

**Cancelamento de aberrações ópticas  
utilizando feixes de correlação**

Luísa Amorim Perez Filpi

# **Cancelamento de aberrações ópticas utilizando feixes de correlação**

**Luísa Amorim Perez Filpi**  
**Orientador: Prof. Carlos Henrique Monken**

Tese financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Sistemas ópticos formadores de imagem comumente introduzem deformações na frente de onda da luz, as chamadas aberrações, que resultam na degradação da imagem. Em geral, as aberrações ópticas são minimizadas com combinações adequadas de lentes ou com o uso de lentes especialmente desenhadas para eliminar certos tipos de aberrações. Neste trabalho, tratamos de uma forma alternativa de minimização de aberrações utilizando um sistema formador de imagem em quarta ordem, isto é, um sistema que forma imagens por detecção em coincidência de fótons em feixes de correlação. Os feixes de correlação são gerados pelo processo de conversão paramétrica descendente espontânea em um cristal não-linear. Após uma descrição sucinta da teoria das aberrações ópticas e dos feixes de correlação, apresentamos um sistema óptico capaz de eliminar correlações resultantes de deformações nas frentes de onda que são antissimétricas com relação ao eixo de simetria do sistema. Apresentamos também dados experimentais que confirmam as previsões teóricas e simulações numéricas que determinam os limites de eficácia do método proposto.

## ABSTRACT

Optical imaging systems usually introduce wavefront deformation, the so called aberrations, which result in image degradation. In general, optical aberrations can be minimized with suitable combination of lenses or with specially designed lenses to correct certain kinds of aberrations. In this work, we deal with an alternative method for minimizing aberrations, one that employs fourth order detection of photons generated by the process of spontaneous parametric down conversion in a non-linear crystal. After a brief description of aberrations and the formation of correlation beams, we present an optical system capable of eliminating correlations introduced by wavefront deformation that are antisymmetric with respect to the system's axis of symmetry. We also present experimental data that confirm the theoretical predictions and numerical simulations that establish limits for the validity of the proposed method.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Correlações do campo eletromagnético</b>	<b>4</b>
2.1	Correlações clássicas	5
2.1.1	Correlações de segunda ordem	5
2.1.2	Correlações de quarta ordem	7
2.2	Correlações quânticas	8
2.2.1	Funções de correlação quânticas: a probabilidade de detecção	9
2.2.2	Emaranhamento	10
2.3	Propagação de correlações	11
2.4	Feixes de correlação	12
<b>3</b>	<b>Feixes de correlação na Conversão Paramétrica Descendente Espontânea</b>	<b>13</b>
3.1	Conversão paramétrica descendente espontânea (CPDE)	13
3.2	Perfil de coincidências	16
3.3	Fase de Gouy do feixe de correlação	18
3.3.1	Medição da fase de Gouy do feixe de correlação	19
<b>4</b>	<b>Aberrações ópticas</b>	<b>25</b>
4.1	Formação de imagens em segunda ordem	25
4.2	Aberrações ópticas	29
4.2.1	Aberração esférica	33
4.2.2	Coma	33
4.2.3	Astigmatismo	34
4.2.4	Curvatura	35
4.2.5	Distorção	35
4.3	Simulações numéricas das PSFs com aberrações	36
4.4	Formação de imagens em quarta ordem	38
4.5	Aberrações induzidas por um objeto de fase	42
	Apêndice 4A: Código das simulações	44

<b>5</b>	<b>Cancelamento de aberrações com o feixe de correlação</b>	<b>46</b>
5.1	Cancelamento de aberrações antissimétricas induzidas por um modulador espacial . . . . .	46
5.1.1	Experimento . . . . .	48
5.1.2	Resultados experimentais . . . . .	50
5.1.3	Simulações numéricas . . . . .	53
5.2	Cancelamento de aberrações com luz térmica . . . . .	55
	Apêndice 5A: Modulador espacial . . . . .	57
	Apêndice 5B: Código das simulações . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>63</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>65</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Instrumentos de imagem, tais como óculos de grau, câmeras fotográficas, microscópios e telescópios são amplamente utilizados nos dias de hoje, sendo alguns de uso mais corriqueiro. Desde sua invenção, esses instrumentos vêm passando por uma série de transformações, visando uma melhora no seu desempenho, seja pela utilização de novos materiais, pelo aprimoramento das técnicas de fabricação, ou pelo desenvolvimento de novos métodos de funcionamento. Como exemplo da introdução de novos materiais, podemos citar os metamateriais, criados artificialmente para exibir um índice de refração negativo [1]. Esses materiais são utilizados na fabricação de superlentes [2, 3], capazes de criar imagens com resolução superior ao limite teórico, que corresponde à metade do comprimento de onda da luz [4]. A ideia básica por trás do efeito é que a informação sobre os detalhes finos de um objeto é carregada pelas ondas evanescentes, que decaem rapidamente em materiais com índice de refração positivo. Nos metamateriais, ao contrário, elas são fortemente amplificadas, resultando em imagens de alta resolução. Já o aprimoramento das técnicas de fabricação possibilitou a criação das lentes asféricas, utilizadas em câmeras de celulares e tocadores de CD [5] e que têm como vantagem principal a ausência de aberrações esféricas, anomalias observadas quando lentes esféricas são empregadas. Um exemplo de avanço recente nos métodos de funcionamento foi a incorporação de uma técnica, já utilizada em astronomia, na construção de uma câmera fotográfica que permite alterar o foco de uma foto depois que ela foi feita [6], o que é possível graças a um arranjo de microlentes situado entre a lente principal da câmera e o detector. Medindo-se a posição dos pontos focais de cada lente no detector, pode-se determinar a inclinação local da frente de onda da luz e reconstruí-la no plano de detecção [7]. Assim, conhecendo-se o perfil de fase e a intensidade da luz em cada pixel, é possível simular, com o auxílio de um *software*, o que aconteceria se tivéssemos modificado o foco da lente antes que a fotografia fosse feita. Outro exemplo notável é o desenvolvimento de duas técnicas que possibilitaram ultrapassar o limite teórico de resolução em microscópios ópticos e que renderam o prêmio Nobel de Química de 2014 a três cientistas: Eric Betzig, Stefan Hell e William Moerner [8]. A primeira técnica é denominada *stimulated emission depletion microscopy* [9, 10], que consiste na utilização de dois feixes de laser, de forma que um deles estimula a fluorescência em moléculas e o outro cancela essa

fluorescência, exceto em uma região nanométrica. Escaneando-se o laser ao longo da amostra obtém-se uma imagem com resolução superior ao limite teórico. A segunda técnica é chamada *single-molecule microscopy* [11, 12] e baseia-se na possibilidade de se “ligar” e “desligar” a fluorescência de moléculas individualmente.

A resolução de uma imagem não é limitada, na prática, somente pelo sistema óptico. O próprio meio pelo qual a luz se propaga pode se tornar uma fonte de aberrações, como ocorre em observações astronômicas ou em sistemas de comunicação pelo ar. Nesses casos, a turbulência atmosférica, causada principalmente pela mistura de ar quente e frio, provoca alterações no sinal detectado, sendo responsável pela cintilação das estrelas. É possível corrigir as aberrações introduzidas pela atmosfera utilizando-se, por exemplo, as técnicas da Óptica Adaptativa [13], que consiste na utilização de espelhos deformáveis para compensar deformações conhecidas, ou ainda um método de pós-processamento conhecido como *Lucky Imaging* [14], que visa remover o desvio lateral que a atmosfera provoca no feixe de luz através da análise de uma série de imagens de curta exposição.

Por vezes, aberrações podem ser causadas pelo próprio objeto do qual se deseja fazer a imagem. Esse é um problema comumente encontrado em microscopia, quando amostras espessas são analisadas. A luz proveniente de planos fora do plano de interesse da amostra provoca uma diminuição na resolução da imagem. Algumas técnicas podem ser empregadas para resolver o problema, como a chamada microscopia confocal [15]. Nessa técnica, um orifício é colocado no plano focal da lente objetiva, de maneira a eliminar a luz proveniente de outros planos. Outra técnica comumente utilizada é a microscopia de fluorescência de dois fótons [16], na qual componentes fluorescentes na amostra são excitados por um laser de alta potência, através da absorção simultânea de dois fótons, e em seguida fluorescem, emitindo um fóton. A ocorrência desse evento é muito mais provável onde o laser é focalizado, de maneira que praticamente não há luz espúria vinda de regiões fora do foco. Isso elimina a necessidade de se usar um orifício para bloquear a luz, como no caso da microscopia confocal. Algumas aplicações utilizam em adição as técnicas da óptica adaptativa para corrigir aberrações resultantes da variação do índice de refração ao longo da amostra [17].

A técnica da microscopia de fluorescência de dois fótons, citada acima, é um exemplo de que resolução de uma imagem pode ser otimizada através de uma escolha conveniente da fonte. Esse também será o enfoque adotado neste trabalho. No nosso caso, a fonte utilizada consiste em um cristal não-linear capaz de gerar pares de fótons quando iluminado por um laser intenso, um fenômeno conhecido como conversão paramétrica descendente espontânea [18, 19]. Esses pares de fótons são gerados simultaneamente no interior do cristal, o que resulta em uma forte correlação entre eles. Essa correlação é comprovadamente não-clássica [20, 21] e recebe o nome de emaranhamento. Tal propriedade permite, por exemplo, que o momento de um dos fótons do par seja inferido, quando apenas o momento do outro foi medido. Explorando certas características da função de correlação e fazendo uma transformação conveniente na coordenada transversal de um dos fótons, conseguimos produzir o can-

cancelamento de aberrações descritas por funções antissimétricas, introduzidas por um modulador espacial, um dispositivo capaz de modificar a frente de onda da luz. Um procedimento semelhante foi adotado em um trabalho recente do grupo [22], no qual investigamos o cancelamento de efeitos causados pela turbulência atmosférica, produzida em uma câmara fabricada em laboratório. Na ocasião, constatamos uma queda na cintilação no perfil de correlação dos fótons. Este trabalho é, de certa maneira, complementar àquele, pois permitiu que o efeito de cada aberração fosse isolado e estudado separadamente.

Esta tese está organizada da seguinte maneira: o capítulo 2 está dedicado ao estudo das correlações do campo eletromagnético, em que são discutidos o significado físico das funções de correlação de segunda e de quarta ordem, bem como as diferenças entre correlações clássicas e quânticas. O conceito de feixe de correlação é introduzido no final do capítulo. Em seguida, no capítulo 3, discutimos o processo de geração e a propagação do feixe de correlação da conversão paramétrica descendente espontânea. Começamos o capítulo 4 com uma revisão do processo de formação de imagens em segunda e em quarta ordem, sob o ponto de vista da Óptica Ondulatória. Ainda nesse capítulo, apresentamos uma introdução à teoria de aberrações, mostrando de que forma elas afetam a formação de imagens. No capítulo 5, apresentamos os resultados do estudo sobre o cancelamento de aberrações ímpares utilizando o feixe de correlação da conversão paramétrica. Os resultados experimentais são apresentados e comparados à previsão teórica e a simulações numéricas. Investigamos, também, a possibilidade de se reproduzir o experimento com luz térmica no lugar dos fótons emaranhados. As conclusões do trabalho são apresentadas no capítulo 6.

## Capítulo 2

# Correlações do campo eletromagnético

O mecanismo de emissão de luz por uma lâmpada fluorescente resulta do decaimento espontâneo dos inúmeros átomos que a compõem, cada qual emitindo em uma direção diferente, com uma fase arbitrária. Até mesmo processos de emissão estimulada [18], nos quais está baseado o funcionamento dos lasers, não são totalmente determinísticos, possuindo algum grau de aleatoriedade resultante do decaimento espontâneo dos átomos. Assim, pode-se dizer que a emissão de luz é um processo fundamentalmente estatístico e, portanto, os campos elétrico e magnético que a compõem devem ser descritos em termos de médias estatísticas.

Instrumentos de detecção comuns, tais como uma câmera ou o olho, respondem apenas à intensidade do campo elétrico e não ao campo propriamente dito. De modo geral, as grandezas normalmente acessíveis experimentalmente são a intensidade média e a correlação entre intensidades, essa última dada pela expressão

$$\langle I(\mathbf{r}_1, t_1) I(\mathbf{r}_2, t_2) \dots I(\mathbf{r}_N, t_N) \rangle, \quad (2.0.1)$$

em que  $I(\mathbf{r}, t) = |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2$  é a intensidade do campo elétrico  $\mathbf{E}$  no ponto  $\mathbf{r}$ , no instante  $t$  e  $\langle \dots \rangle$  denota a média em ensemble <sup>1</sup>. Essas funções representam correlações entre as intensidades do campo em pontos diferentes do espaço-tempo. Diz-se que a função acima é uma função de correlação de ordem  $2N$ , pois envolve implicitamente o produto de  $2N$  campos elétricos <sup>2</sup>.

Pode-se definir uma equação semelhante a essa, que expressa porém as correlações entre campos elétricos:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \dots \mathbf{E}(\mathbf{r}_N, t_N) \rangle. \quad (2.0.2)$$

Nesse caso, a ordem da correlação é  $N$ , pois envolve o produto de  $N$  vetores campo elétrico. Embora essas funções não possam ser medidas diretamente, elas podem ser

---

<sup>1</sup>Um ensemble é uma coleção de todas as possíveis realizações de uma variável aleatória.

<sup>2</sup>Algumas referências consideram (2.0.1) como sendo de ordem  $N$ , por envolver o produto de  $N$  operadores intensidade.

obtidas indiretamente por meio de experimentos de interferência.

A existência de correlações está ligada às características da fonte luminosa. Em uma fonte térmica, uma lâmpada por exemplo, os átomos emitem luz de maneira independente uns dos outros, sendo por esse motivo considerada uma fonte incoerente. Por outro lado, em um laser, os átomos são estimulados a emitir sincronizadamente em uma mesma direção, em uma faixa estreita de comprimentos de onda, o que o torna uma fonte altamente coerente. As correlações podem ser classificadas quanto a sua natureza em clássicas e quânticas. Essa separação, no entanto, é muitas vezes complexa, pois depende da definição de classicalidade utilizada [23]. Nas seções seguintes discutiremos os dois tipos de correlação e daremos exemplos de experimentos que nos permitem obter correlações de segunda e de quarta ordem.

## 2.1 Correlações clássicas

### 2.1.1 Correlações de segunda ordem

Um exemplo típico da manifestação de correlações de segunda ordem é o experimento de interferência de fenda dupla, ilustrado a seguir. A luz proveniente de uma certa fonte ilumina as fendas  $P(\mathbf{r}_1)$  e  $P(\mathbf{r}_2)$ , separadas de uma distância  $d$ , e atinge um anteparo distante do plano das fendas. O campo elétrico em um ponto qualquer do anteparo é dado pela superposição dos campos provenientes de cada fenda.<sup>3</sup>

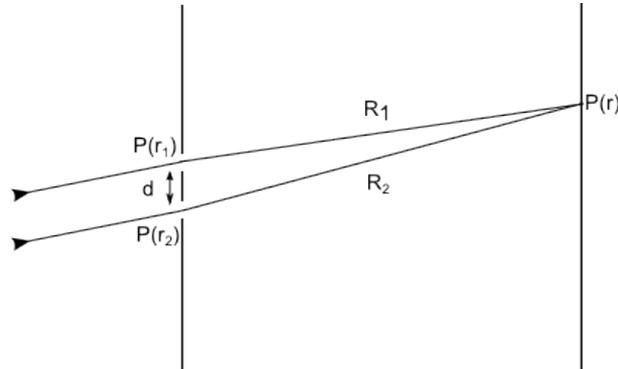


Figura 2.1: Representação do experimento de interferência de fenda dupla. A luz proveniente de uma determinada fonte atinge as fendas  $P(\mathbf{r}_1)$  e  $P(\mathbf{r}_2)$ , separadas de uma distância  $d$ , sendo detectada por um anteparo no ponto  $P(\mathbf{r})$ .

Vamos supor, por simplicidade, que as fendas sejam pontuais, de maneira que o campo em um ponto  $\mathbf{r}$  do anteparo dependa somente dos campos avaliados nas posições  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  das fendas. Dessa forma, o princípio da superposição fornece o seguinte:

<sup>3</sup>Esta seção está baseada na referência [24].

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = K_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t - t_1) + K_2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t - t_2), \quad (2.1.3)$$

em que  $K_1$  e  $K_2$  são fases resultantes da propagação e  $t_i = R_i/c$ , sendo  $c$  a velocidade da luz. Experimentalmente, o que se detecta é a intensidade média, dada pela expressão:

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle \\ &= \langle I(\mathbf{r}_1, t - t_1) \rangle + \langle I(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle + 2Re [K_1^* K_2 \langle E^*(\mathbf{r}_1, t - t_1) E(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle]. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

O termo  $\langle E^*(\mathbf{r}_1, t - t_1) E(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle$  tem a forma de uma função de correlação, como a expressa em (2.0.2) e é responsável pelo aparecimento de franjas de interferência no anteparo. Ele efetivamente mede a correlação do campo elétrico em dois pontos diferentes do espaço-tempo.

Para processos estacionários, ou seja, aqueles nos quais a estatística das flutuações não varia com o tempo, a média em ensemble pode ser substituída por uma média temporal:

$$\langle E^*(\mathbf{r}_1, t - t_1) E(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E^*(\mathbf{r}_1, t - t_1) E(\mathbf{r}_2, t - t_2) dt. \quad (2.1.5)$$

Nesse caso, os valores médios das grandezas não podem depender da origem do tempo, somente da sua diferença. Assim, a equação (2.1.4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle I(\mathbf{r}_1, t) \rangle + \langle I(\mathbf{r}_2, t) \rangle + 2Re [K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)], \quad (2.1.6)$$

em que

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t - t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle \quad (2.1.7)$$

e  $\tau = t_1 - t_2$ . Essa expressão pode ser normalizada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)^{\frac{1}{2}} \Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\langle I(\mathbf{r}_1, t) \rangle^{\frac{1}{2}} \langle I(\mathbf{r}_2, t) \rangle^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

O fator  $\gamma$  é conhecido como grau de correlação de segunda ordem e é tal que

$$0 \leq |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \leq 1. \quad (2.1.9)$$

Mostra-se em [24] que o módulo do grau de correlação tem um significado operacional: ele é igual à visibilidade das franjas no padrão de interferência.

### 2.1.2 Correlações de quarta ordem

As correlações de quarta ordem aparecem no contexto de detecções em coincidência, uma técnica na qual os resultados das medições efetuadas por dois detectores são correlacionados entre si. O experimento de Hanbury Brown e Twiss [25], realizado em 1956, é reconhecido como o primeiro desse tipo. Nesse experimento, um feixe de luz proveniente de uma lâmpada de mercúrio, após passar por um orifício, é dividido por um semi-espelho, sendo parte dirigida a uma fotomultiplicadora P1 e a outra parte a uma fotomultiplicadora P2, como mostra a figura 2.2. Uma delas é montada em um base que pode mover-se na direção perpendicular à direção de incidência do feixe. A luz incidente nas fotomultiplicadoras arranca elétrons de seus eletrodos, produzindo uma corrente proporcional à intensidade do campo elétrico incidente (efeito fotoelétrico). As correntes provenientes dos dois detectores são direcionadas, através de cabos de mesmo comprimento, a um circuito correlacionador, que compara os dois sinais elétricos. São considerados coincidentes os sinais que chegam ao correlacionador separados de um tempo  $\tau \leq T_R$ , em que  $T_R$  é a resolução temporal característica do circuito, também conhecido como janela de coincidência.

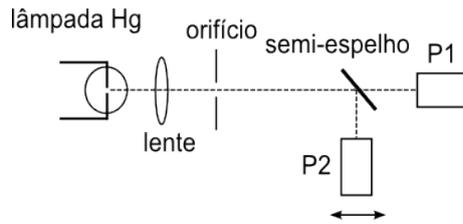


Figura 2.2: Esquema do experimento de Brown-Twiss. A luz proveniente de uma lâmpada de Hg é focalizada por uma lente em um orifício, que funciona como uma fonte secundária, e é em seguida separada por um semi-espelho, sendo parte dirigida a uma fotomultiplicadora P1 e a outra parte a uma fotomultiplicadora P2. Os sinais elétricos provenientes dos dois detectores são comparados em um circuito correlacionador. Durante o experimento, a fotomultiplicadora P1 é escaneada perpendicularmente à direção de incidência da luz.

A taxa de coincidências, dada pela expressão a seguir, é então medida em função da separação transversal entre os dois detectores.

$$C(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, T_R) = \int_{-T_R/2}^{T_R/2} \langle I(\mathbf{r}_1, t) I(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle d\tau. \quad (2.1.10)$$

O resultado é que a taxa de coincidências diminui à medida em que se aumenta a distância transversal relativa entre os detectores. Esse efeito é conhecido como *bunching* (ou agrupamento, em português), pois revela a tendência dos fótons de se agruparem espacialmente. Essa conclusão está em acordo com a seguinte desigualdade de Schwarz, deduzida sob premissas clássicas [20]:

$$\langle I(\mathbf{r}, t) I(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}, t + \tau) \rangle \leq \langle I(\mathbf{r}, t) I(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (2.1.11)$$

Pode-se mostrar [24] que, para fontes que obedecem a uma estatística gaussiana, a função de correlação de quarta ordem é proporcional ao módulo quadrado do grau de correlação de segunda ordem (2.1.8):

$$\langle I(\mathbf{r}_1, t) I(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle \propto |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|^2. \quad (2.1.12)$$

De acordo com o teorema de van Cittert-Zernike, válido para fontes térmicas como aquela utilizada no experimento, o valor de  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  em pontos suficientemente distantes da fonte é proporcional à transformada de Fourier da intensidade no plano da fonte. Ou seja, é possível relacionar o grau de coerência de segunda ordem e, portanto, a função de correlação de quarta ordem, à dimensão angular da fonte. Esse tipo de experimento foi, por esse motivo, empregado na determinação do diâmetro de estrelas. Esse método possuía a vantagem de ser muito mais simples do que aquele empregado até então, baseado na observação de franjas de interferência, o que requeria uma elevada estabilidade do aparato.

