

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Juliano dos Santos Becho

**Formulação posicional não linear do Método dos Elementos
Finitos para descrição do comportamento mecânico
viscoelástico de fluência em vigas e estruturas de pórtico**

2016

**Formulação posicional não linear do Método dos Elementos
Finitos para descrição do comportamento mecânico
viscoelástico de fluência em vigas e estruturas de pórtico**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do grau de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Orientador: Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros

Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Greco

Belo Horizonte

2016

B391f

Becho, Juliano dos Santos.

Formulação posicional não linear do método dos elementos finitos para descrição do comportamento mecânico viscoelástico de fluência em vigas e estruturas de pórtico [manuscrito] / Juliano dos Santos Becho. – 2016. xiii, 119 f., enc.: il.

Orientador: Felício Bruzzi Barros.
Coorientador: Marcelo Greco.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 115-119.

Bibliografia: f. 109-114.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Viscoelasticidade - Teses. 3. Método dos elementos finitos - Teses. I. Barros, Felício Bruzzi. II. Greco, Marcelo. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 624(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**Formulação posicional não linear do Método dos Elementos
Finitos para descrição do comportamento mecânico
viscoelástico de fluência em vigas e estruturas de pórtico**

Juliano dos Santos Becho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do grau de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros
Departamento de Engenharia de Estruturas - Universidade Federal de Minas Gerais (Orientador)

Prof. Dr. Marcelo Greco
Departamento de Engenharia de Estruturas - Universidade Federal de Minas Gerais (Coorientador)

Prof. Dr. Carlos Alberto Cimini Junior
Departamento de Engenharia de Estruturas - Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz-Rojas
Departamento de Engenharia Mecânica – Universidade do Estado de Santa Catarina

Belo Horizonte, 17 de fevereiro de 2016

AGRADECIMENTOS

A Deus pelas oportunidades.

Com grande orgulho, aos meus pais Mario e Rita, exemplos de simplicidade e dedicação, pela segurança, confiança e incentivo. Sem eles esse trabalho não seria possível.

Aos meus avós Jacyr (*in memoriam*) e Mircy, exemplos de superação e de força, pelos sábios ensinamentos transmitidos ao longo de uma vitoriosa história de vida, da qual me orgulho tanto. Em especial ao meu avô que, mesmo com poucas oportunidades de estudo, foi um grande Engenheiro e que, através deste agradecimento, gostaria de eternizá-lo nesta honrosa Escola de Engenharia.

Aos meus irmãos Jacyr e Aline, exemplos de coragem e perseverança, pelo companheirismo e grande apoio.

Ao meu afilhado Lucas, pelos poucos, mas divertidos momentos juntos.

À minha namorada Pollyanna, exemplo de fé e desprendimento, pelo carinho, cumplicidade e por nunca ter permitido que eu desistisse.

Aos bons amigos feitos no DEES, Danilo, Edcarlos, João Marcos, Leandro, Lucas, Pedro e Wallyston, que tornaram essa caminhada mais suave.

Ao Professor Marcelo Greco, exemplo de profissional, pelos ensinamentos, atenção, excelente orientação e principalmente por ter confiado e acreditado em mim.

Ao Professor Felício Bruzzi Barros, pelas idéias, orientação e grande apoio.

Aos membros da banca de avaliação, professores Carlos Alberto Cimini Junior e Pablo Andrés Muñoz-Rojas, pelas valiosas contribuições para melhoria da dissertação.

Às funcionárias das secretarias do DEES e do PROPEEs, Fátima, Iracema, Lucíola, Maria Inês e Patrícia, pela competência no serviço e excelente atendimento.

Aos professores, funcionários e toda a instituição UFMG pela formação profissional e acadêmica e pelos recursos e condições oferecidas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa e apoio financeiro.

E minhas sinceras desculpas aos meus familiares, namorada e grandes amigos de Barbacena pela constante ausência nos últimos anos.

“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar.

Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota”.

(Madre Teresa de Calcutá)

RESUMO

O presente trabalho trata do desenvolvimento de uma formulação numérica não linear para descrição do comportamento mecânico viscoelástico de estruturas de pórtico e vigas submetidas a estado de tensão constante (fenômeno conhecido como fluência) e discretizadas em elementos finitos de pórtico plano. O desenvolvimento é baseado na formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos considerando a teoria clássica de vigas de Bernoulli-Euler. Essa abordagem é fundamentada em conceitos variacionais do princípio da energia potencial total estacionária. Desenvolvida para analisar problemas com não linearidades físicas e geométricas, a formulação adotada considera as posições nodais, ao invés dos deslocamentos nodais, em relação a um sistema de referência fixo no espaço para descrever a cinemática dos elementos finitos. A não linearidade geométrica considerada refere-se à análise do equilíbrio da estrutura na posição deformada utilizando-se o método de Newton-Raphson. Já a não linearidade física considerada refere-se à descrição do comportamento viscoelástico através da adoção de uma relação reológica deduzida do modelo padrão de sólido com parâmetros do material dependentes da tensão. A formulação é implementada computacionalmente e, na sequência, exemplos qualitativos e análises da influência dos parâmetros do material e dos parâmetros numéricos são apresentados a fim de verificar a coerência e o comportamento da implementação. Além disso, são apresentados três exemplos de calibração com base em ajustes dos parâmetros do modelo padrão de sólido em relação aos níveis de tensão utilizando-se o método dos mínimos quadrados. Dois desses exemplos são baseados em resultados experimentais de ensaios de fluência à tração e um em resultados experimentais de ensaios de fluência à flexão. Para tanto, é adotada uma abordagem de parametrização da altura que proporciona uma idealização do componente estrutural análoga a um feixe de barras. Essa abordagem possibilita a consideração do comportamento de fluência não só em relação à contribuição desta na linha centroidal, mas em relação à contribuição da fluência em cada faixa ao longo da altura. A formulação calibrada é então utilizada para analisar numericamente o comportamento viscoelástico não linear de corpos de prova e estruturas e comparar com os respectivos resultados experimentais obtidos da literatura. Esse procedimento é realizado com intuito de comprovar a capacidade de ajuste e de representação quantitativa do comportamento de fluência, com base na abordagem proposta.

Palavras-chave: Viscoelasticidade, Fluência, Formulação Posicional, Método dos Elementos Finitos, Modelo Reológico.

ABSTRACT

The present work aims to develop a nonlinear numerical formulation used to describe the viscoelastic mechanical behavior of framed structures and beams under a constant stress state (known as creep phenomenon) and discretized by plane framed finite elements. The development is based on the nonlinear positional formulation of the Finite Element Method and takes into consideration the beam kinematics of Bernoulli-Euler. This approach is based on variational concepts as the principle of stationary total potential energy, developed to analyze physical and geometrical nonlinearities. It considers the nodal positions of a structure, rather than nodal displacements, regarding a system of reference fixed in the space in order to describe the kinematics of the finite elements. The geometrical nonlinearity involved considers the structural equilibrium at the deformed position obtained by the Newton-Raphson method. The adopted physical nonlinearity refers to the description of viscoelastic behavior through the adoption of a rheological relation derived from the standard solid model, with stress dependent material parameters. The proposed formulation is computationally implemented. Qualitative examples and analyses of the influence of material parameters and numerical parameters are presented to verify the consistency and the behavior of such implementation. Moreover, through the least squares method, three examples of calibration are presented based on the adjustment of the parameters of the standard solid model in relation to the stress levels. Two of these examples are based on experimental results of creep tests of traction and the other one is based on experimental results of creep tests of bending. To achieve such results an approach of height parametrization that provides an idealization of the structural component as bundled bars is adopted. This approach enables the consideration of the creep behavior not only in relation to its contribution on the central line, but also in relation to the contribution of creep on each part along the height. Then, the calibrated formulation is used to analyze tests and real structures from the literature. The obtained numerical results are compared to the experimental results to confirm the fitting capacity and the quantitative representation of the creep behavior based on the proposed approach.

Keywords: Viscoelasticity, Creep, Positional Formulation, Finite Element Method, Rheological Model.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS.....	i
EPÍGRAFE.....	ii
RESUMO	iii
ABSTRACT	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xi
1. Introdução.....	1
2. Revisão bibliográfica	7
2.1 Comportamento viscoelástico	7
2.2 Formulação posicional do Método dos Elementos Finitos	22
3. Desenvolvimento da formulação	29
3.1 Equacionamento geral da formulação posicional não linear	29
3.2 Definição da relação reológica	32
3.3 Particularização da medida de deformação.....	35
3.4 Representação da velocidade de variação de posição na direção dos graus de liberdade	40
4. Implementação computacional.....	43
5. Exemplos e análises qualitativas	51
5.1 Barra tracionada	51
5.2 Viga biapoiada com carregamento concentrado.....	53
5.3 Viga em balanço com carregamento concentrado	55
5.4 Pórtico engastado.....	56
5.5 Análise da influência dos parâmetros	60
5.5.1 Influência do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento do elemento.....	60
5.5.2 Influência do número de pontos de Gauss ao longo da altura do elemento.....	63
5.5.3 Influência do intervalo de tempo	65
5.5.4 Influência do número de elementos	66
5.5.5 Influência do módulo de elasticidade longitudinal E_1	68
5.5.6 Influência do módulo de elasticidade longitudinal E_2	73
5.5.7 Influência do módulo de viscosidade η	76
6. Calibrações e exemplos quantitativos	79
6.1 Calibração com base em ensaios de fluência à tração em PRFV	79

6.1.1	Viga biapoiada com carregamento concentrado	83
6.1.2	Viga biengastada com carregamento concentrado	85
6.1.3	Pórtico engastado.....	86
6.2	Calibração com base em ensaios de fluência à tração em PEAD	90
6.3	Calibração com base em ensaios de fluência à flexão em PRFV	96
7.	Considerações finais e sugestões para trabalhos futuros	105
8.	Referências bibliográficas	109
APÊNDICE – Exemplo de obtenção das equações de ajuste dos parâmetros		115

LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1: Comportamento de material sólido (adaptado de Findley <i>et al.</i> , 1989).....	8
Figura 2-2: (a) Representação do fenômeno de fluência; (b) Representação do fenômeno de relaxação (Sá, 2007)	9
Figura 2-3: Estágios do fenômeno de fluência (adaptado de Youssef, 2010).....	9
Figura 2-4: (a) Elemento elástico; (b) Elemento viscoso.....	13
Figura 2-5: Modelo generalizado de Maxwell (Argyris <i>et al.</i> , 1991).....	13
Figura 2-6: Modelo generalizado de Kelvin-Voigt (Argyris <i>et al.</i> , 1991).....	13
Figura 2-7: (a) Modelo de Kelvin-Voigt; (b) Modelo de Boltzmann; (c) Modelo padrão de sólido (Zener)	14
Figura 3-1: Energia potencial total para um corpo em duas posições distintas (Greco, 2004)	30
Figura 3-2: Curva de deformação ao longo do tempo	32
Figura 3-3: Modelo de Maxwell generalizado	33
Figura 3-4: Modelo padrão de sólido ou modelo de Zener	33
Figura 3-5: Parametrização da geometria (Greco, 2004)	35
Figura 3-6: Parametrização do elemento finito com o auxílio de variáveis adimensionais na altura (λ) e no comprimento (ζ).....	39
Figura 3-7: Localizações dos pontos (ζ_m, λ) e (ζ_{m-1}, λ) nas configurações indeformada e deformada.....	41
Figura 4-1: Fluxograma simplificado do código implementado em MATLAB®	46
Figura 4-2: Esquema representativo da transferência de tensão e evolução das deformações dentro de um intervalo de tempo determinado	49
Figura 5-1: Barra tracionada.....	52
Figura 5-2: Evolução dos deslocamentos axiais (nó 2).....	52
Figura 5-3: Posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica, barra tracionada	53
Figura 5-4: Viga biapoiada com carregamento concentrado.....	53
Figura 5-5: Evolução da flecha com o tempo na viga biapoiada.....	54
Figura 5-6: Posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica, viga biapoiada	54
Figura 5-7: Viga em balanço com carregamento concentrado	55

Figura 5-8: Evolução da flecha com o tempo na viga em balanço	56
Figura 5-9: Posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica, viga em balanço	56
Figura 5-10: Pórtico engastado.....	57
Figura 5-11: Deslocamento horizontal ao longo do tempo	58
Figura 5-12: Deslocamento vertical ao longo do tempo	58
Figura 5-13: Posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica, pórtico	59
Figura 5-14: (a) Influência da variação do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento do elemento para o caso da barra (item 5.1); (b) Detalhe para 1000 s; (c) Detalhe para 5000 s.....	61
Figura 5-15: (a) Influência da variação do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento do elemento para o caso da viga (item 5.2); (b) Detalhe para 1000 s; (c) Detalhe para 5000 s	62
Figura 5-16: (a) Influência da variação do número de pontos de Gauss ao longo da altura do elemento para o caso da barra (item 5.1); (b) Detalhe para 1000 s; (c) Detalhe para 5000 s.....	63
Figura 5-17: (a) Influência da variação do número de pontos de Gauss ao longo da altura do elemento para o caso da viga (item 5.2); (b) Detalhe para 1000 s; (c) Detalhe para 5000 s.....	64
Figura 5-18: Influência do intervalo de tempo nos deslocamentos da barra (item 5.1).....	65
Figura 5-19: Influência do intervalo de tempo nos deslocamentos da viga (item 5.2).....	66
Figura 5-20: (a) Influência do número de elementos nos deslocamentos da barra (item 5.1); (b) Detalhe para 1000 s; (c) Detalhe para 5000 s	67
Figura 5-21: (a) Influência do número de elementos nos deslocamentos da viga (item 5.2); (b) Detalhe para 1000 s; (c) Detalhe para 5000 s.....	68
Figura 5-22: Influência do módulo de elasticidade longitudinal E_l nos deslocamentos da barra (item 5.1).....	69
Figura 5-23: Sensibilidade dos deslocamentos viscoelásticos da barra (item 5.1) para determinados intervalos de tempo com a variação do módulo de elasticidade longitudinal E_l	70
Figura 5-24: Influência do módulo de elasticidade longitudinal E_l nos deslocamentos da viga (item 5.2).....	70

Figura 5-25: Sensibilidade dos deslocamentos viscoelásticos da viga (item 5.2) para determinados intervalos de tempo com a variação do módulo de elasticidade longitudinal E_1	71
Figura 5-26: Modelo de Maxwell a partir da redução do modelo padrão de sólido.....	71
Figura 5-27: Deslocamento da barra (item 5.1) ao longo do tempo com $E_1 = 0$	72
Figura 5-28: Deslocamento da viga (item 5.2) ao longo do tempo com $E_1 = 0$	72
Figura 5-29: Influência do módulo de elasticidade longitudinal E_2 nos deslocamentos da barra (item 5.1).....	73
Figura 5-30: Influência do módulo de elasticidade longitudinal E_2 nos deslocamentos da viga (item 5.2).....	74
Figura 5-31: Modelo de Kelvin-Voigt a partir da redução do modelo padrão de sólido.....	74
Figura 5-32: Deslocamento da barra (item 5.1) ao longo do tempo com E_2 tendendo ao infinito.....	75
Figura 5-33: Deslocamento da viga (item 5.2) ao longo do tempo com E_2 tendendo ao infinito.....	75
Figura 5-34: Influência do módulo de viscosidade η nos deslocamentos da barra (item 5.1).....	76
Figura 5-35: Influência do módulo de viscosidade η nos deslocamentos da viga (item 5.2).....	77
Figura 6-1: Resultados de deslocamentos axiais por fluência à tração para o PRFV (adaptado de Youssef, 2010).....	80
Figura 6-2: Modelo da barra traciona.....	81
Figura 6-3: Relação entre o módulo de viscosidade η e o nível de tensão σ para o PRFV.....	81
Figura 6-4: Relação entre o módulo de elasticidade longitudinal E_1 e o nível de tensão σ para o PRFV.....	82
Figura 6-5: Deslocamentos axiais numéricos e experimentais para o PRFV.....	82
Figura 6-6: Viga de PRFV biapoiada com carregamento concentrado.....	84
Figura 6-7: Evolução da flecha ao longo do tempo na viga de PRFV biapoiada.....	84
Figura 6-8: Posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica, viga de PRFV biapoiada.....	85
Figura 6-9: Viga de PRFV biengastada com carregamento concentrado.....	85
Figura 6-10: Evolução da flecha ao longo do tempo na viga de PRFV biengastada.....	86
Figura 6-11: Posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica, viga de PRFV biengastada.....	86
Figura 6-12: Pórtico de PRFV engastado.....	87
Figura 6-13: Deslocamento horizontal do nó central do pórtico de PRFV ao longo do tempo.....	88

Figura 6-14: Deslocamento vertical do nó central do pórtico de PRFV ao longo do tempo ...	88
Figura 6-15: Posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica, pórtico de PRFV	89
Figura 6-16: Resultados experimentais de deslocamentos axiais por fluência à tração para o PEAD	90
Figura 6-17: Modelos da barra tracionada	91
Figura 6-18: Relação entre o módulo de viscosidade η e o nível de tensão σ para o PEAD ...	92
Figura 6-19: Relação entre o módulo de elasticidade longitudinal E_l e o nível de tensão σ para o PEAD	93
Figura 6-20: Deslocamentos axiais numéricos e experimentais por fluência para o PEAD....	93
Figura 6-21: Deslocamentos axiais numéricos e experimentais por fluência para 7,2 MPa....	94
Figura 6-22: Resultados numéricos e experimentais de carregamento e recuperação em barra de PEAD.....	95
Figura 6-23: Esquema representativo do corpo de prova submetido ao ensaio de flexão de três pontos.....	97
Figura 6-24: Resultados experimentais de deslocamento vertical nos corpos de prova de PRFV submetidos a flexão de três pontos (adaptado de Sá <i>et al.</i> 2011a).....	97
Figura 6-25: Modelo utilizado na simulação.....	98
Figura 6-26: Relação entre o módulo de viscosidade η e o nível de tensão máximo σ para o PRFV.....	99
Figura 6-27: Relação entre o módulo de elasticidade longitudinal E_l e o nível de tensão máximo σ para o PRFV.....	99
Figura 6-28: Deslocamentos verticais numéricos e experimentais por fluência para o PRFV	100
Figura 6-29: Viga ensaiada e suas características geométricas	101
Figura 6-30: Perfil estrutural real submetido à fluência no ensaio de flexão de quatro pontos (Sá, 2007)	101
Figura 6-31: Resultados numéricos e experimentais de fluência no ensaio de flexão de quatro pontos do perfil estrutural de PRFV	102

LISTA DE SÍMBOLOS

- a_0 – Parâmetro do material dependente da tensão
 a_1 – Parâmetro do material dependente da tensão
 a_2 – Parâmetro do material dependente da tensão
 a_σ – Parâmetro do material dependente da tensão
 $b(\lambda)$ – Base em relação ao ponto de Gauss λ
 B – Variável auxiliar definida pela Equação (4-10)
 c – Parâmetro definido pelas posições nodais
 d – Parâmetro definido pelas posições nodais
 ds – Comprimento de uma fibra qualquer do corpo na configuração deformada
 ds_0 – Comprimento de uma fibra qualquer do corpo na configuração não deformada
 D_0 – Função de fluência instantânea
 D_t – Função de fluência transiente
 e – Parâmetro definido pelas posições nodais
 E – Módulo de elasticidade longitudinal
 E_1 – Módulo de elasticidade longitudinal da mola em paralelo
 E_2 – Módulo de elasticidade longitudinal da mola em série
 $\varepsilon(t)$ – Deformação total por fluência dependente do tempo
 ε'_0 – Deformação elástica inicial dependente da tensão e da temperatura
 ε'_t – Função de fluência dependente da tensão e da temperatura
 ε – Campo das deformações; Deformação total
 ε_{LC} – Deformação normal longitudinal para a linha centroidal
 ε_1 – Deformação normal longitudinal na mola em paralelo
 ε_2 – Deformação normal longitudinal no ramo de Maxwell
 ε_2^e – Deformação normal longitudinal na mola em série
 ε_2^v – Deformação normal longitudinal no amortecedor
 $\dot{\varepsilon}_2^v$ – Taxa de variação da deformação normal longitudinal no amortecedor
 $\dot{\varepsilon}$ – Taxa de variação da deformação normal longitudinal
 η – Módulo de viscosidade
 f – Parâmetro definido pelas posições nodais

- F_i – Forças externas aplicadas
 F_{X1} – Força externa na direção cartesiana x do nó 1
 F_{Y1} – Força externa na direção cartesiana y do nó 1
 F_{X2} – Força externa na direção cartesiana x do nó 2
 F_{Y2} – Força externa na direção cartesiana y do nó 2
 G – Variável auxiliar definida pela Equação (4-11)
 $g(X^0)$ – Vetor dos resíduos
 $\nabla g(X^0)$ – Matriz Hessiana
 h – Altura da seção transversal do elemento estrutural
 J_0 – Função de fluência independente do tempo
 $J_t(t)$ – Função de fluência dependente do tempo
 κ – Curvatura
 l_0 – Comprimento inicial
 l_x – Diferença entre as posições cartesianas x dos nós 1 e 2
 l_y – Diferença entre as posições cartesianas y dos nós 1 e 2
 L – Comprimento do componente estrutural
 λ – Variável adimensional auxiliar na parametrização ao longo da altura
 $M_{\theta 1}$ – Momento externo do nó 1
 $M_{\theta 2}$ – Momento externo do nó 2
 n – Constante do material independente da tensão
 p – Carregamento concentrado
 P – Energia potencial das forças externas
 Π – Energia potencial total estacionária
 Q_i – Propriedades do material dependentes do tempo, da temperatura e do nível de tensão
 ξ – Variável adimensional auxiliar na parametrização ao longo do comprimento
 ξ_m – Ponto de Gauss-Legendre na localização atual
 ξ_{m-1} – Ponto de Gauss-Legendre na localização anterior
 R_i – Propriedades do material dependentes do tempo, da temperatura e do nível de tensão
 σ – Campo das tensões normais longitudinais; Tensão total
 σ_1 – Tensão normal longitudinal na mola em paralelo
 σ_2 – Tensão normal longitudinal na mola em série
 $\dot{\sigma}$ – Taxa de variação da tensão normal longitudinal
 $\dot{\sigma}_2$ – Taxa de variação da tensão normal longitudinal no ramo de Maxwell

- $|\sigma|$ – Valor absoluto do nível de tensão normal longitudinal
 t – Tempo após o carregamento
 Δt – Intervalo de tempo definido no arquivo de entrada
 τ – Variável auxiliar de tempo
 θ_1 – Giro da seção transversal do nó 1
 θ_2 – Giro da seção transversal do nó 2
 $\theta(\xi, \lambda)$ – Giro em um ponto de Gauss localizado por ξ e λ
 u – Energia de deformação específica
 $u_{,i}$ – Primeira derivada da energia de deformação específica
 $u_{,ij}$ – Segunda derivada da energia de deformação específica
 U – Energia de deformação total
 V – Volume
 x – Posição cartesiana na configuração atual
 x^0 – Posição cartesiana na configuração inicial
 $x(\xi, \lambda)$ – Posição cartesiana x de um ponto de Gauss localizado por ξ e λ
 $x_{LC}(\xi)$ – Posição cartesiana x de um ponto de Gauss ξ na linha centroidal
 X – Vetor de posições atuais
 X^0 – Vetor de posições iniciais
 ΔX – Vetor de correção das posições nodais
 $\|\Delta X\|$ – Norma euclidiana do vetor de correção das posições nodais
 X_i – Parâmetros nodais
 X_1 – Posição cartesiana x do nó 1
 X_2 – Posição cartesiana x do nó 2
 \dot{X}_i – Velocidade de variação de posição
 $\dot{X}_1(\xi_m, \lambda)$ – Velocidade de variação de posição de um ponto localizado por ξ_m e λ
 y – Posição cartesiana na configuração atual
 $y(\xi, \lambda)$ – Posição cartesiana y de um ponto de Gauss localizado por ξ e λ
 $y_{LC}(\xi)$ – Posição cartesiana y de um ponto de Gauss ξ na linha centroidal
 Y_1 – Posição cartesiana y do nó 1
 Y_2 – Posição cartesiana y do nó 2
 z – coordenada ortogonal a linha centroidal do elemento finito
 w – Carregamento distribuído

1

INTRODUÇÃO

Os crescentes desenvolvimentos do conhecimento científico em vários campos da engenharia, assim como dos métodos numéricos e recursos computacionais, auxiliam na constante busca por projetos que apresentem bom desempenho estrutural (estrutura previsível e segura) com baixo custo econômico. Com esse intuito muitas pesquisas se concentram na utilização de elementos estruturais com materiais alternativos (materiais poliméricos, materiais compostos, materiais inteligentes, entre outros), menores tolerâncias de projeto, peso reduzido e, conseqüentemente, maior flexibilidade. Esse tipo de concepção possibilita o maior aproveitamento das propriedades e funcionalidades dos elementos estruturais e em muitos casos proporciona um comportamento não linear preponderante à estrutura. Dessa forma, muitas das aproximações da teoria linear não são mais válidas, sendo necessário recorrer às análises não lineares que representam com maior fidelidade o comportamento desses elementos estruturais. No entanto, essas análises são complexas e apresentam soluções analíticas restritas, sendo necessário recorrer a métodos numéricos, como as formulações que existem na literatura baseadas no Método dos Elementos Finitos.

Dentre os comportamentos não lineares que uma estrutura quase-estática está submetida destacam-se as não linearidades geométricas relacionadas ao equilíbrio na posição deformada e as não linearidades físicas representadas pelas relações constitutivas ou reológicas. Essas relações descrevem basicamente os comportamentos mecânicos elástico, plástico e viscoso através de equações tensão-deformação que podem incluir a dependência de variáveis específicas, como tempo, temperatura, umidade, pressão, entre outras. Em geral, os materiais reais podem apresentar esses três comportamentos separadamente, dependendo das propriedades do material e das condições de serviço, ou de forma simultânea através de comportamentos intermediários entre dois ou três desses, como viscoelástico, elastoplástico e viscoelastoplástico (Meyers e Chawla, 2009; Findley *et al.*, 1989).

Dentre os materiais alternativos utilizados em elementos estruturais abordados em recentes estudos se destacam os materiais poliméricos e os materiais compostos com matriz polimérica, principalmente por apresentarem boa relação resistência/peso em comparação aos materiais estruturais convencionais. Contudo, dependendo de suas propriedades e dos níveis de tensão aos quais estão submetidos, esses materiais apresentam comportamento mecânico viscoelástico ou viscoelastoplástico não linear, em que os parâmetros não são considerados constantes e podem variar com tempo, temperatura, tensão, deformação e/ou outras grandezas de estado físico. Esses comportamentos caracterizam-se principalmente pela dependência do tempo nas respostas às solicitações externas e são descritos pela combinação do comportamento viscoso, típico de materiais fluidos, com o comportamento elástico ou plástico, típico dos materiais sólidos. Assim, muitos trabalhos estão relacionados ao estudo e modelagem do comportamento desses materiais nas mais diversas áreas como infraestrutura, construção civil, indústria mecânica, indústria aeroespacial, entre outras. Como exemplos podem ser citados os trabalhos de Godat *et al.* (2013), Kästner *et al.* (2012), Sá *et al.* (2011a) e Muñoz-Rojas *et al.* (2011).

Segundo Findley *et al.* (1989), Meyers e Chawla (2009) e Finnie e Heller (1959) os estudos sobre viscoelasticidade em materiais sólidos têm sido desenvolvidos há mais de 180 anos, sendo seus primeiros experimentos desenvolvidos e publicados em 1834 pelo engenheiro francês Louis Joseph Vicat em Vicat (1834). Além disso, as pesquisas e desenvolvimentos nessa área se intensificaram no último século com o desenvolvimento e aprimoramento de tecnologias e aplicações práticas nas quais os comportamentos viscoelástico e viscoelastoplástico são mais acentuados, como a própria utilização de materiais poliméricos e materiais compostos em elementos estruturais e a exposição de elementos estruturais a condições de serviço mais severas, principalmente em relação a temperaturas elevadas, como nas turbinas a gás, reatores nucleares, processos de fabricação de molas e indústrias químicas e petroquímicas.

No presente trabalho o interesse restringe-se ao comportamento mecânico viscoelástico não linear em materiais sólidos, o qual pode ser caracterizado de duas formas principais. A primeira descreve a variação da deformação de um material sólido ao longo do tempo quando submetido a um estado de tensão constante, conhecido como fenômeno de fluência. A segunda descreve a variação da tensão ao longo do tempo quando submetido a um estado de deformação constante, conhecido como fenômeno de relaxação (Marques e Creus, 2012; Christensen, 2003; Findley *et al.*, 1989). O comportamento mecânico de fluência apresenta

considerável relevância em materiais vítreos ou amorfos, em geral materiais poliméricos e materiais compostos, principalmente com matrizes poliméricas (Meyers e Chawla, 2009; Argyris *et al.*, 1991; Scott *et al.*, 1995). Sendo esse comportamento mecânico, também, um fenômeno relevante no estudo de estruturas de madeira. Em longos períodos de tempo sujeitos à tensão constante, esses materiais chegam a apresentar deformações adicionais superiores a um quarto da deformação elástica, podendo causar falha estrutural ou até rompimento do material sob ação de campos de tensões consideravelmente inferiores à tensão limite do material (Findley, 1987; Sá *et al.*, 2011a; Youssef, 2010). No entanto, até os materiais com estrutura química cristalina, como os metais principalmente, podem apresentar um comportamento de fluência relevante sob temperaturas superiores a um terço de sua temperatura de fusão. Dessa forma, um grande número de falhas a altas temperaturas pode ser atribuído à viscosidade do material, tornando também importante o estudo da fluência em componentes mecânicos e estruturais metálicos submetidos a temperaturas elevadas (Meyers e Chawla, 2009; Finnie e Heller, 1959; Yao *et al.*, 2007; Kassner e Pérez-Prado, 2004). Para o caso de materiais cerâmicos a fluência pode se tornar relevante sob temperaturas superiores a metade de sua temperatura de fusão (Meyers e Chawla, 2009). Já o fenômeno de relaxação é particularmente importante no caso de problemas envolvendo estruturas constituídas por membranas, cabos de aço, estais e cordas. Um caso particular e de fundamental importância em aplicações na Engenharia Civil é o de estruturas de concreto protendido. Nesse caso o cabo de aço, sob tração, está submetido ao fenômeno de relaxação e o concreto, sob compressão, está submetido ao fenômeno de fluência.

Dentro deste contexto, o presente trabalho se dedica a apresentar o desenvolvimento de uma formulação numérica capaz de descrever o comportamento mecânico viscoelástico não linear, mais especificamente o fenômeno de fluência, em vigas e estruturas de pórtico plano. Essa descrição do fenômeno de fluência consiste na representação da evolução dos deslocamentos nos elementos estruturais ao longo do tempo, sob determinado estado de carregamento estático, e na obtenção da posição de equilíbrio após determinado intervalo de tempo.

Para tanto, a formulação numérica desenvolvida toma como base a formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos. Neste trabalho, essa formulação é particularizada para descrição do comportamento mecânico viscoelástico não linear de fluência em elementos finitos de pórtico plano, na qual é considerada a teoria clássica de vigas de Bernoulli-Euler e adotada uma medida de deformação de engenharia. Nesse desenvolvimento a contribuição da fluência é introduzida de forma original na formulação posicional após a parametrização da

altura do elemento estrutural. Essa abordagem propicia uma idealização do elemento estrutural como um feixe de barras e permite a adoção do modelo reológico uniaxial padrão de sólido (modelo de Zener) na consideração da relação entre tensões, deformações e tempo. Essa abordagem permite ainda a utilização de resultados de ensaios de fluência à tração em barras, de uma forma simples, na calibração da formulação que será utilizada para simulação do comportamento de fluência à flexão. Para tanto, é considerado que o material apresenta comportamento simétrico em relação ao nível de tensão, apresentando as mesmas propriedades mecânicas tanto no comportamento de fluência à tração quanto à compressão. Contudo, essa consideração não representa, de uma forma geral, o comportamento real dos materiais, podendo ser fonte de erro em situações que o elemento estrutural está submetido tanto à tração quanto à compressão, como acontece na flexão.

O texto presente nesta dissertação será composto por mais seis capítulos principais, além do capítulo inicial (**introdução**). No capítulo dois (**revisão bibliográfica**) serão apresentados conceitos importantes para o entendimento dos métodos e procedimentos adotados no desenvolvimento da formulação, sendo destacados os artigos relevantes consultados e utilizados como referências durante a pesquisa. No capítulo três (**desenvolvimento da formulação**) inicialmente a formulação posicional do Método dos Elementos Finitos será descrita de uma forma geral e, em seguida, serão detalhados os procedimentos adotados na particularização desta para descrição do comportamento mecânico de interesse. No capítulo quatro (**implementação computacional**) serão descritos os passos e procedimentos algébricos utilizados para permitir a avaliação de forma numérica dos cálculos presentes na formulação e possibilitar sua implementação computacional. No capítulo cinco (**exemplos e análises qualitativas**) serão apresentados exemplos qualitativos a fim de verificar a coerência do comportamento estrutural descrito pela formulação em relação à teoria da viscoelasticidade. Além disso, serão apresentadas análises de variação nos parâmetros do material e nos parâmetros de discretização com o intuito de verificar a influência destes nos comportamentos de fluência à tração e de fluência à flexão. Já no capítulo seis (**calibração e exemplos quantitativos**) serão apresentados três exemplos de calibração da formulação assim como exemplos quantitativos utilizando as respectivas calibrações. Estes exemplos serão desenvolvidos a fim de demonstrar a capacidade de representação quantitativa do comportamento de fluência a partir de métodos simples de calibração da formulação apresentada. Finalmente, no capítulo sete (**considerações finais e sugestões para trabalhos futuros**) serão destacados os resultados e análises importantes e a pertinência destes dentro do

tema e do objetivo proposto. Além disso, serão apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros e para prosseguimento de pesquisas na área com base nos desenvolvimentos e resultados apresentados.

2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são apresentadas algumas referências bibliográficas relevantes da área e que foram consultadas no desenvolvimento da pesquisa. São apresentados conceitos e teorias abordados e que serão importantes para o entendimento dos métodos e procedimentos adotados ao longo do trabalho. No entanto, não se pretende com esta revisão apresentar todas as aplicações e pesquisas desenvolvidas na área. Dessa forma, são englobados apenas os artigos mais recentes e considerados relevantes ao escopo do trabalho proposto, dentre os artigos consultados, sendo abordados dois temas principais: comportamento viscoelástico de fluência e formulação posicional do Método dos Elementos Finitos.

2.1 Comportamento viscoelástico

A obtenção da resposta de um componente estrutural sob diferentes condições de tensão ou deformação e condições ambientais requer a definição de diferentes variáveis relacionadas através de equações fundamentais de equilíbrio, de compatibilidade cinemática e constitutivas ou reológicas, além, de um conjunto de condições iniciais e de contorno. As equações reológicas, especificamente, fornecem as relações entre tensão, deformação e tempo através de expressões matemáticas que incluem constantes como propriedades do material e condições ambientais (como temperatura, pressão e umidade). Essas equações possibilitam a descrição do comportamento mecânico dos elementos estruturais ao longo do tempo (Findley *et al.*, 1989).

Segundo Findley *et al.* (1989), os materiais sólidos apresentam principalmente três tipos de comportamento mecânico, que são: elástico, plástico e viscoelástico. No comportamento elástico o material apresenta resposta elástica instantânea (independente do tempo) seguindo, por exemplo, a lei de Hooke no caso linear. Nesse caso o elemento estrutural recupera sua forma original quando descarregado. Se a tensão atuante no material for suficientemente grande, acima do limite elástico, este passa a apresentar comportamento plástico e parte da

deformação observada não é mais recuperada após o descarregamento do elemento estrutural, apresentando uma deformação permanente residual. Já no caso do comportamento viscoelástico o material apresenta, quando solicitado pela ação de um conjunto de forças, uma resposta elástica instantânea e uma resposta elástica adicional dependente do tempo, lenta e amortecida (com taxa decrescente de deformação). Nesse caso, no descarregamento, se for dado um tempo suficientemente grande, o elemento estrutural recupera sua configuração original de forma lenta e amortecida. Esse comportamento viscoelástico pode ser linear ou não linear em relação ao carregamento. No comportamento linear, a resposta do material depende somente do tempo. Para materiais cuja resposta à solicitação depende do tempo e da tensão o comportamento é denominado não linear. Esses três comportamentos podem ser ilustrados como na Figura 2-1.

