

Aline Veronese da Silva

Estimação paramétrica de escores de eficiência em 2 estágios:
impacto das variáveis ambientais no ajuste das eficiências
regulatórias das empresas brasileiras de distribuição de energia
elétrica para 4º Ciclo de Revisão Tarifária Periódica

Belo Horizonte

Setembro de 2015

Aline Veronese da Silva

Estimação paramétrica de escores de eficiência em 2 estágios: impacto das variáveis ambientais no ajuste das eficiências regulatórias das empresas brasileiras de distribuição de energia elétrica para 4^o Ciclo de Revisão Tarifária Periódica

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da UFMG como parte dos pré-requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Orientador: Marcelo Azevedo Costa

Belo Horizonte

Setembro de 2015

S586e

Silva, Aline Veronese da.

Estimação paramétrica de escores de eficiência em 2 estágios: impacto das variáveis ambientais no ajuste das eficiências regulatórias das empresas brasileiras de distribuição de energia elétrica para 4º ciclo de revisão tarifária periódica [manuscrito] / Aline Veronese da Silva. - 2015. 112 f., enc.: il.

Orientador: Marcelo Azevedo Costa.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices e anexos: f.104-112.

Bibliografia: f.99-101.

1. Engenharia de produção - Teses. 2. Análise envoltória de dados - Teses. I. Costa, Marcelo Azevedo. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

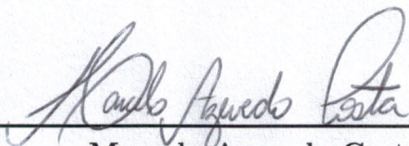
CDU: 658.5(043)

Aline Veronese da Silva

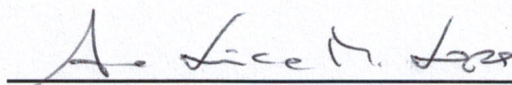
Estimação paramétrica de escores de eficiência em 2 estágios: impacto das variáveis ambientais no ajuste das eficiências regulatórias das empresas brasileiras de distribuição de energia elétrica para 4º Ciclo de Revisão Tarifária Periódica

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da UFMG como parte dos pré-requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção

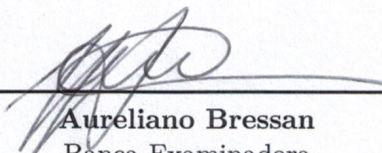
Trabalho aprovado. Belo Horizonte, 10 de Setembro de 2015:



Marcelo Azevedo Costa
Orientador



Ana Lúcia Miranda Lopes
Banca Examinadora



Aureliano Bressan
Banca Examinadora

Belo Horizonte
Setembro de 2015

Agradecimentos

Agradeço a orientação do Prof. Marcelo Azevedo Costa, que com muita paciência, não mediu esforços para o sucesso dessa pesquisa.

Agradeço também à Professora Ana Lúcia Miranda Lopes, por compartilhar seu conhecimento sobre DEA e Regulação, que foram fundamentais para a construção da estrutura do trabalho.

Ao Prof. Aureliano Bressan que, além de aceitar o convite para a banca, também compartilhou sua experiência com análises de DEA em dois estágios, contribuindo decisivamente para a realização da pesquisa.

Aos colegas do LADEC (e agregados) e do NESP, pelo aprendizado em conjunto e pelo companheirismo no dia-a-dia, contribuindo em discussões que ajudaram na elaboração do trabalho.

Agradeço o apoio dos amigos e da minha família, em especial minha irmã Alessandra e meu esposo Matheus, que sempre acreditaram no meu trabalho e me incentivaram durante essa jornada.

Por fim, agradeço à FAPEMIG pelo suporte financeiro para a realização dessa pesquisa.

“Probability is common sense reduced to calculation.”
(Laplace)

Resumo

A regulação do setor de energia tem passado por desafios nos últimos anos. Além de garantir tarifas a preços justos, os reguladores também têm de incentivar ganhos de produtividade e responsabilidade sócio-ambiental das companhias. Por isso, métodos capazes de estimular a competição entre as empresas reguladas, mesmo que indireta, são cada vez mais utilizados. Nesse contexto, as técnicas de *Benchmarking* têm sido amplamente aplicadas por reguladores do setor de energia. Esses modelos têm como objetivo fazer uma comparação entre empresas de um mesmo segmento e definir um escore de eficiência relativa, apontando quais estão na **fronteira de eficiência** e são, por isso, o *benchmark* do setor. Técnica de *Benchmarking* usada por vários reguladores, o *Data Envelopment Analysis* (DEA) é aplicado desde 2011 pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) como parte do modelo regulatório do setor de distribuição de energia. DEA é um método não-paramétrico que utiliza programação linear para definir o escore de eficiência relativo de firmas comparáveis. Esse escore é utilizado pelo regulador como o balizador do custo operacional eficiente para cada concessionária, incluído como parte da tarifa a ser cobrada do consumidor. O DEA pressupõe que as empresas comparadas tenham iguais insumos e produtos, além de estarem submetidas às mesmas condições e requisitos. Em aplicações práticas, entretanto, é comum observar que empresas sujeitas a diferentes ambientes tenham de ser comparadas. Uma abordagem alternativa para lidar com diferenças ambientais é a correção dos escores de eficiência em uma análise de segundo estágio que, basicamente, busca estimar o impacto do ambiente e reduzi-lo do escore gerado pelo DEA. A técnica de estimação aplicada na análise de segundo estágio, contudo, pode ter influência decisiva no resultado final do escore de eficiência. Por isso, o objetivo desse trabalho é avaliar o impacto da aplicação de diferentes técnicas de estimação de parâmetros nos escores de eficiência gerados a partir do DEA. Foi analisado o modelo DEA apresentado pela ANEEL no 4º Ciclo de Revisão Tarifária Periódico, e constatou-se que as técnicas de segundo estágio mais usadas na literatura, Mínimos Quadrados (OLS) e Regressão Tobit, provocam um efeito de reversão dos escores à média da amostra, independentemente da combinação de variáveis ambientais. Foram aplicadas outras técnicas de estimação, como a abordagem que condiciona a ineficiência gerencial ao erro aleatório observado, conforme proposto por [Banker e Natarajan \(2008\)](#). Essa abordagem foi aplicada em duas maneiras: na primeira, foi mantida a distribuição de probabilidade do erro aleatório conforme a proposta dos autores, enquanto que na segunda, foi utilizada uma estrutura do erro igual à do SFA. A segunda estrutura mostrou ajustes melhores que a primeira. O emprego dessa abordagem apresentou resultados melhores que as técnicas de OLS e Tobit, já que não provocou uma simples reversão à média da amostra. Ainda assim, há muitos modelos viáveis, o que pode influenciar a tomada de decisão do regulador. Por fim, foi testada ainda uma técnica de correção de escores em três estágios, de acordo com a proposta de [Estelle, Johnson e Ruggiero \(2010\)](#). Essa abordagem resultou em escores superestimados, quando comparados aos demais métodos.

Palavras-chaves: *Data Envelopment Analysis*, Segundo Estágio, Estimação de Parâmetros.

Abstract

The Electrical Energy Distribution regulation has been facing big challenges in recent years. In addition to price control, regulators must incentive other important issues, such as productivity gains and environmental responsibility. Therefore, regulation methods that are able to induce the companies into competition, even indirectly, have been largely used in many countries. In this context, Benchmarking techniques have been used by different Energy regulators. These models aim to compare same technology firms, and then to define a relative efficiency score to each one, pointing those which are at the efficiency frontier and are, hence, the sector's benchmark. A frontier analysis technique that has been largely used in Energy Regulation is the Data Envelopment Analysis (DEA), which is used by the Brazilian National Electrical Energy Agency (ANEEL) as part of its regulatory model for energy distribution since 2011. DEA is a non-parametric method that uses linear programming techniques to define relative efficiency scores of comparable firms. These scores are used by the regulator as a reference of efficient operational costs to each Distribution company. These costs are, then, included as part of the consumer's energy tariff. DEA method assumes that the compared firms have equal inputs and outputs, besides face equal environmental conditions and requirements. In practical applications, however, it's common to observe that firms that face different ambient conditions must be compared. Thus, efficiency score correction in a two-stage approach is a good alternative to deal with these differences, by estimating the environment influence in the efficiency scores and minimizing them. Nonetheless, the estimation technique used in the second stage analysis may change significantly the final scores. Keeping this issue in mind, the objective of this study is to evaluate the effect of the different estimation techniques applied on the efficiency scores generated from DEA. In this study, the DEA model presented by the Brazilian Energy Regulator for the Distribution Companies in the 4th Tariff Review Periodic Cycle was analyzed. It was concluded that the most used estimation techniques in two-stage analysis, Ordinary Least Squares (OLS) and Tobit Regression, cause an effect of reversion to the mean of the sample, independently of the environmental variables combination. Other estimation techniques were applied, as the conditional approach proposed by [Banker e Natarajan \(2008\)](#), where the inefficiency is conditioned to the observed estimation noise. This approach has been applied in two versions: the first kept the noise framework proposed by the authors, and the second substituted it by an adaptation from SFA. The second framework presented a better adjustment than the first. In addition, the results from the conditional approach were better than OLS and TOBIT, since it doesn't make a simple mean reversion. Even though, there is a large number of viable models, which could impact the Regulator's decision. Another technique was tested, the three-stage adjustment, proposed by [Estelle, Johnson e Ruggiero \(2010\)](#). This last one presented overestimated scores, comparing to the remaining techniques.

Key-words: Data Envelopment Analysis, Two-Stage Analysis, Parameter Estimation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Variação do consumo de energia elétrica e do PIB Brasileiro	16
Figura 2 – Evolução dos objetivos regulatórios na distribuição de energia elétrica	17
Figura 3 – Estrutura do Setor Elétrico Brasileiro	22
Figura 4 – Etapas de Discussão das regras de revisão tarifária do setor de Distribuição	24
Figura 5 – Composição da Tarifa de Energia	25
Figura 6 – Conjunto Produção e fronteira de transformação.	28
Figura 7 – Exemplo de isoquantas	29
Figura 8 – Tipos de rendimento de escala	31
Figura 9 – (a) Eficiência de Farrell para insumos e (b) Eficiência de Farrell para um produto/um insumo	33
Figura 10 – Representação gráfica dos métodos de fronteira	35
Figura 11 – Comparação entre Rendimento Constante de Escala (CRS) e Rendimento Variável de Escala (VRS)	37
Figura 12 – Dispersão das variáveis do modelo DEA proposto pela ANEEL (médias trienais)	70
Figura 13 – Correlação entre as variáveis do modelo DEA - ANEEL (NT 407/14 e NT 66/15)	71
Figura 14 – Dispersão entre escores do modelo DEA e Variáveis Ambientais	77
Figura 15 – Valores esperados de $\hat{\theta}$ em todas as combinações de variáveis ambientais	78
Figura 16 – Histograma Esperado e do erro observado e do modelo <i>DEA + SFA</i> para a variável Violência	85
Figura 17 – Impacto da estimação dos escores de eficiência pela abordagem condicional (modelo <i>DEA + SFA</i>)	86
Figura 18 – Minimização das distâncias entre F_{ε} empírica e teórica (modelo <i>DEA + BN</i>)	87
Figura 19 – Comparação dos escores, com DEA+SFA no 2º Estágio, variáveis Violência + Vegetação Alta	90
Figura 20 – Resultados da abordagem condicional multivariada do modelo <i>DEA + SFA</i>	92
Figura 21 – Comparação dos escores, com OLS no 2º Estágio	93
Figura 22 – Comparação dos escores, com TOBIT no 2º Estágio	94
Figura 23 – Comparação dos escores, com DEA+SFA no 2º Estágio	94

Lista de tabelas

Tabela 1 – Classificação dos métodos de estimação de fronteira	35
Tabela 2 – Restrições para <i>trade-offs</i> entre insumos e produtos	61
Tabela 3 – Coeficientes de correlação entre o escore de eficiência e variáveis ambientais .	74
Tabela 4 – Coeficientes de correlação entre o escore de eficiência e variáveis de qualidade	75
Tabela 5 – Resultados das regressões univariadas com a aplicação de OLS e TOBIT . .	78
Tabela 6 – Métodos de Estimação de Parâmetros aplicados a cada modelo	81
Tabela 7 – Resultados do estudo de simulação do modelo <i>DEA + SFA</i>	82
Tabela 8 – Resultados do estudo de simulação do modelo <i>DEA + BN</i>	83
Tabela 9 – Resultados das regressões univariadas com o modelo <i>DEA + SFA</i>	84
Tabela 10 – Resultados das regressões univariadas com o modelo <i>DEA + BN</i>	88
Tabela 11 – Resultado da regressão univariada do modelo <i>DEA + SFA</i> para a variável FEC	89
Tabela 12 – Coeficientes de correlação entre FEC e variáveis ambientais	89
Tabela 13 – Resultado da regressão multivariada do modelo <i>DEA + SFA</i> para alguns modelos	90
Tabela 14 – Resultados do segundo estágio para o modelo com $z=[\text{Vegetação Alta; Violência}]$	93
Tabela 15 – Escores de Eficiência calculados pela ANEEL	112

Lista de abreviaturas e siglas

ABRADEE	Associação Brasileira de Distribuidoras de Energia Elétrica
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
AP	Audiência Pública
BCC	Modelo DEA de Banker, Charnes e Cooper (1984)
CCEE	Câmara de Comercialização de Energia Elétrica
CCR	Modelo DEA de Charnes, Cooper e Rhodes (1978)
CHI	Consumidor Hora Interrompido
COLS	<i>Corrected Ordinary Least Squares</i>
CP	Consulta Pública
CRS	<i>Constant Return to Scale</i>
CRTP	Ciclo de Revisão Tarifária Periódico
DEA	<i>Data Envelopment Analysis</i>
DEC	Duração Equivalente de Interrupção por Unidade Consumidora
DGP	<i>Data Generating Process</i> (Processo de Geração de Dados)
DMU	<i>Decision Making Unit</i>
DRS	<i>Decreasing Return to Scale</i>
ER	Empresa de Referência
IRS	<i>Increasing Return to Scale</i>
MP	Medida Provisória
mpss	<i>Most Productive Scale Size</i>
MRTS	<i>Marginal Rate of Technical Substitution</i>
NDRS	<i>Nondecreasing Return to Scale</i>
NIRS	<i>Nonincreasing Return to Scale</i>
NR	Newton-Raphson
NT	Nota Técnica

OLS	<i>Ordinary Least Squares</i>
ONS	Operador Nacional do Sistema
OPEX	<i>Operational Costs</i>
PL	Programação Linear
PMSO	Pessoal, Material, Serviços de terceiros e Outros
RE-SEB	Projeto de Reestruturação do Setor Elétrico Brasileiro
SDEA	<i>Stochastic Data envelopment analysis</i>
SFA	<i>Stochastic Frontier Analysis</i>
VRS	<i>Variable Return to Scale</i>

Lista de símbolos

\mathbf{t}	Vetor de L insumos e produtos que compõem uma tecnologia de produção (ou plano de produção)
T	Conjunto produção
$f(\cdot)$	Função de Transformação ou Função de Produção
\mathbf{y}	Vetor de m produtos de um plano de produção, onde $m = 1, \dots, M$
\mathbf{x}	Vetor de i insumos de um plano de produção, onde $i = 1, \dots, I$
$\boldsymbol{\psi}$	Vetor de preços correspondente ao vetor \mathbf{x} de insumos
\mathbf{c}	Custo produtivo, tal que $\mathbf{c} = \mathbf{p}\mathbf{x}$
ρ	Constante que multiplica um vetor de insumos ou produtos (\mathbf{x} ou \mathbf{y}), podendo ser menor, igual ou superior a 1.
\mathbf{x}^*	Combinação ótima de recursos que minimiza os custos produtivos
h_j	Eficiência relativa da firma j , calculada através da razão entre a soma ponderada de produtos e a soma ponderada de insumos.
p_r	Peso ótimo do r –ésimo produto do vetor de \mathbf{y} produtos possíveis, onde $r = 1, \dots, s$
q_i	Peso ótimo do i –ésimo produto do vetor de \mathbf{x} insumos possíveis, onde $i = 1, \dots, m$
θ_j	Variável dual que expressa o escore de eficiência da firma j
α_j	Variável dual que peso da j –ésima DMU na composição do índice de eficiência da DMU em avaliação
\mathbf{z}	Vetor de n variáveis ambientais (não controláveis), onde $n = 1, \dots, N$
$g(\mathbf{x}, \mathbf{w})$	Função de produção, definida em termos das variáveis controláveis \mathbf{x} e não controláveis, \mathbf{z}
\mathbf{x}_{ik}^*	Vetor da combinação ótima dos i insumos de uma tecnologia para a firma k
$\delta(\cdot)$	Termo que representa um deslocamento da fronteira de produção. tal que $x_{ik}^* = \delta_i(z_k) \cdot x_{ik}$, ($i = 1, 2, \dots, I$)
Ω	Conjunto de todos os vetores possíveis de variáveis ambientais z_n
\mathbf{y}^*	Vetor da Combinação ótima de produtos

\mathbf{z}_k^*	Vetor da configuração mais favorável de variáveis ambientais para a firma k
\mathbf{Z}_k	Vetor de r variáveis ambientais não aleatórias
$\pi(\cdot)$	Função paramétrica que relaciona a variável aleatória \mathbf{w} e o escore θ
β	Coefficiente paramétrico de uma função cuja variável de independente é a componente ambiental \mathbf{z}_k
η_k	Ruído aleatório de uma função cuja variável de independente é a componente ambiental \mathbf{z}_k
$S(\beta)$	Soma do quadrado dos erros
$\hat{\theta}$	Escore de eficiência estimado
$\hat{\hat{\theta}}$	Escore de eficiência estimado ajustado
$\hat{\hat{\hat{\theta}}}$	Escore de eficiência estimado ajustado pelo segundo estágio
v	Variável aleatória de ruído da componente de deslocamento δ , descrito por uma distribuição de probabilidade bilateral
u	Variável aleatória de ineficiência da componente de deslocamento δ , caracterizado por uma distribuição de probabilidade unilateral
φ	Parâmetro de escala da distribuição Gamma que caracteriza a componente de ineficiência u
λ	Parâmetro de escala da Distribuição Skew-Normal, tal que $\lambda = \sigma_u/\sigma_v$
$\Phi(\cdot)$	Função de probabilidade Acumulada de um distribuição Normal
ϕ	Densidade de probabilidade de uma distribuição Normal
ε	Termo agrupado de ineficiência e ruído, onde $\varepsilon = v + u$
V^M	Limite máximo da distribuição de probabilidade v , quando ela é truncada
$\tilde{f}(\cdot)$	Função $f(\cdot)$ adaptada, deslocada à distância do ruído máximo V^M
$\tilde{\theta}$	Escore de eficiência ajustado
$\tilde{\varepsilon}$	Termo de deslocamento ε ajustado, tal que $\tilde{\varepsilon} = V^M - \varepsilon \geq 0$.
$\tilde{\beta}_0$	Intercepto ajustado, tal que $\tilde{\beta}_0 = E(\varepsilon) - V^M$
ξ	Índice de influência ambiental, resultante dos parâmetros da regressão entre o escore estimado θ e as variáveis ambientais \mathbf{z}
d_k	Direção da busca linear por ótimos locais em um algoritmo de otimização numérica, na k -ésima iteração.
a_k	Escalar positivo que representa a distância ou “Passo” em que a busca por ótimos locais deve percorrer.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Motivação	16
1.2	Objetivos	18
1.3	Justificativa	19
1.4	Organização do trabalho	19
2	MERCADO DE ENERGIA ELÉTRICA NO BRASIL	20
2.1	A organização do setor elétrico no Brasil	20
2.2	Regulação e precificação no setor de Distribuição	22
3	MODELOS DE BENCHMARKING	27
3.1	Fundamentação microeconômica	27
3.1.1	Função de Produção	27
3.1.2	Propriedades dos Conjuntos Produtivos	29
3.1.3	Função de Custo	31
3.2	Medidas de eficiência e performance	32
3.3	Modelos de Análise de Fronteira	34
3.3.1	Data Envelopment Analysis (DEA)	36
3.4	Abordagens de segundo estágio do DEA	41
3.4.1	Caracterização econométrica das variáveis ambientais	41
4	MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DA EFICIÊNCIA APLICADOS EM DOIS ESTÁGIOS	45
4.1	Estimação da eficiência através de Mínimos Quadrados	45
4.2	Estimação da eficiência através de Regressão Tobit	47
4.3	Estimação da eficiência através de Máxima Verossimilhança	48
4.4	Estimação da eficiência através da abordagem condicional	50
4.5	Correção dos escores de eficiência em 3 estágios	54
4.6	Métodos computacionais para estimação de parâmetros	55
5	REGULAÇÃO DO CUSTO OPERACIONAL EFICIENTE	57
5.1	Definição do método de análise utilizado	57
5.2	Agrupamento das Concessionárias	58
5.3	Especificação das variáveis do primeiro estágio	58
5.4	Análise de 2º Estágio	60
5.5	Restrições aos pesos	60
5.6	Regras para aplicação do escore de eficiência	62
6	METODOLOGIA	64
6.1	Dados Analisados	64

6.2	Modelos analisados em 2 estágios	64
6.2.1	Modelos utilizados com os Métodos OLS e Tobit	65
6.2.2	Modelo utilizado com a Abordagem Condicional de Banker e Natarajan (2008)	65
6.2.3	Modelo utilizados com a Abordagem Condicional adaptada de Simar e Wilson (2007)	66
6.2.4	Modelos utilizados com a Estimação em 3 estágios	67
6.3	Software e definições computacionais	67
7	ANÁLISE DA ESTIMAÇÃO DOS ESCORES DE EFICIÊNCIA EM 2 ESTÁ- GIOS	69
7.1	Análise Exploratória do modelo	69
7.1.1	Avaliação das variáveis ambientais e de qualidade	72
7.2	Resultados das análises de Segundo Estágio	76
7.2.1	Resultado da Estimação por OLS e Tobit	76
7.2.2	Resultado da Estimação através da Abordagem Condicional	79
7.2.2.1	Escolha do Método de estimação de parâmetros	80
7.2.2.2	Abordagem Condicional: Análise Univariada	84
7.2.2.3	Abordagem Condicional: Análise Multivariada	88
7.2.3	Resultado da Estimação em 3 estágios	92
8	CONCLUSÃO	95
	Referências	99
	APÊNDICES	104
	APÊNDICE A – CÁLCULO DA DENSIDADE CONJUNTA DE UMA NOR- MAL TRUNCADA E UMA GAMMA	105
	APÊNDICE B – ESCORES CORRIGIDOS EM DOIS ESTÁGIOS PELA ABOR- DAGEM CONDICIONAL	110
	ANEXOS	111
	ANEXO A – ESCORES DE EFICIÊNCIA CALCULADOS PELA ANEEL	112

1 Introdução

1.1 Motivação

O crescimento econômico de uma nação está diretamente ligado com o seu consumo de energia elétrica. Segundo dados do IPEA (2015), o PIB brasileiro cresceu, em média, 3,24% ao ano entre 1994 e 2014, enquanto o consumo de energia elétrica variou, em média, 3,78% no mesmo período. A produtividade e competitividade do setor industrial estão ligadas diretamente com a oferta e o preço da energia elétrica. Na Figura 1, as duas séries de variações são ilustradas para efeitos de comparação.

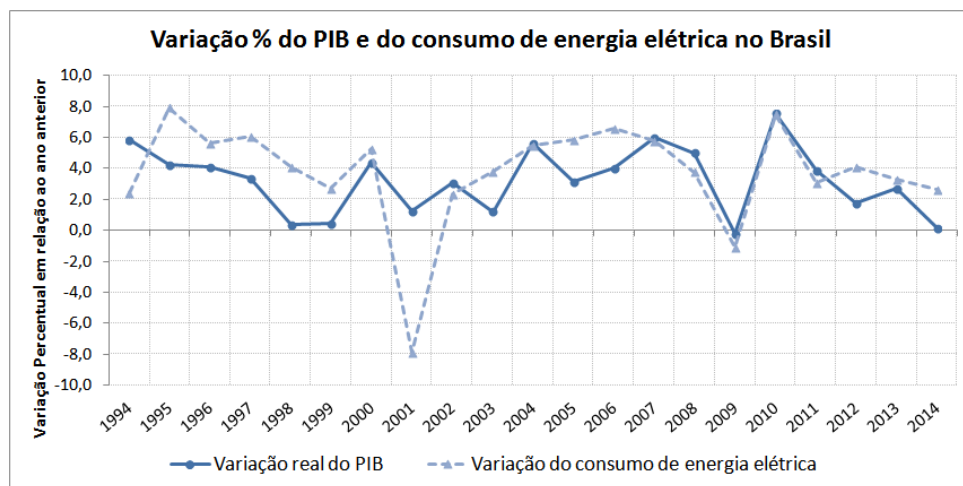


Figura 1 – Variação do consumo de energia elétrica e do PIB Brasileiro

Fonte: IPEA (2015)

Dado seu caráter estratégico, o setor energético necessita de um processo regulatório bem estruturado, de modo que se incentive o investimento no setor e que se garantam tarifas acessíveis à comunidade. No Brasil, a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) cumpre o papel de regular o setor energético e, desde fins dos anos 1990, com as privatizações do setor, é responsável por definir as regras de tarifação da energia.

A regulação de monopólios como o de distribuição de energia elétrica é um assunto amplamente explorado na literatura econômica. Os desafios impostos aos reguladores costumam suscitar discussões acerca da melhor metodologia para atender a todas as restrições do problema. Modelos do tipo *Price-Cap* são os mais utilizados em regulação de monopólios desde meados dos anos 1980, porque são considerados os mais capazes de gerar incentivos a ganhos de produtividade. Nesse tipo de regulação, define-se um preço-teto para o produto ou serviço, sob o qual a empresa regulada pode estabelecer sua tarifa.

Além do custo baixo, a tendência é que os reguladores demandem das distribuidoras de energia elétrica o atendimento a uma gama cada vez maior de requisitos. Para Bogetoft (2014b),

a preocupação com o controle de preço dos reguladores europeus do serviço de distribuição de energia elétrica deixou de ser a única demanda às concessionárias ainda em fins dos anos 1990: requisitos como qualidade e sustentabilidade têm pautado as regras nas duas últimas décadas. A Figura 2 ilustra essa evolução.

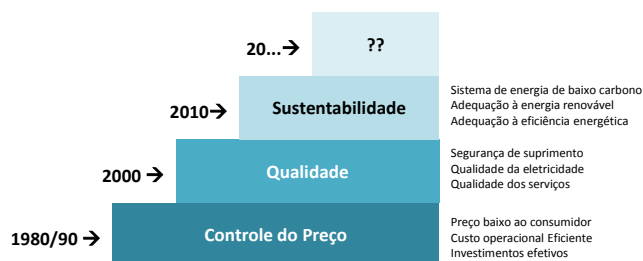


Figura 2 – Evolução dos objetivos regulatórios na distribuição de energia elétrica

Fonte: Adaptado de [Bogetoft \(2014b\)](#)

Uma maneira de incentivar as empresas a atingirem objetivos tão diversos é estimular a competição entre elas. Entretanto, devido à natureza do serviço prestado, empresas reguladas em monopólios de distribuição de energia, por exemplo, não podem competir diretamente entre si. Modelos de regulação que criam uma comparação de desempenho entre as empresas, então, podem ser capazes de criar uma competição indireta entre as firmas, o que tende a ser benéfico ao setor com um todo no longo prazo.

Nesse contexto, técnicas de *Benchmarking* têm sido aplicadas por reguladores de diversos países no setor de energia. Esses modelos têm como objetivo fazer uma comparação entre empresas de um mesmo setor e definir um escore de eficiência relativa, determinando quais firmas estão na **fronteira de eficiência** e são, por isso, o *benchmarks* do setor.

A ANEEL aplica na regulação dos custos operacionais das empresas de Transmissão de energia, desde 2008, o modelo de *Benchmarking Data Envelopment Analysis* (DEA). Na Distribuição de Energia, essa técnica passou a ser utilizada a partir de 2011, com a Nota Técnica. Trata-se de uma abordagem não-paramétrica que faz uso de técnicas de programação linear para definir o escore de eficiência de firmas comparáveis. Esse escore é utilizado pelo regulador como o balizador do custo operacional considerado eficiente para cada concessionária, incluído como parte da tarifa a ser cobrada do consumidor.

O método DEA pressupõe que as empresas comparadas utilizem os mesmos insumos na produção dos mesmos produtos, além de estarem submetidas às mesmas condições ambientais e regras. Em aplicações práticas, entretanto, é comum observar que empresas sujeitas a diferentes ambientes tenham de ser comparadas. Por isso, diversos autores propõem que os escores de eficiência obtidos através do problema de programação linear do DEA seja corrigido em uma análise de segundo estágio, que considere a influência de fatores ambientais que estão fora do escopo de responsabilidades das empresas (ver trabalhos de autores como [Ray \(1988\)](#), [Ray \(1991\)](#), [Ruggiero \(1996\)](#), [Simar e Wilson \(2007\)](#), [Banker e Natarajan \(2008\)](#)). Nos trabalhos dos autores citados, são apresentadas diversas técnicas para estimação em dois estágios dos escores

de eficiência. A maioria delas se constitui de métodos paramétricos, embasados em premissas de microeconomia.

As empresas brasileiras de distribuição de energia elétrica, como se sabe, estão sujeitas a ambientes bastante diversos no que diz respeito às necessidades da população atendida e às características climáticas, por exemplo. Por isso, uma análise de segundo estágio do modelo DEA aplicado para fins regulatórios se mostra pertinente, principalmente considerando o impacto que o escore de eficiência calculado tem na definição da tarifa de energia elétrica.

A estimação dos escores de eficiência em dois estágios, contudo, pode influenciar de maneira significativa o resultado final obtido. Dependendo da técnica de estimação utilizada e das variáveis selecionadas, pode-se chegar a resultados bastante distintos, que podem ser estatisticamente coerentes. Então, a adequação da técnica de estimação se mostra como um ponto chave na aplicação de análises em dois estágios.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é avaliar o impacto do ajuste em 2 estágios nos escores de eficiência calculados através da metodologia não-paramétrica *Data Envelopment Analysis*, considerando o uso de diferentes métodos de estimação. Para tanto, é utilizado o modelo apresentado pela ANEEL no 4º Ciclo de Revisão Tarifária Periódico (4CRTP), iniciado ao final de 2013 com uma Consulta Pública e concluído em abril de 2015, com a divulgação da Nota Técnica 66/2015-SRM/SGT/ANEEL, que regulamenta a definição do custo operacional eficiente das Distribuidoras de Energia para o 4CRTP.

Os objetivos específicos do trabalho são:

1. Analisar a dispersão dos dados que compõem o modelo proposto pela ANEEL na NT 66/2015-SRM/SGT/ANEEL, a fim de verificar a sua adequação à premissa de homogeneidade do ambiente de operação e das condições ambientais;
2. Analisar, utilizando os dados das Notas Técnicas 407/2014-SRE/ANEEL e 66/2015-SRM/SGT/ANEEL, diferentes cenários de ajustes dos escores de eficiência por meio de diferentes variáveis ambientais;
3. Propor um modelo de segundo estágio que melhor reflita o ambiente das empresas brasileiras de distribuição de energia, tendo em vista o modelo de DEA apresentado pela ANEEL;
4. Aplicar diferentes técnicas de análise de segundo estágio, de acordo com a literatura, e verificar quais delas são mais adequadas ao caso brasileiro.

Assim, pretende-se compreender qual o impacto causado nos escores de eficiência a partir do ajuste paramétrico em dois estágios, considerando diferentes métodos de estimação.

1.3 Justificativa

Conforme explicado, a meta de custo operacional das empresas distribuidoras de energia elétrica é definida com base no escore de eficiência calculado pelo regulador. Cada ponto percentual de ineficiência atribuído às empresas pode ter um impacto de milhões de reais na receita anual do serviço de distribuição. Sendo assim, torna-se relevante assegurar que o escore de eficiência reflita a realidade enfrentada pelas empresas, e que funcione, assim, como um incentivo à busca pela eficiência.

Esse trabalho mostra-se relevante para o setor ao fazer uma análise do modelo de *Data Envelopment Analysis* apresentado pela ANEEL. Além disso, são aplicadas técnicas de correção dos escores em dois estágios propostas na literatura, mas que ficaram de fora das discussões do 4CRTP.

A avaliação de diferentes técnicas de estimação de parâmetros nas correções dos escores também se justifica, dado o impacto que esses ajustes podem ter nos escores finais. Como argumentado, cada ponto percentual de eficiência é financeiramente relevante às empresas, o que torna imprescindível que os ajustes ocorram de maneira coerente.

Ainda no que diz respeito ao ajuste paramétrico dos escores, é importante ainda aprofundar a discussão sobre a interpretação estatística dos ajustes, nem sempre é explorada nos trabalhos acadêmicos sobre o assunto.

1.4 Organização do trabalho

Esse trabalho está organizado em seis capítulos. O capítulo 1 é composto pela motivação e objetivos gerais e específicos do estudo. O segundo capítulo apresenta uma breve contextualização do mercado de energia elétrica no Brasil, descrevendo sua organização e modelo de regulação. No capítulo 3, é apresentado o referencial teórico que fundamenta os modelos de *Benchmarking* e sua aplicação. No quarto capítulo são apresentadas as técnicas de segundo estágio mais utilizadas na literatura a respeito. O capítulo 5 traz os resultados das análises e o sexto capítulo, por fim, mostra a conclusão do estudo.

2 Mercado de Energia Elétrica no Brasil

Nesse capítulo, apresenta-se a configuração do setor elétrico brasileiro. Em um primeiro momento, mostra-se a evolução histórica da regulamentação energética, até culminar na atual organização do setor. Por último, apresenta-se o modelo atual de regulação e precificação da atividade de Distribuição de energia elétrica, foco deste estudo.

2.1 A organização do setor elétrico no Brasil

O desenvolvimento do setor elétrico brasileiro pode ser dividido em cinco grandes fases. A primeira delas, que vai da proclamação da República em 1889 até o início da década de 1930, caracteriza-se por uma geração energética concentrada na extração de carvão mineral. Esse foi um período de baixa industrialização no país, onde a economia era basicamente calcada na produção de produtos primários, e o consumo energético residencial era incipiente ([ABRADEE, 2014](#)).

Ainda de acordo com a [ABRADEE \(2014\)](#), o segundo período de desenvolvimento do setor elétrico se deu com o crescimento das atividades industriais no país, entre os anos de 1930 e 1945. Foi nessa época que o Estado iniciou o processo de regulamentação do setor, lançando em 1934 o Código de Águas, segundo o qual o controle das quedas d'água, bem como a exclusividade de outorga das concessões do seu uso passaram a ser de responsabilidade da União. Também se instituiu o primeiro tipo de tarifação da energia, dentro do modelo de “Custo de Serviço”.

Em um terceiro momento, entre o pós-guerra e 1970, observou-se uma forte intervenção do Estado em todos os segmentos do setor elétrico. Nessa época, foram criadas empresas estatais em toda a Federação. Em apenas 20 anos, a potência instalada subiu de 1.300 MW para 30.000 MW. Em seguida, na década de 1980, observou-se um período de estagnação nos investimentos, naquele que se classifica como o quarto período do setor elétrico nacional: o Governo Federal sofria a crise da dívida externa, o que o obrigou a cortar gastos e investimentos. Além disso, o governo criou uma regra de equalização tarifária, que obrigava todas as concessionárias a praticarem o mesmo preço. A situação financeira das concessionárias agravou-se ainda mais com os congelamentos de tarifas efetuado pelo governo, medida tomada para conter a hiperinflação ([ABRADEE, 2014](#)).

A alarmante situação financeira das empresas do setor elétrico no início dos anos 1990 era reflexo de uma série de medidas e políticas que não preconizavam o equilíbrio entre custos e preço, o que penalizava as empresas e tornava insustentável a atividade desenvolvida por elas em um horizonte de longo prazo. Em vista disso e também das modernizações no setor elétrico observadas em outros países, entre 1996 e 1998 o governo brasileiro lançou o RE-SEB, Projeto de Reestruturação do Setor Elétrico Brasileiro, dando início ao 5º período no desenvolvimento do setor elétrico nacional ([CCEE, 2014a](#)).

Segundo o [Ministerio de Minas e Energia \(2014\)](#), esse programa tinha como objetivo modernizar o setor elétrico brasileiro. Para isso, sugeria uma série de medidas, como a criação de

mercados livres de energia e a expansão da oferta como oportunidade de investimento, ficando a cargo dos agentes do mercado. A implementação das medidas sugeridas pelo RE-SEB ocorreu gradativamente, em paralelo à privatização das concessionárias de energia. Nesse contexto, criou-se em dezembro de 1996 a Agência Nacional de Energia Elétrica, ANEEL, autarquia cujo objetivo é regular a atividade das empresas do setor elétrico, e o Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS), responsável pelo gerenciamento e segurança do fornecimento de energia.

O RE-SEB criou ainda o Mercado Atacadista de Energia (MAE), que em 2004 foi extinto e deu lugar à Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE), responsável pela intermediação das operações de compra e venda de energia. A CCEE coordena três ambientes de contratação de energia: o regulado, o livre e o mercado de curto prazo. No primeiro, a energia elétrica é comercializada através de leilões estruturantes definidos pelo Conselho Nacional de Energia, onde todos os geradores vendem para todas as distribuidoras, através da menor tarifa (CCEE, 2014b).

No ambiente livre de contratação, por outro lado, o objetivo é regular a atividade dos consumidores livres, que segundo a ANEEL (2014c), são aqueles que têm demanda superior a 500 kWh e que optaram por comprar energia de agentes que não a distribuidora que atende a sua área. Assim, os geradores, autoprodutores, produtores independentes, comercializadores, importadores e exportadores de energia e os consumidores livres e especiais têm liberdade para negociar a compra de energia, estabelecendo volumes, preços e prazos de suprimento. A intermediação contratual é realizada pela CCEE. O mercado de curto prazo, por fim, visa liquidar as diferenças apuradas entre os montantes de energia contratados e efetivamente produzidos/consumidos. A precificação, nesse caso, segue regra específica, do Preço de Liquidação das Diferenças (CCEE, 2014b).

De acordo com a ABRADÉE (2014), algumas alterações no sistema elétrico foram implementadas em 2004, a fim de evitar novos problemas como o racionamento de energia de 2001. As reestruturações não mudaram significativamente o conceito de regulação adotado, motivo pelo qual não se costuma separar o período pós-reformas do que o antecedeu. Nessa ocasião, o regulador apenas acrescentou recursos para reduzir os riscos de falta de energia e melhorar o monitoramento do sistema. Os principais princípios que guiaram o modelo de 2004 foram: a segurança energética, a modicidade tarifária e a universalização do atendimento.

A reestruturação do setor elétrico no fim dos anos 1990 segregou as atividades de geração, transmissão e distribuição de energia. A Figura 3 ilustra esse modelo.

A razão para essa separação é a crença, sustentada no RE-SEB, de que parte das atividades do setor elétrico podem ser consideradas como mercados competitivos, enquanto outros segmentos constituem monopólios naturais, sujeitos a regulações de preços. Sob esse ponto de vista, a atividade de geração foi classificada no primeiro grupo, tendo originalmente seus preços regidos pela lei de oferta e demanda do próprio mercado. Entende-se por **geração** toda atividade de produção de energia e disponibilização para o sistema de transporte. Hoje, o complexo elétrico brasileiro conta com 3.152 unidades geradoras de energia, sendo que 74% da quantidade gerada provém de hidrelétricas (ABRADÉE, 2014).

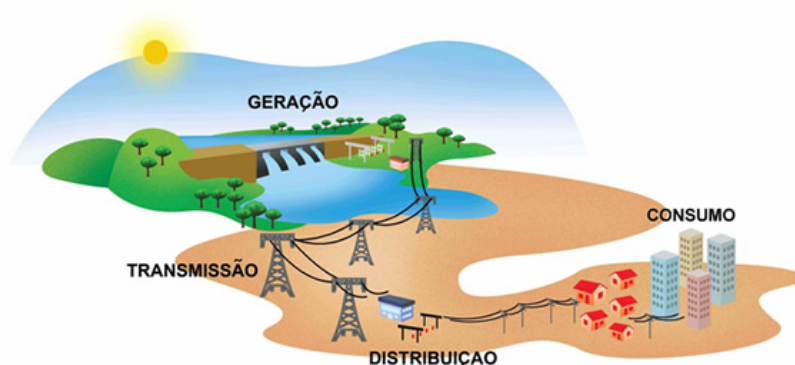


Figura 3 – Estrutura do Setor Elétrico Brasileiro

Fonte: (ABRADEE, 2014)

O modelo de precificação da energia gerada valia-se, quando criado, do regimento do próprio mercado, visto que a maioria dos geradores era livre para negociar seus preços com consumidores livres ou por meio de leilões regulados. Isso mudou em 2012, com a Medida Provisória (MP) 579, mais tarde ratificada na Lei 12.783/2013. Com a nova lei, as geradoras de energia cujos contratos venceriam entre 2013 e 2017 foram convidadas a renovar antecipadamente seus contratos de concessão com o governo. A condição para isso era de que aceitassem ter seus preços regulados pela ANEEL. Assim, as geradoras passaram a compor um mercado tão regulado quanto os monopólios naturais de transmissão e distribuição (ABRADEE, 2014).

