

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Michele Rodrigues de Andrade

ÍNDICE DE ROTAÇÃO E TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES

Belo Horizonte - MG

2011

Michele Rodrigues de Andrade

ÍNDICE DE ROTAÇÃO E TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES

Monografia apresentada para conclusão do curso de Especialização para Professores – Ênfase em Cálculo da Universidade Federal de Minas Gerais.

Orientador: Alberto Berly Sarmiento

Belo Horizonte - MG

2011

AGRADECIMENTOS

À Deus, por sempre estar presente em minha vida. Aos meus pais pelo incentivo e amor incondicional. Ao meu marido pelo apoio, carinho e principalmente compreensão. Em especial, ao meu orientador, professor Alberto Sarmiento pela atenção, paciência e por suas valiosas contribuições para a realização deste trabalho.

“Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que a outra construiu e o que uma estabeleceu, a outra desfaz. Somente na Matemática é o que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura”.

HanKel.

INTRODUÇÃO

Este tema foi escolhido na busca de um melhor entendimento sobre o assunto. Dentro da Teoria de Curvas planas da Geometria Diferencial encontramos o teorema dos Quatro Vértices e o índice de rotação, um resultado clássico que garante a existência de pelo menos quatro vértices em uma curva plana simples e fechada, onde um vértice é um extremo relativo da curvatura. E o número de rotação de uma curva mede o número de voltas que o vetor tangente dá em torno da origem.

O teorema dos quatro vértices possui elevada importância no contexto das aplicações da teoria das curvas planas, e foi demonstrado por Mukhopadhyaya em 1909, apenas para curvas planas estritamente convexas, e em 1912, Adolf Kneser o demonstrou para todas as curvas simples e fechadas no plano, não somente para as estritamente convexas.

Esta monografia está organizada em dois capítulos. No primeiro, faz-se uma introdução dos conceitos básicos que serão necessários ao longo deste trabalho, tais como curvas planas parametrizadas, cicloide, hipocicloide, reparametrização, curvas diferenciáveis, comprimento do arco e curvatura de uma curva. No segundo, faz-se um estudo detalhado sobre o teorema dos quatro vértices e o índice de rotação.

SUMÁRIO

1 Conceitos Básicos	1
1.1 Curvas Planas Parametrizadas.....	1
1.1.1 A Ciclóide.....	4
1.1.2 A Hipociclóide.....	6
1.2 Reparametrização.....	9
1.3 Campo de Vetores sobre uma Curva Plana.....	10
1.4 Curvas Diferenciáveis.....	10
1.5 Comprimento do arco.....	12
1.6 Curvatura de uma Curva Plana.....	17
2 Índice de Rotação e o Teorema dos Quatro Vértices	24
2.1 Curvas Fechadas – Índice De Rotação.....	24
2.2 Teorema Dos Quatro Vértices.....	27
Referências Bibliográficas	35

Capítulo 1

1 CONCEITOS BÁSICOS

1.1 Curvas Planas Parametrizadas

Seja I um intervalo da reta \mathbb{R} (eventualmente $I = \mathbb{R}$). Uma *parametrização* é uma aplicação contínua $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$. A variável $t \in I$ é chamado *parâmetro* de f . A imagem de f , $\text{Im } f = \{q \in \mathbb{R}^2; q = f(t), t \in I\}$, é chamada de *arco parametrizado*. Arcos parametrizados são também chamados traços.



Figura 1: Um arco parametrizado pode ser definido, simplesmente como uma figura “desenhada” com um único traço, sem tirar o lápis do papel.

É importante ressaltar que escrever curvas na forma parametrizada na maioria das vezes, torna-se bem conveniente, pois através dessas equações as explorações das propriedades geométricas e físicas tornam-se mais simplificadas.

Algumas curvas definidas por equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ podem ser expressas pela eliminação do parâmetro, na forma $K = F(x, y)$ na qual denominamos de *equação cartesiana*.

Exemplo 1: A elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pode ser parametrizada fazendo-se as seguintes considerações:

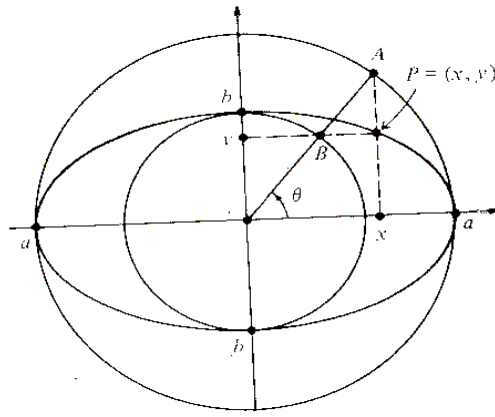


Figura 2: elipse

Como $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ existe um ângulo θ tal que $\cos \theta = \frac{x}{a}$ e $\sin \theta = \frac{y}{b}$; logo:

$x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ (equações paramétricas).

Quando θ varia de 0 a 2π , o ponto $P = (x, y)$ parte de $(a, 0)$ e completa uma volta sobre a elipse no sentido anti-horário. Observe que θ não é o ângulo central do arco de elipse a ao ponto $P(x, y)$. θ é o ângulo central subtendido pelos arcos determinados pelo eixo polar e pelos pontos A e B sobre as duas circunferências, uma circunscrita à elipse e a outra inscrita na elipse. P é a interseção da reta vertical por A com a reta horizontal por B.

■

Diz-se que um ponto qualquer $q \in \text{Im } f$ é duplo se existe dois parâmetros t_1 e t_2 em I , com $t_1 \neq t_2$, tais que $f(t_1) = f(t_2) = q$ (figura 3). Um ponto *triplo* é um ponto q tal que $f(t_1) = f(t_2) = f(t_3) = q$, com $t_1 \neq t_2 \neq t_3$ e assim sucessivamente (figura 4). Portanto um ponto de *multiplicidade finita* é um ponto $q \in \text{Im } f$ caracterizado por um conjunto finito de parâmetros distintos nos quais f assume o valor q . Diz-se que $q \in \text{Im } f$ é simples se existe um único $t \in I$ tal que $f(t) = q$.

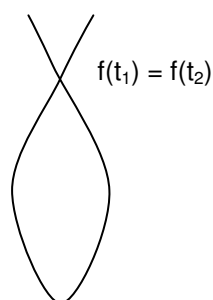


Figura 3: Ponto Duplo

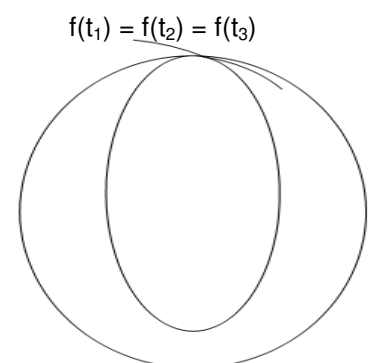


Figura 4: Ponto Triplo

Um arco parametrizado simples é constituído de pontos simples, isto é, o arco de uma curva não possui interseção. Isto ocorre se f for uma parametrização injetora (e, portanto $f: I \rightarrow \text{Im}(f)$ é bijetora). Diz-se que f é uma curva simples ou sem auto-interseções.

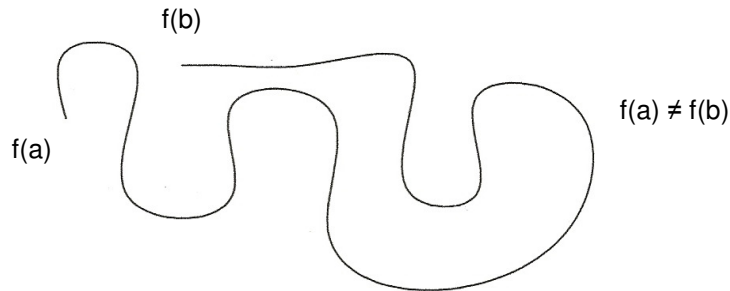


Figura 5: Arco parametrizado simples.

O domínio $I \subset \mathbb{R}$ pode ser um intervalo fechado $I = [a, b]$ caso $f(a), f(b)$ são as extremidades do arco. Uma curva é dito, fechado, se as extremidades coincidem, isto é, $f(a) = f(b)$.

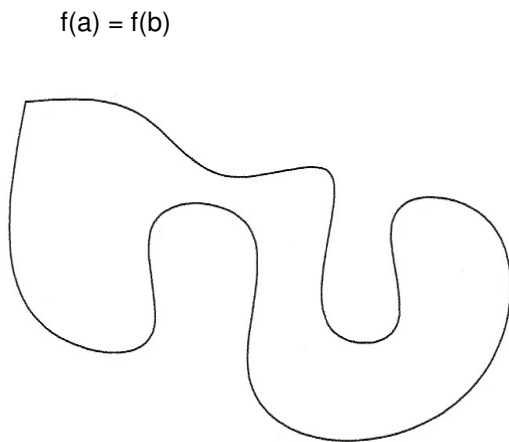


Figura 6: Arco parametrizado fechado simples.

$f(a) = f(b) = f(c) = f(d)$

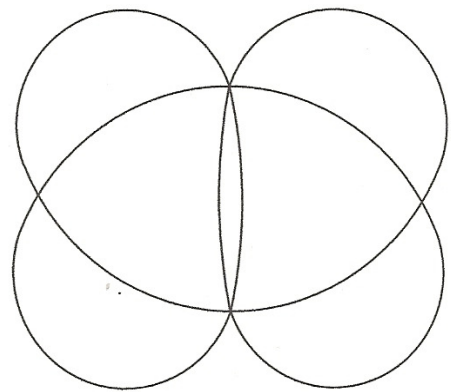


Figura 7: Arco parametrizado fechado.

Exemplo 2: A parametrização $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ tem como traço o círculo C de centro na origem do plano, raio r e extremidades iguais, $f(0) = f(2\pi)$. O círculo C é um exemplo de arco parametrizado fechado do plano que admite outras parametrizações. Por exemplo: $g(u) = (r \cos(u), r \sin(u))$, $u \in$

$$[2\pi, 4\pi] \text{ e } h(v) = \left(r \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, r \frac{2t}{t^2 + 1} \right), \text{ onde } t \in \mathbb{Q}.$$

Verificaremos se a equação acima é realmente um círculo de fórmula $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$

$$\left(r \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right)^2 + \left(r \frac{2t}{t^2 + 1} \right)^2 = r^2 \left[\frac{(t^4 - 2t^2 + 1)}{(t^4 + 2t^2 + 1)} + \frac{4t^2}{(t^4 + 2t^2 + 1)} \right] = r^2 \left(\frac{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2}{t^4 + 2t^2 + 1} \right) = r^2 \left(\frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^4 + 2t^2 + 1} \right) = r^2$$

■

1.1.1 Ciclóide

A cicloide é a curva traçada por um ponto fixo P da circunferência de um círculo quando este rola, sem deslizar, por uma reta com velocidade uniforme.