## 2.2 Correlações quânticas

A teoria mais geral, capaz de descrever a maior parte dos fenômenos físicos, é a teoria quântica. Essa teoria engloba tanto a quantização da matéria, com a discretização dos níveis eletrônicos dos átomos, quanto da luz. A sequência de eventos que culminaria com a proposição de Einstein de que a luz é composta por partículas, conhecidas como fótons, teve início com os estudos de Max Planck sobre radiação de corpo negro. Planck foi a primeira pessoa a propor, ainda no século XIX, que os osciladores em um corpo negro deveriam emitir energia na forma de pacotes discretos, os chamados quanta de luz. A validação da hipótese de Planck veio mais tarde, com aplicação de sua ideia ao estudo de um problema conhecido como catástrofe do ultravioleta, resultante da previsão da teoria clássica do eletromagnetismo de que a energia da radiação emitida por um corpo negro deveria aumentar sem limites com sua frequência. A aplicação da quantização dos níveis de energia do corpo negro permitiu uma solução teórica satisfatória para o problema.

A luz produzida por fontes ordinárias, com as quais estamos acostumados a lidar em nosso cotidiano, é composta por um número muito grande de fótons, de maneira que as teorias quântica e clássica fornecem resultados semelhantes nesse limite. No regime de poucos fótons, porém, a teoria clássica do eletromagnetismo começa a falhar e a teoria quântica deve ser aplicada. Nesta seção, aplicaremos o tratamento quântico à descrição das correlações de quarta ordem, o que será de interesse no capítulo seguinte, no qual estudaremos um fenômeno que produz luz na escala de poucos fótons.

### 2.2.1 Funções de correlação quânticas: a probabilidade de detecção

No tratamento quântico da luz, os campos elétrico e magnético (e outros observáveis, tal como energia, momento linear, momento angular) são descritos por operadores<sup>4</sup>. Esses operadores atuam em estados quânticos, indicados pela notação  $|\psi\rangle$ , modificando-os<sup>5</sup>. A detecção de um fóton é descrita pela atuação do operador  $\hat{\mathbf{E}}^+$ , componente de frequência positiva do campo elétrico, dado pela equação:

$$\hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}, t) = \int l(k) \hat{a}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(k)t)} d^3k, \quad (2.2.13)$$

em que  $l(k)$  é a amplitude do modo cujo vetor de onda tem módulo  $k = \omega/c$ , sendo  $\omega$  a frequência e  $c$  a velocidade da luz no vácuo e  $\hat{a}(\mathbf{k})$  é o operador destruição do modo com vetor de onda  $\mathbf{k}$ .

A probabilidade de que a detecção projete um estado inicial  $|\psi_1\rangle$  do campo em um estado  $|\psi_2\rangle$  é:

$$P(\mathbf{r}, t) = \eta \left| \langle \psi_2 | \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}, t) | \psi_1 \rangle \right|^2, \quad (2.2.14)$$

em que  $\eta$  representa a eficiência do detector. A probabilidade de um evento de detecção, independentemente do estado final, é dada por:

$$P(\mathbf{r}, t) \propto \sum_{\psi_2} \langle \psi_1 | \hat{\mathbf{E}}^-(\mathbf{r}, t) | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}, t) | \psi_1 \rangle, \quad (2.2.15)$$

onde  $\hat{\mathbf{E}}^-(\mathbf{r}, t)$  é o hermitiano conjugado de  $\hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}, t)$ , dado pela expressão:

$$\hat{\mathbf{E}}^-(\mathbf{r}, t) = \int l^*(k) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(k)t)} d^3k \quad (2.2.16)$$

e  $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$  é o operador criação do modo com vetor de onda  $\mathbf{k}$ . Se  $|\psi_2\rangle$  é uma base completa, temos:

$$\sum_{\psi_2} |\psi_2\rangle \langle \psi_2| = 1. \quad (2.2.17)$$

A equação 2.2.15 reduz-se, então, a:

$$P(\mathbf{r}, t) \propto \langle \psi_1 | \hat{\mathbf{E}}^-(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}, t) | \psi_1 \rangle. \quad (2.2.18)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, pode-se obter a probabilidade de detecção em coincidência por dois detectores posicionados em  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ :

<sup>4</sup>Para um tratamento completo da quantização do campo, ver [24].

<sup>5</sup>A teoria descrita nesta seção foi desenvolvida para o caso específico de estados puros.

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) &= \eta_1 \eta_2 \sum_{\psi_2} \left| \langle \psi_2 | \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}_2, t_2) | \psi_1 \rangle \right|^2 \\
&\propto \langle \psi_1 | \hat{\mathbf{E}}^-(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \hat{\mathbf{E}}^-(\mathbf{r}_2, t_2) \cdot \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}_2, t_2) | \psi_1 \rangle. \quad (2.2.19)
\end{aligned}$$

Considere agora o caso especial em que  $|\psi_1\rangle$  é um estado puro de dois fótons. Nesse caso, os únicos elementos não nulos no somatório da expressão acima são aqueles para os quais a detecção projeta  $|\psi_1\rangle$  no estado de vácuo,  $|0\rangle$ . Dessa forma, a probabilidade de detecção (2.2.19) pode ser reescrita como:

$$P(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) \propto \left| \langle 0 | \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}_2, t_2) | \psi_1 \rangle \right|^2. \quad (2.2.20)$$

Estados descritos pela teoria quântica podem ou não exibir correlações quânticas. Na próxima seção discutiremos o emaranhamento, uma propriedade que permite a existência de correlações exclusivamente quânticas, isto é, que não possui análogo clássico.

### 2.2.2 Emaranhamento

Um dos aspectos mais contraintuitivos da teoria quântica é o conceito de emaranhamento. Os componentes de um sistema emaranhado estão relacionados de tal maneira que a medição de uma das partes resulta em um conhecimento imediato das outras, mesmo que elas estejam infinitamente separadas. Esse efeito não-local parece, a princípio, violar a teoria da Relatividade, permitindo que a informação se propague instantaneamente. No entanto, isso não acontece, pois o resultado da medida é totalmente probabilístico e, portanto, não há como utilizá-lo para enviar uma mensagem. O assunto gerou muita controvérsia na comunidade científica nos primórdios da criação da teoria quântica e motivou a elaboração do famoso artigo escrito por Einstein, Podolsky e Rosen [26], contestando a completeza da teoria.

Considere como exemplo o estado abaixo, que representa o emaranhamento em polarização entre duas partículas, 1 e 2:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_1 |V\rangle_2 + |V\rangle_1 |H\rangle_2), \quad (2.2.21)$$

sendo  $H$  a polarização horizontal e  $V$  a polarização vertical. O estado (2.2.21) é claramente não fatorável, isto é, não pode ser escrito como um produto do tipo  $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$  e é, pois, dito emaranhado. Nesse caso, se a partícula 1 for detectada com polarização vertical, saberemos que a partícula 2 está em um estado de polarização horizontal e vice-versa.

Em muitas situações, no entanto, a classificação de um estado como emaranhado não é tão simples. Um critério comumente utilizado baseia-se na violação de desigualdades clássicas, como as tão faladas desigualdades de Bell [24]. Estados que violam essas desigualdades são considerados emaranhados, porém o teste é inconclusivo para

estados que não as violam. Vários experimentos já foram realizados demonstrando violações dessas desigualdades em diferentes sistemas [27, 28, 29].

Nas referências [20, 21] os autores demonstraram experimentalmente que estados de dois fótons produzidos a partir do fenômeno da conversão paramétrica descendente espontânea, o qual será explicado no próximo capítulo, violam a seguinte desigualdade, o equivalente quântico à Eq. 2.1.11:

$$\langle : \hat{I}(\mathbf{r}, t) \hat{I}(\mathbf{r} + \delta, t + \tau) : \rangle \leq \langle : \hat{I}(\mathbf{r}, t) \hat{I}(\mathbf{r}, t) : \rangle, \quad (2.2.22)$$

em que o símbolo  $:$  indica o ordenamento normal dos produtos, com todos os operadores criação à esquerda dos operadores destruição. Essa violação demonstra que, ao contrário do resultado obtido no experimento de Brown-Twiss, explicado na seção 2.1.2, os fótons gerados nesse processo exibem *antibunching*.

Há até pouco tempo, pensava-se que o emaranhamento era a única forma de correlação quântica, mas trabalhos recentes [30] mostraram que mesmo estados separáveis, da forma  $\rho = \sum_i p_i |\psi_{i1}\rangle\langle\psi_{i1}| \otimes |\psi_{i2}\rangle\langle\psi_{i2}|$ , podem apresentar correlações que não são inteiramente clássicas. A essas correlações deu-se o nome de discórdia quântica [23].

## 2.3 Propagação de correlações

A propagação do campo elétrico da luz no vácuo é governada pela seguinte equação de onda:

$$\nabla_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1)}{\partial t_1^2}, \quad (2.3.23)$$

em que  $\nabla_1^2$  representa o operador Laplaciano na coordenada  $\mathbf{r}_1$  e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

De maneira semelhante, a propagação das correlações do campo elétrico também é governada por equações de onda. Para ver isso, vamos multiplicar a equação anterior por  $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2)$ , o que nos leva a:

$$\nabla_1^2 [\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2)] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 [\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2)]}{\partial t_1^2}. \quad (2.3.24)$$

Tomando a média em ensemble dos dois lados da equação e trocando a ordem das operações média e diferenciação, obtemos:

$$\nabla_1^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)}{\partial t_1^2}, \quad (2.3.25)$$

sendo  $\Gamma = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$ . Da mesma maneira, a seguinte equação também é satisfeita:

$$\nabla_2^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)}{\partial t_2^2}. \quad (2.3.26)$$

A demonstração acima foi feita para funções de correlação de segunda ordem, mas ela pode ser facilmente estendida para correlações de ordem arbitrária, na forma da Eq. 2.0.2. Assim, uma função de correlação de ordem  $N$  obedecerá a  $N$  equações de onda, uma para cada variável. Da mesma maneira, pode-se mostrar que a amplitude de probabilidade de detecção de dois fótons,  $\langle 0 | \widehat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \widehat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}_2, t_2) | \psi_1 \rangle$ , obedece a duas equações de onda [31], apesar de não ser tecnicamente considerada uma função de correlação, no sentido da Eq. 2.0.2.

## 2.4 Feixes de correlação

Um feixe caracteriza-se pelo confinamento transversal da onda em um certo grau ou, em outras palavras, a divergência da onda com a propagação deve ser pequena. Matematicamente, o campo elétrico de um feixe pode ser representado da forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}, \quad (2.4.27)$$

em que  $A(\mathbf{r})$  é uma envoltória de variação lenta,  $k$  e  $\omega$  são, respectivamente, o número de onda e a frequência da onda plana e  $\mathbf{e}$  é o vetor unitário que descreve a direção do campo. Vimos na seção anterior que a propagação do campo elétrico no vácuo é descrita pela Eq. 2.3.23. Aplicando essa equação ao campo (2.4.27), temos:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) A(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.4.28)$$

onde utilizamos  $k = \omega/c$ . Vamos supor que a variação de  $A$  seja lenta o suficiente, de maneira que  $\left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \ll 2k \frac{\partial A}{\partial z}$ . Assim, podemos aproximar (2.4.28) por:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) A(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.4.29)$$

Essa equação é conhecida como equação de onda paraxial, significando que a evolução da onda ocorre próximo ao eixo de propagação, no caso, o eixo  $z$ . Como demonstrado na seção 2.3, a propagação das correlações do campo eletromagnético é governada pela mesma equação que dita a propagação do campo elétrico. Da mesma maneira, podemos imaginar correlações que se propaguem segundo (2.4.29), de onde surge o conceito de **feixes de correlação**. No próximo capítulo estudaremos um caso especial de feixes quânticos de correlação.

# Capítulo 3

## Feixes de correlação na Conversão Paramétrica Descendente Espontânea

Neste capítulo, trataremos do fenômeno físico através do qual são gerados os fótons emaranhados utilizados no experimento principal desta tese. Mostaremos em que condições a geração ocorre e de que maneira são descritos o estado do sistema e o perfil espacial do feixe de correlação. Mostraremos ainda como se comporta o perfil longitudinal de fase desse feixe, a partir de medidas realizadas em laboratório.

### 3.1 Conversão paramétrica descendente espontânea (CPDE)

A CPDE [32, 33, 34, 24] é um processo que envolve a aniquilação de um fóton de frequência  $\omega_p$  (*pump*) e a subsequente criação de dois outros (*signal* e *idler*), com frequências  $\omega_s$  e  $\omega_i$ . Esses fótons são gerados simultaneamente Sem cristais birrefringentes não lineares, sendo por isso chamados de fótons gêmeos. O fenômeno ocorre em cristais não-centrossimétricos, para os quais uma reversão no sinal do campo elétrico não reverte o sinal da polarização, a qual é dada pela seguinte expressão

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \left( \chi_{ij}^{(1)} \mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) + \chi_{ijk}^{(2)} \mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_k(\mathbf{r}, t) + \dots \right), \quad (3.1.1)$$

em que  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico aplicado,  $\epsilon_0$  é a constante dielétrica no vácuo e  $\chi^{(j)}$  é susceptibilidade elétrica de ordem  $j$  do meio. Na conversão paramétrica, o termo dominante é proporcional à susceptibilidade elétrica de segunda ordem. A interação é governada pelo seguinte hamiltoniano:

$$H_I(t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} \int_V \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_k(\mathbf{r}, t) d^3r, \quad (3.1.2)$$

em que  $V$  representa o volume de interação. Em seguida, esse hamiltoniano é quantizado e a solução é encontrada através de um tratamento perturbativo, para a condição

inicial em que o estado do campo bombeador é aproximado por um campo clássico <sup>1</sup> e o estado dos fótons gêmeos é dado pelo estado de vácuo,  $|0\rangle$ . Não descreveremos aqui a solução detalhada do problema, que pode ser encontrada em [34, 19]. A equação (3.1.3) descreve a solução final após as seguintes aproximações:

- O intervalo entre conversões é muito superior ao tempo de resolução do detector, o que pode ser justificado pelo uso de potência moderada do laser bombeador.
- O espectro de frequências dos fótons detectados é fino, de forma que a dispersão em torno da frequência central é pequena e uma aproximação linear pode ser aplicada. Essa aproximação se justifica pela utilização de filtros de interferência com largura de banda estreita na frente dos detectores.
- A frequência, o índice de refração e a susceptibilidade elétrica variam lentamente com  $\mathbf{k}$ , de forma que podem ser consideradas constantes.
- O perfil transversal do laser de bombeamento está todo contido no cristal.
- O volume de quantização é grande o suficiente, o que justifica a substituição de somatórios por integrais.
- O laser bombeador contém apenas polarização extraordinária.

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \int d\omega_s \int d\omega_i \int d^2q_s \int d^2q_i \Phi(\omega_s, \omega_i, \mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) |\omega_s, \mathbf{q}_s\rangle |\omega_i, \mathbf{q}_i\rangle. \quad (3.1.3)$$

Na expressão acima,

$$\Phi(\omega_s, \omega_i, \mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \mathcal{E}_p(\omega_s + \omega_i, \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) F(\omega_s) F(\omega_i) \text{sinc} \left[ \frac{L}{2}(k_{zs} + k_{zi} - \hat{k}_{zp}) \right], \quad (3.1.4)$$

sendo  $\mathcal{E}_p(\omega_s + \omega_i, \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)$  a amplitude clássica do campo bombeador associada ao modo de onda plana de frequência  $\omega_s + \omega_i$  e componente transversal do vetor de onda  $\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i$ ,  $F(\omega)$  uma função que representa a pós-seleção de uma faixa estreita de frequências por filtros de interferência,  $k_z$  a componente longitudinal do vetor de onda  $\mathbf{k}$  e  $L$  o comprimento do cristal. O estado acima é emaranhado, pois não pode, em geral, ser escrito como um estado produto da forma  $|\psi\rangle_s \otimes |\psi\rangle_i$ . Como consequência, o estado reduzido de cada fóton é uma mistura estatística <sup>2</sup>.

Energia e momento são conservados durante o processo:

<sup>1</sup>Essa aproximação é válida porque o número médio de fótons do laser é muito superior ao número de fótons convertidos, de forma que, na prática, ele se mantém constante.

<sup>2</sup>O estado reduzido de um dos fótons pode ser obtido tomando-se o traço do estado conjunto nas variáveis do outro fóton:  $|\psi_s\rangle\langle\psi_s| = \text{Tr}_i |\psi\rangle\langle\psi|$ .

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i. \quad (3.1.5)$$

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i. \quad (3.1.6)$$

Note que a condição de conservação do momento na direção  $z$  aparece implicitamente na equação (3.1.4), através da função sinc  $[(k_{zs} + k_{zi} - k_{zp})L/2]$ , de maneira que a amplitude de probabilidade associada ao modo  $(\omega_s, \omega_i, \mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$  é máxima quando  $k_{zs} + k_{zi} - k_{zp} = 0$ . Essa condição é denominada casamento de fase e pode ser escrita em termos do módulo do vetor de onda dos fótons e da sua componente transversal como:

$$\sqrt{k_s^2 - q_s^2} + \sqrt{k_i^2 - q_i^2} - \sqrt{k_p^2 - q_p^2} = 0. \quad (3.1.7)$$

A equação acima estabelece uma dependência entre o ângulo de emissão e a frequência, de maneira que os fótons emitidos em um cone com um certo ângulo de abertura têm a mesma frequência.

Na tentativa de simplificar o estado (3.1.3), vamos fazer algumas aproximações, que se justificam dentro de certas condições experimentais. Primeiramente, vamos supor que cada um dos fótons, *signal* e *idler*, seja detectado em uma única frequência. Experimentalmente, isso é justificado pela utilização de filtros de frequência muito estreitos, de modo que  $F(\omega)$  possa ser aproximada por um delta de Dirac. Além disso, pode-se restringir a detecção a posições próximas ao eixo de propagação, de maneira que  $|q| \ll |k|$ , o que se conhece como aproximação paraxial. Dentro dessa aproximação, podemos escrever

$$k_z = \sqrt{k^2 - q^2} \approx k \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{k^2} \right). \quad (3.1.8)$$

Se considerarmos ainda que  $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2$  e se desprezarmos a dispersão e a birrefringência do meio (o que em geral é uma boa aproximação [35]), temos  $k_s = k_i = k_p/2$ , de maneira que a Eq. 3.1.3 pode ser reescrita como

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \int d^2q_s \int d^2q_i \mathcal{E}_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \text{sinc} \left[ \frac{L}{4k_p} |\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i|^2 \right] |\mathbf{q}_s\rangle |\mathbf{q}_i\rangle. \quad (3.1.9)$$

A Conversão Paramétrica pode ser classificada em dois tipos principais, dependendo das polarizações dos fótons produzidos. A polarização é definida em relação ao plano formado pela direção de propagação da onda e a direção do eixo óptico do meio. O campo cuja polarização está contida nesse plano é denominado extraordinário, enquanto aquele cuja polarização está contida em um plano perpendicular é denominado ordinário. Na conversão tipo I, o campo bombeador, com polarização extraordinária (ordinária), gera pares de fótons com polarização ordinária (extraordinária) ( $e \rightarrow oo$  ou  $o \rightarrow ee$ , dependendo das propriedades de anisotropia óptica do cristal utilizado). Já no tipo II, o campo bombeador, com polarização extraordinária (ordinária), gera pares de fótons com polarizações ortogonais, uma ordinária

e a outra extraordinária ( $e \rightarrow oe$  ou  $o \rightarrow oe$ ). Como mencionado anteriormente, fótons com a mesma frequência propagam-se ao longo de um cone, com vértice no cristal. No caso da conversão tipo II, os cones do *signal* e do *idler* estão deslocados um relação ao outro, devido à birrefringência do cristal. Esse deslocamento ocorre na direção do eixo óptico e é denominado *walk-off* transversal [4]. A situação em que os dois cones se cruzam em um único ponto ao longo do eixo de propagação é chamada geração colinear e está ilustrada a seguir. Em muitos casos, os cristais já são cortados de maneira a favorecer a geração colinear, porém essa condição pode ser modificada variando-se a inclinação do eixo óptico do cristal.

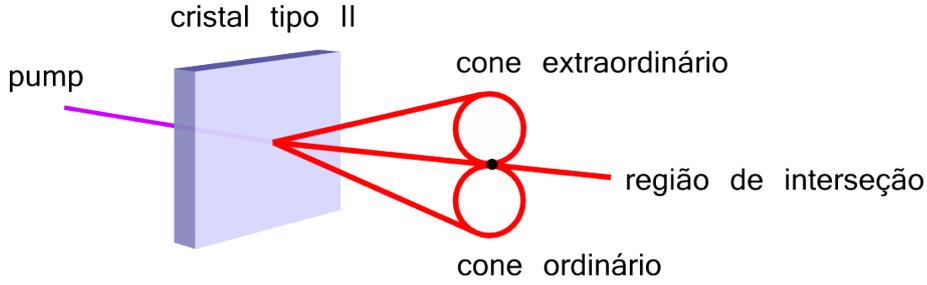


Figura 3.1: Esquema da geração colinear na conversão paramétrica do tipo II. Os dois cones correspondem aos fótons com polarizações extraordinária e ordinária. A detecção é feita na região de interseção.

### 3.2 Perfil de coincidências

Os aspectos mais peculiares dos fótons gêmeos revelam-se nas medidas em coincidência. Como mencionado na seção 2.2.1, para estados de dois fótons, a probabilidade de detecção em coincidência pode ser escrita como:

$$P(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \left| \langle 0 | \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}_2, t_2) | \psi_1 \rangle \right|^2. \quad (3.2.10)$$

A partir dessa expressão, podemos definir a amplitude de probabilidade de detecção:

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \langle 0 | \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}_2, t_2) | \psi_1 \rangle. \quad (3.2.11)$$

Substituindo o estado (3.1.9) nessa expressão, ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) &\propto \int d^2 q_s \int d^2 q_i \mathcal{E}_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \text{sinc} \left[ \frac{L}{4k_p} |\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i|^2 \right] \\ &\times \exp \left\{ i \left[ \mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s + \mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + \left( \frac{k_p}{2} - \frac{q_s^2}{k_p} \right) z_s + \left( \frac{k_p}{2} - \frac{q_i^2}{k_p} \right) z_i \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Na expressão acima foi utilizada a aproximação paraxial, expressa em (3.1.8) e a dependência temporal foi omitida, por contribuir somente com uma fase global. O

fator  $e^{i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s} e^{i\mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i}$  pode ser identificado como o kernel da transformada de Fourier bidimensional, que leva de um conjunto de coordenadas  $(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$  a outro  $(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i)$ . Seguindo os passos de [36] pode-se mostrar que essa equação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto & \int d^2 \rho'_s \int d^2 \rho'_i U_p \left( \frac{\boldsymbol{\rho}'_s + \boldsymbol{\rho}'_i}{2} \right) V \left( \frac{\boldsymbol{\rho}'_s - \boldsymbol{\rho}'_i}{2} \right) \\ & \exp \left( \frac{ik_p}{4z_s} |\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}'_s|^2 + \frac{ik_p}{4z_i} |\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}'_i|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

As funções  $U_p$  e  $V$  são dadas por

$$U_p \left( \frac{\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i}{2} \right) = \int d^2 q_s \int d^2 q_i \mathcal{E}_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) e^{i(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \cdot (\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i)/2}. \quad (3.2.14a)$$

$$V \left( \frac{\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i}{2} \right) = \int d^2 q_s \int d^2 q_i \text{sinc} \left( \frac{L}{4k_p} |\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i|^2 \right) e^{i(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i) \cdot (\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i)/2}. \quad (3.2.14b)$$

Para valores suficientemente pequenos de  $L$ , da ordem de alguns milímetros, a função  $\text{sinc} \left( \frac{L}{4k_p} |\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i|^2 \right)$  é muito mais larga do que  $\mathcal{E}_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)$ , o que significa que sua transformada,  $V \left( \frac{\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i}{2} \right)$ , é muito mais fina do que  $U_p \left( \frac{\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i}{2} \right)$ . Assim, podemos fazer  $V \left( \frac{\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i}{2} \right) \propto \delta^2(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i)$ , de maneira que (3.2.13) assume a forma

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto \int d^2 \rho' U_p(\boldsymbol{\rho}') \exp \left( \frac{ik_p}{2Z} |\mathbf{R} - \boldsymbol{\rho}'|^2 \right), \quad (3.2.15)$$

sendo  $\frac{1}{Z} = \frac{1}{2z_s} + \frac{1}{2z_i}$  e  $\mathbf{R} = \frac{z}{2z_s} \boldsymbol{\rho}_s + \frac{z}{2z_i} \boldsymbol{\rho}_i$ .

