



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ESCOLA DE ENGENHARIA



ESPECIALIZAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

# **ANÁLISE COMPARATIVA DO MODELO DE CÁLCULO SIMPLIFICADO E REFINADO DE LAJES PLANAS RETANGULARES**

GUSTAVO DO CARMO ANTUNES

Trabalho apresentada ao departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Especialista em Engenharia de Estruturas".

ORIENTADOR: NEY AMORIM SILVA

Belo Horizonte

2012

# SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	3
2. OBJETIVOS .....	3
3. OBJETO .....	4
4. TEORIA APLICADA .....	5
5. METODOLOGIA .....	6
6. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS .....	7
7. CONCLUSÕES .....	13
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	15

## 1. INTRODUÇÃO

No processo de elaboração do projeto estrutural o engenheiro civil deve estudar as diversas alternativas estruturais visando atender as prescrições das normas, conceitos arquitetônicos, rotinas construtivas ou ainda imposições de infra-estrutura da região, objetivando, dentro das condições impostas, a alternativa estrutural que garanta maior economia.

A escolha de um modelo estrutural para a análise das lajes de um edifício depende, de modo mais genérico, do nível de dificuldades e particularidades que a fôrma do pavimento apresenta. Fôrmas estruturais mais simples podem ser calculadas através de modelos simplificados, ao passo que geometrias mais complexas requerem modelos mais refinados de análise. É importante ressaltar que mesmo para análise de elementos simples é necessária muita atenção por parte do projetista, pois modelos que não contemplem a rigidez relativa entre elementos estruturais podem conduzir a resultados que, além de serem imprecisos, sejam inseguros.

Com o desenvolvimento constante dos softwares voltados para análise estrutural, e o aumento da demanda por projetos de estrutura, cada vez mais os engenheiros estão sujeitos a erros típicos de análise e concepção estrutural, principalmente engenheiros recém formados e sem uma orientação profissional embasada em experiência. Geralmente os erros mais comuns estão na entrada dos dados do projeto: erros na adoção das unidades, nas condições de contorno e simplificações do modelo.

Nesse quesito, os grandes escritórios de projetos têm mais vantagens em relação aos demais. Geralmente essas empresas possuem engenheiros consultores, que iniciaram suas funções e estudos na época em que não se tinham acesso a computadores, e assim adquiriram a experiência necessária para criticar e avaliar os resultados emitidos pelos softwares de análise atuais.

## 2. OBJETIVOS

Esse trabalho tem por objetivo abordar alguns aspectos da análise estrutural das lajes de edifícios, comparando os resultados obtidos na análise de um exemplo simplificado no qual foram utilizados dois métodos comumente usados pelos projetistas de estruturas.

Serão apresentados os resultados para dimensionamento das lajes à flexão e deformação. Primeiramente serão utilizadas as tabelas baseadas na Teoria da elasticidade elaboradas por *Kalmanock*, nas quais são desconsideradas as deformações dos apoios. *Kalmanock* integrou numericamente a equação diferencial de quarta

ordem, resultado da solução da análise das placas de concreto encontradas na Teoria Clássica ou de *Kirchhoff*.

Posteriormente, serão apresentados resultados considerando a rigidez relativa dos apoios e a deformação do conjunto, a partir do software *Cypecad*, que utiliza os conceitos dos métodos dos elementos finitos.

### 3. OBJETO

O modelo avaliado trata-se de quatro lajes retangulares, dispostas conforme a figura 1, apoiadas em vigas e essas em pilares.

