

Renan Veloso Gomes

Modelo de Opções Reais para Avaliar a Estratégia de Produção  
em uma Indústria Eletrointensiva face ao Preço da Energia  
Elétrica

Belo Horizonte

Julho de 2015

Renan Veloso Gomes

Modelo de Opções Reais para Avaliar a Estratégia de Produção em uma  
Indústria Eletrointensiva face ao Preço da Energia Elétrica

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da UFMG como parte dos pré-requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Orientador: Leonardo Pereira Santiago

Belo Horizonte

Julho de 2015

---

Renan Veloso Gomes

Modelo de Opções Reais para Avaliar a Estratégia de Produção em uma Indústria Eletrointensiva face ao Preço da Energia Elétrica/ Renan Veloso Gomes. – Belo Horizonte, Julho de 2015-

102 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Leonardo Pereira Santiago

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Julho de 2015.

1. Preço de Liquidação das Diferenças. 2. Opções Reais. I. Leonardo Pereira Santiago. II. Universidade Federal de Minas Gerais. III. Faculdade de Engenharia. IV. Modelo de apoio a decisão para definir a melhor estratégia para empresas eletrointensivas.

CDU 02:141:005.7

---

Renan Veloso Gomes

Modelo de Opções Reais para Avaliar a Estratégia de Produção em uma  
Indústria Eletrointensiva face ao Preço da Energia Elétrica

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da UFMG como parte dos pré-requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção

Trabalho aprovado. Belo Horizonte, 31 de julho de 2015:

---

**Leonardo Pereira Santiago**  
Orientador

---

**Professor**  
Anderson Laécio Galindo Trindade

---

**Professor**  
Marcelo Azevedo Costa

Belo Horizonte  
Julho de 2015

*Àos meus queridos pais, Carlos e Rosália,  
e à minha linda namorada Jéssica  
pelo constante apoio e incentivo.*

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus por ter me dado saúde e força para concluir este trabalho.

Ao Prof. Leonardo Santiago, pelas valiosas orientações, constante incentivo e, principalmente, pelo tempo dedicado e paciência nas discussões sobre o trabalho.

Ao Prof. Anderson Trindade pelos ensinamentos de mercados futuros, simulação, processos estocásticos e por aceitar o convite de participar da banca examinadora.

Ao Prof. Marcelo Costa pelos ensinamentos de estatística, esclarecimentos e por aceitar o convite de participar da banca examinadora.

Aos colegas do LADEC pelo aprendizado em conjunto, pelas angústias compartilhadas e por me ajudarem a tornar este sonho possível.

À minha querida família e à minha namorada pelo amor, carinho, compreensão e por sempre acreditarem em mim.

*“A característica do homem imaturo é aspirar a morrer nobremente por uma causa, enquanto que a característica do homem maduro é querer viver humildemente por uma causa”.*  
*(Wilhelm Stekel)*

# Resumo

Os preços das commodities, em geral, apresentam um comportamento estocástico, o que significa que os preços futuros são incertos e difíceis de se prever. No Brasil o preço *spot* da energia elétrica não é diferente. O Operador Nacional do Sistema (ONS) divulga, semanalmente, um novo preço de energia elétrica com o intuito de minimizar o custo de operação do sistema como um todo. Entretanto, este preço tem como característica uma alta volatilidade o que gera enormes incertezas quanto aos preços futuros.

Como em qualquer ambiente de incertezas, no setor elétrico também existem oportunidades. Em um período em que o preço da energia esteja alto pode ser mais lucrativo para uma empresa eletrointensiva suspender temporariamente parte da sua produção e vender a energia elétrica excedente ao preço *spot*, aproveitando este momento para realizar manutenções preventivas em suas máquinas e equipamentos.

O objetivo deste trabalho é auxiliar empresas eletrointensivas a definir uma estratégia ótima de produção levando em consideração as incertezas futuras do preço *spot* da energia elétrica. Como um exemplo ilustrativo, analisamos o caso de uma indústria de alumínio que tem a opção de suspender temporariamente sua produção para comercializar a energia elétrica resultante.

Para avaliar o preço *spot* da energia elétrica, analisamos a sua série histórica e tratamos os dados para projetarmos preços futuros. Consideramos duas abordagens: (i) regressões lineares e (ii) movimentos de reversão a média. Em cada uma das abordagens apresentamos dois modelos diferentes. Para comparar nossos resultados verificamos qual modelo apresentou o menor erro quadrático médio de previsão. Os resultados mostraram que a análise de regressão teve um desempenho melhor para prevermos o comportamento futuro do preço.

Posteriormente, apresentamos um exemplo ilustrativo utilizando estes modelos para valorarmos uma opção de alternância (*switch option*) entre a produção de alumínio e a venda de energia elétrica. Os resultados mostram que esta flexibilidade agrega um valor significativo ao resultado operacional de uma indústria de alumínio e que o modelo de reversão a média super estima o valor da opção se comparado com o modelo de regressão linear.

O resultado deste trabalho pode ser aplicado a outras indústrias eletro intensivas e desta forma alavancar o resultado operacional destas empresas ao mesmo instante em que contribuem para aliviar a demanda do setor elétrico no país. Além disto, esta opção de alternância pode fazer com que um investimento que não era viável venha a se tornar viável.

**Palavras-chaves:** Opções reais, Opção de Alternância, Flexibilidade Gerencial, Movimento de Reversão a Média, Preço de Liquidação das Diferenças, Análise de Regressão.



# Abstract

Commodity prices in general have a stochastic behavior, which means that future prices are uncertain and difficult to predict. In Brazil, the spot price of electric energy is not different. The National System Operator (ONS) publishes the new electricity price weekly in order to minimize the operational cost. However, this price is characterized by a high volatility, which generates great uncertainties about future prices.

In an uncertainty environment, as the energy sector, there are also opportunities. When energy prices are high may be more profitable for a company temporarily suspend part of its production and sell the electricity at the spot price, taking advantage of this moment to perform preventive maintenance on its machinery and equipment.

This work's objective is to auxiliary electro companies defining the optimal production strategy taking into account the uncertainties of the future electricity price. As an illustrative example, we examine the case of an aluminum industry, which have the option of temporarily suspend their production and sell to the market the resulting electricity.

To evaluate the electricity spot price, we analyze its historical series and treat the data for projecting future prices. We consider two approaches: (i) linear regressions and (ii) mean reversion movements. In each of the approaches, we presented two different models. To compare our results we verify which model presented the lower mean squared prediction error. The results showed that the linear regression had a better perform to predict future prices.

Then, we present an illustrative example using these models to assess a switch option between product aluminum and sell the electricity. The results show that this flexibility adds significant value to the operating income in an aluminum industry and the mean reversion model super estimates the option value compared with the linear regression model.

The result of this work may be applied to other electro-intensive industries and thus leverage the operational result of these companies at the same time they contribute to alleviate the electricity demand in the country. Moreover, this switch option might make an investment that was not feasible becomes feasible.

**Key-words:** Real options, switch option, management flexibility, mean reversion movements, settlement price difference, linear regression.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Custo da Energia Elétrica para a indústria em 28 países atualizado em 10/04/2015	15
Figura 2 – Matriz de Energia Elétrica no Brasil (capacidade Instalada), atualizada em 09/05/2015	20
Figura 3 – Comportamento da Carga do SIN nos anos de 2012-2015	23
Figura 4 – Ambientes de Contratação de Energia	26
Figura 5 – Representação dos ambientes de contratação de energia no Brasil e o mercado spot	26
Figura 6 – Funções de Custo Imediato e Custo Futuro	28
Figura 7 – carga diária com e sem horário de verão	30
Figura 8 – Série Histórica do PLD (de 2001 a 2014)	31
Figura 9 – Histograma da série histórica do PLD (de 2001 a 2014)	32
Figura 10 – PLD série 2006-2012 valores corrigidos	59
Figura 11 – Histograma do PLD série 2006-2012 valores corrigidos	59
Figura 12 – Teste da Variância	61
Figura 13 – Box-Plot do PLD em função dos anos	62
Figura 14 – Box-Plot do PLD em função dos meses	62
Figura 15 – Box-Plot do PLD em função das semanas	63
Figura 16 – Modelo Ajustado para a série deflacionada do PLD de 2006 a 2012	66
Figura 17 – Resíduos do modelo ajustado para a série deflacionada do PLD de 2006 a 2012	67
Figura 18 – Histograma dos resíduos do modelo ajustado para a série deflacionada do PLD de 2006 a 2012	67
Figura 19 – Análise dos resíduos do modelo ajustado para a série deflacionada do PLD de 2006 a 2012	68
Figura 20 – Coeficientes dos anos e a Reta da Regressão	69
Figura 21 – Modelo ajustado considerando apenas meses e $PLD_{t-1}$	71
Figura 22 – Resíduos do modelo ajustado considerando apenas meses e $PLD_{t-1}$	71
Figura 23 – Histograma dos resíduos do segundo modelo de regressão	72
Figura 24 – Análise de normalidade dos resíduos do segundo modelo de regressão	72
Figura 25 – Regressão Linear do Logaritmo do PLD	73
Figura 26 – Dez caminhos aleatórios para o PLD em 2013 e 2014	73
Figura 27 – Histograma dos valores estimados para o PLD ao final de 2014	74
Figura 28 – Dez caminhos aleatórios para o PLD considerando 1 mês a frente	74
Figura 29 – Modelo de regressão linear I - Previsão do PLD para 2013 e 2014	76
Figura 30 – Previsão do PLD para 2013 e 2014 conforme o segundo modelo de regressão linear	76
Figura 31 – Modelo de Schwartz - Previsão do PLD para 2013 e 2014	77
Figura 32 – Modelo de Schwartz com componentes sazonais - Previsão do PLD para 2013 e 2014	77
Figura 33 – Comparação entre o erro absoluto dos quatro modelos analisados	79

Figura 34 – Resultado Operacional para um caminho do PLD considerando a opção de alternância . . . . .	86
Figura 35 – Resultado Operacional para um caminho do PLD considerando a opção de alternância . . . . .	86
Figura 36 – Vinte caminhos aleatórios do PLD para 2015 segundo o modelo de regressão linear . . . . .	87
Figura 37 – Histograma de 10.000 simulações do Resultado Operacional para 2015 com a opção de alternância em R\$ milhões segundo o modelo de regressão linear . . . . .	89
Figura 38 – Valor da Opção de Alternância em R\$ milhões em função do valor inicial do PLD segundo o modelo de regressão linear . . . . .	90
Figura 39 – Vinte caminhos aleatórios do PLD para 2015 segundo o MRM de Schwartz . . . . .	91
Figura 40 – Histograma de 10.000 simulações do Resultado Operacional para 2015 com a opção de alternância em R\$ milhões segundo o MRM de Schwartz . . . . .	92
Figura 41 – Valor da Opção de Alternância em R\$ milhões segundo o MRM de Schwartz para diferentes valores do PLD no instante inicial . . . . .	94
Figura 42 – Comparação entre o modelo de regressão linear e o MRM de Schwartz acerca do valor da opção de alternância em R\$ milhões em função do valor inicial do PLD . . . . .	95

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Composição do custo da energia elétrica no Brasil . . . . .	16
Tabela 2 – Capacidade Instalada de Energia Elétrica no Brasil em 09/05/2015 . . . . .	21
Tabela 3 – Carga verificada no sistema em março de 2015 . . . . .	22
Tabela 4 – Demanda máxima instantânea em março de 2015 (MW) . . . . .	23
Tabela 5 – Demanda máxima instantânea já registrada pela ONS (MW) . . . . .	24
Tabela 6 – Patamares de Carga em função do dia, hora e vigência do horário de verão . . . . .	29
Tabela 7 – Estatísticas Descritivas do PLD em R\$/MWh . . . . .	32
Tabela 8 – Valores críticos assintóticos do teste $t$ de Raiz Unitária . . . . .	55
Tabela 9 – IPCA – 2006 a 2012 . . . . .	58
Tabela 10 – Teste da Raiz Unitária de Dickey e Fuller (1979) . . . . .	60
Tabela 11 – Estatísticas Descritivas do PLD em R\$/MWh - série deflacionada . . . . .	62
Tabela 12 – Análise de Variância (ANOVA)- anos, meses, semanas e $PLD_{t-1}$ . . . . .	64
Tabela 13 – Análise de Variância (ANOVA) - anos, meses e $PLD_{t-1}$ . . . . .	64
Tabela 14 – Coeficientes da Regressão Linear - anos, meses e $PLD_{t-1}$ . . . . .	65
Tabela 15 – Regressão Linear dos Coeficientes dos Anos . . . . .	68
Tabela 16 – Análise de Variância (ANOVA) meses e $PLD_{t-1}$ . . . . .	68
Tabela 17 – Coeficientes da Regressão Linear meses e $PLD_{t-1}$ . . . . .	70
Tabela 18 – Regressão Linear do logaritmo do PLDs . . . . .	70
Tabela 19 – comparação dos modelos pelo MSPE . . . . .	78
Tabela 20 – Suposições sobre a indústria de alumínio . . . . .	81
Tabela 21 – Resultado Operacional da Indústria com a venda de Alumínio . . . . .	81
Tabela 22 – Resultado Operacional da Indústria com a venda de Energia . . . . .	82
Tabela 23 – Coeficientes (betas) utilizados no modelo de regressão . . . . .	82
Tabela 24 – Valor esperado do PLD em janeiro de 2015 . . . . .	84
Tabela 25 – Valor Esperado do Resultado Operacional da Indústria em janeiro de 2015 com a venda de energia elétrica . . . . .	84
Tabela 26 – Valor esperado do PLD e Resultado Operacional com a venda de energia em 2015 . . . . .	85
Tabela 27 – Valor limite do PLD o qual é mais lucrativo vender a energia elétrica do que produzir alumínio para cada mês do ano segundo o modelo de regressão linear . . . . .	87
Tabela 28 – Estatísticas Descritivas do Resultado Operacional em R\$ milhões segundo o modelo de regressão linear . . . . .	89
Tabela 29 – Valor da opção de alternância variando o PLD inicial segundo o modelo de regressão linear . . . . .	90
Tabela 30 – Estatísticas Descritivas do Resultado Operacional em R\$ milhões segundo o MRM de Schwartz . . . . .	92
Tabela 31 – Valor da opção de alternância de acordo com o MRM de Schwartz variando o valor do PLD inicial . . . . .	93

# Lista de abreviaturas e siglas

ACL	Ambiente de contratação livre
ACR	Ambiente de contratação regulada
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
CCEE	Câmara de Comercialização de Energia Elétrica
CMO	Custo Marginal de Operação
D&P	Dixit e Pindyck
FCF	Função de custo futuro
FCI	Função de custo imediato
FCT	Função de custo total
MBA	Movimento Browniano Aritmético
MBG	Movimento Browniano Geométrico
MCP	Mercado de Curto Prazo
MRM	Movimento de Reversão à Média
MSPE	Erro Quadrático Médio de Previsão
ONS	Operado Nacional do Sistema
O-U	Ornstein-Uhlenbeck
PIB	Produto Interno Bruto
PLD	Preço de Liquidação das Diferenças
SIN	Sistema Interligado Nacional
VPL	Valor Presente Líquido

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	15
1.1	Problema de Pesquisa . . . . .	15
1.2	Motivação . . . . .	17
1.3	Objetivos . . . . .	18
2	O SETOR ELÉTRICO BRASILEIRO . . . . .	20
2.1	O Mercado de Energia Elétrica Atual . . . . .	24
2.2	Formação de Preços no Mercado de Energia Elétrica . . . . .	27
2.3	Custo Marginal de Operação . . . . .	28
2.4	Preço de Liquidação das Diferenças . . . . .	29
2.5	Série histórica do Preço de Liquidação das Diferenças . . . . .	31
2.6	Discussão do PLD . . . . .	32
3	LITERATURA RELEVANTE - ANÁLISE DE INVESTIMENTOS POR OP- ÇÕES REAIS . . . . .	34
3.1	Teoria das Opções Reais . . . . .	34
3.2	Pesquisas Relevantes utilizando Opções Reais . . . . .	35
3.3	Projeções de preços futuros no Setor Elétrico . . . . .	37
3.4	Opção de Alternância (Switch Option) . . . . .	38
4	TÉCNICAS PARA VALORAR INVESTIMENTOS E PARA PROJETAR PRE- ÇOS . . . . .	40
4.1	Simulação de Monte Carlo e Processos Estocásticos . . . . .	40
4.1.1	Simulação de Monte Carlo . . . . .	40
4.1.2	Processo de Wiener . . . . .	41
4.1.3	Movimento Browniano Aritmético . . . . .	42
4.1.4	Movimento Browniano Geométrico . . . . .	42
4.1.5	Lema de Itô . . . . .	43
4.1.6	Distribuição Lognormal . . . . .	45
4.1.7	Equação de Black e Scholes . . . . .	48
4.1.8	Modelos de Reversão a Média . . . . .	49
4.1.8.1	Modelo de Reversão à média de Ornstein-Uhlenbeck (O-U) . . . . .	50
4.1.8.2	Modelo I de Reversão à média de Schwartz . . . . .	51
4.1.9	Validade do Processo Estocástico . . . . .	54
4.2	Erro Quadrático Médio de Previsão . . . . .	56
5	PROJEÇÕES FUTURAS DO PLD . . . . .	57
5.1	Definição do Horizonte da Série do PLD a ser analisada . . . . .	57
5.2	Definição do Processo Estocástico . . . . .	59

5.2.1	Teste da Raiz Unitária . . . . .	60
5.2.2	Teste da Razão da Variância . . . . .	60
5.3	Projetando Preços Futuro do PLD . . . . .	61
5.3.1	Abordagem Estatística . . . . .	61
5.3.1.1	Análise Exploratória da série do PLD . . . . .	61
5.3.1.2	Primeiro Modelo de Regressão Linear . . . . .	63
5.3.1.3	Segundo Modelo de Regressão Linear . . . . .	67
5.3.2	Projetando Preços futuros do PLD segundo o Modelo de Reversão a Média de Schwartz . . . . .	69
5.3.2.1	Primeiro Modelo de Reversão a Média de Schwartz . . . . .	69
5.3.2.2	Segundo Modelo de Reversão a Média . . . . .	75
5.3.3	Acurácia dos Modelos . . . . .	75
6	FORMULAÇÃO PARA AVALIAR A ESTRATÉGIA DE PRODUÇÃO DE UMA EMPRESA ELETROINTENSIVA . . . . .	80
6.1	Suposições adotadas . . . . .	80
6.2	Modelos utilizados . . . . .	82
6.2.1	Modelo de regressão linear . . . . .	82
6.2.2	Modelo de reversão a média de Schwartz . . . . .	83
6.3	Valor da Opção via Simulação utilizando o Modelo de Regressão Linear . . . . .	83
6.4	Análise de sensibilidade . . . . .	89
6.4.1	Variando o valor do PLD inicial . . . . .	89
6.4.2	Valor da opção utilizando o MRM de Schwartz . . . . .	91
6.4.2.1	Variando o valor do PLD inicial no MRM de Schwartz . . . . .	93
6.5	Discussão dos Resultados e Comparação entre os Modelos Utilizados . . . . .	93
7	CONCLUSÕES E SUGESTÕES . . . . .	96
	Referências . . . . .	98

# 1 Introdução

## 1.1 Problema de Pesquisa

A tarifa de energia elétrica brasileira é uma das mais caras do mundo (FIRJAN, 2015), o que demonstra a ineficiência do setor e onera grande parte da indústria. A Figura 1 mostra o custo médio da energia elétrica para indústrias em 28 países. A energia no Brasil é a mais cara entre os países analisados e cerca de 338% maior do que nos Estados Unidos.

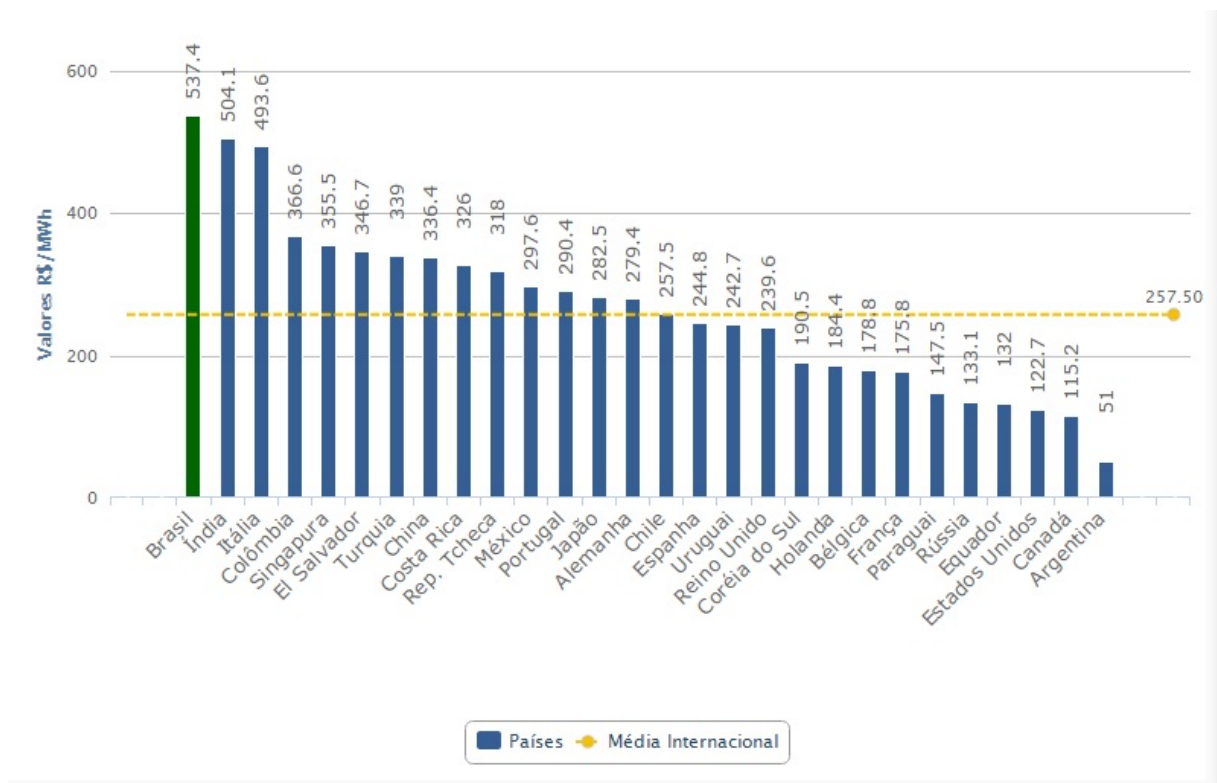


Figura 1 – Custo da Energia Elétrica para a indústria em 28 países atualizado em 10/04/2015

Fonte: FIRJAN (2015)

A Tabela 1 mostra a composição do custo da energia elétrica no Brasil e a porcentagem equivalente de cada componente.

Este assunto é recorrente no Brasil e é diversas vezes cobrado, por empresários brasileiros e pela confederação das indústrias, melhorias no setor e medidas para que o preço seja mais competitivo e tenha mais qualidade, fator essencial para a competitividade da indústria e para o desenvolvimento econômico do Brasil.

O preço *spot*<sup>1</sup> de energia elétrica no Brasil, assim como o preço de outras commodities, segue um comportamento estocástico. Isto significa que não é possível prever com exatidão os

<sup>1</sup> O preço *spot* se refere ao preço no mercado a vista, é o preço instantâneo de uma commodity (FERREIRA, 2013).



Tabela 1 – Composição do custo da energia elétrica no Brasil

Componente	R\$/Mwh	%
Custos de Geração, Transmissão e Distribuição - GTD	281,6	52,4
Encargos Setoriais	22,6	4,2
Perdas técnicas e não técnicas	34,9	6,5
Custo médio ponderado das bandeiras tarifárias	53,3	10
Tributos federais e estaduais - PIS/COFINS e ICMS	145	26,9
TOTAL	537,4	100

Fonte: FIRJAN (2015)

preços futuros. Semanalmente, um novo preço de energia é gerado pelo Operado Nacional do Sistema (ONS) com o objetivo de minimizar o custo de operação. No entanto, este preço é caracterizado por ter uma alta volatilidade acarretando incertezas quanto aos preços futuros. Estas fortes oscilações geram riscos tanto para geradores de energia quanto para grandes consumidores, como é o caso de empresas eletrointensivas <sup>2</sup>.

Para mitigar os riscos, empresas negociam contratos de energia elétrica no Ambiente de Contratação Livre (ACL). Os contratos realizados neste ambiente são acordos bilaterais, comercializados independentemente e sem padronização. São tipicamente contratos a termo (*forward contracts*) com a entrega física do ativo negociado. Entretanto, a energia efetivamente consumida não se iguala a energia contratada e essa diferença é então comercializada ao preço *spot* da energia elétrica.

Como em qualquer ambiente de incertezas, no setor elétrico também existem oportunidades. Empresas eletrointensivas podem aproveitar um período em que o preço da energia esteja alto para fazerem manutenção preventiva em suas máquinas/equipamentos e vender o excedente de energia contratada e não utilizada a este elevado preço e assim aumentar os lucros. De outra forma, estas empresas podem aproveitar um período de preços baixos para aumentar a produção e antecipar vendas ou ainda compor estoques.

Outra oportunidade relacionada a esta opção de alternar entre a venda ou a utilização da energia elétrica se aplica a empresas eletrointensivas as quais possuem plantas de cogeração de energia elétrica. Como estas empresas consomem grande quantidade de eletricidade é comum que elas produzam parte da sua própria energia consumida através de usinas termoeletricas como a utilização do bagaço da cana de açúcar, resíduos de madeira ou gás natural. Desta forma, estas empresas podem escolher se preferem utilizar a energia gerada para produção ou se é mais vantajoso vender a energia para o sistema elétrico.

Estas oportunidades se tornam ainda mais importantes quando estamos analisando investimentos. Às vezes, um investimento de expansão em uma indústria, ou a construção de uma nova planta de cogeração de energia pode não ser viável devido as incertezas futuras do preço do produto. No entanto, se adicionarmos ao projeto a opção de vender a energia elétrica para o

<sup>2</sup> Empresas eletrointensivas são aquelas em que a energia elétrica tem um peso significativo no processo de produção, como é o caso de empresas de alumínio, aço, zinco, níquel, cimento, papel e celulose, além da indústria química e petroquímica.

sistema nos momentos de escassez de demanda ou baixa do preço do produto ou ainda alta do preço da energia este investimento pode se tornar viável como discute [Oliveira et al. \(2014\)](#).

Este é um fato recente o qual as empresas estão se deparando e os modelos que as auxiliem a decidir entre, vender para o *grid*<sup>3</sup> a energia elétrica ou consumi-la para produzir, ainda estão em estágios iniciais. A literatura apresenta trabalhos relevantes sobre o setor elétrico brasileiro, porém os registros de trabalhos que captam esta decisão entre a venda da energia ou a produção do produto ainda são poucos e recentes como os trabalhos de [Oliveira et al. \(2014\)](#) e [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#).

Neste trabalho, contribuimos com a utilização de modelos estatístico de regressão linear para a projeção de preços futuros da energia elétrica em alternativa aos modelos de reversão a média já utilizados por [Oliveira et al. \(2014\)](#) e [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#). Outra contribuição teórica é a incorporação de uma componente de sazonalidade aos modelos de reversão a média utilizados por [Oliveira et al. \(2014\)](#) e [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#) para projetarmos o preço da energia elétrica. Outra novidade deste trabalho é que consideramos os estágios de decisões mensalmente, isto é, no final de cada mês decidimos qual será a estratégia de produção da empresa para o próximo mês diferente do que consideram [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#) onde os estágios de decisões são semestrais. Além disto, tomamos a decisão com base no valor esperado do PLD para o próximo mês, em oposito ao que fazem [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#) onde toma-se a decisão depois que o valor do PLD é conhecido. E, consideramos o PLD variando semanalmente, tal qual ocorre na prática, divergente de [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#) onde os autores consideram que o PLD é constante por 6 meses.

O presente trabalho contribui para que tanto empresas eletrointensivas quanto o governo se atentem para o fato de que existem oportunidades no setor elétrico para que investimentos que estejam estacionados, postergados ou até mesmo aqueles descartados possam se tornar viáveis com a opção de alternância. O Brasil é um país carente de investimento, e é preciso aumentar a porcentagem do investimento em relação ao PIB para que possamos crescer de forma mais estruturada e contínua. Para tanto, é preciso que o governo deixe as regras do setor claras e evite intervenções constantes o que gera mais incerteza para as empresas e investidores. E como mostra [Dixit e Pindyck \(1994\)](#) a incerteza é o componente que mais afeta (posterga) investimentos.

## 1.2 Motivação

Houve no Brasil, tanto em 2013 quanto em 2014, um choque de oferta de eletricidade causado por verões com precipitações atípicas abaixo da média histórica nas regiões sudeste e nordeste do país ([INMET, 2015](#)). Devido a este fato, os reservatórios das hidrelétricas se encontravam em níveis excepcionalmente baixos. Isto fez com que o Operador Nacional do Sistema, responsável pelas decisões de quanto despachar de eletricidade de cada fonte, optasse por despachar as termelétricas emergenciais, que são ainda mais onerosas, poupando água para a geração em períodos habitualmente secos.

Em ambos os anos o preço *spot* da energia elétrica disparou e em 2014 chegou a ultrapassar

---

<sup>3</sup> Grid se refere a rede do sistema elétrico.

o valor máximo, vigente a época, estipulado pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL, 2015) que era de R\$ 822,83 por Megawatt-Hora (MWh).

Várias empresas aproveitaram este período para realizarem manutenção em seus equipamentos e máquinas e passaram a vender o excesso, entre a energia contratada e não consumida, ao preço *spot*. Foi mais lucrativo para estas empresas venderem a energia a um preço elevado do que fabricar o produto e vendê-lo ao mercado consumidor. Esta iniciativa foi tão lucrativa que as empresas estenderam este plano por um período maior do que aquele necessário para a suposta manutenção. Empresas do setor de alumínio, metalurgia, químicos, petroquímicas, siderúrgicas, cimenteiras, papeleiras, montadoras e até fabricantes de eletrodomésticos adotaram esta estratégia. A Votorantim (maior cimenteira do país), a Alcoa (fabricante de alumínio) e a siderúrgica Usiminas são exemplos de empresas que venderam energia em 2014. Esta última contabilizou as vendas de energia em seus demonstrativos chegando a R\$ 75 milhões no primeiro trimestre de 2014.

Esta política, de vender parte da energia contratada, foi considerada interessante por alguns especialistas. Esta seria uma espécie de racionamento branco onde as empresas diminuem suas demandas por eletricidade ajudando o setor elétrico a atender à demanda de todo o país. No racionamento de energia elétrica que ocorreu em 2001, o governo criou até incentivos para que as empresas vendessem energia no mercado à vista (preço *spot*). Porém, outros especialistas argumentam que este episódio é uma distorção no mercado e causam queda na produção industrial influenciando negativamente o Produto Interno do País (PIB).

Perante a estes fatos, chegamos a duas perguntas: (i) qual deve ser a estratégia ótima de uma empresa eletrointensiva levando em consideração a alta volatilidade do preço *spot*? (ii) Qual seria o momento ótimo de se realizar uma eventual manutenção nos equipamentos? Estas perguntas motivaram o desenvolvimento deste trabalho e buscamos respondê-las ao longo do mesmo.

### 1.3 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é avaliar uma estratégia ótima de produção para empresas eletrointensivas levando em consideração as incertezas futuras do preço *spot* da energia elétrica.

Os objetivos secundários deste trabalho são:

(i) Analisar o comportamento do preço *spot* da energia elétrica no Brasil ao longo dos últimos anos. Para isto, buscamos desenvolver uma forma eficiente para projetar o comportamento futuro deste preço, considerando sua tendência e volatilidade, para assim auxiliar na tomada de decisão;

(ii) Desenvolver um modelo de opções reais para valorar uma opção de alternância (*switch option*) e verificar o quanto esta opção agrega de valor para uma empresa eletrointensiva. Esta alternância seria entre a produção do produto e a venda de energia elétrica para o *grid*.

Para isto, primeiramente tratamos os dados da variável estocástica envolvida no trabalho,

o preço *spot* da energia elétrica, e avaliamos as formas de projeção do preço utilizando duas abordagens distintas. A primeira delas projeta o preço futuro através de dois modelos de regressão linear. Já na segunda abordagem utiliza-se dois Movimentos de Reversão a Média Geométrico de um único fator estocástico. Posteriormente, avaliamos o valor da opção de alternância através do modelo que apresentou o menor erro de previsão para assim projetar os preços futuros de energia elétrica e desta forma estabelecer a melhor estratégia para a empresa em cada estágio de decisão.

Uma contribuição deste trabalho é auxiliar empresas eletrointensivas a definir o momento ótimo de se realizar manutenção dos equipamentos e máquinas considerando o preço *spot* de energia elétrica bem como decidir se amplia a produção, mantém inalterada ou diminui a produção para vender o excesso de energia ao preço *spot*.

O presente trabalho está dividido em 7 capítulos. No primeiro capítulo apresentamos uma introdução do trabalho, motivação e nossos objetivos. No capítulo 2 fazemos uma introdução de como é o setor elétrico brasileiro e como acontece a formação de preços neste mercado. No terceiro capítulo é feita uma revisão da teoria de opções reais e são apresentados os trabalhos relevantes acerca deste tema. No capítulo 4 descrevemos a técnica de Simulação de Monte Carlo para valoração de opções reais através de processos estocásticos. No capítulo 5 realizamos um tratamento dos dados do preço *spot* da energia elétrica no Brasil e definimos o modelo mais adequado para projetar preços futuros. No sexto capítulo mostramos nossos resultados para o valor de uma opção de alternância, através de um exemplo ilustrativo, em uma indústria de alumínio. Por fim, no capítulo 7, apresentamos as conclusões e sugestões para pesquisas futuras.

## 2 O Setor Elétrico Brasileiro

O sistema de geração, distribuição e transmissão de energia elétrica no Brasil tem características continentais, o que permite considerá-lo único em âmbito mundial. O sistema é considerado de grande porte e com múltiplos proprietários.

O sistema elétrico brasileiro é um sistema hidrotérmico, predominantemente baseado na Geração Hidráulica, como podemos ver na Matriz Elétrica Brasileira na [Figura 2](#). Como o sistema é dependente das hidrelétricas, o mesmo está sujeito à sazonalidade e aleatoriedade do regime de chuvas. De forma a minimizar o risco de abastecimento, usinas termelétricas são operadas em conjunto. Apesar de estas serem mais onerosas, são despachadas em maior quantidade em períodos críticos de armazenamento de água garantindo assim a geração de energia elétrica suficiente para atender a demanda do sistema, tanto no presente quanto no futuro ([DIAS et al., 2010](#)).

De acordo com dados do Banco de Informações de Geração (BIG), disponibilizado pela [ANEEL \(2015\)](#), a capacidade instalada no país em 09/05/2015 era de cerca de 144.391 MW, sendo, aproximadamente, 62% dessa capacidade proveniente de geração hídrica.