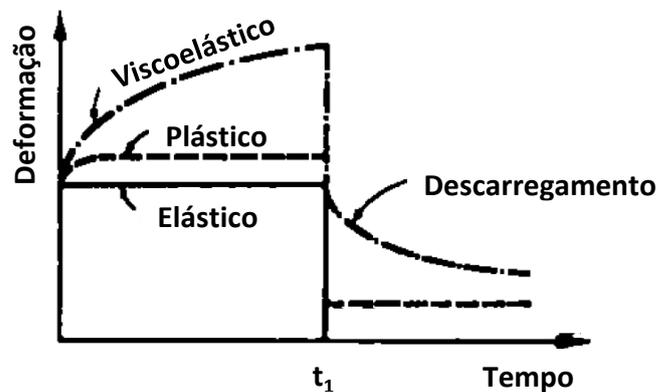


Figura 2-1: Comportamento de material sólido (adaptado de Findley *et al.*, 1989)

Vale observar que, dependendo das propriedades do material e do nível de tensão, os materiais sólidos reais podem apresentar comportamento viscoelastoplástico não linear. Nesse comportamento parte da deformação obtida na fase de evolução amortecida da deformação pode ser atribuída à plastificação do material. Nesse caso, no descarregamento, se for dado tempo suficientemente grande, o material recupera parte da deformação total mantendo uma deformação permanente residual. No entanto, neste trabalho esses efeitos de plastificação na deformação dos elementos estruturais não são considerados, sendo estes tratados como constituídos de material viscoelástico não linear.

O comportamento viscoelástico pode ser estudado principalmente por meio da análise de dois fenômenos básicos: fluência e relaxação. O primeiro se refere à deformação lenta e contínua do material sob um estado de tensão constante, como ilustrado na Figura 2-2(a). O segundo se refere à redução gradativa (alívio) do estado de tensão que o material está submetido devido a

um estado de deformação prescrito, como ilustrado na Figura 2-2(b) (Argyris *et al.*, 1991; Youssef, 2010; Sá, 2007).

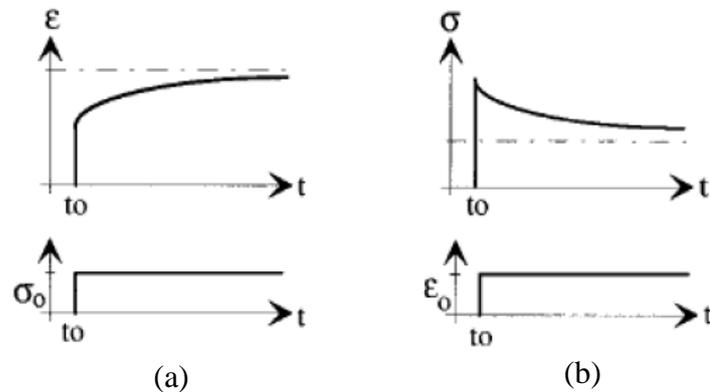


Figura 2-2: (a) Representação do fenômeno de fluência; (b) Representação do fenômeno de relaxação (Sá, 2007)

No presente trabalho é abordado especificamente o fenômeno da fluência. Segundo Yao *et al.* (2007), Youssef (2010) e Findley *et al.* (1989), esse fenômeno pode ser descrito através de um diagrama de deformação por tempo dividido em três estágios distintos, como ilustrado na Figura 2-3. No primeiro estágio há uma redução na taxa de deformação, chamado de fluência primária. No segundo estágio a deformação é mantida a uma taxa de deformação constante, podendo inclusive ser nula, chamado de fluência secundária. Já no terceiro estágio, o qual pode não ocorrer dependendo do tipo de material e do nível de tensão aplicado, a deformação aumenta a uma taxa de deformação crescente, chamado de fluência terciária. Esse diagrama foi proposto originalmente em Thurston (1895).

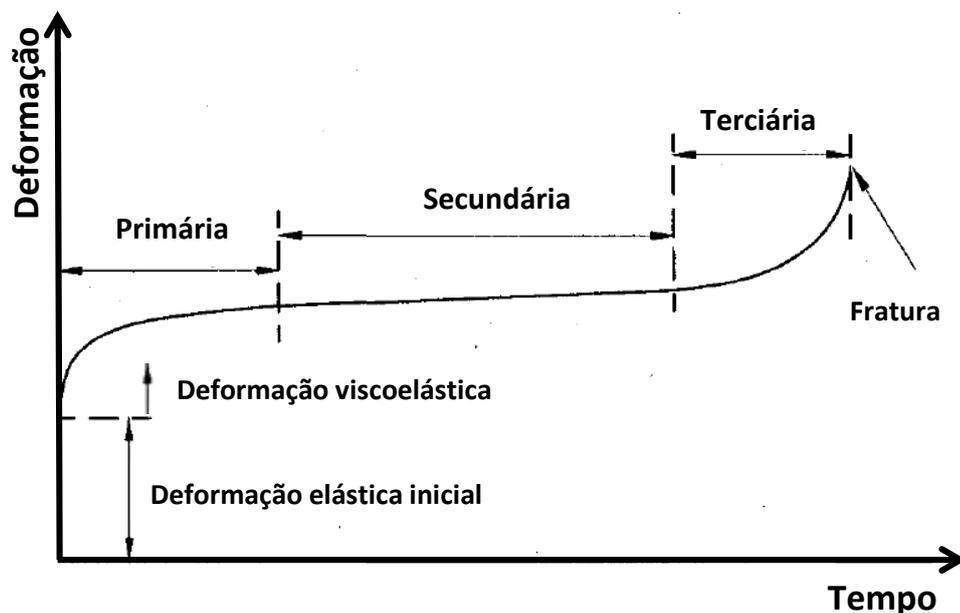


Figura 2-3: Estágios do fenômeno de fluência (adaptado de Youssef, 2010)

Por apresentar procedimentos de ensaio e de medição dos resultados mais simples, grande parte das pesquisas envolvendo comportamento viscoelástico se referem ao estudo do fenômeno de fluência. Dessa forma, algumas equações analíticas e métodos de análise foram propostos para descrever esse comportamento baseado em ensaios de fluência. Segundo Scott *et al.* (1995), três das principais abordagens adotadas na literatura para modelar esse fenômeno, em materiais poliméricos reforçados com fibra, são a Lei de Potência de Findley, o Princípio da Superposição de Boltzmann e a Equação Integral de Schapery.

A Lei de Potência de Findley foi obtida de forma empírica e pode ser dada por (Findley, 1987; Scott *et al.*, 1995):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon'_0 + \varepsilon'_t t^n \quad (2-1)$$

em que $\varepsilon(t)$ representa a deformação total por fluência dependente do tempo, ε'_0 representa a deformação elástica inicial dependente da tensão e da temperatura, ε'_t representa uma função de fluência dependente da tensão e da temperatura, n representa a constante do material independente da tensão e t representa o tempo após o carregamento.

O Princípio da Superposição de Boltzmann estabelece que a soma das deformações obtidas como respostas de fluência, dependentes do tempo, resultantes de cada contribuição de tensão aplicada é igual à resposta de deformação por fluência resultante da aplicação combinada de todas as tensões (Scott *et al.*, 1995), o que pode ser representado pela seguinte equação integral:

$$\varepsilon(t) = J_0 \sigma + \int_0^t J_t(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2-2)$$

em que σ representa a tensão aplicada, τ representa uma variável auxiliar de tempo e t representa um intervalo de tempo após o carregamento. Já J_0 representa a função de fluência independente do tempo e $J_t(t)$ representa a função de fluência dependente do tempo. Essas funções são independentes da tensão em um material viscoelástico linear e podem ser determinadas a partir dos resultados do ciclo de fluência e recuperação sob tensão constante. Para um material viscoelástico não linear, o Princípio da Superposição de Boltzmann não é aplicável.

Já a Equação Integral de Schapery foi deduzida de conceitos de irreversibilidades termodinâmicas e pode ser descrita como na Equação (2-3), para o caso de carregamento uniaxial em condições isotérmicas (Schapery, 1969; Scott *et al.*, 1995).

$$\varepsilon(t) = a_0 D_0 \sigma + a_1 \int_0^t D_t(\psi - \psi') \frac{da_2 \sigma}{d\tau} d\tau \quad (2-3)$$

Na Equação (2-3), D_0 é a função de fluência instantânea, D_t é a função de fluência transiente, $\psi = \int_0^t \frac{dt}{a_\sigma}$ e $\psi' = \int_0^\tau \frac{d\tau}{a_\sigma}$. Sendo que, a_0 , a_1 , a_2 e a_σ são parâmetros do material dependentes da tensão, τ representa uma variável auxiliar de tempo e t representa um intervalo de tempo após o carregamento. D_0 e D_t podem ser determinadas do teste de fluência sob pequenas tensões aplicadas, quando o material exibe comportamento viscoelástico linear. Já as propriedades não lineares do material dependentes da tensão (a_0 , a_1 , a_2 e a_σ) podem ser determinadas dos resultados do ciclo de fluência e recuperação sob tensão constante em vários níveis de tensão.

A determinação do comportamento viscoelástico por meio dessas equações analíticas apresentadas requer a determinação de funções de fluência e de parâmetros do material que aproximam o comportamento viscoelástico experimental. Nesses casos, geralmente são utilizadas funções exponenciais ou funções obtidas de modelos reológicos baseadas em series de Prony.

A determinação das funções de fluência e dos parâmetros do comportamento viscoelástico não linear em um material específico, por meio de ensaios de longa duração em laboratório, pode ser impedida pelo alto custo e extenso período de tempo necessário aos experimentos para se obter resultados confiáveis. Dessa forma, de acordo com Scott *et al.* (1995) e Luo *et al.* (2001), para contornar essas limitações, são utilizadas técnicas de caracterização acelerada. Uma técnica muito difundida e aceita está relacionada à utilização da relação do comportamento viscoelástico com elevadas temperaturas e/ou diferentes níveis de tensão, chamada de Princípio de Superposição Tempo-Temperatura-Tensão. Esse princípio é baseado na hipótese que os efeitos de temperatura e/ou tensão, no comportamento mecânico transiente de um material, são equivalentes a um alongamento ou encurtamento do tempo real para temperaturas e/ou tensões, respectivamente, abaixo ou acima da temperatura e/ou tensão de referência. Curvas de evolução da deformação com o tempo em diferentes níveis de temperatura e/ou tensão podem então ser reunidas para obtenção de uma curva única, que

descreve o comportamento do material, para determinada temperatura e tensão de referência. Curvas obtidas dessa maneira são comumente denominadas curvas mestras. Esse procedimento possibilita o uso de dados de testes realizados em períodos curtos, com temperaturas e/ou tensões elevados, na previsão do comportamento em longos períodos de tempo sob determinada temperatura e tensão de referência, através de interpolações.

Segundo Argyris *et al.* (1991), outra forma utilizada para descrever o comportamento viscoelástico para campos de tensão uniaxiais pode ser por meio de equações diferenciais, que não utilizam funções de fluência (ou relaxação), expressas como:

$$\sigma + R_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \dots + R_n \frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n} = Q_0 \varepsilon + Q_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \dots + Q_n \frac{\partial^n \varepsilon}{\partial t^n} \quad (2-4)$$

em que os parâmetros R_i e Q_i são definidos pelas propriedades do material dependentes do tempo, da temperatura e do nível de tensão. Esses parâmetros podem ser determinados a partir de modelos reológicos que representam o comportamento do material ao longo do tempo, sendo as equações determinadas dessa forma denominadas como equações fenomenológicas. Esse tipo de modelo é uma interpretação física do formalismo matemático descrito por equações diferenciais como a Equação (2-4). As relações reológicas obtidas a partir desses modelos diferem das relações constitutivas por considerarem a variável tempo.

Os modelos reológicos são compostos por elementos elásticos (molas), elementos viscosos (amortecedores), elementos plásticos (atrito entre sólidos) ou associações de dois ou mais desses elementos. Esses elementos podem ser lineares ou não e podem ser associados de tal forma que o comportamento físico descrito, para as deformações em função das tensões e dos parâmetros do material ou para as tensões em função das deformações e dos parâmetros do material, reflita aproximadamente o comportamento viscoelástico do material. Dessa forma, a relação reológica do material pode ser representada por expressões como a Equação (2-4). (Findley *et al.*, 1989; Argyris *et al.*, 1991; Mesquita, 2002).

Os comportamentos mecânicos típicos de materiais sólidos (elástico, elastoplástico, viscoelástico, entre outros) podem ser representados por modelos reológicos que aproximam de forma satisfatória a resposta do material às solicitações externas. Além disso, mais de um modelo pode ser capaz de representar um mesmo comportamento dependendo dos parâmetros adotados em seus elementos e da associação entre esses elementos. Em geral, o comportamento viscoelástico é representado por modelos que associam elementos elásticos e

viscosos. Esses elementos podem ser representados como na Figura 2-4 e respeitam as Equações (2-5) e (2-6), respectivamente para o elemento elástico e para o elemento viscoso (Findley *et al.*, 1989; Argyris *et al.*, 1991; Mesquita, 2002).

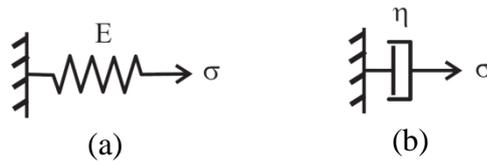


Figura 2-4: (a) Elemento elástico; (b) Elemento viscoso

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2-5)$$

$$\sigma = \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \eta \dot{\varepsilon} \quad (2-6)$$

Nas Equações (2-5) e (2-6), os parâmetros E e η representam as propriedades do material e são denominados, respectivamente, como módulo de elasticidade longitudinal e módulo de viscosidade.

De uma forma geral, os modelos reológicos aplicados para representação dos comportamentos mecânicos dos materiais viscoelásticos podem ser derivados dos modelos generalizados de Maxwell e de Kelvin-Voigt, ilustrados pelas Figura 2-5 e 2-6, dependendo da definição dos parâmetros envolvidos (Findley *et al.*, 1989; Argyris *et al.*, 1991).

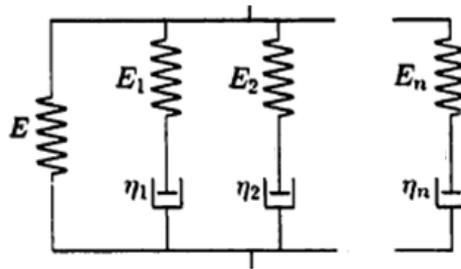


Figura 2-5: Modelo generalizado de Maxwell (Argyris *et al.*, 1991)

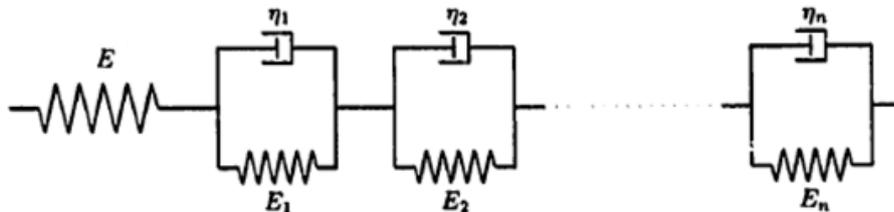


Figura 2-6: Modelo generalizado de Kelvin-Voigt (Argyris *et al.*, 1991)

Em Mesquita (2002) podem ser vistos alguns modelos reológicos que são utilizados para descrição dos comportamentos mecânicos de materiais sólidos, assim como suas respectivas equações. Três dos modelos mais utilizados na literatura, para representação do comportamento de materiais sólidos viscoelásticos, são os de Kelvin-Voigt e de Boltzmann, apresentados em Mesquita (2002) e o modelo padrão de sólido, ou modelo de Zener, apresentado em Findley *et al.* (1989). Esses modelos estão expostos na Figura 2-7.

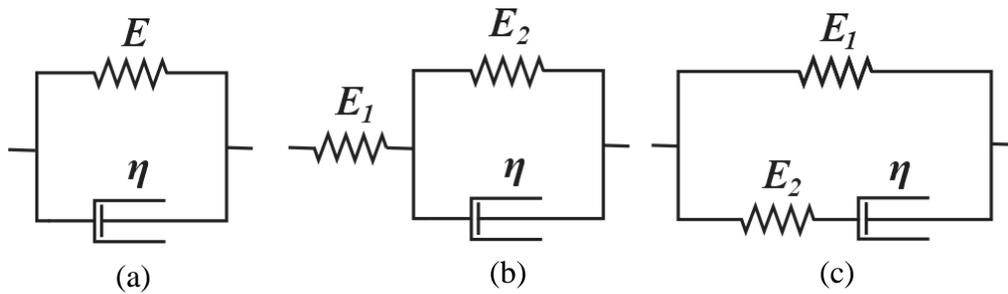


Figura 2-7: (a) Modelo de Kelvin-Voigt; (b) Modelo de Boltzmann; (c) Modelo padrão de sólido (Zener)

Apesar de muito utilizado na representação do comportamento viscoelástico dos materiais, o modelo de Kelvin-Voigt, apresentado na Figura 2-7(a), é capaz apenas de representar o fenômeno de deformação elástica amortecida. Nesse fenômeno, após um intervalo de tempo suficientemente grande, o material atinge de forma amortecida um valor de deformação máxima igual à deformação elástica instantânea que um material elástico atingiria, não sendo capaz de representar o fenômeno de fluência, no qual se obtém uma deformação elástica amortecida adicional à deformação elástica instantânea. Já os modelos de Boltzmann e padrão de sólido, apresentados respectivamente nas Figura 2-7(b) e 2-7(c), consideram tanto o comportamento elástico instantâneo quanto o comportamento elástico amortecido dos materiais e fornecem uma deformação adicional a deformação final obtida por um material elástico. Além disso, no modelo de Boltzmann o comportamento elástico instantâneo depende apenas do parâmetro E_1 , que representa o módulo de elasticidade longitudinal do material. Enquanto o parâmetro E_2 determina a deformação amortecida adicional, após um intervalo de tempo suficientemente grande, e representa o módulo de elasticidade longitudinal do material no comportamento elástico amortecido. Já no modelo padrão de sólido o comportamento elástico instantâneo depende dos parâmetros E_1 e E_2 , sendo que a soma desses parâmetros representa o módulo de elasticidade longitudinal do material. Nesse modelo, o parâmetro E_1 determina a deformação final (soma da deformação elástica instantânea e da deformação elástica amortecida), após um intervalo de tempo suficientemente grande, e representa o módulo de elasticidade longitudinal do material no comportamento elástico amortecido. Nos

três modelos o parâmetro η representa o módulo de viscosidade do material, o qual determina a taxa de deformação com o tempo e proporciona um comportamento amortecido ao material.

A determinação da deformação quando a tensão é conhecida ou vice-versa requer a integração no tempo de equações diferenciais semelhantes à Equação (2-4), obtidas a partir de modelos reológicos adequados, em que a ordem da equação geralmente corresponde ao número de elementos viscosos (amortecedores) do modelo (Argyris *et al.*, 1991). Porém, normalmente a integração da Equação (2-4) é complexa e, dessa forma, é necessário dividir o modelo em modelos mais simples e proceder com a soma das deformações em cada modelo para obtenção da deformação total ou utilizar um método numérico adequado, como pode ser observado nos trabalhos destacados a seguir.

Em Argyris *et al.* (1991) são apresentados dois procedimentos de integração a partir da definição de incrementos de deformação inelástica. O procedimento de determinação do incremento de deformação inelástica a partir das tensões é denominado Método da Fluência, enquanto o procedimento de determinação dos incrementos de deformação inelástica a partir das deformações totais é denominado Método da Relaxação. Já em Argyris *et al.* (1992) os autores tratam do modelamento reológico e da análise numérica de estruturas de membranas viscoelásticas, feitas com malha de PVC, utilizando-se o modelo de Boltzmann para deduzir a equação reológica e o método da fluência para obter a integração numérica. Os autores concluem com esses dois trabalhos que os procedimentos apresentados em Argyris *et al.* (1991) e aplicados para análise de membranas em Argyris *et al.* (1992) são capazes de representar o comportamento viscoelástico do material constituinte da membrana. É observado, nestes trabalhos, que os resultados numéricos obtidos apresentaram boa concordância com os resultados experimentais ao longo de toda a análise no tempo para níveis mais baixos de tensão. Já para níveis de tensão mais altos, os resultados numéricos também foram satisfatórios, porém, apresentaram melhores concordâncias com os resultados experimentais para análises a longo prazo.

Jurkieweiz *et al.* (1999) apresentam um método incremental baseado no Método dos Elementos Finitos utilizando uma série de Dirichlet para expressar a relação reológica dos materiais e descrever o comportamento viscoelástico linear de estruturas compostas baseado no Princípio da Superposição de Boltzmann. Esse método foi utilizado para simular uma viga de concreto protendido, ensaiada previamente durante um período de fluência de cinco anos, e uma torre de resfriamento formada por cascas de concreto reforçadas. Os autores concluem

que o método e os procedimentos adotados são capazes de prever o comportamento de elementos estruturais mistos ao longo do tempo em condições de serviço com aceitável precisão. Já as diferenças obtidas em relação aos resultados experimentais, na ordem de 15%, são atribuídas à análise baseada na teoria viscoelástica linear. Jurkieweiz *et al.* (2005) utilizam o mesmo método para a descrição da deformação e da distribuição de tensão axial ao longo do tempo em uma viga composta de aço e concreto considerando o deslizamento na interface aço-concreto e o comportamento viscoelástico linear do concreto. Pelos resultados obtidos são reforçadas as conclusões apresentadas em Jurkieweiz *et al.* (1999) e acrescentado que os efeitos do deslizamento na interface aço-concreto são relevantes na análise ao longo de tempo. Dessa forma, os resultados numéricos obtidos apresentaram maiores concordâncias em relação aos resultados experimentais quando comparados aos resultados em que o deslizamento é desprezado.

Mesquita e Coda (2003) apresentam uma formulação tridimensional do Método dos Elementos de Contorno simplificado, sem utilizar células internas, para a análise de corpos viscoelásticos baseado nas relações reológicas diferenciais obtidas por modelos reológicos. Os autores comparam os resultados de deslocamento em função do tempo obtidos utilizando-se os modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann. A partir dos resultados numéricos obtidos, utilizando-se a formulação proposta, é possível verificar as diferenças nas respostas instantâneas características de cada um dos dois modelos utilizados e que estes resultados estão de acordo com os resultados analíticos apresentados. Os autores concluem que a principal vantagem da abordagem proposta está relacionada à avaliação das integrais apenas nos contornos do problema.

Semptikovski e Muñoz-Rojas (2013) propõem uma formulação tridimensional do Método dos Elementos Finitos utilizando-se um elemento de viga simplificado. Este elemento possui apenas graus de liberdade de translação, sendo a rigidez à flexão introduzida através de molas de rotação entre dois elementos de barra geometricamente não-lineares adjacentes. Nesse trabalho o comportamento viscoelástico linear em elementos constituídos de Polietileno de Alta Densidade (PEAD) é considerado a partir do modelo reológico generalizado de Maxwell, com base no trabalho desenvolvido em Kaliske e Rothert (1997). No caso elástico e de pequenos deslocamentos, para a simulação de uma viga biapoiada utilizando-se o elemento simplificado proposto, são obtidos erros da ordem de 0,5% em relação à linha elástica analítica, já para a viga em balanço os erros não excedem 1,0%. Considerando-se grandes deslocamentos, também se verifica uma concordância satisfatória dos resultados. No caso

viscoelástico linear, os resultados foram obtidos através da análise transiente de uma viga biapoiada e de uma viga engastada, sendo esses resultados comparados com os resultados apresentados pelo software comercial Msc Marc. Os erros relativos ao software Msc Marc para a viga biapoiada são menores do que 0,3%. Já para a viga em balanço os erros são da ordem de 0,25%.

Panagiotopoulos *et al.* (2014) comparam os resultados de deformação ao longo do tempo em estruturas submetidas a carregamentos quase-estáticos. Os resultados são obtidos utilizando-se a formulação do Método dos Elementos de Contorno baseado na discretização implícita no tempo (chamado método de Rothe) utilizando diferentes modelos reológicos para obtenção das equações reológicas. A formulação utilizada é semelhante à apresentada por Mesquita e Coda (2003). São utilizados os modelos sólidos de Hooke, Kelvin-Voigt e Boltzmann, que representam respectivamente os comportamentos elástico instantâneo, elástico amortecido e viscoelástico, além dos modelos para fluidos de Maxwell, Jeffreys e Burgers. Os autores concluem que a abordagem proposta fornece resultados com satisfatória concordância com os resultados analíticos esperados para o modelo de Kelvin-Voigt e, a partir da implementação dos diferentes modelos reológicos, é possível verificar a aplicabilidade da formulação para descrição de diferentes comportamentos tanto sólidos quanto fluidos, considerando-se a contribuição viscosa.

Os interesses de parte dos recentes estudos relacionados aos comportamentos viscoelástico e viscoelastoplástico têm se concentrado principalmente no desenvolvimento de formulações numéricas que adotam equações fenomenológicas, baseadas em modelos reológicos, para representação da relação entre tensões, deformações e tempo, e em técnicas de ajuste dos parâmetros desses modelos para descrição do comportamento em materiais específicos, como destacado nos trabalhos a seguir.

Chung e Buist (2012) descrevem a dedução de um novo modelo reológico generalizado através da simples adoção de componentes não lineares, denominado modelo de sólido viscoelástico não linear, que pode descrever fenômenos viscoelásticos não lineares em uma forma diferencial compacta e que pode ser reduzido ao modelo padrão de sólido linear se forem utilizados componentes lineares. Esse modelo é utilizado para simular o carregamento cíclico no estômago de mamíferos e tecidos musculares cardíacos a partir da adoção de equações exponenciais de ajuste dos parâmetros do modelo. A partir dos resultados numéricos obtidos é possível observar uma satisfatória concordância em relação aos resultados

experimentais, apresentados e obtidos na literatura, confirmando a adequação da abordagem proposta à análise de estruturas biomecânicas, que apresentam acentuado comportamento viscoelástico.

Liu *et al.* (2008) propõem uma formulação baseada em equações integrais para descrição do comportamento viscoelástico não linear do polietileno em aplicações estruturais. O comportamento viscoelástico é considerado adotando-se o modelo generalizado de Kelvin-Voigt e os respectivos parâmetros são obtidos por uma metodologia baseada em interpolação linear. Os resultados numéricos obtidos para a sollicitação axial de corpos de prova de polietileno são comparados aos resultados experimentais, desenvolvidos pelos próprios autores, comprovando a adequação da abordagem proposta para representação do comportamento viscoelástico do respectivo material. Formulação semelhante é adotada em Kühl *et al.* (2013) para descrição do comportamento viscoelastoplástico do Polietileno de Alta Densidade (PEAD). Em que, para a parte viscoelástica da deformação, é adotado o modelo reológico generalizado de Kelvin-Voigt e, para a parte viscoplástica, é adotada a equação de Zapas-Crissman. Nesse caso os parâmetros viscoelásticos são obtidos por um ajuste de curva baseado no método de otimização por nuvem de partículas, enquanto os parâmetros viscoplásticos são obtidos por uma regressão linear do método dos mínimos quadrados. Os resultados numéricos obtidos para a sollicitação axial de corpos de prova de polietileno de alta densidade são comparados aos resultados experimentais, desenvolvidos pelos próprios autores. A partir destes resultados obtidos é possível verificar a capacidade de representação do comportamento viscoelastoplástico através de uma eficiente proposta de obtenção dos parâmetros do material de forma otimizada, obtendo-se melhor concordância entre os resultados numéricos e os resultados experimentais em comparado com os resultados apresentados em Liu *et al.* (2008).

Carniel *et al.* (2015) apresentam uma formulação do método dos elementos finitos para análise de treliças espaciais com comportamento viscoelastoplástico incluindo degradação mecânica unidimensional. O modelo reológico generalizado de Kelvin-Voigt é adotado para descrição do comportamento viscoelástico, enquanto o comportamento viscoplástico é considerado a partir da equação de Perzyna e a degradação do material é considerada a partir do modelo de dano de Lemaitre. Os parâmetros do material são obtidos por um ajuste de curva baseado no método de otimização por nuvem de partículas, assim como apresentado em Kühl *et al.* (2013). A abordagem proposta é utilizada na descrição do comportamento viscoelastoplástico de treliças que apresentam comportamento de “*snap-through*”, em que são

verificas não linearidades geométricas significantes, e constituídas de Polietileno de Alta Densidade (PEAD). A abordagem proposta é capaz de representar o comportamento de degradação do material de forma satisfatória quando comparado aos resultados experimentais apresentados. A partir dos resultados numéricos obtidos para as treliças analisadas é possível verificar que o amortecimento estrutural, devido à degradação do material viscoelastoplástico, é significativamente mais pronunciado em relação ao material viscoelastoplástico sem degradação, assim como o amortecimento estrutural do material viscoelastoplástico é significativamente mais pronunciado em relação ao material puramente viscoelástico, proporcionando resultados mais realistas.

Estudos recentes em viscoelasticidade apresentam ainda desenvolvimentos referentes à utilização de derivadas fracionárias na obtenção de modelos reológicos mais simples e com maior precisão na representação do comportamento complexo de materiais reais, como materiais compostos, materiais poliméricos, tecidos biológicos, entre outros (Bahraini *et al.*, 2013; Shen *et al.*, 2013; Pérez Zerpa *et al.*, 2015; Costa-Haveroth *et al.*, 2015).

Alguns estudos, assim como os destacados a seguir, se concentram principalmente na análise do comportamento mecânico de fluência a partir de resultados experimentais em perfis estruturais reais ou em corpos de prova, em diferentes estados de tensão e carregamento. Além disso, os resultados experimentais são normalmente comparados com resultados obtidos a partir de modelos analíticos ou numéricos de fluência.

Em Bank e Mosallan (1992) é feita uma investigação experimental e analítica da fluência em longa duração de uma estrutura de pórtico plano composta por uma viga e duas colunas. O pórtico apresentado foi construído inteiramente de componentes pultrudados de plástico vinil éster reforçado com fibra de vidro. O trabalho apresenta uma comparação entre os resultados experimentais e os resultados analíticos obtidos através da Lei de Potência de Findley. Além disso, são comparados os resultados considerando-se tanto a teoria de vigas de Bernoulli-Euler quanto a teoria de vigas de Timoshenko. A partir dos resultados obtidos é possível verificar que as mudanças nas magnitudes dos módulos dependentes do tempo não podem ser negligenciadas no projeto de estruturas pultrudadas de plástico reforçado com fibra de vidro. Além disso, na análise do pórtico, as grandes diferenças entre as predições da teoria de vigas com deformações por cisalhamento (teoria de Timoshenko) e as predições da teoria clássica de vigas (teoria de Bernoulli-Euler) indicam que os efeitos do cisalhamento também não

podem ser negligenciados nas análises de estruturas pultrudadas de plástico reforçado com fibra de vidro.

Dutta e Hui (2000) realizam um estudo em relação ao comportamento a tração e a compressão de materiais compostos de poliéster reforçados com fibra de vidro em diferentes níveis de solicitação e diferentes níveis de temperatura. Para tanto, é utilizada a Lei de Potência de Findley para ajustar os dados experimentais, em que o Princípio de Superposição Tempo-Temperatura-Tensão permite prever o tempo até a falha. A partir dos resultados apresentados é possível verificar que o comportamento estrutural do poliéster reforçado com fibra de vidro não é simétrico em relação ao nível de tensão, ou seja, o material não apresenta as mesmas propriedades mecânicas tanto no comportamento de fluência à tração quanto à compressão. Além disso, os autores concluem que a Lei de Potência de Findley pode ser utilizada com precisão satisfatória na predição do comportamento de fluência à tração ou à compressão em longo prazo utilizando-se o Princípio de Superposição Tempo-Temperatura-Tensão.

Sá *et al.* (2011a) realizam uma investigação experimental de fluência sob flexão em vigas de material pultrudado feito de poliéster reforçado com fibra de vidro. Nos ensaios são utilizadas duas escalas diferentes de corpos de prova: uma viga de perfil I e pequenas amostras retiradas desse perfil. A primeira parte do procedimento experimental tem como objetivo avaliar as propriedades estáticas independentes do tempo do perfil pultrudado através de testes mecânicos de tração, compressão e flexão nos corpos de prova nas duas escalas. Na segunda parte do procedimento experimental testes de fluência à flexão são realizados nos corpos de prova nas duas escalas sendo os níveis de solicitação definidos com base nos valores de tensão última determinados na primeira parte do experimento. Os resultados se baseiam na medição dos valores de flecha (deslocamento vertical máximo da viga) no meio do vão e deformação axial. Em relação à flecha elástica, tanto para viga de perfil I quanto para pequenas amostras retiradas desse perfil, são obtidos aumentos da flecha de 4%, 8% e 12%, respectivamente, no final do primeiro dia, da primeira semana e do primeiro mês, sendo obtido um aumento máximo de 15% ao final dos testes de fluência, depois de 1600 horas. Os resultados obtidos por ambas as escalas de teste foram consistentes, sugerindo que é possível utilizar os resultados obtidos para materiais pultrudados feitos de poliéster reforçado com fibra de vidro em escala reduzida na predição das deformações por fluência de perfis estruturais constituídos por esse mesmo material. Já em Sá *et al.* (2011b) esses resultados experimentais são comparados aos resultados analíticos utilizando-se o modelo reológico de Bruger-Kelvin, série de Prony-Dirichlet e a Lei de Potência de Findley. Além disso, esses

resultados experimentais são utilizados para descrever o comportamento em longa duração a partir do Princípio da Superposição Tempo-Temperatura-Tensão, acoplado com a Lei de Potência de Findley, para uma tensão de referência de 20% da tensão última do material. Os autores concluem que os resultados experimentais obtidos para fluência de materiais pultrudados feitos de poliéster reforçado com fibra de vidro podem ser representados com satisfatória precisão, principalmente para níveis de tensão inferiores a 40% da tensão última do material, utilizando-se as três formulações analíticas e adotando-se os parâmetros de material obtidos experimentalmente. No entanto, essa convergência entre os resultados analíticos é observada apenas dentro do período de tempo adotado experimentalmente. Sendo que, na predição do comportamento de fluência além do tempo ensaiado são obtidas divergências consideráveis entre os resultados analíticos.

São encontrados ainda trabalhos dedicados ao desenvolvimento de revisões técnicas e bibliográficas em fluência com foco em diferentes conceitos e materiais. A seguir são apresentados dois trabalhos distintos que se dedicam a este escopo.

Em Scott *et al.* (1995) é apresentada uma revisão da literatura técnica relacionada ao comportamento de fluência em materiais compostos poliméricos reforçados com fibra. A revisão se dedica principalmente à exposição da utilização da Lei de Potência de Findley, do Princípio da Superposição de Boltzmann e da Equação Integral de Schapery no modelamento e previsão de fluência a partir de resultados experimentais. O trabalho inclui ainda o tratamento das relações das teorias da viscoelasticidade linear e não linear, a revisão de técnicas de caracterização acelerada, o tratamento dos efeitos da umidade e da temperatura sobre o comportamento de fluência em materiais compostos e a interação entre o comportamento de fluência e o comportamento de fadiga.

Em Yao *et al.* (2007) é feita uma revisão das teorias relacionadas ao fenômeno de fluência com ênfase especial em materiais metálicos sob comportamento de fluência envolvendo estados de tensão multiaxiais. São apresentadas teorias baseadas em fenômenos microscópicos como nucleação, crescimento e coalescência de vazios na interface entre os grãos da estrutura. São apresentadas também teorias baseadas na plasticidade clássica e na mecânica do dano contínuo para descrever os mecanismos de falha por fluência multiaxial, estabelecer os critérios de projeto e prever a vida útil desses em altas temperaturas.

