



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA**



CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

FLEXÃO NORMAL SIMPLES

LUNA ANDRADE GUERRA DE PAOLI

Professor: NEY AMORIM SILVA

Belo Horizonte
2012

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	3
2	OBJETIVO.....	4
3	PROGRAMAS UTILIZADOS.....	4
4	DESENVOLVIMENTO.....	4
5	CONCLUSÃO.....	25
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	26

O domínio 1 corresponde a uma seção totalmente tracionada; os domínios 4a e 5 correspondem a uma seção totalmente comprimida. Estes domínios ficam eliminados no caso de flexão simples.

Nos domínios 2 e 3 a armadura escoar antes da ruptura do concreto à compressão (seção subarmada).

No domínio 4 o concreto atinge o encurtamento convencional de ruptura antes da armadura escoar (seção superarmada).

No limite entre os domínios 3 e 4, a seção funciona como normalmente armada.

2 OBJETIVO

Este trabalho tem por objetivo apresentar o cálculo do diagrama de interação normal momento e o dimensionamento de vigas, comparativamente como seção retangular e seção T.

Os cálculos foram realizados conforme as prescrições da NBR 6118:2003 Emd.1:2007.

3 PROGRAMAS UTILIZADOS

Todos os cálculos foram realizados sem o auxílio de programas de computador.

4 DESENVOLVIMENTO

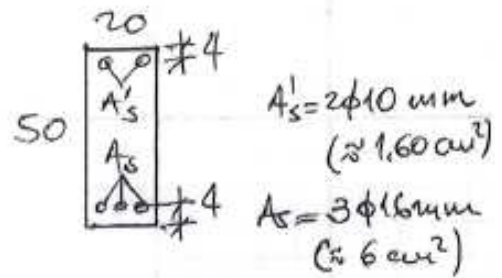
Neste item será apresentado o desenvolvimento dos cálculos, realizados de forma manuscrita.

① PARA A SEÇÃO AO LADO, DEBE-SE:

② O PAR N, M QUE SOLICITA A SEÇÃO NO P.L.U. P/ $\chi = \chi_{2,l}$ e $\chi = \chi_{3,l}$

③ P/ $N = 40 \text{ kN}$ (COMP.), QUAL O VALOR DE M .

④ P/ $M = 10000 \text{ kN}\cdot\text{cm}$, QUAL O VALOR DE N .

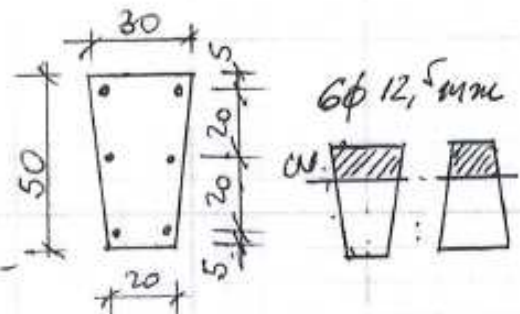


$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$
Aço CA-50

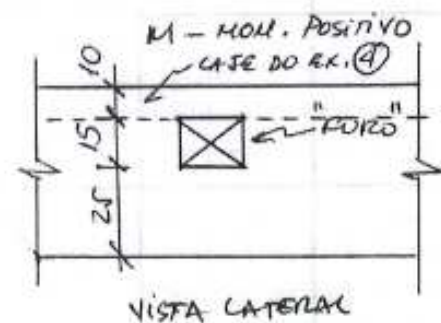
② TRACAR O DIAGRAMA DE INTERAÇÃO $N \times M$ PARA A SEÇÃO AO LADO.

- $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$, Aço CA-50

- USAR DIAGRAMA RETANGULAR SIMPLIFICADO P/ O CONCRETO.

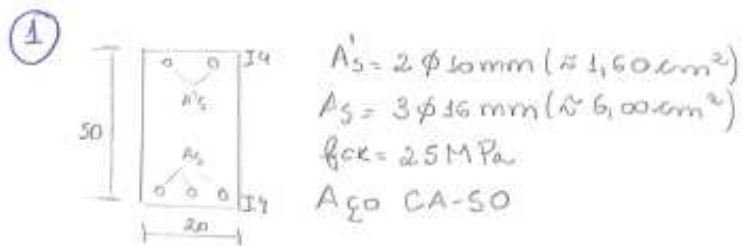


③ CALCULAR AS ARMADURAS P/ UMA VIGA DE SEÇÃO $14/50 \text{ cm}^2$, $d = 46 \text{ cm}$, $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$, Aço CA-50, P/ UM MOMENTO $M = 8000 \text{ kN}\cdot\text{cm}$ COM E SEM O "FURO" P/ PASSAGEM DE DUTOS.



$$d_{furo} = 10 \text{ cm} \rightarrow \alpha_L = \frac{d_{furo}}{d} \rightarrow K_R = \alpha_L \left(1 - \frac{\alpha_L}{2}\right)$$

④ FAZER O MESMO DO EX. ③, SABENDO-SE QUE O MOMENTO POSITIVO $M = 8000 \text{ kN}\cdot\text{cm}$ ATUA EM UM VÃO INTERNO, $l = 6 \text{ m}$, DE UMA VIGA CONTÍNUA E QUE A LAJE TEM ESPESSURA DE 10 cm (VER FIG. RX. ③). COMO A LAJE ESTÁ COMPRIMIDA, DIMENSIONAR COMO VIGA T, COM E SEM O "FURO".



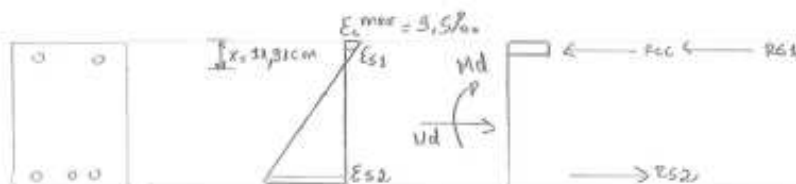
a)

$$\bullet \chi = \chi_{2,l}$$

$$\frac{\chi_{2,l}}{3,5\%} = \frac{d}{33,5\%} \rightarrow \chi_{2,l} = \frac{3,5\%}{33,5\%} d \rightarrow \chi_{2,l} = 0,259 d$$

$$d = 50 - 4 \rightarrow d = 46 \text{ cm}$$

$$\text{ENTÃO } \chi_{2,l} = 0,259 \times 46 \rightarrow \chi_{2,l} = 11,91 \text{ cm}$$



$$\epsilon_{s2} = 10\% \rightarrow \sigma_{s2} = f_y d = 50 / 1,15 \rightarrow \sigma_{s2} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$R_{s2} = A_s \times \sigma_{s2} = 6,00 \times 43,5 \rightarrow R_{s2} = 261,0 \text{ kN (reação)}$$

$$\frac{\epsilon_{s2}}{d - x} = \frac{\epsilon_{s1}}{x - d'} \rightarrow \frac{10\%}{46 - 11,91} = \frac{\epsilon_{s1}}{11,91 - 4} \rightarrow \epsilon_{s1} = 2,32\%$$