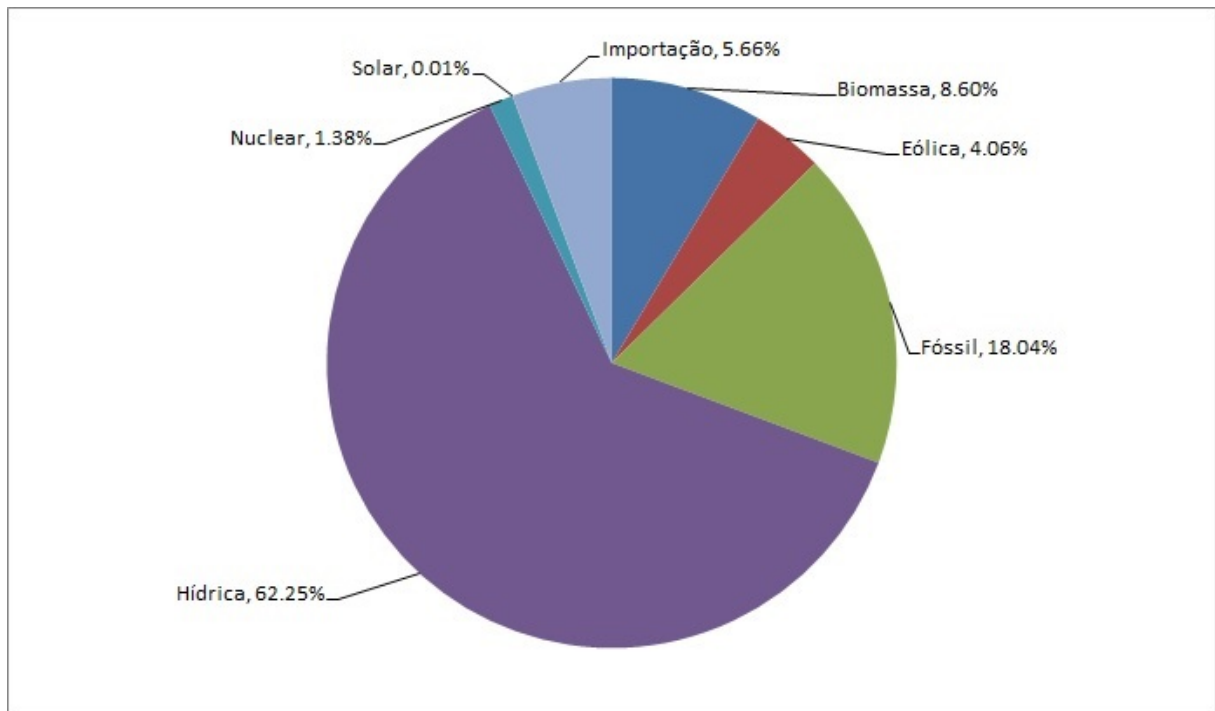


Figura 2 – Matriz de Energia Elétrica no Brasil (capacidade Instalada), atualizada em 09/05/2015

Fonte: ([ANEEL, 2015](#))

Além destes 62%, temos ainda mais 5,66% de capacidade de geração hidráulica provenientes de importação oriundo em sua maioria do Paraguai e Argentina totalizando cerca de 68%. A energia proveniente de combustíveis fósseis aparece em segundo lugar na capacidade instalada

com cerca de 18%, seguida da Biomassa que representa 8,6%. A energia eólica cresceu muito nos últimos anos e já representa cerca de 4% da capacidade instalada. A energia Nuclear equivale a menos de 2% e a energia solar ainda é desprezível. Entretanto, o custo desta última vem caindo ao longo dos últimos anos e espera-se que no médio prazo já venha a ter um preço competitivo com as outras fontes.

A [Tabela 2](#) ilustra todos os empreendimentos em operação no Brasil em 09/05/2015 ([ANEEL, 2015](#)) de acordo com cada fonte, a capacidade instalada e o número de usinas correspondentes. Como podemos ver, destaca-se, além do potencial hidráulico, a energia elétrica resultante do Gás natural (8,9%) e do bagaço da cana de açúcar (6,9%).

Tabela 2 – Capacidade Instalada de Energia Elétrica no Brasil em 09/05/2015

Empreendimentos em Operação								
Fonte			Capacidade Instalada			Total		
Origem	Fonte nível 1	Fonte nível 2	Usi.	MW	%	Usi.	MW	%
Biomassa	Agroindustr.	Baga. Cana Açú.	387	9.934	6,9	403	10.041	7,0
		Biogás-AGR	2	1,7	0,0			
		Capim Elefante	3	65,7	0,0			
		Casca de Arroz	11	39,5	0,0			
Biomassa	Bioco. Líq.	Óleos vegetais	2	4,4	0,0	2	4,4	0,0
Biomassa	Floresta	Carvão Vegetal	7	51,4	0,0	79	2.305	1,6
		Gás Alto Forno	8	109,9	0,1			
		Licor Negro	17	1.785	1,2			
		Res. de Madeira	47	359	0,2			
Biomassa	Res. Animais	Biogás - RA	12	2,1	0,0	12	2,1	0,0
Biomassa	Res. Sólidos	Biogás - RU	10	62	0,0	10	62	0,0
Eólica	Cinét. Vento	Cinét. Vento	266	5.862	4,1	266	5.862	4,1
Fóssil	Carvão min.	Calor de Processo	1	24,4	0,0	23	3.614	2,5
		Carvão Mineral	13	3.389	2,3			
		Gás de Alto Forno	9	200	0,1			
Fóssil	Gás natural	Calor de Processo	1	40	0,0	137	12.896	8,9
		Gás Natural	136	12.856	8,9			
Fóssil	Outros Fósseis	Calor de Processo	1	147	0,1	1	147	0,1
Fóssil	Petróleo	Gás de Refinaria	7	340	0,2	1727	9.394	6,5
		Óleo Combustível	40	4.091	2,8			
		Óleo Diesel	1664	4.028	2,8			
		Outros	16	938	0,6			
Hídrica	Pot. hidr.	Pot. hidr.	1173	89.888	62	1173	89.888	62
Nuclear	Urânio	Urânio	2	1.990	1,4	2	1.990	1,4
Solar	Rad. solar	Rad. solar	317	15,2	0,0	317	15	0,0
Impor.	Paraguai Argentina Venezuela Uruguai			5.650	3,9		8.170	5,7
				2.250	1,6			
				200	0,1			
				70	0,0			
Total			4152	144.391	100	4152	144.391	100

Devido a um processo histórico de aproveitamento dos recursos naturais para geração de energia, desenvolveu-se o Sistema Interligado Nacional (SIN). O SIN permite, respeitadas certas configurações técnicas, que a energia gerada em qualquer local do país seja consumida em regiões distintas (FERREIRA, 2013). Ou seja, a energia que é gerada na região Sul do país pode vir a ser utilizada na região Norte, caso haja necessidade. Segundo o Operador Nacional do Sistema (ONS, 2015) apenas 3,4% da capacidade de produção de eletricidade do país encontra-se fora do SIN, em pequenos sistemas isolados localizados principalmente na região amazônica.

O SIN é subdividido em quatro subsistemas denominados: Subsistema Sudeste/Centro-Oeste (SE/CO), Subsistema Sul, Subsistema Nordeste e Subsistema Norte.

Conforme o Boletim de Carga Mensal de março de 2014, divulgado pelo Operador Nacional do Sistema (ONS, 2015) o submercado SE/CO concentra a maior carga <sup>1</sup> nacional com aproximadamente 59% da carga total do SIN. Em segundo lugar aparece o submercado Sul que concentra cerca de 18%, seguido do Nordeste com cerca de 16% e por último o Norte com cerca de 8%. A Tabela 3 ilustra estes números.

Tabela 3 – Carga verificada no sistema em março de 2015

Subsistemas	MW médio verificado	%
SIN	66,647	100,00%
SE/CO	39,100	58,67%
Sul	11,930	17,90%
Nordeste	10,482	15,73%
Norte	5,135	7,70%

Fonte: (ONS, 2015)

Como podemos ver na Figura 3 a carga média verificada no SIN em julho e agosto de 2014 foi praticamente a mesma verificada em julho e agosto de 2013. Este fato contraria a tendência de aumento no consumo de energia elétrica e pode ser explicado, principalmente, pela queda na atividade industrial verificada no país nestes meses (ONS, 2015). Se compararmos 2015 com 2014, em janeiro e março tivemos um ligeiro aumento na carga do sistema e em fevereiro tivemos uma pequena queda. Este fato pode ser explicado pelo fraco desempenho da economia no primeiro trimestre de 2015.

A demanda máxima instantânea registrada em março de 2015 para o SIN foi de 81.207 MW como ilustra a Tabela 4. Este valor é cerca de 5% menor do que a máxima já verificada pela ONS. A Tabela 5 mostra a demanda máxima já registrada pela ONS. Isto ocorreu em fevereiro de 2014 e a carga chegou a 85.708 MW.

Como visto na Tabela 2, a capacidade total instalada no Brasil é de cerca de 144.000 MW e a demanda máxima instantânea verificada foi de 85.708 MW. É por isso que, em condições normais de hidrologia e níveis dos reservatórios, a geração hidráulica é responsável pela produção de aproximadamente 90% da eletricidade consumida no país (SOUZA et al., 2014).

<sup>1</sup> Carga é a demanda de energia elétrica acrescida das perdas de transmissão.

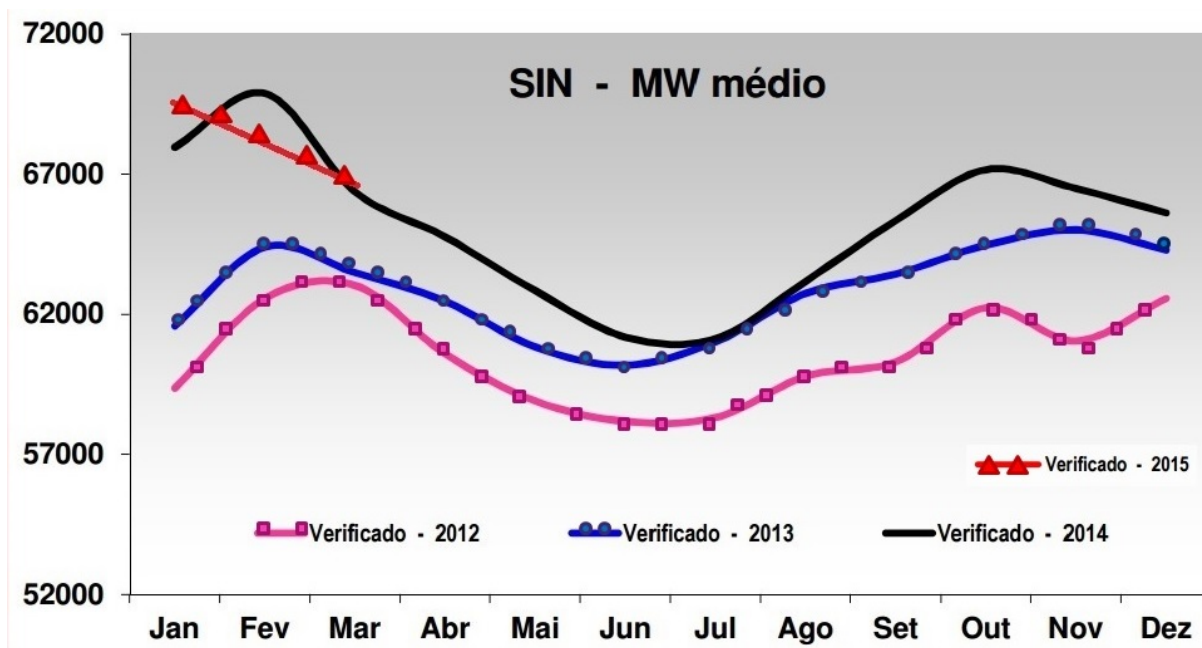


Figura 3 – Comportamento da Carga do SIN nos anos de 2012-2015

Fonte: adaptado de [ONS \(2015\)](#)

Tabela 4 – Demanda máxima instantânea em março de 2015 (MW)

SUBSISTEMAS	carga máxima registrada (MW)	Horário
SIN	81,207	14:40
SE/CO	48,338	15:35
Sul	16,244	14:46
Nordeste	12,144	14:32
Norte	5,935	15:18

Fonte: ([ONS, 2015](#))

Como os níveis dos reservatórios das hidrelétricas são variáveis, é de extrema importância a interligação elétrica entre eles, a fim de se aproveitar as sazonalidades de cada região para a otimização do ganho energético. Assim, o SIN é operado centralizadamente de forma a exportar energia das regiões mais “úmidas” para as regiões mais “secas”, através da infraestrutura do sistema de transmissão, possibilitando o aproveitamento ótimo dos recursos disponíveis para assim garantir o atendimento à demanda de cada subsistema ([LUZ, 2011](#)).

Ultimamente optou-se pela construção de hidrelétricas com reservatórios menores, as chamadas usinas a fio d’água. Isso ganhou respaldo recentemente devido aos impactos ambientais causados pelos grandes reservatórios das hidrelétricas.

Entretanto, essas novas usinas a fio d’água são um fator que vem aumentando o risco de produção e geração de energia elétrica no Brasil. Segundo o Operador Nacional do Sistema ([ONS, 2015](#)), em 2001, ano em que houve o racionamento de energia elétrica, o Brasil tinha uma capacidade de reservatórios suficiente para gerar 6 (seis) meses de energia elétrica caso



Tabela 5 – Demanda máxima instantânea já registrada pela ONS (MW)

SUBSISTEMAS	Histórico da carga		
	Máxima Verificada	Horário	Mês
SIN	85,708	15:41	Fev-14
SE/CO	51,894	14:32	Jan-15
Sul	17,971	14:29	Fev-14
Nordeste	12,166	15:34	Jan-15
Norte	6,185	14:39	Set-14

Fonte: (ONS, 2015)

não houvesse chuvas. Em 2009 esse tempo passou para 5 (cinco) meses e em 2019, segundo a Associação Nacional dos Consumidores de Energia (ANACE, 2015), estima-se que teremos reservatórios suficientes para apenas 3 (três) meses.

Isto porque a demanda por energia elétrica do país aumentou na última década e os reservatórios não aumentaram na mesma proporção. Essa nova tendência ambiental de construir usinas a fio d'água, deixa o sistema ainda mais dependente das chuvas, o que traz mais incerteza para o preço *spot* da energia elétrica.

Em janeiro de 2008, nos primeiros meses de 2013 e praticamente durante todo o ano de 2014 houve um aumento expressivo no preço *spot* de energia elétrica causado pela baixa precipitação pluviométrica nas regiões sudeste e centro-oeste do país, região onde estão localizados os maiores reservatórios, causando assim instabilidade no preço. Nestes últimos surgiram rumores de que o país corria um risco de racionamento de energia compulsório, o que seria desastroso para o crescimento da economia do país e para a credibilidade do governo.

Não houve racionamento compulsório no período, mas a população pagará um preço muito caro por isso. Devido ao acionamento de usinas termoelétricas a petróleo (óleo combustível e óleo diesel) que são muito mais onerosas e chegam a custar mais de R\$ 1000,00/MWh, e também ao aumento do risco de faltar energia elétrica, o preço *spot* permaneceu alto por todo o ano de 2014 e por isso os consumidores tiveram, em 2015, um forte reajuste nas tarifas de energia elétrica.

## 2.1 O Mercado de Energia Elétrica Atual

No início da década de 1990 iniciou-se um processo de desverticalização da indústria de energia elétrica na Europa. A Grã Bretanha e os Países Nórdicos (Noruega, Suécia, Finlândia e Dinamarca) se destacaram na liberalização do mercado. Estimulou-se a competição e permitiu-se a escolha livre por parte dos consumidores de quem seria seu fornecedor de energia elétrica.

Contagiado por esse movimento, iniciou-se também no Brasil a reestruturação do Setor Elétrico, cujo modelo institucional baseava-se em um padrão verticalizado e de predomínio estatal nas atividades relacionadas à geração, transmissão e distribuição de energia elétrica. A reforma era necessária principalmente pela insuficiência dos recursos por parte do governo para os devidos

investimentos na expansão da oferta de energia em concordância com o crescimento da demanda do país (VITORINO, 2011).

No Brasil a reestruturação do setor iniciou em 1998 e perdurou por vários anos até sua consolidação (REGO, 2012). Em 2001 houve o racionamento de energia elétrica no país e em 2003 houve a mudança do governo federal o que originou novas mudanças no setor.

Em março de 2004, o setor elétrico começou sua segunda grande reforma alterando muitos dos princípios do modelo do governo antecedente (REGO, 2012). A regulamentação do modelo de comercialização de energia elétrica, o processo de outorga de concessões e de autorizações de geração de energia elétrica foi consolidado em julho de 2004 com o Decreto n.º 5.163 (REGO, 2012).

Após essa reestruturação do setor, o mercado elétrico brasileiro apresenta hoje dois ambientes para negociação de contratos de compra e venda de energia: o Ambiente de Contratação Regulada (ACR), também chamado de mercado cativo, e o Ambiente de Contratação Livre (ACL).

No ACR a contratação é formalizada através de contratos bilaterais entre os agentes vendedores (geradores, produtores independentes ou autoprodutores) e as distribuidoras de energia. São representados por contratos a termo derivados dos leilões de energia realizados pelo governo federal para atender a demanda do mercado cativo (consumidores de pequeno porte, como os consumidores residenciais). Estes contratos são denominados de Contratos de Comercialização de Energia Elétrica no Ambiente Regulado (CCEAR). Nesses leilões a energia é adquirida pela menor tarifa. Segundo a Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE, 2015) os agentes de distribuição têm a obrigatoriedade da contratação da totalidade de seu mercado consumidor.

No ACL há a livre negociação entre os agentes geradores, comercializadores e consumidores livres. Os contratos realizados são acordos bilaterais, tipicamente contratos a termo (*forward contracts*) negociados independentemente e sem padronização. A Figura 4 ilustra estes dois ambientes.

Os consumidores livre, sejam de médio porte ou de grande porte, também necessitam ter firmados em contratos a sua demanda média de energia dos últimos 12 meses (CCEE, 2015).

Entretanto, a energia contratada pelas distribuidoras, pelos comercializadores ou pelos consumidores livres não se iguala a energia efetivamente consumida, bem como a energia gerada pelos produtores também divergem do estipulado em contrato exigindo a necessidade de uma contabilização a posteriori.

A Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE, 2015) é responsável por contabilizar a diferença entre os montantes de energia elétrica realmente medidos e os montantes firmados em contratos por cada agente. Esta contabilização é feita tanto no ACL quanto no ACR, isto é, são contabilizados todos os contratos seja de distribuidoras, geradoras, produtores independentes, comercializadores ou consumidores livres.

Esta **resultante** de energia transacionada e não contratada é então valorada ao Preço de

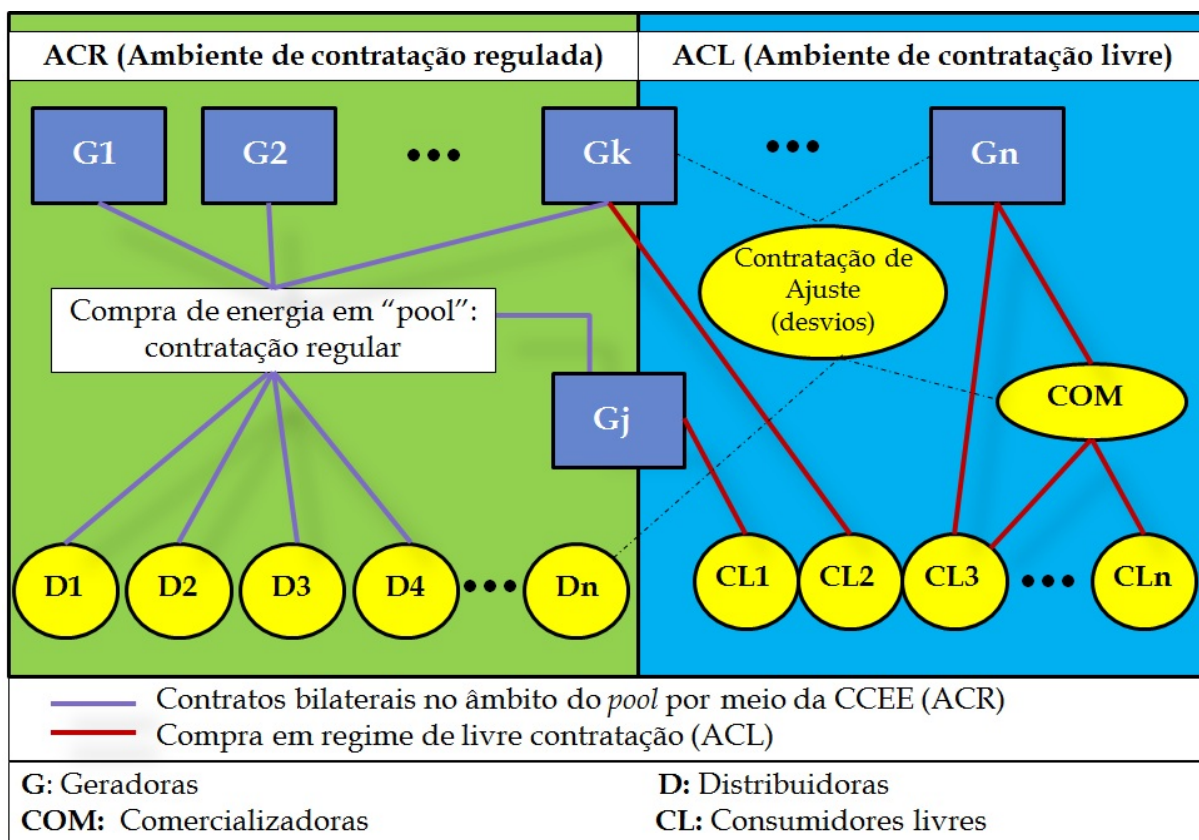


Figura 4 – Ambientes de Contratação de Energia

Fonte: Vitorino (2011)

Liquidação das Diferenças (PLD), explicitado detalhadamente na seção 2.4, e se tornam objeto de liquidação na CCEE no Mercado de Curto Prazo (MCP). Ou seja, apenas a **diferença** de energia entre o firmado em contrato e o realmente consumido é valorada conforme o PLD como mostra a Figura 5. Segundo a CCEE (2015) de janeiro a dezembro de 2012, 2013 e 2014 foram contabilizados no mercado de curto prazo cerca de R\$ 10 bilhões, R\$ 15 bilhões e R\$ 43 bilhões, respectivamente.

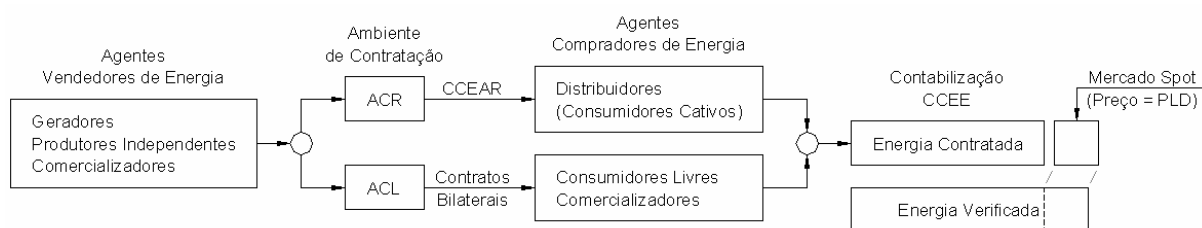


Figura 5 – Representação dos ambientes de contratação de energia no Brasil e o mercado spot

Fonte: Rodrigues (2007)

No caso das geradoras de energia, se elas vencem um leilão de energia A-3 ou A-5 <sup>2</sup> por

<sup>2</sup> Leilões de energia A-3 ou A-5 significa que os vencedores do certame são obrigados a começarem a gerar a energia negociada no leilão 3 ou 5 anos adiante, respectivamente.

exemplo, em 2015, devem começar a fornecer esta energia vendida 3 ou 5 anos adiante conforme o tipo do leilão. Se ocorrem atrasos nas obras e por alguma razão estas empresas geradoras atrasam no fornecimento de energia, são então obrigadas a fornecer essa energia comprando através do mercado *spot*.

Todos os contratos celebrados entre os agentes no âmbito do Sistema Interligado Nacional (SIN), sejam contratos do ACR ou do ACL, devem ser registrados na CCEE e servem de base para a contabilização e liquidação das diferenças no mercado de curto prazo (LUZ, 2011).

Como resultado desse formato de liquidação dos contratos elétricos e devido ao fato do cálculo do PLD basear-se no custo marginal de operação do setor elétrico, o PLD reflete como uma *proxy* do valor real do preço *spot* da energia elétrica no mercado brasileiro (RODRIGUES, 2007).

## 2.2 Formação de Preços no Mercado de Energia Elétrica

A determinação do preço de eletricidade na maioria dos mercados reestruturados mundiais pode ser dividida em duas categorias: (i) o preço é determinado por meio do confronto entre as curvas de oferta e de demanda e (ii) o preço de curto prazo é resultado de um gerenciamento centralizado do sistema com o intuito de garantir o menor custo operacional possível (RODRIGUES, 2007).

No Brasil o preço de eletricidade é determinado pela segunda categoria, onde a escolha da quantidade de energia a ser produzida e despachada por cada fonte segue um modelo de otimização estocástica. A produção de energia elétrica de cada fonte tem um custo unitário diferenciado e uma quantidade de energia maior tenderá a ser produzida pela fonte mais barata.

A geração hidráulica é a fonte mais barata, mas conta com a característica de só produzir energia se os reservatórios de água estiverem acima de um determinado nível. As usinas termelétricas têm como custo principal e direto o combustível utilizado, que, conforme visto na Tabela 2, pode ser o bagaço da cana de açúcar, carvão mineral, gás natural, óleo combustível ou ainda óleo diesel em casos extremos.

A geração hidráulica não tem um custo direto, apenas um custo de oportunidade associado de disponibilidade de água para gerações futuras. A máxima utilização da energia hídrica disponível em cada período é a premissa mais econômica do ponto de vista imediato, porque minimiza os custos com combustível. Porém, ela acarreta em maiores riscos de déficits futuros de água e, no caso de uma seca severa, por exemplo, pode levar a um racionamento, com um alto custo para sociedade. Por outro lado, a máxima confiabilidade de fornecimento é obtida conservando o nível dos reservatórios o mais elevado possível, o que significa utilizar mais geração térmica e, portanto, aumentar os custos de operação (LUZ, 2011).

Sendo assim, dada a natureza mista da matriz de energia elétrica brasileira, o Operador Nacional do Sistema (ONS) decide produzir conforme uma configuração que minimize a função de custo total (FCT) que é obtida pela soma da função de custo imediato (FCI) e a função de custo futuro (FCF), conforme mostra a Figura 6. Esta figura mostra a FCI e a FCF em função do volume final dos reservatórios das hidrelétricas.

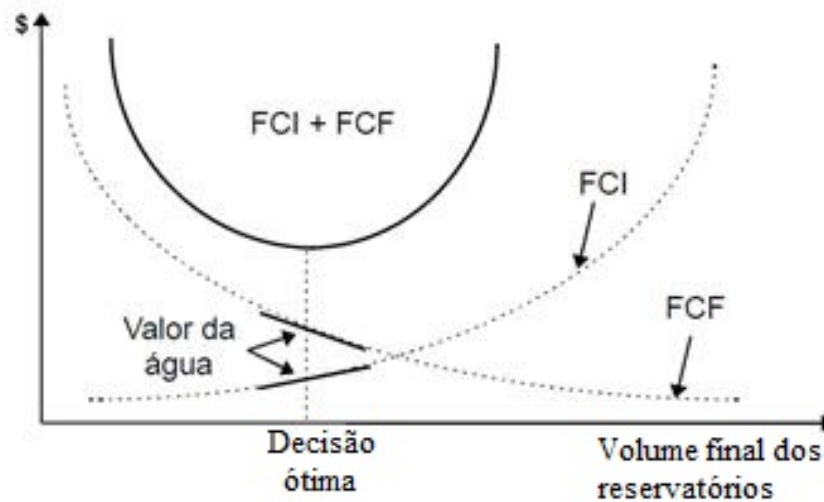


Figura 6 – Funções de Custo Imediato e Custo Futuro

Fonte: Luz (2011)

A Função de Custo Imediato aumenta à medida que se decide aumentar o volume final dos reservatórios, isto é, quanto menor é a energia hídrica despachada maior será a geração térmica e conseqüentemente maior será o custo imediato.

A Função de Custo Futuro está associada ao custo esperado de geração hidráulica e térmica no futuro. Este custo diminui à medida que aumenta o volume final armazenado nos reservatórios, isto é, quanto maior é a energia hídrica armazenada nos reservatórios maior tende a ser a geração hidráulica no futuro e menor tende a ser a geração térmica no futuro, o que acarreta em um menor custo futuro esperado.

### 2.3 Custo Marginal de Operação

Segundo Vitorino (2011) o Custo Marginal de Operação (CMO) é definido como o custo incorrido para atender o aumento incremental de 1 (um) MWh na demanda por energia elétrica do Sistema Interligado Nacional (SIN) e seu valor é expresso em R\$/MWh.

De acordo com a ANEEL (2015), os modelos de otimização estocástica responsáveis por gerar o CMO são o Newave e o Decomp. O Custo Marginal de Operação é um custo considerado difícil de ser estimado por envolver a quantificação do risco e o custo de déficit de energia.

O Newave é um modelo de otimização estocástica para o planejamento de médio e longo prazo, cerca de 5 (cinco) anos, com discretização mensal e representação a sistemas equivalentes (SOUZA et al., 2014). Seu objetivo é determinar a estratégia ótima de geração hidráulica e térmica em cada estágio que minimiza o valor esperado do CMO para todo o período em análise atendendo à demanda de energia do SIN prevista para o período.

Conforme Souza et al. (2014) um dos principais resultados desse modelo são as funções de custo futuro, essenciais para a determinação do “valor da água” e, conseqüentemente, dos impactos da utilização da água armazenada nos reservatórios.

Assim como o Newave, o modelo Decomp também procura obter uma operação ótima do sistema hidrotérmico, mas em um horizonte de tempo mais curto. Segundo [Vitorino \(2011\)](#) o modelo Decomp busca determinar os despachos de geração de cada usina, bem como o intercâmbio entre os subsistemas para os próximos 12 (doze) meses, com base nas informações de carga, vazão, disponibilidade, limite de transmissão entre subsistemas e na função de custo futuro obtida pelo modelo Newave. De acordo com [Souza et al. \(2014\)](#) a principal característica do módulo Decomp é o resultado otimizado do planejamento de curto prazo com a discretização semanal no primeiro mês de estudo.

## 2.4 Preço de Liquidação das Diferenças

O Preço de Liquidação das Diferenças (PLD) para cada submercado é calculado pela Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE) e é derivado do custo marginal de operação. O PLD é determinado e divulgado pela CCEE semanalmente, para cada patamar de carga (leve, média ou pesada) e para cada submercado (N, NE, S e SE/CO).

O PLD é então calculado com base no CMO da primeira semana de horizonte de planejamento, considerando os limites máximo ( $PLD_{max}$ ) e mínimo ( $PLD_{min}$ ) definidos pela ANEEL para cada ano. No ano de 2014 o  $PLD_{max}$  foi definido em R\$822,83 e o  $PLD_{min}$  foi definido em R\$15,62 ([ANEEL, 2015](#)). A expressão do PLD é definida pela [Equação 2.1](#).

$$PLD = \min(\max(CMO, PLD_{min}), PLD_{max}) \quad (2.1)$$

Os patamares de carga são definidos de acordo com o horário da utilização da energia elétrica. A [Tabela 6](#) apresenta os horários de ocorrência dos patamares de carga de energia leve, média e pesada ao longo de uma semana, nos períodos com e sem horário de verão.

Tabela 6 – Patamares de Carga em função do dia, hora e vigência do horário de verão

Patamar de Carga	Sem Horário de Verão		Com Horário de Verão	
	2ª feira a sábado	Domingo e Feriado	2ª feira a sábado	Domingo e Feriado
Leve	00:00 às 06:59	00:00 às 16:59 22:00 às 23:59	00:00 às 06:59	00:00 às 17:59 23:00 às 23:59
Média	07:00 às 17:59 21:00 às 23:59	17:00 às 21:59	07:00 às 18:59 22:00 às 23:59	18:00 às 22:59
Pesada	18:00 às 20:59		19:00 às 21:59	

Fonte: ([CCEE, 2015](#))

O objetivo principal do Horário de Verão é diminuir a demanda do SIN no período de ponta (pico) ([ONS, 2015](#)). Isso é possível, pelo fato da parcela de demanda por energia elétrica referente à iluminação pública e residencial ser acionada mais tarde do que normalmente o seria, devido ao adiantamento do fuso horário brasileiro em 1 hora ([ONS, 2015](#)).



O Horário de Verão foi instituído pelo Decreto-Lei nº 4.295, de 13 de maio de 1942 e regulamentado, em caráter permanente quanto à sua abrangência e vigência, pelo Decreto da Presidência da República nº 6.558, de 08 de setembro de 2008 (ONS, 2015). Após a alteração promovida pelo Decreto nº 7.826, de 15 de Outubro de 2012, o horário de verão abrange os seguintes estados: Rio Grande do Sul, Santa Catarina, Paraná, São Paulo, Rio de Janeiro, Espírito Santo, Minas Gerais, Goiás, Mato Grosso, Mato Grosso do Sul, Tocantins e no Distrito Federal. O horário de verão entra em vigor a partir da zero hora do terceiro domingo do mês de outubro de cada ano, até a zero hora do terceiro domingo do mês de fevereiro do ano subsequente, exceto quando o término da medida coincide com o Carnaval, caso em que é postergado para o domingo seguinte (ONS, 2015).

O ONS, anualmente, divulga relatórios sobre as expectativas e os resultados da adoção do horário de verão. No relatório referente ao verão de 2012/2013 podemos ver como foi a redução da demanda no horário de pico, devido a adoção do horário de verão, no subsistema Sul e no subsistema Sudeste/Centro-Oeste, este último exibido na Figura 7. A Figura 7 é interessante porque mostra também como varia a demanda do subsistema Sudeste/Centro-Oeste ao longo de um dia típico de verão. Podemos ver que a demanda mínima ocorre por volta das 4 horas da manhã e vai aumentando ao longo do dia. Temos, nos meses de verão, um pico de demanda por volta das 15 horas que pode ser explicado pelo aumento do uso de aparelhos de ar condicionado (ONS, 2015).

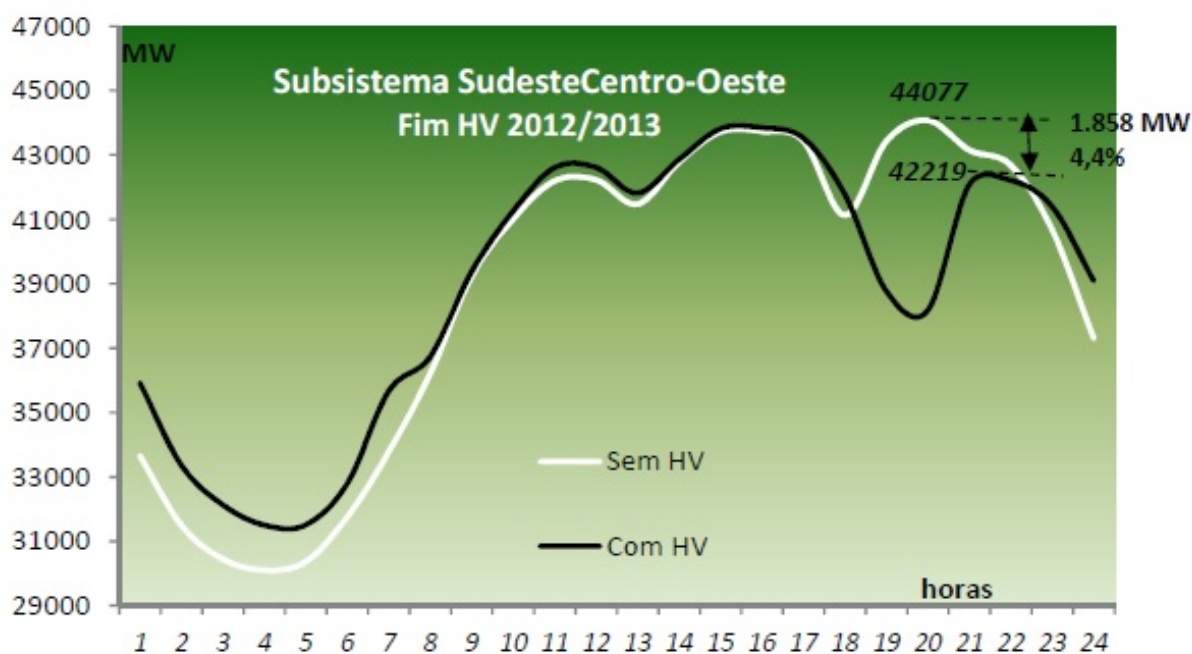


Figura 7 – carga diária com e sem horário de verão

Fonte: ONS (2015)

Devido a implantação do horário de verão, a redução da demanda na hora do pico de carga no subsistema Sudeste/Centro-Oeste no verão de 2012/2013 foi da ordem de 1.858 MW correspondendo a uma redução de 4,4% da carga total do subsistema.