2.2 Formulação posicional do Método dos Elementos Finitos

De acordo com Logan (2007), o Método dos Elementos Finitos consiste em modelar uma estrutura ou domínio, em um caso mais geral, originalmente contínuo, por meio da discretização em unidades básicas (elementos finitos) interligadas por pontos comuns (pontos nodais ou apenas nós) entre duas ou mais dessas unidades. A representação de um domínio por um conjunto de elementos finitos interligados por pontos nodais é chamada de malha. Após a discretização de um domínio, através de determinada abordagem é possível definir equações de equilíbrio para cada elemento. Essas equações são combinadas para formar um sistema de equações linearmente dependentes (no caso de problemas estáticos). Visto que, após a aplicação das condições de contorno é possível obter um sistema de equações linearmente independentes para o problema estático, a resolução desse sistema, com o auxílio de adequadas equações de compatibilidade, condições de contorno e condições iniciais, fornece uma solução para todo o domínio de forma discreta, em seus nós.

Segundo Bathe (1996), basicamente podem ser utilizadas duas formulações distintas para obtenção das equações de equilíbrio no Método dos Elementos Finitos, a formulação diferencial, ou direta, e a formulação variacional. Enquanto a formulação diferencial baseia-se em princípios de equilíbrio de quantidades vetoriais como forças e momentos, a formulação variacional baseia-se em princípios de equilíbrio de quantidades escalares como energia e trabalho, o que torna essa segunda formulação relativamente fácil de entender e aplicar na obtenção do sistema de equações que governam o sistema.

Apresentada originalmente em Coda (2003), a formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos, utilizada no presente trabalho, é uma metodologia baseada em conceitos variacionais do princípio da energia potencial total estacionária. Desenvolvida inicialmente para analisar estruturas reticuladas planas de natureza não linear geométrica com carregamento estático e conservativo, essa formulação é baseada nas posições nodais da estrutura em relação a um sistema de coordenadas fixo no espaço para descrever a cinemática dos elementos finitos (descrição Lagrangiana Total). Assim, essa se difere da formulação convencional do Método dos Elementos Finitos que considera uma formulação diferencial e utiliza uma descrição baseada em deslocamentos, tomando como referência inicialmente sistemas de coordenadas locais e posteriormente um sistema de coordenadas global. O autor destaca como principais vantagens a simplicidade da formulação, em relação às formulações convencional e co-rotacional, e a capacidade de resolver de forma exata problemas elásticos

que apresentam grandes deformações. Essa simplicidade se deve as derivadas e expressões mais simples, oriundas do conceito de equilíbrio de energia, que são desenvolvidas durante a formulação, como será apresentado nos capítulos 3 e 4. O que resulta em menores quantidades de operações necessárias e acarreta em maior rapidez nos cálculos e no tempo de processamento dos códigos implementados. No entanto, a formulação apresenta desenvolvimentos específicos para cada modelo constitutivo implementado, em que as contribuições linear e não linear são desenvolvidas simultaneamente, exigindo o recomeço de todo o desenvolvimento para implementação de novos modelos e dificultando o reaproveitamento dos códigos implementados computacionalmente. Ao contrário, para as formulações convencional e co-rotacional são observadas, respectivamente, uma separação de contribuições linear e não linear e uma separação de movimento de corpo rígido e de deformação, sendo possível implementar novos modelos reaproveitando parte considerável do código referente ao contribuição linear ou ao movimento de corpo rígido.

No trabalho inicial, desenvolvido em Coda (2003), são apresentados exemplos simples com não linearidades geométricas e com soluções analíticas disponíveis na literatura. As comparações dos resultados numéricos e analíticos são utilizadas para comprovar a precisão da formulação, obtendo-se conformidade entre esses resultados. Em Coda e Greco (2004), a formulação posicional é consolidada e estendida para aplicação de controle de deslocamentos (prescrição de posição). Assim, duas estruturas que apresentam comportamento de “*snap-through*” são analisadas pela formulação e os resultados obtidos para as posições de equilíbrio são comparados com os resultados do software ADINA[®] com o objetivo de comprovar a aplicação. Nesses dois trabalhos citados a formulação desenvolvida é restrita a materiais com comportamento elástico e é considerada a hipótese de vigas de Bernoulli-Euler. Os resultados numéricos obtidos pela formulação apresentam satisfatória convergência e precisão em relação aos resultados obtidos pelo software ADINA, comprovando a capacidade de representação da acentuada não linearidade geométrica descrita pelo “*snap-through*” utilizando-se o método de controle por prescrição de posição.

Greco (2004) e Greco e Coda (2006) desenvolvem a formulação posicional não linear para o caso de problemas dinâmicos utilizando-se um algoritmo da família de integradores temporais de Newmark. Essa formulação é aplicada inicialmente à análise de mecanismos flexíveis. Greco (2004) estende ainda a formulação à análise de problemas de impacto bidirecional entre duas estruturas reticuladas ou entre uma estrutura reticulada e um anteparo rígido utilizando-se um algoritmo, desenvolvido em Greco *et al.* (2004), de identificação da ocorrência do

contato. As concordâncias satisfatórias obtidas entre os resultados numéricos apresentados, os resultados presentes na literatura e os resultados analíticos comprovam a capacidade da formulação desenvolvida na representação de problemas dinâmicos e de problemas de impacto bidirecional. Além disso, Greco (2004) redefine a formulação posicional não linear a fim de considerar efeitos elastoplásticos em estruturas reticuladas planas. Ampliando dessa forma o campo de aplicação da formulação para casos que abordam não linearidades geométricas, físicas e de contato/impacto. Em todos os casos são consideradas medidas de deformação de engenharia.

Apesar de recente, essa formulação posicional tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores, principalmente devido a sua capacidade de aplicação a análises não lineares. Na seção 3.1 do presente trabalho, serão apresentados alguns procedimentos e um equacionamento geral da formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos. Já nas seções 3.2, 3.3 e 3.4 será desenvolvida a particularização da formulação para o caso do comportamento de fluência em elementos finitos de pórtico plano.

Em Greco *et al.* (2006) a formulação posicional não linear é desenvolvida para a análise de treliças espaciais com não linearidades geométricas e físicas considerando-se uma medida de deformação de engenharia. Nesse trabalho é considerado um comportamento elastoplástico bilinear. Dois exemplos com soluções analíticas obtidas na literatura, um apresentando severo comportamento não linear geométrico e outro apresentando comportamento elastoplásticos, são utilizados para validar a formulação. Os resultados obtidos apresentam satisfatória concordância. Além disso, exemplos clássicos, como uma cúpula treliçada, são analisados e seus resultados comparados aos do software ANSYS[®], comprovando a precisão da formulação. Já em Greco e Ferreira (2009) a formulação é estendida de forma bem sucedida para a análise de treliças espaciais e *tensegrities* com não linearidades físicas e geométricas considerando-se uma medida de deformação logarítmica, o que pode ser verificado através da comparação dos resultados obtidos com os resultados presentes na literatura. Adicionalmente, Greco e Da Costa (2012) fazem uma comparação entre as formulações desenvolvidas em Greco *et al.* (2006) e Greco e Ferreira (2009) que utilizam, respectivamente, medida de deformação de engenharia e medida de deformação logarítmica. Os autores chegam à conclusão que a formulação posicional não linear geométrica para análise de treliças espaciais é invariante em relação à medida de deformação considerada.

Em Greco e Venturini (2006) a formulação desenvolvida para análise de treliças espaciais é utilizada para estudar a estabilidade e o comportamento pós-crítico de estruturas treliçadas, considerando-se não linearidades geométricas e comportamento elástico. Nesse trabalho, a identificação dos pontos críticos é realizada de uma forma indireta através da análise da singularidade da matriz Hessiana. Os autores concluem que, de uma forma simples e com menor esforço computacional, a formulação fornece informações sobre os limites de estabilidade de estruturas estáticas com satisfatória precisão quando comparado as soluções analíticas e numéricas presentes na literatura.

Em Marques (2006), a formulação posicional é estendida de forma bem sucedida ao estudo de problemas não lineares geométricos de sólidos bidimensionais realizando-se análises estáticas e dinâmicas, utilizando-se o algoritmo clássico de Newmark, e considerando-se também o problema de impacto entre sólidos, sendo que os resultados numéricos obtidos apresentam satisfatória concordância com os resultados analíticos e os resultados obtidos na literatura.

Em Coda e Paccola (2007), a formulação posicional não linear geométrica é desenvolvida de forma bem sucedida para análise estática de placas com espessura constante. Já em Coda e Paccola (2008) a formulação é estendida para considerar uma espessura linearmente variável, utilizando-se a relação constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff para cascas segundo a hipótese de Reissner com enriquecimento transversal. Em ambos os casos são considerados materiais elásticos com carregamentos estáticos e conservativos.

Em Maciel (2008) a formulação posicional não linear geométrica é desenvolvida para análise de problemas dinâmicos de pórticos planos com cinemática de Reissner e sólidos tridimensionais, utilizando-se o algoritmo clássico de Newmark. Além disso, é feito um estudo do problema de impacto entre sólidos tridimensionais. O autor conclui que a abordagem proposta deixa livre as rotações dos nós, dando-lhes tratamento e aproximação iguais às posições nodais, sem que sejam necessárias modificações nas funções de forma, como acontece na cinemática de Bernoulli-Euler, tornando a implementação mais simples e de filosofia idêntica às outras hipóteses cinemáticas tais como cascas e sólidos, bem como a facilidade de se aumentar o polinômio de aproximação das variáveis do elemento.

Em Carrazedo (2009) a formulação posicional é utilizada para estudar problemas de impacto bidimensional considerando-se transferência de calor e seus efeitos. Assim, são consideradas estruturas em situações não-isotérmicas, incluindo a geração de calor decorrente da taxa de

deformação da estrutura. São apresentados os conceitos necessários para a completa descrição do comportamento de sólidos termo-elastoplásticos, baseados nas leis da termodinâmica e nos princípios da elasticidade e da plasticidade. Estes conceitos são então utilizados para o desenvolvimento de um código computacional para analisar estruturas com comportamento termo-elástico e termo-plástico. Diversos exemplos são analisados e comparados com resultados analíticos e resultados obtidos na literatura, comprovando a precisão e validando a formulação desenvolvida. Com os resultados obtidos o autor questiona a validade da teoria atual da termo-elasticidade, visto que o termo de geração de calor elástico surge em decorrência da consideração de que a entropia pode decrescer.

Em Reis (2012) é desenvolvido, de forma bem sucedida, um código computacional adaptando a formulação posicional não linear geométrica para analisar estruturas reticuladas bidimensionais estáticas com ligações semirrígidas. Para tanto, as ligações são consideradas como rótulas elásticas e elastoplásticas. Os resultados numéricos obtidos apresentam satisfatória concordância com os resultados analíticos e os resultados obtidos na literatura.

Em Greco *et al.* (2013) a formulação posicional não linear é aplicada à análise dinâmica de estruturas *tensegrity*, utilizando o algoritmo implícito de integração α -HHT e o algoritmo explícito de diferenças centrais. Os autores concluem com os resultados obtidos que a abordagem proposta é adequada à análise dinâmica de estruturas *tensegrity*, obtendo-se respostas com características mais estáveis, com amortecimentos numéricos pequenos em módulo, em relação às respostas obtidas utilizando-se o algoritmo clássico de Newmark.

Em Greco *et al.* (2011) e Oliveira (2012) a formulação posicional aplicada a análise dinâmica é utilizada para estudar problemas de massas móveis em cabos. Pelos resultados obtidos os autores concluem que a formulação proposta é adequada para descrever o comportamento de qualquer ponto localizado em um cabo devido à influência de uma massa móvel com velocidade constante. Além disso, é verificado que o comportamento não linear geométrico para velocidades mais baixas é preponderante em relação aos efeitos inerciais, sendo o comportamento do cabo mais estável para problemas com velocidades mais altas de deslocamento da massa móvel. Oliveira (2012) verifica ainda as influências dos valores da massa e sua velocidade, assim como a influência de duas massas móveis e da velocidade variável da massa móvel, no comportamento do cabo. O autor conclui que há uma tendência de enrijecimento do cabo com o aumento da velocidade da massa móvel. Além disso, o autor conclui que o valor da massa é significativo no comportamento dinâmico do cabo ou da viga

principalmente para baixas velocidades. Adicionalmente, Oliveira (2012) aplica a formulação posicional à análise de uma viga com massa móvel, verificando a influência da velocidade, das condições de apoio e do comportamento elastoplástico. Ao contrário do que se observa para o caso de cabos, o autor conclui que, para o caso de vigas, é observado um aumento nos deslocamentos devido ao aumento da velocidade da massa móvel. Além disso, é observado que a análise elastoplástica realizada permite obter os resultados esperados pela literatura, em que o comportamento elastoplástico isotrópico é descrito mesmo utilizando-se uma medida de deformação de engenharia, usualmente considerada para problemas lineares. Já em Oliveira e Greco (2014) a formulação posicional é desenvolvida e aplicada à análise dinâmica de vigas laminadas elastoplásticas com massas móveis. Essa configuração laminada permite analisar casos práticos de vigas compostas por dois ou mais materiais diferentes, vigas de material composto com camadas de fibras em direções diferentes e, também, vigas de seções homogêneas de geometria complexa, como uma seção de trilho de linha férrea.

Em Rabelo *et al.* (2014) a formulação posicional não linear desenvolvida para análise de treliças espaciais com não linearidades geométricas e físicas é particularizada para descrição do comportamento viscoelástico de fluência, sendo a contribuição da fluência introduzida a partir da relação reológica obtida do modelo de Kelvin-Voigt. O trabalho inclui ainda a análise numérica da estrutura de uma mísula treliçada de torre de linha de transmissão constituída de Plástico Reforçado com Fibra de Vidro (PRFV). Os autores concluem que a formulação é capaz de representar o comportamento esperado para o modelo reológico de Kelvin-Voigt como um fenômeno de fluência adicional ao comportamento elástico instantâneo em estruturas de treliça sujeitas a esforço axial.

Em Becho *et al.* (2015) a formulação posicional não linear desenvolvida para análise de estruturas reticuladas planas discretizadas em elementos de pórtico é particularizada para descrição do comportamento viscoelástico de fluência em vigas e estruturas de pórtico plano. Nesse caso, a contribuição da fluência é introduzida a partir da relação reológica obtida do modelo padrão de sólido (modelo de Zener). No entanto, diferentemente do presente trabalho, essa contribuição é considerada apenas em relação às deformações da linha centroidal dos elementos estruturais. Enquanto a formulação desenvolvida na presente dissertação considera os efeitos da viscoelasticidade em uma malha de integração numérica bidimensional nos elementos finitos. Os autores concluem que, diferentemente de Rabelo *et al.* (2014), a formulação é capaz de representar o comportamento esperado para o modelo reológico padrão de sólido como um fenômeno de fluência que inclui tanto o comportamento elástico

instantâneo quanto o comportamento elástico amortecido dependente do tempo em vigas e estruturas de pórtico plano sujeitas a esforço axiais e de flexão.

3

DESENVOLVIMENTO DA FORMULAÇÃO

A formulação numérica desenvolvida tem como base a formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos (Coda e Greco, 2004), que foi originalmente desenvolvida para analisar estruturas reticuladas planas com não linearidades físicas e geométricas. No presente trabalho, essa formulação é particularizada para descrição do comportamento mecânico viscoelástico não linear de fluência em elementos finitos de pórtico plano considerando-se a teoria clássica de vigas de Bernoulli-Euler e adotando-se uma medida de deformação de engenharia. Para tanto, a contribuição da fluência é introduzida a partir da adoção do modelo reológico padrão de sólido (modelo de Zener) na consideração da relação entre tensões, deformações e tempo. O desenvolvimento dessa formulação pode ser apresentado em quatro etapas principais, as quais englobam o equacionamento geral da formulação posicional e a particularização deste equacionamento ao comportamento mecânico de interesse. Neste capítulo essas etapas são descritas de forma detalhada destacando-se os princípios e considerações adotadas.

3.1 Equacionamento geral da formulação posicional não linear

De uma forma geral, essa formulação pode ser demonstrada partindo-se da Equação (3-1) que representa o funcional da energia potencial total estacionária (Π) de uma estrutura solicitada por forças externas generalizadas.

$$\Pi = U - P \quad (3-1)$$

Na Equação (3-1), U é a energia de deformação total expressa pela Equação (3-2), definida pela integral da energia de deformação específica u em um volume de referência inicial V . Já P é a energia potencial das forças externas generalizadas expressa pela Equação (3-3), na qual os graus de liberdade, considerando-se um elemento de pórtico plano com dois nós e três graus de liberdade por nó, podem ser representados por $X_i = (X_1, Y_1, \theta_1, X_2, Y_2, \theta_2)$ para

$i = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ e os respectivos carregamentos nodais para os dois graus de liberdade representados por $F_i = (F_{X1}, F_{Y1}, M_{\theta1}, F_{X2}, F_{Y2}, M_{\theta2})$. Sendo que, X_i e Y_i são as coordenadas no plano cartesiano XY do nó i e θ_i é o ângulo de giro da seção transversal associada ao nó i . Já F_{X_i} e F_{Y_i} são as forças nodais nas direções X e Y , respectivamente, e M_{θ_i} é o momento fletor associados ao nó i .

$$U = \int_V u dV \quad (3-2)$$

$$P = \sum F_i X_i \quad (3-3)$$

De forma esquemática pode-se representar esse equilíbrio de energia potencial total estacionária conforme Figura 3-1, em que são representados os termos dessa energia potencial para duas posições distintas de uma viga em balanço, sendo os parâmetros com sobrescrito “0” referentes à configuração indeformada.

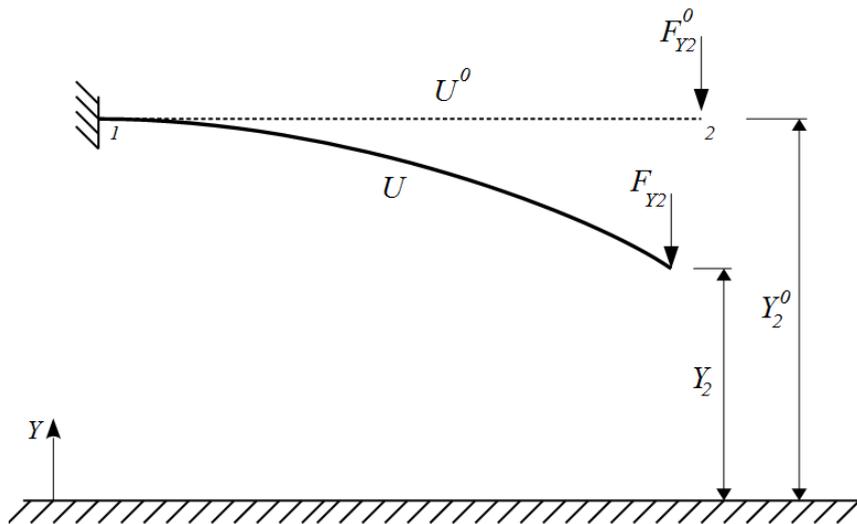


Figura 3-1: Energia potencial total para um corpo em duas posições distintas (Greco, 2004)

Sabendo-se que a energia de deformação específica pode ser definida pela área compreendida no gráfico tensão-deformação e descrita como:

$$u = \int_{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \quad (3-4)$$

na qual σ representa o campo das tensões de acordo com a relação constitutiva ou reológica do material em função do campo das deformações ε .

Utilizando-se as Equações (3-2) e (3-4) a energia de deformação total pode ser redefinida como na Equação (3-5).

$$U = \int_V \int_{\varepsilon} \sigma d\varepsilon dV \quad (3-5)$$

Aplicando-se o princípio da mínima energia potencial total estacionária na Equação (3-1) obtém-se a Equação (3-6). Esse princípio determina que dentre todas as configurações possíveis para um sistema constituído por um corpo deformável com forças atuantes, aquela correspondente ao valor mínimo (ou máximo) da energia potencial total (Π) é a configuração equilibrada (Crisfield, 1991; Biot, 1965). Assim, o equilíbrio da estrutura ocorrerá quando a derivada dessa energia potencial total, em relação aos graus de liberdade, for nula. Ou seja, quando a taxa de variação da energia potencial total for nula, como expresso pela Equação (3-6). Sendo que, a garantia da aplicação desse princípio fornecer o valor mínimo da energia potencial total pode ser baseada na avaliação da derivada segunda do funcional ou a partir da própria avaliação da natureza do equilíbrio estável dos problemas estruturais tratados, com base em suas características geométricas e nas condições de contorno (Utku *et al.*, 1991; Felton e Nelson, 1997).

$$\frac{d\Pi}{dX_i} = \frac{dU}{dX_i} - \frac{dP}{dX_i} = 0 \quad (3-6)$$

Essa equação representa um sistema de seis equações para cada elemento finito (três graus de liberdade para cada um dos dois nós que definem um elemento de pórtico).

Sabendo-se que, a relação entre a energia de deformação total, U , e os parâmetros nodais, X_i , é não linear, a Equação (3-6) representa um sistema de equações não linear. Nesse caso, este precisa ser resolvido utilizando-se um método de resolução de sistemas de equações adequado. Além disso, é necessário adotar na Equação (3-5) uma relação constitutiva ou reológica que represente o comportamento do material de forma apropriada. Dessa forma, é possível determinar a posição de equilíbrio de uma estrutura submetida a um estado de carregamento específico e, em seguida, definir as deformações e as tensões as quais os elementos finitos estarão submetidos.

3.2 Definição da relação reológica

Um dos pontos fundamentais em uma análise fisicamente não linear é a adoção de uma relação constitutiva ou reológica que represente de forma apropriada o comportamento do material. Dessa forma, assim como em Mesquita e Coda (2003), Panagiotopoulos *et al.* (2014) e Carniel *et al.* (2015), a relação que representa o comportamento de um material viscoelástico é deduzida a partir de um modelo reológico. A escolha do modelo reológico adequado se baseou no comportamento esperado para o fenômeno de fluência em materiais sólidos. Assim, para um material sólido viscoelástico submetido a um carregamento estático, espera-se que ele apresente uma deformação elástica instantânea e uma deformação elástica amortecida adicional (deformação viscoelástica) ao longo do tempo, apresentando uma deformação total superior à obtida pela teoria da elasticidade, como esboçado na Figura 3-2.

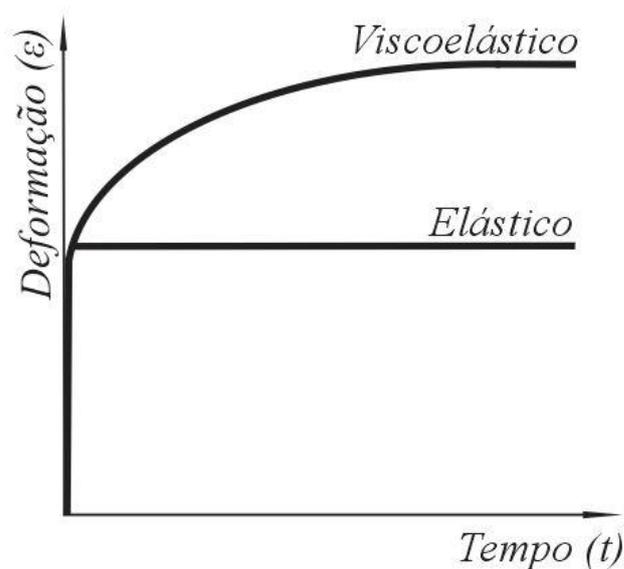


Figura 3-2: Curva de deformação ao longo do tempo

Pensando nisso, foi adotado um modelo reológico baseado na particularização do modelo uniaxial de Maxwell generalizado. Esse modelo, segundo Argyris *et al.* (1991), pode ser obtido pela associação em paralelo entre um modelo elástico e vários ramos de Maxwell, Figura 3-3. O modelo utilizado foi restrito a um ramo de Maxwell (um elemento elástico em série com um elemento viscoso) em paralelo com um elemento elástico (modelo de Hooke), resultando no modelo apresentado na Figura 3-4 (Findley *et al.*, 1989). Esse modelo também é conhecido como modelo padrão de sólido ou modelo de Zener.

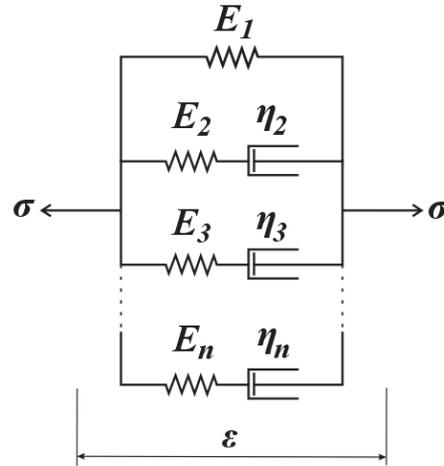


Figura 3-3: Modelo de Maxwell generalizado

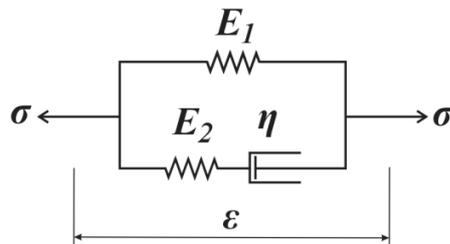


Figura 3-4: Modelo padrão de sólido ou modelo de Zener

A partir da Figura 3-4 pode-se definir a tensão total e a deformação total do modelo respectivamente como:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (3-7)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_2^e + \varepsilon_2^v \quad (3-8)$$

onde σ e ε representam, respectivamente, os campos de tensões e deformações normais. Nos quais os subscritos “1” e “2” se referem aos ramos elástico e de Maxwell, respectivamente. Já os sobrescritos “e” e “v” se referem, respectivamente, aos elementos elástico e viscoso.

Os campos de tensões e deformações requeridos nas Equações (3-7) e (3-8) podem ser definidos para os respectivos elementos do modelo como:

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon \quad (3-9)$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^e = \sigma_2^v \quad (3-10)$$

$$\varepsilon_2^e = \frac{\sigma_2^e}{E_2} \quad (3-11)$$

$$\dot{\varepsilon}_2^v = \frac{\sigma_2^v}{\eta} \quad (3-12)$$

onde $\dot{\varepsilon}$ representa a taxa de variação das deformações no tempo. Já os termos, E_1 , E_2 e η são os parâmetros dos elementos descritos na Figura 3-4 e representam as propriedades do material. O comportamento elástico instantâneo depende dos parâmetros E_1 e E_2 , sendo que a soma desses parâmetros representa o módulo de elasticidade longitudinal do material. Além disso, o parâmetro E_1 determina a deformação final (soma da deformação elástica instantânea e da deformação elástica amortecida), após um intervalo de tempo suficientemente grande, e representa o módulo de elasticidade longitudinal do material no comportamento elástico amortecido. Já o parâmetro η representa o módulo de viscosidade do material, o qual determina a taxa de deformação com o tempo e proporciona um comportamento amortecido ao material.

Derivando-se a Equação (3-8) em relação ao tempo e utilizando-se as Equações (3-11) e (3-12), considerando-se as propriedades do material invariantes com o tempo, resulta-se na Equação (3-13), que representa a taxa de deformação total do modelo.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_2}{E_2} + \frac{\sigma_2}{\eta} \quad (3-13)$$

Substituindo-se a Equação (3-9) na Equação (3-7), rearranjando-se e substituindo-se na Equação (3-13), tem-se:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma} - E_1 \dot{\varepsilon}}{E_2} + \frac{\sigma - E_1 \varepsilon}{\eta} \quad (3-14)$$

Rearranjando-se os termos e isolando-se a tensão total (σ) da Equação (3-14), chega-se à Equação (3-15), na qual $\dot{\sigma}$ representa a taxa de variação da tensão normal ao longo do tempo.

$$\sigma = E_1 \varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)\dot{\varepsilon}}{E_2} - \frac{\eta\dot{\sigma}}{E_2} \quad (3-15)$$

Considerando-se o fenômeno da fluência, em que é obtida a deformação ao longo do tempo mantendo-se a tensão constante, a Equação (3-15) pode ser simplificada negligenciando-se o termo da taxa de variação da tensão com o tempo, obtendo-se:

$$\sigma = E_1 \varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)\dot{\varepsilon}}{E_2} \quad (3-16)$$

A Equação (3-16) representa a relação reológica uniaxial do material viscoelástico para o caso do fenômeno de fluência, a qual pode ser utilizada na Equação (3-5) para obtenção da energia de deformação total. Para tanto, sabendo-se as propriedades do material, é necessário definir uma medida de deformação adequada em relação ao elemento finito considerado.

3.3 Particularização da medida de deformação

Partindo-se da formulação geral descrita na seção 3.1 e da relação reológica obtida na seção 3.2, é possível descrever a formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos, aplicada a descrição do comportamento de fluência em elementos finitos de pórtico plano, particularizando-se a medida de deformação de forma adequada ao elemento considerado.

Para se particularizar a medida de deformação é necessário entender a geometria do elemento a ser estudado e a relação desta com a medida de deformação adotada. Assim, nesta formulação cada elemento finito tem sua geometria mapeada pela parametrização ao longo do comprimento em função da variável adimensional ξ (variando de 0 a 1) conforme ilustrado na Figura 3-5.

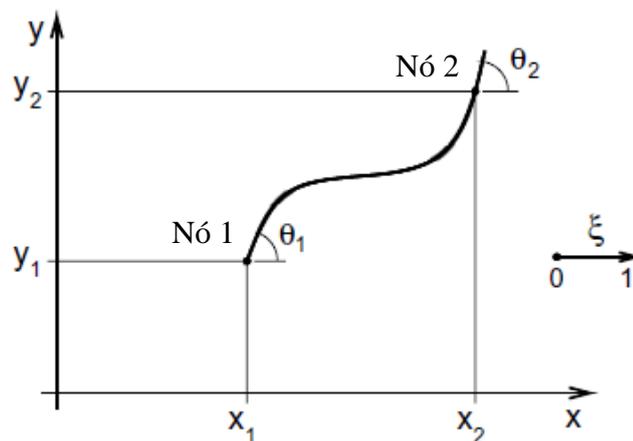


Figura 3-5: Parametrização da geometria (Greco, 2004)

Na Figura 3-5, x_1 , y_1 , θ_1 , x_2 , y_2 e θ_2 são os parâmetros nodais do elemento finito e representam os graus de liberdade de cada nó. Dessa forma é possível definir a posição de cada ponto do elemento e, conseqüentemente, a geometria em função dos parâmetros nodais utilizando-se as Equações (3-17), (3-18), (3-19) e (3-20). Visto que, para o caso plano, é

possível escrever uma relação linear entre ξ e o eixo X , e uma relação cúbica entre ξ e o eixo Y .

$$l_x = (X_2 - X_1) \quad (3-17)$$

$$l_y = (Y_2 - Y_1) \quad (3-18)$$

$$x = X_1 + l_x \xi \quad (3-19)$$

$$y = c \xi^3 + d \xi^2 + e \xi + f \quad (3-20)$$

Nessa última é necessário definir os parâmetros c , d , e e f em função dos parâmetros nodais. Assim, considerando-se as condições de contorno na Equação (3-20), tem-se:

$$y_{(\xi=0)} = f = Y_1 \quad (3-21)$$

$$\left. \frac{dy}{d\xi} \right|_{\xi=0} = e = \left. \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \tan(\theta_1) l_x \quad (3-22)$$

$$\left. \frac{dy}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 3c + 2d + e = \left. \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\xi} \right|_{\xi=1} = \tan(\theta_2) l_x \quad (3-23)$$

$$y_{(\xi=1)} = c + d + \tan(\theta_1) l_x + Y_1 = Y_2 \quad (3-24)$$

A partir das Equações (3-23) e (3-24) tem-se:

$$c = (\tan \theta_2 + \tan \theta_1) l_x - 2l_y \quad (3-25)$$

$$d = 3l_y - (\tan \theta_2 + 2 \tan \theta_1) l_x \quad (3-26)$$

A medida de deformação de engenharia como definida em Ogden (1984) pode ser representada por:

$$\varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{\frac{ds}{d\xi} - \frac{ds_0}{d\xi}}{\frac{ds_0}{d\xi}} \quad (3-27)$$

em que ds representa o comprimento de uma fibra qualquer do corpo (paralela ao eixo central) em uma configuração deformada e ds_0 representa o seu comprimento na configuração não deformada.

É importante observar que, segundo Crisfield (1991), a utilização dessa medida de deformação não significa necessariamente trabalhar em regime de pequenas deformações.

Pode-se considerar grandes deformações, desde que uma medida de deformação objetiva possa ser obtida para o modelo de geometria considerado para o elemento. A demonstração dessa objetividade para o modelo considerado pode ser conferida em Coda e Greco (2004).

Para uma fibra na Linha Centroidal (LC) que passa pelo centro geométrico do elemento, podem-se definir as seguintes relações:

$$\left. \frac{ds_0}{d\xi} \right|_{LC} = \sqrt{\left(\frac{dx_0}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{d\xi}\right)^2} = \sqrt{(l_{x_0})^2 + (l_{y_0})^2} = l_0 \quad (3-28)$$

$$\left. \frac{ds}{d\xi} \right|_{LC} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} = \sqrt{(l_x)^2 + (3c\xi^2 + 2d\xi + e)^2} \quad (3-29)$$

Assim, a deformação para a linha centroidal (ε_{LC}) pode ser definida utilizando-se as Equações (3-27), (3-28) e (3-29) como:

$$\varepsilon_{LC} = \frac{\sqrt{(l_x)^2 + (3c\xi^2 + 2d\xi + e)^2} - l_0}{l_0} = \frac{1}{l_0} \sqrt{(l_x)^2 + (3c\xi^2 + 2d\xi + e)^2} - 1 \quad (3-30)$$

De acordo com a cinemática de Bernoulli-Euler para vigas pode-se descrever a deformação de uma fibra qualquer do elemento finito em função da deformação e da curvatura da fibra que passa pela linha centroidal, como expresso na Equação (3-31). Para isso, é necessário adotar uma coordenada z , ortogonal a linha centroidal, que define a distância de uma fibra qualquer em relação a essa linha.

$$\varepsilon = \varepsilon_{LC} - \kappa z \quad (3-31)$$

Na Equação (3-31), κ representa a curvatura do elemento, definida segundo Leithold (1994), em função da variável adimensional ξ . Essa curvatura pode ser representada como:

$$\kappa = \frac{\frac{dx}{d\xi} \frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{d^2x}{d\xi^2} \frac{dy}{d\xi}}{\left(\sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}\right)^3} = \frac{l_x(6c\xi + 2d)}{\left(\sqrt{(l_x)^2 + (3c\xi^2 + 2d\xi + e)^2}\right)^3} \quad (3-32)$$

A partir das Equações (3-30), (3-31) e (3-32), pode-se definir a deformação normal de uma fibra qualquer, em função de ξ , z e dos parâmetros nodais $X_1, Y_1, \theta_1, X_2, Y_2$ e θ_2 que definem os parâmetros c, d, e e f .

Na sequência, utilizando-se as Equações (3-5) e (3-16), a energia de deformação total pode ser expressa como:

$$U = \int_V \int_{\varepsilon} \left(E_1 \varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} \dot{\varepsilon} \right) d\varepsilon dV \quad (3-33)$$

Considerando-se a formulação utilizada, baseada em posições nodais, é mais simples obter a taxa de variação das posições nodais com o tempo do que a taxa de variação das deformações com o tempo. Dessa forma, definindo-se a taxa de deformação ($\dot{\varepsilon}$) pela regra da cadeia, utilizando-se a derivada em relação aos graus de liberdade, tem-se:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dX_i} \frac{dX_i}{dt} = \varepsilon_{,i} \dot{X}_i \quad (3-34)$$

onde \dot{X}_i representa a velocidade de variação de posição na direção de cada um dos seis graus de liberdade ($X_1, Y_1, \theta_1, X_2, Y_2$ e θ_2) e $\varepsilon_{,i}$ representa a derivada da Equação (3-31) em relação aos graus de liberdade.