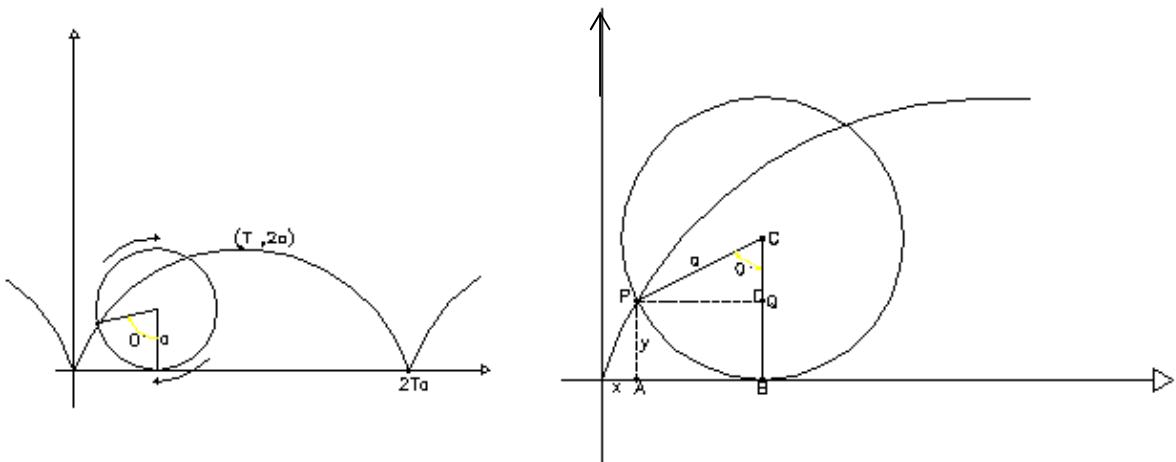


Figura 8: A cicloide traçada por um ponto da circunferência quando o círculo rola por uma reta.

As propriedades geométricas da Cicloide foram, ao longo dos tempos, inspirações de grandes matemáticos da história, começando por Galileu em 1600, o primeiro a notar a cicloide e a investigar suas propriedades. Ele, na verdade, não descobriu quaisquer dessas propriedades, mas deu à curva seu nome e recomendou seu estudo a seus amigos, incluindo Mersenne que informou a Descartes que descobriu,

em 1638, uma construção para a tangente à cicloide. Em 1644, o discípulo de Galileu, Torricelli (que inventou o barômetro), publicou sua descoberta da área sob o arco. O comprimento do arco de cicloide foi descoberto em 1658 pelo grande arquiteto inglês Christopher Wren. ([Simmons], pag. 260).

O único modo conveniente de representar uma cicloide é por meio de equações paramétricas. Para obtermos as equações paramétricas da cicloide, admitamos que a reta s é o eixo - OX ; o círculo C inicia o movimento com centro no ponto $(0; r)$; o ponto P coincide com a origem do sistema de coordenadas no início do movimento.

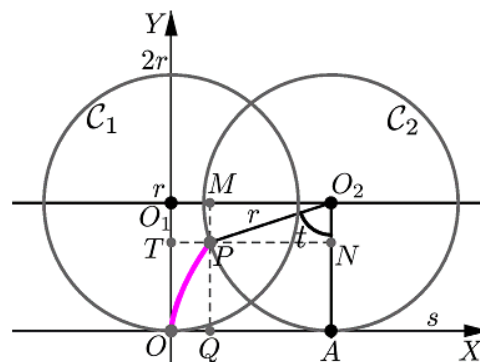


Figura 9: Desenvolvimento da cicloide.

De acordo com a Figura 9, O_1 e O_2 são os centros de C_1 e C_2 , respectivamente; $P = (x, y)$ o ponto da cicloide em C_2 ; A é o ponto em que C_2 toca o eixo - OX ; $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções ortogonais de P sobre os eixos OX e OY , respectivamente; M e N as projeções ortogonais de P sobre O_2O_1 e O_2A e t a medida do ângulo $A\hat{O}_2P$, tomada em radianos.

Note que o segmento OA tem o mesmo comprimento que o arco de A a P sobre o círculo C_2 , que consiste dos pontos que já fizeram contato com a reta s . Como t é a medida de $A\hat{O}_2P$, o comprimento do arco de C_2 de A a P que já fez contato com s é rt . Logo $|OA| = rt$.

Analisando o sinal de $\sin t$ e $\cos t$ nos intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$,

vemos que as coordenadas x e y de P são determinadas por meio das seguintes relações, obtendo assim as equações paramétricas da cicloide:

$$x = |OQ| = |OA| - |QA| = |OA| - |O_2M| = rt - r \sin t = \mathbf{r(t - \sin t)}$$

$$y = |OT| = |OO_1| - |TO_1| = r - |O_2N| = r - r \cos t = r(1 - \cos t)$$

■

De acordo com a variação de t , o movimento será descrito pelas figuras abaixo:

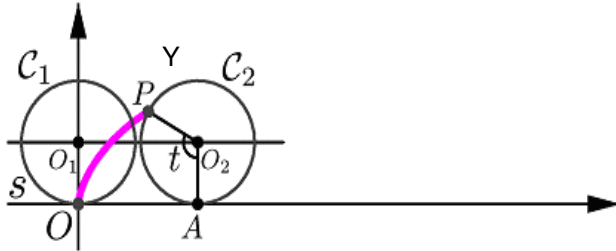


Figura 10: $t = \frac{2\pi}{3}$

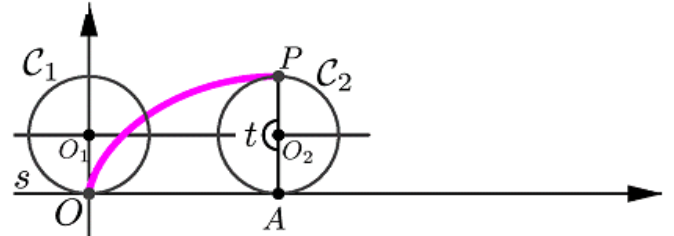


Figura 11: $t = \pi$

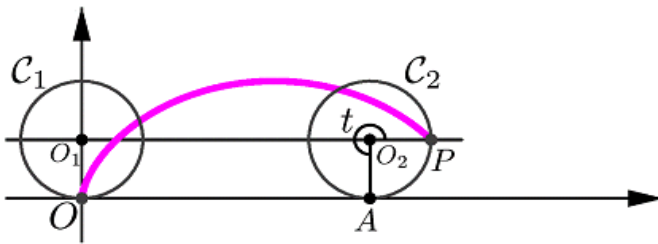


Figura 12: $t = \frac{3\pi}{2}$

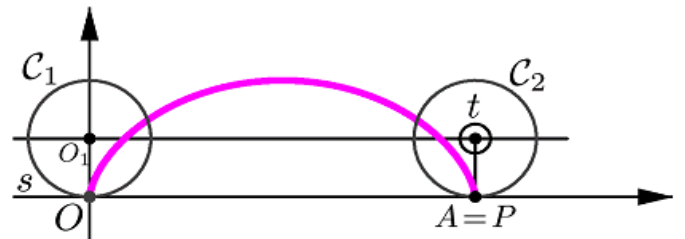


Figura 13: $t = 2\pi$

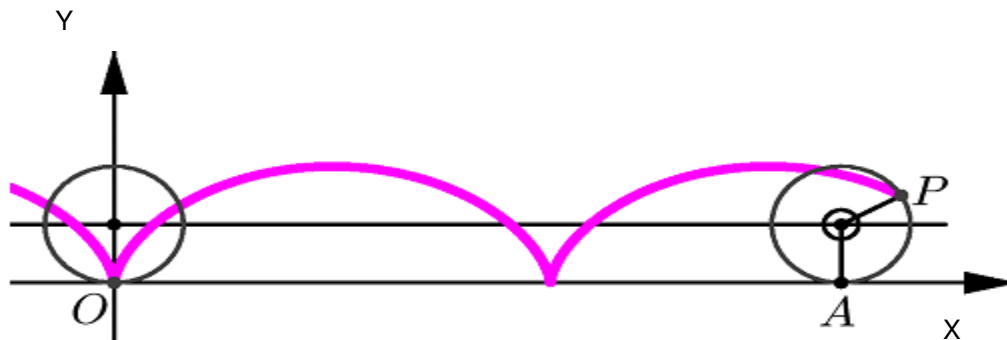


Figura 14: Ciclóide

1.1.2 Hipociclóide

A hipociclóide é uma curva cuja construção é semelhante à ciclóide, em que o círculo rola na parte interna de uma circunferência fixa. O lugar geométrico de um ponto P fixo sobre a circunferência rolante chama hipociclóide do grego hipo (sob ou abaixo).

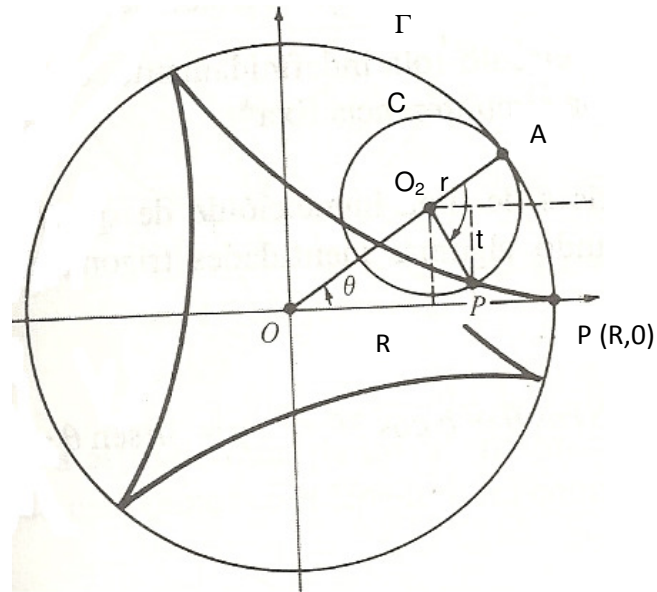


Figura 15: Hipociclóide

Seja Γ um círculo de raio R com centro na origem $(0,0)$ e C um círculo de raio $r < R$ tangente interno com Γ no ponto A . O círculo C rola em cima do círculo Γ iniciando o movimento com centro no ponto $O_2(R - r, 0)$ e P com posição inicial de $P = (R, 0)$.

Determinemos as coordenadas do ponto $P = (x,y)$ em termos de um parâmetro, quando C rola sobre Γ sem deslizar.