## 2.5 Série histórica do Preço de Liquidação das Diferenças

Como o subsistema Sudeste/Centro-Oeste é o subsistema de maior demanda de carga e de maior representatividade econômica do país, optamos por analisar a série histórica desse subsistema. Além disso, optamos por dar ênfase no patamar de carga pesada, por esse ser o patamar onde se situa a maior demanda diária de energia elétrica, isto é, a ponta (pico).

A [Figura 8](#) mostra a série histórica do PLD para o submercado sudeste/centro-oeste no patamar de carga pesado desde julho de 2001 até dezembro de 2014. Os dados em análise foram extraídos do site da Câmara de Comercialização de Energia Elétrica ([CCEE, 2015](#)). Neste portal, o registro encontrado da série histórica dos preços se inicia em julho de 2001. O PLD é dado em R\$/MWh (reais por Mega Watt hora).

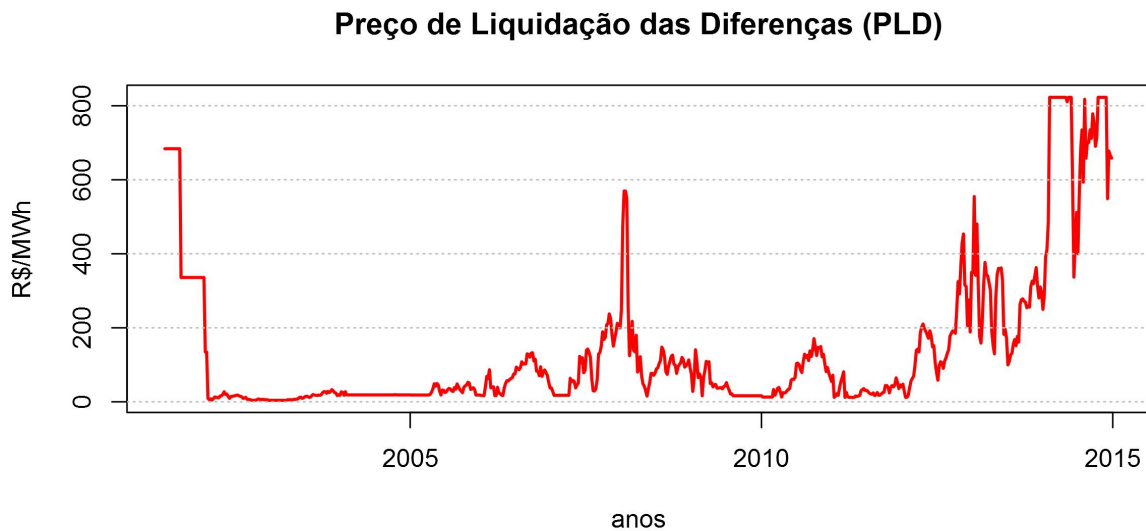


Figura 8 – Série Histórica do PLD (de 2001 a 2014)

Fonte: [CCEE \(2015\)](#)

Podemos ver que a série apresenta cerca de 4 picos nos preços. O primeiro deles ocorreu logo no início do registro em julho de 2001, época do racionamento de energia compulsório no país. Outra elevação brusca se deu em janeiro de 2008 devido ao atraso nas chuvas de verão da região sudeste/centro-oeste. O terceiro pico do PLD foi em janeiro de 2013 pelo mesmo motivo anterior. E em 2014 o PLD bateu o valor máximo estabelecido pela ANEEL (R\$822,83) nos meses de fevereiro, março, abril, maio, outubro e novembro. O baixo índice pluviométrico verificado nas regiões sudeste/centro-oeste e nordeste em 2013 e em 2014 foi o fator determinante para o PLD chegar ao valor teto. O índice de chuvas nestas regiões nesse período foi considerado um dos mais baixos da história em que se tem registro ([INMET, 2015](#)).

A [Tabela 7](#) apresenta as estatísticas descritivas da série histórica do PLD. O valor mínimo verificado foi de R\$4,00/MWh e ocorreu em outubro de 2002 e janeiro, fevereiro e março de 2003. Podemos ver que a média é maior do que a mediana, R\$137,00/MWh e R\$48,35/MWh respectivamente. Esta característica é típica da distribuição lognormal que usualmente é adotada



para séries de commodities e preços de ações em geral.

Tabela 7 – Estatísticas Descritivas do PLD em R\$/MWh

Valor mínimo	1º quartil	Mediana	Média	3º quartil	Valor máximo
4,00	18,59	49,42	142,70	153,50	822,83

Fonte: O autor

A [Figura 9](#) apresenta um histograma da série do PLD. Como a mediana já havia nos mostrado, podemos ver que a maioria dos valores encontram-se no intervalo de até R\$50,00/MWh.

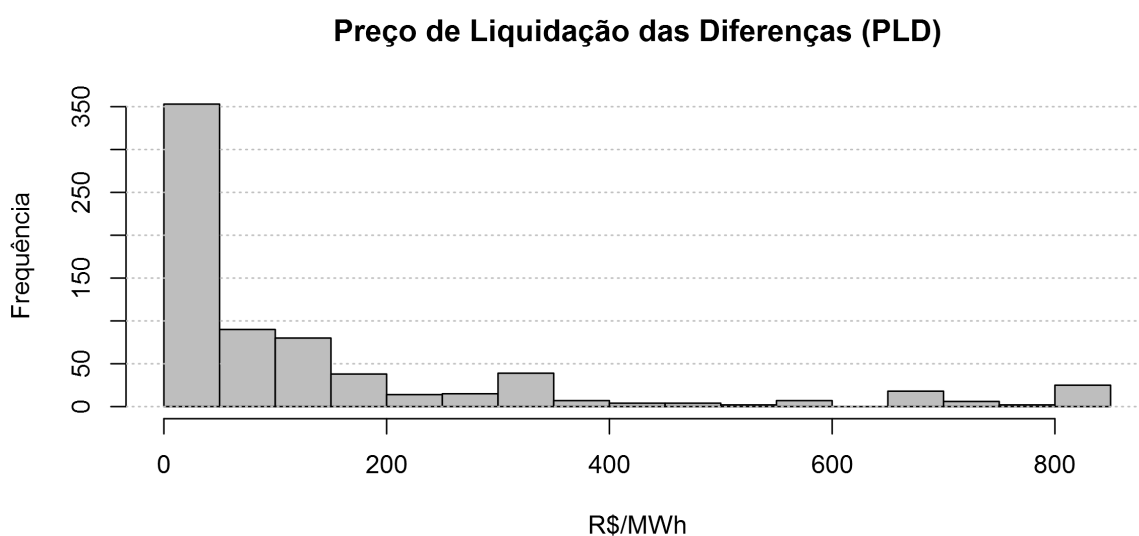


Figura 9 – Histograma da série histórica do PLD (de 2001 a 2014)

Fonte: O autor

Além disso, analisando a série percebemos a alta volatilidade que o PLD possui. O preço *spot* variou de R\$569,69/MWh na segunda semana de janeiro de 2008 para R\$15,47/MWh na segunda semana de maio de 2008. Uma variação negativa de 97,28% em 4 meses. Já na última semana de dezembro de 2011 o preço foi R\$40,76/MWh e na última semana de dezembro de 2012 o preço atingiu R\$349,93/MWh, uma variação de 758,5% em 12 meses.

## 2.6 Discussão do PLD

Como visto na [Figura 8](#) o PLD se manteve em um patamar muito elevado durante quase todo o ano de 2013 e de 2014. Neste período as distribuidoras não estavam cobertas em contrato com 100% das suas demandas, fato ocorrido devido a ineficiência de contratação de energia nos leilões anteriores realizados pelo governo federal. Desta forma, as distribuidoras ficaram expostas ao preço *spot* e eram obrigadas a comprarem energia muito mais cara do que vendiam para os consumidores cativos.

O governo federal tentou amenizar o problema com leilões de energia A-0 <sup>3</sup>, mas os leilões ainda não foram suficientes para cobrirem todo o déficit entre a energia contratada e a demanda das distribuidoras.

Uma outra alternativa para amenizar a situação seria aumentar o preço da tarifa paga pelos consumidores cativos já em 2013, porém, por razões políticas e eleitorais, o governo não quis adotar esta medida, o que faria diminuir o consumo. O governo então postergou o aumento para 2015. Sendo assim, as distribuidoras ficaram por dois anos comprando parte da sua demanda no mercado a vista, pagando o valor do PLD em torno de R\$800,00 MWh e vendendo para os consumidores cativos por cerca de R\$200,00 MWh. Para isso tanto o governo federal quanto os bancos públicos foram obrigados a emprestar bilhões de reais para socorrerem os caixas das distribuidoras. Estes empréstimos serão pagos pelos consumidores com o forte aumento da tarifa já implementado em 2015.

Modelar séries de preços de ações ou commodities não é algo trivial e envolvem muitas incertezas. Geralmente tentamos modelar o comportamento do ativo para fazermos análises, projetar preços futuros e assim valorarmos um projeto ou um investimento. Entretanto, nem sempre o modelo utilizado reflete perfeitamente o que acontece na realidade. Buscamos um modelo que, com algumas limitações e suposições adotadas, possa refletir o mais próximo possível o comportamento da série analisada.

No presente trabalho buscamos projetar preços futuros do PLD para assim nos auxiliar a tomar a melhor decisão sobre o quanto da capacidade produtiva de uma empresa eletrointensiva iremos utilizar no próximo mês. Desta forma, estimar preços futuros do PLD com a melhor precisão possível nos auxiliaria a tomar decisões melhores embasadas.

Destaco ainda que a legislação a cerca do PLD vem mudando nos últimos anos pelo governo brasileiro. Em 2013 houve a introdução de um termo de aversão ao risco (CVAR) no programa Newave. Em 2015 a ANEEL abaixou fortemente o valor máximo que o PLD pode atingir e no curto prazo podem ocorrer mais mudanças. Estes fatos tornam as projeções futuras do PLD a partir de sua série histórica mais incertas. Ainda assim, como estamos tomando decisão para o curto prazo, consideramos que projetar preços futuros do PLD a partir de sua série histórica é um meio útil para nossas análises.

---

<sup>3</sup> Leilões de energia A-0 significa que os vencedores do certame são obrigados a começarem a gerar a energia negociada no leilão imediatamente

## 3 Literatura Relevante - Análise de Investimentos por Opções Reais

### 3.1 Teoria das Opções Reais

Após a publicação do renomado artigo de [Black e Scholes \(1973\)](#) despertou-se um enorme interesse pela área de apreçamento de derivativos financeiros e valoração de ativos reais. Houve, desde então, um vasto número de publicações subsequentes tanto em livros como em periódicos fazendo com que essa área se tornasse um dos ramos de estudo mais explorados em Finanças.

[Black e Scholes \(1973\)](#) e também [Merton \(1973\)](#) trouxeram uma nova forma de valoração de ativos financeiros, usando conceitos de arbitragem e montagem de portfólio livre de risco. Isto tornou menos relevante a discussão da época de qual seria a taxa de desconto ideal ajustada ao risco de um derivativo ([FONSECA, 2008](#)).

[Black \(1976\)](#) estendeu essa teoria para precificação de derivativos para commodities. Na verdade, toda esta teoria de opções trouxe também a ideia de flexibilização gerencial em que os tomadores de decisão não precisavam agir em um único instante de tempo, mas sim exercer ou não um direito de compra ou venda durante um determinado período de tempo ([FONSECA, 2008](#)).

A aplicação de opções reais é relativamente recente, e segundo [Fonseca \(2008\)](#), tem como ponto central a modelagem explícita da possibilidade dos gestores tomarem suas decisões ao longo da vida útil do projeto, isto é, flexibilidade na tomada de decisão.

A teoria ortodoxa de investimento, avaliação de empresas e projetos que consiste em descontar o Fluxo de Caixa Livre projetado a uma taxa mínima de atratividade, é uma metodologia bastante aceita pelos acadêmicos e analistas de avaliação. Entretanto, atualmente são reconhecidas as limitações desta metodologia de Valor Presente Líquido (VPL), principalmente porque ela não consegue avaliar a flexibilidade gerencial presente em diversos projetos ([BASTIAN-PINTO, 2009](#)). Segundo [Dixit e Pindyck \(1994\)](#) os investimentos, na realidade, são menos sensíveis a alterações na taxa de juros e na política fiscal, e muito mais sensíveis a volatilidade e as incertezas no ambiente econômico.

Conforme [Dixit e Pindyck \(1994\)](#) a possibilidade de postergar o investimento pode afetar drasticamente a decisão de investir ou não, fato este não considerado na simples metodologia de VPL. A ideia é que uma firma com uma oportunidade de investir possui uma opção análoga a uma opção de compra financeira <sup>1</sup> e quando a firma decide por realizar o investimento ela exerce (mata) a opção de investir. Esta perda da opção de investir é um custo de oportunidade que tem que ser levado em consideração no custo do investimento. Ou seja, o valor presente líquido deve exceder os custos em um montante maior do que aquele de manter a opção de investir viva.

<sup>1</sup> Opção de compra no mercado financeiro é aquela em que o seu detentor possui o direito, mas não a obrigação, de comprar um ativo pelo preço combinado, em algum tempo no futuro.

Esta abordagem de opções reais se aplica a diversas situações de decisão ótima de investimento. Podemos citar como exemplos, além do momento ótimo de investir ou postergar a decisão de investimento, a opção de expansão de um empreendimento, a entrada no mercado de um produto novo, o desligamento temporário de uma operação e o seu reinício, o abandono permanente do empreendimento e a opção de modificar as características originais do projeto (DIXIT; PINDYCK, 1994).

Em outras palavras, o valor de uma opção real inclui o valor da flexibilidade que um gerente tem para tomar decisões sobre ativos reais em resposta aos novos cenários que se apresentarem. Com a chegada de novas informações, a gerência pode reagir otimamente a elas e adotar decisões que vão influenciar positivamente o valor final do projeto.

Segundo Bastian-Pinto (2009) a avaliação pela Teoria de Opções Reais é a abordagem mais apropriada para quantificar as flexibilidades gerenciais e estratégias embutidas nos projetos corporativos e no valor das empresas. Esta abordagem avalia com maior precisão a capacidade da gestão em adaptar-se a novas informações.

Dixit e Pindyck (1994) ressaltam três características que são essenciais para a aplicação da teoria de Opções Reais a um ativo ou projeto: (i) o investimento deve ser parcialmente ou completamente irreversível, isto é, o investimento inicial é, no mínimo, parcialmente afundado; (ii) a existência de incertezas sobre a recompensa futura do investimento, ou seja, o melhor que podemos é atribuir probabilidades para os possíveis resultados e (iii) deve haver flexibilidade dos gestores para agir em relação a decisão do investimento, desta forma, é possível adiar uma ação para se ter mais informação sobre o futuro ou ainda alterar um caminho futuro do projeto em resposta a resolução das incertezas.

O tempo influencia as decisões de investimento, portanto a técnica de opções reais deve considerar as possíveis flutuações provenientes das incertezas, de forma a fornecer instrumentos de tomada de decisão a cada instante de tempo (FONSECA, 2008).

As incertezas de um projeto são umas das principais fontes de risco e são oriundas das variáveis que compõe este projeto. Estas variáveis podem ser de diferentes tipos como: (i) o preço de uma commodity, (ii) demanda futura, (iii) fatia a ser capturada do mercado, (iv) incerteza tecnológica, entre outras. Estas variáveis possuem o valor futuro incerto e a correta modelagem destas é de fundamental importância para a avaliação das opções reais que porventura existir. Modelar as incertezas de forma incorreta pode levar a resultados enganosos numa avaliação por opções reais, seja superdimensionando ou subestimando o seu real valor (BASTIAN-PINTO, 2009).

## 3.2 Pesquisas Relevantes utilizando Opções Reais

Apresentamos a seguir alguns dos principais trabalhos que abordam a Teoria de Opções Reais e a simulação de preços de commodities.

Tourinho (1979) foi um dos primeiros a discorrer sobre a Teoria de Opções Reais. Seu trabalho aborda o problema de encontrar o valor de uma reserva de um determinado recurso natural uma vez que o preço futuro deste recurso é incerto. O autor utilizou a técnica de Simulação

de Monte Carlo para modelar as incertezas.

[Brennan e Schwartz \(1985\)](#) modelaram o preço futuro do cobre com um único fator estocástico, o preço à vista. E investigaram o instante ótimo de investir em um projeto de desenvolvimento de uma mina de cobre. Os autores utilizam a simulação de Monte Carlo através de um processo de reversão a média e consideram ainda a opção de uma parada temporária, reativação e abandono da mina.

[Paddock, Siegel e Smith \(1988\)](#) desenvolvem uma metodologia para a valoração de uma concessão de petróleo no mar. Os autores utilizam a simulação de Monte Carlo em uma abordagem semelhante a técnica de opções financeiras. Os autores mostram a necessidade de se combinar a precificação de opção com um modelo de equilíbrio para o ativo subjacente.

[Gibson e Schwartz \(1990\)](#) desenvolveram um modelo de dois fatores estocásticos para os preços do petróleo. As variáveis estocásticas seriam o preço à vista e o retorno de conveniência. O processo estocástico do preço à vista é modelado por um Movimento Browniano Geométrico e o retorno de conveniência por um processo de Reversão à Média.

[Kulatilaka \(1993\)](#) analisa o valor da flexibilidade presente em uma caldeira industrial que pode alternar entre o uso de óleo ou gás natural. Os resultados mostram que os ganhos obtidos devido a redução de custos gerado por esta flexibilidade operacional são significativamente maiores do que o investimento em uma caldeira bicombustível.

[Schwartz \(1997\)](#) analisou o comportamento estocástico dos preços das commodities de três modelos distintos. O primeiro modelo considera que o logaritmo do preço à vista segue um processo de reversão à média. O segundo modelo considera dois fatores: o preço à vista seguindo um Movimento Browniano Geométrico, e o retorno de conveniência seguindo um processo de reversão à média. O terceiro modelo acrescenta a taxa de juros como uma variável estocástica seguindo um processo de reversão à média. Os resultados evidenciaram que o modelo de um fator tem um desempenho fraco. Os modelos de dois e três fatores apresentam desempenhos equivalentes e o autor observa que a taxa de juros como um fator estocástico agrega pouca informação.

[Schwartz e Smith \(2000\)](#) implementaram um modelo de dois fatores com dados de contratos futuros de petróleo. As variáveis estocásticas seriam as variações de curto prazo e o preço de equilíbrio. A primeira é modelada por um movimento de Reversão à Média do tipo Ornstein-Uhlenbeck e a segunda é modelada por um movimento Browniano Geométrico. Os resultados mostraram aderência para os dados empíricos no curto e longo prazo.

[Slade \(2001\)](#) valora a flexibilidade gerencial em investimentos relacionados a uma mina de cobre no Canadá. Um modelo de opção real é estimado e solucionado para valores de projeto e de opção. Seu estudo foca em operações flexíveis ressaltando o fato de que suspensões temporárias são mais comuns do que desligamentos permanentes. É utilizado um Movimento de Reversão a Média de um fator estocástico .

[Manoliu e Tompaidis \(2002\)](#) analisaram o comportamento dos preços do gás natural utilizando tanto um fator estocástico quanto o modelo de [Schwartz e Smith \(2000\)](#) de dois fatores. Foi incluída uma função determinística para descrever a sazonalidade. Os resultados mostraram

que o modelo de dois fatores permite melhor ajuste que o modelo de um fator.

Santiago e Bifano (2005) apresentaram uma das primeiras aplicações do modelo de apoio à decisão introduzido por Huchzermeier e Loch (2001) e posteriormente aprimorado por Santiago e Vakili (2005). Santiago e Bifano (2005) consideram uma abordagem de gerenciamento baseada na flexibilidade para desenvolvimento de novos produtos. Os autores utilizam árvores de decisão multidimensionais para avaliar o processo de desenvolvimento de um produto de alta tecnologia. Eles consideram três opções de flexibilidade em cada fase de revisão do projeto: (i) continuar o desenvolvimento do produto, (ii) melhorar o seu desenvolvimento ou, (iii) abandonar o projeto.

Aiube, Baidya e Tito (2006) utilizaram o modelo de Schwartz e Smith (2000) com a inclusão de saltos nas variações de curto prazo para modelar o preço do petróleo. Resultados mostraram que o modelo com saltos explica melhor a estrutura a termo dos preços do petróleo.

Bastian-Pinto, Brandão e Alves (2010) analisaram uma opção real de alternância disponível para proprietários de carros de combustíveis flex (gasolina e etanol) e os resultados mostraram que esta flexibilidade tem um valor significativo.

Dockendorf e Paxson (2013) desenvolveram um modelo de opções reais para valorar a flexibilidade de uma indústria alternar a venda de produtos entre amônia e ureia. Os resultados mostram que apesar da correlação entre os dois produtos há um valor significativo nesta flexibilidade.

### 3.3 Projeções de preços futuros no Setor Elétrico

Na última década, a modelagem de preços de energia elétrica despertou a atenção de vários pesquisadores em todo o mundo. Nos países nórdicos, por exemplo, Lucia e Schwartz (2002) apresentaram um estudo sobre os derivativos de energia elétrica usando dados da bolsa de energia dos países Nórdicos. Fizeram uso dos modelos de um e dois fatores. No modelo de um fator é usado o processo de Ornstein-Uhlenbeck. Para o modelo de dois fatores são usados os modelos de reversão à média e o Movimento Browniano Geométrico. É utilizada ainda uma componente sazonal. Os resultados mostraram que os parâmetros de sazonalidade são significantes componentes dos preços de energia elétrica na região de onde foi extraída a amostra. Posteriormente Weron, Bierbrauer e Trück (2004) compararam o modelo Jump Diffusion com o Regime Switching para modelar o preço *spot* de eletricidade dos países Nórdicos e discutem os pontos positivos e negativos de cada um deles. Mais tarde Rypdal e Løvsletten (2013) discutem modelos estocásticos para a volatilidade e anti correlações no mercado Nórdico de eletricidade, abordando dois modelos diferentes de reversão à média.

Norouzzadeh, Dullaert e Rahmani (2007) investigaram correlação, persistência, propriedades multifractais e comportamento de escala nos preços *spot* horários da Bolsa de energia elétrica da Espanha. Worthington, Kay-Spratley e Higgs (2005) examinam os preços de eletricidade no Mercado de Energia Elétrica Australiano e os resultados indicam que os preços são estacionários. Joskow e Kahn (2001) analisam empiricamente se os preços e o comportamento observado no mercado de eletricidade da Califórnia são consistentes com o que seria esperado em um mercado competitivo. Cartea e Figueroa (2005) apresentam, baseados em dados históricos da Inglaterra

e do País de Gales, um modelo de reversão à média com jumps para o preço *spot* de energia elétrica nestes países.

Escribano, Rivera e Villaplana (2002) analisam a evolução dos preços da eletricidade em vários países. Eles apresentam um modelo geral que leva em conta, simultaneamente, a possibilidade de: sazonalidade, reversão à média, saltos e heterocedasticidade. O modelo é aplicado a Argentina, Austrália, Nova Zelândia, países Nórdicos, Espanha e Estados Unidos. Longstaff e Wang (2004) realizaram uma análise empírica dos preços a termo no mercado de energia elétrica americano denominado Mercado Interligado Pensilvânia-Nova Jersey-Marilândia (PJM Interconnection)<sup>2</sup>. Os resultados apoiam a hipótese de que os preços futuros da energia elétrica são determinados racionalmente pelos agentes econômicos avessos ao risco. Efimova e Serletis (2014) investigaram a volatilidade nos preços da energia elétrica dos Estados Unidos utilizando modelos GARCH e base de dados diários.

No Brasil também não foi diferente, tivemos diversos trabalhos, tanto dissertações e teses quanto publicações, feitas sobre o comportamento e projeções futura do preço *spot* de energia elétrica brasileiro. Medeiros (2004) utiliza um sistema neuro-fuzzy para descrever o comportamento deste preço e prever preços futuros. Rodrigues (2007) analisa o comportamento do preço de energia elétrica brasileiro através de uma análise econométrica. Ele analisa os movimentos estocásticos e sugere que um modelo de reversão a média com saltos poderia ser um bom modelo para tentar prever o comportamento futuro deste preço *spot*. Velásquez, Dyner e Souza (2008) utilizam um modelo de rede neural auto-regressivo para descrever o comportamento do preço *spot* de eletricidade no Brasil. A especificação do modelo final demonstra que o preço para o próximo mês é uma função não-linear do preço atual, da energia afluyente atual e da energia armazenada nos reservatórios equivalentes no mês corrente e dois meses atrás.

### 3.4 Opção de Alternância (Switch Option)

Em trabalhos mais relacionados com o nosso, Byko (2002) analisa a opção de indústrias de alumínio alternarem a produção de alumínio com a venda de energia elétrica. O autor ressalta que isto aconteceu nos EUA durante períodos de escassez de eletricidade e baixa demanda por alumínio.

Das et al. (2004) analisa o potencial de economia de energia na indústria de alumínio devido a flexibilidade que pode ser alcançada alternando os insumos de produção por materiais reciclados.

Bastian-Pinto, Brandão e Hahn (2009) analisa a flexibilidade existente na produção de biocombustíveis no Brasil. O trabalho busca estudar o comportamento dos preços de açúcar e etanol, projetar preços futuros e analisar a viabilidade de mesclar, em uma mesma usina, a produção de açúcar com a produção de etanol. É utilizado dois modelos de árvore bi-variável recombinante e os resultados mostram que o Movimento Browniano Geométrico tende a, quando

<sup>2</sup> A interligação PJM é uma organização de transmissão regional, que coordena o movimento da eletricidade no atacado em 13 países: Delaware, Illinois, Indiana, Kentucky, Marilândia, Michigan, Nova Jersey, Carolina do Norte, Ohio, Pensilvânia, Tennessee, Virgínia, Virgínia ocidental, além do Distrito de Columbia.



modelados preços de commodities, superestimar o valor de uma opção real se comparado com o Movimento de Reversão a Média.

[Ozorio et al. \(2013\)](#) utiliza também a abordagem de opções reais para valorar a flexibilidade de um desligamento parcial e temporário em usinas siderúrgicas semi-integradas.

[Brandão, Penedo e Bastian-Pinto \(2013\)](#) utilizam a abordagem de opções reais para determinar o valor da flexibilidade gerencial incorporado em uma usina de biodiesel que tem a opção de alternar os insumos entre dois tipos de grãos diferentes. Os resultados mostram que a opção de poder escolher entre dois insumos diferentes tem um valor expressivo.

[Varympopiotis, Tolis e Rentizelas \(2014\)](#) analisam a flexibilidade de uma usina termoeletrica na Grécia alternar entre diferentes combustíveis de entrada dependendo das condições do mercado. Os resultados indicam que a possibilidade de alternar os combustíveis de entrada geram benefícios financeiros significativos na maioria dos cenários simulados.

[Oliveira et al. \(2014\)](#) analisam a viabilidade da instalação de uma unidade de cogeração em uma planta industrial de madeira no Brasil. A ideia é extrair valor dos resíduos da biomassa atualmente descartados, os quais podem ser usados para geração de energia elétrica. Esta geração extra de energia elétrica traria a empresa a flexibilidade de escolher entre aumentar sua produção ou vender este excesso no mercado de energia elétrica de curto prazo. Os resultados indicam que o investimento na planta de cogeração se justifica e que a opção de alternar entre o consumo e a venda da energia elétrica agrega valor significativo para o projeto.

[Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#) utilizam a abordagem de opções reais para valorar uma opção de alternância em uma usina de Alumínio. Os autores consideram a opção da indústria suspender suas atividades e vender a energia elétrica não consumida para o *grid*. Os autores utilizam o modelo I de Reversão a Média de [Schwartz \(1997\)](#) para valorar esta opção. Os resultados indicam que esta flexibilidade adiciona um valor significativo para a empresa.

No presente trabalho, em alternativa aos modelos de reversão a média já utilizados por [Oliveira et al. \(2014\)](#) e [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#), contribuímos com a utilização de modelos de regressão linear para a projeção de preços futuros do PLD e comparamos sua aderência com modelos de reversão a média.

Outra contribuição deste trabalho é a incorporação de uma componente de sazonalidade ao modelo de reversão a média utilizados por [Oliveira et al. \(2014\)](#) e [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#) para projetarmos o preço da energia elétrica.

Outra novidade é que consideramos o preço da energia elétrica como acontece na prática: um novo preço é gerado a cada semana, em alternativa ao modelo proposto por [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#) em que consideram o preço constante por 6 meses. A proposta do trabalho é considerar os estágios de decisão em nível mensal, isto é, no início de cada mês decidimos qual será a estratégia de produção da empresa para aquele determinado mês e não 6 meses como consideram [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#). Além disto, tomamos a decisão com base no valor esperado do PLD para o próximo mês, em oposto ao que fazem [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#) onde toma-se a decisão depois que o valor do PLD é conhecido.



## 4 Técnicas para valorar investimentos e para projetar preços

Neste capítulo mostramos a técnica de Simulação de Monte Carlo utilizada através de processos estocásticos para valorar projetos utilizando opções reais.

### 4.1 Simulação de Monte Carlo e Processos Estocásticos

#### 4.1.1 Simulação de Monte Carlo

Segundo [Pegden, Sadowski e Shannon \(1995\)](#) a simulação busca replicar um sistema real por meio de um modelo computacional. Ao efetuar experimentos com este modelo é possível entender seu comportamento, bem como avaliar estratégias para sua operação. Desta forma, podemos entender a simulação como um processo que engloba não apenas a construção do modelo, mas todo o método experimental que se segue, usando o modelo para prever o comportamento futuro.

A Simulação de Monte Carlo consiste em um método numérico computacional baseado na amostragem probabilística repetida das variáveis de entrada que gera repetidos resultados, os quais podem ser representados por distribuições de probabilidades ([FONSECA, 2008](#)). Após várias simulações pode-se calcular o valor esperado, a variância e outros momentos probabilísticos.

Conforme [Fishman \(1996\)](#), a simulação de Monte Carlo é baseada na geração de um número finito de amostras de um processo. São criados vetores de variáveis aleatórias a partir de funções de densidade determinadas. Posteriormente, realiza-se um número elevado de simulações onde são calculadas as respectivas respostas do processo. Ao final, faz-se um resumo estatístico, onde são avaliadas as frequências, médias e variâncias das respostas. Os números aleatórios são gerados a partir de uma variável aleatória uniforme  $[0,1]$  e devem respeitar, segundo ([GLASSERMAN, 2004](#)), duas propriedades:

(i) uniformidade, de forma que todos os números no intervalo  $[0,1]$  devem ter a mesma probabilidade de ocorrer;

(ii) independência, de forma que o valor atual de um número aleatório não tem relação com o número anterior.

Esta técnica possui como vantagem o fato de ser simples e absolutamente geral e como desvantagem o elevado tempo computacional, isso porque é preciso um número exagerado de simulações para se obter um resultado com boa precisão. Isso pode tornar o método muitas vezes inviável para problemas muito complexos em que o tempo computacional é muito superior ao prazo em que as decisões precisam ser tomadas ([GLASSERMAN, 2004](#)).

A Simulação de Monte Carlo pode ser usada em opções reais para descrever o comportamento de variáveis estocásticas ao longo do tempo e assim permite a construção de modelos que

não podem ser captados de forma analítica.

A cada instante de tempo, é gerado um número aleatório, que é utilizado na equação do processo, gerando o valor simulado da variável estocástica. Desta forma, a cada rodada de simulação é gerada uma possível trajetória para o valor do projeto (investimento). Este processo é repetido milhares de vezes e ao final é obtido o valor esperado do projeto bem como o valor da opção na data de maturidade (TRIGEORGIS, 1996)

A Simulação de Monte Carlo é geralmente utilizada através de algum processo estocástico que pode ser o Movimento Browniano Geométrico ou um Movimento de Reversão a Média. Isto depende do tipo de ativo que se deseja simular. A seguir apresentamos estes processos.

#### 4.1.2 Processo de Wiener

O processo de Wiener é um importante processo estocástico utilizado na literatura financeira. Ele é um tipo particular do processo estocástico de Markov em que a média do incremento é zero e a variância é proporcional ao tempo  $t$ . Este foi usado primeiramente em Física para descrever o movimento de partículas que estão sujeitas a um grande número de choques moleculares e algumas vezes é chamado de movimento browniano (HULL, 2006).

Segundo Hull (2006) uma variável segue um processo de Wiener se ela satisfaz as duas propriedades a seguir:

- (i) O incremento  $\delta z$  em um curto intervalo de tempo  $\delta t$  é:

$$\delta z = \epsilon \sqrt{\delta t} \quad (4.1)$$

onde  $\epsilon$  é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal padrão  $\phi(0,1)$ ;

- (ii) Os valores de  $\delta z$  são independentes para quaisquer dois diferentes intervalos de tempo  $\delta t$ .

Como consequência da primeira propriedade temos que  $\delta z$  segue uma distribuição normal com média 0, desvio padrão  $\sqrt{\delta t}$  e variância  $\delta t$ . Ou seja,  $E[\delta z] = 0$ ,  $\sigma_{\delta t} = \sqrt{\delta t}$  e  $\sigma_{\delta t}^2 = \delta t$ .

A segunda propriedade implica que  $z$  segue um processo de Markov. Podemos considerar um incremento em  $z$  durante um intervalo relativamente grande  $T$  como a soma de  $N$  incrementos em pequenos intervalos de tempo  $\delta t$ , onde:

$$N = \frac{T}{\delta t} \quad (4.2)$$

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \sqrt{\delta t} \quad (4.3)$$

onde  $\epsilon_i = \phi(0,1)$ . Como os valores de  $\delta z$  são independentes (2ª propriedade do processo de Wiener) podemos somar as variâncias. Isto é, se  $A, B$  e  $C$  são independentes temos que  $var(a + b + c) = var(a) + var(b) + var(c)$ , portanto temos que:

$$E[z(T) - z(0)] = 0$$

$$\begin{aligned}\sigma_{z(T)-z(0)}^2 &= N\delta t = T \\ \sigma_{z(T)-z(0)} &= \sqrt{T}\end{aligned}$$

Isto é  $z(T) - z(0) = \phi(0, T)$ .

### 4.1.3 Movimento Browniano Aritmético

Adicionando uma tendência (drift) de crescimento ( $\mu$ ) ao Processo de Wiener obtém-se o Movimento Browniano Aritmético, que de acordo com [Glasserman \(2004\)](#) tem a seguinte representação matemática:

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (4.4)$$

onde  $dW$  é um processo de Wiener. Isto é:

$$dX(t) = \mu dt + \sigma Z(t)\sqrt{\delta t} \quad (4.5)$$

onde  $Z(t) = \phi(0, 1)$ . Sendo assim,  $X(t) = \phi(\mu t, \sigma^2 t)$ . Portanto  $dX(t)$  tem uma distribuição normal com média  $\mu t$  e desvio padrão  $\sigma\sqrt{t}$ .

Para construirmos caminhos aleatórios segundo um movimento browniano aritmético podemos utilizar a equação em tempo discreto deste, que é dada por [Glasserman \(2004\)](#):

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1} \quad (4.6)$$

### 4.1.4 Movimento Browniano Geométrico

Segundo [Glasserman \(2004\)](#) o Movimento Browniano Geométrico é o modelo mais utilizado para valorar ativos financeiros. Um processo estocástico  $S(t)$  é denominado um Movimento Browniano Geométrico se  $\log S(t)$  é um Movimento Browniano Aritmético ([GLASSERMAN, 2004](#)). Isto é, o Movimento Browniano Geométrico é simplesmente a exponencial do Movimento Browniano Aritmético. Enquanto o Movimento Browniano Aritmético pode assumir, eventualmente, valores negativos, o que é uma limitação para preços em geral, o Movimento Browniano Geométrico possui sempre valores positivos.

O Movimento Browniano Geométrico assume que o incremento  $dS(t)$  é dependente da variável  $S(t)$ . Conforme [Glasserman \(2004\)](#) a equação diferencial deste movimento pode ser expressa como:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (4.7)$$

o que sugere uma taxa de retorno instantânea ([GLASSERMAN, 2004](#)). Segundo [Hull \(2006\)](#) a [Equação 4.7](#) é a mais usada no mercado financeiro para modelar o comportamento dos preços de ativos, porque os investidores estão interessados no retorno do preço da ação, e o retorno esperado pelos investidores é independente do preço da ação ([HULL, 2006](#)). Da mesma forma a

incerteza sobre o preço da ação é a mesma independente do seu valor. Sendo assim  $\mu$  seria o retorno esperado da ação e  $\sigma$  a volatilidade do preço da ação.

