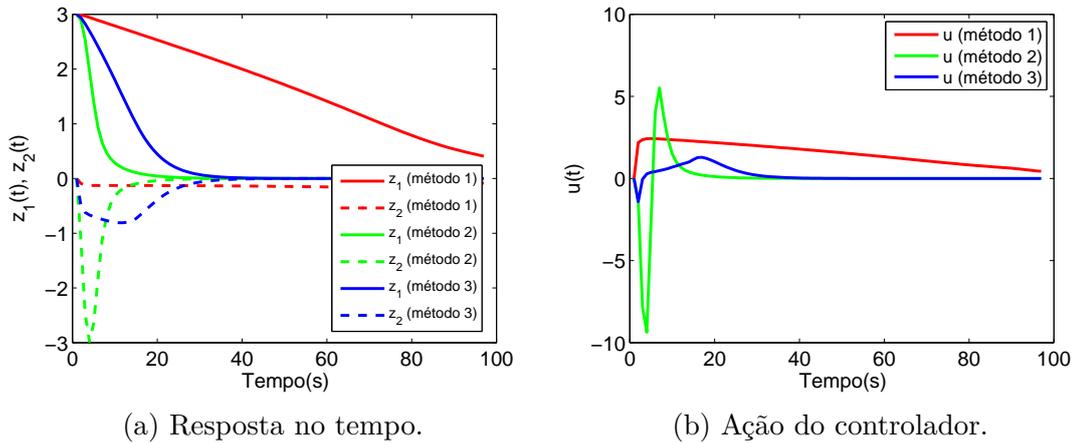


Figura 11 – Resposta no tempo e ação de controle para o oscilador de Van der Pol

As respectivas ações dos controladores são mostradas na Figura 11b. As trajetórias do estado  $z_1$ , nos três casos, são exibidas na Figura 12 junto com os seus conjuntos invariantes.

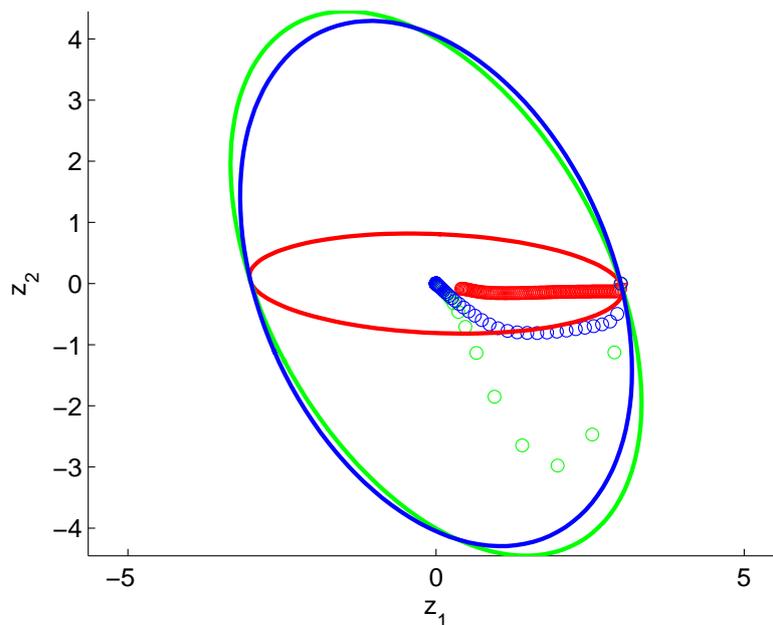


Figura 12 – Trajetória dos estados do sistema confinados em elipsoides

Para a versão relaxada do controlador RMPC, as respostas no tempo para os três métodos de linearização podem ser vistos na Figura 13a. Em seguida, as ações dos

controladores, Figura 13b, e as trajetórias do sistema junto com os conjuntos invariantes para cada vértice do politopo que descreve as incertezas (Figura 14).

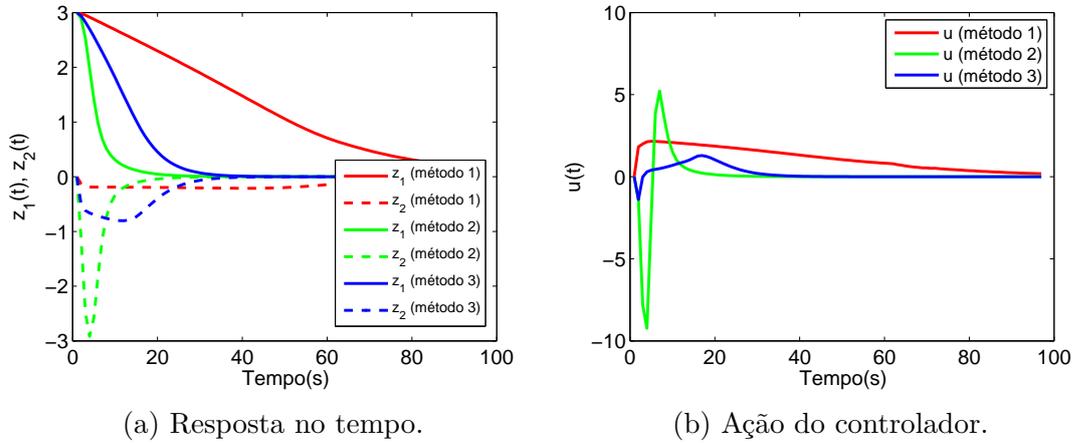


Figura 13 – Resposta no tempo e ação de controle para o Oscilador de Van der Pol controlado pela versão relaxada do RMPC.

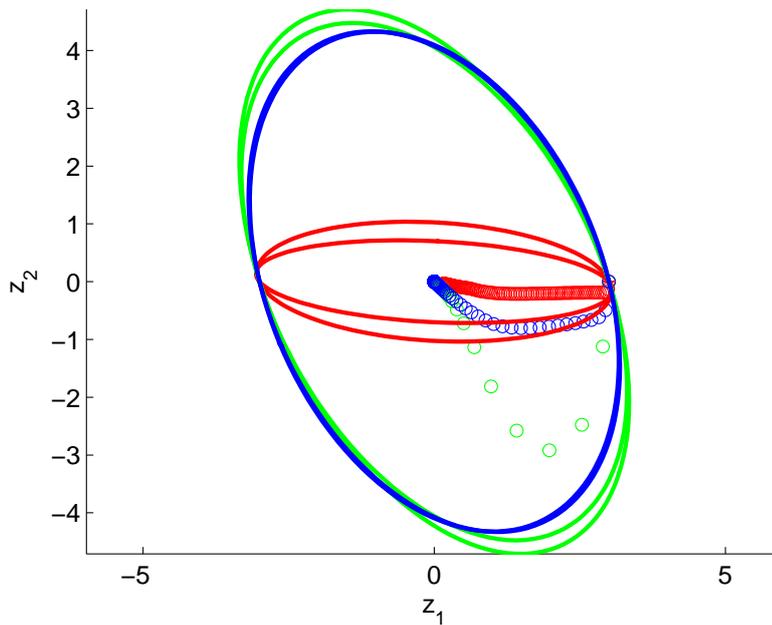


Figura 14 – Trajetória do sistema controlado pela versão relaxada do RMPC.

De modo a comparar os custos envolvendo os estados e a ação de controle do sistema controlado pelas técnicas abordadas acima, fez-se o uso da função custo (5.1) para cada sistema simulado. Os resultados para cada simulação estão organizados na Tabela 1. Os valores de  $\gamma$  para o controlador regular e relaxado obtidos na condição inicial estão dispostos na Tabela 2.

Para verificar a influência das restrições ao sinal de controle, sob as mesmas condições acima, foram realizados testes para o oscilador de Van der Pol sem a restrição

Tabela 1 – Custos do esforço do controlador e dos estados para as respostas no tempo para o Oscilador de Van der Pol

Método	Regular	Relaxado
1	$3,7209 \times 10^3$	$2,6129 \times 10^3$
2	833,7252	820,6246
3	848,6166	852,2653

Tabela 2 – Valores de  $\gamma$  para o Oscilador de Van der Pol.

Método	Regular	Relaxado
1	$2,2463 \times 10^5$	$1,5700 \times 10^5$
2	$1,3994 \times 10^4$	$1,3760 \times 10^4$
3	$1,4564 \times 10^4$	$1,4413 \times 10^4$

na entrada de controle. A resposta no tempo para o sistema linearizado pelos três métodos é exibido na Figura 15a e a ação do controlador na Figura 15b.

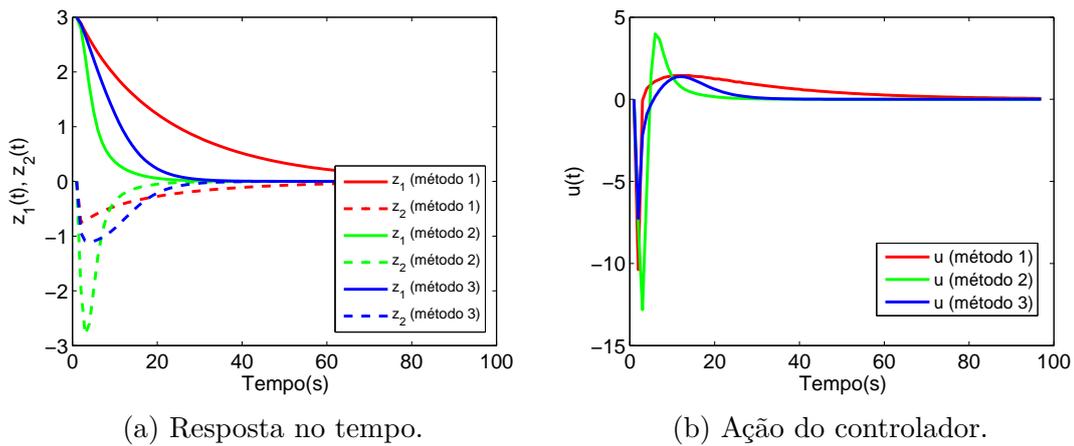
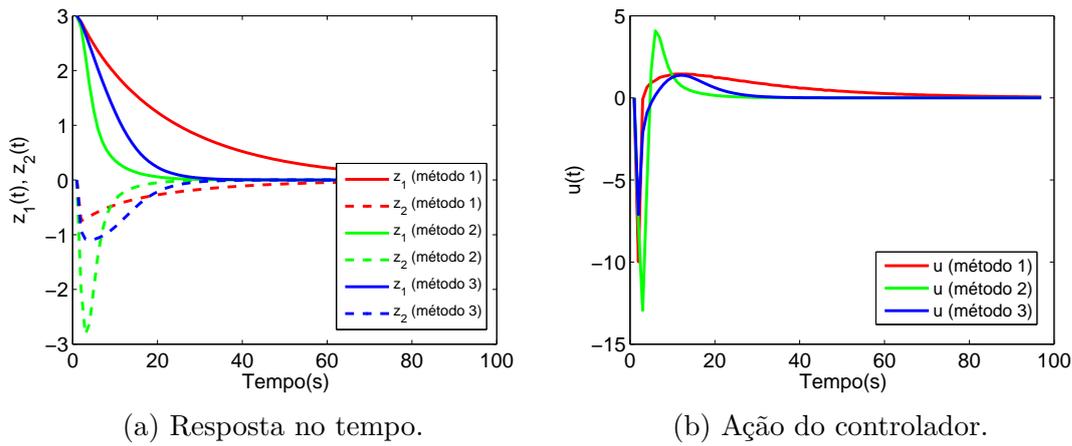


