

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

Fernanda Gabriely Batista Mendes

Processo Skellam INAR(1) Assimétrico

Belo Horizonte
2016

Fernanda Gabriely Batista Mendes

Processo Skellam INAR(1) Assimétrico

Dissertação apresentada ao Curso de Estatística da UFMG, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Estatística.

Orientador: Wagner Barreto de Souza

Doutor

Belo Horizonte

2016

Mendes, Fernanda Gabriely Batista

Processo Skellam INAR(1) Assimétrico / Fernanda Gabriely Batista Mendes - 2016

63.p

1.Estatística. I.Título.

CDU 519.5

Fernanda Gabriely Batista Mendes

Processo Skellam INAR(1) Assimétrico

Dissertação apresentada ao Curso de Estatística da UFMG, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Estatística.

Aprovado em 29 de fevereiro de 2016

BANCA EXAMINADORA

Wagner Barreto de Souza

Doutor

Glaura da Conceição Franco

Doutora

Renato Martins Assunção

Doutor

Alice Lemos de Moraes

Doutora

À minha mãe, Maria José.

À minha irmã, Ane.

Ao meu namorado, Devison.

Resumo

Séries temporais de contagem têm sido um tema bastante estudado nas últimas décadas pela importância em aplicações em diversas situações práticas. Neste trabalho é proposta uma versão assimétrica do modelo de Freeland (2010). Para modelar estas séries temporais, será construído um processo estacionário autoregressivo para valores inteiros de primeira ordem (INAR(1)) com distribuição marginal Skellam assimétrica. Serão estudadas e demonstradas propriedades deste modelo, tais como: distribuição condicional, distribuição conjunta de duas variáveis Z_t e Z_{t-k} , covariância, função geradora de momentos condicional, esperança e variância condicional. Os parâmetros do modelo serão estimados através do método de mínimos quadrados condicionais. Também será verificada a consistência e normalidade assintótica dos estimadores. O comportamento dos estimadores será avaliado via simulação Monte Carlo. A dissertação será finalizada aplicando o modelo INAR(1) proposto a uma série temporal real.

Palavras-chaves: Processos INAR(1); Distribuição Skellam assimétrica; Estimação; Inferência.

Abstract

Time series of counts have been a very explored theme in the past decades due to the importance of the application in several practical situations. In this work an asymmetric version of Freeland (2010) model is proposed. In order to model these time series, an autoregressive stationary process of first order (INAR(1)) will be constructed for integer values with the asymmetric Skellam as marginal distribution. Properties of this model will be studied and demonstrated, such as the conditional distribution, the two variable joint distribution Z_t and Z_{t-k} , covariance, conditional moment generating function and also conditional mean and variance. The parameters of the model will be estimated based on conditional least squares estimator. It will also be verified the consistency and the asymptotic normality of the estimators. The behavior of the estimators will be evaluated via Monte Carlo simulation. The master thesis will be completed by applying the proposed INAR(1) model to a real time series.

Key-words: INAR(1) processes; Asymmetric Skellam distribution; Estimation; Inference.

Agradecimentos

Ao fim deste trabalho, agradeço:

Primeiramente à Deus pela bênção da vida, por me dar a oportunidade de desenvolver este trabalho, de conhecer as pessoas que conheci durante a minha vida acadêmica e por renovar dia após dia minhas forças para não desanimar diante das dificuldades.

Ao meu orientador Wagner, por ser um excelente professor, por ser paciente, por entender minhas limitações e pelo incentivo. Sem sua competência e conhecimento, nada disso seria possível. Muito obrigada!

À minha querida irmã Ane, pelo apoio, amizade, amor e incentivo nas horas mais difíceis. Te amo muito!

Ao meu amado namorado Devison, pelo amor, compreensão e pela tolerante espera. Obrigada por me lembrar todas as vezes que me senti derrotada que eu era capaz de superar qualquer coisa. Sou muito feliz por ter você em minha vida.

Aos meus tios Zilda e Deraldo e ao meu avô Ataíde, por acreditarem em mim e pelas palavras de incentivo e conforto.

Ao meu pai e sua família, pela companhia e cuidado em BH.

A todos os meus professores do curso de matemática da Unimontes, em especial, Marize, Nilson e Sebastião por acreditarem em mim e pelo incentivo em prosseguir com a minha caminhada acadêmica, e aos professores Edson e Valdomiro pela orientação em projetos que foram essenciais para a minha formação.

Aos meus queridos colegas do curso de matemática, que de certa forma considero parte da minha família, Suéllen, Leandro, Lucas, Elza, Luciana, Renato, Aniele, Danilo e Daniel. Obrigada pelo companheirismo e parceria durante os quatro anos de curso.

Aos funcionários do Departamento de Estatística da UFMG, em especial à Rogéria e Rose, pelas palavras que me inspiraram confiança e esperança.

Aos professores da pós-graduação em estatística, em especial àqueles com quem tive o prazer de fazer disciplinas, Wagner, Vinícius, Rosângela, Fábio, Róger e Glaura. À FAPEMIG pelo apoio financeiro.

À banca examinadora, prof. Renato Assunção (UFMG), prof^a Glaura Franco (UFMG) e prof^a Alice Lemos (CEFET-MG). Obrigada por atenderem ao convite.

Aos colegas de mestrado, em especial aos grandes amigos conquistados, Juliana, Gabi, Bárbara, Douglas, Estevão e Uriel. Sem vocês, com certeza a minha chegada até aqui teria sido extremamente árdua. Obrigada pelos sorrisos, pelo apoio e pelos intensos momentos de estudo.

E finalmente, agradeço à minha mãe Maria José. Na verdade não há palavras o suficiente para expressar minha gratidão, a senhora acreditou em mim até nos momentos em que não existiam boas perspectivas, me levantou em todos os momentos em que me sentia no chão, me fez lembrar todos os dias de onde vim e que enquanto existisse um fio de esperança eu não deveria desistir. Mãe, sua luta foi árdua, mas surtiu resultados. Este diploma é seu, muito obrigada!

*“A persistência é o menor caminho do
êxito”.*

(Charles Chaplin)

Sumário

Lista de Figuras	9
Lista de Tabelas	10
1 Introdução	11
2 Preliminares	13
2.1 Processo INAR	13
2.1.1 Processo Poisson INAR	15
2.1.2 Distribuição Skellam	17
2.1.3 Modelo INAR em \mathbb{Z}	18
3 Definição do Modelo	22
3.1 Processo Skellam INAR(1) Assimétrico	22
3.2 Propriedades	25
4 Estimação dos Parâmetros e Distribuição Assintótica dos Estimadores	33
4.1 Mínimos Quadrados	33
4.2 Estimadores para os parâmetros do modelo considerando $\alpha_1 = \alpha_2$	33
4.3 Estudo de Simulação	37
5 Aplicação a dados reais	41
6 Conclusão	45
A Apêndice	46
A.1 Resultados Referentes ao Processo Poisson INAR(1)	46

A.2	Função de probabilidade condicional para o Modelo INAR(1) simétrico em \mathbb{Z}	49
A.3	Função geradora de Momentos	50
A.4	Demonstração variância Condicional	55
A.5	Distribuição Assintótica dos Estimadores	58
A.6	Tabela dados Reais	62

Lista de Figuras

3.1	Trajectoria, gráfico de barras de frequências e gráficos das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial de um Processo Skellam INAR(1) assimétrico simulado com $(\lambda_1; \alpha_1) = (10; 0, 1)$ e $(\lambda_2; \alpha_2) = (5; 0, 2)$ e tamanho de amostra 1000.	24
3.2	Trajectoria, gráfico de barras de frequências e gráficos das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial de um Processo Skellam INAR(1) assimétrico com $(\lambda_1; \alpha_1) = (3; 0, 3)$ e $(\lambda_2; \alpha_2) = (2; 0, 4)$ e tamanho de amostra 1000.	25
5.1	Gráficos da série temporal e funções de autocorrelação e autocorrelação parcial para a diferença entre a temperatura mínima diária do Rio de Janeiro e a média histórica de 01 de Janeiro até 31 de Outubro de 2015.	42
5.2	Função de autocorelação amostral para os resíduos e gráfico do processo de saltos para o Processo Skellam INAR(1) Assimétrico.	44

Lista de Tabelas

4.1	Médias empíricas e erros quadráticos médios das estimativas dos parâmetros, com $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\alpha_1 = 0,3$ e $\alpha_2 = 0,4$	38
4.2	Médias empíricas e erros quadráticos médios das estimativas dos parâmetros, com $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, $\alpha_1 = 0,1$ e $\alpha_2 = 0,2$	39
5.1	Estatísticas descritivas para a diferença entre a temperatura mínima diária do Rio de Janeiro e a média histórica de 01 de Janeiro até 31 de Outubro de 2015.	41
5.2	Estimativas para os parâmetros e estatísticas de bondade de ajuste: MAE, MdAE, MSE para o Processo Skellam INAR(1) assimétrico em \mathbb{Z} e o Processo Skellam INAR(1) simétrico em \mathbb{Z}	43
A.1	Diferença entre a temperatura mínima histórica e a temperatura mínima diária (01 de janeiro - 31 de outubro de 2015).	62

1 Introdução

Nas últimas três décadas, diversas pesquisas envolvendo séries temporais de contagem vêm sendo desenvolvidas. Uma série temporal é definida como um conjunto de observações y_t ordenadas no tempo t , em que indicamos o tempo como uma variável definida em \mathbb{N}^* ¹.

O interesse no estudo de séries temporais de contagem vem do fato de ser comum encontrar situações práticas onde as mesmas estão presentes, como por exemplo o número de pacientes em um hospital esperando atendimento em um determinado ponto do tempo, o número de pessoas em uma fila esperando para realizar um serviço em um determinado momento, entre outros. Autores como Steutel e Harn (1979), McKenzie (1985) e Al-Osh e Alzaid (1987) realizaram pesquisas pioneiras envolvendo séries temporais de contagem.

Na literatura são encontrados modelos de séries temporais em que a marginal do processo é contínua. São alguns deles: o Modelo Auto-Regressivo (AR), o Modelo Média Móvel (MA), entre outros. Existem muitos estudos envolvendo estas modelagens e, para diversos casos, os resultados apresentados são bastantes satisfatórios. Porém, se os dados sugerem uma modelagem discreta, é razoável e mais coerente considerar uma modelagem com marginal discreta para a análise destes dados.

Neste trabalho a modelagem que será usada é o Processo INAR (Integer Auto Regressive) de ordem 1. Neste processo são modeladas séries temporais que assumem valores inteiros, nas quais o que acontece no instante t depende somente do que aconteceu no instante $t - 1$.

Considerando que o produto entre um número real e um número inteiro nem sempre resulta em um número inteiro, isso se torna um problema para o processo INAR, em que a marginal considerada para o mesmo tem distribuição discreta. Steutel e Harn (1979), buscando solucionar esta questão, propuseram um operador denominado Operador de redução binomial (representado por: “ \circ ”). Baseado neste operador, Al-Osh e Alzaid

¹ $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$

(1987) estudaram um processo INAR com ênfase no caso cuja marginal tem distribuição Poisson.

Ristić et al. (2009) definiram um processo com marginal geométrica. Através de um operador binomial negativo, Barreto-Souza e Bourguignon (2014), por sua vez, definem um processo INAR(1) assimétrico, com marginal Laplace, que vem da diferença entre duas variáveis aleatórias latentes com distribuição geométrica, usando o operador binomial negativo proposto por Ristić et al. (2009).

Neste trabalho será abordada uma versão assimétrica do que foi proposto por Freeland (2010), em que foi construído um processo INAR(1) estacionário, simétrico em torno de zero, que pode ter uma autocorrelação positiva ou negativa e inovações que vêm da diferença entre duas variáveis aleatórias Poisson, que é denominada Distribuição Skellam. Neste trabalho será considerada a definição da distribuição apresentada por Alzaid e Omair (2010).

A dissertação está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2, é definido o processo INAR(1) e são apresentados dois processos importantes na construção do modelo proposto neste trabalho, o processo Poisson INAR(1) e o Processo INAR(1) simétrico em \mathbb{Z} , bem como a distribuição Skellam, usada neste último. No Capítulo 3, é definido o Processo Skellam INAR(1) assimétrico, objeto de estudo neste trabalho, e são demonstradas algumas de suas propriedades. No Capítulo 4 os parâmetros do modelo serão estimados através do método de mínimos quadrados condicionais. Também será verificada a consistência e normalidade assintótica dos estimadores. O comportamento dos estimadores serão avaliados via simulação Monte Carlo. Usando uma série temporal real, referente a dados de temperatura da capital do Rio de Janeiro, registrado de 01 de Janeiro à 31 de outubro de 2015, no Capítulo 5 é feito o ajuste desta série usando o modelo proposto, para exemplificar a sua aplicabilidade.

2 Preliminares

Antes de definir o modelo proposto neste trabalho, é importante conhecer a definição de um Processo INAR, o processo INAR(1) em \mathbb{Z} e o processo Poisson INAR(1), os quais são base para a construção do Processo INAR(1) aqui proposto. Isso será feito neste capítulo, nas seções a seguir.

2.1 Processo INAR

Um modelo INAR é um processo autoregressivo, cujo histórico do processo é tomado a partir de um operador de redução binomial “ \circ ”. As novas informações introduzidas no processo são trazidas a partir de uma componente denominada “Inovação”.

O Processo Autoregressivo inteiro (INAR) tem como objetivo modelar dados que assumam valores inteiros. Um processo é dito ser autoregressivo quando o que irá acontecer no instante t depende do que aconteceu nos instantes anteriores.

Um processo autoregressivo de ordem p é definido como o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tal que:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t,$$

em que $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ são parâmetros que assumem valores em \mathbb{R} e ϵ_t é um ruído branco, iid com $E(\epsilon_t) = 0$ e $Var(\epsilon_t) = \sigma^2$.

Antes de definir o processo INAR, é importante entender o operador de redução binomial, que é definido por Steutel e Harn (1979):

Definição 2.1.1. Seja X uma variável aleatória assumindo valores inteiros não negativos. Então, para $\alpha \in [0, 1]$ o operador de redução binomial “ \circ ” é definido por

$$\alpha \circ X = \sum_{i=1}^X Y_i,$$

em que $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de variáveis aleatórias iid, independentes de X com função de probabilidade dada por:

$$P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = 0) = \alpha.$$

O operador de redução binomial “ \circ ” satisfaz as propriedades a seguir.

Propriedade 2.1.1. Seja X e Y uma variáveis aleatórias que assumem valores inteiros não-negativos e α e β números reais, em que $\alpha \in [0, 1]$ e $\beta \in [0, 1]$. As seguintes igualdades são válidas:

- a) $0 \circ X = 0$ e $1 \circ X = X$;
- b) $E(\alpha \circ X) = \alpha E(X)$;
- c) Propriedade associativa: $\beta \circ (\alpha \circ X) \stackrel{d}{=} (\beta\alpha) \circ X$;
- d) Propriedade distributiva: $\alpha \circ (X + Y) \stackrel{d}{=} \alpha \circ X + \alpha \circ Y$.