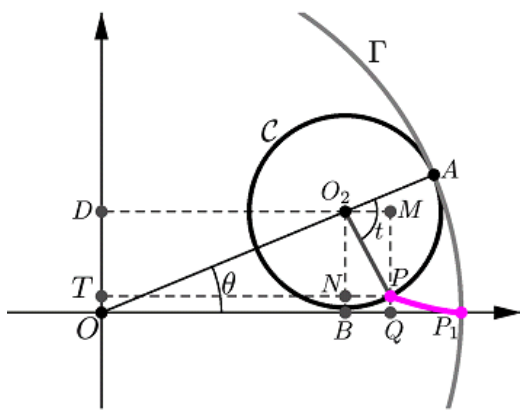


Figura 16: P descrevendo uma hipociclóide.

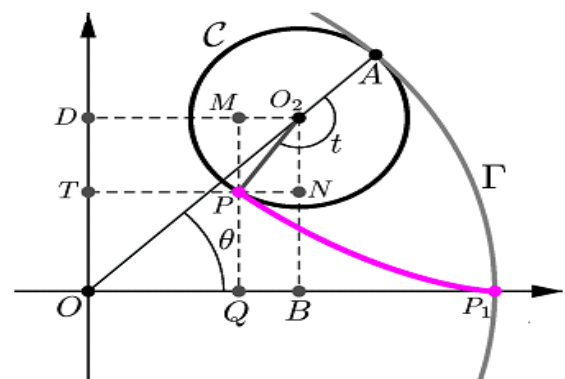


Figura 17: P continuando o movimento.

Acompanhe a Figura 16, a designação dos seguintes elementos: A é o ponto de C que toca Γ ; O_2 o centro de C ; B e D as projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY ; $Q =$

$(x; 0)$ e $T = (0; y)$ as projeções de P sobre OX e OY ; M e N as projeções de P sobre O_2D e O_2B , respectivamente.

Com essas notações, considerando o caso em que B está entre O e Q , mostrado na Figura 16, temos:

$$\begin{aligned}x &= |OQ| = |OB| + |BQ| = |OB| + |O_2M|, \\y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|.\end{aligned}$$

Sabendo que o centro de C descreve um círculo de raio $R - r$, e sendo θ a medida do ângulo do semi-eixo OX positivo para OO_2 , no sentido anti-horário, obtemos: $|OB| = (R - r) \cos \theta$ e $|OD| = (R - r) \sin \theta$.

Denotando t a medida do ângulo de O_2A para O_2P , no sentido horário, temos:

$$\sphericalangle OO_2P = \pi - t \quad \text{e} \quad \sphericalangle NO_2B = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\text{Logo, } \sphericalangle NO_2B = \frac{\pi}{2} + \theta + \sphericalangle OO_2P = (\theta - t) + \frac{\pi}{2}$$

Portanto, no triângulo-retângulo PNO_2 , temos:

$$|BQ| = r \sin (\sphericalangle NO_2B) = r \sin \left((\theta - t) + \frac{\pi}{2} \right) = r \cos (\theta - t) = r \cos (t - \theta), \quad (8)$$

$$|O_2N| = r \cos (\sphericalangle NO_2B) = r \cos \left((\theta - t) + \frac{\pi}{2} \right) = -r \sin (\theta - t) = r \sin (t - \theta).$$

Substituindo essas identidades nas relações (8) e que $t = \frac{R\theta}{r}$, obtemos as seguintes equações paramétricas da hipociclóide:

$$\begin{aligned}x &= |OB| + |BQ| = (R - r) \cos \theta + r \cos \left(\left(\frac{R - r}{r} \right) \theta \right) \\y &= |OD| - |TD| = (R - r) \sin \theta - r \sin \left(\left(\frac{R - r}{r} \right) \theta \right),\end{aligned} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Considerando $r \in \mathbb{R}$ e parâmetro, podemos considerar algumas situaçõ



- Se r for um número inteiro (m), então a hipociclóide tem m cúspides (pontos onde a curva toca o eixo x) e o ponto P retorna a A depois que o círculo menor rolar m vezes sobre a circunferência fixa.
- Se r for um número irracional $\left(\frac{m}{n}\right)$ logo a curva terá infinitos números de cúspides.

1.2 Reparametrização

Dada uma curva parametrizada $r: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ com parâmetro t e um aplicação contínua estritamente crescente ou decrescente $t: J \rightarrow I$ com variável h (isto é, $t = t(h)$), então o conjunto $g(h) = (f \circ t)(h) = f(t(h))$ é chamado uma reparametrização de f , a função $t = t(h)$ é chamado de mudança de parâmetros.

Se h for estritamente crescente, diz-se que a reparametrização g preserva a orientação. Se h for estritamente decrescente, diz-se que g inverte a orientação.

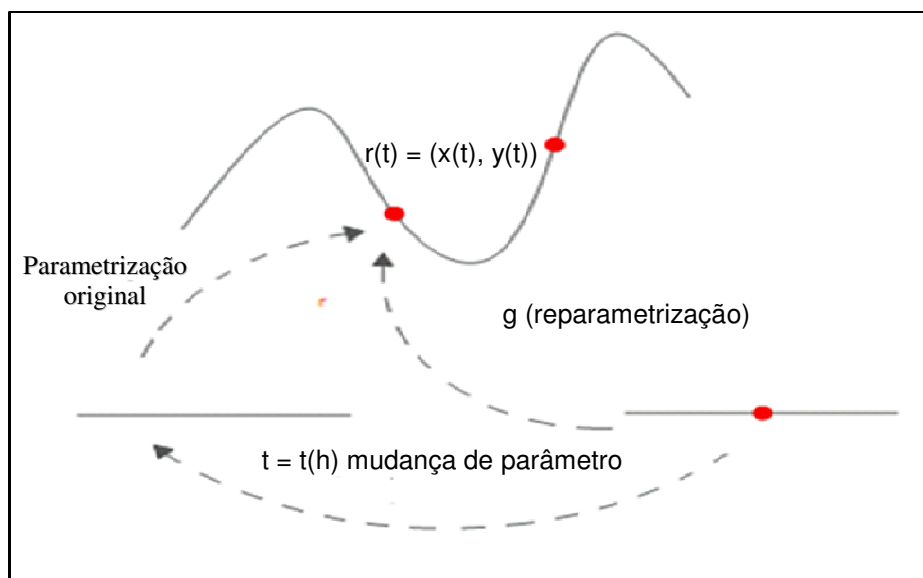


Figura 18: Idéia geométrica de uma reparametrização.

1.3 Campo de Vetores sobre Curvas

Intuitivamente, um campo de vetores $X(t)$ ao longo de uma curva parametrizada $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor. Paralelamente para efeito de visualizar, vamos a transladar o vetor de modo que sua origem seja $\alpha(t)$.

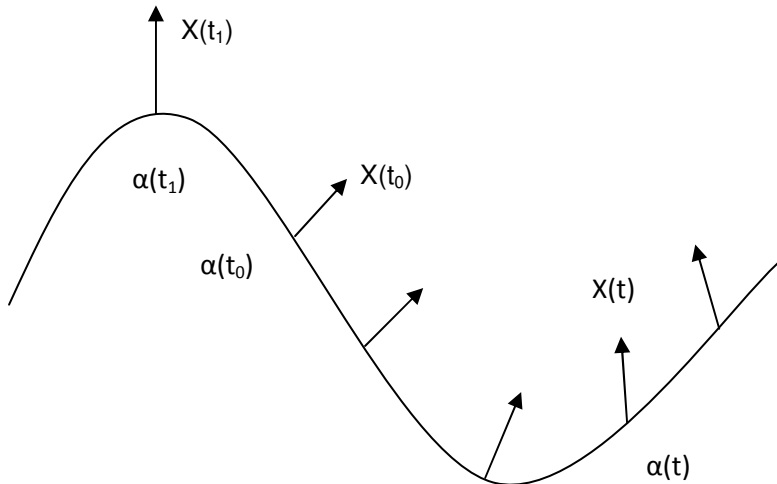


Figura 19: Campo de vetores $X(t)$ ao longo de uma curva α .

Um exemplo importante de campo de vetores sobre uma curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que usaremos frequentemente é o campo dado pelos vetores tangentes a curva.

1.4 Curvas Diferenciáveis

Uma parametrização $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é diferenciável no ponto t_0 se existe o seguinte limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \neq 0$$

Neste caso o valor do limite denotamos por $f'(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0)$.

Uma parametrização $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é “diferenciável”, se f for diferenciável em todo ponto $t \in I$.

Se $f(t) = (x(t), y(t))$ e é diferenciável no ponto t_0 isto é, existe o limite:

$$\begin{aligned} f'(t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x(t_0 + h), y(t_0 + h)) - (x(t_0), y(t_0))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x(t_0 + h) - x(t_0), y(t_0 + h) - y(t_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}, \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} \right) = \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} \right) = (x'(t_0), y'(t_0)). \end{aligned}$$

Então o limite $f'(t_0)$ é um vetor do plano $(x'(t_0), y'(t_0))$. Assim temos que, $f = (x, y)$ é diferenciável se, as funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são diferenciáveis.