Procedendo-se com uma troca de variáveis, pode-se representar a integral do segundo termo da Equação (3-33) em relação aos graus de liberdade. Para tanto, é realizada a diferenciação da Equação (3-31) para obtenção da seguinte relação entre $d\varepsilon$ e dX_i :

$$d\varepsilon = \varepsilon_{,i} dX_i = (\varepsilon_{LC,i} - \kappa_{,i} z) dX_i \quad (3-35)$$

Substituindo-se as Equações (3-31), (3-34) e (3-35) na Equação (3-33) e avaliando-se a integral do primeiro termo em relação à deformação (ε), a energia de deformação total torna-se:

$$U = \int_V \left[\frac{E_1}{2} (\varepsilon_{LC}^2 - 2\varepsilon_{LC} \kappa z + \kappa^2 z^2) + \int_{X_i} \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} (\varepsilon_{LC,i}^2 - 2\varepsilon_{LC,i} \kappa_{,i} z + \kappa_{,i}^2 z^2) \dot{X}_i dX_i \right] dV \quad (3-36)$$

Utilizando-se a parametrização do elemento finito nas variáveis adimensionais ζ e λ , Figura 3-6, a integral em relação ao volume na Equação (3-36) pode ser avaliada por meio de uma malha de integração bidimensional em relação à altura e ao comprimento parametrizados como representado na Equação (3-37), considerando-se a área da seção transversal do elemento constante ao longo do comprimento.

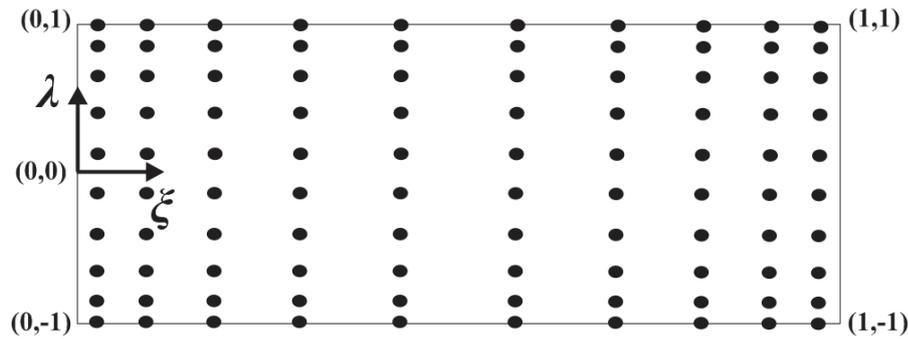


Figura 3-6: Parametrização do elemento finito com o auxílio de variáveis adimensionais na altura (λ) e no comprimento (ξ)

$$U = l_0 \int_0^1 h \int_{-1}^1 b(\lambda) \left[\frac{E_1}{2} (\varepsilon_{LC}^2 - 2\varepsilon_{LC} \kappa z(\lambda) + \kappa^2 z(\lambda)^2) + \int_{X_i} \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} (\varepsilon_{LC,i}^2 - 2\varepsilon_{LC,i} \kappa_{,i} z(\lambda) + \kappa_{,i}^2 z(\lambda)^2) \dot{X}_i dX_i \right] d\lambda d\xi \quad (3-37)$$

A parametrização em relação à altura é introduzida com o objetivo de possibilitar a análise do comportamento de fluência à flexão a partir da calibração do modelo reológico com base em ensaios de fluência à tração e de relações reológicas uniaxiais. Dessa forma, um elemento estrutural submetido à flexão pode ser idealizado como uma sobreposição de barras (um feixe de barras), sendo o número de barras igual ao número de pontos de Gauss-Lobatto distribuídos na altura. Cada uma dessas barras idealizadas, com centroide localizado em um ponto de Gauss-Lobatto em λ , fica submetida exclusivamente à tração ou à compressão, dependendo da localização em relação à linha centroidal. Em que l_0 e h representam, respectivamente, o comprimento da barra e a altura da seção transversal e $b(\lambda)$ representa a base de cada barra definida pela localização do respectivo ponto de Gauss-Lobatto e pela geometria da seção transversal do elemento estrutural. Adotando-se essa abordagem, o comportamento de fluência à flexão do elemento estrutural completo pode ser obtido pela associação da contribuição do comportamento de fluência sob solicitação axial de cada barra idealizada.

A Equação (3-37) define a energia de deformação total, em função das propriedades físicas do material, das propriedades geométricas do elemento e dos parâmetros nodais, de forma completa exceto pela velocidade de variação de posição na direção de cada grau de liberdade \dot{X}_i , a qual será definida na seção seguinte em função dos parâmetros nodais e das variáveis adimensionais ξ e λ .

Utilizando-se as Equações (3-3) e (3-37) na Equação (3-6), que representa a aplicação do princípio da mínima energia potencial total estacionária, é possível obter a resolução do sistema que fornece a posição de equilíbrio de uma estrutura plana, discretizada em elementos de pórtico e submetida a um estado de carregamento estático específico, considerando-se a contribuição do comportamento viscoelástico de fluência do material.

3.4 Representação da velocidade de variação de posição na direção dos graus de liberdade

Com o objetivo de definir a Equação (3-37) de forma completa em função das propriedades do material, dos parâmetros nodais e das variáveis adimensionais ζ e λ , é necessário descrever a velocidade de variação de posição na direção de cada grau de liberdade em função desses mesmos parâmetros.

Considerando-se a cinemática de Bernoulli-Euler adotada no presente trabalho, a localização $(x(\xi, \lambda), y(\xi, \lambda))$ de um ponto qualquer no meio contínuo parametrizado, apresentado na Figura 3-6, pode ser definida com base na posição do ponto pertencente a mesma seção transversal (ζ) e localizado na linha centroidal ($\lambda=0$) a partir das Equações (3-38) e (3-39), assim como apresentado em Greco (2004).

$$x(\xi, \lambda) = x_{LC}(\xi) - z(\lambda) \frac{\frac{dy_{LC}}{d\xi}}{\sqrt{\left(\frac{dy_{LC}}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_{LC}}{d\xi}\right)^2}} \quad (3-38)$$

$$y(\xi, \lambda) = y_{LC}(\xi) + z(\lambda) \frac{\frac{dx_{LC}}{d\xi}}{\sqrt{\left(\frac{dy_{LC}}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_{LC}}{d\xi}\right)^2}} \quad (3-39)$$

Nas Equações (3-38) e (3-39), x_{LC} e y_{LC} representam as posições cartesianas do ponto pertencente a linha centroidal em determinada seção transversal, ζ , definidas respectivamente pelas Equações (3-19) e (3-20).

Já para o caso do giro $\theta(\xi, \lambda)$ em uma seção transversal qualquer, definida por ζ , considerando-se a geometria parametrizada do elemento, Figura 3-5, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\xi} = 3c\xi^2 + 2d\xi + e = \tan(\theta) l_x \quad (3-40)$$

$$\theta(\xi, \lambda) = \arctan\left(\frac{3c\xi^2 + 2d\xi + e}{l_x}\right) \quad (3-41)$$

em que c , d e e podem ser definidos pelas Equações (3-22), (3-25) e (3-26). É possível perceber, a partir da Equação (3-41), que o giro é independente da localização do ponto ao longo da altura da seção transversal. O que está de acordo com a hipótese da cinemática de Bernoulli-Euler em que, após as deformações, as seções transversais permanecem planas e ortogonais a linha centroidal do elemento estrutural.

Utilizando-se as Equações (3-38), (3-39) e (3-41) é possível obter as diferenças de posições $x(\xi, \lambda)$, $y(\xi, \lambda)$ e $\theta(\xi, \lambda)$ entre um ponto de Gauss-Legendre (ξ_m) e o ponto de Gauss-Legendre anterior (ξ_{m-1}), em determinada altura λ da seção transversal, definindo-se trechos do elemento finito com dimensões e orientações específicas. Finalmente, a velocidade de variação de posição (\dot{X}_i) em cada ponto de Gauss na direção de cada grau de liberdade, eliminando-se os movimentos de corpo rígido do elemento, pode ser obtida pela variação dessas diferenças de posições em relação às configurações inicial (indeformada) e atual (deformada), Figura 3-7.

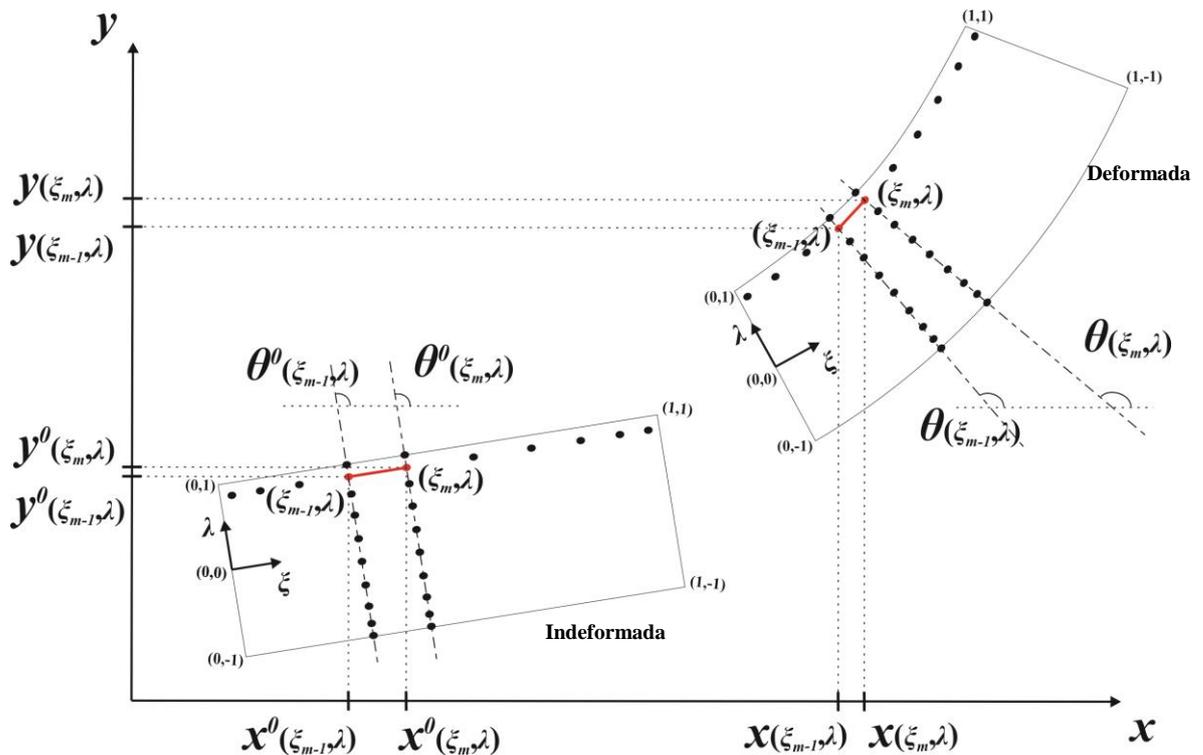


Figura 3-7: Localizações dos pontos (ξ_m, λ) e (ξ_{m-1}, λ) nas configurações indeformada e deformada

Ou seja, as velocidades de variação de posição em cada ponto de Gauss são definidas pelas variações na dimensão e orientação do trecho compreendido entre este ponto de Gauss e o ponto de Gauss anterior em um intervalo de tempo determinado. Na Figura 3-7 é possível verificar essas variações de dimensão e orientação. Assim, para determinado ponto de Gauss-Legendre no comprimento, ξ_m , e determinado ponto de Gauss-Lobatto na altura, λ , a velocidade de variação de posição na direção do grau de liberdade X_l pode ser calculada com:

$$\dot{X}_1(\xi_m, \lambda) = \frac{(x(\xi_m, \lambda) - x(\xi_{m-1}, \lambda)) - (x^0(\xi_m, \lambda) - x^0(\xi_{m-1}, \lambda))}{\Delta t} \quad (3-42)$$

em que Δt representa o intervalo de tempo necessário para o elemento passar da posição inicial (indicado pelo parâmetro com sobrescrito “0”) para a posição atual (indicado pelo parâmetro sem sobrescrito). De forma análoga à Equação (3-42), é possível definir as velocidades de variação das posições em cada ponto do elemento parametrizado na direção de cada grau de liberdade, \dot{X}_i , para serem utilizadas na Equação (3-37).

4

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Como descrito na seção 3.1, para obtenção da posição de equilíbrio de uma estrutura reticulada plana, utilizando-se a formulação apresentada, é necessário resolver numericamente o sistema de equações representado pela Equação (3-6). Assim, algumas estratégias e passos algébricos serão descritos neste capítulo com o intuito de possibilitar a implementação computacional da formulação desenvolvida.

Reescrevendo-se a Equação (3-2):

$$U = \int_V u dV \quad (3-2)$$

Utilizando-se as variáveis adimensionais ζ e λ , a integral em relação ao volume da Equação (3-2) pode ser avaliada em relação à altura e ao comprimento parametrizados como:

$$U = l_0 \int_0^1 h \int_{-1}^1 b(\lambda) u d\lambda d\xi \quad (4-1)$$

Comparando-se as Equações (4-1) e (3-37), tem-se:

$$u = \left[\frac{E_1}{2} (\varepsilon_{LC}^2 - 2\varepsilon_{LC}\kappa z(\lambda) + \kappa^2 z(\lambda)^2) + \int_{X_i} \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} (\varepsilon_{LC,i}^2 - 2\varepsilon_{LC,i} \kappa_i z(\lambda) + \kappa_i^2 z(\lambda)^2) \dot{X}_i dX_i \right] \quad (4-2)$$

A derivada da energia de deformação total em relação aos graus de liberdade pode ser descrita então por:

$$\frac{dU}{dX_i} = l_0 \int_0^1 h \int_{-1}^1 b(\lambda) u_{,i} d\lambda d\xi \quad (4-3)$$

Já a derivada da energia potencial das forças externas (P) em relação aos graus de liberdade, para o caso de forças conservativas, pode ser descrita por:

$$\frac{dP}{dX_i} = \frac{d}{dX_i} \sum F_i X_i = F_i \quad (4-4)$$

Substituindo-se as Equações (4-3) e (4-4) na Equação (3-6), a aplicação do princípio da mínima energia potencial total estacionária pode ser reescrita como:

$$\frac{d\Pi}{dX_i} = l_0 \int_0^1 h \int_{-1}^1 b(\lambda) u_{,i} d\lambda d\xi - F_i = 0 \quad (4-5)$$

O sistema de equações representado pela Equação (4-5) pode ser ainda expresso em notação indicial como a Equação (4-6), na qual, para cada valor do índice i , o índice j varia de um a seis.

$$\frac{d\Pi}{dX_i} = g_i(X_j, F_i) = f_i(X_j) - F_i \quad (4-6)$$

Sendo a função g não linear em relação aos parâmetros nodais, a solução do sistema expresso pela Equação (4-6) pode ser obtida através do método de Newton-Raphson (Meclachlan e Krishnan, 2007) desenvolvendo-se o processo iterativo descrito pela Equação (4-7).

$$g(X) \cong g(X^0) + \nabla g(X^0) \Delta X \cong 0 \quad (4-7)$$

Na Equação (4-7), X é o vetor das posições atuais, X^0 é o vetor das posições iniciais e ΔX representa o vetor de correção das posições nodais. Já o termo $\nabla g(X^0)$ representa a matriz Hessiana e $g(X^0)$ representa o vetor dos resíduos, que podem ser representados, respectivamente, como:

$$\nabla g(X^0) = l_0 \int_0^1 h \int_{-1}^1 b(\lambda) u_{,ik} d\lambda d\xi \Big|_{X^0} \quad (4-8)$$

$$g(X^0) = l_0 \int_0^1 h \int_{-1}^1 b(\lambda) u_{,i} d\lambda d\xi \Big|_{X^0} - F_i \quad (4-9)$$

Finalmente, a solução da Equação (4-5) pode ser obtida pelo método de Newton-Raphson, utilizando-se as Equações (4-7), (4-8) e (4-9), conforme os procedimentos descritos a seguir:

- 1) Definida a posição inicial X^0 da estrutura, determinar $g(X^0)$ pela Equação (4-9);

- 2) Determinar a matriz Hessiana $\nabla g(X^0)$ pela Equação (4-8);
- 3) Determinar a variação posicional ΔX a partir da resolução do sistema expresso pela Equação (4-7) (no caso do presente trabalho foi utilizada a eliminação Gaussiana);
- 4) Atualizar o vetor de posições X^0 , sendo que: $X^0 = X^0 + \Delta X$;
- 5) Retornar à etapa 1 até que a norma euclidiana do vetor ΔX seja suficientemente pequena (menor ou igual à tolerância de cálculo adotada).

Para poder executar esse processo, é necessária a determinação algébrica dos termos u_i e u_{ik} , para posterior avaliação das integrais numéricas presentes nas Equações (4-8) e (4-9). Assim, definindo-se as variáveis auxiliares B e G como:

$$B = (l_x)^2 + (3c\xi^2 + 2d\xi + e)^2 \quad (4-10)$$

$$G = (l_x)^2(6c\xi + 2d)^2 \quad (4-11)$$

Utilizando-se as Equações (4-10) e (4-11), as Equações (3-30) e (3-32), que definem a deformação da linha centroidal e a curvatura, respectivamente, podem ser reescritas como:

$$\varepsilon_{LC} = \frac{1}{l_0} \sqrt{B(\xi)} - 1 \quad (4-12)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{G(\xi)}}{B(\xi)^{3/2}} \quad (4-13)$$

Substituindo-se as Equações (4-12) e (4-13) na Equação (4-2) e derivando-se em relação aos graus de liberdade, tem-se:

$$\begin{aligned} u_{,i} = & \frac{E_1}{2} \left[\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{B(\xi)}} \right) \frac{B(\xi)_{,i}}{l_0^2} - \left(\frac{B(\xi)G(\xi)_{,i} - 2B(\xi)_{,i}G(\xi)}{l_0 B(\xi)^2 \sqrt{G(\xi)}} - \frac{B(\xi)G(\xi)_{,i} - 3B(\xi)_{,i}G(\xi)}{B(\xi)^{5/2} \sqrt{G(\xi)}} \right) z(\lambda) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{G(\xi)_{,i} B(\xi) - 3G(\xi)B(\xi)_{,i}}{B(\xi)^4} \right) z(\lambda)^2 \right] + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} \left[\left(\left(\frac{B(\xi)_{,i}}{2l_0 \sqrt{B(\xi)}} \right)^2 - \left(\frac{B(\xi)_{,i}}{l_0 \sqrt{B(\xi)}} \right) \right) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left(\frac{B(\xi)G(\xi)_{,i} - 3B(\xi)_{,i}G(\xi)}{2B(\xi)^{5/2} \sqrt{G(\xi)}} \right) z(\lambda) + \left(\frac{B(\xi)G(\xi)_{,i} - 3B(\xi)_{,i}G(\xi)}{2B(\xi)^{5/2} \sqrt{G(\xi)}} \right)^2 z(\lambda)^2 \right] \dot{X}_i \end{aligned} \quad (4-14)$$

Derivando-se a Equação (4-2) novamente em relação aos graus de liberdade é possível obter a expressão para $u_{,ik}$.

Definidas as expressões para $u_{,i}$ e $u_{,ik}$ é possível avaliar as integrais de -1 a 1 em λ e de 0 a 1 em ζ de forma numérica utilizando-se os pontos de Gauss e seus respectivos pesos ao longo da altura e do comprimento do elemento, respectivamente. Dessa forma, as Equações (4-8) e (4-9) podem ser resolvidas e os procedimentos descritos para o método de Newton-Raphson podem ser implementados computacionalmente para obtenção da posição de equilíbrio da estrutura.

No presente trabalho foi utilizada a linguagem e o ambiente de programação do software comercial MATLAB[®] (*The MathWorks, Inc, Massachusetts, USA*) para implementação de um código computacional desenvolvido a partir da formulação posicional apresentada e dos procedimentos descritos neste capítulo do trabalho. Um fluxograma simplificado do código desenvolvido pode ser conferido na Figura 4-1, em que o fluxo indicado pelas setas vermelhas descreve o processo iterativo de Newton-Raphson. Esse código computacional foi utilizado na análise dos exemplos numéricos que serão apresentados nos capítulos seguintes.

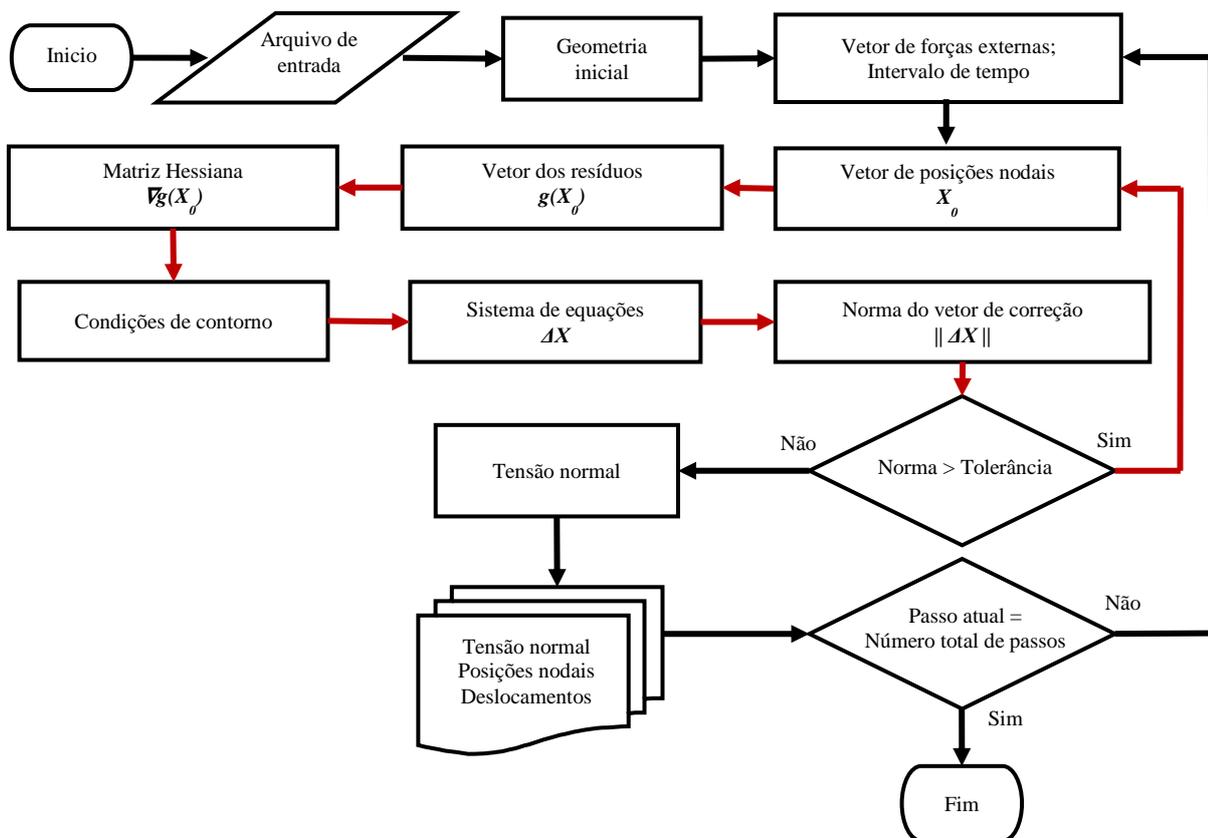


Figura 4-1: Fluxograma simplificado do código implementado em MATLAB[®]

Pelo fluxograma, pode ser verificado que o código computacional implementado se divide em três etapas principais. A primeira etapa é referente à entrada de dados, cálculo da geometria

inicial e montagem do vetor das forças. Essa entrada de dados consiste em um arquivo de texto, no qual se determinam os dados da geometria e discretização da estrutura, as propriedades físicas e geométricas dos elementos, as condições de contorno e de carregamento, o número de intervalos de tempo e a tolerância de cálculo.

A segunda etapa consiste no processo iterativo do método de Newton-Raphson (indicado pelas setas vermelhas na Figura 4-1). Nesse processo, inicialmente é montado o vetor das posições nodais, na sequência são calculados o vetor dos resíduos das posições nodais e a matriz Hessiana e, em seguida, são aplicadas as condições de contorno. Com esses procedimentos é possível montar um sistema de equações linearmente independentes, o qual é resolvido por eliminação Gaussiana. A resolução desse sistema fornece o vetor de correção das posições nodais. O passo iterativo se encerra com o cálculo da norma euclidiana do vetor de correção das posições nodais e sua comparação com a tolerância de cálculo adotada. Enquanto a norma for maior que a tolerância de cálculo, o fluxo do programa entra em um novo passo iterativo em busca de um novo conjunto de posições nodais que forneçam um equilíbrio da energia potencial total estacionária, caso contrário, o processo iterativo é interrompido, passando para a terceira etapa do código.

A terceira etapa consiste no cálculo das tensões atuantes ao longo da altura e do comprimento de cada elemento e na geração das saídas de resultados. Essas saídas consistem em quatro arquivos de texto, nomeados como “SAI”, “RESULT”, “TENSAO” e “PROCESSA”. O primeiro arquivo possui os valores de todas as posições nodais no final de cada intervalo de tempo. O segundo possui os valores das posições nodais, no final de cada intervalo de tempo, de um nó específico da estrutura determinado no arquivo de entrada. O terceiro possui os valores das tensões atuantes ao longo da altura e do comprimento de cada elemento finito. Finalmente, o quarto arquivo de saída possui os resultados de processamento (número de iterações, evolução da norma do vetor de correção das posições nodais e tempo de processamento). Além desses, o código gera ainda como saída de resultados três gráficos contendo as evoluções das posições x , y e θ com o tempo e um diagrama contendo as configurações de equilíbrio da estrutura indeformada e das estruturas deformadas, para os casos elástico e viscoelástico.

Essas três etapas são repetidas a cada intervalo de tempo, a partir do procedimento de montagem do vetor das forças. Visto que, caso seja de interesse na análise é possível, por exemplo, descarregar a estrutura em determinado intervalo de tempo para verificar o processo

de recuperação da deformação, ou realizar o carregamento por passos incrementais atualizando o vetor de forças. Após a execução de todos os intervalos de tempo o programa é então encerrado.

Avaliando-se fisicamente o modelo reológico adotado, Figura 3-4, é possível ilustrar o comportamento dos elementos que o constituem através da representação da transferência de tensão entre estes com a evolução dos deslocamentos, sob determinado estado de carregamento e dentro de determinado intervalo de tempo. Tal análise permite visualizar de forma simplificada como a abordagem adotada pode ser representada matematicamente pela formulação apresentada e computacionalmente pelo código implementado, a partir da definição de um intervalo de tempo, dispensando a necessidade de um processo de marcha incremental de tempo ou de uma integração temporal. Na Figura 4-2 é possível verificar o esquema representativo do comportamento do modelo e de seus elementos. Na qual σ e ε representam, respectivamente, as tensões e deformações normais em cada elemento. Nos quais os subscritos “1” e “2” se referem aos ramos elástico e de Maxwell, respectivamente. Já os sobrescritos “e” e “v” se referem, respectivamente, aos elementos elástico e viscoso.

Na Figura 4-2, sob determinado estado de carregamento (P), os elementos do modelo padrão de sólido estão submetidos às respectivas tensões (σ_1 , σ_2^e e σ_2^v). Dessa forma, a mola (E_2) em série com o amortecedor (η) está submetida à tração e deformada (ε_2^e), conseqüentemente, esta tende a deformar (“abrir”) o amortecedor com o intuito de retornar a sua configuração não deformada. No entanto, devido à viscosidade do amortecedor, este tende a frear esse retorno da mola, permitindo que apenas parte dessa deformação (ε_2^v) seja recuperada dentro do intervalo de tempo (Δt) determinado no arquivo de entrada. Assim, com parte de sua deformação recuperada, a mola em série com o amortecedor fica submetida a um nível menor de tensão ($\sigma_2 - \Delta\sigma$). Visto que o nível de tensão total ($\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$) no modelo é constante (comportamento de fluência), essa redução de tensão na mola em série com o amortecedor passa como acréscimo de tensão para a mola em paralelo (E_1). Esta fica então submetida a um nível maior de tensão ($\sigma_1 + \Delta\sigma$) e, conseqüentemente, o modelo apresenta um aumento na deformação total (ε_1). Todo esse processo de transferência de tensão é repetido, dentro de intervalos de tempo iguais, até que toda a tensão seja transferida para mola em paralelo e, conseqüentemente, a mola em série recupere sua configuração não deformada.

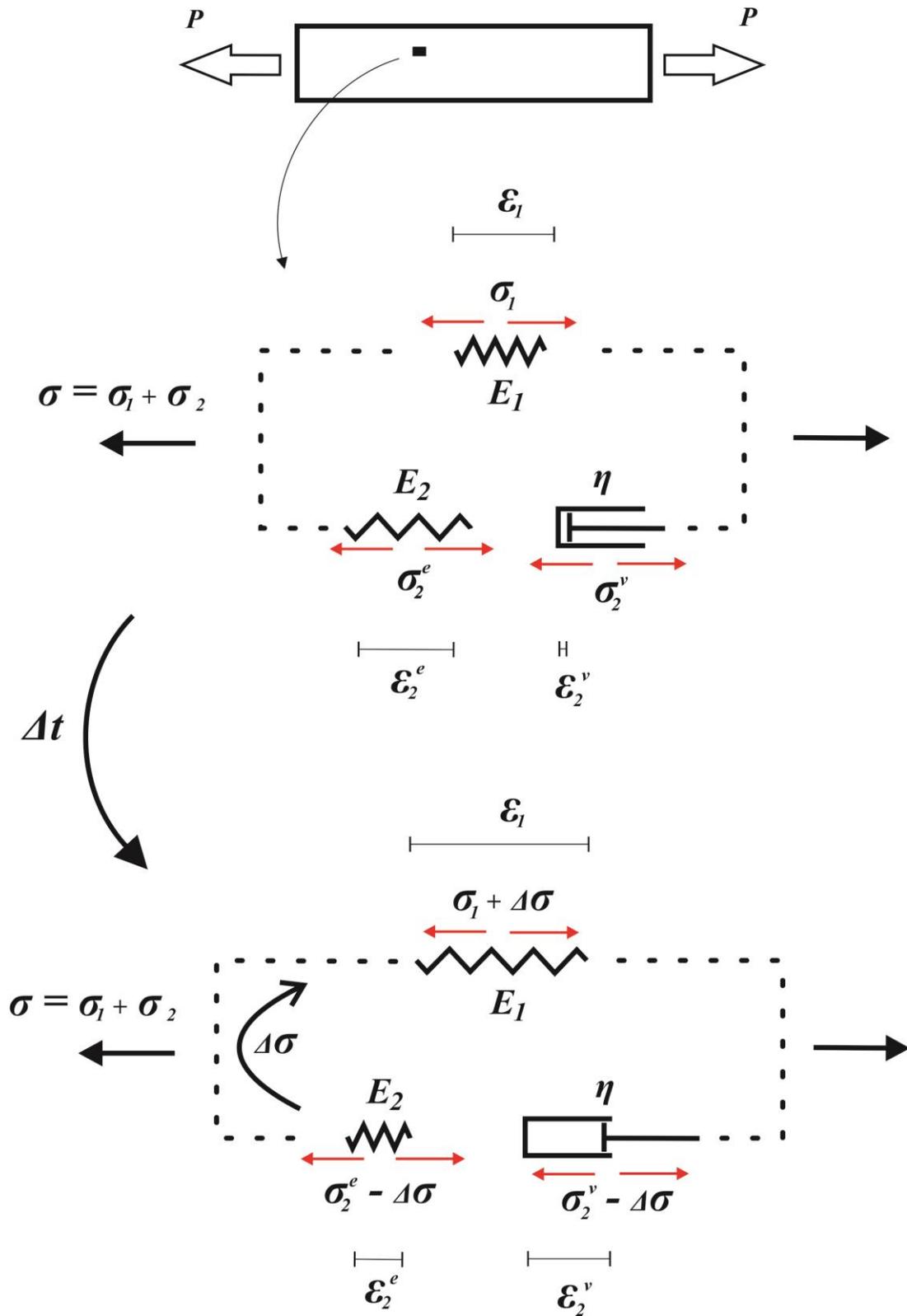


Figura 4-2: Esquema representativo da transferência de tensão e evolução das deformações dentro de um intervalo de tempo determinado

5

EXEMPLOS E ANÁLISES QUALITATIVAS

Neste capítulo inicialmente são apresentados quatro exemplos qualitativos a fim de verificar a coerência do comportamento estrutural em relação à teoria da viscoelasticidade, utilizando-se a formulação apresentada e implementada em MATLAB[®], conforme capítulo 4. Essa verificação consiste na obtenção das posições de equilíbrio e evolução dos deslocamentos das estruturas ao longo do tempo, sob carregamento constante, para os casos de comportamento elástico e viscoelástico. Como neste capítulo a formulação ainda não foi calibrada para descrição do comportamento de um material real, são adotados parâmetros genéricos para as propriedades mecânicas dos materiais e, dessa forma, os resultados obtidos nos exemplos não têm valor quantitativo. No entanto, o valor qualitativo desses exemplos é relevante visto que os parâmetros adotados foram escolhidos a fim de explorar a capacidade representativa da abordagem apresentada na formulação.

Na sequência do capítulo são apresentadas análises de variações nos parâmetros do material e nos parâmetros de discretização (espacial e temporal) com o intuito de verificar a influência destes nos comportamentos de fluência à tração e de fluência à flexão descritos pela formulação.

Nos exemplos apresentados, exceto quando afirmado o contrário, são adotados dez pontos de Gauss-Legendre ao longo do comprimento e dez pontos de Gauss-Lobatto ao longo da altura dos elementos, a tolerância de cálculo adotada para a norma do vetor de correção das posições nodais é de 10^{-8} m e a tolerância dimensional considerada é de $0,5 \times 10^{-3}$ m (meio milímetro).

5.1 Barra tracionada

O primeiro exemplo qualitativo trata de uma barra tracionada, engastado em uma das extremidades e livre na outra extremidade, como ilustrado na Figura 5-1. Essa barra apresenta um comprimento (L) igual a 1 m e foi discretizada em um elemento finito. A seção transversal

da barra é retangular, com altura igual a 0,05 m e base igual a 0,025 m, sendo a área da seção transversal igual a $1,25 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ e a inércia da seção igual a $2,6 \times 10^{-7} \text{ m}^4$. Os módulos de elasticidade longitudinais e o módulo de viscosidade de acordo com o modelo reológico padrão de sólido são, respectivamente, $E_1 = 56 \text{ GPa}$, $E_2 = 14 \text{ GPa}$ e $\eta = 20 \times 10^3 \text{ GPa}\cdot\text{s}$.

A força (p) foi aplicada em um único passo na extremidade à direita da barra (nó 2) e tem intensidade de 5000 kN. A análise foi realizada considerando-se cinco intervalos de tempo de $\Delta t = 1000 \text{ s}$, totalizando uma análise de 5000 segundos.

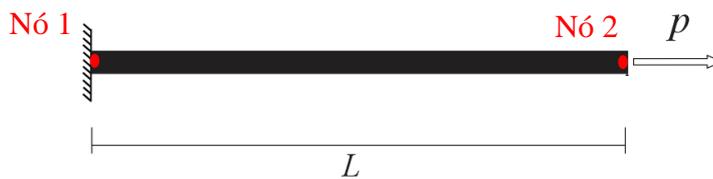


Figura 5-1: Barra tracionada

Os resultados de evolução dos deslocamentos axiais ao longo do tempo para os casos elástico e viscoelástico estão expostos na Figura 5-2. Já na Figura 5-3 estão expostas as posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica da barra.

A partir das Figuras 5-2 e 5-3 é possível observar que para o caso de um elemento submetido à tração o código consegue descrever o comportamento de fluência (aumento do deslocamento ao longo do tempo sob tensão constante) com taxa de deslocamento decrescente, assim como esperado pela teoria da viscoelasticidade. Pode-se observar também que a partir de um determinado tempo, entre 4000 e 5000 segundos, a taxa de evolução dos deslocamentos praticamente se anula.

