



**Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Instituto de Ciências Exatas**  
**Departamento de Estatística**

# **Continuidade da Probabilidade de Percolação em $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$**

**Edson Francisco Ferreira**

**Universidade Federal de Minas Gerais**

**Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Estatística**

**Continuidade da Probabilidade  
de Percolação em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$**

Discente: Edson Francisco Ferreira  
Orientador: Prof. Roger William Câmara Silva

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Estatística.

**Belo Horizonte, FEV/2016**

Aos meus pais, irmãs  
e sobrinhos.

“A experiência não permite atingir a certeza absoluta. Não devemos procurar obter mais que uma probabilidade.”  
Bertrand Russell.

# Agradecimentos

Aos meus pais, José Francisco Ferreira e Ana Maria Corrêa Ferreira pelo apoio incondicional, carinho e paciência, aos quais faltam palavras para demonstrar minha gratidão.

As minhas irmãs Jussara Ferreira e Bárbara Larissa, meus sobrinhos Manoel Victor e Hugo Vinícius pelo constante apoio e incentivo.

Ao Ronaldo Alves, Junair da Conceição e Ronaldo Júnior por terem me acolhido em seu lar durante o período do curso, muito obrigado a vocês.

À minha namorada Daisielle Gomes que sabiamente soube entender o meu propósito e sempre me deu forças nas horas mais difíceis.

Ao professor orientador Roger William Câmara Silva pela atenção, orientação, ensinamentos e confiança demonstradas durante a realização deste trabalho.

Aos professores Gastão de Almeida Braga e Gregório Saravia Atuncar que gentilmente aceitaram o convite para participarem da Banca Examinadora.

Aos demais professores do Departamento de Estatística pela atenção e ensinamentos.

Aos colegas de curso pelas amizades e companheirismo em todos os momentos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

A todos, que esqueci de mencionar, mas que de alguma forma contribuíram com esta trajetória, muito obrigado!

# Resumo

A teoria de percolação teve início com Broadbent e Hammersley [1]. Uma das motivações para a formulação de tal teoria foi tentar construir um modelo probabilístico que descrevesse a propagação de um fluido em um meio poroso. Estes modelos são construídos em grafos, atribuindo independentemente a cada elo (ou sítio) o estado aberto ou fechado com probabilidade  $p$  e  $1 - p$ , respectivamente.

A principal intenção desta dissertação de mestrado é estudar o modelo de percolação no grafo  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  introduzido por Damron et al. em “Absence of Site Percolation at Criticality in  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ ” (veja [2]). Nosso propósito neste trabalho foi formular o modelo de percolação como feito no artigo acima, discutir os problemas envolvidos e expor os resultados do mesmo.

Palavras-chave: Percolação crítica, percolação em bloco, continuidade.

# Abstract

The percolation theory began with Broadbent and Hammersley [1]. One of the formulation motivations of such theory was trying to build a probabilistic model that describes the propagation of a fluid in a porous medium. These models are built on graphs, independently assigning to each bond (or site) the state open or closed with probability  $p$  and  $1 - p$ , respectively.

The main intention of this master thesis is to study the percolation model in the graph  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  introduced by Damron et al. in " Absence of Site Percolation at criticality in  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  " (see [2]) . Our purpose in this work was to formulate the percolation model proposed in the above article, discuss the issues involved and expose the results of it.

Key-words: Critical percolation, slab percolation, continuous.

# Sumário

|   | Página    |
|---|-----------|
| Lista de Figuras . . . . .  | 9         |
| <b>1 Percolação em <math>\mathbb{Z}^d</math></b>                          | <b>12</b> |
| 1.1 Definição do Modelo . . . . .   | 12        |
| 1.2 Resultados em Percolação . . . . .                                    | 16        |
| <b>2 Percolação no Grafo <math>\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}</math></b>    | <b>19</b> |
| 2.1 Definição do Modelo . . . . .   | 19        |
| 2.2 Propriedade Fundamental . . . . .                                     | 22        |
| 2.3 Resultados . . . . .  | 22        |
| 2.4 Prova do Teorema 2.3 . . . . .  | 30        |
| 2.5 Continuidade da Probabilidade de Percolação na Fase Crítica . . . . . | 39        |
| 2.6 Cruzamento Mais à Esquerda . . . . .                                  | 42        |



# Lista de Figuras

|   | Página |
|---|--------|
| 1.1 Parte finita do grafo infinito $\mathbb{Z}^2$ . . . . .   | 13     |
| 1.2 Aglomerado aberto da origem e um caminho aberto conectando os sítios $x$ e $y$ . . . . .  | 14     |
| 2.1 Parte finita do grafo infinito $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ . . . . .   | 20     |
| 2.2 Exemplo do evento $E_{n,m}$ . . . . .   | 23     |
| 2.3 Cruzamento ocupado no sentido esquerda-direita na caixa $B_n$ . . . . .   | 25     |
| 2.4 Cruzamento ocupado no sentido esquerda-direita no retângulo $[-4n, 4n] \times [-n, n]$ . . . . .  | 26     |
| 2.5 Realização do evento $E_{2^{k+2}n, 2^k n}$ . . . . .  | 28     |
| 2.6 Cruzamentos ocupados nas caixas $B'_k$ s. . . . .   | 29     |
| 2.7 Caixas $S_1, S_2$ e $S_3$ com os eventos $F_n, G_n$ e $H_n$ . . . . .   | 31     |
| 2.8 Fita ocupada mais à esquerda $R, \tilde{R}$ sua reflexão sobre $T_3$ , fita ocupada mais baixa $U$ e na junção das fitas o caminho $\gamma_{R,U}$ que conecta os caminhos contidos nas fitas. . . . . | 34     |
| 2.9 Exemplo do evento $E_{2n,n}$ . . . . .  | 35     |
| 2.10 Circuito ocupado na região $B_{3n} \setminus B_n$ . . . . .  | 36     |
| 2.11 Exemplo do evento $E_{3n,n}$ . . . . .   | 36     |
| 2.12 Curva de Jordan. . . . .   | 44     |
| 2.13 Possíveis localizações dos $z'_i$ s. . . . .   | 45     |

# Introdução

A teoria de percolação teve início com Broadbent e Hammersley [1], que também obtiveram os primeiros resultados sobre a teoria. Uma das motivações para a formulação de tal teoria foi tentar construir um modelo probabilístico que descrevesse a propagação de um fluido em um meio poroso. Na tentativa de modelar esta situação, é construído um modelo probabilístico em um grafo. Informalmente, a cada elo do grafo é atribuído, independentemente dos demais, o estado aberto com probabilidade  $p$  (parâmetro do modelo) ou o estado fechado com probabilidade  $1 - p$ . Se o número de canais abertos for suficientemente grande, então eles estarão interligados e o meio se tornará permeável à passagem do fluido. Neste caso dizemos que houve percolação do fluido. Similarmente temos o modelo de percolação de sítios independentes. Neste caso cada sítio está ocupado com probabilidade  $p$  ou vazio com probabilidade  $1 - p$ .

No primeiro capítulo deste trabalho definiremos formalmente o modelo de percolação de elos independentes no grafo  $\mathbb{Z}^d$ . Dentre outras coisas, veremos que a função probabilidade de percolação, representada por  $\theta(p)$ , é objeto de extensos estudos uma vez que sobre a qual ainda existem vários problemas em aberto. Por exemplo, em  $\mathbb{Z}^d$ , existe um valor crítico do parâmetro  $p$  denominado ponto crítico, representado por  $p_c$ , tal que se  $p > p_c$  a probabilidade de percolar é positiva e se  $p < p_c$  a probabilidade de percolar é nula. Sabe-se que  $\theta(p)$  é contínua para valores  $p < p_c$  e  $p > p_c$ . Neste caso o interesse é saber se  $\theta(p)$  é contínua no ponto crítico, ou seja, determinar se  $\theta(p_c) = 0$ .

Nas décadas de 60 e 70, houve grandes esforços para mostrar que em  $\mathbb{Z}^2$  o ponto crítico era  $1/2$ . Harris [7], Russo [12] e Seymour-Welsh [13] mostraram que  $p_c \geq 1/2$ . O resultado exato foi obtido nos anos 80, quando Kesten [8] mostrou que  $p_c = 1/2$  e que  $\theta$  é contínua em  $1/2$ , ou seja,  $\theta(1/2) = 0$ .

Em 1990, Hara e Slade [6] mostraram que em  $\mathbb{Z}^d$ , para dimensões  $d \geq 19$ , não há percolação no ponto crítico, isto é,  $\theta(p_c) = 0$ . Recentemente Fitzner e Van der Hofstad [11] melhoraram este resultado, mostrando que

para  $d \geq 11$  não há percolação no ponto crítico. Acredita-se que as mesmas técnicas desenvolvidas em [11] podem ser utilizadas para mostrar o resultado quando  $d \geq 7$ .

No segundo capítulo consideraremos especificamente o modelo de percolação de sítios no grafo  $S = (\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}, \mathcal{E})$  proposto por Damron et al. [2], onde  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{Z} \ \forall i = 1, 2 \text{ e } x_3 \in \{0, 1\}\}$  são os sítios e  $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \{\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}\} \times \{\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}\} : |x - y| = 1\}$  são as arestas, as quais chamaremos de elos. Por  $|\cdot|$  representamos a distância euclidiana. Em  $S$  é definido o modelo de percolação de sítios independentes, atribuindo a cada sítio  $v \in \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  o estado ocupado com probabilidade  $p$  ou o estado vazio com probabilidade  $1 - p$ , sendo  $p \in [0, 1]$ . Para este modelo os autores mostram que  $\theta(p_c) = 0$ . À frente definiremos formalmente este modelo.

Recentemente Duminil-Copin et al. [3] mostraram que não há percolação de elos no ponto crítico no grafo  $S' = (V', E')$ , onde  $V' = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{Z} \ \forall i = 1, 2 \text{ e } x_3 \in \{0, 1, \dots, k\}\}$  são os sítios e  $E' = \{(x, y) \in V' \times V' : |x - y| = 1\}$  são os elos.

# Capítulo 1

## Percolação em $\mathbb{Z}^d$

Neste capítulo vamos definir o modelo de percolação de elos independentes em  $\mathbb{Z}^d$  e exibiremos alguns resultados que serão utilizados ao longo do texto.

### 1.1 Definição do Modelo

Nesta seção definiremos formalmente o modelo de percolação de elos independentes em  $\mathbb{Z}^d$ .

**Definição 1.1.** Definimos a rede hipercúbica  $d$ -dimensional,  $d \in \mathbb{N}$ , como sendo o grafo  $G = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ , onde  $\mathbb{Z}^d$  representa o conjunto de sítios e  $E^d$  o conjunto de elos. Mais especificamente,

$$\mathbb{Z}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{Z} \forall i\} \text{ e}$$

$$E^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : |x - y| = 1\},$$

onde  $|\cdot|$  representa a distância euclidiana.

A condição  $|x - y| = 1$  significa que os sítios  $x$  e  $y$  são vizinhos de primeira ordem. Neste caso existe um elo  $e$  incidente aos sítios  $x$  e  $y$ , isto é, os sítios  $x$  e  $y$  são as extremidades do elo. Este elo será representado por  $\langle x, y \rangle$ .

A partir de agora, utilizando um abuso de notação, denotaremos o grafo definido acima simplesmente por  $\mathbb{Z}^d$ . Uma parte de  $\mathbb{Z}^2$  pode ser vista na Figura 1.1.

Seja  $p \in [0, 1]$ . Cada elo  $e \in E^d$  está aberto com probabilidade  $p$  ou fechado com probabilidade  $1 - p$ . Assumiremos que o estado de um elo não

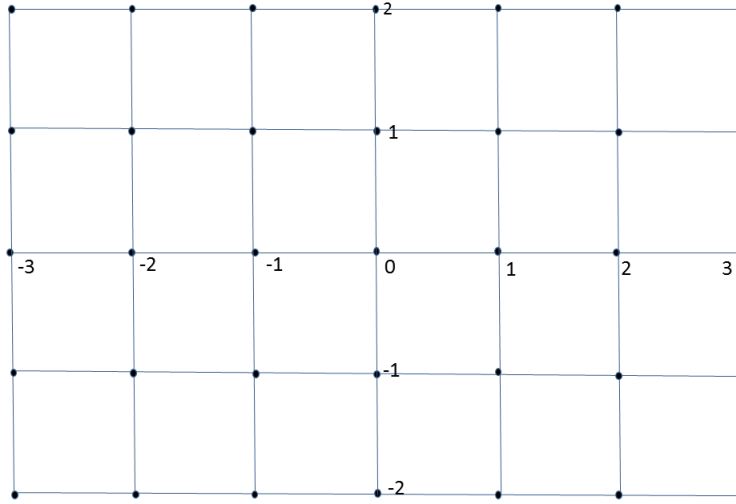


Figura 1.1: Parte finita do grafo infinito  $\mathbb{Z}^2$ .

será afetado por quaisquer outros elos da rede, obtendo assim o modelo de percolação de elos independentes.

Consideraremos o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, P_p)$ , onde  $\Omega = \{0, 1\}^E$  é o espaço amostral do modelo, cujos pontos, que serão chamados configurações, são representados por  $\omega = \{\omega_e : e \in E\}$ . O valor  $\omega_e = 0$  corresponde a  $e$  estar fechado, enquanto  $\omega_e = 1$  corresponde a  $e$  estar aberto.  $\mathfrak{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos eventos cilíndricos e  $P_p$  é a medida produto em  $\mathfrak{F}$ .