Por outro lado se $f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq 0$ é um vetor não nulo, notemos do quociente de Newton:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h_2) - f(t_0)}{h_2} = f'(t_0)$$

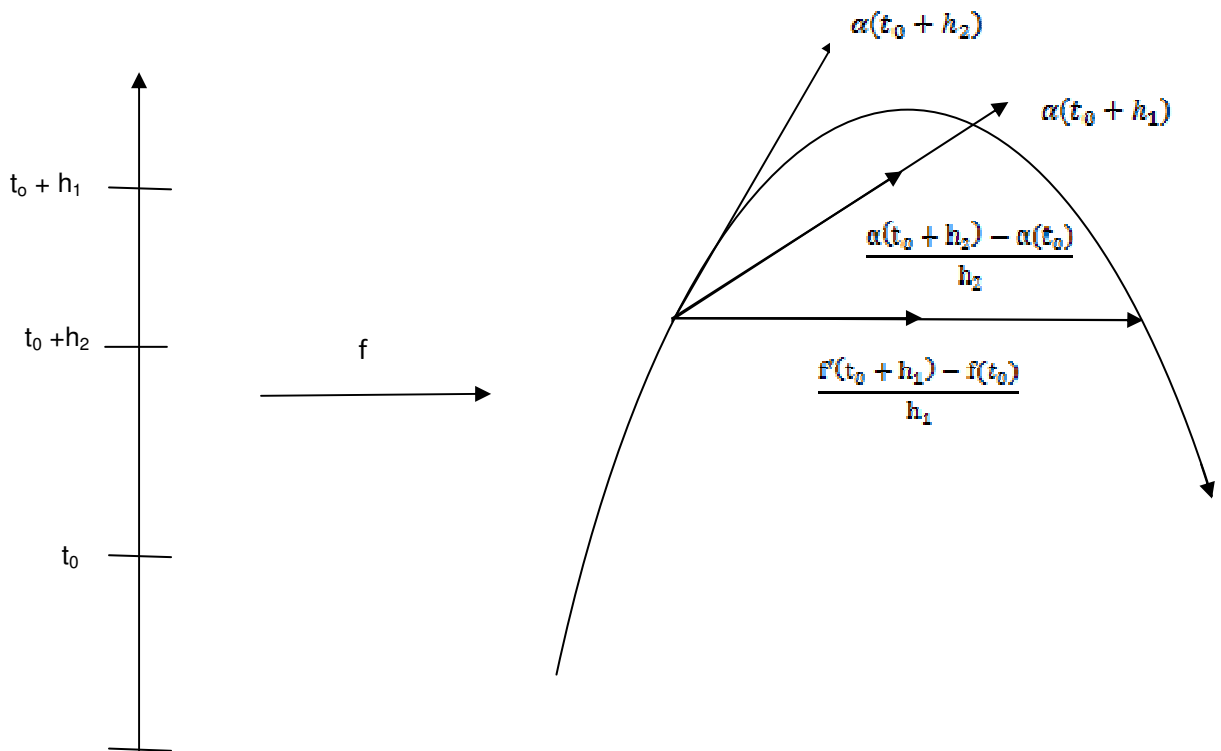


Figura 20

Os vetores $\frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0))$ são vetores direção das retas secantes que passam por $\alpha(t_0)$, à medida que $h \rightarrow 0$, isto é, $t_0 + h$ tende para t_0 , vemos que $f(t_0 + h)$ tende a $f(t_0)$, logo as retas secantes que passam por $\alpha(t_0)$ tendem à reta tangente a curva em $\alpha(t_0)$ cujo vetor direção será $f'(t_0)$. Razão pela qual $f'(t_0)$ é chamado de vetor tangente à curva no ponto $f(t_0)$. Com isto, a equação da reta tangente à curva no ponto $f(t_0)$ é:

$$T(\tau) = f(t_0) + \tau f'(t_0)$$

Uma Parametrização é dita regular se o vetor tangente é não nulo em todo ponto.

1.5 Comprimento Do Arco

Seja C uma curva regular plana, parametrizada por $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e consideremos uma seqüência de pontos $a = t_0, t_1, \dots, t_n = b \in I \subset \mathbb{R}$. Então $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n) \in C = f(I)$ é uma seqüência de pontos que determina uma linha poligonal inscrita na curva. Na medida em que formos subdividindo o intervalo $[a, b]$ com mais pontos, mais poligonal se aproxima da curva. Representemos $f(t)$ pelo par $(x(t), y(t))$. Então as imagens da subdivisão são os pontos $(x(t_i), y(t_i))$, que por simplicidade denotaremos por (x_i, y_i) , e o seu comprimento é $|\sum_{i=1}^n (x_i, y_i) - (x_{i-1}, y_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$.

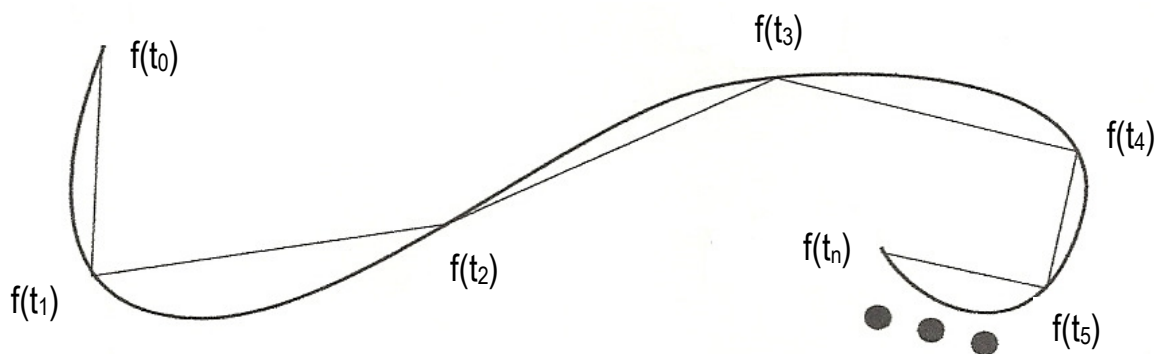


Figura 21: Comprimento do Arco.

A curva f é contínua e diferenciável no intervalo I , donde o mesmo ocorre para as funções coordenadas $(x(t), y(t))$. Logo podemos aplicar o “Teorema do Valor Médio” que diz que: *se uma função g é contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) , então, existirá um número c no intervalo aberto (a,b) , tal que:*

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Assim aplicando o TVM (Teorema do Valor Médio) em cada somando e em cada coordenada temos:

$$f_x = x(t), y(t)$$

$$x'(c_i) = \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})}$$

$$x_{t_i} - x_{t_{i-1}} = (t_i - t_{i-1}) x'(\epsilon_i) \quad \text{e} \quad y_{t_i} - y_{t_{i-1}} = (t_i - t_{i-1}) y'(\eta_i).$$

Denotando $t_i - t_{i-1} = \delta_i > 0$ tem-se que o comprimento é dado por:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{[(x'(\epsilon_i))^2 + (y'(\eta_i))^2] \delta_i^2}$$

Vamos a considerar poligonais com um número cada vez maior de pontos, isto é, vamos a calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{[(x'(\epsilon_i))^2 + (y'(\eta_i))^2] \delta_i}$$

Se δ é o valor máximo dos δ_i , como a derivada é contínua, então novamente do Cálculo sabe-se que o limite quando δ tende a zero (ou seja, $n \rightarrow \infty$) se existe, é chamado a integral de a até de b , da forma:

$$s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

comprimento do arco.



Exemplo 3: O comprimento de um arco da cicloide é quatro vezes o diâmetro do círculo rolante.

Como $t(\theta) = a(t - \sin t)$, então $x'(t) = a(1 - \cos t) dt$ e $y = a(1 - \cos t)$. Logo $y'(t) = a \sin t dt$ o elemento de comprimento do arco é dado por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = a^2 [(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t] dt^2 = 2a^2 [1 - \cos t] dt^2 = \\ &= 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2} t dt^2. \end{aligned}$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2}t\right)} dt.$$

O comprimento de um arco é, portanto, $L = \int ds = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{1}{2} \theta d\theta = -4a \cos \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = 8a$

■

Definição 1: Seja $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização regular da curva C . Para todo $t \in [a, b]$, associamos $s(t)$ o comprimento da curva correspondente ao intervalo $[a, t]$, isto é:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du.$$

Assim a função $s: I \rightarrow I$ é denominado função do comprimento do arco.

Lembrando que o produto escalar:

$$\langle (u, v), (w, z) \rangle = uw + vz$$

Como: $f(u) = (x(u), y(u))$ e $f'(u) = (x'(u), y'(u))$ então:

$$\langle f'(u), f'(u) \rangle = \langle (x', y'), (x', y') \rangle = x'(u)^2 + y'(u)^2$$

⇒ Assim podemos escrever na forma vetorial

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du = \int_a^t \sqrt{\langle f'(u), f'(u) \rangle} du = \int_a^t \|f'(u)\| du$$

Definição 2: A Parametrização $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma parametrização pelo comprimento do arco (PPCA) se para todo $t \in [a,b] \in I$,

$$s(t) = \int_a^t \|f'(u)\| du = t - a$$

Teorema 1. Seja C uma curva regular. Então a função comprimento de arco, a menos do sinal independe da parametrização escolhida.

Demonstração:

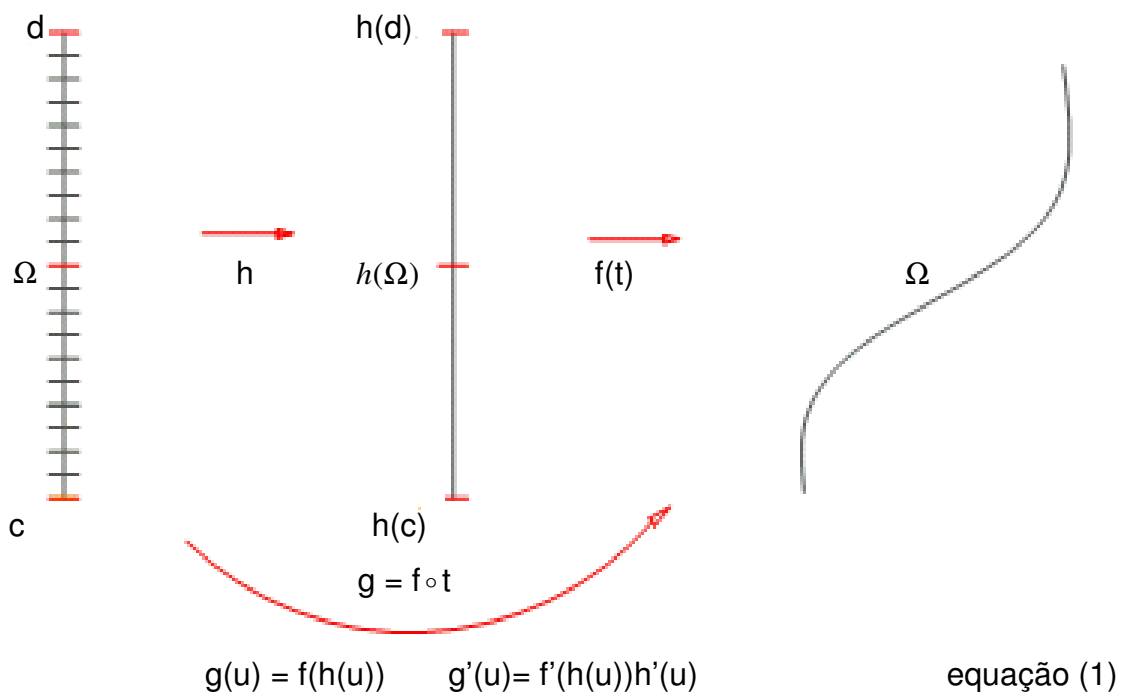


Figura 22

O comprimento do arco α com parametrização g é: $s = \int_c^d \|g'(u)\| du =$ equação

(1), logo: $s = \int_c^d \|f'(h(u))h'(u)\| du$. Como $h'(u) = \frac{dt}{du}$, então temos:

$\int_C^a \left\| f'(t) \frac{dt}{du} \right\| du = \int_C^a \|f'(u)\| dt = \int_{h(c)}^{h(a)} \|f'(t)\| dt = s =$ comprimento do arco α com parametrização f .