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_y d}{E_{aço}} = \frac{50 / 1,15}{21.000} \rightarrow \epsilon_{yd} = 2,07\%$$

$$\epsilon_{s1} = 2,32\% > \epsilon_{yd} = 2,07\% \rightarrow \sigma_{s1} = f_y d \rightarrow \sigma_{s1} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$R_{s1} = A_s' \times \sigma_{s1} = 4,60 \times 43,5 \rightarrow R_{s1} = 69,6 \text{ kN (compressão)}$$

$$R_{cc} = f_c \times b \times y = \frac{0,85 \times 2,5}{1,4} \times 20 \times (0,8 \times 11,91) \rightarrow$$

$$R_{cc} = 289,2 \text{ kN (compressão)}$$

$$\sum H=0 \rightarrow Nd = -R_{s2} + R_{cc} + R_{s1}$$

$$Nd = -263,0 + 289,2 + 69,6$$

$$Nd = 97,80 \text{ kN}$$

$$N = \frac{97,80}{1,4} \rightarrow \boxed{N = 69,9 \text{ kN}} \text{ (compressão)}$$

$$\sum M_{cc}=0 \rightarrow Md - R_{cc} \times \left(\frac{h}{2} - \frac{0,8x}{2} \right) - R_{s1} \left(\frac{h}{2} - 4 \right) - R_{s2} \left(\frac{h}{2} - 4 \right) = 0$$

$$Md - 289,2 \left(\frac{50}{2} - \frac{0,8 \times 33,93}{2} \right) - 69,6 \left(\frac{50}{2} - 4 \right) - 263,0 \left(\frac{50}{2} - 4 \right) = 0$$

$$Md = 12.794,9 \text{ kN}\cdot\text{cm}$$

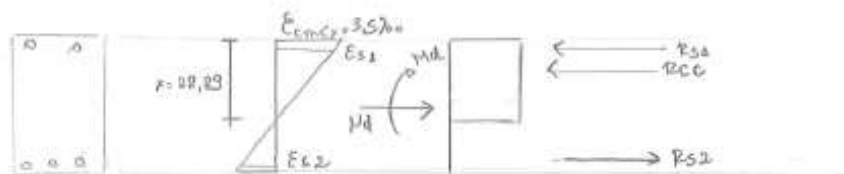
$$M = \frac{12.794,9}{1,4} \rightarrow \boxed{M = 9139,2 \text{ kN}\cdot\text{cm}}$$

• $x = x_{3,l}$

$$\frac{x_{3,l}}{3,5\%} = \frac{d}{E_{yd} + 3,5\%} \rightarrow x_{3,l} = \frac{3,5\% \cdot d}{E_{yd} + 3,5\%}$$

$$x_{3,l} = \frac{3,5\% \cdot d}{2,07\% + 3,5\%} \rightarrow x_{3,l} = 0,628d$$

Então $x_{3,l} = 0,628 \times 46 \rightarrow x_{3,l} = 28,89 \text{ cm}$



$$\epsilon_{s2} = \epsilon_{yd} \rightarrow \sigma_{s2} = f_{yd} \rightarrow \sigma_{s2} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$R_{s2} = A_s \times \sigma_{s2} = 6,0 \times 43,5 \rightarrow R_{s2} = 261,0 \text{ kN (tração)}$$

$$\frac{\epsilon_{c,max} = 3,5\%}{x} = \frac{\epsilon_{s1}}{x - d'} \rightarrow \frac{3,5\%}{28,89} = \frac{\epsilon_{s1}}{28,89 - 4}$$

$$\epsilon_{s1} = 3,02\% > \epsilon_{yd} = 2,07\% \rightarrow \sigma_{s1} = f_{yd} \rightarrow \sigma_{s1} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$R_{s1} = A'_s \times \sigma_{s1} = 1,60 \times 43,5 \rightarrow R_{s1} = 69,6 \text{ kN (compressão)}$$

$$R_{cc} = \rho_{cc} \cdot b \cdot y = \frac{0,85 \times 2,5 \times 20 \times (0,8 \times 28,89)}{1,4} \rightarrow$$

$$R_{cc} = 703,6 \text{ kN (compressão)}$$

$$\sum H = 0 \rightarrow N_d = -R_{s2} + R_{s1} + R_{cc}$$

$$N_d = -263,0 + 69,6 + 703,6$$

$$N_d = 510,2 \text{ kN}$$

$$N = \frac{510,2}{1,4} \rightarrow \boxed{N = 364,4 \text{ kN}} \text{ (compressão)}$$

$$\sum M_{cc} = 0 \rightarrow M_d - R_{s1} \left(\frac{h}{2} - 4 \right) - R_{cc} \left(\frac{h}{2} - \frac{0,8x}{2} \right) - R_{s2} \left(\frac{h}{2} - 4 \right) = 0$$

$$M_d - 69,6 \left(\frac{25}{2} - 4 \right) - 703,6 \left(25 - \frac{0,8 \times 28,89}{2} \right) - 263,0 \left(\frac{25}{2} - 4 \right) = 0$$

$$M_d = 16.374,9 \text{ kNm}$$

$$M = \frac{16.374,9}{1,4} \rightarrow \boxed{M = 11.696,4 \text{ kNm}}$$

b) PARA $N = 40 \text{ kN (comp)}$, QUAL VALOR DE M ?

COMO $x = x_{2,c} \rightarrow N = 69,9 \text{ kN DE COMPRESSÃO}$

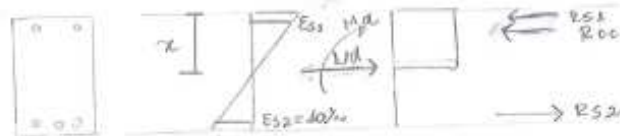
ENTÃO $N = 40 \text{ kN (comp)} \rightarrow \text{DOMÍNIO 2}$

$$0 < x < x_{2,c}$$

$$0 < x < 13,93$$

(NÃO É POSSÍVEL COMPRESSÃO)

$$N_d = 40 \times 1,4 \rightarrow N_d = 56 \text{ kN}$$



$$\epsilon_{s2} = 10\text{‰} \rightarrow \sigma_{s2} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$R_{s2} = A_s \times \sigma_{s2} = 61,0 \times 43,5 = 265 \text{ kN}$$

$$\frac{\epsilon_{s2}}{d-x} = \frac{\epsilon_{s1}}{x-d'} \rightarrow \frac{10\text{‰}}{46-x} = \frac{\epsilon_{s1}}{x-4} \rightarrow \epsilon_{s1} = \frac{10\text{‰}}{46-x} (x-4)$$