Figura 15 – Resposta no tempo e ação de controle para o Oscilador de Van der Pol controlado pela versão regular do RMPC sem restrições na entrada de controle.

O mesmo teste foi realizado para o controlador utilizando as condições relaxadas do Teorema 4.2.2. A resposta no tempo e a ação do controlador são mostrados na Figura 16.

Os custos dos resultados simulados para o controlador sem restrição ao sinal de controle foram organizados na Tabela 3 e os valores de  $\gamma$  na Tabela 4.

Nota-se que a versão relaxada do controlador, Teorema 4.2.1, foi capaz de encontrar uma lei de controle por realimentação que minimizasse  $\gamma$  com mais eficiência que o controlador regular, Teorema 4.1.1. Este resultado reflete-se em um menor custo obtido nos resultados simulados para o controlador relaxado na maior parte dos casos. Esta diferença de resultado pode ser entendida ao observar que o algoritmo do controlador relaxado



(a) Resposta no tempo.

(b) Ação do controlador.

Figura 16 – Resposta no tempo e ação de controle para o Oscilador de Van der Pol controlado pela versão relaxada do RMPC sem restrições na entrada de controle.

possui grau de liberdade maior que o do regular.

Tabela 3 – Custos do esforço do controlador e dos estados para as respostas no tempo para o Oscilador de Van der Pol sem restrição no sinal de controle

Método	Regular	Relaxado
1	$1,2164 \times 10^3$	$1,2151 \times 10^3$
2	850,7129	856,3322
3	723,8759	723,8089

Tabela 4 – Valores de  $\gamma$  para o Oscilador de Van der Pol sem restrições no sinal de controle.

Método	Regular	Relaxado
1	$2,6049 \times 10^4$	$2,5770 \times 10^4$
2	$1,2330 \times 10^4$	$1,2168 \times 10^4$
3	$1,2898 \times 10^4$	$1,2779 \times 10^4$

### 5.1.3 Influência do Tempo de Amostragem no Desempenho do Controlador

Sabe-se que o desempenho do controlador aplicado em um sistema linear em tempo discreto depende do tempo de amostragem o qual este é submetido. Ao tratar de sistemas incertos discretizados conforme seção 3.1, a influência sobre a performance do controlador é ainda mais crítica devido aos erros causados pela discretização de um sistema incerto. Desta forma, nesta seção serão apresentados os resultados do controlador aplicado ao oscilador de Van der Pol (5.9) para diferentes tempos de amostragem.

A ideia inicial seria utilizar como tempo de amostragem ( $T_s$ ) frações do período de oscilação quando o oscilador não possui amortecimento, i.e., quando  $\mu = 0$  em (5.2).

Porém, para  $T_s > 0,2s$  o controlador regular não foi capaz de estabilizar o sistema. Desta maneira, os testes foram realizados para os seguintes  $T_s$ :  $0,2s$ ;  $0,1s$  e  $0,01s$ .

A Figura 17 mostra os resultados para  $T_s = 0,2s$ . Os resultados para os tempos de

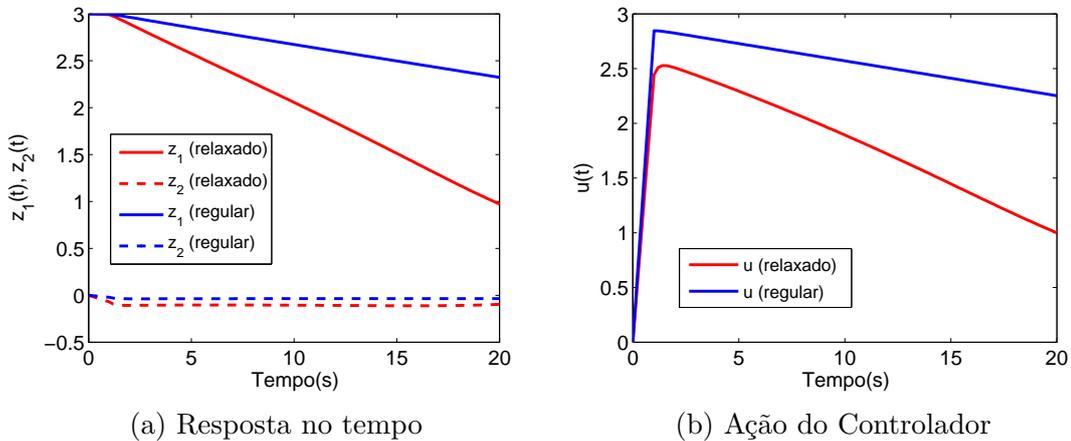


Figura 17 – Resultados para tempo de amostragem  $T_s = 0,2s$ .

amostragem  $T_s = 0,1s$  e  $T_s = 0,01s$  são exibidos nas Figuras 18 e 19 respectivamente.

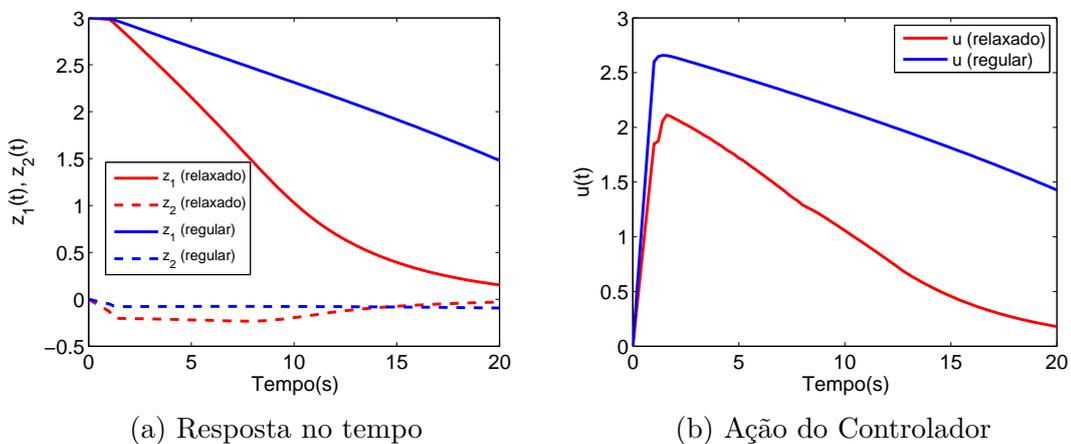


Figura 18 – Resultados para tempo de amostragem  $T_s = 0,1s$ .

Para facilitar a comparação do controlador nestas condições, foi feito o uso da equação (5.1) e os resultados foram organizados na Tabela 5, assim como para os valores de  $\gamma$  na Tabela 6.

Em geral, observa-se que tanto os valores de  $\gamma$  quanto o esforço do controlador aumentam para tempos maiores de amostragem. Os dados confirmam que para  $T_s$  não muito pequeno, os erros causados pela discretização podem diminuir a performance do controlador, ou até mesmo, impossibilitar a sua implementação.

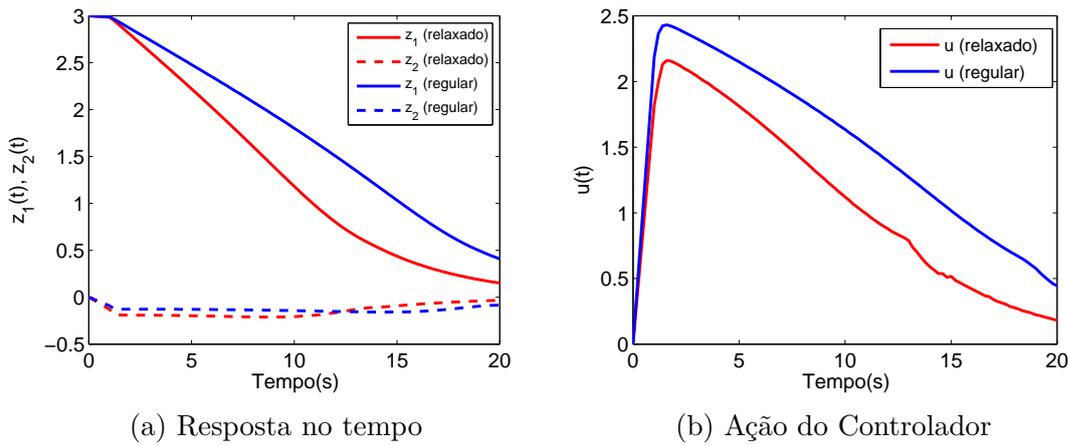


Figura 19 – Resultados para tempo de amostragem  $T_s = 0,01s$ .