Teorema 2 Uma parametrização regular $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ da curva C é parametrizada pelo comprimento do arco se, e somente se, $\|f'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Demonstração. (\Rightarrow) Supondo que f é uma parametrização pelo comprimento do arco para todo t .

$$\int_a^t \|f'(u)\| du = t - a$$

Derivando temos para todo t :

$\frac{d}{dt} \int_a^t \|f'(u)\| du = \frac{d}{dt} (t - a)$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, logo $\|f'(t)\| = 1$, para todo t .

(\Leftarrow) Suponhamos que $\|f'(t)\| = 1$. Vamos calcular o comprimento do arco entre a e t .

$\int_a^t \|f'(u)\| du$, substituindo temos: $\int_a^t du = t - a$ logo pela definição a curva C está parametrizada pelo comprimento do arco. ■

Teorema 3 Seja C uma curva regular. Então C sempre pode ser parametrizada pelo comprimento do arco.

Demonstração: De fato, se f é uma parametrização de C , como, $s(t) = \|f'(t)\| > 0$, a função comprimento do arco $s(t) = \int_a^t \|f'(u)\| du$ derivando com relação a t e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo temos: $s'(t) = \|f'(t)\|$, como f é parametrização regular $\|f'(t)\| > 0$. A função $s(t)$ é estritamente crescente. Então $s = s(t) \rightarrow t = t(s)$, portanto a função comprimento do arco é invertível logo $r \circ s(t) = t$ para todo t .

Devido:

$$(r \circ s)'(t) = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{dr}{ds} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} = \frac{1}{\|f'(t)\|} > 0$$

Seja $g = f \circ r$ a reparametrização de C e r , e s o parâmetro definido pela função s , isto é, colocamos $s = s(t)$. Então, $g'(s) = f'(r(s)) r'(s) = f'(t) r'(s)$, ou seja,

$$\left| \frac{dg}{ds} \right| = \left| \frac{df}{dt} \cdot \frac{dr}{ds} \right| = \left| \frac{f'(t)}{f'(t)} \right| = 1$$

Donde o teorema acima C está parametrizada pelo comprimento de arco.

Exemplo 4: Consideremos uma elipse parametrizada por $f(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$. Então

$$|f'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 1.$$

Observemos que a elipse não está parametrizada pelo comprimento do arco. Vamos à parametrizar pelo comprimento do arco

$$s = \int_0^t |f'(u)| du = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = t \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ vamos inverter } t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Logo a elipse parametrizada pelo comprimento do arco

$$g(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

■

1.6 Curvatura De Uma Curva Plana

Na seção anterior vimos que toda curva regular do plano pode ser reparametrizada pelo comprimento do arco (teorema 3). Consideremos uma curva regular

$$f(s) = (x(s), y(s)), s \in I,$$

parametrizada pelo comprimento de arco s . Para cada $s \in I$, $f'(s)$ é um vetor unitário ($\|f'(s)\| = 1$), isto é:

$$f'(s) = (x'(s), y'(s))$$

Seja $n(s) = f'(s)^\perp = (-y'(s), x'(s))$ o vetor unitário ortogonal a $f'(s)$, pois $f'(s) \cdot f'(s)^\perp = 0$

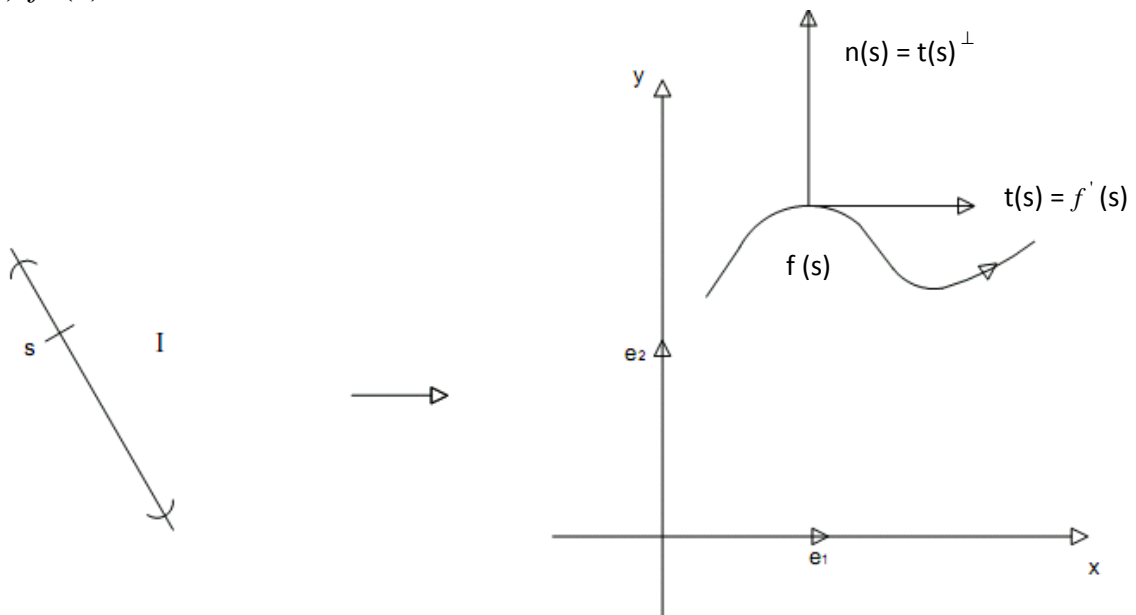


Figura 23

O conjunto de vetores $f'(s)$ e $n(s)$ é dito *referencial de Frenet* da curva α em s .

Como $f'(s)$ é unitário então:

$$\|f'(s)\| = 1 \Rightarrow \|f'(s)\|^2 = 1 \Rightarrow \langle f'(s), f'(s) \rangle = 1.$$

Derivando esta última igualdade, temos que:

$$\langle f'', f' \rangle + \langle f', f'' \rangle = 0 \Rightarrow 2 \cdot \langle f'', f' \rangle = 0 \Rightarrow \langle f'', f' \rangle = 0 \Rightarrow f'(s) \perp f''(s).$$

Segue-se que $f''(s)$ é ortogonal a $f'(s)$ e, portanto $f''(s)$ é paralelo a $n(s)$ logo f'' é proporcional a $n(s)$. Este fato de proporcionalidade, denotado por $K(s)$, é chamado

curvatura de α em s , isto é,

$$f''(s) = k(s)n(s).$$

Considerando a curva $f(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$, multiplicando escalarmente $n(s)$ na equação anterior temos:

$$\langle f''(s), n(s) \rangle = \langle k(s) \cdot n(s), n(s) \rangle = k(s) \underbrace{\langle n(s), n(s) \rangle}_{=1} = k(s)$$

Donde:

$$K(s) = \langle f'', n \rangle = \langle (x'', y''), (-y', x') \rangle = (x' y'' - y' x'')$$

Assim: $K(s) = x' y'' - y' x''$.

Analogamente, como $n(s)$ é unitário, segue-se que $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e, portanto $n'(s)$ é proporcional a $f(s)$. Como $n' = \lambda f'$ temos que:

$$\lambda \langle f', f' \rangle = \langle f', \lambda f' \rangle = \langle n'(s), f'(s) \rangle = -x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s) = -k(s),$$

e podemos concluir que:

$$n'(s) = -k(s)f'(s).$$

Resumindo o exposto acima, se $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco s , então o referencial de Frenet $f(s)$, $n(s)$ satisfaz as equações:

$$\begin{cases} f''(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)f'(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) \end{cases}$$

que são as *fórmulas de Frenet* de uma curva plana.

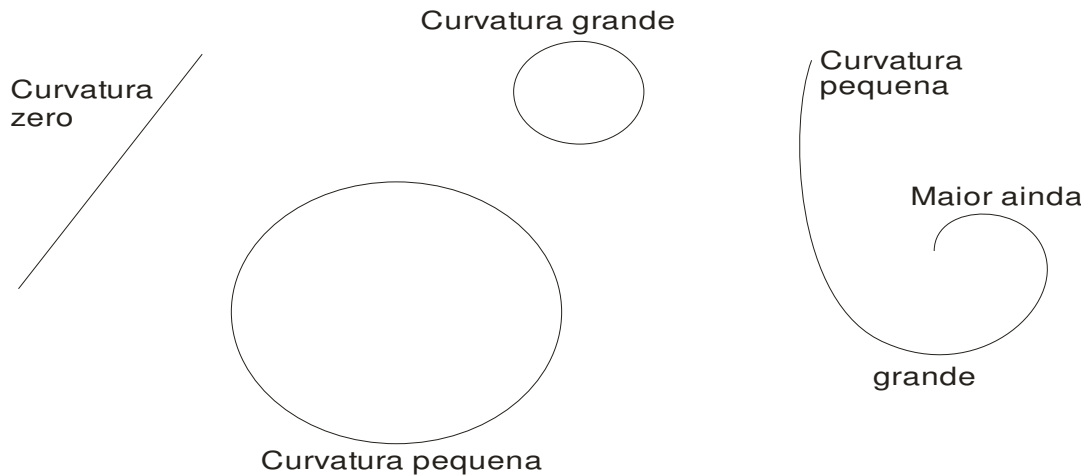


Figura 24: Tipos de curvatura.

Proposição 1: Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização diferenciável PPCA, definida por $f(s) = (x(s), y(s))$. Se $\theta(s)$ é o ângulo que $f'(s)$ faz com o eixo x . Então:

$$K(s) = \theta'(s)$$

$$|K(s)| = \|f''(s)\|$$

Demonstração: f é parametrizado pelo comprimento do arco. Seja θ a função ângulo que f' faz com o eixo x^+ .