Utilizando o Lema de Itô, que será detalhado na próxima seção, obtemos a equação em tempo discreto de  $S$  que segundo [Glasserman \(2004\)](#) é descrita como:

$$S(t) = S(0) \exp\left([\mu - \frac{1}{2}\sigma^2]t + \sigma dW(t)\right) \quad (4.8)$$

onde  $dW(t)$  é um processo de Wiener.

Se quisermos simular valores entre dois passos de tempo  $t_i$  e  $t_{i+1}$  podemos utilizar a equação:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp\left([\mu - \frac{1}{2}\sigma^2](t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{(t_{i+1} - t_i)}Z_{i+1}\right) \quad (4.9)$$

onde  $Z_{i+1}(t) = \phi(0,1)$ .

A média e a variancia do Movimento Browniano Geométrico são conhecidas analiticamente e dada por ([GLASSERMAN, 2004](#)) como:

$$E[S(t)] = S(0)e^{\mu t} \quad (4.10)$$

$$Var[S(t)] = S^2(0)e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1) \quad (4.11)$$

#### 4.1.5 Lema de Itô

O processo de Itô é uma generalização do Movimento Browniano Aritmético ([HULL, 2006](#)), no qual os parâmetros da equação  $a$  e  $b$  são agora funções do valor da variável  $X$  e do tempo  $t$ . O processo de Itô é:

$$dX = a(X,t)dt + b(X,t)dW \quad (4.12)$$

onde  $dW(t)$  é um processo de Wiener. Tanto a tendência (drift) esperada ( $a$ ) quanto a variância ( $b$ ) são agora passíveis de mudar ao longo do tempo.

O processo de Itô é contínuo no tempo, mas não é diferenciável ([DIXIT; PINDYCK, 1994](#)). Assim, para diferenciar e integrar funções do processo de Itô é necessário utilizar o lema de Itô ([ITÔ; NISIO, 1943](#)) que pode ser compreendido como uma expansão em série de Taylor ([HULL, 2006](#)). Uma expansão de série de Taylor de  $\delta Y$  pode ser escrita como:

$$\delta Y = \frac{dY}{dX}\delta X + \frac{1}{2!}\frac{d^2Y}{dX^2}\delta X^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3Y}{dX^3}\delta X^3 \dots \quad (4.13)$$

No limite quando  $\delta X$  tende a zero, os termos de ordem  $\delta X^2$  e superiores podem ser ignorados e a [Equação 4.13](#) se torna:

$$\delta Y = \frac{dY}{dX}\delta X \quad (4.14)$$

No caso de uma função  $Y$  diferenciável em duas variáveis  $X$  e  $t$  temos:

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial X} \delta X + \frac{\partial Y}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \delta X^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \delta t^2 + \frac{\partial^2 Y}{\partial X \partial t} \delta X \delta t \dots \quad (4.15)$$

No limite quando  $\delta X$  e  $\delta t$  tende a zero, os termos de ordem  $\delta X^2$ ,  $\delta t^2$  e superiores podem ser ignorados e a [Equação 4.15](#) se torna:

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial X} \delta X + \frac{\partial Y}{\partial t} \delta t \quad (4.16)$$

Agora vamos supor que a variável  $X$  segue um processo de Itô como na [Equação 4.12](#).

$$\delta X = a(X,t)\delta t + b(X,t)\delta W \quad (4.17)$$

Ou se retirarmos os argumentos e fizermos  $\delta W = Z\sqrt{\delta t}$  temos:

$$\delta X = a\delta t + bZ\sqrt{\delta t} \quad (4.18)$$

E se elevarmos os dois lados ao quadrado temos:

$$\delta X^2 = a^2\delta t^2 + 2abZ\delta t\sqrt{\delta t} + b^2Z^2\delta t$$

Os dois primeiros termos podem ser eliminados quando  $\delta t$  tende a zero, pois são termos de ordem  $\delta t^2$  e  $\delta t^{3/2}$ . Portanto temos:

$$\delta X^2 = b^2Z^2\delta t \quad (4.19)$$

A variável  $Z$  é uma normal padrão. Isto é, média zero e desvio padrão 1. Portanto temos que o segundo momento é igual a 1. Isto é:

$$Var(Z) = 1$$

Ou seja:

$$E[Z^2] - (E[Z])^2 = 1$$

Como:

$$E[Z] = 0$$

Temos que:

$$E[Z^2] = 1$$

Portanto:

$$E[Z^2\delta t] = \delta t$$

Como a  $Var[Z^2\delta t]$  é da ordem  $\delta t^2$ , podemos dizer que  $Var[Z^2\delta t]$  tende a zero quando  $\delta t$  tende a zero. Portanto, podemos tratar o termo  $Z^2\delta t$  como não estocástico ([HULL, 2006](#)) e portanto a [Equação 4.19](#) se reduz a:

$$\delta X^2 = b^2\delta t \quad (4.20)$$

Assim concluímos que o termo  $\delta X^2$  envolve termo de ordem  $\delta t$  e por isso não pode ser ignorado quando  $\delta X$  e  $\delta t$  tendem a zero. Por causa disso, no processo de Itô a [Equação 4.15](#) não se reduz a [Equação 4.16](#). Na verdade a [Equação 4.15](#) se reduz a [Equação 4.21](#):

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial X} \delta X + \frac{\partial Y}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \delta X^2 \quad (4.21)$$

Substituindo a [Equação 4.20](#) na [Equação 4.21](#) temos:

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial X} \delta X + \frac{\partial Y}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} b^2 \delta t \quad (4.22)$$

A [Equação 4.22](#) é conhecida como Lema de Itô (HULL, 2006). Se substituirmos a [Equação 4.18](#) na [Equação 4.22](#) temos:

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial X} (a\delta t + bZ\sqrt{\delta t}) + \frac{\partial Y}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} b^2 \delta t$$

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial X} (a\delta t) + \frac{\partial Y}{\partial X} bZ\sqrt{\delta t} + \frac{\partial Y}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} b^2 \delta t$$

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial X} (a\delta t) + \frac{\partial Y}{\partial X} b dW + \frac{\partial Y}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} b^2 \delta t$$

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial X} (a\delta t) + \frac{\partial Y}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} b^2 \delta t + \frac{\partial Y}{\partial X} b dW$$

$$\delta Y = \left( \frac{\partial Y}{\partial X} a + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} b^2 \right) \delta t + \frac{\partial Y}{\partial X} b dW$$

Se fizermos  $\delta t$  tender a zero temos a equação diferencial:

$$dY = \left( \frac{\partial Y}{\partial X} a + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial Y}{\partial X} b dW \quad (4.23)$$

Agora vamos supor que a variável  $S$  segue um caminho estocástico segundo um Movimento Browniano Geométrico como descrito na [Equação 4.7](#). Portanto  $a = \mu S$  e  $b = \sigma S$ . Dessa forma a [Equação 4.23](#) se torna:

$$dY = \left( \frac{\partial Y}{\partial S} \mu S + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial Y}{\partial S} \sigma S dW \quad (4.24)$$

#### 4.1.6 Distribuição Lognormal

Em probabilidade e estatística, uma variável aleatória  $S$  tem uma distribuição lognormal quando o seu logaritmo,  $G = \ln(S)$ , tem a distribuição normal. Vamos supor uma variável  $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$ . Sua distribuição é dada, segundo Glasserman (2004), por:

$$P(Y \leq y) = P(Z \leq [\ln(y) - \mu]/\sigma)$$

$$P(Y \leq y) = \phi\left(\frac{[\ln(y) - \mu]}{\sigma}\right) \quad (4.25)$$

e a densidade é:

$$\frac{1}{y\sigma} \phi\left(\frac{[\ln(y) - \mu]}{\sigma}\right) \quad (4.26)$$

A esperança, a variância e a mediana de uma distribuição Lognormal são conhecidas e dada por [Glasserman \(2004\)](#):

$$E[Y] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \quad (4.27)$$

$$Var[Y] = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (4.28)$$

$$Mediana[Y] = e^{\mu} \quad (4.29)$$

A média de  $Y$  é portanto sempre maior do que a mediana (a menos que a variância seja zero), o que reflete a inclinação positiva da distribuição lognormal (cauda a direita mais pesada).

[Hull \(2006\)](#) afirma que assumir uma distribuição normal para os preços das ações e das commodities não é adequado, pois variáveis com distribuição normal podem assumir valores positivos e negativos. Os preços das ações e das commodities nunca podem ser negativos, por isso, usualmente na literatura, a distribuição lognormal é a mais adequada para descrever estes preços, pois esta distribuição assume apenas valores positivos ([HULL, 2006](#)).

Vamos supor então que o preço da ação  $S$  segue uma distribuição lognormal. Portanto  $Y = \ln S$  segue uma distribuição normal. Conforme dito anteriormente, o Movimento Browniano Geométrico ([Equação 4.7](#)) é o movimento mais utilizado para descrever o comportamento dos preços de ações. Ou seja, estamos considerando que  $S$  segue um Movimento Browniano Geométrico e possui distribuição lognormal. Resumindo, temos:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

Do Lema de Itô ([Equação 4.23](#)) temos que:

$$dY = \left( \frac{\partial Y}{\partial S} a + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial Y}{\partial S} b dW$$

Como:

$$a = \mu S(t)$$

e

$$b = \sigma S(t)$$

Temos que:

$$dY = \left( \frac{\partial Y}{\partial S} \mu S(t) + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} \sigma^2 S(t)^2 \right) dt + \frac{\partial Y}{\partial S} \sigma S(t) dW$$

Fazendo

$$Y = \ln S$$

temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial S} &= \frac{1}{S}, \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} &= -\frac{1}{S^2}, \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

Ou seja:

$$dY = \left( \frac{1}{S} \mu S(t) + 0 + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S^2} \sigma^2 S(t)^2 \right) \right) dt + \frac{1}{S} \sigma S(t) dW$$

$$dY = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW \quad (4.30)$$

Portanto a variável  $Y$  segue um Movimento Browniano Aritmético conforme [Equação 4.4](#). Ou seja, a variável  $Y$  segue uma distribuição normal com média  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$  e desvio padrão  $\sigma\sqrt{t}$ , isto é:

$$Y \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right]$$

Se substituirmos  $dY = \ln(S_{t+\delta}) - \ln(S_t)$  na [Equação 4.30](#) temos:

$$\ln(S_{t+\delta}) - \ln(S_t) = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (\delta) + \sigma dW \quad (4.31)$$

Ou:

$$\ln\left(\frac{S_{t+\delta}}{S_t}\right) = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (\delta) + \sigma dW \quad (4.32)$$

Isto é:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma dW \quad (4.33)$$

Ou seja:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \phi\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right] \quad (4.34)$$

A partir da [Equação 4.34](#) concluímos que os incrementos no logaritmo de  $S$  seguem uma distribuição normal com média  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$  e desvio padrão  $\sigma\sqrt{t}$ .

Se elevarmos os dois lados da [Equação 4.33](#) a potência  $e$  chegamos na [Equação 4.8](#) que é a equação do Movimento Browniano Geométrico em tempo discreto utilizada para simularmos o preço  $S$  de uma ação:

$$\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma dW\right]$$

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma dW\right] \quad (4.35)$$



## 4.1.7 Equação de Black e Scholes

Black e Scholes (1973) desenvolveram uma equação diferencial estocástica que serve como base para o apreamento de derivativos financeiros que dependem de ações que não pagam dividendos.

Para chegarmos na equação diferencial de Black e Scholes (BLACK; SCHOLES, 1973) precisamos, conforme Hull (2006) de algumas suposições:

(i) O preço da ação  $S$  segue um Movimento Browniano Geométrico conforme descrito na Equação 4.7 com  $\mu$  e  $\sigma$  constantes;

(ii) É permitido a venda a descoberto, isto é, vender um derivativo ou um ativo financeiro sem possuí-lo;

(iii) Não há impostos nem custos de transações na compra ou venda de ativos ou derivativos;

(iv) Não há pagamento de dividendos durante o tempo de maturação do derivativo;

(v) Não existem oportunidades de arbitragem;

(vi) A taxa de juros livre de risco,  $r$ , é constante e conhecida ao longo do tempo.

A ideia de Black e Scholes (1973) foi construir um portfólio,  $P$ , livre de risco da seguinte forma:

(I) Vender uma unidade de  $f$ ;

(II) Comprar  $\frac{\partial f}{\partial S}$  ações de  $S$ .

Portanto:

$$P = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

Vamos supor que  $f$  seja o preço de uma opção de compra europeia do ativo  $S$ . A variável  $f$  é portanto uma função de  $S$  e  $t$ . Do Lema de Itô (Equação 4.24), temos que:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW \quad (4.36)$$

A mudança  $\delta P$  no valor do portfólio em um curto intervalo de tempo é:

$$\delta P = -\delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \delta S \quad (4.37)$$

Substituindo a Equação 4.36 na Equação 4.37 temos:

$$\begin{aligned} \delta P &= - \left( \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW \right) + \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S \delta t + \sigma S dW) \\ \delta P &= \left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \delta t \end{aligned} \quad (4.38)$$

Podemos ver que a [Equação 4.38](#) não envolve o termo  $dW$ , portanto o portfólio  $P$  é livre de risco no intervalo  $\delta t$ . Da suposição (v) feita acima (não existem oportunidades de arbitragem) concluímos que a taxa de retorno do portfólio deve ser igual a taxa livre de risco,  $r$ . Se isso não fosse verdade, poderíamos tomar dinheiro emprestado a uma taxa  $r$  e investir no portfólio  $P$  e obter um retorno maior do que  $r$  o que configuraria arbitragem. Portanto temos que:

$$\delta P = rP\delta t \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \delta t &= rP\delta t \\ \left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \delta t &= r \left( -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \delta t \\ \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) &= r \left( f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 &= rf \end{aligned} \quad (4.40)$$

A [Equação 4.40](#) é a equação diferencial parcial de Black e Scholes. Ela tem várias soluções de acordo com o tipo de derivativo que se quer precificar em relação ao ativo  $S$  ([HULL, 2006](#)). Por exemplo, se quisermos saber qual o valor de uma opção de compra europeia com prazo de maturidade  $T$  e preço de exercício (*strike price*)  $K$ , a fórmula é conhecida e dada por [Glasserman \(2004\)](#):

$$BS(S, \sigma, T, r, K) = S\Phi\left(\frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-rt}K\Phi\left(\frac{\ln(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad (4.41)$$

#### 4.1.8 Modelos de Reversão a Média

Segundo [Eydeland e Wolyniec \(2003\)](#) o Movimento Browniano Geométrico não é muito adequado para descrever a evolução dos preços de commodities e em especial preços de energia elétrica. Por isso adequações a esse movimento tem sido proposta com o objetivo de tornar mais realista o comportamento desses preços.

[DIAS \(2005\)](#) argumenta ser mais realista considerar um Modelo de Reversão à Média (MRM) para os preços de commodities ao invés de modelos de caminhos aleatórios como o Movimento Browniano Geométrico (MBG). Isto devido à lógica econômica de balanço entre oferta e demanda. A intuição por trás do MRM vem da microeconomia, isto é, se o preço da commodity estiver distante (acima ou abaixo) de um certo preço de equilíbrio de longo prazo  $\bar{S}$ , forças de mercado agirão para puxar os preços de volta para o nível de equilíbrio  $\bar{S}$  ([DIAS, 2005](#)). Do lado da oferta, as forças de mercado irão agir para aumentar a produção e o investimento no setor se  $S > \bar{S}$  ou irão reduzir se  $S < \bar{S}$ . Já a demanda tende a cair em caso de uma elevação nos preços e tende a aumentar caso ocorra uma queda.

Serão discutidos e apresentados dois modelos de reversão à média de um único fator estocástico: (i) o Movimentos de Reversão à Média Aritmético O-U, e (ii) o Movimento de Reversão a Média Geométrico de [Schwartz \(1997\)](#), conhecido na literatura como modelo I (ou modelo de um fator estocástico) de [Schwartz \(1997\)](#).

#### 4.1.8.1 Modelo de Reversão à média de Ornstein-Uhlenbeck (O-U)

A forma mais simples do Movimento de Reversão à Média (MRM) é o processo de apenas um fator estocástico conhecido por processo de Ornstein-Uhlenbeck (O-U), também chamado de Movimento de Reversão à Média Aritmético, e definido pela equação:

$$dS = \eta(\bar{S} - S)dt + \sigma dz \quad (4.42)$$

em que  $S$  é a variável estocástica,  $\bar{S}$  é a média de longo prazo da variável estocástica (nível de equilíbrio de longo prazo),  $\eta$  é a velocidade de reversão, ou a medida de intensidade com a qual os choques estocásticos são dissipados,  $\sigma$  é a volatilidade do processo e  $dz$  é o processo padrão de Wiener, dado pela [Equação 4.1](#)

[Dixit e Pindyck \(1994\)](#) atesta que as expressões da Média e da Variância de um processo estocástico são importantes para efeito de seu uso em avaliação de projetos com opções reais, e elas traduzem o comportamento da variável, por uma ótica financeira, do Retorno Esperado (Média) e do Risco (Variância).

O processo de Ornstein-Uhlenbeck definido na [Equação 4.42](#) tem o valor esperado e a variância conhecidos e dados por [Dixit e Pindyck \(1994\)](#):

$$E[S_t] = \bar{S} + (S_0 - \bar{S})e^{-\eta t} \quad (4.43)$$

Ou:

$$E[S_t] = S_0 e^{-\eta t} + \bar{S}(1 - e^{-\eta t}) \quad (4.44)$$

E

$$Var(S_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t}) \quad (4.45)$$

Para podermos simular o processo em questão, precisamos da equação tempo discreto deste. Esta é obtida somando a parcela determinística da média ([Equação 4.44](#)) com um erro aleatório normal de média 0 e variância igual a equação [Equação 4.45](#):

$$S_t = S_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \bar{S}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}N(0,1) \quad (4.46)$$

Podemos proceder assim, pois  $S_t$  possui distribuição normal. Essa discretização é exata e independe do tamanho de  $\Delta t$  ([KLOEDEN; PLATEN, 1992](#)).

Para determinar os valores dos parâmetros para o MRM Aritmético (O-U), escrevemos esse processo a partir da [Equação 4.44](#) em termos de  $\Delta t$ :

$$S_t = S_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \bar{S}(1 - e^{-\eta\Delta t}) \quad (4.47)$$

Subtraindo-se  $S_{t-1}$  de ambos os lados temos:

$$S_t - S_{t-1} = S_{t-1}(e^{-\eta\Delta t} - 1) + \bar{S}(1 - e^{-\eta\Delta t}) \quad (4.48)$$

E fazendo  $a = \bar{S}(1 - e^{-\eta\Delta t})$  e  $(b - 1) = (e^{-\eta\Delta t} - 1)$  temos:

$$S_t - S_{t-1} = a + (b - 1)S_{t-1} \quad (4.49)$$

Então podemos estimar os parâmetros do processo em questão fazendo uma regressão linear sobre a série de  $S_t$ . A partir dos coeficientes estimados pela regressão linear podemos calcular os parâmetros necessários para simular a [Equação 4.46](#):

$$\begin{aligned} (b - 1) &= (e^{-\eta\Delta t} - 1) \\ b &= e^{-\eta\Delta t} \\ \eta &= -\frac{\ln b}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} a &= \bar{S}(1 - e^{-\eta\Delta t}) \\ \bar{S} &= -\frac{a}{(b - 1)} \end{aligned} \quad (4.51)$$

O parâmetro da volatilidade  $\sigma$  pode ser determinado a partir da variância  $\sigma_e^2$  dos erros da regressão:

$$\sigma_e^2 = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta\Delta t}) \quad (4.52)$$

Substituindo  $b^2 = e^{-\eta^2\Delta t}$  e  $\eta = -\frac{\ln b}{\Delta t}$ , temos:

$$\sigma_e^2 = -\frac{\sigma^2\Delta t}{2\ln b}(1 - b^2)$$

E então:

$$\sigma = \sigma_e \sqrt{\frac{2\ln b}{(b^2 - 1)\Delta t}} \quad (4.53)$$

#### 4.1.8.2 Modelo I de Reversão à média de Schwartz

Uma limitação envolvendo o Movimento de Reversão à Média Aritmético (O-U), ou mesmo outros processos aritméticos como o Movimento Browniano Aritmético, é que estes podem produzir valores negativos para  $S_t$ , o que é um problema para preços em geral ([EYDELAND; WOLYNIEC, 2003](#)).

Como alternativa a esta limitação foram propostos os Movimentos de Reversão a Média Geométrico. Estes são inúmeros na literatura como o modelo de Dixit & Pindyck ([DIXIT; PINDYCK, 1994](#)) e ([DIAS, 2005](#)). Nestes modelos o incremento  $dS$  passa a ser proporcional ao nível da variável em si,  $S$ , semelhante ao que acontece no Movimento Browniano Geométrico.

Neste trabalho daremos um enfoque especial ao modelo geométrico de reversão a média de Schwartz ([SCHWARTZ, 1997](#)) de um fator estocástico, conhecido na literatura também como

Modelo I de Schwartz (SCHWARTZ, 1997). Adotamos este modelo porque este é o mais utilizado na literatura. Sua forma matemática é representada por:

$$dS = \eta(\alpha - \ln S)Sdt + \sigma Sdz \quad (4.54)$$

em que  $S$  é a variável estocástica,  $\alpha$  é a média de longo prazo da variável estocástica (nível de equilíbrio de longo prazo),  $\eta$  é a velocidade de reversão, ou a medida de intensidade com a qual os choques estocásticos são dissipados,  $\sigma$  é a volatilidade do processo e  $dz$  é o processo padrão de Wiener, dado pela Equação 4.1. Frequentemente trabalhos na literatura consideram que  $\alpha = \ln \bar{S}$ , pois assim o modelo se torna mais intuitivo (DIAS, 2005). Desta forma o modelo se torna:

$$dS = \eta(\ln \bar{S} - \ln S)Sdt + \sigma Sdz \quad (4.55)$$

Como dito anteriormente preços em geral são adotados como tendo uma distribuição lognormal. Isto é, o logaritmo destes preços seguem uma distribuição normal. Fazendo  $F = \ln S$  e aplicando-se o lema de Itô chegamos a seguinte equação (BASTIAN-PINTO, 2009):

$$dF = \eta\left[\left(\ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta}\right) - \ln S\right]dt + \sigma dz \quad (4.56)$$

Se fizermos:

$$\bar{F} = \left(\ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta}\right) \quad (4.57)$$

E:

$$F = \ln S \quad (4.58)$$

chegamos a mesma equação do modelo aritmético O-U dado pela Equação 4.42:

$$dF = \eta(\bar{F} - F)dt + \sigma dz \quad (4.59)$$

Substituindo os parâmetros da Equação 4.57 e da Equação 4.58 na equação da esperança do movimento O-U dado pela Equação 4.44 chegamos a esperança de  $F$ :

$$E[F_t] = F_0 e^{-\eta t} + \bar{F}(1 - e^{-\eta t})$$

$$E[F_t] = \ln S_0 e^{-\eta t} + \left(\ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta}\right)(1 - e^{-\eta t}) \quad (4.60)$$

E a variância de  $F$  é dada conforme Equação 4.45:

$$Var(F_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t}) \quad (4.61)$$

Para a passagem de  $E[F_t]$  para  $E[S_t]$  é preciso, além de fazermos  $S = \exp(F)$ , adicionar a metade da variância de  $F$ , propriedade da log-normalidade de Schwartz (1997) e Schwartz

e Smith (2000). Feito isso, chegamos a equação da esperança de  $S$  e da discretização de  $S$  do modelo de Schwartz (1997):

$$E[S_t] = \exp\left(\ln S_0 e^{-\eta t} + \left(\ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta}\right)(1 - e^{-\eta t}) + \frac{\sigma^2}{4\eta}(1 - e^{-2\eta t})\right) \quad (4.62)$$

Quando  $t$  tende ao infinito, o valor esperado da série  $S_t$  do modelo I de Schwartz (1997) converge para:

$$\begin{aligned} E[S_{t \rightarrow \infty}] &= \exp\left(\left(\ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta}\right) + \frac{\sigma^2}{4\eta}\right) \\ E[S_{t \rightarrow \infty}] &= \exp\left(\ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{4\eta}\right) \\ E[S_{t \rightarrow \infty}] &= \bar{S} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\eta}\right) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Para simular o processo I de Schwartz (1997) precisamos da equação em tempo discreto do modelo. Esta é obtida da mesma forma que no movimento O-U. Da discretização do movimento O-U, Equação 4.46, temos:

$$F_t = F_{t-1} e^{-\eta \Delta t} + \bar{F}(1 - e^{-\eta \Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta \Delta t}}{2\eta}} N(0,1)$$

substituindo os parâmetros da Equação 4.57 e da Equação 4.58 temos:

$$S_t = \exp\left(\ln S_{t-1} e^{-\eta \Delta t} + \left(\ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta}\right)(1 - e^{-\eta \Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta \Delta t}}{2\eta}} N(0,1)\right) \quad (4.64)$$

Os parâmetros do modelo I de Schwartz (1997) podem ser estimados, semelhante ao processo O-U, através de uma regressão linear. Conforme Equação 4.48 do movimento O-U temos que:

$$F_t - F_{t-1} = F_{t-1}(e^{-\eta \Delta t} - 1) + \bar{F}(1 - e^{-\eta \Delta t})$$

Substituindo  $\bar{F} = \left(\ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta}\right)$  (Equação 4.57) e  $F = \ln S$  (Equação 4.58) temos:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \ln(S_{t-1})(e^{-\eta \Delta t} - 1) + \left(\ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta}\right)(1 - e^{-\eta \Delta t}) \quad (4.65)$$

Fazendo:

$$a = \left(\ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta}\right)(1 - e^{-\eta \Delta t}) \quad (4.66)$$

E

$$(b - 1) = (e^{-\eta \Delta t} - 1) \quad (4.67)$$

Chegamos a equação da regressão linear:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = a + (b - 1) \ln S_{t-1} \quad (4.68)$$

O valor de  $\eta$  pode ser obtido da mesma forma que no processo O-U, [Equação 4.50](#):

$$\begin{aligned}(b - 1) &= (e^{-\eta\Delta t} - 1) \\ b &= e^{-\eta\Delta t} \\ \eta &= -\frac{\ln b}{\Delta t}\end{aligned}\tag{4.69}$$

O parâmetro da volatilidade  $\sigma$ , semelhante ao processo O-U, pode ser determinado a partir da variância  $\sigma_e^2$  dos erros da regressão:

$$\sigma_e^2 = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta\Delta t})\tag{4.70}$$

Substituindo  $b^2 = e^{-\eta^2\Delta t}$  e  $\eta = -\frac{\ln b}{\Delta t}$ , temos:

$$\sigma = \sigma_e \sqrt{\frac{2 \ln b}{(b^2 - 1)\Delta t}}\tag{4.71}$$

Da [Equação 4.66](#) temos que:

$$\frac{a}{(1 - b)} = \left( \ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right)$$

$$\bar{S} = \exp\left( \frac{a}{(1 - b)} + \frac{\sigma^2}{2\eta} \right)$$

Substituindo  $\eta = -\frac{\ln b}{\Delta t}$ , [Equação 4.69](#), temos que:

$$\bar{S} = \exp\left( \frac{a}{(1 - b)} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2(-\ln b)} \right)\tag{4.72}$$

#### 4.1.9 Validade do Processo Estocástico

Esta sessão apresenta dois testes reconhecidos na literatura para determinar a validade de se modelar uma variável estocástica como um Movimento Browniano Geométrico (MBG). Em outras palavras, estes testes indicam se esta variável estocástica segue um comportamento aleatório ou se esta segue um movimento de reversão a média (MRM).

A correta modelagem do comportamento futuro de uma variável estocástica é de fundamental importância para a avaliação das potenciais opções reais ([DIXIT; PINDYCK, 1994](#)). Negligenciar esse aspecto da modelagem numa avaliação por opções reais pode levar a resultados enganosos, seja super-dimensionando ou negligenciando o seu real valor.

Frequentemente é usado o Movimento Browniano Geométrico (MBG) como o fazem [Paddock, Siegel e Smith \(1988\)](#), como modelo estocástico para modelar as variáveis incertas de um projeto, sem maiores questionamentos quanto a sua validade para as incertezas mapeadas. Uma das razões de tal opção é o fato do MBG ser fácil de se modelar e, a rigor, é um ótimo processo estocástico para modelagem de preços de ações, commodities financeiras como ouro, índices de mercado como Ibovespa, e ativos financeiros em geral, como também para demanda de novos produtos e terrenos ([BASTIAN-PINTO, 2009](#)).

Muitas vezes, no entanto, a incerteza a ser modelada não segue um processo estocástico similar a um Movimento Browniano Geométrico como mostrado por (PERRON, 1989) e (PINDYCK, 1999). Isto acontece quando o ativo subjacente é proporcional a preços que dependem de nível de equilíbrio de longo prazo, como é o caso de commodities não financeiras (LUND, 1993).

Um teste que podemos realizar para verificar se uma série histórica segue um Movimento Browniano Geométrico ou um Movimento de Reversão a Média é o teste da raiz unitária de Dickey e Fuller (1979). Este teste consiste em fazer uma regressão linear por mínimos quadrado como mostra a equação:

$$S_t = a + bS_{(t-1)} + \varepsilon_t \quad (4.73)$$

Depois de realizar esta regressão a ideia é verificar se a hipótese nula de que  $b = 1$  é rejeitada ou não. Se não rejeitarmos a hipótese nula a série terá uma raiz unitária e seria melhor modelada por um Movimento Browniano Geométrico. Caso rejeitemos a hipótese nula e concluirmos que  $b < 1$  então a série é considerada estacionária e o Movimento de Reversão a Média seria o movimento mais indicado para se usar. Quando  $b > 1$  significa que a série tem comportamento explosivo (WOOLDRIDGE, 2009). A forma mais usual é de reescrever a Equação 4.73 subtraindo-se  $S_{(t-1)}$  em ambos os lados:

$$S_t - S_{(t-1)} = a + (b - 1)S_{(t-1)} + \varepsilon_t \quad (4.74)$$

A ideia é semelhante a anterior, mas agora verificamos se a hipótese nula de que  $(b - 1) = 0$  é rejeitada ou não. (Vale ressaltar que essa equação é a mesma utilizada no processo de Reversão a Média Aritmético O-U analisado na subseção 4.1.8). Wooldridge (2009) destaca que como estimador por mínimos quadrados possui viés para zero, o teste  $t$  padrão não pode ser utilizado, e é preciso usar as estatísticas de valores do teste de Raiz Unitária de (DICKEY; FULLER, 1979) descritas na Tabela 8

Tabela 8 – Valores críticos assintóticos do teste  $t$  de Raiz Unitária

Nível de Significância	1%	2,5%	5%	10%
Valores Críticos	-3,43	-3,12	-2,86	-2,57

Fonte: (WOOLDRIDGE, 2009)

O segundo teste que podemos utilizar foi proposto por Pindyck (1999) como uma alternativa ao teste da raiz unitária. De acordo com o autor, é difícil rejeitar a hipótese nula de raiz unitária, isto é, rejeitar a hipótese de que a série segue um caminho aleatório como o Movimento Browniano Geométrico (MBG). Para ilustrar essa dificuldade em rejeitar a hipótese nula de raiz unitária Dixit e Pindyck (1994) e Pindyck (1999) argumentam que só conseguem comprovar que os preços de petróleo não seguem um MBG com uma série de 120 anos. Ao analisar séries mais curtas, de 30 ou 40 anos, estes autores não conseguem rejeitar a hipótese nula de que a série segue um MBG.

Pindyck (1999) sugere que a verificação de até qual nível os choques de preços são permanentes pode ser mais informativo do que a pesquisa sobre raiz unitária. Em um processo de reversão à média, os choques de preço tendem a dissipar-se ao longo do tempo, enquanto que



no caso de um MBG os choques de preço tendem a ser permanentes. Para testar essa condição, [Pindyck \(1999\)](#) utiliza um teste de razão de variância que mede o nível para o qual a variância de uma série cresce com o “retardo” ou lag do teste. O teste da razão da variância pode ser descrito por:

$$R_k = \frac{1}{k} \frac{\text{Var}(F_{t+k} - F_t)}{\text{Var}(F_{t+1} - F_t)} \quad (4.75)$$

O termo  $\text{Var}(\cdot)$  na fórmula representa a variância das séries de diferenças entre o logaritmo dos preços, com retardo (lag) de  $k$  períodos. No caso de um MBG, a variância dos incrementos do logaritmo do preço cresce linearmente com o tempo (como mostra a [Equação 4.34](#)), por isso a razão  $R_k$  deveria convergir para 1 quando  $k$  cresce. Por outro lado, na presença de reversão à média, a variância é delimitada a um certo nível com o passar do tempo. Desta forma, para valores altos do retardo (lag)  $k$ , a razão da variância  $R_k$  deveria cair indicando que os choques de preço não são permanentes e que os preços reverterem para algum nível de equilíbrio.

## 4.2 Erro Quadrático Médio de Previsão

Para compararmos, entre diferentes modelos, qual é aquele que melhor descreve o comportamento de uma série temporal podemos utilizar o Erro Quadrático Médio de Previsão (em inglês - MSPE - Mean Square Prediction Error). A ideia é prever os valores da série  $S$  conforme cada um dos diferentes modelos e comparar com os valores reais desta série  $S$ . Feito isto verificamos qual modelo apresenta o menor erro. Segundo [Bueno \(2008\)](#) um número razoável seria deixar de fora da amostra cerca de  $\frac{1}{4}$  dos dados para efetuarmos previsões.

Conforme [Bueno \(2008\)](#) a equação que descreve o MSPE é dado por:

$$MSPE = \sqrt{\frac{\sum_{h=1}^H (\widehat{Y}_h - Y_h)^2}{H}} \quad (4.76)$$

Onde  $H$  é a quantidade total de dados fora da amostra a serem previstos,  $\widehat{Y}_h$  é o valor estimado da observação  $h$  por um determinado modelo e  $Y_h$  é o verdadeiro valor da observação  $h$ .

## 5 Projeções Futuras do PLD

A principal incerteza do nosso modelo de opções reais é o preço *spot* da energia elétrica, isto é o PLD. Este capítulo visa estudar o comportamento da série histórica do PLD e propor um modelo que melhor descreva sua aleatoriedade.

Primeiramente definimos o horizonte da série do PLD a qual iremos analisar. Em seguida mostramos porque um Movimento de Reversão a Média seria mais adequado para modelar a série do PLD ao invés do Movimento Browniano Geométrico. Para isto realizamos dois testes: (i) o teste de Raiz Unitária de [Dickey e Fuller \(1979\)](#) e, (ii) o teste da Razão da Variância proposto por [Pindyck \(1999\)](#) ambos detalhados na [subseção 4.1.9](#).

Feito isto, projetamos preços futuros do PLD conforme quatro modelos: dois modelos de regressão linear e dois modelos de reversão a média.

Em seguida analisamos qual deles apresentou o menor Erro Quadrático de Previsão (MSPE, detalhado na [seção 4.2](#)). O modelo que apresentou o menor erro (MSPE) será considerado para modelar a aleatoriedade do PLD no nosso modelo de opções reais apresentado no [Capítulo 6](#).

### 5.1 Definição do Horizonte da Série do PLD a ser analisada

Conforme mencionado na [seção 2.4](#) o PLD é calculado para cada subsistema e para cada patamar de carga. Como o subsistema Sudeste/Centro-Oeste é o subsistema de maior demanda de carga e de maior representatividade econômica do país, optamos por analisar a série histórica desse subsistema. Além disso, optamos por dar ênfase no patamar de carga pesada, por esse ser o patamar onde se situa a maior demanda diária de energia elétrica, ou o valor da demanda de ponta de energia<sup>1</sup>.

O PLD é dado em reais por megawatt-hora (R\$/MWh) e os dados históricos foram extraídos do site da Câmara de Comercialização de Energia Elétrica ([CCEE, 2015](#)). A série histórica, de 2001 até 2014, foi apresentada no [Capítulo 2](#) na [Figura 8](#).