O operador de redução binomial representa a parte do valor observado do passado que continuará sendo observado no presente. Uma interpretação prática para o seu uso, por exemplo, seria a quantidade de pacientes que permaneceram em um hospital de um dia para o outro, ou seja, aqueles que não receberam alta ou não foram a óbito. O operador de redução binomial é a componente do modelo responsável por trazer essa informação, isto é, por fazer essa contagem. Neste exemplo, fica mais clara a ideia de que o operador de redução binomial é um operador de redução, já que a contagem de elementos no instante t será um número igual ou menor que a quantidade de elementos que existiam no instante $t-1$, nunca maior, e segue distribuição binomial por se tratar, em sua definição, da soma de variáveis aleatórias independentes com distribuição bernoulli.

Definido o operador de redução binomial, o conceito do modelo INAR pode ser introduzido. Aqui será definido somente o modelo INAR de primeira ordem, interesse deste trabalho.

Definição 2.1.2. Um processo estocástico discreto de valor inteiro não-negativo, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, é chamado de processo INAR(1) se satisfaz a seguinte equação:

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \epsilon_t, \quad (2.1)$$

em que “ \circ ” é o operador de redução binomial, $\alpha \in [0, 1)$ e $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias iid de valores inteiros não-negativos. No processo INAR, a variável $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é chamada Inovação.

A expressão do processo INAR(1) dada na equação 2.1 é formada por duas parcelas e pode ser interpretada da seguinte maneira: suponha que se deseja saber quantos

pacientes estão registrados em um hospital em um certo dia. Deve-se levar em consideração quantos são os pacientes restantes do dia anterior no hospital (os que não receberam alta ou não foram a óbito) e deve-se levar em conta também quantos pacientes deram entrada no hospital naquele dia. Considerando X_t o número de pacientes no hospital em um dia específico, o número de pacientes remanescentes do dia anterior é expressado por $\alpha \circ X_{t-1}$, em que cada paciente permanece no hospital com probabilidade α , e a quantidade de pacientes que entraram no hospital naquele dia em específico é dada pela componente ϵ_t , chamada Inovação, justamente por se tratar das novas quantidades introduzidas no processo.

Neste trabalho é proposto um Processo INAR assimétrico em \mathbb{Z} de primeira ordem, com distribuição marginal Skellam assimétrico. Para a construção desse processo, dois outros processos são de grande importância, são eles: o Processo Poisson INAR de Al-Osh e Alzaid (1987) e o Processo INAR em \mathbb{Z} proposto por Freeland (2010) com marginal Skellam simétrica. Nas subseções a seguir serão definidos estes dois processos e a distribuição Skellam, uma vez que a marginal do processo INAR \mathbb{Z} segue esta distribuição.

2.1.1 Processo Poisson INAR

Em seu artigo, intitulado “First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process”, Al-Osh e Alzaid (1987) tratam da modelagem de séries temporais que assumem valores inteiros de maneira análoga aos modelos de séries temporais padrão, com ênfase no caso em que a marginal do processo assume distribuição Poisson.

Definição 2.1.3. Seja $\{X_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ um processo satisfazendo a equação:

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \epsilon_t,$$

em que $\alpha \in [0, 1]$ e ϵ_t é uma sequência variáveis aleatórias iid assumindo valores inteiros não negativos. Assuma que $X_t \sim Poisson(\lambda)$. Então, dizemos que X_t é um processo Poisson INAR(1).

Os autores apresentam algumas propriedades para este modelo:

Propriedade 2.1.2. Para o Processo Poisson INAR(1), as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) A marginal do processo pode ser escrita em função da seguinte soma:

$$X_t \stackrel{d}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j};$$

(ii) A distribuição conjunta entre duas variáveis X_t e X_{t-k} é equivalente à:

$$(X_t, X_{t-k}) \stackrel{d}{=} \left(\alpha^k \circ X_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j}, X_{t-k} \right);$$

(iii) A função de covariância é dada por:

$$\gamma(k) = Cov(X_{t-k}, X_t) = \alpha^k \gamma(0) = \alpha^k \lambda.$$

As demonstrações destas propriedades são apresentadas no Apêndice A.1. Estas propriedades serão usadas na demonstração das propriedades do processo proposto por Freeland (2010) e do processo proposto neste trabalho.

Uma das etapas em análise de séries temporais é a estimação dos parâmetros do modelo. No caso do modelo Poisson INAR, os parâmetros são α e λ . Al-Osh e Alzaid (1987) utilizaram os métodos de Mínimos quadrados condicionais e de Yule-Walker para a estimação. Os estimadores encontrados pelo método de Yule-Walker, são:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} (X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})}{\sum_{t=0}^n (X_t - \bar{X})^2},$$

$$\hat{\lambda} = \sum_{t=1}^n \frac{\hat{\epsilon}_t}{n},$$

em que $\hat{\epsilon}_t = X_t - \hat{\alpha}X_{t-1}$ para $t = 1, 2, \dots, n$. Os estimadores encontrados via método de mínimos quadrados condicionais são:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{t=1}^n (X_t X_{t-1}) - \left(\sum_{t=1}^n X_t \sum_{t=1}^n X_{t-1} \right) / n}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=1}^n X_{t-1} \right)^2 / n}, \quad (2.2)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n X_t - \hat{\alpha} \sum_{t=1}^n X_{t-1} \right). \quad (2.3)$$

Freeland e McCabe (2005) verificam uma distribuição assintótica para os estimadores de mínimos quadrados condicionais do Poisson INAR. Considerando $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$ as expressões encontradas em 2.2 e 2.3 respectivamente.

Propriedade 2.1.3. No modelo Poisson INAR(1) os estimadores encontrados via método de mínimos quadrados condicionais são assintoticamente normais, isto é:

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} - \alpha \\ \hat{\lambda} - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N(0, j^{-1}),$$

em que

$$j^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha(1-\alpha)^2}{\lambda} + (1+\alpha)(1-\alpha) & -(1-\alpha)\lambda \\ -(1-\alpha)\lambda & \lambda + \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Os autores também mostram em seu artigo como estimar por máxima verossimilhança os parâmetros α e λ . Porém, aqui será omitido este ponto do trabalho realizado por eles.

O Processo Poisson INAR(1) serviu de base para o trabalho proposto por Freeland (2010), mas, antes de citar o trabalho feito por ele, será introduzida a distribuição Skellam.

2.1.2 Distribuição Skellam

Freeland (2010) utiliza em seu trabalho uma distribuição proposta por Alzaid e Omair (2010). Estes autores estudaram as propriedades e aplicações de uma distribuição obtida a partir da diferença entre duas variáveis aleatórias independentes Poisson. Essa distribuição foi chamada de Skellam.

Definição 2.1.4. Para qualquer par de variáveis aleatórias (X, Y) que podem ser escritas como $X = W_1 + W_3$ e $Y = W_2 + W_3$, com $W_1 \sim \text{Poisson}(\theta_1)$ independente de $W_2 \sim \text{Poisson}(\theta_2)$ e W_3 seguindo uma distribuição qualquer, a função de probabilidade de $Z = X - Y$ é dada por:

$$P(Z = z) = e^{\theta_1 - \theta_2} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right)^{\frac{z}{2}} I_z(2\sqrt{\theta_1\theta_2}), \quad z = \dots, -1, 0, 1, \dots,$$

em que

$$I_y(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{4} \right)^k}{k!(y+k)!}$$

é a função Bessel modificada de primeiro tipo e Z é dito ter distribuição Skellam denotada por $Skellam(\theta_1, \theta_2)$.

Os autores mostraram em seu artigo diversas propriedades que a distribuição Skellam satisfaz. Aqui serão listadas as mais importantes para este trabalho:

Propriedade 2.1.4. Seja $Y_1 \sim Skellam(\theta_1, \theta_2)$ independente de $Y_2 \sim Skellam(\theta_3, \theta_4)$:

- i) A soma de variáveis aleatórias seguindo distribuição Skellam também segue distribuição Skellam: $Y_1 + Y_2 \sim Skellam(\theta_1 + \theta_3, \theta_2 + \theta_4)$;
- ii) A diferença de variáveis aleatórias seguindo distribuição Skellam também segue distribuição Skellam: $Y_1 - Y_2 \sim Skellam(\theta_1 + \theta_4, \theta_2 + \theta_3)$;
- iii) A função geradora de momentos da distribuição Skellam é dada por: $M_{Y_1}(t) = \exp[-(\theta_1 + \theta_2) + \theta_1 e^t + \theta_2 e^{-t}]$;
- iv) O valor esperado e a variância são dados, respectivamente, por: $E(Y_1) = \theta_1 - \theta_2$ e $Var(Y_1) = \theta_1 + \theta_2$.

Estas propriedades são muito importantes para demonstrar algumas propriedades prostradas por Freeland (2010) e para a construção do modelo proposto por ele, como poderá ser visto na subseção a seguir.

2.1.3 Modelo INAR em \mathbb{Z}

Freeland (2010) construiu um processo INAR(1) estacionário, simétrico em torno de zero, que pode ter uma autocorrelação positiva ou negativa. O modelo INAR em \mathbb{Z} tem marginais que vêm da diferença entre duas variáveis aleatórias latentes iid Poisson, ou seja o modelo INAR em \mathbb{Z} tem distribuição marginal Skellam simétrica.

Definição 2.1.5. Sejam X_t e Y_t dois processos Poisson INAR, ambos com média $\frac{\lambda}{1-\alpha}$ e inovações ϵ_t e η_t , respectivamente. Defina

$$Z_t = X_t - Y_t, \quad t \in \mathbb{N}^*. \quad (2.4)$$

Então dizemos que Z_t é um processo INAR(1) com marginal Skellam $\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)$.

Freeland (2010) usa em seu trabalho a notação $Skellam\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)$, para indicar $Skellam\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}, \frac{\lambda}{1-\alpha}\right)$, contração esta justificada pelo fato de os parâmetros serem iguais.

Definição 2.1.6. Sejam X_t e Y_t variáveis aleatórias latentes independentes Poisson com média $\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)$. Considere $Z_t \sim Skellam\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)$, $\forall t$, onde $Z_t = X_t - Y_t$. O operador “ \star ” (estrela) é definido pela seguinte expressão:

$$\alpha \star Z_{t-1} = \alpha \circ X_{t-1} - \alpha \circ Y_{t-1}.$$

A partir da expressão (2.4) e da Definição 2.1.6, seja $\{Z_t\}$ um processo estocástico com valores inteiros, $X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \epsilon_t$ e $Y_t = \alpha \circ Y_{t-1} + \eta_t$, de modo que X_t e Y_t são dois processos Poisson INAR(1). Considerando $\varepsilon_t = \epsilon_t - \eta_t$, temos que:

$$\begin{aligned} Z_t &= X_t - Y_t \\ &= \alpha \circ X_{t-1} + \epsilon_t - \alpha \circ Y_{t-1} - \eta_t \\ &= \alpha \circ X_{t-1} - \alpha \circ Y_{t-1} + \epsilon_t - \eta_t \\ &= \alpha \star Z_{t-1} + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Proposição 2.1.1. A probabilidade condicional de $\alpha \star Z_{t-1}$ dado Z_{t-1} é dada por:

$$P(\alpha \star Z_{t-1} = w | Z_{t-1} = z) = \frac{1}{I_z(2\lambda)} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-2\lambda}{1-\alpha}} \lambda^{z+2y}}{(z+y)!y!} \sum_{l=0}^y \binom{z+y}{w+l} \binom{y}{l} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{w+2l}.$$

O resultado apresentado pelo autor apresenta um erro sutil como podemos perceber na expressão dada no artigo:

$$P(\alpha \star Z_{t-1} = w | Z_{t-1} = z) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-2\lambda}{1-\alpha}} \lambda^{z+2y}}{(z+y)!y!} \sum_{l=0}^y \binom{z+y}{w+l} \binom{y}{l} \left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^{w+2l}.$$

Além disso, o termo referente a $\frac{1}{P(Z_{t-1}=z)}$ é omitido na expressão. As contas referentes a este resultado são apresentadas no Apêndice A.2.

Propriedade 2.1.5. Para um processo INAR(1) $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$:

i) Z_t pode ser escrito em função da seguinte soma:

$$\begin{aligned} Z_t &= X_t - Y_t \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ \eta_{t-j} \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \star \varepsilon_{t-j}; \end{aligned}$$

ii) A distribuição conjunta entre Z_t e Z_{t-1} tem a seguinte igualdade em distribuição:

$$(Z_t, Z_{t-k}) \stackrel{d}{=} \left(\alpha^k \star Z_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \star \varepsilon_{t-j}, Z_{t-k} \right);$$

iii) A covariância entre Z_t e Z_{t-k} é dada por:

$$\gamma(k) = Cov(Z_{t-k}, Z_t) = Cov(X_{t-k}, X_t) + Cov(Y_{t-k}, Y_t) = \gamma(0)\alpha^k = \frac{2\lambda}{1-\alpha}\alpha^k.$$

Freeland (2010), por sua vez, estima α e λ através dos métodos Mínimos quadrados condicionais e Yule-Walker. O estimador para α via método de Mínimos Quadrados Condicionais é dado por:

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\sum_{t=1}^n Z_{t-1}Z_t}{\sum_{t=1}^n Z_{t-1}^2}.$$

Do mesmo modo, o estimador encontrado para α através do método de Yule-Walker é dado por:

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\sum_{t=1}^n Z_{t-1}Z_t}{\sum_{t=1}^{n+1} Z_{t-1}^2}.$$

Pode-se perceber que os estimadores para α são assintoticamente equivalentes, visto que se diferem apenas por uma parcela do somatório no denominador.

Propriedade 2.1.6. Seja Z_t o processo definido em 2.1.5. O estimador de Mínimos Quadrados Condicionais para α tem a seguinte distribuição assintótica:

$$n^{1/2}(\hat{\alpha}_n - \alpha) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2),$$

em que:

$$\sigma^2 = 2\lambda + 2\alpha(1 - \alpha) + 4\alpha\lambda.$$

A variância marginal é $\frac{2\lambda}{1-\alpha}$, desse modo, o parâmetro λ pode ser estimado a partir da variância amostral:

$$\hat{\lambda} = \frac{1 - \hat{\alpha}}{2n} \sum_{t=1}^n Z_t^2.$$

No artigo, o autor afirma que $n^{1/2}(\hat{\lambda}_n - \lambda)$ ou converge em probabilidade para zero, ou em distribuição para uma distribuição normal com média zero e alguma variância finita. Freeland (2010) afirma ainda que a variância assintótica, para este caso, é muito complicada para se determinar analiticamente e, por isso, não foi apresentada no trabalho. Ele propõe uma simulação de Monte Carlo para determinar o erro padrão.