$$\text{Para } \epsilon_{s1} < 2,107\text{‰}$$

$$\epsilon_{y,d}$$

$$R_{S1} = A_s' \times E_s \times \epsilon_{S1} = 4,6 \times 21.000 \times \frac{10\%}{46-x} (x-4) = \frac{336}{46-x} (x-4)$$

$$R_{cc} = A_c \times b \times y = \frac{0,85 \times 2,5}{1,4} \times 20 \times 0,8x = 24,29x$$

$$\sum H = 0$$

$$Md = R_{cc} + R_{S1} - R_{S2}$$

$$40 \times 1,4 = 24,29x + \frac{336}{46-x} (x-4) - 261$$

$$24,29x(46-x) + 336(x-4) - 261(46-x) - 56(46-x) = 0$$

$$1.117,34x - 24,29x^2 + 336x - 1344 - 12006 + 261x - 2576 + 56x = 0$$

$$-24,29x^2 + 1779,34x - 15926 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1779,34^2 - 4 \times (-24,29) \times (-15926) = 1586733,56$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1779,34 \pm \sqrt{1586733,56}}{2 \times (-24,29)} \Rightarrow x = 10,51 \text{ cm} <$$

$$x_{2,2} = 14,91 \rightarrow 0 \text{ K}$$

$$\epsilon_{S1} = \frac{10\%}{46 - 10,51} \times (10,51 - 4) = 1,83\% < 2,07\% \rightarrow 0 \text{ K}$$

$$\sum M_{cc} = 0 \rightarrow Md - R_{S1} \times \left(\frac{h}{2} - 4\right) - R_{cc} \left(\frac{h}{2} - \frac{0,8x}{2}\right) - R_{S2} \left(\frac{h}{2} - 4\right) = 0$$

$$R_{S1} = \frac{336}{46 - 10,51} \times (10,51 - 4) = 61,63 \text{ kN}$$

$$R_{cc} = 24,29 \times 10,51 = 255,29 \text{ kN}$$

$$Md = 61,63 \times \left(\frac{50}{2} - 4\right) - 255,29 \left(\frac{50}{2} - \frac{0,8 \times 10,51}{2}\right) - 261 \left(\frac{50}{2} - 4\right) \rightarrow$$

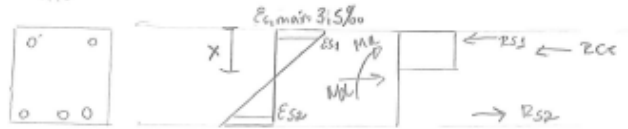
$$Md = 12.084,2 \text{ kNxm}$$

$$M = \frac{Md}{1,4} \rightarrow \boxed{M = 8.631,6 \text{ kNxm}}$$

c)

$$M_{x_2,l} = 9.139,2 \text{ kNm} < M = 10.000 \text{ kNm} < M_{x_3,l} = 11.696,4 \text{ kNm} \rightarrow$$

$$x_{2,l} < x < x_{3,l} \rightarrow \text{DOMÍNIO 3}$$



$$\frac{3,5\text{‰}}{x} = \frac{\epsilon_{s1}}{x-4} ; \text{ PARA } x = x_{2,l} \rightarrow \epsilon_{s1} = 2,32\text{‰}$$

$$\text{PARA } x > x_{2,l} \rightarrow \epsilon_{s1} > 2,32\text{‰} \text{ que é } > 2,07\text{‰} \rightarrow$$

$$R_{s1} = A_s \times \sigma_{s1} = 1,60 \times 43,5 \rightarrow R_{s1} = 69,6 \text{ kN}$$

$$2,07\text{‰} < \epsilon_{s2} < 10\text{‰} \rightarrow \sigma_{s2} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$R_{s2} = A_s \times \sigma_{s2} = 6,0 \times 43,5 \rightarrow R_{s2} = 261,0 \text{ kN}$$

$$R_{cc} = f_{cd} \times b \times y = \frac{0,85 \times 2,5}{1,4} \times 20 \times 0,8 \text{ k} \rightarrow$$

$$R_{cc} = 24,29 \text{ k}$$

$$\sum M_{CG} = 0$$

$$Md = 69,6 \times \left(\frac{50}{2} - 4\right) - 24,29 \text{ k} \left(\frac{50}{2} - \frac{0,8 \text{ k}}{2}\right) - 261 \left(\frac{50}{2} - 4\right) = 0$$

$$10.000 \times 1,4 - 1461,6 = 607,25 \text{ k} + 9,736 \text{ k}^2 - 5481 \rightarrow$$

$$9,736 \text{ k}^2 - 607,25 \text{ k} + 7.057,4 = 0$$

$$x = 15,43 \text{ cm} \rightarrow \text{entre } x_{2,l} \text{ e } x_{3,l} \rightarrow \text{OK}$$

$$R_{cc} = 24,29 \text{ k} = 24,29 \times 15,43 \rightarrow R_{cc} = 374,8 \text{ kN}$$

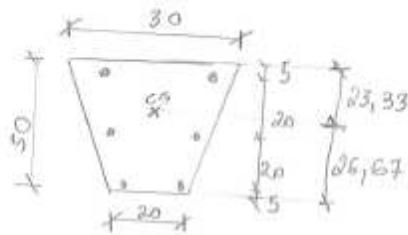
$$\sum H = 0$$

$$Nd = R_{s1} + R_{cc} - R_{s2}$$

$$Nd = 69,6 + 374,8 - 261,0 \rightarrow Nd = 183,4 \text{ kN}$$

$$N = \frac{Nd}{1,4} \rightarrow \boxed{N = 131,0 \text{ kN}} \text{ (compressão)}$$

②



$$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$$

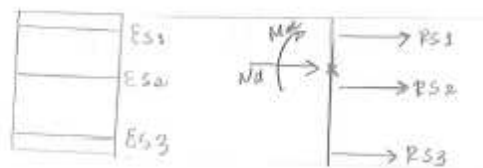
$$A_{sp} \text{ CA-50}$$

$$6 \phi 12,5 \text{ mm} \quad 20125 \text{ (} \approx 2,45 \text{ cm}^2 \text{)}$$

A	y	A _y
50 x 20	25	25.000
$\frac{50 \times 5}{2}$	$\frac{50}{3}$	2083,33
$\frac{50 \times 5}{2}$	$\frac{50}{3}$	2083,33
$\sum 250$		29.166,66

$$\downarrow y_{CG} = \frac{29.166,66}{1250} \rightarrow y_{CG} = 23,33 \text{ cm}$$

$$a) X = -\infty$$



$$E_0 = E_{s1} = E_{s2} = E_{s3} = 10.000 \text{ MPa}$$

$$G_{s1} = G_{s2} = G_{s3} = f_y d = 43,5 \text{ kN/m}^2$$

$$R_{s1} = R_{s2} = R_{s3} = 2,45 \times 43,5 = 106,6 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0 \quad N_d = -R_{s1} - R_{s2} - R_{s3} \rightarrow N_d = -3 \times 106,6 \text{ kN} \rightarrow$$