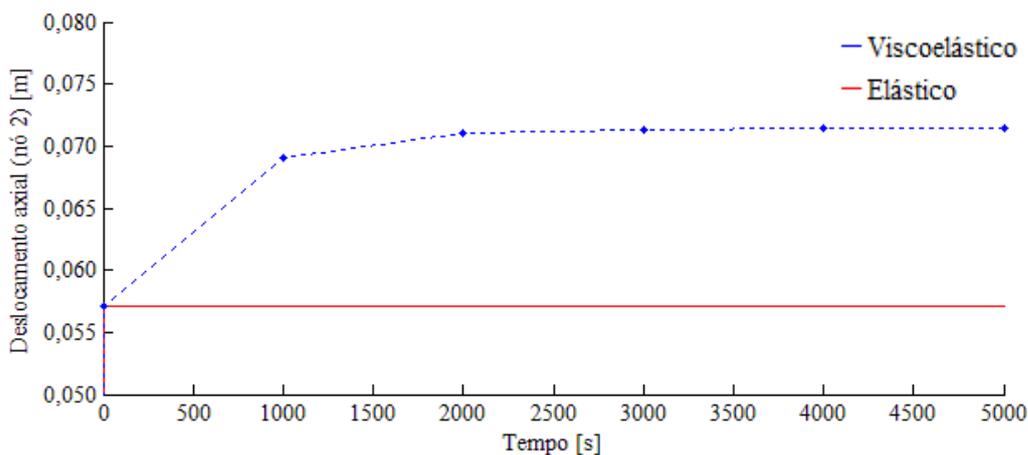


Figura 5-2: Evolução dos deslocamentos axiais (nó 2)

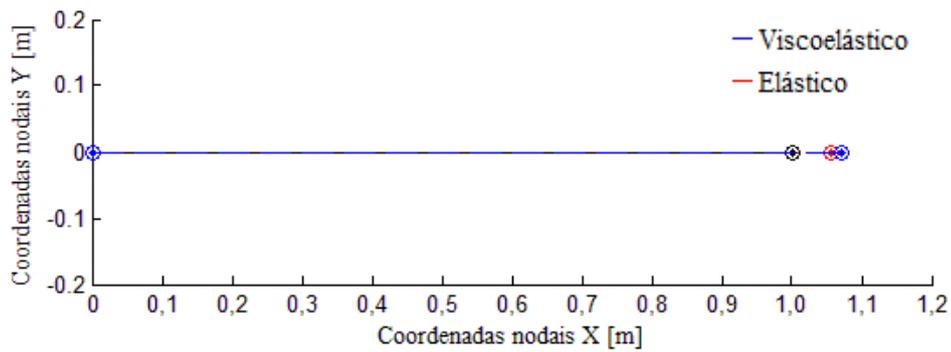


Figura 5-3: Posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica, barra tracionada

5.2 Viga biapoiada com carregamento concentrado

O segundo exemplo qualitativo trata de uma viga biapoiada com força concentrada aplicada no centro do vão, como ilustrado na Figura 5-4. Essa viga apresenta um vão livre (L) igual a 5 m e foi discretizada em dez elementos finitos de 0,5 m de comprimento cada. A seção transversal da viga é retangular, com altura igual a 0,10 m e base igual a 0,054 m, sendo a área da seção transversal de cada elemento igual a $5,4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ e a inércia da seção igual $4,5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. Os módulos de elasticidade longitudinais e o módulo de viscosidade são, respectivamente, $E_1 = 56 \text{ GPa}$, $E_2 = 14 \text{ GPa}$ e $\eta = 20 \times 10^3 \text{ GPa}\cdot\text{s}$.

A força (p) foi aplicada em um único passo no centro do vão com intensidade de 10000 N e direção vertical para baixo. A análise foi realizada considerando-se cinco intervalos de tempo de $\Delta t = 1000 \text{ s}$, totalizando uma análise de 5000 segundos.

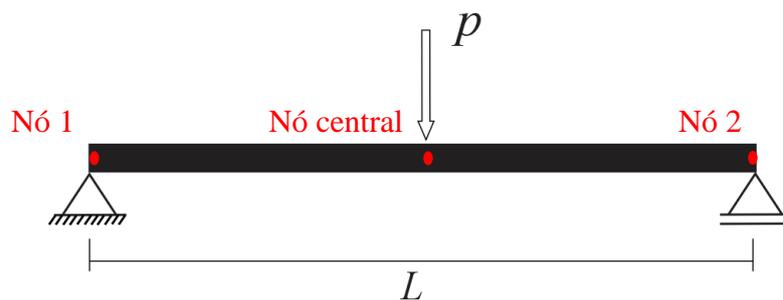


Figura 5-4: Viga biapoiada com carregamento concentrado

Os resultados de evolução da flecha no centro do vão ao longo do tempo para os casos elástico e viscoelástico estão expostos na Figura 5-5. Já na Figura 5-6 estão expostas as posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica da viga.

A partir das Figuras 5-5 e 5-6 é possível observar que para o caso de um elemento submetido à flexão o código consegue descrever o comportamento de fluência (aumento da flecha ao longo do tempo sob tensão constante) com taxa de deslocamento decrescente, assim como esperado pela teoria da viscoelasticidade. Assim como no caso da fluência à tração do exemplo anterior, pode-se observar também que a partir de um determinado tempo, entre 4000 e 5000 segundos, a taxa de evolução dos deslocamentos praticamente se anula.

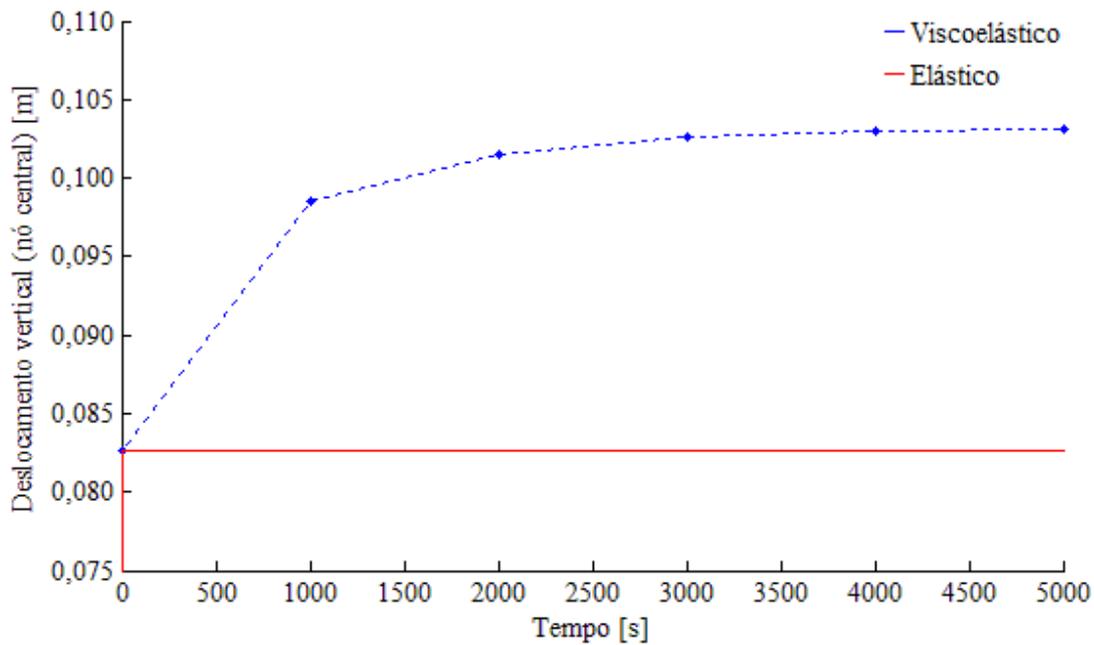


Figura 5-5: Evolução da flecha com o tempo na viga biapoiada

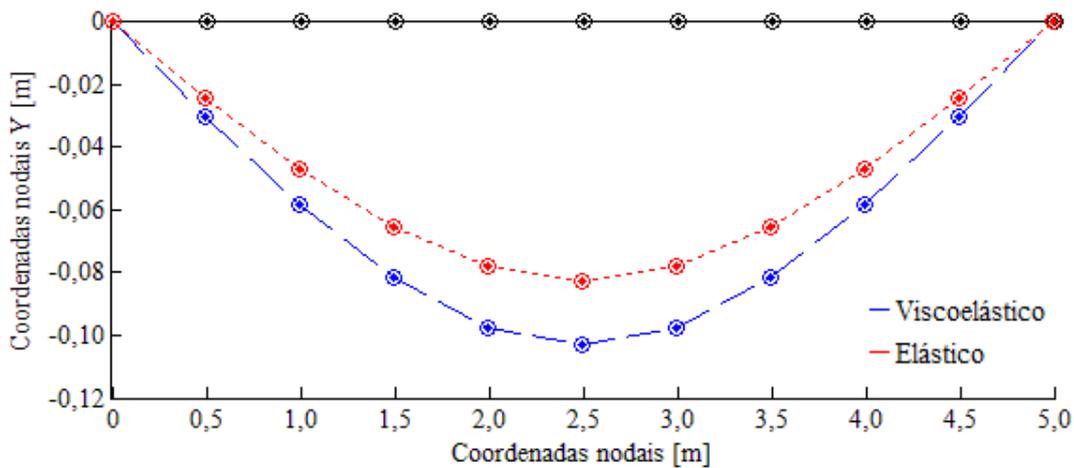


Figura 5-6: Posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica, viga biapoiada

5.3 Viga em balanço com carregamento concentrado

O terceiro exemplo qualitativo trata de uma viga em balanço com força concentrada aplicada na extremidade à direita (nó 2), como ilustrado na Figura 5-7. Essa viga apresenta um comprimento (L) igual a 5 m e foi discretizada em dez elementos finitos de 0,5 m de comprimento cada. A seção transversal da viga é retangular, com altura igual a 0,10 m e base igual a 0,054 m, sendo a área da seção transversal de cada elemento igual a $5,4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ e a inércia da seção igual $4,5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. Os módulos de elasticidade longitudinais e o módulo de viscosidade são, respectivamente, $E_1 = 56 \text{ GPa}$, $E_2 = 14 \text{ GPa}$ e $\eta = 20 \times 10^3 \text{ GPa}\cdot\text{s}$.

A força (p) foi aplicada em um único passo na extremidade da viga com intensidade de 1000 N e direção vertical para baixo. A análise foi realizada considerando-se dez intervalos de tempo de $\Delta t = 1000 \text{ s}$, totalizando uma análise de 10000 segundos.

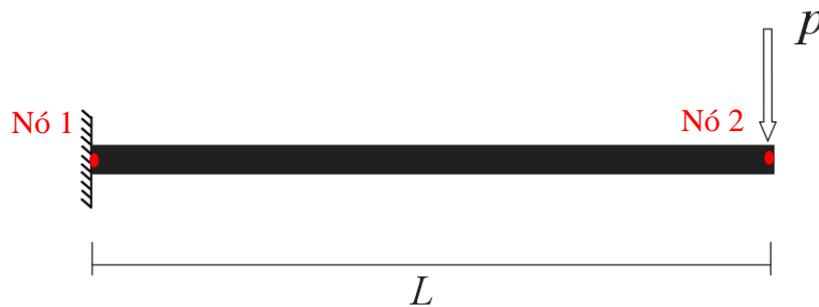


Figura 5-7: Viga em balanço com carregamento concentrado

Os resultados de evolução da flecha na extremidade da viga ao longo do tempo para os casos elástico e viscoelástico estão expostos na Figura 5-8. Já na Figura 5-9 estão expostas as posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica da viga.

A partir das Figuras 5-8 e 5-9 é possível observar que para o caso de um elemento submetido à flexão o código consegue descrever o comportamento de fluência (aumento da flecha ao longo do tempo sob tensão constante) com taxa de deslocamento decrescente, assim como esperado pela teoria da viscoelasticidade. Nesse caso o tempo para estabilização da fluência foi mais longo, apresentando taxa de evolução dos deslocamentos praticamente nula apenas depois de decorridos 9000 segundos.

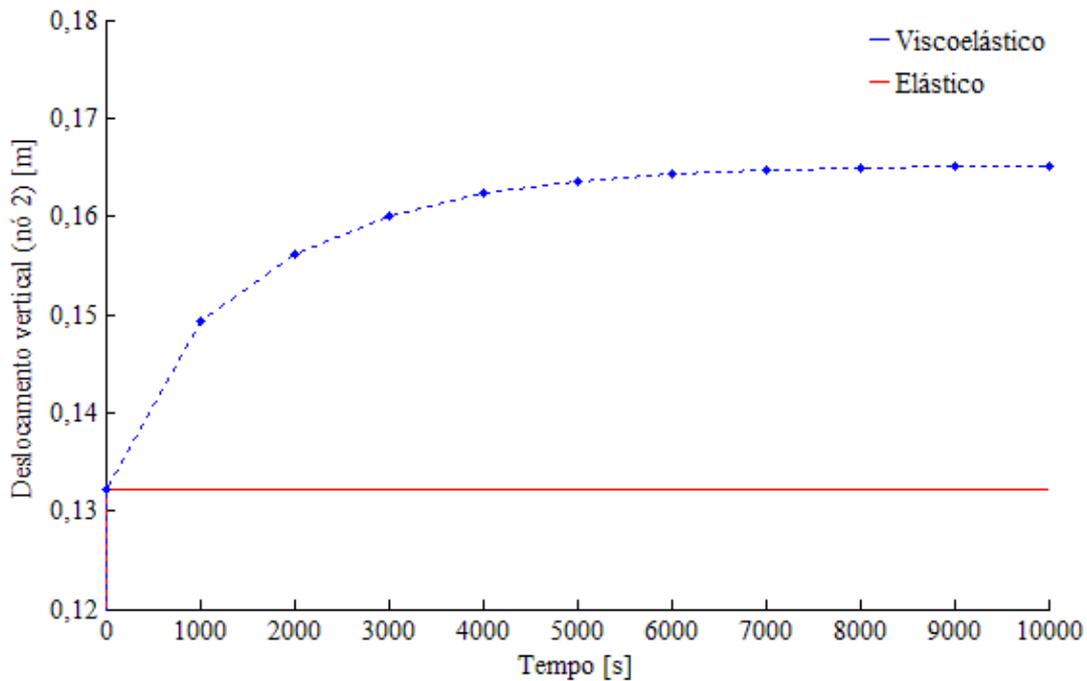


Figura 5-8: Evolução da flecha com o tempo na viga em balanço

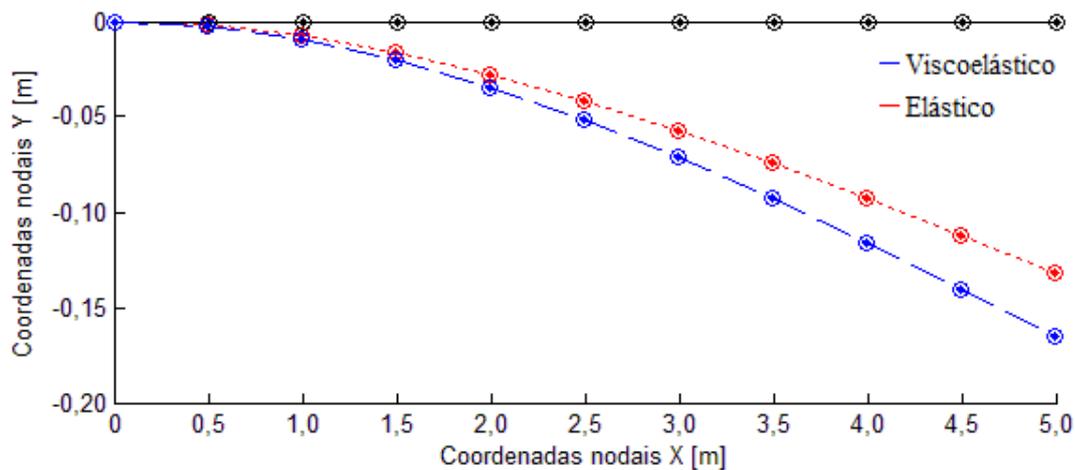


Figura 5-9: Posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica, viga em balanço

5.4 Pórtico engastado

O quarto exemplo qualitativo trata da análise de um pórtico formado por uma viga e dois pilares. As ligações entre esses membros são consideradas rígidas e as bases dos pilares são engastadas. O pórtico está submetido a um carregamento uniformemente distribuído ao longo de toda a viga, além, de um carregamento concentrado no nó que une o pilar lateral esquerdo

e a viga. A geometria do pórtico, a distribuição das forças e as condições de contorno nos apoios estão ilustradas na Figura 5-10.

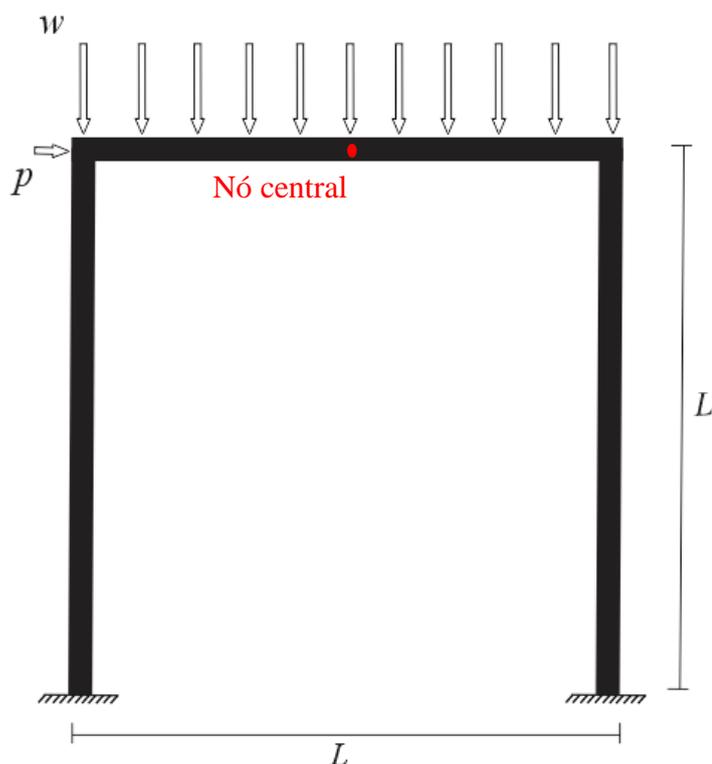


Figura 5-10: Pórtico engastado

Tanto os pilares quanto a viga, expostos na Figura 5-10, apresentam comprimento (L) igual 6 m e foram discretizados em seis elementos finitos de 1,0 m de comprimento cada, totalizando dezoito elementos na estrutura. A seção transversal dos elementos é retangular, com altura igual a 0,10 m e base igual a 0,054 m, sendo a área da seção transversal de cada elemento igual a $5,4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ e a inércia da seção igual a $4,5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. Os módulos de elasticidade longitudinais e o módulo de viscosidade são, respectivamente, $E_1 = 37,6 \text{ GPa}$, $E_2 = 9,4 \text{ GPa}$ e $\eta = 20 \times 10^3 \text{ GPa}\cdot\text{s}$.

As forças foram aplicadas em um único passo, com força distribuída (w) de intensidade 11666,7 N/m e força concentrada (p) de intensidade 1000 N. A análise foi realizada considerando-se vinte passos de tempo de $\Delta t = 1000 \text{ s}$, totalizando uma análise de 20000 segundos.

Os resultados apresentados nas Figuras 5-11 e 5-12 se referem aos deslocamentos do nó central da viga, respectivamente, nas direções horizontal e vertical. Já na Figura 5-13 estão

expostas as posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica do pórtico.

A partir das Figuras 5-11 e 5-12 é possível observar que para o caso de um elemento submetido tanto a carregamento axial quanto a flexão o código consegue descrever a evolução dos deslocamentos com taxa de deslocamento decrescente, assim como esperado pela teoria da viscoelasticidade. Nesse caso o tempo para estabilização da fluência foi superior a 20000 segundos. A partir da Figura 5-13 é possível observar ainda que o comportamento viscoelástico pode alterar significativamente a posição de equilíbrio do pórtico ao longo do tempo para um mesmo estado de carregamento.

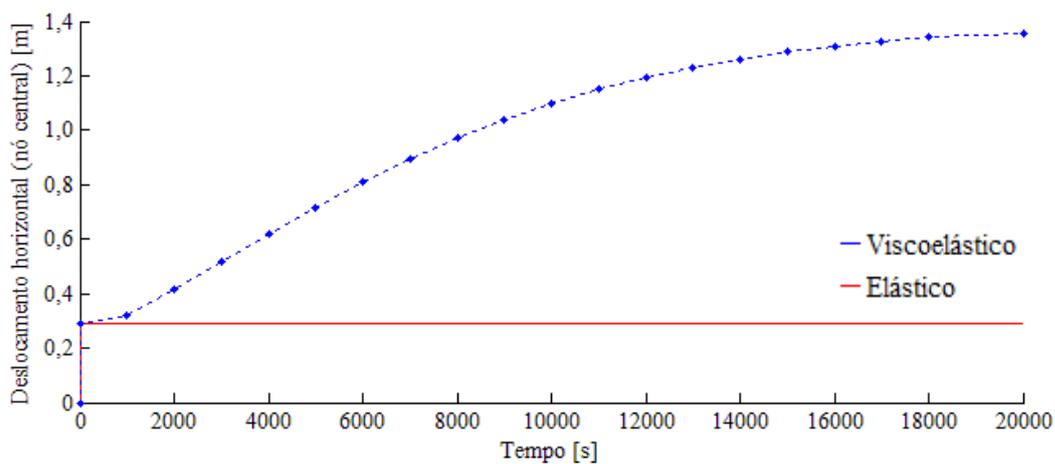


Figura 5-11: Deslocamento horizontal ao longo do tempo

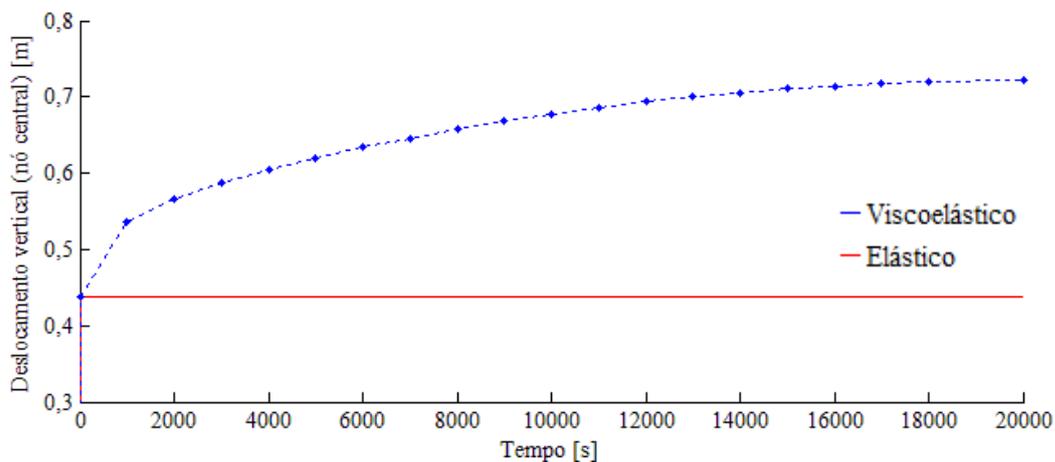


Figura 5-12: Deslocamento vertical ao longo do tempo

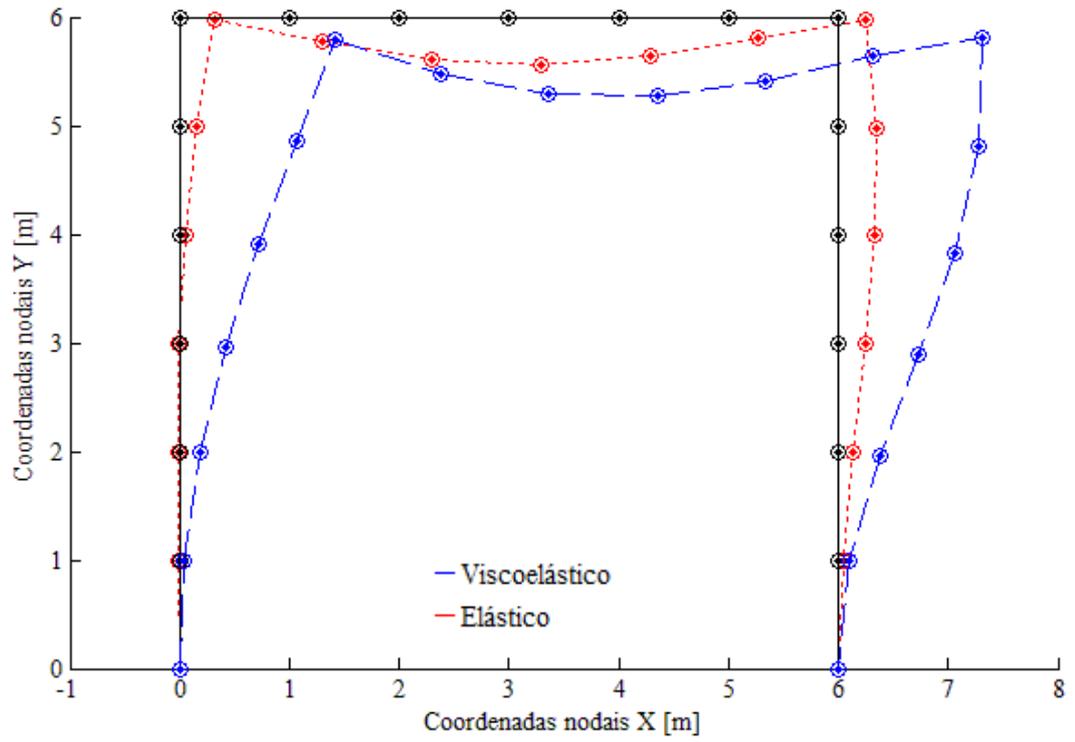


Figura 5-13: Posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica, pórtico

5.5 Análise da influência dos parâmetros

Neste item são apresentadas análises de variações nos parâmetros do material e nos parâmetros de discretização (espacial e temporal) com o intuito de verificar a influência destes nos comportamentos de fluência à tração e de fluência à flexão descritos pela formulação. Para tanto, na análise do comportamento de fluência à tração foi considerada a barra do item 5.1, assim como suas características geométricas. Já na análise do comportamento de fluência à flexão foi considerada a viga do item 5.2, assim como suas características geométricas. Assim, para cada item seguinte são apresentados separadamente os resultados de deslocamento axial da extremidade livre ao longo do tempo para a barra e deslocamento vertical no centro do vão ao longo do tempo para a viga.

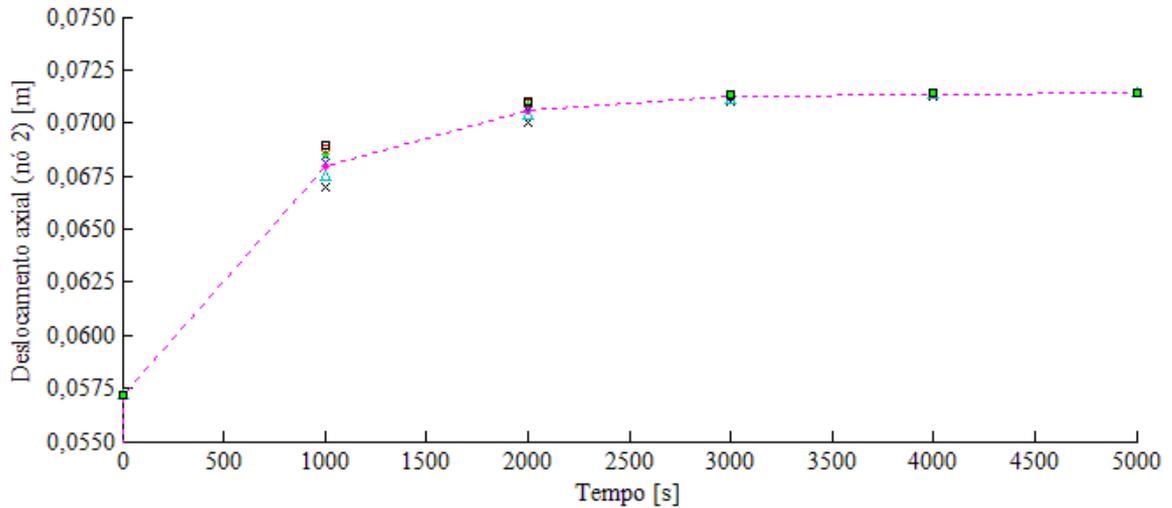
5.5.1 Influência do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento do elemento

Nesta análise é adotada a Quadratura de Gauss-Legendre para determinação dos pontos de Gauss e seus respectivos pesos. Os mesmos parâmetros do material e de geometria apresentados nos itens 5.1 e 5.2 são mantidos, variando-se apenas o número de pontos de Gauss distribuídos ao longo do comprimento de cada elemento finito. Para o caso da barra é utilizada uma faixa de variação de quatro a dez pontos. Já para o caso da viga a faixa utilizada é de seis a doze pontos. A influência dessa variação nos deslocamentos da barra ao longo do tempo pode ser conferida na Figura 5-14. A partir das Figuras 5-14 (b) e 5-14 (c) é possível verificar uma convergência dos resultados com o aumento do número de pontos de Gauss em cada elemento e que a partir de seis pontos de Gauss a diferença entre os resultados obtidos estão dentro da tolerância dimensional adotada.

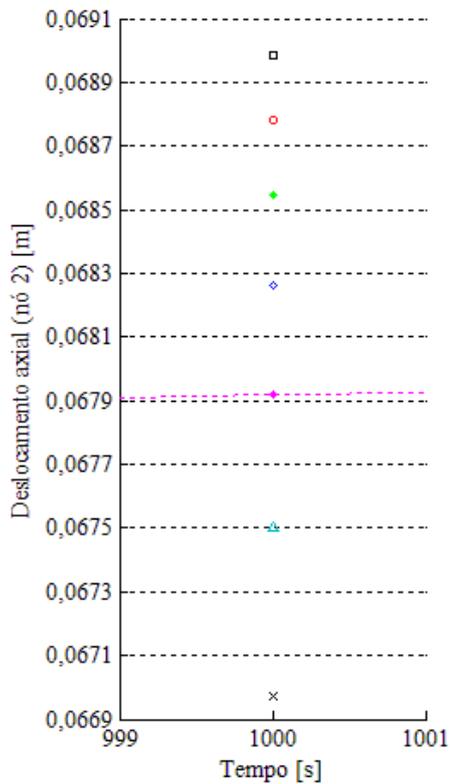
Já a influência dessa variação nos deslocamentos do nó central da viga ao longo do tempo pode ser conferida na Figura 5-15. A partir das Figuras 5-15 (b) e 5-15 (c) é possível verificar uma convergência dos resultados com o aumento do número de pontos de Gauss em cada elemento e que a partir de dez pontos de Gauss a diferença entre os resultados obtidos estão dentro da tolerância dimensional adotada.

A partir das Figuras 5-14 e 5-15 é possível observar ainda que, tanto para barra quanto para viga, as diferenças nos resultados de deslocamentos em relação à variação do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento dos elementos são mais pronunciadas a curto prazo do que a longo prazo. Dessa forma, para uma análise de fluência a curto prazo em uma

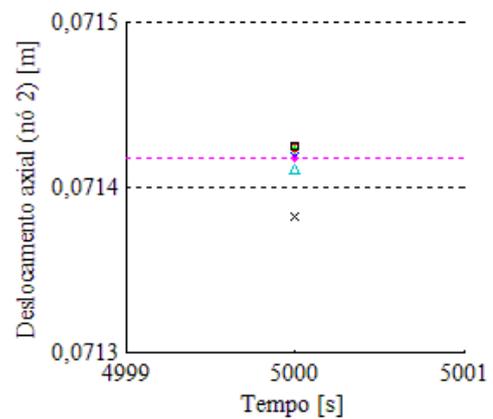
estrutura discretizada por elementos de pórtico, os quais podem estar submetidos à solicitação axial ou à flexão, é necessário adotar um número de pontos de Gauss ao longo do comprimento igual ou superior a dez, número este que atende aos dois tipos de solicitações. Já para uma análise de fluência a longo prazo os resultados se tornam menos sensíveis a variação do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento podendo ser adotado um número menor de pontos.



(a)



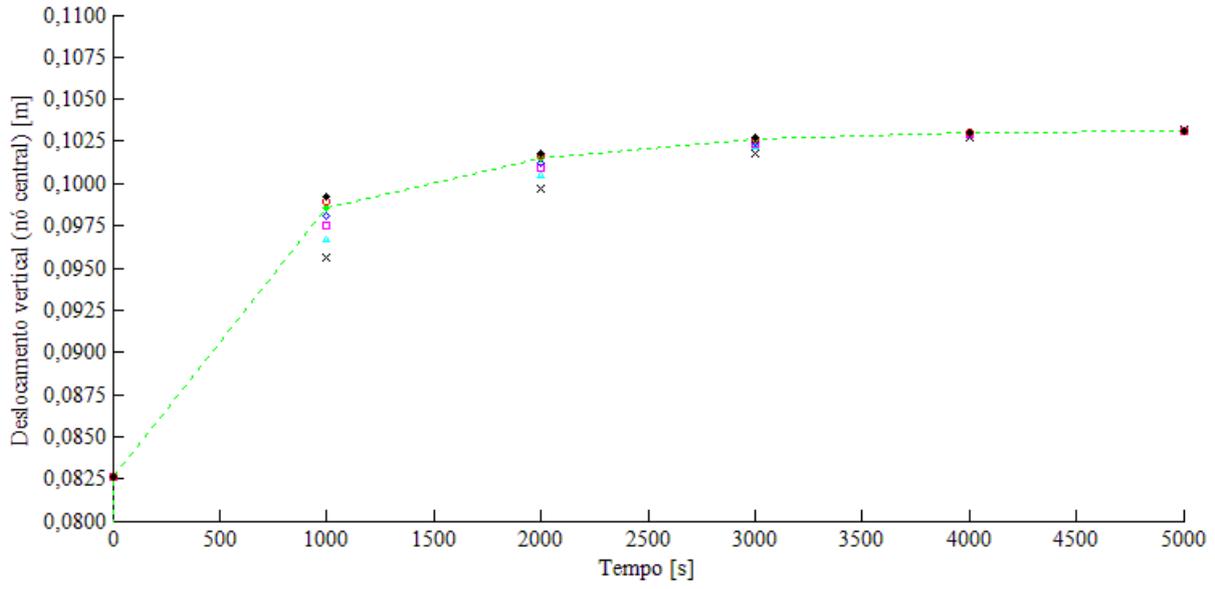
(b)



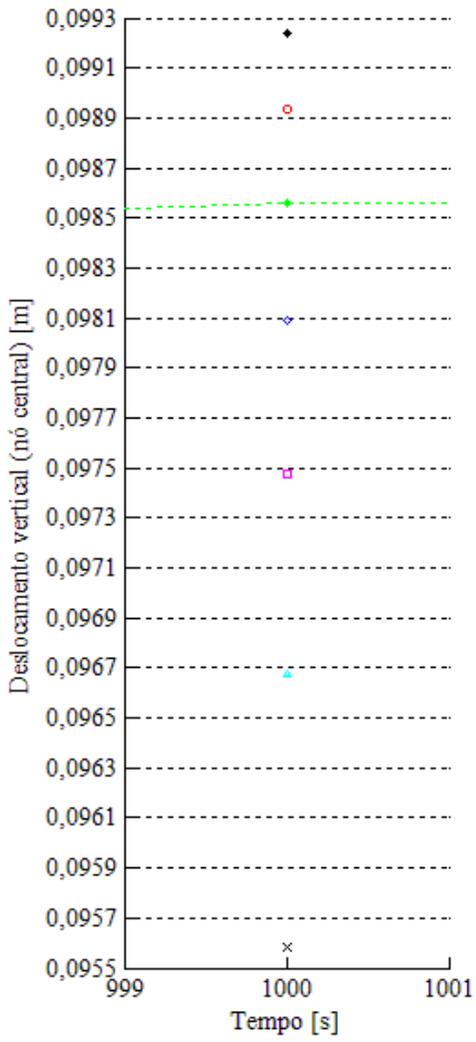
(c)

- × 4 pontos
- △ 5 pontos
- ◆--- 6 pontos
- ◇ 7 pontos
- ◆ 8 pontos
- 9 pontos
- 10 pontos

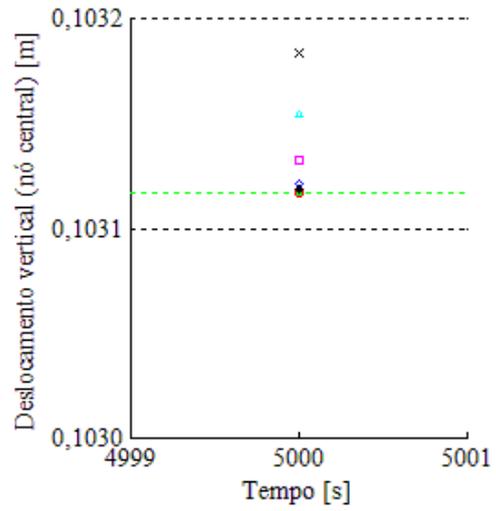
Figura 5-14: (a) Influência da variação do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento do elemento para o caso da barra (item 5.1); (b) Detalhe para 1000 s; (c) Detalhe para 5000 s



(a)



(b)



(c)

- × 6 pontos
- ▲ 7 pontos
- ◻ 8 pontos
- ◊ 9 pontos
- ◆ 10 pontos
- ◊ 11 pontos
- ◆ 12 pontos

Figura 5-15: (a) Influência da variação do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento do elemento para o caso da viga (item 5.2); (b) Detalhe para 1000 s; (c) Detalhe para 5000 s

5.5.2 Influência do número de pontos de Gauss ao longo da altura do elemento

Nesta análise é adotada a Quadratura de Gauss-Lobatto para determinação dos pontos de Gauss e seus respectivos pesos. Os mesmos parâmetros do material e de geometria apresentados nos itens 5.1 e 5.2 são mantidos, variando-se apenas o número de pontos de Gauss distribuídos ao longo da altura de cada elemento finito. Para o caso da barra é utilizada uma faixa de variação de dois a dez pontos. Já para o caso da viga a faixa utilizada é de quatro a dez pontos, visto que para dois pontos de Gauss ao longo da altura de cada elemento para o caso da viga não foi possível obter estabilidade numérica na execução do código. A influência dessa variação nos deslocamentos da barra ao longo do tempo pode ser conferida na Figura 5-16. A partir das Figuras 5-16 (b) e 5-16 (c) é possível verificar que não são obtidas variações nos resultados em relação à variação no número de pontos de Gauss ao longo da altura do elemento para o caso da barra.