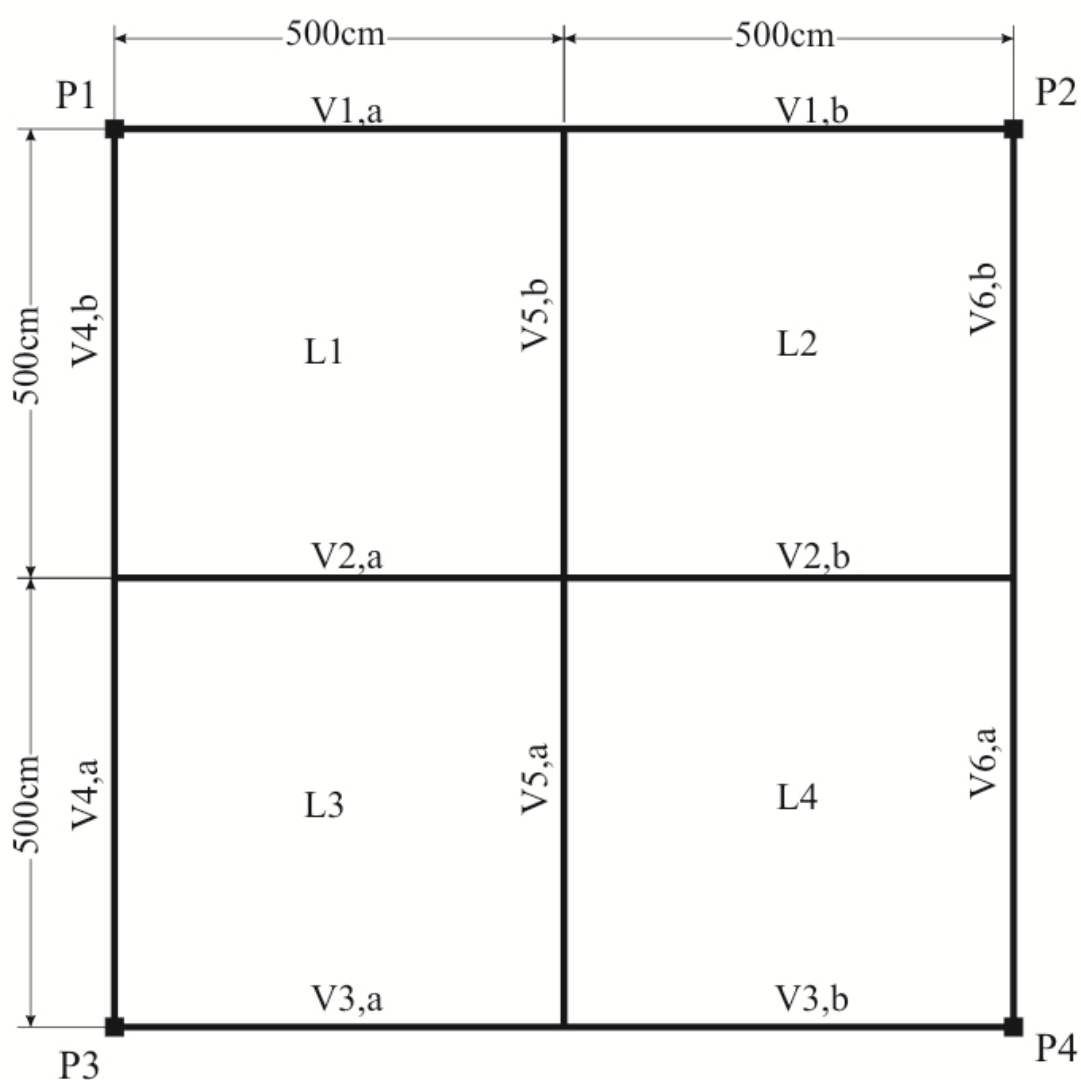


Figura 1 – Fôrma estrutural do modelo analisado

Para o cálculo à flexão das lajes serão adotados concreto  $f_{ck} = 25$  MPa, espessura das lajes de 10 cm, carga total distribuída sobre as lajes (permanente + sobrecarga) igual a

550 kgf/m<sup>2</sup>, e as seções das vigas variando no primeiro momento de 20x60 cm<sup>2</sup> e posteriormente passando a 20x100 cm<sup>2</sup>.

#### 4. TEORIA APLICADA

Segundo *SILVA JR (1966)* “placa é um corpo de pequena espessura, limitado por duas faces planas e uma superfície de geratriz perpendicular às faces, solicitado por forças perpendiculares ao plano médio. Por extensão, se as duas superfícies limites não forem planos paralelos, mas admitirem como superfície média um plano, ter-se-á uma placa de espessura variável, em oposição à primeira, que é de espessura constante. As placas de espessura constante ou variável, com carregamento perpendicular ao plano médio, denominam-se, também, lajes.”

De acordo com *BARES (1981)*, “a análise de flexão de placas isotropas com pequenas flechas, freqüentemente chamada de Teoria das Placas Delgadas de Poisson-Kirchhoff, está baseada em certas hipóteses simplificativas e limitações. Estas hipóteses e limitações se referem tanto à placa considerada e ao material de que ela é composta, como o seu comportamento sob a ação das cargas.”

Ainda segundo *BARES (1981)* as hipóteses relativas ao material e forma da placa são:

- a. O material da placa é perfeitamente elástico;
- b. O material da placa segue as leis de Hooke, e tem as mesmas constantes elásticas (módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson), para qualquer estado de carga;
- c. O material da placa é homogêneo e isotropo;
- d. A espessura da placa é constante;
- e. A espessura da placa é pequena, comparado com as dimensões restantes da placa;
- f. As fibras perpendiculares ao plano médio da placa antes da deformação, permanecem perpendiculares à superfície média da placa deformada.
- g. As tensões normais perpendiculares ao plano médio da placa são desprezíveis;
- h. Os deslocamentos verticais (flechas), são tão pequenas, que a curvatura em uma direção qualquer é dada pela derivada segunda do deslocamento vertical na direção considerada.”

Para as placas muito finas, desprovidas de rigidez, quer à flexão, quer a torção, tem-se a Teoria da Membrana; nelas os esforços internos situam-se no plano tangente à superfície média e são nulos os momentos fletores e de torção.

## 5. METODOLOGIA

### 5.1 - CÁLCULO APROXIMADO MEDIANTE O USO DE TABELAS - MÉTODO ELÁSTICO

Inicialmente serão apresentados os resultados do modelo simplificado considerando as vigas indeformáveis e as lajes retangulares isoladas a partir das tabelas de *Kalmanock*, utilizadas no cálculo de lajes no regime elástico. Dessa forma, teremos uma laje considerada como engastada nas bordas internas, em contato com as demais lajes, e simplesmente apoiadas nas bordas externas apoiadas nas vigas, conforme figura 2.