As atividades de transporte de energia (transmissão e distribuição) são consideradas monopólios naturais, dadas as suas características físicas, que não tornam viável a coexistência de dois agentes em uma mesma área de concessão. Sendo assim, as empresas participantes praticam preços definidos pela ANEEL, sem liberdade para repassar ao consumidor o preço que desejarem. Considera-se como atividade de **transmissão** o transporte de grandes quantidades de energia, do gerador até os grandes centros, efetuado através de linhas com tensão elétrica superior a 230 mil Volts (ABRADEE, 2014).

O segmento de **distribuição**, por sua vez, é aquele que recebe a energia do sistema de transmissão e posteriormente o distribui aos consumidores finais. No Brasil, existem 63 concessionárias responsáveis por essa atividade, operando linhas com tensão abaixo de 230 kV (ABRADEE, 2014). São clientes compulsórios das concessionárias os consumidores cativos, aqueles que não têm liberdade para escolher o seu fornecedor.

A sistemática de precificação da geração de energia não é foco de estudo deste trabalho, por isso não será detalhada. Já o esquema de precificação do setor de distribuição, bem como a sua regulação, são foco do estudo e serão abordados na próxima seção.

2.2 Regulação e precificação no setor de Distribuição

Conforme já citado, a distribuição de energia caracteriza-se como um monopólio natural. Em economias desse tipo, os clientes não tem opção de escolher um fornecedor de sua preferência.

Sendo assim, existe a possibilidade de que a firma pratique preços abusivos, a fim de aumentar suas margens. Para evitar esse tipo de prática, monopólios - naturais ou não - exigem que órgãos reguladores mantenham um arcabouço de regras que regulem o serviço prestado e o preço praticado. No setor energético brasileiro, esse papel cabe à ANEEL.

Naquilo que classificam como “nova economia regulatória”, Laffont e Tirole (1990) *apud* Liston (1993), definem a função do regulador como uma atividade sujeita a três restrições básicas. A primeira delas diz respeito à assimetria de informação entre o consumidor e a firma prestadora de serviço: o regulador deve ser capaz de observar os custos relevantes ao serviço e a informação de demanda. A segunda restrição é que o regulador deve assegurar que as firmas sejam capazes de atingir o ponto de equilíbrio financeiro, sob pena de falirem no longo prazo. Sob esse aspecto, o regulador é responsável por observar os diferentes retornos de escala possíveis no mercado, assegurando que o ponto de equilíbrio seja atingido por todas as firmas reguladas, independentemente da sua escala. Por fim, os reguladores ainda devem lidar com restrições políticas e administrativas, garantindo que subsídios e incentivos sejam alocados corretamente.

Laffont e Tirole (1990) ressaltam que a década de 1980 foi um período no qual se registraram muitas contribuições acerca de modelos de regulação. Historicamente, isso se deve ao fato de que vários países europeus, liderados pela política liberalista da primeira-ministra britânica Margareth Thatcher, passavam por um período de privatizações de serviços anteriormente estatais, e necessitavam de instrumentos regulatórios adequados. Na América Latina, esse movimento ocorreu na década seguinte, assim como a modernização das normas regulatórias.

Até fins dos anos 1990, anteriormente às privatizações do setor energético e à operacionalização do RE-SEB, adotava-se no Brasil a **Regulação pelo Custo** (*Cost Plus Regulation*). Segundo o Instituto Acende Brasil (2011), nesse regime, o regulador apura a base de remuneração e os custos operacionais incorridos pela empresa regulada a partir dos seus dados contábeis para definir sua tarifa. Liston (1993) explica que nesse modelo de regulação tradicional, também chamado de *Rate-of-Return Regulation*, define-se uma base de custos (que inclui geralmente custos operacionais, depreciação e taxas) sobre a qual deve-se aplicar uma taxa de retorno mínima que irá compor o preço. Braeutigam e Panzar (1993) explicam que essa taxa, em geral, deve refletir a taxa de retorno esperado pelo capital investido.

Para Braeutigam e Panzar (1993), regulações baseadas em custo têm a vantagem de serem de simples aplicação, mas apresentam diversas limitações, tais como um incentivo distorcido ao investimento de capital, encorajamento ao aumento de custos e baixo incentivo à introdução de novas tecnologias produtivas. Na prática, como o preço de venda do produto/serviço é calculado como um acréscimo sobre a parcela do custo observado, as empresas tendem a aumentar seus custos de um ano para o outro, esperando um aumento nos preços.

A regulação do tipo *Price-Cap* define um teto de preço, abaixo do qual as firmas têm total liberdade de precificação. Os tetos são definidos através de um índice de custos, determinado por um serviço ou um conjunto deles, escolhidos pelo regulador. Esse índice é então ajustado por um fator, X , definido com antecedência mas atualizado periodicamente. O fator X pode representar uma série de características diferentes, dependendo do tipo de produto ou serviço regulado (LISTON, 1993).

Ao contrário da Regulação pelo Custo, o *Price-Cap* quebra a ligação direta entre o preço definido e o custo da firma, gerando um incentivo para que ela busque maior eficiência operacional (BRAEUTIGAM; PANZAR, 1993). Esse é o princípio que norteia a grande maioria das metodologias de regulação de energia europeias, e é o mesmo que a ANEEL passou a adotar a partir de 1997.

Os contratos de concessão de distribuição de energia preveem reajustes tarifários anuais e revisões tarifárias periódicas. Os reajustes tarifários ocorrem todos os anos, e têm como objetivo repassar à tarifa custos não gerenciáveis das distribuidoras, e atualizar monetariamente os custos gerenciáveis. As revisões tarifárias, por sua vez, ocorrem a cada quatro anos em média, e têm por objetivo preservar o equilíbrio econômico-financeiro da concessão, segundo a ANEEL (2007).

Ainda de acordo com a ANEEL (2007), nas revisões tarifárias são feitos dois tipos de cálculo: o primeiro visa apurar o reposicionamento tarifário, determinando o nível de tarifa que permitirá a concessionária cobrir os custos não gerenciáveis e os custos operacionais eficientes. O segundo cálculo diz respeito à definição do fator *X*. Esse último é um índice que mede ganhos de produtividade das empresas, devido ao crescimento do mercado e ao aumento do número de consumidores.

O processo de revisão tarifária acontece em ciclos periódicos. Desde 1997, quando se deu o processo concessório da Distribuição de energia, já ocorreram 4 revisões. O último Ciclo de Revisão Tarifária Periódica (CRTP) se deu em 3 etapas principais, descritas na Figura 4. O 4º Ciclo de Revisão Tarifária Periódica (4CRTP) iniciou-se em novembro/2013 e teve sua conclusão em abril/2015, e é descrito a seguir.

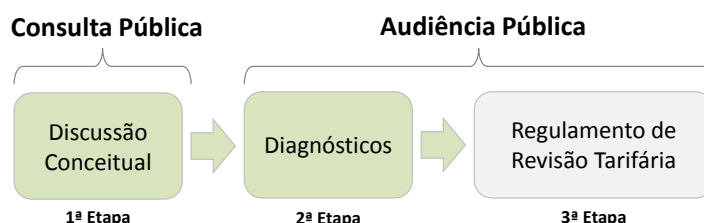


Figura 4 – Etapas de Discussão das regras de revisão tarifária do setor de Distribuição

Fonte: Adaptado de ANEEL (2014a)

1ª Etapa - Discussão Conceitual: A Nota Técnica (NT) nº 452/2013-SRE/ANEEL foi discutida em uma *Consulta Pública*, ocorrida em novembro/2013. Na ocasião, o regulador recebeu contribuições da sociedade interessada acerca dos conceitos que embasam a revisão tarifária.

2ª Etapa - Diagnósticos: Com o resultado das contribuições, a ANEEL lançou uma proposta de modelo para a revisão tarifária em uma primeira fase de Audiência Pública, através da NT 184/2014-SRE/ANEEL, lançada em junho/2014 (ANEEL, 2014a). A Audiência Pública (AP) ocorreu em duas fases:

- *1ª Fase:* Audiência Pública para consulta sobre a proposta de revisão tarifária apresentada na a NT 192/2014-SRE/ANEEL de jun/14 a ago/14. O regulador analisou as contribuições entre ago/14 e dez/14;
- *2ª Fase:* Audiência Pública para consulta sobre a proposta revisada, apresentada na NT 407/2014-SRE/ANEEL de dez/14 a fev/15. O regulador analisou as contribuições referentes a essa proposta entre fevereiro/15 e abril/15, quando divulgou a versão final do modelo.

3ª Etapa - Regulamento de Revisão Tarifária: Após as análises das considerações apresentadas nas audiências públicas, a ANEEL divulgou em abril/15 o documento final de regulação da revisão tarifária, na NT 66/2015-SMR/SGT/ANEEL (ANEEL, 2015). Essa Nota Técnica apresenta justificativas para o aceite ou não das contribuições da sociedade acerca do método proposto na NT 407/2014-SRE/ANEEL. A proposta final, na prática, não difere metodologicamente da proposta discutida na NT 407/2014-SRE/ANEEL. Foram realizados apenas alguns ajustes nas bases de dados de análise, não explicitados pelo regulador.

A tarifa de energia elétrica que as distribuidoras são autorizadas a cobrar, chamada pela ANEEL de Receita do Serviço de Distribuição, é composta por duas parcelas, conforme a Figura 5. A **Parcela A** corresponde aos custos não gerenciáveis da distribuidora: custo da energia gerada e transmitida e encargos setoriais. A **Parcela B** é composta pelos custos gerenciáveis, que são aqueles que decorrem diretamente do serviço prestado de distribuição: custos de manutenção e operação, depreciação e remuneração do investimento.

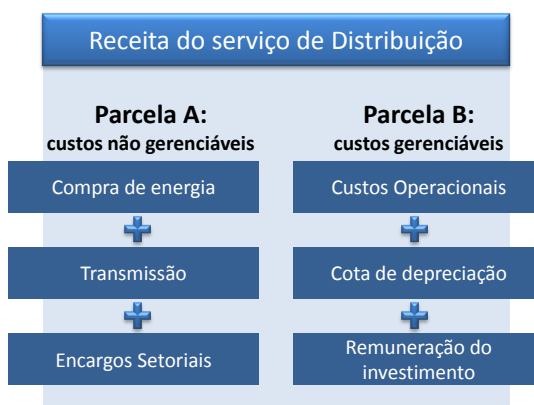


Figura 5 – Composição da Tarifa de Energia

Fonte: Adaptado de ANEEL (2007)

Até o segundo ciclo de revisão tarifária, a ANEEL apurava os custos operacionais de acordo com o modelo de “Empresa de Referência” (Instituto Acende Brasil, 2011). De acordo com a NT nº 166/2006 (ANEEL, 2006), através desse método, se definia uma empresa de distribuição de energia em condições de eficiência produtiva. A Empresa de Referência (ER) então, simulava as condições que enfrentaria uma empresa entrante no mercado, cumprindo

as condições estabelecidas nos contratos de concessão. Os custos necessários para que a ER funcionasse eram somados à parcela B da tarifa mínima das concessionárias.

No terceiro e no quarto ciclos de revisão tarifária, em 2011 e 2015, respectivamente, a ANEEL substituiu a metodologia de apuração dos custos operacionais do modelo de Empresa de Referência por modelos comparativos de *Benchmarking*. De acordo com o reporte técnico de [Bogetoft \(2014a\)](#), essa abordagem é amplamente utilizada em países europeus, como Alemanha, Dinamarca e Holanda.

Os modelos de *Benchmarking*, aprofundados em seguida no [Capítulo 3](#), consistem em abordagens paramétricas ou não-paramétricas para definição de escores de eficiência relativa entre empresas comparáveis. Através da sua aplicação, é possível identificar, em um grupo de empresas com iguais produtos e insumos, as firmas que compõem a **Frenteira de Eficiência**. São consideradas eficientes as firmas com escore relativo igual a 1.

Ao aplicar essa metodologia, obtém-se um índice de eficiência relativa por empresa analisada, a saber, θ_i . A ineficiência relativa, $1 - \theta_i$, representa o percentual de redução nos custos operacionais que cada firma i deve efetuar a fim de que figure na fronteira eficiente. Então, uma empresa com escore de 80%, deve reduzir 20% dos seus custos para tornar-se eficiente.

A quantia referente aos custos operacionais da Parcela B da tarifa das distribuidoras, portanto, passou a ser definida, desde de 2008, através do modelo de análise de fronteira *Data Envelopment Analysis - DEA*, também detalhado enquanto metodologia no [Capítulo 3](#). O Fator X é calculado no quarto ciclo de revisão tarifária a partir da análise DEA também.

O detalhamento sobre o mecanismo regulatório adotado pela ANEEL para o custo operacional eficiente será detalhado no [Capítulo 5](#).

3 Modelos de Benchmarking

Nesse capítulo, apresenta-se a definição de modelos de análise de fronteira. Para isso, faz-se necessário primeiro revisar conceitos econométricos que embasam sua definição. Só então são apresentados os principais modelos de *Benchmarking* paramétricos e não-paramétricos. Em uma perspectiva mais detalhada, apresenta-se o método de *Data Envelopment Analysis* (DEA) e suas características.

3.1 Fundamentação microeconômica

As técnicas de *Benchmarking* foram constituídas inicialmente a partir do modelo de mensuração de eficiência sugerido por Farrell (1957). Esse autor, por sua vez, apresentou uma formulação baseada em conceitos microeconômicos, capaz de expressar a Função Produção Eficiente de firmas submetidas a semelhantes contextos produtivos.

Alguns dos conceitos de microeconomia pertinentes à compreensão do modelo de eficiência proposto por Farrell (1957) dizem respeito à formulação de uma Função de Produção, com seus respectivos desdobramentos e propriedades.

3.1.1 Função de Produção

Uma rede de produção pode ser caracterizada como um vetor que descreve o conjunto de L produtos e insumos que compõem um processo produtivo. Mas-Colell et al. (1995) distinguem os *produtos* dos *insumos* do processo acrescentando um sinal negativo ao primeiro grupo. Assim, o plano de produção $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_L)$ é viável se $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^L$. Os autores caracterizam o conjunto produção T , ainda, como uma função $F(\cdot)$, chamada de função de transformação. Tal função possui duas propriedades: (i) $T = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^L : F(\mathbf{t}) \leq 0\}$ e (ii) $F(\mathbf{t}) = 0$ se e somente se \mathbf{t} é um elemento da fronteira de T . O conjunto de pontos de T para os quais $F(\mathbf{t}) = 0$ é conhecido como **fronteira de transformação**. A Figura 6 representa um exemplo para o caso de dois produtos. O plano de produção é definido por Bogetoft e Otto (2010) também como a *Tecnologia de produção*.

Nesse primeiro momento, interessa-nos compreender os aspectos macro do processo produtivo. Por essa razão, Mas-Colell et al. (1995) descrevem a “Firma” como uma corporação ou negócio legalmente estabelecido cujo objetivo é transformar entradas (insumos) em saídas (produtos), como se fosse uma “caixa-preta”, sem se ater aos pormenores do processo. Nesse contexto, é conveniente separar o grupo de produtos do conjunto de insumos: o vetor \mathbf{t} agora pode ser decomposto no vetor de M **produtos** $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_M) \geq 0$ e no vetor de $I = L - M$ **insumos** $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{L-M})$, ambos agora apresentados como números não-negativos.

Uma Função Transformação $F(\cdot)$ pode assumir diversos formatos. Há algumas formas funcionais que são comumente utilizados para esse propósito. Um deles, conforme ressaltam Mas-Colell et al. (1995), é a **Função de Produção de Cobb-Douglas**. Descrita para o caso de dois

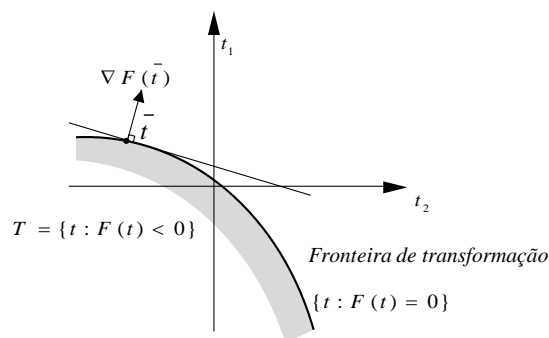


Figura 6 – Conjunto Produção e fronteira de transformação.

Fonte: Adaptado de Mas-Colell et al. (1995), p.129

insumos, x_1 e x_2 , na [Equação 3.1](#), ela é amplamente aplicada em análises econométricas, devido às suas características que facilitam seu tratamento numérico. Uma delas é a sua propriedade multiplicativa, que permite observar a produção, $f(x_1, x_2)$, como uma função da multiplicação dos insumos x_1 e x_2 , dados seus respectivos parâmetros β_0 , β_1 e β_2 (BOGETOFT; OTTO, 2010). Nesse caso, são conhecidos os insumos, mas pretende-se estimar os parâmetros desconhecidos β_i a fim de prever a quantidade produzida $y = f(x_1, x_2)$.

$$f(x_1, x_2) = \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \quad (3.1)$$

Tendo em vista a notação acima descrita, Mas-Colell et al. (1995) definem uma **tecnologia de único produto** em termos da função produção $f(\mathbf{x})$ que gera a quantidade **máxima** de \mathbf{y} saídas que pode ser produzida utilizando as quantidades de entradas $(x_1, \dots, x_{L-1}) \geq 0$. Isso significa, para os autores, que é possível observar diferentes combinações de insumos capazes de produzir a mesma quantidade de produtos. Tais combinações, que geram o nível mais eficiente de produção, podem ser representadas por uma curva, denominada **isoquanta** (HIRSCHEY, 2009). O autor ressalta que essa definição trata da eficiência técnica, já que se refere ao custo mínimo produtivo para um dado alvo de produção.

Cada ponto em uma isoquanta representa a combinação ótima de n recursos capazes de produzir y unidades de produtos. Hirschey (2009) exemplifica o conceito: se 2 unidades do insumo x_1 e 3 unidades do insumo x_2 podem ser combinadas para produzir 49 unidades de produtos, mas podem ser também combinadas menos eficientemente para gerar 45 unidades do mesmo produto, a combinação $(x_1 = 2, x_2 = 3)$ irá pertencer somente à isoquanta $y = 49$. Combinações ineficientes, portanto, não constam nas isoquantas. A [Figura 7](#) mostra um exemplo de curvas de isoquantas de determinada tecnologia, para saídas $y = 91$ e $y = 122$, onde apenas pontos eficientes foram incluídos nas curvas.

Para Hirschey (2009), a possibilidade de comparar diferentes combinações de recursos que podem gerar determinado alvo produtivo torna interessante a avaliação do impacto resultante a partir da substituição de insumos. Assim, de acordo com Mas-Colell et al. (1995), mantendo-se o nível de produção fixo, se substituirmos a entrada l do conjunto de insumos \mathbf{x} pela entrada k ,

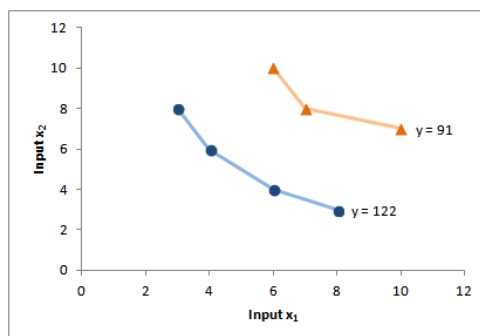


Figura 7 – Exemplo de isoquantas

Fonte: Adaptado de [Hirschey \(2009\)](#), p.254

pode-se definir a taxa marginal de substituição técnica do insumo (*Marginal Rate of Technical Substitution - MRTS*) conforme a [Equação 3.2](#). Esse número representa a quantidade adicional do insumo k necessária para manter o nível de saídas $y = f(\mathbf{x})$ quando reduz-se marginalmente a quantidade do insumo l .

$$MRTS_{lk}(\mathbf{x}) = \frac{df(\mathbf{x})/dx_l}{df(\mathbf{x})/dx_k} \quad (3.2)$$

Segundo [Hirschey \(2009\)](#), a taxa marginal de substituição técnica está diretamente relacionada com o formato da isoquanta da produção. Ao longo de uma curva, o valor absoluto de dy associado com a substituição dos *inputs* l e k deve se manter constante, determinando o formato da isoquanta.

3.1.2 Propriedades dos Conjuntos Produtivos

Os conjuntos produtivos possuem uma série de propriedades que os caracterizam. Destaca-se, por hora, apenas as mais relevantes ao estudo apresentado.

1. **No free lunch.** Suponha que $\mathbf{t} \in T$ e que $\mathbf{t} \geq 0$, de forma que o vetor \mathbf{t} não utiliza nenhum insumo. A propriedade *no-free-lunch* é satisfeita se esse vetor produtivo não gerar nenhuma saída também. Em outras palavras, não é possível produzir algo sem recurso algum ([MAS-COLELL et al., 1995](#)).
2. **Possibilidade de inatividade (*Possibility of inaction*).** Para [Mas-Colell et al. \(1995\)](#), essa propriedade diz que se $0 \in T$, a completa inação é possível. Como exemplo, os autores citam o caso de uma firma que poderia acessar a tecnologia de produção, mas que, por algum motivo, ainda não estaria organizada para operar, configurando um evento onde a inatividade é claramente possível. Tanto nesse exemplo quanto em outros, os autores reforçam a importância do momento no tempo em que a análise das possibilidades de produção é realizada: a existência de contratos obrigando a aquisição de um insumo, no caso do exemplo anterior, tornaria a possibilidade de inatividade inviável.

3. **Livre descartabilidade (*Free disposability*)**. Essa propriedade sustenta que é sempre possível absorver uma quantidade adicional de insumos, sem uma redução na geração de produtos. Ou seja, se $\mathbf{t} \in T$ e $\mathbf{t}' \leq \mathbf{t}$, então $\mathbf{t}' \in T$: isso significa que \mathbf{t}' produzirá no máximo a mesma quantidade de produtos, utilizando pelo menos a mesma quantia de insumos (MAS-COLELL et al., 1995). Bogetoft (2013) resume essa propriedade ao afirmar que pode-se sempre produzir uma quantidade menor de produtos com mais insumos, sem custo adicional.
4. **Retornos de escala**. Mas-Colell et al. (1995) sustentam que Funções Produtivas podem apresentar diferentes tipos de retorno de escala, que é, segundo Hirschey (2009), a característica que descreve como a produção responde a incrementos proporcionais em todos os insumos. O retorno de escala mostra a relação entre a variação dos insumos e a variação dos produtos: supondo que a firma provoque uma variação proporcional em todos os insumos, a quantidade produzida irá aumentar na mesma proporção, ou em escalas menores ou maiores?

No que tange aos tipos de escala possíveis, Mas-Colell et al. (1995) destacam o Retorno Não Crescente de Escala, o Retorno Não Decrescente de Escala e Retorno Constante de Escala. Esse último é apontado por Farrell (1957) como premissa básica ao seu modelo de eficiência.

- a) **Retorno Não Crescente de Escala (*Nonincreasing Return to Scale - NIRS*)**. É descrito por Bogetoft (2013) de forma não tão abrangente, mas mais clara como **Retorno Decrescente de Escala (*Decreasing Return to Scale - DRS*)**. A tecnologia de produção T apresenta retorno não crescente de escala se para qualquer $\mathbf{t} \in T$, tem-se $\rho\mathbf{t} \in T$ para todo escalar $\rho \in [0,1]$. Ou seja, de acordo com Mas-Colell et al. (1995), esse é o caso no qual pode-se reduzir os valores de qualquer vetor viável de insumo-produção. Nesse caso, a produção tenderá a crescer em proporção menor que os insumos: um aumento na quantidade de insumos causará uma variação na mesma proporção (se $\rho = 1$), ou decrescente (se $0 \leq \rho < 1$) na quantidade de produtos.
- b) **Rendimento Não Decrescente de Escala (*Nondecreasing Return to Scale - NDRS*)**. Ao contrário do caso anterior, a estrutura conhecida de forma simplificada como **Retorno Crescente de Escala (*Increasing Return to Scale - IRS*)**, ocorre se para todo $\mathbf{t} \in T$, tem-se $\rho\mathbf{t} \in T$ para todo escalar $\rho \geq 1$. É, portanto, como descreve Mas-Colell et al. (1995), o caso oposto ao DRS, no qual todo vetor viável pode ter seus valores incrementados. Um aumento na quantidade de insumos provocará uma variação na quantidade produzida na mesma proporção (se $\rho = 1$) ou em proporção maior (se $\rho > 1$).
- c) **Rendimento Constante de Escala (*Constant Return to Scale - CRS*)**. Mas-Colell et al. (1995) definem esse caso como a conjunção dos dois anteriores: a tecnologia T terá retorno constante de escala se $\mathbf{t} \in T$ e $\rho\mathbf{t} \in T$ para qualquer escalar $\rho \geq 0$. É o caso no qual torna-se viável tanto um acréscimo quanto um decréscimo no vetor insumo-produção. Um acréscimo na quantidade de insumos causará um acréscimo na proporção na quantidade produzida.

Para ilustrar graficamente os três tipos de rendimento de escala, considere o plano de produção t , composto pelo insumo x e pelo produto y , $t = (x,y)$, para as firmas A, B, C e D . Na parte (a) da Figura 8, observa-se a fronteira de produção com retornos constantes de escala (CRS) comparada ao caso de retornos não decrescentes de escala. Na parte (b) da Figura 8, a comparação é entre o caso de CRS e retornos não crescentes de escala (NIRS).

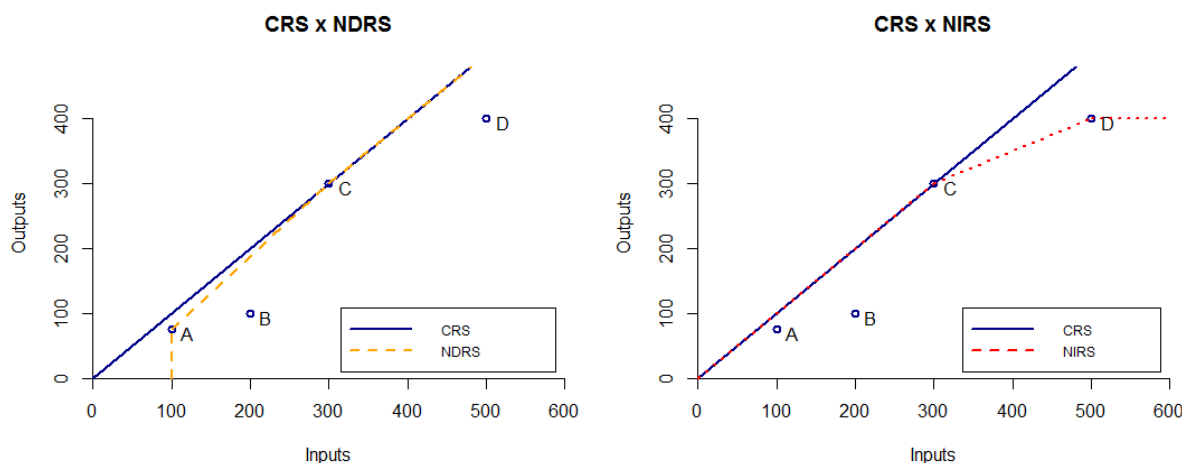


Figura 8 – Tipos de rendimento de escala

Fonte: Adaptado de Cook e Zhu (2008), p.111

O tipo de retorno de escala da função produção em análise é um ponto relevante no estudo de modelos de *benchmarking*, e será retomado na subseção 3.3.1.

5. **Aditividade ou Replicabilidade.** Se dois planos de produção são viáveis, então a soma deles também é factível (BOGETOFT, 2013). A definição formal de Mas-Colell et al. (1995) sugere que, se $\mathbf{t} \in T$ e $\mathbf{t}' \in T$, então $\mathbf{t} + \mathbf{t}' \in T$. Para os autores, essa propriedade está relacionada à ideia de entrada: se esta é irrestrita, então o conjunto agregado de produção (que descreve a economia como um todo), representado pelo vetor $\mathbf{t} + \mathbf{t}'$, sempre será viável.
6. **Convexidade.** Segundo Mas-Colell et al. (1995), essa é uma premissa básica em Microeconomia, e pressupõe que, se $\mathbf{t} \in T$ e $\mathbf{t}' \in T$, e $\rho \in [0,1]$, então $\rho\mathbf{t} + (1 - \rho)\mathbf{t}' \in T$.

A propriedade de convexidade leva a inferir a ideia de que combinações “não balanceadas” de insumos são menos produtivas que combinações “balanceadas”: se um plano de produção \mathbf{t} gera exatamente a mesma quantidade de produtos que o plano \mathbf{t}' , mas com uma combinação diferente de recursos, então o vetor de produção que usa um nível de insumos médio entre \mathbf{t} e \mathbf{t}' pode performar pelo menos tão bem quanto \mathbf{t} e \mathbf{t}' .

3.1.3 Função de Custo

A função de custo, segundo Hirschey (2009), é aquela que mostra a relação entre custo e a quantidade produzida. A análise das possibilidades produtivas, em especial quando buscam-se soluções ótimas de alocação de recursos, pode ser detalhada ao nível de custo quando o vetor de insumos \mathbf{x} possui um vetor correspondente ψ de preços conhecidos (MAS-COLELL et al., 1995).

O custo produtivo, então, pode ser definido através da multiplicação das quantidades (\mathbf{x}) pelos seus respectivos preços ($\boldsymbol{\psi}$): $\mathbf{c} = \boldsymbol{\psi}\mathbf{x}$. A quantidade produzida \mathbf{y} , então, pode ser expressa em termos do **custo produtivo**, quando a intenção é mostrar o gasto necessário para gerar determinada quantidade de produtos. (BOGETOFT, 2013).

A combinação ótima de recursos \mathbf{x}^* que minimiza os custos produtivos pode ser encontrada através da resolução de um problema de otimização, que tornará possível definir a maneira menos dispendiosa de se produzir a quantidade de insumos \mathbf{y} (BOGETOFT, 2013). A Equação 3.3 mostra o problema de minimização de custo, apresentado por Mas-Colell et al. (1995), que gera a quantidade ótima \mathbf{x}^* .

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \geq 0} \quad & \boldsymbol{\psi}\mathbf{x} \\ \text{s.a.} \quad & f(\mathbf{x}) \geq \mathbf{y} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como o vetor de preços $\boldsymbol{\psi}$ é conhecido, a Equação 3.3, quando resolvida, apontará as quantidades de insumos ótimas. A restrição da Equação 3.3 impõe que o custo mínimo encontrado seja capaz de gerar a uma quantidade mínima de \mathbf{y} produtos, a partir da transformação imposta pela função de produção $f(\cdot)$.

Conforme ressaltado por Bogetoft e Otto (2010) e Bogetoft (2013), a firma pode atingir a eficiência mais facilmente através da análise da tecnologia de produção (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , ao invés da análise do modelo de custo (\mathbf{c}, \mathbf{y}) , porque no primeiro caso, ela tem menos decisões a tomar: é necessário identificar a combinação ótima de recursos, enquanto que no segundo caso, é necessário ainda decidir por aquela que minimiza os custos.

A possibilidade de comparação entre a combinação ótima de insumos e o consumo apontado fora da curva da isoquanta leva ao conceito de eficiência, discutido na próxima seção.

3.2 Medidas de eficiência e performance

A eficiência de uma firma, na definição de Farrell (1957), é o número que mede o sucesso na produção da maior quantidade possível de determinado produto, dado um conjunto de insumos. Para Bogetoft e Otto (2010), a ideia de **eficiência** está ligada ao conceito de **dominância**. Considere, por exemplo, duas firmas, cujos planos de produção são definidos por $\mathbf{t}^{(1)} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)})$ e $\mathbf{t}^{(2)} = (\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)})$, respectivamente. A firma 2 domina a firma 1 (é mais eficiente), se ela precisa de tantos insumos quanto a firma 1 para produzir não menos que ela. Ou seja, $(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)})$ domina $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)})$ se e somente se $\mathbf{x}^{(2)} \leq \mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{y}^{(2)} \geq \mathbf{y}^{(1)}$ e $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}) \neq (\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)})$.

Assumindo como verdadeira a hipótese de Retorno Constante de Escala (CRS), Farrell (1957) descreve o cálculo da eficiência relativa entre firmas através da análise da isoquanta da tecnologia produtiva em questão. A vantagem dessa análise, conforme ressalta o autor, é que não é necessário conhecer previamente a **função de produção eficiente**, já que a isoquanta pode ser aproximada como essa curva.

Considere, para fins de ilustração, a isoquanta da Figura 9(a). A curva representa todas as combinações eficientes dos insumos x_1 e x_2 para a produção da quantidade y . Suponha que

uma firma necessite da quantidade de insumos do ponto P para atingir o mesmo nível produtivo y da isoquanta. O ponto Q , então, representa uma combinação de recursos que é capaz de gerar tantos produtos quanto a firma P , mas com uma fração OQ/OP de insumos, onde O é o ponto que representa a origem. A essa fração damos o nome de **eficiência técnica** da firma P .

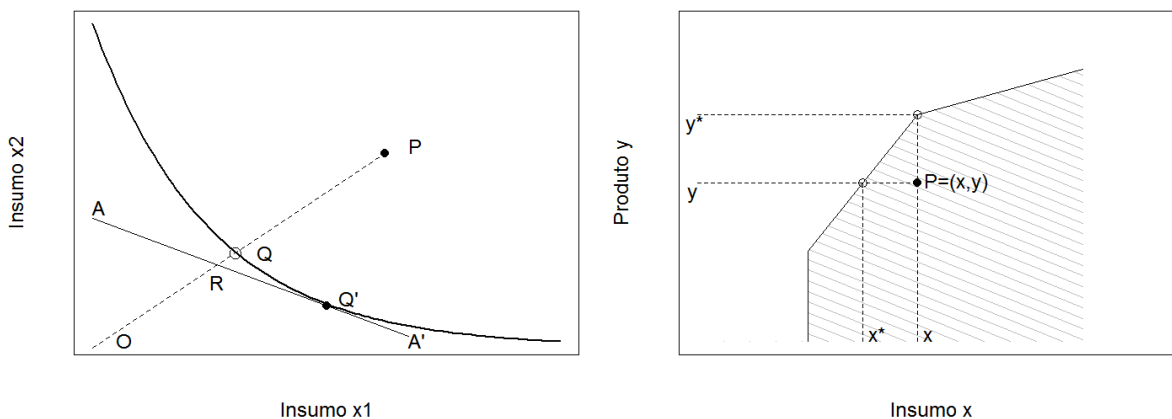


Figura 9 – (a) Eficiência de Farrell para insumos e (b) Eficiência de Farrell para um produto/um insumo

Fonte: Adaptado de Farrell (1957), p.254 (a) e Bogetoft e Otto (2010), p.26 (b)

Outra forma de visualizar a relação de eficiência dessa mesma tecnologia de produção é exposta por Bogetoft e Otto (2010) Figura 9(b). Nesse caso, temos um gráfico *insumo* \times *produto*, que mostra a ideia de eficiência de Farrell aplicada ao caso de de um insumo e um produto: sob o ponto de vista dos insumos, a eficiência técnica é equivalente à razão x^*/x , enquanto que sob o ponto de vista da quantidade produzida, a eficiência seria a razão y^*/y . Nessa figura, é fácil compreender que a firma P poderia ter produzido a mesma quantidade de uma firma eficiente Q , utilizando para isso ou a tecnologia (x^*, y) , ou a tecnologia (x, y^*) e não o conjunto (x, y) , como ela fizera.

Farrell (1957) ainda estende a análise da isoquanta da Figura 9(a) para a perspectiva dos preços. Considere a reta AA' do diagrama citado como sendo a razão dos preços dos dois insumos. Como já explicado na subseção 3.1.3, essa reta, tangente ao ponto ótimo da equação de minimização de custos, representa o custo eficiente da tecnologia. Embora os pontos Q e Q' representem a utilização ótima de recursos e sejam ambos tecnicamente eficientes, os custos de produção de Q' serão apenas uma fração OR/OQ dos custos de produção em Q . Essa fração é denominada **eficiência em preço** de Q . Se a firma mudar as proporções dos insumos até o nível representado pelo ponto Q' , mantendo, portanto a sua eficiência técnica constante, seus custos seriam reduzidos por um fator OR/OQ , sem mudar o fator de preço. Por isso, é razoável aproximar a eficiência de preço do ponto P pela mesma razão de eficiência OR/OQ . Para autores de Análise de Fronteira, como Bogetoft e Otto (2010), essa habilidade em escolher não apenas a combinação que otimiza tecnicamente a quantidade produzida, mas também aquela que minimiza os custos totais é definida como **eficiência alocativa**.

Considerando ambos os conceitos de eficiência, técnica e de preço, pode-se inferir que uma firma só atingirá a eficiência em custo se for capaz de escolher o *mix* correto de insumos e utilizá-lo de forma tecnicamente eficiente (BOGETOFT; OTTO, 2010). A eficiência em custos, portanto, será o produto da eficiência alocativa e da eficiência técnica, quando ambas levarem em conta o vetor de preços \mathbf{p} (BOGETOFT; OTTO, 2010). Sem entrar no detalhe sobre a correta alocação de recursos, Farrell (1957) havia definido também a eficiência global da firma apenas como o produto entre a eficiência em preço e a eficiência técnica: *OR/OP*.

A avaliação da eficiência de diferentes firmas que compartilham uma mesma tecnologia de produção T depende, como pôde-se constatar através da definição de Farrell (1957), da posição de cada firma em relação à fronteira de eficiência. A estimação desta fronteira é o assunto da próxima seção.

3.3 Modelos de Análise de Fronteira

Quando o conjunto de insumos e produtos que formam a tecnologia de produção T não é conhecido, e tampouco a função-produção $F(\cdot)$ que descreve a combinação de insumos capaz de gerar a quantidade máxima de produtos, é necessário estimar um modelo aproximado para a tecnologia (BOGETOFT, 2013). Nesse contexto, os modelos de análise de fronteira buscam identificar as **melhores práticas** produtivas entre as firmas comparadas, ao invés de descrever o comportamento médio observado. O conjunto de melhores práticas aproxima a isoquanta da tecnologia, tornando possível toda a análise de eficiência proposta por Farrell (1957). Com isso, como resumem Banker e Natarajan (2008), é possível comparar o desempenho das organizações em relação aos insumos utilizados.

Na literatura referente à estimação de modelos de fronteira, é comum classificar as abordagens utilizadas em Paramétricas ou Não Paramétricas. O primeiro grupo diz respeito a análises cujas funções são conhecidas *a priori*, exceto por um conjunto finito de parâmetros estimados a partir dos dados disponíveis. Já nos modelos não paramétricos, muito menos restritivos, sabe-se apenas a classe da função (em geral convexa e crescente). Nesses modelos, costuma-se definir um grupo de propriedades fixadas *a priori* que tornam tão amplas as possibilidades da função em questão, que não é possível definir parâmetros específicos (BOGETOFT, 2013).

Os modelos de estimação podem ser, ainda, classificados entre Determinísticos e Estocásticos, de acordo com Bogetoft (2013). Os modelos estocásticos são aqueles nos quais assume-se que as observações podem estar sujeitas a ruídos aleatórios, e então busca-se identificar a estrutura de média oculta, sem a interferência do ruído. Já nos modelos determinísticos, considera-se que toda variação nos dados contém informação significativa sobre a variável de resposta, suprimindo uma possível interferência de ruídos aleatórios. Os principais modelos de estimação de fronteira podem ser classificados de acordo com essas definições, conforme o autor mostra na Tabela 1.

De forma sucinta, Bogetoft (2013) descreve cada um dos principais modelos (página 11). A Figura 10 ilustra estes modelos para um determinado conjunto de produção.