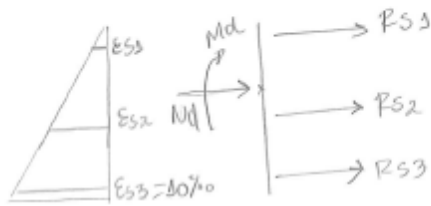
$$N_d = -319,8 \text{ kN} \rightarrow N = \frac{N_d}{1,4} \rightarrow \boxed{N = -228,4 \text{ kN}} \text{ (TRAÇÃO)}$$

$$\sum M = 0 \quad M_d + R_{s1} \times (23,33 - 5) - R_{s2} \times (25 - 23,33) - R_{s3} \times (26,67 - 5) = 0$$

$$M_d + 106,6 \times (18,33 - 4,67 - 21,67) = 0$$

$$M_d = 534,1 \text{ kN}\cdot\text{cm}$$

$$M = \frac{M_d}{1,4} \rightarrow \boxed{M = 381,5 \text{ kN}} \text{ (HORÁRIO)}$$

b) $x = 0$ 

$$\frac{10\text{‰}}{45} = \frac{\epsilon_{s2}}{25} = \frac{\epsilon_{s1}}{5}$$

$$\epsilon_{s1} = \frac{10\text{‰} \times 5}{45} \rightarrow \epsilon_{s1} = 1,11\text{‰} < \epsilon_{yd} = 2,07\text{‰} \rightarrow$$

$$\sigma_{s1} = E \times \epsilon \rightarrow \sigma_{s1} = 21 \times 1000 \times 1,11\text{‰} \rightarrow \sigma_{s1} = 23,31 \text{ kN/cm}^2$$

$$P_{s1} = \sigma_{s1} \times A = 23,31 \times 2,45 \rightarrow P_{s1} = 57,1 \text{ kN}$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{10\text{‰} \times 25}{45} \rightarrow \epsilon_{s2} = 5,56\text{‰} > \epsilon_{yd} = 2,07\text{‰} \rightarrow$$

$$\sigma_{s2} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$P_{s2} = 2,45 \times 43,5 \rightarrow P_{s2} = 106,6 \text{ kN}$$

$$\epsilon_{s3} = 10\text{‰} > \epsilon_{yd} = 2,07\text{‰} \rightarrow \sigma_{s3} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$P_{s3} = 2,45 \times 43,5 \rightarrow P_{s3} = 106,6 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0 \quad N_d = -P_{s1} - P_{s2} - P_{s3}$$

$$N_d = -57,1 - 106,6 - 106,6 \rightarrow N_d = -270,3 \text{ kN}$$

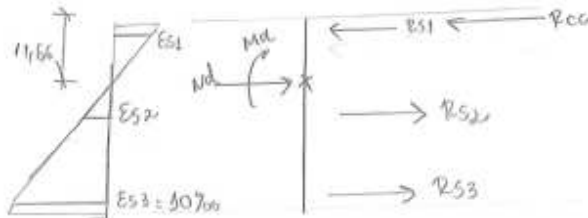
$$N = \frac{N_d}{1,4} \rightarrow \boxed{N = -193,1 \text{ kN}} \\ \text{(TRAÇÃO)}$$

$$\sum M = 0 \quad M_d + 57,1 \times 18,33 - 106,6 \times 1,67 - 106,6 \times 21,67 = 0 \rightarrow$$

$$M_d = 1.441,4 \text{ kN}\cdot\text{cm}$$

$$M = \frac{M_d}{1,4} \rightarrow \boxed{M = 1029,6 \text{ kN}\cdot\text{cm}} \quad \text{(LIMITE)} \curvearrowright$$

$$c) X = X_{2,1} = 0,259 \times d = 0,259 \times 45 = 11,66 \text{ cm}$$



$$\frac{Es3 = 10‰}{45 - 11,66} = \frac{Es2}{25 - 11,66} = \frac{Es1}{11,66 - 5}$$

$$Es1 = \frac{10‰ \times (11,66 - 5)}{45 - 11,66} = 2,00‰ < \epsilon_{yd} = 2,07‰ \rightarrow$$

$$\sigma_{s1} = E \times \epsilon_{s1} = 21 \times 2 = 42 \text{ kN/cm}^2 \rightarrow$$

$$Ps1 = 42 \times 2,45 \rightarrow Ps1 = 102,9 \text{ kN}$$

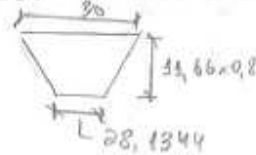
$$Es2 = \frac{10‰ \times (25 - 11,66)}{45 - 11,66} = 4,00‰ > \epsilon_{yd} = 2,07‰ \rightarrow$$

$$\sigma_{s2} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2 \rightarrow Ps2 = 106,6 \text{ kN}$$

$$Es3 = 10‰ > \epsilon_{yd} = 2,07‰ \rightarrow \sigma_{s3} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$Ps3 = 106,6 \text{ kN}$$

Area COMPRESION:



$$\frac{50}{20} = \frac{11,66 \times 0,8}{x} \rightarrow x = 4,8656$$

$$30 - 4,8656 = 28,1344 \text{ cm}$$

$$A_{\text{comp}} = \frac{(30 + 28,1344) \times 11,66 \times 0,8}{2} \rightarrow$$

$$A_{\text{comp}} = 274,14 \text{ cm}^2$$

$$P_{cc} = \frac{0,85 \times 3}{1,4} \times 274,14 \rightarrow P_{cc} = 493,9 \text{ kN}$$

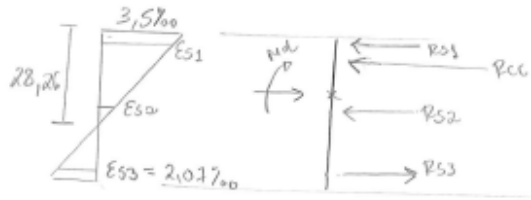
$$\sum H = 0 \quad Nd = Ps1 + P_{cc} - Ps2 - Ps3 = 102,9 + 493,9 - 2 \times 106,6 \rightarrow$$

$$Nd = 383,6 \text{ kN} \quad N = Nd / 1,4 \rightarrow \boxed{N = 274 \text{ kN}}$$

$$\sum M = 0 \quad Md = Ps1 \times 18,33 + P_{cc} \times \left(23,33 - \frac{0,8 \times 11,66}{2} \right) + Ps2 \times 4,67 + Ps3 \times 24,67 \rightarrow$$

$$Md = 13.593,3 \text{ kNcm} \rightarrow \boxed{M = 9.709,5 \text{ kNcm}}$$

$$d) x = x_3, t = 0,628 d = 0,628 \times 45 = 28,26 \text{ cm}$$



$$\frac{3,5\%}{28,26} = \frac{\epsilon_{s1}}{28,26 - 5} = \frac{\epsilon_{s2}}{28,26 - 25}$$

$$\epsilon_{s1} = 2,88\% > 2,07\% \rightarrow \sigma_{s1} = f_{yd} \rightarrow R_{s1} = 106,6 \text{ kN}$$

$$\epsilon_{s2} = 0,40\% < 2,07\% \rightarrow \sigma_{s2} = 20 \times 0,4 = 8,4 \text{ kN/cm}^2 \rightarrow$$

$$R_{s2} = 8,4 \times 2,45 \rightarrow R_{s2} = 20,6 \text{ kN}$$

$$\epsilon_{s3} = \epsilon_{yd} = -2,07\% \rightarrow \sigma_{s3} = f_{yd} \rightarrow R_{s3} = 106,6 \text{ kN}$$