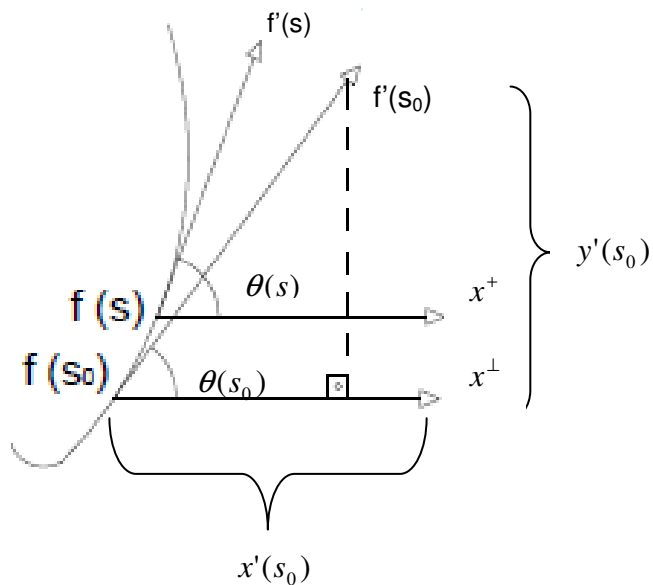


Figura 25

Notemos que: $f'(s) = (x', y')$

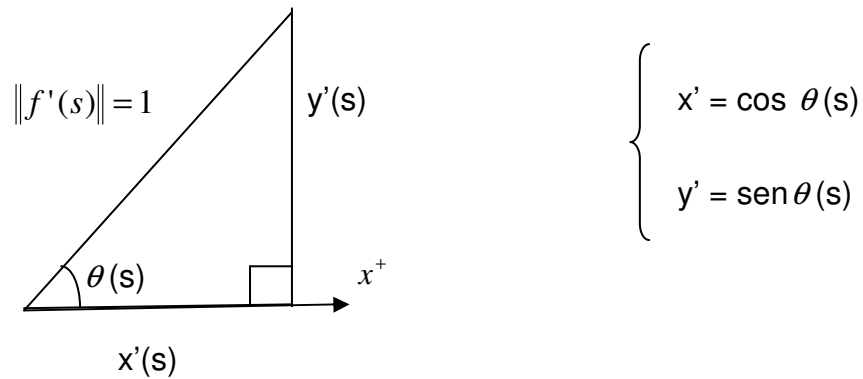


Figura 26

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\theta) = \frac{y'(s)}{x'(s)}$$

$$\Rightarrow \theta(s) = \operatorname{arct}\left(\frac{y'(s)}{x'(s)}\right), \text{ para todo } s.$$

Logo, derivando a equação em relação a s segue que:

$$\theta'(s) = \frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2} = \frac{\frac{x' \cdot y'' - y' \cdot x''}{\cancel{(x')^2}}}{\frac{((x')^2 + (y')^2)}{\cancel{(x')^2}}} \text{ onde, } ((x')^2 + (y')^2) = \|f'(s)\|^2 = 1$$

Isso nos dá que:

$$\theta'(s) = \frac{x'(s) \cdot y''(s) - y'(s) \cdot x''(s)}{\|f'(s)\|^2 = 1} = x'(s) \cdot y''(s) - y' \cdot x'' = k(s)$$

$$\theta'(s) = k(s)$$

A segunda igualdade sai de $f''(s) = k(s) \cdot n(s)$, aplicando norma

$$\|f''(s)\| = |k(s)| \cdot \|n(s)\|$$

$$|k(s)| = \|f''(s)\|$$

■

Proposição 2: Curvatura para qualquer parametrização

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma Parametrização Diferenciável, definida por $f(t) = (x(t), y(t))$. Então a curvatura de f em $t \in I$ é dada pela expressão:

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3}}$$

Demonstração: Seja $t_0 \in I$, arbitrário. Considere $h: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização de r de modo que h seja parametrizada pelo comprimento do arco (PPCA). Assim temos que $r(t_0) = h \circ \Gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$, onde $\Gamma: I \rightarrow J$, e $h(s) = r \circ g(s_0) = (\hat{x}(s_0), \hat{y}(s_0))$ onde $g: J \rightarrow I$. Assim temos:

$$r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) = (h' \circ \Gamma(t_0)) \Gamma'(t_0) = \frac{dh}{ds} \Gamma'(t_0) \quad (1.1)$$

$$e \quad r''(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0)) = (h'' \circ \Gamma(t_0) \Gamma'(t_0)^2 + (h' \circ \Gamma(t_0)) \Gamma''(t_0)) = \frac{d^2h}{ds^2} (\Gamma'(t_0))^2 + \frac{dh}{ds} \Gamma''(t_0) \quad (1.2)$$

Sabendo que $\Gamma'(t_0) > 0$ e utilizando a equação (1.1) podemos concluir que

$$\text{Como } \|h' \circ \Gamma(t_0)\| = 1, \text{ temos que } \Gamma'(t_0) = \|r'(t_0)\| \quad (1.3)$$

Desta forma obtemos:

$$\Gamma'(t_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \left\{ (r'(t) \cdot r'(t))^{\frac{1}{2}} \right\} = \frac{r''(t_0) \cdot r'(t_0)}{\|r''(t_0)\|}$$

Se T_h o vetor tangente unitário da curva h . Temos portanto:

$$\frac{dg}{ds}(s_0) = T_h(s_0) = T_h(\Gamma(s_0)) = \frac{dh}{ds}(\Gamma(s_0)) = (1.2) = \frac{r'(s_0)}{\|r'(s_0)\|}$$

Assim a derivada do vetor tangente é dada por

$$T'_h(s_0) = \frac{dT_h}{ds}(T(t_0)) = \frac{d^2h}{ds^2}(\Gamma(t_0)) = \frac{1}{\Gamma'(t_0)}(r''(t_0) - \Gamma''(t_0)T_h(\Gamma(t_0)))$$

Denote o vetor tangente da curva r por T_r . Sabendo que $r(t) = h \circ \Gamma(t)$, sendo assim isto implica que $T_r(t) = (h \circ \Gamma(t))' \Gamma'(t)$. Logo,

$$\frac{T_r}{\|r'(t)\|} = T_h(\Gamma(t)) = (\hat{x}'(\Gamma(t)), \hat{y}'(\Gamma(t)))$$

Seja N_h o vetor normal da curva h . Sabemos que este vetor é dado por:

$$N_h(s_0) = N_h(\Gamma(t_0)) = (-\hat{y}'(\Gamma(t_0)), \hat{x}'(\Gamma(t_0))) = \frac{1}{\|r'(t_0)\|}(-y'(t_0), x'(t_0))$$

De acordo com a definição de curvatura $T'(s) = k(s)N(s)$, $s \in I$, temos que:

$$k(s_0) = k(\Gamma(t_0)) = \frac{dT_h}{ds}(\Gamma(t_0))N_h(\Gamma(t_0)). \quad (1.4)$$

Substituindo N_h e $\frac{dT_h}{ds}$ em (1.1) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|r'(t_0)\|^2}(r''(t_0) - \Gamma''(t_0)T_h(t_0))N_h(\Gamma(t_0)) &= \frac{1}{\|r'(t_0)\|^2}(r''(t_0)N_h(\Gamma(t_0))) = \\ \frac{1}{\|r'(t_0)\|^2} \left(((x''(t_0), y''(t_0)) \frac{1}{\|r'(t_0)\|^2}(-y'(t_0), x'(t_0))) \right) &= \\ \frac{1}{\|r'(t_0)\|^3}(-y'(t_0)x''(t_0) + x'(t_0)y''(t_0)) &= \\ \frac{x'(t_0)y''(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)}{\|r'(t_0)\|^3} \end{aligned}$$

■

Capítulo 2

2. ÍNDICE DE ROTAÇÃO E O TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES

2.1 Curvas Fechadas – Índice De Rotação

Se α é uma curva diferenciável em $[0, L]$, onde entendemos a derivada nos pontos extremos como:

$$\alpha'_+(0) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\alpha(L) - \alpha(0)}{x} \quad \text{e} \quad \alpha'_-(L) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{\alpha(L) - \alpha(0)}{x - L},$$

eventualmente $\alpha'_+(0) \neq \alpha'_-(L)$.

Nesta seção vamos trabalhar com curvas parametrizadas onde $\alpha'_+(0) = \alpha'_-(L)$, como também com $\alpha''_+(0) = \alpha''_-(L)$, que chamaremos de curvas duas vezes diferenciáveis, mais geralmente $\alpha_+^{(k)}(0) = \alpha_-^{(k)}(L)$, chamaremos a curva k -vezes diferenciáveis. Desse modo, podemos falar em curvas fechadas e regulares, isto é, uma curva fechada e diferenciável tal que seu vetor tangente é não-nulo para todo $t \in [0, L]$.

Uma curva fechada $\alpha: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita simples se, restrita ao intervalo $(0, L]$ ela for uma aplicação injetiva. Isto é uma curva fechada sem auto-interseção.

Se α é uma curva fechada regular, podemos considerar a curva definida pela derivada $\alpha': [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$. Essa curva é fechada, porque $\alpha'_+(0) = \alpha'_-(L)$ e contínua e, por α ser regular, $(\alpha'(t) \neq (0, 0)) \quad \forall t \in [0, L]$ então o traço de α' não passa por $(0, 0)$.

Se α é PPCA então $\|\alpha'(s)\| = 1$ e $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$ “visto como uma curva” seu traço está em cima do círculo unitário.

Se $\theta(s)$ é o ângulo global que $\alpha'(s)$ faz com o eixo x positivo, então pela proposição 1 do capítulo 1, temos que:

$$k(s) = \theta'(s).$$

Integrando e aplicando o teorema fundamental do Cálculo temos:

$$\int_0^s k(t) dt = \int_0^s \theta'(t) dt = \theta(s) - \theta(0) \quad \forall s \in [0, L].$$

Como $\alpha: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\alpha'(0) = \alpha'(L)$ e $\theta(s)$ é a função ângulo do vetor tangente com a direção x^+ $\Rightarrow \theta(L) = \theta(0) + 2I\pi$, onde $I \in \mathbb{Z}$, então $\theta(L) - \theta(0) = 2I\pi$. Logo I representa o número de voltas da curva $\alpha'(s)$.

$\int_0^L k(s) ds = \theta(L) - \theta(0) = 2I\pi$. Este número I é chamado de índice de rotação da curva α .

Teorema do Índice de Rotação: o índice de rotação de uma curva simples fechada é ± 1 , onde o sinal depende da orientação da curva.