Tabela 5 – Custos do esforço do controlador e dos estados para as respostas no tempo para o Oscilador de Van der Pol para diferentes tempos de amostragem

$T_s(s)$	Regular	Relaxado
0,2	$7,5391 \times 10^3$	$4,586 \times 10^3$
0,1	$5,6276 \times 10^3$	$2,4329 \times 10^3$
0,01	$3,7209 \times 10^3$	$2,6129 \times 10^3$

Tabela 6 – Valores de  $\gamma$  para o Oscilador de Van der Pol para diferentes tempos de amostragem.

$T_s$	Regular	Relaxado
0,2	$4,0793 \times 10^4$	$1,3712 \times 10^4$
0,1	$3,7637 \times 10^4$	$1,6315 \times 10^4$
0,01	$2,2463 \times 10^5$	$1,5700 \times 10^5$

## 5.2 Exemplo Genérico

Para dar continuidade às análises do controlador proposto, aplica-se este ao seguinte sistema não-linear:

$$\ddot{x} + 4ax^2 + (x^2 + 1)u = 0 \quad (5.16)$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^2$  representa os estados do sistema,  $u \in \mathbb{R}$  a ação de controle, e  $a$  é um termo incerto, i.e.  $p = a \in \Omega_q$  de valor nominal  $a = 1$ , com  $\Omega_q \equiv [1; 2] \in \mathbb{R}$ .

### 5.2.1 Obtenção do Modelo Linear Incerto

Ao fazer a mudança de variáveis,  $z_1 = x$  e  $z_2 = \dot{x}$ , o sistema acima pode ser escrito na forma de espaço de estados,

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -4az_2^2 - (z_1^2 + 1)u,\end{aligned}\tag{5.17}$$

e pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4az_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -z_1^2 - 1 \end{bmatrix} u.\tag{5.18}$$

Seguindo os procedimentos do Capítulo 3, ao comparar a equação (5.18) com (3.2), obtêm-se os seguintes valores

$$\Upsilon = [0 \ 1], \quad \hat{F}(z, p_0) = [0 \ -4z_2], \quad \hat{g}(z, p_0) = -z_1^2 - 1.$$

A lei de controle que lineariza parcialmente o sistema pode ser determinada ao substituir os valores acima na equação (3.5). Dessa forma,

$$u = \frac{1}{-z_1^2 - 1}(v + 4z_2^2).\tag{5.19}$$

Ao aplicar a lei de controle (5.19) no sistema (5.18), é obtida a equação

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4z_2(1-a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v.\tag{5.20}$$

Ao limitar a variável  $z_2$ , tal que  $|z_2| \leq 1$ , o sistema acima pode ser escrito como um sistema linear incerto. Para  $\lambda_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^2 \lambda_i = 1$ , tem-se

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_c z + B_c v, \\ A_c &= \sum_{i=1}^L \lambda_i A_c^i, \quad A_c^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_c^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \\ B_c &= \sum_{i=1}^L \lambda_i B_c^i, \quad B_c^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_c^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{5.21}$$

A obtenção do modelo linear incerto segundo o método 2, seção 3.0.2, consiste em linearizar a equação, (5.20) utilizando o operador Jacobiano. Dessa forma, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v.\tag{5.22}$$

Nota-se que o termo incerto foi suprimido pela linearização, resultando em apenas um sistema linear com valores nominais.

Pelo método 3, seção 3.0.3, lineariza-se a equação (5.17) por Jacobiano sem uma lei de controle linearizante. Assim,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u. \quad (5.23)$$

Para a condição inicial  $z^T = [4 \ 0]$ , supõe-se que a variável  $z_2$  é limitada tal que  $|z_2| \leq 2$ . Os vértices do politopo que descrevem a incerteza do sistema linearizado pelo método 1 é:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c z + B_c v, \\ A_c &= \sum_{i=1}^L \lambda_i A_c^i, \quad A_c^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_c^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -16 \end{bmatrix}, \\ B_c &= \sum_{i=1}^L \lambda_i B_c^i, \quad B_c^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_c^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para o método 2, o sistema linear incerto obtido é tal que,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v, \quad (5.25)$$

e para o método 3,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u. \quad (5.26)$$

A seguir os resultados das simulações do controle RMPC aplicado ao sistema linearizado pelos métodos apresentados.

## 5.2.2 Resultados

De forma a verificar diferentes propriedades do controlador RMPC aplicado ao sistema linearizado pelos três diferentes métodos, os testes foram realizados sob algumas circunstâncias específicas. A primeira delas tem o objetivo de comparar os efeitos da restrição à entrada de controle, portanto, inicialmente será feita a simulação sem nenhum tipo de restrição e, em seguida, com limitação ao sinal de controle. A segunda tem o objetivo de verificar a robustez do controlador, portanto, inicialmente o teste será feito, utilizando o modelo nominal do sistema, para, em seguida, utilizar um modelo diferente. Para todas as configurações mencionadas, as simulações serão feitas para diferentes condições iniciais, de modo a verificar como se comporta a linearização, quando os estados estão mais afastados da origem.

Como no exemplo anterior, a lei de controle linear RMPC é definida para cada instante de tempo,  $k$ , de acordo com o Teorema 4.1.1 para o controlador regular e segundo

o Teorema 4.2.1 para o controlador relaxado. Para uma condição inicial,  $z_1 = 2$  e  $z_2 = 0$ , e pesos da função custo definidos como

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = 1,$$

a resposta no tempo para o sistema (5.17) linearizado pelos três métodos discutidos acima são exibidos na Figura 20. O esforço do controlador durante o processo pode ser visto na Figura 21. Em vermelho, o sistema linearizado pelo método 1, seção 3.0.1, em verde pelo método 2, seção 3.0.2 e em azul pelo método 3, seção 3.0.3.

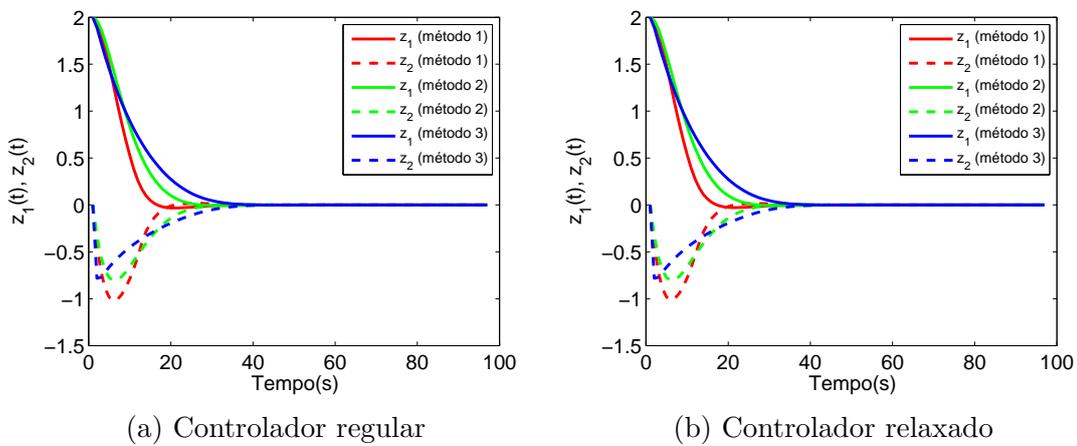


Figura 20 – Resposta no tempo para condição inicial  $z_1 = 2$  e  $z_2 = 0$ .

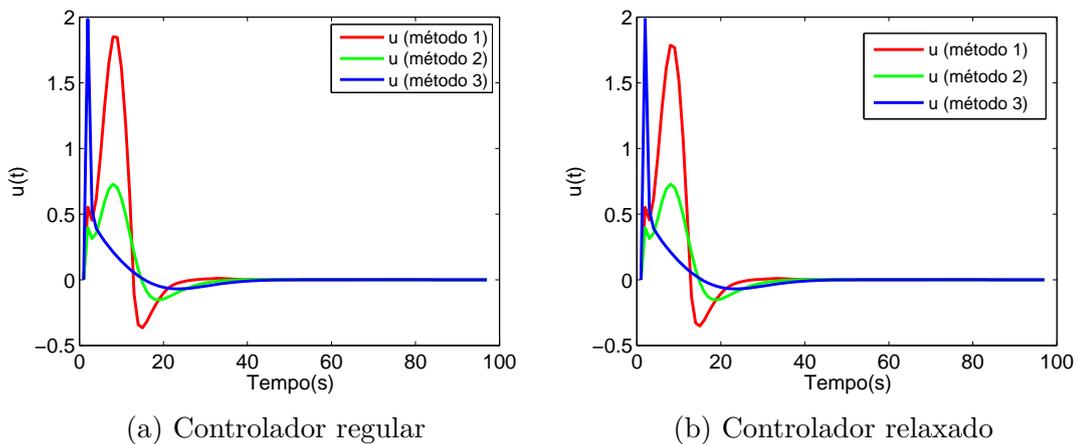


Figura 21 – Esforço do controlador para condição inicial  $z_1 = 2$  e  $z_2 = 0$ .

Em seguida, para a condição inicial,  $z_1 = 4$  e  $z_2 = 0$ , os resultados simulados para a resposta no tempo e para o controlador são mostrados nas Figuras 22 e 23 respectivamente.

Ao observar as equações (5.22) e (5.25) nota-se que os vértices do politopo do sistema linear incerto dependem das condições iniciais. Deste modo, ao se afastar da

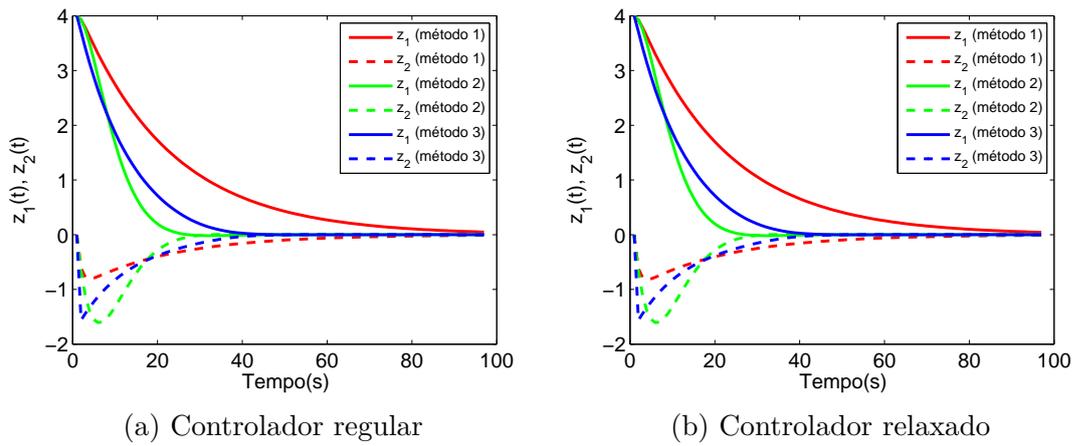


Figura 22 – Resposta no tempo para condição inicial  $z_1 = 4$  e  $z_2 = 0$ .