- **COLS**: O método *Corrected Ordinary Least Squares* (Mínimos Quadrados Corrigidos)

Tabela 1 – Classificação dos métodos de estimação de fronteira

	Determinísticos	Estocásticos
Paramétricos	<i>Corrected Ordinary Least Squares (COLS)</i>	<i>Stochastic Frontier Analysis (SFA)</i>
Não-Paramétricos	<i>Data Envelopment Analysis (DEA)</i>	<i>Stochastic Data envelopment analysis (SDEA)</i>

Fonte: Bogetoft (2013)

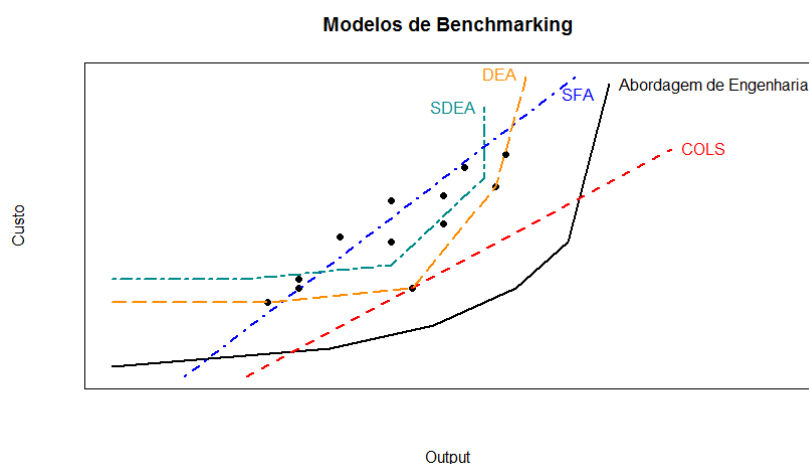


Figura 10 – Representação gráfica dos métodos de fronteira

Fonte: Adaptado de Bogetoft (2013), p. 12

corresponde à estimação de um modelo comum de regressão, seguido de um deslocamento vertical que leva todas as firmas para uma linha acima da função de custo mínimo.

- **SFA:** Na *Stochastic Frontier Analysis*, considera-se que parte das variações nos dados corresponde a um ruído aleatório e, por isso, ao invés de deslocar todas as firmas para cima da linha de custo mínimo, apenas uma parcela das observações é movida.
- **DEA:** O *Data Envelopment Analysis* estima a tecnologia através do princípio de extrapolação mínima (ver a propriedade 6 da [subseção 3.1.2](#)), definindo uma linha que envolva todos os dados e que atenda às características mínimas esperadas de um conjunto produtivo. Assim como no COLS, a tecnologia estimada através do DEA também é alocada abaixo de todos os dados de produtos-custos. É, entretanto, uma abordagem mais flexível que a primeira, no que tange aos tipos de função que a tecnologia pode assumir.
- **SDEA:** O *Stochastic Data Envelopment Analysis* combina a estrutura flexível do DEA com a ideia de que parte da variação observada é resultado de um ruído aleatório. Nesse caso, apenas uma parte conveniente dos dados é envolvida pela curva estimada.

Na [Figura 10](#), o autor ainda inclui uma quinta fronteira, denominada **Abordagem de Engenharia**. Trata-se de uma modelagem dos dados estimada por engenheiros, considerando possivelmente a melhor performance de todos os processos, em uma situação ideal.

Nosso foco de análise é o modelo de estimação DEA que, conforme exposto no [Capítulo 2](#), configura-se na opção feita pela ANEEL para composição da estrutura tarifária das distribuidoras de energia elétrica no Brasil.

3.3.1 Data Envelopment Analysis (DEA)

Conforme já descrito, o DEA é um método não-paramétrico para mensuração de eficiência relativa, considerando um conjunto de produtos e insumos e um grupo de firmas similares, identificadas como *Decision Making Units - DMUs*, ou Unidades de Decisão Gerencial. Proposta por [Charnes, Cooper e Rhodes \(1978\)](#), a abordagem utiliza programação linear para identificar uma aproximação da fronteira de produção, permitindo uma avaliação da performance de cada DMU em relação ao *benchmark* ([ESTELLE; JOHNSON; RUGGIERO, 2010](#)). Em coerência com a literatura, a partir de agora o modelo de [Charnes, Cooper e Rhodes \(1978\)](#) será referenciado como CCR.

Originalmente, o método CCR considerava a premissa de rendimentos constantes de escala. Apenas alguns anos mais tarde é que [Banker, Charnes e Cooper \(1984\)](#) sugeriram uma outra abordagem, chamada na literatura de BCC, na qual seria possível observar retornos variáveis de escala (*Variable Return to Scale - VRS*).

[Banker, Charnes e Cooper \(1984\)](#) sustentam que uma DMU pode alcançar a fronteira de eficiência se ela se situa no ponto mais produtivo da escala (*most productive scale size - mpss*) (página 1088). O conceito de mpss é definido por [Banker \(1984\)](#) em trabalho prévio: “o ponto mais produtivo da escala para um *mix* de insumos e produtos é o ponto da escala no qual a razão entre a quantidade de produtos e a quantidade de insumos é maximizada” (página 37). Segundo [Banker, Charnes e Cooper \(1984\)](#) (página 1088), a sua formulação de DEA leva em conta a possibilidade de que a DMU não esteja operando em sua escala ótima e, por isso, pode apresentar variações no retorno de escala.

Sendo assim, [Banker, Charnes e Cooper \(1984\)](#) desagregam a eficiência calculada no modelo CCR em dois valores: eficiência técnica e eficiência de escala. Para compreender a ideia, considere a [Figura 11](#). Nessa figura, se considerarmos o modelo orientado a insumos, a Eficiência Técnica da DMU **A** seria expressa pela razão MB/MA , enquanto que a Eficiência de Escala seria calculada pela razão MN/MB . A eficiência calculada pelo modelo de Retorno Constante de Escala (CRS) expressaria a Eficiência de Escala e Técnica.

Assim, o modelo apresentado por [Banker, Charnes e Cooper \(1984\)](#) difere da abordagem original de [Charnes, Cooper e Rhodes \(1978\)](#) no que concerne ao tipo de retorno de escala. Conforme ressaltado por [Bogetoft \(2013\)](#), os casos práticos de análise de fronteira mostram que o retorno variável de escala defendido por [Banker, Charnes e Cooper \(1984\)](#) é mais comum de se observar. O retorno constante de escala seria uma especificidade do caso mais genérico, que é o de retorno variável. Ambos os métodos, contudo, constituem a essência da ampla maioria de trabalhos que veio a ser desenvolvido posteriormente sobre o tema.

O problema de programação linear resolvido pelo DEA deve incluir apenas as variáveis sob controle das DMUs. Os modelos CCR e BCC determinam a fronteira técnica de produção de

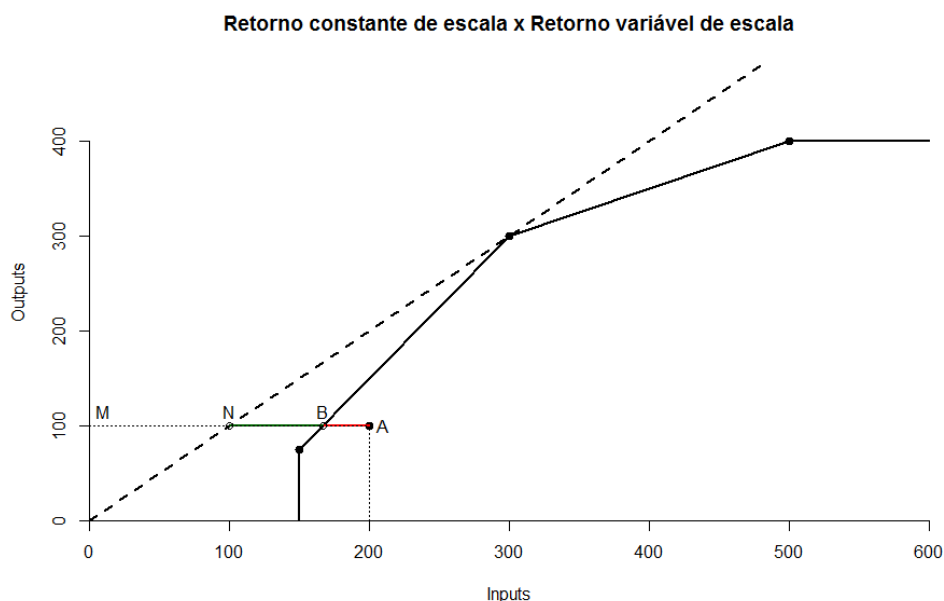


Figura 11 – Comparação entre Rendimento Constante de Escala (CRS) e Rendimento Variável de Escala (VRS)

Fonte: Adaptado de [Banker, Charnes e Cooper \(1984\)](#), p.1089

uma tecnologia T , levando em conta o vetor de insumos \mathbf{x} capaz de gerar a produção ótima \mathbf{y} (RAY; GHOSE, 2014). Sendo assim, não faria sentido incluir variáveis que estão fora do controle da firma. A esse último grupo, dá-se o nome de **variáveis ambientais** ou *contextual variables*, cuja definição será melhor explorada ao fim do capítulo.

Outra premissa sobre a Tecnologia de Produção ressaltada por [Charnes, Cooper e Rhodes \(1978\)](#) e reforçada por [Banker, Charnes e Cooper \(1984\)](#) é a de que as DMUs analisadas devem, obrigatoriamente, possuir o mesmo conjunto de produtos e o mesmo conjunto de insumos. Mesmo que as proporções entre os insumos e os produtos se alterem, todo insumo e todo produto deve ter utilização superior a zero, em todas as DMUs. Essa premissa garante que as DMUs sejam comparáveis entre si, o que é especialmente crítico na análise de eficiência relativa.

No modelo proposto por [Charnes, Cooper e Rhodes \(1978\)](#), um grupo de n DMUs resultará em um conjunto de n problemas de programação linear resolvidos, um para cada índice de eficiência h_j calculado. Cada problema busca maximizar a razão entre **produtos** e **insumos** da DMU analisada, sujeito à condição de que razões similares de todas as DMUs devem ser menores ou iguais a um.

Considere a DMU_0 como aquela cuja eficiência h_0 está sendo avaliada. Na [Equação 3.4](#), as incógnitas a serem definidas são os pesos p_r e q_i , referentes, respectivamente, aos produtos e

insumos capazes de gerar o maior valor de h_0 .

$$\begin{aligned} \max h_0 &= \frac{\sum_{r=1}^s p_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^m q_i x_{i0}} \\ \text{Sujeito a: } &\frac{\sum_{r=1}^s p_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m q_i x_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \\ &p_r, q_i \geq 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Conforme exposto por [Charnes, Cooper e Rhodes \(1978\)](#), a resolução desse problema fracionário pode ser computacionalmente custosa. Por isso, os autores substituem a [Equação 3.4](#) por um problema linear equivalente. Em trabalhos anteriores, os autores provam que a resolução de um problema de programação linear provê a mesma solução ao seu equivalente fracionário ([Charnes e Cooper \(1962\)](#); [Charnes e Cooper \(1973\)](#)). A [Equação 3.5](#), que representa o problema linear equivalente, é também chamada de **modelo dos multiplicadores**.

$$\begin{aligned} \max &\sum_{r=1}^s p_r y_{r0} \\ \text{Sujeito a: } &\sum_{r=1}^s p_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m q_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ &\sum_{i=1}^m q_i x_{i0} = 1 \\ &p_r, q_i \geq 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

A [Equação 3.5](#) ainda tem uma quantidade considerável de restrições, porque é composta de um conjunto de n problemas, cada um com $n + 1$ restrições. Então, se a avaliação refere-se a um grupo de 30 DMUs, teremos 30 problemas de PL a ser resolvidos, cada um com 31 restrições. Para reduzir o esforço computacional, que era um problema relevante na época, [Charnes, Cooper e Rhodes \(1978\)](#) lançam mão da propriedade da **dualidade**, segundo a qual todo problema de programação linear possui um problema dual correspondente.

Em um problema dual, cada variável do problema original (chamado **primal**) corresponde a uma restrição do novo problema. As restrições do primal, por sua vez, corresponderão às variáveis do dual, e os coeficientes da função objetivo do primal serão os termos independentes do dual ([TAHA, 2008](#)). Isso significa que a resolução de um dual será a mesma do seu primal correspondente. Portanto, um problema no qual o número de variáveis é consideravelmente menor que a quantidade de restrições, pode ser mais facilmente resolvido através do dual. Assim, o dual da [Equação 3.5](#) corresponderá à [Equação 3.6](#), onde a variável θ representa a eficiência relativa e a variável α_j refere-se ao peso da j -ésima DMU na composição da DMU virtual eficiente. Esse

problema de programação linear é também chamado de **modelo do envelopamento**.

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 \text{Sujeito a: } & \sum_{j=1}^n \alpha_j x_{ij} \leq \theta x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n \alpha_j y_{rj} \geq y_{i0} \quad r = 1, \dots, s \\
 & \alpha_j \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Através do problema de programação linear do DEA, calcula-se, então, a distância relativa de cada DMU da fronteira de eficiência. Cada DMU terá, portanto, um escore de eficiência, caracterizado como uma medida relativa compreendida no intervalo $[0,1]$. Assim, quanto mais longe a DMU está do *benchmark*, menor será a sua eficiência.

De acordo com Ray e Ghose (2014), a premissa de CRS pode ser substituída no problema de otimização (Equação 3.6) pela premissa de VRS ao se acrescentar a restrição $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$. Banker, Charnes e Cooper (1984) incluíram tal restrição a fim de limitar os pesos α_j às empresas com *mix* produtivos mais próximos ao da DMU analisada. Já que a premissa é de retornos variáveis de escala, não faria sentido comparar a DMU a outras cujo ponto mais produtivo da escala (*mps*) não fosse o mesmo.

Embora o DEA seja classificado como um método não-paramétrico, Banker (1993) identificou as condições para as quais a função estimada por ele é estatisticamente consistente. Para isso, o autor mostrou que os **estimadores não-paramétricos** gerados a partir da solução do problema de programação linear são capazes de maximizar a verossimilhança de um amplo grupo de distribuições de probabilidade, como a exponencial e a normal truncada. Isso não significa que o DEA seja um método paramétrico, mas apenas confirma que a abordagem é estatisticamente consistente (BANKER; NATARAJAN, 2008). A respeito das características determinísticas e não-paramétricas do DEA, Hoff (2007) destaca a flexibilidade que elas conferem ao método, tornando possível uma extensa gama de análises. Segundo o autor, abordagens paramétricas pressupõem uma forma específica na relação entre insumos e produtos, limitando as possibilidades analíticas.

Para McDonald (2009), a maneira como a eficiência é descrita e interpretada através de uma análise DEA é um dos aspectos mais interessantes do método. A simplicidade da informação gerada torna possível uma série de questionamentos como, por exemplo, o que faz uma empresa produzir menos que outra, se elas utilizam os mesmos insumos?

Para responder a questões como essa, é necessário que se compreenda a natureza dos dados que influenciam a produção. Em situações reais, a quantidade produzida é resultado de uma série de decisões e de fatores. Normalmente, apenas alguns desses fatores são controlados pelas firmas, e podem ser alterados pelo tomador de decisão. Um conjunto de outras variáveis - não necessariamente menos importantes - são externamente fixadas, e funcionam como espécies de restrições, dentro das quais as decisões operacionais devem ser tomadas. A esses fatores, dá-se o nome de **variáveis ambientais** ou de **contexto** (RAY, 1988).

Como exemplos de variáveis ambientais, pode-se citar os fatores climáticos apontados por Yu, Jamasb e Pollitt (2009) em um estudo sobre a eficiência das distribuidoras de energia britânicas: temperatura, incidência de granizo, volume de precipitação são informações que influenciam nos custos operacionais (e na eficiência global das DMUs), mas que fogem do escopo de decisões da empresa. Ray e Ghose (2014) apresentaram um estudo sobre a produtividade da agricultura indiana, e classificaram como variáveis ambientais fatores como o tipo de solo, incidência de chuva e nível de educação do agricultor.

A análise das variáveis ambientais, não contemplada na Equação 3.6, foi incluída pela primeira vez em discussões acerca do DEA por Banker e Morey (1986). Mantendo fixos os insumos e a quantidade produzida, os autores fizeram uma adaptação no modelo de único estágio existente então, assumindo convexidade com respeito às variáveis ambientais. Essa restrição foi relaxada por Ruggiero (1996), que observou que essa premissa poderia não ser válida em se tratando de variáveis exógenas.

Essa adaptação na Equação 3.6 pressupõe que se assumam uma série de premissas, conforme pode-se observar. Por isso, outras abordagens passaram a ser testadas. Ray (1988) apresentou um modelo no qual incluiu um segundo estágio de análises econométricas, desenvolvido após a resolução do problema de programação linear. Ray (1991) estende a análise, incluindo modelos de regressão linear entre os escores obtidos e as variáveis ambientais, a fim de compreender quais delas são significativas no resultado.

A partir de então, vários estudos tem sido feitos a fim de incluir as variáveis ambientais em um segundo estágio do DEA. A maioria deles utiliza métodos de estimação paramétricos, como Regressão Tobit ou Logit, *Ordinary Least Squares - OLS* (Mínimos Quadrados), Máxima Verossimilhança ou Regressões Truncadas (JOHNSON; KUOSMANEN, 2012). As análises de segundo estágio podem ser úteis para auxiliar na tomada de decisões gerenciais das DMUs: uma vez que se sabe quais os fatores que influenciam negativamente a produtividade, pode-se planejar políticas e diretrizes capazes de minimizar seus impactos. Um exemplo interessante é o estudo apresentado por Ray e Ghose (2014): nele, os autores identificaram quais variáveis ambientais influenciam a produtividade da agricultura indiana. Ao concluir que agricultores expostos a maiores níveis de educação específica e com maior acesso a tecnologias de ponta têm melhores escores de produtividade, sugere-se que políticas públicas sejam executadas no sentido de aumentar a exposição dos produtores rurais a educação e pesquisa e desenvolvimento.

Simar e Wilson (2007) mostram que os estimadores de segundo estágio são estatisticamente consistentes, sob algumas premissas e condições de regularidade. Para isso, os autores utilizaram uma regressão truncada para descrever a fronteira de eficiência aplicada a um complexo algoritmo de estimação de 7 etapas. Para McDonald (2009), a função de Simar e Wilson (2007) é muito restritiva, porque não apresenta um termo de ruído. Nesse sentido, o trabalho apresentado por Banker e Natarajan (2008) seria mais abrangente, porque inclui um termo de ruído como uma distribuição truncada.

A adoção de abordagens de um ou dois estágios depende da natureza dos dados em análise. Quando as DMUs estão sujeitas a uma variedade muito grande de cenários ambientais, é mais conveniente optar por abordagens de 2 estágios. Esse parece ser o caso da maioria dos

estudos publicados, em especial aqueles que dizem respeito a ambientes regulatórios. Por isso, aprofundamos uma análise das possíveis abordagens a serem utilizadas no segundo estágio do DEA na [seção 3.4](#).

3.4 Abordagens de segundo estágio do DEA

A consolidação de uma técnica paramétrica de análise em um segundo estágio do DEA começa pela caracterização econométrica das variáveis ambientais. Inicialmente proposto por [Ray \(1988\)](#), o modelo que serviu de base para a formulação dos principais trabalhos sobre o tema é exposto na [subseção 3.4.1](#).

Uma vez justificada econometricamente a viabilidade da análise do DEA em dois estágios, [Ray \(1991\)](#) sugere os seguintes passos práticos para implementação do modelo:

1. Especificar os vetores de insumos controláveis e produtos, computando os escores de eficiência através do problema de programação linear de [Charnes, Cooper e Rhodes \(1978\)](#) ou [Banker, Charnes e Cooper \(1984\)](#).
2. Especificar os fatores externos que afetam a produção, mas que não estão sob controle da empresa.
3. Estimar uma relação estatística cabível entre a eficiência mensurada em (1) e os fatores externos especificados em (2).

Os primeiros modelos paramétricos os quais tinham o objetivo de relacionar as variáveis ambientais aos escores de eficiência, como o de [Ray \(1991\)](#), sugeriam a utilização de métodos de regressão clássicos, como Mínimos Quadrados. Entretanto, devido à natureza truncada dos escores de eficiência, contidos em um intervalo $[0,1]$, logo o modelo de regressão Tobit começou a ser uma alternativa explorada. [McDonald \(2009\)](#) cita os trabalhos de [Bjurek, Kjulin e Gustafsson \(1992\)](#) e [Oum e Yu \(1994\)](#) como alguns dos pioneiros nesse sentido.

Ambas as abordagens - OLS e Regressão Tobit - foram amplamente exploradas. Alguns autores ainda apresentaram ferramentas alternativas, como o método de Quase-Verossimilhança de [Papke e Wooldridge \(1996\)](#). [Simar e Wilson \(2007\)](#) caracterizam o segundo estágio através de Máxima Verossimilhança e, mais recentemente, [Estelle, Johnson e Ruggiero \(2010\)](#) propuseram um modelo de 3 estágios de DEA, utilizando uma abordagem não-paramétrica no segundo estágio.

3.4.1 Caracterização econométrica das variáveis ambientais

A fundamentação econométrica proposta por [Ray \(1988\)](#) sugere que a função produção tenha uma característica multiplicável, decomposta entre insumos controláveis e não controláveis, correspondentes às variáveis ambientais. Isso significa que uma mudança no nível de qualquer variável ambiental causaria um deslocamento na curva de produção máxima que envolve os insumos controláveis.

Então, a função produção definida na [subseção 3.1.1](#) como $y = f(\mathbf{x})$, onde \mathbf{x} era o vetor de insumos, passa a ser definida como uma função $y = g(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, onde \mathbf{x} refere-se apenas aos insumos controláveis, e \mathbf{z} às variáveis ambientais.

A influência do vetor \mathbf{z} pode ser interpretada da seguinte maneira: considere duas firmas, k e s . Se ambas têm um mesmo conjunto de insumos controláveis \mathbf{x} , de modo que $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_s$, mas a quantidade produzida diverge ($\mathbf{y}_k \neq \mathbf{y}_s$), então a diferença entre elas poderia ser interpretada como a eficiência técnica daquela que produz maiores quantidades. Contudo, dado que a função $g(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ é aquela que descreve o processo produtivo, deve-se esperar que $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_s$ apenas se $\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_s$ também ([RAY, 1988](#)).

Assim, uma forma simples de interpretar a função $g(\cdot)$ é tratar o efeito das variáveis ambientais, z_n , como uma mudança técnica na fronteira de produção, resultado da interação entre os dados de produção y_m e dos insumos controláveis x_i . O que [Ray \(1988\)](#) sugere, portanto, é que a fronteira de produção deve ser composta apenas pelos insumos controláveis x_i , e que as variáveis ambientais z_n serão responsáveis por deslocamentos em relação à fronteira.

O autor prova essa intuição definindo uma função que representa o deslocamento da fronteira de produção máxima provocado pelas variáveis ambientais. Suponha que o vetor que representa a combinação ótima hipotética dos i insumos de uma tecnologia para a firma k é dado por \mathbf{x}_{ik}^* . Esse vetor, portanto, pode ser representado pela multiplicação do vetor de insumos reais da firma k , \mathbf{x}_{ik} , por uma função $\delta(\cdot)$, que representa um pequeno deslocamento e cujos termos independentes seriam as variáveis não controláveis, \mathbf{z}_k . Então, $\mathbf{x}_{ik}^* = \delta_i(\mathbf{z}_k) \cdot \mathbf{x}_{ik}$, ($i = 1, 2, \dots, I$), onde $0 < \delta_i(\mathbf{z}_k) \leq 1$.

Com essa decomposição de \mathbf{x}_{ik}^* em dois termos, pode-se decompor a função $g(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ em duas: uma função $w(\cdot)$, dependente dos fatores ambientais \mathbf{z}_k e outra função $f(\cdot)$, cuja variável independente refere-se aos insumos controláveis \mathbf{x}_i . A função produção da k – ésimasima firma pode ser reformulada conforme a [Equação 3.7](#), onde estão separadas a parcela referente às variáveis ambientais ($w(\mathbf{z}_k)$) e a parcela referente à produção provocada pelos insumos controláveis, $f(\mathbf{x})$, deslocada da fronteira ótima pela função das variáveis ambientais \mathbf{z}_k , $\delta_i(\mathbf{z}_k)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= w(\mathbf{z}_k) \cdot f(\delta_1(\mathbf{z}_k), \delta_2(\mathbf{z}_k), \dots, \delta_I(\mathbf{z}_k)) \\ \mathbf{y}_k &= w(\mathbf{z}_k) \cdot f(\mathbf{x}_{1k}^*, x_{2k}^*, \dots, \mathbf{x}_{Ik}^*) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Se $\delta_i(\mathbf{z}_k) = 1$ para todo i e k , então as variáveis ambientais \mathbf{z}_k agem como um vetor neutro de mudança e a fronteira de eficiência mantém-se inalterada. A função produção pode ser simplificada conforme a [Equação 3.8](#).

$$\mathbf{y}_k = w(\mathbf{z}_k) \cdot f(\mathbf{x}_k) \tag{3.8}$$

Generalizando a formulação, suponha que Ω é o conjunto de todos os vetores possíveis de variáveis ambientais. Assuma ainda que a função $0 < w(\mathbf{z}) \leq 1$ para todo $\mathbf{z} \in \Omega$. Reescrevendo a [Equação 3.8](#), temos $\mathbf{y}_k/w(\mathbf{z}_k) = f(\mathbf{x}_k)$. Se definirmos a isoquanta com a quantidade ótima de produtos como $\mathbf{y}^* = f(\mathbf{x}_k)$, então $\mathbf{y}_k \leq \mathbf{y}_k^*$ e $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k^*$ se e somente se $w(\mathbf{z}_k) = 1$.

Disso, conclui-se que \mathbf{y}_k^* é a quantidade máxima possível de ser produzida a partir do conjunto de insumos \mathbf{x}_k , se a configuração mais favorável de variáveis ambientais, \mathbf{z}_k^* , estiver disponível. Então, a função $f(\mathbf{x}_k)$ é, de fato a fronteira de produção, sujeita a um deslocamento provocado pela função $w(\mathbf{z}_k)$.

Se a firma k é eficiente e compõe a fronteira de produção, a função $w(\cdot)$ pode ser entendida como a função de eficiência: se $w(\cdot) = 1$, a firma mantém-se na fronteira de eficiência, se $0 < w(\cdot) < 1$, ela sofre um deslocamento. Resta definir, então, qual é a forma da função $w(\cdot)$.

Como em qualquer formulação econométrica, Ray (1988) sugere que apenas algumas variáveis preditoras possam ser identificadas e mensuradas. Os outros fatores que influenciam a variável de resposta são tratados como aleatórios. Sendo assim, assuma que \mathbf{z}_k é um vetor de variáveis externas com n -insumos. Assuma que apenas r dessas variáveis ambientais são não-aleatórias, sendo denotadas por \mathbf{Z}_k . Ray (1988) especifica estocasticamente a variável aleatória $w_k(\cdot)$ conforme a Equação 3.9, como uma função $\pi(\cdot)$, onde β representa o vetor de r -parâmetros das \mathbf{Z}_k variáveis ambientais e η corresponde ao ruído aleatório.

$$w_k = \pi(\mathbf{Z}_k, \beta) + \eta_k \quad (3.9)$$

Conforme já exposto, a função $w(\cdot)$ deve assumir uma forma que torne possível obter valores preditos no intervalo $[0,1]$. A uma primeira vista, a função logística parece atender bem a esse requisito. De acordo com Montgomery, Peck e Vining (2012), utiliza-se essa função em problemas cuja variável de resposta pode assumir dois valores, como 0 e 1. Segundo os autores, em geral, quando a variável de resposta é binária, há evidência empírica indicando que a função tenha um formato em S , não linear. Essa função, então, chama-se **Função Logística**, e pode ser descrita genericamente conforme a equação Equação 3.10, onde x é a variável preditora e β é o seu coeficiente.

$$y = \frac{\exp(x\beta)}{1 + \exp(x\beta)} \quad (3.10)$$

Embora a Equação 3.10 pareça ser a escolha natural para o formato da função $w(\cdot)$, Ray (1988) prefere utilizar uma adaptação dela, adicionando à equação logística um termo de ruído simétrico η_k , por duas razões principais. A primeira diz respeito à natureza da distribuição logística: ela pressupõe um processo de escolha qualitativo, não observado no contexto do DEA. A outra razão é a provável alta incidência de valores $w_k = 1$ em uma análise DEA. Como a estimação de parâmetros da Equação 3.10 requer uma transformação linear do tipo $\ln(y)$, os valores nos quais $w_k = 1$ resultariam em infinito, em decorrência da transformação $\ln(w_k/(1 - w_k))$. O autor sustenta que na verdade os valores de w_k não correspondem a variáveis binárias, mas sim a valores contínuos no intervalo $[0,1]$. A adaptação proposta por Ray (1988) pode ser vista na Equação 3.11, onde o autor soma um termo de ruído η_k , após rearranjar os termos da Equação 3.10.

$$w_k = \frac{1}{1 + e^{-Z\beta}} + \eta_k \quad (3.11)$$

A argumentação econométrica de Ray (1988) torna claro que, se bem definida a função que tem como variável de resposta os escores de eficiência, é possível avaliar o impacto das variáveis ambientais. O método de estimação dessa função é, portanto, o objeto de estudo principal dos trabalhos referentes ao segundo estágio do DEA.

4 Métodos de estimação da eficiência aplicados em dois estágios

Tendo em vista a caracterização econométrica das variáveis ambientais apresentada no [Capítulo 3](#), esse capítulo tem o objetivo de apresentar os principais métodos de estimação de parâmetros aplicados ao caso de análises de segundo estágio de DEA. Com a aplicação dessas técnicas, procura-se definir uma forma funcional na qual a variável de resposta é o escore de eficiência estimado na análise de primeiro estágio do DEA e as variáveis preditoras são o conjunto de variáveis ambientais \mathbf{z}_k que deslocam a firma da fronteira de eficiência.

4.1 Estimação da eficiência através de Mínimos Quadrados

[Ray \(1991\)](#) foi um dos primeiros estudiosos a apresentar um modelo de análise de segundo estágio através do uso de Mínimos Quadrados.

O método de estimação de parâmetros através de Mínimos Quadrados é definido por [Montgomery, Peck e Vining \(2012\)](#) como uma abordagem para resolver modelos de regressão linear do tipo $y = \beta_0 + \beta_1 x + \eta$, onde x é a variável preditora, y é a variável de resposta, β_i são os coeficientes da variável preditora e η é o erro aleatório, normalmente distribuído, com média 0.

Considere o caso genérico, onde há k variáveis preditoras e n observações. Nesse caso, o modelo pode ser representado por $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\eta}$, onde \mathbf{y} é um vetor $n \times 1$ de observações. Seja $p = k + 1$ o valor que representa a dimensão dos parâmetros a serem estimados, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$. Então, \mathbf{X} é uma matriz $n \times p$ de variáveis independentes e $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $p \times 1$. O termo de ruído $\boldsymbol{\eta}$ também pode ser representado por um vetor $n \times 1$.

O método de mínimos quadrados busca minimizar o quadrado da diferença entre o valor observado e o valor predito através de uma equação do tipo $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\eta}$. Então, queremos encontrar os parâmetros estimados $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ que minimizem a soma do quadrado dos erros, $S(\boldsymbol{\beta})$. A [Equação 4.1](#) mostra essa formulação.

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 = \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \quad (4.1)$$

A [Equação 4.1](#), que representa a soma dos quadrados dos erros, pode ser reescrita, então, conforme a [Equação 4.2](#).

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}' - \mathbf{y}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (4.2)$$

O ponto que minimiza o erro será, portanto, aquele onde a derivada da [Equação 4.2](#) em

relação aos parâmetros estimados $\hat{\beta}_p$ se iguala a zero, conforme a [Equação 4.3](#).

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\hat{\beta}} &= -2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = 0 \quad \therefore \\ \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} &= \mathbf{X}'\mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para resolver a equação, basta multiplicar ambos os lados pelo inverso de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$. Assim, chega-se ao estimador de mínimos quadrados do vetor $\hat{\beta}$, conforme a [Equação 4.4](#). Para tanto, é necessário apenas que a matriz \mathbf{X} seja inversível, o que ocorrerá sempre que os parâmetros regressores forem linearmente independentes.

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (4.4)$$

Conforme havia definido em seu trabalho anterior, [Ray \(1991\)](#) ressalta que a função de transformação da produção deve atender à propriedade multiplicativa, a fim de acomodar variáveis ambientais e variáveis controláveis (ver a [Equação 3.8](#)). Funções comumente utilizadas em econometria, como a *Cobb-Douglas*, podem atender a esse requisito.

Então, o autor retoma a seguinte definição, a partir do seu trabalho anterior: considerando a [Equação 3.8](#), onde $\mathbf{y}_k = w(\mathbf{z}_k) \cdot f(\mathbf{x}_k)$, assumo que $w(\mathbf{z}_k)$ resulte em valores no intervalo $[0,1]$, para todo \mathbf{z}_k . Se especificarmos a função $f(\cdot)$ como uma função linear ou log-linear (a fim de permitir retornos variáveis de escala), então a componente $w(\mathbf{z}_k)$ corresponde ao escore de eficiência DEA da função produção, θ , capaz de deslocar a função produção da fronteira de eficiência, conforme mostrado na [subseção 3.4.1](#). Ou seja, a função $w(\mathbf{z}_k)$ define a eficiência máxima que se pode atingir, dada a configuração \mathbf{z}_k de variáveis ambientais. Portanto, pode-se relacionar o escore de eficiência obtido através do DEA, θ às variáveis ambientais em um modelo de regressão simples, como o da [Equação 4.5](#), onde o escore de eficiência representa a variável dependente e a função $w(\cdot)$ configura-se como uma variável aleatória com ruído η .

$$\begin{aligned} w(\mathbf{z}_k) &= \theta_k \\ \theta_k &= w(\mathbf{z}_k) + \eta_k, \quad \text{onde } \eta_k \leq 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pode-se estimar o escore de eficiência $\hat{\theta}_k$, portanto, como a variável dependente em uma equação linear do tipo $\hat{\theta}_k = \hat{\beta}\mathbf{z}_k + \eta_k$, cujas variáveis independentes \mathbf{z}_k serão os fatores ambientais do modelo e $\hat{\beta}$ serão seus coeficientes. Uma regressão linear desse tipo, contudo, pressupõe que o erro aleatório seja normalmente distribuído, o que implicaria em possíveis valores de η_k no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Na [Equação 4.5](#) proposta por [Ray \(1991\)](#), entretanto, se forem observados valores de erro aleatório superiores a zero, corre-se o risco de que o escore de eficiência estimado $\hat{\theta}$ seja maior que 1, o que invalidaria o modelo. Por isso o autor impõe a condição de que o erro aleatório seja necessariamente inferior ou igual a zero.

O valor predito da eficiência, dado o conjunto de fatores externos, é calculado então pela equação linear de $\hat{\theta}$, cujos parâmetros são estimados através de Mínimos Quadrados. O problema é que o OLS não pode garantir que o erro aleatório seja menor ou igual a zero, conforme

condicionado na [Equação 4.5](#). Por isso, [Ray \(1991\)](#) propõe uma correção na equação de estimação $\hat{\theta}$: adiciona-se ao intercepto o maior valor positivo de erro residual observado, e recalcula-se os erros residuais, subtraindo este valor de cada observação de erro obtida. Segundo o autor, esse ajuste garante que todos os valores residuais sejam não positivos, gerando os estimadores ajustados $\hat{\theta}$ consistentes.

A diferença entre o escore estimado ajustado e o escore observado ($\hat{\theta} - \theta$) representa estritamente a ineficiência gerencial da DMU, descontando já a parcela de deslocamento da curva devido às condições ambientais.

Outro ajuste sugerido por [Ray \(1991\)](#) deve ser efetuado quando o valor predito da eficiência, $\hat{\theta}$, resultar em um número maior que um. Essa é uma possibilidade que não pode ter a ocorrência descartada, em se tratando de estimação via OLS, e é agravada ainda mais quando o ajuste citado anteriormente é efetuado. Então, se o valor predito ajustado do escore exceder 1, o autor sugere que $\hat{\theta}$ seja substituído por 1.

No estudo em que apresenta comparações entre o OLS e outras abordagens para segundo estágio, [McDonald \(2009\)](#) ressalta que nem sempre são feitos ajustes na equação de predição, conforme sugerido por [Ray \(1991\)](#). Isso porque, em muitos estudos de segundo estágio, a predição do escore não é o foco. Em muitos casos, o objetivo principal é descobrir quais fatores ambientais influenciam significativamente a eficiência e a magnitude do seu efeito marginal.

4.2 Estimação da eficiência através de Regressão Tobit

A característica truncada dos escores de eficiência levou alguns autores a defender a utilização da regressão Tobit como a melhor alternativa para o segundo estágio do DEA, ainda no início dos anos 1990. Clássica abordagem de regressão linear, esse modelo foi proposto por [Tobin \(1958\)](#) e constitui uma das principais abordagens para tratamento de dados censurados.

Conforme explicado por [McDonald \(2009\)](#), a Tobit trata-se de uma adaptação em características da regressão linear clássica, a fim de acomodar dados de natureza truncada. Considere, para fins de exemplo, o caso no qual o escore de eficiência θ é o termo dependente a ser estimado, a partir de variáveis ambientais \mathbf{z} , que compõem um vetor de n termos independentes. Aplicando a equação do modelo de regressão linear clássico, teríamos um estimador no formato $\hat{\theta}_i = \mathbf{z}_i \hat{\beta} + \boldsymbol{\eta}_i$, onde $\boldsymbol{\eta}_i | \mathbf{z}_i$ representa o erro aleatório, normalmente distribuído, centrado em média zero com variância σ_z^2 . O vetor $\hat{\beta}$ representa o conjunto de parâmetros desconhecidos a serem estimados. O valor predito da eficiência seria, então, ajustado através do resultado da regressão linear de $\hat{\theta}_i$, sujeito à regra da [Equação 4.6](#).

$$\hat{\theta}_i = \begin{cases} \hat{\theta}_i = 0, & \text{se } \hat{\theta}_i \leq 0, \\ \hat{\theta}_i = 1, & \text{se } \hat{\theta}_i \geq 1, \\ \hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i, & \text{se } 0 < \hat{\theta}_i < 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Assim, de acordo com [Hoff \(2007\)](#), a regressão Tobit acomoda os dados abaixo e acima dos limites estipulados como se estes fossem valores das bordas. Em geral, esse tipo de regressão

é utilizada quando os dados da distribuição têm natureza truncada, ou pertencem a um tipo de *corner solution* de um problema otimização.

O estudo de Hoff (2007) compara a aplicação de Tobit e OLS ao segundo estágio do DEA, e conclui que ambos os métodos são equivalentes em desempenho. Banker e Natarajan (2008) também não fazem distinção entre as duas abordagens, apenas citando por alto que ambas (e outras abordagens, como verossimilhança) se equivalem.

Entretanto, McDonald (2009) questiona a coerência estatística na aplicação da regressão Tobit ao segundo estágio do DEA. Para o autor, os escores de eficiência não têm natureza censurada, mas sim limitada. Tome como exemplo de dados truncados uma distribuição de riqueza, onde os valores superiores a 200 mil são classificados como 200 mil. Não seria esse o mesmo caso dos escores de eficiência gerados pelo DEA, onde não seria correto agrupar escores superiores a 1 em uma classe, já que escores superiores a 1 simplesmente não deveriam existir, por definição. Para o autor, os escores de eficiência não correspondem, portanto, a um conjunto de dados truncados, mas sim a uma distribuição normalizada, limitada por sua própria definição.

Outra possível aplicação do modelo Tobit seria em casos nos quais a variável dependente é a solução de um problema de otimização para o qual há uma solução de canto. Esse também não é o caso dos escores de eficiência do DEA. McDonald (2009), portanto, sustenta que os escores de DEA não deveriam ser classificados como dados truncados, mas sim, como escores normalizados: em um modelo orientado a para produção, o escore representa a razão entre a produção de uma unidade e a máxima possível. Além disso, estudos práticos do autor mostram que o desempenho da regressão Tobit está aquém de outras abordagens, como o OLS.

Em abordagem distinta, Hoff (2007) sustenta que tanto a Regressão linear clássica (OLS), quanto o Tobit, se aplicadas ao segundo estágio do DEA, pressupõem a adaptação de algumas das suas premissas clássicas. Portanto, ambos os métodos não são completamente capazes de acomodar as características dos escores de eficiência, sem que se façam generalizações em algumas das suas especificidades. Apenas para exemplificar, tome como exemplo toda a adaptação proposta por Ray (1991), exposta na seção 4.1. Nesse caso, o autor precisou assumir uma série de premissas, que ferem o princípio básico de que a estimação via OLS deve gerar valores preditos no intervalo $(-\infty, +\infty)$. No caso da regressão Tobit, Hoff (2007) ressalta que, em geral, há uma superestimação dos escores de eficiência ajustados, já que os dados que deveriam resultar em números superiores a 1 através de OLS são truncados nesse valor. Além disso, segundo Simar e Wilson (2011), não há registro na literatura que prove que Tobit é um estimador eficiente, do ponto de vista estatístico.

4.3 Estimação da eficiência através de Máxima Verossimilhança

Considere um modelo de regressão linear como o apresentado na seção 4.1 do tipo $y = \beta_0 + \beta_1 x + \eta$, onde x é uma variável preditora, y é a variável de resposta, β_0 e β_1 são os coeficientes paramétricos da variável preditora e η é o erro aleatório. Suponha que a variável y represente na verdade um vetor \mathbf{y} composto pela amostra de y_i observações de uma população Y_i . O método dos Mínimos Quadrados (OLS), apresentado na seção 4.1, pode ser usado para

estimar os parâmetros do modelo de regressão independentemente do formato da distribuição dos erros aleatórios η , mas com um certo viés. São gerados bons estimadores através dessa técnica e de outras, como Testes de Hipóteses, quando assume-se que o erro aleatório está normalmente distribuído (MONTGOMERY; PECK; VINING, 2012).