[Hull \(2006\)](#) destaca que ao analisar uma série histórica é preciso primeiramente definir o horizonte de tempo que se deseja analisar. [Hull \(2006\)](#) ainda coloca que valores muito antigos podem não ser mais realísticos e podem não refletir o comportamento atual da série. Sendo assim, nos encontramos diante de um trade off: (i) quanto maior a série histórica a ser analisada maior seria a nossa percepção do comportamento passado da série e mais confiáveis seriam as análises estatísticas das estimativas dos parâmetros da série. Entretanto, (ii) se analisarmos dados muito antigos poderemos estimar parâmetros incoerentes com a realidade atual.

[Rego \(2012\)](#) discute como foram os leilões de energia elétrica que ocorreram entre 2005 e 2011 no Brasil, e chega-se a conclusão que, de uma forma controversa, o governo contratou milhares de MW de energia elétrica provenientes de usinas termoeletricas e pouquíssimos MW

<sup>1</sup> Demanda de ponta é o equivalente ao pico na curva diária de energia, é quantidade máxima de MW necessária para atender a demanda do sistema.

provenientes de hidroelétricas. As três grandes usinas hidrelétricas leiloadas no período (Belo Monte, Santo Antonio e Jirau) foram construídas a fio d'água (reservatórios reduzidos). Em consequência dessa política, hoje temos proporcionalmente uma quantidade de reservatórios menores em relação à capacidade total de energia instalada no país. Isto aumenta a incerteza sobre as gerações futuras o que gera um aumento na função de custo futuro da energia elétrica (discutido no [seção 2.2](#)) e causa maior instabilidade para o PLD.

Além desses dois aspectos ressaltados, podemos ver na [Figura 8](#) que o PLD apresenta um certo comportamento entre junho de 2002 até meados de 2005 (período de incerteza menor) e um comportamento diferente de meados de 2005 a dezembro de 2012 (período com incerteza maior).

Devido a essas três razões levantadas o presente trabalho busca analisar o comportamento do PLD entre janeiro de 2006 a dezembro de 2012, são ao todo 7 anos de dados semanais totalizando 365 observações e procura projetar preços futuros para 2013 e 2014. Os valores projetados foram comparados com os valores reais.

A fim de considerar os preços ao longo da série do PLD como uma evolução real procurou-se descontar da série a inflação do período. Utilizamos como índices de preço o IPCA (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo) que é calculado pelo IBGE. A [Tabela 9](#) mostra a inflação no Brasil no período entre 2006 e 2012. Utilizamos os valores em 31/12/2012 como sendo o valor base. Sendo assim, os valores anteriores a 31/12/2012 foram corrigidos a valores equivalentes a esta data.

Tabela 9 – IPCA – 2006 a 2012

Ano	IPCA
2006	3,14%
2007	4,46%
2008	5,90%
2009	4,31%
2010	5,91%
2011	6,50%
2012	5,84%

Fonte: IBGE

A [Figura 10](#) mostra a série do PLD de 2006 a 2012, de forma a desconsiderar o efeito da inflação. E a [Figura 11](#) apresenta um histograma desta série.

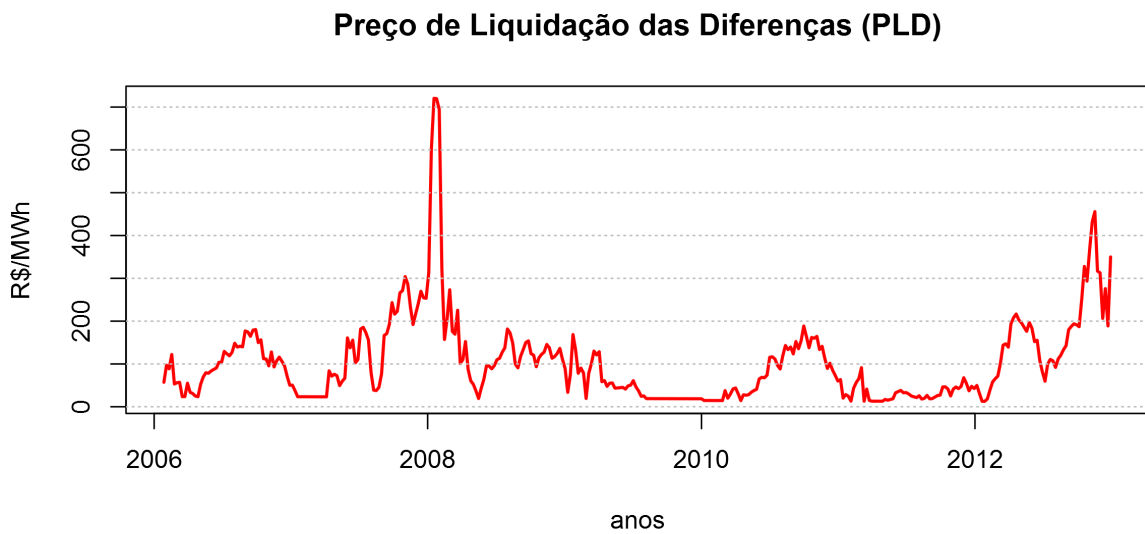


Figura 10 – PLD série 2006-2012 valores corrigidos

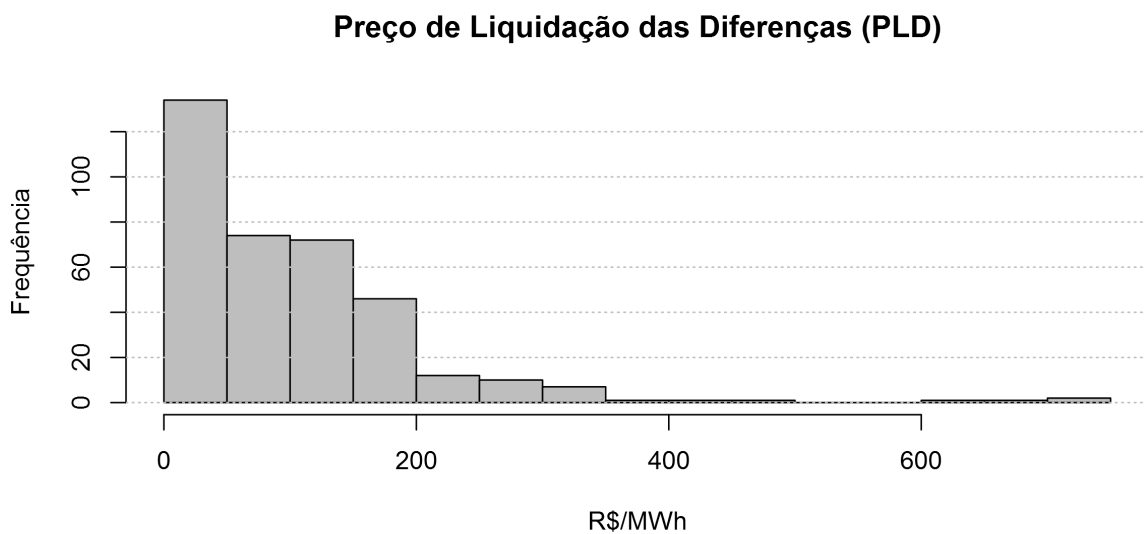
Fonte: adaptado de [CCEE \(2015\)](#)

Figura 11 – Histograma do PLD série 2006-2012 valores corrigidos

Fonte: adaptado de [CCEE \(2015\)](#)

## 5.2 Definição do Processo Estocástico

Para definirmos qual processo estocástico seria mais adequado para modelar a série do PLD, se um Movimento de Reversão a Média ou o Movimento Browniano Geométrico realizamos dois testes (i) o teste de Raiz Unitária de [Dickey e Fuller \(1979\)](#) e, (ii) o teste da Razão da Variância proposto por [Pindyck \(1999\)](#) ambos detalhados na [subseção 4.1.9](#).

### 5.2.1 Teste da Raiz Unitária

O primeiro teste que realizamos foi o Teste da Raiz Unitária de [Dickey e Fuller \(1979\)](#) apresentado na [subseção 4.1.9](#). Utilizamos a [Equação 4.74](#) e realizamos a regressão linear no software R. O resultado do teste é mostrado na [Tabela 10](#).

Tabela 10 – Teste da Raiz Unitária de [Dickey e Fuller \(1979\)](#)

Coefficientes:	Estimativa	Erro padrão	valor t	Pr(> t )
(Intercepto)	8,30436	2,94256	2,822	0,005034
(b-1)	-0,07227	0,02068	3,495	0,000533
Erro padrão residual: 65,78 com 4 graus de liberdade				
R quadrado múltiplo: 0,03264, R quadrado ajustado: 0,02997				
Estatística F: 12,22 com 1 e 362 graus de liberdade, valor p: 0,0005325				

Fonte: O autor

Como a estatística do teste apresentou o valor  $t = 3,495$  e esse valor é maior, em módulo, do que 2,86 (valor crítico do teste a um nível de 95% de confiança, como mostra a [Tabela 8](#), rejeitamos a hipótese nula de que  $(b - 1) = 0$ . O valor de  $b$  obtido a partir da regressão é:

$$b = 0.9277$$

Ou seja  $b$  é menor do que 1 e isso implica que a série é estacionária, indicando assim que o Movimento de Reversão a Média é o mais indicado para se modelar o PLD e não o Movimento Browniano Geométrico.

### 5.2.2 Teste da Razão da Variância

O segundo teste que realizamos foi o teste de Razão da Variância proposto por [Pindyck \(1999\)](#) e apresentado na [subseção 4.1.9](#) ([Equação 4.75](#)). O teste foi feito com o logaritmo da série do PLD deflacionado (2006-2012) e a [Figura 12](#) mostra o resultado.

A razão da variância do logaritmo da série do PLD diminui de 1 com o aumento do lag  $k$ , chegando a 0,40 no lag  $k = 40$ . Como a razão da variância cai com o aumento do lag  $k$  isto indica que os choques nos preços não são permanentes e o PLD tende a reverter para um nível de equilíbrio. Portanto temos evidências para rejeitar que a variância do logaritmo do PLD cresce linearmente com o lag  $k$  e concluímos que um Movimento de Reversão a Média seria mais indicado para modelar a série do PLD do que o Movimento Browniano Geométrico.

Portanto, como estes dois testes indicaram que o PLD segue um Movimento de Reversão a Média, vamos utilizar o Modelo I de [Schwartz \(1997\)](#) apresentado na [subseção 4.1.8.2](#) para projetar preços futuros do PLD para 2013 e 2014. Os valores projetados serão comparados com os valores reais do PLD divulgados pela CCEE ([CCEE, 2015](#)) e computado o Erro Quadrático Médio de Previsão (MSPE) conforme detalhado na [seção 4.2](#).

Para avaliar a acurácia deste modelo I de [Schwartz \(1997\)](#), comparamos o seu desempenho com duas análises de regressão por mínimos quadrados. Os resultados são apresentados a seguir.

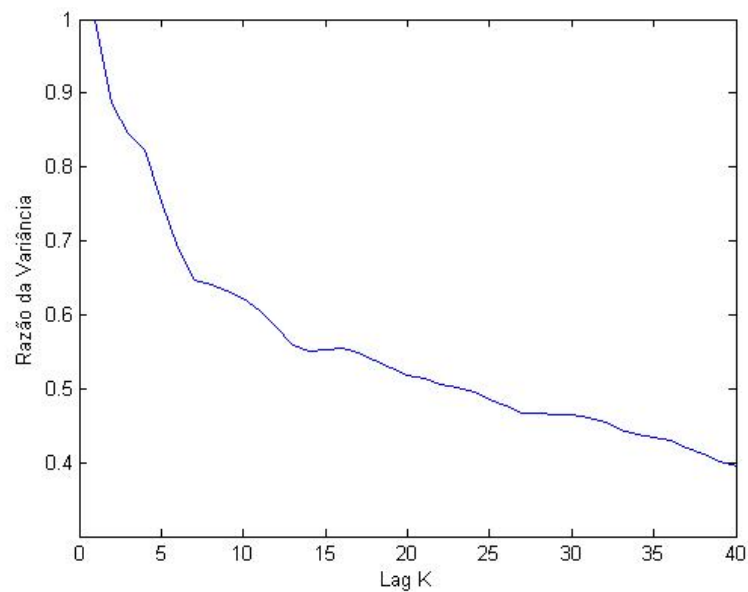


Figura 12 – Teste da Variância

Fonte: O autor

## 5.3 Projetando Preços Futuro do PLD

### 5.3.1 Abordagem Estatística

Nesta abordagem estatística procuramos fazer, primeiramente, uma análise exploratória da série do PLD entre Janeiro de 2006 a Dezembro de 2012 com os preços corrigidos (série da Figura 10). Será mostrada uma análise através de Box-Plots considerando os fatores temporais: (i)anos (ii) meses e (iii)semanas.

Em seguida apresentamos duas regressões lineares e verificamos quais destes fatores melhor explicam o PLD. Será analisado se os anos, meses e as semanas são importantes ou não para explicar a série do PLD assim como uma componente auto-regressiva (uma variável defasada no tempo do PLD, isto é, o PLD no instante de tempo anterior).

#### 5.3.1.1 Análise Exploratória da série do PLD

A Tabela 11 mostra as estatísticas descritivas da série do PLD de 2006 a 2012 com os preços corrigidos (Figura 10). O valor mínimo verificado foi de  $R\$12,69/MWh$ . Podemos ver que a média é maior do que a mediana,  $R\$103,20/MWh$  e  $R\$79,54/MWh$  respectivamente. Esta característica é típica da distribuição lognormal que usualmente é adotada para séries de commodities e preços de ações em geral. E o valor máximo verificado foi de  $R\$720,40/MWh$

A Figura 13 mostra os Box-plot do preço em função dos anos. A princípio a figura sugere que os anos influenciam o PLD, pois apresentam médias diferentes ao longo dos anos. Para comprovar se existe essa influência será feita uma regressão linear do PLD considerando o fator anos na próxima seção.

Tabela 11 – Estatísticas Descritivas do PLD em R\$/MWh - série deflacionada

Valor mínimo	1º quartil	Mediana	Média	3º quartil	Valor máximo
12,69	30,24	79,54	103,20	141,20	720,40

Fonte: O autor

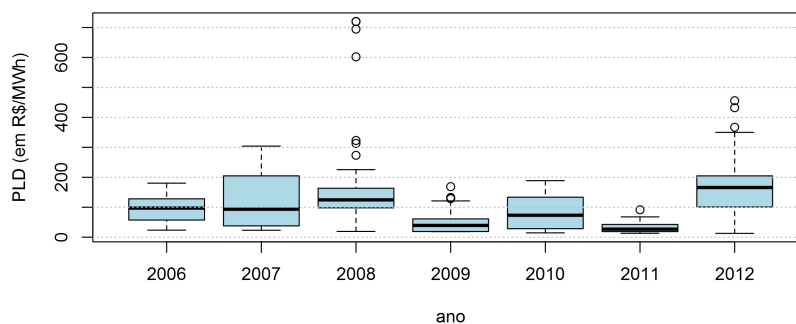


Figura 13 – Box-Plot do PLD em função dos anos

Fonte: O autor

A Figura 14 mostra os Box-plot do preço em função dos meses já descontados o efeito do fator anos. A princípio a figura sugere que os meses possuem médias diferentes, com o mês de novembro tendo a maior média. A variabilidade também se modifica ao longo dos meses. Os valores do PLD nos meses de verão parecem ter variabilidade maior do que nos meses de inverno. Para comprovar se existe essa influência será feita uma regressão linear do PLD considerando o fator meses na próxima seção.

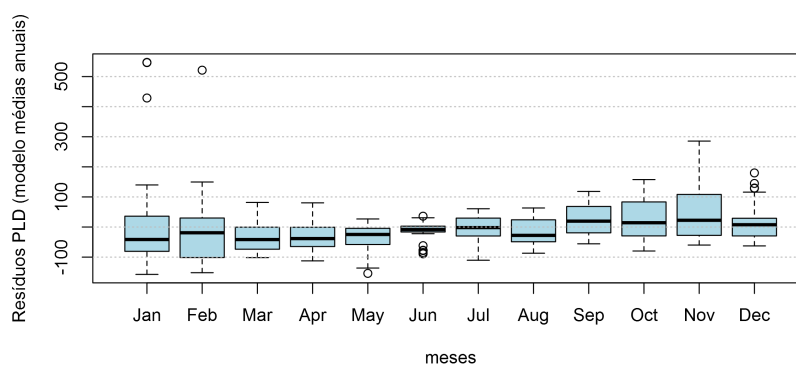


Figura 14 – Box-Plot do PLD em função dos meses

Fonte: O autor

A Figura 15 mostra os Box-plot do preço em função das semanas já descontados o efeito do fator anos e meses. A princípio a figura sugere que as semanas não têm influência nos valores do PLD. Para verificar se o fator semanas são ou não significativos para explicar o PLD será

feita uma regressão linear do PLD considerando o fator semanas na próxima seção.

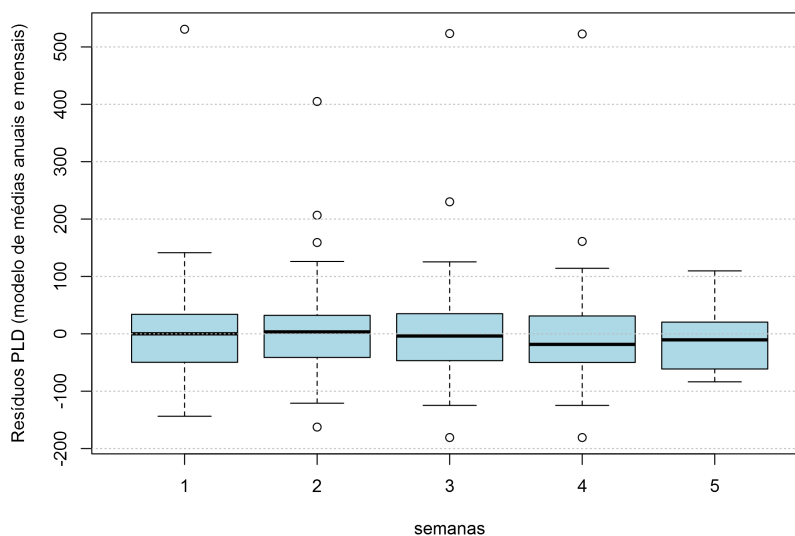


Figura 15 – Box-Plot do PLD em função das semanas

Fonte: O autor

### 5.3.1.2 Primeiro Modelo de Regressão Linear

Realizamos uma regressão linear com a série do PLD (de 2006 a 2012, com os valores corrigidos) para determinar quais variáveis melhor o explicam.

Consideramos uma variável auto-regressiva como uma variável explicativa. Isto é, tomamos uma variável defasada no tempo do PLD, ou seja, o PLD no instante de tempo anterior. Além disso, consideramos os anos, meses e semanas como variáveis dummies (variáveis categóricas) e verificamos se elas são significantes ou não para explicar o PLD. Utilizamos uma regressão linear múltipla conforme equação:

$$Y_n = X_{np}\hat{\beta}_p + \epsilon \quad (5.1)$$

onde  $Y_n$  é a variável explicada (no nosso caso o PLD),  $n$  é o número de observações e  $p$  é o número de coeficientes  $\hat{\beta}$  estimado.

A [Tabela 12](#) mostra o resultado da Análise de Variância (ANOVA) e o p-valor das variáveis. A variável auto-regressiva ( $PLD_{t-1}$ ), os fatores anos e os fatores meses apresentaram um p-valor muito menor do que 0,05. Portanto, com 95% de confiança rejeitamos a hipótese nula  $H_0$  de que os coeficientes estimados ( $\hat{\beta}$ ) são iguais a zero e concluímos que estas variáveis são importantes para explicar o PLD. Por outro lado, o fator semanas apresentou um p-valor maior do que 0,05. Assim, com 95% de confiança não rejeitamos a hipótese nula  $H_0$  e concluímos que o fator semanas não explica o PLD.



Tabela 12 – Análise de Variância (ANOVA)- anos, meses, semanas e  $PLD_{t-1}$ 

Coefficientes	Graus de Lib.	Soma dos Quadr.	Média dos Quadr.	Valor F	Pr(>F)
anos	6	960628	160105	106,46	<2e-16
meses	11	291706	26519	17,63	<2e-16
semanas	4	3919	980	0,65	0,6261
$PLD_{t-1}$	1	1822428	1822428	1211,83	<2e-16
Resíduos	339	509812	1504		

Fonte: O autor

Sendo assim fizemos uma nova regressão, mas agora sem o fator semanas. O resultado na análise de variância (ANOVA) e os coeficientes estimados ( $\hat{\beta}$ ) são mostrados na [Tabela 13](#) e na [Tabela 14](#), respectivamente.

Tabela 13 – Análise de Variância (ANOVA) - anos, meses e  $PLD_{t-1}$ 

Coefficientes	Graus de Lib.	Soma dos Quadr.	Média dos Quadr.	Valor F	Pr(>F)
anos	6	960628	160105	106,86	<2,2e-16
meses	11	291706	26519	17,70	<2,2e-16
$PLD_{t-1}$	1	1822248	1822248	1216,22	<2,2e-16
Resíduos	343	513912	1498		

Fonte: O autor

Feito isto, o modelo final de regressão linear foi ajustado para os dados dentro da amostra, isto é, o modelo estimou valores para o PLD de 2006 até 2012. Isto foi feito considerando os coeficientes estimados ( $\hat{\beta}_p$ ) pelo modelo ([Tabela 14](#)) conforme equação:

$$P\hat{L}D_n = X_{np}\hat{\beta}_p \quad (5.2)$$

onde  $P\hat{L}D_n$  é o PLD estimado pelo modelo,  $n$  é o número de observações e  $p$  é o número de coeficientes  $\hat{\beta}$  estimado.

O ajuste do modelo final é mostrado na [Figura 16](#). Consideramos um intervalo de confiança de 95% para o limite inferior e o limite superior. Isto é, esperamos que 95% dos valores estejam dentro destes limites. Podemos ver que o PLD estimado pelo modelo de regressão linear teve um bom ajuste se comparado com os valores reais do PLD.

Os resíduos do modelo, isto é, a diferença entre os valores reais do PLD e os valores do PLD estimado pelo modelo, ao longo dos anos de 2006 a 2012 são mostrados na [Figura 17](#). Houve alguns resíduos extremos em 2008 e 2012, entretanto, o PLD, assim como outras commodities, apresentam eventualmente alguns choques nos preços o que é difícil de prever e de se modelar.

A [Figura 18](#) mostra o histograma destes resíduos. Podemos ver que a grande maioria dos resíduos estão dentro do intervalo de  $[-50,50]$ , alguns valores de  $[-100, -50]$  e  $[50,100]$  e pouquíssimos valores fora destes limites.

Tabela 14 – Coeficientes da Regressão Linear - anos, meses e  $PLD_{t-1}$ 

Coeficientes:	Estimativa	Erro padrão	valor t	Pr(> t )
(Intercepto)	28,74384	9,7974	2,934	0,00357
anos2007	5,2958	7,74437	0,684	0,49455
anos2008	5,27155	7,97399	0,661	0,509
anos2009	-9,13385	7,83525	-1,166	0,24453
anos2010	-3,16835	7,71735	-0,411	0,68166
anos2011	-9,5526	7,90467	-1,208	0,2277
anos2012	12,33275	7,89937	1,561	0,11939
mesesfev	-32,16502	10,37435	-3,1	0,00209
mesesmar	-21,25313	10,26858	-2,07	0,03923
mesesabr	-21,60628	10,32927	-2,092	0,0372
mesesmai	-19,44212	10,36218	-1,876	0,06147
mesesjun	-17,84883	10,24267	-1,743	0,0823
mesesjul	-13,95042	10,21383	-1,366	0,17289
mesesago	-19,73491	10,22992	-1,929	0,05454
mesesset	-4,3053	10,30276	-0,418	0,6763
mesesout	-11,88709	10,22292	-1,163	0,24572
mesesnov	-12,70627	10,3714	-1,225	0,22137
mesesdez	-15,82416	10,22495	-1,548	0,12264
$PLD_{t-1}$	0,88355	0,02534	34,874	< 2e-16
Erro padrão residual: 38,71 com 343 graus de liberdade				
R quadrado múltiplo: 0,8568, R quadrado ajustado: 0,8493				
Estatística F: 114 com 18 e 343 graus de liberdade, valor p: < 2,2e-16				

Fonte: O autor

A [Figura 19](#) mostra uma análise dos resíduos que nos indica se estes resíduos seguem uma distribuição normal ou não. Caso os resíduos seguissem uma distribuição normal os dados deveriam cair ao longo da linha. Porém, podemos ver que existem valores discrepantes, especialmente os primeiros e os últimos valores.

Para testar se os resíduos seguem ou não uma distribuição normal podemos realizar o teste de normalidade de [Shapiro e Wilk \(1965\)](#). Este teste tem como hipótese nula,  $H_0$ , que os dados são normais. A hipótese alternativa é de que os dados não são normais. O teste foi realizado e o p-valor resultante foi praticamente zero ( $2,2 * 10^{-16}$ ), o que nos leva a rejeitar a hipótese nula. Isto é, concluímos que os resíduos do modelo não seguem uma distribuição normal. Isso é uma limitação para o nosso modelo, o qual pressupõe, a priori, que os resíduos da regressão seguissem uma distribuição normal.

Entretanto, o objetivo deste trabalho é projetar valores para o PLD fora da amostra, isto é, projetar valores futuros para o PLD, o que corresponde ao nosso trabalho, a estimar valores para 2013 e 2014. O aparente problema é que a princípio não temos o coeficiente do ano de 2013 e 2014,  $\hat{\beta}_{2013}$  e  $\hat{\beta}_{2014}$ . Este obstáculo foi resolvido fazendo um regressão linear usando apenas os coeficientes dos anos de 2006 a 2012. Consideramos agora os coeficientes dos anos como sendo uma única variável e não mais como variáveis dummies (variáveis binárias), isto é, o valor do

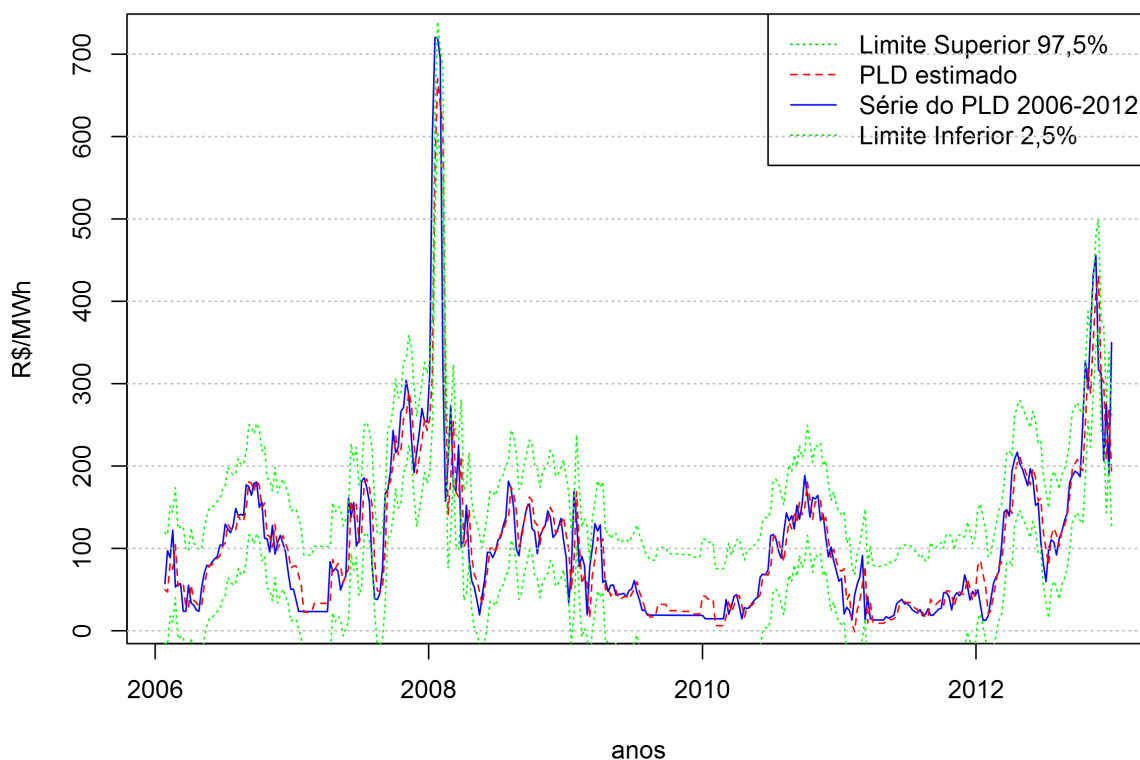


Figura 16 – Modelo Ajustado para a série deflacionada do PLD de 2006 a 2012

Fonte: O autor

coeficiente do ano de 2006 ( $\hat{\beta}_{2006}$ ) é considerado o valor  $x = 1$  o coeficiente do ano de 2007 ( $\hat{\beta}_{2007}$ ) é considerado o valor de  $x = 2$  e assim por diante.

Para calcular o coeficiente de 2013 e 2014,  $\hat{\beta}_{2013}$  e  $\hat{\beta}_{2014}$ , fizemos algumas regressões usando um, dois e três parâmetros. No entanto, o melhor resultado foi conseguido fazendo uma regressão linear considerando apenas uma constante, isto é  $\hat{\beta}_0$ , o resultado desta regressão é mostrado na Tabela 15. Os coeficientes estimados para 2013 e 2014 foram  $\hat{\beta}_{2013} = 28,89$  e  $\hat{\beta}_{2014} = 28,89$ . Os coeficientes dos anos e a linha de regressão linear são mostrados na Figura 20.

Para estimar os valores do PLD para 2013 e 2014, consideramos então estes valores para os coeficientes dos anos e adicionamos o coeficiente da variável auto-regressiva ( $PLD_{t-1}$ ) e os coeficientes de cada mês, ambos apresentados na Tabela 14.

Apresentamos as previsões para 2013 e 2014 na subseção 5.3.3 junto com os outros três modelos. Em todos os quatro modelos a ideia é prever um mês a frente. Isto é, estimamos os valores do PLD para as quatro semanas do mês a frente (ou para as cinco semanas a frente, dependendo se o mês seguinte tem quatro ou cinco semanas) partindo do valor do PLD da última semana do mês anterior.

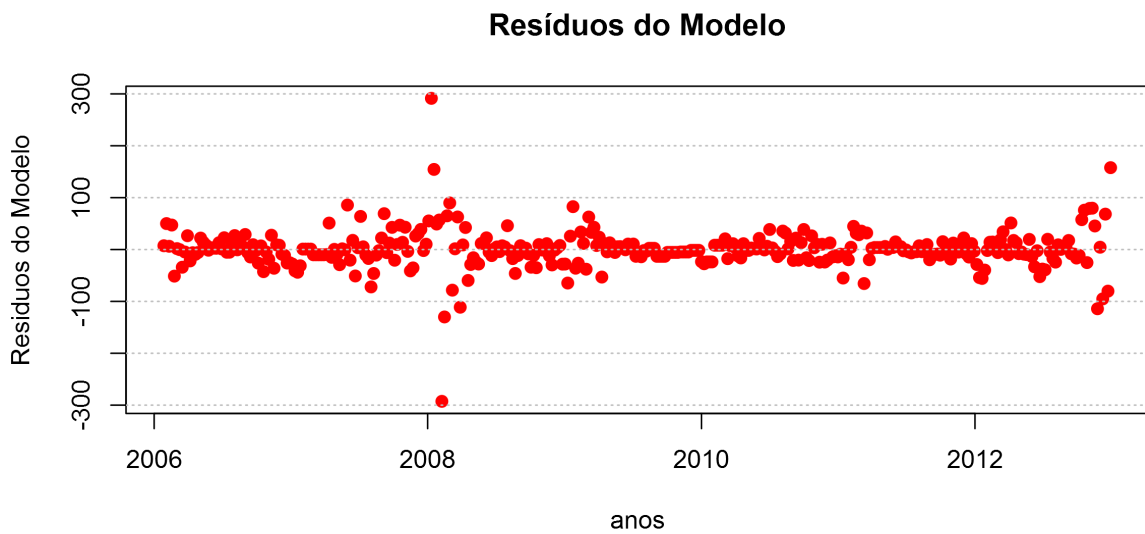


Figura 17 – Resíduos do modelo ajustado para a série deflacionada do PLD de 2006 a 2012

Fonte: O autor

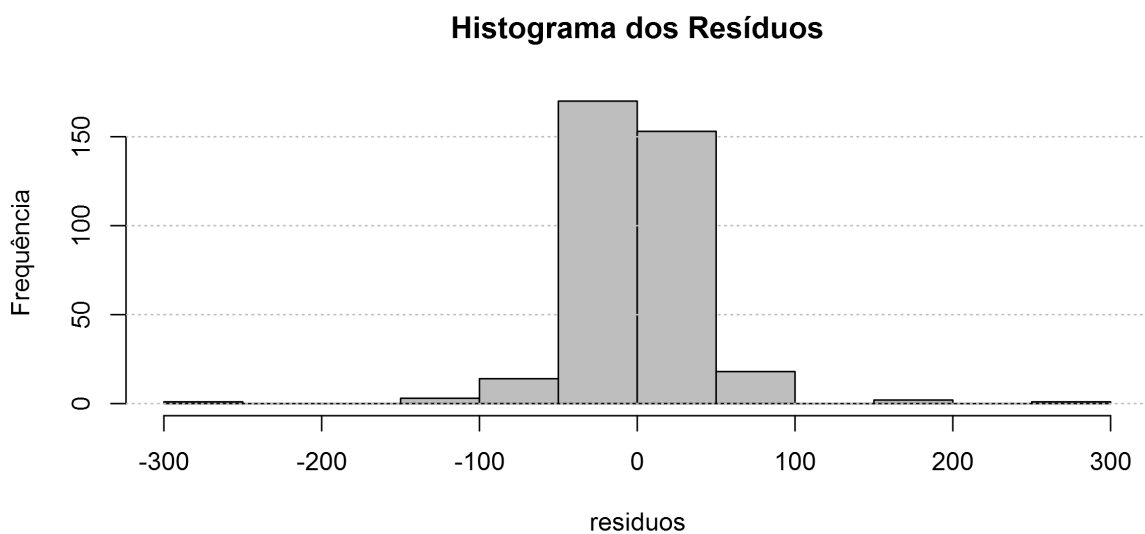


Figura 18 – Histograma dos resíduos do modelo ajustado para a série deflacionada do PLD de 2006 a 2012

Fonte: O autor

### 5.3.1.3 Segundo Modelo de Regressão Linear

Como o melhor resultado obtido para se projetar os coeficientes dos anos de 2013 e de 2014 foi uma constante, fizemos uma nova regressão desconsiderando os coeficientes dos anos. Desta forma consideramos apenas os meses e o PLD defasado em  $t - 1$  como as variáveis explicativas.