A expressão acima pode ser identificada como a propagação de Fresnel do campo bombeador  $U_p$  [37]. Isso significa que a correlação de quarta ordem propaga-se como o feixe bombeador que originou os fótons gêmeos e que, portanto, qualquer modulação no perfil transversal desse feixe é transferida para o perfil transversal de coincidências, tal como demonstrado em [38]; daí o nome **feixe de correlação**. Nessa situação, podemos dizer que os fótons gêmeos comportam-se como uma entidade única, o bifóton, ao qual está associado um número de onda  $k_p$ . Na referência [39], os autores apresentam uma medida do comprimento de onda do bifóton, demonstrando que ele de fato corresponde à metade do comprimento de onda dos fótons individuais.

Em suma, temos um feixe quântico em quarta ordem que propaga-se como um feixe clássico em segunda ordem. Naturalmente, surge a pergunta: existe alguma vantagem nisso? A resposta é sim. Temos um feixe cujo comprimento de onda está normalmente na faixa do vermelho ou infravermelho, que, no entanto, propaga-se com um comprimento de onda efetivo na faixa do ultravioleta ou violeta. Isso significa que é possível, utilizando-se o feixe de correlação, obter uma imagem de um objeto com uma resolução maior do que aquela obtida pelos fótons individuais, porém sem o risco de danificá-lo utilizando-se luz ultravioleta. Além disso, sob certas circunstâncias, podem ser obtidos efeitos de apodização da imagem [40].

### 3.3 Fase de Gouy do feixe de correlação

Feixes convergentes experimentam um salto na fase ao passarem pelo foco, em adição à fase de onda plana resultante da propagação,  $e^{ikz}$ . Essa fase foi observada pela primeira vez por Gouy em 1890, sendo por esse motivo conhecida como fase de Gouy. Sua existência foi inicialmente demonstrada através de um experimento de interferência entre duas ondas esféricas, uma focalizada e a outra não. Observou-se que a intensidade das franjas variava ao longo do eixo de propagação, de tal maneira que o centro do padrão mudava de claro para escuro ao mover-se o plano de observação de uma posição distante anterior ao foco para outra posterior a ele, demonstrando, dessa forma, um avanço de  $\pi$  na fase relativa entre as ondas. Além da luz, a existência da fase de Gouy foi também demonstrada para ondas sonoras [41] e feixes de elétrons [42].

Mais de um século depois de sua descoberta, a origem física da fase de Gouy é ainda hoje assunto debatido dentro da comunidade científica [43], [44], [45], [46], [47]. Nas duas últimas referências, os autores oferecem uma explicação mais intuitiva sobre a origem dessa fase, segundo a qual ela resultaria do confinamento transversal da onda.

Para feixes gaussianos, a fase de Gouy varia com a direção de propagação  $z$  de acordo com a expressão:

$$\phi(z) = \arctan(z/z_R), \quad (3.3.16)$$

em que  $z_R$  é o parâmetro de Rayleigh<sup>3</sup>, o qual está relacionado à cintura  $w_0$  do feixe (menor largura) e ao seu comprimento de onda  $\lambda$  através da expressão  $z_R = \pi w_0^2/\lambda$ . Nesse caso, considerou-se que a cintura está posicionada em  $z = 0$ .

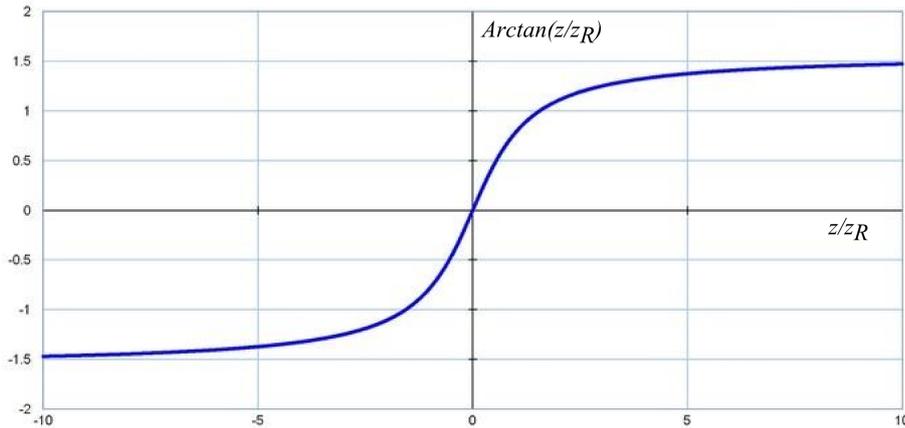


Figura 3.2: Representação gráfica da fase de Gouy de um feixe gaussiano em função da razão entre a distância de propagação e o comprimento de Rayleigh.

<sup>3</sup>Definido como a distância a partir da cintura para a qual o raio do feixe aumenta por um fator  $\sqrt{2}$ .

Motivados pelo resultado expresso na equação (3.2.15), que representa a transferência do perfil transversal do feixe bombeador para o feixe de coincidências, decidimos investigar se ocorre também a transferência do perfil longitudinal de fase (fase de Gouy), algo até então não demonstrado experimentalmente <sup>4</sup>. A montagem experimental, bem como os resultados obtidos estão descritos a seguir.

### 3.3.1 *Medição da fase de Gouy do feixe de correlação*

A figura 3.3 ilustra as duas montagens utilizadas para medir a fase de Gouy do laser e do feixe de correlação. Um feixe de laser com comprimento de onda central igual a 405 nm, polarizado a 45° em relação ao plano da montagem, incide em um interferômetro Sagnac, composto por um divisor de feixe polarizador (PBS) e dois espelhos, dispostos em uma configuração triangular. A componente do feixe com polarização vertical é refletida pelo PBS e passa por uma configuração confocal das lentes L1 (distância focal de 15 cm) e L2 (distância focal de 20 cm), saindo colimada do interferômetro. Já a componente transmitida, com polarização horizontal, é focalizada a uma certa distância de L2. Antes do foco, o laser encontra um compensador de Babinet (CB), um dispositivo formado por dois cristais birrefringentes em forma de prisma, cujas bases podem deslizar uma sobre a outra, de forma a permitir uma variação quase contínua da fase relativa entre as duas polarizações. É importante notar que a fase relativa introduzida pelo CB foi mantida fixa durante as medições.

---

<sup>4</sup>Um experimento semelhante foi proposto na referência [36].

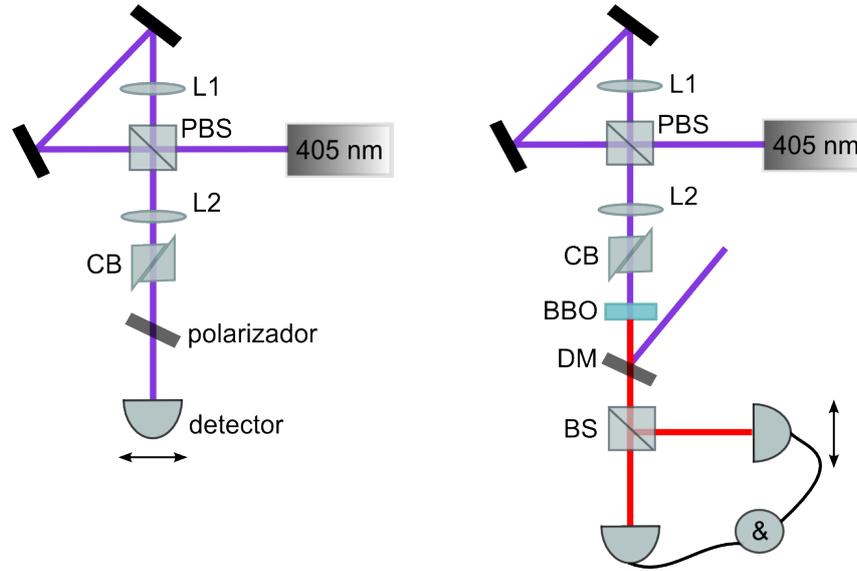


Figura 3.3: Montagens utilizadas na medição da fase de Gouy do laser (esquerda) e do feixe de correlação (direita). Um feixe de laser com comprimento de onda central igual a 405 nm, polarizado a  $45^\circ$  em relação ao plano da montagem, incide em um interferômetro Sagnac, composto por um divisor de feixe polarizador (PBS) e dois espelhos, dispostos em uma configuração triangular. A componente do feixe com polarização vertical é refletida pelo PBS e passa por uma configuração confocal das lentes L1 (distância focal de 15 cm) e L2 (distância focal de 20 cm), saindo colimada do interferômetro. Já a componente transmitida, com polarização horizontal, é focalizada a uma certa distância de L2. Antes do foco, o laser encontra um compensador de Babinet (CB), utilizado para ajustar a fase relativa entre as duas componentes. No experimento com o laser, um polarizador com o eixo de transmissão orientado a  $45^\circ$  permite a interferência entre os feixes. O padrão de intensidade é medido com um medidor de potência acoplado a uma fibra monomodo. Na montagem da direita, um cristal BBO ( $\beta$ -borato de boro) tipo II de 7 mm de comprimento, orientado a  $45^\circ$  com relação ao plano da montagem, gera pares de fótons com polarizações lineares a  $45^\circ$  e  $-45^\circ$ . O padrão de coincidências é obtido utilizando-se dois detectores de fótons acoplados a orifícios de tamanho entre  $300 \mu\text{m}$  e  $600 \mu\text{m}$ .

Primeiramente, realizamos as medições com o laser para efeito de comparação. Nesse caso, após o CB colocamos um polarizador com eixo de transmissão orientado a  $45^\circ$ , para permitir a interferência entre os feixes colimado e focalizado. A detecção foi feita utilizando-se um medidor de potência acoplado em uma fibra ótica monomodo (que suporta apenas o modo gaussiano), a qual foi escaneada horizontalmente para revelar o padrão de interferência. O perfil de intensidade do feixe focalizado foi medido em diferentes planos ao longo do eixo de propagação, para determinar a posição da sua cintura. O resultado está mostrado na figura 3.4, juntamente com a curva de ajuste, dada pela expressão

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z - z_c}{z_R}}, \quad (3.3.17)$$

em que  $w(z)$  representa a largura da gaussiana no plano  $z$ ,  $w_0$  é a cintura,  $z_c$  é a posição da cintura e  $z_R$  é o parâmetro de Rayleigh. Os parâmetros do ajuste fornecem  $z_c = 690$  mm e  $w_0 = 0.09$  mm.

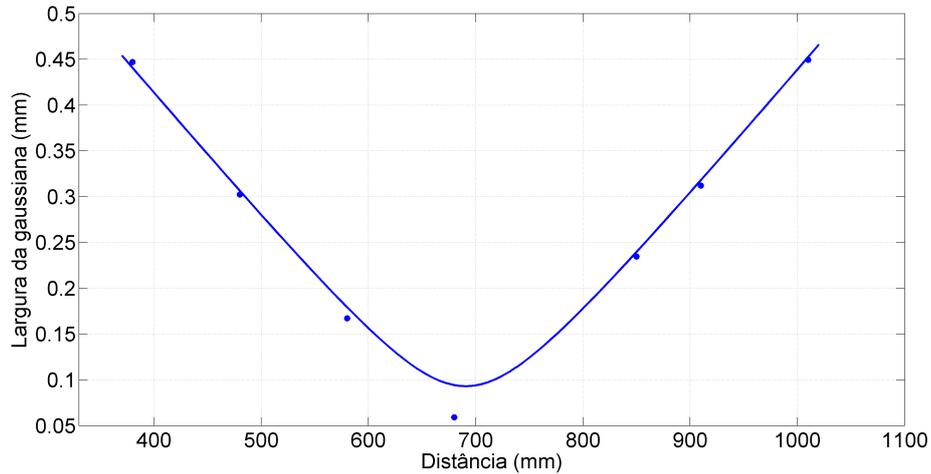


Figura 3.4: Variação da largura do laser em função da distância à lente L2. Os pontos representam as medidas e a linha cheia, o ajuste teórico (eq. 3.3.17). Os parâmetros do ajuste fornecem  $z_c = 690$  mm e  $w_0 = 0.09$  mm.

Para verificarmos o avanço na fase da componente convergente do feixe ao passar pela cintura, realizamos medidas do perfil de interferência em um plano anterior à cintura, distante de 34 cm, e em outro plano posterior à ela, distante de 12 cm. Os resultados encontram-se na figura 3.5.

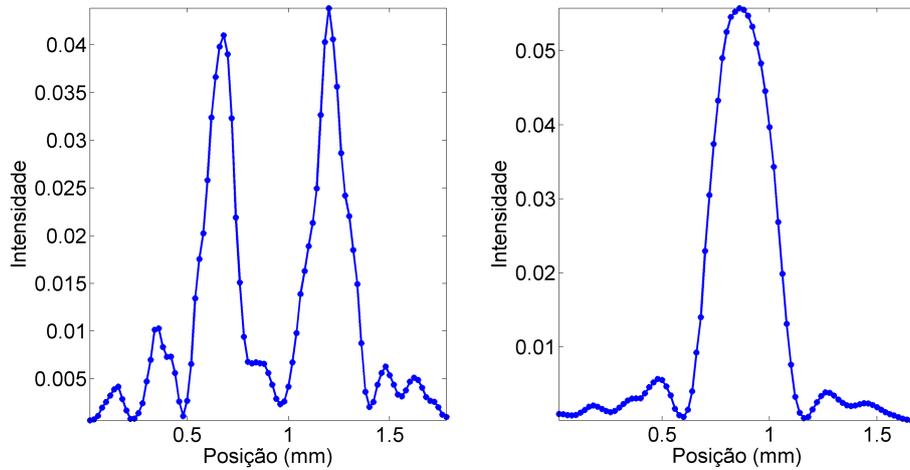


Figura 3.5: Perfis de intensidade do laser (normalizados pela área da curva) em função da coordenada transversal  $x$ , medidos a  $-34$  cm da cintura (esquerda) e a  $12$  cm dela (direita).

Substituindo na expressão (3.3.16) o valor de  $w_0 = 0.09$  mm, obtido do ajuste da curva de larguras do perfil do laser, obtivemos a curva representada na figura 3.6. Os dois pontos, que representam as medidas da figura 3.5, possuem uma diferença de fase de  $2.4$  rad, ou  $0.8\pi$ .

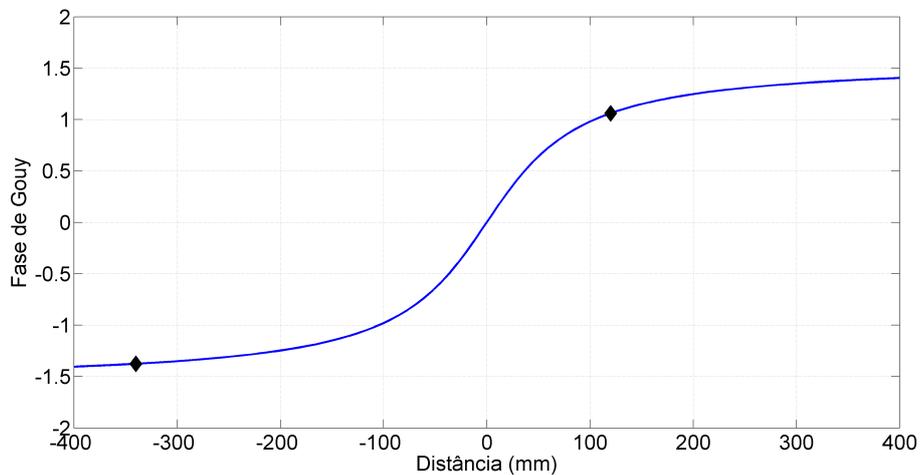


Figura 3.6: Fase de Gouy do feixe de laser de cintura  $w_0 = 0.09$  mm. Os dois pontos representam as medidas realizadas a  $-340$  mm e a  $120$  mm da cintura do feixe e apresentam uma diferença de fase de  $0.8\pi$ .

No experimento com os fótons gêmeos, após o CB colocamos um cristal BBO ( $\beta$ -borato de boro) tipo II de  $7$  mm de comprimento, orientado a  $45^\circ$  com relação ao plano da

montagem. Dessa forma, os fótons eram gerados com polarizações lineares a  $45^\circ$  e  $-45^\circ$ . Em seguida, colocamos um espelho dicróico (DM) para expulsar o laser e utilizamos um divisor de feixe (BS) para separar os fótons e encaminhá-los a dois contadores de fótons. Note que não há interferência entre os fótons convertidos. O que medimos é a transferência do perfil de interferência do feixe de segunda ordem para o feixe de quarta ordem. As coincidências foram registradas por um circuito correlacionador, que compara os sinais de saída dos dois detectores.

Fizemos medidas variando as distâncias entre os detectores e o BS (figura 3.3), para obter o perfil longitudinal de larguras da componente focalizada do feixe de quarta ordem. Em cada medida, escaneamos transversalmente um dos detectores para obter o perfil gaussiano do feixe focalizado. A figura 3.7 mostra a variação da largura do feixe em função da distância à lente L2, bem como o ajuste teórico (linha cheia). Os parâmetros do ajuste fornecem  $z_c = 721$  mm e  $w_0 = 0.09$  mm.

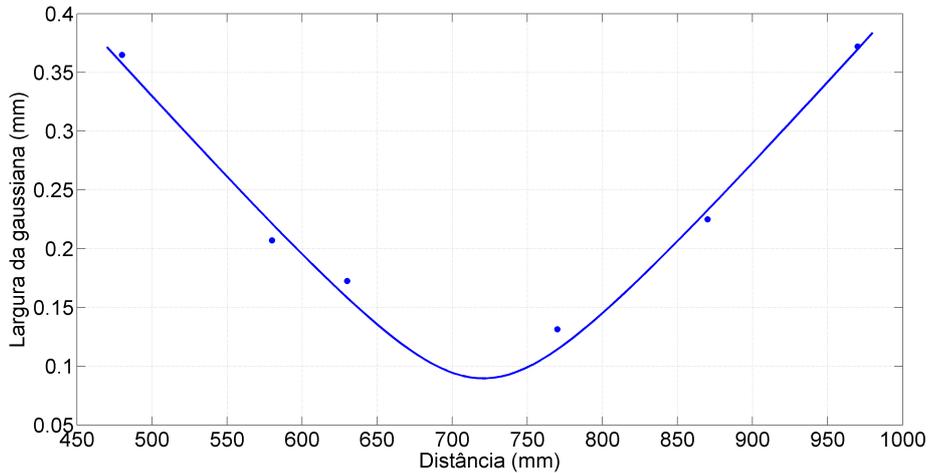


Figura 3.7: Variação da largura do feixe de correlação em função da distância à lente L2. Os pontos representam as medidas e a linha cheia, o ajuste teórico (eq. 3.3.17). Os parâmetros do ajuste fornecem  $z_c = 721$  mm e  $w_0 = 0.09$  mm.

Na figura 3.8, mostramos os perfis de coincidências em função da coordenada reduzida  $\frac{x_s+x_i}{2}$ , sendo  $x_s$  a coordenada do *signal* e  $x_i$  a do *idler*, medidos a 36 cm antes da cintura a 9 cm depois dela. Devido a uma dificuldade técnica em se medir o perfil de quarta ordem dos fótons a grandes distâncias do cristal, já que a taxa de coincidências é muito baixa, fizemos medidas em posições não simetricamente localizadas em relação à cintura.

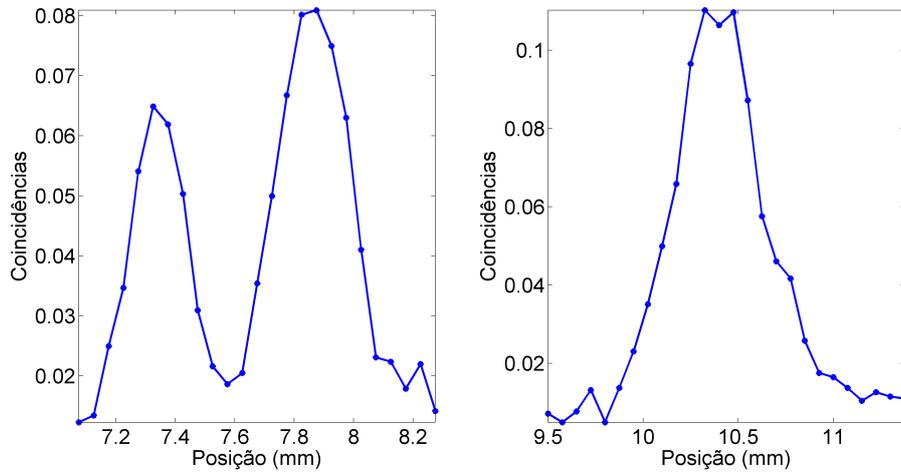


Figura 3.8: Perfis de coincidência (normalizados pela área da curva) em função da coordenada transversal  $x$  de um dos detectores, medidos a  $-36$  cm da cintura (esquerda) e a  $9$  cm dela (direita).