Para Montgomery, Peck e Vining (2012), quando o formato da distribuição dos erros é conhecido, mas não necessariamente corresponde a uma distribuição Normal, uma alternativa para a estimação dos parâmetros é o **Método da Máxima Verossimilhança** (*Maximum Likelihood Estimation* - MLE). A função de verossimilhança, denotada por $L(y_i, x_i, \beta_0, \beta_1, \sigma^2)$, é definida em função de uma amostra de dados observados, nesse caso, y_i , e representa a probabilidade de que os valores observados y_i correspondam aos valores reais Y_i (SEVERINI, 2000). O autor define a função de verossimilhança para o parâmetro β_1 em função da amostra observada y_i conforme a Equação 4.7, onde $p(y_i, \beta_1)$ é a probabilidade de que os valores reais de y_i , a saber, Y_i sejam realmente os valores observados y_i , dado o valor estimado do parâmetro β_1 .

$$L(\beta_1) \equiv L(\beta_1; y_i) = p(y_i; \beta_1) \quad (4.7)$$

De acordo com Severini (2000), em muitos casos, é conveniente trabalhar com o logaritmo da função de verossimilhança, $l(\beta_1)$, já que essa é muitas vezes mais facilmente tratável que a função original. Os estimadores de Máxima Verossimilhança, são, conforme Montgomery, Peck e Vining (2012), os valores dos parâmetros $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\sigma}^2$ que maximizam L ou equivalentemente l .

Para ilustrar a aplicação do método, Montgomery, Peck e Vining (2012) utilizam como exemplo uma distribuição normal: assumam um conjunto de dados do tipo (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, cujo erro η do modelo de regressão que descreve esse conjunto de dados caracteriza uma distribuição normal centrada em zero com variância σ^2 . Então, as observações y_i dessa amostra são variáveis aleatórias normalmente e independentemente distribuídas com média $\beta_0 + \beta_1 x_i$ e variância σ^2 . A função de verossimilhança é encontrada a partir da distribuição conjunta das observações, ou seja, a partir do produto das distribuições das observações:

$$\begin{aligned} L(y_i, x_i, \beta_0, \beta_1, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n (2\pi\sigma^2)^{(-1/2)} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \right] \\ &= (2\pi\sigma^2)^{(-n/2)} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

O estimador de máxima verossimilhança do parâmetro β_0 , por exemplo, deve satisfazer a Equação 4.9.

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} \right|_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}^2} = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \quad (4.9)$$

Segundo Montgomery, Peck e Vining (2012), em geral, os estimadores de máxima verossimilhança têm melhores propriedades estatísticas que aqueles gerados por Mínimos Quadrados. Os estimadores de MLE são não-viesados ou assintoticamente não-viesados (quando n é muito grande), e quando comparados a todos os outros métodos de estimação, apresentam variâncias

mínimas. Por outro lado, a estimação por MLE requer que suposições estatísticas mais rigorosas sejam feitas, em comparação com os estimadores de mínimos quadrados: enquanto os estimadores por OLS requerem apenas suposições sobre o segundo momento da distribuição do erro (valor esperado, variância e covariância entre os erros aleatórios), a estimação por MLE requer uma suposição completa sobre a forma da distribuição.

No que diz respeito a ajustes de escores de eficiência em dois estágios, pode-se citar o trabalho de [Banker e Natarajan \(2008\)](#), que mostra que a estimação por MLE e OLS se equivalem e são consistentes. [Simar e Wilson \(2007\)](#), por outro lado, sustentam que métodos convencionais de estimação, como MLE e OLS não são consistentes, e propõem um método baseado em *bootstrap* que seria mais apropriado. Outros autores, como [Hoff \(2007\)](#) e [Ramalho, Ramalho e Henriques \(2010\)](#) fazem uso da técnica de Quase-Verossimilhança, que consiste em uma adaptação do modelo de estimação de Verossimilhança clássico: ao invés de utilizar uma distribuição no ajuste, é especificada uma relação entre a média e a variância, onde a variância passa a ser uma função da média. Esse ajuste visa eliminar problemas de sobredispersão dos dados.

4.4 Estimação da eficiência através da abordagem condicional

Conforme mencionado, muitas análises de segundo estágio têm como principal objetivo avaliar o impacto das variáveis ambientais no escore de eficiência. Embora o artigo de [Ray \(1991\)](#) culmine na correção dos escores de eficiência θ pela variação causada pelos fatores externos, trabalhos posteriores em geral terminam na análise sobre ações necessárias para que essas influências sejam atenuadas, tendo em vista o impacto estimado das variáveis ambientais.

Entretanto, há abordagens intermediárias, como as propostas por autores como [Simar e Wilson \(2007\)](#) e [Banker e Natarajan \(2008\)](#), que sugerem métodos para estimar especificamente a ineficiência gerencial de cada DMU, dado o erro aleatório observado. Assim, quando os escores de eficiência são submetidos a uma análise de regressão como variáveis dependentes, onde as variáveis ambientais desempenham o papel de variáveis independentes, o erro observado nessa estimação, ε , carrega a informação da ineficiência gerencial, uma variável aleatória u . Chamamos essa abordagem de condicional porque ela é centrada na estimação de $u|\varepsilon$.

[Banker e Natarajan \(2008\)](#) apresentaram um modelo no qual avaliam a função de produção através de DEA no primeiro estágio, definindo estimadores consistentes do impacto das variáveis ambientais, e utilizam uma abordagem de OLS e MLE no segundo estágio, a fim de quantificar esse impacto.

Os autores formulam um modelo básico, que pode ser adaptado a qualquer função de produção que relacione o vetor de produtos \mathbf{y} e o vetor de insumos \mathbf{x} , desde que as condições de convexidade e livre descartabilidade sejam atendidas. Para tanto, consideram que a produção \mathbf{y} é resultado de uma função $f(\mathbf{x})$, multiplicada por um fator de distúrbio $\delta > 1$. Essa construção, exposta na [Equação 4.10](#), é análoga àquela definida por [Ray \(1991\)](#) na [Equação 3.8](#).

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \cdot \delta \tag{4.10}$$

Para garantir que o termo de ruído resulte sempre em valores superiores a 1, os autores propõem a [Equação 4.11](#).

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \cdot e^\delta \quad (4.11)$$

Segundo [Banker e Natarajan \(2008\)](#), o termo δ é gerado pelo próprio processo produtivo, e pode ser decomposto em três parcelas: $\delta = v - u - \sum_{n=1}^N \beta_n z_n$. Em um modelo que define a fronteira em uma função de produção, esse termo representa fisicamente a componente que distancia a DMU k da DMU eficiente e poderia ser simplificado, portanto, como a ineficiência da DMU k . A primeira parcela, v , corresponde ao ruído aleatório, descrito por uma distribuição de probabilidade bilateral. A segunda parcela, u , representa a ineficiência técnica propriamente dita, caracterizada como uma distribuição unilateral. O último termo, por fim, representa a decomposição das variáveis ambientais z_n e seus respectivos parâmetros β_n . Assim, como os parâmetros β_n são números não negativos, quanto maior o valor das variáveis ambientais, maior será a ineficiência da DMU k . Além disso, para que essa estrutura seja viável, deve-se garantir que $\sum_{n=1}^N \beta_n z_n \geq 0$.

Tendo essa descrição em vista, a fim de garantir a monotonicidade da função, a [Equação 4.11](#) pode ser reescrita através de uma transformação logarítmica, conforme verificado na [Equação 4.12](#).

$$\ln y = \ln f(x) + v - u - \sum_{n=1}^N \beta_n z_n \quad (4.12)$$

Para simplificar a notação, poderíamos agrupar os termos de ruído e ineficiência em uma única variável, $\varepsilon = v + u$. [Johnson e Kuosmanen \(2012\)](#) construíram um modelo similar, onde apresentaram equações correspondentes às de [Banker e Natarajan \(2008\)](#).

Conforme exposto, as componentes v e u têm funções de densidade caracterizadas, respectivamente, por funções bilaterais e unilaterais. [Banker e Natarajan \(2008\)](#) assumem, então, que o ruído aleatório v tem uma distribuição f_v normal truncada nos valores máximos V^M , de modo que $|\nu| \leq V^M$. A distribuição da ineficiência técnica, f_u , por sua vez, é limitada à esquerda por zero, tal que $u > 0$. Os autores caracterizam a distribuição de probabilidade da ineficiência, f_u , como uma distribuição Gamma com parâmetro de forma igual a 2 e parâmetro de escala igual a φ ($G(2, \varphi)$).

Para construir a função de produção que estima a fronteira de eficiência no primeiro estágio do método, [Banker e Natarajan \(2008\)](#) aplicam o modelo definido por [Gstach \(1998\)](#), chamado de DEA+, cuja característica principal é a possibilidade de se filtrar um termo de ruído na função produtiva. Assim, [Banker e Natarajan \(2008\)](#) definem uma função de produção ajustada, $\tilde{f}(x)$, como uma adaptação da função produção $f(x)$, obtida através do primeiro estágio do DEA: a função é deslocada à distância do ruído máximo V^M . O termo ajustado está exposto na [Equação 4.13](#)

$$\ln \tilde{f}(x) = \ln f(\cdot) + V^M \quad (4.13)$$

Essa última equação sugere que a função de produção $f(x)$ seja corrigida pelo termo limítrofe da distribuição f_v do ruído aleatório. A equação da produção seria deslocada, então, pela variável V^M . Cabe aqui uma comparação com o ajuste ao escore de eficiência proposto por Ray (1988) e exposto na subseção 3.4.1: naquela ocasião, o autor também propôs que os escores sofressem um deslocamento, tendo o intercepto da equação de estimação somado ao maior valor observado entre os ruídos. A diferença para a proposição de Gstach (1998) é que este último efetua um ajuste na equação da produção, e não na equação que relaciona os escores às variáveis ambientais. Gstach (1998), portanto, define a função de produção como estocástica, e não determinística, conforme *a priori* o método DEA pressupõe.

Considerando o conceito de eficiência de Charnes, Cooper e Rhodes (1978), segundo o qual esse é o número que mede a máxima razão entre a produção e os insumos, o escore θ deve corresponder a uma equação do tipo $\theta = y/\hat{f}(x)$. Usando esse artifício, e substituindo a Equação 4.13 na Equação 4.12, podemos reescrevê-la conforme a Equação 4.14, onde o termo $\tilde{\theta}$ representa a função da eficiência ajustada.

$$\begin{aligned}\ln \tilde{\theta} &= (\varepsilon - V^M) - \sum_{n=1}^N \beta_n z_n \\ &= (v - V^M) - u - \sum_{n=1}^N \beta_n z_n\end{aligned}\tag{4.14}$$

Uma vez que o escore de eficiência é ajustado para $\tilde{\theta}$, ele é então estimado ($\hat{\theta}$) através de uma equação que o relaciona com as variáveis ambientais z_n , conforme a Equação 4.15.

$$\begin{aligned}\ln \hat{\theta} &= - \sum_{n=1}^N \beta_n z_n - (V^M - \varepsilon) \\ &= - \sum_{n=1}^N \beta_n z_n - \tilde{\varepsilon}\end{aligned}\tag{4.15}$$

Nessa última equação, o termo de deslocamento ε é substituído por um termo ajustado, $\tilde{\varepsilon}$, tal que $\tilde{\varepsilon} = V^M - \varepsilon \geq 0$. Os coeficientes β_n da equação podem ser estimados em um segundo estágio através de OLS, e a equação do estimador de $\tilde{\theta}$ pode ser reescrita como um modelo de regressão linear com um componente de erro aleatório centrado em zero:

$$\ln \hat{\theta} = -[E(\varepsilon) + V^M] - \sum_{n=1}^N \beta_n z_n - [\varepsilon - E(\varepsilon)]\tag{4.16}$$

Os autores sustentam que o intercepto β_0 é um bom estimador para o termo $E(\varepsilon) - V^M$, em uma equação que relaciona o escore $\tilde{\theta}$ com as variáveis ambientais z_n e, por isso, dão a esse termo o nome de intercepto ajustado, $\tilde{\beta}_0$. Se considerarmos o termo restante, $\varepsilon - E(\varepsilon)$ como um ruído aleatório $\tilde{\eta}$, a Equação 4.16 pode finalmente ser reescrita conforme a Equação 4.17.

$$\ln \hat{\theta} = \tilde{\beta}_0 - \sum_{n=1}^N \beta_n z_n + \tilde{\eta}\tag{4.17}$$

Em suma, [Banker e Natarajan \(2008\)](#) sustentam que a ineficiência gerencial de uma DMU, u , será condicionada ao erro aleatório observado, ε , que, por sua vez, tem uma parcela que constitui unicamente o ruído aleatório v . Se f_u e f_v forem bem especificados como funções de distribuição de probabilidade conhecidas, o impacto das variáveis ambientais, $\beta_n z_n$, será o termo restante que compõe a distância entre a DMU eficiente e a DMU em análise. Os escores de eficiência do DEA seriam gerados, então, através de um processo bem definido, conforme [Equação 4.18](#), chamado de Processo de Geração de Dados (*Data Generating Process* - DGP), derivado da [Equação 4.17](#):

$$\theta = f(\mathbf{x})e^{-\mathbf{z}\beta + \mathbf{v} - \mathbf{u}} \quad (4.18)$$

O interesse do método, então, é modelar a distribuição de probabilidade da ineficiência condicional, $f(u|\varepsilon)$, sabendo que a ineficiência u é uma distribuição Gamma ($u \sim G(2, \varphi)$) e que o ruído aleatório v dos escores de eficiência estimados pelo DEA é uma distribuição Normal Truncada em V^M ($v \sim NT(0, \sigma_v^2, V^M)$). Essa modelagem depende, portanto, da estimação dos parâmetros das distribuições envolvidas: o limite do truncamento do ruído v , V^M e também a sua variância, σ^2 ; o parâmetro de escala φ da distribuição da ineficiência u ; o coeficiente β da variável ambiental. Para os autores, tanto a estimação por verossimilhança quanto por mínimos quadrados no segundo estágio são capazes de gerar estimadores consistentes para β .

Conforme ressaltam [Simar e Wilson \(2011\)](#), o DGP de [Banker e Natarajan \(2008\)](#) é consistente sob uma série de premissas: (1) $\mathbf{x} \geq 0$; (2) u é a ineficiência unilateral, tal que $u \geq 0$; (3) $\mathbf{z} \geq 0$; (4) $\beta \geq 0$; (5) $-V^m \geq v \geq V^M$, onde $V^M \geq 0$ é uma constante; (6) \mathbf{x} , \mathbf{z} e \mathbf{u} são mutuamente independentes; (7) cada variável aleatória tem variância finita e (8) $E(v) = 0$. Além disso, u e v são identicamente distribuídos para todas as observações, ou seja, ambas as variáveis possuem variância e média constantes.

[Simar e Wilson \(2011\)](#) criticam especialmente o DGP de [Banker e Natarajan \(2008\)](#), argumentando que, sob o ponto de vista econométrico, algumas dessas premissas assumidas não fazem sentido. Por exemplo: ao assumir que todos os coeficientes das variáveis ambientais são maiores que zero ($\beta \geq 0$), os autores acabam por definir, *a priori*, a direção do impacto das variáveis ambientais. Outra premissa que parece ter pouca correspondência com casos reais é a de que \mathbf{x} e \mathbf{z} são sempre independentes. Os autores criticam ainda o fato de o ruído v ser limitado em V^M : para eles, essa premissa não está bem sustentada.

Em estudo prévio ao de [Banker e Natarajan \(2008\)](#), [Simar e Wilson \(2007\)](#) apresentam uma abordagem de estimação de parâmetros diferente. Eles também caracterizam o ruído observado em três partes, mas para isso, utilizam distribuições de probabilidade diferentes: a ineficiência é uma normal truncada em 0 ($u \sim N^+(0, \sigma_u^2)$) e o ruído é uma distribuição normal ($v \sim N(0, \sigma_v^2)$), configuração igual à que o SFA adota. A diferença principal é que esses autores não utilizam MLE, tampouco OLS para estimar os parâmetros. Para eles, esses métodos convencionais não são capazes de gerar estimadores consistentes e, por isso, eles propõem uma complexa abordagem baseada em *bootstrap* para prover uma inferência consistente aos parâmetros estimados β e σ_ε .

4.5 Correção dos escores de eficiência em 3 estágios

Estelle, Johnson e Ruggiero (2010) apresentam uma abordagem de DEA em três estágios, assim caracterizados:

- **Primeiro estágio:** define-se os escores de eficiência relativa das DMUs, através da abordagem não paramétrica de DEA.
- **Segundo estágio:** o impacto das variáveis ambientais nos escores de eficiência é avaliado através de três diferentes métodos (OLS, Logit Fracionário e estimação não-paramétrica). Os coeficientes obtidos a partir dessa regressão são agregados em um índice, chamado de **índice de severidade ambiental**, ξ .
- **Terceiro estágio:** o índice de severidade ambiental é incluído no problema de programação linear do primeiro estágio, em forma de uma restrição, a fim de se obter um escore corrigido das variáveis ambientais.

Após rodar o modelo DEA e obter os escores θ para as k firmas analisadas, o segundo estágio do método estima o escore $\hat{\theta}_k$ através das variáveis ambientais \mathbf{z}_k , conforme a [Equação 4.19](#), onde $\hat{\theta}_k$ corresponde ao escore de eficiência da firma k e a função $\pi(Z_k)$ diz respeito à função que descreve o comportamento das variáveis ambientais \mathbf{z}_k . O termo η_k corresponde ao ruído aleatório. Repare que essa equação é análoga à [Equação 3.9](#).

$$\hat{\theta}_k = \pi(\mathbf{z}_k) + \eta \quad (4.19)$$

Como técnica de estimação dos parâmetros β das variáveis ambientais \mathbf{z}_k , os autores apresentam três abordagens diferentes: além das clássicas regressões OLS e Tobit, fazem uso de uma abordagem não-paramétrica. Para eles, a função $\pi(\mathbf{z}_k)$ pode ser aproximada através da abordagem não-paramétrica *Locally Weighted Regression*. Proposto por Cleveland (1979), esse método divide o conjunto de observações em diversos pontos, χ_i . Então, através de métodos tradicionais de estimação de parâmetros, como OLS ou MLE, definem-se retas de regressão para os dados entre dois destes pontos. Uma função determina a distribuição dos pesos que os parâmetros de cada reta terão na estimação da função em um determinado ponto χ_0 . A ponderação entre esses parâmetros, então, define uma função que cruza os dados, porém sem a presença de parâmetros explicativos.

As abordagens não-paramétricas em geral são muito mais flexíveis que as paramétricas, porque não exigem que se conheça a função *a priori*. Além disso, a técnica *Locally Weighted Regression* permite a modelagem de não-linearidades de maneira mais simples. Entretanto, como não provem parâmetros, tornam a interpretação da relação entre as variáveis dependentes e independentes um pouco mais limitada. Esse ponto pode ser crítico ao considerar a sua aplicação no segundo estágio do DEA, principalmente porque em alguns casos, a interpretação da relação entre as variáveis é justamente o principal objetivo da análise.

O artigo de [Estelle, Johnson e Ruggiero \(2010\)](#) compara o desempenho da abordagem paramétrica à regressão Logit Fracionária e também ao OLS. Os três métodos performam satisfatoriamente bem, considerando o objetivo proposto de predição da variável θ .

O índice de severidade ambiental é obtido através do escore predito no segundo estágio, onde $\xi_k = \hat{\theta}_k$. Ou seja, após obtido o escore θ_k de cada k firma através do DEA no primeiro estágio, é rodado um segundo estágio onde se define o escore predito $\hat{\theta}_k$. A esse número é então atribuído o nome de índice de severidade ξ_k , utilizado no terceiro estágio. Nesse último estágio, os autores refazem a análise do primeiro estágio, considerando a equação do modelo do envelopamento do DEA (modelo dual), acrescentando uma nova condição: $\alpha_j \geq 0$ se $\xi_j < \xi_k$. Caso contrário, α_j será necessariamente igual a zero. A nova equação do primeiro estágio está exposta na [Equação 4.20](#) (caso VRS).

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 \text{Sujeito a: } & \sum_{j=1}^n \alpha_j x_{ij} \leq \theta x_{i0}, & i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n \alpha_j y_{rj} \geq y_{i0} & r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1 \\
 & \alpha_j \geq 0, & \alpha_j = 0 & \text{ se } \xi_j > \xi_k
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

O que essa restrição faz basicamente é restringir o conjunto de empresas comparadas à DMU k : apenas aquelas cujas combinações lineares de fatores ambientais são tão severas quanto a sua entram no problema DEA.

É importante lembrar que essa abordagem proposta por [Estelle, Johnson e Ruggiero \(2010\)](#) é calcada em um conceito muito semelhante ao utilizado por [Banker e Morey \(1986\)](#). Na ocasião, os autores apresentaram aquela que seria a primeira abordagem para lidar com variáveis não discricionárias em um modelo DEA, propondo uma adaptação no modelo de otimização do método: foi incluída uma restrição no problema do DEA na qual $z_k \leq z_j \alpha_j$. Essa abordagem ficou conhecida como **ajuste em um estágio**, e basicamente limita a comparação da DMU àquelas que possuam variáveis ambientais menores ou iguais às suas.

O regulador norueguês de distribuição de energia, NVE, aplicou a análise de um estágio em seus dados em 2010, como uma das alternativas de ajuste a ser discutida com o setor. A conclusão que chegaram é de que essa abordagem superestima os escores de eficiência das DMUs, já que restringe a base de comparação a qual elas estão submetidas. O resultado é que muitas DMUs passam a ter escores iguais a 1 ([AMUNDSVEEN et al., 2014](#)).

4.6 Métodos computacionais para estimação de parâmetros

A solução computacional de um modelo de regressão pode ser bastante simples, dependendo do método de estimação escolhido. Se a função a ser estimada é linear, o método

dos Mínimos Quadrados (seção 4.1) pode ser utilizado sem maiores complicações: estima-se os parâmetros $\hat{\beta}$ da equação através da aplicação da Equação 4.4, conforme explicado. A análise dos resíduos do modelo estimado complementa a exploração sobre a inferência.

Quando o modelo analisado não corresponde a uma equação linear, contudo, a aplicação do método de Máxima Verossimilhança pode ser um pouco mais complexa. Conforme exposto na seção 4.3, essa técnica consiste em maximizar a equação de verossimilhança (ou seu logaritmo) do modelo proposto. Para fazer isso, uma série de técnicas de otimização numérica podem ser aplicadas.

Uma das classes de métodos de otimização numérica mais utilizadas é a dos métodos de busca linear, que é constituída por procedimentos iterativos: em cada iteração k , o algoritmo busca na direção d_k um ponto ótimo da equação e decide a que distância a_k essa busca ocorrerá ao longo dessa direção (NOCEDAL; WRIGHT, 2006). A Equação 4.21 ilustra essa lógica para o caso onde se pretende estimar uma variável hipotética β .

$$\beta_{k+1} = \beta_k + a_k d_k \quad (4.21)$$

De acordo com Nocedal e Wright (2006), o sucesso de uma busca linear depende da escolha adequada da direção da busca, d_k , e da distância da busca, a_k , também chamada de *passo*.

Um dos mais conhecidos métodos iterativos para se estimar a Máxima Verossimilhança é o algoritmo de Newton-Raphson (NR). Nesse algoritmo, a cada iteração, a busca será dada na direção d_k^N , conforme Equação 4.22.

$$d_k^N = -\nabla^2 f_k^{-1} \nabla f_k \quad (4.22)$$

Nessa equação, $\nabla^2 f_k$ é a matriz Hessiana da função f_k a ser otimizada, ou seja, a matriz de derivadas de segunda ordem da função. A expressão ∇f_k diz respeito à matriz de derivadas de primeira ordem. Em ambas as matrizes, as derivadas de primeira e segunda ordem são calculadas em relação aos parâmetros que se deseja estimar.

Conforme ressaltam Nocedal e Wright (2006), nem toda matriz Hessiana é positiva definida, tampouco toda direção será d_k^N será descendente. Quando esses problemas ocorrem, o processo de inversão da matriz pode ser prejudicado, então podem ser necessários ajustes no cálculo do passo ou da direção.

Quando nenhuma adaptação ao cálculo da matriz Hessiana a torna inversível, é aconselhável a utilização de métodos que não fazem uso dessa matriz, mas sim de uma aproximação dela. É esse o caso da classe de métodos conhecida como *quasi-Newton* (NOCEDAL; WRIGHT, 2006).

O Algoritmo BFGS pertence a essa classe de métodos, já que no lugar da matriz Hessiana é utilizada uma aproximação dela, conhecida como *Matriz B_k* .

5 Regulação do Custo Operacional eficiente

Nesse capítulo, é apresentado o mecanismo regulatório da ANEEL para o cálculo do custo operacional eficiente das empresas brasileiras de distribuição de energia elétrica. Para isso, o modelo de *Data Envelopment Analysis* proposto pelo regulador nas NTs 407/2014-SRE/ANEEL (ANEEL, 2014d) e 66/2015-SMR/SGT/ANEEL (ANEEL, 2015) é detalhado na sequência.

Conforme explicado no [Capítulo 2](#), a receita do serviço de distribuição das empresas brasileiras é composta por 2 parcelas (ver [Figura 5](#)). Na parcela referente ao custo gerenciável, o custo operacional da companhia é abrangido, tendo apenas a fração considerada eficiente incluída. Nos dois últimos ciclos de revisão tarifária, o regulador utilizou o DEA para o cálculo do custo eficiente.

Na segunda fase da etapa de diagnóstico do 4CRTP, a ANEEL divulgou em audiência pública uma proposta de modelo DEA a ser discutida com as partes interessadas, na NT 407/2014-SRE/ANEEL (ANEEL, 2014d), juntamente com a base de dados utilizada para obter os escores calculados. A NT 66/2015-SMR/SGT/ANEEL (ANEEL, 2015) apresentou o modelo final adotado pelo regulador, que não diferiu conceitualmente daquele divulgado na NT 407/2014-SRE/ANEEL.

As principais definições do modelo são apresentadas a seguir.

5.1 Definição do método de análise utilizado

A ANEEL explica que procurou aprimorar o método utilizado no 3º Ciclo de Revisão Tarifária (3CRTP), e por isso aplicou a metodologia DEA, também utilizada naquela ocasião (NT 192/2014-SRE/ANEEL, página 2).

Aplicou-se o método em uma abordagem de dois estágios. No primeiro, foi medida a eficiência das concessionárias com variáveis que, de acordo com a ANEEL (2014b), sejam capazes de refletir o sistema de distribuição. No segundo estágio, avaliou-se o impacto de variáveis não gerenciáveis pelas concessionárias, as variáveis ambientais que poderiam influenciar as estimativas de eficiência (NT 407/2014-SRE/ANEEL, página 13). O desenvolvimento do segundo estágio pelo regulador será detalhado na sequência.

Na NT 407/2014-SRE/ANEEL (página 10), a ANEEL ainda explica que foram utilizados dados referentes ao triênio 2011 a 2013. Acatando sugestões feitas na primeira fase da audiência pública, o regulador propôs o uso dos dados médios do triênio, a fim de reduzir o impacto de pontos extremos, observado quando aplicada a análise a dados de painel.

Por fim, o regulador caracterizou a tecnologia do setor com Retornos de Escala Não Decrescentes (NDRS) (NT 407/2014-SRE/ANEEL, página 11), ratificando a justificativa que havia sido exposta na NT 192/2014-SRE/ANEEL (página 3). Esse tipo de retorno de escala pressupõe que as empresas apresentem ganhos marginais maiores ou iguais a zero. A definição detalhada sobre tipos de retorno de escala foi apresentada no [Capítulo 3](#).

5.2 Agrupamento das Concessionárias

Na primeira proposta da ANEEL, da NT 192/2014-SRE/ANEEL (página 3), o regulador apresentou a mesma divisão das concessionárias utilizada no 3CRTP: no Grupo 1 estavam as concessionárias grandes, com mercado total superior a 1 TWh/ano, enquanto no grupo 2 ficaram as concessionárias com mercado inferior a 1 TWh/ano. Embora cite na NT 192/2014-SRE/ANEEL a validação desses grupos através de algoritmos de clusterização (página 4), a ANEEL não mostra tais resultados, tampouco detalha quais técnicas foram utilizadas.

Entretanto, na segunda fase da AP, a ANEEL propôs na NT 407/2014-SRE/ANEEL (página 10) que as concessionárias fossem analisadas em um único grupo. Para justificar essa alteração, o regulador explica que se a premissa de retornos de escala não-decrescentes estiver correta, o tamanho da empresa não deve influenciar na sua comparação com as demais e que, por isso, não faz sentido que as empresas sejam divididas de acordo com o seu tamanho (ANEEL, 2014d). A proposta final da NT 66/2015-SMR/SGT/ANEEL (página 12) mantém essa abordagem.

5.3 Especificação das variáveis do primeiro estágio

Para montar o modelo de análise DEA, é necessário definir o conjunto de insumos e produtos que caracterizam o processo produtivo. A ANEEL (2015) faz então as seguintes definições:

1. **Insumos:** Como insumo, definiu-se a utilização do custo operacional, englobando despesas contábeis com Pessoal, Material, Serviços de Terceiros e Outros - PMSO. São custos padronizados em uma rubrica do Manual de Contabilidade do Setor Elétrico (NT 66/2015-SMR/SGT/ANEEL, página 2). O regulador ressalta ainda que foram necessários
2. **Produtos:** O modelo de DEA da ANEEL conta com 7 variáveis como produtos, correspondentes a 5 dimensões que, segundo o regulador, descrevem o serviço prestado pelas distribuidoras (NT 407/2014-SRE/ANEEL, página 4). A versão final do modelo manteve as mesmas variáveis da proposta anterior (NT 66/2015-SMR/SGT/ANEEL, página 7):
 - **Rede:** mede a extensão da rede da concessionária, em km. Foi segregada em três variáveis: **rede subterrânea**, **rede aérea** e **rede de alta tensão**. Segundo o regulador, a justificativa para essa separação é que o custo de manutenção dos três tipos de rede é diferente, causando um impacto direto nos custos operacionais totais das empresas (NT 407/2014-SRE/ANEEL, página 4);
 - **Mercado:** A variável **Mercado Ponderado**, em MWh mostra a média de MWh fornecidos nas estruturas tarifárias de Baixa Tensão, Média Tensão e Alta Tensão por concessionária, ponderada pelas extensões de cada estrutura (NT 407/2014-SRE/ANEEL, página 5);
 - **Consumidores:** A variável **Número de Consumidores** apresenta a quantidade total de consumidores atendidos pela concessionária (NT 407/2014-SRE/ANEEL, página 6).

- **Perdas:** Para essa dimensão, é utilizada a variável **Perdas Não Técnicas (PNT)**, definida como a quantidade de energia perdida devido a razões não técnicas, em MWh. Entende-se como “perda não técnica” a quantidade de energia distribuída sem autorização da concessionária. Ou seja, trata-se da energia ilegalmente desviada das linhas de distribuição. O regulador considera que esse é um “produto não desejável” pela companhia, e por isso o insere no modelo com um sinal negativo. Mesmo sendo caracterizado como um produto não desejável, o regulador considera que as companhias têm uma margem de atuação gerencial para reduzir esse *output* e, por essa razão, não o classifica como uma variável ambiental, que seria uma variável sobre a qual a empresa não poderia exercer controle. Para não penalizar as empresas que fazem um bom trabalho na redução das perdas não técnicas, a ANEEL utiliza no modelo DEA a diferença entre a meta e o valor real de PNT, como pode-se observar na [Equação 5.1](#), onde a variável *mbt* representa o Mercado de Baixa Tensão (NT 407/2014-SRE/ANEEL, página 9).

$$PNT_{aj} = \max((PNT_{bt} - meta) \cdot mbt; 0) \quad (5.1)$$

A definição detalhada sobre o cálculo e a meta de *PNT* é apresentada na NT 406/2014-SRE/ANEEL, que trata especificamente desse assunto.

- **Qualidade:** Segundo a [ANEEL \(2014b\)](#) (NT 192/2014-SRE/ANEEL, página 10), as discussões iniciadas no 3CRTP acerca da relação entre qualidade e custos operacionais motivaram a inclusão de variáveis de qualidade no modelo. No 4CRTP, a ANEEL inseriu no modelo DEA a variável **Consumidor Hora Interrompido (CHI)**, que mensura a duração das interrupções na distribuição, em horas. Para isso, o regulador utiliza a diferença entre a meta do indicador Duração Equivalente de Interrupção por Unidade Consumidora (DEC) e seu valor real. Segundo a [ANEEL \(2014d\)](#), a fórmula de cálculo do indicador, explícita na [Equação 5.2](#), utiliza a diferença entre o limite mínimo do DEC definido ao final de 8 anos (DEC_{V8}) e o valor real (DEC_{real}) a fim de incorporar as heterogeneidades próprias de cada empresa. Na [Equação 5.2](#), a variável *cons* representa o número de consumidores (NT 407/2014-SRE/ANEEL, página 8).

$$CHI_{aj} = \max((DEC_{real} - DEC_{V8}) \cdot cons; 0) \quad (5.2)$$

Por considerar a interrupção de distribuição um produto indesejável, o regulador também o insere no modelo DEA com um sinal negativo.

Segundo a [ANEEL \(2014b\)](#) (NT 192/2014-SRE/ANEEL, página 8), a relevância do nível de agregação de cada variável foi testada através de regressões estimadas por Mínimos Quadrados (*Ordinary Least Squares - OLS*). Os resultados dos testes também não são mostrados em detalhes na NT 192/2014-SRE/ANEEL, tampouco na NT 407/2014-SRE/ANEEL.

Outro ponto relevante a ser mencionado é a utilização de variáveis negativas como *outputs*. Essa não é uma prática comum de ser observada na aplicação de DEA, embora o regulador

mencione na NT 66/SMR/SGT/ANEEL (página 10) como referência para tal [Bogetoft e Otto \(2010\)](#). Conforme ressaltado por [Lopes e Mesquita \(2015\)](#), contudo, nenhum dos reguladores europeus que utilizam técnicas de *benchmarking* para a distribuição de energia aplica produtos negativos aos modelos.

5.4 Análise de 2º Estágio

Tanto na NT 192/2014-SRE/ANEEL quanto na NT 407/2014-SRE/ANEEL, a ANEEL menciona que realizou uma análise de segundo estágio no modelo apresentado, embora não apresente tal análise em detalhes. Nessa etapa, o regulador verificou a relação entre os escores obtidos no primeiro estágio e variáveis ambientais como *Vegetação*, *Precipitação*, *Declividade*, entre outras. Na NT 192/2014-SRE/ANEEL (página 50), o regulador apresenta gráficos de dispersão entre as variáveis ambientais e os escores de eficiência obtidos no primeiro estágio. Entretanto, não explora as análises que menciona no que diz respeito à sua adequação do ponto de vista estatístico. Na NT 66/2015-SMR/SGT/ANEEL, a análise de segundo estágio não é mencionada, já que não faz parte do modelo final proposto.

Segundo a [ANEEL \(2014d\)](#) (NT 407/2014-SRE/ANEEL, página 13), nenhuma variável ambiental mostrou significância estatística quando relacionada aos escores de eficiência. Para o regulador, isso se deve à adequação do modelo apresentado no primeiro estágio, que já explicaria suficientemente as diferenças entre as concessionárias. Sendo assim, o regulador optou por não realizar ajustes nos escores obtidos.

5.5 Restrições aos pesos

O regulador explica na NT 192/2014-SRE/ANEEL (página 16) que no modelo DEA, as eficiências são calculadas por meio da maximização da razão da soma ponderada dos produtos pela soma ponderada dos insumos. Os pesos da ponderação são calculados de modo que cada unidade alcance sua eficiência máxima. O regulador sustenta que o problema de otimização resolvido pode conferir valores irrestritos aos pesos de cada insumo e produto, ignorando o fato de que a concessionária pode ter limitações na escolha do conjunto de *outputs* e *inputs* (página 17). O regulador conclui, então, que essa liberdade na escolha dos pesos de insumos e produtos acaba conferindo um viés a favor das empresas consideradas eficientes, que se manifesta no resultado pela sobre-estimação ou subestimação de parâmetros associados à formação do custo eficiente como o peso dos insumos e produtos, p e q (NT 192/2014-SRE/ANEEL, página 17).

Para o regulador, esse argumento justifica a aplicação ao modelo de *restrições aos pesos*. A ANEEL aplica as restrições do tipo “*trade-offs*”, nas quais se observa a relação entre os pesos dos insumos e os pesos dos produtos, p_j/q_j , e referencia o trabalho de [Podinovski \(2004\)](#) para argumentar a sua escolha. Segundo [Dyson et al. \(2001\)](#), um dos objetivos ao incluir restrições aos pesos em um modelo DEA é tornar o modelo mais exigente na avaliação de desempenho das DMUs. Alternativamente, para os autores (página 254), as restrições aos pesos têm o objetivo de melhor refletir os valores meta da organização. NA NT 407/2014-SRE/ANEEL (página 12), o regulador mantém o modelo de restrições aos pesos anteriormente testado, e na NT 66/2015-

SMR/SGR/ANEEL (página 13) ratifica o modelo. As restrições para *trade-offs* entre insumos e produtos estão expostas na Tabela 2, conforme NT 66/2015-SMR/SGR/ANEEL (página 14).

Tabela 2 – Restrições para *trade-offs* entre insumos e produtos

	Relação	Limite	Valor
Insumo vs Rede Distribuição (R\$/km rede)	$\frac{p_{rdist}}{q}$	Mínimo	580,00
		Máximo	2.200,00
Rede Subterrânea vs Rede convencional	$\frac{p_{rsub}}{p_{rdist}}$	Mínimo	1,00
		Máximo	2,00
Rede Aérea vs Rede convencional	$\frac{p_{ralta}}{p_{rdist}}$	Mínimo	0,40
		Máximo	1,00
Insumo vs consumidores (R\$/Cons)	$\frac{p_{cons}}{q}$	Mínimo	30,00
		Máximo	145,00
Insumo vs MWh entregue (R\$/MWh)	$\frac{p_{MWh}}{q}$	Mínimo	1,00
		Máximo	60,00
Insumo vs PNT (R\$/MWh)	$\frac{p_P}{q}$	Mínimo	10,00
		Máximo	150,00
Insumo vs Interrupções (R\$/h)	$\frac{p_Q}{q}$	Mínimo	-
		Máximo	2,00

Fonte: NT 66/2015-SMR/SGT/ANEEL (página 14)

Cabe ressaltar que a adequação do uso de restrições aos pesos em modelos DEA não é uma unanimidade entre autores da área. Dyson et al. (2001) afirmam que interpretação dos resultados gerados por um modelo com restrições aos pesos não é a mesma de um modelo sem restrições aos pesos. Para os autores, em um modelo sem restrições aos pesos, o valor de θ informa a contração radial que deve ser realizada nos insumos para que a DMU atinja a fronteira. Como um modelo com restrições aos pesos não pode ser considerado um modelo radial, essa interpretação deixa de ser válida, e o valor de θ deveria ser analisado sob o ponto de vista de um modelo não radial.

Além disso, Førsund (2013) lembra que as restrições aos pesos alteram o espaço de soluções viáveis do problema de programação linear, o que pode ter impacto significativo no formato da função de produção. Em alguns casos, incorporar informações sobre o formato da função de produção pode ser mesmo o objetivo do analista, que usa as restrições aos pesos para aproveitar a conexão entre as razões dos pesos e os conceitos econômicos de produtividade marginal, taxa marginal de transformação entre um par de *outputs* e taxa marginal de substituição entre *inputs*. O problema, para o autor, é que essas propriedades são específicas para cada face da fronteira de produção estimada, e utilizar as restrições aos pesos para acessar ao mesmo tempo todas essas informações, parece uma simplificação do problema (página 281).

Førsund (2013) ainda ressalta que o tipo de restrição que a ANEEL adota (*trade-offs* entre insumos e produtos) necessita de uma interpretação cuidadosa, já que trata-se de imposições no espaço dual do problema de otimização e, por isso são definidas sobre os “preços-sombras” das variáveis (**preço-sombra** é também como são chamados os **pesos** do problema de programação linear). Para o autor, os preços-sombra são valores virtuais, e não valores econômicos que podem ser interpretados dessa maneira (página 281).

A despeito das contribuições das partes interessadas à Audiência Pública questionando o

uso das restrições aos pesos, a ANEEL manteve o seu uso no modelo final apresentado na NT 66/2015-SMR/SGR/ANEEL.