ÁREA COMPRIMIDA:

$$\frac{50}{10} = \frac{28,26 \times 0,8}{x} = 4,5216 \quad 30 - 4,5216 = 25,4784$$

$$A_{\text{comp}} = 627,13 \text{ cm}^2$$

$$R_{cc} = \frac{0,85 \times 3}{1,4} \times 627,13 \rightarrow R_{cc} = 1.142,3 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0 \quad Nd = R_{s1} + R_{cc} + R_{s2} - R_{s3}$$

$$Nd = 106,6 + 1.142,3 + 20,6 - 106,6 \rightarrow$$

$$Nd = 1.162,9 \text{ kN} \quad N = \frac{Nd}{1,4} \rightarrow \boxed{N = 830,6 \text{ kN}}$$

$$\sum M = 0 \quad Md = R_{s1} \times 18,33 + R_{cc} \times \left(23,33 - \frac{0,8 \times 28,26}{2}\right)$$

$$- R_{s2} \times 1,67 + R_{s3} \times 21,67 \rightarrow$$

$$Md = 17.969,9 \text{ kNcm}$$

$$M = \frac{Md}{1,4} \rightarrow \boxed{M = 12.835,5 \text{ kNcm}} \quad (\text{HORÁZIO})$$

$$e) x = X_{y, l} = d = 45 \text{ cm}$$



$$\frac{3,5‰}{45} = \frac{\epsilon_{s1}}{45-5} = \frac{\epsilon_{s2}}{25-5}$$

$$\epsilon_{s1} = 3,5‰ > 2,07‰ \rightarrow \sigma_{s1} = f_{yk} \rightarrow R_{s1} = 106,6 \text{ kN}$$

$$\epsilon_{s2} = 1,56‰ < 2,07‰ \rightarrow \sigma_{s2} = 2,1 \times 1,56 = 32,76 \text{ kN/cm}^2 \rightarrow$$

$$R_{s2} = 32,76 \times 2,45 = 80,3 \text{ kN}$$

$$R_{s3} = 0$$

ÁREA COMPRESSADA

$$\frac{50}{10} = \frac{0,8 \times 45}{x} = 7,2 \quad 30 - 7,2 = 22,8 \text{ cm}$$

$$A_{comp} = 950,4 \text{ cm}^2$$

$$R_{cc} = \frac{0,85 \times 3}{1,4} \times 950,4 \rightarrow R_{cc} = 1.734,1 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0$$

$$N_d = R_{s1} + R_{cc} + R_{s2} + R_{s3}$$

$$N_d = 106,6 + 1.734,1 + 80,3 + 0 \rightarrow N_d = 1918 \text{ kN} \rightarrow$$

$$N = \frac{N_d}{1,4} \rightarrow \boxed{N = 1.370 \text{ kN}}$$

(COMPRESSÃO)

$$\sum M_{cg} = 0$$

$$M_d = R_{s1} \times 18,33 + R_{cc} \times \left(23,33 - \frac{0,8 \times 45}{2} \right) - R_{s2} \times 4,67 + \cancel{R_{s3} \times 21,67}$$

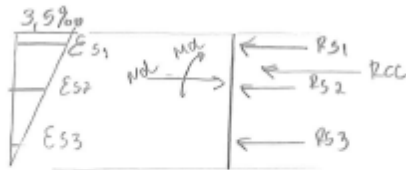
$$M_d = 106,6 \times 18,33 + 1.734,1 \times 5,33 - 80,3 \times 4,67 \rightarrow$$

$$M_d = 11.046,6 \text{ kNcm}$$

$$M = \frac{M_d}{1,4} \rightarrow \boxed{M = 7.890,4 \text{ kNcm}}$$

(MOMENTO)

$$d) x = \lambda = 50 \text{ cm}$$



$$\frac{3,5\%}{50} = \frac{\epsilon_{s1}}{45} = \frac{\epsilon_{s2}}{25} = \frac{\epsilon_{s3}}{5}$$

$$\epsilon_{s1} = 3,15\% > 2,07\% \rightarrow \sigma_{s1} = f_{yd} \rightarrow P_{s1} = 106,6 \text{ kN}$$

$$\epsilon_{s2} = 1,75\% < 2,07\% \rightarrow \sigma_{s2} = 21 \times 1,75 = 36,75 \text{ kN/cm}^2$$

$$P_{s2} = 36,75 \times 2,45 \rightarrow P_{s2} = 90,0 \text{ kN}$$

$$\epsilon_{s3} = 0,35\% < 2,07\% \rightarrow \sigma_{s3} = 21 \times 0,35 = 7,35 \text{ kN/cm}^2$$

$$P_{s3} = 7,35 \times 2,45 \rightarrow P_{s3} = 18,0 \text{ kN}$$

ÁREA COMPRESIDA

$$\frac{50}{\Delta\sigma} = \frac{0,8 \times 50}{x} \rightarrow x = 8 \quad 30 - 8 = 22 \text{ cm}$$

$$A_{\text{comp}} = 1040 \text{ cm}^2$$

$$P_{cc} = \frac{0,85 \times 3}{1,4} \times 1040 \rightarrow P_{cc} = 1.894,3 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0$$

$$Nd = P_{s1} + P_{cc} + P_{s2} + P_{s3}$$

$$Nd = 106,6 + 1.894,3 + 90 + 18$$

$$Nd = 2.108,9 \text{ kN} \quad N = \frac{Nd}{1,4} \rightarrow \boxed{N = 1.506,4 \text{ kN}}$$

(COMPRESÃO)