**Definição 1.2.** Um caminho em  $\mathbb{Z}^d$  é uma sequência alternante  $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n$  de sítios distintos  $x_i$  e elos  $e_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$ . Este caminho tem comprimento  $n$  e liga  $x_0$  a  $x_n$ . Um circuito é uma sequência alternante  $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n, e_n, x_0$  de sítios e elos, tal que  $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n$  é um caminho e  $e_n = \langle x_n, x_0 \rangle$ .

Considerando uma configuração  $\omega$ , um caminho ou circuito será dito aberto em  $\omega$  se todos os seus elos estiverem abertos em  $\omega$ , ou seja,  $\omega_{e_i} = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Definição 1.3.** Dizemos que dois sítios da rede,  $x$  e  $y$ , estão conectados se existir um caminho aberto ligando estes sítios (ver Figura 1.2). Denotaremos o evento em que os sítios  $x$  e  $y$  estão conectados por  $\{x \leftrightarrow y\}$ .

**Definição 1.4.** Definimos o aglomerado do sítio  $x$  na configuração  $\omega$  por:

$$C_x(\omega) \equiv \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y \text{ em } \omega\}.$$

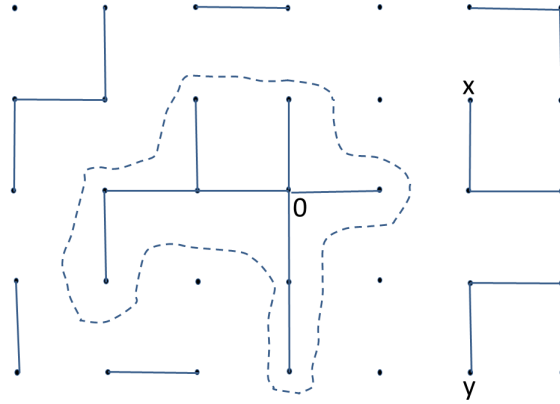


Figura 1.2: Aglomerado aberto da origem e um caminho aberto conectando os sítios  $x$  e  $y$ .

Note que  $C_x(\omega)$  é o conjunto de todos os sítios do grafo que estão conectados a  $x$  em  $\omega$ .

Inicialmente estamos interessados em estudar o tamanho de  $C_x(\omega)$ , queremos investigar se aglomerados infinitos ocorrem com probabilidade positiva. Denotaremos por  $|C_x(\omega)|$  a cardinalidade de  $C_x(\omega)$  e por  $\{x \leftrightarrow \infty\}$  o evento em que  $|C_x(\omega)| = \infty$ . Dizemos que houve percolação se  $|C_x(\omega)| = \infty$  para algum  $x$ . Portanto, uma quantidade de interesse é a probabilidade de determinado sítio pertencer a um aglomerado de tamanho infinito. Pela invariância translacional de  $\mathbb{Z}^d$  e de  $P_p$ , basta considerar o caso em que  $x$  é a origem de  $\mathbb{Z}^d$  (ver Figura 1.2).

**Definição 1.5.** Definimos como probabilidade de percolação a probabilidade da origem pertencer a um aglomerado de tamanho infinito. Ou seja,

$$\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$p \rightarrow \theta(p),$$

onde

$$\theta(p) \equiv P_p(\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = \infty) = P_p(\omega \in \Omega : 0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \omega).$$

Para reduzir a notação, a partir de agora denotaremos a probabilidade  $P_p(\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = \infty)$  simplesmente por  $P_p(|C| = \infty)$ .

Observe que a função  $\theta(p)$  é não decrescente em  $p$ . Intuitivamente se o evento  $\{0 \leftrightarrow \infty\}$  ocorre e o valor de  $p$  for aumentado, então mais elos estão sendo abertos implicando que o evento acima continuará ocorrendo, ou seja,  $\theta(p)$  é não decrescente. Veremos uma demonstração formal deste fato no teorema a seguir.

**Teorema 1.1.** No modelo de percolação de elos independentes em  $\mathbb{Z}^d$ , a função  $\theta(p)$  é não decrescente em  $p$ .

*Prova:* Seja  $(X_e : e \in \mathbb{Z}^d)$  uma coleção de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas (iid) com distribuição uniforme  $[0, 1]$ .

Para  $p \in [0, 1]$ , definimos

$$\eta_p(e) = \begin{cases} 1, & \text{se } X_e < p, \\ 0, & \text{se } X_e \geq p. \end{cases}$$

Dizemos que um elo  $e$  é  $p$ -aberto se  $\eta_p(e) = 1$  e  $p$ -fechado caso contrário.

Podemos construir um modelo de percolação com parâmetro  $p$  usando elos  $p$ -abertos e  $p$ -fechados deste modelo. Vamos denotar por  $P$  a probabilidade neste modelo.

Seja  $C_p$  o aglomerado  $p$ -aberto contendo a origem, neste caso temos

$$\theta(p) = P_p(|C_p| = \infty).$$

Note que  $\{|C_\pi| = \infty\} \subset \{|C_p| = \infty\}, \forall \pi \leq p$ . Logo,

$$\theta(\pi) = P_\pi(|C_\pi| = \infty) \leq P_p(|C_p| = \infty) = \theta(p).$$

■

Para os valores extremos de  $p$ , o modelo se comporta da seguinte maneira: quando  $p = 1$ , todos os elos da rede estão abertos, de modo que todos os sítios estão conectados entre si. Em particular, a origem está conectada a um número infinito de outros sítios com probabilidade 1, ou seja,  $\theta(p) = 1$ . Quando  $p = 0$  não há elos abertos, nenhum sítio está conectado a qualquer outro, em particular, a origem está conectada a um número finito, neste caso zero, de sítios e portanto  $\theta(p) = 0$ .

Deste modo é natural definir o ponto crítico do modelo.

**Definição 1.6.** Definimos o ponto crítico, denotado por  $p_c$ , como o supremo de todos os valores de  $p$  para os quais  $\theta(p) = 0$ . Ou seja,

$$p_c \equiv \sup\{p : \theta(p) = 0\}.$$

É importante lembrar que  $p_c$  é função da dimensão ( $p_c = p_c(d)$ ) e não crescente na mesma. Intuitivamente quanto maior a dimensão, maior é o número de caminhos conectando os sítios 0 e  $x$ . A demonstração deste fato pode ser vista em Grimmett [5].

## 1.2 Resultados em Percolação

Nesta seção enunciaremos alguns resultados sobre o grafo  $\mathbb{Z}^d$ . Apresentaremos o teorema que garante uma transição de fase não trivial, isto é, existe um valor crítico do parâmetro  $p$  no intervalo  $(0, 1)$  abaixo do qual a probabilidade de percolar é nula e acima do qual esta probabilidade é positiva. Também apresentaremos o teorema da unicidade do aglomerado infinito.

A mudança que ocorre ao se passar de um estado em que existem somente aglomerados finitos para o estado em que há o surgimento de um aglomerado infinito é o que chamamos de transição de fase. Sobre o fenômeno de transição de fase temos o seguinte resultado.

**Teorema 1.2.** *Em  $\mathbb{Z}^d$ , para qualquer dimensão  $d \geq 2$  existe  $p_c \in (0, 1)$ , tal que:*

- a)  $\theta(p) = 0$  se  $0 \leq p < p_c$ .
- b)  $\theta(p) > 0$  se  $p_c < p \leq 1$ .

O teorema acima diz que se  $p < p_c$ , a origem está quase certamente em um aglomerado finito. Por outro lado, se  $p > p_c$ , a origem tem probabilidade positiva de estar em um aglomerado infinito. Porém, o teorema não diz o que acontece em  $p = p_c$ , sabe-se que  $\theta(p)$  é uma função contínua, exceto possivelmente em  $p = p_c$  (veja Grimmett [5]).

Chamamos de fase subcrítica o intervalo  $p < p_c$ , de fase crítica  $p = p_c$  e de fase supercrítica o intervalo  $p_c < p \leq 1$ .

**Definição 1.7.** Seja  $\psi(p)$  a probabilidade de que exista aglomerado infinito em algum sítio de  $\mathbb{Z}^d$ . Isto é,

$$\psi(p) = P_p(\omega \in \Omega : \exists x \in V \text{ e } |C_x(\omega)| = \infty).$$

A seguir veremos que  $\psi$  assume somente os valores 0 e 1. Na fase subcrítica todos os aglomerados são quase certamente finitos e na fase supercrítica quase certamente temos pelo menos um aglomerado infinito.

**Teorema 1.3.** *A probabilidade  $\psi(p)$  satisfaz:*

$$\psi(p) = \begin{cases} 0, & \text{se } \theta(p) = 0, \\ 1, & \text{se } \theta(p) > 0. \end{cases}$$

A demonstração pode ser vista em Grimmett [5].



No caso em que  $\psi(p) = 1$ , ou seja,  $\theta(p) > 0$  dizemos que houve percolação. Caso contrário dizemos que não houve percolação.

Pelo Teorema 1.3 vimos que quando  $\theta(p) > 0$  existe aglomerado infinito. Uma pergunta natural seria, quantos aglomerados infinitos?

**Teorema 1.4.** (*Unicidade do aglomerado infinito*) Em  $\mathbb{Z}^d$ , se  $p$  é tal que  $\theta(p) > 0$ , então

$$P_p(\text{existir um \acute{unico aglomerado aberto infinito}) = 1.$$

A demonstração pode ser vista em Grimmett [5].

Em  $\Omega$  defini-se uma ordem parcial, ou seja, dado  $\omega \in \Omega = \{0, 1\}^E$ ,

$$\omega \leq \omega' \quad \text{se} \quad \omega_e \leq \omega'_e \quad \forall \quad e \in E^d.$$

**Definição 1.8.** Um evento  $A$  é dito crescente, em relação à ordem parcial acima, se

$$I_A(\omega) \leq I_A(\omega') \quad \forall \quad \omega \leq \omega',$$

onde  $I_A$  é a função indicadora de  $A$ .

Um evento  $A$  é dito crescente quando aumentar o número de elos abertos de uma configuração favorece a ocorrência do evento. Ou seja, se uma configuração faz com que o evento ocorra, aumentando o número de elos abertos o evento continua ocorrendo. Um exemplo de evento crescente é  $A = \{x \leftrightarrow y\}$ , dois sítios estarem conectados por um caminho de elos abertos. Um evento é dito decrescente se o seu complementar for crescente.

**Definição 1.9.** Uma variável aleatória  $X$  é dita crescente se for crescente na ordem parcial acima, isto é

$$X(\omega) \leq X(\omega') \quad \text{sempre que} \quad \omega \leq \omega'.$$

Enunciaremos agora um resultado que será muito utilizado no decorrer deste texto, que leva o nome de Fortuin, Kasteleyn e Ginibre [4] por terem generalizado o resultado para vários modelos. No entanto, em 1960, Harris [7] já o havia demonstrado para percolação de elos independentes.

**Teorema 1.5** (Desigualdade FKG). *Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias crescentes e limitadas em  $\Omega$ , então*

$$E_p(XY) \geq E_p(X)E_p(Y)$$

A demonstração pode ser vista em Grimmett [5].

Como corolário temos.

**Corolário 1.6.** *Se  $A$  e  $B$  forem eventos crescentes, então*

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B), \text{ ou equivalentemente } P_p(A|B) \geq P_p(A).$$

Ou seja, a ocorrência de um evento crescente aumenta a probabilidade de ocorrência de outro evento crescente. Vale lembrar que a desigualdade também é válida no caso em que  $A$  e  $B$  são eventos decrescentes. Se  $A$  for crescente e  $B$  decrescente temos

$$P_p(A \cap B) \leq P_p(A)P_p(B).$$

## Capítulo 2

# Percolação no Grafo $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$

Neste capítulo vamos apresentar o modelo de percolação de sítios independentes em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  e mostraremos os resultados obtidos no artigo “Absence of Site Percolation at Criticality in  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ ” de Damron et al. [2]. Em particular mostraremos que  $\theta(p_c) = 0$ . Além disso, mostraremos também que a função  $\theta(p)$  é contínua em  $[0, 1]$ . Para isto, adaptamos para  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  a demonstração feita para  $\mathbb{Z}^d$  em Grimmett [5].

Vale lembrar que em algumas demonstrações deste capítulo serão utilizados resultados do Capítulo 1, que foram enunciados para percolação de elos independentes. Mas com uma adaptação adequada estes também são válidos para percolação de sítios independentes (veja Grimmett [5]).

### 2.1 Definição do Modelo

Nesta seção definiremos formalmente o modelo de percolação de sítios independentes em  $S = (\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}, \mathcal{E})$ , onde

$$\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{Z} \forall i = 1, 2 \text{ e } x_3 \in \{0, 1\}\} \text{ e}$$

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \{\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}\} \times \{\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}\} : |x - y| = 1\}$$

são os conjuntos de sítios e elos, respectivamente. Por  $|\cdot|$  representamos a distância euclidiana.

Com um certo abuso de notação denotaremos o grafo definido acima por  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ . Note que este grafo consiste de duas cópias de  $\mathbb{Z}^2$  sobrepostas (ver Figura 2.1).