Substituindo na expressão (3.3.16) o valor de  $w_0 = 0.09$  mm, obtido do ajuste da curva de larguras do perfil de coincidências, obtivemos a curva representada na figura 3.9. Os dois pontos, que representam as medidas da figura 3.8, possuem uma diferença de fase de  $2.4$  rad, ou  $0.8\pi$ , tal qual aquela obtida para o laser de bombeamento.

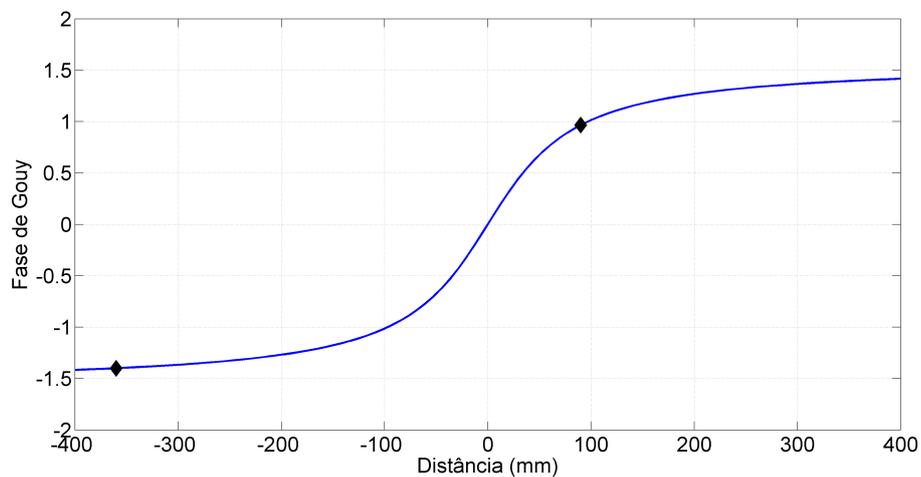


Figura 3.9: Fase de Gouy do feixe de coincidências cuja largura é  $w_0 = 0.09$  mm. Os dois pontos representam as medidas realizadas a  $-360$  mm e a  $90$  mm da cintura do feixe e apresentam uma diferença de fase de  $0.8\pi$ .

Os resultados apresentados nesta seção confirmam então a transferência da fase de Gouy do feixe de laser bombeador para o feixe de coincidências.

# Capítulo 4

## Aberrações ópticas

Iniciaremos este capítulo com uma revisão da formação de imagens em segunda ordem. Embora exista uma vasta teoria de sistemas ópticos formadores de imagem utilizando a óptica geométrica, nossa análise se concentrará principalmente no contexto da óptica ondulatória com iluminação coerente. A generalização para iluminação incoerente pode ser feita sem dificuldades. Faremos também uma revisão da teoria das aberrações ópticas em imagens de segunda ordem. Em seguida generalizaremos os resultados para a formação de imagens em quarta ordem utilizando a conversão paramétrica descendente como fonte de luz.

### 4.1 Formação de imagens em segunda ordem

De um modo geral, um sistema óptico formador de imagem contém uma série de elementos ópticos convenientemente alinhados, tais como lentes, prismas, aberturas (também chamadas de pupilas), etc. A função deste tipo de sistema é reproduzir o mais fielmente possível, a menos de um fator de magnificação, o padrão de intensidade luminosa de um objeto localizado em um plano denominado plano objeto sobre um plano denominado plano imagem. O termo imagem em segunda ordem é devido ao fato de que a intensidade da luz pode ser entendida como um mapeamento da probabilidade de detecção de um fóton, que é proporcional ao valor esperado do produto de dois operadores de campo, conforme a expressão (2.2.18).

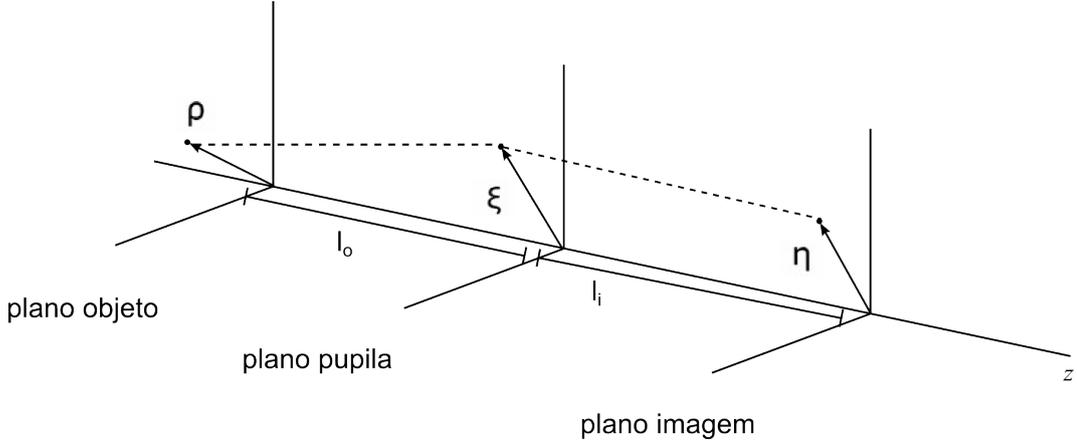


Figura 4.1: Sistema de coordenadas representando a formação da imagem de um objeto plano por um sistema óptico. O plano da pupila representa o plano de saída do sistema.

Considere o sistema de coordenadas mostrado na figura 4.1. Representando por  $\boldsymbol{\eta}$  as coordenadas no plano imagem e por  $\boldsymbol{\rho}$  as coordenadas no plano objeto, a ação de um sistema óptico  $\mathcal{S}$  sobre uma distribuição de campo  $U_o(\boldsymbol{\rho})$  no plano objeto pode ser descrita de maneira geral como

$$U_i(\boldsymbol{\eta}) = \mathcal{S} [U_o(\boldsymbol{\rho})]. \quad (4.1.1)$$

Sistemas lineares possuem a propriedade de que sua ação em um plano é equivalente à soma das ações em cada ponto desse plano individualmente, o que pode ser matematicamente expresso como

$$\begin{aligned} U_i(\boldsymbol{\eta}) &= \mathcal{S} \left[ \int U_o(\boldsymbol{\xi}) \delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\rho}) d^2\xi \right] = \int U_o(\boldsymbol{\xi}) \mathcal{S}[\delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\rho})] d^2\xi \\ &= \int U_o(\boldsymbol{\rho}) h(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) d^2\rho. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

A função  $h(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})$  representa a resposta do sistema no plano imagem ao campo de uma fonte pontual localizada em  $\boldsymbol{\rho}$  e é conhecida em óptica como função de resposta impulsional, ou *point spread function* (PSF) na literatura em língua inglesa.

Considere um sistema simples de imagem constituído por uma lente delgada de foco  $f$ . No plano objeto, a uma distância  $l_o$  da lente, está localizado um objeto descrito pelo campo  $U_o(\boldsymbol{\rho})$ . O plano imagem está localizado a uma distância  $l_i$  da lente. De acordo com a equação (4.1.2), para conhecer o campo no plano imagem, é necessário primeiramente determinar a PSF do sistema. Para tanto, começamos determinando o campo em um ponto  $\boldsymbol{\xi}$  no plano da lente devido a uma fonte pontual de luz de comprimento de onda  $\lambda$  localizada em  $\boldsymbol{\rho}$  no plano do objeto. Como estamos tratando o campo como um escalar, a resposta é uma onda esférica  $\exp(ikr)/r$ , onde

$k = 2\pi/\lambda$  e  $r$  é a distância entre os dois pontos em questão. Na aproximação paraxial, a onda esférica é aproximada por uma onda parabólica, dada pela seguinte expressão:

$$\frac{1}{\lambda l_o} \exp\left(\frac{ik}{2l_o} |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\xi}|^2\right), \quad (4.1.3)$$

a menos de um fator de fase  $-i \exp(ikl_o)$  que geralmente é ignorado. A expressão acima é também conhecida como propagador de Fresnel. O efeito da lente é descrito pela função  $\mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}) \exp\left(-\frac{ik}{2f} \xi^2\right)$  [37], que representa um perfil parabólico de fase com uma pupila  $\mathcal{P}$  que delimita a sua abertura. De acordo com o princípio de Huygens-Fresnel, cada ponto no plano da lente dá origem a uma onda esférica que propaga até o plano imagem, descrita pelo propagador de Fresnel  $\frac{1}{\lambda l_i} \exp\left(\frac{ik}{2l_i} |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|^2\right)$ . O efeito total no plano imagem é dado pela integração nas coordenadas  $\boldsymbol{\xi}$  no plano da lente, o que resulta em

$$h(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\lambda^2 l_o l_i} \int \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}) \exp\left(\frac{ik}{2l_o} |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\xi}|^2 + \frac{ik}{2l_i} |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|^2 - \frac{ik}{2f} \xi^2\right) d^2\xi. \quad (4.1.4)$$

Reagrupando termos e impondo uma relação entre  $l_o$  e  $l_i$  tal que satisfaçam a equação para lentes finas da óptica geométrica,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{l_o} + \frac{1}{l_i}, \quad (4.1.5)$$

obtem-se:

$$h(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\lambda^2 l_o l_i} \exp\left(\frac{ik}{2l_o} \rho^2 + \frac{ik}{2l_i} \eta^2\right) \int \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}) \exp\left[-ik \left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{l_o} + \frac{\boldsymbol{\eta}}{l_i}\right) \cdot \boldsymbol{\xi}\right] d^2\xi. \quad (4.1.6)$$

A função acima é, a menos de uma fase, proporcional à transformada de Fourier da função pupila da lente,  $\mathcal{P}$ . Queremos, é claro, que a imagem seja a representação fiel do objeto, a não ser por um possível fator de magnificação. Para tanto, é necessário, de acordo com (4.1.2), que a PSF seja proporcional a uma delta de Dirac,  $\delta(\boldsymbol{\rho} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{M})/|M|$ , sendo  $M = -l_i/l_o$  a magnificação do sistema. É claro que a aproximação por uma delta de Dirac é uma abstração matemática e, na prática, a PSF tem uma largura finita. O fator de fase dependente de  $\boldsymbol{\rho}$  geralmente provoca um alargamento da PSF, prejudicando a qualidade da imagem. Porém, se a transformada de Fourier da pupila for suficientemente fina, de maneira que apenas uma região muito pequena do objeto contribua para formar um ponto na imagem, podemos fazer a substituição  $\rho^2 \rightarrow \eta^2/M^2$ , que leva a  $\exp\left(\frac{ik}{2l_o} \rho^2\right) \rightarrow \exp\left(\frac{ik}{2l_o M^2} \eta^2\right)$ . Na referência [48], os autores demonstraram que essa aproximação é válida quando o tamanho do objeto é inferior a cerca de um quarto do tamanho da abertura do sistema. Nessas circunstâncias, a fase em (4.1.6) passa a depender somente das coordenadas do plano imagem. Como usualmente estamos interessados no padrão de intensidade, esse fator

não tem influência sobre a imagem. Assim, podemos considerar a seguinte forma aproximada para a PSF:

$$h(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \approx \frac{1}{\lambda^2 l_o l_i} \int \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}) \exp\left[-\frac{ik}{l_o} \left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{M}\right) \cdot \boldsymbol{\xi}\right] d^2\xi. \quad (4.1.7)$$

O campo no plano imagem é dado então pela convolução do campo do objeto com a PSF, isto é:

$$U_i(\boldsymbol{\eta}) = \int U_o(\boldsymbol{\rho}) h\left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{M}\right) d^2\rho. \quad (4.1.8)$$

A expressão (4.1.8) mostra que a óptica ondulatoria estabelece um limite máximo para a resolução de um sistema de imagem, o qual depende da abertura do sistema e do comprimento de onda da luz. Um sistema óptico cuja performance depende apenas dessas quantidades é dito limitado por difração. Esse limite implica que, diferentemente do que diz a óptica geométrica, a melhor imagem que se pode obter de um ponto no plano do objeto não é um ponto no plano imagem.

Como acabamos de ver, a PSF, que representa o campo imagem de um objeto pontual, é dada pela transformada de Fourier da pupila do sistema. Para uma pupila circular de raio  $a$ , por exemplo, a PSF é dada pela expressão

$$h(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \propto \frac{J_1(ka\rho/l_o)}{ka\rho/l_o}, \quad (4.1.9)$$

em que  $J_1$  é a função de Bessel do primeiro tipo, de ordem 1,  $\rho = \left|\boldsymbol{\rho} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{M}\right|$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  é o número de onda da luz e  $l_o$  é a distância entre o plano objeto e a pupila. A função acima representa então a melhor imagem que se pode obter de um ponto, dados  $a$ ,  $l_o$  e o comprimento de onda da luz,  $\lambda$ . O padrão de intensidade no plano da imagem, dado pelo módulo quadrado de (4.1.9), está representado na figura 4.2. Esse padrão é conhecido como padrão de Airy. A região contida entre os primeiros mínimos define o chamado disco de Airy, cujo diâmetro corresponde a  $1.22 \lambda l_o/a$ .

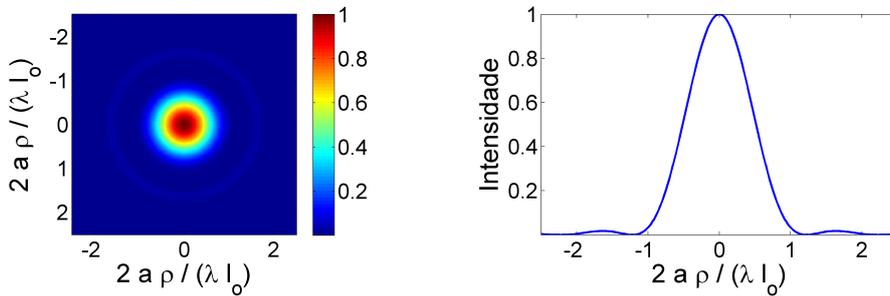


Figura 4.2: Imagem de uma fonte pontual feita por uma lente com uma abertura circular de raio  $a$ .

Na próxima seção veremos que a performance de sistemas ópticos reais é geralmente limitada não somente por difração, mas também pelas chamadas aberrações ópticas.

## 4.2 Aberrações ópticas

Um sistema óptico pode ser constituído de um ou mais elementos transmissores ou reflectores de luz, todos eles de dimensões finitas. Usaremos o termo abertura para significar a área útil de qualquer elemento óptico. Todo sistema óptico possui uma abertura mínima, isto é, a abertura que provoca a maior limitação nos ângulos de entrada e saída dos raios de luz no sistema. Essa abertura mínima pode estar em algum elemento no interior do sistema ou em suas extremidades de entrada e saída. Consideremos que o sistema óptico divide o espaço em dois semi-espacos, a saber, espaço do objeto (que contém o plano objeto) e espaço da imagem (que contém o plano imagem). A imagem da abertura mínima vista pelo espaço do objeto é denominada *pupila de entrada* do sistema. Analogamente, a imagem da abertura mínima no espaço da imagem é denominada *pupila de saída* do sistema. Seguindo o procedimento mais comum, vamos limitar o nosso tratamento a sistemas ópticos com simetria de revolução. Em geral, o eixo de simetria é identificado com o eixo  $z$ . Isto significa que todas as pupilas são circulares.

Em um sistema ideal, um ponto no plano objeto produz um ponto no plano imagem, tal que os dois pontos e o eixo de simetria estejam sobre um mesmo plano.<sup>1</sup> Para que isto ocorra, é necessário que da pupila de saída do sistema saia uma onda esférica convergente para o ponto imagem, não importando a distância do ponto objeto ao eixo  $z$ . Na seção anterior, ilustramos o caso mais simples de formação de imagem assumindo que a lente pode ser corretamente descrita por uma transformação quadrática de fase. Além disso, para que fôssemos capazes de calcular analiticamente a propagação das ondas, assumimos que as distâncias do ponto objeto e do ponto imagem até o eixo  $z$  são pequenas o suficiente para que as frentes esféricas de onda pudessem ser aproximadas por parábolas. Dependendo do contexto, esta aproximação recebe o nome de aproximação paraxial ou aproximação de Fresnel.

Na prática, as aproximações feitas acima nem sempre são adequadas. Para ilustrar, consideremos uma lente constituída por um material de índice de refração  $n$ , delimitado por duas superfícies de revolução em torno do eixo  $z$  e façamos uso do traçado de raios da óptica geométrica, conforme ilustrado na figura 4.3.

---

<sup>1</sup>Estamos assumindo que o sistema não contém nenhum elemento que deliberadamente gire a imagem em torno de  $z$ , como por exemplo um prisma de Dove.

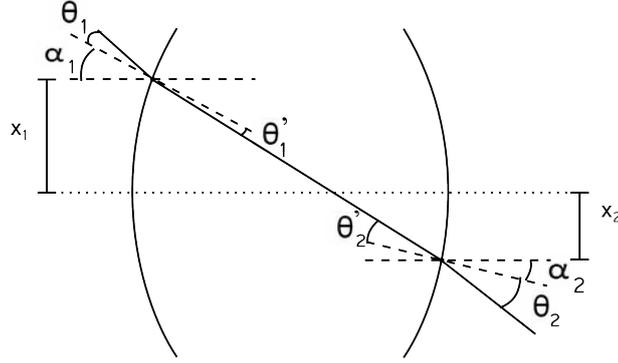


Figura 4.3: Representação geométrica da incidência de luz em uma lente.

Um raio incide na superfície 1 (esquerda) da lente a uma distância  $x_1$  do eixo de simetria do sistema. O ângulo com a normal nesse ponto é  $\theta_1$  e o ângulo entre a normal e a horizontal é  $\alpha_1$ . No interior da lente, o raio refrata-se, formando um novo ângulo  $\theta_1'$  com a normal. O raio refratado atinge então a superfície 2 (direita) a uma distância  $x_2$  do eixo de simetria, formando um ângulo  $\theta_2'$  com a normal. Nesse ponto, o ângulo entre a normal e a horizontal é  $\alpha_2$ . Ao deixar a lente, o raio é novamente refratado, formando um ângulo  $\theta_2$  com a normal à superfície 2. Considere o índice de refração fora da lente igual a 1. De acordo com a lei de Snell, temos

$$\text{sen } \theta_1 = n \text{ sen } \theta_1' \quad (4.2.10a)$$

$$\text{sen } \theta_2 = n \text{ sen } \theta_2'. \quad (4.2.10b)$$

Vamos definir os seguintes ângulos

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \theta_1 + \alpha_1 & \beta_2 &= \theta_2 + \alpha_2 \\ \beta_1' &= \theta_1' + \alpha_1 & \beta_2' &= \theta_2' + \alpha_2 = \beta_1'. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

e reescrever (4.2.10b) em termos desses ângulos:

$$\begin{aligned} \text{sen } (\beta_2 - \alpha_2) &= n \text{ sen } (\beta_1' - \alpha_2) = n \text{ sen } (\theta_1' + \alpha_1 - \alpha_2) \\ &= n \text{ sen } \theta_1' \cos (\alpha_1 - \alpha_2) + n \text{ sen } (\alpha_1 - \alpha_2) \cos \theta_1'. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Utilizando (4.2.10a) na expressão acima e após certa manipulação algébrica, obtemos

$$\text{sen } (\beta_2 - \alpha_2) = \text{sen } (\beta_1 - \alpha_1) \cos (\alpha_1 - \alpha_2) + \text{sen } (\alpha_1 - \alpha_2) \sqrt{n^2 - \text{sen}^2(\beta_1 - \alpha_1)} \quad (4.2.13)$$

Vamos considerar que o raio de curvatura  $R$  de ambas as superfícies é o mesmo e que  $\alpha_1 \ll 1$  e  $\alpha_2 \ll 1$ , de forma que podemos escrever:

$$\text{sen } \alpha_1 = \frac{x_1}{R} \quad (4.2.14a)$$

$$\text{sen } \alpha_2 = \frac{x_2}{R}. \quad (4.2.14b)$$

Se considerarmos ainda  $\beta_1 \ll 1$  e desprezarmos termos proporcionais a  $\text{sen}^2 \alpha_1$  e  $\text{sen}^2 \alpha_2$ , chegamos à seguinte expressão:

$$\text{sen } \beta_2 \approx \frac{x_2}{R} \cos \beta_2 - \frac{x_1}{R} + n \left( \frac{x_1 - x_2}{R} \right). \quad (4.2.15)$$

Para pontos suficientemente próximos do eixo de simetria do sistema,  $x_1 \approx x_2 = x$ , de maneira que o último termo em (4.2.15) é praticamente nulo. Assim, a equação anterior se aproxima por

$$\text{sen } \beta_2 \approx \frac{x}{R} \sqrt{1 - \text{sen}^2 \beta_2} - \frac{x}{R}. \quad (4.2.16)$$

Resolvendo para  $\text{sen } \beta_2$  e considerando  $R \gg x$ , obtemos

$$\text{sen } \beta_2 \approx \tan \beta_2 = \frac{2x}{R}. \quad (4.2.17)$$

Em palavras, de acordo com a expressão anterior, todos os raios convergem para um ponto localizado sobre o eixo de simetria, a uma distância  $\frac{R}{2}$  da lente, ou seja, o ponto focal.

Vemos então que o traçado de raios simples da óptica geométrica elementar, que leva à formação de imagens perfeitas, corresponde a uma aproximação nem sempre razoável do que realmente acontece. Na prática, raios paralelos incidentes em uma lente convexa convergem no espaço da imagem para pontos que dependem da distância de cada raio ao eixo  $z$ , provocando distorções na imagem, conhecidas como aberrações ópticas. É importante frisar que as aberrações não são necessariamente causadas por defeitos de fabricação das lentes, mas sim pelas razões descritas acima.

Para tratar das aberrações, voltemos à óptica ondulatória. Conforme vimos na seção 4.1, a formação de uma imagem por um sistema óptico é caracterizada por sua PSF  $h(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})$ , que representa o campo imagem no ponto  $\boldsymbol{\eta}$  produzido por uma fonte pontual localizada em  $\boldsymbol{\rho}$ . Até agora, consideramos um sistema óptico perfeito, o qual produz uma onda esférica perfeita, ou, na aproximação de Fresnel, uma onda parabólica, que converge para o ponto  $\boldsymbol{\eta}$  no plano imagem. Entretanto, sistemas ópticos reais não são perfeitos e, portanto, não produzem ondas perfeitamente parabólicas, mas sim introduzem uma fase adicional  $e^{ikW(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}$  na frente de onda. A função  $W(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$  é conhecida como função de aberração e representa a diferença de caminho entre a frente de onda real e a frente de onda esférica ideal, tal como ilustrado na Fig. 4.4.