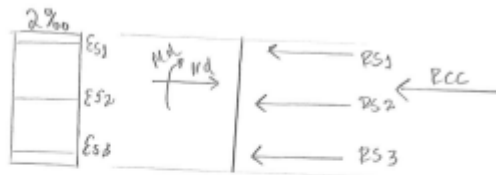
$$\sum M_{cg} = 0$$

$$Md = P_{s1} \times 18,33 + P_{cc} \times \left(23,33 - \frac{0,8 \times 50}{2}\right) - P_{s2} \times 1,67 - P_{s3} \times 24,67$$

$$Md = 7.729,6 \text{ kN}\cdot\text{cm}$$

$$M = \frac{Md}{1,4} \rightarrow \boxed{M = 5.521,4 \text{ kN}\cdot\text{cm}}$$

(HORARIO)

g) $x = +\infty$ 

$$E_c = E_s = 2700 \cdot 42,07\% \rightarrow E_s = 25 \times 2 = 42 \text{ kN/cm}^2 \rightarrow$$

$$R_{s1} = R_{s2} = R_{s3} = 2,45 \times 42 = 102,9 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow R_{cc} = \frac{0,85 \times 3}{1,4} \times 1,250 \rightarrow R_{cc} = 2,276,8 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0$$

$$Nd = R_{s1} + R_{cc} + R_{s2} + R_{s3}$$

$$Nd = 102,9 + 2,276,8 + 102,9 + 102,9 \rightarrow$$

$$Nd = 2,585,5 \text{ kN}$$

$$N = \frac{Nd}{1,4} \rightarrow \boxed{N = 1,846,8 \text{ kN}}$$

(COMPRESSÃO)

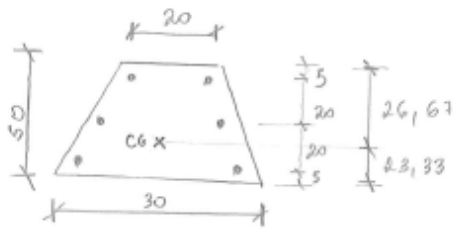
$$\sum M = 0$$

$$Md = R_{s1} \times 18,33 + R_{cc} \times 0 - R_{s2} \times 1,67 - R_{s3} \times 25,67 \rightarrow$$

$$Md = -535,5 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

$$M = \frac{Md}{1,4} \rightarrow \boxed{M = -368,2 \text{ kN} \cdot \text{cm}}$$

(ANTI-HORAÍDO)



$$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$$

$$A_{co} \text{ C1-50}$$

$$6 \phi 12,5 \text{ mm}; 2 \phi 12,5 (\approx 2,45 \text{ cm}^2)$$

$$a) X = -\infty$$



$$\epsilon_c = \epsilon_{s1} = \epsilon_{s2} = \epsilon_{s3} = 40\% \therefore$$

$$\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \sigma_{s3} = f_y d = 43,5 \text{ kN/m}^2$$

$$R_{s1} = R_{s2} = R_{s3} = 2,45 \times 43,5 = 106,6 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0 \quad Nd = -R_{s1} - R_{s2} - R_{s3} \rightarrow Nd = -3 \times 106,6 \text{ kN} \rightarrow$$

$$Nd = -319,8 \text{ kN} \rightarrow N = \frac{Nd}{1,4} \rightarrow \boxed{N = -228,4 \text{ kN}}$$

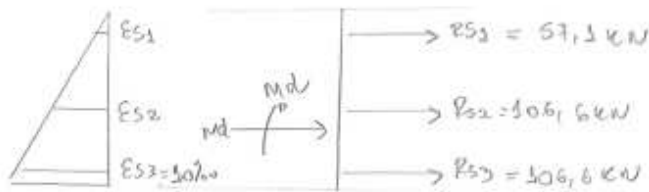
(TRAÇÃO)

$$\sum M = 0 \quad Md + R_{s1} \times (26,67 - 5) + R_{s2} \times (26,67 - 25) - R_{s3} \times (23,33 - 5) = 0$$

$$Md + 106,6 \times 21,67 + 106,6 \times 1,67 - 106,6 \times 18,33 = 0$$

$$Md = -534,3 \text{ kN}\cdot\text{cm} \rightarrow M = \frac{Md}{1,4} \rightarrow \boxed{Md = -381,5 \text{ kN}\cdot\text{cm}}$$

(ANTI-MOMENTO)

b) $x=0$ 

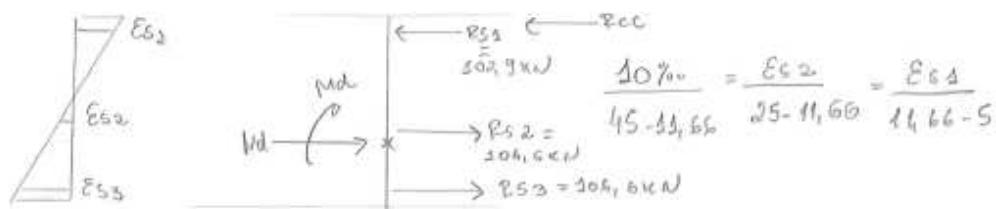
$$\frac{307.3}{45} = \frac{E_{s2}}{25} = \frac{E_{s3}}{5}$$

$$\sum H = 0 \quad N_d = -R_{51} - R_{52} - R_{53} = -57.3 - 306.6 - 306.6 \rightarrow$$

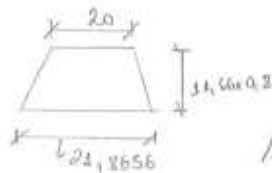
$$N_d = -270.3 \text{ kN} \quad \boxed{N = -193.3 \text{ kN}} \text{ (TRAÇÃO)}$$

$$\sum M = 0 \quad M_d + R_{51} \times 23.67 + R_{52} \times 11.67 - R_{53} \times 18.33 = 0$$

$$M_d = 538.6 \text{ kNm} \quad \boxed{M = 384.7 \text{ kNm}} \text{ (HORÁRIO)}$$

c) $x = x_2, d = 0,259d = 11,66 \text{ cm}$ 

ÁREA COMPRESSADA:



$$\frac{50}{40} = \frac{11,66 \times 0,8}{x} \rightarrow x = 1,8656$$

$$20 + 1,8656 = 21,8656 \text{ cm}$$

$$A_{\text{COMP}} = \frac{(20 + 21,8656) \times 11,66 \times 0,8}{2} \rightarrow$$

$$A_{\text{COMP}} = 195,26 \text{ cm}^2$$

$$R_{cc} = \frac{0,80 \times 3}{1,4} \times 195,26 \rightarrow R_{cc} = 334,7 \text{ kN}$$