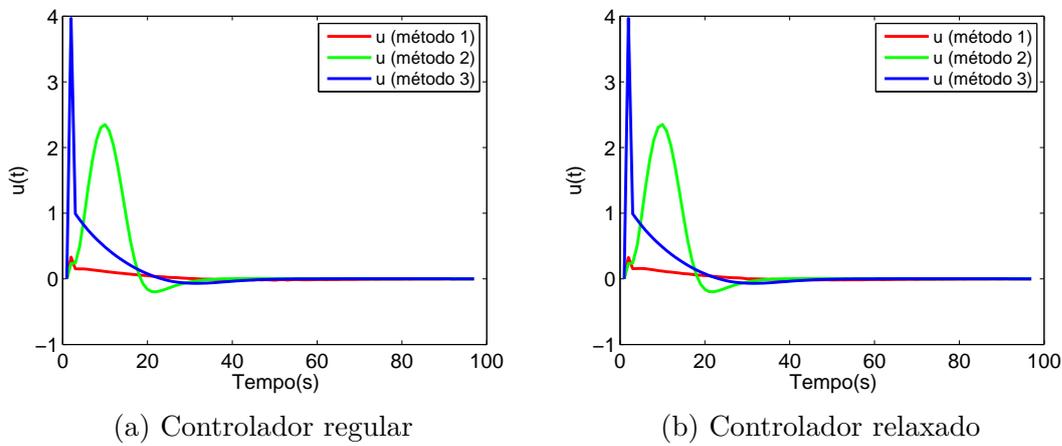


Figura 23 – Esforço do controlador para condição inicial  $z_1 = 4$  e  $z_2 = 0$ .

origem, a descrição do sistema torna-se muito conservadora implicando em um desempenho inferior para o sistema incerto obtido pelo método 1.

Os próximos resultados são para o controlador com restrição na entrada. Para que a lei de controle fique limitada em  $\|u\| < 0,5$ , faz-se necessário determinar as restrições LMIs que restringem a ação do controlador. Para o sistema linearizado pelos métodos 1 e 2, os parâmetros,  $C_i$  e  $D_i$ , das LMIs (4.31) e (4.33) podem ser determinados ao se escrever a lei de controle linearizante (5.19) como,

$$u = Cz + Dv$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4z_2^4}{-z_1^2 - 1} \end{bmatrix} z + \frac{1}{-z_1^2 - 1} v. \quad (5.27)$$

Os vértices do politopo  $C$  e  $D$  são obtidos de acordo com (4.28). Para as condições iniciais  $z_1 = 2$  e  $z_2 = 0$ , tem-se que

$$\begin{aligned} C_1 &= [0 \quad 0], & D_1 &= -0,2 \\ C_2 &= [0 \quad -4], & D_2 &= -1 \end{aligned}$$

para o sistema linearizado pelo método 1 e,

$$\begin{aligned} C_1 &= [0 \quad 0], & D_1 &= -0,059 \\ C_2 &= [0 \quad -16], & D_2 &= -1 \end{aligned} ,$$

quando as condições iniciais são  $z_1 = 4$  e  $z_2 = 0$ .

Para limitar a ação do controlador para o controlador aplicado ao sistema linearizado pelo método 2, a expressão (5.27) deve ser linearizada pelo operador Jacobiano. Assim, os vértices da equação (4.28) são, independente da condição inicial, iguais a:

$$\begin{aligned} C_1 &= [0 \quad 0], & D_1 &= -1 \\ C_2 &= [0 \quad 0], & D_2 &= -1 \end{aligned} .$$

Os resultados simulados para o controle do sistema (5.17), utilizando o controlador RMPC com restrição na entrada, para a condição inicial  $z_1 = 2$  e  $z_2 = 0$ , são exibidos nas Figuras 24 e 25.

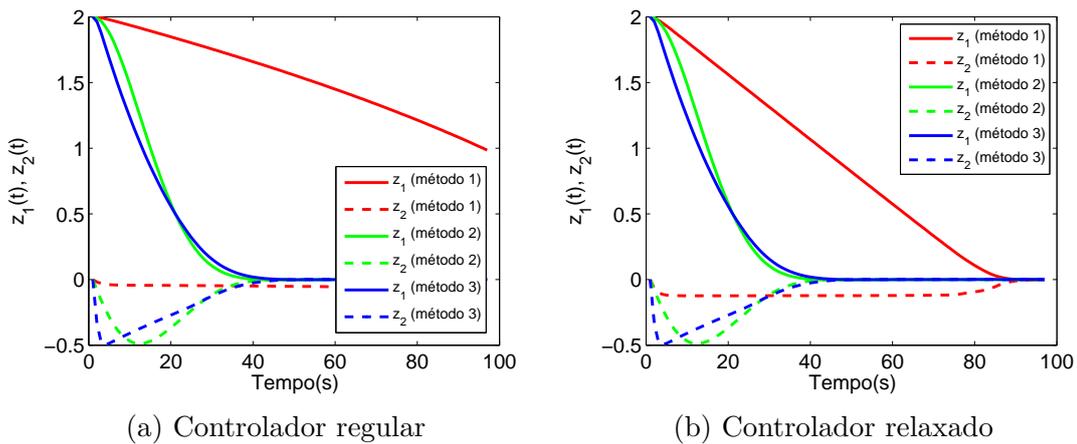


Figura 24 – Resposta no tempo para o controlador com restrições e condição inicial  $z_1 = 2$  e  $z_2 = 0$ .

A restrição na ação de controle foi respeitada durante toda a simulação, porém, ao escrever a lei de controle como uma função linear incerta, as restrições tornam-se muito conservadoras, resultando em um controlador de desempenho mais lento. Devido ainda à linearização, o desempenho é mais crítico para as condições iniciais mais afastadas da origem, como mostram as Figuras 26 e 27, para a condição inicial  $z_1 = 4$  e  $z_2 = 0$ .

Nota-se que, ao utilizar as condições LMIs do controlador regular, o algoritmo de otimização não foi capaz de encontrar uma lei de controle por realimentação que estabilizasse o sistema linearizado pelo método 1, seção 3.0.1, e por isso não foi exibido no gráfico. Dessa forma, fica evidente que, ao utilizar as novas condições LMIs, o algoritmo de otimização possui um conjunto de soluções maior, podendo resolver problemas que pelo antigo controlador eram ineficazes.

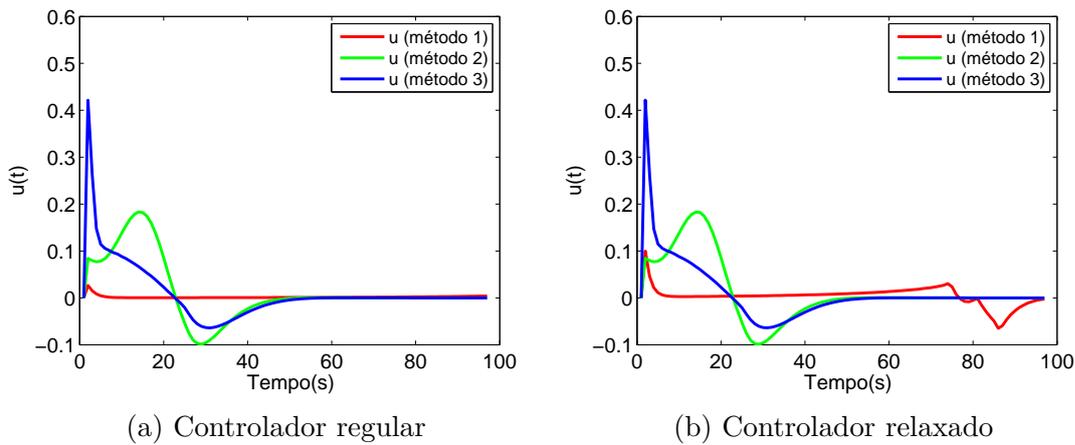


Figura 25 – Esforço do controlador com restrição em norma e condição inicial  $z_1 = 2$  e  $z_2 = 0$ .

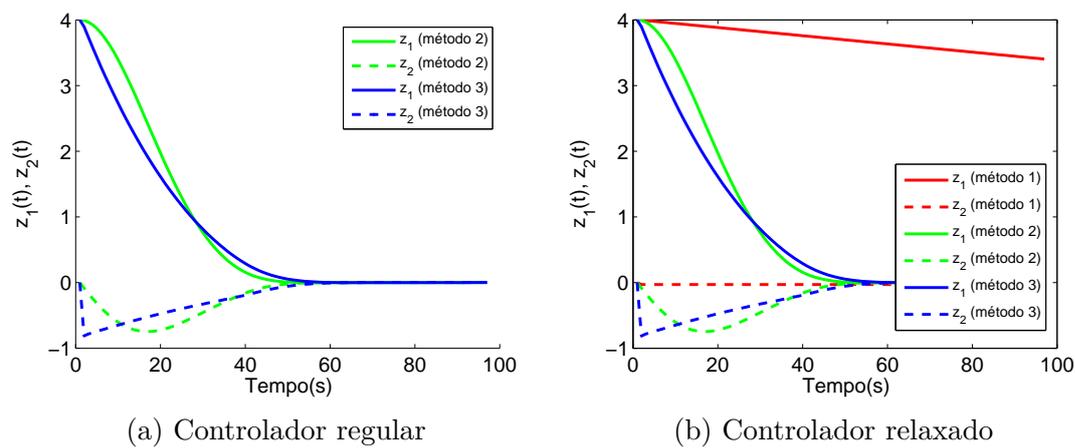


Figura 26 – Resposta no tempo para o controlador com restrições e condição inicial  $z_1 = 4$  e  $z_2 = 0$ .