Introduzimos probabilidade neste modelo da seguinte maneira: seja  $p \in [0, 1]$ , cada sítio  $v \in \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  está ocupado com probabilidade  $p$  ou vazio com probabilidade  $1 - p$ . Assumiremos que o estado de um sítio não

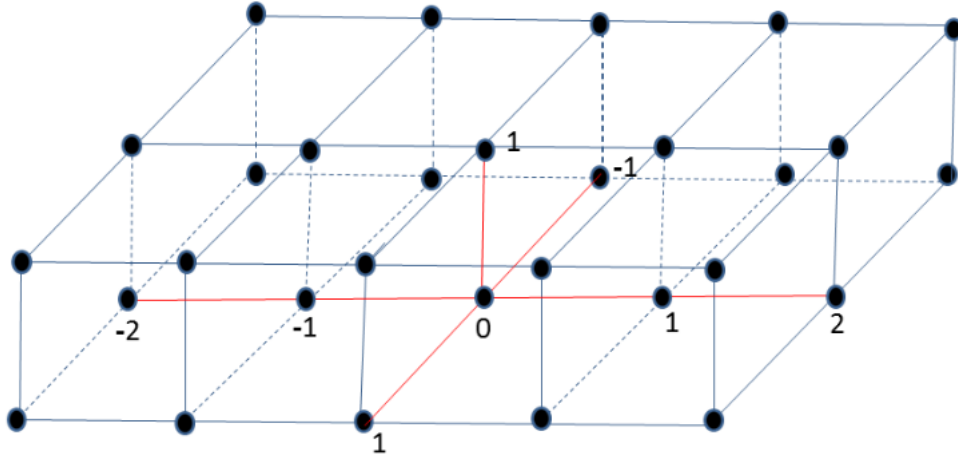


Figura 2.1: Parte finita do grafo infinito  $\mathbb{Z}^2 \times \{0,1\}$ .

será afetado por quaisquer outros sítios da rede, obtendo assim o modelo de percolação de sítios independentes.

Consideraremos o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{S}, P_p)$ , onde  $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2 \times \{0,1\}}$  é o espaço amostral do modelo, cujos pontos, que serão chamados configurações, são representados por  $w = \{w_v : v \in \mathbb{Z}^2 \times \{0,1\}\}$ . O valor  $w_v = 0$  corresponde a  $v$  estar vazio, enquanto  $w_v = 1$  corresponde a  $v$  estar ocupado.  $\mathfrak{S}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos eventos cilíndricos e  $P_p$  é a medida produto em  $\mathfrak{S}$ .

**Definição 2.1.** Um conjunto de sítios distintos  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subset \mathbb{Z}^2 \times \{0,1\}$  será dito um caminho, ou cruzamento, se estes formarem uma sequência de sítios adjacentes (vizinhos de primeira ordem). Se  $v_1 = v_n$ , dizemos que os sítios formam um circuito.

Considerando uma configuração  $\omega \in \Omega$ , um caminho será dito ocupado em  $\omega$  se todos os seus sítios estiverem ocupados em  $\omega$ , ou seja,  $\omega_{v_i} = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Definição 2.2.** Dizemos que dois sítios  $x$  e  $y$  estão conectados, se existir um caminho ocupado  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ , com  $x = v_1$  e  $y = v_n$ . Denotaremos o evento em que  $x$  está conectado a  $y$  por  $\{x \leftrightarrow y\}$ .

Agora vamos definir a projeção ortogonal de um sítio sobre  $\mathbb{Z}^2$ .

**Definição 2.3.** Definimos a projeção ortogonal do sítio  $v \in \mathbb{Z}^2 \times \{0,1\}$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \pi & : \mathbb{Z}^2 \times \{0,1\} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ \pi(x, y, z) & = (x, y). \end{aligned}$$

Considere a caixa  $B_n = [-n, n] \times [-n, n] \times \{0, 1\}$  e seja  $\gamma = (v_0, \dots, v_k)$  qualquer caminho em  $B_n$ . Vamos associar a  $\gamma$  um subconjunto em  $\pi(B_n)$  da seguinte maneira:

$$\pi(\gamma) = (\pi(v_0), \dots, \pi(v_k)).$$

**Definição 2.4.** Dado um cruzamento  $\gamma$  em  $B_n$ , definimos a *fita*  $R_\gamma$  associada ao cruzamento  $\gamma$ , da seguinte maneira:

$$R_\gamma = \{v \in B_n : \pi(v) \in \pi(\gamma)\}.$$

**Definição 2.5.** Definimos o aglomerado do sítio  $x$  na configuração  $\omega$  por:

$$C_x(\omega) \equiv \{y \in \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\} : x \leftrightarrow y \text{ em } \omega\}.$$

Inicialmente estamos interessados em estudar a cardinalidade de  $C_x(\omega)$ , denotada por  $|C_x(\omega)|$ , mais precisamente em sua distribuição. Pela invariância translacional de  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  e de  $P_p$ , basta considerar o caso em que  $x$  é a origem de  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ .

**Definição 2.6.** Definimos como probabilidade de percolação a probabilidade da origem pertencer a um aglomerado de tamanho infinito. Ou seja,

$$\begin{aligned} \theta : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ p &\rightarrow \theta(p), \end{aligned}$$

onde

$$\theta(p) \equiv P_p(\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = \infty) = P_p(\omega \in \Omega : 0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \omega).$$

A partir de agora denotaremos a probabilidade  $P_p(\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = \infty)$  simplesmente por  $P_p(|C| = \infty)$ .

Vimos no Teorema 1.1 que para o modelo de percolação de elos independentes em  $\mathbb{Z}^d$ , a função  $\theta(p)$  é não decrescente em  $p$ . Com uma simples adaptação do mesmo, obtemos resultado semelhante para o modelo de percolação de sítios independentes em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ . Também temos que para os valores extremos  $p = 0$  e  $p = 1$  o modelo de percolação de sítios independentes em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  se comporta de forma similar ao modelo de percolação de elos independentes em  $\mathbb{Z}^d$ . Assim, é interessante definirmos o ponto crítico do modelo.

**Definição 2.7.** Definimos o ponto crítico, denotado por  $p_c$ , como o supremo de todos os valores de  $p$  para os quais  $\theta(p) = 0$ . Ou seja,

$$p_c \equiv \sup\{p : \theta(p) = 0\}.$$

## 2.2 Propriedade Fundamental

No modelo de percolação de sítios independentes em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  temos uma propriedade que será usada constantemente. Em seguida enunciaremos a mesma, e vamos chamá-la de Propriedade Fundamental (PF).

**Definição 2.8.** Propriedade Fundamental: Se dois caminhos ocupados em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  têm a propriedade de que suas projeções em  $\mathbb{Z}^2$  se intersectam, então estes caminhos estão conectados em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ .

Para uma idéia intuitiva da propriedade acima sejam  $s_1$  e  $s_0$  dois caminhos ocupados distintos em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ ,  $s_1$  com sítios em  $\mathbb{Z}^2 \times \{1\}$  e  $s_0$  com sítios  $\mathbb{Z}^2 \times \{0\}$ . Se suas projeções se intersectam em  $\mathbb{Z}^2$ , então existe um sítio ocupado  $v_1 = (x, y, 1) \in s_1$  e um sítio ocupado  $v_0 = (x, y, 0) \in s_0$ . Além disso,  $v_0$  e  $v_1$  são vizinhos de primeira ordem portanto estão conectados, logo os caminhos se conectam.

Observe que esta propriedade não é válida para percolação de elos, pois se o elo de extremos  $v_0 = (x, y, 0)$  e  $v_1 = (x, y, 1)$  estiver fechado estes caminhos não podem se conectar.

## 2.3 Resultados

Nos modelos de percolação o comportamento da função probabilidade de percolação na fase crítica é objeto de extensos estudos. Nesta seção o objetivo é mostrar o principal resultado deste trabalho, isto é, provaremos que para percolação de sítios independentes em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  não há percolação no ponto crítico. Para isto precisaremos de algumas definições e resultados auxiliares que serão enunciados a seguir.

**Definição 2.9.** Para  $n, m \in \mathbb{N}$  definimos o evento  $E_{n,m} = \{\text{existe um cruzamento ocupado no sentido esquerda-direita, contido na caixa } [-n, n] \times [-m, m] \times \{0, 1\}, \text{ tal que um sítio em } \{-n\} \times [-m, m] \times \{0, 1\} \text{ está conectado a um sítio em } \{n\} \times [-m, m] \times \{0, 1\}\}$  (veja Figura 2.2).

A seguir mostraremos que se há percolação então  $P_p(E_{n,n}) \rightarrow 1$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Este resultado é provado para  $\mathbb{Z}^d$  em Grimmett [5]. Aqui adaptamos a demonstração para  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ .

**Lema 2.1.** *Suponha  $\theta(p) > 0$ , então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(E_{n,n}) = 1.$$

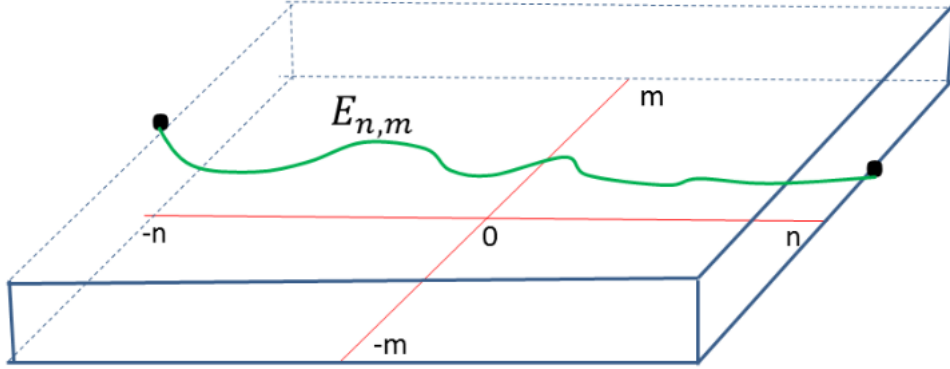


Figura 2.2: Exemplo do evento  $E_{n,m}$ .

**Prova:** Seja  $B_n$  a caixa  $[-n, n] \times [-n, n] \times \{0, 1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Suponha  $\theta(p) > 0$ , pelo Teorema 1.3 existe aglomerado infinito. Como  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  é um subgrafo de  $\mathbb{Z}^3$ , pelo Teorema 1.4 o aglomerado infinito em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  é único.

Para  $m \in \mathbb{N}$  considere o evento  $I_m = \{\text{existe algum sítio de } B_m \text{ que pertence ao aglomerado infinito}\}$ . Note que  $I_m \subset I_{m+1}$ , logo  $I_m \uparrow \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$ .

Então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_p(I_m) = P_p\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m\right) = 1,$$

pois existindo aglomerado infinito para  $m$  suficientemente grande a caixa  $B_m$  conterá algum sítio do aglomerado infinito.

Seja  $\epsilon > 0$ , tome  $m$  suficientemente grande tal que

$$P_p(I_m) > 1 - \epsilon. \quad (2.1)$$

Fixado  $m$ , considere  $n > m$  e sejam  $F_1, F_2, \dots, F_6$  as faces de  $B_n$ . Se  $I_m$  ocorre, então algum sítio de  $B_m$  está conectado por um caminho ocupado a alguma face  $F_i$  de  $B_n$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Logo,

$$\begin{aligned} 1 - P_p(I_m) &\geq 1 - P_p(\{B_m \leftrightarrow F_i \text{ em } B_n\}) \\ &= P_p(\{B_m \leftrightarrow F_i \text{ em } B_n\}^c) \\ &= P_p(\{B_m \not\leftrightarrow F_i \text{ em } B_n, \forall i\}) \\ &= P_p\left(\bigcap_{i=1}^6 \{B_m \not\leftrightarrow F_i \text{ em } B_n\}\right). \end{aligned}$$

Como os eventos são decrescentes e equiprováveis, por FKG temos

$$\begin{aligned}
1 - P_p(I_m) &\geq \prod_{i=1}^6 P_p(\{B_m \not\leftrightarrow F_i \text{ em } B_n\}) \\
&= \prod_{i=1}^6 [1 - P_p(\{B_m \leftrightarrow F_i \text{ em } B_n\})] \\
&= [1 - P_p(\{B_m \leftrightarrow F \text{ em } B_n\})]^6, \tag{2.2}
\end{aligned}$$

onde  $F$  é uma das faces de  $B_n$ .