O processo definido em 2.1.5 trata-se de correlações positivas. Para correlações negativas o autor considera o processo definido como:

$$\begin{aligned} Z_t &= \alpha \star (-Z_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= -\alpha \circ X_{t-1} - \epsilon_t + \alpha \circ Y_t + \eta_t \\ &= Y_t - X_t. \end{aligned}$$

São propostas propriedades análogas ao caso com correlações positivas. Neste trabalho é proposto e estudado nos capítulos seguintes uma versão assimétrica do modelo apresentado nesta subseção.

3 Definição do Modelo

3.1 Processo Skellam INAR(1) Assimétrico

O processo INAR(1) proposto neste trabalho é uma versão assimétrica do modelo estudado pelo Freeland (2010). Neste capítulo será definido um processo estacionário autoregressivo de primeira ordem assumindo valores inteiros, com distribuição marginal Skellam assimétrica e, conseqüentemente, com inovações Skellam assimétrica.

Consideremos X_t e Y_t dois processos Poisson INAR, com $X_t \sim Poisson\left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1}\right)$, $Y_t \sim Poisson\left(\frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2}\right)$, ou seja, $X_t = \alpha_1 \circ X_{t-1} + \epsilon_t$ e $Y_t = \alpha_2 \circ Y_{t-1} + \eta_t$, em que ϵ_t e η_t são inovações seguindo distribuições $Poisson(\lambda_1)$ e $Poisson(\lambda_2)$, respectivamente. Defina Z_t como:

$$Z_t = X_t - Y_t. \quad (3.1)$$

Assim, $Z_t \sim Skellam\left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1}, \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2}\right)$.

Definição 3.1.1. Seja Z_t um processo estacionário com valores inteiros e marginal Skellam. O processo Skellam INAR(1) assimétrico é definido por:

$$Z_t = \boldsymbol{\alpha} \star Z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3.2)$$

em que $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in [0, 1) \times [0, 1)$ e ε_t tem distribuição $Skellam(\lambda_1, \lambda_2)$ com $\varepsilon_t = \epsilon_t - \eta_t$.

O operador “ \star ”, foi definido no Capítulo 2, para a versão assimétrica, o mesmo será considerado: $\boldsymbol{\alpha} \star Z_t = \alpha_1 \circ X_t - \alpha_2 \circ Y_t$. A partir desta definição e da expressão 3.1, temos que a expressão 3.2 é válida, pois:

$$\begin{aligned} Z_t &= X_t - Y_t \\ &= \alpha_1 \circ X_{t-1} + \epsilon_t - \alpha_2 \circ Y_{t-1} - \eta_t \\ &= \alpha_1 \circ X_{t-1} - \alpha_2 \circ Y_{t-1} + \epsilon_t - \eta_t \\ &= \boldsymbol{\alpha} \star Z_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pela Definição 3.1.1 e pela Equação 3.1, pode-se perceber pelo resultado obtido em 3.3, que o processo definido tem distribuição marginal Skellam e inovação Skellam.

A seguir será apresentado o coeficiente de assimetria da distribuição Skellam.

Proposição 3.1.1. *O coeficiente de assimetria (κ) da distribuição Skellam $\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}, \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)$ é dado por*

$$\kappa = \frac{d^3}{dt^3} \log(M_z(0)) = \frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} - \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}.$$

Demonstração 3.1.1. *A função geradora de momentos de Z_t é dada por*

$$M_z(t) = \exp \left[- \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) + \frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} e^t + \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} e^{-t} \right].$$

Aplicando o logaritmo na função geradora de momentos, tem-se que

$$\log(M_z(t)) = - \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) + \frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} e^t + \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} e^{-t}.$$

A terceira derivada em relação a t do logaritmo da função geradora de momentos é dada por

$$\frac{d^3}{dt^3} \log(M_z(t)) = \frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} e^t - \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} e^{-t},$$

e, aplicando no ponto $t = 0$,

$$\kappa = \frac{d^3}{dt^3} \log(M_z(0)) = \frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} - \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}.$$

De acordo com a combinação de parâmetros tomados para o processo, $\kappa \neq 0$. Portanto o processo Skellam INAR(1) de fato é assimétrico (dependendo da combinação de parâmetros tomados).

Através da função geradora de cumulantes, tem-se que tomando $\alpha_1 = \alpha_2$ e mantendo a diferença entre os λ 's, o processo ainda pode ser assimétrico.

A Figura 3.1 traz o gráfico da trajetória, o gráfico de barras de frequências e gráficos das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial do Processo Skellam INAR(1) assimétrico, gerado a partir de uma amostra de tamanho 1000, assumindo $(\lambda_1; \alpha_1) = (10; 0, 1)$ e $(\lambda_2; \alpha_2) = (5; 0, 2)$. Para estas escolhas de parâmetros, o coeficiente de assimetria (κ) é 4,86.

Do mesmo modo, a Figura 3.2 apresenta o gráfico da trajetória, o gráfico de barras de frequências e gráficos das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial do Processo Skellam INAR(1) assimétrico, gerado a partir de uma amostra de tamanho 1000, assumindo $(\lambda_1; \alpha_1) = (3; 0, 3)$ e $(\lambda_2; \alpha_2) = (2; 0, 4)$. Para estas escolhas de parâmetros, o coeficiente de assimetria (κ) é 0,95.

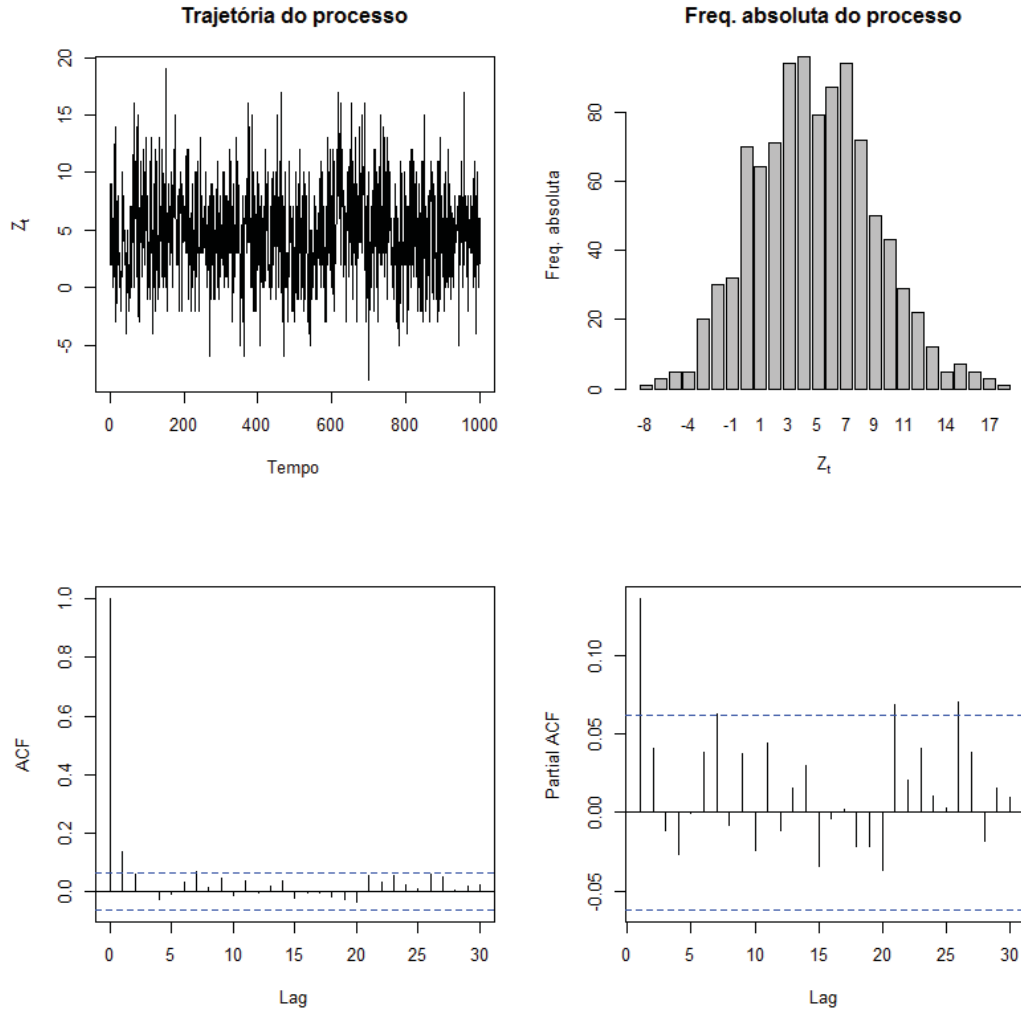


Figura 3.1: Trajetória, gráfico de barras de frequências e gráficos das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial de um Processo Skellam INAR(1) assimétrico simulado com $(\lambda_1; \alpha_1) = (10; 0, 1)$ e $(\lambda_2; \alpha_2) = (5; 0, 2)$ e tamanho de amostra 1000.

Pode-se perceber no gráfico das trajetórias e no gráfico de barras de frequência do processo Z_t , nas Figuras 3.1 e 3.2, que o processo Skellam INAR(1) proposto assume valores em \mathbb{Z} . Além disso, o processo estudado neste trabalho é de primeira ordem e estacionário como pode-se perceber nos gráficos da ACF e PACF simulados. O decaimento exponencial rápido apresentado na ACF indica a estacionariedade da série gerada, e o pico presente no lag 1 da PACF indica que o modelo é de primeira ordem.

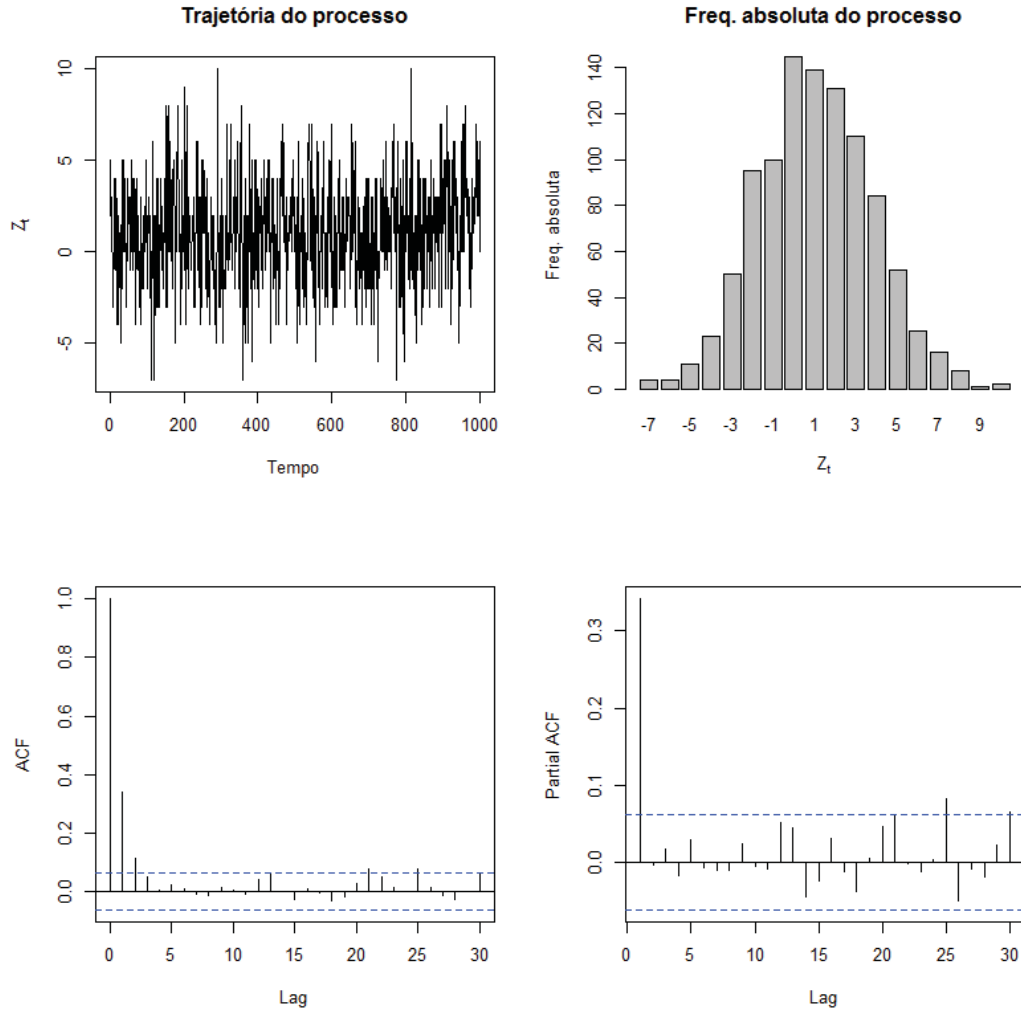


Figura 3.2: Trajetória, gráfico de barras de frequências e gráficos das funções de auto-correlação e autocorrelação parcial de um Processo Skellam INAR(1) assimétrico com $(\lambda_1; \alpha_1) = (3; 0, 3)$ e $(\lambda_2; \alpha_2) = (2; 0, 4)$ e tamanho de amostra 1000.

3.2 Propriedades

Nesta seção serão estudadas e demonstradas algumas propriedades do processo Skellam INAR(1) assimétrico definido na Equação (3.2).