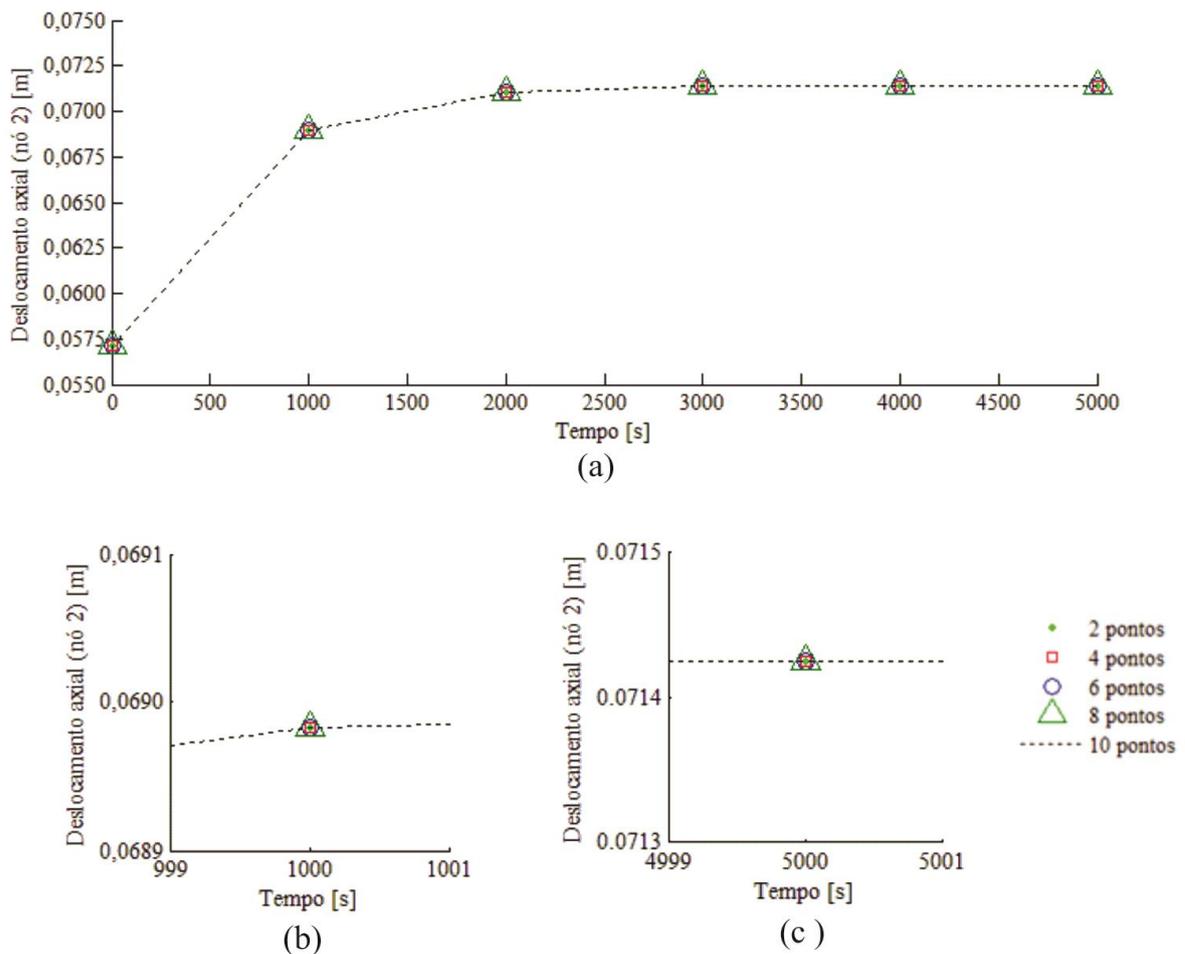


Figura 5-16: (a) Influência da variação do número de pontos de Gauss ao longo da altura do elemento para o caso da barra (item 5.1); (b) Detalhe para 1000 s; (c) Detalhe para 5000 s

Já a influência dessa variação nos deslocamentos da viga ao longo do tempo pode ser conferida na Figura 5-17. A partir das Figuras 5-17 (b) e 5-17 (c) é possível verificar que, assim como no caso da barra, não são obtidas variações nos resultados em relação à variação no número de pontos de Gauss ao longo da altura do elemento para o caso da viga, exceto pela instabilidade numérica observada quando utilizados apenas dois pontos de Gauss.

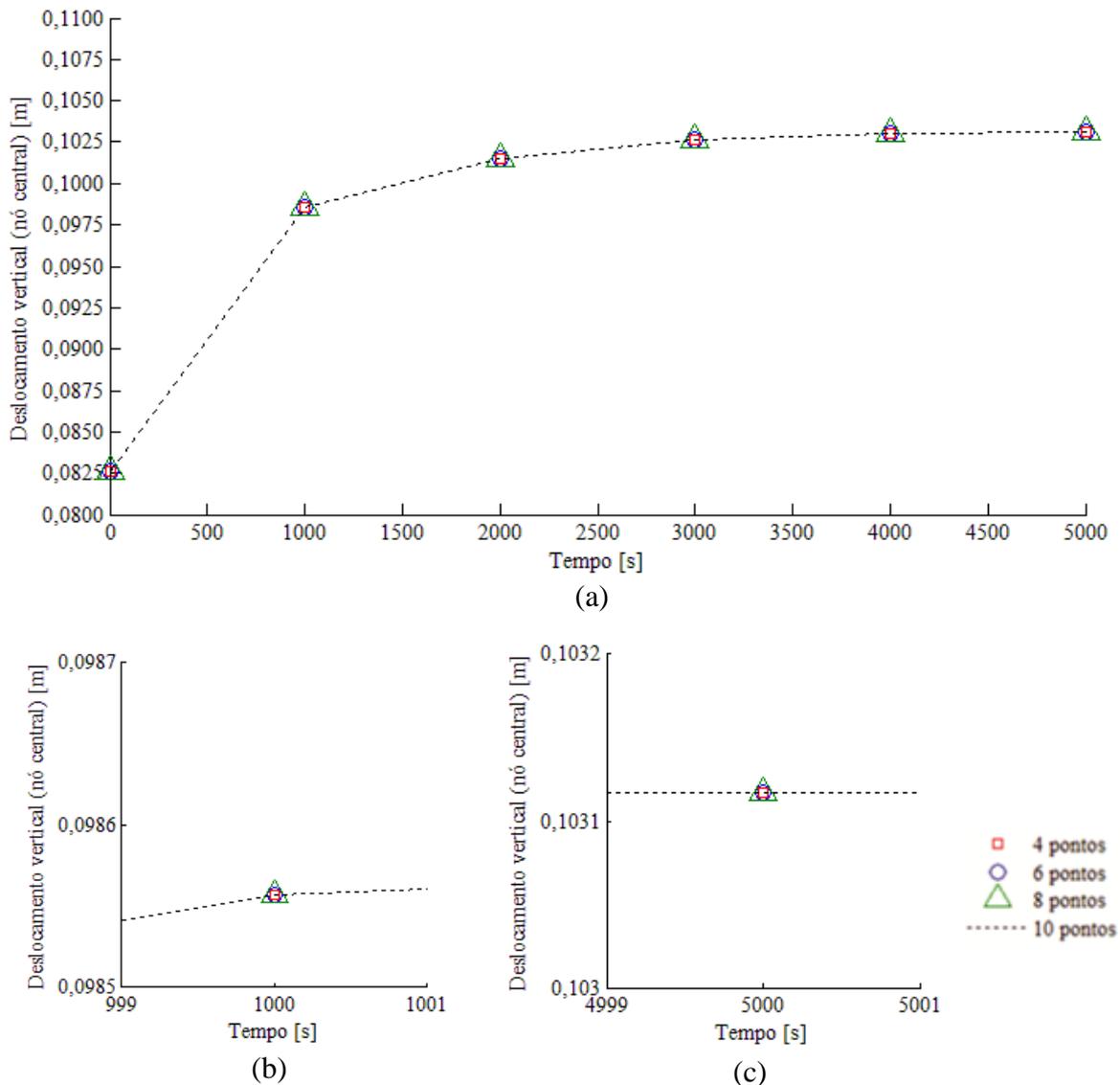


Figura 5-17: (a) Influência da variação do número de pontos de Gauss ao longo da altura do elemento para o caso da viga (item 5.2); (b) Detalhe para 1000 s; (c) Detalhe para 5000 s

A partir das Figuras 5-16 e 5-17, tanto para barra quanto para viga, o mesmo comportamento é observado, tanto a curto prazo quanto a longo prazo, em que não são obtidas variações nos resultados de deslocamentos em relação à variação do número de pontos de Gauss ao longo da altura dos elementos. Dessa forma, para uma análise de fluência linear em relação ao nível de tensão em uma estrutura discretizada por elementos de pórtico, os quais podem estar

submetidos à solicitação axial ou à flexão, pode ser adotado um número de pontos de Gauss ao longo da altura igual ou superior a quatro, para curto ou longo prazo. No entanto, visto que o comportamento de fluência em geral é não linear em relação ao nível de tensão aplicado, a adoção de um número maior de pontos de Gauss ao longo da altura permite obter a contribuição desse comportamento de forma mais detalhada considerando-se o perfil de distribuição de tensão ao longo da altura do elemento.

5.5.3 Influência do intervalo de tempo

Nesta análise é avaliada a influência da variação do intervalo de tempo adotado, sendo os demais parâmetros do material e de discretização mantidos conforme exemplos dos itens 5.1 e 5.2. Tanto para barra quanto para viga são adotados quatro diferentes intervalos de tempo, 500 s, 1000 s, 2000 s e 4000 s. Nas Figuras 5-18 e 5-19 são apresentados os resultados de deslocamento ao longo do tempo com os diferentes intervalos de tempo, respectivamente, para a barra e para a viga. A partir dessas figuras é possível observar que a variação no intervalo de tempo não gerou variação nos resultados a longo prazo, demonstrando um comportamento assintótico e convergente para um mesmo valor de deslocamento viscoelástico final. Já para os resultados de deslocamento viscoelástico a curto prazo, apesar de verificada uma tendência de divergência com a redução do intervalo de tempo, as diferenças obtidas ficaram dentro da tolerância dimensional adotada.

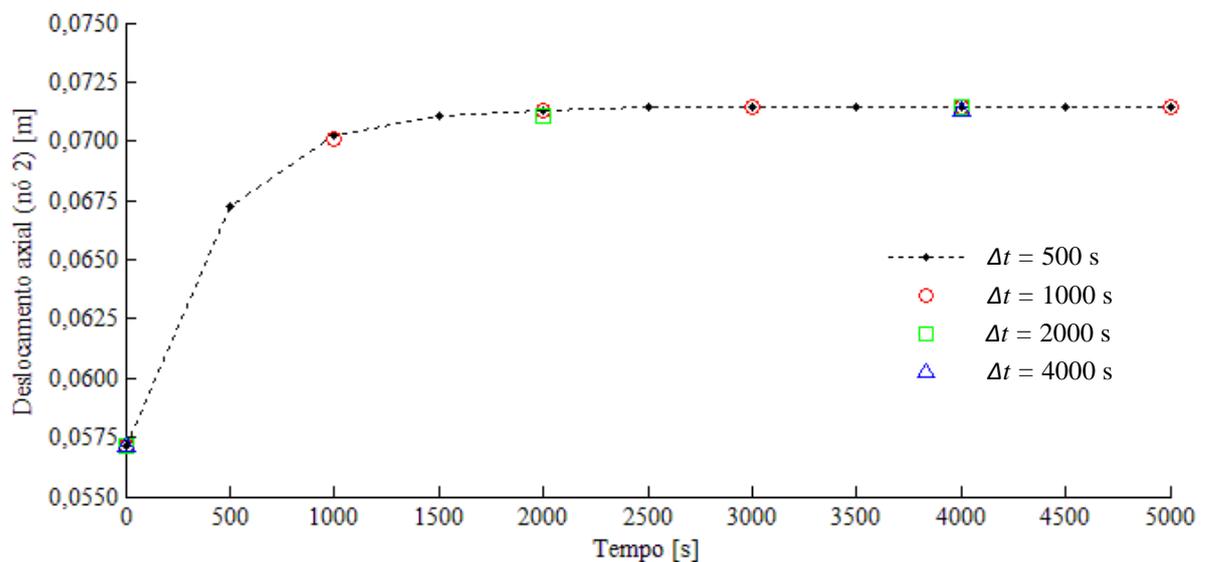


Figura 5-18: Influência do intervalo de tempo nos deslocamentos da barra (item 5.1)

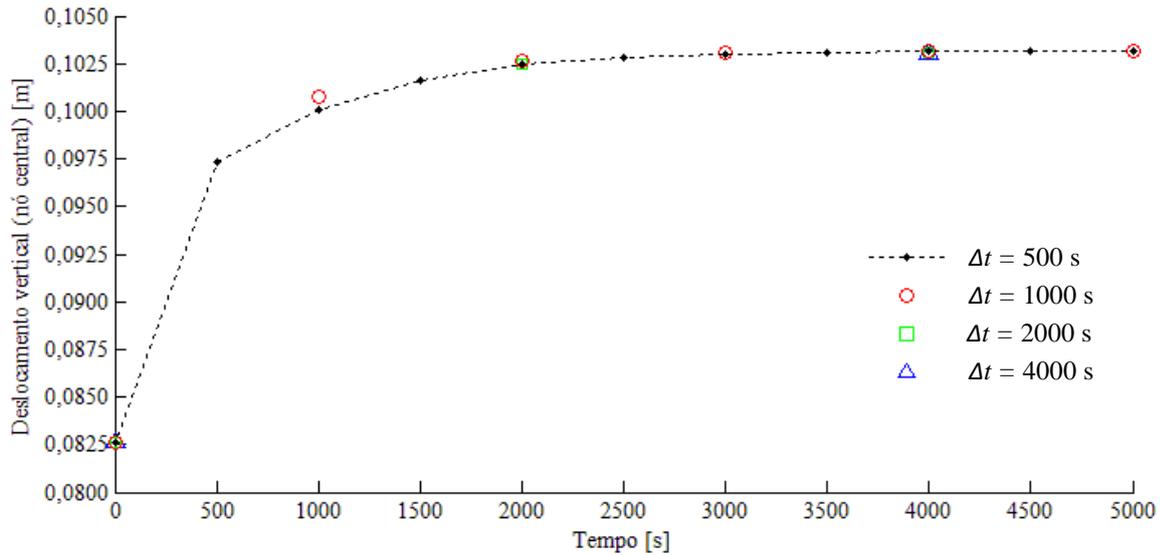


Figura 5-19: Influência do intervalo de tempo nos deslocamentos da viga (item 5.2)

Dessa forma, para uma análise de fluência a longo prazo em uma estrutura discretizada por elementos de pórtico, os quais podem estar submetidos à solicitação axial ou à flexão, pode ser adotado um intervalo de tempo relativamente grande, por exemplo 4000 s, sem perda na qualidade do resultado final de deslocamento por fluência. Já para uma análise de fluência a curto prazo os resultados são mais sensíveis a variação do intervalo de tempo, sendo necessária uma análise mais detalhada dessa variação para a estrutura estudada.

5.5.4 Influência do número de elementos

Neste item é analisada a influência da variação do número de elementos adotados na discretização da estrutura, sendo os demais parâmetros do material e de discretização mantidos conforme exemplos dos itens 5.1 e 5.2. Para barra são adotadas discretizações com 1, 5, 10 e 20 elementos. Já para viga são adotadas discretizações com 4, 8, 12, 16 e 20 elementos.

A influência dessa variação nos deslocamentos da barra ao longo do tempo pode ser conferida na Figura 5-20. A partir das Figuras 5-20 (b) e 5-20 (c) é possível verificar que não são obtidas variações nos resultados em relação à variação do número de elementos utilizados na discretização.

Já a influência dessa variação nos deslocamentos da viga ao longo do tempo pode ser conferida na Figura 5-21. A partir das Figuras 5-21 (b) e 5-21 (c) é possível verificar que os resultados apresentam uma divergência superior à tolerância dimensional em curto prazo. No

entanto, a longo prazo há uma tendência de convergência com o aumento do número de elementos e, considerando-se a tolerância dimensional adotada, pode-se verificar que as diferenças nos deslocamentos da viga são desprezíveis acima de oito elementos.

Dessa forma, para uma análise de fluência a curto prazo em uma estrutura discretizada por elementos de pórtico, os quais podem estar submetidos à solicitação axial ou à flexão, é adequado adotar um número menor de elementos, próximo de oito elementos, devido ao risco de se obter uma divergência dos resultados com uma maior discretização. Já para uma análise de fluência a longo prazo, devido a convergência dos resultados com o aumento da discretização, pode-se utilizar números maiores de elementos com ganho na qualidade do resultado final de deslocamento por fluência.

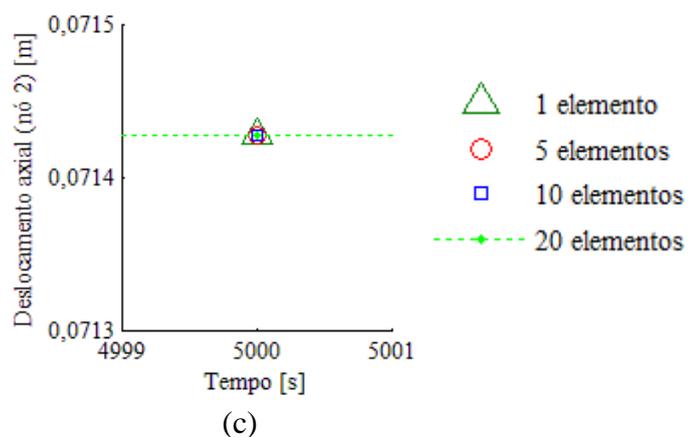
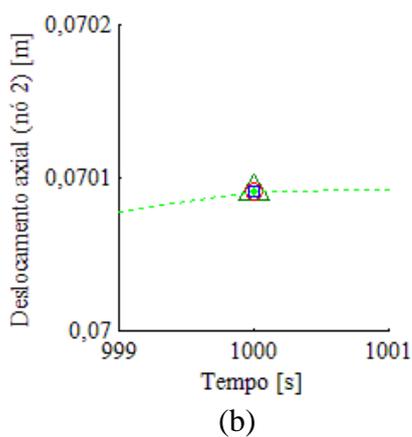
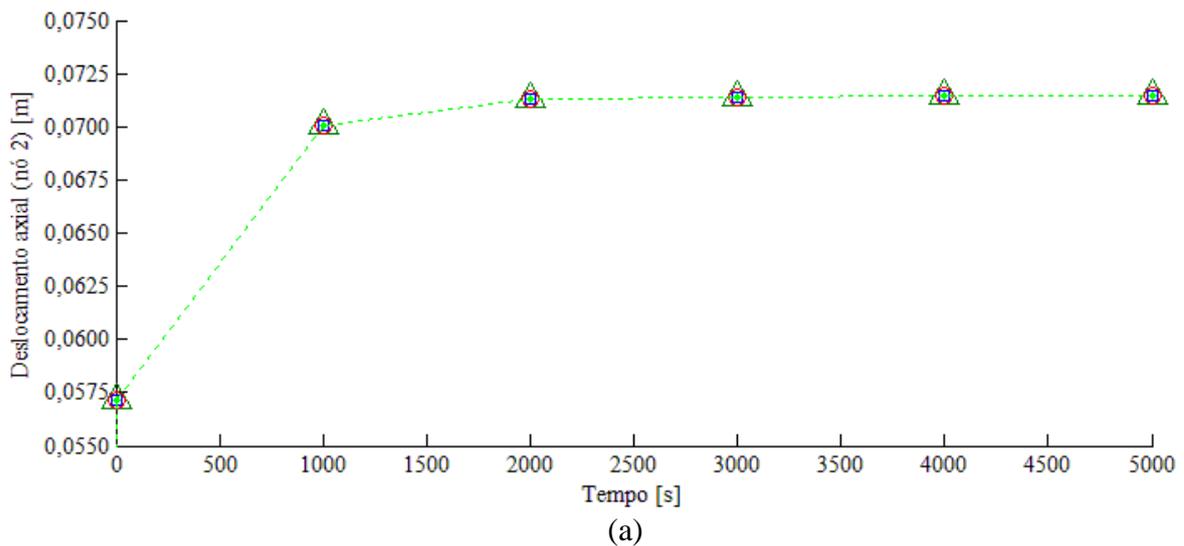


Figura 5-20: (a) Influência do número de elementos nos deslocamentos da barra (item 5.1); (b) Detalhe para 1000 s; (c) Detalhe para 5000 s

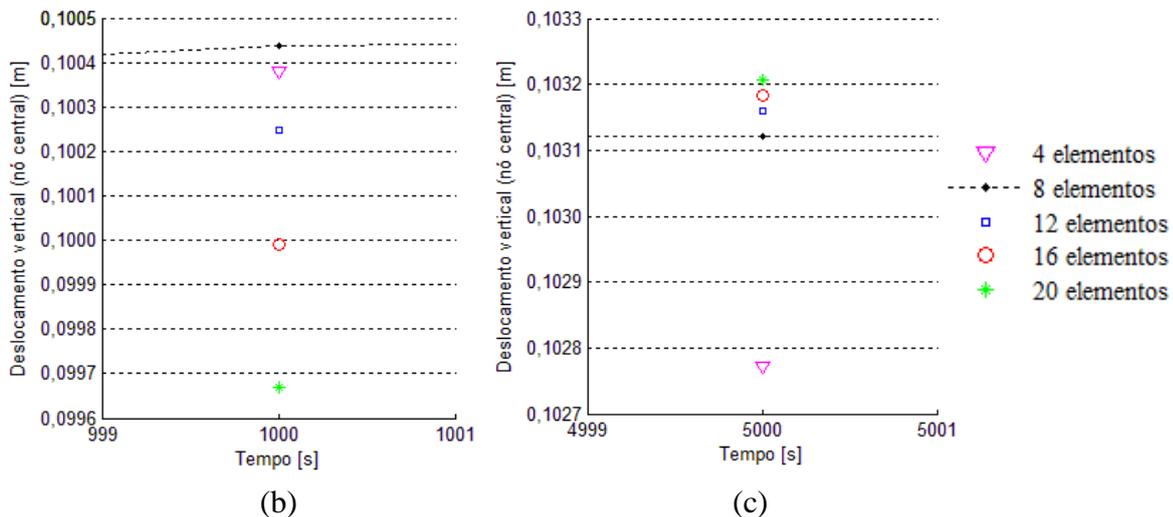
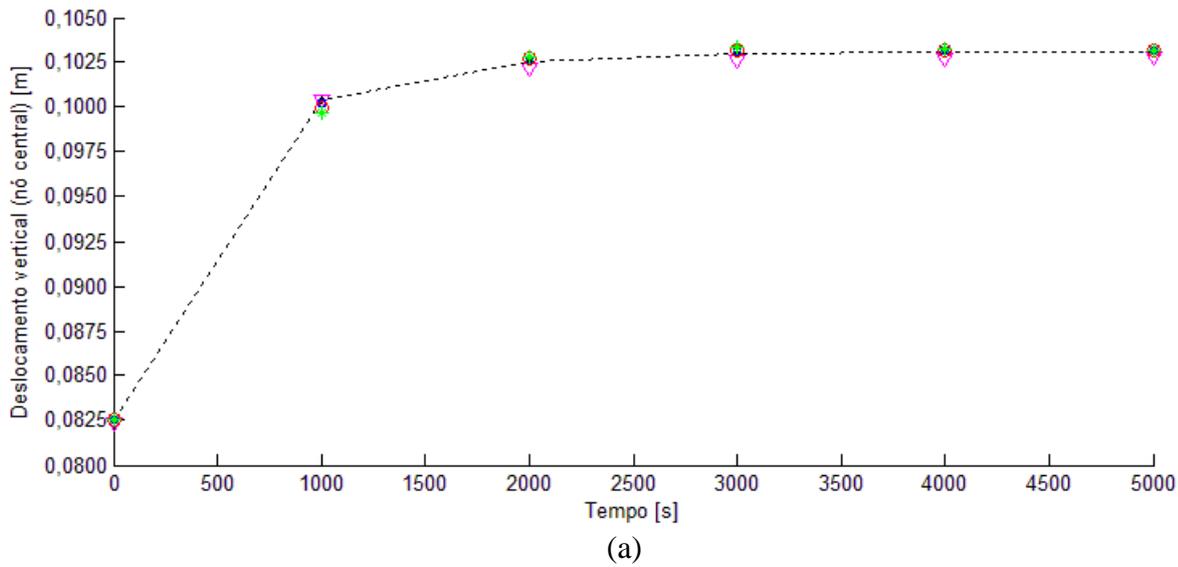


Figura 5-21: (a) Influência do número de elementos nos deslocamentos da viga (item 5.2); (b) Detalhe para 1000 s; (c) Detalhe para 5000 s

5.5.5 Influência do módulo de elasticidade longitudinal E_1

Neste item é analisada a influência da variação do módulo de elasticidade longitudinal E_1 , conforme modelo reológico padrão de sólido, sendo os demais parâmetros do material e de discretização mantidos conforme exemplos dos itens 5.1 e 5.2. Nesses exemplos é possível observar que o módulo de elasticidade longitudinal adotado para fase elástica é igual a 70,0 GPa e que, a princípio, é adotada uma proporção de 80% deste para ao módulo de elasticidade longitudinal E_1 e de 20% para o módulo de elasticidade longitudinal E_2 . Neste item E_2 é mantido constante e é considerada apenas a variação na proporção referente ao módulo de elasticidade longitudinal E_1 , sendo adotado para esta 90%, 70%, 50% e 30% do módulo de elasticidade adotado para fase elástica, tanto para barra quanto para viga.

Nas Figuras 5-22 e 5-23 são apresentados, respectivamente, os resultados de deslocamento ao longo do tempo e de sensibilidade dos deslocamentos viscoelásticos para determinados intervalos de tempo com a variação do módulo de elasticidade longitudinal E_l , para o caso da barra. Já para o caso da viga, os resultados de deslocamento ao longo do tempo e de sensibilidade dos deslocamentos viscoelásticos para determinados intervalos de tempo com a variação do módulo de elasticidade longitudinal E_l são apresentados, respectivamente, nas Figuras 5-24 e 5-25.

A partir das Figuras 5-22 a 5-25 é possível observar uma tendência de aumento exponencial dos deslocamentos viscoelásticos, em cada um dos cinco intervalos de tempo considerados, com a redução no módulo de elasticidade longitudinal E_l , utilizando-se a formulação apresentada e o código implementado. Com esses resultados é possível verificar uma sensibilidade considerável do comportamento de fluência ao longo de todo o período de tempo em relação à variação do módulo de elasticidade E_l , sendo observada uma redução dessa sensibilidade ao longo do tempo. Além disso, assim como já mencionado no item 3.2, esses resultados estão de acordo com a teoria da viscoelasticidade e com as características físicas do modelo padrão de sólido, em que o deslocamento viscoelástico final (após um intervalo de tempo suficientemente grande) é determinado pelo módulo de elasticidade longitudinal E_l .

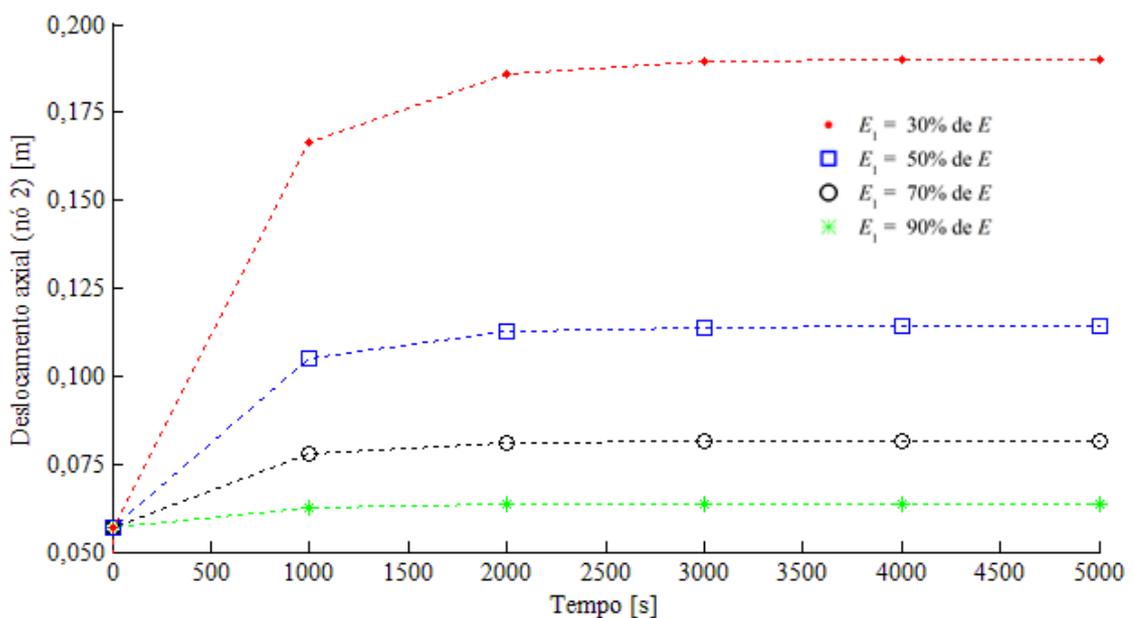


Figura 5-22: Influência do módulo de elasticidade longitudinal E_l nos deslocamentos da barra (item 5.1)

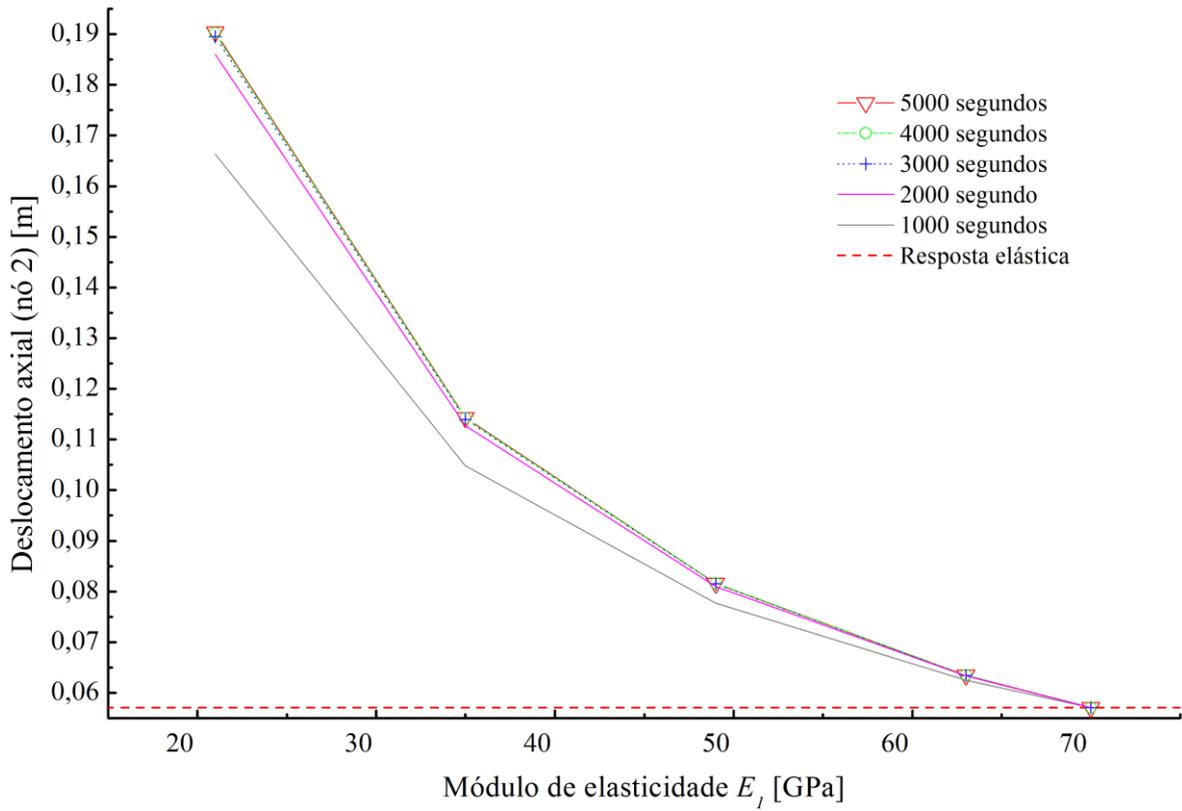


Figura 5-23: Sensibilidade dos deslocamentos viscoelásticos da barra (item 5.1) para determinados intervalos de tempo com a variação do módulo de elasticidade longitudinal E_l

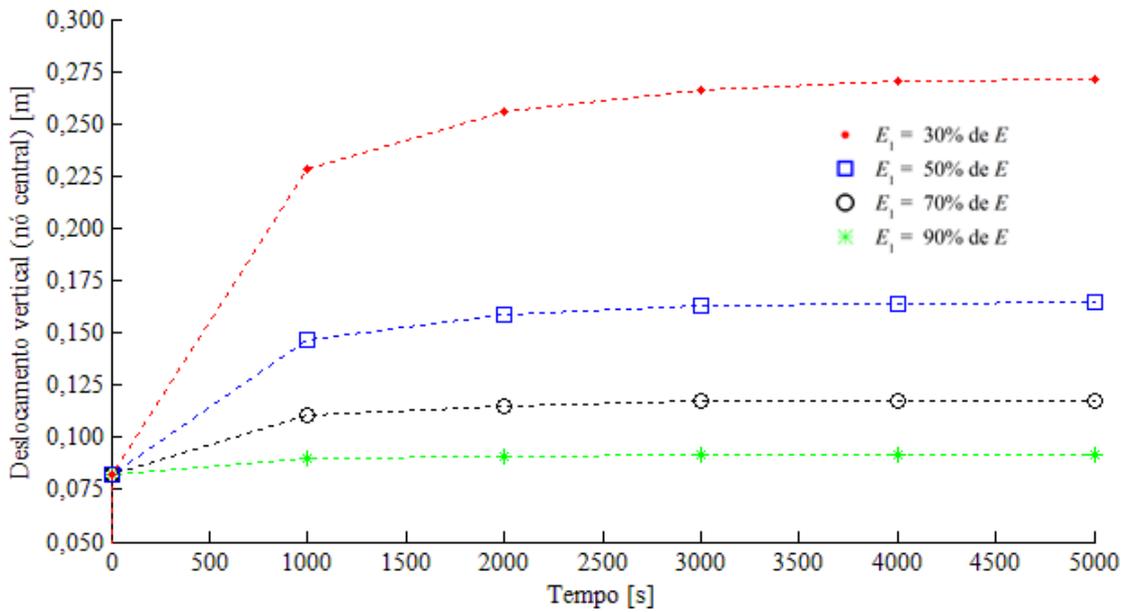


Figura 5-24: Influência do módulo de elasticidade longitudinal E_l nos deslocamentos da viga (item 5.2)

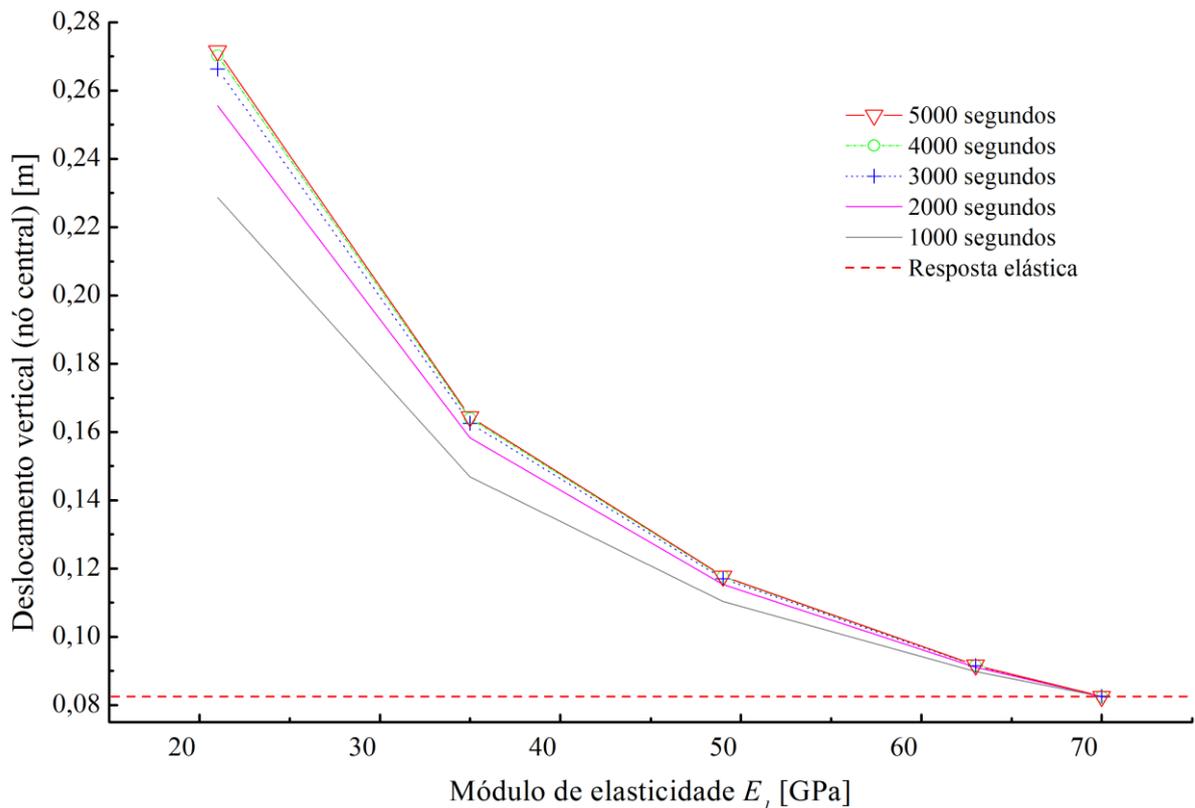


Figura 5-25: Sensibilidade dos deslocamentos viscoelásticos da viga (item 5.2) para determinados intervalos de tempo com a variação do módulo de elasticidade longitudinal E_l

Adicionalmente, o modelo padrão de sólido pode ser reduzido ao modelo de Maxwell (um elemento elástico em série com um elemento viscoso) levando-se o módulo de elasticidade longitudinal E_1 à zero, como pode ser conferido na Figura 5-26.