Combinando (2.1) e (2.2), obtemos

$$P_p(\{B_m \leftrightarrow F \text{ em } B_n\}) > 1 - \epsilon^{\frac{1}{6}}. \tag{2.3}$$

Definimos a fronteira de  $B_n$ , denotada por  $\partial B_n$ , da seguinte maneira:  $\partial B_n = \{v \in B_n : \exists y \in \mathbb{Z}^2 \times \{0,1\} - B_n \text{ e } |v - y| = 1\}$ . Sejam  $FL_n = \{v \in \partial B_n : x_1 = -n\}$  e  $FR_n = \{v \in \partial B_n : x_1 = n\}$ , as faces esquerda e direita de  $B_n$ , respectivamente. Os eventos  $\{B_m \leftrightarrow FL_n \text{ em } B_n\}$  e  $\{B_m \leftrightarrow FR_n \text{ em } B_n\}$  são crescentes, por FKG e (2.3) temos

$$\begin{aligned}
P_p(\{B_m \leftrightarrow FL_n \text{ em } B_n\} \cap \{B_m \leftrightarrow FR_n \text{ em } B_n\}) &\geq \\
P_p(\{B_m \leftrightarrow FL_n \text{ em } B_n\})P_p(\{B_m \leftrightarrow FR_n \text{ em } B_n\}) &\geq (1 - \epsilon^{\frac{1}{6}})^2.
\end{aligned}$$

Considere o evento  $A_{m,n} = \{\text{existem dois sítios na } \partial B_m \text{ que pertencem a caminhos ocupados disjuntos em } B_n \text{ ambos interceptando } \partial B_n\}$ . Observe que  $A_{m,n+1} \subset A_{m,n}$ , portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(A_{m,n}) = P_p\left(\bigcap_{n=m+1}^{\infty} A_{m,n}\right) = 0,$$

pois o aglomerado da origem é único. Caso não fosse zero, teríamos dois aglomerados infinitos quando  $n \rightarrow \infty$ . Ou seja,  $P_p(A_{m,n}) \rightarrow P_p(\text{existem dois sítios na } \partial B_m \text{ que pertencem a aglomerados infinitos disjuntos}) = 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Definimos a região  $B_n \setminus B_m$  da seguinte maneira:  $B_n \setminus B_m = \{v \in \mathbb{Z}^2 \times \{0,1\} : v \in B_n \cap B_m^c\}$ . Sejam  $\{B_m \leftrightarrow FL_n \text{ em } B_n\}$ ,  $\{B_m \leftrightarrow FR_n \text{ em } B_n\}$  eventos disjuntos em  $B_n$  e considere o evento  $E_{B_n \setminus B_m} = \{\text{existe um caminho ocupado, inteiramente contido na região } B_n \setminus B_m, \text{ conectando os dois caminhos anteriores}\}$  (ver Figura 2.3). Temos que



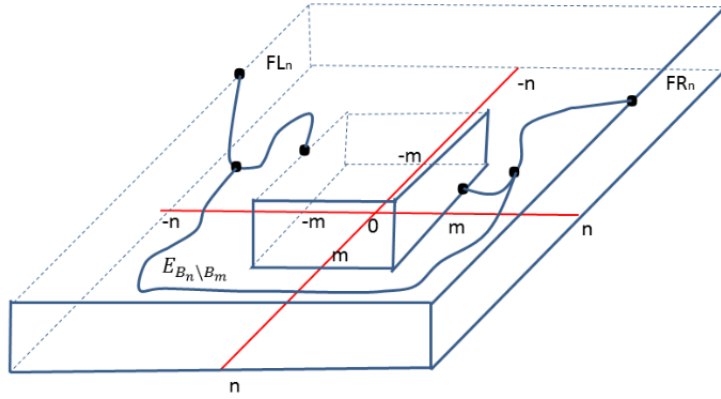


Figura 2.3: Cruzamento ocupado no sentido esquerda-direita na caixa  $B_n$ .

$$\begin{aligned}
P_p(E_{n,n}) &\geq P_p\left(\{B_m \leftrightarrow FL_n \text{ em } B_n\} \cap \{B_m \leftrightarrow FR_n \text{ em } B_n\} \cap E_{B_n \setminus B_m}\right) \\
&= P_p\left(\{B_m \leftrightarrow FL_n \text{ em } B_n\} \cap \{B_m \leftrightarrow FR_n \text{ em } B_n\}\right) - \\
&\quad P_p\left(\{B_m \leftrightarrow FL_n \text{ em } B_n\} \cap \{B_m \leftrightarrow FR_n \text{ em } B_n\} \cap E_{B_n \setminus B_m}^c\right) \\
&= P_p\left(\{B_m \leftrightarrow FL_n \text{ em } B_n\} \cap \{B_m \leftrightarrow FR_n \text{ em } B_n\}\right) - P_p(A_{m,n}) \\
&\geq (1 - \epsilon^{\frac{1}{6}})^2 - P_p(A_{m,n}) \\
&\rightarrow (1 - \epsilon^{\frac{1}{6}})^2, \text{ quando } n \rightarrow \infty \\
&\rightarrow 1, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

■

Acabamos de ver que quando há percolação a probabilidade de cruzarmos uma caixa  $[-n, n] \times [-n, n] \times \{0, 1\}$  suficientemente grande, também é grande.

Os dois resultados seguintes nos dizem o quão grande precisa ser a probabilidade de cruzar uma caixa para que tenhamos percolação.

**Proposição 2.2.** *Se  $n$  e  $p$  são tais que  $P_p(E_{2n,n}) \geq \frac{49}{50}$ , então  $\theta(p) > 0$ .*

*Prova:* Seja  $n \geq 1$ . Observe a Figura 2.4, uma aplicação das propriedades FKG e PF nos fornece que

$$P_p(E_{4n,n}) \geq [P_p(E_{2n,n})]^3 [P_p(E_{n,n})]^2.$$

Como  $\{E_{2n,n}\} \subset \{E_{n,n}\}$ , temos

$$P_p(E_{4n,n}) \geq [P_p(E_{2n,n})]^5.$$

Isto implica que

$$P_p(E_{4n,n}^c) \leq 1 - [P_p(E_{2n,n})]^5.$$

Logo,

$$[P_p(E_{4n,n}^c)]^2 \leq \left\{ 1 - [P_p(E_{2n,n})]^5 \right\}^2. \quad (2.4)$$

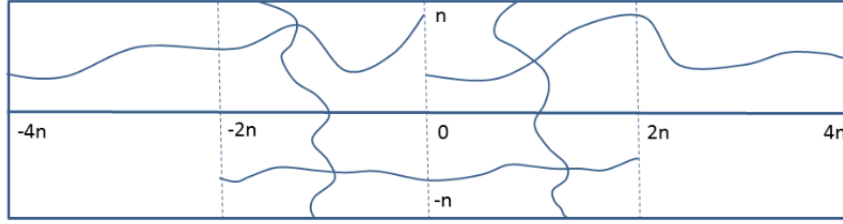


Figura 2.4: Cruzamento ocupado no sentido esquerda-direita no retângulo  $[-4n, 4n] \times [-n, n]$ .

Considere os eventos  $\bar{E}_{4n,n} = \{\text{existe um cruzamento ocupado no sentido esquerda-direita na caixa } [-4n, 4n] \times (0, 2n] \times \{0, 1\}\}$  e  $E_{4n,n} = \{\text{existe um cruzamento ocupado no sentido esquerda-direita na caixa } [-4n, 4n] \times [-2n, 0] \times \{0, 1\}\}$ .

Observe que  $\bar{E}_{4n,n}$  e  $E_{4n,n}$  são independentes, pois dependem de sítios em regiões disjuntas. Também são simétricos e  $\{E_{4n,2n}^c\} \subset \{\bar{E}_{4n,n}^c \cap E_{4n,n}^c\}$ . Logo,

$$P_p(E_{4n,2n}^c) \leq [P_p(E_{4n,n}^c)]^2. \quad (2.5)$$

Combinando (2.4) e (2.5) obtemos

$$P_p(E_{4n,2n}^c) \leq \left\{ 1 - [P_p(E_{2n,n})]^5 \right\}^2. \quad (2.6)$$

Para prosseguirmos vamos usar a desigualdade de Bernoulli (ver [9]), que nos diz que  $(1 + y)^n \geq 1 + ny$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $y \geq -1$ .

Seja  $x \in [0, 1]$ , tomando  $y = x - 1$  temos que

$$(1 + x - 1)^n \geq 1 + n(x - 1).$$

Logo,

$$x^n - 1 \geq n(x - 1).$$

Portanto,

$$(1 - x^n)^2 \leq [n(1 - x)]^2.$$

Para todo  $x \in [\frac{49}{50}, 1]$  temos que

$$25(1 - x)^2 \leq \frac{1}{2}(1 - x).$$

Consequentemente

$$(1 - x^5)^2 \leq \frac{1}{2}(1 - x). \quad (2.7)$$

Combinando (2.6) e (2.7), concluímos que

$$\begin{aligned} P_p(E_{4n,2n}^c) &\leq \frac{1}{2}[1 - P_p(E_{2n,n})] \\ &= \frac{1}{2}P_p(E_{2n,n}^c). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por indução vamos mostrar que para  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$P_p(E_{2^{m+1}n,2^m n}^c) \leq \frac{1}{2^m}P_p(E_{2n,n}^c). \quad (2.9)$$

Vimos que para  $m = 1$  a desigualdade é verdadeira (veja (2.8)). Suponha verdadeira para  $m = k$ , isto é

$$P_p(E_{2^{k+1}n,2^k n}^c) \leq \frac{1}{2^k}P_p(E_{2n,n}^c). \quad (2.10)$$

Considere os eventos  $\bar{E} = \{\text{existe um cruzamento ocupado no sentido esquerda-direita na caixa } [-2^{k+2}n, 2^{k+2}n] \times (0, 2^{k+1}n] \times \{0, 1\}\}$  e  $\underline{E} = \{\text{existe um cruzamento ocupado no sentido esquerda-direita na caixa } [-2^{k+2}n, 2^{k+2}n] \times [-2^{k+1}n, 0] \times \{0, 1\}\}$ .

Note que  $\{E_{2^{k+2}n,2^{k+1}n}^c\} \subset \{\bar{E}^c \cap \underline{E}^c\}$ , além disso,  $\bar{E}^c$  e  $\underline{E}^c$  são independentes (regiões disjuntas) e simétricos. Logo,

$$\begin{aligned} P_p(E_{2^{k+2}n,2^{k+1}n}^c) &\leq [P_p(\bar{E}^c)]^2 \\ &= [P_p(E_{2^{k+2}n,2^k n}^c)]^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como  $\{E_{2^{k+1}n,2^k n}\} \subset \{E_{2^k n,2^k n}\}$ , temos por FKG e PF que (ver Figura 2.5)

$$\begin{aligned} P_p(E_{2^{k+2}n,2^k n}) &\geq [P_p(E_{2^{k+1}n,2^k n})]^3 [P_p(E_{2^k n,2^k n})]^2 \\ &\geq [P_p(E_{2^{k+1}n,2^k n})]^5. \end{aligned}$$

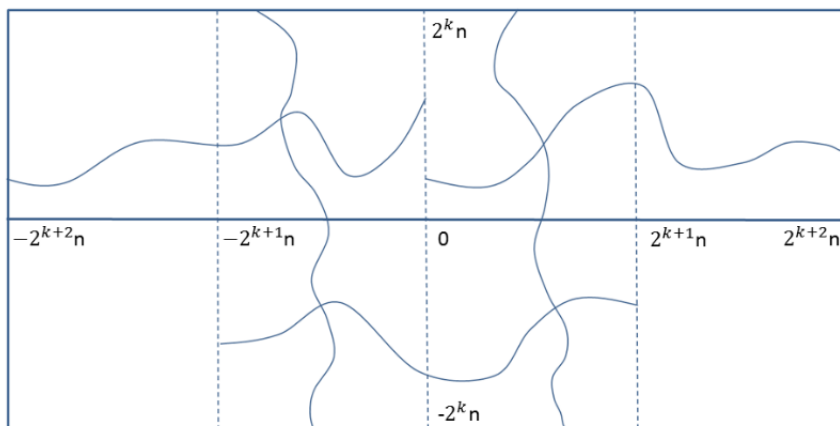


Figura 2.5: Realização do evento  $E_{2^{k+2}n, 2^k n}$ .

Isto implica que

$$\begin{aligned} P_p(E_{2^{k+2}n, 2^k n}^c) &\leq 1 - [P_p(E_{2^{k+1}n, 2^k n})]^5 \\ &= 1 - [1 - P_p(E_{2^{k+1}n, 2^k n}^c)]^5. \end{aligned}$$

Logo,

$$[P_p(E_{2^{k+2}n, 2^k n}^c)]^2 \leq \{1 - [1 - P_p(E_{2^{k+1}n, 2^k n}^c)]^5\}^2. \quad (2.12)$$

Combinando (2.11) e (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} P_p(E_{2^{k+2}n, 2^{k+1}n}^c) &\leq \{1 - [1 - P_p(E_{2^{k+1}n, 2^k n}^c)]^5\}^2 \\ &\leq \{1 - [1 - \frac{1}{2^k} P_p(E_{2n, n}^c)]^5\}^2 \quad (\text{por (2.10)}) \\ &\leq \frac{1}{2} \{1 - [1 - \frac{1}{2^k} P_p(E_{2n, n}^c)]\} \quad (\text{por (2.7)}) \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} P_p(E_{2n, n}^c). \end{aligned}$$

Assim provamos a desigualdade (2.9).

Para  $k \in \mathbb{N}$ , defina as caixas  $B_k$  da seguinte maneira:

$$B_k = \begin{cases} [0, 2^k n] \times [0, 2^{k+1} n] \times \{0, 1\}, & \text{se } k \text{ é ímpar,} \\ [0, 2^{k+1} n] \times [0, 2^k n] \times \{0, 1\}, & \text{se } k \text{ é par.} \end{cases}$$

Para  $k$  ímpar, considere o evento  $E_k = \{\text{existe um cruzamento ocupado em } B_k \text{ que conecta os lados } [0, 2^k n] \times \{0\} \times \{0, 1\} \text{ e } [0, 2^k n] \times \{2^{k+1} n\} \times$

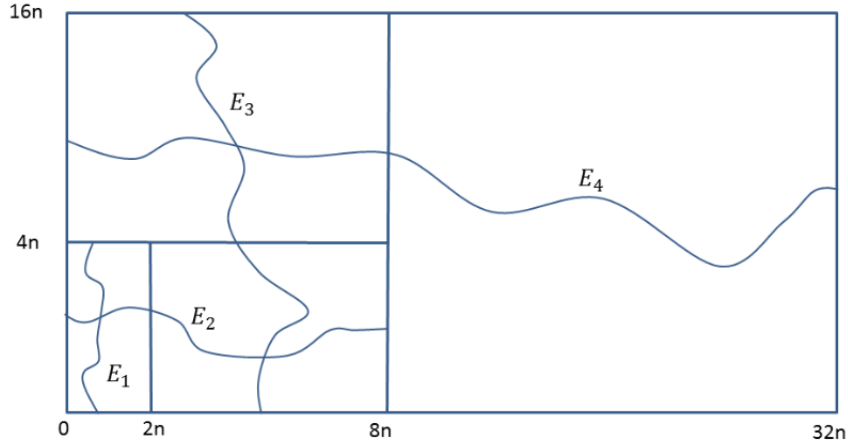


Figura 2.6: Cruzamentos ocupados nas caixas  $B'_k$ s.