Propriedade 3.2.1. A probabilidade condicional de $\alpha \star Z_{t-1}$ dado Z_{t-1} é dada por:

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\alpha} \star Z_{t-1} = w | Z_{t-1} = z) &= \frac{1}{e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{z}{2}} I_z(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2})} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{l=0}^y \binom{z+y}{w+l} \alpha_1^{w+l} \\
&\quad (1 - \alpha_1)^{z+y-w-l} \binom{y}{l} \alpha_2^l (1 - \alpha_2)^{y-l} \frac{\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)^y e^{-\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)}}{y!} \\
&\quad \frac{\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)^{z+y} e^{-\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)}}{(z+y)!}
\end{aligned}$$

Demonstração 3.2.1. *Temos que:*

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\alpha} \star Z_{t-1} = w | Z_{t-1} = z) &= \frac{P(\boldsymbol{\alpha} \star Z_{t-1} = w, Z_{t-1} = z)}{P(Z_{t-1} = z)} \\
&= \frac{1}{P(Z_{t-1} = z)} \sum_{y=0}^{\infty} P(\boldsymbol{\alpha} \star Z_{t-1} = w, Z_{t-1} = z, Y_{t-1} = y) \\
&= \frac{1}{P(Z_{t-1} = z)} \sum_{y=0}^{\infty} P(\boldsymbol{\alpha} \star Z_{t-1} = w, X_{t-1} - Y_{t-1} = z, Y_{t-1} = y) \\
&= \frac{1}{P(Z_{t-1} = z)} \sum_{y=0}^{\infty} P(\boldsymbol{\alpha} \star Z_{t-1} = w, X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) \\
&= \frac{1}{P(Z_{t-1} = z)} \sum_{y=0}^{\infty} P(\boldsymbol{\alpha} \star Z_{t-1} = w | X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) \\
&\quad \times P(X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y).
\end{aligned}$$

A distribuição condicional de $\boldsymbol{\alpha} \star Z_{t-1}$ será explorada em quatro partes:

a)

$$P(Z_{t-1} = z) = e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{z}{2}} I_z(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}); \quad (3.4)$$

b)

$$\begin{aligned}
&P(\boldsymbol{\alpha} \star Z_{t-1} = w | X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) = \\
&= P(\alpha_1 \circ X_{t-1} - \alpha_2 \circ Y_{t-1} = w | X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) \\
&= P(\alpha_1 \circ X_{t-1} - \alpha_2 \circ y = w | X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) \\
&= P(\alpha_1 \circ (z + y) - \alpha_2 \circ y = w | X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) \\
&= \frac{P(\alpha_1 \circ (z + y) - \alpha_2 \circ y = w) P(X_{t-1} = z + y) P(Y_{t-1} = y)}{P(X_{t-1} = z + y) P(Y_{t-1} = y)} \\
&= P(\alpha_1 \circ (z + y) - \alpha_2 \circ y = w);
\end{aligned}$$

Além disso, $\alpha_1 \circ (z + y) \sim \text{Binomial}(z + y, \alpha_1)$ e $\alpha_2 \circ (y) \sim \text{Binomial}(y, \alpha_2)$.

Disso resulta que

$$\begin{aligned}
P(\alpha_1 \circ (z + y) - \alpha_2 \circ y = w) &= \sum_{l=0}^y P(\alpha_1 \circ (z + y) - \alpha_2 \circ y = w, \alpha_2 \circ y = l) \\
&= \sum_{l=0}^y P(\alpha_1 \circ (z + y) - l = w, \alpha_2 \circ y = l) \\
&= \sum_{l=0}^y P(\alpha_1 \circ (z + y) - l = w) P(\alpha_2 \circ y = l) \\
&= \sum_{l=0}^y \binom{z + y}{w + l} \alpha_1^{w+l} (1 - \alpha_1)^{z+y-w-l} \binom{y}{l} \alpha_2^l (1 - \alpha_2)^{y-l}.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
P(\alpha_1 \circ (z + y) - \alpha_2 \circ y = w | X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) &= \sum_{l=0}^y \binom{z + y}{w + l} \alpha_1^{w+l} \\
(1 - \alpha_1)^{z+y-w-l} \binom{y}{l} \alpha_2^l (1 - \alpha_2)^{y-l}. & \quad (3.5)
\end{aligned}$$

c) Temos que $Y_{t-1} \sim \text{Poisson}(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2})$ e $X_{t-1} \sim \text{Poisson}(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1})$, por serem independentes, segue que

$$P(X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) = \frac{(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2})^y e^{-\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}}}{y!} \frac{(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1})^{z+y} e^{-\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}}}{(z+y)!}. \quad (3.6)$$

d) Finalmente, a distribuição condicional de $\alpha \star Z_{t-1}$ dado Z_{t-1} é encontrada tomando o produto das expressões 3.4, 3.5 e 3.6

$$\begin{aligned}
P(\alpha \star Z_{t-1} = w | Z_{t-1} = z) &= \frac{1}{e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{z}{2}} I_z(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2})} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{l=0}^y \binom{z + y}{w + l} \alpha_1^{w+l} (1 - \\
\alpha_1)^{z+y-w-l} \binom{y}{l} \alpha_2^l (1 - \alpha_2)^{y-l} \frac{(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2})^y e^{-\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}}}{y!} \frac{(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1})^{z+y} e^{-\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}}}{(z+y)!}.
\end{aligned}$$

Propriedade 3.2.2. A marginal do processo pode ser escrita:

$$Z_t \stackrel{d}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \star \varepsilon_{t-j}.$$

Demonstração 3.2.2. Considerando $Z_t = X_t - Y_t$ e usando o resultado obtido para os processos Poisson INAR X_t e Y_t (cujas demonstrações são apresentadas no Apêndice A.1):

$$\begin{aligned}
Z_t &= X_t - Y_t \\
&\stackrel{d}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j \circ \epsilon_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_2^j \circ \eta_{t-j} \\
&\stackrel{d}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \star \varepsilon_{t-j}.
\end{aligned}$$

Propriedade 3.2.3. A distribuição conjunta de duas variáveis Z_t e Z_{t-k} tem a seguinte igualdade em distribuição:

$$(Z_t, Z_{t-k}) \stackrel{d}{=} \left(\alpha^k \circ Z_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j}, Z_{t-k} \right).$$

Demonstração 3.2.3.

$$\begin{aligned}
(Z_t, Z_{t-k}) &= (X_t - Y_t, Z_{t-k}) \\
&\stackrel{d}{=} (\alpha_1^k \circ X_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^j \circ \varepsilon_{t-j} - \alpha_2^k \circ Y_{t-k} - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_2^j \circ \eta_{t-j}, Z_{t-k}) \\
&\stackrel{d}{=} (\alpha^k \circ Z_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j}, Z_{t-k}).
\end{aligned}$$

Propriedade 3.2.4. A covariância entre Z_t e Z_{t-k} é dada por:

$$\begin{aligned}
\gamma(k) &= Cov(Z_{t-k}, Z_t) \\
&= \alpha_1^k \gamma(0) + \alpha_2^k \gamma(0) = \alpha_1^k \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \right) + \alpha_2^k \left(\frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right).
\end{aligned}$$

Demonstração 3.2.4.

$$\begin{aligned}
\gamma(k) &= Cov(Z_{t-k}, Z_t) \\
&= Cov(X_{t-k} - Y_{t-k}, X_t - Y_t) \\
&= Cov(X_{t-k}, X_t) - Cov(X_{t-k}, Y_t) - Cov(Y_{t-k}, X_t) + Cov(Y_{t-k}, Y_t) \\
&= Cov(X_{t-k}, X_t) - 0 - 0 + Cov(Y_{t-k}, Y_t) \\
&= Cov(X_{t-k}, X_t) + Cov(Y_{t-k}, Y_t) \\
&= \alpha_1^k \gamma(0) + \alpha_2^k \gamma(0) \\
&= \alpha_1^k \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \right) + \alpha_2^k \left(\frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right).
\end{aligned}$$

Propriedade 3.2.5. A função geradora de momentos condicional é dada por:

$$\begin{aligned}
E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z) &= \left[e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{z}{2}} I_{|z|}(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}) \right]^{-1} e^{-\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)z} e^{-\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)z} \\
&\quad (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)^z e^{[-(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t}]z} \\
&\quad I_{|z|} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\quad \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{-\frac{z}{2}}
\end{aligned}$$

Demonstração 3.2.5. Ver Apêndice A.3.

Propriedade 3.2.6. A esperança condicional $E(Z_n|Z_{n-1})$ é dada por:

$$\begin{aligned}
E(Z_n|Z_{n-1} = z) &= \frac{d \log \{ E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z) \}}{dt} \Big|_{t=0} \\
&= \lambda_1 - \lambda_2 + z\alpha_1 - \frac{z}{2}\alpha_1 + \frac{z}{2}\alpha_2 + \frac{1}{I_{|z|} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}} \\
&\quad \frac{1}{2} \left\{ I_{|z|-1} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right\} + \\
&\quad I_{|z|+1} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\quad \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) [\alpha_1 - \alpha_2]
\end{aligned}$$

Demonstração 3.2.6. Inicialmente, para o caso $z > 0$, aplicando o logaritmo na função geradora de momentos condicional:

$$\begin{aligned}
\log \{ E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z) \} &= \log \left\{ \left[e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{z}{2}} I_z(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}) \right]^{-1} e^{-\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)z} e^{-\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)z} \right. \\
&\quad \left. (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)^z e^{[-(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t}]z} \right. \\
&\quad \left. I_z \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right. \\
&\quad \left. \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{-\frac{z}{2}} \right\} \\
\log \{ E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z) \} &= -2\lambda_1 - \frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} - \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} + z \log \lambda_1 - \frac{z}{2} \log(1-\alpha_1) - z \log \lambda_2 + \\
&\quad \frac{z}{2} \log(1-\alpha_2) - \log(I_z(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2})) + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t} + \\
&\quad z \log(\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) - \frac{z}{2} \log(\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) - \frac{z}{2} \log(\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \\
&\quad \log \left\{ I_z \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Derivando $\log\{E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z)\}$ em relação a t , temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d \log\{E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z)\}}{dt} &= \lambda_1 e^t - \lambda_2 e^{-t} + z \frac{1}{\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1} \alpha_1 e^t - \frac{z}{2} \frac{1}{\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1} \alpha_1 e^t + \\
&\quad \frac{z}{2} \frac{1}{\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2} \alpha_2 e^{-t} + \\
&\quad \frac{1}{I_z \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}} \frac{1}{2} \\
&\quad \left\{ I_{z-1} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right\} + \\
&\quad I_{z+1} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\quad \left[\left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right) [\alpha_1 e^t (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \\
&\quad - \alpha_2 e^{-t} (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)]. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

No ponto $t = 0$ a derivada do logaritmo da função geradora de momentos condicional é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{d \log\{E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z)\}}{dt} \Big|_{t=0} &= \lambda_1 - \lambda_2 + z \alpha_1 - \frac{z}{2} \alpha_1 + \frac{z}{2} \alpha_2 + \frac{1}{I_z \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}} \\
&\quad \frac{1}{2} \left\{ I_{z-1} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right\} + \\
&\quad I_{z+1} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\quad \left[\left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right) [\alpha_1 - \alpha_2].
\end{aligned}$$

Procedendo os cálculos do mesmo modo, para o caso $z < 0$, a esperança condicional é dada por:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d \log \{E(e^{tZ_n} | Z_{n-1} = z)\}}{dt} \right|_{t=0} &= \lambda_1 - \lambda_2 + \frac{z}{2}\alpha_1 + \frac{z}{2}\alpha_2 + \frac{1}{I_{-z} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}} \\
&\frac{1}{2} \left\{ I_{-z-1} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} + \right. \\
&I_{-z+1} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \left. \right\} \\
&\left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) [\alpha_1 - \alpha_2]
\end{aligned}$$

Deste modo, podemos escrever a esperança condicional:

$$\begin{aligned}
E(Z_n | Z_{n-1}) &= \left. \frac{d \log \{E(e^{tZ_n} | Z_{n-1} = z)\}}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \lambda_1 - \lambda_2 + z\alpha_1 - \frac{z}{2}\alpha_1 + \frac{z}{2}\alpha_2 + \frac{1}{I_{|z|} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}} \\
&\frac{1}{2} \left\{ I_{|z|-1} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} + \right. \\
&I_{|z|+1} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \left. \right\} \\
&\left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) [\alpha_1 - \alpha_2].
\end{aligned}$$

Propriedade 3.2.7. A variância condicional $Var(Z_n|Z_{n-1})$ é dada por:

$$\begin{aligned}
Var(Z_n|Z_{n-1} = z) &= \left. \frac{d^2 \log\{E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z)\}}{dt^2} \right|_{t=0} \\
&= \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{z}{2}(\alpha_1 - \alpha_1^2) + \frac{z}{2}(\alpha_2^2 - \alpha) - \left\{ I_{|z|} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}^{-2} \\
&\quad \frac{1}{2} \left\{ I_{|z|-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + I_{|z|+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \\
&\quad \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{1}{2} \\
&\quad \left\{ I_{|z|-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + I_{|z|+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \\
&\quad \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{I_{|z|} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \frac{1}{4} \\
&\quad \left\{ I_{|z|-2} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + 2I_{|z|} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
&\quad \left. I_{|z|+2} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \\
&\quad \frac{1}{I_{|z|} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \frac{1}{2} \left\{ I_{|z|-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
&\quad \left. I_{|z|+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \\
&\quad \frac{1}{I_{|z|} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \frac{1}{2} \left\{ I_{|z|-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
&\quad \left. I_{|z|+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2).
\end{aligned}$$

Demonstração 3.2.7. Ver Apêndice A.4.

4 Estimação dos Parâmetros e Distribuição Assintótica dos Estimadores

Neste capítulo será discutido o método para estimação dos parâmetros do modelo e será verificada a distribuição assintótica para um vetor formado por eles. O método que será usado para estimar os parâmetros será o método dos mínimos quadrados condicionais.

4.1 Mínimos Quadrados

O método de Mínimos quadrados é uma técnica de otimização matemática que objetiva encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados a fim de minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado ($E(Z_t)$) e o valor observado (estas diferenças são chamadas resíduos). Este método consiste em estimativas que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos da regressão, de forma a maximizar o grau de ajuste do modelo aos dados observados.

Desse modo, deve-se encontrar um valor para o parâmetro (ou parâmetros) que minimize a seguinte função:

$$Q = \sum_{t=2}^n (Z_t - E(Z_t))^2,$$

em que, na função de mínimos quadrados Q , $E(Z_t)$ representa o valor estimado (ou valor esperado) para os dados e Z_t o valor observado dos dados.

4.2 Estimadores para os parâmetros do modelo considerando $\alpha_1 = \alpha_2$

O modelo proposto neste trabalho, como definido, é autoregressivo de primeira ordem e, portanto, deve ser considerado para a estimação o passado do processo um passo atrás. Por isso, a estimação dos parâmetros será feita via Método de Mínimos Quadrados

condicionais. Para fazer a estimação usando este método, a seguinte função deve ser minimizada,

$$Q(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{t=0}^n (Z_t - E(Z_t|Z_{t-1}))^2.$$

Para esta otimização serão avaliadas quais configurações para os valores de $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1$ e α_2 que minimizam a função Q .