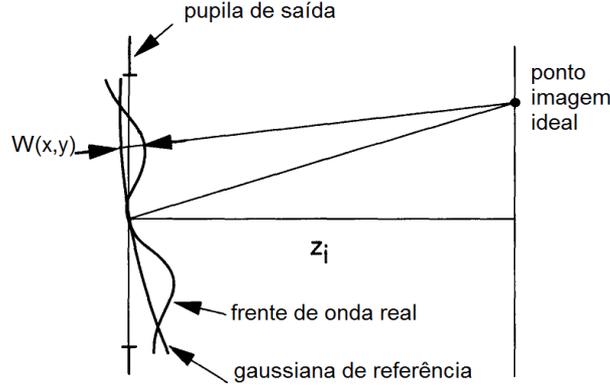


Figura 4.4: Significado geométrico da função de aberração. Adaptado de [37].

Reproduzindo os cálculos da seção anterior para uma lente parabólica de foco  $f$ , porém levando em consideração as aberrações, obtemos a seguinte expressão para a PSF:

$$\begin{aligned}
 h(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) &\propto \int d^2\xi \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}) e^{ikW(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})} \exp\left(\frac{ik}{2l_o} |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\rho}|^2\right) \exp\left(\frac{-ik}{2f} |\boldsymbol{\xi}|^2\right) \exp\left(\frac{ik}{2l_i} |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|^2\right) \\
 &\propto \int d^2\xi \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}) e^{ikW(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})} \exp\left[-\frac{ik}{l_o} \left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{M}\right) \cdot \boldsymbol{\xi}\right], \quad (4.2.18)
 \end{aligned}$$

em que utilizamos (4.1.5) e  $M = -l_i/l_o$ . Comparando essa expressão com (4.1.7), que representa a PSF de um sistema ideal, observamos que a função pupila  $\mathcal{P}(\boldsymbol{\xi})$  foi substituída por uma função pupila generalizada,

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}) e^{ikW(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}. \quad (4.2.19)$$

Para um sistema no qual as aberrações não são muito severas, a PSF (4.2.18) varia lentamente com  $\boldsymbol{\eta}$  [4]. Como consequência, podemos dividir o plano objeto em regiões onde é boa a aproximação  $h(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \approx h_i\left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{M}\right)$ , conhecidas como regiões de isoplanatismo, ou regiões isoplanáticas. Dentro de uma região isoplanática, a função de aberração  $W$  depende apenas das coordenadas da pupila de saída, isto é,  $W(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = W_i(\boldsymbol{\xi})$ . Então, a PSF para uma região isoplanática é dada por

$$h_i\left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{M}\right) \propto \int d^2\xi P(\boldsymbol{\xi}) e^{ikW_i(\boldsymbol{\xi})} \exp\left[-\frac{ik}{l_o} \left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{M}\right) \cdot \boldsymbol{\xi}\right] \quad (4.2.20)$$

em que incorporamos a magnificação  $M$  na coordenada  $\boldsymbol{\rho}$ .

Como estamos tratando de sistemas com simetria de revolução em torno do eixo  $z$ ,  $W(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$  só pode depender de quantidades invariantes por rotações em torno de  $z$ ,

isto é,  $\eta^2$ ,  $\xi^2$  e  $\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\xi}$ . Se as aberrações não forem muito severas, podemos fazer uma expansão de Taylor da função  $W$  nessas variáveis, o que resulta no seguinte:

$$W(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \approx a_1 \xi^2 + a_2 \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\xi} + a_3 \eta^2 + b_1 \xi^4 + b_2 \xi^2 (\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\xi}) + b_3 (\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 + b_4 \eta^2 \xi^2 + b_5 \eta^2 (\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\xi}) + b_6 \eta^4. \quad (4.2.21)$$

O primeiro termo é denominado *defocus* e representa um deslocamento longitudinal do centro da esfera de referência com relação ao plano imagem. O segundo termo representa um deslocamento transversal do centro da esfera de referência, e é conhecido como *tilt*. O terceiro e o último termos dão origem a uma fase constante ao longo da pupila e não afetam a qualidade da imagem. As demais aberrações são conhecidas como aberrações primárias, ou aberrações de Seidel, em homenagem ao cientista que primeiro as estudou. Segue abaixo uma breve descrição de cada uma dessas aberrações. Mais detalhes podem ser encontrados em [5].

#### 4.2.1 Aberração esférica

O termo proporcional a  $b_1$  é denominado aberração esférica. Esse tipo de aberração é observada em lentes esféricas, cujo formato faz com que raios incidentes em diferentes distâncias em relação ao eixo de simetria focalizem a diferentes distâncias da lente, como mostra a figura a seguir.

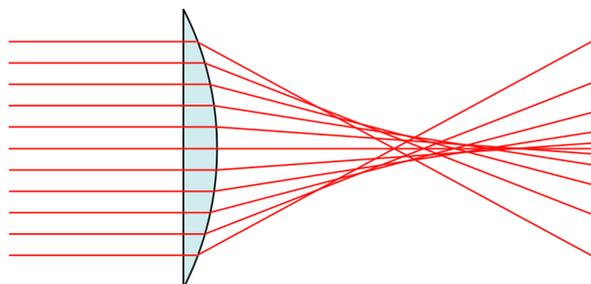


Figura 4.5: Aberração esférica em uma lente. Imagem retirada de [49].

Aberrações esféricas podem ser corrigidas utilizando-se combinações apropriadas de lentes ou pelo emprego de lentes asféricas, mais caras e de fabricação mais complexa do que as esféricas. No caso da figura 4.5, a mesma lente poderia ser usada com o lado côncavo voltado para a esquerda do desenho, o que diminuiria essa aberração.

#### 4.2.2 Coma

O termo proporcional a  $b_2$  é denominado coma. O coma aparece quando a luz incide em ângulo na lente, como mostra a figura a seguir. Dessa forma, raios incidentes

em diferentes alturas com relação ao eixo de simetria focalizam em posições diferentes no plano focal da lente. O resultado é uma imagem espichada em uma direção, com a forma semelhante a de um cometa.

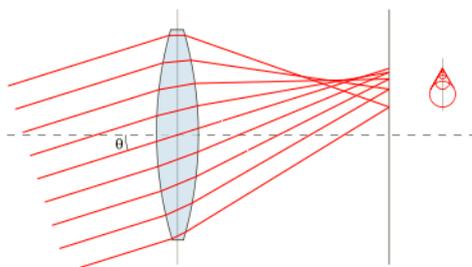


Figura 4.6: Formação de uma imagem com coma. Imagem retirada de [50].

O coma pode ser minimizado colocando-se uma pupila após a lente, de maneira a bloquear os raios não-paraaxiais.

### 4.2.3 Astigmatismo

O termo proporcional a  $b_3$  é chamado astigmatismo. Essa aberração aparece devido à incidência oblíqua de luz na lente. A geometria de incidência está mostrada na figura 4.7. A projeção do cone de luz sobre a lente forma uma elipse, cujo eixo vertical é maior do que o horizontal, de modo que os raios na primeira direção “veem” uma variação maior na inclinação da superfície e, portanto, focalizam mais próximo da lente do que os raios na outra direção. Formam-se assim duas linhas focais perpendiculares entre si e situadas em planos diferentes, indicadas por  $T$  e  $S$  na figura. A imagem na direção perpendicular à linha focal escolhida aparece borrada. O melhor foco estará situado entre as duas linhas focais, em uma região conhecida como círculo de menor confusão.

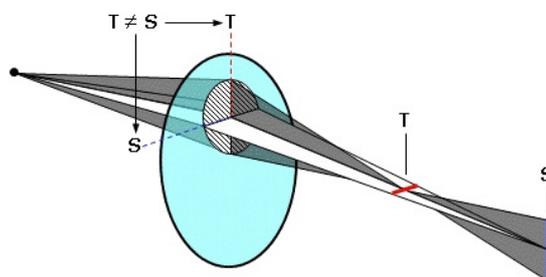


Figura 4.7: Efeito do astigmatismo, com a formação de duas linhas focais,  $T$  e  $S$ . Imagem retirada de [51].

O astigmatismo pode ser corrigido utilizando-se lentes cilíndricas, que possuem distâncias focais diferentes nas direções vertical e horizontal.

#### 4.2.4 *Curvatura*

A curvatura, expressa na expansão pelo termo proporcional a  $b_4$ , resulta do fato de que a imagem que uma lente produz de um objeto plano é uma superfície curva, chamada superfície de Petzval. Assim, se a imagem for projetada em uma superfície plana, tal como uma câmera CCD (*charge-coupled device*), ela aparecerá borrada em algumas regiões. Se o plano de detecção coincidir por exemplo com o centro da superfície de Petzval, apenas o centro da imagem estará nítido, enquanto as bordas aparecerão borradas. A melhor imagem estará em algum plano entre o centro e a borda da superfície de Petzval, onde a região de interesse do objeto possa ser vista com maior nitidez.

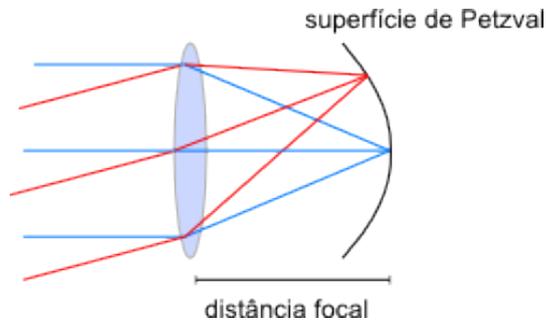


Figura 4.8: A imagem formada por uma lente é uma superfície curva, denominada superfície de Petzval.

A curvatura pode ser corrigida pela associação apropriada de lentes convergentes e divergentes, de maneira a reduzir a curvatura da superfície de Petzval a praticamente zero.

#### 4.2.5 *Distorção*

O termo proporcional a  $b_5$  é chamado distorção. Ao contrário das demais aberrações de Seidel, a distorção não afeta a resolução da imagem. Isso porque, tal como o *tilt*, ela produz apenas um deslocamento lateral no plano imagem de um ponto, preservando o limite de difração. No entanto, a dependência em  $\eta^3$  provoca uma distorção na imagem de objetos extensos, pois pontos mais distantes do eixo de simetria sofrem um deslocamento muito maior do que aqueles próximos ao eixo. Por esse motivo, esse efeito é mais pronunciado em lentes que possuem um campo de visão grande. A figura a seguir mostra dois tipos diferentes de distorção: positiva, para a qual a magnificação cresce à medida em que nos distanciamos do centro da imagem, e negativa, para a qual a magnificação cresce à medida em que nos aproximamos do centro.

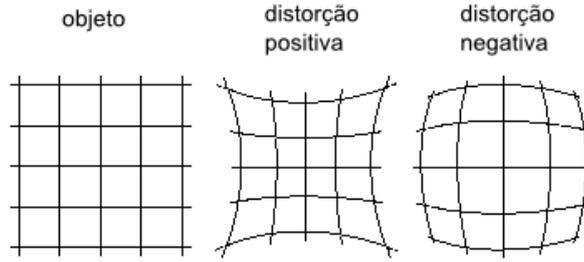


Figura 4.9: Efeito da distorção em um objeto. A distorção positiva é causada por lentes positivas e a distorção negativa por lentes negativas. Imagem retirada de [52].

### 4.3 Simulações numéricas das PSFs com aberrações

Os gráficos a seguir mostram o efeito isolado de quatro das aberrações de Seidel (esférica, astigmatismo, coma e curvatura) sobre a imagem de uma fonte pontual produzida por uma lente com abertura circular e representam soluções numéricas para o módulo quadrado da expressão (4.2.18). Consideramos, nas simulações, uma lente com abertura de raio  $a = 1$  cm, um coeficiente de aberração  $b = 0.0001\lambda$ , sendo  $\lambda = 632$  nm, o comprimento de onda da luz e  $\eta = a/2$ , a distância do ponto ao eixo de simetria. Por simplicidade, consideramos que o ponto está localizado sobre o eixo  $y$  e que a imagem é também detectada nessa direção. Para efeito de comparação, incluímos o resultado da figura 4.2, que corresponde ao padrão de intensidade na ausência de aberrações. O código utilizado para produzir os gráficos encontra-se disponível no Apêndice 4.5.

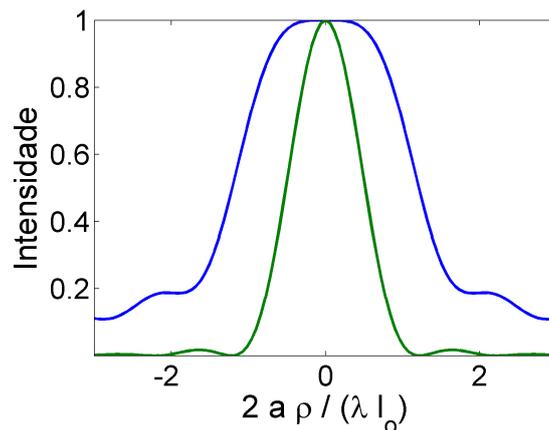


Figura 4.10: Imagem de uma fonte pontual produzida por uma lente de abertura circular de raio  $a$ . A curva em azul corresponde a um sistema com aberração esférica e, a curva em verde, a um sistema livre de aberrações.

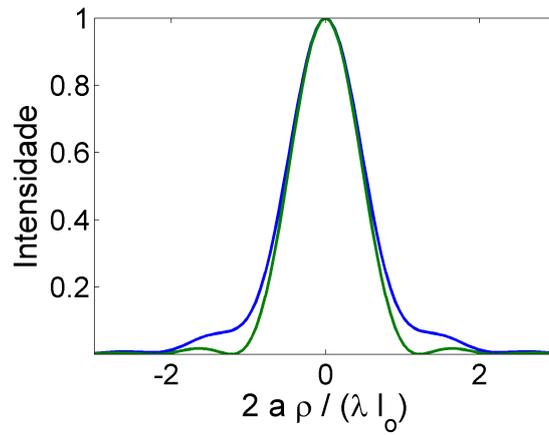


Figura 4.11: Imagem de uma fonte pontual produzida por uma lente de abertura circular de raio  $a$ . A curva em azul corresponde a um sistema com astigmatismo e, a curva em verde, a um sistema livre de aberrações.

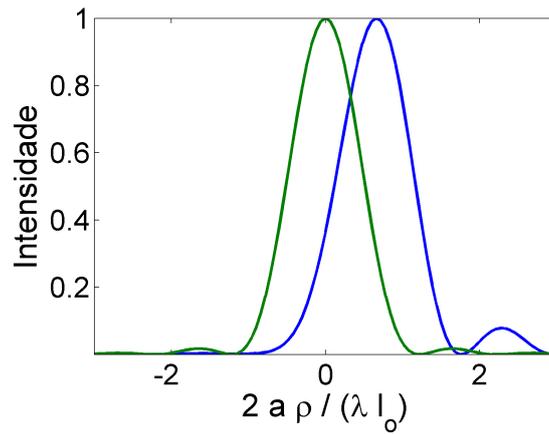


Figura 4.12: Imagem de uma fonte pontual produzida por uma lente de abertura circular de raio  $a$ . A curva em azul corresponde a um sistema com coma e, a curva em verde, a um sistema livre de aberrações.

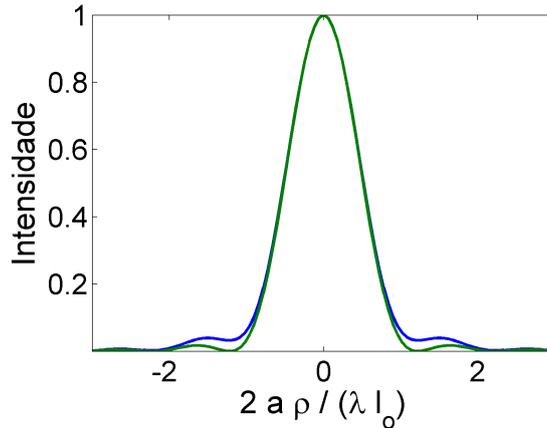


Figura 4.13: Imagem de uma fonte pontual produzida por uma lente de abertura circular de raio  $a$ . A curva em azul corresponde a um sistema com aberração de curvatura e, a curva em verde, a um sistema livre de aberrações.

#### 4.4 Formação de imagens em quarta ordem

Certas montagens experimentais possibilitam, no regime de detecção por contagem de fótons, a visualização da imagem de um objeto no padrão de contagem de coincidências (quarta ordem), mesmo que não seja possível visualizá-la nas contagens simples, ou seja, em segunda ordem. Um tratamento detalhado sobre a formação de imagens em quarta ordem pode ser encontrado em [40]. Nesta tese, tratamos do sistema formador de imagem em quarta ordem esquematizado na figura 4.14. O plano do objeto, coincidente com o plano focal da lente  $L_1$ , é iluminado por um feixe de laser que serve de bombeador para um cristal não-linear no qual são gerados fótons gêmeos pelo processo de conversão paramétrica descendente espontânea. O cristal é posicionado no outro plano focal de  $L_1$ , de modo que o perfil do campo bombeador sobre o cristal mapeia a transformada de Fourier do objeto. Uma lente  $L_2$  cria uma imagem da região de interação (plano do cristal não-linear) sobre a pupila da lente  $L_3$ . No plano focal de  $L_3$  encontram-se dois detectores contadores de fótons,  $D_1$  e  $D_2$ . Se as lentes forem ideais, devido à transferência do espectro angular do feixe bombeador para o estado de dois fótons, no plano focal de  $L_3$  se observará, em quarta ordem, a transformada de Fourier do campo sobre a pupila de  $L_3$ . O campo sobre  $L_3$ , por sua vez, é uma imagem (possivelmente magnificada) do campo sobre o cristal. Sendo o campo no cristal a transformada de Fourier do campo no plano objeto, o que  $D_1$  e  $D_2$  detectarão em coincidência no plano focal de  $L_3$  será a imagem (possivelmente magnificada) do plano objeto.

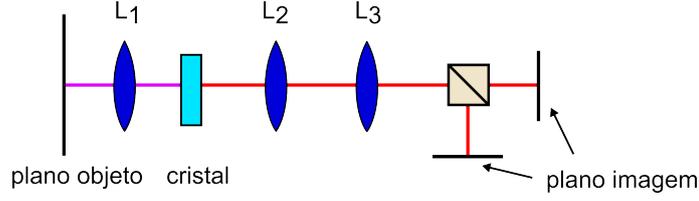


Figura 4.14: Esquema para a formação de uma imagem em quarta ordem. A lente  $L_1$  faz a transformada de Fourier do objeto em um plano do cristal não linear utilizado para gerar fótons emaranhados via CPDE. A imagem desse plano do cristal é então projetada pela lente  $L_2$  no plano de saída da lente  $L_3$ . Essa última, por sua vez, projeta nos planos dos detectores a transformada de Fourier do campo na sua pupila de saída. Dessa forma, a imagem do objeto é recuperada no perfil de coincidências.

Calculemos a propagação do campo de dois fótons desde a lente  $L_3$  até o plano de detecção, supondo, por enquanto, que o sistema é livre de aberrações. Se  $D_1$  e  $D_2$  localizam-se nos pontos  $\boldsymbol{\rho}_1$  e  $\boldsymbol{\rho}_2$ , respectivamente, temos que a amplitude de probabilidade de detecção de dois fótons é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) &\propto \int d^2\xi_1 \int d^2\xi_2 U^{(i)}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2}{2}\right) V^{(i)}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2}{2}\right) \\ &\quad \times \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}_1) \exp\left(\frac{-ik}{2f_3}\xi_1^2\right) \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}_2) \exp\left(\frac{-ik}{2f_3}\xi_2^2\right) \\ &\quad \times \exp\left[\frac{ik}{2f_3}(|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\xi}_1|^2 + |\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\xi}_2|^2)\right], \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

onde  $U^{(i)}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2}{2}\right) V^{(i)}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2}{2}\right)$  é a imagem de quarta ordem do campo de dois fótons no cristal produzida pela lente  $L_2$  sobre o plano da lente  $L_3$ . Definindo novas variáveis  $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2)$ ,  $\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2)$ ,  $\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2)$  e  $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)$ , temos, a menos de um fator de fase quadrática em  $p$  e  $d$ :

$$\mathcal{A}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) \propto \int d^2\sigma \int d^2\zeta U^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}) V^{(i)}(\boldsymbol{\zeta}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\zeta}) \exp\left[\frac{-2ik}{f_3}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\zeta})\right]. \quad (4.4.23)$$

Uma das características da formação de imagens em quarta ordem é que embora exista apenas um plano objeto, existem dois planos imagem, um para cada detector. Vamos explorar inicialmente o caso em que  $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\eta}$ , isto é,  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\eta}$  e  $\mathbf{d} = 0$ , definindo um só plano imagem, mas com um detector de dois fótons. Chamemos de  $\mathcal{A}_+$  a amplitude de probabilidade de detecção de dois fótons neste esquema.

$$\mathcal{A}_+(\boldsymbol{\eta}) \propto \int d^2\sigma \int d^2\zeta U^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}) V^{(i)}(\boldsymbol{\zeta}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\zeta}) \exp\left(\frac{-2ik}{f_3}\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right). \quad (4.4.24)$$

Consideremos agora que o objeto é uma fonte pontual localizada por  $\boldsymbol{\rho}$ . Devido à lente  $L_1$ , o campo sobre o plano do cristal não-linear será proporcional à transformada

de Fourier da fonte, isto é, uma onda plana da forma  $\exp[\frac{-2ik}{f_1}\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}_c]$ . O campo de dois fótons sobre o cristal será

$$U\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_{c1} + \boldsymbol{\rho}_{c2}}{2}\right) V\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_{c1} - \boldsymbol{\rho}_{c2}}{2}\right) = \exp\left(\frac{-2ik}{f_1} \frac{\boldsymbol{\rho}_{c1} + \boldsymbol{\rho}_{c2}}{2} \cdot \boldsymbol{\rho}\right) V\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_{c1} - \boldsymbol{\rho}_{c2}}{2}\right). \quad (4.4.25)$$

Idealmente, a lente  $L_2$  produz uma imagem magnificada deste campo sobre a pupila da lente  $L_3$

$$\exp\left(\frac{2ik}{M_2 f_1} \frac{\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2}{2} \cdot \boldsymbol{\rho}\right) V^{(i)}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2}{2}\right) = \exp\left(\frac{2ik}{M_2 f_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\rho}\right) V^{(i)}(\boldsymbol{\zeta}). \quad (4.4.26)$$

Assim, a amplitude de probabilidade de dois fótons devida a uma fonte pontual no plano objeto é a PSF de dois fótons para o esquema de detecção considerado:

$$h_+^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \propto \int d^2\sigma \int d^2\zeta V^{(i)}(\boldsymbol{\zeta}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\zeta}) \exp\left[\frac{-2ik}{f_3} \left(\boldsymbol{\eta} - \frac{f_3}{M_2 f_1} \boldsymbol{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{\sigma}\right]. \quad (4.4.27)$$

Se o cristal for suficientemente fino, podemos aproximar  $V^{(i)}$  por uma função delta de Dirac, e a PSF de 2 fótons fica inteiramente análoga à de 1 fóton,

$$h_+^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \propto \int d^2\sigma \mathcal{P}^2(\boldsymbol{\sigma}) \exp\left[\frac{-2ik}{f_3} \left(\boldsymbol{\eta} - \frac{f_3}{M_2 f_1} \boldsymbol{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{\sigma}\right], \quad (4.4.28)$$

com a diferença que em vez do número de onda dos fótons convertidos  $k$  aparece  $2k$ , o número de onda do laser bombeador, e a função pupila da lente  $L_3$  aparece ao quadrado (o que resulta em efeitos de apodização da imagem, tal como demonstrado na referência [40]).