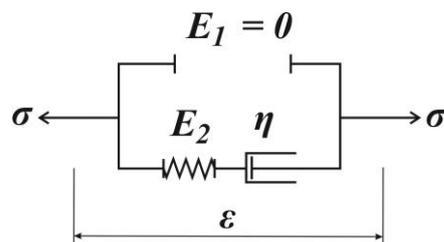


Figura 5-26: Modelo de Maxwell a partir da redução do modelo padrão de sólido

Assim, com o intuito de demonstrar tal aplicação, é adotado um módulo de elasticidade longitudinal E_1 igual a zero, um módulo de elasticidade longitudinal E_2 igual ao módulo de elasticidade da fase elástica ($E_2 = 100\%$ de E) e um módulo de viscosidade η igual a $5,0 \times 10^5$ GPa·s. Os resultados de deslocamento ao longo do tempo obtidos para barra, utilizando-se esses parâmetros, estão expostos na Figura 5-27.

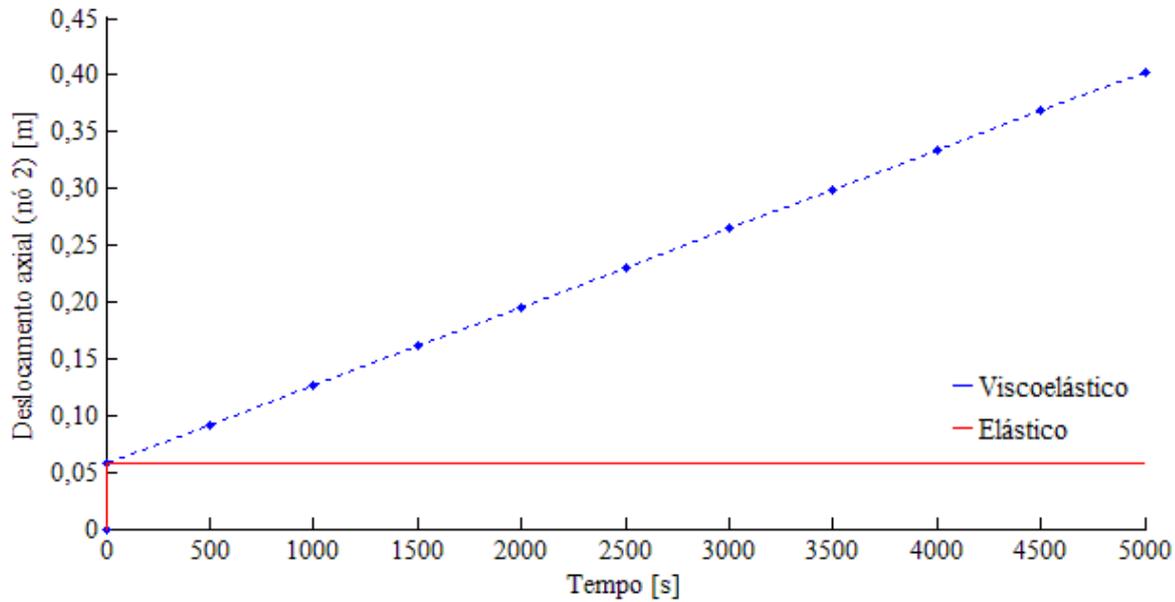


Figura 5-27: Deslocamento da barra (item 5.1) ao longo do tempo com $E_I = 0$

Da mesma forma, para viga, pode-se obter os resultados expostos na Figura 5-28. Neste caso, diferentemente do item 5.2, devido a problemas de estabilidade numérica é adotada uma força de 1000 N.

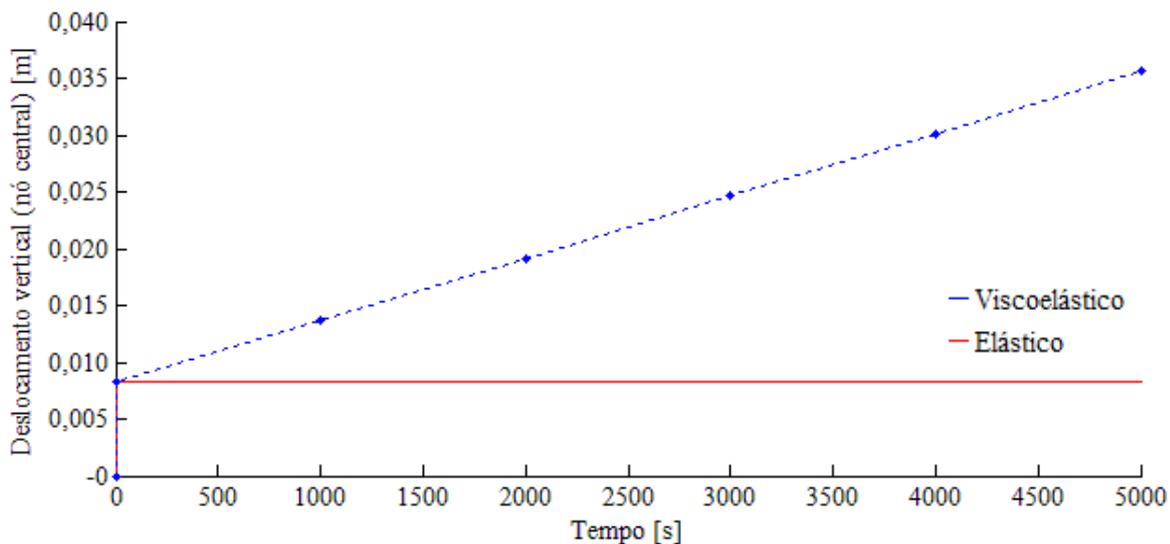


Figura 5-28: Deslocamento da viga (item 5.2) ao longo do tempo com $E_I = 0$

Os resultados apresentados nas Figuras 5-27 e 5-28 estão de acordo com a teoria da viscoelasticidade e demonstram a capacidade de representação do modelo de Maxwell, a partir da formulação desenvolvida. Tal modelo, sob um estado de tensão constante, apresenta uma deformação elástica instantânea seguida de uma deformação viscoelástica contínua com

taxa de deformação constante, comportamento característico de um material fluido (Marques e Creus, 2012; Findley *et al.*, 1989).

5.5.6 Influência do módulo de elasticidade longitudinal E_2

Neste item é analisada a influência da variação do módulo de elasticidade longitudinal E_2 , conforme o modelo reológico padrão de sólido, sendo os demais parâmetros do material e de discretização mantidos conforme os exemplos dos itens 5.1 e 5.2. Para tanto, E_1 é mantido constante e é considerada apenas a variação na proporção referente ao módulo de elasticidade longitudinal E_2 , sendo adotado para esta 10%, 30%, 50% e 70% do módulo de elasticidade adotado para fase elástica, tanto para barra quanto para viga. Nas Figuras 5-29 e 5-30 são apresentados os resultados de deslocamento ao longo do tempo com as diferentes proporções do módulo de elasticidade longitudinal E_2 , respectivamente, para a barra e para a viga.

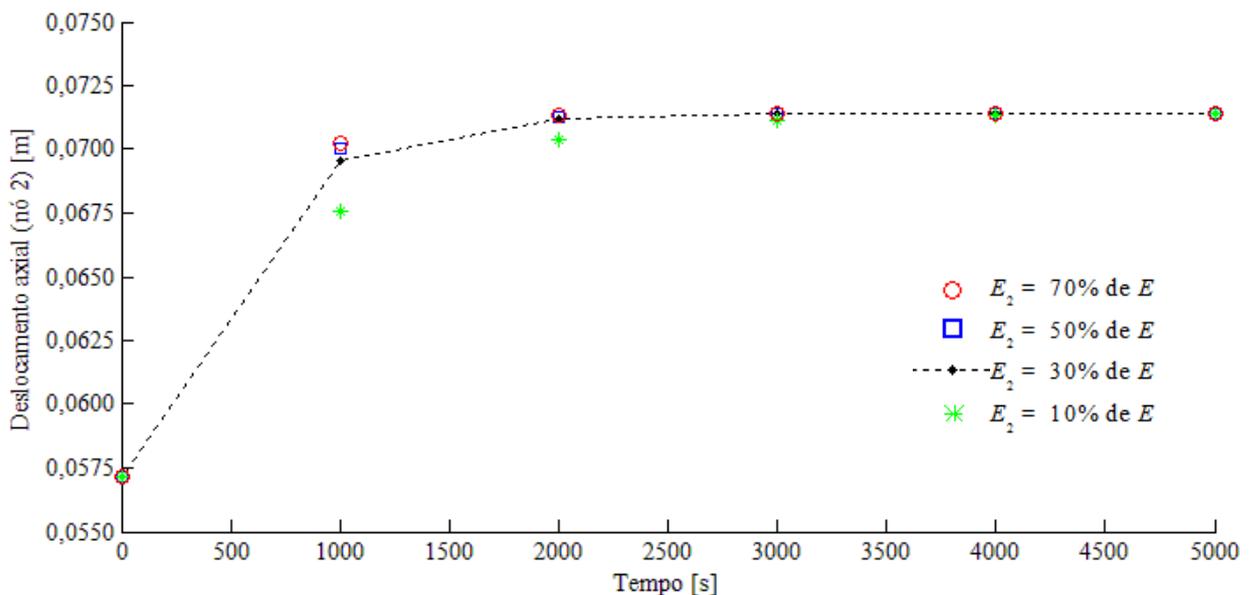


Figura 5-29: Influência do módulo de elasticidade longitudinal E_2 nos deslocamentos da barra (item 5.1)

Assim como detalhado no final do capítulo 4 e ilustrado na Figura 4-2, fisicamente, a mola em série com o amortecedor que foi deformada na fase elástica tende a recuperar a sua configuração não deformada com o decorrer do tempo. Dessa forma, para uma mesma deformação elástica inicial, quanto maior o módulo de elasticidade longitudinal E_2 dessa mola maior é a energia armazenada. Conseqüentemente, quanto maior o módulo de elasticidade longitudinal E_2 maior é a força exercida pela mola sobre o amortecedor e, para um mesmo valor de módulo de viscosidade, mais rápida é dada essa recuperação da configuração não

deformada. No entanto, após um intervalo de tempo suficientemente grande, a deformação viscoelástica final se torna independente desse parâmetro. Os resultados apresentados nas Figuras 5-29 e 5-30 estão em concordância com essa descrição física do comportamento do modelo e com o comportamento esperado pela teoria da viscoelasticidade, apresentando uma convergência para um mesmo valor de deslocamento final de forma mais rápida conforme é aumentado o módulo de elasticidade longitudinal E_2 .

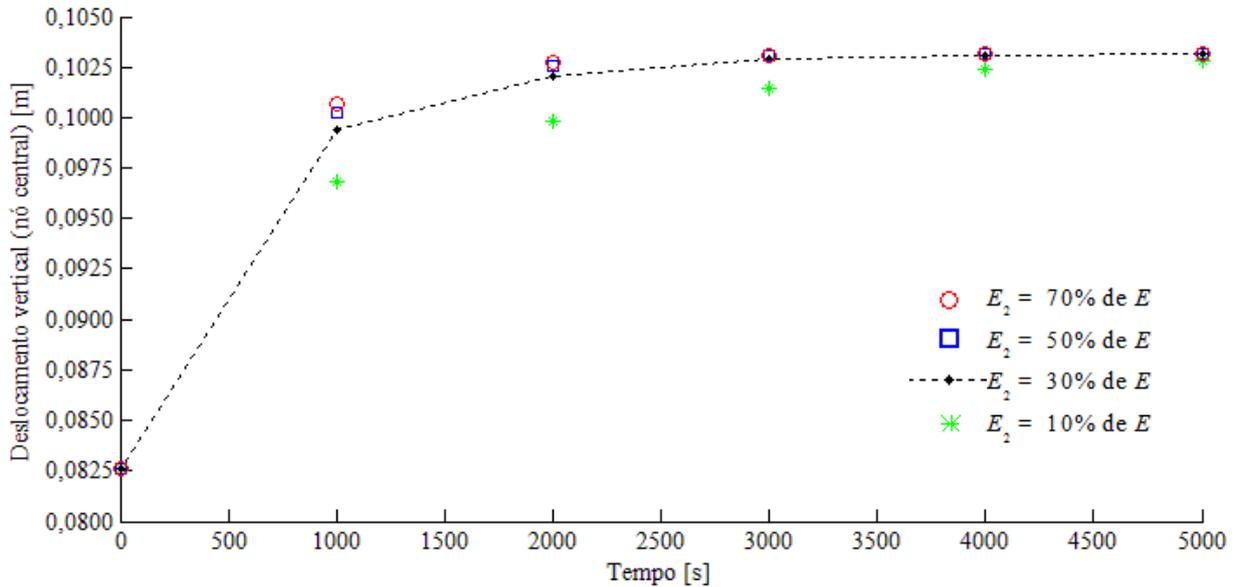


Figura 5-30: Influência do módulo de elasticidade longitudinal E_2 nos deslocamentos da viga (item 5.2)

Adicionalmente, o modelo padrão de sólido pode ser reduzido ao modelo de Kelvin-Voigt (um elemento elástico em paralelo com um elemento viscoso) tendendo-se o módulo de elasticidade longitudinal E_2 ao infinito, como pode ser conferido na Figura 5-31.

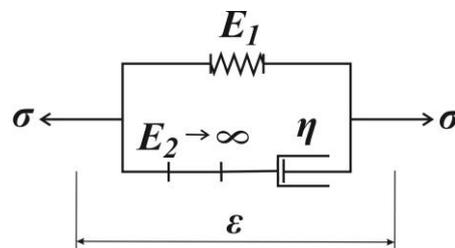


Figura 5-31: Modelo de Kelvin-Voigt a partir da redução do modelo padrão de sólido

Assim, com o intuito de demonstrar tal aplicação, é adotado um módulo de elasticidade longitudinal E_2 igual a 1×10^{99} Pa, um módulo de elasticidade longitudinal E_1 igual ao módulo de elasticidade da fase elástica ($E_1 = 100\% \text{ de } E$) e um módulo de viscosidade η igual a

$5,0 \times 10^5$ GPa·s. Os resultados de deslocamento ao longo do tempo obtidos para a barra e para a viga, utilizando-se esses parâmetros, estão expostos respectivamente nas Figuras 5-32 e 5-33.

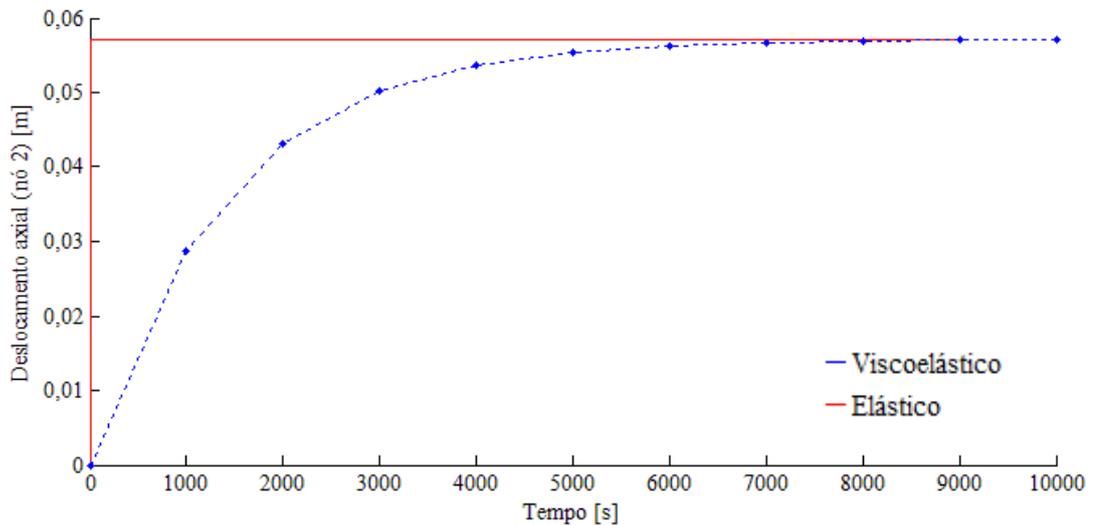


Figura 5-32: Deslocamento da barra (item 5.1) ao longo do tempo com E_2 tendendo ao infinito

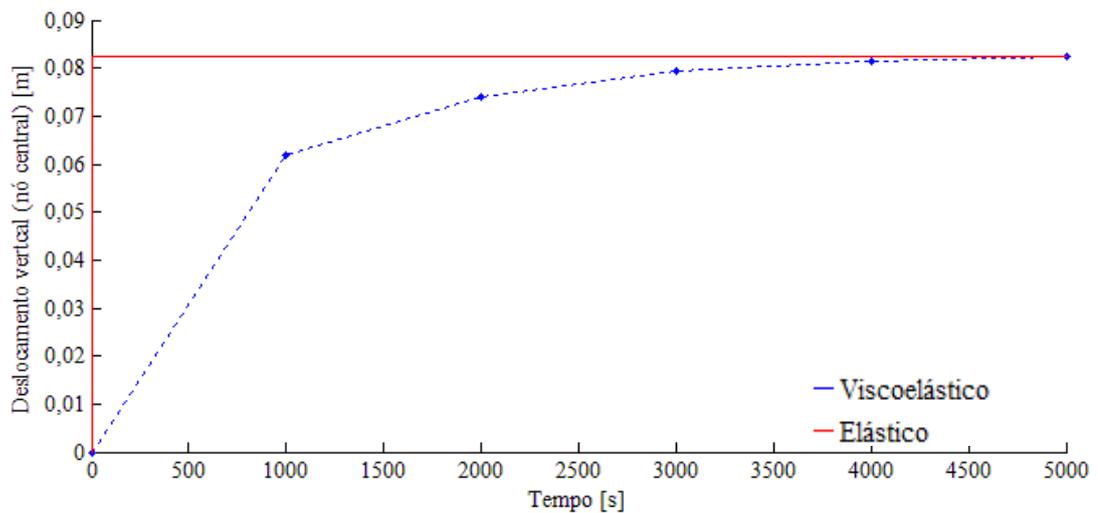


Figura 5-33: Deslocamento da viga (item 5.2) ao longo do tempo com E_2 tendendo ao infinito

Os resultados apresentados nas Figuras 5-32 e 5-33 estão de acordo com a teoria da viscoelasticidade e demonstram a capacidade de representação do modelo de Kelvin-Voigt, a partir da formulação desenvolvida. Tal modelo, sob um estado de tensão constante, não apresenta deformação elástica instantânea, mas, uma deformação elástica amortecida (com taxa de deformação decrescente). Nesse caso, após um intervalo de tempo suficientemente grande, o elemento atinge de forma amortecida um valor de deslocamento máximo igual ao

deslocamento que um elemento constituído de material elástico atingiria (Marques e Creus, 2012; Findley *et al.*, 1989).

5.5.7 Influência do módulo de viscosidade η

Neste item é analisada a influência da variação do módulo de viscosidade η , conforme o modelo reológico padrão de sólido, sendo os demais parâmetros do material e de discretização mantidos conforme os exemplos dos itens 5.1 e 5.2. Para tanto, são adotados quatro valores distintos para o módulo de viscosidade, $5,0 \times 10^3$ GPa·s; $10,0 \times 10^3$ GPa·s; $20,0 \times 10^3$ GPa·s e $40,0 \times 10^3$ GPa·s. Nas Figuras 5-34 e 5-35 são apresentados os deslocamentos ao longo do tempo, respectivamente, para a barra e para a viga.

Conforme esperado pela teoria da viscoelasticidade e pelo comportamento esperado e ilustrado na Figura 4-2, a variação do módulo de viscosidade influencia na taxa de deformação, tornando a deformação mais rápida ou mais lenta conforme valor adotado para este parâmetro. Ou seja, quanto maior o módulo de viscosidade mais viscoso é o material constituinte do elemento estrutural e, ilustrativamente, maior é o tempo necessário para gerar uma mesma deformação no amortecedor presente no modelo padrão de sólido. Essa descrição está de acordo com os resultados de deslocamentos ao longo do tempo na barra e na viga apresentados nas Figuras 5-34 e 5-35, respectivamente, e obtidos a partir da formulação proposta e implementada computacionalmente.

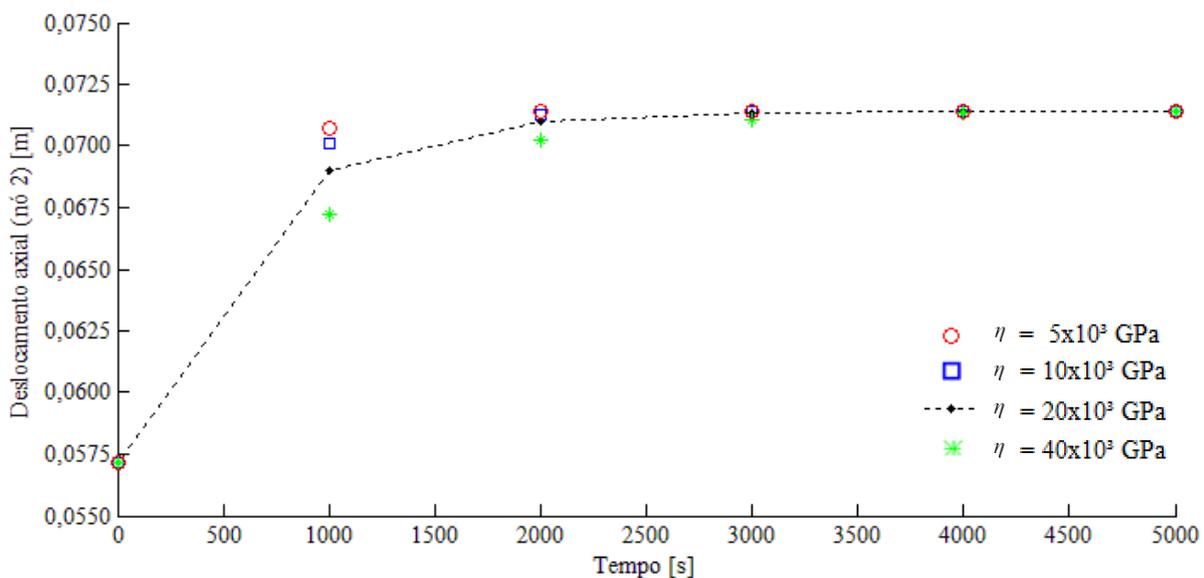


Figura 5-34: Influência do módulo de viscosidade η nos deslocamentos da barra (item 5.1)

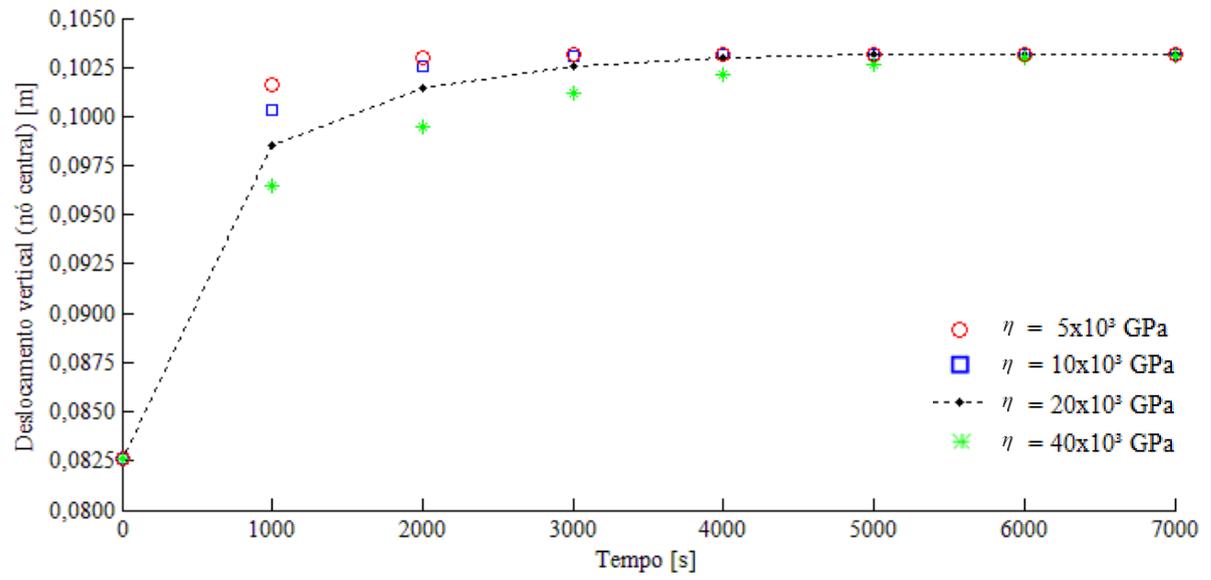


Figura 5-35: Influência do módulo de viscosidade η nos deslocamentos da viga (item 5.2)

6

CALIBRAÇÕES E EXEMPLOS QUANTITATIVOS

Os exemplos e análises apresentados no capítulo anterior têm valor exclusivamente qualitativo, ou seja, os resultados apresentam uma tendência do comportamento de fluência utilizando-se a formulação proposta e o código implementado. Dessa forma, os valores numéricos obtidos não descrevem necessariamente o comportamento viscoelástico real de um elemento estrutural constituído por um material específico.

Visto isso, o presente capítulo é dedicado a apresentar três exemplos de calibração da formulação, com base em resultados experimentais obtidos na literatura, assim como exemplos quantitativos utilizando as respectivas calibrações. Estes exemplos serão desenvolvidos a fim de demonstrar a capacidade de ajuste e representação quantitativa do comportamento de fluência para materiais específicos a partir de um método simples de calibração da formulação apresentada.

6.1 Calibração com base em ensaios de fluência à tração em PRFV

O primeiro exemplo de calibração é baseado nos resultados experimentais apresentados em Youssef (2010). Esses resultados são obtidos de ensaios de fluência à tração em barras pultrudadas de Plástico Reforçado com Fibra de Vidro (PRFV), constituídas de fibras de vidro do tipo E-Glass de alta resistência (77,3% por volume) e resina vinil éster. As barras ensaiadas possuem um metro de comprimento, área da seção transversal circular de $70,88 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ e módulo de elasticidade da fase elástica igual a 46,9 GPa. Os ensaios se baseiam na obtenção das deformações por fluência das barras, ao longo de 10000 horas, sob estado de tensão uniaxial constante em quatro níveis diferentes de tensão (15%, 30%, 45% e 60% em relação à tensão última do material, que é de 854 MPa). Os resultados experimentais do ensaio de fluência à tração uniaxial constante, nos quatro níveis de tensão, estão representados por pontos discretos na Figura 6-1.

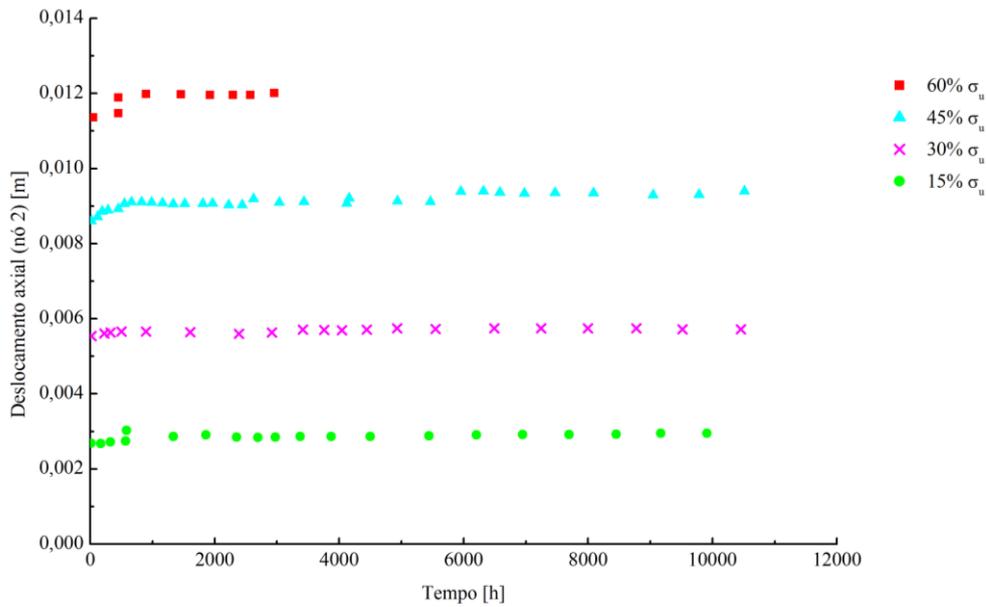


Figura 6-1: Resultados de deslocamentos axiais por fluência à tração para o PRFV (adaptado de Youssef, 2010)

A metodologia de calibração adotada neste item consiste na simulação numérica do ensaio de Youssef (2010) a partir da obtenção de conjuntos de parâmetros (E_1 , E_2 e η) do modelo padrão de sólido. Esses conjuntos de parâmetros são definidos por tentativa e erro de forma a obter uma melhor aproximação dos resultados numéricos em relação aos resultados experimentais para cada nível de tensão. Em seguida, a partir desses conjuntos de parâmetros e utilizando-se o método dos mínimos quadrados, são obtidas equações de ajuste dos parâmetros do modelo padrão de sólido em função do nível de tensão. Os procedimentos adotados nesta metodologia são apresentados de forma mais detalhada no apêndice apresentado no final do trabalho. Dessa forma, é adotada uma calibração em âmbito local, ou seja, é considerado o nível de tensão em cada ponto de Gauss distribuído no elemento.

No modelo numérico utilizado na simulação a barra é discretizada por um elemento de pórtico engastado em uma das extremidades e livre na outra extremidade, como ilustrado na Figura 6-2. As forças são aplicadas na extremidade livre e referem-se às forças de tração que fornecem os quatro níveis de tensão ensaiados.

Utilizando-se o método dos mínimos quadrados entre os parâmetros que fornecem os melhores ajustes e o nível de tensão aplicado, assim como apresentado no apêndice, é possível obter as regressões quadráticas apresentadas nas Equações (6-1) e (6-2), respectivamente, para o módulo de viscosidade η e para o módulo de elasticidade longitudinal E_1 , sendo o módulo de elasticidade longitudinal E_2 calculado pela Equação (6-3).

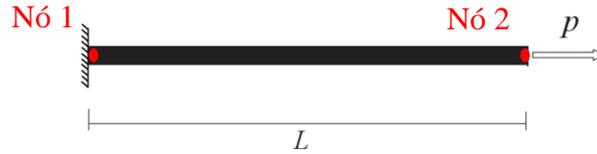


Figura 6-2: Modelo da barra traciona

$$\eta = 7,2500 \cdot 10^{13} - 1,9516 \cdot 10^4 |\sigma| - 1,5235 \cdot 10^{-4} \sigma^2 \quad (6-1)$$

$$E_1 = (0,9934 - 5,7433 \cdot 10^{-11} |\sigma| - 1,0882 \cdot 10^{-19} \sigma^2) \cdot E \quad (6-2)$$

$$E_2 = E - E_1 \quad (6-3)$$

Nas Equações (6-1) e (6-2), $|\sigma|$ representa o valor absoluto do nível de tensão, sendo o valor do nível de tensão σ inserido em Pascal [Pa]. Assim, é considerado, por simplificação, que o material apresenta as mesmas propriedades mecânicas tanto no comportamento de fluência à tração quanto à compressão. O que pode ser uma fonte de erro, visto que, em geral, o comportamento mecânico de elementos estruturais de plástico reforçado com fibra de vidro não é simétrico em relação à tensão. As curvas que descrevem o comportamento dos parâmetros η e E_I com o nível de tensão σ aplicado, descritas pelas Equações (6-1) e (6-2), podem ser conferidas pelas Figuras 6-3 e 6-4, respectivamente.