Não é simples encontrar forma fechada para os estimadores dos parâmetros do Processo Skellam INAR(1) assimétrico, porém, se considerarmos os parâmetros α_1 e α_2 iguais, o que ainda mantém a assimetria do processo, quando $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a expressão para a esperança condicional fica mais tratável, já que as parcelas que envolvem a Bessel modificada de primeiro tipo são anuladas. Temos que

$$\begin{aligned} E(Z_t|Z_{t-1} = z) &= \lambda_1 - \lambda_2 + z\alpha_1 - \frac{z}{2}\alpha_1 + \frac{z}{2}\alpha_2 + \frac{1}{I_{|z|} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}} \\ &\quad \frac{1}{2} \left\{ I_{|z|-1} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} + \right. \\ &\quad \left. I_{|z|+1} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right\} \\ &\quad \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) [\alpha_1 - \alpha_2]. \end{aligned}$$

Considerando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, tem-se que

$$E(Z_t|Z_{t-1} = z) = \lambda_1 - \lambda_2 + z\alpha.$$

Desse modo, a função de mínimos quadrados condicionais é dada por

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{t=2}^n (Z_t - E(Z_t|Z_{t-1}))^2 \\ &= \sum_{t=2}^n (Z_t - (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha Z_{t-1}))^2. \end{aligned}$$

Para encontrar os estimadores para os parâmetros α, λ_1 e λ_2 , a função Q será minimizada em relação a α e λ_1 e será usada a variância marginal do processo, que é dada por $\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1-\alpha} \right)$, para completar a quantidade de equações necessárias para resolver o sistema referente a esta minimização e associar uma expressão à λ_2 , pois, usando somente a função de mínimos quadrados condicionais, tem-se um sistema possível e indeterminado. Usando Mínimos quadrados condicionais e a variância marginal do processo, o estimador encontrado para α é dado por

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{t=2}^n (Z_t Z_{t-1}) - (Z_n - Z_1) \bar{Z}_{t-1} - \bar{Z}_{t-1} \sum_{t=2}^n Z_{t-1}}{\sum_{t=2}^n Z_{t-1}^2 - \bar{Z}_{t-1} \sum_{t=2}^n Z_{t-1}}. \quad (4.1)$$

Os estimadores para λ_1 e λ_2 são, respectivamente,

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{Z_n - Z_1}{2(n-1)} + \frac{1}{2} (1 - \hat{\alpha}) \left(\bar{Z}_{t-1} + \frac{1}{n} \sum_{t=2}^n (Z_t - \bar{Z}_t) \right), \quad (4.2)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{(1 - \hat{\alpha})}{n} \sum_{t=2}^n (Z_t - \bar{Z}_t) - \hat{\lambda}_1. \quad (4.3)$$

Devido à dificuldade encontrada ao trabalhar com a função Bessel modificada de primeiro tipo presente na esperança condicional $E(Z_t|Z_{t-1})$, será estabelecida a consistência e distribuição assintótica para o vetor de parâmetros $(\alpha, \lambda = \lambda_1 - \lambda_2)$ baseadas nos seguintes Teoremas propostos por Tjøstheim (1986):

Teorema 4.2.1. (Tjøstheim (1986)) *Assuma que $\{Z_t\}$ é um processo ergódico, estritamente estacionário, d -dimensional com $E(|X_t|^2) < \infty$, tal que $\tilde{Z}_{t|t-1} = E(Z_t|Z_{t-1})$ é contínuo e possui derivada de terceira ordem em um conjunto aberto B contendo $(\alpha, \lambda)^0$. Considere as seguintes condições e considere $\beta = (\alpha, \lambda)$.*

$$C1: E \left\{ \left| \frac{\partial \tilde{Z}_{t|t-1}}{\partial \beta_i}(\beta^0) \right|^2 \right\} < \infty \text{ e } E \left\{ \left| \frac{\partial^2 \tilde{Z}_{t|t-1}}{\partial \beta_i \partial \beta_j}(\beta^0) \right|^2 \right\} < \infty \text{ para } i, j = 1, \dots, r.$$

C2: Os vetores $\partial \tilde{Z}_{t|t-1}(\beta^0) / \partial \beta_i$, $i = 1, \dots, r$ são linearmente independentes, ou seja, se a_1, \dots, a_r são números reais arbitrários tais que

$$E \left\{ \left| \sum_{i=1}^r a_i \frac{\partial \tilde{Z}_{t|t-1}}{\partial \beta_i}(\beta^0) \right|^2 \right\} = 0,$$

então $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$.

C3: Para $\beta \in B$, existem funções $G_{t-1}^{ijk}(Z_1, \dots, Z_{t-1})$ e $H_t^{ijk}(Z_1, \dots, Z_t)$ tais que

$$\left| \frac{\partial \tilde{Z}_{t|t-1}}{\partial \beta_i}(\beta) \frac{\partial^2 \tilde{Z}_{t|t-1}}{\partial \beta_j \partial \beta_k}(\beta) \right| \leq G_{t-1}^{ijk}, E(G_{t-1}^{ijk}) < \infty,$$

$$\left| \{Z_t - Z_{t|t-1}(\beta)\} \frac{\partial^3 \tilde{Z}_{t|t-1}}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \right| \leq H_t^{ijk}, E(H_t^{ijk}) < \infty,$$

para $i, j, k = 1, \dots, r$.

Se as condições C1, C2 e C3 são satisfeitas, então existe uma sequência de estimadores $\{\hat{\beta}_n\}$ minimizando $Q_n(\beta) = \sum_{t=m+1}^n \{Z_t - Z_{t|t-1}(\beta)\}^2$.

Satisfeitas as condições impostas no Teorema 4.2.1, o seguinte teorema é válido.

Teorema 4.2.2. (Tjøstheim (1986)) Assuma que $f_{t|t-1} = E\{(Z_t - \tilde{Z}_{t|t-1})(Z_t - \tilde{Z}_{t|t-1})^T | Z_{t-1}\}$ e que as condições do Teorema 4.2.1 são satisfeitas. Assuma ainda que

$$R = E \left\{ \frac{\partial \tilde{Z}_{t|t-1}^T}{\partial \beta}(\beta^0) f_{t|t-1}(\beta^0) \frac{\partial \tilde{Z}_{t|t-1}^T}{\partial \beta}(\beta^0) \right\} < \infty.$$

Seja $\{\hat{\beta}_n\}$ os estimadores obtidos no Teorema 4.2.1. Então,

$$n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta^0) \xrightarrow{d} N(0, U^{-1}RU^{-1}),$$

em que

$$U = E \left\{ \frac{\partial \tilde{Z}_{t|t-1}^T}{\partial \beta}(\beta^0) \frac{\partial \tilde{Z}_{t|t-1}}{\partial \beta}(\beta^0) \right\}.$$

Para o processo Skellam INAR(1) assimétrico são satisfeitos os Teoremas 4.2.1 e 4.2.2 (ver Apêndice A.5). Como consequência disso é válida a seguinte proposição:

Proposição 4.2.1. Sejam $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2$ e $\hat{\alpha}$ os estimadores encontrados em 4.1, 4.2 e 4.3. A distribuição assintótica do vetor de parâmetros $\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\alpha} \end{pmatrix}$ é dada por

$$\sqrt{n} \left[\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\alpha} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha \end{pmatrix} \right] \xrightarrow{d} N(0, U^{-1}RU^{-1}),$$

em que

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda}{1-\alpha} \\ \frac{\lambda}{1-\alpha} & \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1-\alpha} \frac{\lambda^2}{(1-\alpha)^2} \end{pmatrix},$$

e

$$R = \begin{pmatrix} E(\text{Var}(Z_t | Z_{t-1})) & E(\text{Var}(Z_t | Z_{t-1})Z_{t-1}) \\ E(\text{Var}(Z_t | Z_{t-1})Z_{t-1}) & E(\text{Var}(Z_t | Z_{t-1})Z_{t-1}^2) \end{pmatrix}.$$

Aqui considera-se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. A variância condicional é dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_t | Z_{t-1}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{I_{|z|} \left[2 \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(1-\alpha)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \frac{1}{2} \left\{ I_{|z|-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(1-\alpha)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\ &\quad \left. I_{|z|+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(1-\alpha)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(1-\alpha)^2} \right)^{\frac{1}{2}} (2\alpha - 2\alpha^2). \end{aligned}$$

Encontrar analiticamente os elementos da matriz R não é simples, deste modo, podem ser feitas 1000 replicações Monte Carlo para encontrar estimativas para estes elementos.

4.3 Estudo de Simulação

No capítulo anterior foi possível encontrar $E(Z_t|Z_{t-1})$ através da função geradora de momentos condicional. A partir disso, o método Monte Carlo no software R é usado para avaliar se é possível obter boas estimativas para os parâmetros do modelo (λ_1 , λ_2 , α_1 e α_2). Foi gerada, em cada iteração Monte Carlo, uma amostra de tamanho “ n ”. A função $Q(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2)$ foi minimizada usando o comando *Optim*, com o método *BFGS*. Este comando exige um chute inicial para os parâmetros. Para isto, foram usados os estimadores encontrados na Seção 4.2 e, para α_1 e α_2 , considerou-se o mesmo valor. Foi feita uma transformação logit nos α 's, de modo que $\alpha_1 = \frac{\exp(\beta_1)}{1 + \exp(\beta_1)}$ e $\alpha_2 = \frac{\exp(\beta_2)}{1 + \exp(\beta_2)}$, com β_1 e β_2 números reais, assegurando, deste modo, que as estimativas obtidas para os mesmos pertençam ao intervalo $[0, 1)$.

Para ajudar o comando *Optim* a minimizar a função de mínimos quadrados, o gradiente da função Q também foi fornecido. Este gradiente foi obtido derivando-se a função Q em relação a λ_1 , λ_2 , α_1 e α_2 , sendo cada derivada as coordenadas deste vetor. Para avaliar as estimativas dos parâmetros foi considerado o Erro Quadrático Médio (EQM).

As Tabelas 4.1 e 4.2 representam as médias empíricas, erros quadráticos médios, viés relativo e erro relativo médio das estimativas dos parâmetros. Aqui o viés relativo é definido como a diferença entre a média das estimativas e o valor verdadeiro do parâmetro, diferença esta dividida pelo valor verdadeiro do parâmetro. E o erro relativo médio é dado pela razão entre a raiz do erro quadrático médio e o verdadeiro valor do parâmetro. Foi considerado um Monte Carlo de tamanho 5000, e amostras de tamanhos $n = 100, 200, 300, 400, 500, 1000$ e 5000.

Tabela 4.1: Médias empíricas e erros quadráticos médios das estimativas dos parâmetros, com $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\alpha_1 = 0,3$ e $\alpha_2 = 0,4$.

	n	λ_1	λ_2	α_1	α_2
Valor verdadeiro	-	3	2	0,3	0,4
Valor estimado	100	2,238	1,425	0,295	0,360
EQM	-	5,013	5,186	0,089	0,160
Viés relativo	-	0,254	0,288	0,017	0,100
Erro relativo médio	-	0,746	1,139	0,994	1,000
Valor estimado	200	2,493	1,623	0,301	0,372
EQM	-	4,652	4,602	0,069	0,120
Viés Relativo	-	0,170	0,189	0,003	0,070
Erro relativo médio	-	0,719	1,073	0,876	0,866
Valor estimado	300	2,544	1,716	0,306	0,376
EQM	-	4,106	4,721	0,055	0,095
Viés Relativo	-	0,152	0,142	0,002	0,060
Erro relativo médio	-	0,675	1,086	0,781	0,770
Valor estimado	400	2,653	1,753	0,302	0,384
EQM	-	3,960	4,159	0,046	0,078
Viés Relativo	-	0,082	0,124	0,007	0,004
Erro relativo médio	-	0,680	1,020	0,715	0,661
Valor estimado	500	2,682	1,800	0,306	0,383
EQM	-	3,888	4,213	0,042	0,070
Viés Relativo	-	0,106	0,100	0,020	0,043
Erro relativo médio	-	0,657	1,026	0,683	0,661
Valor estimado	1000	2,887	1,852	0,297	0,399
EQM	-	3,659	3,106	0,028	0,044
Viés Relativo	-	0,038	0,074	0,001	0,003
Erro relativo médio	-	0,638	0,881	0,558	0,524
Valor estimado	5000	2,952	1,915	0,299	0,401
EQM	-	1,899	1,235	0,006	0,01
Viés Relativo	-	0,016	0,043	0,003	0,003
Erro relativo médio	-	0,459	0,556	0,258	0,250

Tabela 4.2: Médias empíricas e erros quadráticos médios das estimativas dos parâmetros, com $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, $\alpha_1 = 0,1$ e $\alpha_2 = 0,2$.

	n	λ_1	λ_2	α_1	α_2
Valor verdadeiro	-	10	5	0,1	0,2
Valor estimado	100	7,607	2,914	0,107	0,219
EQM	-	21,405	18,310	0,026	0,145
Viés Relativo	-	0,239	0,417	0,070	0,095
Erro relativo médio	-	0,463	0,856	1,612	1,903
Valor estimado	200	7,701	3,008	0,105	0,219
EQM	-	19,971	18,332	0,019	0,117
Viés Relativo	-	0,229	0,398	0,050	0,095
Erro relativo médio	-	0,446	0,856	1,378	1,710
Valor estimado	300	7,862	3,191	0,108	0,209
EQM	-	18,628	17,936	0,017	0,095
Viés Relativo	-	0,214	0,362	0,080	0,045
Erro relativo médio	-	0,432	0,847	1,303	1,541
Valor estimado	400	7,988	3,286	0,106	0,206
EQM	-	18,081	17,464	0,015	0,083
Viés Relativo	-	0,201	0,343	0,060	0,030
Erro relativo médio	-	0,425	0,836	1,225	1,440
Valor estimado	500	8,064	3,343	0,106	0,206
EQM	-	17,208	16,454	0,013	0,076
Viés Relativo	-	0,193	0,331	0,060	0,030
Erro relativo médio	-	0,414	0,811	1,140	1,378
Valor estimado	1000	8,529	3,840	0,109	0,191
EQM	-	14,261	14,337	0,011	0,053
Viés Relativo	-	0,147	0,232	0,090	0,045
Erro relativo médio	-	0,377	0,757	1,040	1,151
Valor estimado	5000	9,469	4,671	0,107	0,191
EQM	-	5,817	6,030	0,005	0,019
Viés Relativo	-	0,053	0,066	0,070	0,045
Erro relativo médio	-	0,241	0,491	0,707	0,689

A partir dos resultados apresentados nas tabelas, pode-se perceber que conforme aumenta o tamanho da amostra, mais próximo do valor verdadeiro de cada parâmetro ficam as estimativas, do mesmo modo, o EQM, o Viés Relativo e o Erro relativo médio decrescem.

5 Aplicação a dados reais

Neste capítulo, o Processo Skellam INAR(1) assimétrico será aplicado em uma série temporal real de temperatura da cidade Rio de Janeiro do estado do Rio de Janeiro. As temperaturas foram medidas no período de 01 de janeiro de 2015 até 31 de outubro de 2015.