5.6 Regras para aplicação do escore de eficiência

Na NT 407/2014-SRE/ANEEL, a ANEEL apresenta a metodologia proposta para definir o custo operacional eficiente a partir do escore obtido através do DEA. Conforme o regulador deixa claro no seu texto, sua intenção principal é assumir uma posição intermediária entre uma postura excessivamente conservadora (na qual as metas de custo operacional seriam similares aos valores já observados) e uma postura agressiva de incentivos.

Por isso, após definir o escore de eficiência através do DEA, o regulador propõe um cálculo de um intervalo de confiança que estabeleça um limite inferior e um limite superior ao escore observado. Esse cálculo é feito de acordo com o algoritmo de *bootstrap* sugerido por [Bogetoft e Otto \(2010\)](#). A técnica referenciada foi originalmente desenvolvida com a finalidade de determinar a real localização da fronteira de eficiência.

O regulador define, com base no intervalo de confiança, um escore de eficiência superior, θ_{sup} , e um escore de eficiência inferior, θ_{inf} , para definir qual será enfim, a meta de redução da empresa. Antes disso, porém, a [ANEEL \(2014d\)](#) normaliza ambos os escores por um escore de referência, θ_{ref} . Para o regulador, essa normalização é necessária a fim de mitigar possíveis imprecisões do modelo. NO 3CRTP, utilizou-se a média dos escores como referência de eficiência. No 4CRTP, propõe-se a mediana da amostra descontando os escores abaixo de 50%.

O custo operacional meta (CO_{meta}) passa a ser, então, calculado conforme a [Equação 5.3](#). Na NT 66/2015-SMR/SGT/ANEEL, o regulador ratifica essa regra de aplicação, sem nenhuma alteração.

$$\begin{aligned}
 CO_{meta} &= \min(\max(CO_{ref}; LI); LS) \\
 LS &= \alpha \cdot \frac{\theta_{sup}}{\theta_{ref}} \cdot Opex \\
 LI &= \alpha \cdot \frac{\theta_{inf}}{\theta_{ref}} \cdot Opex
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Onde:

CO_{meta} = é a meta dos custos operacionais regulatórios;

CO_{ref} = é a referência de custos operacionais de partida, que pode ou não estar vinculado ao real da empresa;

LI é o limite inferior dos custos operacionais regulatórios;

LS é o limite superior dos custos operacionais regulatórios;

θ_{inf} é o limite inferior do intervalo de eficiência apurado para a empresa;

θ_{sup} é o limite superior do intervalo de eficiência apurado para a empresa;

θ_{ref} é a referência de eficiência exigida.

$Opex$ é o custo operacional real da empresa usado no cálculo de eficiência;

α é um fator de atualização na base da revisão tarifária.

Os escores de eficiência calculados pelo modelo proposto pela ANEEL estão disponíveis no Anexo A desse trabalho.

6 Metodologia

Nesse capítulo são descritos os procedimentos metodológicos que nortearam as análises realizadas e apresentadas no [Capítulo 7](#). Assim sendo, é apresentada a descrição da base de dados utilizada, bem como os modelos e métodos aplicados.

6.1 Dados Analisados

Esse trabalho tem como objetivo geral analisar o impacto das análises de segundo estágio nos escores de eficiência calculados por meio do DEA. Para isso, estudou-se o modelo DEA proposto pela ANEEL na ocasião do 4º Ciclo de Revisão Tarifária das empresas brasileiras distribuidoras de energia elétrica.

Na segunda fase da Consulta Pública do 4CRTP, iniciada em dezembro/2014, o regulador divulgou juntamente com a NT 407/2014-SRE/ANEEL a base de dados que fora utilizada para o cálculo dos escores de eficiência. Os escores estão expostos no Anexo A deste trabalho. Além dos dados referentes aos produtos e insumos do modelo DEA proposto, a ANEEL disponibilizou outras informações, relativas às dimensões de custo operacional, rede, dados de transformação em subestações, mercado, consumidores, perdas, qualidade e variáveis ambientais. Os dados disponibilizados são relativos ao período entre 2001 e 2013, embora o regulador tenha utilizado apenas as informações do último triênio para fins de cálculo do escore de eficiência.

Na divulgação da NT 66/2015-SMR/SGT/ANEEL, em abril/2015, quando foi apresentado o modelo final a ser adotado na revisão tarifária, o regulador não divulgou a base de dados que utilizou para calcular os escores. Embora o modelo tenha se mantido o mesmo da NT 407/2014-SRE/ANEEL, há pequenas diferenças entre os escores das duas Notas Técnicas, como pode-se observar no Anexo A. O regulador, contudo, não explica quais alterações causaram essas diferenças. No que diz respeito ao insumo (Custo Operacional), a ANEEL explica que os valores foram mantidos os mesmos, com exceção dos ajustes referentes a inconsistência de dados (NT 66/2015-SMR/SGT/ANEEL, página 5). Sobre os dados dos produtos, não é mencionado na NT 66/2015-SMR/SGT/ANEEL nenhum ajuste que tenha sido realizado nos dados.

Como a base de dados disponível era aquela da NT 407/2014-SRE/ANEEL, as análises desse trabalho foram realizadas com tais informações.

6.2 Modelos analisados em 2 estágios

Foram analisados diferentes métodos de estimação do escore de eficiência em dois estágios, a fim de identificar o impacto que cada um deles tem no resultado final, após o ajuste. Tais métodos foram descritos na [Capítulo 4](#):

1. Estimação da eficiência através de Mínimos Quadrados (OLS);

2. Estimação da eficiência através de Regressão Tobit;
3. Estimação da eficiência através da abordagem condicional, conforme modelo proposto por [Banker e Natarajan \(2008\)](#), onde $v_i \sim NT(0, \sigma^2, V^M)$ e $u_i \sim Gamma(2, \varphi)$;
4. Estimação da eficiência através da abordagem condicional, com uma adaptação na estrutura de distribuições propostas por [Banker e Natarajan \(2008\)](#) e [Simar e Wilson \(2007\)](#), onde $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$ e $u_i \sim N_+(0, \sigma_u^2)$;
5. Estimação da eficiência em 3 estágios, conforme modelo apresentado por [Estelle, Johnson e Ruggiero \(2010\)](#).

6.2.1 Modelos utilizados com os Métodos OLS e Tobit

Para aplicação dos dois primeiros métodos, OLS e Regressão Tobit, foram gerados modelos de regressão linear do tipo da [Equação 6.1](#), onde $\hat{\theta}_{OLS}$ é o escore corrigido em segundo estágio através de OLS, z é a variável ambiental precipitação e β é o parâmetro a ela associado. Foram considerando todas as variáveis ambientais, em versões univariadas e multivariadas.

$$\hat{\theta} = \mathbf{z}\beta \quad (6.1)$$

O vetor \mathbf{z} , portanto, assumiu cada uma das 16.383 combinações possíveis de se observar entre as 14 variáveis ambientais.

6.2.2 Modelo utilizado com a Abordagem Condicional de [Banker e Natarajan \(2008\)](#)

O modelo aplicado no terceiro método corresponde ao apresentado por [Banker e Natarajan \(2008\)](#), onde os parâmetros são estimados através da Abordagem Condicional (ver a [seção 4.4](#)). Nesse modelo, o ruído aleatório v corresponde a uma distribuição Normal Truncada em V^M , centrada em zero e com desvio-padrão σ_v^2 ($v_i \sim NT(0, \sigma_v^2, V^M)$), enquanto que o termo de ineficiência, u , diz respeito a uma distribuição Gamma com parâmetros de forma e escala iguais a 2 e φ , respectivamente ($u_i \sim Gamma(2, \varphi)$). Para fins de simplificação de notação, esse modelo será chamado a partir de agora de *DEA + BN*.

O desenvolvimento do método de estimação por meio da abordagem condicional será detalhado na [subseção 7.2.2](#). No que tange o modelo utilizado, sabe-se que para que seja estimado o escore de eficiência corrigido em dois estágios $\hat{\theta}$ é necessário conhecer a distribuição de probabilidade de $\varepsilon = u + v$, onde:

$$f_v(v) = \frac{1}{\sigma} \frac{\phi\left(\frac{v}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{V^M}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{v}{\sigma}\right)}, \quad -V^M < \varepsilon < V^M \quad (6.2)$$

$$f_u(u) = \frac{ue^{-u/\varphi}}{\varphi^2}, \quad u > 0, \quad \varphi > 0 \quad (6.3)$$

Devido aos limites de integração, a distribuição conjunta de u e v deve ser dividida em duas partes, conforme a [Equação 6.4](#). Como, algebricamente, é mais fácil manipular as funções

de probabilidades acumuladas, considere a função acumulada $F_\varepsilon = F_u + F_v$, de onde se pode inferir a densidade de probabilidade $f_\varepsilon = d/d\varepsilon[F_\varepsilon(\varepsilon)]$.

$$F_\varepsilon(\varepsilon) = \begin{cases} \int_{-V^M}^{+V^M} f_v(v) \cdot F_u(\varepsilon - v), & \varepsilon > V^M \\ \int_{-V^M}^{\varepsilon} f_v(v) \cdot F_u(\varepsilon - v), & -V^M < \varepsilon \leq V^M \end{cases} \quad (6.4)$$

A definição da função $f_\varepsilon(\varepsilon)$ não é trivial. O desenvolvimento algébrico dessa distribuição conjunta encontra-se no [Apêndice A](#) desse trabalho, e o seu resultado final, aplicado neste estudo, difere da distribuição originalmente apresentada por [Banker e Natarajan \(2008\)](#).

O inconveniente de se trabalhar com a formulação proposta por [Banker e Natarajan \(2008\)](#) é devido à complexidade da função $f_\varepsilon(\varepsilon)$, que dificulta a formulação de matrizes de derivadas de primeira e segunda ordem necessárias aos métodos de estimação de parâmetros recursivos. De toda maneira, os parâmetros estimados nesse modelo são o parâmetro de escala da distribuição Gamma, φ , o parâmetro de truncamento da Normal Truncada, V^M , a variância σ^2 da distribuição Normal Truncada de \mathbf{v} e o vetor $\boldsymbol{\beta}$, que contém os coeficientes das variáveis ambientais \mathbf{z} . Utiliza-se algoritmos que maximizam a log-verossimilhança para obter as estimativas.

6.2.3 Modelo utilizados com a Abordagem Condicional adaptada de [Simar e Wilson \(2007\)](#)

O quarto método de estimação testado difere do terceiro apenas pelo modelo utilizado, diferente daquele proposto por [Banker e Natarajan \(2008\)](#). Essa adaptação é baseada na definição de DGP proposta por [Simar e Wilson \(2007\)](#). A ideia dos autores era utilizar a mesma estrutura de distribuições de probabilidade das variáveis u e v usadas em modelos de *Stochastic Frontier Analysis* (SFA), proposto por [Aigner, Lovell e Schmidt \(1977\)](#). O SFA é um modelo paramétrico e, por isso, a fronteira tem um formato pré-estabelecido. Tendo em mãos o formato da função de produção $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$, o modelo do SFA é definido conforme a [Equação 6.5](#), onde \mathbf{y} representa o vetor de produtos, \mathbf{x} corresponde ao vetor de insumos, $\boldsymbol{\beta}$ diz respeito aos parâmetros da equação e ε é o erro aleatório da estimação.

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon \quad (6.5)$$

Na configuração de [Aigner, Lovell e Schmidt \(1977\)](#), a componente do erro da estimação é dividida também em duas: $\varepsilon = v + u$, onde v corresponde ao erro aleatório da estimação, no formato de uma distribuição normal, $v \sim N(0, \sigma_v^2)$ e u diz respeito à ineficiência técnica, caracterizado como uma distribuição Normal Truncada à esquerda, $u \sim N_+(0, \sigma_u^2)$. A esse modelo de segundo estágio baseado no formato das distribuições do SFA, será atribuído o nome *DEA + SFA*, para fins de simplificação da notação.

A distribuição de probabilidade do erro observado, f_ε , nesse caso, é conhecida na literatura como *Distribuição Skew-Normal*, que é uma distribuição conjunta entre uma Normal e uma

Normal Truncada. A sua função de densidade é dada pela [Equação 6.6](#).

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon}(\varepsilon) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \Phi\left(\frac{\lambda\varepsilon}{\sigma}\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}} \\ &= \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Nessa equação, σ é tal que $\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$, e é conhecido como parâmetro de escala, e $\lambda = \sigma_u/\sigma_v$, conhecido como parâmetro de forma. as funções $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ representam, respectivamente, a densidade de probabilidade de uma distribuição Normal e a Função de Densidade Acumulada de uma distribuição Normal. Os parâmetros estimados para o cálculo do escore ajustados são, portanto, λ , σ e β , que é o vetor de coeficientes das variáveis ambientais \mathbf{z} .

É importante ressaltar que, apesar do modelo *DEA + SFA* ser baseado no DGP proposto por [Simar e Wilson \(2007\)](#), onde $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$ e $u_i \sim N_+(0, \sigma_u^2)$, o método de estimação aplicado difere bastante da abordagem dos autores. Em seu trabalho, os parâmetros são estimados através de um algoritmo de *bootstrap*, enquanto que nesse estudo, estima-se os parâmetros por meio de algoritmos de maximizam a log-verossimilhança.

6.2.4 Modelos utilizados com a Estimação em 3 estágios

O ajuste em 3 estágios proposto por [Estelle, Johnson e Ruggiero \(2010\)](#) faz uso dos escores corrigidos no segundo estágio, $\hat{\theta}$, e os utiliza em uma restrição na terceira etapa, onde $\hat{\theta} = \xi$, modificando o problema original de programação linear do DEA.

Sendo assim, a definição do modelo a ser testado diz respeito à decisão sobre a configuração adotada no segundo estágio. No artigo, [Estelle, Johnson e Ruggiero \(2010\)](#) utilizam Regressão Tobit, OLS e uma abordagem não paramétrica, conforme exposto na [seção 4.5](#). Neste estudo, são utilizadas as seguintes opções de segundo estágio:

- OLS;
- Regressão Tobit;
- Abordagem Condicional com o modelo *DEA + SFA*

Optou-se por não utilizar o modelo *DEA + BN* porque, conforme apresentado no [Capítulo 7](#), o modelo *DEA + SFA* foi aquele que melhor maximizou a verossimilhança para os modelos univariados avaliados.

6.3 Software e definições computacionais

Tanto as análises exploratórias do modelo DEA da ANEEL quanto as estimações de parâmetros dos modelos de segundo estágio foram rodadas no *Software* livre *R*, versão 3.0.2, em plataforma para 64 – bit ([The R Project, 2015](#)). Utilizou-se um computador *Core i5* com 3.20 GHz e 8 GB de memória RAM, equipado com sistema operacional *Windows 7*.

Para cada método de estimação, foram utilizadas funções básicas do *R* ou existentes em pacotes específicos:

- **OLS:** para as análises de regressão linear por mínimos quadrados, utilizou-se a função *lm()*, usada para ajustar modelos lineares. Essa é uma função do pacote básico *stats*, que reúne os recursos para análises estatísticas elementares.
- **Regressão Tobit:** a estimação de parâmetros através da Regressão Tobit foi feita com a função *tobit* do pacote *VGAM*. O pacote *VGAM: Vector Generalized Linear and Additive Models* reúne funções para implementar cerca de 6 grandes grupos de modelos de regressão, desde modelos não lineares até modelos não paramétricos ([VGAM, 2015](#)).
- **Abordagem Condicional:** Os modelos testados pela abordagem condicional tiveram seus parâmetros estimados por Máxima Verossimilhança. Os algoritmos de *Newton-Raphson* e *BFGS* foram implementados, sem a necessidade do uso de funções específicas. Como alternativa, foi utilizada também a função *ucminf*, do pacote de mesmo nome. Essa função é delineada para otimizar funções não lineares sem restrições. Seu algoritmo faz uma aproximação da matriz Hessiana, sendo classificado como um método *Quasi-Newton* ([Package ucminf, 2015](#)).

7 Análise da Estimação dos escores de eficiência em 2 estágios

Nesse capítulo, são apresentados os resultados das análises do estimação dos escores de eficiência em dois estágios, considerando o modelo DEA proposto pela ANEEL (2015) na NT 66/2015, e sua respectiva base de dados, disponibilizada pelo regulador juntamente com a NT 407/2014. O modelo proposto corresponde ao 4CRTP das distribuidoras de energia brasileiras.

Em um primeiro momento, é realizada uma análise exploratória do modelo da ANEEL, principalmente no que diz respeito à dispersão das variáveis utilizadas como produtos e insumos e a sua relação com as variáveis ambientais. O objetivo dessa análise é investigar a aplicabilidade aa premissa básica para aplicação do DEA, de que todas as DMUs analisadas devem estar expostas ao mesmo ambiente e gerar os mesmos produtos.

Em seguida, são apresentadas as análises de estimação em dois estágios.

7.1 Análise Exploratória do modelo

Antes da realização das análises de segundo estágio, é oportuno fazer uma análise exploratória dos dados e do modelo DEA apresentado pela ANEEL nas NTs 407/2014 e 66/2015. O objetivo é identificar padrões de ocorrência e relações entre variáveis que possam elucidar quais são os ajustes necessários no segundo estágio.

Conforme descrito na seção 2.2, O modelo escolhido pela ANEEL utiliza como insumo o custo operacional e como produtos as variáveis **Número de Consumidores Total**, **Mercado Ponderado**, **Extensão de Rede**, **Perdas Não Técnicas (PNT)** e **Duração das Horas de Interrupção por Consumidor (CHI)**. A variável de Extensão de Rede foi segregada em três: rede de alta tensão, rede aérea e rede subterrânea. A justificativa para essa segregação, apresentada na NT 407, parágrafo 18, é de que o custo de manutenção dos três tipos de rede é diferente, causando um impacto direto nos custos operacionais das empresas.

Na primeira fase da Audiência Pública, a ANEEL havia utilizado, em formato de dados de painel, as informações do triênio 2010-2012 das concessionárias. Na segunda fase, contudo, os dados utilizados na análise foram agrupados em médias trienais, compreendendo o período entre 2011 e 2013. O agrupamento da base de dados em médias trienais evita que dados atípicos ou ocorrências pontuais possam delimitar a fronteira, uma vez que os valores extremos são absorvidos pelas médias das Distribuidoras. Entretanto, essa abordagem não foi suficiente para eliminar a dispersão dos dados entre as companhias, que permanece elevada: a agregação dos dados em médias trienais permitiu uma redução em medidas de dispersão (como o desvio-padrão) em torno de 1%. A Figura 12 mostra a distribuição das variáveis agrupadas em médias trienais.

Como pode-se observar, são comparadas DMUs com valores muito distintos no que diz respeito às variáveis do modelo. No caso de **Número de Consumidores**, a menor concessionária

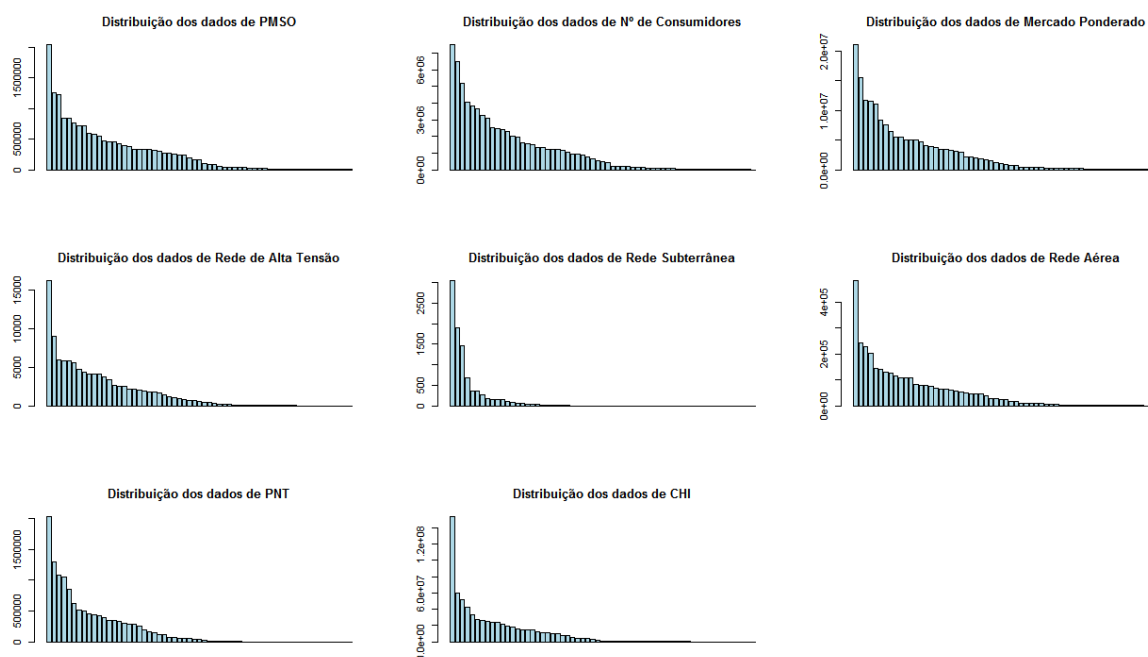


Figura 12 – Dispersão das variáveis do modelo DEA proposto pela ANEEL (médias trienais)

atende, em média, 2.738 consumidores, enquanto que a maior concessionária presta serviço para, em média, 7.482.055 consumidores. Quanto à estrutura da rede, há grandes variações também: a empresa que mais possui rede de alta tensão, tem 16.194 km desse tipo de rede instalada, enquanto que há 10 concessionárias que não possuem sequer um km de rede de alta tensão. Conforme já mencionado, é premissa elementar da aplicação do DEA que as DMUs possuam mesmos produtos e insumos, o que, pelo que se pode ver, é questionável no modelo proposto pela ANEEL.

Além disso, para que o modelo DEA seja consistente, é necessário que as variáveis de insumo tenham uma correlação alta com as variáveis de produto. A [Figura 13](#) mostra de forma gráfica a correlação entre as variáveis: quanto mais estreitas e escuras as elipses, maior a o coeficiente de correlação. A inclinação e a cor indicam se a correlação é positiva (azul, inclinada à direita) ou negativa (vermelha, inclinada à esquerda). O agrupamento dos dados através das suas médias tende a aumentar o coeficiente de correlação da análise, uma vez que a dispersão é minimizada e a quantidade de pontos observados diminui. Por isso, quando comparada com a matriz de correlação do modelo anterior proposto pela ANEEL, o modelo atual parece ser melhor ajustado.

A variável de insumo, Custo Operacional, apresenta um coeficiente de correlação relativamente elevado quando comparada com a maioria das variáveis de produtos: 0,94 com o nº de consumidores, 0,91 com o mercado ponderado, 0,88 com rede aérea e 0,84 com rede de alta tensão. As exceções são as variáveis rede subterrânea, PNT e CHI, que apresentam coeficientes de correlação com o custo operacional um pouco mais baixos, de 0,51, 0,52 e 0,47, respectivamente.

A correlação entre as variáveis de produto também precisa ser observada quando da

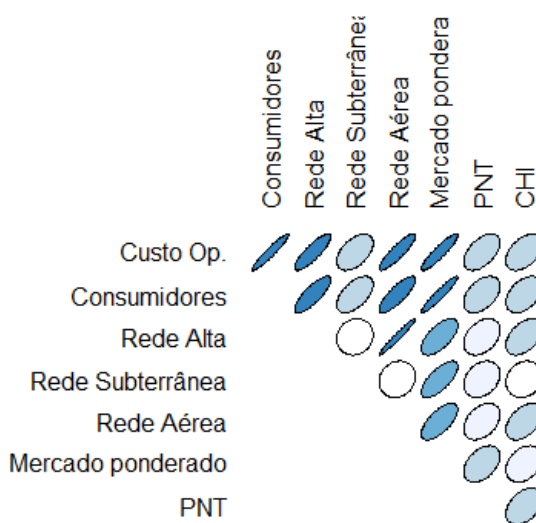


Figura 13 – Correlação entre as variáveis do modelo DEA - ANEEL (NT 407/14 e NT 66/15)

construção do modelo DEA. As variáveis nº de consumidores, rede aérea, rede de alta tensão e Mercado Ponderado estão fortemente correlacionadas entre si. Como as observações são feitas em valores absolutos, é esperado que empresas pequenas apresentem valores proporcionalmente menores para essas variáveis que as empresas grandes.

A alta correlação entre as variáveis do modelo sugere que o custo operacional é suficientemente explicado pelo tamanho da empresa, já que o modelo utiliza variáveis que comparam as empresas pela sua escala. Essa afirmação seria correta se todos os produtos fossem homogêneos entre as empresas, demandando a mesma quantidade de recursos. Entretanto, se houver diferença entre os produtos de rede e mercado entregues pelas distribuidoras, demandando recursos diferentes, a escala não é suficiente para explicar o custo operacional. Uma análise importante, então, seria verificar se as atividades desempenhadas pelas distribuidoras diferem muito entre si, a ponto de alterar a natureza operacional da companhia e, portanto o nível do seu custo operacional. Tanto esse tipo de análise quanto a verificação da necessidade de alteração do grupo de variáveis que compõem o modelo não fazem parte do escopo desse trabalho.

A análise exploratória do modelo DEA proposto pela ANEEL mostra que há uma grande dispersão entre os dados de produtos das companhias que são comparadas para definição do escore de eficiência, não amenizada significativamente com o agrupamento dos dados em médias trienais. A existência de concessionárias com *outputs* iguais a zero observados nas variáveis Rede Subterrânea (31 empresas) Rede de Alta Tensão (10 empresas), Perdas Não Técnicas (22 empresas) e Duração de Horas de Interrupção ao Consumidor (6 empresas) coloca em dúvida a igualdade de condições das DMUs para fins de comparação. Segundo [Thompson, Dharmapala e Thrall \(1993\)](#), a existência de valores zerados no conjunto de produtos pode comprometer a interpretação dos escores de eficiência, já que uma DMU pode estar sendo comparada com empresas que não produzem os mesmos itens que ela. Os autores reforçam ainda que na formulação original de

DEA proposta por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), requer valores positivos e diferentes de zero para que sejam analisadas. Essa imposição sugere que todas as empresas devem utilizar os mesmos insumos para que produzam os mesmos produtos.

Sobre a premissa de não-negatividade das variáveis ressaltada por Thompson, Dharmapala e Thrall (1993), é importante lembrar que o modelo da ANEEL apresenta ainda dois produtos com sinais negativos. O regulador argumenta nas Notas Técnicas que estes são “produtos indesejados” e que, de acordo com Bogetoft e Otto (2010), esse pressuposto é o suficiente para permitir que o modelo tenha *outputs* com sinais negativos. Vale ressaltar que, do ponto de vista prático, é pouco realista classificar as Perdas Não Técnicas e as Horas de Interrupção como produtos de uma concessionária de energia.

Considerando todos esses aspectos, a adequação do modelo da ANEEL às premissas de homogeneidade de recursos e de ambiente é questionável. Cabe ressaltar que a análise de segundo estágio pode ficar comprometida se o primeiro estágio não refletir o modelo produtivo ao qual as empresas estão submetidas. Ainda assim, a proposição de um novo modelo DEA (ou de um modelo que esteja mais adequado às premissas conceituais) foge do escopo desse estudo. Por isso, a análise de segundo estágio desenvolvida tem o objetivo de identificar o melhor método de correção dos escores, tendo em vista o modelo DEA apresentado pelo regulador.

7.1.1 Avaliação das variáveis ambientais e de qualidade

Conforme já argumentado na seção 3.4, a análise de segundo estágio nem sempre tem como objetivo principal a correção dos escores, mas sim a identificação da magnitude do efeito das variáveis não-controláveis nos escores de eficiência. A partir dessa informação, é possível tomar decisões sobre políticas e ações que minimizem o efeito de tais variáveis. Bogetoft (2014b) afirma que a análise de segundo estágio pode auxiliar na identificação de variáveis faltantes no modelo.

Além disso, segundo Bogetoft (2014a), algumas variáveis, como complexidade social e qualidade, não são *inputs* ou *outputs* naturais a serem incluídas em um modelo DEA, visto que não são quantias que são produzidas ou utilizadas, mas sim características dos insumos usados ou dos produtos, ou ainda condições sob as quais as empresas trabalham. Assim, uma análise de segundo estágio pode ajudar a detectar essas variações e determinar como lidar com elas.

Sobre esse aspecto, vale ressaltar que o modelo proposto pela ANEEL na NT 66/2015-SMR/SGE/ANEEL inclui uma variável de qualidade como *outputs* indesejado, **Tempo de Interrupção**. Além dessa abordagem não ser convencional em modelos DEA, conforme citado, o regulador não explica por que deixou de fora da análise outras variáveis de qualidade.

Nesse estudo, foram analisados os efeitos nos escores das de variáveis de qualidade e ambientais. As 14 variáveis ambientais disponibilizadas na base de dados da ANEEL são listadas a seguir:

Área de concessão: É a extensão da área de atuação da empresa, em km^2 .

Densidade de Consumidores: Corresponde ao número de consumidores por km^2 da área de

concessão da distribuidora.

Densidade de Rede: Diz respeito à concentração da rede de distribuição na área de concessão, sendo calculada pela razão entre a extensão total de rede (em km) e a área de concessão.

Precipitação: É o nível médio de precipitação na área de concessão.

Vegetação: Corresponde ao percentual da área de concessão coberto por vegetação (todo tipo de vegetação).

Vegetação Alta: É o percentual da área de concessão coberto apenas por vegetação alta.

Vegetação Média: Similar à variável anterior, mas relativa à área coberta por vegetação média.

Vegetação Baixa: Percentual da área de concessão coberto apenas por vegetação de pequeno porte.

Declividade: Nível médio de declividade da área de concessão.

Perdas Técnicas: Quantidade de energia perdida pela Distribuidora devido a fatores técnicos, nas redes e equipamentos de distribuição. O regulador possui uma metodologia específica para a realização do cálculo dessa quantidade, disponível em uma Nota Técnica específica.

Descargas: Mostra a incidência de raios e descargas elétricas na área de concessão da empresa.

Pavimentação: Corresponde ao percentual de estradas pavimentadas dentro da área de concessão.

Complexidade: Índice calculado pela ANEEL que reflete o grau de complexidade sócio-econômica da área de concessão da empresa. Compreende diversos aspectos sócio-econômicos e quanto maior o valor do indicador, mais complexa seria a realidade do local.

Violência: Outro índice calculado pelo regulador com base em indicadores de violência da área de concessão.

Conforme explicado na NT 192/2013-SRE/ANEEL ([ANEEL, 2014b](#)), as variáveis ambientais disponibilizadas (que são as mesmas da NT 407/2014-SRE/ANEEL) foram previamente apresentadas na Consulta Pública nº 11 de 2013, na NT 494/2013-SRE/ANEEL, quando também foi exposto o racional por trás da sua forma de construção. Segundo o regulador, a ideia era apresentar variáveis ambientais que cobrissem as seguintes dimensões: (i) adensamento, (ii) complexidade social, (iii) clima e (iv) mobilidade.

Na primeira fase da audiência pública, o regulador apresentou gráficos de dispersão entre os dados em painel do modelo e estas variáveis ambientais ([ANEEL, 2014b](#)). Segundo explicado na NT, tais gráficos mostravam que não havia significância estatística entre o escore calculado e as variáveis ambientais. Na segunda fase da Audiência Pública, o regulador faz uso do mesmo argumento, mas não mostra nenhuma análise sobre o tema, mesmo tendo alterado significativamente o modelo DEA e a base de dados utilizada ([ANEEL, 2014d](#)).

Tabela 3 – Coeficientes de correlação entre o escore de eficiência e variáveis ambientais

	Escore DEA NT 407	Densidade de Consumidores	Densidade de Rede	Complexidade	Precipitação	Descargas	Vegetação	Vegetação Alta	Vegetação Média	Vegetação Baixa	Declividade	Pavimentação	Perdas Técnicas	Área de Concessão	Violência
Escore DEA NT 407	1	0,02	-0,25	-0,07	-0,32	-0,07	-0,25	-0,32	-0,05	-0,03	0,03	0,13	0,16	0,13	-0,20
Densidade de Cons.		1	0,60	0,24	0,13	0,29	-0,04	0,20	-0,16	-0,10	0,04	0,53	0,33	-0,19	-0,08
Densidade de Rede			1	0,31	0,30	0,44	0,11	0,46	-0,16	-0,11	0,00	0,36	0,11	-0,21	0,03
Complexidade				1	-0,18	-0,21	0,39	0,46	0,20	-0,16	-0,16	-0,15	0,41	0,19	0,61
Precipitação					1	0,76	-0,02	0,47	-0,46	0,21	0,12	0,08	-0,16	-0,17	-0,38
Descargas						1	-0,13	0,30	-0,46	0,18	0,13	0,14	0,02	-0,10	-0,46
Vegetação							1	0,49	0,73	0,29	-0,35	-0,43	0,07	0,21	0,33
Vegetação Alta								1	-0,12	-0,04	-0,03	-0,21	0,08	0,04	0,13
Vegetação Média									1	-0,04	-0,40	-0,28	0,01	0,21	0,30
Vegetação Baixa										1	-0,02	-0,21	0,03	0,04	0,00
Declividade											1	0,16	0,01	-0,16	-0,17
Pavimentação												1	-0,10	-0,45	-0,36
Perdas Técnicas													1	0,73	0,23
Área de Concessão														1	0,26
Violência															1

Considerando os escores gerados pelo modelo DEA descrito na NT 407/2014-SRE/ANEEL e as variáveis ambientais, obteve-se os índices de correlação de *pearson* expostos na [Tabela 3](#).

Pode-se observar que as variáveis ambientais que apresentam maiores correlações entre si são precipitação e descargas (o que é esperado, com índice de 0,76), violência e complexidade (0,61) e vegetação e vegetação média (0,73). Em relação ao escore de eficiência calculado através do modelo da ANEEL, a variável **precipitação** é aquela que apresenta correlação mais significativa (-0,32), assim como **vegetação alta**, que apresenta o mesmo índice.

É importante ressaltar que as variáveis não-controláveis, assim como aquelas escolhidas para compor o modelo, também apresentam dispersão elevada. Assim sendo, o desequilíbrio entre as áreas atendidas pelas concessionárias fica mais evidente ainda. Somada às diferenças operacionais, tamanha dispersão pode prejudicar a premissa básica de aplicação do DEA, de que as empresas devem ser completamente comparáveis no que diz respeito aos seus produtos e insumos.

Outro ponto importante de ser mencionado é acerca da imprecisão dos dados das variáveis ambientais disponibilizados pela ANEEL. As variáveis **Precipitação**, **Vegetação**, **Vegetação baixa**, **Vegetação média**, **Vegetação alta**, **Declividade**, **Pavimentação** e **Área de concessão** são mostradas na base de dados como valores únicos, repetidos nos anos entre 2001 e 2013. Vale lembrar que o modelo DEA considera os valores médios entre 2011 a 2013 dos dados de insumo e produtos. Sendo assim, a análise de segundo estágio pode ficar comprometida se houver alguma variação brusca no período analisado, não captada nos dados utilizados.

Além de analisar as variáveis ambientais, foi investigado também o efeito das variáveis de qualidade no modelo. Conforme ressaltado por [Bogetoft \(2014a\)](#), essas variáveis podem denotar características importantes do processo não consideradas no modelo DEA. As variáveis analisadas são:

DEC: O indicador **Duração Equivalente de Interrupção por Unidade Consumidora**

expressa o número de horas que, em média, as unidades consumidoras de determinado conjunto ficaram sem energia elétrica em determinado período (ANEEL, 2015b).

FEC: a **Frequência equivalente de Interrupção por Unidade Consumidora** indica quantas vezes, em média, as unidades consumidoras de determinado conjunto ficaram sem energia elétrica (ANEEL, 2015b).

Foi analisada também a variável CHI, que fora incluída no modelo DEA como um produto indesejado. Conforme ressaltado pelo regulador na NT 407/2014-SRE/ANEEL (página 7), os indicadores DEC e FEC são influenciados por características da rede e variáveis climáticas. Esses são indicadores sujeitos a regulação específica, que determina metas para o desempenho das concessionárias.

Sendo assim, pode-se considerar que são índices que carregam uma componente ambiental, que influencia decisivamente o número e a duração das interrupções, e também uma componente gerencial, já que a administração das interrupções faz parte das atribuições das empresas. Observar a relação dessas variáveis com o escore de eficiência gerado pelo modelo DEA se mostra, portanto, uma análise relevante, porque pode apontar uma direção viável na correção das variáveis, considerando as dimensões ambiental e gerencial. Os coeficientes de correlação entre as variáveis de qualidade e o escore de eficiência podem ser observados na [Tabela 4](#)

Tabela 4 – Coeficientes de correlação entre o escore de eficiência e variáveis de qualidade

	Escore DEA NT 407	FEC	DEC	CHI
Escore DEA NT 407	1	-0,45	-0,28	-0,07
DEC		1	0,89	0,48
FEC			1	0,74
CHI				1

Chama a atenção a alta correlação da variável FEC com o escore de eficiência, de -0,45. Nenhuma variável ambiental sozinha obteve um índice tão elevado. Essa variável também é fortemente relacionada com as outras duas variáveis de qualidade, o que tornaria vantajosa a sua utilização em uma avaliação.

Para uma análise em dois estágios, contudo, não seria adequado o uso da variável FEC, já que ela não representa puramente a influência do ambiente, e carrega um componente gerencial. Uma alternativa seria identificar a combinação de variáveis ambientais que é capaz de se aproximar do efeito sobre o escore de eficiência que a variável FEC representa, em especial na análise de segundo estágio da abordagem condicional, que modela uma componente gerencial e outra ambiental. Tais análises são detalhadas na [subseção 7.2.2](#).

7.2 Resultados das análises de Segundo Estágio

Conforme explicado no [Capítulo 6](#), foram aplicados cinco diferentes métodos para estimação do escore de eficiência em 2 estágios. Todos eles foram definidos no [Capítulo 4](#).

Segundo [Lopes e Mesquita \(2015\)](#), dentre os reguladores europeus de distribuição de energia que aplicam técnicas de *Benchmarking* em seus modelos, apenas na Noruega é utilizada uma análise em 2 estágios. Finlândia e Dinamarca utilizam informações sobre as variáveis ambientais no próprio modelo.

O regulador norueguês utiliza o método de Mínimos Quadrados, porque argumenta que não encontrou consistência estatística na definição da Distribuição TOBIT. Além da técnica de OLS, o regulador aplica uma versão simplificada do método de *bootstrap* proposto por [Simar e Wilson \(2007\)](#) para correção do viés da estimação em dois estágios. A particularidade do método norueguês fica por conta das variáveis ambientais utilizadas no modelo de regressão: ao invés de incluí-las diretamente no modelo, o regulador inclui uma diferença entre a variável z_i e a sua meta, z_i^{meta} . Essa meta é calculada como uma combinação linear das variáveis ambientais das empresas que são o *benchmark* de cada DMU, considerando seus pesos α_j ([AMUNDSVEEN et al., 2014](#)).

7.2.1 Resultado da Estimação por OLS e Tobit

O primeiro passo para a aplicação do segundo estágio diz respeito à seleção das variáveis ambientais que deveriam entrar no modelo. Considerando o caso univariado, a informação da [Tabela 3](#) pode auxiliar nessa decisão: as variáveis cujos coeficientes de correlação com o escore de eficiência resultam em números mais significativos provavelmente gerariam estimadores consistentes. Nesse caso, as variáveis **precipitação**, **vegetação alta** e **vegetação**, com coeficientes de correlação de -0,322, -0,320 e -0,249, respectivamente, seriam alternativas interessantes ao modelo.

Para aplicação de Mínimos Quadrados, é realizada uma regressão linear, na qual a variável dependente era o escore de eficiência obtido por meio do DEA e o vetor de variáveis independentes era composto pelas possíveis combinações das variáveis ambientais. Isso significa que dizer que as variáveis ambientais explicam, pelo menos em parte, o escore de eficiência observado.

O coeficiente de correlação de *pearson* entre as variáveis θ e Precipitação, por exemplo, implica em dizer que 32,2% da eficiência é explicada pela precipitação, considerando relação linear entre as duas variáveis. A [Figura 14](#) mostra o gráfico de dispersão das três variáveis com correlação mais significativa. A aplicação da técnica de regressão de Mínimos Quadrados irá buscar traçar uma reta que minimize o erro da predição. Logo, a tendência é que os escores preditos $\hat{\theta}_{OLS}$ sejam levados à média dos escores observados, θ .