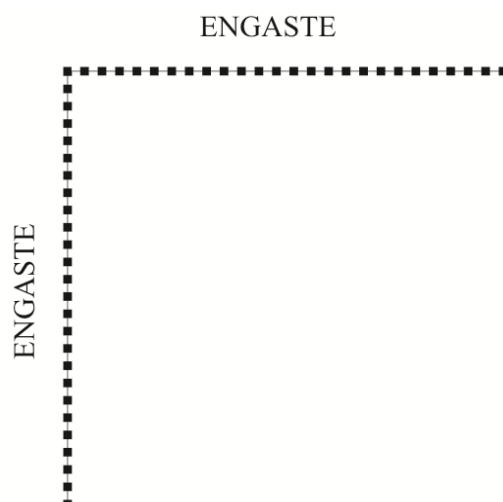


Figura 2 – Esquema estrutural da laje

### 5.2 - ANÁLISE ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Segundo *DUARTE (1998)* o método dos elementos finitos constitui atualmente uma das mais refinadas ferramentas de análise estrutural no que diz respeito à aplicação de métodos numéricos em engenharia.

As duas características principais do método são a subdivisão da estrutura em partes finitas (elementos), interligando-as entre si através de um número discreto de pontos em sua periferia (nós) e a escolha da função que descreve o comportamento interno dessas pequenas partes ou elementos. Esta última constitui a mais fundamental das características, uma vez que o bom ou mau comportamento do elemento é que vai viabilizar ou não o uso do método.

Uma particularidade muito importante da análise de lajes através do método dos elementos finitos é que ela possibilita, por utilizar elementos de placa, a apresentação

dos resultados de esforços solicitantes. Esses esforços são apresentados através de envoltórias ou curvas de isovalores ao longo do pavimento analisado, permitindo assim análises mais precisas, principalmente no que diz respeito ao posterior detalhamento das armaduras. É possível identificar os pontos de inversão nos diagramas de momentos fletores, bem como detectar possíveis comportamentos imprevistos, devido a rigidez insuficiente de algum elemento estrutural.

O software Cypecad, utilizado para análise computacional desse modelo, faz a discretização dos panos de laje maciça através de malhas de elementos de tamanho máximo de 25 cm e efetua uma condensação estática (método exato) de todos os graus de liberdade. Mantém a hipótese de diafragma rígido, considerando a rigidez à torção dos elementos.

## 6. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Por definição dos softwares utilizados, os valores apresentados ao momento fletor  $M_x$  corresponde ao vetor momento  $y$ , e os valores de  $M_y$  correspondem ao vetor momento  $x$ . Ou seja, os valores de  $M_x$  variam no sentido do eixo  $x$ , e conseqüentemente, os valores de  $M_y$  variam no sentido do eixo  $y$ .

Ao utilizar o modelo de cálculo aproximado mediante o uso de tabelas de *Kalmanock* – método elástico – sem a consideração da deformabilidade das vigas, foram obtidos os seguintes valores de momentos fletores de dimensionamento e flechas:

**$M_x = M_y = 0,56 \text{ tf.m}$**  (momentos fletores positivos no centro da laje)

**$X_x = X_y = 1,30 \text{ tf.m}$**  (momentos fletores negativos sob os apoios internos)

**Flecha máxima no centro da laje = 0,535 cm**

Já ao realizar a análise através do software Cypecad, considerando as vigas de seção igual a 20x60 cm<sup>2</sup>, obtivemos os seguintes diagramas de isovalores para momento fletor de dimensionamento longitudinal, transversal e deformação vertical (flecha), conforme as figuras 3, 4 e 5, respectivamente. Os valores máximos obtidos são apresentados abaixo:

**$M_x \approx M_y \approx 1,00 \text{ tf.m}$**  (momentos fletores positivos no centro da laje)

**$X_x \approx X_y \approx 0,20 \text{ tf.m}$**  (momentos fletores negativos nos apoios internos)

**Flecha máxima no centro do modelo = 5,80 cm**

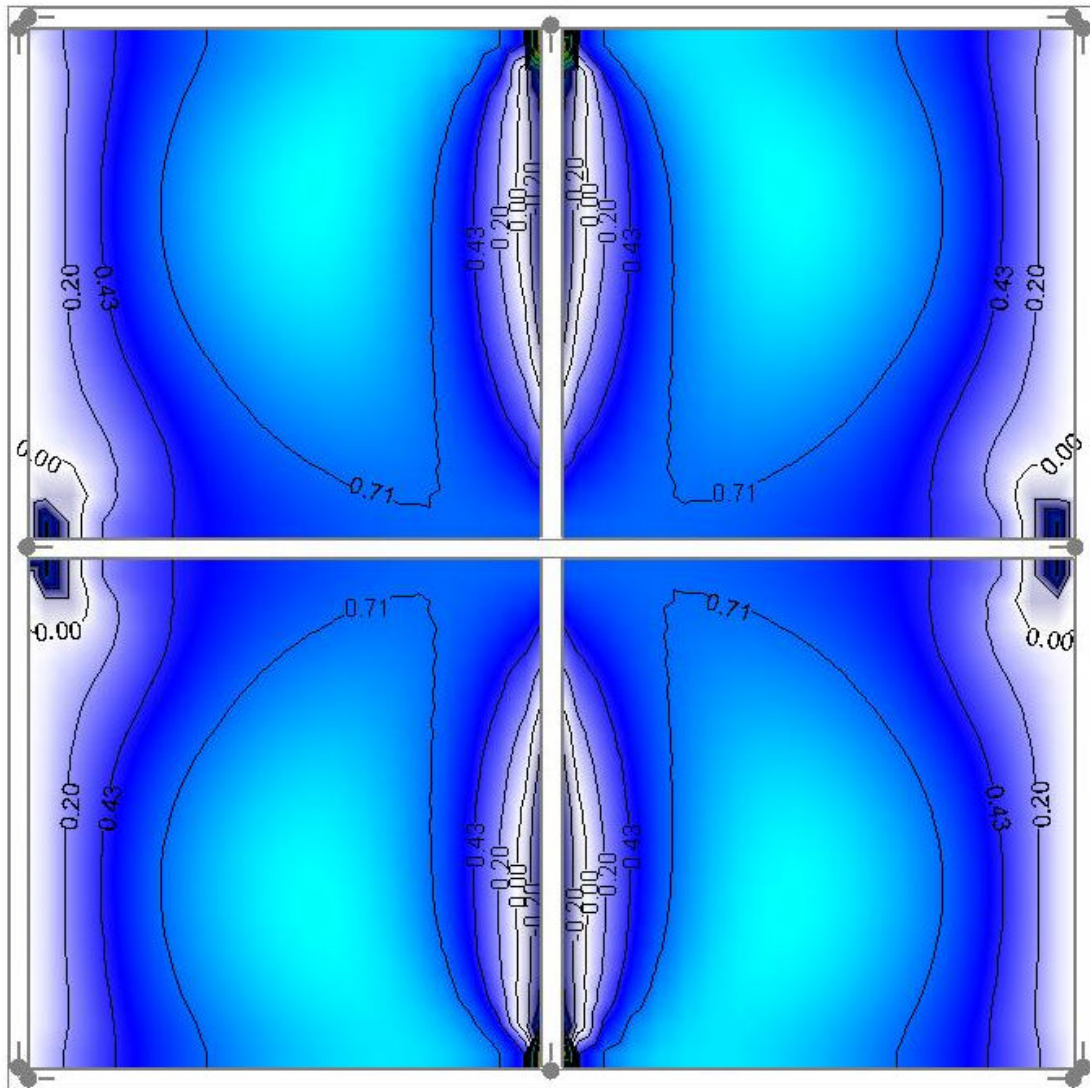


Figura 3 – Diagramas de isovalores para momento fletor longitudinal ( $M_x$ )  
(Valores em tf.m)