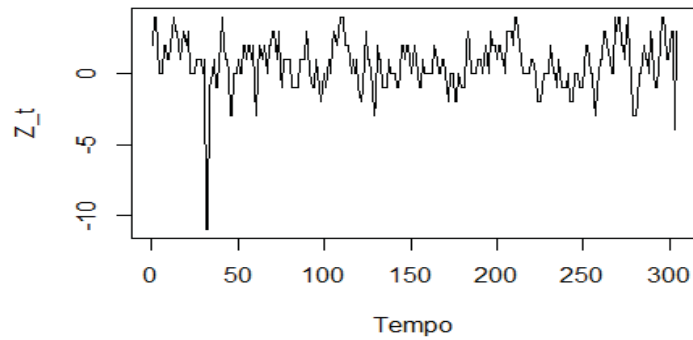
A série temporal que será estudada aqui é obtida a partir da diferença entre a temperatura média histórica mínima e temperatura mínima diária na cidade durante o período especificado. Os dados podem ser encontrados no site <http://www.accuweather.com/pt/br/rio-de-janeiro/45449/january-weather/45449>. Através do contato realizado com os responsáveis pela página, verificou-se que a média histórica é baseada em uma média de 30 anos de dados coletados, uma resposta vaga que não explica claramente o que significa a variável. Outros contatos foram feitos, porém, não houveram outras respostas do site. Será analisado o quanto se diferencia a temperatura mínima diária da cidade do Rio de Janeiro da temperatura histórica mínima.

A tabela A.1 apresentada no Apêndice A.6 é referente o banco de dados usado para esta aplicação. E a Tabela 5.1 apresenta algumas estatísticas descritivas referentes ao banco de dados.

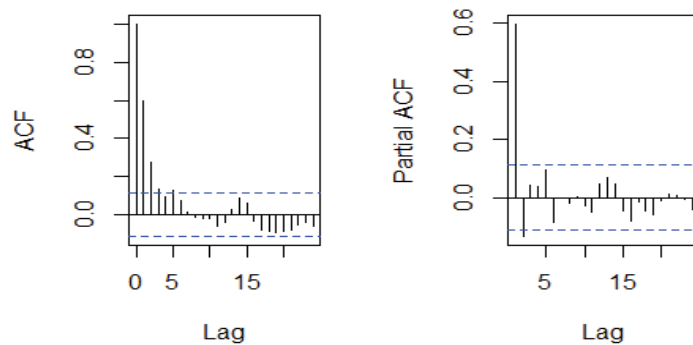
Tabela 5.1: Estatísticas descritivas para a diferença entre a temperatura mínima diária do Rio de Janeiro e a média histórica de 01 de Janeiro até 31 de Outubro de 2015.

Mínimo	Máximo	Média	Variância	Mediana
-11	1	4	3.469	0.651

Pode-se perceber na Tabela A.1 que esta série temporal contém valores negativos e não negativos, portanto aplicável ao modelo proposto neste trabalho. A série temporal e os gráficos da Função de autocorrelação (ACF) e Função de Autocorrelação Parcial (PACF) são apresentados na Figura 5.1.



(a) série temporal Z_t .



(b) ACF e PACF da série Z_t .

Figura 5.1: Gráficos da série temporal e funções de autocorrelação e autocorrelação parcial para a diferença entre a temperatura mínima diária do Rio de Janeiro e a média histórica de 01 de Janeiro até 31 de Outubro de 2015.

Na Figura 5.1(a), tem-se o gráfico da série temporal organizado em dias. O gráfico de autocorrelação e o gráfico de autocorrelação parcial, na Figura 5.1(b), são usados para verificar se um modelo INAR(1) poderia ser adequado para analisar a série. O gráfico da ACF apresenta um decaimento exponencial rápido, indicando a estacionariedade da série. Já o gráfico da PACF apresenta um pico no primeiro LAG o que sugere a dependência temporal de primeira ordem. Deste modo, o processo Skellam INAR(1) assimétrico pode ser apropriado para ajustar a série temporal considerada aqui.

Na Tabela 5.2 são apresentadas as estimativas para os parâmetros e uma comparação entre o Processo Skellam INAR(1) assimétrico em \mathbb{Z} (PSINAR(1)) e o processo Skellam INAR(1) simétrico em \mathbb{Z} (TINAR(1) (Freeland, 2010)). Para a comparação são usadas medidas de bondade de ajuste propostas por Hyndman e Koehler (2006), sendo elas o MAE (Mean Absolute Error), o MdAE (Median Absolute Error) e o MSE (Mean Square Error). Hyndman e Koehler (2006) definem estas medidas, apresentadas a seguir.

Definição 5.0.1. Sejam Z_t a observação no tempo t e $E(Z_t|Z_{t-1})$ a previsão para Z_t . O erro de previsão é definido, então, por $e_t = Z_t - E(Z_t|Z_{t-1})$. Deste modo, as medidas de bondade de ajuste são definidas por

$$MSE = \text{media}(e_t^2),$$

$$MdAE = \text{mediana}(|e_t|),$$

$$MAE = \text{media}(|e_t|).$$

A partir da Tabela 5.2, pode-se perceber que o modelo proposto neste trabalho apresenta melhores resultados em relação ao modelo estudado por Freeland (2010) segundo o MSE e o MAE. Entretanto, o MdAE mostrou que a versão simétrica apresenta melhores resultados.

Tabela 5.2: Estimativas para os parâmetros e estatísticas de bondade de ajuste: MAE, MdAE, MSE para o Processo Skellam INAR(1) assimétrico em \mathbb{Z} e o Processo Skellam INAR(1) simétrico em \mathbb{Z} .

Modelo	Estimativas	MAE	MdAE	MSE
PSINAR(1)	$\hat{\lambda}_1 = 0,3736$			
	$\hat{\lambda}_2 = 0,3509$	1,0246	0,8155	2,1999
	$\hat{\alpha}_1 = 0,7086$			
	$\hat{\alpha}_2 = 0,4923$			
TINAR(1)	$\hat{\lambda} = 0,5960$	1,0247	0,7970	2,2818
	$\hat{\alpha} = 0,6015$			

Na Figura 5.2, são apresentados os gráficos da função de autocorelação amostral para os resíduos e o gráfico do processo de saltos com limites $\pm 3\sqrt{\text{Var}(J_t)}$, como proposto por Weiß (2009), em que $J_t = Z_t - Z_{t-1}$ e a variância de J_t é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Var}(J_t) &= \text{Var}(Z_t - Z_{t-1}) \\ &= \text{Var}(Z_t) + \text{Var}(Z_{t-1}) - 2\text{Cov}(Z_t, Z_{t-1}) \\ &= 2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} + \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right) - 2 \left(\alpha_1 \frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} + \alpha_2 \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right). \end{aligned}$$

O valor atribuído aos parâmetros são as estimativas apresentadas na Tabela 5.2.

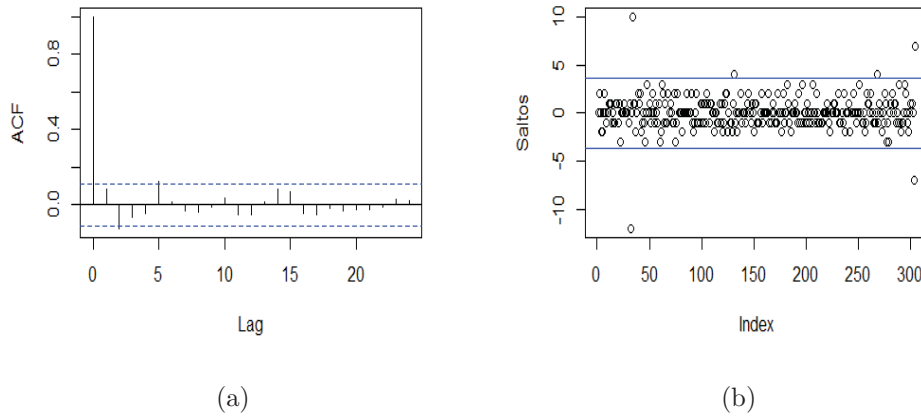


Figura 5.2: Função de autocorelação amostral para os resíduos e gráfico do processo de saltos para o Processo Skellam INAR(1) Assimétrico.

Estes gráficos indicam que os resíduos são não correlacionados, captando bem a dependência temporal da série estudada. Além disso, o gráfico de saltos acomoda a maioria dos saltos dentro dos limites especificados, o que indica que não há um ponto em particular que cause um grande impacto no modelo. Portanto, o Processo Skellam INAR(1) assimétrico é adequado para ajustar a série temporal da diferença entre a temperatura mínima diária do Rio de Janeiro e a média histórica de 01 de Janeiro até 31 de Outubro de 2015.

6 Conclusão

Neste trabalho foi proposta uma versão assimétrica do modelo proposto por Freeland (2010). Para modelar séries temporais de contagem, foi construído um processo estacionário autoregressivo de primeira ordem para valores inteiros (INAR(1)) com distribuição marginal Skellam assimétrica. Foram estudadas e demonstradas propriedades deste modelo. Os parâmetros do modelo foram estimados através do método de mínimos quadrados condicionais. Também foi verificada a consistência e normalidade assintótica dos estimadores. O comportamento dos estimadores foi avaliado via simulação Monte Carlo. A dissertação foi finalizada aplicando o modelo INAR(1) proposto a uma série temporal real referente a diferença entre a temperatura mínima diária e a média histórica mínima na cidade do Rio de Janeiro, no período de 01 de Janeiro à 31 de Outubro de 2015, a qual o Processo Skellam INAR(1) assimétrico se ajustou bem aos dados.

A Apêndice

A.1 Resultados Referentes ao Processo Poisson INAR(1)

Nesta seção serão demonstradas algumas propriedades do modelo Poisson INAR proposto por Al-Osh e Alzaid (1987):

Propriedade A.1.1. A marginal do Processo INAR X_t pode ser escrita como

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j \circ \epsilon_{t-j}$$

Demonstração A.1.1. Por definição, temos que: $X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \epsilon_t$, então

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha \circ X_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \alpha \circ (\alpha \circ X_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t \\ &= \alpha^2 \circ X_{t-2} + \alpha \circ \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \alpha^2 \circ (\alpha \circ X_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \alpha \circ \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \alpha^3 \circ X_{t-3} + \alpha^2 \circ \epsilon_{t-2} + \alpha \circ \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \dots \\ &= \alpha^n \circ X_{t-n} + \alpha^{n-1} \circ \epsilon_{t-(n-1)} + \alpha^{n-2} \circ \epsilon_{t-(n-2)} + \dots + \alpha \circ \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

A expressão acima pode ser escrita da seguinte forma

$$X_t \stackrel{d}{=} \alpha^n \circ X_{t-n} + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j}$$

Considerando $n \rightarrow \infty$ e $0 < \alpha < 1$,

$$\alpha^n \circ X_{t-n} \xrightarrow{P} 0.$$

Mostremos então que, $\alpha^n \circ X_{t-n}$ converge para 0 em probabilidade se para todo $\varepsilon > 0$,

$$P(|\alpha^n \circ X_{t-n} - 0| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

De fato, tomando $P(|\alpha^n \circ X_{t-n} - 0| \geq \varepsilon)$ resulta que

$$\begin{aligned} P(|\alpha^n \circ X_{t-n} - 0| \geq \varepsilon) &\stackrel{Des.Tchebychev}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(|\alpha^n \circ X_{t-n}|) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} E((\alpha^n \circ X_{t-n} - 0)^2) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} E((\alpha^n \circ X_{t-n})^2). \end{aligned}$$

Como já definido, $\alpha^n \circ X_{t-n} = \sum_{i=1}^{X_{t-n}} B_i$, onde $B_i \sim \text{Bernoulli}(\alpha^n)$, dessa forma, considerando $X_{t-n} = x$, segue que $\alpha^n \circ X_{t-n} | X_{t-n} = x \sim \text{Binomial}(x, \alpha^n)$.

Levando em conta as considerações feitas, temos que $E((\alpha^n \circ X_{t-n})^2 | X_{t-n} = x)$ é o segundo momento da Binomial(x, α^n). Usando os resultados já conhecidos do segundo momento de uma variável aleatória com distribuição Binomial,

$$\begin{aligned} E((\alpha^n \circ X_{t-n})^2 | X_{t-n} = x) &= x^2(\alpha^n)^2 - x(\alpha^n)^2 + x\alpha^n \\ &= x^2\alpha^{2n} - x\alpha^{2n} + x\alpha^n. \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e considerando $0 < \alpha < 1$,

$$E((\alpha^n \circ X_{t-n})^2 | X_{t-n} = x) \rightarrow 0,$$

então $\frac{1}{\varepsilon^2} E((\alpha^n \circ X_{t-n})^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Como $0 \leq P(|\alpha^n \circ X_{t-n} - 0| \geq \varepsilon) \leq 1$ e $P(|\alpha^n \circ X_{t-n} - 0| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E((\alpha^n \circ X_{t-n})^2)$ segue que

$$P(|\alpha^n \circ X_{t-n} - 0| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, $\alpha^n \circ X_{t-n} \xrightarrow{P} 0$.