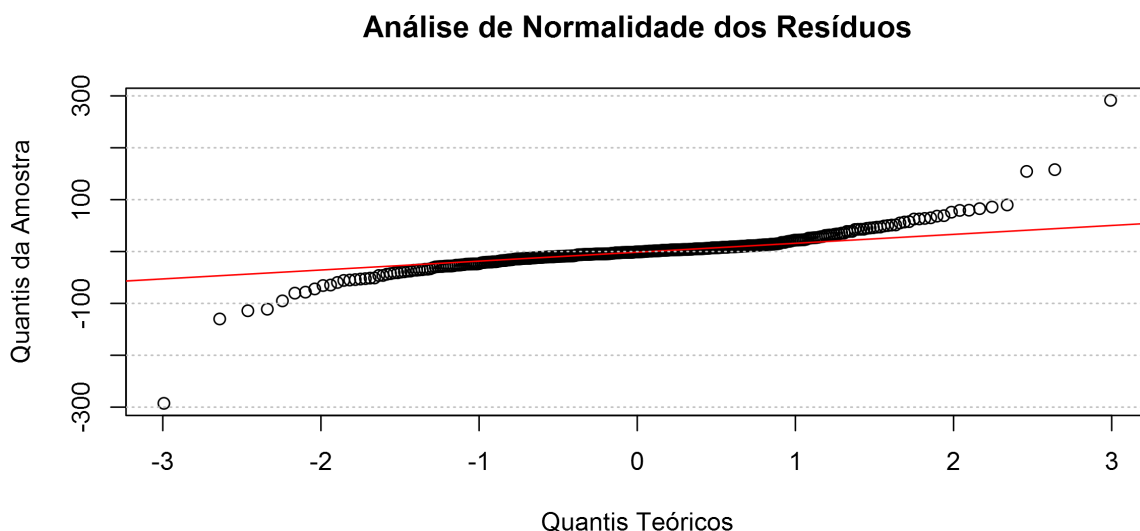


Figura 19 – Análise dos resíduos do modelo ajustado para a série deflacionada do PLD de 2006 a 2012

Fonte: O autor

Tabela 15 – Regressão Linear dos Coeficientes dos Anos

Coeficientes:	Estimativa	Erro padrão	valor t	Pr(> t )
(Intercepto)	28,89	3,06	9,45	7,98E-05

Fonte: O autor

O resultado na análise de variância (ANOVA) e os coeficientes estimados ( $\hat{\beta}$ ) são mostrados na Tabela 16 e na Tabela 17, respectivamente.

Tabela 16 – Análise de Variância (ANOVA) meses e  $PLD_{t-1}$

Coeficientes	Graus de Lib.	Soma dos Quadr.	Média dos Quadr.	Valor F	Pr(>F)
meses	11	285348	25941	17,11	<2,2e-16
$PLD_{t-1}$	1	2773925	2773925	1829,29	<2,2e-16
Resíduos	349	529222	1516		

Fonte: O autor

Em seguida ajustamos o modelo para os dados dentro da amostra (PLD de 2006 até 2012) considerando os coeficientes estimados ( $\hat{\beta}_p$ ) apresentados na Tabela 17.

O ajuste do modelo é mostrado na Figura 21. Consideramos um intervalo de confiança de 95% para o limite inferior e o limite superior.

Podemos ver que o PLD estimado pelo segundo modelo de regressão linear, apesar de não ter os coeficientes dos anos, teve um bom ajuste se comparado com o primeiro modelo de regressão linear.

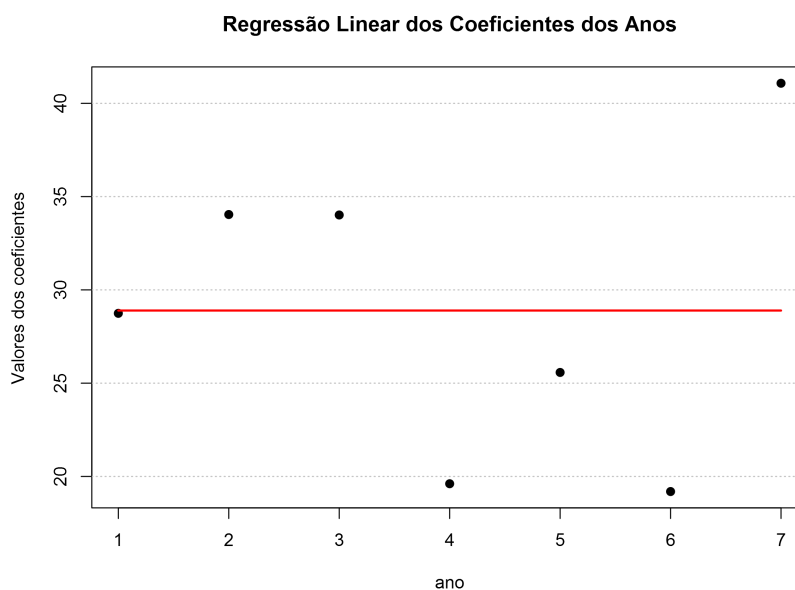


Figura 20 – Coeficientes dos anos e a Reta da Regressão

Fonte: O autor

Na [subseção 5.3.2.2](#) utilizamos os coeficientes dos meses mostrados na [Tabela 17](#) e os incorporamos no movimento de reversão a média de [Schwartz \(1997\)](#).

Os resíduos do modelo são mostrados na [Figura 22](#). Assim como no primeiro modelo de regressão tivemos alguns resíduos extremos em 2008 e 2012.

A [Figura 23](#) mostra o histograma destes resíduos. Podemos ver que a grande maioria dos resíduos estão dentro do intervalo de  $[-50,50]$ .

A [Figura 24](#) mostra que os resíduos, assim como no primeiro modelo, não estão distribuídos conforme uma distribuição normal.

Aplicamos novamente o teste de [Shapiro e Wilk \(1965\)](#) e o p-valor resultante foi praticamente zero ( $2,2 * 10^{-16}$ ), o que nos leva a rejeitar a hipótese nula. Ou seja, concluímos que os resíduos do modelo também não seguem uma distribuição normal, o que também é uma limitação para o nosso modelo.

Apresentamos as previsões para 2013 e 2014 na [subseção 5.3.3](#) junto com os outros modelos.

## 5.3.2 Projetando Preços futuros do PLD segundo o Modelo de Reversão a Média de Schwartz

### 5.3.2.1 Primeiro Modelo de Reversão a Média de Schwartz

Primeiramente aplicamos a equação [Equação 4.68](#) com a série do PLD de janeiro de 2006 a dezembro de 2012 com os valores corrigidos a data de 31/12/2012 (esta é a série mostrada na [Figura 10](#)). O resultado da regressão é apresentado na [Tabela 18](#) e a [Figura 25](#) ilustra o resultado.

Tabela 17 – Coeficientes da Regressão Linear meses e  $PLD_{t-1}$ 

Coeficientes:	Estimativa	Erro padrão	valor t	Pr(> t )
(Intercepto)	24,1628	7,85429	3,076	0,00226
mesesFeb	-31,6788	10,41433	-3,042	0,00253
mesesMar	-18,9427	10,27586	-1,843	0,06612
mesesApr	-20,1257	10,36129	-1,942	0,05289
mesesMay	-17,3285	10,37734	-1,67	0,09585
mesesJun	-16,0549	10,25996	-1,565	0,11853
mesesJul	-13,4918	10,25859	-1,315	0,18932
mesesAug	-17,9192	10,25684	-1,747	0,08151
mesesSep	-4,32781	10,33032	-0,419	0,67552
mesesOct	-12,689	10,26581	-1,236	0,21727
mesesNov	-13,8719	10,40003	-1,334	0,18313
mesesDec	-16,2681	10,25403	-1,587	0,11353
$PLD_{t-1}$	0,92283	0,02158	42,77	< 2e-16
Erro padrão residual: 38,94 com 349 graus de liberdade				
R quadrado múltiplo: 0,8525, R quadrado ajustado: 0,8475				
Estatística F: 168,1 com 12 e 349 graus de liberdade, valor p: < 2,2e-16				

Fonte: O autor

Assumimos o valor de  $S_0$  como sendo o último valor do PLD em 2012, ou seja  $PLD_{t=0} = 349,93$ .

Tabela 18 – Regressão Linear do logaritmo do PLDs

Coeficientes	Estimativa	Erro Padrão	valor t	Pr(> t )
Intercepto	0,29832	0,08447	3,531	0,000467
Xt.1	-0,06871	0,01949	-3,525	0,000478
Erro padrão residual: 0,3426 com 362 graus de liberdade				
R quadrado múltiplo: 0,03318, R quadrado ajustado: 0,03051				
Estatística F: 12,43 com 1 e 362 graus de liberdade, valor p: 0,000478				

Fonte: O autor

Utilizando a [Equação 4.68](#) temos que:

$$(b - 1) = -0,06871$$

$$b = 0,93129$$

Utilizando a [Equação 4.69](#) e fazendo  $\Delta t = \frac{1}{52}$  chegamos ao valor de  $\eta$ :

$$\eta = 3,7$$

O valor encontrado para  $\sigma_e$  foi  $\sigma_e = 0.34$ . Utilizando a [Equação 4.71](#) chegamos ao valor de  $\sigma$ :

$$\sigma = 2,55$$

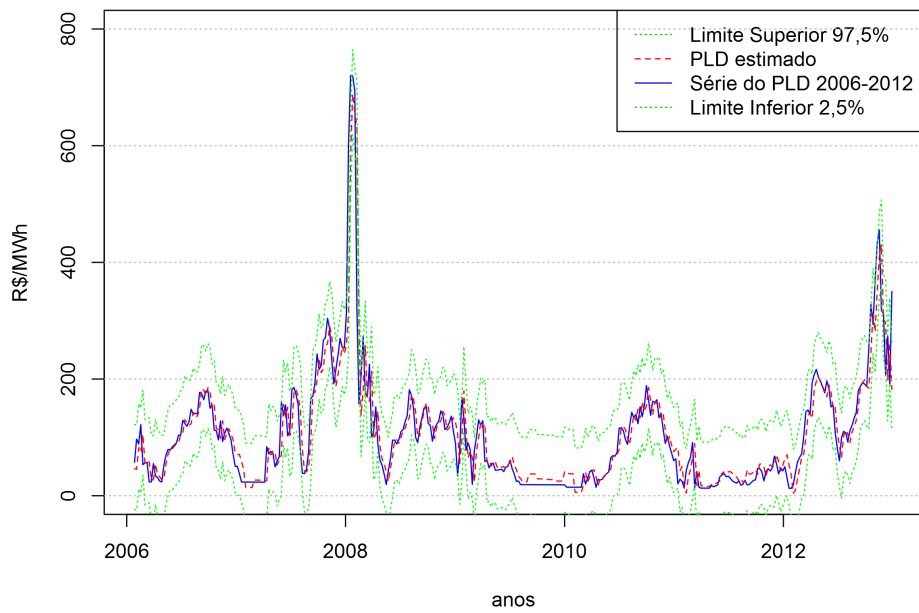


Figura 21 – Modelo ajustado considerando apenas meses e  $PLD_{t-1}$

Fonte: O autor

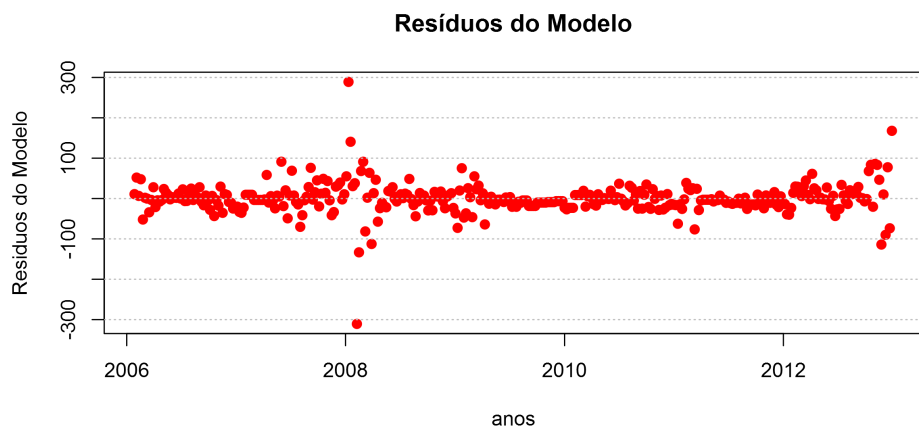


Figura 22 – Resíduos do modelo ajustado considerando apenas meses e  $PLD_{t-1}$

Fonte: O autor

O valor encontrado para  $a$  foi  $a = 0,2983$ . Utilizando a equação [Equação 4.72](#) chegamos ao valor de  $\bar{S}$ :

$$\bar{S} = 185,19$$

Quando  $t$  tende ao infinito a série do PLD, de acordo com a [Equação 4.63](#), converge para:

$$E[S_{t \rightarrow \infty}] = 119,28 \tag{5.3}$$



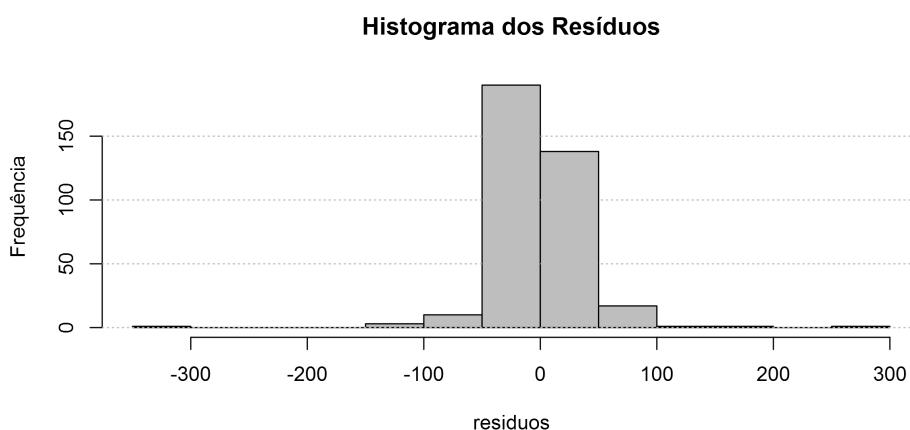


Figura 23 – Histograma dos resíduos do segundo modelo de regressão

Fonte: O autor

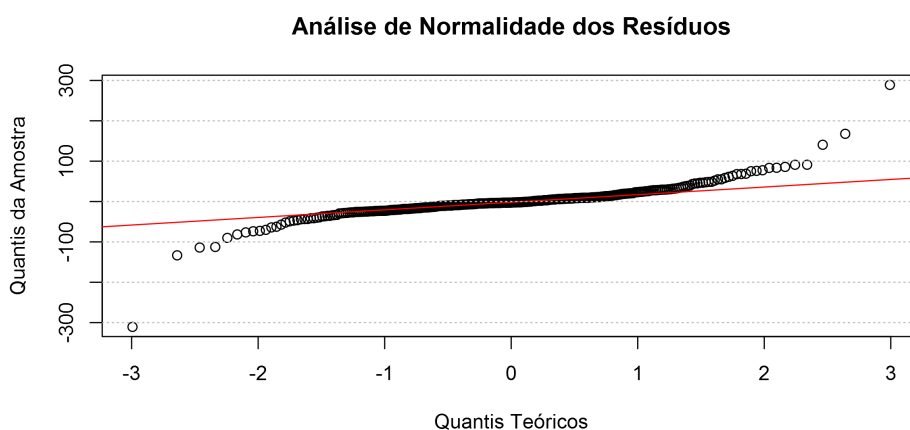


Figura 24 – Análise de normalidade dos resíduos do segundo modelo de regressão

Fonte: O autor

o que é consistente com a preço da energia elétrica de longo prazo no Brasil. Este preço de longo prazo pode ser interpretado como os preços verificados nos leilões de energia realizados pelo governo brasileiro. Em 2013 houve dois leilões de energia A-5 <sup>2</sup>. O primeiro leilão de energia A-5 realizado em 2013 ocorreu em 29/8/2013 e o segundo aconteceu em 13/12/2013 (ANEEL, 2015). De acordo com a ANEEL (2015) (Agência Nacional de Energia Elétrica) o preço médio de venda foi de  $R\$124,97/MWh$  e  $R\$109,93/MWh$ , respectivamente.

A partir destes parâmetros encontramos simulamos 20 vezes, 10.000 caminhos aleatórios para o PLD seguindo o Modelo I de Reversão a Média de Schwartz (1997). Isto foi feito utilizando a Equação 4.64 e consideramos um horizonte de tempo de 104 semanas (2 anos), isto é, simulamos valores para 2013 e 2014. Consideramos novamente  $S_0 = 349,93$  que foi o último valor para o

<sup>2</sup> Leilões de energia A-5 significa que os vencedores do certame são obrigados a começarem a gerar a energia negociada no leilão 5 anos adiante, neste caso em 2018.

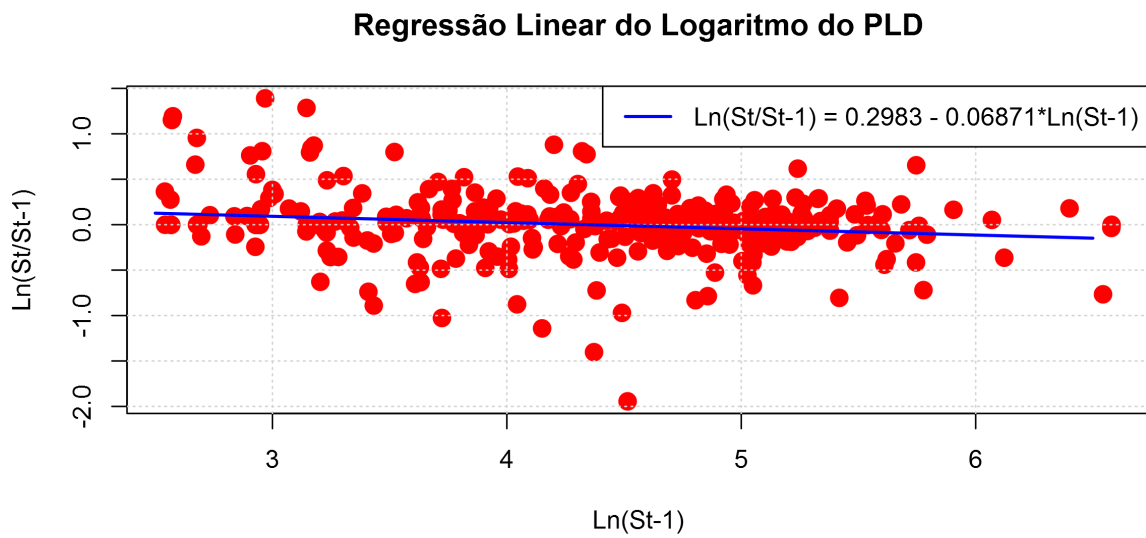


Figura 25 – Regressão Linear do Logaritmo do PLD

Fonte: O autor

PLD em 2012.

A Figura 26 ilustra dez destes caminhos.

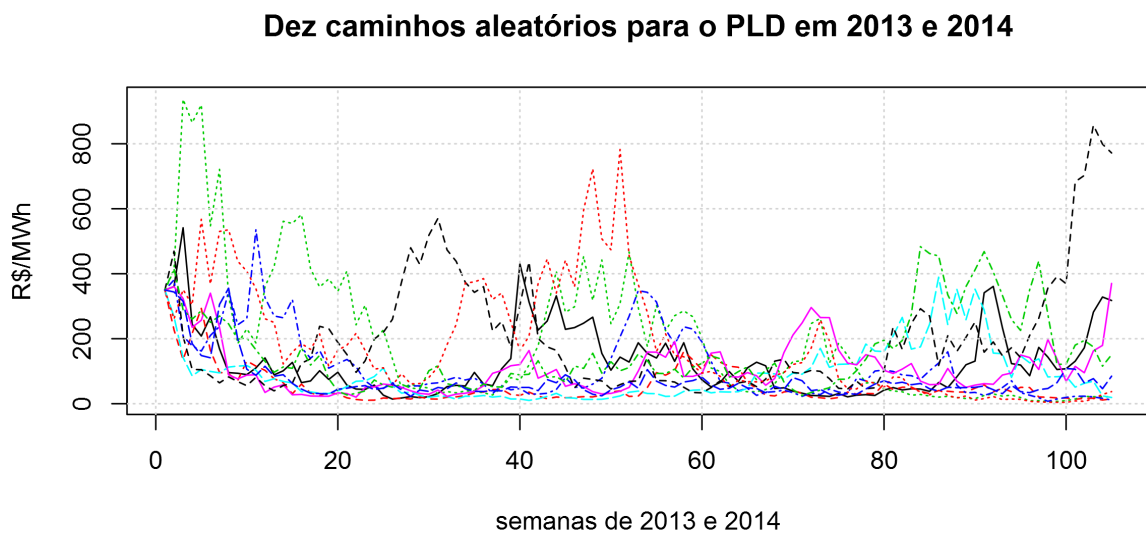


Figura 26 – Dez caminhos aleatórios para o PLD em 2013 e 2014

Fonte: O autor

A Figura 27 mostra, com 95% de confiança, o histograma dos valores simulados para o PLD 104 semanas a frente, isto é, valores para o PLD ao final de 2014.

Conforme dito anteriormente o objetivo deste trabalho é estimar valores do PLD para as quatro (ou cinco) semanas do próximo mês partindo do valor do PLD da última semana do mês

### Valores estimados do PLD ao final de 2014

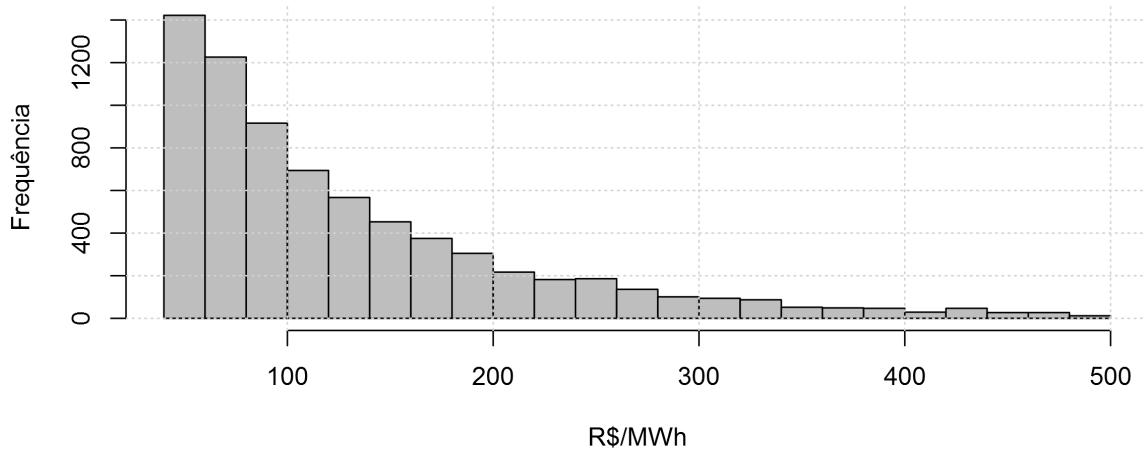


Figura 27 – Histograma dos valores estimados para o PLD ao final de 2014

Fonte: O autor

anterior.

Agora simulamos novamente 20 vezes, 10.000 caminhos aleatórios para o PLD segundo o Movimento de Reversão a Média de um único fator estocástico de [Schwartz \(1997\)](#), porém simulamos valores para o PLD um mês a frente. Isto é, estimamos os valores do PLD para as quatro (ou cinco) semanas do mês a frente partindo do valor do PLD da última semana do mês anterior. A [Figura 28](#) ilustra dez destes caminhos.

### Dez caminhos aleatórios para o PLD em 2013 e 2014

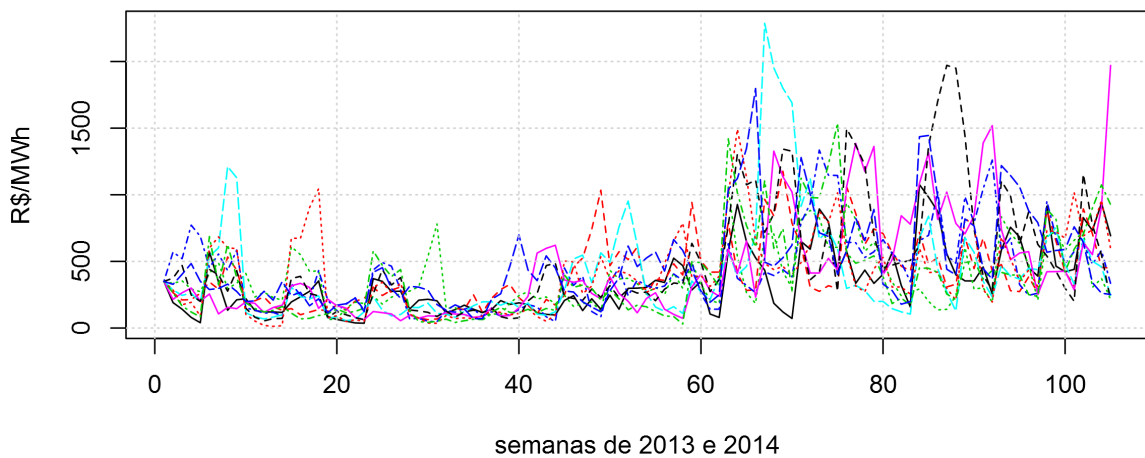


Figura 28 – Dez caminhos aleatórios para o PLD considerando 1 mês a frente

Fonte: O autor

Apresentamos as previsões para 2013 e 2014 na [subseção 5.3.3](#) junto com as previsões dos outros três modelos.

### 5.3.2.2 Segundo Modelo de Reversão a Média

Neste segundo modelo incorporamos ao modelo de reversão a média de [Schwartz \(1997\)](#) uma componente de sazonalidade conforme proposto por [Lucia e Schwartz \(2002\)](#).

Utilizamos os coeficientes dos meses obtidos no segundo modelo de regressão linear ([Tabela 17](#)) e os adicionamos ao movimento de reversão a média de Schwartz ([Equação 4.64](#)) conforme o mês do ano de acordo com a [Equação 5.4](#):

$$S_t = \exp \left( \ln S_{t-1} e^{-\eta \Delta t} + \left( \ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) (1 - e^{-\eta \Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta \Delta t}}{2\eta}} N(0,1) \right) + \sum \beta_i M_{it} \quad (5.4)$$

em que:  $M_{it} = 1$ , se a data  $t$  pertence ao  $i$ -ésimo mês, caso contrário  $M_{it} = 0$ .  $\beta_i$  é igual ao coeficiente  $i$  da [Tabela 17](#) e  $i=0,1,2,\dots,11$ .

Apresentamos as previsões para 2013 e 2014 deste segundo movimento de reversão a média na [subseção 5.3.3](#) junto com as previsões dos outros três modelos.

### 5.3.3 Acurácia dos Modelos

Estimamos o PLD para 2013 e 2014 conforme 4 modelos distintos: (i) uma Regressão Linear com os coeficientes dos anos, meses e o valor do PLD no tempo anterior, (ii) uma Regressão Linear com apenas os coeficientes dos meses e o valor do PLD no tempo anterior, (iii) o Movimento de Reversão a Média de um único fator estocástico de [Schwartz \(1997\)](#) e (iv) o Movimento de Reversão a Média de um único fator estocástico de [Schwartz \(1997\)](#) com a adição de componentes que descrevem a sazonalidade dos dados. Os resultados são mostrados na [Figura 29](#), [Figura 30](#), [Figura 31](#) e na [Figura 32](#), respectivamente. Em ambos os modelos estimamos valores para o PLD um mês a frente. Isto é, estimamos os valores do PLD para as quatro (ou cinco) semanas do mês a frente partindo do valor do PLD da última semana do mês anterior e comparamos com os valores reais do PLD neste mês a frente.

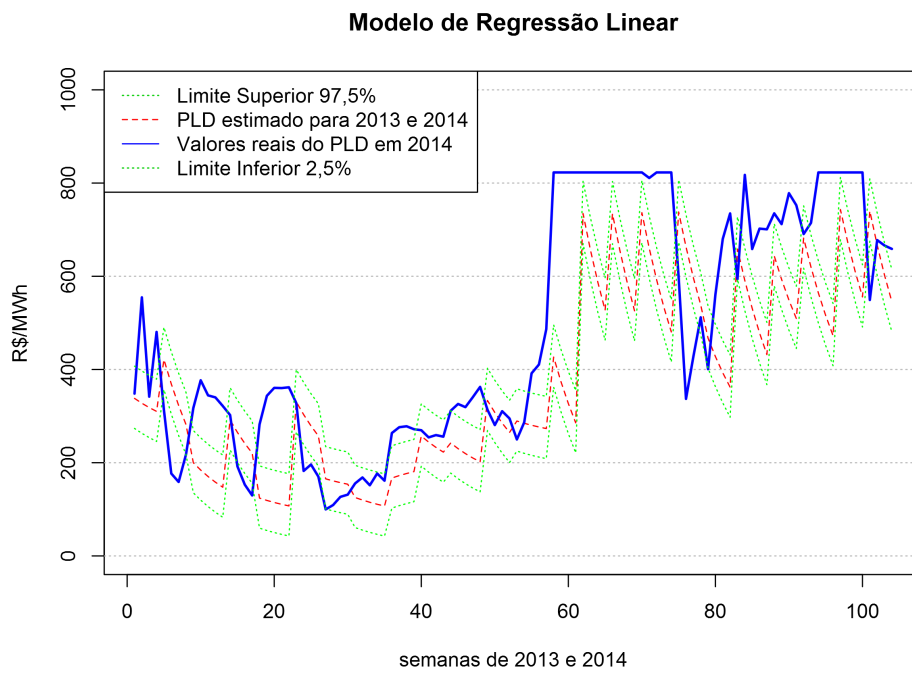


Figura 29 – Modelo de regressão linear I - Previsão do PLD para 2013 e 2014

Fonte: O autor

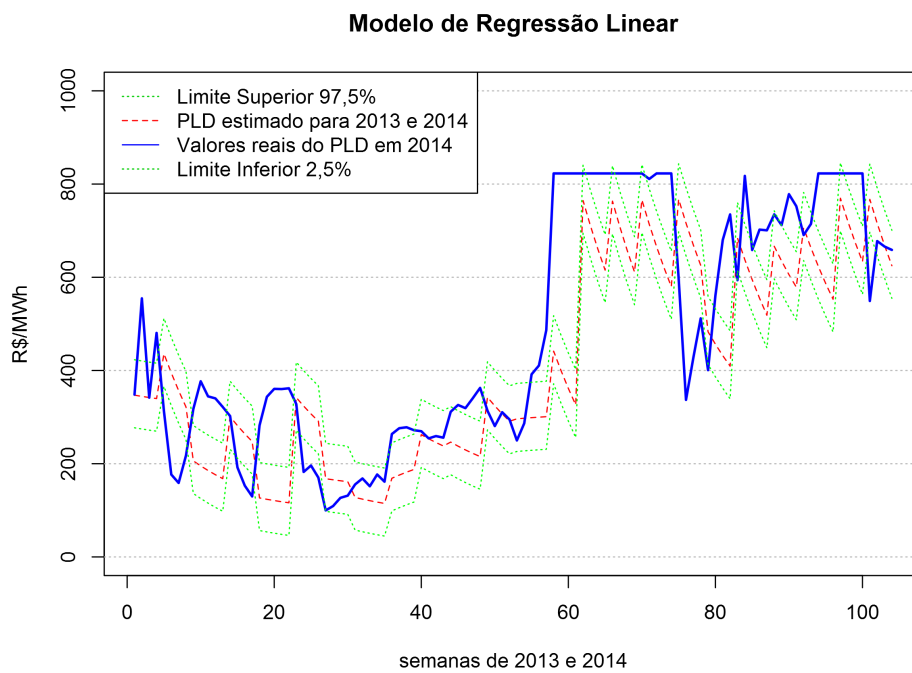


Figura 30 – Previsão do PLD para 2013 e 2014 conforme o segundo modelo de regressão linear

Fonte: O autor

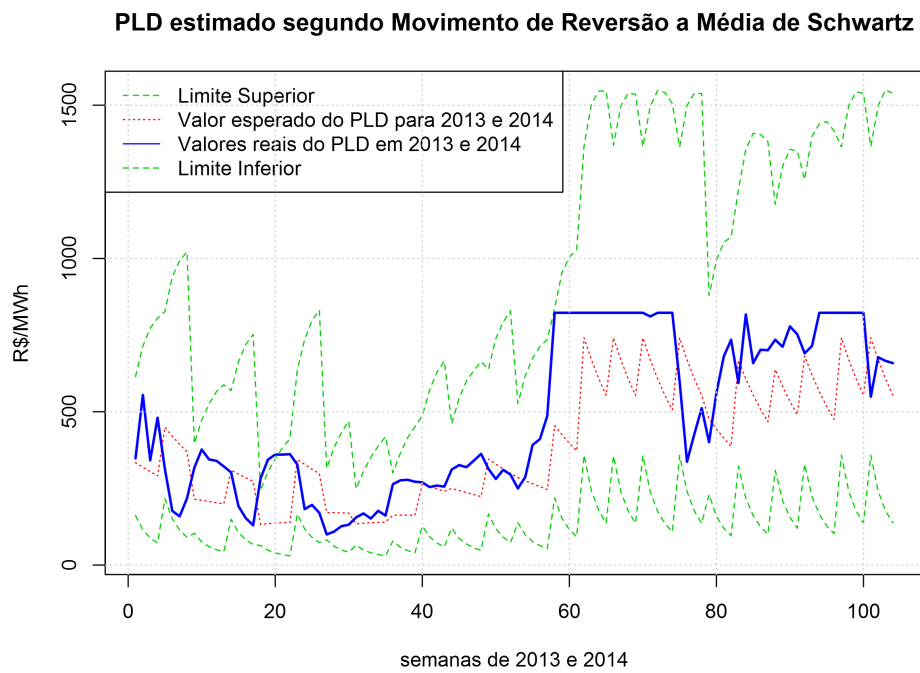


Figura 31 – Modelo de Schwartz - Previsão do PLD para 2013 e 2014

Fonte: O autor

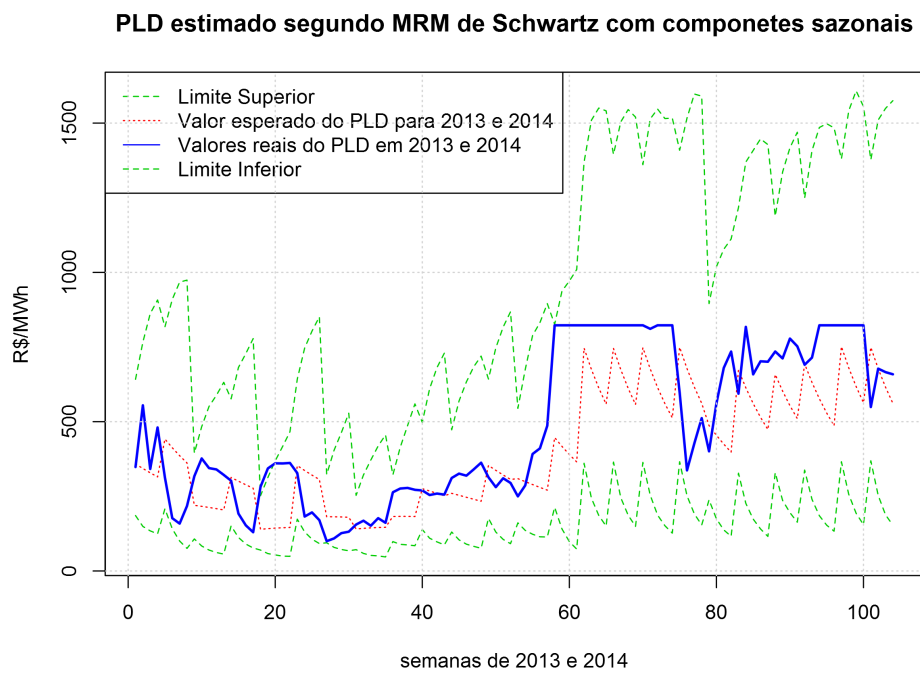


Figura 32 – Modelo de Schwartz com componentes sazonais - Previsão do PLD para 2013 e 2014

Fonte: O autor

A previsão do PLD para 2013 foi mais assertiva do que a previsão para 2014 em todos os 4 modelos. Uma explicação para isso é o fato de que em 2014, o PLD bateu seu valor recorde (R\$822.83/MWh) o que é um valor bastante atípico quando olhamos a sua série histórica. Isto aconteceu, principalmente, por causa das precipitações muito abaixo da média histórica verificada na região sudeste. Sendo assim, nossas estimativas para 2014 apresentaram um erro maior.

O Erro Quadrático Médio de Previsão (MSPE, detalhado na [seção 4.2](#)) do primeiro modelo de regressão para o ano de 2013 foi:  $MSPE_{2013regressao} = 120,06$ , já para o ano de 2014 o erro foi de:  $MSPE_{2014regressao} = 233,34$ . O Erro Quadrático Médio de Previsão, considerando o ano de 2013 e 2014 foi de:  $MSPE_{2013e2014regressao} = 185,56$ .

Já o Erro Quadrático Médio de Previsão do modelo II de regressão linear para o ano de 2013 foi:  $MSPE_{2013regressao} = 119,46$ , já para o ano de 2014 o erro foi de:  $MSPE_{2014regressao} = 198,27$ . O erro considerando o ano de 2013 e 2014 foi de:  $MSPE_{2013e2014regressao} = 163,68$ .