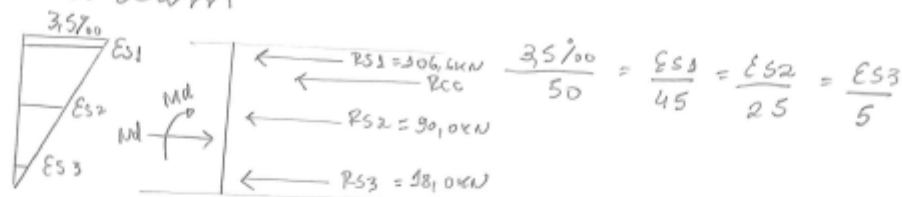
$$\sum H = 0 \quad N_d = 102,9 + 334,7 - 306,6 - 306,6 \rightarrow$$

$$N_d = 24,4 \text{ kN} \rightarrow \boxed{N = 160,3 \text{ kN}} \text{ (COMPRÊSSÃO)}$$

$$\sum M_{cc} = 0 \quad M_d = R_{51} \times 23,67 + R_{cc} \times \left(23,67 - \frac{0,8 \times 11,66}{2} \right) - R_{52} \times 11,67 + R_{53} \times 18,33 = 0$$

$$M_d = 11,371,2 \text{ kNm} \quad \boxed{M = 8,402,3 \text{ kNm}} \text{ (HORÁRIO)}$$

f) $x = h = 50 \text{ cm}$



ÁREA COMPRIMIDA: $\frac{50}{50} = 0,8 \times 50 \rightarrow x = 8 \quad 20 + 8 = 28 \text{ cm}$

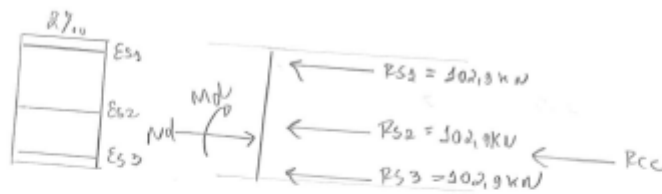
$A_{\text{COMP}} = 960 \text{ cm}^2$

$P_{cc} = \frac{0,80 \times 3}{1,4} \times 960 \rightarrow P_{cc} = 1.645,7 \text{ kN}$

$\sum H = 0 \quad N_d = 106,6 + 1.645,7 + 90 + 18 \rightarrow N_d = 1.860,3 \text{ kN}$
 $N = 1.328,8 \text{ kN}$ (COMPRESSÃO)

$\sum M = 0 \quad M_d = P_{s1} \times 24,67 + 1.645,7 \times (26,67 - \frac{0,80 \times 50}{2}) + P_{s2} \times 4,67 - P_{s3} \times 18,33 \rightarrow M_d = 13.107,2 \text{ kN}\cdot\text{cm}$
 $M = 9.362,3 \text{ kN}\cdot\text{cm}$ (HORÁRIO)

g) $x = +\infty$

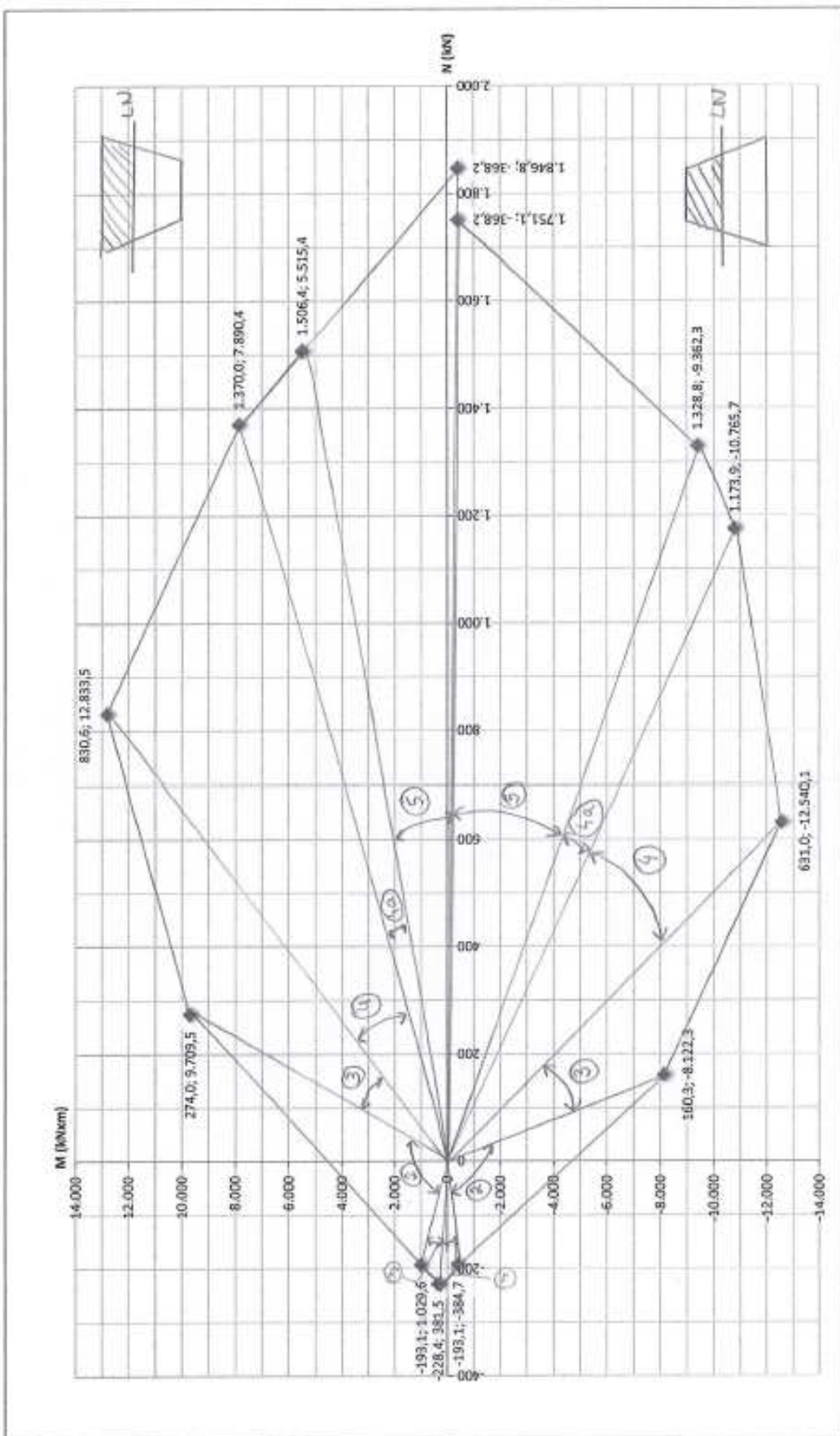


$P_{cc} = \frac{0,80 \times 3}{1,4} \times 1.250 \rightarrow P_{cc} = 2.142,9 \text{ kN}$

$\sum H = 0 \quad N_d = 102,9 \times 3 + 2.142,9 \rightarrow N_d = 2.451,6 \text{ kN}$
 $N = 1.751,1 \text{ kN}$ (COMPRESSÃO)

$\sum M = 0$

$M_d = P_{s1} \times 24,67 + P_{cc} \times 0 + P_{s2} \times 4,67 - P_{s3} \times 18,33 \rightarrow$
 $M_d = 595,5 \text{ kN}\cdot\text{cm} \quad M = 368,2 \text{ kN}\cdot\text{cm}$ (HORÁRIO)