Desse modo temos que, para um processo Poisson INAR, fazendo $n \rightarrow \infty$,

$$X_t \stackrel{d}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j}. \quad (\text{A.1})$$

Propriedade A.1.2. Para o Processo INAR X_t temos

$$(X_t, X_{t-k}) = (\alpha^k \circ X_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j}, X_{t-k}).$$

Demonstração A.1.2. *Pela propriedade anterior, temos que*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j}.$$

Desse modo, resulta que

$$\begin{aligned} (X_t, X_{t-k}) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j}, X_{t-k} \right) \\ &= (\alpha^0 \circ \epsilon_t + \alpha^1 \circ \epsilon_{t-1} + \cdots + \alpha^k \circ \epsilon_{t-k} + \cdots, X_{t-k}) \\ &= (\alpha^0 \circ \epsilon_t + \alpha^1 \circ \epsilon_{t-1} + \cdots + \alpha^{k-1} \circ \epsilon_{t-k+1} + \alpha^k \circ X_{t-k}, X_{t-k}) \\ &= (\alpha^k \circ X_{t-k} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j}, X_{t-k}). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Propriedade A.1.3. Para o Processo INAR X_t , temos

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= Cov(X_{t-k}, X_t) \\ &= \alpha^k \gamma(0). \end{aligned}$$

Demonstração A.1.3. *De fato, a covariância $\gamma(k)$ é dada por:*

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= Cov(X_{t-k}, X_t) \\ &= Cov(X_{t-k}, \alpha^k \circ X_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j}) \\ &= Cov(X_{t-k}, \alpha^k \circ X_{t-k}) + Cov(X_{t-k}, \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j}) \\ &= E(X_{t-k} \cdot \alpha^k \circ X_{t-k}) - E(X_{t-k}) \cdot E(\alpha^k \circ X_{t-k}) \\ &+ E\left(X_{t-k} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j}\right) - E(X_{t-k}) \cdot E\left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \circ \epsilon_{t-j}\right) \\ &= \alpha^k E(X_{t-k}^2) - \alpha^k (E(X_{t-k})^2) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j (E(X_{t-k} \cdot \epsilon_{t-j}) - E(X_{t-k}) \cdot E(\epsilon_{t-j})) \\ &= \alpha^k Var(X_{t-k}) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j Cov(X_{t-k}, \epsilon_{t-j}) \\ &= \alpha^k Var(X_{t-k}) \\ &= \alpha^k (E(X_t^2) - (E(X_t))^2) \\ &= \alpha^k (E(X_{t-k} \cdot X_{t-k}) - E(X_{t-k}) \cdot E(X_{t-k})) \\ &= \alpha^k Cov(X_{t-k}, X_{t-k}) \\ &= \alpha^k Cov(X_{t-k}, X_{t-k-0}) \\ &= \alpha^k \gamma(0). \end{aligned}$$

A.2 Cálculo referentes à função de probabilidade condicional para o Modelo INAR(1) simétrico em \mathbb{Z}

Propriedade A.2.1. A distribuição condicional de Z_t para o Modelo INAR(1) simétrico em \mathbb{Z} é dada por

$$P(\alpha \star Z_{t-1} = w | Z_{t-1} = z) = \frac{1}{I_z(2\lambda)} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-2\lambda}{1-\alpha}} \lambda^{z+2y}}{(z+y)!y!} \sum_{l=0}^y \binom{z+y}{w+l} \binom{y}{l} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{w+2l}.$$

Demonstração A.2.1. Abrindo a expressão da probabilidade condicional, temos

$$\begin{aligned} P(\alpha \star Z_{t-1} = w | Z_{t-1} = z) &= \frac{P(\alpha \star Z_{t-1} = w, Z_{t-1} = z)}{P(Z_{t-1} = z)} \\ &= \frac{1}{P(Z_{t-1} = z)} \sum_{y=0}^{\infty} P(\alpha \star Z_{t-1} = w, Z_{t-1} = z, Y_{t-1} = y) \\ &= \frac{1}{P(Z_{t-1} = z)} \sum_{y=0}^{\infty} P(\alpha \star Z_{t-1} = w, X_{t-1} - Y_{t-1} = z, Y_{t-1} = y) \\ &= \frac{1}{P(Z_{t-1} = z)} \sum_{y=0}^{\infty} P(\alpha \star Z_{t-1} = w, X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) \\ &= \frac{1}{P(Z_{t-1} = z)} \sum_{y=0}^{\infty} P(\alpha \star Z_{t-1} = w | X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) \\ &\quad \cdot P(X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y). \end{aligned}$$

Iremos explorar a distribuição condicional de $\alpha \star Z_{t-1}$ em quatro partes:

a) $P(Z_{t-1} = z) = I_z(2\lambda);$

b)

$$\begin{aligned} &P(\alpha \star Z_{t-1} = w | X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) \tag{A.3} \\ &= P(\alpha \circ X_{t-1} - \alpha \circ Y_{t-1} = w | X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) \\ &= P(\alpha \circ X_{t-1} - \alpha \circ y = w | X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) \\ &= P(\alpha \circ X_{t-1} - \alpha \circ y = w | X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) \\ &= P(\alpha \circ (z + y) - \alpha \circ y = w | X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) \\ &= \frac{P(\alpha \circ (z + y) - \alpha \circ y = w) P(X_{t-1} = z + y) P(Y_{t-1} = y)}{P(X_{t-1} = z + y) P(Y_{t-1} = y)} \\ &= P(\alpha \circ (z + y) - \alpha \circ y = w); \end{aligned}$$

Daí seguem as seguintes afirmações: $\alpha \circ (z + y) \sim \text{Binomial}(z + y, \alpha)$ e $\alpha \circ (y) \sim \text{Binomial}(y, \alpha)$.

Disso resulta que

$$\begin{aligned}
 P(\alpha \circ (z + y) - \alpha \circ y = w) &= \sum_{l=0}^y P(\alpha \circ (z + y) - \alpha \circ y = w, \alpha \circ y = l) \\
 &= \sum_{l=0}^y P(\alpha \circ (z + y) - l = w, \alpha \circ y = l) \\
 &= \sum_{l=0}^y P(\alpha \circ (z + y) - l = w) P(\alpha \circ y = l) \\
 &= \sum_{l=0}^y \binom{z + y}{w + l} \alpha^{w+l} (1 - \alpha)^{z+y-w-l} \binom{y}{l} \alpha^l (1 - \alpha)^{y-l}.
 \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
 P(\alpha \circ (z + y) - \alpha \circ y = w | X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) &= \sum_{l=0}^y \binom{z + y}{w + l} \alpha^{w+2l} \\
 &\quad (1 - \alpha)^{z+2y-w-2l} \binom{y}{l}.
 \end{aligned}$$

c) Temos que $Y_{t-1} \sim \text{Poisson}(\frac{\lambda}{1-\alpha})$ e $X_{t-1} \sim \text{Poisson}(\frac{\lambda}{1-\alpha})$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 P(X_{t-1} = z + y, Y_{t-1} = y) &= \frac{\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^y e^{-\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)} \left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^{z+y} e^{-\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)}}{y! (z + y)!} \quad (\text{A.4}) \\
 &= \frac{\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^{z+2y} e^{-2\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)}}{y! (z + y)!}.
 \end{aligned}$$

d) Finalmente, a distribuição condicional de $\alpha \star Z_{t-1}$ dado Z_{t-1} é encontrada tomando o produto das expressões encontradas

$$P(\alpha \star Z_{t-1} = w | Z_{t-1} = z) = \frac{1}{I_z(2\lambda)} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-2\lambda}{1-\alpha}} \lambda^{z+2y}}{(z + y)! y!} \sum_{l=0}^y \binom{z + y}{w + l} \binom{y}{l} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right)^{w+2l}.$$

A.3 Cálculos referentes à função geradora de momentos condicional para o Modelo Skellam INAR(1) assimétrico em \mathbb{Z}

Faremos aqui a demonstração da Propriedade 3.2.5. A função geradora de momentos condicional será calculada em duas partes, primeiro considerando o caso $z > 0$ e depois $z < 0$.

1. A função geradora de momentos condicional para $z > 0$ é dada por

$$\begin{aligned}
E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{tk} P(Z_n = k|Z_{n-1} = z) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{tk} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{P(Z_n = k, Z_{n-1} = z, Y_{n-1} = y)}{P(Z_{n-1} = z)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} e^{tk} \frac{P(Z_n = k|X_{n-1} - Y_{n-1} = z, Y_{n-1} = y)}{P(Z_{n-1} = z)} \\
&\quad P(X_{n-1} - Y_{n-1} = z, Y_{n-1} = y) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} e^{tk} \frac{P(Z_n = k|X_{n-1} = z + y, Y_{n-1} = y)}{P(Z_{n-1} = z)} \\
&\quad P(X_{n-1} = z + y, Y_{n-1} = y) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{P(X_{n-1} = z + y, Y_{n-1} = y)}{P(Z_{n-1} = z)} \\
&\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{tk} P(Z_n = k|X_{n-1} = z + y, Y_{n-1} = y). \tag{A.5}
\end{aligned}$$

a) Podemos perceber que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{tk} P(Z_n = k|X_{n-1} = z + y, Y_{n-1} = y) = E(e^{tZ_n}|X_{n-1} = z + y, Y_{n-1} = y).$$

Segue então que podemos escrever Z_n e $Z_n|X_{n-1}$ da seguinte maneira,

$$Z_n = \alpha \star Z_{n-1} + \varepsilon_t = \alpha_1 \circ X_{n-1} - \alpha_2 \circ Y_{n-1} + \varepsilon_t,$$

$$Z_n|X_{n-1} = z + y, Y_{n-1} = y = \alpha_1 \circ (z + y) - \alpha_2 \circ y + \varepsilon_t.$$

Com $A_1 = \alpha_1 \circ (z + y) \sim \text{Binomial}(z + y, \alpha_1)$, $A_2 = \alpha_2 \circ (y) \sim \text{Binomial}(y, \alpha_2)$ e $A_3 = \varepsilon_t \sim \text{Skellam}(\lambda_1, \lambda_2)$. Desse modo

$$Z_n|X_{n-1} = z + y, Y_{n-1} = y \sim A_1 - A_2 + A_3.$$

Disso resulta então que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{tk} P(Z_n = k|X_{n-1} = z + y, Y_{n-1} = y) = (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)^{z+y} (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2)^y e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t}}.$$

b) E temos também que $P(X_{n-1} = z + y, Y_{n-1} = y) = P(X_{n-1} = z + y) \cdot P(Y_{n-1} = y)$ já que X_{n-1} e Y_{n-1} são independentes. Como $X_{n-1} \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)$ e $Y_{n-1} \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)$,

$$P(X_{n-1} = z + y, Y_{n-1} = y) = \frac{e^{\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)^{z+y}}{(z+y)!} \frac{e^{\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)} \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)^y}{y!}.$$

c) Ainda,

$$P(Z_{n-1} = z) = e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{z}{2}} I_z(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}).$$

Substituindo os resultados encontrados em a), b) e c) na expressão (A.9), temos

$$\begin{aligned} E(e^{tZ_n} | Z_{n-1} = z) &= \sum_{y=0}^{\infty} \left[e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{z}{2}} I_z(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}) \right]^{-1} \frac{e^{-\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)^{z+y}}{(z+y)!} \\ &\quad \frac{e^{-\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)} \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)^y}{y!} (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)^{z+y} (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2)^y \\ &\quad e^{[-(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t}]} \\ &= \left[e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{z}{2}} I_z(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}) \right]^{-1} e^{-\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)^z e^{-\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)} \\ &\quad (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)^z e^{[-(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t}]} \\ &\quad \sum_{y=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2)}{(z+y)! y!} \right]^y. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} &\sum_{y=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2)}{(z+y)! y!} \right]^y = \\ &I_z \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{-\frac{z}{2}}. \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

Desse modo, temos que a função geradora de momentos para o caso $z > 0$ é dada por

$$\begin{aligned} E(e^{tZ_n} | Z_{n-1} = z) &= \left[e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{z}{2}} I_z(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}) \right]^{-1} e^{-\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)^z e^{-\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)} \\ &\quad (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)^z e^{[-(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t}]} \\ &\quad I_z \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\quad \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{-\frac{z}{2}}. \end{aligned}$$

2. A função geradora de momentos condicional para $z < 0$ é dada por

$$\begin{aligned}
E(e^{tZ_n} | Z_{n-1} = z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{tk} P(Z_n = k | Z_{n-1} = z) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{tk} \sum_{y=-z}^{\infty} \frac{P(Z_n = k, Z_{n-1} = z, Y_{n-1} = y)}{P(Z_{n-1} = z)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-z}^{\infty} e^{tk} \frac{P(Z_n = k | X_{n-1} - Y_{n-1} = z, Y_{n-1} = y)}{P(Z_{n-1} = z)} \\
&\quad \times P(X_{n-1} - Y_{n-1} = z, Y_{n-1} = y) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-z}^{\infty} e^{tk} \frac{P(Z_n = k | X_{n-1} = z + y, Y_{n-1} = y)}{P(Z_{n-1} = z)} \\
&\quad \times P(X_{n-1} = z + y, Y_{n-1} = y).
\end{aligned}$$

Fazendo $l = y + z$, segue que

$$\begin{aligned}
E(e^{tZ_n} | Z_{n-1} = z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} e^{tk} \frac{P(Z_n = k | X_{n-1} = l, Y_{n-1} = l - z)}{P(Z_{n-1} = z)} \\
&\quad P(X_{n-1} = l, Y_{n-1} = l - z) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P(X_{n-1} = l, Y_{n-1} = l - z)}{P(Z_{n-1} = z)} \\
&\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{tk} P(Z_n = k | X_{n-1} = l, Y_{n-1} = l - z). \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

a) Podemos perceber que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{tk} P(Z_n = k | X_{n-1} = l, Y_{n-1} = l - z) = E(e^{tZ_n} | X_{n-1} = l, Y_{n-1} = l - z).$$

Segue então que podemos escrever Z_n da seguinte maneira,

$$Z_n = \alpha \star Z_{n-1} + \varepsilon_t = \alpha_1 \circ X_{n-1} - \alpha_2 \circ Y_{n-1} + \varepsilon_t,$$

$$Z_n | X_{n-1} = l, Y_{n-1} = l - z = \alpha_1 \circ l - \alpha_2 \circ (l - z) + \varepsilon_t.$$

Com $W_1 = \alpha_1 \circ l \sim \text{Binomial}(l, \alpha_1)$, $W_2 = \alpha_2 \circ (l - z) \sim \text{Binomial}(l - z, \alpha_2)$

e $W_3 = \varepsilon_t \sim \text{Skellam}(\lambda_1, \lambda_2)$. Desse modo:

$$Z_n | X_{n-1} = l, Y_{n-1} = l - z \sim W_1 - W_2 + W_3.$$

Disso resulta então que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{tk} P(Z_n = k | X_{n-1} = l, Y_{n-1} = l - z) = (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)^l (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2)^{l-z} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t}}.$$

b) E temos também que $P(X_{n-1} = l, Y_{n-1} = l - z) = P(X_{n-1} = l) \cdot P(Y_{n-1} = l - z)$ já que X_{n-1} e Y_{n-1} são independentes. Como $X_{n-1} \sim Poisson\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)$ e $Y_{n-1} \sim Poisson\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)$:

$$P(X_{n-1} = l, Y_{n-1} = l - z) = \frac{e^{-\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)^l}{l!} \frac{e^{-\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)} \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)^{l-z}}{(l-z)!}.$$

c) E ainda:

$$P(Z_{n-1} = z) = e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{z}{2}} I_z(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}).$$

Substituindo os resultados encontrados em a), b) e c) na expressão A.7, temos:

$$\begin{aligned} E(e^{tZ_n} | Z_{n-1} = z) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{z}{2}} I_z(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}) \right]^{-1} \frac{e^{-\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)^l}{l!} \\ &\quad \frac{e^{-\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)} \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)^{l-z}}{(l-z)!} (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)^l (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2)^{l-z} \\ &\quad e^{[-(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t}]} \\ &= \left[e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{z}{2}} I_z(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}) \right]^{-1} e^{-\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)} \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)^{-z} e^{-\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)} \\ &\quad (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2)^{-z} e^{[-(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t}]} \\ &\quad \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2)^l}{l! (l-z)!} \right]^l. \end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2)^l}{l! (l-z)!} \right]^l = \\ &I_{-z} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{-\frac{z}{2}}, \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

desse modo, temos que a função geradora de momentos para o caso $z < 0$ é dada por:

$$\begin{aligned} E(e^{tZ_n} | Z_{n-1} = z) &= \left[e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{z}{2}} I_z(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}) \right]^{-1} e^{-\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)} \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)^{-z} e^{-\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)} \\ &\quad (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2)^{-z} e^{[-(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t}]} \\ &I_{-z} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{-\frac{z}{2}}. \end{aligned}$$