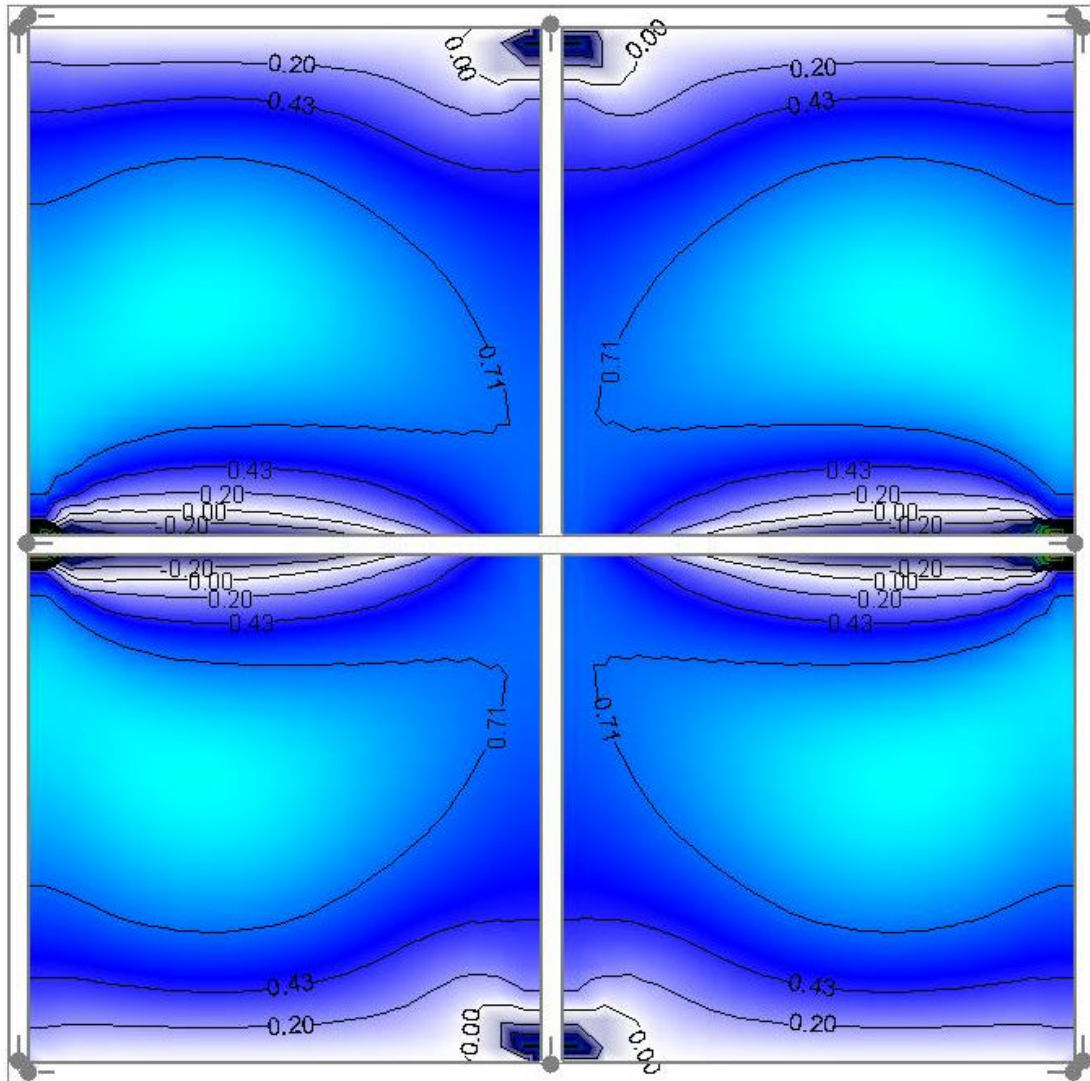


Figura 4 – Diagramas de isovalores para momento fletor transversal ( $M_y$ )  
(Valores em  $\text{tf.m}$ )

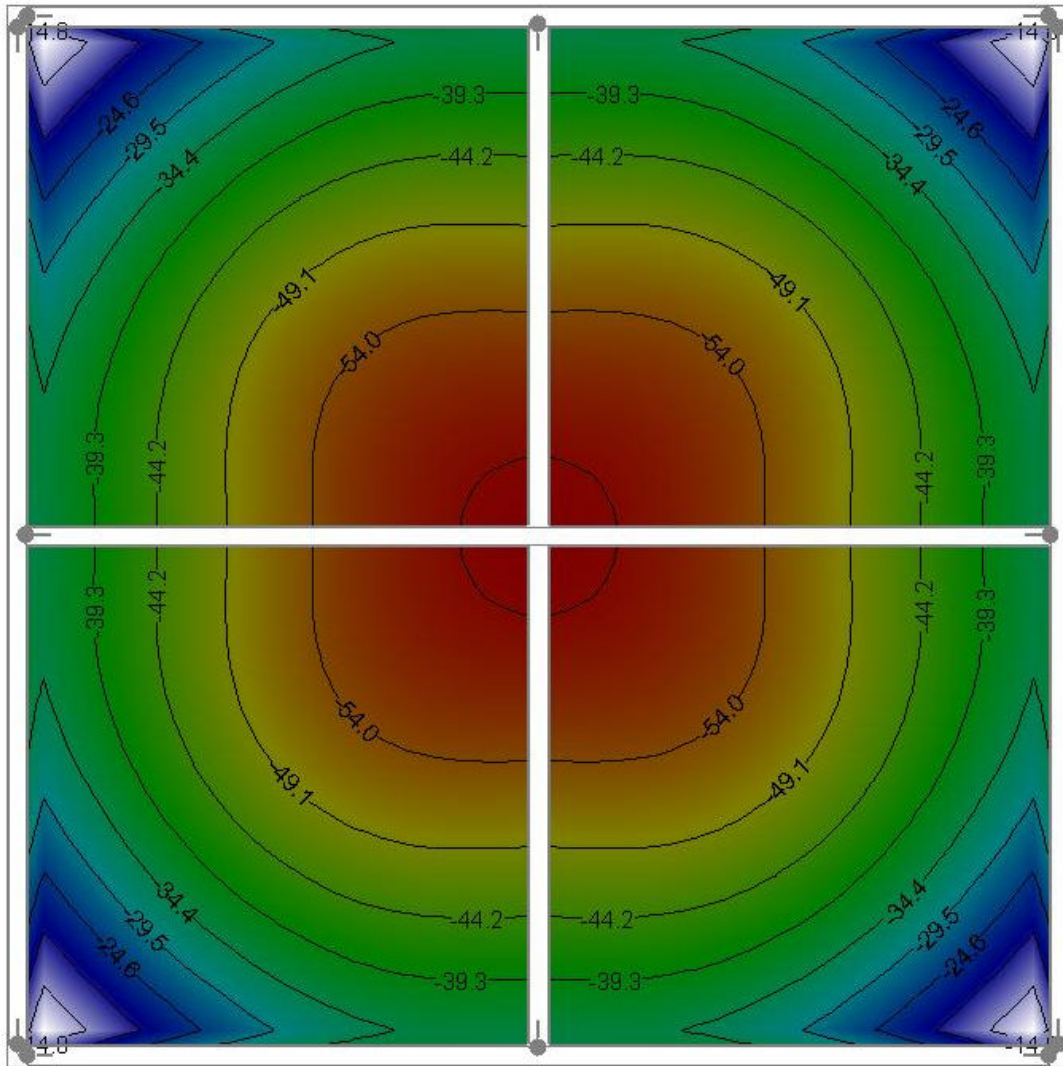


Figura 5 – Diagramas de isovalores para deformação vertical (flecha)-(Valores em mm)

Ao realizar a análise através do software Cypecad, considerando a seção das vigas igual a 20x100 cm<sup>2</sup> obtivemos os seguintes diagramas de isovalores para momento fletor de dimensionamento longitudinal, transversal e deformação vertical (flecha), conforme as figuras 6, 7 e 8, respectivamente. Os valores máximos estão indicados abaixo:

**$M_x \approx M_y \approx 0,60 \text{ tf.m}$**  (momentos fletores positivos no centro da laje)  
 **$X_x \approx X_y \approx 0,97 \text{ tf.m}$**  (momentos fletores negativos nos apoios internos)  
**Flecha máxima no centro da laje = 1,6 cm**

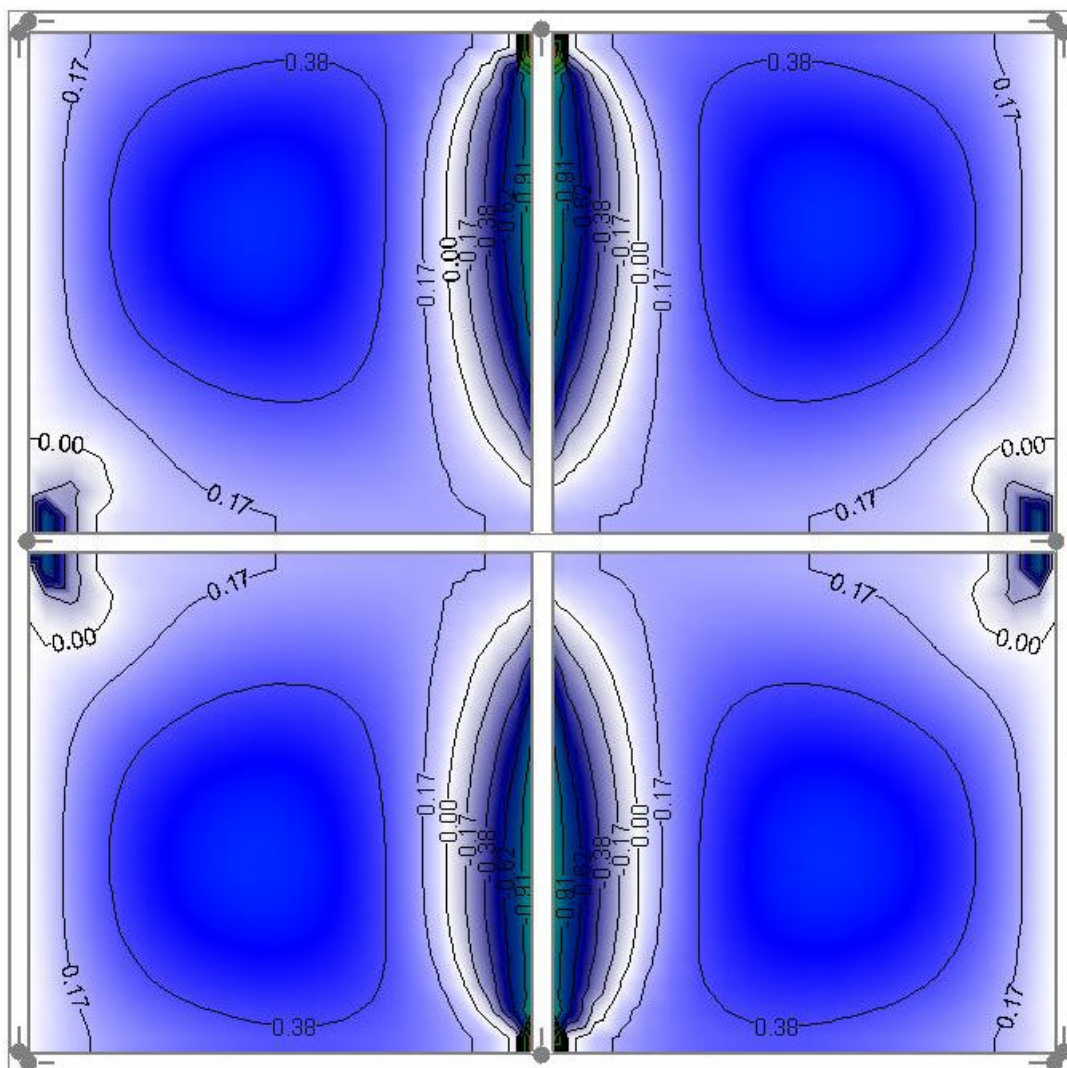


Figura 6 – Diagramas de isovalores para momento fletor longitudinal ( $M_x$ )  
(Valores em tf.m)