③

VIGA $34 \times 50 \text{ cm}^2$ $d = 46 \text{ cm}$ $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$ $A_{cp} \text{ CA-50}$ $M = 3.000 \text{ kNm/cm}$

a) SEM FURO

$$K = \frac{M d}{f_{ck} b d^2} \Rightarrow K = \frac{3.4 \times 3.000}{0,85 \times 2 \times 34 \times 46^2} \rightarrow K = 0,311 < K_L = 0,32$$

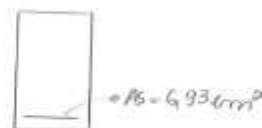
$$K' = K = 0,311$$

$$A_{s1} = \frac{f_{ck} b d}{f_y d} \times (1 - \sqrt{1 - 2K'})$$

$$A_{s1} = \frac{0,85 \times 2}{1,4} \times 34 \times 46 \times (1 - \sqrt{1 - 2 \times 0,311}) \rightarrow A_{s1} = 6,93 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = \frac{f_{ck} b d}{f_y d} \frac{K - K'}{1 - d'/d} = 0$$

$$A_s = 6,93 + 0 \rightarrow A_s = 6,93 \text{ cm}^2 \quad A'_s = 0$$



b) Com FURO

$$y_{lim} = 30 \text{ cm} \quad \text{e} \quad d = y/d$$

$$\alpha_{lim} = \frac{y_{lim}}{d} = \frac{30}{46} = 0,217$$

$$\text{como } \alpha_{lim} = 0,217 \rightarrow K_L = \alpha_{lim} \left(1 - \frac{\alpha_{lim}}{2}\right) \rightarrow$$

$$K_L = 0,217 \left(1 - \frac{0,217}{2}\right) \rightarrow K_L = 0,193$$

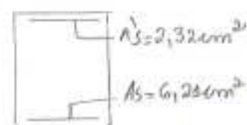
como $K = 0,311$ (letra a) é $>$ que $K_L \rightarrow$

$$K' = K_L = 0,193$$

$$A_{s1} = \frac{0,85 \times 2}{1,4} \times 34 \times 46 \times (1 - \sqrt{1 - 2 \times 0,193}) \rightarrow A_{s1} = 3,89 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = \frac{0,85 \times 2}{1,4} \times 34 \times 46 \times \frac{0,311 - 0,193}{1 - 4/46} \rightarrow A_{s2} = 2,32 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 3,89 + 2,32 \rightarrow A_s = 6,21 \text{ cm}^2 \quad A'_s = 2,32 \text{ cm}^2$$



4

VIGA CONTÍNUA

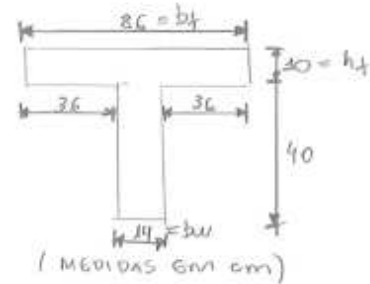
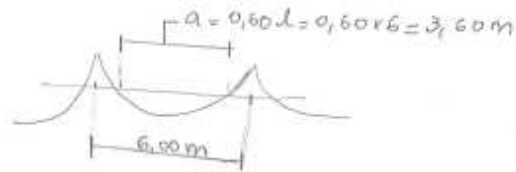
$$14 \times 50 \text{ cm}^2$$

$$d = 46 \text{ cm}$$

$$f_c = 20 \text{ MPa}$$

$$M = 8.000 \text{ kNm/m}$$

$$l_{ajz} = 40 \text{ mm}$$



$$b_f \leq 0,5 b_w \rightarrow b_f \text{ descontinua}$$

$$b_f \leq 0,2 a \rightarrow b_f \leq 0,2 a$$

$$b_f \leq 0,20 \times 3,60 \text{ m}$$

$$b_f \leq 0,36 \text{ m}$$

a) SEM FURO

$$K = \frac{M d}{f_c b_w d^2} - \left(\frac{b_f - 1}{b_w} \right) \frac{h_f}{d} \left(1 - \frac{h_f}{2d} \right)$$

$$K = \frac{1,4 \times 8.000}{0,85 \times 2 \times 14 \times 46^2} - \left(\frac{86 - 1}{14} \right) \frac{30}{46} \left(1 - \frac{30}{2 \times 46} \right) \rightarrow K = -0,69 < 0$$

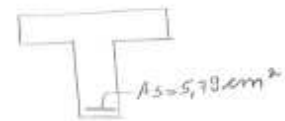
CALCULAR COMO
RETA NGULAR 86 x 50

$$K = \frac{1,4 \times 8.000}{0,85 \times 2 \times 86 \times 46^2} \rightarrow K = 0,051 < k_l = 0,32$$

$K' = K = 0,051$

$$A_{s1} = \frac{0,85 f_c}{1,4 \times 50 / 1,15} \times 86 \times 46 \times \left(1 - \sqrt{1 - 2 \times 0,051} \right) \rightarrow A_{s1} = 5,79 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = 0 \quad A_s = 5,79 \text{ cm}^2 \quad A'_s = 0$$

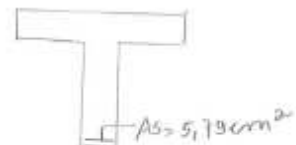


b) COM FURO

COMO CALCULARO NA QUESTÃO 3, LETRA b $\rightarrow k_l = 0,193$ COMO $K = 0,051 < k_l = 0,193$, então $K' = K = 0,051$

$$A_{s1} = 5,79 \text{ cm}^2 \rightarrow A_s = 5,79 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = 0 \rightarrow A'_s = 0$$



5 CONCLUSÃO

No item 1 foram determinados os pares N , M que solicitam a seção no Estado Limite Último para $X_{2,l}$ e $X_{3,l}$.

No item 2, apresentou-se os cálculos para traçar o Diagrama de Interação Normal x Momento para uma determinada seção de concreto armado utilizando o diagrama retangular simplificado. A seção de concreto armado suporta qualquer par de esforços N x M inseridos no diagrama, nos diversos domínios apresentados.

Nos itens 3 e 4, calculou-se a armadura para uma viga com e sem furo para a passagem de dutos como viga de seção retangular e como viga T. Neste item, é possível perceber que, ao calcular a seção como T, a área comprida da seção transversal é maior. Limitando a altura de linha neutra no cálculo, como foi exigido pela existência do furo para a passagem de dutos, o cálculo como viga T levou à economia de aço, tendo em vista que para este caso foi dispensada a armadura A'_s , o que não ocorre no cálculo como seção retangular.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMA TÉCNICAS. NBR 6118 - **Projeto de Estruturas de Concreto** - Procedimento. Rio de Janeiro, 2007.
- SILVA, Ney Amorim. **Apostila do Curso de Especialização em Engenharia de Estruturas** - Concreto I. Belo Horizonte, 2012.