Sob o ponto de vista da consistência estatística do modelo, a avaliação apenas do coeficiente de correlação de *pearson* como critério decisório se mostra limitada. Uma análise bastante comum é o Teste de Hipótese acerca do coeficiente $\hat{\beta}$, conhecido como **teste t**. A premissa inicial do OLS é de que o coeficiente estimado, $\hat{\beta}$, é normalmente distribuído, com média centrada no verdadeiro valor β e variância conhecida. A mesma premissa é assumida no caso da

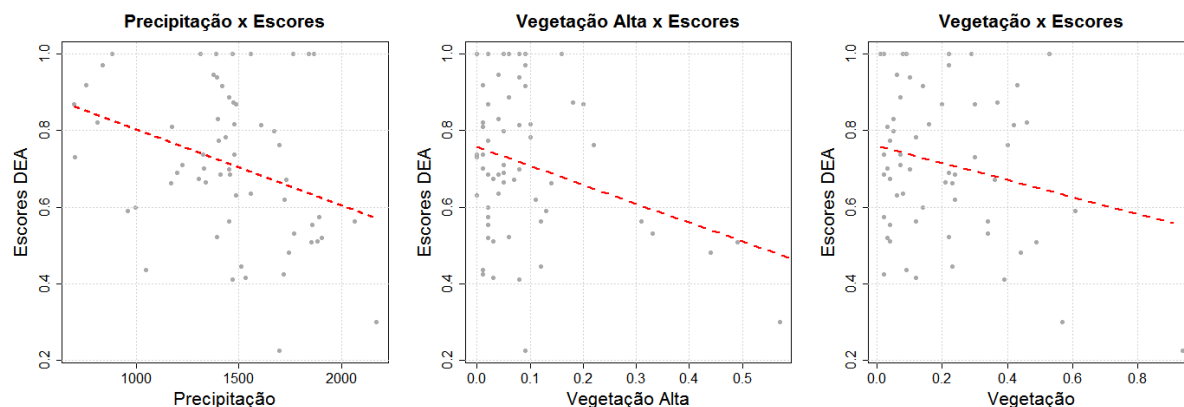


Figura 14 – Dispersão entre escores do modelo DEA e Variáveis Ambientais

Regressão Tobit. O teste t calcula uma estatística de teste, o **p-valor**, sob a hipótese nula de que $\hat{\beta}$ é igual a zero. Ou seja, a estatística de teste mostra a probabilidade de que o coeficiente da variável preditora z seja igual a zero e, portanto, quanto menor for essa probabilidade, mais consistente será o modelo, já que um coeficiente $\hat{\beta}$ igual a zero significa que a variável preditora z não tem importância na constituição do valor predito.

Para identificar quais variáveis possuem p-valores estatisticamente significantes, ao nível de 10%, foi feita uma análise univariada através de TOBIT e OLS, com os resultados mostrados na [Tabela 5](#). Nela, são apresentados os resultados das análises de regressão por OLS e TOBIT considerando todas as variáveis ambientais. O que se observa é que, independentemente da variável preditora, o valor esperado do modelo ($E[\hat{\theta}]$) concentra-se na média das observações de 71,31%.

Assim, o resultado do ajuste por OLS configura uma reversão dos escores à média: os escores estimados, $\hat{\theta}_{OLS}$, têm como média 71,31%, que é a média do vetor θ , independentemente das variáveis independentes do modelo. No caso da estimação através da Regressão Tobit, também se observa um efeito de reversão à média, embora um pouco deslocada à direita da mediana dos valores observados. Os valores médios de $\hat{\theta}_{TOBIT}$ considerando Precipitação, Vegetação Alta e Vegetação são de 72,37%, 72,43% e 72,44%, respectivamente. Vale lembrar que a regressão Tobit estima os valores através da Máxima Verossimilhança da Normal Truncada (nesse caso, em (0,1)), e, por isso, seus valores estimados não coincidem exatamente com aqueles resultantes da aplicação de OLS.

No que diz respeito aos p-valores obtidos, como pode-se observar na [Tabela 5](#), quando aplicado o método de Mínimos Quadrados, as variáveis **Precipitação**, **Vegetação Alta**, **Densidade de Rede** e **Vegetação** apresentam p-valores ao nível de significância estatística de 10% satisfatórios, o que significa que há menos de 10% de probabilidade de que os coeficientes estimados sejam iguais a zero (Hipótese Nula). Quando aplicada a regressão TOBIT, o resultado é similar, porém a variável **Vegetação** apresenta p-valor superior a 0,1, enquanto a variável **Violência** passa a figurar na zona de significância estatística de 10%.

Sob essa avaliação, uma análise univariada através de OLS ou TOBIT poderia ser conside-

Tabela 5 – Resultados das regressões univariadas com a aplicação de OLS e TOBIT

Variável Ambiental	Método	Coeficiente		Valores Preditos (em %)						
		Coeficiente	p-valor	Mín.	1o. Qu.	Mediana	Média	3o. Qu.	Máx.	Desv.Pad.
Precipitação	TOBIT	-0,0001931	0,01730	58,48	67,58	72,20	72,37	74,76	86,91	6,39
	OLS	-0,0001982	0,00841	57,06	66,39	71,16	71,31	73,76	86,24	6,56
Densidade de Rede	TOBIT	-0,0135200	0,09030	42,05	72,42	73,56	72,45	73,93	75,57	4,47
	OLS	-0,0132000	0,08070	41,62	71,28	72,40	71,31	72,76	74,36	4,36
Vegetação Alta	TOBIT	-0,5169000	0,01990	47,66	71,96	74,54	72,43	76,09	77,13	6,03
	OLS	-0,4965200	0,02080	47,52	70,85	73,34	71,31	74,83	75,82	5,79
Vegetação	TOBIT	-0,2175400	0,12800	56,58	69,63	73,98	72,44	75,72	76,81	4,17
	OLS	-0,2223500	0,09270	55,10	68,44	72,89	71,31	74,67	75,78	4,26
Violência	TOBIT	-0,0030740	0,10800	59,02	69,61	73,55	72,98	76,49	79,88	4,40
	OLS	-0,0026700	0,13100	59,66	68,86	72,28	71,79	74,83	77,78	3,83
Perdas Técnicas	TOBIT	0,0000000	0,26100	70,15	70,25	71,20	72,45	73,44	86,97	9,39
	OLS	0,0000000	0,18100	68,86	68,96	69,97	71,31	72,38	86,84	3,40
Área de Concessão	TOBIT	0,0000004	0,35900	70,91	70,97	71,17	72,46	73,09	85,95	9,39
	OLS	0,0000004	0,28800	69,71	69,77	69,98	71,31	71,95	85,19	2,71
Densidade de Consumidores	TOBIT	0,0000287	0,82800	72,24	72,29	72,32	72,48	72,42	76,63	0,60
	OLS	0,0000304	0,80500	71,05	71,10	71,13	71,31	71,24	75,70	0,63
Declividade	TOBIT	0,0002553	0,97100	72,34	72,41	72,44	72,48	72,54	72,90	0,10
	OLS	0,0005429	0,93100	70,99	71,15	71,22	71,31	71,43	72,20	0,22
Vegetação Média	TOBIT	-0,0220300	0,90100	70,97	72,42	72,65	72,48	72,67	72,69	0,34
	OLS	-0,0403400	0,80600	68,54	71,21	71,61	71,31	71,65	71,69	0,63
Vegetação Baixa	TOBIT	-0,0255000	0,95100	71,71	72,52	72,55	72,48	72,55	72,55	0,17
	OLS	-0,0681200	0,86000	69,24	71,42	71,48	71,31	71,48	71,48	0,45
Complexidade	TOBIT	-0,1330300	0,63200	67,61	71,82	73,02	72,49	73,51	73,90	1,34
	OLS	-0,1063100	0,67500	67,41	70,78	71,73	71,31	72,12	72,44	1,07
Descargas	TOBIT	-0,0046700	0,60800	68,47	71,60	72,39	72,47	73,12	75,43	1,42
	OLS	-0,0054810	0,51600	66,62	70,28	71,21	71,31	72,07	74,78	1,66
Pavimentação	TOBIT	0,1617700	0,20900	68,17	70,44	71,57	72,51	73,83	81,44	3,50
	OLS	0,1227900	0,29800	68,01	69,73	70,59	71,31	72,31	78,08	2,66
Modelo ANEEL				22,46	56,20	70,09	71,31	86,93	100,00	19,61

rada consistente com, pelo menos 4 variáveis que, sozinhas, poderiam explicar satisfatoriamente o efeito do ambiente. É claro que uma análise dos escores de eficiência corrigidos seria necessária, a fim de testar a adequação do modelo gerado. Mas antes de verificar a consistência dos 8 modelos univariados gerados, é interessante analisar as combinações multivariadas possíveis.

Para essa análise, foram testadas todas as combinações possíveis das 14 variáveis ambientais, ou seja, $2^{14} - 1 = 16.386$ combinações de variáveis. Em cada combinação, foram extraídos os valores esperados do escores ajustados, $E[\hat{\theta}]$, que estão consolidados nos gráficos da Figura 15.

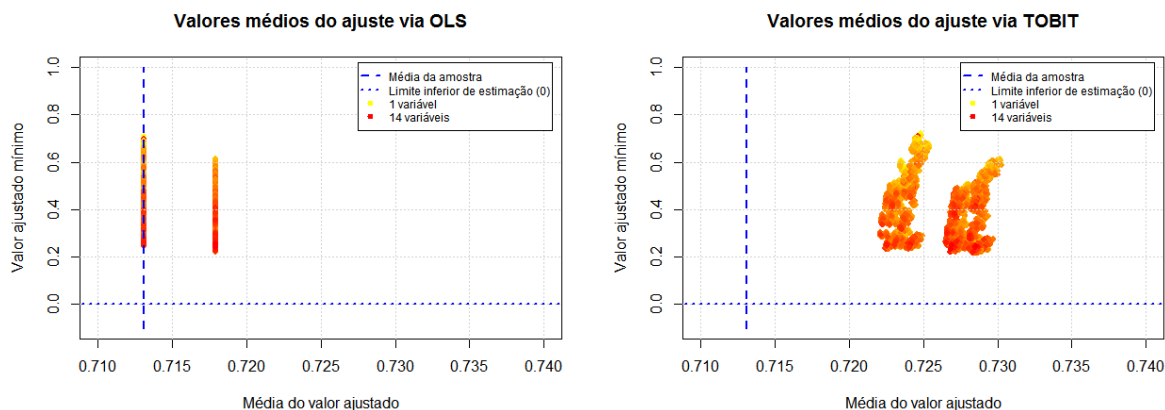


Figura 15 – Valores esperados de $\hat{\theta}$ em todas as combinações de variáveis ambientais

Do mesmo modo que observado nos modelos univariados, os modelos multivariados gerados por OLS também tendem a ter seus valores esperados concentrados próximos à média

dos valores observados. No caso do ajuste por OLS, 8.191 dos 16.383 modelos (50%) tiveram valores esperados convergindo exatamente para a média observada de 71,31%. Um segundo grupo de 8.185 modelos apresentou médias que convergiram para 70,86%. A distinção entre ambos os grupos se deu por conta da variável **Violência**: os 8.185 modelos multivariados que continham essa variável obtiveram valores esperados de θ inferiores à média de 71,31%.

O ajuste por Tobit também apresentou, como nos casos univariados, uma tendência de levar os valores esperados dos escores corrigidos um pouco acima da média das observações. A distinção dos dois grupos observados no gráfico da [Figura 15](#) também diz respeito à presença da variável Violência nos modelos.

Em ambos os métodos de estimação, não foram observados valores estimados abaixo de zero, o que reforça a ideia de que esses modelos poderiam ser válidos. Dois pontos são importantes de serem mencionados sobre a aplicação de OLS e TOBIT para correção dos escores de eficiência: o primeiro deles é a reversão à média dos escores ajustados, o que acaba “desconstruindo” a fronteira de eficiência definida no primeiro estágio. O outro ponto importante é que há um número bastante elevado de combinações de variáveis capazes de gerar ajustes de escores aparentemente consistentes. Do ponto de vista do regulador, essa é uma flexibilidade interessante, quando a ideia é construir um modelo que se adeque à realidade das empresas. Por outro lado, tanta flexibilidade pode gerar análises tendenciosas do mercado, bastando que o regulador escolha a configuração de variáveis capaz de gerar os ajustes que lhe parecem mais conveniente.

7.2.2 Resultado da Estimação através da Abordagem Condicional

Conforme explicado na [seção 4.4](#), a abordagem condicional consiste em estimar a ineficiência gerencial u , dado o erro da observado ε da estimação dos escores de eficiência através de uma regressão com as variáveis ambientais z_i . Para tanto, considera-se que o escore de eficiência é definido através de um DGP conforme a [Equação 4.17](#). Para a análise com os dados da ANEEL do 4CRTP, foram testados dois modelos de estimação diferentes e algumas variações do método de estimação.

O caso da ANEEL trata da função de custo das distribuidoras, e, por isso, não é idêntico ao modelo apresentado na [seção 4.4](#), que tratava da função de produção. Ainda assim, são modelos análogos: sabe-se que é possível estimar os escores de eficiência $\hat{\theta}$ através de uma regressão com as variáveis ambientais \mathbf{z} , na qual o erro observado ε é decomposto em duas componentes, uma que representa a ineficiência, u , e outra que representa apenas o ruído aleatório, v , ou seja, $\varepsilon = u + v$. Nessa última igualdade é que está a diferença entre uma estrutura para função de produção e outra para custo.

Assim, $\hat{\theta} = \beta\mathbf{z} + \varepsilon$. Rearranjando os termos dessa equação, pode-se calcular o erro como $\varepsilon = \hat{\theta} - \beta\mathbf{z}$. Os dois modelos de estimação propostos diferem na configuração das distribuições de probabilidade de u e v , mas ambos têm como objetivo retornar o valor do escore de eficiência estimado corrigido, $\hat{\theta}$.

Lembrando do DGP da [Equação 4.18](#), tem-se que $\hat{\theta} = e^{-E(\mathbf{u}|\varepsilon)}$. Para chegar-se ao valor esperado da ineficiência condicionada ao erro, $E(\mathbf{u}|\varepsilon)$, é necessário conhecer a distribuição de

probabilidade condicional de \mathbf{u} , $f_{\mathbf{u}|\varepsilon}$, que pela Regra de Bayes pode ser encontrada conforme a [Equação 7.1](#).

$$f_{\mathbf{u}|\varepsilon} = \frac{f(\mathbf{u}, \varepsilon)}{f(\varepsilon)} \quad (7.1)$$

Como $\varepsilon = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, tem-se que $\mathbf{v} = \varepsilon - \mathbf{u}$ e, portanto, $f(\mathbf{u}, \varepsilon)$ é equivalente a $f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, considerando a igualdade acima. Além disso, como \mathbf{u} e \mathbf{v} são variáveis independentes, tem-se que $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pode ser reescrito como $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v})$. Então, a [Equação 7.1](#) pode ser reescrita como a [Equação 7.2](#):

$$f_{\mathbf{u}|\varepsilon} = \frac{f_u(\mathbf{u}) \cdot f_v(\varepsilon - \mathbf{u})}{f_\varepsilon(\varepsilon)} \quad (7.2)$$

Dessa forma, como $\hat{\theta} = e^{-E(\mathbf{u}|\varepsilon)}$, o escore de eficiência estimado corrigido em 2 estágios $\hat{\theta}$, dado o erro de estimação observado ε , será encontrado através da resolução da integral da [Equação 7.3](#).

$$\hat{\theta}|\varepsilon = \int_0^{+\infty} e^{\mathbf{u}} \cdot f(\mathbf{u}|\varepsilon) d\mathbf{u} \quad (7.3)$$

Então, para que a integral acima seja resolvida, é necessário que todos os parâmetros das funções f_u e f_v sejam conhecidos. A estimação desses parâmetros é feita através de algoritmos recursivos que maximizam a log-verossimilhança da equação conjunta do erro, f_ε . Como pode-se notar, a escolha das distribuições de probabilidade que descrevem u e v não é importante apenas do ponto de vista da modelagem do erro, mas também do ponto de vista computacional: distribuições muito complexas tornariam as equações 5.3 e 5.4 bastante difíceis de serem implementadas em algoritmos recursivos.

Essa foi uma das motivações para a escolha de um modelo alternativo ao proposto por [Banker e Natarajan \(2008\)](#), já que esse modelo conta com distribuições de probabilidade complexas. Os dois modelos testados, $DEA + BN$ e $DEA + SFA$ foram explicados no [Capítulo 6](#).

A seguir, serão apresentados os critérios de seleção do melhor método de estimação de parâmetros para os modelos $DEA + SFA$ e $DEA + BN$. Depois, uma análise Univariada dos modelos é realizada, a fim de tentar identificar qual a variável ambiental que melhor ajusta o modelo. Por fim, são testadas as diversas combinações possíveis de casos multivariados e é analisado o impacto da aplicação desses modelos aos escores de eficiência.

7.2.2.1 Escolha do Método de estimação de parâmetros

Para estimar os parâmetros de uma função do tipo da [Equação 7.3](#), é comum a utilização de algoritmos recursivos que tenham como objetivo maximizar a log-verossimilhança da função. Essa é, inclusive, a sugestão de [Banker e Natarajan \(2008\)](#) em seu trabalho.

Sendo assim, a escolha natural do método a ser utilizado seria pela estimação clássica de Verossimilhança através do algoritmo de Newton-Raphson. Considere um vetor Θ , composto por parâmetros a serem estimados de uma equação. No caso do modelo $DEA + SFA$, por exemplo,

esse vetor seria composto pelos parâmetros: $\Theta = [\lambda, \sigma^2, \beta]$. A equação de ajuste é obtida a partir da expansão de Taylor de primeira ordem da derivada da função de log-Verossimilhança, l , conforme a [Equação 7.4](#).

$$\Theta^{k+1} = \Theta^k - \left[\frac{\partial^2 l(\Theta^k)}{\partial \Theta^2} \right]^{-1} \frac{\partial l(\Theta^k)}{\partial \Theta} \tag{7.4}$$

Nessa equação, o índice k representa a iteração em que o algoritmo se encontra. O número de iterações irá depender do atingimento do critério de convergência adotado. Em abordagens computacionais, a obtenção do segundo termo da equação, conhecido como **Matriz Hessiana** (derivada de segunda ordem do vetor Θ) pode ser problemática, porque envolve uma rotina de inversão de matriz.

Além disso, para que esse algoritmo possa rodar, é necessário que se calcule as matrizes de derivadas de primeira e segunda ordem da equação em análise em relação a todos os parâmetros estimados. Conforme exposto anteriormente, o modelo $DEA + BN$ não é algebricamente simples, e a obtenção dessas matrizes resultaria em equações bastante complexas e de difícil implementação computacional. Tendo isso em vista, foi testada a aplicação do algoritmo de estimação BFGS, que não utiliza a matriz Hessiana.

O método BFGS requer o uso de uma matriz de derivadas de primeira ordem. Essa matriz foi montada através de uma aproximação numérica da derivada, conforme exposto na [Equação 7.5](#).

$$\frac{\partial l(\Theta)}{\partial \Theta_i} = \frac{\Delta l(\Theta)}{\Delta \Theta_i} = \lim_{\Delta \Theta_i \rightarrow 0} \frac{l(\Theta_i + \Delta \Theta_i) - l(\Theta_i)}{\Delta \Theta_i} \tag{7.5}$$

Uma terceira abordagem testada foi a aplicação do pacote *ucminf* do *Software R*, descrito na [seção 6.3](#). Esse pacote contém um algoritmo de estimação similar ao BFGS, calculando uma aproximação para a matriz Hessiana.

Os três métodos foram testados através de um estudo de simulação, para os modelos em que eram possíveis de serem aplicados, conforme resumido na [Tabela 6](#). O Algoritmo de Newton-Raphson não foi aplicado ao modelo $DEA + BN$ devido à dificuldade de se calcular e inverter a matriz Hessiana. Como exposto anteriormente, o modelo $DEA + BN$ conta com uma distribuição de probabilidade para ε bastante complexa, o que dificulta a operacionalização desse algoritmo.

Tabela 6 – Métodos de Estimação de Parâmetros aplicados a cada modelo

Método	Modelos	
	<i>DEA + SFA</i>	<i>DEA + BN</i>
Newton-Raphson	✓	
BFGS + Aproximação Numérica	✓	✓
Pacote <i>ucminf</i>	✓	✓

Assim, com o objetivo de identificar quais métodos eram capazes de gerar estimadores de parâmetros consistes para cada modelo, foi realizado um estudo de simulação, no qual os

verdadeiros parâmetros eram conhecidos. A partir de bases de dados simuladas, os métodos de estimação foram aplicados. O procedimento foi operacionalizado no *Software R*, e contou com as seguintes características:

- N° de replicações: 500
- DGP do modelo $DEA + SFA$: $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$ e $u_i \sim N_+(0, \sigma_u^2)$
- Verdadeiros valores dos parâmetros estimados no modelo $DEA + SFA$: $\sigma^2 = 0,08$, $\lambda = 1$, $\beta = 1$

O número de replicações se limitou a 500 em decorrência do tempo computacional de execução do algoritmo BFGS para o modelo $DEA + BN$. Um número maior de replicações demandaria um tempo elevado de execução.

Os resultados obtidos para a estimação do modelo $DEA + SFA$ estão disponíveis na [Tabela 7](#). A função de log-verossimilhança de f_ε , cujo valor foi maximizado recursivamente no algoritmo de Newton-Raphson, possui vários ótimos locais e, por isso, para que o algoritmo convergisse, foi necessário introduzir uma rotina que ajustasse a distância a_k , o seu “passo” (ver detalhes na [seção 4.6](#)): se a direção da busca fosse superior ao valor da função a ser maximizada na iteração, antes de atingir a convergência, então a distância da busca dada por a_k deveria ser reduzida.

Tabela 7 – Resultados do estudo de simulação do modelo $DEA + SFA$

Método		Parâmetros Estimados			
		σ^2	λ	β	logLk
Valores Reais:		0,08	1	1	
Newton-Raphson	Média	0,0821	1,1210	1,0063	6,3700
	Desv. Pad.	0,0217	0,6036	0,0967	1,1505
BFGS + Aprox. Numérica	Média	0,0752	0,8643	1,0345	3,2004
	Desv. Pad.	0,0179	0,3500	0,0760	5,4346
ucminf()	Média	0,0822	1,1168	1,0027	3,3461
	Desv. Pad.	0,0232	0,6035	0,0936	5,4194

Nos resultados, pode-se observar que o algoritmo de Newton-Raphson foi aquele que gerou melhores valores da log-verossimilhança do modelo, e também o que apresentou estimativas médias mais próximas aos verdadeiros valores. A rotina do pacote *ucminf* gerou estimadores, em média, levemente deslocados à direita dos verdadeiros valores, enquanto que o algoritmo BFGS deslocou os valores estimados, em média, mais à esquerda dos verdadeiros valores. O BFGS, por outro lado, gerou estimadores com desvios-padrões menores que o *ucminf* e até mesmo que o Newton-Raphson. De maneira geral, pode-se considerar que tanto o BFGS com aproximações numéricas das derivadas, quanto o pacote *ucminf* são capazes de gerar estimadores consistentes, já que os valores médios obtidos não diferem em mais que 14% dos verdadeiros valores dos parâmetros. Entretanto, o algoritmo de Newton-Raphson foi o que apresentou melhores resultados para estimação dos parâmetros do modelo $DEA + SFA$, já que, além de ter gerado maiores valores de log-verossimilhança, também foi o que gerou estimadores mais próximos dos verdadeiros valores dos parâmetros λ e σ^2 .

O procedimento de simulação para o modelo $DEA + BN$ foi composto conforme explicado a seguir, e seus resultados estão na [Tabela 8](#).

- N° de replicações: 500
- DGP do modelo $DEA + BN$: $v_i \sim NT(0, \sigma^2, V^M)$ e $u_i \sim Gamma(2, \varphi)$
- Verdadeiros valores dos parâmetros estimados no modelo $DEA + BN$: $\sigma^2 = 0,04$, $V^M = 0,4$, $\beta = 1$, $\varphi = 0,085$

Tabela 8 – Resultados do estudo de simulação do modelo $DEA + BN$

Método	Parâmetros Estimados					
	V^M	σ^2	φ	β	logLk	
Valores Reais:		0,4	0,04	0,085	1	
BFGS + Aprox. Numérica	Média	0,3841	0,0525	0,0805	1,0128	9,8518
	Desv. Pad.	0,1090	0,0213	0,0252	0,0885	5,5144
ucminf()	Média	0,3875	2,1169	0,0807	1,0236	10,6638
	Desv. Pad.	0,1075	4,8512	0,0269	0,0948	5,9673

Como as equações que compõem o modelo são mais complexas, as 500 replicações do modelo $DEA + BN$ apresentaram um tempo computacional significativamente superior ao modelo $DEA + SFA$. Tanto o BFGS com as aproximações numéricas das derivadas da log-verossimilhança, quanto o *ucminf* geraram estimadores dos parâmetros V^M e φ levemente deslocados à esquerda dos verdadeiros valores. As estimativas para β ficaram levemente deslocadas à direita, com médias centradas a menos de 2% de distância do verdadeiro valor. Entretanto, o pacote *ucminf* retornou uma estimativa média de σ^2 muito distante do valor real, e com variação (desvio-padrão), excessivamente elevada. O BFGS gerou um estimador para o parâmetro σ^2 , em média, 31% distante do valor real. A verossimilhança dos dois métodos é próxima, e, embora a atingida pelo pacote *ucminf* seja um pouco superior, o resultado instável na estimação de σ^2 leva a concluir que o BFGS seria uma alternativa mais viável para estimar os parâmetros desse modelo.

Vale mencionar que a maioria dos trabalhos que sugere métodos de estimação de parâmetros, incluído os trabalhos de [Simar e Wilson \(2007\)](#) e [Banker e Natarajan \(2008\)](#), costuma avaliar a consistência do método ao estimar somente o parâmetro β . Os demais parâmetros não costumam ser avaliados. Isso pode ter implicações sérias na generalização de um modelo e também na validação de um método de estimação de parâmetros.

Em suma, os três métodos testados apresentam são capazes de retornar estimadores consistentes aos modelos $DEA + SFA$ e $DEA + BN$. Por isso, na análise univariada dos dados da ANEEL, apresentada a seguir, todos foram considerados.

Concluindo, para fins de análise dos dados do 4CRTP da ANEEL, optou-se por trabalhar com o algoritmo de Newton-Raphson quando utilizado o modelo $DEA + SFA$ e com o algoritmo BFGS (com as derivadas aproximadas numericamente) quando usado o modelo $DEA + BN$, tendo em vista os resultados acima apresentados.

7.2.2.2 Abordagem Condicional: Análise Univariada

Em um primeiro momento, a adequação do modelo de estimação e o método aplicado foram testados ao caso da ANEEL tendo em vista o caso Univariado. Assim, os modelos $DEA + SFA$ e $DEA + BN$ foram aplicados para cada uma das variáveis ambientais, e tiveram seus resultados analisados, considerando diferentes aspectos na avaliação da estimação.

No modelo $DEA + SFA$, a avaliação do método de estimação foi feita sob o ponto de vista de 3 valores diferentes: a log-verossimilhança do modelo (quanto maior, melhor), o p-valor do coeficientes β (quanto menor, menor a probabilidade desse coeficiente ser igual a zero) e do R_u^2 , uma proposta de R^2 ajustado, que procura quantificar o quanto da variância do erro composto ε é representado pela componente de ineficiência u , descrito conforme a Equação 7.6.

$$R_u^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \tag{7.6}$$

Essa equação faz uso da propriedade do modelo, de que $\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$. Assim, a ideia é mensurar quanto da variância do modelo ajustado corresponde à ineficiência gerencial u . Então, quanto maior for o valor de R_u^2 , maior será a parcela referente à ineficiência gerencial, e menor será a necessidade de ajuste do escore pela variável ambiental.

Um resumo dos ajustes de segundo estágio para cada variável ambiental do modelo $DEA + SFA$, com seus respectivos resultados e avaliações, está disponível na Tabela 9. Foram aplicados dois métodos de estimação de parâmetros, ambos explicados na subseção 7.2.2.1: o primeiro deles foi a aplicação do pacote computacional *ucminf*, no qual foi utilizada uma aproximação numérica para as matrizes de derivadas de primeira ordem necessárias; o segundo método foi a aplicação do algoritmo de Newton-Raphson (NR). Esse último método não atingiu a convergência para duas variáveis ambientais: Vegetação Média e Vegetação Alta.

Tabela 9 – Resultados das regressões univariadas com o modelo $DEA + SFA$

Variável Ambiental	Método de estimação	Parâmetros estimados			Avaliação da Estimação						
		λ	σ^2	β	LogLk	σ_u	σ_v	$E(\hat{\theta})(\%)$	$R_u^2(\%)$	p-valor	Melhor ajuste
Precipitação	ucminf	-0,27637	0,088871	0,000308	-11,2522	0,079413	0,287341	95,04	7,10	2,67E-05	-11,25
	NR	5,96E-05	0,088878	0,000308	-11,3873	1,78E-05	0,298124	99,98	0,00	3,31E-05	(ucminf)
Perdas Técnicas	ucminf	9,999945	0,09671	-7,4E-08	-31,5257	0,30944	0,030944	68,43	99,01	0,5	-24,89
	NR	9,999945	0,09671	8,29E-09	-24,8958	0,30944	0,030944	71,52	99,01	0,404491	(NR)
Área de Concessão	ucminf	9,999962	0,097478	-6,7E-07	-28,6837	0,310665	0,031067	69,23	99,01	0,5	-24,52
	NR	9,999962	0,097478	4,15E-08	-24,5218	0,310665	0,031067	71,33	99,01	0,455344	(NR)
Densidade de Consumidores	ucminf	533705	0,242542	-6,3E-07	-1,06973	0,492486	9,23E-07	0,00	100	0,477851	-1,07
	NR	9,999879	0,239854	-5,3E-05	-7,2095	0,487318	0,048732	70,71	99,01	0,370149	(ucminf)
Declividade	ucminf	564878,6	0,242516	-1E-06	-1,06459	0,492459	8,72E-07	0,00	100	0,481438	-1,06
	NR	36,11237	0,249583	-0,00274	-3,93018	0,499391	0,013829	69,95	99,92	0,037164	(ucminf)
Vegetação Média	ucminf	9328919	0,242514	-2,4E-05	-1,75729	0,492457	5,28E-08	0,00	100	0,487522	-1,76
	NR										(ucminf)
Densidade de rede	ucminf	2651645	0,242514	-9,9E-07	-1,06419	0,492457	1,86E-07	0,00	100	0,494285	-1,06
	NR	94,02643	0,247966	-0,00458	-3,22984	0,497933	0,005296	70,60	99,99	0,052506	(ucminf)
Vegetação Baixa	ucminf	5061450	0,242513	-4,2E-05	-3,83659	0,492456	9,73E-08	0,00	100	0,487946	-3,84
	NR	561,2294	0,24356	-0,09872	-4,24541	0,493518	0,000879	71,13	100	0,255445	(ucminf)
Vegetação	ucminf	17585572	0,242514	-1,2E-05	-1,06419	0,492457	2,8E-08	0,00	100	0,494569	-1,06
	NR	315,557	0,245377	-0,02894	-2,90595	0,495353	0,00157	70,89	100	0,145532	(ucminf)
Complexidade	ucminf	2997347	0,242514	-1,9E-05	-1,06416	0,492457	1,64E-07	0,00	100	0,480694	-1,06
	NR	382,8411	0,24475	-0,03944	-1,83677	0,494721	0,001292	70,91	100	0,103218	(ucminf)
Descargas	ucminf	1775369	0,242515	-6E-07	-1,06431	0,492458	2,77E-07	0,00	100	0,482917	-1,06
	NR	38,10755	0,2487	-0,00233	-3,61061	0,498527	0,013082	70,18	99,93	0,031973	(ucminf)
Vegetação Alta	ucminf	13896802	0,242513	-7,8E-06	-1,75712	0,492456	3,54E-08	0,00	100	0,496841	-1,76
	NR										(ucminf)
Pavimentação	ucminf	3906870	0,242513	-2,9E-06	-1,06401	0,492456	1,26E-07	0,00	100	0,495993	-1,06
	NR	138,9918	0,245481	-0,01821	-2,09659	0,495448	0,003565	70,72	99,99	0,070396	(ucminf)
Violência	ucminf	775112,5	0,234377	-8,5E-07	-0,0237	0,484125	6,25E-07	71,79	100	0,447745	-0,024
	NR	17,30553	0,239398	-0,00063	-5,30639	0,488468	0,028226	70,69	99,67	0,190562	(ucminf)

A análise dos resultados mostra que o *ucminf* e o algoritmo NR geram estimações dos parâmetros σ^2 e β com valores similares, e que em quase todos os casos, o *ucminf* gerou valores maiores de log-verossimilhança. Entretanto, observa-se que o algoritmo *ucminf* gerou, na maioria dos casos, valores muito elevados de λ , o que acabou fazendo com que a estimação de σ_u e σ_v ficasse distorcida (ver o caso das variáveis Densidade de Consumidores, Densidade de Rede e Vegetação Baixa, por exemplo). Outra constatação é que quanto maior o impacto da ineficiência, e maior o valor de R_u^2 , menor é o ajuste sugerido às variáveis ambientais: o valor de $E(\hat{\theta})$ pouco se afastou da média original da amostra de 71,31%.

O ajuste do erro, em uma análise empírica, é coerente. A Figura 16 mostra o histograma do erro aleatório observado, em comparação com a distribuição de probabilidade esperada para uma *Skew-Normal*, considerando o caso univariado para a variável Violência. O ajuste se mostra próximo ao esperado.

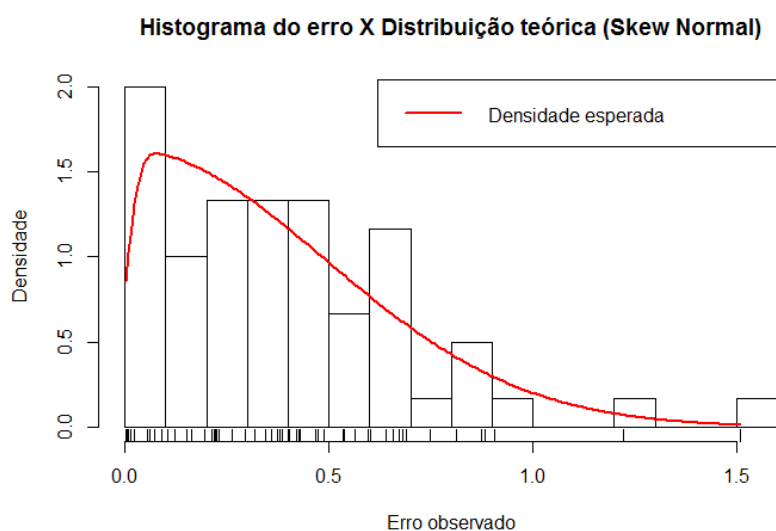


Figura 16 – Histograma Esperado e do erro observado e do modelo *DEA + SFA* para a variável Violência

O impacto da estimação através da abordagem condicional nos escores de eficiência é bastante diferente daquele gerado com a aplicação de TOBIT ou OLS, já que não é observada uma reversão à média dos escores. A Figura 17 mostra um exemplo, considerando a variável Violência: apenas alguns escores são ajustados, tendo seus escores reduzidos muito levemente. As principais mudanças são observadas nas DMUs que têm escore igual a 1: todas elas sofrem uma redução, mas muito pequena, para valores entre 96,78% e 97,59%. Essa alteração quase imperceptível é esperada, uma vez que o valor de R_u^2 é próximo de 100%: isso significa que quase todo o ruído da estimação corresponde à ineficiência, e que, por isso, não há ajustes significativos a serem feitos em decorrência das variáveis ambientais.

Nos casos univariados do modelo *DEA + SFA*, pôde-se observar que nenhuma variável ambiental gerou uma alteração significativa na média dos escores de eficiência. Isso reforça a ideia de que seria necessário testar diferentes combinações de variáveis ambientais, em modelos

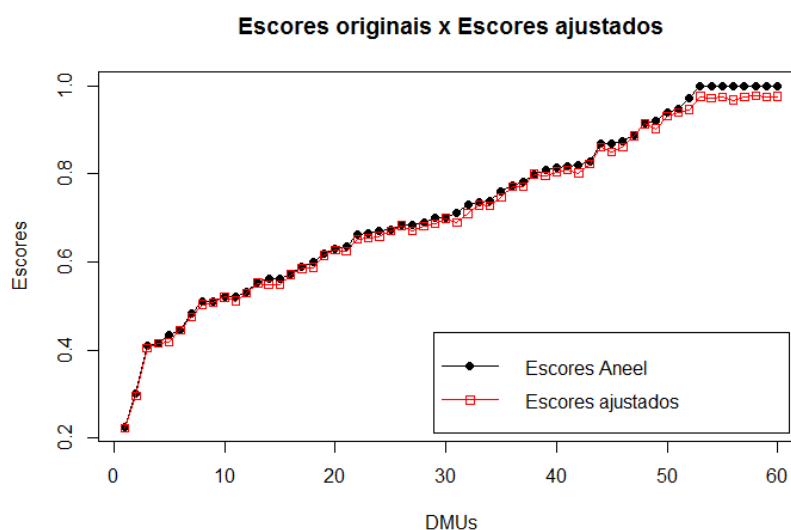


Figura 17 – Impacto da estimação dos escores de eficiência pela abordagem condicional (modelo $DEA + SFA$)

multivariados. Antes de apresentar essa avaliação, contudo, é mostrado o impacto da correção dos escores através do modelo $DEA + BN$.

Para a implementação desse segundo modelo, foram utilizados dois métodos de estimação diferentes. O primeiro deles foi o algoritmo BFGS, com a aproximação numérica das matrizes de derivadas de primeira ordem, conforme explicado na [subseção 7.2.2.1](#). Esse algoritmo não convergiu para o modelo ajustado por três variáveis: Precipitação, Perdas Técnicas e Área de concessão. Por isso, uma abordagem alternativa foi testada: com base na distribuição de probabilidade acumulada teórica do erro, F_ε , foi implementada uma rotina que tinha como objetivo minimizar a distância entre a F_ε empírica e a F_ε observada.

A [Figura 18](#) mostra a ideia dessa última abordagem: no primeiro gráfico, a linha em preto mostra a distribuição empírica de F_ε , enquanto a linha vermelha mostra a distribuição teórica. A rotina do algoritmo de estimação aplicado procura minimizar as distâncias entre essas duas linhas. O segundo gráfico mostra a distribuição esperada do erro (conjunta entre gama e normal truncada) e a observada. Em ambos os gráficos, a variável Violência é a que foi utilizada como exemplo.

Além desses dois métodos de estimação, foi testado um terceiro, que utilizou a ideia de minimização das distâncias para definição dos valores iniciais de V^M e φ no algoritmo BFGS. Os resultados dos três métodos de estimação estão disponíveis na [Tabela 10](#). O índice de avaliação R_u^2 foi calculado de maneira similar àquele mostrado na [Equação 7.6](#). A diferença é que foram utilizados os valores das variâncias de u e v , e não os desvios-padrões, já que no caso desse modelo não há um parâmetro que exprima a relação entre os dois desvios-padrões. A [Equação 7.7](#) mostra como esse cálculo foi feito.

$$R_u^2 = \frac{VAR(u)}{VAR(u) + VAR(v)} \quad (7.7)$$

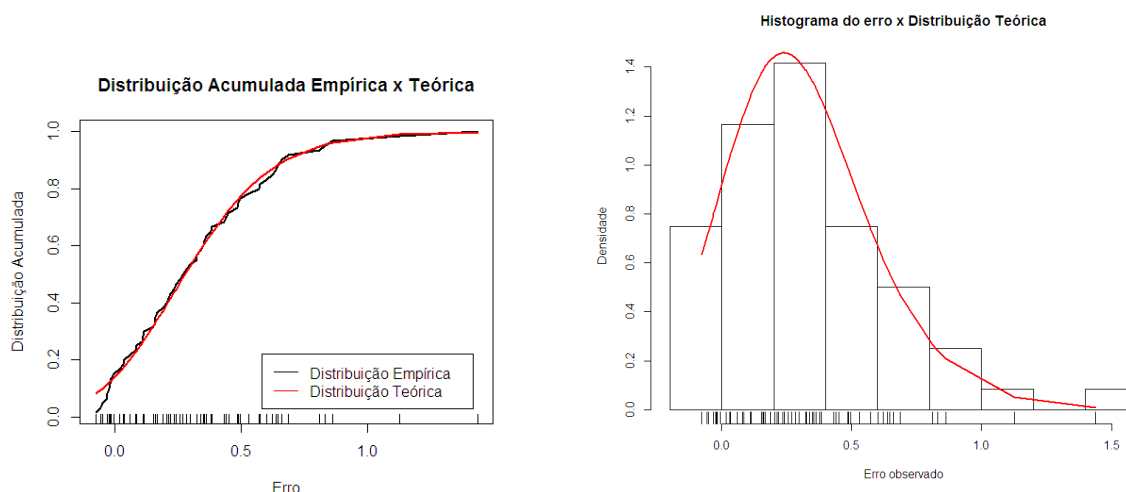


Figura 18 – Minimização das distâncias entre F_ε empírica e teórica (modelo $DEA + BN$)

Para calcular as variâncias de u e v , foi necessário apenas fazer uso das propriedades das suas respectivas distribuições de probabilidade, já que $u \sim \text{Gamma}(2, \varphi)$ e $\text{VAR}(u) = \varphi/2^2$. A variância da distribuição truncada que descreve $v \sim N_+(0, \sigma_v^2)$, é calculada em função da densidade da distribuição normal, $\phi(\cdot)$: $\text{VAR}(v) = 2/\sigma_v \cdot \phi(v/\sigma_v)$.