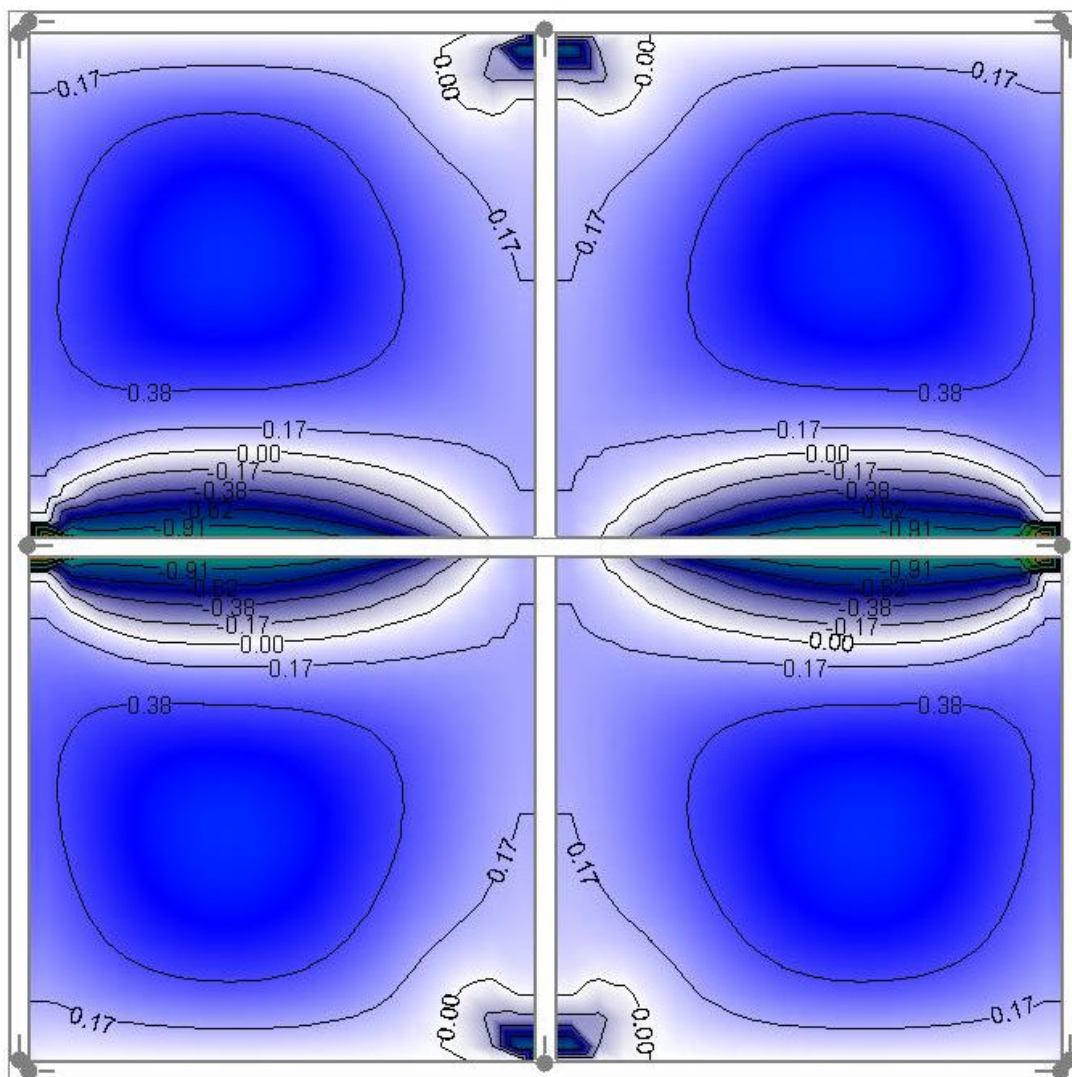


Figura 7 – Diagramas de isovalores para momento fletor transversal (My)  
(Valores em tf.m)