O Erro Quadrático Médio de Previsão do primeiro modelo de [Schwartz \(1997\)](#) para o ano de 2013 foi de:  $MSPE_{2013Schwartz} = 121,84$  e para o ano de 2014 foi de:  $MSPE_{2014Schwartz} = 218,96$ . O MSPE considerando os dois anos foi de:  $MSPE_{2013e2014Schwartz} = 177,19$ .

Já o Erro Quadrático Médio de Previsão do modelo de [Schwartz \(1997\)](#) com as componentes sazonais para o ano de 2013 foi de:  $MSPE_{2013Schwartz} = 116,80$  e para o ano de 2014 foi de:  $MSPE_{2014Schwartz} = 214,66$ . O Erro Quadrático Médio de Previsão considerando os dois anos foi de:  $MSPE_{2013e2014Schwartz} = 172,80$ .

A [Tabela 19](#) resume estes valores, como podemos ver o segundo modelo de regressão linear foi o modelo que apresentou o menor erro quadrático médio de previsão se considerarmos o ano de 2013 e 2014 juntos. Se considerarmos apenas o ano de 2013, o segundo modelo de reversão a média apresentou o melhor resultado. E se, avaliarmos apenas o ano de 2014 o segundo modelo de regressão linear também foi aquele que apresentou o menor erro.

Além disto, nos modelos de regressão linear temos limites superiores e inferiores mais estreitos do que nos modelos de reversão a média, isto é, a variância do PLD nos modelos de regressão linear é menor do que a variância nos modelos de reversão a média.

Tabela 19 – comparação dos modelos pelo MSPE

Modelos	MSPE 2013	MSPE 2014	MSPE 2013 e 2014
Modelo de Regressão Linear I	120,06	233,34	185,56
Modelo de Regressão Linear II	119,46	198,27	163,68
MRM de Schwartz I	121,84	218,96	177,19
MRM de Schwartz II	116,80	214,66	172,80

Fonte: O autor

A [Figura 33](#) compara o erro absoluto das previsões do PLD para 2013 e 2014 dos quatro modelos analisados. Nesta figura consideramos a diferença em módulo entre o valor real do PLD em 2013 e 2014 e o valor do PLD projetado para 2013 e 2014 conforme cada um dos 4 modelos analisamos. Isto é, mostramos a diferença entre o valor real e o valor estimado. O segundo modelo

de regressão linear foi o modelo que teve o menor erro entre o valor estimado e o valor real do PLD.

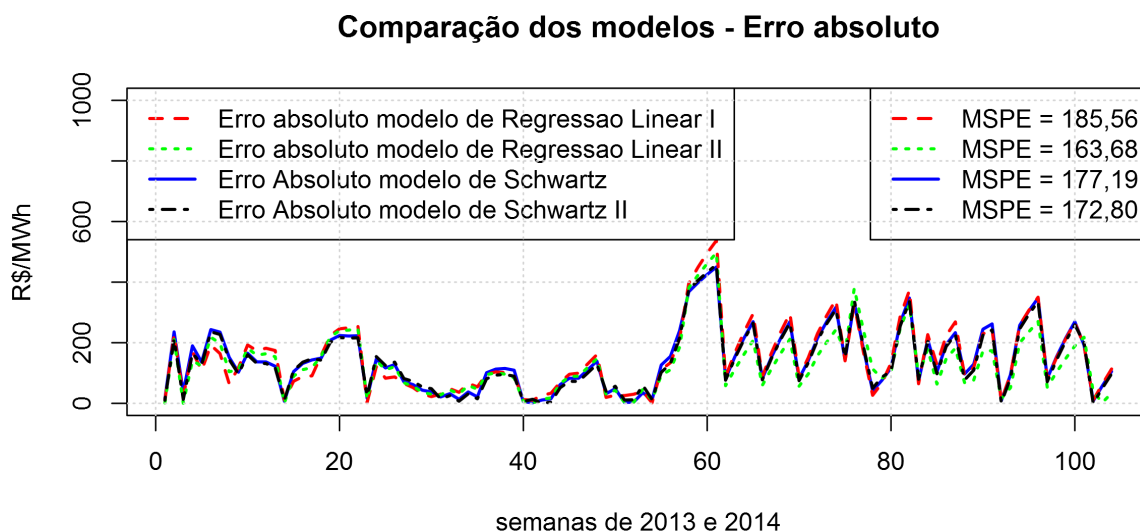


Figura 33 – Comparação entre o erro absoluto dos quatro modelos analisados

Fonte: O autor

De acordo com a nossa metodologia proposta, de escolher o modelo que apresentou o menor Erro Quadrático Médio de Previsão, escolhemos o segundo modelo de regressão linear como aquele mais adequado para realizarmos previsões futuras do PLD.

Entretanto, o PLD, assim como outras commodities, apresentam eventualmente alguns choques nos preços o que é difícil de prever e de se modelar.

O objetivo de modelarmos a série do PLD por quatro modelos diferentes é verificar qual destes modelos melhor descreve o comportamento do PLD para assim fazermos análises, projetar preços futuros e assim valorarmos uma opção de alternância.

No entanto, nem sempre o modelo utilizado reflete perfeitamente o que acontece na realidade. Buscamos um modelo que possa refletir o mais próximo possível o comportamento da série do PLD. Desta forma, estimar preços futuros do PLD com a melhor precisão possível nos auxiliaria a tomar decisões melhores embasadas.



# 6 Formulação para Avaliar a Estratégia de Produção de uma Empresa Eletrointensiva

## 6.1 Suposições adotadas

Como mencionado no [Capítulo 1](#) o objetivo do trabalho é utilizar a abordagem de opções reais, mais especificamente a opção de alternância (*switch option*), para determinar o valor da flexibilidade de um desligamento parcial e temporário em usinas eletrointensivas, semelhante ao que é discutido no trabalho de [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#). Esta ferramenta poderia auxiliar empresas eletrointensivas a definir uma estratégia ótima de produção levando em consideração as incertezas futuras do preço *spot* da energia elétrica.

Para avaliarmos o valor da opção de alternância, entre a venda da energia elétrica para o sistema ou a produção do produto por parte da indústria, utilizamos o modelo de regressão linear que foi o modelo que apresentou o melhor desempenho no [Capítulo 5](#). Em seguida, avaliamos o valor da opção de alternância através do modelo de reversão a média de Schwartz, que é o modelo bastante utilizado na literatura para o modelamento de commodities como ocorre nos trabalhos de [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#) e [Oliveira et al. \(2014\)](#), e então comparamos os resultados obtidos com os resultados do modelo de regressão linear.

Uma novidade deste trabalho, além do modelamento da série do PLD por uma regressão linear, é que consideramos os estágios de decisões mensalmente, isto é, no final de cada mês decidimos qual será a estratégia de produção da empresa para o próximo mês diferente do que consideram [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#) onde os estágios de decisões são semestrais. Além disto, tomamos a decisão com base no valor esperado do PLD para o próximo mês, em oposto ao que fazem [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#) onde toma-se a decisão depois que o valor do PLD é conhecido. E por fim, consideramos o PLD variando semanalmente, tal qual ocorre na prática, divergente de [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#) onde os autores consideram que o PLD é constante por 6 meses.

Para efeitos de ilustração, utilizaremos neste trabalho, assim como fazem [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#), dados da indústria de alumínio que é uma das indústrias que mais consomem energia elétrica em seu processo produtivo. O custo da eletricidade pode chegar ate 35% do custo de produção do alumínio ([ABRACE, 2015](#)).

Consideramos o preço do alumínio como uma constante e conforme a média de longo prazo dado por [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#): \$2.513,16 a tonelada de alumínio. Desta forma, a única variável estocástica considerada no trabalho é o preço da energia elétrica de curto prazo, ou seja, o PLD ([seção 2.4](#)). A [Tabela 20](#) mostra nossas suposições adotadas, que estão relacionadas, de forma aproximada, com os dados propostos por [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio](#)

(2015).

Tabela 20 – Suposições sobre a indústria de alumínio

Consumo de eletricidade	16 MWh/ton de Alumínio
Preço da energia firmado em contrato	R\$ 100,00/MWh
Capacidade Instalada da indústria disponível para desligamento	40.000 toneladas de alumínio por mês

Fonte: adaptado de Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio (2015)

Consideramos neste trabalho que a indústria teria uma certa porcentagem da capacidade instalada que poderia ser desligada e religada conforme a estratégia de produção. Isto é, por exemplo, uma indústria poderia operar com três turnos ou então decidir trabalhar com apenas dois turnos. Ou ainda, uma siderúrgica poderia optar por operar com três alto fornos ou com somente dois.

No momento que decidimos por suspender temporariamente a produção e vendermos a energia elétrica para o mercado ao PLD, poderíamos, então, realizar manutenções preventivas nos equipamentos e máquinas.

A Tabela 21 mostra as receitas e os custos envolvidos com a produção e venda do alumínio e a Tabela 22 mostra os custos envolvidos com a opção de suspendermos a venda de alumínio para realizarmos a venda de energia elétrica no mercado de curto prazo. Os dados foram baseados, de forma aproximada, no trabalho de Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio (2015) (diferentemente dos autores que consideram os dados em dólares, utilizamos neste trabalho os dados em reais, considerando o valor de \$1,00 aproximadamente igual a R\$3,00).

Tabela 21 – Resultado Operacional da Indústria com a venda de Alumínio

Suposições	R\$/ton
Preço de Venda do Alumínio	7.500,00
Custo da Alumina	2.300,00
Custo da Energia Elétrica	1.600,00
Outros custos variáveis	600,00
Custos Fixos	1.300,00
Resultado Operacional	1.700,00

Fonte: adaptado de Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio (2015)

Tabela 22 – Resultado Operacional da Indústria com a venda de Energia

Suposições	R\$/ton
Preço de Venda da Energia Elétrica	16*PLD
Custo da Energia Elétrica	1.600,00
Custos Fixos	1.300,00
Resultado Operacional	(16*PLD)-2.900,00

Fonte: adaptado de Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio (2015)

## 6.2 Modelos utilizados

### 6.2.1 Modelo de regressão linear

O modelo que utilizamos para projetar os valores esperados do PLD para o ano de 2015 foi o modelo de regressão linear obtido no Capítulo 5 conforme descrito pela Equação 6.1:

$$\widehat{PLD}_t = \hat{\beta}_{jan} + \hat{\beta}_{fev}X_1 + \hat{\beta}_{mar}X_2 + \hat{\beta}_{abr}X_3 + \hat{\beta}_{mai}X_4 + \hat{\beta}_{jun}X_5 + \hat{\beta}_{jul}X_6 + \hat{\beta}_{ago}X_7 + \hat{\beta}_{set}X_8 + \hat{\beta}_{out}X_9 + \hat{\beta}_{nov}X_{10} + \hat{\beta}_{dez}X_{11} + \hat{\beta}_{PLD_{t-1}}PLD_{t-1} \quad (6.1)$$

Em que as variáveis:  $X_1, X_2, \dots, X_{11}$  são variáveis binárias, isto é, assumem valor igual a 1 se o valor do PLD estimado pertence à aquele determinado mês, ou, 0 caso contrário. E a variável  $PLD_{t-1}$  é o valor do PLD no instante anterior. Consideramos o  $PLD_{t=0} = 658.73$ , que é o valor do PLD na última semana de dezembro de 2014. Os coeficientes (betas) utilizados estão mostrados na Tabela 23

Tabela 23 – Coeficientes (betas) utilizados no modelo de regressão

Coeficientes estimados	Valor
$\hat{\beta}_{jan}$	24,1628
$\hat{\beta}_{fev}$	-31,6788
$\hat{\beta}_{mar}$	-18,9427
$\hat{\beta}_{abr}$	-20,1257
$\hat{\beta}_{mai}$	-17,3285
$\hat{\beta}_{jun}$	-16,0549
$\hat{\beta}_{jul}$	-13,4918
$\hat{\beta}_{ago}$	-17,9192
$\hat{\beta}_{set}$	-4,32781
$\hat{\beta}_{out}$	-12,689
$\hat{\beta}_{nov}$	-13,8719
$\hat{\beta}_{dez}$	-16,2681
$\hat{\beta}_{PLD_{t-1}}$	0,92283

Fonte: o autor

Posteriormente para simularmos valores do PLD para 2015 e valorarmos a opção de

alternância, utilizamos a [Equação 6.2](#):

$$\begin{aligned} \widehat{PLD}_t = & \hat{\beta}_{jan} + \hat{\beta}_{fev}X_1 + \hat{\beta}_{mar}X_2 + \hat{\beta}_{abr}X_3 + \hat{\beta}_{mai}X_4 + \hat{\beta}_{jun}X_5 + \hat{\beta}_{jul}X_6 + \\ & + \hat{\beta}_{ago}X_7 + \hat{\beta}_{set}X_8 + \hat{\beta}_{out}X_9 + \hat{\beta}_{nov}X_{10} + \hat{\beta}_{dez}X_{11} + \hat{\beta}_{PLD_{t-1}}PLD_{t-1} + \epsilon \end{aligned} \quad (6.2)$$

Em que  $\epsilon$  segue uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão igual a 38. Estes valores foram obtidos através dos erros do modelo de regressão obtidos no [Capítulo 5, Figura 23](#). Embora os erros tenham sido rejeitado pelo teste de normalidade de [Shapiro e Wilk \(1965\)](#), fizemos um ajuste com as distribuições de probabilidades mais conhecidas e o melhor ajuste encontrado foi a distribuição normal com média 0 e desvio padrão igual a 38 (utilizamos o software Arena, ferramenta *Input Analyzer*).

### 6.2.2 Modelo de reversão a média de Schwartz

Em seguida simulamos valores do PLD para 2015 e valoramos a opção de *switch* utilizando o modelo de Reversão a Média de [Schwartz \(1997\)](#) obtido no [Capítulo 5](#) e descrito pela [Equação 6.3](#):

$$S_t = exp \left( \ln S_{t-1} e^{-\eta \Delta t} + \left( \ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) (1 - e^{-\eta \Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta \Delta t}}{2\eta}} N(0,1) \right) \quad (6.3)$$

Em que  $\eta = 3,70$ ,  $t = \frac{1}{52}$ ,  $\bar{S} = 185,19$ ,  $\sigma = 2,55$  e  $S_{t-1}$  é o valor do PLD no instante anterior. Consideramos o valor de  $S_{t=0} = 658.73$ , que é o valor do PLD na última semana de dezembro de 2014.

### 6.3 Valor da Opção via Simulação utilizando o Modelo de Regressão Linear

Considere uma indústria que tem a opção de suspender sua produção em uma capacidade instalada de cerca de 40.000 toneladas de alumínio e que ela decida utilizar esta capacidade para a produção de alumínio durante todo o ano de 2015 e que a empresa não considera a possibilidade de vender a energia elétrica ao PLD. Assumimos que o preço do alumínio não varia e que a empresa teria mercado para vender todo o alumínio que produzir. O resultado operacional para o mês de janeiro de 2015 seria de:

$$Result.Operacional_{2015} = R\$1.700,00 \times 40.000ton$$

$$Result.Operacional_{jan} = R\$68.000.000,00 \quad (6.4)$$

Agora vamos considerar o extremo oposto, caso em que a empresa não utiliza a capacidade instalada de 40.000 toneladas para produção e destina a energia elétrica contratada (ou autogerada) e não consumida a venda ao mercado de curto prazo ao valor do PLD. Consideramos o valor inicial do PLD,  $S_0$ , como o valor da última semana de dezembro de 2014, isto é,  $PLD_{t=0} = R\$ 658,73/MWh$ . O valor esperado do PLD para janeiro de 2015 segundo o modelo de regressão linear é mostrado na [Tabela 24](#):

Tabela 24 – Valor esperado do PLD em janeiro de 2015

semanas de jan 2015	Valor esperado PLD
1	R\$ 632,06 / MWh
2	R\$ 607,45 / MWh
3	R\$ 584,73 / MWh
4	R\$ 563,77 / MWh
Valor esperado jan 2015	R\$ 597,00 / MWh

Fonte: o autor

Para chegarmos ao valor esperado do resultado operacional de cada mês deixando de produzir uma tonelada de alumínio e vendendo a energia elétrica não utilizada ao PLD procedemos da seguinte forma: Primeiro multiplicamos o valor da esperança do PLD por 16 *MWh*, que é o valor médio consumido para a fabricação de 1 tonelada de alumínio, conforme mostrado na [Tabela 20](#). Em seguida, subtraímos os custos envolvidos nesta operação (R\$ 2.900,00, como mostra a [Tabela 22](#)) e assim encontramos o resultado operacional da empresa com a venda de energia elétrica para cada tonelada de alumínio não produzido. Para chegarmos ao resultado operacional do mês multiplicamos este valor por 40.000 toneladas, que é a capacidade instalada da indústria a qual consideramos como disponível para suspensão. A [Tabela 25](#) ilustra estes resultados.

Tabela 25 – Valor Esperado do Resultado Operacional da Indústria em janeiro de 2015 com a venda de energia elétrica

Valor Esperado do Resultado Operacional da indústria em janeiro por ton (em R\$)	Valor Esperado do Resultado Operacional em janeiro em R\$
6.652,03	266.081.033,99

Fonte: O autor

Consideramos agora o valor esperado do PLD para cada um dos meses do ano. Para simplificação consideraremos o ano como tendo 48 semanas (4 semanas por mês) e o valor esperado de cada mês será a média das estimativas das 4 semanas. A [Tabela 26](#) ilustra este resultado.

Considerando a [Equação 6.4](#), o resultado operacional com a venda de 100% de alumínio em 2015 seria de R\$ 816 milhões o que é superior ao valor esperado com 100% da venda de energia elétrica, cerca de R\$ 488 milhões. Entretanto, a opção de alternância (*switch option*) se configura como a possibilidade da indústria alternar entre a produção de alumínio e a venda de energia elétrica sempre que esta troca for favorável.

Conforme mostrado na [Tabela 22](#), seria mais vantajoso para a empresa vender energia elétrica ao invés de produzir o alumínio, toda vez que o resultado operacional da empresa com a venda da energia elétrica ultrapassasse o resultado operacional com a venda do alumínio, apresentado na [Tabela 21](#). Isto é:

$$(16 * PLD) - R\$2.900,00 > R\$1.700,00$$

Tabela 26 – Valor esperado do PLD e Resultado Operacional com a venda de energia em 2015

Meses	Valor esperado do PLD em R\$/MWh	Valor Esper. do Resul. Oper. vendendo energia em R\$
jan	597,00	266.081.033,99
fev	445,68	169.238.314,34
mar	325,95	92.607.578,37
abr	252,24	45.434.639,62
mai	203,79	14.422.534,92
jun	175,08	- 3.951.983,09
jul	161,77	- 12.466.040,92
ago	145,07	- 23.154.914,23
set	158,90	- 14.305.610,15
out	166,51	- 9.434.691,77
nov	158,87	- 14.321.462,68
dez	146,32	- 22.358.149,99
2015	244,76	487.791.248,42

Fonte: O autor

$$PLD > R\$287,50 \quad (6.5)$$

Ou seja, sempre que o PLD for maior que  $R\$ 287,50/MWh$  seria mais lucrativo para a indústria vender a energia elétrica do que produzir alumínio. Entretanto, como mencionado anteriormente, a ideia deste trabalho é tomar a decisão de produzir alumínio ou vender a energia para o mês seguinte no final do mês anterior. Isto é, toma-se a decisão do que se produzir sem conhecer os valores do PLD do mês em questão. Desta forma, decidimos a produção do mês de fevereiro tendo como base o valor da energia da última semana de janeiro. Decidimos a produção do mês de março tendo como base o PLD da última semana de fevereiro e assim por diante.

A [Figura 34](#) ilustra a ideia da opção de alternância. Esta figura mostra o resultado operacional da indústria de alumínio vendendo energia de acordo com um único caminho aleatório simulado para o PLD em 2015 e o resultado projetado com a venda de alumínio. Sinalizamos qual deles seria mais lucrativo para a empresa evidenciando a opção de alternância. A [Figura 35](#) mostra um outro resultado de acordo com um outro caminho aleatório simulado para o PLD em 2015.

Utilizando o modelo de regressão linear ([Equação 6.1](#)) obtemos os valores do PLD os quais a partir deles seria mais lucrativo para a indústria vender a energia elétrica ao invés de produzir alumínio de acordo com cada mês do ano. A [Tabela 27](#) mostra o resultado.

A [Tabela 27](#) nos mostra quando seria mais lucrativo paralisar a produção de alumínio e vender a energia elétrica para o sistema. Desta forma, poderíamos aproveitar estes períodos para realizar manutenções preventivas nos equipamentos e máquinas. Temos que, por exemplo, se o PLD na última semana de abril for maior do que  $R\$304,14/MWh$ , o valor esperado do PLD para o mês de maio será maior do que  $R\$287,50/MWh$  e portanto a decisão ótima para maio é não produzir alumínio e vender a energia elétrica para o *grid*. O mês de maio então poderia ser

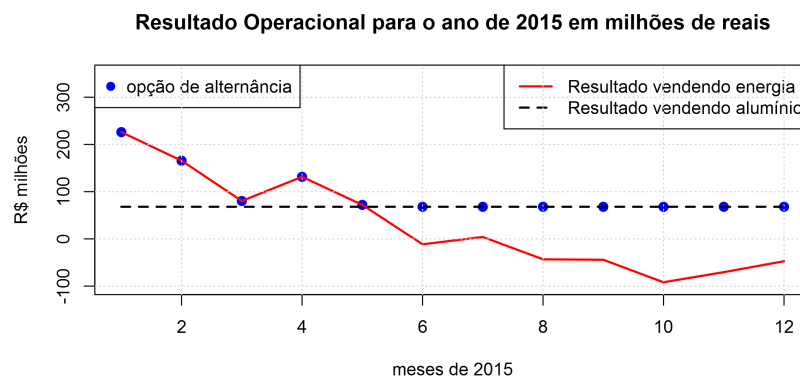


Figura 34 – Resultado Operacional para um caminho do PLD considerando a opção de alternância

Fonte: O autor

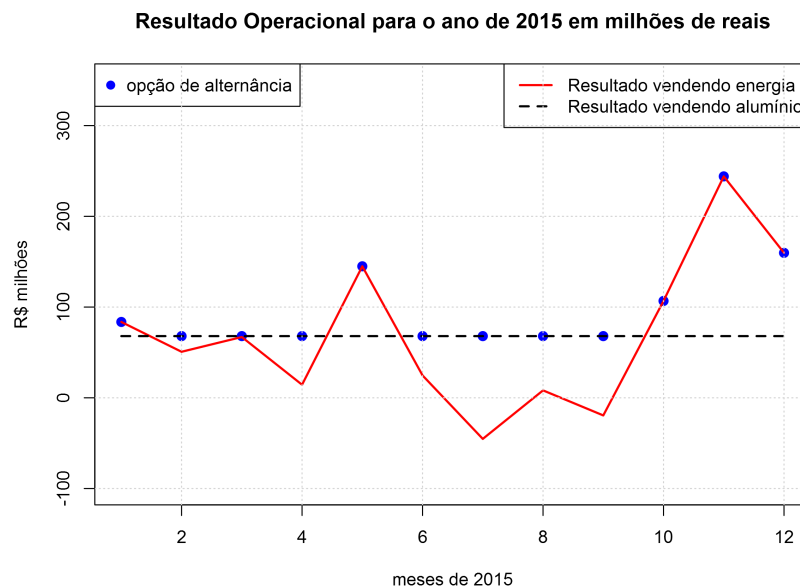


Figura 35 – Resultado Operacional para um caminho do PLD considerando a opção de alternância

Fonte: O autor

usado para realizações de manutenções preventivas.

Simulamos 10.000 caminhos aleatórios conforme o modelo de regressão linear apresentado na [Equação 6.2](#). Conforme mencionado na [seção 2.5](#) a [ANEEL \(2015\)](#) limita o PLD a um valor máximo e mínimo. Estes valores para 2014 foram definidos em R\$822,83 e R\$15,62, respectivamente. Devido a isso, toda vez que o valor simulado do PLD ultrapassar estes limites o valor simulado do PLD será substituído por estes limites. A [Figura 36](#) ilustra 20 destes caminhos.

Assumimos agora que sempre que o PLD for maior do que os valores apresentados na [Tabela 27](#) a indústria deixaria de produzir alumínio no mês seguinte e passaria a vender a energia

Tabela 27 – Valor limite do PLD o qual é mais lucrativo vender a energia elétrica do que produzir alumínio para cada mês do ano segundo o modelo de regressão linear

PLD na última semana do mês de:	Valor limite do PLD na última semana do mês anterior para a produção de alumínio	Valor esperado do PLD no mês de:	Valor esperado do PLD no mês adiante
dez	285,36	jan	287,50
jan	319,69	fev	287,50
fev	305,89	mar	287,50
mar	307,17	abr	287,50
abr	304,14	mai	287,50
mai	302,76	jun	287,50
jun	299,98	jul	287,50
jul	304,78	ago	287,50
ago	290,05	set	287,50
set	299,11	out	287,50
out	300,39	nov	287,50
nov	302,99	dez	287,50

Fonte: O autor

### Vinte caminhos aleatórios para o PLD em 2015

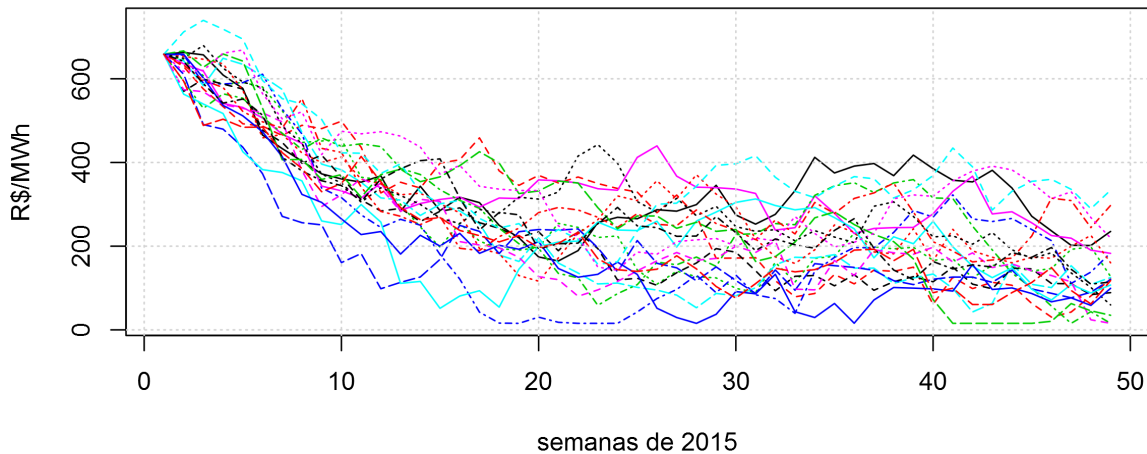


Figura 36 – Vinte caminhos aleatórios do PLD para 2015 segundo o modelo de regressão linear

Fonte: O autor

elétrica ao PLD. Isto é:

$$E[Result.Operacional_{t+1}] = \max(E[Resul_{venda\ de\ alum\ inio_{t+1}}]; E[Resul_{venda\ de\ energia_{t+1}}])$$

Como neste trabalho consideramos o preço do alumínio como constante e a única incerteza sendo o valor do PLD, temos que:

$$E[Result.Operacional_{t+1}] = \max(Resul_{venda\ de\ alum\ inio_{t+1}}; E[Resul_{venda\ de\ energia_{t+1}}]) \quad (6.6)$$



O resultado operacional mensal da indústria de alumínio operando com a capacidade total é:

$$Result.Operacional.Aluminio_{mensal} = R\$1700,00 * 40.000$$

$$Result.Operacional.Aluminio_{mensal} = R\$68.000.000 \quad (6.7)$$

O valor esperado do resultado operacional mensal vendendo 100% da energia é:

$$E[Result.Operacional.Energia_{t+1}] = (16 * E[PLD_{t+1}] - R\$2.900) * 400000 \quad (6.8)$$

Consideramos a decisão de vender energia ou produzir alumínio no mês seguinte conhecendo apenas o valor do PLD da última semana do mês anterior. Desta forma, só optaríamos por vender energia caso o valor esperado do PLD para o próximo mês fosse maior do que  $R\$287,50/MWh$ .

Utilizando o modelo de regressão linear ( [Equação 6.1](#)) isto aconteceria caso o PLD na última semana do mês anterior a decisão fosse superior aos valores descritos na [Tabela 27](#).

Como o valor inicial do PLD ( $PLD_{t=0}$ ) verificado na última semana de dezembro de 2014 foi superior ao valor limite de dezembro, a decisão ótima seria vender energia em janeiro de 2015. Isto é, como o valor do PLD em dezembro de 2014 é igual a  $R\$658,73/MWh$  o valor esperado do PLD em janeiro de 2015 é maior do que  $R\$287,50/MWh$  e portanto a decisão ótima é vender energia em janeiro.

Dado o PLD inicial considerado,  $R\$658,73/MWh$ , utilizando o modelo de regressão linear ( [Equação 6.1](#)) temos que o valor esperado do PLD em janeiro é  $R\$597,00/MWh$  e portanto o resultado operacional esperado para janeiro é  $R\$266.079.348,71$ . Já a decisão sobre o que produzir em fevereiro é tomada baseada nos valores simulados para o PLD na última semana de janeiro de 2015. A decisão sobre o que produzir em março é tomada baseada nos valores simulados para a última semana de fevereiro de 2015, e assim por diante.

Calculamos o resultado operacional da indústria em cada um dos 10.000 caminhos simulados. A [Figura 37](#) mostra o histograma do resultado. No eixo X está representado o resultado operacional em milhões de reais e no eixo Y a frequência de ocorrência.

A [Tabela 28](#) mostra as estatísticas descritivas do resultado operacional com a opção de alternância para o modelo de regressão linear. Como podemos ver o valor mínimo do resultado operacional verificado nos 10.000 caminhos simulados foi de 1014,08 milhões de reais, o que é coerente com o esperado. Isto porque, caso um caminho aleatório registrasse todos os valores para o PLD em 2015 abaixo dos valores apresentados na [Tabela 27](#) seria ótimo vender alumínio nos meses de fevereiro a dezembro. Desta forma, a opção de alternância seria exercida apenas em janeiro e o resultado operacional seria de 1014,08 milhões de reais ([Equação 6.4](#)).

No entanto, verificamos que a opção foi exercida, pelo menos uma vez, em aproximadamente 99% dos caminhos simulados. O valor esperado do resultado operacional com a opção de alternância, também apresentado na [Tabela 28](#), foi de 1.171,34 milhões de reais. Este valor é 43,5% superior ao resultado da empresa vendendo apenas alumínio. O valor da opção de alternância, em milhões de reais, é então:

$$ValorOpção = R\$ 1.171,34 - R\$ 816,00$$

### Resultado Operacional de cada caminho para 2015 com a opção de alternância

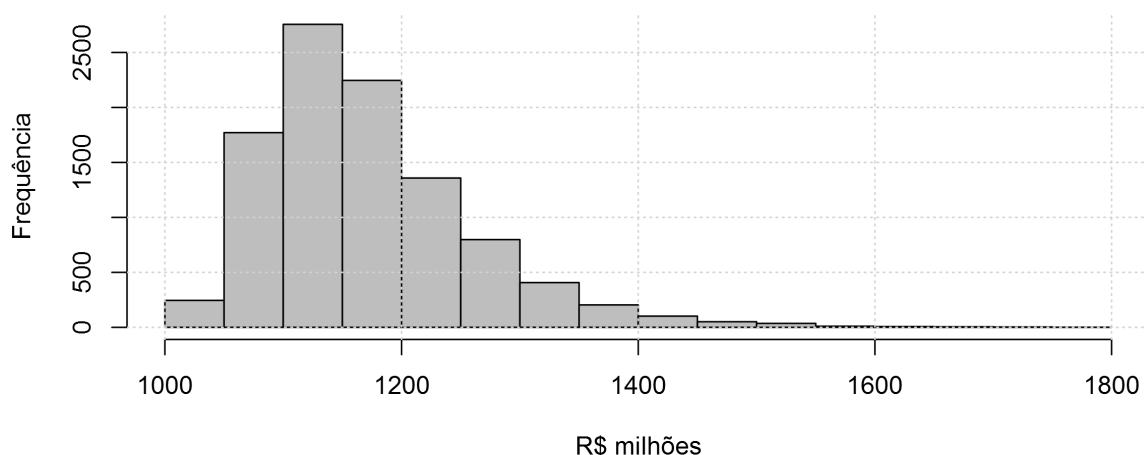


Figura 37 – Histograma de 10.000 simulações do Resultado Operacional para 2015 com a opção de alternância em R\$ milhões segundo o modelo de regressão linear

Fonte: O autor

Tabela 28 – Estatísticas Descritivas do Resultado Operacional em R\$ milhões segundo o modelo de regressão linear

Valor mínimo	1º quartil	Mediana	Média	3º quartil	Valor máximo
1.014,08	1.109,0	1.154,01	1.171,34	1.215,0	1.786,45

Fonte: O autor

$$\text{ValorOpção} = R\$ 355,34 \text{ milhões} \quad (6.9)$$

## 6.4 Análise de sensibilidade

### 6.4.1 Variando o valor do PLD inicial

Nesta seção variamos o valor do PLD inicial e verificamos como o valor da opção de alternância se modifica de acordo com o modelo de regressão linear. Na seção anterior havíamos considerado o PLD inicial como sendo  $PLD_{t=0} = R\$658,73/MWh$  que é o valor da última semana de dezembro de 2014. Porém, nesta semana, o PLD estava em um valor bem acima do valor encontrado para o seu nível de equilíbrio de longo prazo, que foi de  $R\$ 119,28/MWh$  (valor encontrado na [subseção 5.3.2, Equação 5.3](#)). Sendo assim, analisamos como seria o valor da opção de alternância se o valor do PLD inicial fosse  $R\$ 50,00/MWh, R\$ 100,00/MWh, R\$ 150,00/MWh, R\$ 200,00/MWh...R\$ 800,00/MWh$ . A [Tabela 29](#) mostra o resultado.

Podemos ver que até o valor do PLD inicial de  $R\$250,00/MWh$  o valor da opção é bem baixo, o que pode ser explicado pela baixa variabilidade do modelo de regressão. Se temos valores

iniciais para o PLD abaixo de R\$250,00/MWh não é esperado que o PLD atinja valores acima dos limites da Tabela 27. A partir do momento que o valor do PLD inicial ultrapassa o valor de R\$300,00/MWh o valor da opção começa a aumentar de forma linear. Este comportamento pode ser melhor visualizado na Figura 38.

Tabela 29 – Valor da opção de alternância variando o PLD inicial segundo o modelo de regressão linear

$PLD_{t=0}$	Valor da Opção em R\$ milhões
50	2,68
100	2,62
150	3,21
200	3,97
250	5,38
300	17,59
350	50,51
400	87,64
450	130,88
500	178,11
550	229,70
600	286,51
650	342,89
700	405,26
750	466,99
800	535,47

Fonte: O autor

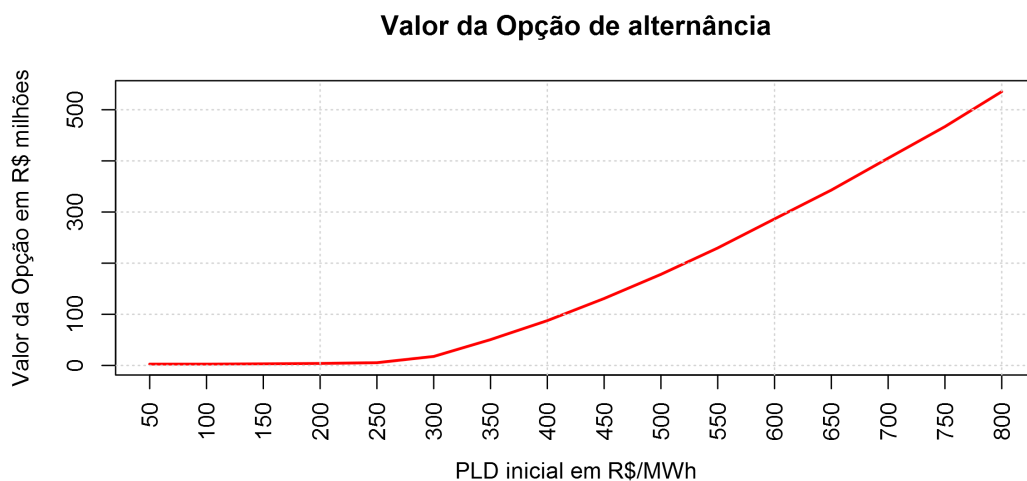


Figura 38 – Valor da Opção de Alternância em R\$ milhões em função do valor inicial do PLD segundo o modelo de regressão linear

Fonte: O autor

### 6.4.2 Valor da opção utilizando o MRM de Schwartz

Agora vamos comparar o valor da opção de alternância utilizando MRM de Schwartz (1997) com o valor obtido com o modelo de regressão linear. Simulamos 10.000 caminhos aleatórios conforme o MRM de Schwartz (Equação 6.3). Consideramos o valor de  $S_0$  como o valor do PLD da última semana de dezembro de 2014, isto é:  $S_0 = 658,73$ . A Figura 39 mostra 20 destes possíveis caminhos do PLD para 2015 segundo o MRM. Da mesma forma que no modelo de regressão linear, consideramos o valor máximo e mínimo para o PLD como R\$822,83 e R\$15,62, respectivamente.