$\{0, 1\}$ . Para  $k$  par, considere o evento  $E_k = \{\text{existe um cruzamento ocupado em } B_k \text{ que conecta os lados } \{0\} \times [0, 2^k n] \times \{0, 1\} \text{ e } \{2^{k+1} n\} \times [0, 2^k n] \times \{0, 1\}\}$  (ver Figura 2.6).

Note que  $E_k = E_{2^k n, 2^{k-1} n}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Assim,

$$P_p(E_k^c) = P_p(E_{2^k n, 2^{k-1} n}^c).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} P_p(E_k^c) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} P_p(E_{2n, n}^c) \quad (\text{por (2.9)}) \\ &= P_p(E_{2n, n}^c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq 1. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Borell Cantelli  $P_p(E_k^c \text{ infinitas vezes}) = 0$ . Isto é,  $P_p(\omega \in \Omega : \exists k_0(\omega) \text{ tal que } E_k(\omega) \text{ ocorre } \forall k \geq k_0(\omega)) = 1$ . Este fato implica que quase certamente existe um caminho ocupado infinito, ou seja, ocorre percolação. ■

**Teorema 2.3.** *Existe  $\epsilon > 0$  com a seguinte propriedade. Se  $n$  e  $p$  são tais que  $P_p(E_{n, n}) > 1 - \epsilon$ , então  $\theta(p) > 0$ .*

Em primeiro momento vamos assumir que o teorema acima seja verdadeiro, na seção seguinte trataremos da sua demonstração.

Agora podemos mostrar o principal resultado deste trabalho, isto é, em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$  não há percolação na fase crítica.

**Teorema 2.4.** Em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0,1\}$  não há percolação no ponto crítico, ou seja,  $\theta(p_c) = 0$ .

*Prova:* Suponha  $\theta(p) > 0$ . Pelo Lema 2.1 temos que  $P_p(E_{n,n}) \rightarrow 1$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists n_0(\epsilon)$  tal que  $P_p(E_{n,n}) > 1 - \epsilon$ ,  $\forall n > n_0$ . Fixe  $N$  tal que  $P_p(E_{N,N}) > 1 - \epsilon$ , note que  $P_p(E_{N,N}) = p^{|O_N|}(1-p)^{|V_N|}$ , onde  $|O_N|$  e  $|V_N|$  representam as quantidades de sítios ocupados e vazios em  $[-N, N] \times [-N, N] \times \{0,1\}$ , respectivamente. Logo,  $P_p(E_{N,N})$  é uma função contínua em  $p$ . Tome  $p_1 < p$  suficientemente próximo de  $p$ . Pela continuidade de  $P_p(E_{N,N})$  temos que  $P_{p_1}(E_{N,N}) > 1 - \epsilon$ . Logo, pelo Teorema 2.3 concluímos que  $\theta(p_1) > 0$ .

Por outro lado suponha  $\theta(p_c) > 0$ , logo existe  $p_2 < p_c$  tal que  $\theta(p_2) > 0$ . Absurdo, pois não há percolação em valores  $p_2 < p_c$ . Logo  $\theta(p_c) = 0$ . ■

## 2.4 Prova do Teorema 2.3

Nesta seção provaremos o Teorema 2.3, isto é, mostraremos que existe  $\epsilon > 0$  com a seguinte propriedade. Se  $n$  e  $p$  são tais que  $P_p(E_{n,n}) > 1 - \epsilon$ , então  $\theta(p) > 0$ . Para isto precisaremos de algumas definições e resultados auxiliares, que serão enunciados a seguir.

**Definição 2.10.** Considere as caixas:  $S_1 = [-3n/2, n/2] \times [-n, n] \times \{0,1\}$ ,  $S_2 = [-n/2, 3n/2] \times [-n, n] \times \{0,1\}$  e  $S_3 = [-n/2, n/2] \times [-n, 0] \times \{0,1\}$ . Sejam  $L_1 = \{-3n/2\} \times [-n, n] \times \{0,1\}$ ,  $R_1 = \{n/2\} \times [-n, n] \times \{0,1\}$ ,  $T_1 = [-3n/2, n/2] \times \{n\} \times \{0,1\}$  e  $B_1 = [-3n/2, n/2] \times \{-n\} \times \{0,1\}$  os lados esquerdo, direito, superior e inferior de  $S_1$ , respectivamente. Defina  $L_i, R_i, T_i$  e  $B_i$  similarmente para  $S_i$ ,  $i = 2, 3$  (ver Figura 2.7).

**Definição 2.11.** Chamamos de cruzamento no sentido superior-inferior na caixa  $[-n, n] \times [-m, m] \times \{0,1\}$ , o cruzamento  $\gamma = (v_0, \dots, v_k)$  tal que  $v_0 \in [-n, n] \times \{m\} \times \{0,1\}$ ,  $v_k \in [-n, n] \times \{-m\} \times \{0,1\}$  e nenhum outro sítio do caminho pertence às duas regiões anteriores. .

Dizemos que  $\gamma$  é autoevitante se  $v_i = v_j$  implicar que  $i = j$  e fortemente autoevitante se  $\pi(v_i) = \pi(v_j)$  implicar que  $|i - j| = 1$ . Note que segundo esta definição, todo caminho fortemente autoevitante é autoevitante.

Defina o evento  $F_n = \{\text{existe um cruzamento ocupado no sentido superior-inferior em } S_3 \text{ que está conectado a } R_2 \text{ por um caminho ocupado totalmente contido em } S_2\}$ .

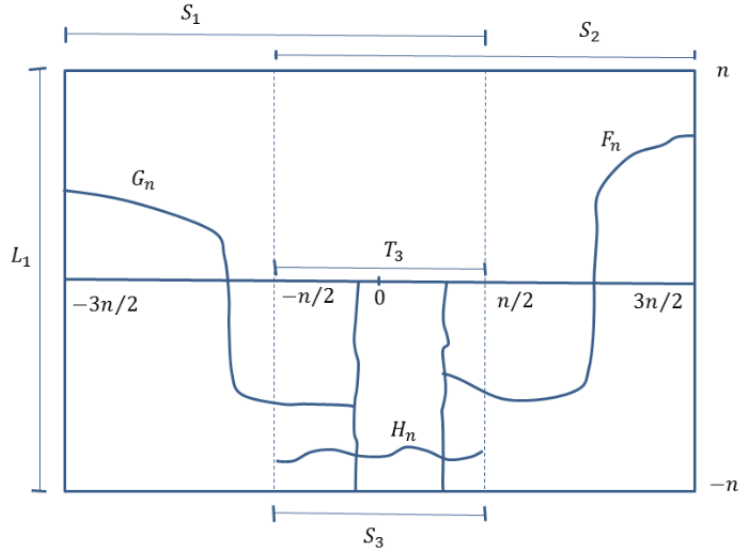


Figura 2.7: Caixas  $S_1, S_2$  e  $S_3$  com os eventos  $F_n, G_n$  e  $H_n$ .

**Lema 2.5.** *Suponha  $\theta(p) > 0$ . Então para todo  $n$  suficientemente grande,*

$$P_p(F_n) \geq \frac{1}{4}p^4.$$

*Prova:* Considere o evento  $A_n = \{\text{existe um cruzamento ocupado no sentido superior-inferior em } S_3\}$ . Pela Proposição 2.16 temos

$$P_p(A_n) = P_p\left(\bigcup_{R \in S_3} D_R\right) = \sum_R P_p(D_R), \quad (2.13)$$

onde a soma é sobre todas as fitas  $R$  de cruzamentos superiores-inferiores autoevitantes em  $S_3$ .

Para uma fita  $R$  em  $S_3$ , defina  $\tilde{R}$  a reflexão de  $R$  através de  $T_3$ , isto é,

$$\tilde{R} = \{(x, -y, z) : (x, y, z) \in R\}.$$

Seja  $G_R$  a região em  $S_2$  estritamente à direita de  $R \cup \tilde{R}$  e considere o evento  $C_R = \{\text{existe um caminho ocupado em } S_2 \text{ que conecta } R_2 \text{ com a fita } R \cup \tilde{R}\}$ . Neste evento, queremos apenas que o caminho contenha um sítio em  $G_R$  adjacente a  $R \cup \tilde{R}$ .

Note que  $C_R$  e  $D_R$  só dependem do estado dos sítios em  $G_R$  e  $L_R$  (ver Proposição 2.16), respectivamente. Logo,

$$P_p(D_R \cap C_R) = P_p(D_R)P_p(C_R).$$

Fixada uma fita  $R$ , considere os eventos  $C_{1R}=\{\text{existe um cruzamento ocupado em } G_R \text{ que conecta } R_2 \text{ com a fita } R\}$  e  $C_{2R}=\{\text{existe um cruzamento ocupado em } G_R \text{ que conecta } R_2 \text{ com a fita } \tilde{R}\}$ . Observe que  $\{E_{n,n}\} \subset \{C_R\}$ . Temos também que  $\{C_R^c\} \subset \{C_{1R}^c \cap C_{2R}^c\}$ ,  $\{C_{1R}^c \cap C_{2R}^c\} \subset \{C_R^c\}$  e, além disso, estes eventos são decrescentes. Pelas propriedades FKG e PF temos

$$\begin{aligned} 1 - P_p(E_{n,n}) &\geq 1 - P_p(C_R) = P_p(C_R^c) \\ &= P_p(C_{1R}^c \cap C_{2R}^c) \\ &\geq [P_p(C_{1R}^c)]^2. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\sqrt{1 - P_p(E_{n,n})} \geq P_p(C_{1R}^c).$$

Logo,

$$P_p(C_{1R}) \geq 1 - [1 - P_p(E_{n,n})]^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

$$\geq \frac{1}{2}. \quad (2.15)$$

Na última desigualdade acima foi usado o Lema 2.1, tomando  $n$  suficientemente grande.

Sejam  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $P_p(E_{n_1, n_1}) \geq \frac{3}{4}$  e  $P_p(A_{n_2}) \geq \frac{1}{2}$ . Tome  $n = \max\{n_1, n_2\}$ . Novamente pelo Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned} \sum_R P_p(D_R \cap C_{1R}) &= \sum_R P_p(D_R) P_p(C_{1R}) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_R P_p(D_R) \quad (\text{por (2.15)}) \\ &= \frac{1}{2} P_p(A_n) \quad (\text{por (2.13)}) \\ &\geq \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Observe que se estivéssemos em  $\mathbb{Z}^2$  a prova estaria completa, pois  $\{D_R \cap C_{1R}\} \subset \{F_n\}$ . No entanto, em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ , o caminho usado no evento  $C_{1R}$  não faz com que em  $S_3$ , tenhamos obrigatoriamente, um cruzamento ocupado superior-inferior contido em  $R$ . A seguir trataremos deste problema.

Dizemos que uma fita  $R$  é ocupada quando é obtida de um caminho ocupado, ou seja, contém um caminho ocupado. Analogamente como foi



definida a fita ocupada mais à esquerda para um cruzamento ocupado no sentido superior-inferior (ver Definição 2.14), definimos para o cruzamento ocupado no sentido esquerda-direita em  $G_R$  a fita ocupada mais baixa no sentido esquerda-direita em  $G_R$ .

Para qualquer fita  $U$  no sentido esquerda-direita em  $G_R$  considere o evento  $D_{R,U} = \{U \text{ é a fita mais baixa em } G_R\}$ . Vamos particionar o evento  $D_R \cap C_{1R}$  de acordo com estas fitas. Note que para quaisquer fitas  $U_1$  e  $U_2$  distintas, os eventos  $D_{R,U_1}$  e  $D_{R,U_2}$  são disjuntos. Logo,

$$P_p(D_R \cap C_{1R}) = P_p\left(\bigcup_U D_R \cap C_{1R}\right) = \sum_U P_p(D_R \cap C_{1R}), \quad (2.17)$$

onde a soma é sobre todas as fitas ocupadas  $U$  em  $G_R$  que conectam  $R_2$  à fita ocupada  $R$ .

Para quaisquer fitas  $R$  e  $U$ , seja  $G_{R,U}$  a região de  $G_R$  acima de  $U$  unida com  $\tilde{R}$ . Note que  $D_R$  e  $D_{R,U}$  são independentes do estado dos sítios em  $G_{R,U}$ . Podemos encontrar um caminho determinístico  $\gamma_{R,U}$  em  $G_{R,U}$ , com no máximo dois sítios, com um vizinho em  $R$  e um vizinho em  $U$ . Defina o evento  $A_{R,U} = \{\text{todos os sítios da fita do caminho } \gamma_{R,U} \text{ estão ocupados}\}$  (ver Figura 2.8) e note que este evento cria uma conexão entre as fitas  $R$  e  $U$ . Como  $\{D_R \cap D_{R,U} \cap A_{R,U}\} \subset \{F_n\}$ , temos

$$\begin{aligned} P_p(F_n) &\geq P_p\left(\bigcup_R \bigcup_U D_R \cap D_{R,U} \cap A_{R,U}\right) \\ &\geq P_p(A_{R,U}) \sum_R \sum_U P_p(D_R \cap D_{R,U}) \\ &= P_p(A_{R,U}) \sum_R P_p(D_R \cap C_{1R}) \quad (\text{por (2.17)}) \\ &\geq \frac{p^4}{4} \quad (\text{por (2.16)}). \end{aligned}$$

■

Agora veremos que quando há percolação a probabilidade de cruzar a caixa  $[-2n, 2n] \times [-n, n] \times \{0, 1\}$  é estritamente positiva.