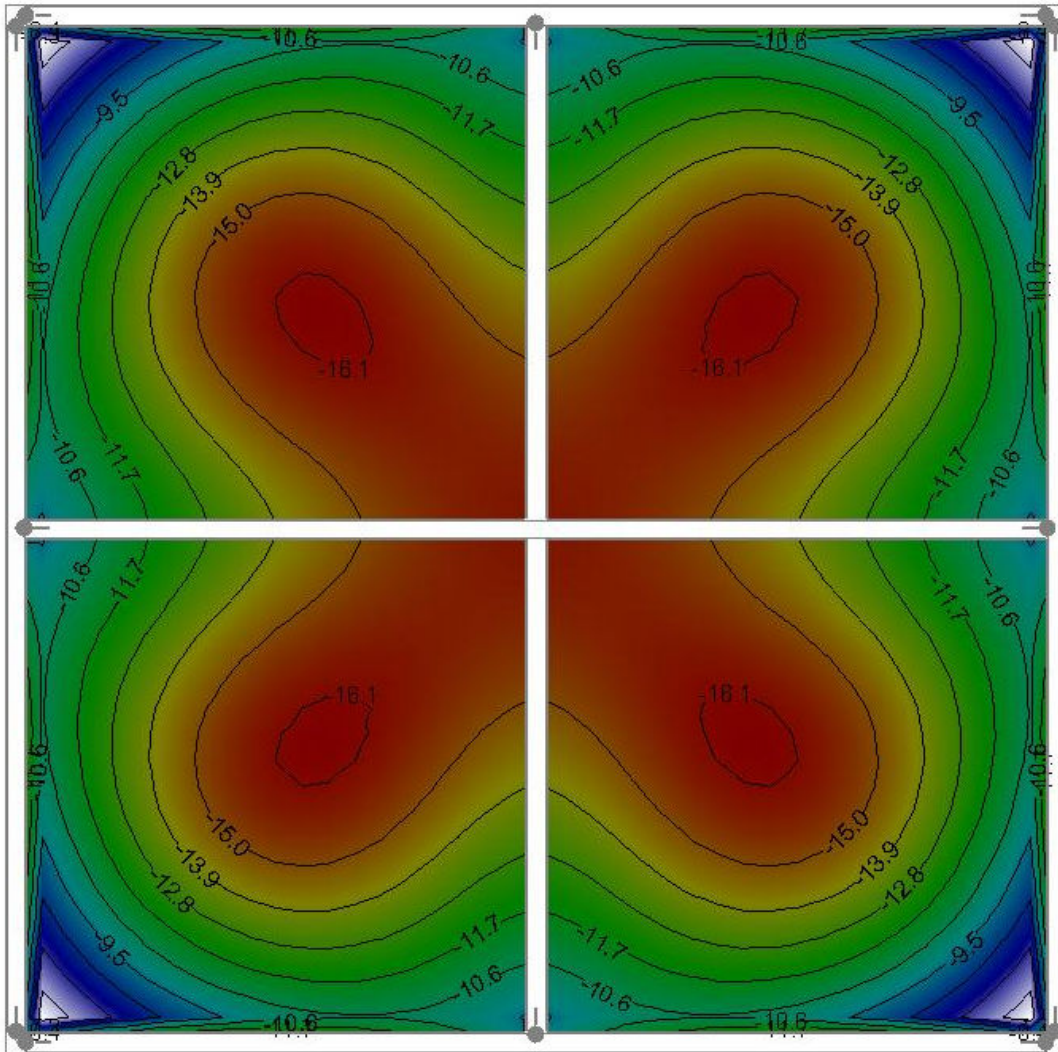


Figura 8 – Diagramas de isovalores para deformação vertical (flecha)-(Valores em mm)

## 7. CONCLUSÕES

A escolha de um modelo estrutural que melhor se aproxima da estrutura real é de extrema importância para uma boa análise dos resultados do modelo e conseqüentemente um bom dimensionamento das peças estruturais. No entanto, devido à grande complexidade envolvida no processo e aos diversos fatores a serem considerados no cálculo, são realizadas muitas simplificações e estimativas simulando o comportamento de uma estrutura. Em virtude dessa grande variabilidade de resultados é muito importante que se tenha profissionais experientes, que saibam avaliar e criticar os dados de saída dos softwares, em busca de possíveis erros na modelagem ou entrada de dados nos programas.

É sabido que ao se adotar um modelo simplificado de cálculo, ao se estimar um carregamento ou, ao se prever uma situação de análise, mesmo que possível, há a existência e o acúmulo de erros. Embora na maioria dos parâmetros a serem analisados são empregados coeficientes de segurança, seja majorando carregamentos ou minorando a resistência dos materiais utilizados, é fundamental se ter noção da diferença entre os valores teóricos e os práticos para garantir a segurança da estrutura.

Esse trabalho visou demonstrar as diferenças dos resultados encontrados na análise de uma estrutura simplificada a partir de dois métodos de cálculo comumente utilizados atualmente. Foram avaliados os esforços de dimensionamento a flexão das lajes (momento fletor) e as deformações verticais das mesmas (flechas). Os valores obtidos podem ser comparados na tabela 1 abaixo:

Tabela 1 – Resultados dos momentos fletores e flechas das lajes da estrutura analisada

<b>Método Utilizado</b>	<b>Momento Fletor Positivo (t.m)</b>	<b>Momento Fletor Negativo (t.m)</b>	<b>Flecha (cm)</b>
Tabela <i>Kalmanock</i> (método elástico)	0,56	1,30	0,54
Software Cypecad (M.E.F.) (Utilizando Vigas 20x60)	1,00	0,20	5,80
Software Cypecad (M.E.F.) (Utilizando Vigas 20x100)	0,60	0,97	1,60

Como pode ser observado nos diagramas de isovalores demonstrados nas figuras 3 a 8, ao considerarmos as seções das vigas com 20x60 cm<sup>2</sup> a estrutura se comporta como sendo uma laje única de 10x10 m<sup>2</sup>, e as vigas internas (V2 e V5) como enrijecedores da laje devido sua baixa inércia.

Já quando analisamos os diagramas do modelo adotando as vigas com seções de 20x100 cm<sup>2</sup> a estrutura passou a se apresentar como quatro lajes apoiadas nas vigas. Nesse caso, as vigas apresentaram inércias consideráveis e a estrutura apresenta aspecto semelhante ao considerado quando foi adotado o método das tabelas de *Kalmanock*, no qual as estruturas de apoio são consideradas indeformáveis. No entanto, no software Cypecad as deformação das lajes são maiores pois são consideradas as deformações das vigas.

Portanto, pode-se comprovar com os valores obtidos nesse trabalho, que ao se adotar os modelos simplificados das tabelas, podemos estar cometendo erros consideráveis, constando assim a necessidade de uma boa avaliação dos resultados ao dimensionar uma estrutura, por mais simples que essa seja.

## **8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

BARES, Richard; “Tablas para el calculo de placas y vigas pared”, 2º edição ampliada segundo a 3º edição Alemã publicada por Bauverlag Gmbh, Editorial Barcelona Gili S.A., Barcelona, 1981

DUARTE, Haroldo “Aspectos da análise estrutural das Lajes de edificios de concreto armado”; EESC - USP, São Carlos, Dissertação de Mestrado; 1998.

SILVA Jr., Jaime Ferreira da; “Noções sobre chapas, placas e casas”, Edições Engenharia, Belo Horizonte, 1966.