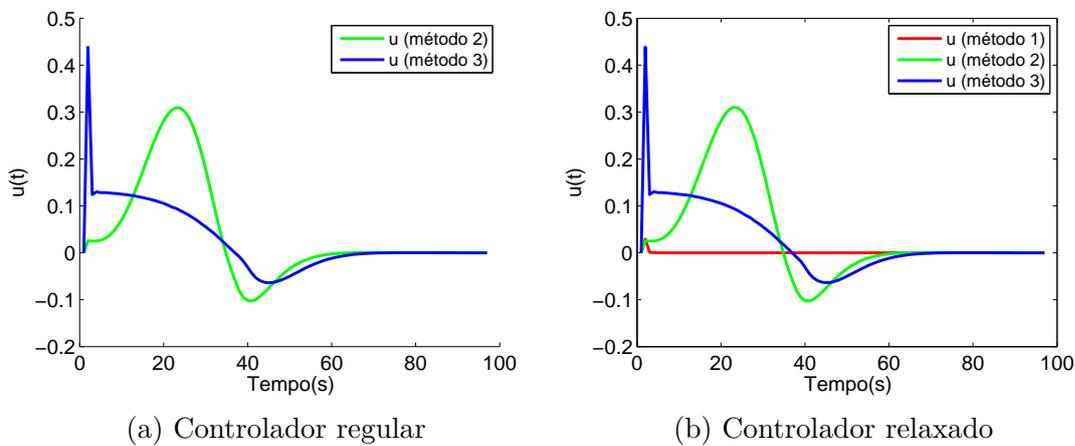


Figura 27 – Esforço do controlador com restrição em norma e condição inicial  $z_1 = 4$  e  $z_2 = 0$ .

As restrições podem ser menos conservadoras, caso as variáveis  $C_i$  e  $D_i$  pudessem ser ajustadas livremente, com o objetivo de melhorar o desempenho do controlador. Matematicamente, não se garante a limitação em norma para todos os estados limitados pelo conjunto invariante, porém, em alguns casos, isso não é um problema. Por exemplo, fazendo

$$\begin{aligned} C_1 &= [0 \ 0], & D_1 &= -0,2 \\ C_2 &= [0 \ 0], & D_2 &= -1 \end{aligned}$$

a resposta no tempo e a ação do controlador para as condições iniciais,  $z_1 = 2$  e  $z_2 = 0$ , conforme a Figura 28, possuem um desempenho superior ao visto na Figura 24 e ainda assim, o limite  $\|u\| < 0,5$  foi respeitado.

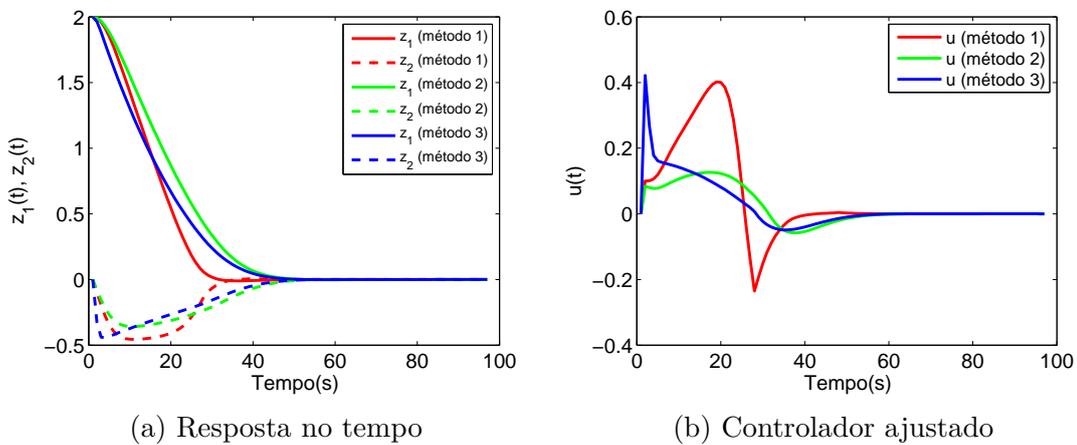
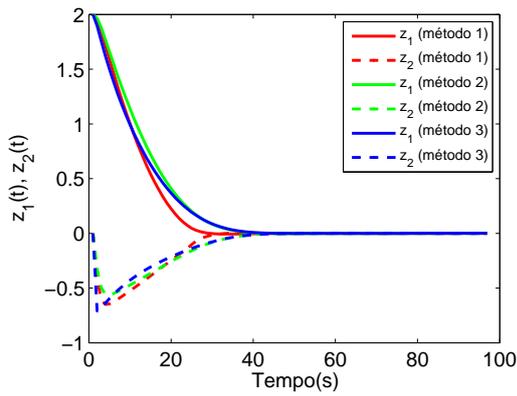


Figura 28 – Resposta no tempo e controle para o controlador com restrições ajustadas e condição inicial  $z_1 = 2$  e  $z_2 = 0$ .

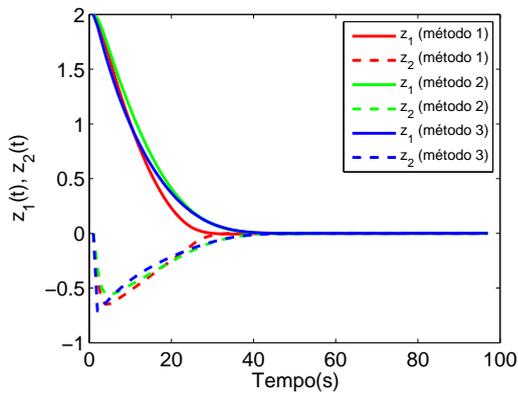
Dando continuidade, de modo a verificar a robustez do controlador, foi simulado o controle do sistema (5.17), utilizando o valor  $a = 2$  para o termo desconhecido. Nas Figuras 29 e 30, são apresentados os resultados da simulação para a condição inicial  $z_1 = 2$  e  $z_2 = 0$ . Para as condições iniciais,  $z_1 = 4$  e  $z_2 = 0$ , os resultados simulados são exibidos nas Figuras 31 e 32.

Nota-se que, para a condição inicial,  $z_1 = 4$  e  $z_2 = 0$ , o desempenho do controlador linearizado diretamente por Jacobiano foi superior aos linearizados por realimentação de estados. Observe que para condições iniciais afastadas da origem, os vértices do politopo podem gerar sistemas lineares com comportamentos muito distintos, portanto, a lei de controle robusta, por vezes é muito conservadora. Todavia, a estabilidade robusta é garantida, mesmo que com um desempenho inferior.

Por fim, as Tabelas 7, 8, 9 e 10 sintetizam os resultados simulados para o sistema não-linear do exemplo genérico. Assim como no caso do Oscilador de Van der Pol, os valores de  $\gamma$  confirmam uma tendência de que o algoritmo de otimização com as novas condições

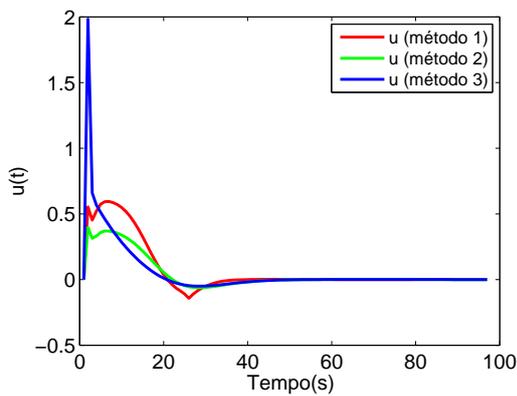


(a) Controlador regular

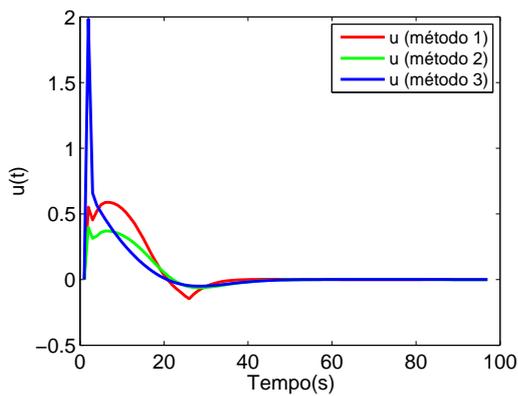


(b) Controlador relaxado

Figura 29 – Resposta no tempo para o controlador com parâmetros diferentes do modelo e condição inicial  $z_1 = 2$  e  $z_2 = 0$ .

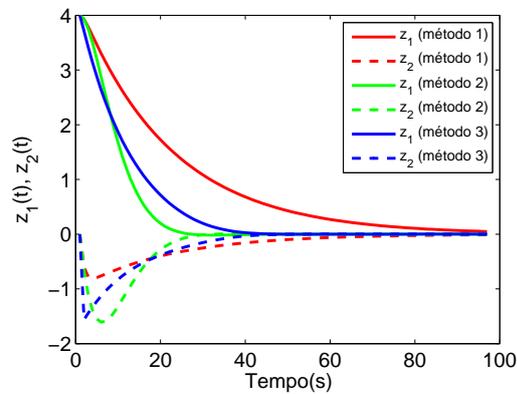


(a) Controlador regular

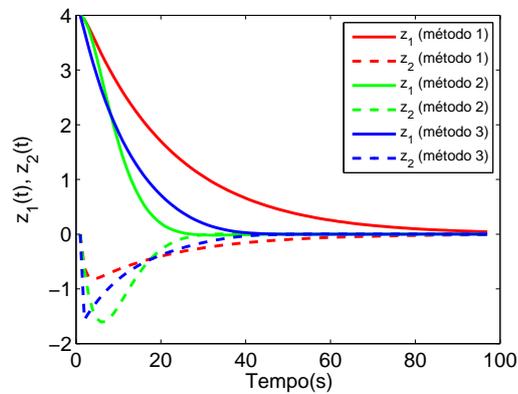


(b) Controlador relaxado

Figura 30 – Esforço do controlador utilizando parâmetros diferentes do modelo e condição inicial  $z_1 = 2$  e  $z_2 = 0$ .