**Proposição 2.6.** *Suponha  $\theta(p) > 0$ , então existe  $c_1 > 0$  tal que*

$$P_p(E_{2n,n}) \geq c_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

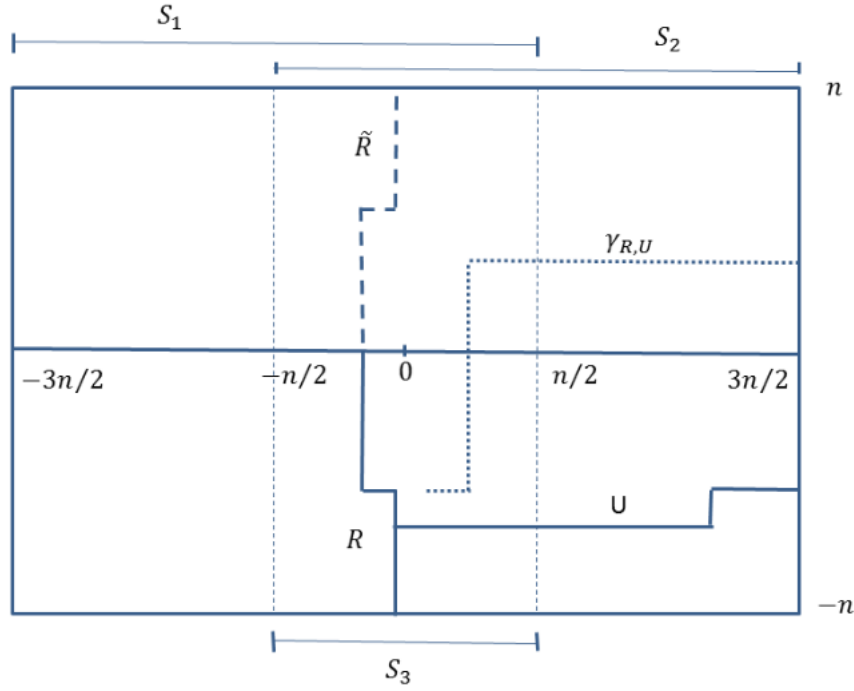


Figura 2.8: Fita ocupada mais à esquerda  $R$ ,  $\tilde{R}$  sua reflexão sobre  $T_3$ , fita ocupada mais baixa  $U$  e na junção das fitas o caminho  $\gamma_{R,U}$  que conecta os caminhos contidos nas fitas.

**Prova:** Esta proposição segue diretamente do Lema 2.5.

Primeiro vamos obter uma cota para  $P_p(E_{3n/2,n})$ . Temos que (ver Figura 2.7)

$$\begin{aligned}
 P_p(E_{3n/2,n}) &\geq P_p(F_n \cap G_n \cap H_n) \\
 &\geq P_p(F_n)P_p(G_n)P_p(H_n) \\
 &= [P_p(F_n)]^2 P_p(E_{n/2,n/2}).
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Aplicando limite em ambos os lados, pelos Lemas 2.1 e 2.5, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(E_{3n/2,n}) \geq \frac{p^8}{16}.$$

Logo, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tal que

$$P_p(E_{3n/2,n}) \geq \frac{p^8}{16} - \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Seja  $m = \min\{P_p(E_{3k/2,k}) : k < n_0\}$ . Logo,

$$\begin{aligned} P_p(E_{3n/2,n}) &\geq \min\left\{m, \frac{p^8}{16}\right\} \\ &\equiv c_2 \\ &> 0 \quad \forall n. \end{aligned}$$

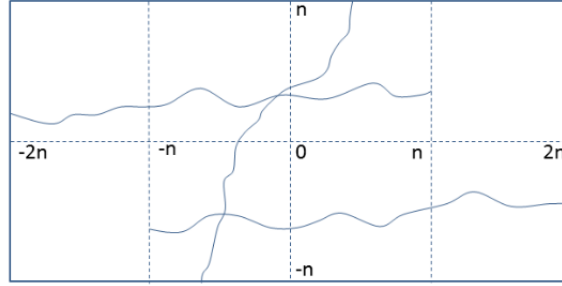


Figura 2.9: Exemplo do evento  $E_{2n,n}$ .

Por outro lado temos que (ver Figura 2.9)

$$\begin{aligned} P_p(E_{2n,n}) &\geq [P_p(E_{3n/2,n})]^2 P_p(E_{n,n}) \\ &\geq c_3 P_p(E_{n,n}). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Pelo Lema 2.1 isto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(E_{2n,n}) \geq c_3.$$

Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $N_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tal que

$$P_p(E_{2n,n}) \geq c_3 - \epsilon, \quad \forall n \geq N_0.$$

Seja  $m' = \min\{P_p(E_{2k,k}) : k < N_0\}$ . Logo,

$$\begin{aligned} P_p(E_{2n,n}) &\geq \min\{m', c_3\} \\ &\equiv c_1 \\ &> 0 \quad \forall n. \end{aligned}$$

■

Como corolário da proposição acima temos que a probabilidade de um circuito ocupado ao redor da origem é estritamente positiva.

Para  $m, n \in \mathbb{N}$ , seja  $Ann(m, n)$  um anel de raio interno  $m$  e raio externo  $n$ . Isto é,  $B_n \setminus B_m$ , onde  $B_n = [-n, n]^2 \times \{0, 1\}$ . Dado  $n$  considere o evento  $\mathcal{A}_n = \{\text{existe um circuito ocupado ao redor da origem em } Ann(n, 3n)\}$ .

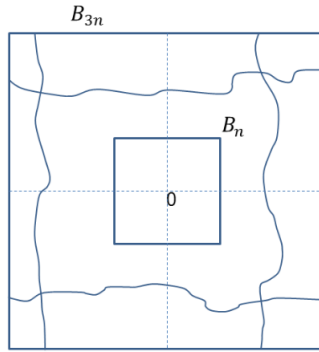


Figura 2.10: Circuito ocupado na região  $B_{3n} \setminus B_n$ .

**Corolário 2.7.** *Suponha  $\theta(p) > 0$ . Então existe  $c^* > 0$  tal que para todo  $n$*

$$P_p(\mathcal{A}_n) \geq c^*.$$

*Prova:* Observe que (ver Figura 2.10)

$$P_p(\mathcal{A}_n) \geq [P_p(E_{3n,n})]^4.$$

Por outro lado (ver Figura 2.11)

$$P_p(E_{3n,n}) \geq P_p(E_{n,n})[P_p(E_{2n,n})]^2.$$

Como  $\{E_{2n,n}\} \subset \{E_{n,n}\}$ , pela Proposição 2.6 existe  $c_4 > 0$  tal que  $P_p(\mathcal{A}_n) > c_4^3 = c^*$ . ■

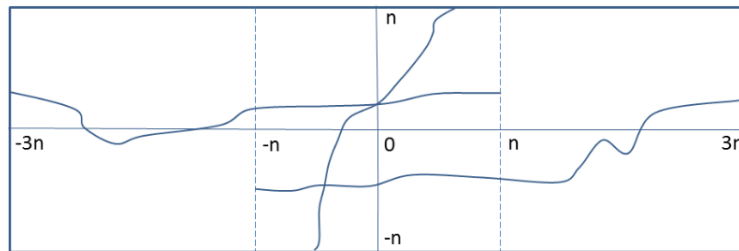


Figura 2.11: Exemplo do evento  $E_{3n,n}$ .

Agora veremos que quando ocorre percolação a probabilidade de cruzar uma caixa  $[-2n, 2n] \times [-n, n] \times \{0, 1\}$  suficientemente grande converge para 1.

**Teorema 2.8.** *Suponha  $\theta(p) > 0$ , então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(E_{2n,n}) = 1.$$

*Prova:* Como anteriormente vamos encontrar um limite para  $P_p(E_{3n/2,n})$ .  
Combinando (2.18) e (2.19) obtemos

$$P_p(E_{2n,n}) \geq \{[P_p(F_n)]^2 P_p(E_{n/2,n/2})\}^2 P_p(E_{n,n}). \quad (2.20)$$

Logo é suficiente mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(F_n) = 1$ . A notação utilizada aqui é a mesma do Lema 2.5.

Por (2.14), temos que

$$P_p(C_{1R}^c) \leq [1 - P_p(E_{n,n})]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.21)$$

Vamos dividir a fita  $R$  em duas partes, uma superior e outra inferior:

$$R_U = R \cap \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right] \times \left[-\frac{n}{2}, 0\right] \times \{0, 1\},$$

$$R_L = R \cap \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right] \times \left[-n, -\frac{n}{2}\right] \times \{0, 1\},$$

respectivamente.

Considere os eventos  $C_{1,R_U} = \{\text{existe um caminho ocupado em } G_R \text{ que conecta } R_2 \text{ a } R_U\}$  e  $C_{1,R_L} = \{\text{existe um caminho ocupado em } G_R \text{ que conecta } R_2 \text{ a } R_L\}$ . Note que  $\{C_{1,R_U}^c \cap C_{1,R_L}^c\} \subset \{C_{1,R}^c\}$ . Utilizando FKG e combinando com (2.21) temos

$$P_p(C_{1,R_U}^c) P_p(C_{1,R_L}^c) \leq [1 - P_p(E_{n,n})]^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto,

$$\max\{P_p(C_{1,R_U}), P_p(C_{1,R_L})\} \geq 1 - [1 - P_p(E_{n,n})]^{\frac{1}{4}}. \quad (2.22)$$

Suponha que o máximo em (2.22) seja  $P_p(C_{1,R_L})$ , se este não for o caso substitua o cruzamento ocupado mais baixo que conecta  $R_2$  a  $R_L$  pelo mais alto de  $R_2$  para  $R_U$ .

O evento  $C_{1,R_L}$  é a união disjunta sobre todas as fitas mais baixas  $U$  em  $G_R$  que conectam  $R_2$  a  $R_L$ . Ou seja,

$$P_p(C_{1,R_L}) = \sum_U P_p(D_{R,U}).$$

Dependendo de  $R$  e  $U$  vamos escolher um sítio determinístico  $v$  a uma distância 2 de  $R$  e  $U$ . Sejam  $A_{nn_1}, \dots, A_{nn_k}$  com  $\left\lfloor k = \frac{1}{2} \ln n \right\rfloor$  anéis centrados em  $v$ , com  $A_{nn_j} = B(v; 2j+1) \setminus B(v; 2j-1)$ , sendo  $B(v; m) = [-m, m]^2 \times \{0, 1\}$  a caixa transladada e centrada em  $v$ .

Seja  $\tilde{G}_{R,U}$  a região em  $S_2$  acima de  $U$  e à direita de  $R \cup \tilde{R}$ . Defina o evento  $Hj_{R,U} = \{\text{existe um caminho ocupado em } A_{nn_j} \cap \tilde{G}_{R,U} \text{ que contém os sítios } (x_1, y_1, 0), (x_1, y_1, 1) \text{ adjacentes a } R \text{ e } (x_2, y_2, 0), (x_2, y_2, 1) \text{ adjacentes a } U\}$ .

**Fato:** Existe  $c > 0$  tal que para todo  $j, n$  e escolhas de  $R$  e  $U$  temos

$$P_p(Hj_{R,U}) \geq c. \quad (2.23)$$

**Prova do Fato:** Qualquer caminho em  $A_{nn_j} \cap \tilde{G}_{R,U}$  que contém um sítio adjacente a  $R$  e um sítio adjacente a  $U$  será chamado de um *cruzamento quarto de círculo*.

Tal como no caso de um cruzamento mais à esquerda em uma caixa, podemos definir a fita mais interna associada a um *cruzamento quarto de círculo*.

Considere o evento  $I_{R,U,W} = \{W \text{ é a fita mais interna em } A_{nn_j} \cap \tilde{G}_{R,U}\}$ . Note que para  $W_1$  e  $W_2$  distintas os eventos  $I_{R,U,W_1}$  e  $I_{R,U,W_2}$  são disjuntos. Além disso, o evento  $I_{R,U,W}$  depende somente do estado dos sítios no interior de  $W$ .

Considere o evento  $J_{R,U,W} = \{\text{todos os sítios da fita associada a um cruzamento quarto de círculo estão ocupados}\}$ . Veja que  $\{J_{R,U,W}\} \subset \{Hj_{R,U}\}$ . Logo,

$$\begin{aligned} P_p(Hj_{R,U}) &= P_p\left(\bigcup_W I_{R,U,W} \cap J_{R,U,W}\right) \\ &= \sum_W P_p(I_{R,U,W} \cap J_{R,U,W}) = \sum_W P_p(I_{R,U,W}) P_p(\cap J_{R,U,W}) \\ &\geq p^8 \sum_W P_p(I_{R,U,W}) \geq p^8 P_p(C_j) > 0. \end{aligned}$$

Onde  $C_j = \{\text{existe um circuito ocupado centrado em } v \text{ no anel } A_{nn_j}\}$ . ■

Voltando ao teorema, note que para qualquer  $j$ ,  $\{D_R \cap D_{R,U} \cap Hj_{R,U}\} \subset \{F_n\}$ . Logo,

$$\begin{aligned}
P_p(F_n) &\geq P_p(D_R \cap D_{R,U} \cap Hj_{R,U}) \\
&= P_p\left(\bigcup_R \bigcup_U D_R \cap D_{R,U} \cap Hj_{R,U}\right) \\
&= \sum_R \sum_U P_p(D_R \cap D_{R,U} \cap Hj_{R,U}) \\
&= \sum_R \sum_U P_p(D_R \cap D_{R,U}) P_p(\cup_j Hj_{R,U}) \\
&\geq [1 - (1 - c)^{\frac{1}{4} \ln n}] \sum_U P_p(D_{R,U}) \sum_R P_p(D_R) \quad (\text{por (2.23)}) \\
&= [1 - (1 - c)^{\frac{1}{4} \ln n}] P_p(C_{1,R_L}) \sum_R P_p(D_R) \\
&\geq [1 - (1 - c)^{\frac{1}{4} \ln n}] \{1 - [1 - P_p(E_{n,n})]^{\frac{1}{4}}\} P_p(E_{n/2,n/2}) \quad (2.24) \\
&\rightarrow 1 \text{ quando } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

■

Agora estamos aptos a provar o Teorema 2.3.