As aberrações serão introduzidas levando-se em conta que cada fóton sofre as aberrações do sistema óptico de forma independente. Assim, basta introduzir a função pupila generalizada (4.2.19) para cada um, isto é,

$$h_+^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \propto \int d^2\sigma \int d^2\zeta V^{(i)}(\boldsymbol{\zeta}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta}) e^{ikW(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta})} \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\zeta}) e^{ikW(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\zeta})} \exp\left[\frac{-2ik}{f_3} \left(\boldsymbol{\eta} - \frac{f_3}{M_2 f_1} \boldsymbol{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{\sigma}\right]. \quad (4.4.29)$$

De novo, se o cristal for suficientemente fino, teremos

$$h_+^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \propto \int d^2\sigma \mathcal{P}^2(\boldsymbol{\sigma}) e^{2ikW(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\sigma})} \exp\left[\frac{-2ik}{f_3} \left(\boldsymbol{\eta} - \frac{f_3}{M_2 f_1} \boldsymbol{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{\sigma}\right]. \quad (4.4.30)$$

A equação (4.4.30) mostra que o sistema de imagem em quarta ordem no esquema de detecção escolhido tem um comportamento semelhante ao de um sistema de segunda ordem iluminado com metade do comprimento de onda dos fótons gêmeos,

isto é, o comprimento de onda do laser, exceto pelo aparecimento da função pupila ao quadrado.

Suponhamos agora que antes de atingir a pupila de saída, os fótons gêmeos do sistema de imagem descrito na Fig. 4.14 passem por uma transformação que inverte as coordenadas transversais de apenas um deles, digamos o fóton 2. Esta transformação equivale a substituir  $\boldsymbol{\xi}_2$  por  $-\boldsymbol{\xi}_2$  em  $U^{(i)}$  e  $V^{(i)}$  na expressão (4.4.22), ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) &\propto \int d^2\xi_1 \int d^2\xi_2 U^{(i)}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2}{2}\right) V^{(i)}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2}{2}\right) \\ &\quad \times \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}_1) \exp\left(\frac{-ik}{2f_3}\xi_1^2\right) \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}_2) \exp\left(\frac{-ik}{2f_3}\xi_2^2\right) \\ &\quad \times \exp\left[\frac{-ik}{2f_3}(|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\xi}_1|^2 + |\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\xi}_2|^2)\right], \end{aligned} \quad (4.4.31)$$

ou, em termos das variáveis  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\zeta}$ ,  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{d}$ ,

$$\mathcal{A}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) \propto \int d^2\sigma \int d^2\zeta U^{(i)}(\boldsymbol{\zeta}) V^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\zeta}) \exp\left[\frac{-2ik}{f_3}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\zeta})\right]. \quad (4.4.32)$$

Agora, vamos adotar o esquema de detecção em que  $\boldsymbol{\rho}_1 = -\boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\eta}$ , isto é,  $\mathbf{p} = 0$  e  $\mathbf{d} = \boldsymbol{\eta}$ :

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}) \propto \int d^2\sigma \int d^2\zeta U^{(i)}(\boldsymbol{\zeta}) V^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\zeta}) \exp\left(\frac{-2ik}{f_3}\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\zeta}\right). \quad (4.4.33)$$

Com o sistema de detecção adotado, uma fonte pontual no plano objeto produzirá na pupila de saída duas ondas esféricas de 1 fóton, uma convergindo para o ponto  $\boldsymbol{\eta}$  (detector  $D_1$ ) e outra convergindo para o ponto  $-\boldsymbol{\eta}$  (detector  $D_2$ ). Repetindo o mesmo procedimento usado para o cálculo de  $h_+^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})$ , chegamos a

$$h_-^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \propto \int d^2\sigma \int d^2\zeta V^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\zeta}) \exp\left[\frac{-2ik}{f_3}\left(\boldsymbol{\eta} - \frac{f_3}{M_2 f_1}\boldsymbol{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{\zeta}\right]. \quad (4.4.34)$$

Introduzindo as aberrações, chegamos a

$$\begin{aligned} h_-^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) &\propto \int d^2\sigma \int d^2\zeta V^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta}) \mathcal{P}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\zeta}) \\ &\quad \times \exp\left[ikW(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta}) + ikW(-\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\zeta}) - \frac{2ik}{f_3}\left(\boldsymbol{\eta} - \frac{f_3}{M_2 f_1}\boldsymbol{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{\zeta}\right]. \end{aligned} \quad (4.4.35)$$

Se o cristal for suficientemente fino para que possamos substituir  $V^{(i)}(\boldsymbol{\sigma})$  por uma função delta de Dirac,

$$h_-^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \propto \int d^2\zeta \mathcal{P}(\boldsymbol{\zeta}) \mathcal{P}(-\boldsymbol{\zeta}) \exp\left[ikW_s(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) - \frac{2ik}{f_3}\left(\boldsymbol{\eta} - \frac{f_3}{M_2 f_1}\boldsymbol{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{\zeta}\right], \quad (4.4.36)$$

em que

$$W_s(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = W(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) + W(-\boldsymbol{\eta}, -\boldsymbol{\zeta}). \quad (4.4.37)$$

Note na expressão (4.4.37) que, não fosse a dependência com a coordenada  $\boldsymbol{\eta}$  do ponto imagem, teríamos  $W_s(\boldsymbol{\zeta}) = W(\boldsymbol{\zeta}) + W(-\boldsymbol{\zeta}) = 0$ , para as aberrações descritas por funções ímpares, ou seja, o efeito dessas aberrações seria cancelado. Esse resultado é obtido quando a aproximação isoplanática, que levou a (4.2.20), é válida. Nessa situação, (4.4.36) pode ser aproximada por:

$$h_-^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \propto \int d^2\zeta \mathcal{P}(\boldsymbol{\zeta})\mathcal{P}(-\boldsymbol{\zeta}) \exp\left\{ik [W(\boldsymbol{\zeta}) + W(-\boldsymbol{\zeta})] - \frac{2ik}{f_3} \left(\boldsymbol{\eta} - \frac{f_3}{M_2 f_1} \boldsymbol{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{\zeta}\right\}, \quad (4.4.38)$$

Discutiremos na próxima seção uma montagem experimental equivalente, para a qual o cancelamento das aberrações é exato.

## 4.5 Aberrações induzidas por um objeto de fase

Na seção anterior, tratamos das aberrações introduzidas pelo sistema óptico; entretanto, aberrações podem ser causadas pelo próprio meio pelo qual a luz se propaga. Esse é um problema comumente enfrentado em microscopia, quando amostras espessas são estudadas, devido à variação do índice de refração ao longo da amostra [17]. Dessa forma, os planos fora do plano de interesse introduzem aberrações na imagem.

De maneira geral, podemos definir como objeto de fase um determinado meio que modifica a frente de onda da luz sem modificar o seu perfil de intensidade. Existem no mercado produtos desenvolvidos com essa função, tais como moduladores espaciais de luz [37], utilizados em microscopia para melhorar a resolução de imagens [53] e espelhos deformáveis, utilizados em astronomia para corrigir aberrações introduzidas pela turbulência atmosférica [13].

Para estudarmos o comportamento da PSF de dois fótons na presença de um objeto de fase, vamos considerar a montagem da Fig. 4.14, com a diferença de que um objeto plano de fase será colocado na pupila de saída da lente  $L3$ . Nessa situação, desprezaremos as aberrações introduzidas pelas lentes, em comparação com aquelas introduzidas pelo objeto. Por se tratar de um objeto plano, a função de aberração não pode depender da posição do ponto imagem para o qual os raios convergem. A forma da aberração será definida somente pela posição em que os raios interceptam o objeto de fase. Matematicamente, a PSF de quarta ordem resultante será dada por uma expressão análoga à obtida na aproximação isoplanática, na qual a dependência da função de aberração com a coordenada  $\boldsymbol{\eta}$  do plano imagem foi desprezada.

Para o caso em que não há inversão de coordenadas de um dos fótons, temos então o seguinte resultado para a PSF:

$$h_+^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \propto \int d^2\sigma \mathcal{P}^2(\boldsymbol{\sigma}) e^{2ikW(\boldsymbol{\sigma})} \exp\left[\frac{-2ik}{f_3} \left(\boldsymbol{\eta} - \frac{f_3}{M_2 f_1} \boldsymbol{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{\sigma}\right]. \quad (4.5.39)$$

Para o caso em que há a inversão de coordenadas de um dos fótons, a PSF é descrita por:

$$h_{-}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \propto \int d^2\zeta \mathcal{P}(\boldsymbol{\zeta})\mathcal{P}(-\boldsymbol{\zeta}) e^{ik[W(\boldsymbol{\zeta})+W(-\boldsymbol{\zeta})]} \exp \left[ -\frac{2ik}{f_3} \left( \boldsymbol{\eta} - \frac{f_3}{M_2 f_1} \boldsymbol{\rho} \right) \cdot \boldsymbol{\zeta} \right]. \quad (4.5.40)$$

Note que, no caso da equação (4.5.40), é esperado o cancelamento total das aberrações descritas por funções antissimétricas.

No próximo capítulo, descreveremos o experimento realizado com o objetivo de observar o cancelamento de aberrações introduzidas por um objeto plano de fase, no caso, um modulador espacial.

## Apêndice 4A: Código das simulações

O código a seguir, escrito em MATLAB, simula o padrão de intensidade da imagem de uma fonte pontual, produzida por uma lente com abertura circular. Em cada simulação, foi incluído o efeito isolado de uma das aberrações: esférica, astigmatismo, coma e curvatura, cuja expressão matemática é dada pela equação (4.2.21).

```
clear all; close all;

% Todos os comprimentos em mm

% comprimento de onda da luz
lambda = 632*10^(-6);
% n° de onda da luz
k = 2*pi/lambda;
% raio da pupila
T = 10;
% distância do objeto ao eixo de simetria
h = T/2;
% extremo do intervalo de detecção
L = 3;
% "força" da aberração
a = 0.0001*lambda;
% n° de pontos
N = 100;
% espaço de detecção
r = linspace(-L,L,N+1);
% inicialização do vetor do módulo quadrado da PSF
Asq = zeros(length(r),1);

%% PSF sem aberração

for i = 1:length(r)
    B = @(rho,theta) rho .* exp(-1i*pi/T*r(i).*rho.*sin(theta));
    PSF(i) = abs(integral2(B,0,T,0,2*pi)).^2;
end
```

```

% PSFs aberradas

%% ASTIGMATISMO

% for i = 1:length(r)
%     A = @ (rho,theta) rho .* exp(1i*a*k*(h*rho.*sin(theta)).^2)...
%     .*exp(-1i*pi/T*r(i).*rho.*sin(theta));
%     Asq(i) = abs(integral2(A,0,T,0,2*pi)).^2;
% end

%% ESFÉRICA

% for i = 1:length(r)
%     A = @ (rho,theta) rho .* exp(1i*a*k*rho.^4) ...
%     .* exp(-1i*pi/T*r(i).*rho.*sin(theta));
%     Asq(i) = abs(integral2(A,0,T,0,2*pi)).^2;
% end

%% COMA

% for i = 1:length(r)
%     A = @ (rho,theta) rho .* exp(1i*a*k*rho.^3.*h.*sin(theta)) ...
%     .* exp(-1i*pi/T*r(i).*rho.*sin(theta));
%     Asq(i) = abs(integral2(A,0,T,0,2*pi)).^2;
% end

%% CURVATURA

for i = 1:length(r)
    A = @ (rho,theta) rho .*exp(1i*a*k*h^2*rho.^2) ...
    .* exp(-1i*pi/T*r(i).*rho.*sin(theta));
    Asq(i) = abs(integral2(A,0,T,0,2*pi)).^2;
end

figure
plot(r,Asq/max(Asq), r, PSF/max(PSF),'Linewidth',2);
xlabel('2 a \rho / (\lambda l_o)','fontsize',22);
ylabel('Intensidade','fontsize',22);
set(gca,'fontsize',20);
axis tight;

```

# Capítulo 5

## Cancelamento de aberrações com o feixe de correlação

Como vimos no capítulo anterior, a formação de imagens em quarta ordem com feixes de correlação ocorre em um espaço de dimensão 4, com dois planos imagem, em vez de dimensão 2. Como consequência, a PSF de quarta ordem (ou de dois fótons) pode apresentar características diversas, que dependem das correlações espaciais do feixe e do esquema de detecção. Neste capítulo, apresentaremos um experimento que demonstra as propriedades das duas PSFs estudadas no capítulo anterior, bem como um estudo da influência das correlações espaciais do feixe nessas PSFs por meio de simulações numéricas (o resultado está publicado também em [54]). O sistema óptico adotado para formação de imagens de quarta ordem é semelhante àquele descrito no capítulo anterior, com algumas diferenças: a lente de saída do sistema foi substituída por um modulador espacial de luz, por meio do qual foi possível criar um perfil quadrático de fase, simulando assim a ação de um espelho parabólico ideal, ao qual foi adicionada uma função de aberração de parâmetros controlados. O experimento foi feito em apenas uma dimensão, sem perda de generalidade dos resultados. Como objeto, utilizamos o próprio perfil gaussiano do laser, já que nosso objetivo era o de mostrar apenas o comportamento das PSFs com e sem cancelamento de aberrações induzidas antissimétricas. Vale notar que as correlações existentes entre os fótons produzidos via CPDE já foram exploradas para produzir o cancelamento de dispersão [55] (que também pode ser obtido com luz clássica [56]) e o cancelamento de aberrações descritas por funções pares [57], além de uma demonstração teórica do cancelamento de aberrações descritas por funções ímpares [58].

### 5.1 Cancelamento de aberrações antissimétricas induzidas por um modulador espacial

Os resultados experimentais que apresentaremos nas próximas seções terão suporte nos resultados teóricos obtidos no capítulo anterior, mais precisamente, naqueles descritos na seção 4.5, os quais representam o comportamento da PSF de dois fótons na

presença de um objeto de fase. Entretanto, o esquema experimental adotado aqui difere ligeiramente daquele apresentado anteriormente, apesar de a modelagem teórica ser a mesma. O novo esquema está ilustrado na Fig. 5.1. Utilizamos como objeto o próprio perfil gaussiano do laser no plano de saída do cristal. A imagem desse plano é projetada pela lente  $L_1$  no plano de um modulador espacial de luz, ou SLM (do inglês *spatial light modulator*). O modulador, descrito no apêndice 5.2, foi programado para exibir um perfil de fase da forma  $\phi(\boldsymbol{\xi}) \rightarrow -k|\boldsymbol{\xi}|^2/(2f) + \psi(\boldsymbol{\xi})$ , em que  $\psi(\boldsymbol{\xi})$  representa a função de aberração. Note que quando  $\psi = 0$  a fase impressa pelo SLM adquire a forma  $\phi(\boldsymbol{\xi}) = -k|\boldsymbol{\xi}|^2/(2f)$  e ele funciona como um espelho côncavo de foco  $f$ , projetando em seu plano focal a transformada de Fourier do campo no plano do cristal. Como utilizamos o próprio perfil gaussiano do laser como objeto, espera-se que, na ausência de aberrações, um perfil gaussiano seja também recuperado no plano focal do espelho.

A amplitude de probabilidade de detecção de dois fótons no esquema sem inversão é dada pela expressão (eq. 4.1.2):

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}) \propto \int d^2\rho U^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) h_+^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}), \quad (5.A.1)$$

em que  $U^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$  representa o perfil transversal do laser no plano do modulador espacial e a PSF é dada por (4.4.30)

$$h_+^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \propto \int d^2\sigma \mathcal{P}^2(\boldsymbol{\sigma}) e^{2ikW(\boldsymbol{\sigma})} \exp\left[\frac{-2ik}{f_3} \left(\boldsymbol{\eta} - \frac{f_3}{M_2 f_1} \boldsymbol{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{\sigma}\right]. \quad (5.A.2)$$

No esquema com a inversão de coordenadas de um dos fótons, temos

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}) \propto \int d^2\rho U^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) h_-^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}), \quad (5.A.3)$$

em que a PSF é dada por (4.4.36)

$$h_-^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \propto \int d^2\zeta \mathcal{P}(\boldsymbol{\zeta})\mathcal{P}(-\boldsymbol{\zeta}) e^{ik[W(\boldsymbol{\zeta})+W(-\boldsymbol{\zeta})]} \exp\left[-\frac{2ik}{f_3} \left(\boldsymbol{\eta} - \frac{f_3}{M_2 f_1} \boldsymbol{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{\zeta}\right]. \quad (5.A.4)$$

Nas circunstâncias do experimento, a abertura do sistema é definida pelo próprio feixe de laser, visto que sua secção transversal é muito inferior à abertura do SLM, de maneira que podemos considerar  $\mathcal{P} = 1$ .

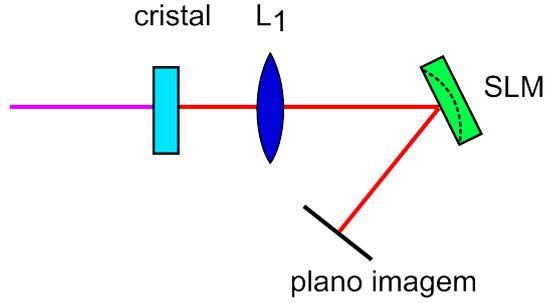


Figura 5.1: Esquema usado para produzir o cancelamento de aberrações ímpares introduzidas por um modulador espacial de luz. A lente  $L_1$  faz uma imagem do plano de saída do cristal no plano do SLM, que, por sua vez, projeta no plano dos detectores a transformada de Fourier do campo no cristal.

Na seção seguinte descreveremos em detalhes a montagem experimental utilizada para observar o cancelamento de aberrações introduzidas pelo modulador espacial.

### 5.1.1 Experimento

Para demonstrar experimentalmente o cancelamento da parte antissimétrica das aberrações, fizemos a montagem ilustrada a seguir. Um laser de titânio-safira, cuja largura do pulso é de 140 fs e comprimento de onda central de 826 nm, incide em um cristal LBO (triborato de lítio), produzindo um feixe com comprimento de onda central igual a 413 nm, por meio de um processo denominado geração de segundo harmônico [18]. Um prisma e dois espelhos dicróicos (DM) são utilizados para separar o feixe bombeador do segundo harmônico. Esse último é então utilizado para bombear um cristal BBO ( $\beta$ -borato de bário) tipo II de 5 mm de comprimento, gerando, via CPDE, fótons emaranhados com polarizações ortogonais e comprimento de onda central igual a 826 nm, em uma configuração colinear. Um espelho dicróico separa o *pump* dos fótons gêmeos. Uma lente de foco 40 cm é usada para fazer uma imagem ampliada de  $1.8\times$  do plano de saída do cristal na área ativa de um modulador espacial de luz (SLM). Após a lente, os fótons gêmeos são separados por um divisor de feixes polarizador P1, de forma que os fótons com polarização horizontal são transmitidos e seguem pelo caminho 1, enquanto os fótons polarizados verticalmente são refletidos, podendo seguir tanto pelo caminho 2, quanto pelo caminho 3, dependendo do ângulo do eixo óptico da placa de meia onda HW1. Vamos chamar essas duas opções de montagens 1 e 2 e explicá-las a seguir.

- Montagem 1 (com inversão):

Quando o eixo óptico de HW1 está orientado a  $0^\circ$ , os fótons são refletidos por P2, percorrendo o caminho 2. Nesse caminho, os fótons passam duas vezes por uma placa de um quarto de onda QW, orientada a  $45^\circ$ , de maneira que eles têm sua polarização girada de vertical para horizontal. Esses fótons são então transmitidos

pelos polarizadores P2 e P3 e atingem o SLM. Note que, nessa situação, os fótons que passam pelo caminho 2 sofrem um número ímpar de reflexões, enquanto seus gêmeos, que passam pelo caminho 1, sofrem um número par de reflexões. Isso provoca uma inversão de coordenadas, no plano da montagem, de um fóton em relação ao outro do par.

- Montagem 2 (sem inversão):

Quando HW1 está orientada a  $45^\circ$ , os fótons refletidos por P1 são transmitidos por P2 e seguem pelo caminho 3. Nesse caminho, uma placa de meia onda HW2, orientada a  $45^\circ$ , gira de  $90^\circ$  a polarização dos fótons, de maneira que eles são refletidos por P3. Nesse caso, ambos os fótons do par sofrem um número par de reflexões, não havendo inversão de coordenadas.

Os perfis transversais dos fótons gêmeos se sobrepõem somente no plano do SLM, de maneira que ambos os fótons experimentam as mesmas aberrações. O aparelho possui uma restrição quanto à polarização incidente, que pode ser apenas horizontal (ver apêndice 5.2) e, por esse motivo, a placa de meia onda HW3 foi introduzida para mudar a polarização quando necessário. Isso significa que na montagem 1 o ângulo dessa placa foi fixado em  $0^\circ$ , enquanto na montagem 2 ele foi fixado em  $45^\circ$ . No experimento, o modulador foi programado para exibir aberrações polinomiais da forma:

$$\phi_n(x) = \alpha x^2 + \beta_n x^n \quad (5.A.5)$$

em que  $\alpha$  é uma constante e  $\beta_n$  é um coeficiente que varia de acordo com o expoente  $n$  da aberração, o qual pode assumir valores entre 0 e 4. Aqui, vamos definir a ordem da aberração como sendo igual ao expoente  $n$  do polinômio, mas é importante notar que essa definição difere daquela usual da teoria de aberrações. A modulação é feita somente na direção horizontal  $x$ , a mesma direção em que se dá a inversão de coordenadas. Quando  $n = 0$ , o SLM atua como um espelho côncavo de foco 38 cm. Após reflexão no SLM, os fótons são encaminhados para um sistema de detecção em coincidência, constituído de dois contadores de fótons modelo Perkin Elmer SPCM-AQR-14 e uma placa de circuito conhecida como FPGA (*Field Programmable Gate Array*), que compara os sinais enviados pelo detectores. A janela de coincidências do circuito é de 2.8 ns. Cada detector é equipado com uma fenda de  $200 \mu\text{m}$  de largura, filtros de interferência com largura de banda de 30 nm centrados em 826 nm e uma lente objetiva de microscópio, que focaliza na área ativa do detector a luz que entra pela fenda. Durante a medição, um dos detectores é escaneado na direção  $x$  para traçar o perfil de coincidências no campo distante, com e sem a inversão de coordenadas.