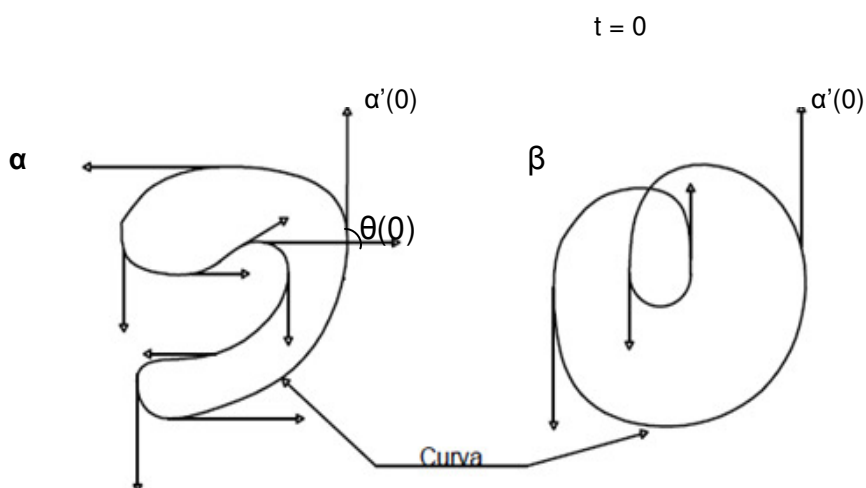


Figura 27

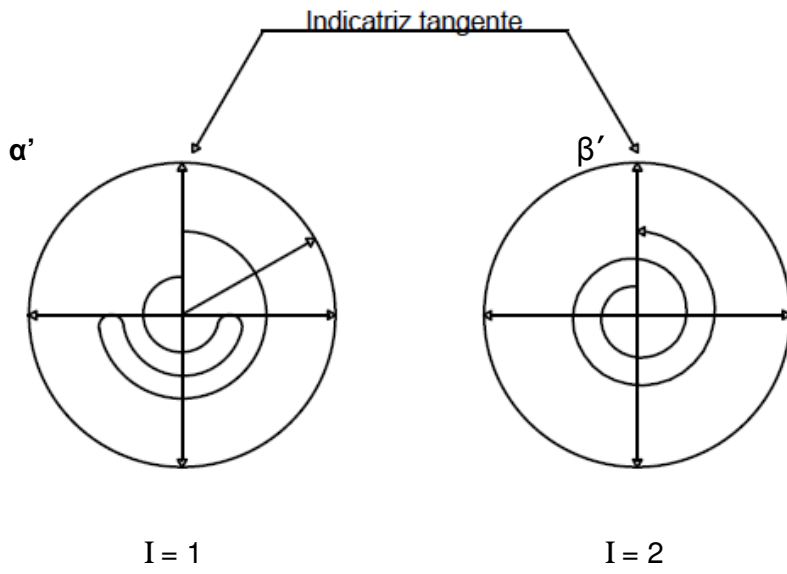


Figura 28

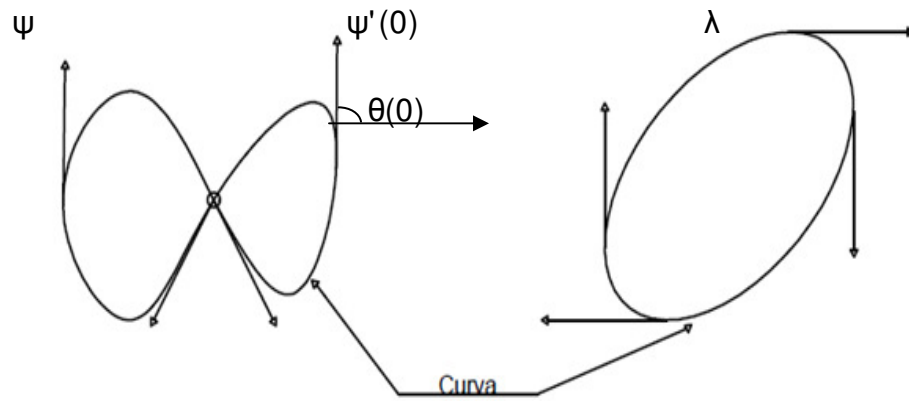


Figura 29

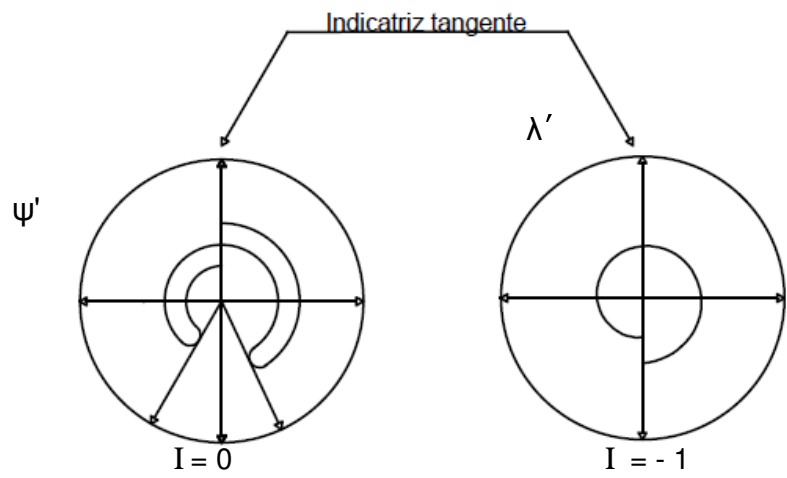


Figura 30

2.2 Teorema dos quatro vértices

Nesta seção $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ será uma curva regular, parametrizada pelo comprimento do arco (PPCA) e duas vezes diferenciável.

Definição 3: Um vértice de curva α é um ponto crítico da função curvatura K de α . Isto é, $\alpha(t_0)$, $t_0 \in [0, L]$ é um vértice de α se $k'(t_0) = 0$.

Observemos pela definição de diferenciabilidade de α num ponto extremo de uma curva fechada regular, a derivada de k está bem definida nos pontos $t = 0$ e $t = L$.

Definição 4: Uma curva plana regular (não necessariamente fechada) $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é convexa se, para todo $t \in [a, b]$, da curva o traço $\alpha [a, b]$ está totalmente num semi-plano fechado determinado pela reta tangente em $\alpha'(t)$.

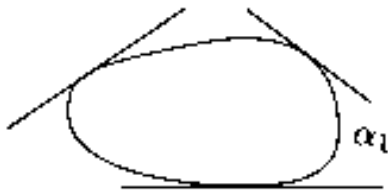


Figura 31: Curvas convexas.

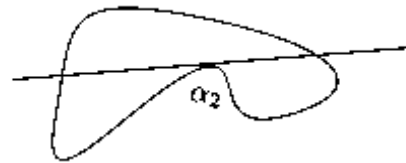


Figura 32: Curvas não convexas.

Para a prova do teorema principal, vamos necessitar dos seguintes resultados.

Lema 1: Seja $\alpha : I = [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ uma curva plana, regular, fechada e parametrizada pelo comprimento do arco. Dados quaisquer números A , B

e C , então temos:
$$\int_0^L (A \cdot x(s) + B \cdot y(s) + C) \cdot k'(s) ds = 0$$

Demonstração: Como a curva é fechada pelo Teorema Fundamental do Cálculo

temos:
$$\int_0^L k'(s) ds = k(L) - k(0) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

Calculando a integral $\int_0^L x(s) \cdot k'(s) ds$, por partes temos:

$$u = x(s) \qquad \qquad \qquad dv = k'(s) ds$$

$$du = x'(s) ds \qquad \qquad \qquad v = k(s)$$

$$u \cdot v \Big|_0^L - \int_0^L v du = x(s)k(s) \Big|_0^L - \int_0^L k(s) \cdot x'(s) ds = x(L) \cdot k(L) - x(0) \cdot k(0) - \int_0^L k(s) \cdot x'(s) ds \quad \dots (*)$$

Como:

$k(0) = k(L)$ e $x(0) = x(L)$ então:

$$x(0) \cdot k(0) = x(L) \cdot k(L) \Rightarrow x(L)k(L) - x(0)k(0) = 0$$

Pela definição de curvatura de uma curva $(x''(s), y''(s)) = \alpha''(s) = k(s)n(s) = k(s) (\alpha'(s))^\perp = k(s)(-y'(s), x'(s)) = (-k(s)y'(s), k(s)x'(s))$, então:

$$x''(s) = -k(s)y'(s) \text{ e } y''(s) = k(s)x'(s).$$

De (*),

$$\int_0^L x(s)k'(s) ds = - \int_0^L x'(s)k(s) ds = \underbrace{\int_0^L y'(s)' ds}_{\text{Teorema Fundamental do Cálculo}} = (y'(L) - y'(0)) = 0$$

Pois a curva α' é fechada. Assim:

$$\int_0^L x(s)k'(s) ds = 0 \dots\dots\dots(2)$$

E analogamente se mostra

$$\int_0^L yk'(s) ds = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$\int_0^L [Ax(s) + By(s) + C]k'(s)ds = \underbrace{A \int_0^L x(s)k'(s)ds}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{Por (2)}}} + \underbrace{B \int_0^L y(s)k'(s)ds}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{Por (3)}}} + \underbrace{C \int_0^L k'(s)ds}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{Por (1)}}} = 0$$

■

Dizemos que um número x_0 é um *ponto de máximo local* de uma função f se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x próximo de x_0 . Ao contrário, se tivermos $f(x) \geq f(x_0)$, então x_0 chamado *ponto de mínimo local*. Na figura 33(a), o extremo do intervalo $x = a$ e $x = b$ são pontos de mínimo locais e o ponto c é ponto de máximo local; na figura 33(b), temos três pontos de mínimos locais ($x = a$, $x = q$ e $x = b$) e dois pontos de máximo locais ($x = p$ e $x = r$).

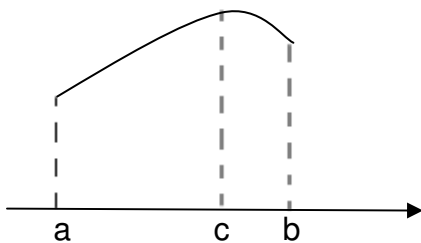


Figura 33 (a)

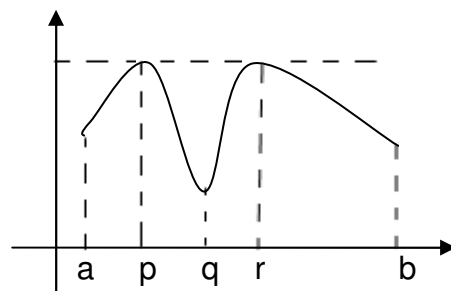


Figura 33 (b)

Teorema 5: Seja f uma função com máximo (ou mínimo) local num ponto x_0 , onde ela é derivável. Então $f'(x_0) = 0$.

Teorema 6: Seja f uma função contínua e definida num intervalo fechado $[a, b]$. Então f possui ao menos um ponto de máximo e ao menos um ponto de mínimo em $[a, b]$.

Teorema dos Quatro Vértices: uma curva regular fechada simples convexa tem ao menos quatro vértices.

Demonstração: Parametrizando a curva pelo comprimento do arco, assim temos $\alpha: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Como $k = k(s)$ é uma função contínua sobre o intervalo fechado $[0, L]$, pelo teorema 6, ela atinge um máximo e mínimo, isto é, existe um $S_1, S_2 \in [0, L]$ donde $k(S_1)$ é o valor máximo de k e $k(S_2)$ é o valor de mínimo de k . Pelo teorema 5, sendo K diferenciável temos:

$$K'(s_1) = 0$$

$$K'(s_2) = 0$$

Assim os pontos $p = \alpha(S_1)$ e $q = \alpha(S_2)$ são dois vértices da curva α .