**Prova do Teorema 2.3 :** Suponha que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(E_{n,n}) = 1$ . Portanto em (2.24) temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(F_n) = 1$ . Consequentemente em (2.20) temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(E_{2n,n}) = 1$ . Logo existe  $\epsilon > 0$  tal que  $P_p(E_{2n,n}) = 1 - \epsilon \geq 49/50$ . Pela Proposição 2.2 temos que  $\theta(p) > 0$ .

■

## 2.5 Continuidade da Probabilidade de Percolação na Fase Crítica

Considerando percolação de sítios (primeiros vizinhos) independentes em  $\mathbb{Z}^d$ , para algumas dimensões é uma questão em aberto mostrar que  $\theta(p)$  é contínua em  $p_c$ . Não é difícil mostrar que  $\theta$  é contínua à direita no intervalo  $[0, 1]$ . Assim,

$$\theta(p_c) = \lim_{p \downarrow p_c} \theta(p).$$

Por outro lado  $\theta(p) = 0$  para  $p < p_c$ , portanto  $\theta$  é contínua em  $p_c$  se, e somente se,  $\theta(p_c) = 0$ . Neste caso, quase certamente, os aglomerados

ocupados são finitos. Acredita-se que  $\theta(p_c) = 0$ , tal resultado é conhecido para  $d = 2$  e  $d \geq 11$ .

Antes do principal resultado desta seção, continuidade da função  $\theta(p)$  em  $(p_c, 1]$ , provaremos duas proposições sobre funções semicontínuas.

**Definição 2.12.** Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se semicontínua superiormente (semicontínua inferiormente) no ponto  $x_0 \in X$  quando,  $\forall \epsilon > 0$  dado,  $\exists \delta > 0$  tal que, se  $x \in X$  e  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \epsilon$  ( $f(x) > f(x_0) - \epsilon$ ).

Observe que de acordo com a definição acima  $f$  é contínua se, e somente se, for semicontínua superior e inferiormente.

**Proposição 2.9.** Considere a função real  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se existe uma sequência monótona não crescente de funções contínuas  $\varphi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ ,  $\forall x \in X$ . Então  $f$  é semicontínua superiormente.

*Prova:* Seja  $x \in X$ . Dado  $\epsilon > 0$ , tome  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|f(x) - \varphi_N(x)| < \epsilon/2$ . Como  $\varphi_N$  é contínua, existe  $\delta > 0$  tal que  $|\varphi_N(x) - \varphi_N(x_0)| < \epsilon/2$ ,  $\forall x_0 \in (x - \delta, x + \delta) \cap X$ . Temos que

$$\varphi_N(x_0) - \varphi_N(x) < \epsilon - \epsilon/2 < f(x) - \varphi_N(x) + \epsilon.$$

Como  $f(x_0) \leq \varphi_N(x_0)$ , segue que  $f(x_0) < f(x) + \epsilon$ , sempre que  $|x - x_0| < \delta$ . Logo,  $f$  é semicontínua superiormente. ■

**Proposição 2.10.** Seja  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monótona não decrescente e semicontínua superiormente. Então  $f$  é contínua à direita em  $X$ .

*Prova:* Como  $f$  é semicontínua superiormente,  $\forall x \in X$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $f(x_0) < f(x) + \epsilon$ ,  $\forall x_0 \in [x, x + \delta) \cap X$ .

Por outro lado  $f$  é monótona não decrescente, então  $f(x_0) - f(x) \geq 0$ . Assim,  $0 \leq f(x_0) - f(x) < \epsilon$ ,  $\forall x_0 \in [x, x + \delta) \cap X$ . Logo  $f$  é contínua à direita. ■

**Teorema 2.11.** A função  $\theta(p)$  é contínua no intervalo  $(p_c, 1]$ .

Vamos provar o teorema acima com o auxílio de dois lemas.

**Lema 2.12.**  $\theta(p)$  é contínua à direita no intervalo  $[0, 1]$ .



**Prova:** Considere os eventos  $A = \{0 \leftrightarrow \infty\}$ ,  $A_n = \{0 \leftrightarrow \partial B_n\}$  e a caixa  $B_n = [-n, n]^2 \times \{0, 1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Temos que  $A_{n+1} \subset A_n$ , assim  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ .

Observe que

$$\theta(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_p(0 \leftrightarrow \partial B_n).$$

Note que  $P_p(0 \leftrightarrow \partial B_n)$  é contínua em  $p$ , pois o evento  $\{0 \leftrightarrow \partial B_n\}$  depende somente de uma quantidade finita de sítios em  $B_n$ . Além disso,  $\{0 \leftrightarrow \partial B_{n+1}\} \subset \{0 \leftrightarrow \partial B_n\}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Assim,  $\theta$  é o limite de funções contínuas decrescentes. Logo, pelas Proposições 2.9 e 2.10 temos que  $\theta$  é contínua à direita. ■

**Lema 2.13.**  $\theta(p)$  é contínua à esquerda no intervalo  $(p_c, 1]$ .

**Prova:** Seja  $(X_v : v \in \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\})$  uma coleção de variáveis aleatórias iid com distribuição uniforme  $[0, 1]$ .

Para  $p \in [0, 1]$ , definimos:

$$\eta_p(v) = \begin{cases} 1, & \text{se } X_v < p, \\ 0, & \text{se } X_v \geq p. \end{cases}$$

Dizemos que um sítio  $v$  é  $p$ -ocupado se  $\eta_p(v) = 1$  e  $p$ -vazio caso contrário.

Seja  $C_p$  o aglomerado  $p$ -ocupado contendo a origem, note que  $C_\pi \subset C_p$ ,  $\forall \pi \leq p$ .

Devemos mostrar que

$$\lim_{\pi \uparrow p} \theta(\pi) = \lim_{\pi \uparrow p} P_p(|C_\pi| = \infty) = P_p(|C_\pi| = \infty, \text{ para algum } \pi < p),$$

uma vez que o evento  $\{|C_\pi| = \infty\}$  é crescente em  $\pi$ .

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} \theta(p) &= P_p(|C_p| = \infty, |C_\pi| < \infty \forall \pi < p) \\ &+ P_p(|C_p| = \infty, |C_\pi| = \infty \text{ para algum } \pi < p). \end{aligned}$$

Supondo que

$$P_p(|C_p| = \infty, |C_\pi| < \infty \forall \pi < p) = 0, \quad (2.25)$$

temos

$$\begin{aligned} \theta(p) &= P_p(|C_p| = \infty, |C_\pi| = \infty \text{ para algum } \pi < p) \\ &= P_p(|C_\pi| = \infty \text{ para algum } \pi < p) \end{aligned}$$

Portanto temos que provar (2.25).

Seja  $p > p_c$  e suponha que  $|C_p| = \infty$ . Se  $p_c < \alpha < p$ , existe (quase certamente) um aglomerado  $\alpha$ -ocupado  $I_\alpha$ . Além disso  $I_\alpha$  é um subgrafo de  $C_p$ , caso contrário existiria pelo menos dois aglomerados infinitos  $p$ -ocupados. Segue que existe um caminho  $\gamma$   $p$ -ocupado conectando a origem há algum sítio de  $I_\alpha$ .

Tal caminho  $\gamma$  é finito e cada sítio  $v \in \gamma$  satisfaz  $X_v < p$ , portanto  $\mu = \max\{X_v : v \in \gamma\}$  satisfaz  $\mu < p$ .

Se  $\pi$  satisfaz  $\pi \geq \alpha$  e  $\mu < \pi < p$ , então existe um caminho  $\pi$ -ocupado conectando a origem a algum sítio em  $I_\pi$ , de modo que  $|C_\pi| = \infty$ . ■

## 2.6 Cruzamento Mais à Esquerda

Na Seção 2.4 utilizamos a noção de cruzamento mais à esquerda. Nesta seção vamos mostrar como podemos construir tal cruzamento.

Vamos começar com uma importante consequência da Propriedade Fundamental.

Seja  $B_n$  a caixa  $[0, n] \times [0, n] \times \{0, 1\}$ .

**Lema 2.14.** *Se existe um cruzamento ocupado no sentido superior-inferior em  $B_n$  (em uma configuração  $\omega$ ), então existe um cruzamento ocupado no sentido superior-inferior fortemente autoevitante em  $B_n$ .*

**Prova:** Seja  $\gamma = (v_0, \dots, v_k)$  qualquer cruzamento ocupado no sentido superior-inferior em  $B_n$ .

Vamos usar o seguinte argumento para remover os “loops”. Se existe um par de sítios  $v_i, v_j \in \gamma$  com  $i < j$  mas  $v_i = v_j$  retiramos os sítios  $v_i, \dots, v_{j-1}$  pertencentes a  $\gamma$ . Em vez disso, se existe um par de sítios  $v_i, v_j \in \gamma$  com  $i < j - 1$ ,  $\pi(v_i) = \pi(v_j)$  e  $v_i \neq v_j$ , removemos os sítios  $v_{i+1}, \dots, v_{j-1}$  pertencentes a  $\gamma$ .

Com este procedimento produzimos uma nova sequência de sítios  $\gamma_1$ . Repita o mesmo procedimento para  $\gamma_1$ , obtendo assim uma nova sequência de sítios  $\gamma_2$ . Continue o processo até que não haja “loop”.

Note que este processo resulta em uma sequência  $\gamma'$ , que é um cruzamento ocupado no sentido superior-inferior fortemente autoevitante em  $B_n$ . Primeiramente é um caminho porque só retiramos sítios  $v_k, \dots, v_l$  tais que  $v_{k-1}$  e  $v_{l+1}$  são vizinhos ocupados em  $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ . De fato, no primeiro caso em que existe  $v_i = v_j$  e  $i < j$ , se  $i \geq 2$  então  $v_{i-1}$  é um vizinho de  $v_j$ . No segundo caso  $v_i$  e  $v_j$  têm a mesma projeção e pela PF estão conectados. Como o primeiro e o último sítios não são removidos em nenhum passo,

$\gamma'$  toca o lado superior e inferior de  $B_n$ . Portanto, por construção,  $\gamma'$  é um cruzamento ocupado no sentido superior-inferior fortemente autoevitante em  $B_n$ . ■

Seja  $\gamma = (v_0, \dots, v_k)$  qualquer cruzamento no sentido superior-inferior fortemente autoevitante em  $B_n$ . Note que  $\pi(\gamma)$  não necessariamente é um caminho em  $\pi(B_n)$ , pois pode acontecer que  $\pi(v_i) = \pi(v_{i+1})$  para algum  $i$ . Porém, após a retirada dos sítios duplicados obtemos um novo caminho  $\tilde{\pi}(\gamma) = \tilde{\gamma}$  que é autoevitante em  $\pi(B_n)$ . Além disso, este caminho é um cruzamento no sentido superior-inferior em  $\pi(B_n)$ , pois somente os sítios inicial e final estão na parte superior e inferior de  $\pi(B_n)$ , respectivamente.

Considere o conjunto,  $A = \{\tilde{\gamma} : \text{existe um cruzamento } \gamma \text{ no sentido superior-inferior fortemente autoevitante em } B_n \text{ com } \tilde{\pi}(\gamma) = \tilde{\gamma} \text{ e } \tilde{\gamma} \text{ é um cruzamento no sentido superior-inferior autoevitante em } \pi(B_n)\}$ .

Para qualquer  $\tilde{\gamma} \in A$ , vamos associar o caminho em  $\mathbb{R}^2$  obtido quando se conecta sítios consecutivos por segmentos de reta. Seja  $(y_0, \dots, y_m)$  os sítios do caminho. A partir de  $y_0$  trace um segmento de reta, de comprimento  $1/2$ , perpendicular à reta  $y = n + 1/2$ . A partir do ponto de interseção da reta com o segmento crie o segmento de reta que vai até o ponto  $(-1/2, n + 1/2)$ . Similarmente faça o mesmo para  $y_m$  com a reta  $y = -1/2$  e o ponto  $(-1/2, -1/2)$ . Finalmente una os pontos  $(-1/2, -1/2)$  e  $(-1/2, n + 1/2)$ . Com este procedimento criamos uma curva de Jordan (ver Figura 2.12). Pelo Teorema da curva de Jordan (ver [10]), o conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus C_{\tilde{\gamma}}$  é composto por duas componentes conexas, uma limitada e a outra ilimitada. Seja  $L_{\tilde{\gamma}}$  a componente limitada (região estritamente contida dentro da curva  $C_{\tilde{\gamma}}$ ).

Agora vamos definir o evento cruzamento mais à esquerda.