(a) Controlador regular



(b) Controlador relaxado

Figura 31 – Resposta no tempo para o controlador com parâmetros diferentes do modelo e condição inicial  $z_1 = 4$  e  $z_2 = 0$ .

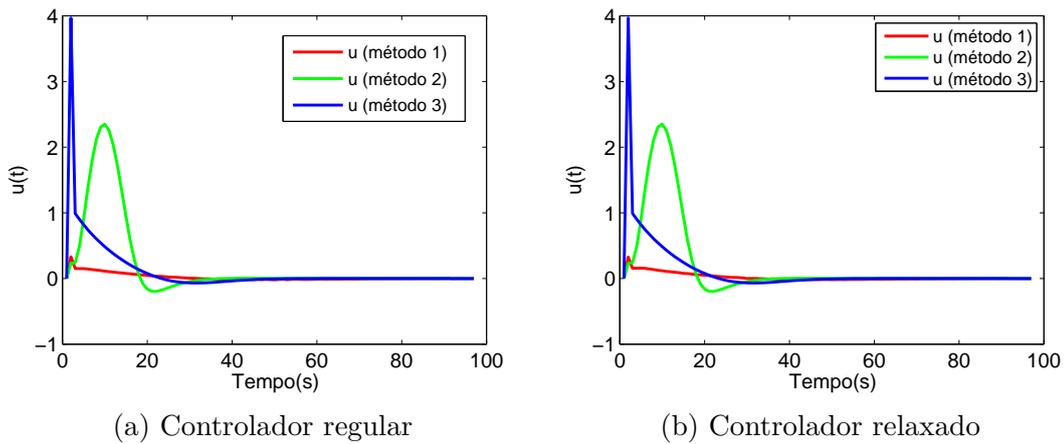


Figura 32 – Esforço do controlador, utilizando parâmetros diferentes do modelo e condição inicial  $z_1 = 4$  e  $z_2 = 0$ .

LMIs possui desempenho superior à aquela apresentada por [Kothare, Balakrishnan e Morari \(1996\)](#).

Tabela 7 – Custos do esforço do controlador regular e dos estados para as respostas no tempo para o sistema do exemplo genérico.

Controlador regular		Condição Inicial	
		$z_1 = 2, z_2 = 0$	$z_1 = 4, z_2 = 0$
Controlador s/ restrição	Método 1	46,6453	203,2086
	Método 2	34,3409	160,7663
	Método 3	33,8949	138,5710
Controlador c/ restrição	Método 1	240,0894	–
	Método 2	47,9230	245,4942
	Método 3	39,7486	187,0938
Controlador c/ parâmetros diferentes	Método 1	36,2995	203,2086
	Método 2	37,7464	160,7663
	Método 3	37,1438	138,5710

### 5.3 Considerações Sobre o Tipo de Sistema a ser Controlado

Alguns dos resultados obtidos neste capítulo mostram que, o controlador aplicado ao sistema linearizado pelo método 1 teve um desempenho inferior aos demais métodos. Apesar da performance inferior, o sistema linear incerto obtido desta forma, é o que melhor representa o sistema não-linear em toda a sua faixa de incerteza.

Apenas uma classe muito restrita de sistemas não-lineares incertos permite ser representada por um sistema linear incerto. A metodologia apresentada no Capítulo 3 pode facilmente ser ampliada para plantas com mais de uma entrada e saída, porém, a condição de que  $\hat{f}(z, p) = \hat{F}(z, p)z$ , da equação 3.2, e que  $\hat{F}(z, p)$  seja limitado para todo

Tabela 8 – Valores de  $\gamma$  do controlador regular para o sistema do exemplo genérico.

Controlador regular		Condição Inicial	
		$z_1 = 2, z_2 = 0$	$z_1 = 4, z_2 = 0$
Controlador s/ restrição	Método 1	$1,7825 \times 10^3$	$2,5803 \times 10^4$
	Método 2	695,0589	$2,7798 \times 10^3$
	Método 3	695,0589	$2,7798 \times 10^3$
Controlador c/ restrição	Método 1	$3,1075 \times 10^4$	–
	Método 2	$1,0091 \times 10^3$	$5,3027 \times 10^3$
	Método 3	$1,0091 \times 10^3$	$5,3027 \times 10^3$
Controlador c/ parâmetros diferentes	Método 1	$1,7825 \times 10^3$	$2,5803 \times 10^4$
	Método 2	695,0589	$2,7798 \times 10^3$
	Método 3	695,0589	$2,7798 \times 10^3$

Tabela 9 – Custos do esforço do controlador relaxado e dos estados para as respostas no tempo para o sistema do exemplo genérico.

Controlador relaxado		Condição Inicial	
		$z_1 = 2, z_2 = 0$	$z_1 = 4, z_2 = 0$
Controlador s/ restrição	Método 1	45,2051	200,3756
	Método 2	34,3411	160,7811
	Método 3	33,8943	138,5709
Controlador c/ restrição	Método 1	116,0369	$1,3326 \times 10^3$
	Método 2	47,9216	245,4982
	Método 3	39,7447	187,0723
Controlador c/ parâmetros diferentes	Método 1	36,2406	200,3756
	Método 2	37,7474	160,7811
	Método 3	37,1434	138,5709

$z \in Z$  e  $p \in \Omega_q$ , é difícil de ser obtida para sistemas com múltiplas entradas e saídas. Esta exigência também faz com que esta representatividade fique pobre a medida que as condições iniciais se afastam da origem, ocasionando em controladores conservadores ou mesmo ineficazes.

Tabela 10 – Valores de  $\gamma$  do controlador relaxado para o sistema do exemplo genérico.

Controlador regular		Condição Inicial	
		$z_1 = 2, z_2 = 0$	$z_1 = 4, z_2 = 0$
Controlador s/ restrição	Método 1	$1.7731 \times 10^3$	$2,5790 \times 10^4$
	Método 2	695,0162	$2,7801 \times 10^3$
	Método 3	695,0162	$2,7801 \times 10^3$
Controlador c/ restrição	Método 1	$6,6146 \times 10^3$	$2,0578 \times 10^5$
	Método 2	$1,0089 \times 10^3$	$5,3030 \times 10^3$
	Método 3	$1,0089 \times 10^3$	$5,3030 \times 10^3$
Controlador c/ parâmetros diferentes	Método 1	$1.7731 \times 10^3$	$2,5790 \times 10^4$
	Método 2	695,0162	$2,7801 \times 10^3$
	Método 3	695,0162	$2,7801 \times 10^3$



## 6 Considerações Finais

### 6.1 Conclusões

No presente trabalho, foi apresentado um processo sistemático para o projeto de um controlador para uma classe de sistemas não-lineares incertos com restrição na entrada de controle, usando-se uma combinação de linearização por realimentação de estados (FL) e projeto de controladores MPC robustos (RMPC).

Inicialmente, foi apresentada uma visão geral do controlador proposto e comentou-se sobre os desafios em se unir FL e RMPC quando o sistema não-linear original possui restrições na entrada.

Uma metodologia para escrever um sistema não-linear incerto como um sistema linear, com incertezas paramétricas, através de um laço de controle linearizante por FL foi desenvolvida. Em seguida, condições suficientes para o projeto do controlador RMPC foram apresentadas na forma de desigualdades matriciais lineares (LMI) relaxadas e regulares.

Finalmente, resultados obtidos em simulação indicam um ganho em desempenho quando se faz uso, no projeto do controlador RMPC, das condições LMI relaxadas. Para algumas condições iniciais, apenas o algoritmo relaxado foi capaz de achar uma solução factível, de modo que, uma análise mais apurada mostra que a versão regular é um caso particular da versão relaxada.

### 6.2 Propostas de Trabalhos Futuros

Como propostas de trabalho futuro, podem ser ressaltados alguns itens:

- Investigar a incorporação das incertezas na transformação não-linear de coordenadas para se projetar o controlador FL;
- Fazer o uso de uma técnica de discretização mais apropriada para sistemas lineares incertos;
- Buscar uma nova forma de escrever o sistema linear incerto de modo a estender os resultados obtidos para uma classe mais geral de sistemas não-lineares;
- Comparar o desempenho entre um controlador MPC aplicado diretamente a um sistema não-linear com um aplicado a um sistema linearizado por FL. Deste modo é possível verificar em quais condições justifica-se o uso da combinação de FL com MPC.

Por fim, é importante ressaltar que parte dos resultados desta dissertação deram origem ao aceite de um artigo ([SOUZA; PALHARES; TORRES, 2015](#)) na edição de 2015 do Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente.