**Vinte caminhos aleatórios para o PLD em 2015**

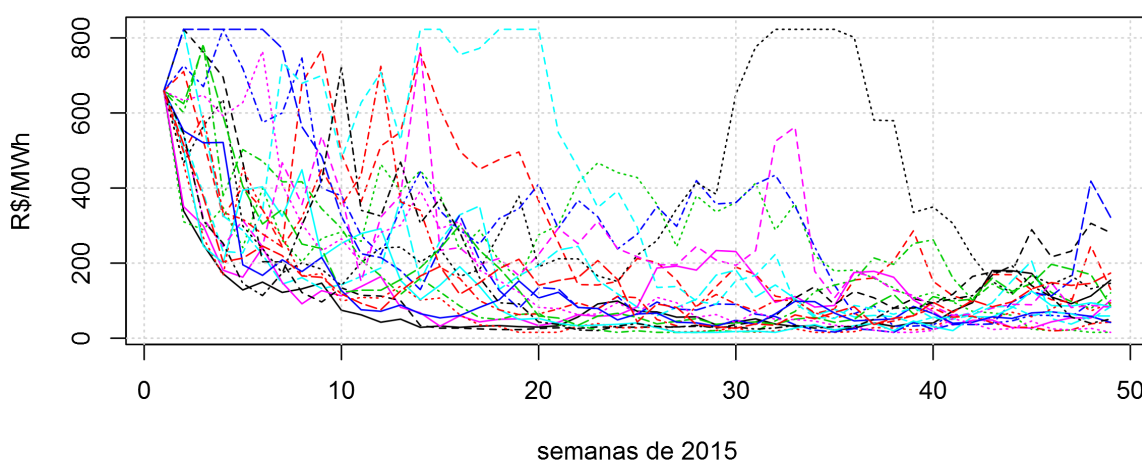


Figura 39 – Vinte caminhos aleatórios do PLD para 2015 segundo o MRM de Schwartz

Fonte: O autor

Calculamos o resultado operacional da indústria em cada um dos 10.000 caminhos simulados. A Figura 40 mostra o histograma do resultado. No eixo X está representado o resultado operacional em milhões de reais e no eixo Y a frequência de ocorrência.

Semelhante ao que foi feito com o modelo de regressão linear, consideramos a decisão de vender energia ou produzir alumínio no mês seguinte conhecendo apenas o valor do PLD da última semana do mês anterior. Desta forma, só optaríamos por vender energia caso o valor esperado do PLD para o próximo mês fosse maior do que  $R\$287.50/MWh$ . Utilizando o modelo de Schwartz (Equação 6.3) isto aconteceria caso o PLD na última semana do mês fosse superior a  $R\$317.30/MWh$ . Como o valor inicial do PLD ( $PLD_{t=0}$ ) verificado na última semana de dezembro de 2014 foi superior a este valor, a decisão ótima seria vender energia em janeiro de 2015.

Dado que o PLD inicial considerado é  $R\$658.73/MWh$  utilizando o MRM de Schwartz (Equação 6.3) temos que o valor esperado do PLD em janeiro é  $R\$532.69/MWh$  e portanto o resultado operacional esperado para janeiro é  $R\$224.922.626,55$ . Já a decisão sobre o que produzir em fevereiro é tomada baseada nos valores simulados para o PLD na última semana de janeiro

### Resultado Operacional de cada caminho para 2015 com a opção de alternância

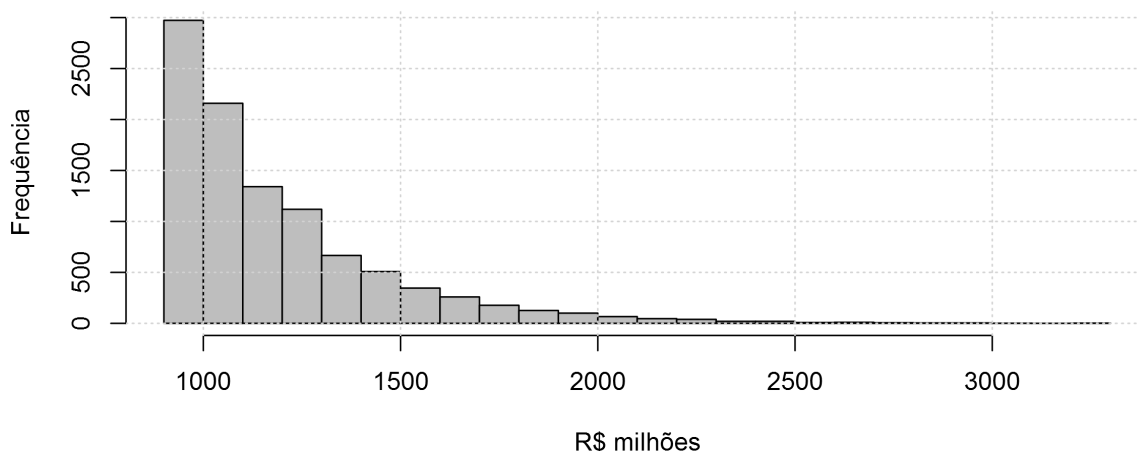


Figura 40 – Histograma de 10.000 simulações do Resultado Operacional para 2015 com a opção de alternância em R\$ milhões segundo o MRM de Schwartz

Fonte: O autor

de 2015. A decisão sobre o que produzir em março é tomada baseada nos valores simulados para a última semana de fevereiro de 2015, e assim por diante.

A [Tabela 30](#) mostra as estatísticas descritivas do resultado operacional com a opção de alternância para o MRM de Schwartz. Como podemos ver o valor mínimo do resultado operacional verificado nos 10.000 caminhos simulados foi de 972,92 milhões de reais, o que é coerente com o esperado. Isto porque, caso um caminho aleatório registrasse todos os valores para o PLD em 2015 abaixo de  $R\$317.30/MWh$  seria ótimo vender alumínio nos meses de fevereiro a dezembro. Desta forma, a opção de alternância seria exercida apenas em janeiro e o resultado operacional seria de 972,92 milhões de reais.

Tabela 30 – Estatísticas Descritivas do Resultado Operacional em R\$ milhões segundo o MRM de Schwartz

Valor mínimo	1º quartil	Mediana	Média	3º quartil	Valor máximo
972,92	983,6	1.092,63	1.193,29	1.288,0	3.285,52

Fonte: O autor

No entanto, verificamos que a opção foi exercida além do mês de janeiro, pelo menos uma vez, em aproximadamente 78% dos caminhos simulados. O valor esperado do resultado operacional com a opção de alternância, também apresentado na [Tabela 30](#), foi de 1.193,29 milhões de reais. Este valor é 46,2% superior ao resultado da empresa vendendo apenas alumínio. O valor da opção de alternância, em milhões de reais, é então:

$$ValorOpção = R\$ 1.193,29 - R\$ 816,00$$

$$\text{ValorOpção} = R\$ 377,29 \text{ milhões} \quad (6.10)$$

#### 6.4.2.1 Variando o valor do PLD inicial no MRM de Schwartz

Nesta seção variamos o valor do PLD inicial e verificamos como o valor da opção de alternância se modifica no MRM de Schwartz. Analisamos como seria o valor da opção de alternância se o valor do PLD inicial fosse  $R\$ 50,00/MWh$ ,  $R\$ 100,00/MWh$ ,  $R\$ 150,00/MWh$ ,  $R\$ 200,00/MWh$ , ...,  $R\$ 800,00/MWh$ . A [Tabela 31](#) mostra o resultado.

Podemos ver que o valor da opção tem um certo comportamento linear até cerca de  $R\$ 300,00/MWh$  e se altera a partir deste valor apresentando um outro comportamento linear com uma maior inclinação, conforme ilustra a [Figura 41](#).

Tabela 31 – Valor da opção de alternância de acordo com o MRM de Schwartz variando o valor do PLD inicial

$PLD_{t=0}$	Valor da Opção em R\$ milhões
50	35,04
100	52,56
150	64,89
200	80,35
250	96,70
300	112,60
350	149,17
400	183,85
450	226,73
500	268,39
550	299,36
600	337,41
650	374,47
700	409,10
750	443,50
800	483,88

Fonte: O autor

## 6.5 Discussão dos Resultados e Comparação entre os Modelos Utilizados

Verificamos que a opção de alternância agrega um valor significativo para a indústria de alumínio tanto utilizando o modelo de regressão linear quanto utilizando o modelo de reversão a média.

Ao valor do PLD inicial considerado neste trabalho ( $R\$ 658,73/MWh$ ) os dois modelos tiveram um resultado bem parecido, tendo o modelo de reversão a média um valor um pouco superior ao modelo de regressão linear.

O que é interessante ressaltar é que no modelo de regressão linear a variância dos dados é menor do que no modelo de reversão a média conforme foi visto no [Capítulo 5](#), [Figura 30](#) e

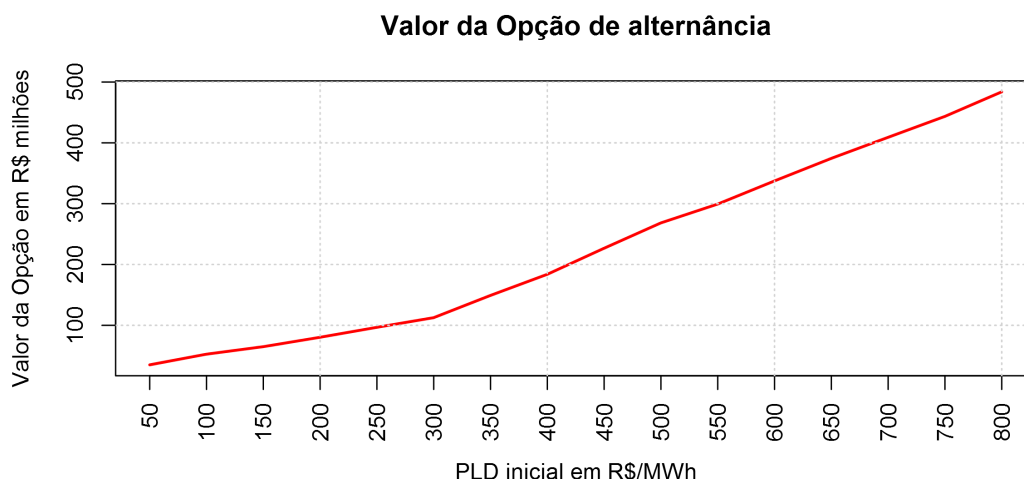


Figura 41 – Valor da Opção de Alternância em R\$ milhões segundo o MRM de Schwartz para diferentes valores do PLD no instante inicial

Fonte: O autor

**Figura 31.** Sendo assim, o modelo de regressão linear apresenta um decaimento mais suave e homogêneo quando o PLD inicial está em um valor alto. É por isso que verificamos que 99% dos caminhos simulados tiveram a opção exercida contra 78% no modelo de reversão a média. No MRM a variância é maior e assim temos valores baixos para o PLD mesmo partindo de um valor inicial alto. No entanto, no modelo de reversão a média também ocorrem valores mais altos do que no modelo de regressão, por isso que, mesmo tendo a opção exercida em 99% dos caminhos simulados, o valor médio da opção no modelo de regressão linear foi menor do que o valor médio da opção no modelo de reversão a média.

A **Figura 42** compara os valores da opção de alternância entre o modelo de regressão linear e o modelo de reversão a média de Schwartz para os diferentes valores do PLD inicial. Como podemos ver o MRM superestima o valor da opção de alternância quando comparamos com o modelo de regressão até cerca de  $R\$700,00/MWh$ . Por isso é fundamental a correta modelagem do ativo para chegarmos a resultados mais precisos.

Podemos inferir que o valor da opção de alternância no modelo de regressão torna-se maior do que no modelo de reversão a média a partir de  $R\$700,00/MWh$  pelo fato de termos limitado o valor do PLD a  $R\$822,00$ . Sendo assim, os valores mais altos gerados pelo modelo de reversão a média são neutralizados e os valores mais baixos, provenientes da maior variância, fazem com que o valor da opção no modelo de regressão se torne maior do que no modelo de reversão a média.

Por fim ressaltamos que existem outras variáveis que não levamos em consideração, o que é uma limitação deste trabalho. Por exemplo, supomos que o preço do alumínio seria constante ao longo do ano, mas na realidade este também segue um comportamento estocástico. Consideramos também que a empresa sempre teria mercado (demanda) para vender todo o alumínio que produzisse bem como não seria penalizada caso deixasse de produzi-lo. E também

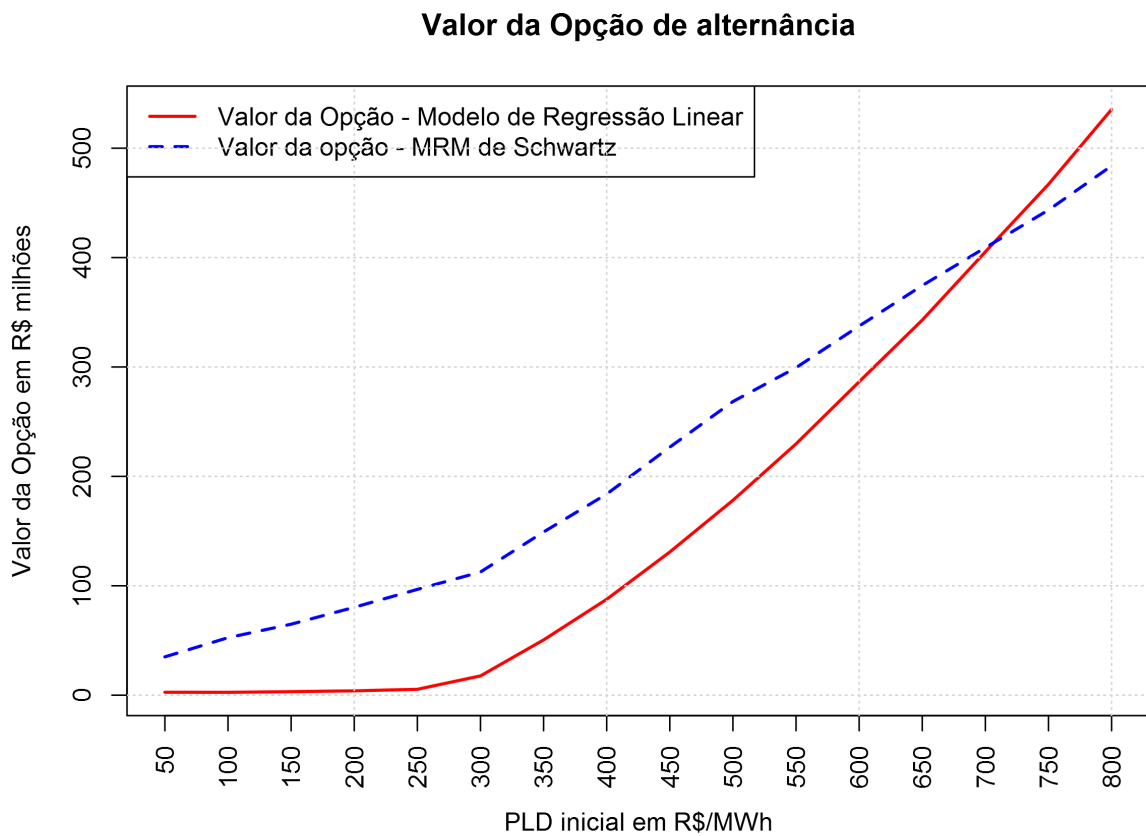


Figura 42 – Comparação entre o modelo de regressão linear e o MRM de Schwartz acerca do valor da opção de alternância em R\$ milhões em função do valor inicial do PLD

Fonte: O autor

não consideramos nenhum custo em paralisar e retomar a produção. Sendo estas limitações sugestões de pesquisa para trabalhos futuros.



## 7 Conclusões e Sugestões

O presente trabalho buscou valorar, em uma indústria de alumínio, uma opção de alternância (*switch option*) entre a produção de alumínio e a venda da energia elétrica para o sistema elétrico.

Primeiramente utilizamos quatro modelos para projetar os preços futuros do preço *spot* da energia elétrica no Brasil, conhecido como Preço de Liquidação das Diferenças. A correta modelagem de uma série histórica impacta diretamente nos resultados obtidos por opções reais. Por exemplo, se utilizamos o Movimento Browniano Geométrico ao invés de um movimento de reversão a média estamos super estimando o valor da opção como mostram [Pindyck \(1999\)](#) e [Bastian-Pinto \(2009\)](#).

Dentre os modelos utilizados para modelar a série do PLD utilizamos dois modelos de regressão linear e dois movimentos de reversão a média. No primeiro modelo de regressão linear utilizamos os coeficientes do anos, meses e uma variável auto regressiva como variáveis explicativas para explicar o PLD e no segundo modelo utilizamos apenas os coeficientes dos meses e uma variável auto regressiva. Verificamos que existe uma sazonalidade nos dados, fato este evidenciado no modelo de regressão em que concluímos que existem médias diferentes do PLD para os diferentes meses dos anos. No primeiro modelo de reversão a média utilizamos o modelo de um único fator estocástico de [Schwartz \(1997\)](#) sendo o PLD a única variável estocástica. Já no segundo modelo de reversão a média utilizamos o modelo de reversão a média de [Schwartz \(1997\)](#) e adicionamos uma componente para descrever a sazonalidade dos dados obtida através do modelo de regressão semelhante ao que fazem [Lucia e Schwartz \(2002\)](#). Os resultados mostraram que o segundo modelo de regressão linear teve um melhor ajuste para projetar preços futuros do PLD.

Sendo assim, consideramos este segundo modelo de regressão linear para valorarmos uma opção de alternância em uma indústria de alumínio. Consideramos uma indústria que tem a possibilidade de suspender parte da sua produção e assim vender a energia elétrica contratada e não utilizada ao preço *spot* da energia elétrica. Verificamos que a opção de alternância agrega um valor significativo ao resultado operacional desta indústria. Em seguida avaliamos o valor da opção de alternância segundo o modelo de reversão a média de um único fator estocástico de [Schwartz \(1997\)](#) e concluímos que este super estima o valor da opção quando comparamos com o modelo de regressão linear.

O resultado deste trabalho pode ser aplicado a outras indústrias eletro intensivas no Brasil e desta forma alavancar o resultado operacional destas empresas ao mesmo instante em que contribuem para aliviar a demanda do setor elétrico no país. Desta forma, empresas que usualmente são grandes consumidoras de energia elétrica passariam a ser fornecedoras o que é ótimo em termos de crise energética no país como aconteceu em 2014 no Brasil e também nos EUA no início dos anos 2000 ([BYKO, 2002](#)). Esta política poderia ser reforçada pelo governo como espécie de racionamento “branco” em oposto a um racionamento compulsório como aconteceu no

Brasil em 2001.

É interessante ressaltar que, como esta estratégia aumenta o resultado operacional esperado de uma indústria eletrointensiva, ela pode fazer com que um investimento que não era viável se torne viável. Por exemplo, um investimento de expansão em uma indústria de alumínio pode ter o Valor Presente Líquido (VPL) negativo, devido as incertezas a cerca da demanda futura por alumínio ou a eventuais quedas no preço do alumínio. No entanto, se considerarmos que nestes períodos turbulentos para a empresa, ela poderia suspender a produção e vender a energia elétrica resultante ao PLD este investimento poderia se tornar viável, fato este explorado no trabalho de [Oliveira et al. \(2014\)](#).

Para isto se consolidar, é preciso que o governo deixe as regras do setor elétrico claras e evite intervenções constantes o que gera mais incerteza para as empresas e investidores, pois como mostra [Dixit e Pindyck \(1994\)](#) a incerteza é o componente que mais afeta (posterga) os investimentos.

Como sugestões para pesquisas futuras, propomos verificar se existe heterocedasticidade nos dados ao longo dos meses e, caso positivo, incorporar uma componente sazonal ao movimento de reversão a média de [Schwartz \(1997\)](#), que também pode ser obtida a partir do modelo de regressão, e multiplicar a variância do modelo de [Schwartz \(1997\)](#) de acordo com o mês do ano de forma similar ao que propõem [Oliveira et al. \(2014\)](#). Ou ainda modelar a série do PLD com um processo de reversão a média com saltos como fazem [Oliveira et al. \(2014\)](#) e [Bastian-Pinto, Brandão e Ozorio \(2015\)](#).

Em relação a precificação da opção de alternância via simulação propomos considerar um custo toda vez que a empresa decidir paralisar a produção ou retomá-la. Ainda nesta linha outra sugestão é penalizar a empresa toda vez que ela decidir não produzir o alumínio e vender a energia, isto porque a empresa poderia estar atrasando a entrega de um cliente ou ainda perdendo espaço para os concorrentes.

Por fim, outra sugestão é considerar o preço do alumínio também como uma variável estocástica e não mais como uma constante, assim modelaríamos duas variáveis estocásticas e não somente o preço *spot* da energia elétrica, de forma análoga ao que fizeram [Bastian-Pinto, Brandão e Hahn \(2009\)](#).

# Referências

- ABRACE. *Associação Brasileira de Grandes Consumidores Industriais de Energia e de Consumidores Livres*. 2015. Acessado em: 28-06-2015. Disponível em: <<http://www.abrace.org.br>>. Citado na página 80.
- AIUBE, F. A. L.; BAIDYA, T. K. N.; TITO, E. A. H. Processos estocásticos dos preços das commodities: uma abordagem através do filtro de partículas. *Revista Brasileira de Economia*, SciELO Brasil, v. 60, n. 3, p. 215–233, 2006. Citado na página 37.
- ANACE. *Associação Nacional dos Consumidores de Energia*. 2015. Acessado em: 28-10-2014. Disponível em: <<http://www.anacebrasil.org.br>>. Citado na página 24.
- ANEEL. *Agência Nacional de Energia Elétrica*. 2015. Acessado em: 09-05-2015. Disponível em: <<http://www.aneel.gov.br>>. Citado 7 vezes nas páginas 18, 20, 21, 28, 29, 72 e 86.
- BASTIAN-PINTO, C.; BRANDÃO, L.; ALVES, M. de L. Valuing the switching flexibility of the ethanol-gas flex fuel car. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 176, n. 1, p. 333–348, 2010. Citado na página 37.
- BASTIAN-PINTO, C.; BRANDÃO, L.; HAHN, W. J. Flexibility as a source of value in the production of alternative fuels: The ethanol case. *Energy Economics*, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 411–422, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 97.
- BASTIAN-PINTO, C. d. L. *Modelagem de Opções Reais com Processos de Reversão à Média em Tempo Discreto: Uma Aplicação na Indústria Brasileira de Etanol*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Tese de Doutorado em Administração de Empresas, PUC-Rio, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 34, 35, 52, 54 e 96.
- BASTIAN-PINTO, C. d. L.; BRANDÃO, L. E. T.; OZORIO, L. d. M. Valuing flexibility in electro-intensive industries: the case of an aluminum smelter. *Produção*, SciELO Brasil, p. a ser publicado, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 17, 39, 80, 81, 82 e 97.
- BLACK, F. The pricing of commodity contracts. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 3, n. 1, p. 167–179, 1976. Citado na página 34.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, JSTOR, p. 637–654, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 48.
- BRANDÃO, L. E. T.; PENEDO, G. M.; BASTIAN-PINTO, C. The value of switching inputs in a biodiesel production plant. *The European Journal of Finance*, Taylor & Francis, v. 19, n. 7-8, p. 674–688, 2013. Citado na página 39.
- BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. Evaluating natural resource investments. *Journal of business*, JSTOR, p. 135–157, 1985. Citado na página 36.
- BUENO, R. D. L. da S. *Econometria de séries temporais*. [S.l.]: Cengage Learning, 2008. Citado na página 56.
- BYKO, M. Tms plenary symposium: Energy reduction in the aluminum industry. *JOM Journal of the Minerals, Metals and Materials Society*, Springer, v. 54, n. 5, p. 39–40, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 96.

- CARTEA, A.; FIGUEROA, M. G. Pricing in electricity markets: a mean reverting jump diffusion model with seasonality. *Applied Mathematical Finance*, Taylor & Francis, v. 12, n. 4, p. 313–335, 2005. Citado na página 37.
- CCEE. *Câmara de Comercialização de Energia Elétrica*. 2015. Acessado em: 09-05-2015. Disponível em: <<http://www.ccee.org.br>>. Citado 7 vezes nas páginas 25, 26, 29, 31, 57, 59 e 60.
- DAS, S. K. et al. Energy implications of the changing world of aluminum metal supply. *JOM*, Springer, v. 56, n. 8, p. 14–17, 2004. Citado na página 38.
- DIAS, B. H. et al. Programação dinâmica estocástica aplicada ao planejamento da operação do sistema elétrico brasileiro através do uso de processamento paralelo. *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, v. 30, n. 08, 2010. Citado na página 20.
- DIAS, M. A. G. *Opções Reais Híbridas com Aplicações em Petróleo*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Tese de Doutorado em Engenharia Industrial, PUC-Rio, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 49, 51 e 52.
- DICKEY, D. A.; FULLER, W. A. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American statistical association*, Taylor & Francis, v. 74, n. 366a, p. 427–431, 1979. Citado 5 vezes nas páginas 11, 55, 57, 59 e 60.
- DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. *Investment under uncertainty*. [S.l.]: Princeton university press, 1994. Citado 9 vezes nas páginas 17, 34, 35, 43, 50, 51, 54, 55 e 97.
- DOCKENDORF, J.; PAXSON, D. Continuous rainbow options on commodity outputs: what is the real value of switching facilities? *The European Journal of Finance*, Taylor & Francis, v. 19, n. 7-8, p. 645–673, 2013. Citado na página 37.
- EFIMOVA, O.; SERLETIS, A. Energy markets volatility modelling using garch. *Energy Economics*, Elsevier, v. 43, p. 264–273, 2014. Citado na página 38.
- ESCRIBANO, A.; RIVERA, J. I. Peña Sánchez de; VILLAPLANA, P. Modeling electricity prices: international evidence. 2002. Citado na página 38.
- EYDELAND, A.; WOLYNIEC, K. *Energy and power risk management: New developments in modeling, pricing, and hedging*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 51.
- FERREIRA, P. G. C. *A estocasticidade associada ao Setor Elétrico Brasileiro e uma nova abordagem para a geração de afluições via Modelos Periódicos Gama*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, PUC-Rio, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 22.
- FIRJAN. *Federação das Indústrias do Estado do Rio de Janeiro*. 2015. Acessado em: 26-04-2015. Disponível em: <<http://www.firjan.org.br>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- FISHMAN, G. S. *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications*. [S.l.]: Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, 1996. Citado na página 40.
- FONSECA, D. A. D. *Avaliação de Projetos de Investimento com Opções Reais: Cálculo de Valor de Opção de Espera de uma Unidade Separadora de Propeno*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado em Finanças e Economia Empresarial, Fundação Getulio Vargas, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 40.
- GIBSON, R.; SCHWARTZ, E. S. Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 45, n. 3, p. 959–976, 1990. Citado na página 36.

- GLASSERMAN, P. *Monte Carlo methods in financial engineering*. [S.l.]: Springer, 2004. Citado 6 vezes nas páginas 40, 42, 43, 45, 46 e 49.
- HUCHZERMEIER, A.; LOCH, C. H. Project management under risk using the real options approach to evaluate flexibility in r&d. *Management Science*, INFORMS, v. 47, n. 1, p. 85–101, 2001. Citado na página 37.
- HULL, J. *Options, futures and other derivatives*. [S.l.]: Pearson education, 2006. Citado 9 vezes nas páginas 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49 e 57.
- INMET. *Instituto Nacional de Meteorologia*. 2015. Acessado em: 26-04-2014. Disponível em: <<http://www.inmet.gov.br>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 31.
- ITÔ, K.; NISIO, M. *ON STATIONARY SOLUTIONS OF A STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION*. [S.l.], 1943. Citado na página 43.
- JOSKOW, P.; KAHN, E. A quantitative analysis of pricing behavior in california's wholesale electricity market during summer 2000. In: IEEE. *Power Engineering Society Summer Meeting, 2001*. [S.l.], 2001. v. 1, p. 392–394. Citado na página 37.
- KLOEDEN, P. E.; PLATEN, E. *Numerical solution of stochastic differential equations*. [S.l.]: Springer, 1992. Citado na página 50.
- KULATILAKA, N. The value of flexibility: the case of a dual-fuel industrial steam boiler. *Financial Management*, JSTOR, p. 271–280, 1993. Citado na página 36.
- LONGSTAFF, F. A.; WANG, A. W. Electricity forward prices: a high-frequency empirical analysis. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 59, n. 4, p. 1877–1900, 2004. Citado na página 38.
- LUCIA, J. J.; SCHWARTZ, E. S. Electricity prices and power derivatives: Evidence from the nordic power exchange. *Review of Derivatives Research*, Springer, v. 5, n. 1, p. 5–50, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 37, 75 e 96.
- LUND, D. The lognormal diffusion is hardly an equilibrium price process for exhaustible resources. *Journal of Environmental Economics and Management*, Elsevier, v. 25, n. 3, p. 235–241, 1993. Citado na página 55.
- LUZ, C. P. M. S. *O mercado a termo de energia elétrica no Brasil: evidências sobre sua dinâmica a partir de um estudo exploratório*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado em Administração de Empresas, PUC-Rio, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 23, 27 e 28.
- MANOLIU, M.; TOMPAIDIS, S. Energy futures prices: term structure models with kalman filter estimation. *Applied Mathematical Finance*, Taylor & Francis, v. 9, n. 1, p. 21–43, 2002. Citado na página 36.
- MEDEIROS, L. de. *Previsão do preço spot no mercado de energia elétrica*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, PUC-Rio, 2004. Citado na página 38.
- MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, JSTOR, p. 141–183, 1973. Citado na página 34.
- NOROUZZADEH, P.; DULLAERT, W.; RAHMANI, B. Anti-correlation and multifractal features of spain electricity spot market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 380, p. 333–342, 2007. Citado na página 37.

- OLIVEIRA, D. L. de et al. Switching outputs in a bioenergy cogeneration project: A real options approach. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Elsevier, v. 36, p. 74–82, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 17, 39, 80 e 97.
- ONS. *Operador Nacional do Sistema*. 2015. Acessado em: 20-10-2014. Disponível em: <<http://www.ons.org.br>>. Citado 5 vezes nas páginas 22, 23, 24, 29 e 30.
- OZORIO, L. d. M. et al. Investment decision in integrated steel plants under uncertainty. *International Review of Financial Analysis*, Elsevier, v. 27, p. 55–64, 2013. Citado na página 39.
- PADDOCK, J. L.; SIEGEL, D. R.; SMITH, J. L. Option valuation of claims on real assets: The case of offshore petroleum leases. *The Quarterly Journal of Economics*, JSTOR, p. 479–508, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 54.
- PEGDEN, C. D.; SADOWSKI, R. P.; SHANNON, R. E. *Introduction to simulation using SIMAN*. [S.l.]: McGraw-Hill, Inc., 1995. Citado na página 40.
- PERRON, P. The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 1361–1401, 1989. Citado na página 55.
- PINDYCK, R. S. The long-run evolution of energy prices. *The Energy Journal*, JSTOR, p. 1–27, 1999. Citado 6 vezes nas páginas 55, 56, 57, 59, 60 e 96.
- REGO, E. E. *Proposta de aperfeiçoamento da metodologia dos leilões de comercialização de energia elétrica no ambiente regulado: aspectos conceituais, metodológicos e suas aplicações*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 57.
- RODRIGUES, R. D. B. *Gerenciamento de Risco no Setor Elétrico Brasileiro através do uso de derivativos*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado em Economia, UFRJ, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 38.
- RYPDAL, M.; LØVSLETTEN, O. Modeling electricity spot prices using mean-reverting multifractal processes. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 392, n. 1, p. 194–207, 2013. Citado na página 37.
- SANTIAGO, L. P.; BIFANO, T. G. Management of r&d projects under uncertainty: A multidimensional approach to managerial flexibility. *Engineering Management, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 52, n. 2, p. 269–280, 2005. Citado na página 37.
- SANTIAGO, L. P.; VAKILI, P. On the value of flexibility in r&d projects. *Management Science, INFORMS*, v. 51, n. 8, p. 1206–1218, 2005. Citado na página 37.
- SCHWARTZ, E.; SMITH, J. E. Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices. *Management Science, INFORMS*, v. 46, n. 7, p. 893–911, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 36, 37 e 53.
- SCHWARTZ, E. S. The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 52, n. 3, p. 923–973, 1997. Citado 16 vezes nas páginas 36, 39, 50, 51, 52, 53, 60, 69, 72, 74, 75, 78, 83, 91, 96 e 97.
- SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, JSTOR, p. 591–611, 1965. Citado 3 vezes nas páginas 65, 69 e 83.
- SLADE, M. E. Valuing managerial flexibility: An application of real-option theory to mining investments. *Journal of Environmental Economics and Management*, Elsevier, v. 41, n. 2, p. 193–233, 2001. Citado na página 36.



- SOUZA, R. C. et al. *Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos no Brasil. Geração de cenários e Otimização*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Ed. PUC-Rio, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 22, 28 e 29.
- TOURINHO, O. A. F. *The valuation of reserves of natural resources: an option pricing approach*. [S.l.]: Berkley: PhD Dissertation in Business Administration, Universidade da Califórnia, 1979. Citado na página 35.
- TRIGEORGIS, L. *Real options: Managerial flexibility and strategy in resource allocation*. [S.l.]: MIT press, 1996. Citado na página 41.
- VARYMPOPIOTIS, G.; TOLIS, A.; RENTIZELAS, A. Fuel switching in power-plants: Modelling and impact on the analysis of energy projects. *Energy Conversion and Management*, Elsevier, v. 77, p. 650–667, 2014. Citado na página 39.
- VELÁSQUEZ, J. D.; DYNER, I.; SOUZA, R. C. Modelado del precio spot de la electricidad en brasil usando una red neuronal autorregresiva. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, SciELO Chile, v. 16, n. 3, p. 394–403, 2008. Citado na página 38.
- VITORINO, R. N. *Percepção de preços e aferição dos riscos de exposição financeira no ambiente de contratação livre*. [S.l.]: São Paulo: Dissertação de Mestrado em Engenharia de Energia e Automação Elétrica, Universidade de São Paulo, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 25, 26, 28 e 29.
- WERON, R.; BIERBRAUER, M.; TRÜCK, S. Modeling electricity prices: jump diffusion and regime switching. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 336, n. 1, p. 39–48, 2004. Citado na página 37.
- WOOLDRIDGE, J. *Introductory econometrics: A modern approach*. [S.l.]: Cengage Learning, 2009. Citado na página 55.
- WORTHINGTON, A.; KAY-SPRATLEY, A.; HIGGS, H. Transmission of prices and price volatility in australian electricity spot markets: a multivariate garch analysis. *Energy Economics*, Elsevier, v. 27, n. 2, p. 337–350, 2005. Citado na página 37.