3) Desse modo, podemos escrever a função geradora de momentos condicional:

$$\begin{aligned}
E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z) &= \left[e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{z}{2}} I_{|z|}(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}) \right]^{-1} e^{-\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1}\right)z} e^{-\left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2}\right)z} \\
&\quad (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)^z e^{[-(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t}]z} \\
&\quad I_{|z|} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\quad \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{-\frac{z}{2}}.
\end{aligned}$$

A.4 Demonstração variância Condicional

Para obter a variância condicional $Var(Z_t|Z_{t-1})$, apresentada na Propriedade 3.2.7, a função $\log(E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z))$ deverá ser derivada em relação a t duas vezes, e em seguida, será considerado esta expressão no ponto $t = 0$. O resultado obtido é a variância condicional pretendida. Procedendo os cálculos para o caso $z < 0$, tem-se que a primeira derivada da função $\log(E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z))$ em relação a t foi obtida na expressão (3.7). Desse modo, a derivada de segunda ordem para $\log(E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z))$ em relação a t é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \log\{E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z)\}}{dt^2} &= \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t} + \frac{z \alpha_1 e^t (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) - \alpha_1^2 e^{2t}}{2 (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)^2} + \\
&\quad \frac{z - \alpha_2 e^{-t} (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) + \alpha_2^2 e^{-2t}}{2 (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2)^2} - \\
&\quad [I_z(2A)]^{-2} \frac{1}{2} [I_{z-1}(2A) + I_{z+1}(2A)] A^{-\frac{3}{2}} \\
&\quad \left\{ \frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} [\alpha_1 e^t (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) - \alpha_2 e^{-t} (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)] \right\}^2 \\
&\quad \frac{1}{2} [I_{z-1}(2A) + I_{z+1}(2A)] + \frac{1}{4} \frac{1}{I_z(2A)} \\
&\quad [I_{z-2}(2A) + 2I_z(2A) + I_{z+2}(2A)] A^{-\frac{3}{2}} \\
&\quad \left\{ \frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} [\alpha_1 e^t (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) - \alpha_2 e^{-t} (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)] \right\}^2 + \\
&\quad \frac{1}{I_z(2A)} \left(-\frac{1}{4} \right) [I_{z+1}(2A) + I_{z-1}(2A)] A^{-2} \\
&\quad \left\{ \frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} [\alpha_1 e^t (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) - \alpha_2 e^{-t} (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)] \right\}^2 + \\
&\quad \frac{1}{2} \frac{1}{I_z(2A)} [I_{z+1}(2A) + I_{z-1}(2A)] A^{-1} \frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \\
&\quad [\alpha_1 e^t (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) - 2\alpha_2 \alpha_1 - \alpha_2 e^{-t} (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1)], \quad (A.9)
\end{aligned}$$

em que $A = \left[\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} (\alpha_1 e^t + 1 - \alpha_1) (\alpha_2 e^{-t} + 1 - \alpha_2) \right]^{\frac{1}{2}}$.

Aplicando o ponto $t = 0$ na expressão A.9, resulta que a variância condicional, para o caso $z \geq 0$, é dada por

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Z_n|Z_{n-1} = z) &= \left. \frac{d^2 \log\{E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z)\}}{dt^2} \right|_{t=0} \\
&= \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{z}{2}(\alpha_1 - \alpha_1^2) + \frac{z}{2}(\alpha_2^2 - \alpha) - \left\{ I_z \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}^{-2} \\
&\quad \frac{1}{2} \left\{ I_{z-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + I_{z+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \\
&\quad \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{1}{2} \\
&\quad \left\{ I_{z-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + I_{z+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \\
&\quad \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{I_z \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \frac{1}{4} \\
&\quad \left\{ I_{z-2} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + 2I_z \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
&\quad \left. I_{z+2} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right) (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \\
&\quad \frac{1}{I_z \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \frac{1}{2} \left\{ I_{z-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
&\quad \left. I_{z+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \\
&\quad \frac{1}{I_z \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \frac{1}{2} \left\{ I_{z-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
&\quad \left. I_{z+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \left(\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1} \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2).
\end{aligned}$$

De modo análogo, para o caso $z < 0$ a variância condicional é dada por

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Z_n|Z_{n-1} = z) &= \left. \frac{d^2 \log\{E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z)\}}{dt^2} \right|_{t=0} \\
&= \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{z}{2}(\alpha_1 - \alpha_1^2) + \frac{z}{2}(\alpha_2^2 - \alpha) - \left\{ I_{-z} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}^{-2} \\
&\quad \frac{1}{2} \left\{ I_{-z-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + I_{-z+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \\
&\quad \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{1}{2} \\
&\quad \left\{ I_{-z-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + I_{-z+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \\
&\quad \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{I_{-z} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \frac{1}{4} \\
&\quad \left\{ I_{-z-2} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + 2I_{-z} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
&\quad \left. I_{-z+2} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \\
&\quad \frac{1}{I_{-z} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \frac{1}{2} \left\{ I_{-z-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
&\quad \left. I_{-z+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \\
&\quad \frac{1}{I_{-z} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \frac{1}{2} \left\{ I_{-z-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
&\quad \left. I_{-z+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2).
\end{aligned}$$

Deste modo, temos que a expressão geral para a variância condicional é dada por

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Z_n|Z_{n-1} = z) &= \left. \frac{d^2 \log\{E(e^{tZ_n}|Z_{n-1} = z)\}}{dt^2} \right|_{t=0} \\
&= \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{z}{2}(\alpha_1 - \alpha_1^2) + \frac{z}{2}(\alpha_2^2 - \alpha) - \left\{ I_{|z|} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}^{-2} \\
&\quad \frac{1}{2} \left\{ I_{|z|-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + I_{|z|+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \\
&\quad \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{1}{2} \\
&\quad \left\{ I_{|z|-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + I_{|z|+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \\
&\quad \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{I_{|z|} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \frac{1}{4} \\
&\quad \left\{ I_{|z|-2} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + 2I_{|z|} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
&\quad \left. I_{|z|+2} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right) (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \\
&\quad \frac{1}{I_{|z|} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \frac{1}{2} \left\{ I_{|z|-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
&\quad \left. I_{|z|+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \\
&\quad \frac{1}{I_{|z|} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \frac{1}{2} \left\{ I_{|z|-1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
&\quad \left. I_{|z|+1} \left[2 \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2).
\end{aligned}$$

A.5 Condições dos Teoremas 4.2.1 e 4.2.2 de Tjøstheim (1986) para verificar a distribuição assintótica do vetor de estimadores $\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\alpha} \end{pmatrix}$

Para verificar a distribuição assintótica dos estimadores, devemos garantir que as condições dos Teoremas 4.2.1 e 4.2.2 de Tjøstheim (1986) são satisfeitas.

De acordo com o Teorema 4.2.1 antes deve-se avaliar se os estimadores para estes parâmetros existem, e para isso serão verificadas três condições. Inicialmente, tem-se que o processo Z_t é, por definição, estacionário e ergódico. Por ter marginal Skellam, $E(|Z_t|^2) < \infty$, bem como mostrado em (Alzaid e Omair, 2010) para uma variável que siga esta distribuição. Temos também que $E(Z_t|Z_{t-1})$ é diferenciável em todo conjunto aberto B contendo o vetor de parâmetros $\beta = (\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2)$. Além disso, considerando β^0 os valores verdadeiros dos parâmetros, são satisfeitas também as seguintes condições:

C1:

$$E \left\{ \left| \frac{\partial E(Z_t|Z_{t-1})}{\partial \beta_i}(\beta^0) \right|^2 \right\} < \infty \text{ e } E \left\{ \left| \frac{\partial^2 E(Z_t|Z_{t-1})}{\partial \beta_i \partial \beta_j}(\beta^0) \right|^2 \right\} < \infty. \quad (\text{A.10})$$

Demonstração A.5.1. Para o modelo proposto neste trabalho, serão considerados $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ e $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, sabendo que para este caso $E(Z_t|Z_{t-1}) = \lambda + Z_{t-1}\alpha$:

a) Considerando a primeira derivada em relação a α e a segunda derivada em relação a α e λ respectivamente

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \frac{\partial E(Z_t|Z_{t-1})}{\partial \alpha} \right|^2 \right\} &= E\{(Z_t - 1)^2\} \\ &= \text{Var}(Z_{t-1}) - [E(Z_{t-1})]^2 \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1 - \alpha} - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \alpha} \right)^2 < \infty, \end{aligned}$$

e

$$E \left\{ \left| \frac{\partial^2 E(Z_t|Z_{t-1})}{\partial \alpha \partial \alpha} \right|^2 \right\} = 0 < \infty,$$

$$E \left\{ \left| \frac{\partial^2 E(Z_t|Z_{t-1})}{\partial \alpha \partial \lambda} \right|^2 \right\} = 0 < \infty.$$

b) Considerando a primeira derivada em relação a λ e a segunda derivada em relação a α e λ respectivamente

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \frac{\partial E(Z_t|Z_{t-1})}{\partial \lambda} \right|^2 \right\} &= E\{1\} \\ &= 1, \end{aligned}$$

e

$$E \left\{ \left| \frac{\partial^2 E(Z_t|Z_{t-1})}{\partial \lambda \partial \alpha} \right|^2 \right\} = 0 < \infty,$$

$$E \left\{ \left| \frac{\partial^2 E(Z_t|Z_{t-1})}{\partial \lambda \partial \lambda} \right|^2 \right\} = 0 < \infty.$$

C2: Os vetores $\frac{\partial E(Z_t|Z_{t-1})}{\partial \beta_i}(\beta^0)$, $i = 1, 2, \dots, r$ são linearmente independentes, no caso onde, tomando a_1, a_2, \dots, a_r números arbitrários, tais que:

$$E \left\{ \left| \sum_{i=1}^r a_i \frac{\partial E(Z_t|Z_{t-1})}{\partial \beta_i}(\beta^0) \right|^2 \right\} = 0,$$

então $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$.

Demonstração A.5.2. *De fato, fazendo:*

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| a_1 \frac{\partial E(Z_t|Z_{t-1})}{\partial \alpha} + a_2 \frac{\partial E(Z_t|Z_{t-1})}{\partial \lambda} \right|^2 \right\} &= 0 \\ E\{|a_1 Z_{t-1} + a_2|^2\} &= 0 \\ E(a_1^2 Z_{t-1}^2 + 2a_1 a_2 Z_{t-1} + a_2^2) &= 0 \\ a_1^2 E(Z_{t-1}^2) + 2a_1 a_2 E(Z_{t-1}) + a_2^2 &= 0 \\ a_1^2 \{Var(Z_{t-1}) + [E(Z_{t-1})]^2\} + 2a_1 a_2 \left(\frac{\lambda}{1-\alpha} \right) + a_2^2 &= 0 \\ a_1^2 \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1-\alpha} + \frac{\lambda^2}{(1-\alpha)^2} \right) + 2a_1 a_2 \left(\frac{\lambda}{1-\alpha} \right) + a_2^2 &= 0 \\ \left(a_2 + a_1 \frac{\lambda}{1-\alpha} \right)^2 + a_1^2 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1-\alpha} &= 0, \quad (A.11) \end{aligned}$$

na expressão A.11, tem-se a soma de duas parcelas positivas, e do fato de que ao somar duas parcelas positivas o resultado só será zero caso ambas sejam zero, segue que:

$$a_1^2 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1-\alpha} = 0 \Rightarrow a_1 = 0,$$

considerando $a_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \left[a_2 + 0 \frac{\lambda}{1-\alpha} \right]^2 &= 0 \\ a_2^2 &= 0 \Rightarrow a_2 = 0. \end{aligned}$$

Logo, $a_1 = a_2 = 0$.

C3: Para $\beta \in B$, existem funções $G_{t-1}^{ijk}(Z_1, \dots, Z_{t-1})$ e $H_{t-1}^{ijk}(Z_1, \dots, Z_t)$, de modo que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{Z}_{t|t-1}}{\partial \beta_i}(\beta) \frac{\partial^2 \tilde{Z}_{t|t-1}}{\partial \beta_j \partial \beta_k}(\beta) \right| &\leq G_{t-1}^{ijk}, E(G_{t-1}^{ijk}) < \infty, \\ \left| \{Z_t - Z_{t|t-1}(\beta)\} \frac{\partial^3 \tilde{Z}_{t|t-1}}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \right| &\leq H_t^{ijk}, E(H_t^{ijk}) < \infty, \quad (A.12) \end{aligned}$$

para $i, j, k = 1, \dots, r$.

Demonstração A.5.3. *Como visto na condição C1, a derivada de segunda ordem é zero em relação a qualquer um dos parâmetros, dessa forma segue que a derivada de terceira ordem também será zero em relação a qualquer parâmetro, logo tomando $G_{t-1}^{ijk} = H_t^{ijk} = 0$, resulta que $E(G_{t-1}^{ijk}) = E(H_t^{ijk}) = 0 < \infty$, satisfazendo a condição.*

Referências Bibliográficas

- Al-Osh, M. A. e Alzaid, A. A. (1987) First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process. *Journal of Time Series Analysis*, **8**, 261–275.
- Alzaid, A. A. e Omair, M. A. (2010) On the poisson difference distribution inference and applications. *Bulletin of the Malaysian Mathematical*, **33**, 17–45.
- Barreto-Souza, W. e Bourguignon, M. (2014) A skew INAR(1) process on \mathbb{Z} . *Advances in Statistical Analysis*, **99**, 189– 208.
- Freeland, R. K. (2010) True integer value times series. *Advances in Statistical Analysis*, **35**, 625–645.
- Freeland, R. K. e McCabe, B. (2005) Asymptotic properties of cls estimators in the poisson ar(1)model. *Statistics and Probability Letters*, **73**, 147– 153.
- Hyndman, R. J. e Koehler, A. B. (2006) Another look at measures of forecast accuracy. *International Journal of Forecasting*, **22**, 679– 688.
- McKenzie, E. (1985) Some simple models for discrete variate time series. *Water Resources Bulletin*, **21**, 645–650.
- Ristić, M. M., Bakouch, H. S. e Nastić, A. S. (2009) A new geometric first-order integer-valued autoregressive (nginar(1)) process. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 2218–2226.
- Steutel, F. e Harn, K. V. (1979) Discrete analogues of self-decomposability and stability. *Annals of Probability*, **7**, 893–899.
- Tjøstheim, D. (1986) Estimation in nonlinear times series models. *Stochastic Processes and Applications*, **21**, 251–273.
- Weiß, C. H. (2009) Jumps in binomial ar(1) processes. *Statistics and Probability Letters*, **79**, 2012– 2019.