# Referências

- ALLWRIGHT, J. On min-max model-based predictive control. *Advances in Model-Based Predictive Control*, 1994. Citado na página 27.
- BADGWELL, T. A. Robust model predictive control of stable linear systems. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 68, n. 4, p. 797–818, 1997. Citado na página 26.
- BEDROSSIAN, N. S. *Nonlinear control using linearizing transformations*. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 89.
- BEMPORAD, A.; BORRELLI, F.; MORARI, M. Piecewise linear optimal controllers for hybrid systems. In: IEEE. *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*. [S.l.], 2000. v. 2, p. 1190–1194. Citado na página 32.
- BEMPORAD, A. et al. Model predictive control: a multi-parametric programming approach. *Computer Aided Chemical Engineering*, Elsevier, v. 8, p. 301–306, 2000. Citado na página 21.
- BEMPORAD, A.; MORARI, M. Robust model predictive control: A survey. In: *Robustness in Identification and Control*. [S.l.]: Springer, 1999. p. 207–226. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- BEMPORAD, A. et al. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, Elsevier, v. 38, n. 1, p. 3–20, 2002. Citado na página 31.
- BOOM, T. van den. Robust nonlinear predictive control using feedback linearization and linear matrix inequalities. *Proceedings of the American Control Conference*, v. 5, n. June, p. 3068–3072, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 29.
- BRAGA, M. F. et al. Discretização e controle por realimentação de estados de sistemas lineares incertos. *XI SBAI, Fortaleza, CE, Brasil*, p. 1–6, 2013. Citado na página 39.
- CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. *Model Predictive Control*. [S.l.]: Springer, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.
- CAMPO, P. J.; MORARI, M. Robust model predictive control. In: IEEE. *Proceedings of the American Control Conference, 1987*. [S.l.], 1987. p. 1021–1026. Citado na página 27.
- CHEN, C.-T. *Linear system theory and design*. [S.l.]: Oxford University Press, Inc., 1995. Citado na página 38.
- CHEN, W.-H.; BALLANCE, D. J.; GAWTHROP, P. J. Optimal control of nonlinear systems: a predictive control approach. *Automatica*, Elsevier, v. 39, n. 4, p. 633–641, 2003. Citado na página 28.
- CHOI, J.-Y.; CHWA, D.; KIM, M.-S. Adaptive control for feedback-linearized missiles with uncertainties. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, IEEE, v. 36, n. 2, p. 467–481, 2000. Citado na página 29.

- COCKBURN, J.; MORTON, B. Linear fractional representations of uncertain systems. *Automatica*, v. 33, n. 7, p. 1263–1271, 1997. Citado na página 26.
- CUZZOLA, F. A.; GEROMEL, J. C.; MORARI, M. An improved approach for constrained robust model predictive control. *Automatica*, Elsevier, v. 38, n. 7, p. 1183–1189, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 19, 27, 47 e 55.
- DENG, J.; BECERRA, V. M.; STOBART, R. Input constraints handling in an mpc/feedback linearization scheme. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, v. 19, p. 219–232, 2009. Citado na página 31.
- FERRAU, H.; BOCK, H.; DIEHL, M. An online active set strategy to overcome the limitations os explicit mpc. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007. Citado na página 32.
- GILBERT, E. G.; KOLMANOVSKY, I. Discrete-time reference governors for systems with state and control constraints and disturbance inputs. In: IEEE. *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, 1995*. [S.l.], 1995. v. 2, p. 1189–1194. Citado na página 28.
- GILBERT, E. G.; TAN, K. T. Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 36, n. 9, p. 1008–1020, 1991. Citado na página 28.
- GILI, P. A.; BATTIPEDE, M. Adaptive neurocontroller for a nonlinear combat aircraft model. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 24, n. 5, p. 910–917, 2001. Citado na página 29.
- GINOUX, J.-M.; LETELLIER, C. Van der pol and the history of relaxation oscillations: Toward the emergence of a concept. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing, v. 22, n. 2, p. 023120, 2012. Citado na página 55.
- ISIDORI, A. *Nonlinear control systems*. [S.l.]: Springer, 1995. v. 1. Citado 4 vezes nas páginas 17, 35, 88 e 90.
- JONES, C. N.; MORARI, M. Polytopic approximation of explicit model predictive controllers. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 55, n. 11, p. 2542–2553, 2010. Citado na página 32.
- KEERTHI, S. a.; GILBERT, E. G. Optimal infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems: Stability and moving-horizon approximations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Springer, v. 57, n. 2, p. 265–293, 1988. Citado na página 24.
- KOKOTOVIĆ, P.; ARCAK, M. Constructive nonlinear control: a historical perspective. *Automatica*, Elsevier, v. 37, n. 5, p. 637–662, 2001. Citado na página 17.
- KOLAVENNU, S.; PALANKI, S.; COCKBURN, J. C. Robust controller design for multivariable nonlinear systems via multi-model H<sub>2</sub>/H<sub>∞</sub> synthesis. *Chemical Engineering Science*, v. 56, n. 14, p. 4339–4349, jul. 2001. ISSN 00092509. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 89.

KONG, X.; LIU, X.; YAO, X. Convergence guaranteed nonlinear constraint model predictive control via I/O linearization. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2013, 2013. Citado na página 31.

KOTHARE, M.; BALAKRISHNAN, V.; MORARI, M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, v. 32, p. 1361–1379, 1996. Citado 9 vezes nas páginas 19, 25, 27, 41, 46, 49, 52, 55 e 75.

KOUVARITAKIS, B.; CANNON, M. *Non-linear Predictive Control: theory and practice*. [S.l.]: Iet, 2001. Citado na página 28.

KURTZ, M. J.; HENSON, M. A. Input-output linearizing control of constrained nonlinear processes. *Journal of Process Control*, Elsevier, v. 7, n. 1, p. 3–17, 1997. Citado na página 30.

KWON, W.; PEARSON, A. A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 22, n. 5, p. 838–842, 1977. Citado na página 23.

KWON, W.; PEARSON, A. On feedback stabilization of time-varying discrete linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 23, n. 3, p. 479–481, 1978. Citado na página 23.

KWON, W. H.; BRUCKSTEIN, A.; KAILATH, T. Stabilizing state-feedback design via the moving horizon method. *International Journal of Control*, Taylor & Francis Group, v. 37, n. 3, p. 631–643, 1983. Citado na página 23.

KWON, W. H.; BYUN, D. G. Receding horizon tracking control as a predictive control and its stability properties. *International Journal of Control*, Taylor & Francis Group, v. 50, n. 5, p. 1807–1824, 1989. Citado na página 23.

LEE, J. H. Model predictive control: review of the three decades of development. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Springer, v. 9, n. 3, p. 415–424, 2011. Citado na página 32.

LEE, J. H.; COOLEY, B. Recent advances in model predictive control and other related areas. In: New York, NY: American Institute of Chemical Engineers, 1971-C2002. *AIChE Symposium Series*. [S.l.], 1997. v. 93, n. 316, p. 201–216. Citado na página 27.

LÖFBERG, J. *Minimax approaches to robust model predictive control*. Tese (Doutorado) — Linköping University, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 27.

LOFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: IEEE. *2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. [S.l.], 2004. p. 284–289. Citado na página 55.

MÄKILÄ, P.; PARTINGTON, J. R.; GUSTAFSSON, T. Worst-case control-relevant identification. *Automatica*, Elsevier, v. 31, n. 12, p. 1799–1819, 1995. Citado na página 26.

MARGELLOS, K.; LYGEROS, J. A simulation based mpc technique for feedback linearizable systems with input constraints. In: IEEE. *2010 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.], 2010. p. 7539–7544. Citado na página 31.

- MARION, J. B.; THORNTON, S. T. *Classical dynamics of particles and systems*. [S.l.]: Brooks/Cole Cengage Learning, 2003. Citado na página 56.
- MILANESE, M.; VICINO, A. Information-based complexity and nonparametric worst-case system identification. *Journal of Complexity*, Elsevier, v. 9, n. 4, p. 427–446, 1993. Citado na página 26.
- MINH, V. T.; HASHIM, F. B. M. Robust Model Predictive Control Schemes for Tracking Setpoints. *Journal of Control Science and Engineering*, v. 2010, p. 1–9, 2010. ISSN 1687-5249. Citado na página 21.
- MUSKE, K. R.; RAWLINGS, J. B. Model predictive control with linear models. *AIChE J.*, v. 39, p. 262–287, 1993. Citado na página 24.
- OLIVEIRA, M. de; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, v. 37, n. 4, p. 261–265, jul. 1999. Citado na página 47.
- PLUYMERS, B. et al. Efficient computation of polyhedral invariant sets for LPV systems and application to robust MPC. *IEEE*, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 27.
- POLAK, E.; YANG, T. Moving horizon control of linear systems with input saturation and plant uncertainty part 1. robustness. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 58, n. 3, p. 613–638, 1993. Citado na página 24.
- RAO, C. V.; WRIGHT, S. J.; RAWLINGS, J. B. Application of interior-point methods to model predictive control. *Journal of optimization theory and applications*, Springer, v. 99, n. 3, p. 723–757, 1998. Citado na página 32.
- REINER, J.; BALAS, G. J.; GARRARD, W. L. Flight control design using robust dynamic inversion and time-scale separation. *Automatica*, Elsevier, v. 32, n. 11, p. 1493–1504, 1996. Citado na página 29.
- SCOKAERT, P.; MAYNE, D. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 43, n. 8, p. 1136–1142, 1998. Citado na página 27.
- SCOKAERT, P. O.; RAWLINGS, J. B. Infinite horizon linear quadratic control with constraints. In: *Proceedings of the 13th IFAC World Congress, San Francisco*. [S.l.: s.n.], 1996. Citado na página 23.
- SIMON, D.; LÖFBERG, J.; GLAD, T. Nonlinear model predictive control using feedback linearization and local inner convex constraint approximations. In: *Proceedings of the 2013 European Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 2056–2061. Citado na página 31.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. v. 199. Citado 5 vezes nas páginas 17, 35, 87, 89 e 90.
- SONTAG, E. D.; WANG, Y. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 24, n. 5, p. 351–359, 1995. Citado na página 90.
- SOUZA, E. M. d.; PALHARES, R. M.; TORRES, L. A. B. Uma abordagem via controle preditivo robusto para sistemas não-lineares incertos linearizados por realimentação de estados. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 2015. Citado na página 80.

- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999. Citado na página 55.
- TONDEL, P.; JOHANSEN, T. A.; BEMPORAD, A. An algorithm for multi-parametric quadratic programming and explicit mpc solutions. *Automatica*, Elsevier, v. 39, n. 3, p. 489–497, 2003. Citado na página 32.
- TROFINO, A.; COUTINHO, D.; BARBOSA, K. *Sistemas multivariáveis: Uma abordagem via lmis*. [S.l.]: Florianópolis: UFSC, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 45.
- VALLURI, S.; SOROUSH, M. A non-linear controller design method for processes with saturating actuators. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 76, n. 7, p. 698–716, 2003. Citado na página 28.
- VIDYASAGAR, M. *Nonlinear systems analysis*. [S.l.]: Siam, 2002. v. 42. Citado na página 17.
- WALLNER, E. M.; WELL, K. H. Attitude control of a reentry vehicle with internal dynamics. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 26, n. 6, p. 846–854, 2003. Citado na página 29.
- WISE, K. A. et al. Direct adaptive reconfigurable flight control for a tailless advanced fighter aircraft. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Chichester, West Sussex, England: Wiley, c1991-, v. 9, n. 14, p. 999–1012, 1999. Citado na página 29.
- ZHENG, A.; MORARI, M. Stability of model predictive control with mixed constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 40, n. 10, p. 1818–1823, 1995. Citado na página 24.
- ZHENG, Z. Q. *Robust Control of Systems Subject to Constraints*. Tese (Doutorado) — California Institute of Thechnology, 1995. Citado na página 24.
- ZHENG, Z. Q.; MORARI, M. Robust stability of constrained model predictive control. In: IEEE. *American Control Conference, 1993*. [S.l.], 1993. p. 379–383. Citado na página 27.
- ZHOU, K. et al. *Robust and optimal control*. [S.l.]: Prentice hall New Jersey, 1996. v. 40. Citado na página 26.



# APÊNDICE A – Linearização por Realimentação de Estados

Considere um sistema não-linear afim na entrada como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{A.1}$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^n$  são os estados,  $u \in \mathbb{R}$  a entrada de controle,  $y \in \mathbb{R}$  a saída do sistema;  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , são vetores de funções não-lineares; e  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de saída.

Usando a terminologia de controle geométrico, o vetor de funções  $f$  e  $g$  são chamados de campos vetoriais em  $\mathbb{R}^n$ . A razão para o termo é que para cada vetor de funções  $f$  e  $g$  há associado um campo de vetores no espaço  $n$ -dimensional (SLOTINE; LI et al., 1991).

Assume-se que  $f$  e  $g$  são formados por funções não-lineares suaves, isto é, em um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  cada uma de suas componentes possuem derivadas parciais de todas as ordens.

Feitas as hipóteses, o problema de linearização por realimentação de estados consiste em determinar condições para que o sistema não-linear (A.1) possa ser transformado por uma transformação (local) de coordenadas,  $z = \Phi(x)$ , e uma lei de controle por realimentação,

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \tag{A.2}$$

em um sistema linear

$$\dot{z} = A_c z + B_c v, \tag{A.3}$$

em que as matrizes  $A_c$  e  $B_c$  possuem a forma canônica de Brunovsky, ou seja,

$$\begin{aligned} A_c &= \left[ \begin{array}{c|c} 0_{(n-1),1} & I_{n-1} \\ \hline 0_{1,n} & \end{array} \right], \\ B_c &= \left[ \begin{array}{c} 0_{(n-1),1} \\ 1 \end{array} \right], \end{aligned}$$

em que  $0_{(n-1),1} \in \mathbb{R}^{n-1}$  é um vetor coluna de zeros;  $I_{n-1}$  é a matriz identidade de ordem  $n - 1$ ; e  $0_{1,n} \in \mathbb{R}^n$  é um vetor linha de zeros.

Caso essas condições sejam atendidas, o controle do sistema (A.1) pode ser dividido em duas partes: um laço não-linear interno que produz um sistema (em coordenadas adequadas) linear, e um laço externo onde se aplicam técnicas de controle linear.

Este tipo de linearização, segundo [Isidori \(1995\)](#), não produz um sistema linear aproximado, como é o caso da tradicional aproximação por séries de Taylor, mas sim uma forma linear exata.

Uma condição para que o sistema seja linearizável por realimentação de estados é que a transformação de coordenadas (A.4) seja um difeomorfismo, i.e, um mapeamento suave com inversa também suave e bem definida ([BEDROSSIAN, 1991](#)).

## A.1 Difeomorfismo

Uma mudança de coordenadas não-lineares descrita como,

$$z = \Phi(x), \quad (\text{A.4})$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^n$  são as coordenadas originais,  $z \in \mathbb{R}^n$  as novas coordenadas e  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de  $n$  variáveis definida em uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , tal que,

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

tendo cada elemento uma função,  $\phi_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Essa transformação possui as seguintes propriedades:

1.  $\Phi(x)$  é invertível; i.e. existe uma função  $\Phi^{-1}(z)$  tal que

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\Phi(x)) &= x \\ \Phi(\Phi^{-1}(z)) &= z \end{aligned}$$

para todo  $x \in \Omega$  e  $z \in \Phi(\Omega)$ .

2.  $\Phi(x)$  e  $\Phi^{-1}(z)$  são ambos mapeamentos suaves, i.e., possuem derivadas parciais de todas as ordens.

A primeira propriedade garante a invertibilidade da transformação, para que, da nova coordenada possa-se obter a coordenada original,

$$x = \Phi^{-1}(z),$$

enquanto a segunda garante que trajetórias contínuas e diferenciáveis do sistema nas coordenadas originais continuem sendo contínuas e diferenciáveis nas novas coordenadas. Uma transformação desse tipo (A.5) é chamada de difeomorfismo e é válida apenas para um subconjunto aberto em  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ . Quando  $\Omega$  é o próprio  $\mathbb{R}^n$ , a transformação é dita

difeomorfismo global (BEDROSSIAN, 1991). Para determinar se um dado mapeamento não-linear é um difeomorfismo local, pode-se usar a condição suficiente expressa no seguinte lema (SLOTINE; LI et al., 1991).

**Lema A.1.1** *Seja  $\Phi(x)$  uma função definida em uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Se a matriz Jacobiana  $D_\Phi(x)$  correspondente possui inversa no ponto  $x = x_0$  de  $\Omega$ , então  $\Phi(x)$  define um difeomorfismo em uma subregião de  $\Omega$ .*

## A.2 Derivada de Lie

Considere a função  $y = h(x)$  de (A.1) sendo um campo escalar que associa a cada  $x \in \mathbb{R}^n$  um valor real  $h \in \mathbb{R}$ . Assume-se também que  $h(x)$  é suave e, por conta disso, possui todas as derivadas parciais.

Para um campo escalar suave  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e um campo vetorial suave  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , a derivada de Lie de  $h$  com respeito a  $f$ , denotada por  $L_f h$ , é um novo campo escalar definido por:

$$L_f h = \nabla h f \quad (\text{A.6})$$

em que  $\nabla h$  denota o gradiente de  $h(x)$  com respeito a  $x$ . Nota-se que a derivada de Lie é a derivada direcional da função escalar  $h(x)$  na direção de  $f(x)$ .

As derivadas de Lie podem ser aplicadas repetidamente e são definidas recursivamente como,

$$\begin{aligned} L_f^0 h &= h \\ L_f^j h &= L_f(L_f^{j-1} h) = \nabla(L_f^{j-1} h) f \quad \text{para } j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

## A.3 Grau Relativo

Em sistemas lineares, o grau relativo corresponde ao excesso do número de polos sobre o número de zeros do sistema. Para sistemas não-lineares SISO tal qual (A.1), o grau relativo  $r$  corresponde ao número de vezes que a saída deve ser diferenciada, para que a função derivada tenha um termo explícito referente à entrada de controle  $u$ .

Com respeito à saída  $y = h(x)$ , o sistema da forma (A.1) é dito ter grau relativo  $r$  se o vetor

$$\begin{aligned} L_g L_f^k h(x) &= 0, \quad k = 0 \text{ até } r - 2, \\ L_g L_f^k h(x) &\neq 0, \quad k = r - 1. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Em outras palavras, o grau relativo determina que o sinal de controle  $u$  afeta a saída  $y$  após  $r$  integrações (KOLAVENNU; PALANKI; COCKBURN, 2001).

## A.4 Determinação da Lei de Controle Linearizante

Condições necessárias e suficientes para que um sistema possa ser linearizado por realimentação de estados não serão tratadas nesta dissertação. Tais condições podem ser encontradas em (ISIDORI, 1995).

Caso o sistema aqui tratado, tal qual (A.1), possua grau relativo  $r$  para uma dada condição inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , então existe um difeomorfismo  $(\eta, z) = \Phi(x)$  dado por,

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_r(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{r+1}(x) \\ \phi_{r+2}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

nos quais  $\phi_{r+1}, \phi_{r+2}, \dots, \phi_n$ , são escolhidos de maneira a completar o difeomorfismo, ou seja, o Jacobiano de

$$\phi(x) = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_r \ \dots \ \phi_{r+1} \ \phi_{r+2} \ \dots \ \phi_n]^T$$

é invertível.

Nota-se que se  $(r < n)$ , ou seja, o grau relativo total for menor que a dimensão do sistema (A.1),  $(n - r)$  estados do sistema transformado (A.10), não irão afetar diretamente a saída  $y$  do sistema. Esses estados fazem parte da dinâmica interna do sistema e pode ser muito difícil determinar sua estabilidade (SLOTINE; LI et al., 1991). Neste trabalho, assume-se que a dinâmica interna do sistema, caso exista, é estável no sentido entrada-estados (do inglês, *Input-to-State Stable* - ISS)(SONTAG; WANG, 1995).

Após a mudança de coordenadas (A.9) e (A.10), o sistema não-linear original (A.1) é transformado e assume a forma denominada “normal”:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_r &= \alpha(z, \eta) + \beta(z, \eta)u \\ \dot{\eta} &= w(z, \eta) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

em que  $\alpha = L_f^r h(x)$  e  $\beta = L_g L_f^{r-1} h(x)$ .

Uma vez definida a mudança de coordenadas, resta ainda definir uma lei de controle linearizante. Essa lei pode ser definida como,

$$u = \beta^{-1}(x)(v - \alpha(x)), \quad (\text{A.13})$$

onde  $v \in \mathbb{R}$  é um sinal de controle, denominado aqui de virtual, aplicado ao sistema linearizado conforme, ilustrado na Figura 1.

Após aplicada a transformação de coordenadas e a lei de controle linearizante (A.13), a função (A.1) pode ser escrita como:

$$\dot{z} = A_c z + B_c v \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{\eta} = w(z, \eta) \quad (\text{A.15})$$

na qual (A.14) possui a forma canônica de Brunovsky.