Na Tabela 10, as linhas em branco mostram métodos de estimação que não convergiram. O que se pode observar nessa tabela é que o método de estimação que utiliza o algoritmo BFGS foi o que apresentou melhores resultados de log-verossimilhança na maioria dos modelos. Do ponto de vista da avaliação das variáveis ambientais individualmente, também não se observou mudanças bruscas na média dos escores de eficiência. As variáveis **Declividade**, **Vegetação** e **Violência** são as que causaram maior ajuste nos escores, considerando a estimação via BFGS. Assim como no modelo $DEA + SFA$, nesse modelo também não se observou o problema de reversão à média dos escores, como visto na aplicação por TOBIT ou OLS.

Fazendo uma comparação entre os resultados da Tabela 9 e da Tabela 10, pode-se concluir que o modelo $DEA + SFA$ é aquele que apresentou melhor ajuste aos dados da ANEEL, se considerado o valor da log-verossimilhança. Apenas o ajuste às variáveis Perdas Técnicas e Área de Concessão teve maior valor de log-verossimilhança com o modelo $DEA + BN$. Para todas as demais variáveis, o modelo $DEA + SFA$ se mostrou mais adequado.

Sobre essa última constatação, vale lembrar que as estruturas gráficas do erro ε propostas pelo modelo $DEA + SFA$ e $DEA + BN$ são similares: em ambos os casos, são distribuições com uma leve assimetria à esquerda, e truncadas pelo menos à esquerda. Vale lembrar que no artigo de Banker e Natarajan (2008), os autores fazem a definição do seu modelo, mas nos estudos de simulação não o estimam por completo, fazendo algumas simplificações como a definição de que o ponto de truncamento V^M seria igual a $3 \times \sigma_\varepsilon$. Esse modelo é bastante complexo do ponto de vista matemático, o que torna complicada a sua implementação computacional. Conforme explicado aqui, foi necessário buscar alternativas à estimação por MLE proposta pelos autores no seu artigo. E, tendo em vista que os resultados dessa estimação não são substancialmente melhores que aqueles atingidos pelo modelo $DEA + SFA$, talvez o modelo $DEA + BN$ não seja

Tabela 10 – Resultados das regressões univariadas com o modelo $DEA + BN$

Variável Ambiental	Método de estimação	Parâmetros estimados				Avaliação da Estimação						Melhor ajuste
		V^M	φ	σ^2	β	LogLk	σ_u	σ_v	$E(\hat{\theta})$	R_u^2	p-valor	
Precipitação	BFGS											-16,57 Min. distâncias
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,9199	0,0084	0,0865	0,0003	-16,57	0,0457	0,2913	0,9837	0,0241		
Perdas Técnicas	BFGS											-10,60 Min. distâncias
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,2732	0,1977	0,2141	-7,37E-08	-10,60	0,2223	0,1541	0,5857	0,6754		
Área de Concessão	BFGS											-11,35 Min. distâncias
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,2917	0,3944	0,2147	2,856,9	-1,520,17	0,3140	0,1640	0,0073	0,7857	0,0000	
Densidade de consumidores	BFGS											-13,93 Min. distâncias
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,1893	0,3477	0,1011	1,1597	-1,545,04	0,2948	0,1067		0,8842	0,1228	
Declividade	BFGS											-9,13 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,3364	0,1711	31,4883	0,0003	-13,93	0,2068	0,1942	0,7229	0,5316		
Vegetação Média	BFGS											-10,49 BFGS + min distâncias
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,1556	0,2006	0,1005	-0,0023	-9,13	0,2239	0,0884	0,6748	0,8652	0,4992	
Densidade de rede	BFGS											-8,25 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,2625	0,2025	13,0698	-0,0046	-10,58	0,2250	0,1515	0,6868	0,6881		
Vegetação baixa	BFGS											-9,32 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,2415	0,1834	13,0689	0,0033	-9,38	0,2141	0,1394	0,7161	0,7023	0,5000	
Vegetação	BFGS											-10,83 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,2691	0,1829	0,1000	0,2354	-10,59	0,2138	0,1479	0,7154	0,6763	0,4975	
Complexidade	BFGS											-9,48 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,3430	0,1707	0,4607	0,2296	-11,75	0,2066	0,1947	0,7212	0,5296		
Descargas	BFGS											-9,60 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,2582	0,1829	0,4598	0,2348	-10,49	0,2139	0,1476	0,7153	0,6772	0,4994	
Vegetação Alta	BFGS											-6,40 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,2903	0,1642	0,1012	0,0256	-8,25	0,2026	0,1584	0,7389	0,6206	0,4919	
Pavimentação	BFGS											-6,39 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,5970	0,1746	0,0427	0,5057	-12,03	0,2089	0,2028	0,7194	0,5147		
Violência	BFGS											-8,23 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,4216	0,1417	0,0879	0,4955	-10,83	0,1882	0,2120	0,7668	0,4408	0,4912	
Pavimentação	BFGS											-6,39 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,6763	0,1217	0,0707	0,5883	-12,06	0,1744	0,2549	0,7920	0,3190		
Violência	BFGS											-8,23 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,6748	0,1293	0,0573	0,5865	-11,84	0,1798	0,2343	0,7837	0,3706	0,4942	
Violência	BFGS											-8,23 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,2374	0,1805	0,1011	0,2043	-9,48	0,2125	0,1320	0,7195	0,7214	0,4932	
Violência	BFGS											-8,23 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,5270	0,1809	0,0354	0,0198	-11,07	0,2126	0,1839	0,7119	0,5720		
Violência	BFGS											-8,23 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,2808	0,1718	0,1019	0,0063	-9,60	0,2072	0,1539	0,7287	0,6446	0,4984	
Violência	BFGS											-8,23 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	1,1033	0,1088	0,0657	0,0195	-13,65	0,1650	0,2564	0,8063	0,2928		
Violência	BFGS											-6,40 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,2750	0,1557	0,1179	0,8647	-6,40	0,1973	0,1521	0,7512	0,6273	0,4368	
Violência	BFGS											-6,39 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,3500	0,1193	19,9560	1,2697	NAN	0,1727	0,2020	NaN	0,4224		
Violência	BFGS											-6,39 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,0003	0,2229	0,0984	-0,1422	-6,39	0,2360	0,0002		1,0000	0,4998	
Violência	BFGS											-8,23 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,2731	0,2147	0,0231	-0,1192	-9,43	0,2317	0,1264	0,6745	0,7704		
Violência	BFGS											-8,23 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,2728	0,2177	0,0003	-0,1235	-6,66	0,2333	0,0173	0,6740	0,9945	0,4672	
Violência	BFGS											-8,23 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	0,2918	0,1391	0,0948	0,0039	-8,23	0,1865	0,1585	0,7630	0,5805	0,4987	
Violência	BFGS											-8,23 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	1,2396	0,1499	0,0407	0,0021	-19,64	0,1936	0,2018	0,7483	0,4792		
Violência	BFGS											-8,23 BFGS
	Min. distâncias BFGS + min. distâncias	1,2396	0,1511	0,0313	0,0031	-8,66	0,1944	0,1770	0,7532	0,5465	0,4989	

a melhor alternativa a ser implementada.

A seguir, será apresentada a avaliação das opções de análise multivariada para os modelos $DEA + SFA$, que é aquele apresentou melhor ajuste ao caso da ANEEL.

7.2.2.3 Abordagem Condicional: Análise Multivariada

Conforme mencionado, o baixo impacto observado no valor esperado de $\hat{\theta}$ com a aplicação de modelos univariados de ajuste em dois estágios motivou a investigação acerca da existência de modelos multivariados que fossem capazes de explicar o impacto das variáveis ambientais nos escores de eficiência.

Em um primeiro momento, buscou-se identificar um modelo multivariado composto por duas ou três variáveis ambientais que fosse capaz de replicar o efeito observado nos escores com a utilização da variável de qualidade FEC. Conforme explicado na [subseção 7.1.1](#), esse indicador apresenta um alto coeficiente de correlação com os escores de eficiência, e, por ser

composto por uma parcela referente à influência ambiental e outra relativa à eficiência gerencial da concessionária, possui características convenientes à modelagem da abordagem condicional. O resultado da estimação dos escores de eficiência por meio da variável de qualidade FEC é apresentado na [Tabela 11](#).

Tabela 11 – Resultado da regressão univariada do modelo *DEA + SFA* para a variável FEC

Variável de Qualidade	Método de estimação	Parâmetros estimados			Avaliação da Estimação						
		λ	σ^2	β	LogLk	σ_u	σ_v	$E(\hat{\theta})(\%)$	$R_u^2(\%)$	p-valor	Melhor ajuste
FEC	ucminf	2,57	0,1480	0,00924772	-4,65	0,3584	0,1396	77,87	87	0,0005	-4,65
	NR	2,57	0,1480	0,00924772	-4,65	0,3584	0,1396	77,87	87	0,0005	(NR)

Observa-se que esse ajuste se mostraria adequado, caso a variável FEC possuísse apenas a componente ambiental, já que apresenta valores de λ e R_u^2 que tornam o ajuste nos escores relevante.

A primeira análise consistiu em identificar um modelo no qual uma variável ambiental fosse capaz de alterar a verossimilhança do ajuste obtido com a variável FEC, em um nível de significância de 10%. Para isso, foi executado um algoritmo recursivo que testou a inclusão individual das variáveis ambientais ao *modelo0* (ajuste com a variável teste FEC), pela ordem de correlação com a variável teste, e avaliou o impacto na verossimilhança do ajuste. Assim, a combinação de variáveis incluída no modelo poderia substituir a variável FEC. Entretanto, a análise retornou apenas a variável **Complexidade** como significativa, o que resultaria em um modelo univariado. Conforme mostrado na [Tabela 9](#), o ajuste por essa variável não se mostra significativo.

A segunda análise consistiu em testar modelos multivariados de duas ou três variáveis que contivessem as variáveis ambientais de maior correlação com FEC, capazes de replicar o efeito desse índice no ajuste dos escores. Os coeficientes de correlação de FEC com as variáveis ambientais pode ser visto na [Tabela 12](#)

Tabela 12 – Coeficientes de correlação entre FEC e variáveis ambientais

Variável Ambiental	Correlação com FEC (%)
Vegetação Alta	65,24
Vegetação	45,31
Complexidade	43,31
Pavimentação	42,06
Precipitação	40,27
Declividade	31,85
Violência	27,90
Densidade de Rede	26,46
Descargas	18,30
Vegetação Baixa	10,79
Vegetação Média	10,70
Área de concessão	6,98
Perdas Técnicas	6,76
Densidade de Consumidores	6,22

As combinações com as variáveis **Vegetação Alta** e **Vegetação** foram exploradas em maior detalhe, já que essas são as variáveis ambientais com maiores coeficientes de correlação com FEC. As combinações mais significativas podem ser vistas na [Tabela 13](#). Apenas o modelo com

as variáveis **Vegetação Alta** e **Violência** não viola a condição de que o coeficiente β_i deve ser maior ou igual a zero. Os escores corrigidos por concessionária estão detalhados no **Apêndice B**.

Tabela 13 – Resultado da regressão multivariada do modelo *DEA + SFA* para alguns modelos

Variáveis Ambientais	Método de estimação	Parâmetros estimados					Avaliação da Estimação							Melhor ajuste	
		λ	σ^2	β_1	β_2	β_3	LogLk	σ_u	σ_v	$E(\hat{\theta})$ (%)	R_u^2 (%)	p-valor1	p-valor2		p-valor3
Vegetação Alta e Violência	ucminf	2,89	0,1670	0,6600	0,0010		-6,11	0,3863	0,1335	76,89	89	0,0473	0,2965		-6,1066
	NR	2,89	0,1670	0,6600	0,0010		-6,11	0,3863	0,1335	76,89	89	0,0520	0,3049		(NR)
Vegetação Alta e Área Conc.	ucminf	2,57	0,0880	0,8913	-7,4E-07		-19,46	0,2765	0,1075	75,19	87	0,1864	0,5000		-17,66
	NR	2,57	0,0880	0,8913	-7,4E-07		-17,66	0,2765	0,1075	75,19	87	0,0000	0,4061		(NR)
Vegetação e Dens. Cons.	ucminf	118,692	0,2425	-0,0001	-3,4E-07		-1,07	0,4925	4,1E-06	71,31	100	0,4922	0,4862		-1,07
	NR	2,88	0,1979	0,2178	-0,00001		-9,63	0,4204	0,1457	73,54	89	0,0431	0,4584		(ucminf)
Vegetação e Área Conc.	ucminf	1,48	0,0862	0,5983	1,0E-06		-19,02	0,2434	0,1643	78,87	69	0,2748	0,5000		-17,73
	NR	1,48	0,0862	0,5983	-0,4E-06		-17,73	0,2434	0,1643	79,79	69	0,0000	0,1308		(NR)
Vegetação Alta e Vegetação	ucminf	3,698.023	0,2425	-5,2E-05	2,5E-05		-1,06	0,4925	1,3E-07	71,31	100	0,4818	0,4941		-1,06
	NR	28	0,3302	-0,3415	-0,3644		-14,43	0,5742	0,0206	64,87	100	0,2491	0,2608		(ucminf)
Vegetação Alta e Pavimentação	ucminf	867,995	0,2425	-1,7E-05	-4,3E-06		-1,06	0,4925	5,7E-07	71,31	100	0,4905	0,4942		-1,06
	NR	162	0,2453	-0,0138	-0,0130		-1,97	0,4952	0,0031	70,81	100	0,4327	0,2758		(ucminf)
Vegetação Alta, Vegetação e Dens. Cons.	ucminf	61,514	0,2425	-3,2E-04	-1,6E-05	-2,4E-07	-1,07	0,4925	8,0E-06	71,31	100	0,4658	0,4926	0,4840	-1,06
	NR	2,81	0,1795	0,8852	-0,0066	-0,0001	-7,33	0,3993	0,1419	75,10	89	0,0090	0,4841	0,2046	(ucminf)
Veg. Média, Pavimentação e Dens. Rede	ucminf	173,669	0,2318	0,0202	-0,1686	0,0306	0,32	0,4814	2,8E-06	70,87	100	0,0000	0,0000	0,0000	0,32
	NR	39	0,2332	-0,0066	-0,1644	0,0278	-1,08	0,4828	0,0124	70,38	100	0,4418	0,0007	0,2751	(ucminf)
Pavimentação, Veg. Baixa Dens. Rede	ucminf	233,089	0,2318	-0,1681	0,0774	0,0305	0,32	0,4814	2,1E-06	70,89	100	0,0000	0,0000	0,0000	0,32
	NR	35	0,2329	-0,0177	-0,1655	0,0279	-1,21	0,4824	0,0138	70,35	100	0,4554	0,0012	0,3040	(ucminf)
Pavimentação, Violência Dens. Rede	ucminf	132,501	0,2184	-0,1774	0,0004	0,0308	2,09	0,4673	3,5E-06	71,64	100	0,0000	0,0000	0,0000	0,32
	NR	12	0,2152	0,0011	-0,2377	0,0329	-1,37	0,4624	0,0379	71,11	99	0,1650	0,0121	0,3776	(ucminf)

O que se nota é que, como no caso do ajuste univariado mostrado com a variável Violência (ver **Figura 17**), não há uma tendência de reversão à média, embora a amplitude dos escores também seja reduzida: originalmente, os escores variam entre 22,46% e 100%, enquanto que, após o ajuste com as variáveis $z_1 =$ Vegetação Alta e $z_2 =$ Violência, a variação fica restrita ao intervalo de 28,66% e 93,28%. Os escores ajustados pelas variáveis **Vegetação Alta** e **Violência** por meio da abordagem condicional com o modelo *DEA + SFA* estão expostos na **Figura 19**.

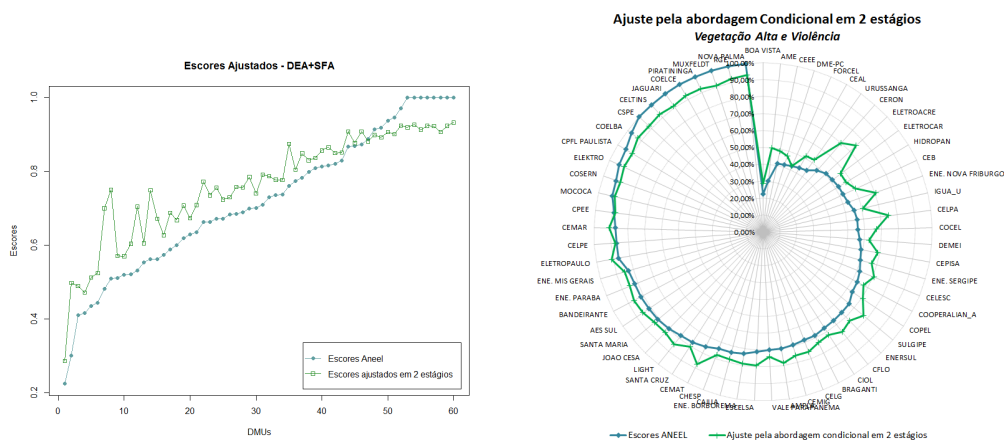


Figura 19 – Comparação dos escores, com DEA+SFA no 2º Estágio, variáveis Violência + Vegetação Alta

A conclusão sobre qual é o melhor modelo de segundo estágio depende de uma combinação de resultados: é importante que a verossimilhança seja maximizada, mas ao mesmo tempo, um ajuste que resulte em um valor elevado de verossimilhança não necessariamente significa que o modelo encontrado é consistente, já que é possível que quase todo (ou todo) o ajuste seja correspondente à ineficiência, u , não restando espaço para a correção pela variável ambiental.

Por isso, é importante analisar o valor de R_u^2 , que quanto mais próximo de 100%, menos impacto irá gerar nos escores corrigidos.

No modelo *DEA + SFA*, pode-se estimar R_u^2 através da relação entre σ_u e σ_v . É importante lembrar que a equação da log-verossimilhança do modelo resulta na estimação dos parâmetros σ e λ , e que os valores de σ_u e σ_v são calculados por meio da relação $\lambda = \sigma_u/\sigma_v$. Sendo assim, o ajuste do modelo se mostra muito sensível à estimação do parâmetro λ . É notório observar que os trabalhos com foco em ajuste em dois estágios tendem a avaliar o ajuste através da análise da consistência do parâmetro β , e ignoram a adequação dos demais parâmetros do modelo. Mesmo no trabalho de [Simar e Wilson \(2007\)](#), que usa a estrutura de variância de u e v iguais às aplicadas no modelo *DEA + SFA*, observa-se que os autores preocupam-se em analisar a consistência apenas do parâmetro β .

Uma análise da [Tabela 13](#) mostra que a estimação de λ é sensível ao método de estimação aplicado: o *ucminf* tende a atribuir valores de verossimilhança mais elevados aos modelos que o Newton-Raphson, mas, por outro lado, provém valores demasiadamente elevados para λ , o que torna a relação σ_u/σ_v pouco significativa e o ajuste dos escores quase nulo. Observe o modelo composto pelas variáveis ambientais **Vegetação Alta e Densidade de Consumidores**: o *ucminf* estimou um valor de λ de 118.692, o que jogou o valor de σ_v para próximo de zero ($4,1E - 06$), e, conseqüentemente, a média dos escores ajustados para 71,31%, mesmo valor da amostra original. O mesmo modelo, entretanto, quando estimado através do Newton-Raphson, tem um valor de λ de 2,88, o que gera um valor de σ_v mais próximo ao de σ_u e resulta em uma média de valores ajustados de 73,54%, ligeiramente superior à média da amostra. Por isso, uma análise do ajuste do modelo que considera apenas o valor da verossimilhança é limitada, porque ignora a informação dos parâmetros λ e σ da função ajustada.

Um modelo considerado adequado deveria, portanto, abranger pelo menos três aspectos:

- Um alto valor de verossimilhança;
- Valor de R_u^2 abaixo de 100%;
- Escores corrigidos coerentes à realidade enfrentada pelo setor analisado.

O terceiro aspecto importante para a avaliação do ajuste depende da opinião de especialistas do setor. Sendo assim, nesse trabalho são apresentados os ajustes efetuados conforme 10 modelos diferentes, que levam em consideração os dois primeiros aspectos desta lista. No [Apêndice B](#), os escores corrigidos por tais modelos estão expostos. Cabe a especialistas do setor definir qual dos ajustes é mais adequado à realidade enfrentada pelas empresas.

Tendo em vista a sensibilidade do modelo *DEA + SFA* à estimação do parâmetro λ , optou-se por avaliar outros modelos multivariados, que também pudessem ser considerados válidos. Foram analisadas todas as combinações possíveis de variáveis ambientais como alternativa ao modelo *DEA + SFA*. Assim como na [subseção 7.2.1](#), foram $2^{14} - 1 = 16.386$ combinações de variáveis a serem testadas. Foi utilizado o método de estimação por MLE do algoritmo de Newton-Raphson, que foi o que apresentou estimações de parâmetros mais consistentes nos casos univariados. Dos 16.383 modelos possíveis, 1.961 deles não convergiram a um resultado possível

com a aplicação do algoritmo NR. Por isso, os resultados analisados na [Figura 20](#) correspondem aos 14.422 modelos que convergiram.

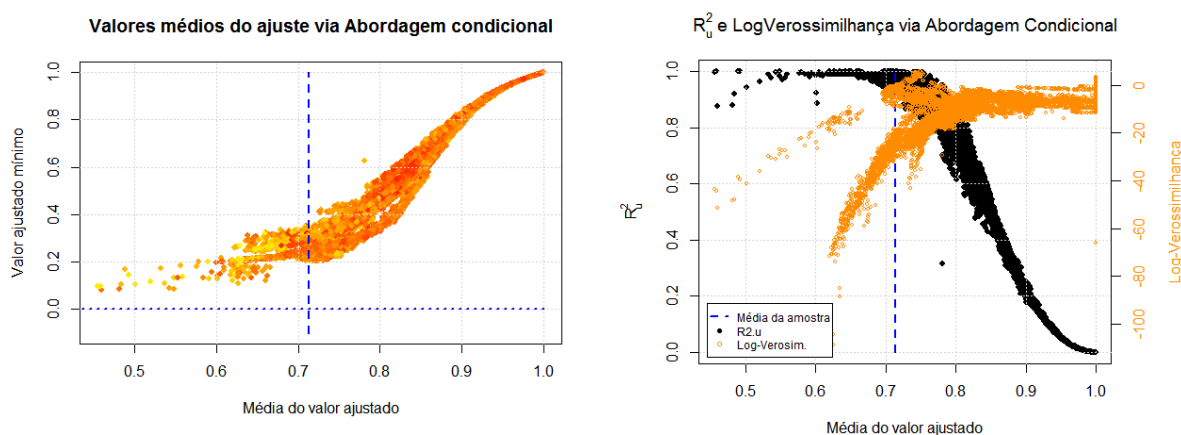


Figura 20 – Resultados da abordagem condicional multivariada do modelo *DEA + SFA*

Diferentemente do que foi observado na [Figura 15](#), pode-se notar que os ajustes através da abordagem condicional não têm uma tendência de reversão à média dos valores observados, já que há modelos cujo valor de $E(\hat{\theta})$ vai de 45,5% até 100% (parte (a) da [Figura 20](#)). Na estimação por OLS e TOBIT, os modelos multivariados concentraram o valor de $\hat{\theta}$ em torno da média observada dos escores, de 71,31%. Ainda analisando essa figura, pode-se concluir que o modelo *DEA + SFA* é consistente, já que não gera resultados estimados inferiores a zero.

A parte (b) da [Figura 20](#) mostra o cruzamento das informações acerca do R_u^2 e do valor da log-verossimilhança, que mostra a adequação do modelo. O ajuste em dois estágios do modelo da ANEEL teria como objetivo aumentar o valor esperado de θ , uma vez que a ideia central é corrigir as distorções causadas pelas variáveis ambientais. Então, todos os modelos plotados no gráfico à direita da linha que representa a média do modelo da ANEEL (71,31%) seriam, de alguma maneira, interessantes. Além disso, são interessantes também aqueles modelos cujo valor de R_u^2 é inferior a 1. Quanto maior o valor da log-verossimilhança, mais ajustado o modelo se mostra. Então, se considerarmos todas essas avaliações, o gráfico (b) da [Figura 20](#) teria como modelos viáveis todos os pontos que estão no quadrante que do eixo X vai de 0,71 até 0,8 e no eixo Y vai de 0,8 até 1,0.

Essa constatação mostra que a abordagem condicional com o modelo *DEA + SFA* pode gerar um grande número de soluções consideradas viáveis pelo regulador. Assim como observado no caso multivariado do TOBIT e OLS, o lado positivo disso é a flexibilidade que o regulador passa a ter para escolher um modelo adequado. O lado negativo é justamente referente à arbitrariedade possível de ser aplicada, já que o regulador pode escolher o modelo que seja mais conveniente ao seu objetivo final.

7.2.3 Resultado da Estimação em 3 estágios

Uma terceira avaliação apresentada é a análise em três estágios, proposta por [Estelle, Johnson e Ruggiero \(2010\)](#). Nesta abordagem, os autores utilizam o resultado da análise de

segundo estágio para recalcular o escore de eficiência, em um terceiro estágio. A mudança na função objetivo, conforme mostrado na Equação 4.20, basicamente restringe o conjunto de empresas comparadas à DMU k em análise, evitando que aquelas que têm escore predito (ou índice de severidade), ξ_j , maior que o da DMU tenham peso $\xi_j = 0$ na composição do índice θ_k .

A análise em 3 estágios foi rodada de 3 maneiras diferentes: na primeira, o valor de ξ foi calculado através de OLS, no segundo, ξ foi estimado através de Tobit, e no terceiro, foi utilizada a abordagem condicional, com o modelo $DEA + SFA$ para o cálculo de ξ . Além disso, foi selecionado um dos modelos multivariados que se mostrou válido, conforme descrito na subseção 7.2.2.3. Nesse caso, foi escolhido o modelo que tem como variáveis ambientais $z_1 = \mathbf{Vegetação Alta}$ e $z_2 = \mathbf{Violência}$. Um resumo dos resultados da estimação em 2 estágios por OLS, TOBIT e Abordagem Condicional encontra-se na Tabela 14.

Tabela 14 – Resultados do segundo estágio para o modelo com $z=[\mathbf{Vegetação Alta}; \mathbf{Violência}]$

Método do 2º Estágio	$E(\hat{\theta})$	p-valor β_1	p-valor β_2	R^2	R_u^2	LogLk
OLS	71,31%	0,0199	0,2107	0,0962		
TOBIT	72,42%	0,0206	0,1741			2,09
Condicional ($DEA + SFA$)	76,29%	0,0520	0,3049		0,8934	-6,11

O resultado da aplicação dos três estágios para cada um dos métodos de 2º Estágio pode ser visualizado nas Figuras 21, 22 e 23.

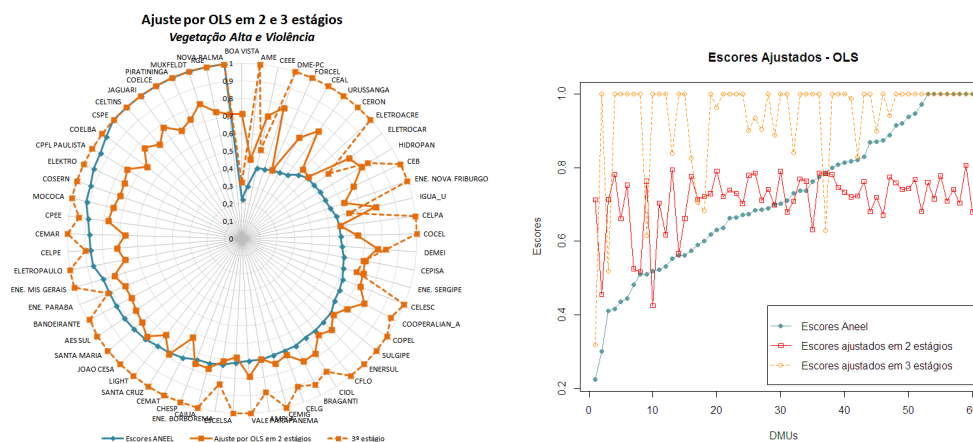


Figura 21 – Comparação dos escores, com OLS no 2º Estágio

O que se pode observar é que o 3º estágio, conforme Estelle, Johnson e Ruggiero (2010) propõem, ajuda a minimizar o problema observado de reversão à média com a aplicação de OLS e TOBIT. As médias dos valores estimados foram, nesse caso, de 93,79% e 93,90%, respectivamente. Entretanto, quando o terceiro estágio foi aplicado para correção da estimação através da abordagem condicional, observa-se que quase todos os escores foram jogados para a fronteira. Como nessa abordagem o segundo estágio aumentou a maioria dos escores, fazendo com que ξ_j se tornasse um valor relativamente alto, poucas DMUs tornaram-se comparáveis às DMUs analisadas em cada iteração do modelo.

O resultado obtido com a aplicação da análise em 3 estágios é semelhante ao observada por

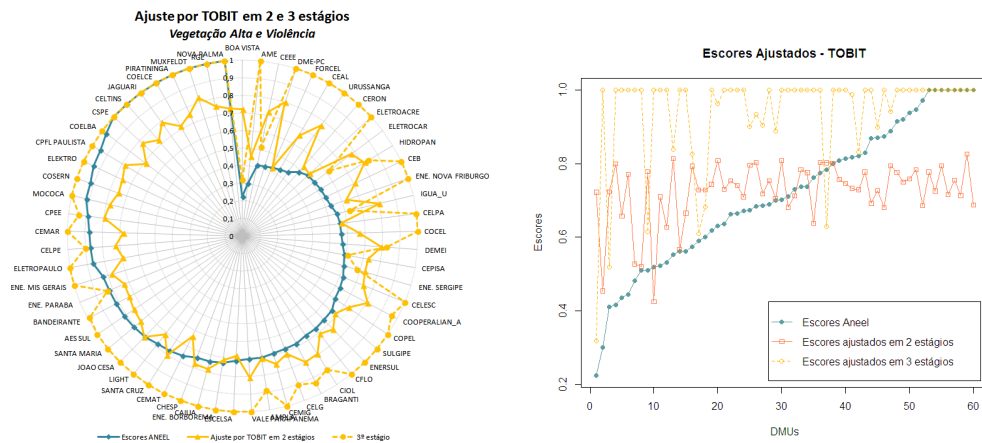


Figura 22 – Comparação dos escores, com TOBIT no 2º Estágio

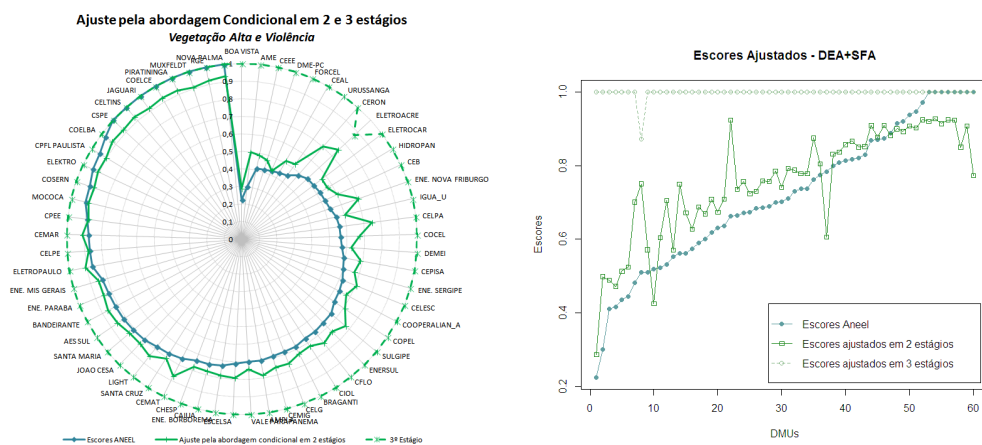


Figura 23 – Comparação dos escores, com DEA+SFA no 2º Estágio

Amundsveen et al. (2014) quando da aplicação do ajuste das variáveis ambientais em um estágio, conforme proposição de Banker e Morey (1986): os escores ajustados são superestimados, já que o modelo DEA passa a rodar com uma base de comparação entre DMUs menor. O Regulador Norueguês descartou o ajuste em um estágio, por considerar que os escores superestimados não condizem com a realidade do setor. Esse também parece ser o que ocorre quando da aplicação da análise em 3 estágios, já que o grande número de DMUs que passam a figurar na fronteira de eficiência não parece coerente com a realidade do setor.

8 Conclusão

Esse trabalho teve como objetivo analisar o impacto do ajuste em 2 estágios nos escores de eficiência calculados através da metodologia não-paramétrica *Data Envelopment Analysis*. Foram utilizados para esse fim os dados do 4CRTP da ANEEL, referentes às empresas brasileiras de distribuição de energia.

Para que esse objetivo fosse alcançado, foi necessário fazer, primeiramente, uma análise exploratória do modelo DEA proposto pela ANEEL nas NTs 407/2014-SRE/ANEEL e 66/2015-SMR/SGT/ANEEL. O intuito desse primeiro estudo era identificar a necessidade da inclusão de uma análise de segundo estágio no modelo proposto. Verificou-se que os dados de produtos e insumos utilizados pelo regulador possuem uma alta dispersão, mesmo quando agregados em médias trienais, o que sugere que pode haver uma diferença no ambiente ao qual as concessionárias estão expostas.

Além disso, apesar de o regulador argumentar na NT 407/2014-SRE/ANEEL que não encontrou significância estatística entre os escores de eficiência gerados pelo DEA e as variáveis ambientais, não é apresentada nenhuma análise que comprove isso. Na análise exploratória realizada, algumas das variáveis ambientais apresentam coeficiente de correlação de *pearson* na casa dos 30%, como é o caso de Precipitação, Vegetação e Vegetação Alta. Para fins de análise de segundo estágio, esses são coeficientes de correlação que não podem ser desprezados.

A análise de segundo estágio foi realizada através da aplicação de diferentes métodos de estimação paramétricos, com o intuito de identificar o impacto que cada um deles pode causar nos escores corrigidos. As 5 técnicas aplicadas foram: (i) Mínimos Quadrados (*Ordinary Least Squares* - OLS), (ii) Regressão Tobit, (iii) Abordagem condicional ao erro observado com modelo de [Banker e Natarajan \(2008\)](#), (iv) Abordagem condicional ao erro observado com modelo de [Banker e Natarajan \(2008\)](#) adaptado à estrutura do SFA, conforme modelo de [Simar e Wilson \(2007\)](#), (v) Correção dos escores em 3 estágios. A primeira e a segunda técnicas são amplamente utilizadas na literatura a respeito, inclusive com evidências em alguns trabalhos de que essas são técnicas capazes de gerar bons estimadores aos parâmetros das variáveis ambientais. A técnica (iii) corresponde à aplicação do método proposto por [Banker e Natarajan \(2008\)](#), considerando o mesmo modelo de distribuição do erro dos autores e também o mesmo método de estimação proposto, a Máxima Verossimilhança. A técnica (iv) diz respeito a uma adaptação do trabalho de [Banker e Natarajan \(2008\)](#) e [Simar e Wilson \(2007\)](#): utilizou-se o modelo de estrutura de variância de [Simar e Wilson \(2007\)](#), baseado no SFA, e o método de estimação usado por [Banker e Natarajan \(2008\)](#), a Máxima Verossimilhança, como no caso anterior. A quinta técnica foi testada em um caso multivariado, com resultados de segundo estágio gerados por três das quatro técnicas anteriormente descritas, em uma análise em 3 estágios proposta por [Estelle, Johnson e Ruggiero \(2010\)](#).

Como resultado, pôde-se observar que o ajuste em 2 estágios através de OLS e TOBIT tende a levar o valor esperado do escore corrigido à média das observações. Esse resultado foi

obtido nas análises univariadas e também nos 16.383 modelos multivariados possíveis. Um modelo difere do outro principalmente pela amplitude dos escores de eficiência observados. Mas em geral, há uma gama muito grande de modelos que poderiam ser considerados viáveis quando da aplicação de TOBIT e OLS.

Cabe ressaltar que essas são as duas técnicas mais citadas na literatura a respeito. O ajuste por OLS, com algumas adaptações, é a técnica utilizada pelo único regulador de distribuição de energia que realiza análise de segundo estágio, a Noruega (LOPES; MESQUITA, 2015).

A abordagem condicional baseia-se na ideia de que o erro da estimação observado, ε , é decomposto em três componentes: uma que representa o impacto das variáveis ambientais, βz , outro que corresponde à ineficiência gerencial, v , e um terceiro que diz respeito à ineficiência gerencial, u . O objetivo, então, é mensurar a ineficiência gerencial, dado o erro observado, $u|\varepsilon$.

Foram testados dois modelos para essa abordagem: o primeiro, proposto por Banker e Natarajan (2008), onde $v_i \sim NT(0, \sigma_v^2, V^M)$ e $u_i \sim Gamma(2, \varphi)$, chamado no trabalho de *DEA + BN*, e outro modelo com a estrutura das distrições da ineficiência e do ruído conforme a proposição do modelo SFA, onde $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$ e $u_i \sim N_+(0, \sigma_u^2)$. Esse último modelo foi chamado no trabalho de *DEA + SFA*, porque se baseia na estrutura do erro observada no método paramétrico SFA, conforme Simar e Wilson (2007).

Foram testados diferentes métodos de estimação de parâmetros para ambos os modelos. Banker e Natarajan (2008) sugerem que a estimação dos parâmetros do modelo seja feita por Máxima Verossimilhança (MLE). O modelo *DEA + SFA* foi estimado pelo algoritmo clássico de MLE, o de Newton-Raphson (NR). Entretanto, a dificuldade em computar matrizes de derivadas de primeira e segunda ordem do modelo *DEA + BN* fez com que outras técnicas de estimação fossem testadas, como o algoritmo BFGS e algumas adaptações dele.

Foi realizado um estudo de simulação para mostrar a consistência das técnicas de estimação de parâmetros NR e BFGS (e algumas adaptações delas) a ambos os modelos. Concluiu-se que ambos os métodos, assim como as suas adaptações, eram capazes de gerar estimadores de parâmetros consistentes. Para o modelo *DEA + SFA*, optou-se por utilizar o algoritmo de Newton-Raphson, que foi o que apresentou valores estimados mais próximos ao verdadeiro valor no estudo de simulação. Já para o modelo *DEA + BN*, optou-se por utilizar o algoritmo BFGS como técnica de estimação, visto que este foi o que apresentou valores estimados mais próximos aos parâmetros reais no estudo de simulação.

Definidas as técnicas de estimação, foi realizada uma análise univariada com todas as variáveis ambientais para o modelo *DEA + SFA* e também para o modelo *DEA + BN*. Constatou-se que nenhuma variável ambiental foi capaz de promover mudança significativa no valor esperado do escore de eficiência, quando utilizado o modelo *DEA + SFA*. O modelo *DEA + BN* apresentou ajustes nos escores um pouco mais significativos para as variáveis **Declividade**, **Vegetação** e **Violência**. Entretanto, quando o ajuste do modelo *DEA + BN* foi comparado ao ajuste gerado com o modelo *DEA + SFA*, pôde-se notar que o segundo foi capaz de gerar valores de log-verossimilhança superiores ao primeiro. Isso significa que a estrutura do erro ε proposta por Banker e Natarajan (2008) não é melhor que a estrutura de ε utilizada no SFA e também por

Simar e Wilson (2007).

Com a estrutura do erro do SFA, foi feita uma análise multivariada, contemplando todas as combinações possíveis das variáveis ambientais. A conclusão é que, tendo em vista a representatividade da variância da ineficiência no modelo (R_u^2), o valor de log-verossimilhança e o valor esperado do escore corrigido, há um número grande de combinações de variáveis capazes de gerar ajustes viáveis. A vantagem da abordagem condicional, tanto no caso univariado quanto no multivariado, é que ela gera ajustes mais suaves nos escores de eficiência, sem necessariamente empurrar os valores corrigidos para a média dos valores observados. Contudo, o grande número de modelos viáveis torna o trabalho do regulador bastante subjetivo, e pouco objetivo, no que diz respeito à seleção de um modelo que represente a realidade das empresas.

É importante mencionar que a escolha do modelo de segundo estágio mais adequado depende não só da qualidade do ajuste (log-verossimilhança máxima), mas também da relação entre σ_u e σ_v , expressa pela variável λ e calculada no índice R_u^2 . Por isso, a consistência da estimação do parâmetro λ é de grande importância para a validação do modelo. Não foi escopo deste estudo uma análise apurada da estimação de λ , mas sugere-se que em trabalhos futuros, seja incluída uma avaliação do intervalo de confiança do parâmetro em detrimento do seu respectivo valor estimado.

Por fim, ressalta-se que a escolha melhor modelo de segundo estágio deve considerar, ainda, a opinião de especialistas do setor analisado, capazes de identificar distorções geradas pelo ajuste.