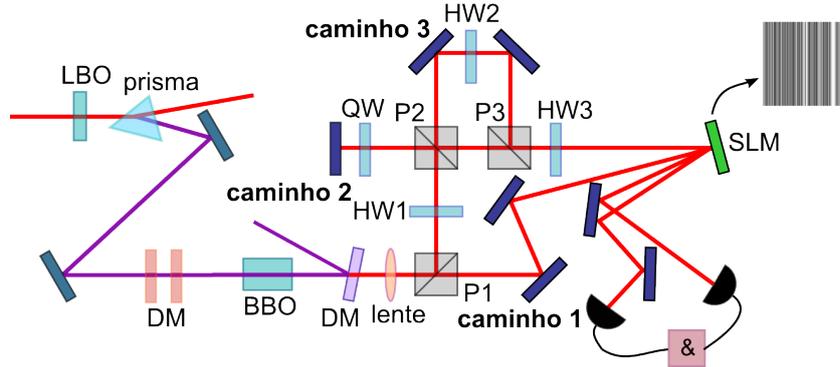


Figura 5.2: Esquema para medir o cancelamento de aberrações ímpares com o feixe de correlação. Um laser de titânio-safira, cuja largura do pulso é de 140 fs e comprimento de onda central de 826 nm, incide em um cristal LBO (triborato de lítio), produzindo um feixe com comprimento de onda central igual a 413 nm, por meio de um processo denominado geração de segundo harmônico [18]. Um prisma e dois espelhos dicróicos (DM) são utilizados para separar o feixe bombeador do segundo harmônico. Esse último é então utilizado para bombear um cristal BBO ( $\beta$ -borato de bário) tipo II de 5 mm de comprimento, gerando, via CPDE, fótons emaranhados com polarizações ortogonais e comprimento de onda central igual a 826 nm, em uma configuração colinear. Um espelho dicróico separa o *pump* dos fótons gêmeos. Uma lente de foco 40 cm é usada para fazer uma imagem ampliada de  $1.8\times$  do plano de saída do cristal na área ativa de um modulador espacial de luz (SLM). Após a lente, os fótons gêmeos são separados por um divisor de feixes polarizador P1, de forma que os fótons com polarização horizontal são transmitidos e seguem pelo caminho 1, enquanto os fótons polarizados verticalmente são refletidos, podendo seguir tanto pelo caminho 2, quanto pelo caminho 3, dependendo do ângulo do eixo óptico da placa de meia onda HW1. Os fótons que passam pelo caminho 2 sofrem uma inversão da coordenada horizontal, em relação aos que passam pelo caminho 1, o que não ocorre para os fótons que passam pelo caminho 3. Por fim, são detectados em coincidência os fótons que passam pelos caminhos 1 e 2 e por 1 e 3.

### 5.1.2 Resultados experimentais

A figura 5.3 mostra os dados normalizados (pela área) dos perfis de coincidências para aberrações polinomiais de ordem  $n = 0$  até  $n = 4$ . Os asteriscos verdes correspondem às medidas com  $n = 0$  para a montagem sem inversão. As mesmas medidas para a montagem com inversão não estão mostradas para melhor efeito visual, já que elas se sobrepõem à primeira. Os círculos azuis representam as medidas para  $n > 0$  sem inversão de coordenadas, enquanto os quadrados vermelhos mostram as medidas para  $n > 0$  com inversão. Em todos os casos, as medidas foram realizadas com tempo de amostragem de 10 s por ponto. As contagens simples se mantiveram aproximadamente constantes durante as medidas, em torno de  $3 \times 10^4$  por segundo, enquanto as

coincidências variaram aproximadamente entre 10 (luz de fundo) e 100 por segundo. As taxas de contagens simples e de coincidências para todas as medidas estão listadas na tabela 5.1.

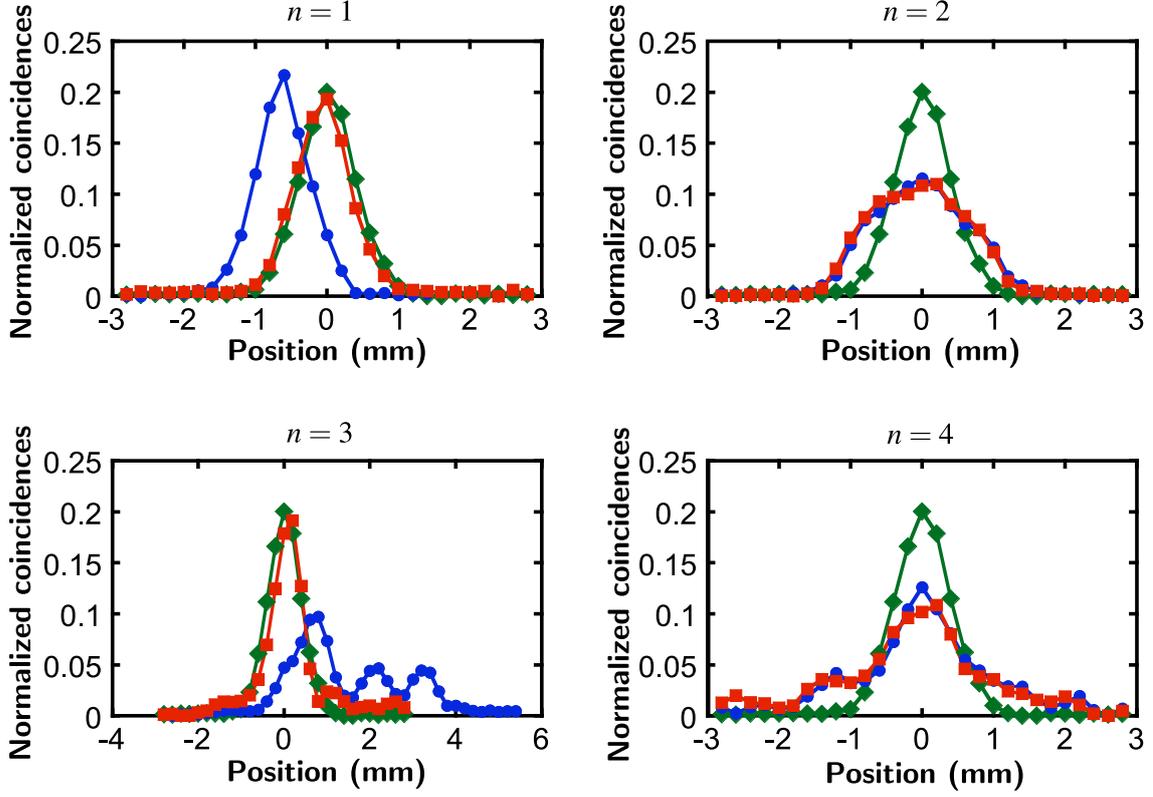


Figura 5.3: Perfis normalizados de coincidências em função da posição do detector *signal*. Asteriscos verdes: curvas de referência ( $n = 0$ ) para a montagem sem inversão. Círculos azuis: curvas com aberração ( $n > 0$ ) para o caso sem inversão. Quadrados vermelhos: curvas com aberração para o caso com inversão. As barras de erro nos gráficos têm aproximadamente o mesmo tamanho que os marcadores.

$n$	$R_1^{\text{inv}}$	$R_2^{\text{inv}}$	$R_{12}^{\text{inv}}$	$R_1^{\text{inv}}$	$R_2^{\text{inv}}$	$R_{12}^{\text{inv}}$
0	31841	30236	10 to 197	30773	27449	8 to 184
1	31610	30345	9 to 207	31662	27974	7 to 194
2	33727	30666	10 to 118	33451	29024	10 to 113
3	20787	23138	3 to 77	21431	21390	4 to 136
4	27665	29340	18 to 96	27748	27492	16 to 85

Tabela 5.1: Taxa média de contagens simples ( $R_1$ ,  $R_2$ ) e de coincidências ( $R_{12}$ ) sem e com inversão de coordenada (inv).

A aberração de ordem  $n = 1$  provoca um deslocamento lateral da gaussiana de referência no plano de detecção, como mostram os círculos azuis no gráfico de cima à

esquerda. Por outro lado, quando é feita a inversão de coordenadas, essa aberração é fortemente suprimida, como mostram os quadrados vermelhos. A aberração de ordem  $n = 2$  causa uma desfocalização e é responsável pelo alargamento da gaussiana de referência, como mostra o gráfico de cima à direita. Nesse caso, as medidas com e sem inversão são praticamente indistinguíveis, pois, como esperado, não há cancelamento do efeito. O gráfico de baixo à esquerda corresponde à aberração de ordem  $n = 3$ , responsável pela aparência assimétrica da curva definida pelo círculos azuis. Com a inversão, essa assimetria é suprimida em grande parte, como mostram os quadrados vermelhos. De acordo com (5.A.4) era esperado o cancelamento total desse efeito quando realizada a inversão de coordenadas. No entanto, a presença de morrinhos laterais mostra que não é esse o caso. Nós atribuímos esse desvio ao fato de a correlação no SLM ter uma largura finita, de maneira que os fótons do par não sofrem exatamente as mesmas aberrações. Isso será abordado em maiores detalhes na próxima seção. Por fim, o gráfico de baixo à direita mostra o efeito da introdução de uma aberração de ordem  $n = 4$ . O efeito dessa aberração no campo distante é fazer com que a cauda da gaussiana se levante de cada lado do pico, como mostram as curvas definidas pelos círculos azuis e pelos quadrados vermelhos. Novamente, por se tratar de uma aberração par, não era esperado o cancelamento desse efeito.

Com o objetivo de quantificar o cancelamento, aplicamos a definição da distância  $L_1$  entre duas distribuições de probabilidade:

$$D_n = \frac{1}{2} \sum_j |P_n(x_j) - P_0(x_j)| \quad (5.A.6)$$

onde  $P_n$  é a curva de coincidências normalizada com aberração de ordem  $n$  e  $P_0$  é a curva de referência ( $n = 0$ ), também normalizada. O parâmetro  $D_n$  pode assumir o valor mínimo de 0, quando as duas curvas estão em máxima sobreposição, e o valor máximo de 1, correspondente a duas curvas completamente disjuntas. Os resultados dos cálculos estão resumidos na tabela 5.2, em que  $D_n^{\text{inv}}$  e  $D_n$  referem-se, respectivamente, à distância  $L_1$  para os casos com e sem inversão. Para uma melhor comparação, definimos o grau de correção relativa para as aberrações ímpares, através da expressão  $(D_n - D_n^{\text{inv}})/D_n$ . O cálculo resulta em  $(89 \pm 2)$  de correção para a aberração de primeira ordem e  $(68 \pm 2)\%$  para a de terceira ordem.

$n$	$D_n$	$D_n^{\text{inv}}$	$r_c$ (%)
1	$0.53 \pm 0.01$	$0.06 \pm 0.01$	$89 \pm 2$
2	$0.25 \pm 0.01$	$0.26 \pm 0.01$	$\sim 0$
3	$0.65 \pm 0.01$	$0.21 \pm 0.01$	$68 \pm 2$
4	$0.31 \pm 0.01$	$0.32 \pm 0.01$	$\sim 0$

Tabela 5.2: Desvios das curvas com aberração de ordem  $n = [1, 4]$  em relação à curva de referência ( $n = 0$ ), para os casos sem inversão ( $D_n$ ) e com inversão ( $D_n^{\text{inv}}$ ) e fator de correção relativa ( $r_c$ ).

Nota-se que, devido à inversão, a distância  $L_1$  entre as curvas é substancialmente

reduzida para as aberrações ímpares, enquanto para as pares ela praticamente não se modifica.

### 5.1.3 Simulações numéricas

A amplitude de probabilidade de detecção no plano do SLM é descrita pelo produto  $U(\boldsymbol{\xi}_s, \boldsymbol{\xi}_i) V(\boldsymbol{\xi}_s, \boldsymbol{\xi}_i)$ , sendo  $U$  e  $V$  dadas por (3.2.14a) e (3.2.14b). Na descrição teórica do cancelamento na seção 4.4, aproximamos a função  $V$  por um delta de Dirac. Nessa situação, o cancelamento das aberrações ímpares é exato, como mostra (5.A.4). Vamos agora relaxar essa condição e estudar as consequências de se utilizar uma largura finita para a função  $V$  no cálculo dos perfis com inversão.

A função  $V$  possui a seguinte forma analítica

$$V\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_s + \boldsymbol{\xi}_i}{2}\right) \propto \left[1 - \frac{2}{\pi} \text{Si}\left(\frac{2k|\boldsymbol{\xi}_s + \boldsymbol{\xi}_i|^2}{L}\right)\right] \quad (5.A.7)$$

em que  $k$  é o número de onda dos fótons gêmeos,  $L$  é o comprimento do cristal e  $\text{Si}$  representa a função seno integral. Essa função apresenta oscilações, mas a maior parte da sua área está contida entre os dois primeiros mínimos. Para simplificar os cálculos, vamos aproximá-la por uma gaussiana da forma

$$V \approx e^{-(x_s+x_i)^2/w^2} e^{-(y_s+y_i)^2/w^2} \quad (5.A.8)$$

A meia largura da gaussiana,  $w$ , pode ser determinada por um processo de ajuste de (5.A.8) em (5.A.7), usando o método dos mínimos quadrados. Para os valores de  $k$  e  $L$  usados no experimento, o melhor ajuste forneceu uma meia largura  $w = 0.017$  mm. A largura da função  $U$  no plano do SLM é da ordem de alguns milímetros, de maneira que a largura da correlação é praticamente determinada pela largura de  $V$  nesse plano. Levando em conta a magnificação da lente de  $1.8\times$ , o valor de  $w$  no SLM deveria ser  $w = 0.031$  mm. No entanto, devido a incertezas nas medidas das distâncias, a imagem do plano de saída do cristal pode não coincidir com o plano do modulador espacial. De fato, uma incerteza de 1 cm no plano da imagem causa uma incerteza de 0.3 cm no plano do objeto, de acordo com a equação da lente fina (4.1.5). Soma-se a esse valor a própria incerteza na medida do plano do objeto, que foi estimada em 0.5 cm, resultando em uma incerteza total de 0.8 cm na determinação do plano do objeto. Agora, uma gaussiana de 0.017 mm de cintura tem uma meia largura igual a 0.06 mm a uma distância de 0.8 cm da cintura. Assumindo a magnificação de  $1.8\times$ , resulta uma meia largura de 0.11 mm. Na prática esse valor deve ser ainda maior, pois qualquer feixe não-gaussiano experimenta uma divergência maior do que a de uma gaussiana com a mesma cintura.

O perfil do *pump* foi representado por uma gaussiana da forma

$$U = e^{-(x_s-x_i)^2/w_p^2} e^{-(y_s-y_i)^2/w_p^2} \quad (5.A.9)$$

Como  $U$  e  $V$  são representadas por gaussianas, (4.4.22) pode ser separada nas coordenadas  $x$  e  $y$ . A dependência em  $y$  é eliminada pelo efeito de integração da fenda nessa direção. Assim sendo, a probabilidade de detecção pode ser aproximada pela seguinte expressão:

$$P_n(x_s, x_i) = \frac{1}{\mathcal{N}} \left| \int dx'_s \int dx'_i e^{-(x'_s - x'_i)^2/w_p^2} e^{-(x'_s + x'_i)^2/w^2} e^{i\psi_n(x'_s)} e^{i\psi_n(x'_i)} e^{-i\frac{2k}{f}(x_s x'_s + x_i x'_i)} \right|^2 \quad (5.A.10)$$

em que  $\mathcal{N}$  é uma constante de normalização. Essa foi a expressão utilizada nas simulações numéricas, com  $w_p = 1$  mm e  $\psi(x) = \pi x^n/a^n$ , sendo  $a = 0.33$  mm, equivalente a 16.5 pixels do SLM, o valor utilizado no experimento.

A figura 5.4 mostra os perfis de coincidências simulados em função da razão entre a posição do detector do *signal* e o parâmetro  $a$ , para as aberrações de ordem  $n = 1$  e  $n = 3$ . As diferentes curvas correspondem a valores de  $w$  entre 0.03 e 0.14 mm. Nota-se que, dada a força da aberração,  $a$ , a correção é tanto melhor quanto menor a largura  $w$  da função de correlação no SLM.

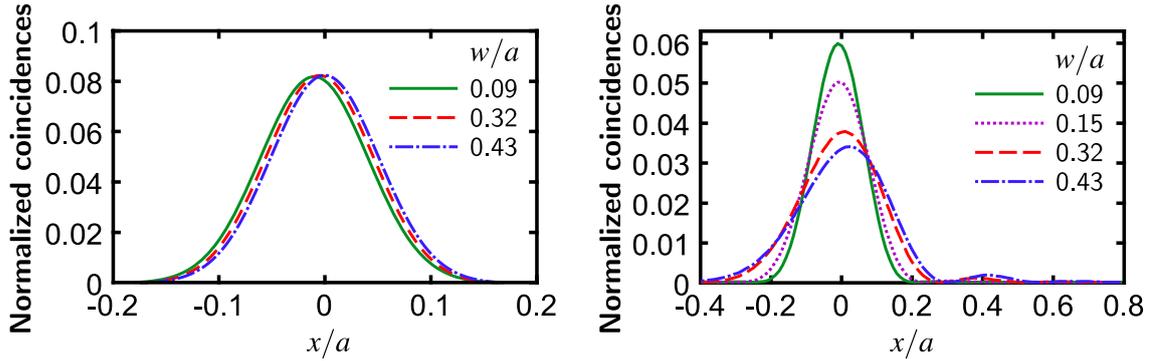


Figura 5.4: Perfis de coincidências simulados em função da razão entre a posição do detector *signal* e o parâmetro  $a$ , mantida fixa a posição do detector *idler*. As diferentes curvas correspondem a valores distintos da razão  $w/a$ . O gráfico da esquerda corresponde à aberração de primeira ordem e o da direita à de terceira ordem.

Novamente, como uma medida do cancelamento, calculamos a distância  $L_1$  (Eq.(5.A.6)) para diferentes valores do parâmetro  $w/a$ . Os resultados estão mostrados na figura 5.5.

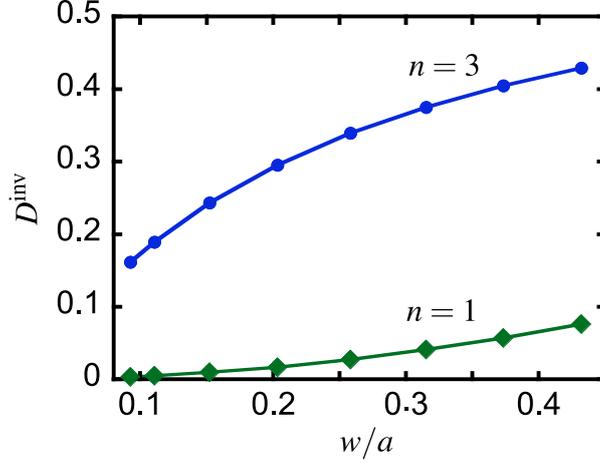


Figura 5.5: Distância  $L_1$  para as aberrações de primeira e terceira ordem, em função do parâmetro  $w/a$ . A curva verde marcada com losangos corresponde à aberração de primeira ordem e a curva azul marcada com pontos corresponde à aberração de terceira ordem.

De acordo com as figuras 5.4 e 5.5, a correção de fato diminui à medida que a largura da função  $V$  no plano do SLM aumenta. Entretanto, essa diminuição é bem menos pronunciada para a aberração de primeira ordem do que para a de terceira ordem, o que está em acordo com os dados experimentais apresentados na tabela 5.2.

É natural nos perguntarmos se o emaranhamento é realmente necessário para que o cancelamento ocorra, ou se seria possível reproduzir o mesmo efeito utilizando-se uma fonte de luz com correlações clássicas. Para investigar essa possibilidade, na próxima seção, faremos os cálculos substituindo o cristal por uma fonte térmica clássica.

## 5.2 Cancelamento de aberrações com luz térmica

Considere a mesma geometria da figura 5.1, com a diferença de que o cristal é substituído por um meio bidimensional que insere uma fase aleatória em cada ponto do feixe. Esse meio pode ser visto como uma fonte secundária de luz e pode ser, por exemplo, um filme fluorescente. Queremos calcular a função de correlação de quarta ordem para o problema. Para fontes de luz com estatística gaussiana, temos [24]:

$$\langle \Delta I(\boldsymbol{\rho}_1, \omega) \Delta I(\boldsymbol{\rho}_2, \omega) \rangle \propto |\langle U^*(\boldsymbol{\rho}_1, \omega) U(\boldsymbol{\rho}_2, \omega) \rangle|^2 \quad (5.A.11)$$

em que  $\Delta I = I - \langle I \rangle$  é a flutuação na intensidade e  $U(\boldsymbol{\rho}, \omega)$  é a componente de frequência  $\omega$  do campo no plano de detecção.