Seja L a reta passando por p e q , e sejam β e γ os dois arcos de α determinados pelos pontos p e q ; por exemplo, os casos das figuras a seguir:

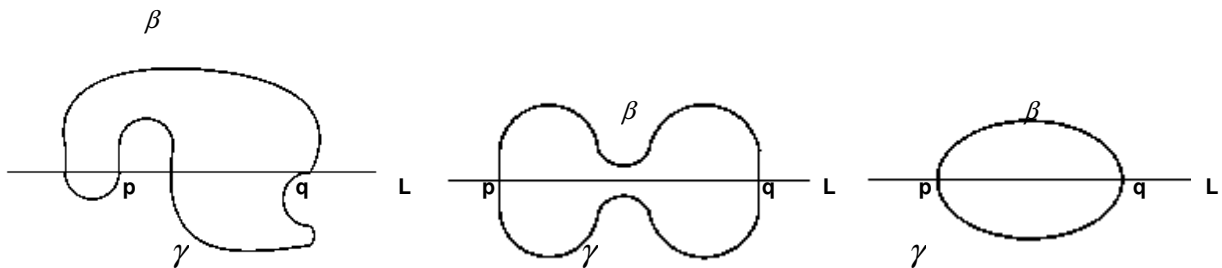


Figura 34

Afirmção: Cada arco β e γ estão contidos em semi - planos definido por L . Como na figura anterior.

De fato, vamos trabalhar com β . (O caso de γ é semelhante). Por absurdo, suponha que β intercepta L em um ponto r (distinto de p e q). Podem acontecer os seguintes casos: r entre p e q (figura 35 (a)), p entre r e q (figura 35 (b)) e q entre p e r (figura 35(c)).

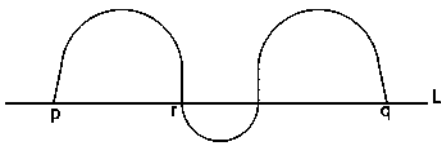


Figura 35 (a)

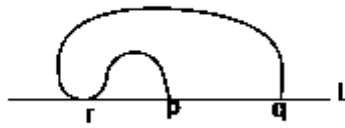


Figura 35 (b)

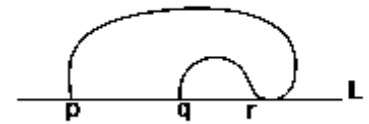


Figura 35 (c)

(1) A reta tangente a β no ponto r denotado por H , deve coincidir com L ($H = L$). Então: se " r " está entre p e q , a reta H semi-plano da reta tem pedaços da curva β de um lado e do outro lado, o que contradiz a convexidade, pois H é reta tangente a α no ponto r .

Para verificar (1), suponhamos por absurdo que L não coincide com H , então H corta L no ponto r . Temos os seguintes casos:

- i. Se r está entre p e q ; o semi - plano definida pela reta H tem pedaços da curva de um lado e de outro.

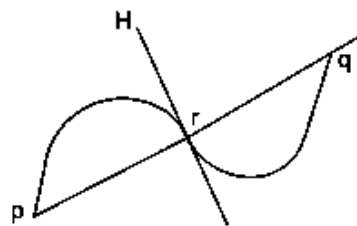


Figura 36

- ii. Se p está entre r e q . Denotamos por M a reta tangente a β no ponto P . Se M corta L , do caso anterior isto contradiz, a convexidade. Se M coincide com L , como H corta L , há pedaços da curva α acima e abaixo de $L = M$, o que também contradiz a convexidade.

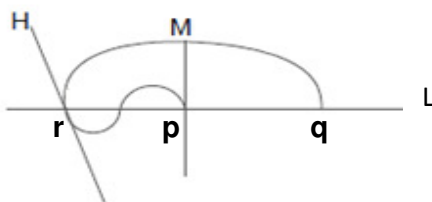


Figura 37(a)

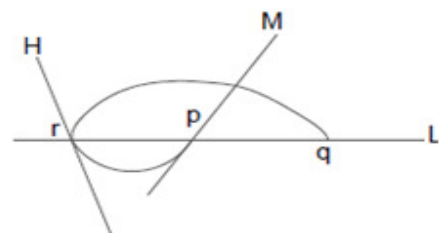


Figura 37 (b)

iii. Se q está entre p e r , este caso é mesmo do caso anterior. Assim (1) está verificado $H = L$. Logo só podemos ter os casos nas figuras abaixo:

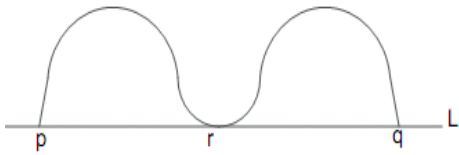


Figura 38 (a)

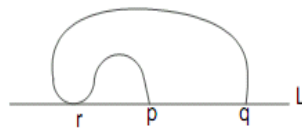


Figura 38 (b)

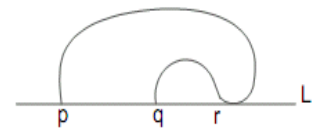


Figura 38 (c)

(2) Nesta situação a curva β deve coincidir com o pedaço da reta L entre p e q .

De fato, se não, basta pegar pontos u próximo a r e fora de L , a reta tangente a α no ponto u , deixará parte da curva α em ambos semi - planos desta reta, o que é contradição a convexidade (veja a figura abaixo)

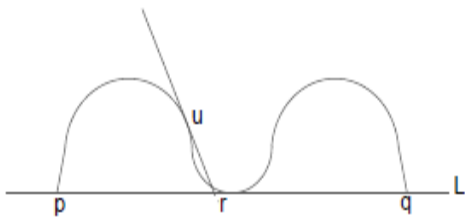


Figura 39 (a)

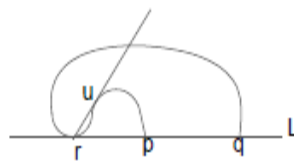


Figura 39(b)

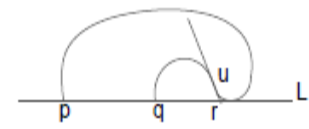


Figura 39 (c)

De (2) a curvatura de β é zero ($k \equiv 0$), para todo $s_1 \leq s \leq s_2$. Como $S_1 = (p = \alpha(s_1))$ é ponto máximo e $s_2 (q = \alpha(s_2))$ é ponto de mínimo da curvatura de α então $k \equiv 0$ para todo $s \in [0, L]$, logo α estaria toda em cima da reta, isto contradiz o fato de ser curva simples.

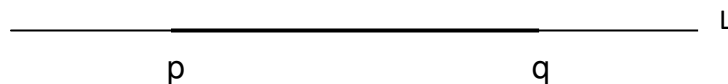


Figura 40

Então esta provada a afirmação: β está toda contida num semi – plano definido por

L . Da mesma forma γ está contida num semi – plano definido por L .

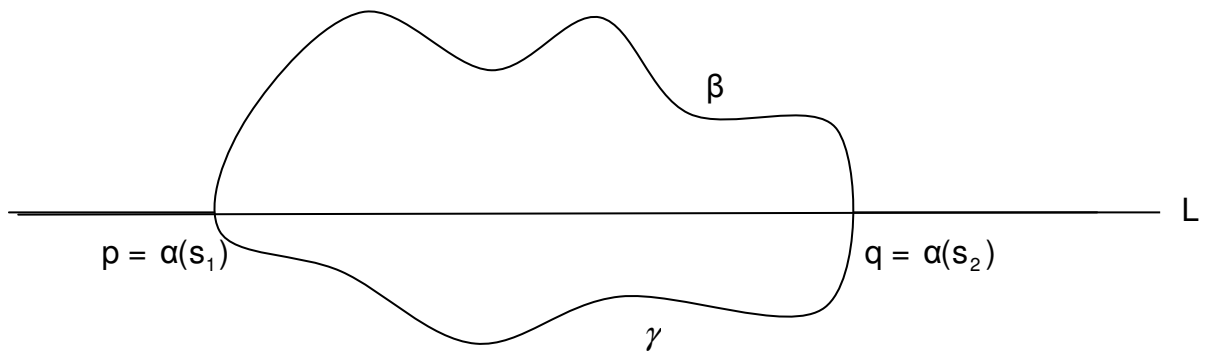


Figura 41

Analisamos k' sobre β , $k'(S_1) = 0 = k'(S_2)$; como k' é contínua, se k' muda de sinal (sobre β) então encontraremos mais um $k'(S_3) = 0$. Se isto também acontece em γ teríamos também um ponto $k'(S_4) = 0$. O que mostraria o teorema.

Agora vamos mostrar que k' não pode manter o mesmo sinal em β (ou mesmo em γ).

Supondo por absurdo que k' não muda de sinal podemos pensar que k' seja positivo. Seja $A_0x + B_0y + C_0 = 0$ a equação da reta L , para certos valores A_0, B_0, C_0 fixos, podemos escolher C de modo que $A_0x + B_0y + C > 0$

$$\int_0^L \underbrace{(A_0x(s) + B_0y(s) + C)}_{+} \cdot \underbrace{k'(s)}_{+} ds > 0 \text{ contradiz o lema que:}$$

$$\int_0^L (A \cdot x(s) + B \cdot y(s) + C) \cdot k'(s) ds = 0 \quad \forall A, B, C.$$

No outro caso se k' é sempre negativo a integral será negativa, logo a contradição ao lema está feita.

$$\int_0^L \underbrace{(A_0x(s) + B_0y(s) + C)}_{+} \cdot \underbrace{k'(s)}_{-} ds < 0$$

Então k' muda de sinal em β e γ assim o teorema está mostrado. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Alencar], Hilário; SANTOS, Walcy. *Geometria Diferencial das Curvas Planas*. 24^o Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2002.

[Tenenblat], Ketí. *Introdução à Geometria Diferencial*. Ed. UNB, 1990.

[Malta1], Iaci. *Cálculo a uma variável*. PUC – Rio, v.1, 2 ed, 2002.

[Malta 2], Iaci. *Cálculo a uma variável*. PUC – Rio, v.2, 2 ed, 2002.

[Simmons], George F. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Ed. Mac Graw – Hill, v.2, 1987.

[Rodrigues], Paulo R. *Introdução às Curvas e Superfícies*. Editora Universidade Federal Fluminense, Cap. 2, 2001.

[Stewart], James. *Cálculo*. Volume 1. 5 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, cap. 4, 2006.