A análise em três estágios foi realizada com um modelo multivariado, que atendia aos critérios de viabilidade sugeridos para o modelo *DEA + SFA* de abordagem condicional. Foi escolhido um modelo com as variáveis ambientais **Vegetação Alta** e **Violência**. Quando o terceiro estágio foi condicionado à aplicação de OLS e TOBIT no segundo estágio, observou-se que o resultado final foi semelhante: a média dos escores corrigidos subiu de 71,31% para 93%. A aplicação do terceiro estágio após a análise condicional no segundo estágio não gerou resultados coerentes: quase todas as DMUs foram consideradas eficientes.

Estelle, Johnson e Ruggiero (2010) não provêm uma análise estatística muito profunda acerca da adequação do seu modelo proposto. Então, a adequação do mesmo pode ser analisada do ponto de vista da coerência dos escores corrigidos. A aplicação do terceiro estágio tendo como segundo estágio a abordagem condicional não parece fazer muito sentido, já que restringe demais o grupo de DMUs analisadas em cada iteração do modelo, jogando muitas delas para a fronteira. Quando são utilizados TOBIT e OLS no segundo estágio, nota-se que o terceiro estágio corrige o problema de reversão à média observado inicialmente.

Pode-se concluir que as abordagens de segundo estágio tradicionais, TOBIT e OLS, geram ajustes pouco aderentes à realidade das empresas, apenas buscando concentrar seus escores de eficiência em torno da média dos escores observados. A abordagem condicional, por outro lado, consegue separar a ineficiência do ruído, e provê ajustes mais suaves aos escores. O modelo *DEA + SFA* conta ainda com uma estrutura para o erro observado ϵ que permite uma série de interpretações acerca da relação entre ruído e ineficiência.

É importante mencionar que, tanto no ajuste por OLS e TOBIT, quanto no ajuste pela abordagem condicional, há diversas combinações de variáveis capazes de gerar escores de eficiência coerentes. Então, a escolha do modelo adequado depende da interpretação do analista.

Por fim, cabe a discussão acerca do papel do regulador ou analista na escolha de um modelo ideal: visto que, como mencionado, há uma grande variedade de modelos em dois estágios viáveis, com diferentes variáveis e efeitos nos escores corrigidos, o conhecimento sobre a realidade do setor se mostra imprescindível para que a escolha final seja adequada. Em uma visão mais ampla, uma análise em dois estágios gera tantos resultados possíveis, que o analista poderia definir como válido aquele modelo que melhor atendesse a interesses específicos. Então, a comparação do modelo gerado depois do ajuste com a realidade enfrentada pelas empresas analisadas deve ser mais um critério a ser considerado no processo de tomada de decisão.

Para trabalhos futuros, sugere-se os seguintes pontos:

- Uma avaliação dos métodos de estimação estudados tendo em vista um modelo de primeiro estágio mais adequado à literatura que aquele proposto pela ANEEL na NT 66/2015;
- A avaliação de outras variáveis ambientais que não são citadas pelo regulador;
- A avaliação da adequação da estimação do parâmetro λ , considerando seu intervalo de confiança;
- A definição de uma métrica que congregue os principais itens relevantes para o ajuste dos escores, como a verossimilhança, o valor de R_u^2 e a adequação à realidade do setor.

No que diz respeito ao modelo proposto pela ANEEL para o 4CRTP, uma análise em dois estágios poderia ser utilizada para efetuar uma correção às distorções observadas. Entretanto, nenhuma análise de segundo estágio é capaz de melhorar um modelo que na sua origem carrega falhas conceituais. Por isso, uma revisão do modelo proposto no primeiro estágio, considerando aspectos mencionados na análise exploratória e outros pontos, deveria gerar escores mais robustos que, se submetidos a uma análise de segundo estágio, aí sim, poderiam refletir a realidade do setor.

Referências

- ABRADEE. 2014. Acessado em: 21-11-2014. Disponível em: <<http://www.abradee.com.br/setor-eletrico/visao-geral-do-setor>>. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 22.
- AIGNER, D.; LOVELL, C. K.; SCHMIDT, P. Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 6, n. 1, p. 21–37, 1977. Citado na página 66.
- AMUNDSVEEN, R. et al. Second stage adjustment for firm heterogeneity in dea: A novel approach used in regulation of norwegian electricity dsos. In: *Proceedings of the 12th International Conference of DEA*. [S.l.: s.n.], 2014. Citado 3 vezes nas páginas 55, 76 e 94.
- ANEEL. 2006. Acessado em: 24-11-2014. Disponível em: <http://www.aneel.gov.br/arquivos/PDF/NT_Empresa%20de%20Refer%C3%Aancia.pdf>. Citado na página 25.
- ANEEL. 2007. Acessado em: 21-11-2014. Disponível em: <http://www.aneel.gov.br/biblioteca/Perguntas_e_Respostas.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- ANEEL. Nota Técnica, *Proposta de Aprimoramento das metodologias de revisao tarifaria - Introducao e Proposicoes gerais*. 2014a. Citado na página 24.
- ANEEL. Nota Técnica, *Analise de Eficiencia dos Custos Operacionais das Distribuidoras de Energia Eletrica*. 2014b. Citado 3 vezes nas páginas 57, 59 e 73.
- ANEEL. 2014c. Acessado em: 28-11-2014. Disponível em: <http://www.aneel.gov.br/area.cfm?id_area=19>. Citado na página 21.
- ANEEL. Nota Técnica, *Metodologia de Custos Operacionais - AP 023/2014 - 2a. Fase*. 2014d. Citado 6 vezes nas páginas 57, 58, 59, 60, 62 e 73.
- ANEEL. Nota Técnica, *Metodologia de Custos Operacionais - AP 023/2014 - Final*. 2015. Citado 4 vezes nas páginas 25, 57, 58 e 69.
- ANEEL. 2015b. Acessado em: 02-10-2015. Disponível em: <<http://www.aneel.gov.br/area.cfm?idArea=725>>. Citado na página 75.
- BANKER, R. D. Estimating most productive scale size using data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 17, n. 1, p. 35–44, 1984. Citado na página 36.
- BANKER, R. D. Maximum likelihood, consistency and data envelopment analysis: a statistical foundation. *Management science*, INFORMS, v. 39, n. 10, p. 1265–1273, 1993. Citado na página 39.
- BANKER, R. D.; CHARNES, A.; COOPER, W. W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, INFORMS, v. 30, n. 9, p. 1078–1092, 1984. Citado 4 vezes nas páginas 36, 37, 39 e 41.
- BANKER, R. D.; MOREY, R. C. Efficiency analysis for exogenously fixed inputs and outputs. *Operations Research*, INFORMS, v. 34, n. 4, p. 513–521, 1986. Citado 3 vezes nas páginas 40, 55 e 94.

- BANKER, R. D.; NATARAJAN, R. Evaluating contextual variables affecting productivity using data envelopment analysis. *Operations research, INFORMS*, v. 56, n. 1, p. 48–58, 2008. Citado 18 vezes nas páginas 6, 7, 15, 17, 34, 39, 40, 48, 50, 51, 53, 65, 66, 80, 83, 87, 95 e 96.
- BJUREK, H.; KJULIN, U.; GUSTAFSSON, B. Efficiency, productivity and determinants of inefficiency at public day care centers in sweden. *The Scandinavian Journal of Economics*, JSTOR, p. S173–S187, 1992. Citado na página 41.
- BOGETOFT, P. *Performance Benchmarking: Measuring and Managing Performance*. [S.l.]: Springer, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 30, 31, 32, 34, 35 e 36.
- BOGETOFT, P. *Comments on the Brazilian benchmarking model for energy distribution regulation. Forth cycle of tariff review, NT 192 2014*. [S.l.], 2014a. Citado 3 vezes nas páginas 26, 72 e 74.
- BOGETOFT, P. Benchmarking with regulatory applications. In: UFMG. [S.l.], 2014b. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 72.
- BOGETOFT, P.; OTTO, L. *Benchmarking with DEA, SFA, and R*. [S.l.]: Springer, 2010. Citado 8 vezes nas páginas 27, 28, 32, 33, 34, 60, 62 e 72.
- BRAEUTIGAM, R. R.; PANZAR, J. C. Effects of the change from rate-of-return to price-cap regulation. *The American Economic Review*, JSTOR, p. 191–198, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- CCEE. 2014a. Acessado em: 21-11-2014. Disponível em: <http://www.ccee.org.br/portal/faces/pages_publico/onde-atuamos/setor_eletrico?_adf.ctrl-state=54b1awzke_4&_afLoop=1026145799512502#%40%3F_afLoop%3D1026145799512502%26_adf.ctrl-state%3D1105l9bvvi_4>. Citado na página 20.
- CCEE. 2014b. Acessado em: 28-11-2014. Disponível em: <http://www.ccee.org.br/portal/faces/pages_publico/onde-atuamos/comercializacao?_adf.ctrl-state=2iw7cy9rl_46&_afLoop=1653712116498072>. Citado na página 21.
- CHARNES, A.; COOPER, W. An explicit general solution in linear fractional programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, Wiley Online Library, v. 20, n. 3, p. 449–467, 1973. Citado na página 38.
- CHARNES, A.; COOPER, W. W. Programming with linear fractional functionals. *Naval Research logistics quarterly*, Wiley Online Library, v. 9, n. 3-4, p. 181–186, 1962. Citado na página 38.
- CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 2, n. 6, p. 429–444, 1978. Citado 6 vezes nas páginas 36, 37, 38, 41, 52 e 72.
- CLEVELAND, W. S. Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots. *Journal of the American statistical association*, Taylor & Francis Group, v. 74, n. 368, p. 829–836, 1979. Citado na página 54.
- COOK, W. D.; ZHU, J. *Data envelopment analysis: Modeling operational processes and measuring productivity*. [S.l.]: CreateSpace Charleston, SC, 2008. Citado na página 31.
- DYSON, R. G. et al. Pitfalls and protocols in dea. *European Journal of operational research*, Elsevier, v. 132, n. 2, p. 245–259, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.

ESTELLE, S. M.; JOHNSON, A. L.; RUGGIERO, J. Three-stage dea models for incorporating exogenous inputs. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 37, n. 6, p. 1087–1090, 2010. Citado 12 vezes nas páginas 6, 7, 36, 41, 54, 55, 65, 67, 92, 93, 95 e 97.

FARRELL, M. J. The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, JSTOR, p. 253–290, 1957. Citado 5 vezes nas páginas 27, 30, 32, 33 e 34.

FØRSUND, F. R. Weight restrictions in dea: misplaced emphasis? *Journal of Productivity Analysis*, Springer, v. 40, n. 3, p. 271–283, 2013. Citado na página 61.

GSTACH, D. Another approach to data envelopment analysis in noisy environments: Dea+. *Journal of Productivity Analysis*, Springer, v. 9, n. 2, p. 161–176, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 52.

HIRSCHEY, M. *Managerial economics*. [S.l.]: Cengage Learning, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 28, 29, 30 e 31.

HOFF, A. Second stage dea: Comparison of approaches for modelling the dea score. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 181, n. 1, p. 425–435, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 39, 47, 48 e 50.

Instituto Acende Brasil. *Tarifas de Energia e os Benefícios da Regulacao por incentivos*. 3. ed. [S.l.], 2011. Acessado em 21-11-2014. Disponível em: <http://www.acendebrasil.com.br/media/estudos/2011_WhitePaper_03_AcendeBrasil_Rev2.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

IPEA. 2015. Acessado em: 28-01-2014. Disponível em: <<http://www.ipeadata.gov.br>>. Citado na página 16.

JOHNSON, A. L.; KUOSMANEN, T. One-stage and two-stage dea estimation of the effects of contextual variables. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 220, n. 2, p. 559–570, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 51.

LAFFONT, J.-J.; TIROLE, J. The regulation of multiproduct firms: Part i: Theory. *Journal of Public Economics*, Elsevier, v. 43, n. 1, p. 1–36, 1990. Citado na página 23.

LISTON, C. Price-cap versus rate-of-return regulation. *Journal of Regulatory Economics*, Springer, v. 5, n. 1, p. 25–48, 1993. Citado na página 23.

LOPES, A. L. M.; MESQUITA, R. Tariff regulation of electricity distribution: A comparative analysis of regulatory benchmarking models. In: *14th European Workshop on Efficiency and Productivity Analysis*. [S.l.: s.n.], 2015. Citado 3 vezes nas páginas 60, 76 e 96.

MAS-COLELL, A. et al. *Microeconomic theory*. [S.l.]: Oxford university press New York, 1995. Citado 6 vezes nas páginas 27, 28, 29, 30, 31 e 32.

MCDONALD, J. Using least squares and tobit in second stage dea efficiency analyses. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 197, n. 2, p. 792–798, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 39, 40, 41, 47 e 48.

Ministerio de Minas e Energia. 2014. Acessado em: 21-11-2014. Disponível em: <http://www.editoracanalenergia.com.br/10anos/Pacote/Proj_RESEB.pdf>. Citado na página 20.

MONTGOMERY, D. C.; PECK, E. A.; VINING, G. G. *Introduction to linear regression analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 43, 45 e 49.

- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. *Numerical optimization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. Citado na página 56.
- OUM, T. H.; YU, C. Economic efficiency of railways and implications for public policy: A comparative study of the oecd countries' railways. *Journal of transport economics and policy*, JSTOR, p. 121–138, 1994. Citado na página 41.
- Package ucminf. 2015. Acessado em: 28-09-2015. Disponível em: <<https://cran.r-project.org/web/packages/ucminf/ucminf.pdf>>. Citado na página 68.
- PAPKE, L. E.; WOOLDRIDGE, J. *Econometric methods for fractional response variables with an application to 401 (k) plan participation rates*. [S.l.]: National Bureau of Economic Research Cambridge, Mass., USA, 1996. Citado na página 41.
- PODINOVSKI, V. Production trade-offs and weight restrictions in data envelopment analysis. *Journal of the Operational Research Society*, Nature Publishing Group, v. 55, n. 12, p. 1311–1322, 2004. Citado na página 60.
- RAMALHO, E. A.; RAMALHO, J. J.; HENRIQUES, P. D. Fractional regression models for second stage dea efficiency analyses. *Journal of Productivity Analysis*, Springer, v. 34, n. 3, p. 239–255, 2010. Citado na página 50.
- RAY, S. C. Data envelopment analysis, nondiscretionary inputs and efficiency: an alternative interpretation. *Socio-Economic Planning Sciences*, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 167–176, 1988. Citado 8 vezes nas páginas 17, 39, 40, 41, 42, 43, 44 e 52.
- RAY, S. C. Resource-use efficiency in public schools: a study of connecticut data. *Management Science*, INFORMS, v. 37, n. 12, p. 1620–1628, 1991. Citado 8 vezes nas páginas 17, 40, 41, 45, 46, 47, 48 e 50.
- RAY, S. C.; GHOSE, A. Production efficiency in indian agriculture: An assessment of the post green revolution years. *Omega*, Elsevier, v. 44, p. 58–69, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 37, 39 e 40.
- RUGGIERO, J. On the measurement of technical efficiency in the public sector. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 90, n. 3, p. 553–565, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 40.
- SEVERINI, T. A. *Likelihood methods in statistics*. [S.l.]: Peterson's, 2000. Citado na página 49.
- SIMAR, L.; WILSON, P. W. Estimation and inference in two-stage, semi-parametric models of production processes. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 136, n. 1, p. 31–64, 2007. Citado 15 vezes nas páginas 15, 17, 40, 41, 50, 53, 65, 66, 67, 76, 83, 91, 95, 96 e 97.
- SIMAR, L.; WILSON, P. W. Two-stage dea: caveat emptor. *Journal of Productivity Analysis*, Springer, v. 36, n. 2, p. 205–218, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 53.
- TAHA, H. A. *Pesquisa Operacional: uma visão geral*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2008. Citado na página 38.
- The R Project. 2015. Acessado em: 28-09-2015. Disponível em: <<https://www.r-project.org/>>. Citado na página 67.
- THOMPSON, R. G.; DHARMAPALA, P.; THRALL, R. M. Importance for dea of zeros in data, multipliers, and solutions. *Journal of Productivity Analysis*, Springer, v. 4, n. 4, p. 379–390, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 72.

TOBIN, J. Estimation of relationships for limited dependent variables. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 24–36, 1958. Citado na página 47.

VGAM. 2015. Acessado em: 28-09-2015. Disponível em: <<https://www.cran.r-project.org/web/packages/VGAM/index.html>>. Citado na página 68.

YU, W.; JAMASB, T.; POLLITT, M. Does weather explain cost and quality performance? an analysis of uk electricity distribution companies. *Energy Policy*, Elsevier, v. 37, n. 11, p. 4177–4188, 2009. Citado na página 40.

Apêndices

APÊNDICE A – Cálculo da Densidade conjunta de uma Normal Truncada e uma Gamma

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes, $X \sim \text{Normal Truncada}$ ($\mu = 0, \sigma^2, V^M$) e $Y \sim \text{Gamma}$ ($2, \lambda$). Sejam $f_Y(y)$ e $f_X(x)$ as densidades de probabilidade de Y e X , respectivamente,

$$f_Y(y) = \frac{y e^{-\frac{y}{\lambda}}}{\lambda^2}, \quad y > 0, \quad \lambda > 0 \quad (\text{A.1})$$

A acumulada $F_Y(y)$ é definida como:

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}y} \left(1 + \frac{1}{\lambda}y \right) \quad (\text{A.2})$$

E a densidade de X é definida como:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{V^M}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{V^M}{\sigma}\right)}, \quad -V^M < x < V^M. \quad (\text{A.3})$$

Queremos calcular a densidade da soma $Z = X + Y$. Uma análise dos limites para os quais as densidades $f_Y(y)$ e $f_X(x)$ apresentam valores não nulos permitem, inicialmente, definir a distribuição acumulada, $F_Z(z)$ como:

$$F_Z(z) = \begin{cases} \int_{-V^M}^{+V^M} f_X(x) \cdot F_Y(z-x) dx, & z > V^M \\ \int_{-V^M}^z f_X(x) \cdot F_Y(z-x) dx, & -V^M < z \leq V^M \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Dessa forma, a densidade pode ser escrita como:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{d}{dz} \int_{-V^M}^{+V^M} f_X(x) \cdot F_Y(z-x) dx, & z > V^M \\ \frac{d}{dz} \int_{-V^M}^z f_X(x) \cdot F_Y(z-x) dx, & -V^M < z \leq V^M \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Inicialmente, vamos calcular a distribuição acumulada $F_Z(z)$, para o caso genérico.

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}y} \left(1 + \frac{1}{\lambda}y \right) \quad (\text{A.6})$$

Então:

$$F_Y(z-x) = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} \left(1 + \frac{1}{\lambda}(z-x)\right) \quad (\text{A.7})$$

A forma genérica de $F_Z(z)$ pode ser escrita como:

$$F_Z(z) = \int_a^b \frac{1}{\sigma} \frac{\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{V^M}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-V^M}{\sigma}\right)} \cdot \left[1 - e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} \left(1 + \frac{1}{\lambda}(z-x)\right)\right] dx \quad (\text{A.8})$$

$$F_Z(z) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\Phi\left(\frac{V^M}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-V^M}{\sigma}\right)} \int_a^b \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \cdot \left[1 - e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} \left(1 + \frac{1}{\lambda}(z-x)\right)\right] dx \quad (\text{A.9})$$

$$F_Z(z) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\Phi\left(\frac{V^M}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-V^M}{\sigma}\right)} \int_a^b \left[\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} \frac{1}{\lambda}(z-x) \right] dx \quad (\text{A.10})$$

Fazendo $K = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\Phi\left(\frac{V^M}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-V^M}{\sigma}\right)}$, vem:

$$F_Z(z) = K \int_a^b \left[\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} \frac{1}{\lambda}(z-x) \right] dx \quad (\text{A.11})$$

$$F_Z(z) = K \int_a^b \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx + K \int_a^b \left[-\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} \frac{1}{\lambda}(z-x) \right] dx \quad (\text{A.12})$$

Onde,

$$\int_a^b \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx = \sigma \left[\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \right] \quad (\text{A.13})$$

Se $a = -V^M$ e $b = +V^M$, então:

$$\int_{-V^M}^{+V^M} \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx = \sigma \left[\Phi\left(\frac{+V^M}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-V^M}{\sigma}\right) \right] = \frac{1}{K} \quad (\text{A.14})$$

$$F_Z(z) = K \cdot \sigma \left[\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \right] + K \int_a^b \left[-\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} \frac{1}{\lambda}(z-x) \right] dx \quad (\text{A.15})$$

Simplificando a expressão anterior, obtém-se a seguinte forma:

$$F_Z(z) = K \cdot \sigma \left[\Phi \left(\frac{b}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{a}{\sigma} \right) \right] - K \left(1 + \frac{z}{\lambda} \right) \int_a^b \left[\Phi \left(\frac{x}{\sigma} \right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} \right] dx \quad (\text{A.16})$$

$$+ K \frac{1}{\lambda} \int_a^b \left[x \cdot \Phi \left(\frac{x}{\sigma} \right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} \right] dx$$

Analisando o segundo termo da equação, temos:

$$\int_a^b \Phi \left(\frac{x}{\sigma} \right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} dx = \int_a^b \Phi \left(\frac{x}{\sigma} \right) e^{-\frac{1}{\lambda}z + \frac{1}{\lambda}x} dx = e^{-\frac{z}{\lambda}} \int_a^b \Phi \left(\frac{x}{\sigma} \right) e^{\frac{x}{\lambda}} dx \quad (\text{A.17})$$

Utilizando a seguinte propriedade (já confirmada):

$$\Phi(bx) e^{\frac{\sigma^2}{2b^2}} \Phi \left(bx - \frac{a}{b} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$\int_a^b \Phi \left(\frac{x}{\sigma} \right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} dx = \sigma e^{\frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left[\Phi \left(\frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \Phi \left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right] e^{-\frac{z}{\lambda}} \quad (\text{A.19})$$

$$F_Z(z) = K \cdot \sigma \left[\Phi \left(\frac{b}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{a}{\sigma} \right) \right] - K \sigma \left(1 + \frac{z}{\lambda} \right) e^{\frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left[\Phi \left(\frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \Phi \left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right] e^{-\frac{z}{\lambda}} +$$

$$+ K \frac{1}{\lambda} \int_a^b \left[x \cdot \Phi \left(\frac{x}{\sigma} \right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} \right] dx \quad (\text{A.20})$$

Agora estamos interessados em desenvolver:

$$\int_a^b \left[x \cdot \Phi \left(\frac{x}{\sigma} \right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} \right] dx = e^{-\frac{z}{\lambda}} e^{\frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \int_a^b x \cdot \Phi \left(\frac{x}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) dx = e^{-\frac{z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \int_a^b x \cdot \Phi \left(\frac{x}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) dx \quad (\text{A.21})$$

Utilizando substituição de variáveis, e aplicando a propriedade: $\int_a^b u \cdot \Phi(u) du = -\Phi(u)|_a^b$, é possível demonstrar que:

$$\int_a^b x \cdot \Phi \left(\frac{x}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) dx = \sigma^2 \left[-\Phi \left(\frac{x}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right]_a^b + \frac{\sigma^2}{\lambda} \left[\Phi \left(\frac{x}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right]_a^b$$

$$= \sigma^2 \left[\Phi \left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \Phi \left(\frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right] + \frac{\sigma^3}{\lambda} \left[\Phi \left(\frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \Phi \left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right] \quad (\text{A.22})$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) = K \cdot \sigma \left[\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \right] - K\sigma \left(1 + \frac{z}{\lambda}\right) e^{\frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left[\Phi\left(\frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) \right] e^{\frac{-z}{\lambda}} + \\
 + K \frac{1}{\lambda} \int_a^b \left[x \cdot \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-\frac{1}{\lambda}(z-x)} \right] dx
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) = K \cdot \sigma \left[\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \right] - K\sigma \left(1 + \frac{z}{\lambda}\right) e^{\frac{-z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left[\Phi\left(\frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) \right] + \\
 + K \frac{1}{\lambda} e^{\frac{-z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left\{ \sigma^2 \left[\Phi\left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) - \Phi\left(\frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) \right] + \frac{\sigma^3}{\lambda} \left[\Phi\left(\frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) = K \cdot \sigma \left[\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \right] - K\sigma \left(1 + \frac{z}{\lambda}\right) e^{\frac{-z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left[\Phi\left(\frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) \right] + \\
 + K\sigma^2 \frac{1}{\lambda} e^{\frac{-z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left\{ \left[\Phi\left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) - \Phi\left(\frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) \right] + \frac{\sigma}{\lambda} \left[\Phi\left(\frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Considerando:

$$\begin{aligned}
 G(z, a, b) = K \cdot \sigma \left[\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \right] - K\sigma \left(1 + \frac{z}{\lambda}\right) e^{\frac{-z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left[\Phi\left(\frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) - Phi\left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) \right] + \\
 + K\sigma^2 \frac{1}{\lambda} e^{\frac{-z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left\{ \left[\Phi\left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) - \Phi\left(\frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) \right] + \frac{\sigma}{\lambda} \left[\Phi\left(\frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

Então:

$$F_Z(z) = \begin{cases} G(z, a = -V^M, b = +V^M), & z > V^M \\ G(z, a = -V^M, b = z), & -V^M < z \leq V^M \end{cases} \tag{A.27}$$

A função densidade de probabilidade, $f_Z(z)$, é calculada a partir da derivada da função acumulada:

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} \tag{A.28}$$

Então, para $z > V^M$,

$$f_Z(z) = \frac{dG(z, -V^M, +V^M)}{dz} \tag{A.29}$$

$$f_Z(z) = K \frac{\sigma}{\lambda^2} e^{\frac{-z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left(z - \frac{\sigma^2}{\lambda} \right) \left\{ \left[\Phi \left(\frac{+V^M}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \Phi \left(\frac{-V^M}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right] - \sigma \left[\Phi \left(\frac{-V^M}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \Phi \left(\frac{+V^M}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right] \right\} \quad (\text{A.30})$$

Para $-V^M < z \leq V^M$,

$$f_Z(z) = \frac{dG(z, -V^M, z)}{dz} \quad (\text{A.31})$$

$$f_Z(z) = K \Phi \left(\frac{z}{\sigma} \right) - K e^{\frac{-z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \Phi \left(\frac{z}{\sigma} - \frac{\lambda}{\sigma} \right) + K \sigma \frac{z}{\lambda^2} e^{\frac{-z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left[\Phi \left(\frac{z}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \Phi \left(\frac{-V^M}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right] + K \frac{\sigma^2}{\lambda^2} e^{\frac{-z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left[\Phi \left(\frac{z}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \Phi \left(\frac{-V^M}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right] + K \frac{\sigma^3}{\lambda^3} e^{\frac{-z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left[\Phi \left(\frac{-V^M}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \Phi \left(\frac{z}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right] \quad (\text{A.32})$$

$$f_Z(z) = K \Phi \left(\frac{z}{\sigma} \right) - K e^{\frac{-z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \Phi \left(\frac{z}{\sigma} - \frac{\lambda}{\sigma} \right) + K \frac{\sigma}{\lambda^2} e^{\frac{-z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left(z - \frac{\sigma^2}{\lambda} \right) \left[\Phi \left(\frac{z}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \Phi \left(\frac{-V^M}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right] + K \frac{\sigma^2}{\lambda^2} e^{\frac{-z}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}} \left[\Phi \left(\frac{z}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \Phi \left(\frac{-V^M}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right] \quad (\text{A.33})$$

É possível demonstrar que no caso da variável aleatória $\varepsilon = X - Y$, então $f_\varepsilon(\varepsilon) = f_Z(-\varepsilon)$, onde $Z = X + Y$.

APÊNDICE B – Escores Corrigidos em dois estágios pela abordagem condicional

CODIGO	EMPRESA	ANEEL	Veg.Alt e Violencia	Veg.Alt e Area.Conc.	Veg. e Dens.Cons.	Veg. E Area.Conc.	Veg.Alt e Veg.	Veg.Alt e Pav.	Veg.Alt, Veg e Dens.Cons	Veg.Med., Pav. e Dens.Red	Veg.Baixa, Pav., Dens.Red	Viol., Pav., Dens.Red
D56	BOA VISTA	22,46%	28,66%	29,44%	31,74%	53,22%	15,81%	22,35%	28,45%	22,37%	22,46%	23,07%
D02	AME	30,12%	49,84%	55,08%	38,29%	55,92%	20,19%	29,70%	51,88%	55,53%	55,53%	63,33%
D47	CEEE	41,07%	48,93%	49,21%	49,07%	63,50%	34,97%	40,86%	48,47%	40,68%	40,53%	41,57%
D06	DME-PC	41,60%	47,18%	48,01%	47,12%	58,05%	39,55%	41,19%	46,78%	40,04%	39,99%	39,07%
D14	FORCEL	42,52%	42,52%	48,18%	47,22%	56,56%	42,14%	42,29%	47,47%	39,77%	39,76%	42,52%
D20	CEAL	43,51%	51,29%	49,11%	48,81%	58,91%	42,10%	43,28%	48,22%	44,09%	44,10%	47,11%
D62	URUSSANGA	44,43%	52,41%	54,50%	51,06%	63,53%	39,37%	44,06%	53,64%	44,10%	44,12%	43,36%
D11	CERON	48,24%	70,08%	74,66%	57,20%	71,85%	35,41%	47,83%	74,03%	47,88%	47,88%	49,40%
D17	ELETROACRE	50,96%	75,02%	81,24%	60,64%	76,55%	36,11%	50,50%	79,83%	50,71%	50,70%	51,86%
D26	ELETROCAR	51,09%	57,14%	57,39%	55,84%	64,64%	49,91%	50,81%	56,79%	49,56%	49,53%	49,54%
D16	HIDROPAN	51,98%	57,04%	57,81%	56,57%	65,16%	51,13%	51,59%	57,00%	49,76%	49,74%	48,62%
D46	CEB	52,19%	60,41%	59,82%	58,75%	70,43%	47,42%	51,67%	58,26%	50,62%	50,63%	51,17%
D01	ENE. NOVA FRIBURGO	53,19%	70,51%	74,93%	61,16%	74,75%	42,05%	52,65%	73,36%	52,90%	52,89%	52,93%
D34	IGUA_U	55,35%	60,57%	61,05%	59,96%	68,25%	54,25%	55,13%	60,45%	55,76%	55,76%	55,90%
D52	CELPA	56,19%	74,90%	76,75%	64,29%	75,21%	44,74%	55,81%	76,27%	56,04%	56,04%	58,53%
D51	COCEL	56,20%	67,17%	66,84%	61,70%	71,17%	51,69%	55,71%	66,16%	54,08%	54,06%	55,21%
D40	DEMEI	57,37%	62,76%	62,99%	61,44%	69,37%	56,62%	56,77%	60,41%	60,46%	60,42%	59,95%
D55	CEPISA	58,94%	68,77%	69,87%	70,46%	84,59%	45,70%	58,55%	69,44%	56,99%	57,16%	57,14%
D53	ENE. SERGIPE	59,99%	66,86%	65,41%	65,62%	74,49%	56,83%	59,56%	64,78%	57,61%	57,63%	58,58%
D57	CELESC	61,88%	70,81%	71,75%	68,68%	77,59%	54,82%	61,53%	71,32%	62,22%	62,11%	62,57%
D42	COOPERALIAN_A	63,02%	67,32%	67,29%	67,48%	74,85%	61,80%	62,31%	66,38%	60,35%	60,32%	58,53%
D12	COPEL	63,62%	70,92%	69,21%	68,34%	72,73%	61,06%	63,33%	69,39%	62,95%	62,90%	64,53%
D61	SULGIPE	66,26%	77,29%	78,14%	72,68%	81,44%	58,26%	65,78%	77,11%	64,54%	64,56%	65,46%
D50	ENERSUL	66,38%	73,56%	72,54%	72,56%	78,94%	60,73%	66,18%	72,56%	65,55%	65,55%	67,09%
D31	CFO	67,14%	75,61%	75,01%	75,12%	84,91%	57,93%	66,85%	74,03%	66,90%	66,58%	68,91%
D63	CIOL	67,27%	72,41%	72,86%	71,17%	77,24%	65,68%	66,88%	72,16%	65,07%	65,05%	64,33%
D08	BRAGANTI	68,44%	73,04%	73,38%	71,95%	77,47%	67,53%	67,95%	72,66%	66,13%	66,10%	65,00%
D09	CELG	68,52%	75,82%	73,49%	74,84%	79,35%	62,26%	68,32%	73,91%	68,21%	68,28%	70,84%
D19	CEMIG	68,99%	75,63%	73,47%	74,99%	75,35%	62,89%	68,72%	74,82%	68,36%	68,37%	69,42%
D10	AMPLA	69,98%	78,52%	78,12%	74,27%	80,13%	65,74%	69,44%	76,80%	68,29%	68,27%	69,33%
D64	VALE PARAPANEMA	70,09%	74,11%	74,30%	73,53%	78,71%	69,17%	69,75%	73,68%	67,82%	67,81%	67,15%
D48	ESCELSA	71,05%	79,20%	77,31%	74,85%	79,79%	68,17%	70,67%	76,53%	69,94%	69,93%	72,82%
D43	ENE. BORBOREMA	73,07%	78,76%	76,43%	79,26%	86,48%	66,00%	72,62%	75,11%	72,25%	72,36%	74,85%
D44	CAIUA	73,63%	77,77%	77,47%	76,34%	80,59%	72,91%	73,28%	76,57%	72,05%	72,04%	72,27%
D32	CHESP	73,73%	77,76%	77,00%	77,06%	81,92%	72,03%	73,51%	76,26%	72,98%	73,00%	74,20%
D38	CEMAT	76,11%	87,47%	89,14%	82,59%	86,87%	61,33%	75,70%	87,52%	75,23%	75,31%	77,56%
D30	SANTA CRUZ	77,37%	80,50%	81,21%	79,44%	83,03%	75,81%	76,94%	79,99%	75,01%	74,99%	74,11%
D45	LIGHT	78,24%	84,94%	86,06%	80,73%	85,11%	72,46%	77,47%	82,38%	82,34%	82,31%	83,41%
D33	JOAO CESA	79,93%	83,08%	84,82%	81,19%	84,54%	77,20%	78,84%	82,18%	75,39%	75,32%	71,81%
D35	SANTA MARIA	80,87%	83,68%	83,39%	81,70%	84,46%	79,79%	80,51%	81,94%	79,86%	79,85%	81,23%
D05	AES SUL	81,31%	85,69%	86,93%	85,80%	90,40%	68,47%	80,95%	85,08%	80,27%	79,80%	80,99%
D39	BANDEIRANTE	81,73%	86,57%	88,26%	83,48%	87,24%	74,65%	80,75%	85,37%	77,84%	77,72%	76,28%
D04	ENE. PARABA	82,10%	84,99%	84,10%	86,53%	91,18%	69,96%	81,71%	82,53%	80,62%	80,84%	83,11%
D49	ENE. MIS GERAIS	82,92%	85,17%	86,29%	83,17%	85,57%	80,38%	82,45%	84,45%	81,38%	81,36%	81,12%
D60	ELETROPAULO	86,80%	90,85%	93,43%	85,74%	89,47%	75,41%	85,49%	85,27%	97,64%	97,52%	95,94%
D58	CELPE	86,93%	87,73%	87,55%	87,41%	90,16%	77,94%	86,52%	85,61%	85,96%	86,10%	88,56%
D28	CEMAR	87,35%	90,91%	92,90%	88,11%	90,71%	72,13%	86,87%	90,70%	86,28%	86,35%	87,81%
D03	CPEE	88,76%	88,17%	90,29%	86,36%	88,11%	84,82%	88,03%	87,98%	84,19%	84,15%	81,81%
D36	MOCOCA	91,52%	89,93%	92,24%	88,05%	89,88%	84,47%	90,96%	89,80%	89,48%	89,48%	88,20%
D18	COSERN	91,92%	89,26%	89,80%	90,06%	92,74%	79,12%	91,47%	87,51%	89,45%	89,66%	91,04%
D23	ELEKTRO	93,82%	90,76%	92,50%	88,60%	89,09%	88,10%	93,25%	90,26%	91,15%	91,13%	90,58%
D41	CPFL PAULISTA	94,63%	90,18%	91,73%	88,59%	88,89%	91,40%	94,03%	89,40%	91,97%	91,94%	90,93%
D22	COELBA	97,14%	92,44%	93,42%	90,36%	90,49%	87,23%	96,57%	91,35%	94,91%	94,94%	95,96%
D54	CSPE	100,00%	91,96%	93,81%	90,35%	90,94%	95,18%	99,37%	91,44%	97,44%	97,36%	95,39%
D13	CELTRANS	100,00%	92,71%	94,20%	92,46%	94,11%	80,79%	99,57%	92,01%	98,42%	98,44%	97,31%
D27	COELCE	100,00%	92,41%	93,43%	92,46%	94,11%	81,97%	99,43%	91,14%	97,22%	97,44%	96,90%
D25	JAGUARI	100,00%	91,35%	92,97%	89,98%	94,11%	97,76%	98,71%	90,34%	92,52%	92,43%	88,65%
D29	MUXFELDT	100,00%	90,76%	92,48%	89,90%	94,11%	98,25%	98,76%	89,71%	91,81%	91,72%	87,09%
D37	NOVA PALMA	100,00%	93,28%	95,38%	91,09%	94,11%	87,54%	99,28%	93,19%	97,38%	97,26%	95,31%
D15	PIRATININGA	100,00%	92,36%	94,18%	90,31%	94,11%	94,20%	98,92%	91,20%	98,52%	98,52%	95,95%
D24	RGE	100,00%	92,38%	94,10%	91,42%	94,11%	88,00%	99,38%	91,80%	97,95%	97,58%	96,16%
Média	71,31%	75,74%	76,63%	73,54%	80,02%	64,87%	70,81%	75,10%	70,38%	70,35%	70,64%	
R2.u		0,8934	0,8688	0,9162	0,6868	0,9987	1,0000	0,8879	0,9993	0,9992	0,9933	
Log.Lk		-6,1066	-17,6608	-7,1838	-17,7275	-14,4319	-1,9710	-7,3335	-1,0789	-1,2139	-1,3737	
AIC		16,21	39,32	18,37	39,46	32,86	7,94	20,67	8,16	8,43	8,75	

Anexos

ANEXO A – Escores de eficiência calculados pela ANEEL

Tabela 15 – Escores de Eficiência calculados pela ANEEL

Empresa	Escore NT 407/2014-SRE/ANEEL	Escore NT 66/2015-SMR/SGT/ANEEL
BOA VISTA	0,22	0,23
AME	0,30	0,31
CEEE	0,41	0,42
DME-PC	0,42	0,42
FORCEL	0,43	0,43
CEAL	0,44	0,44
URUSSANGA	0,44	0,45
CERON	0,48	0,51
ELETROACRE	0,51	0,52
ELETROCAR	0,51	0,52
HIDROPAN	0,52	0,52
CEB	0,52	0,53
ENE. NOVA FRIBURGO	0,53	0,53
IGUAÇU	0,55	0,56
CELPA	0,56	0,56
COCEL	0,56	0,57
DEMEI	0,57	0,58
CEPISA	0,59	0,59
ENE. SERGIPE	0,60	0,60
CELESC	0,62	0,62
COOPERALIANÇA	0,63	0,63
COPEL	0,64	0,64
SULGIPE	0,66	0,66
ENERSUL	0,66	0,67
CFLO	0,67	0,67
NACIONAL	0,67	0,68
BRAGANTINA	0,68	0,69
CELG	0,69	0,69
CEMIG	0,69	0,69
AMPLA	0,70	0,70
VALE PARAPANEMA	0,70	0,70
ESCELSA	0,71	0,72
ENE. BORBOREMA	0,73	0,73
CAIUA	0,74	0,74
CHESP	0,74	0,68
CEMAT	0,76	0,77
SANTA CRUZ	0,77	0,77
LIGHT	0,78	0,78
JOAO CESA	0,80	0,80
SANTA MARIA	0,81	0,81
AES SUL	0,81	0,83
BANDEIRANTE	0,82	0,82
ENE. PARAIBA	0,82	0,82
ENE. MIN GERAIS	0,83	0,83
ELETROPAULO	0,87	0,93
CELPE	0,87	0,86
CEMAR	0,87	0,87
CPEE	0,89	0,88
MOCOCA	0,92	0,91
COSERN	0,92	0,92
ELEKTRO	0,94	0,94
CPFL PAULISTA	0,95	0,95
COELBA	0,97	0,96
CSPE	1,00	1,00
CELTINS	1,00	1,00
JAGUARI	1,00	1,00
COELCE	1,00	1,00
PIRATININGA	1,00	1,00
MUXFELDT	1,00	1,00
RGE	1,00	1,00
NOVA PALMA	1,00	1,00

Fonte: NT 407/2014-SRE/ANEEL (pag. 14) e NT 66/2015-SMR/SGT/ANEEL (página 16)