Seja  $T(\boldsymbol{\rho}'')$  a função que descreve o objeto. No plano da fonte secundária, o campo é descrito pela transformada de Fourier do objeto,  $\tilde{T}(\boldsymbol{\rho}')$  multiplicada por

um fator que representa a fase aleatória imposta pelo meio,  $e^{i\nu(\boldsymbol{\rho}' )}$ . A imagem desse plano é então projetada no plano do SLM, que introduz uma fase determinística  $\phi(\boldsymbol{\rho}') = -k|\boldsymbol{\rho}'|^2/(2f) + \psi(\boldsymbol{\rho}')$ . A detecção é feita no plano focal do SLM, onde o campo é dado por:

$$U(\boldsymbol{\rho}_1, \omega) \propto e^{\frac{ik}{2f}\rho_1^2} \int d^2\rho' \tilde{T}(\boldsymbol{\rho}') e^{i\nu(\boldsymbol{\rho}')} e^{i\psi(\boldsymbol{\rho}')} e^{-i\frac{k}{f}\boldsymbol{\rho}' \cdot \boldsymbol{\rho}_1} \quad (5.A.12)$$

Substituindo (5.A.12) em (5.A.11), obtemos o seguinte:

$$\langle \Delta I(\boldsymbol{\rho}_1, \omega) \Delta I(\boldsymbol{\rho}_2, \omega) \rangle \propto \left| \int d^2\rho'_1 \int d^2\rho'_2 \tilde{T}^*(\boldsymbol{\rho}'_1) \tilde{T}(\boldsymbol{\rho}'_2) \langle e^{-i\nu(\boldsymbol{\rho}'_1)} e^{i\nu(\boldsymbol{\rho}'_2)} \rangle e^{-i\psi(\boldsymbol{\rho}'_1)} e^{i\psi(\boldsymbol{\rho}'_2)} e^{i\frac{k}{f}\boldsymbol{\rho}'_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1} e^{-i\frac{k}{f}\boldsymbol{\rho}'_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2} \right|^2 \quad (5.A.13)$$

Se assumirmos  $\langle e^{-i\nu(\boldsymbol{\rho}'_1)} e^{i\nu(\boldsymbol{\rho}'_2)} \rangle = \delta^2(\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2)$ , ficamos com

$$\langle \Delta I(\boldsymbol{\rho}_1, \omega) \Delta I(\boldsymbol{\rho}_2, \omega) \rangle \propto \left| \int d^2\rho' \left| \tilde{T}(\boldsymbol{\rho}') \right|^2 e^{-i\frac{k}{f}\boldsymbol{\rho}' \cdot (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)} \right|^2 \quad (5.A.14)$$

Nota-se na expressão acima que as aberrações introduzidas pelo SLM são completamente canceladas. No entanto, a imagem do objeto não é recuperada nesse caso, pois ficamos com a transformada de Fourier do módulo quadrado da transformada do objeto. No esquema mostrado na seção anterior, a formação de uma imagem era possível graças à transferência do perfil do *pump* para o perfil de coincidências. Assim, para que uma imagem não aberrada possa ser vista em quarta ordem, é necessário que a correlação no campo próximo seja dada aproximadamente por um delta de Dirac e que a correlação no campo distante reproduza o objeto. Em princípio, se existir alguma fonte clássica que satisfaça esses dois critérios, é possível utilizá-la para produzir uma imagem livre de aberrações ímpares.

## Apêndice 5A: Modulador espacial

O modulador espacial utilizado no experimento é um dispositivo de cristal líquido da Hamamatsu, modelo *X10468-02*, que opera por reflexão da luz. Ele é composto de uma grade de  $792 \times 600$  pixels, de  $20 \mu\text{m} \times 20 \mu\text{m}$  cada, que podem ser modulados de forma independente. O dispositivo funciona da seguinte maneira: o usuário define um nível de cinza entre 0 e 255 (8 bits) para cada pixel e, dependendo do valor definido, uma voltagem diferente é aplicada. A aplicação de uma tensão elétrica ao cristal líquido produz uma rotação de suas moléculas, criando dessa forma uma nova direção preferencial no material. Como resultado, o índice de refração que a luz experimenta ao atravessar o meio modifica-se e, conseqüentemente, sua fase. A figura 5.6 ilustra esse esquema de funcionamento. Note que a rotação das moléculas acontece no plano da folha, de maneira que apenas a componente da luz com polarização nesse plano é modulada.

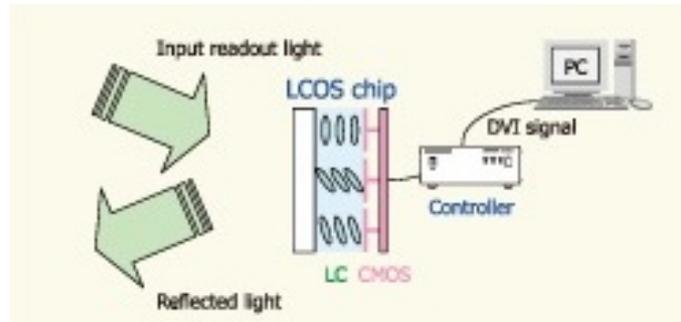


Figura 5.6: Esquema de funcionamento do SLM. Legenda: LCOS-*liquid crystal on silicon*; CMOS-*Complementary metal-oxide semiconductor*, um tipo de circuito integrado.

A figura 5.7 mostra a curva de calibração fornecida pelo fabricante. Nota-se que com uma escala de 256 tons de cinza é possível obter uma variação de fase de mais de  $2\pi$ .

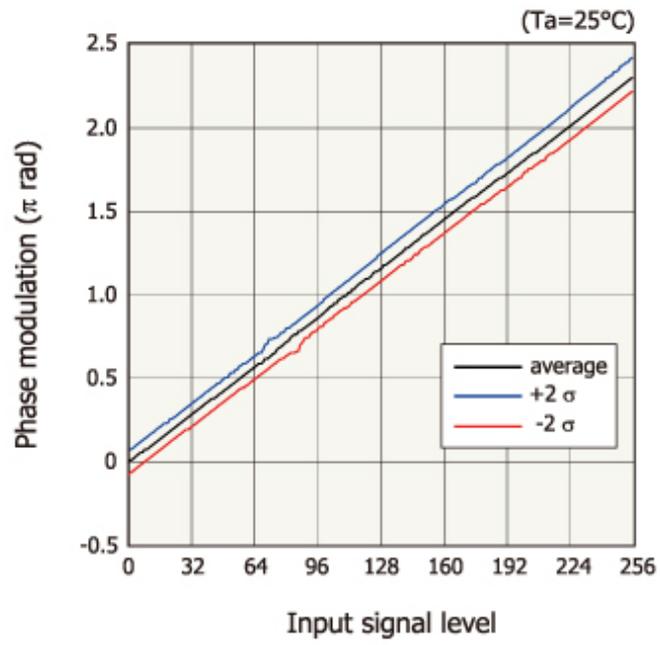


Figura 5.7: Curva de calibração de fábrica. Eixo vertical: fase imposta pelo SLM. Eixo horizontal: nível de cinza escolhido pelo usuário.

## Apêndice 5B: Código das simulações

As simulações numéricas deste capítulo foram feitas utilizando-se o código abaixo, escrito no programa MATLAB.

```
% Simulação do efeito das aberrações polinomiais na gaussiana
% Todos os comprimentos em mm

clear all; close all;
% n° de onda do pump
kp = 2*pi/(413*10(-6));
% distância
zD = 900;
% largura do pump no SLM
wp = 1;
% cintura da função V (no cristal)
w0f = 0.017;
% ampliação da lente
M = 1.8;
% comprimento de Rayleigh
zr = kp*w0f2/2;
% offset na imagem da cintura no SLM
z = linspace(0, 10, 8);
% largura da função V no SLM
wf = M*w0f*sqrt(1+(z/zr).2);
lenWf = length(z);
% ordem da aberração
ord = [1 3];
lenOrd = length(ord);
% parâmetro da aberração
a = 0.33;
% número de pontos por curva
N = 2048;

% curva sem aberração
gauss = cell(lenWf,1);
% curva com aberração
gaussab = cell(lenWf,lenOrd);
% vetor com a norma L1
normvec = zeros(lenWf,lenOrd);
```

```

for k = 1 : lenOrd
    % "força" da aberração
    b = pi/(a^ord(k));

    for i = 1 : lenWf
        % raio de interesse no plano de integração (SLM)
        w1 = 4*wp;
        % região de integração
        x = linspace(-w1,w1, N+1); x = x(1:N);
        [xs, xi] = meshgrid(x);
        % região de interesse no plano de Fourier
        pos = (-N/2 : N/2-1)*pi*zD/(kp);
        % perfil do pump
        ypump = exp(-((xs-xi)/wp).^2);
        % função V aproximada por uma gaussiana
        V = exp(-((xs+xi)/(wf(i))).^2);
        % amplitude de probabilidade sem aberração no plano do SLM
        y = ypump.*V;

        % FFT
        B = fft2(y);
        B = fftshift(B);
        B = abs(B).^2;
        xiM = round(length(x)/2);
        gauss{i} = B(:,xiM);
        gauss{i} = gauss{i}/sum(gauss{i});

        % amplitude de probabilidade com aberração no plano do SLM
        yab = y.*exp(1i*b*(xs.^ord(k)+xi.^ord(k)));

        % FFT
        A = fft2(yab);
        A = fftshift(A);
        A = abs(A).^2;
        gaussab{i,k} = A(:,xiM);
        gaussab{i,k} = gaussab{i,k}/sum(gaussab{i,k});

        % cálculo da norma L1
        normvec(i,k) = norm(gauss{i}-gaussab{i,k},1)/2;
    end
end
end

```

```

% Plot da norma

figure(1);
leg = cell(length(ord),1);
markers = 'o^sp^dv+x';
colorSetNorm = [0.7 0 0.7; 0 0.8 0];
lineSet = {'-', '--', ':', '-.'};
fontSize = 30;

for k = 1 : lenOrd
    style2 = struct('Color',colorSetNorm(k,:), 'LineStyle', '-',...
'LineWidth',2.5,'Marker', markers(k), ...
'MarkerFaceColor',colorSetNorm(k,:), 'MarkerSize', 10);
    leg{k} = ['n = ', num2str(ord(k))];

    plot(wf/a,normvec(:,k),style2);
    hold all;
end

set(gca, 'FontSize', fontSize);
set(gcf, 'Position', [1 41 1366 652]);
grid on;
xlabel('w/a');
ylabel('Dinv');
legend(leg, 'Location', 'NorthWest');
axis([0.03 0.32 0 1.1]);
deltaX = wf(end)/a - wf(1)/a;
xmin = wf(1)/a - deltaX/20;
xmax = wf(end)/a + deltaX/20;
deltaY = max(max(normvec)) - min(min(normvec));
ymin = min(min(normvec)) - deltaY/20;
ymax = max(max(normvec)) + deltaY/20;
axis([xmin xmax ymin ymax]);

```

```

% Plot dos perfis aberrados

colorSet = [0.7 0 0.7; 1 0.3 0; 0.8 0.8 0; 0 0 0;
 0 0.5 0; 0.7 0 1; 0 0 1];
markers = 'osp^dv+x';
axisPosition = [-3 3 0 0.17; -6 6 0 0.11];
wfIdx = unique(round(linspace(1,lenWf, 4)));
fontSize = 30;

maxVal = zeros(lenOrd,1);
for k = 1 : lenOrd
    figure;
    leg2 = cell(4,1);
    for i = 1 : length(wfIdx)
        style1 = struct('Color',colorSet(i,:), 'LineStyle', '-',...
'LineWidth',2,'Marker', markers(i),...
'MarkerFaceColor',colorSet(i,:), 'MarkerSize', 7);
        leg2{i} = sprintf('w/a = %2.2f', wf(wfIdx(i))/a);
        title(sprintf('n = %d', ord(k)), 'FontSize', fontSize+2);
        plot(pos,gaussab{wfIdx(i),k},style1);
        maxVal(k) = max(max(maxVal(k), gaussab{wfIdx(i),k}));
        axisPosition(k,4) = maxVal(k)+maxVal(k)/20;
        grid on;
        hold all;
    end
    axis(axisPosition(k,:));
    ylabel('Normalized coincidences', 'FontSize', fontSize);
    xlabel('x /a', 'FontSize', fontSize);
    legend(leg2, 'Location', 'NorthEast');
    set(gca, 'FontSize', fontSize);
end
end

```

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho, demonstramos como utilizar o feixe de correlação gerado via Conversão Paramétrica Descendente para produzir o cancelamento de aberrações em uma imagem formada em quarta ordem. As aberrações foram introduzidas de maneira controlada utilizando-se um modulador espacial de luz. Esse dispositivo é capaz de modificar a frente de onda da luz, introduzindo, em um plano, um determinado perfil de fase. No experimento descrito na seção 5.1, foram introduzidas aberrações polinomiais de grau variando de 0 a 4. Os perfis de coincidências medidos no plano de Fourier do modulador demonstraram uma forte atenuação das aberrações descritas por polinômios de grau ímpar, após conveniente manipulação da função de correlação no plano da fonte, no caso, um cristal não-linear. Tal manipulação envolveu a inversão da coordenada transversal de um dos fótons, modificando assim a amplitude de probabilidade de detecção no plano da fonte para  $U(\boldsymbol{\xi}_s - \boldsymbol{\xi}_i)V(\boldsymbol{\xi}_s + \boldsymbol{\xi}_i)$ . Essa estrutura de produto é essencial para a visualização do efeito, já que  $U$  carrega informação sobre o perfil do objeto, enquanto  $V$  atua como um “cancelador” da parte antissimétrica das aberrações. Como resultado, obtivemos  $89 \pm 2\%$  de cancelamento para as aberrações de primeiro grau e  $(68 \pm 2)\%$  para as de terceiro grau. O valor relativamente baixo para o cancelamento da aberração de grau 3, em comparação à de grau 1, foi atribuído à largura finita da correlação no plano do modulador espacial. De acordo com a teoria, o cancelamento só é total no limite  $V(\boldsymbol{\xi}_s + \boldsymbol{\xi}_i) \rightarrow \delta^2(\boldsymbol{\xi}_s + \boldsymbol{\xi}_i)$ , em que  $\delta$  é o delta de Dirac. Simulações numéricas comprovaram que, à medida que a largura da função  $V$  aumenta, o cancelamento diminui e essa diminuição é mais pronunciada para a aberração de terceiro grau, se comparada à de primeiro grau.

Naturalmente, podemos nos perguntar se o emprego de feixes quânticos de correlação é realmente necessário para a observação do efeito. Na seção 5.2 analisamos a possibilidade de se realizar o mesmo experimento com luz térmica, substituindo o cristal por uma fonte secundária incoerente, que pode ser, por exemplo, um filme fluorescente. Nesse caso, a correlação no campo próximo é dada por  $\tilde{T}^*(\boldsymbol{\rho}')\tilde{T}(\boldsymbol{\rho}'')\delta^2(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}'')$ . A presença do delta de Dirac é suficiente para provocar o cancelamento das aberrações de todas as ordens. No entanto, ao contrário do caso quântico, a correlação no campo distante não reproduz o objeto.

Devemos notar que, apesar da importância deste estudo para uma melhor compre-

ensão e caracterização dos feixes de correlação, ainda há obstáculos a serem vencidos para a aplicação prática desse tipo de feixe, especialmente quanto à baixa eficiência de conversão de fótons do laser em pares de fótons emaranhados, que é da ordem de  $10^{-8}$  por mm do cristal, para um material típico, integrando-se em todas as possíveis direções de emissão [32].

# Bibliografia

- [1] Vladimir M Shalaev. Optical negative-index metamaterials. *Nature photonics*, 1:41, 2007.
- [2] John Brian Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Physical review letters*, 85:3966, 2000.
- [3] Xiang Zhang and Zhaowei Liu. Superlenses to overcome the diffraction limit. *Nature materials*, 7:435, 2008.
- [4] Max Born and Emil Wolf. *Principles of Optics, seventh expanded edition*. Cambridge university press, 1999.
- [5] Robert Edward Fischer, Biljana Tadic-Galeb, Paul R Yoder, and Ranko Galeb. *Optical system design*. McGraw Hill New York, 2000.
- [6] <https://pictures.lytro.com>. Acesso: 13-11-14.
- [7] <https://www.lytro.com/downloads/resources/renng-thesis.pdf>. Acesso: 13-11-14.
- [8] [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/chemistry/laureates/2014/press.html](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/2014/press.html). Acesso: 13-11-14.
- [9] SW Hell and J Wichmann. Breaking the diffraction resolution limit by stimulated emission. *Opt. Lett*, 19:780, 1994.
- [10] Stefan W Hell. Toward fluorescence nanoscopy. *Nature biotechnology*, 21:1347, 2003.
- [11] WE Moerner and L Kador. Optical detection and spectroscopy of single molecules in a solid. *Physical Review Letters*, 62:2535, 1989.
- [12] E Betzig. Proposed method for molecular optical imaging. *Optics letters*, 20:237, 1995.
- [13] Richard Davies and Markus Kasper. Adaptive optics for astronomy. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 50:305, 2012.
- [14] <http://www.ast.cam.ac.uk/research/lucky/>. Acesso: 18-11-14.

- [15] David M Shotton. Confocal scanning optical microscopy and its applications for biological specimens. *Journal of Cell Science*, 94:175–, 1989.
- [16] Winfried Denk, James H Strickler, Watt W Webb, et al. Two-photon laser scanning fluorescence microscopy. *Science*, 248:73, 1990.
- [17] Martin J Booth. Adaptive optics in microscopy. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 365:2829, 2007.
- [18] Malvin Carl Teich and B.E.A Saleh. Fundamentals of photonics. *Canada, Wiley Interscience*, 1991.
- [19] Stephen P Walborn, CH Monken, S Pádua, and PH Souto Ribeiro. Spatial correlations in parametric down-conversion. *Physics Reports*, 495:87, 2010.
- [20] WAT Nogueira, SP Walborn, S Pádua, and CH Monken. Experimental observation of spatial antibunching of photons. *Physical review letters*, 86:4009, 2001.
- [21] XY Zou, LJ Wang, and L Mandel. Violation of classical probability in parametric down-conversion. *Optics communications*, 84:351, 1991.
- [22] MV da Cunha Pereira, LAP Filpi, and CH Monken. Cancellation of atmospheric turbulence effects in entangled two-photon beams. *Physical Review A*, 88:053836, 2013.
- [23] Kavan Modi, Aharon Brodutch, Hugo Cable, Tomasz Paterek, and Vlatko Vedral. The classical-quantum boundary for correlations: discord and related measures. *Reviews of Modern Physics*, 84:1655, 2012.
- [24] Leonard Mandel and Emil Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press, 1995.
- [25] R Hanbury Brown and RQ Twiss. A test of a new type of stellar interferometer on sirius. *Nature*, 178:1046, 1956.
- [26] Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 47:777, 1935.
- [27] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental tests of realistic local theories via bell’s theorem. *Physical review letters*, 47:460, 1981.
- [28] JG Rarity and PR Tapster. Experimental violation of bell’s inequality based on phase and momentum. *Physical Review Letters*, 64:2495, 1990.
- [29] Adetunmise C Dada, Jonathan Leach, Gerald S Buller, Miles J Padgett, and Erika Andersson. Experimental high-dimensional two-photon entanglement and violations of generalized bell inequalities. *Nature Physics*, 7:677, 2011.

- [30] Harold Ollivier and Wojciech H Zurek. Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations. *Physical review letters*, 88:017901, 2001.
- [31] Bahaa EA Saleh, Malvin C Teich, and Alexander V Sergienko. Wolf equations for two-photon light. *Physical review letters*, 94:223601, 2005.
- [32] David Nikolaevich Klyshko. *Photons Nonlinear Optics*. CRC Press, 1988.
- [33] CK Hong and L Mandel. Theory of parametric frequency down conversion of light. *Physical Review A*, 31:2409, 1985.
- [34] L. Wang. Investigation of induced coherence with and without induced emission. 1992.
- [35] AG da Costa Moura, WAT Nogueira, and CH Monken. Fourth-order image formation by spontaneous parametric down-conversion: The effect of anisotropy. *Optics Communications*, 283:2866, 2010.
- [36] Pablo Lima Saldanha. Associação de um feixe de correlação ao campo gerado pela conversão paramétrica descendente espontânea. *Dissertação de mestrado, UFMG*, 2006.
- [37] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw Hill New York, 1996.
- [38] Carlos Henrique Monken, PH Souto Ribeiro, and Sebastião Pádua. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. *Physical Review A*, 57:3123, 1998.
- [39] EJS Fonseca, CH Monken, and S Pádua. Measurement of the de broglie wavelength of a multiphoton wave packet. *Physical review letters*, 82:2868, 1999.
- [40] Ivan F Santos, Marcos A Sagioro, Carlos H Monken, and Sebastião Pádua. Resolution and apodization in images generated by twin photons. *Physical Review A*, 67:033812, 2003.
- [41] NCR Holme, BC Daly, MT Myaing, and TB Norris. Gouy phase shift of single-cycle picosecond acoustic pulses. *Applied physics letters*, 83:392, 2003.
- [42] Giulio Guzzinati, Peter Schattschneider, Konstantin Y Bliokh, Franco Nori, and Jo Verbeeck. Observation of the larmor and gouy rotations with electron vortex beams. *Physical review letters*, 110:093601, 2013.
- [43] TD Visser and E Wolf. The origin of the gouy phase anomaly and its generalization to astigmatic wavefields. *Optics Communications*, 283:3371, 2010.
- [44] Robert W Boyd. Intuitive explanation of the phase anomaly of focused light beams. *JOSA*, 70:877, 1980.

- [45] R Simon and N Mukunda. Bargmann invariant and the geometry of the göy effect. *Physical review letters*, 70:880, 1993.
- [46] P Hariharan and PA Robinson. The gouy phase shift as a geometrical quantum effect. *Journal of Modern Optics*, 43(2):219–221, 1996.
- [47] Herbert G Winful et al. Physical origin of the gouy phase shift. *Optics letters*, 26:485, 2001.
- [48] DA Tichenor and JW Goodman. Coherent transfer function. *JOSA*, 62:293, 1972.
- [49] [http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical\\_aberration](http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_aberration). Acesso: 25-11-14.
- [50] [http://en.wikipedia.org/wiki/Coma\\_%28optics%29](http://en.wikipedia.org/wiki/Coma_%28optics%29). Acesso: 25-11-14.
- [51] [http://www.opticampus.com/cecourse.php?url=lens\\_design/](http://www.opticampus.com/cecourse.php?url=lens_design/). Acesso: 25-11-14.
- [52] <http://goo.gl/eiER4B>. Acesso: 25-11-14.
- [53] MAA Neil, R Juškaitis, MJ Booth, T Wilson, T Tanaka, and S Kawata. Adaptive aberration correction in a two-photon microscope. *Journal of microscopy*, 200:105, 2000.
- [54] Luísa AP Filpi, MV da Cunha Pereira, and CH Monken. Experimental observation of aberration cancellation in entangled two-photon beams. *Optics express*, 23:3841, 2015.
- [55] JD Franson. Nonlocal cancellation of dispersion. *Physical Review A*, 45:3126, 1992.
- [56] R Prevedel, KM Schreier, J Lavoie, and KJ Resch. Classical analog for dispersion cancellation of entangled photons with local detection. *Physical Review A*, 84:051803, 2011.
- [57] Cristian Bonato, Alexander V Sergienko, Bahaa EA Saleh, Stefano Bonora, and Paolo Villoresi. Even-order aberration cancellation in quantum interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 101:233603, 2008.
- [58] DS Simon and AV Sergienko. Odd-order aberration-cancellation in correlated-photon imaging. *Phys. Rev. A*, 82:023819, 2010.