**Definição 2.13.** Dado qualquer caminho  $\tilde{\gamma} \in A$ , seja  $D_{\tilde{\gamma}}$  o evento em que :

1. Existe um cruzamento ocupado no sentido superior-inferior fortemente autoevitante  $\gamma \in B_n$  tal que  $\tilde{\pi}(\gamma) = \tilde{\gamma}$ ;
2. Não existe um cruzamento ocupado no sentido superior-inferior fortemente autoevitante  $\lambda \in B_n$  tal que a região  $L_{\tilde{\lambda}}$  está estritamente contida em  $L_{\tilde{\gamma}}$ .

Satisfeitas as condições acima, temos o cruzamento ocupado mais à esquerda.

**Proposição 2.15.** *As seguintes afirmações são verdadeiras*

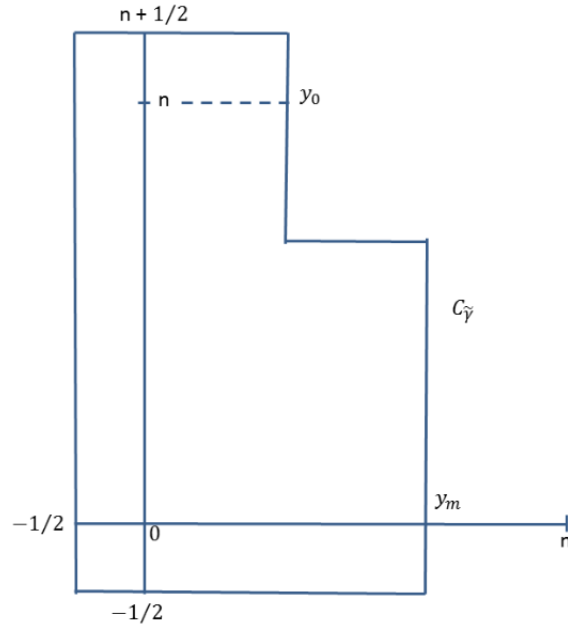


Figura 2.12: Curva de Jordan.

1. O evento  $E_n = \{\text{existe um cruzamento ocupado no sentido superior-inferior em } B_n\}$  é a união disjunta  $\bigcup_{\tilde{\gamma} \in A} D_{\tilde{\gamma}}$ .
2. Seja  $\tilde{\gamma} \in A$ , o evento  $D_{\tilde{\gamma}}$  depende somente do estado dos sítios na região  $X(\tilde{\gamma}) = \{v : v \in \tilde{\gamma}\} \cup \{v : v \in L_{\tilde{\gamma}}\}$

**Prova:** A segunda afirmação é imediata e segue diretamente da definição de  $D_{\tilde{\gamma}}$ .

Para a primeira parte vamos mostrar que se  $\tilde{\gamma}, \tilde{\lambda} \in A$  ( $\tilde{\gamma} \neq \tilde{\lambda}$ ), então os eventos  $D_{\tilde{\gamma}}$  e  $D_{\tilde{\lambda}}$  não ocorrem simultaneamente.

Por absurdo suponha que  $D_{\tilde{\gamma}}$  e  $D_{\tilde{\lambda}}$  ocorram simultaneamente. Como  $\tilde{\gamma} \rightarrow C_{\tilde{\gamma}}$  é injetiva e  $\tilde{\gamma} \neq \tilde{\lambda}$ , temos que  $C_{\tilde{\gamma}} \neq C_{\tilde{\lambda}}$ .

Note que ambas as curvas contêm a fronteira  $\{-\frac{1}{2}\} \times [-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ . Começamos no ponto  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  prosseguindo no sentido horário. Continue o movimento até encontrar o primeiro ponto onde as curvas se separam. Neste ponto temos duas maneiras de se locomover, uma em  $C_{\tilde{\gamma}}$  e outra em  $C_{\tilde{\lambda}}$ .

No evento  $D_{\tilde{\gamma}} \cap D_{\tilde{\lambda}}$  existe um ponto  $q \in C_{\tilde{\gamma}} \cap L_{\tilde{\lambda}}$ . Este ponto possui uma componente  $C_q$  em  $C_{\tilde{\gamma}} \cap L_{\tilde{\lambda}}$ , que é um segmento em  $C_{\tilde{\gamma}}$ . Considere o conjunto,  $B = \{\alpha : \alpha \text{ é um cruzamento no sentido superior-inferior fortemente autoevitante em } B_n\}$ .

Dependendo da posição geométrica das curvas  $C_{\tilde{\gamma}}$  e  $C_{\tilde{\lambda}}$ , vamos mostrar como produzir um caminho ocupado  $\alpha \in B$  tal que,  $L_{\tilde{\alpha}}$  está estritamente contida em  $L_{\tilde{\lambda}}$ , contrariando a ocorrência do evento  $D_{\tilde{\lambda}}$ .

Sejam  $z_1$  e  $z_2$  os pontos extremos de  $C_q$  e vamos atravessar  $C_{\tilde{\lambda}}$  no sentido horário. Construiremos o cruzamento  $\alpha$  dependendo da posição dos  $z'_i$ s.

Considere os cruzamentos ocupados  $\gamma, \lambda \in B$ . Primeiro vamos assumir que  $z_1, z_2 \in \pi(B_n)$  (ver Figura 2.13a). Então o segmento  $C_q$  (em negrito na Figura 2.13a), é a projeção de algum segmento  $\gamma_q$  de  $\gamma$  em  $B_n$  e  $z_1, z_2$  são as projeções dos sítios  $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in \gamma$ .

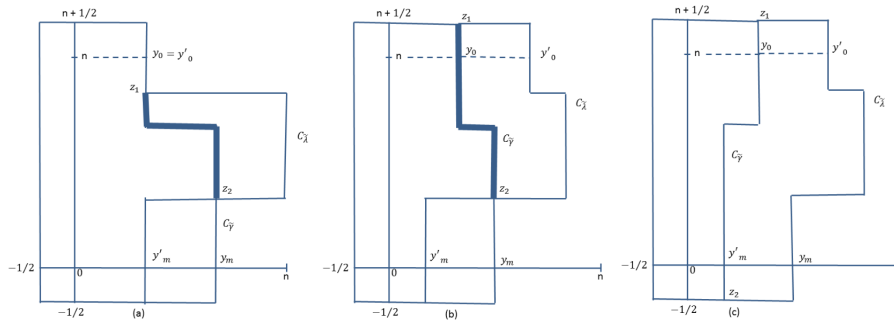


Figura 2.13: Possíveis localizações dos  $z'_i$ s.

Note que existem  $w_1, w_2 \in \lambda$  com projeções iguais a  $z_1, z_2$ , respectivamente. Construímos  $\alpha$  seguindo  $\lambda$  a partir do topo de  $B_n$  até  $w_1$ , movendo para  $\hat{z}_1$  se  $\hat{z}_1 \neq w_1$ , caso contrário permaneça em  $w_1$ . Em seguida retornamos para  $\lambda$  em  $w_2$  se  $\hat{z}_2 \neq w_2$ , seguindo até a parte inferior de  $B_n$ . Como  $\lambda$  é fortemente autoevitante,  $z_1 \neq z_2$ ,  $\alpha$  também é fortemente autoevitante. Além disso,  $\tilde{\pi}(\alpha) = \tilde{\alpha}$  segue  $\tilde{\lambda}$ , desviando somente em  $L_{\tilde{\lambda}}$  e a região  $L_{\tilde{\alpha}}$  está estritamente contida em  $L_{\tilde{\lambda}}$ , chegando em uma contradição.

Suponha que  $z_1 \notin \pi(B_n)$  e  $z_2 \in \pi(B_n)$  (Figura 2.13b), construímos  $\alpha$  iniciando no primeiro sítio de  $\gamma$ , passando pelo segmento  $\gamma_q$  (em negrito na Figura 2.13b) até chegar em  $\hat{z}_2$  e depois voltamos para  $\lambda$ .

Finalmente se  $z_1, z_2 \notin \pi(B_n)$  (Figura 2.13c) basta tomar  $\alpha = \gamma$ .

Assim, em qualquer um dos casos encontramos um cruzamento ocupado  $\alpha \in B$  tal que a região  $L_{\tilde{\alpha}}$  está estritamente contida em  $L_{\tilde{\lambda}}$ , chegando em uma contradição.

Em seguida vamos mostrar que se o evento  $E_n$  ocorre, então  $D_{\tilde{\gamma}}$  deve ocorrer para algum  $\tilde{\gamma} \in A$ .

Note que o procedimento descrito acima pode ser utilizado para construirmos um cruzamento ocupado  $\alpha \in B$  tal que  $L_{\tilde{\alpha}}$  está estritamente contida em  $L_{\tilde{\gamma}}$ , sempre que  $\gamma \in B$  é ocupado e existe um caminho ocupado

$\lambda \in B$  com  $\tilde{\lambda}$  interceptando  $L_{\tilde{\gamma}}$ . Além disso, a região  $L_{\tilde{\alpha}}$  tem uma área menor ou igual à área  $L_{\tilde{\gamma}}$  menos 1. Assim quando  $E_n$  ocorrer podemos começar com qualquer cruzamento ocupado em  $B$  e aplicar este procedimento, um número finito de vezes, até que tenhamos um cruzamento  $\gamma$  de tal forma que não há nenhum caminho ocupado  $\alpha \in B$ , com  $L_{\tilde{\alpha}}$  estritamente contida em  $L_{\tilde{\gamma}}$ . Para este cruzamento o evento  $D_{\tilde{\gamma}}$  ocorre. ■

Vamos ver a proposição anterior em termos de fitas.

**Definição 2.14.** Seja  $\gamma$  um cruzamento ocupado no sentido superior-inferior em  $B_n$ , definimos o evento  $D_{R_\gamma} = \{R_\gamma \text{ é a fita ocupada mais à esquerda em } B_n\}$ .

A fita mais à esquerda está associada ao caminho mais à esquerda (ver Definição 2.13). Seja  $L_{R_\gamma}$  a região estritamente à esquerda de  $R_\gamma$ .

**Proposição 2.16.** *As seguintes afirmações são verdadeiras*

1. O evento  $E_n = \{\text{existe um cruzamento ocupado no sentido superior-inferior em } B_n\}$  é a união disjunta  $\bigcup_{R \in B_n} D_R$ , sobre todas as fitas  $R$  de cruzamentos superiores-inferiores autoevitantes em  $B_n$ .
2. Para uma fita  $R$ , o evento  $D_R$  depende somente do estado dos sítios na região  $R \cup L_R$ , em que  $L_R$  é a região estritamente à esquerda de  $R$ .

**Prova:** A segunda afirmação segue diretamente da definição de  $D_R$ .

Observe que caminhos com fitas distintas devem ter projeções distintas. Pela Proposição 2.15 vimos que dados cruzamentos ocupados  $\gamma, \lambda \in B$  os eventos  $D_{\tilde{\gamma}}$  e  $D_{\tilde{\lambda}}$  não podem ocorrer simultaneamente. Caso ocorram, é possível encontrar um caminho aberto  $\alpha \in B$  com  $L_{\tilde{\alpha}}$  estritamente contida em  $L_{\tilde{\lambda}}$ . Assim a região  $L_{R_\gamma}$  também está estritamente contida em  $L_{R_\lambda}$ . Ou seja,  $D_{R_\gamma}$  e  $D_{R_\lambda}$  não podem ocorrer simultaneamente.

Agora basta mostrar que se o evento  $E_n$  ocorre, então  $D_R$  ocorre para algum cruzamento  $\gamma \in B$ . Novamente pela Proposição 2.15 vimos como produzir um cruzamento aberto  $\alpha \in B$  mais à esquerda. Para este mesmo cruzamento o evento  $D_{R_\alpha}$  ocorre. ■

## Referências Bibliográficas

- [1] Broadbent, S.R. e Hammersley, J.M., Percolation processes I. Crystals and mazes, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 53, 629-641 (1957).
- [2] Damron, M., Newman, C. M. e Sidoravicius, V. Absence of site percolation at criticality in  $\mathbb{Z}^2 \times \{0,1\}$ . Random Structures and Algorithms 47, 328-340 (2015).
- [3] Duminil-Copin, H., Sidoravicius, V., Tassion, V., Absence of infinite cluster for critical Bernoulli percolation on slabs, arXiv: 1401.7130, (2014).
- [4] Fortuin, C.M., Kasteleyn, P.W., e Ginibre, J., Correlation inequalities on some partially ordered sets, Communications in Mathematical Physics 22, 89-103 (1971).
- [5] Grimmett, G.R., Percolation, Springer (1989).
- [6] Hara, T., Slade, G., Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions. Commun.ath. Phys. 128, 333-391 (1990).
- [7] Harris, T., A lower bound for the critical probability in a certain percolation process, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 56, 13-20 (1960).
- [8] Kesten, H., The critical probability of bond percolation on the square lattice equals  $1/2$ , Communications in Mathematical Physics 74, 41-59 (1980).
- [9] Lima, E.L., Curso de análise, Vol. 1, Projeto Euclides, IMPA, (2002).
- [10] Lima, E. L.: Espaços Métricos, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Projeto Euclides, (1977).

- [11] Fitzner, R., Van der Hofstad, R., Mean-field behavior for nearest-neighbor percolation function in  $d > 10$ . Extended version. Preprint arXiv:1506.07977, (2015).
- [12] Russo, L. A note on percolation. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* 43, 39-48 (1978).
- [13] Seymour, P. D. and Welsh, D. J. A. Percolation probabilities on the square lattice. *Advances in graph theory* (Cambridge Combinatorial Conf., Trinity College, Cambridge, (1977). *Ann. Discrete Math.*, 3, 227-245 (1978).