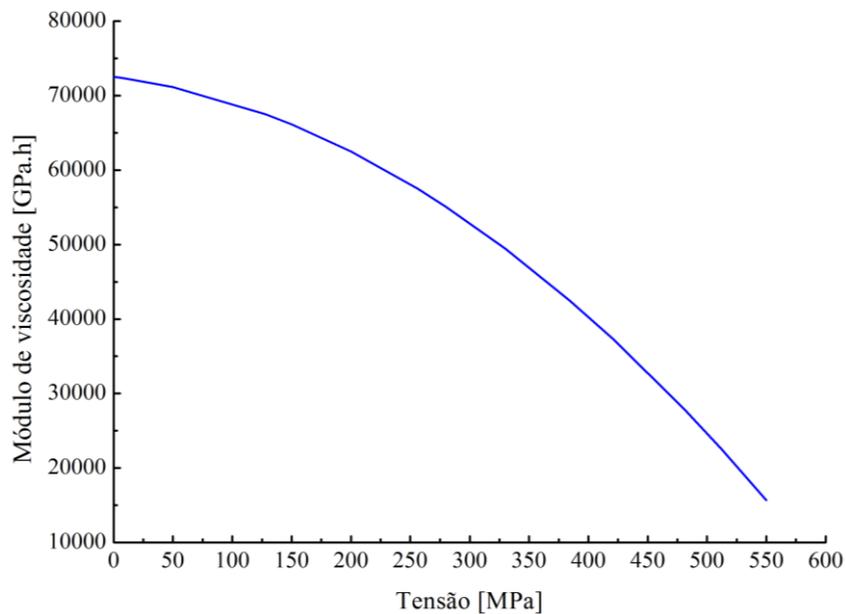


Figura 6-3: Relação entre o módulo de viscosidade η e o nível de tensão σ para o PRFV

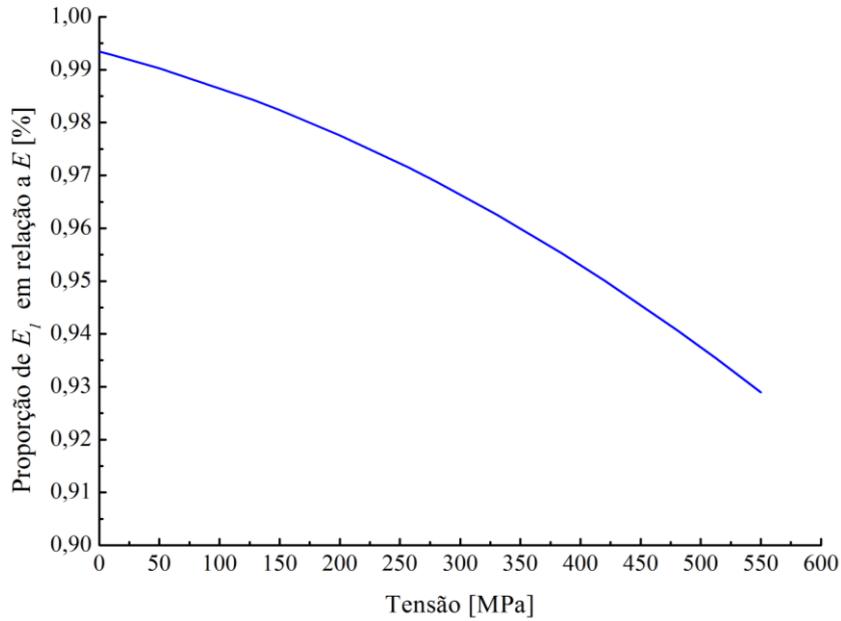


Figura 6-4: Relação entre o módulo de elasticidade longitudinal E_l e o nível de tensão σ para o PRFV

Na sequência, o ensaio realizado por Youssef (2010) é novamente simulado numericamente utilizando-se a formulação calibrada por meio da substituição das Equações (6-1), (6-2) e (6-3) na Equação (3-37) ou na Equação (4-2). Os resultados numéricos obtidos pela formulação calibrada dessa forma estão representados na Figura 6-5 pelas linhas tracejadas nos quatro níveis de tensão e demonstram a capacidade de ajuste da formulação.

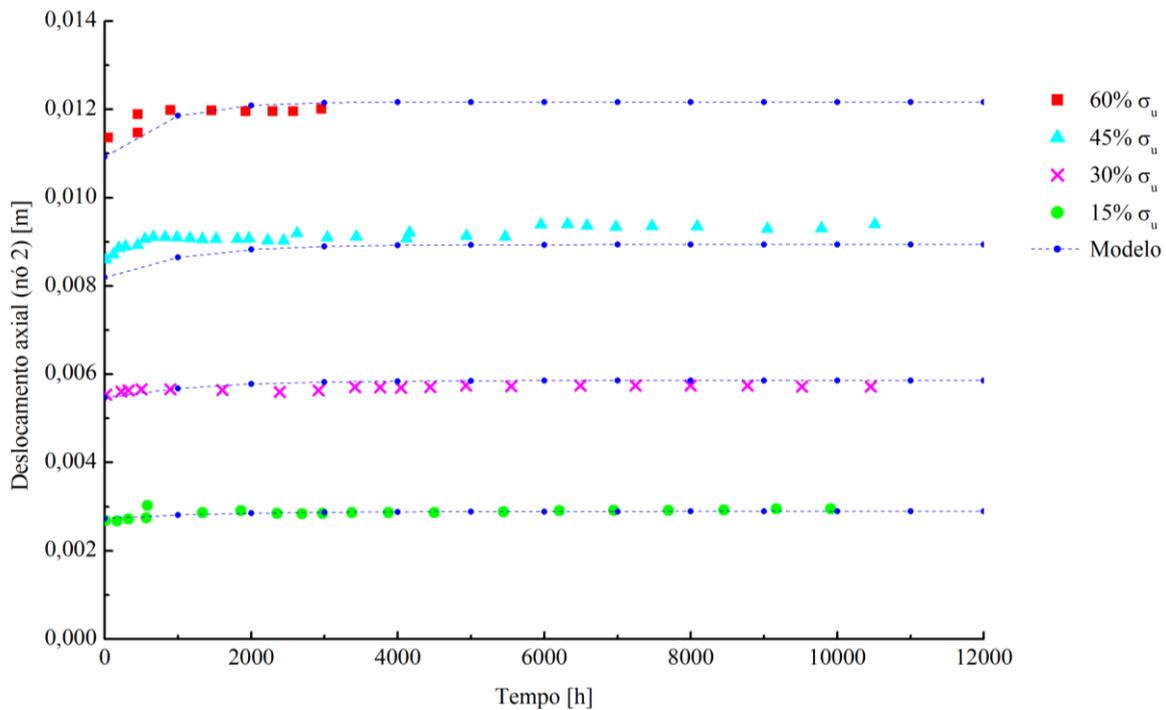


Figura 6-5: Deslocamentos axiais numéricos e experimentais para o PRFV

Apesar da metodologia de calibração ser baseada em ensaios de fluência à tração em barras, considerando a abordagem adotada na formulação, em que um elemento estrutural pode ser idealizado como um feixe de barras, e considerando que a contribuição da fluência em um material é diretamente relacionada ao nível de tensão a partir, por exemplo, das Equações (6-1) e (6-2), a formulação calibrada pode ser utilizada para descrever o comportamento de fluência à flexão. Nesse caso, cada uma dessas barras do feixe idealizado estará submetida a um nível de tensão definido pelo perfil de distribuição de tensão ao longo da altura do elemento estrutural e, dessa forma, estará submetida exclusivamente à tração ou à compressão, dependendo da localização em relação à linha centroidal.

Três exemplos numéricos são apresentados nos itens seguintes com o intuito de demonstrar a capacidade de representação quantitativa da formulação calibrada no comportamento de fluência à flexão de elementos estruturais pultrudados de PRFV. Dessa forma, para os três exemplos seguintes, as propriedades mecânicas de módulo de viscosidade η e módulo de elasticidade longitudinal E_1 seguem as relações obtidas nesta calibração e descritas pelas Equações (6-1) e (6-2). Já o módulo de elasticidade longitudinal E_2 é determinado pela Equação (6-3), em que o módulo de elasticidade da fase elástica é igual a 46,9 MPa. Além disso, nos três exemplos são adotados dez pontos de Gauss-Legendre ao longo do comprimento e dez pontos de Gauss-Lobatto ao longo da altura de cada elemento finito, a tolerância de cálculo adotada é de 10^{-8} m e a tolerância dimensional considerada é de $0,1 \times 10^{-3}$ m (um décimo de milímetro).

6.1.1 Viga biapoiada com carregamento concentrado

O primeiro exemplo quantitativo trata de uma viga biapoiada com força concentrada aplicada no centro do vão, como ilustrado na Figura 6-6. Essa viga apresenta um vão livre (L) igual a 2 m e foi discretizada em dez elementos finitos de 0,2 m de comprimento cada. A seção transversal da viga é retangular, com altura igual a 0,10 m e base igual a 0,054 m, sendo a área da seção transversal de cada elemento igual a $5,4 \times 10^{-3}$ m² e a inércia da seção igual a $4,5 \times 10^{-6}$ m⁴. A força (p) foi aplicada em um único passo no centro do vão com intensidade de 100 kN e direção vertical para baixo. A análise foi realizada considerando-se seis intervalos de tempo de $\Delta t = 1000$ h, totalizando uma análise de 6000 horas.

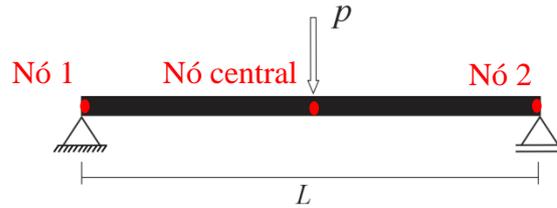


Figura 6-6: Viga de PRFV biapoiada com carregamento concentrado

Os resultados de evolução da flecha no centro do vão ao longo do tempo para os casos elástico e viscoelástico estão expostos na Figura 6-7. Já na Figura 6-8 estão expostas as posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica da viga.

Neste caso, a viga apresentou flecha viscoelástica numérica máxima de 0,0814 m, com um período de aproximadamente 4000 h para a estabilização da fluência, considerando-se a tolerância dimensional adotada. Apresentando, dessa forma, um aumento de aproximadamente 3,8% em relação à flecha elástica que foi de 0,0784 m. Já a tensão numérica máxima na viga foi de aproximadamente 500 MPa, valor abaixo do limite máximo do material (854 MPa) e dentro da faixa ensaiada e calibrada (128 MPa – 512 MPa).

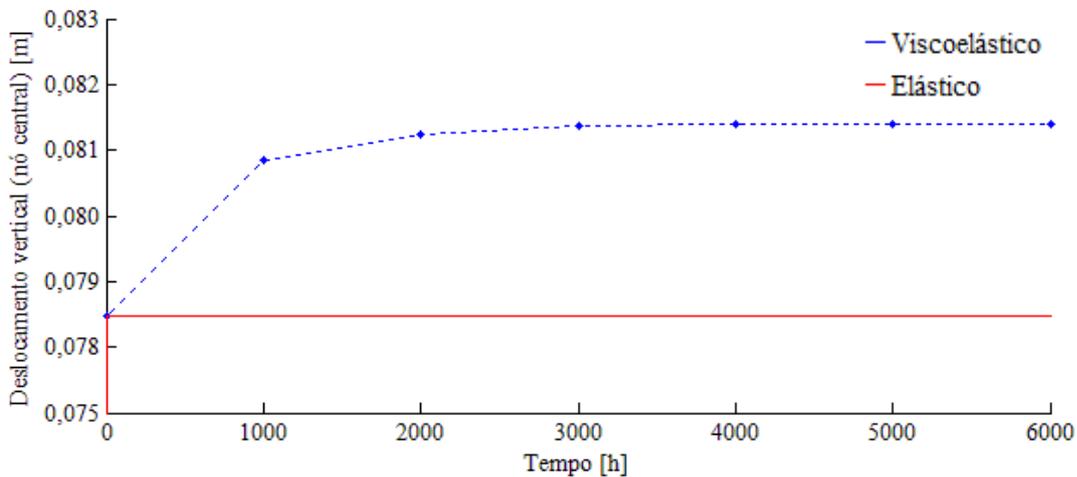


Figura 6-7: Evolução da flecha ao longo do tempo na viga de PRFV biapoiada

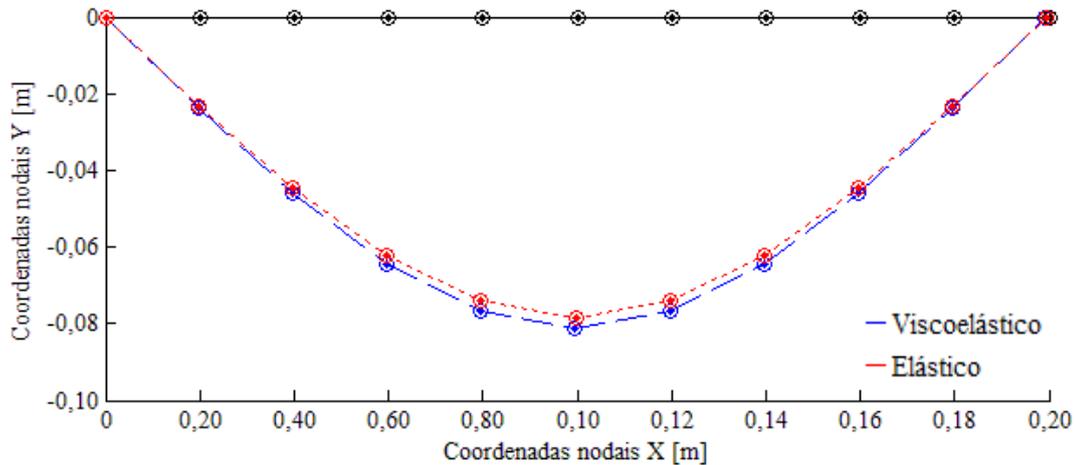


Figura 6-8: Posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica, viga de PRFV biapoçada

6.1.2 Viga biengastada com carregamento concentrado

O segundo exemplo quantitativo trata de uma viga biengastada com força concentrada aplicada no centro do vão, como ilustrado na Figura 6-9, e com os mesmos dados de carregamento, material, geometria e discretização do exemplo anterior, bem como a estratégia de análise adotada.

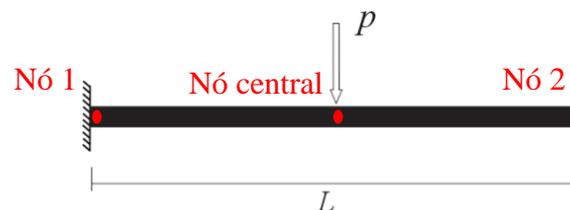


Figura 6-9: Viga de PRFV biengastada com carregamento concentrado

Os resultados de evolução da flecha no centro do vão ao longo do tempo para os casos elástico e viscoelástico estão expostos na Figura 6-10. Já na Figura 6-11 estão expostas as posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica da viga.

Neste caso, a viga apresentou flecha viscoelástica numérica máxima de 0,0196 m, com um período de aproximadamente 2000 h para a estabilização da fluência, considerando-se a tolerância dimensional adotada. Apresentando, dessa forma, um aumento de aproximadamente 2,0% em relação à flecha elástica que foi de 0,0192 m. Já a tensão numérica máxima na viga foi de aproximadamente 235 MPa, valor abaixo do limite máximo do material (854 MPa) e dentro da faixa ensaiada e calibrada (128 MPa – 512 MPa).

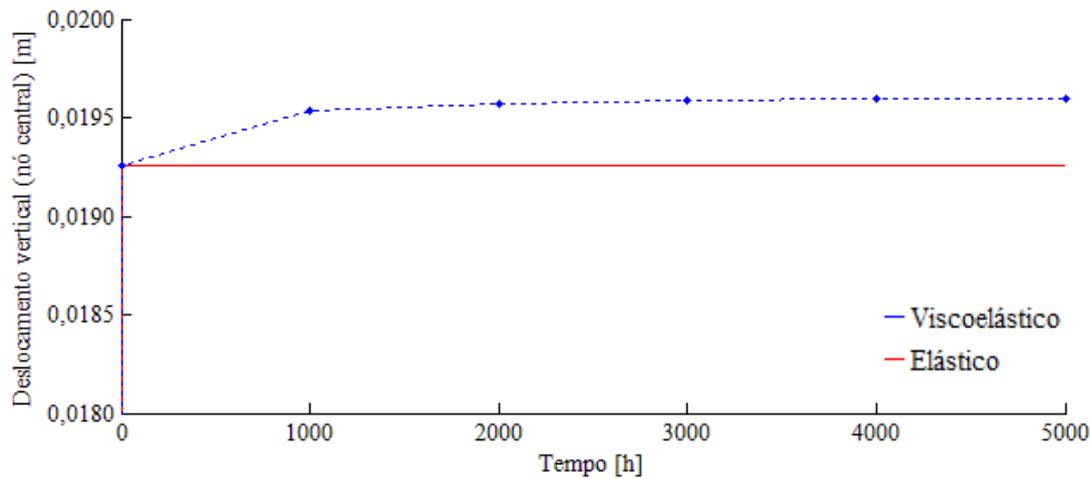


Figura 6-10: Evolução da flecha ao longo do tempo na viga de PRFV biengastada

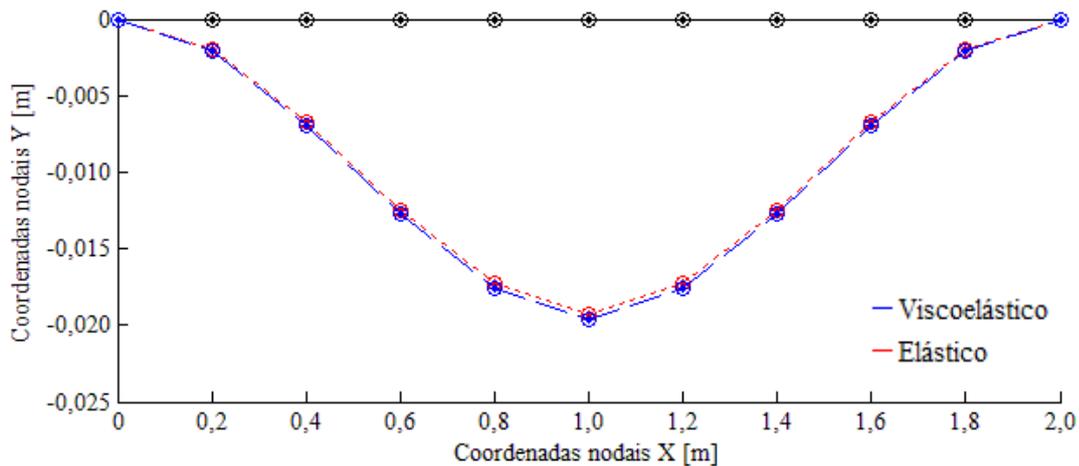


Figura 6-11: Posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica, viga de PRFV biengastada

A partir dos resultados apresentados, neste exemplo e no exemplo anterior, é possível observar que para a viga biengastada a contribuição da fluência foi menos pronunciada em relação à viga biapoiada. Isso se deve principalmente à diferença na distribuição e valores máximos das tensões normais ao longo das vigas nos dois exemplos, consequência da distribuição dos esforços internos de flexão, e ao fato do comportamento viscoelástico estar relacionado aos níveis de tensão que um determinado material está submetido.

6.1.3 Pórtico engastado

O terceiro exemplo quantitativo trata da análise de um pórtico formado por uma viga e dois pilares. As ligações entre esses membros são consideradas rígidas e as bases dos pilares são

engastadas. O pórtico está submetido a um carregamento uniformemente distribuído ao longo de toda a viga, além, de um carregamento concentrado no nó que une o pilar lateral esquerdo e a viga. A geometria do pórtico, a distribuição das forças e as condições de contorno nos apoios estão ilustradas na Figura 6-12.

Tanto os pilares quanto a viga, expostos na Figura 6-12, apresentam comprimento (L) igual 6 m e foram discretizados em seis elementos finitos de 1,0 m de comprimento cada, totalizando dezoito elementos na estrutura. A seção transversal dos elementos é retangular, com altura igual a 0,10 m e base igual a 0,054 m, sendo a área da seção transversal de cada elemento igual a $5,4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ e a inércia da seção igual $4,5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. Já as forças foram aplicadas em um único passo, com força distribuída (w) de intensidade 11666,7 N/m e força concentrada (p) de intensidade 1000 N. A análise foi realizada considerando-se vinte passos de tempo de $\Delta t = 1000 \text{ h}$, totalizando uma análise de 20000 horas.

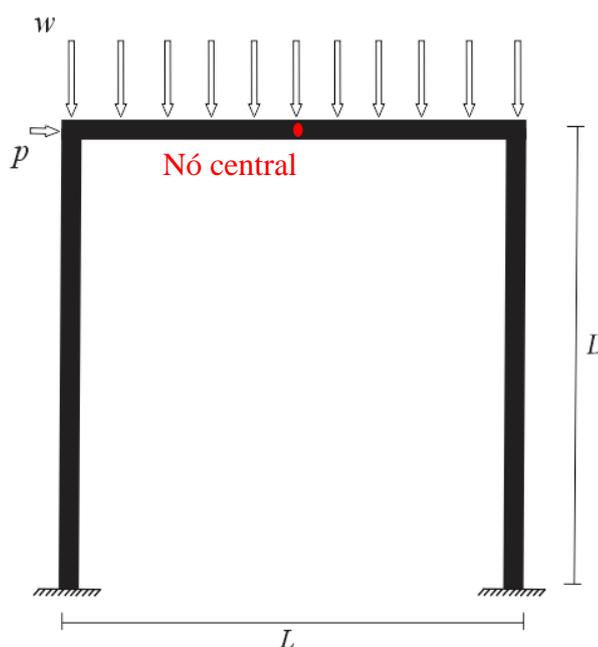


Figura 6-12: Pórtico de PRFV engastado

Os resultados apresentados nas Figuras 6-13 e 6-14 se referem aos deslocamentos do nó central da viga, respectivamente, nas direções horizontal e vertical. Já na Figura 6-15 estão expostas as posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica do pórtico.

Neste caso, em relação ao deslocamento vertical viscoelástico numérico máximo do nó central, o pórtico apresentou valor de 0,4503 m, com um período de aproximadamente 6000 h

para a estabilização da fluência, considerando-se a tolerância dimensional adotada. Já em relação ao deslocamento horizontal viscoelástico numérico máximo do nó central, o pórtico apresentou valor de 0,3181 m, com um período de aproximadamente 16000 h para a estabilização da fluência. Apresentando, dessa forma, aumentos de aproximadamente 2,7% e 10% em relação, respectivamente, ao deslocamento vertical elástico, que foi de 0,4383 m, e ao deslocamento horizontal elástico, que foi de 0,2891 m. Já a tensão numérica máxima na viga foi de aproximadamente 330 MPa, valor abaixo do limite máximo do material (854 MPa) e dentro da faixa ensaiada e calibrada (128 MPa – 512 MPa).

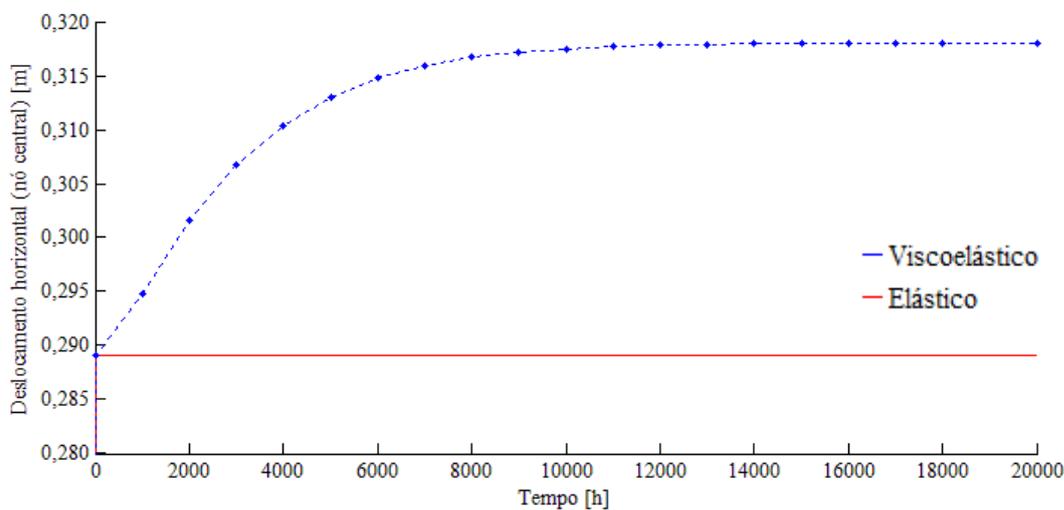


Figura 6-13: Deslocamento horizontal do nó central do pórtico de PRFV ao longo do tempo

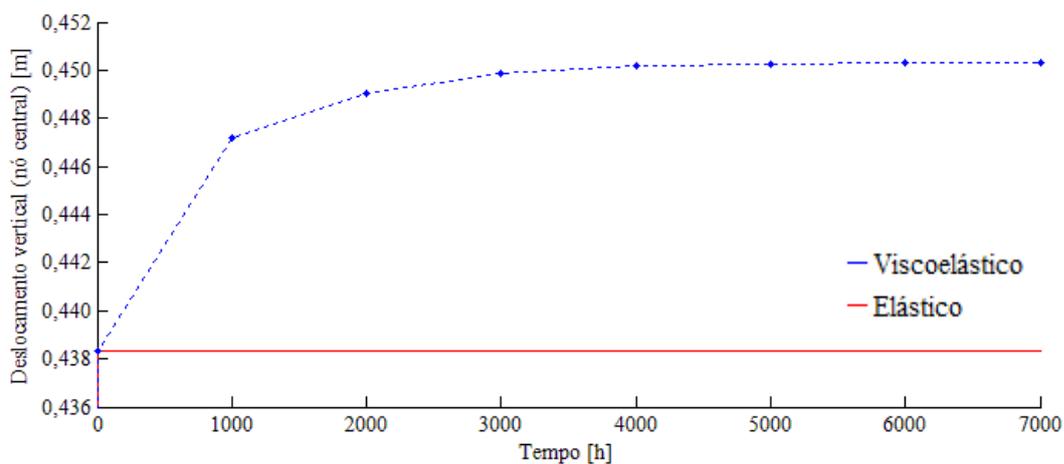


Figura 6-14: Deslocamento vertical do nó central do pórtico de PRFV ao longo do tempo

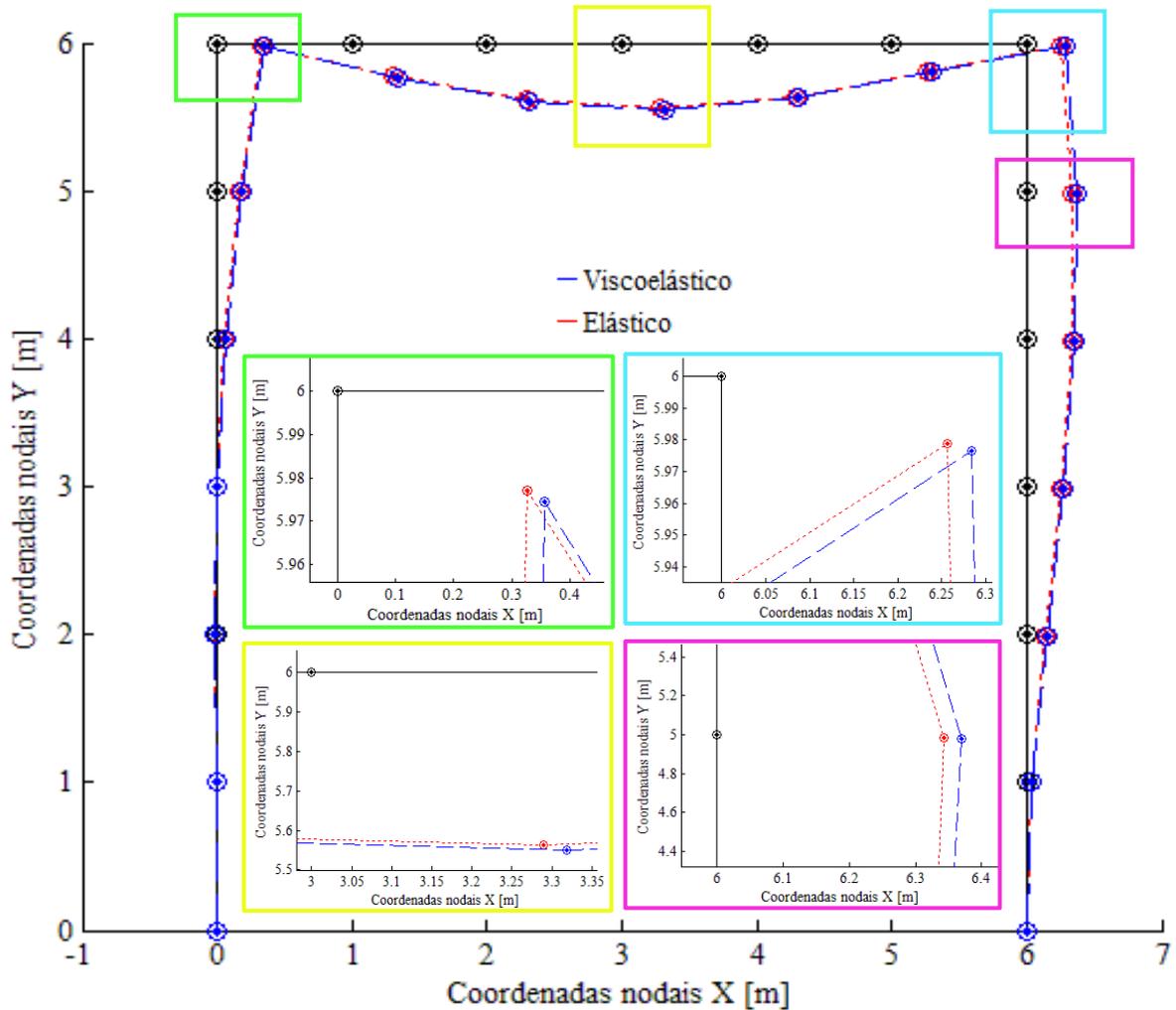


Figura 6-15: Posições de equilíbrio indeformada e deformadas elástica e viscoelástica, pórtico de PRFV

Os três exemplos apresentados demonstram a capacidade de representação quantitativa da formulação proposta a partir de uma metodologia de calibração simples com base em ensaios de fluência à tração, os quais são mais comumente encontrados na literatura. Os resultados obtidos fornecem informações importantes em relação ao comportamento de fluência à flexão em elementos estruturais pultrudados de PRFV e a relação deste comportamento com nível de tensão aplicado. Entretanto, para uma confirmação dos resultados quantitativos obtidos, se faz necessária a obtenção de resultados experimentais de fluência à flexão em vigas e pórticos constituídos do mesmo material das barras utilizadas na calibração. Além disso, um cuidado especial deve ser tomado em relação aos resultados quantitativos obtidos, visto que, assim como destacado em Bank e Mosallan (1992), os efeitos do cisalhamento no comportamento de fluência em perfis estruturais pultrudados de PRFV podem ser relevantes. Dessa forma, como na formulação apresentada foi adotada a teoria de vigas de Bernoulli-Euler, esses efeitos não foram considerados, o que pode gerar diferenças nos resultados.

6.2 Calibração com base em ensaios de fluência à tração em PEAD

O segundo exemplo de calibração é baseado nos resultados experimentais apresentados em Kühn (2014). Os resultados desse trabalho são obtidos de ensaios de fluência-recuperação em corpos de prova de Polietileno de Alta Densidade (PEAD), extraídos de tubos para transporte de água, submetidos à tração uniaxial. Sendo esses corpos de prova submetidos a sete diferentes níveis de tensão (1,8; 3,6; 5,5; 7,2; 9,1; 11,0 e 13,0 MPa) sob temperatura controlada. Os resultados de Kühn (2014) se referem aos comportamentos viscoelástico e viscoplástico não lineares do material. Dessa forma, como no presente trabalho a formulação proposta só é capaz de reproduzir o comportamento viscoelástico não linear, a influência do comportamento viscoplástico é desconsiderada dos resultados experimentais a partir de uma simples subtração das contribuições deste comportamento. Sendo essas contribuições calculadas pela equação de potência de Zapas-Crissma, como descrita em Kühn (2014).

Visto que os resultados de Kühn (2014) são dados em termos de deformação e tensão, estes podem ser adaptados para representação da fluência em termos de deslocamentos axiais em barras tracionadas com uma extremidade livre, um metro de comprimento e área da seção transversal circular igual a $70,88 \times 10^{-6} \text{ m}^2$. Os resultados adaptados de Kühn (2014), subtraindo-se a contribuição do comportamento viscoplástico e desconsiderando-se a fase de recuperação, estão representados por pontos discretos na Figura 6-16. Esses resultados se referem aos ensaios de fluência à tração uniaxial constante em cada nível de tensão.

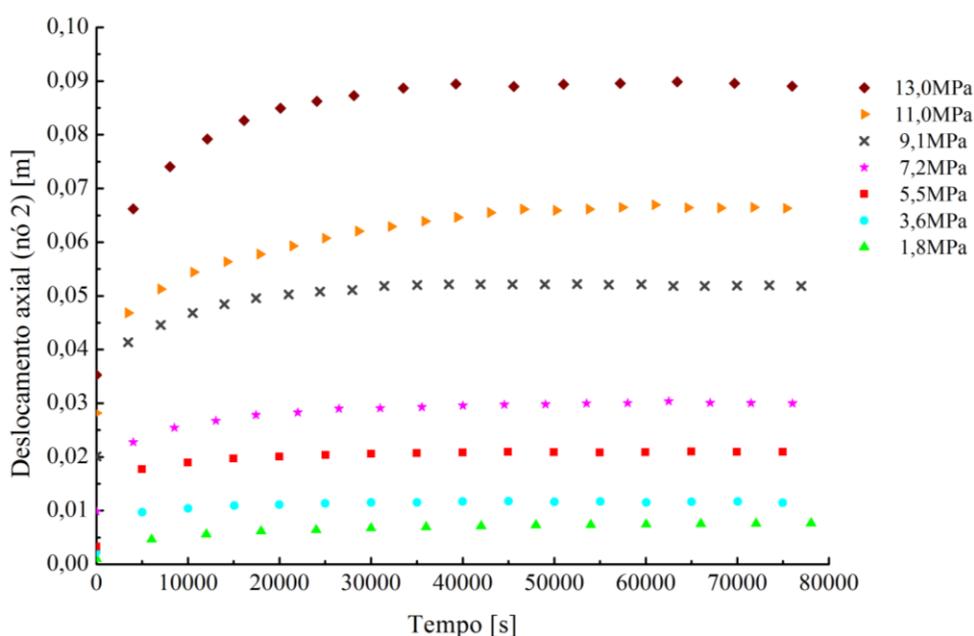


Figura 6-16: Resultados experimentais de deslocamentos axiais por fluência à tração para o PEAD

A metodologia de calibração adotada consiste na simulação numérica dos resultados adaptados do ensaio de Kühl (2014) a partir da obtenção de conjuntos de parâmetros (E_1 , E_2 e η) do modelo padrão de sólido. Esses conjuntos de parâmetros são definidos por tentativa e erro de forma a obter uma melhor aproximação dos resultados numéricos em relação aos resultados experimentais para cada nível de tensão. Em seguida, a partir desses conjuntos de parâmetros e utilizando-se o método dos mínimos quadrados, são obtidas equações de ajuste dos parâmetros do modelo padrão de sólido em função do nível de tensão. Dessa forma, é adotada uma calibração em âmbito local, ou seja, é considerado o nível de tensão em cada ponto de Gauss distribuído no elemento.

No modelo numérico utilizado na simulação a barra é discretizada por um elemento de pórtico engastado em uma das extremidades e livre na outra, na qual são aplicadas as forças de tração referentes aos níveis de tensão ensaiados, como ilustrado na Figura 6-17.

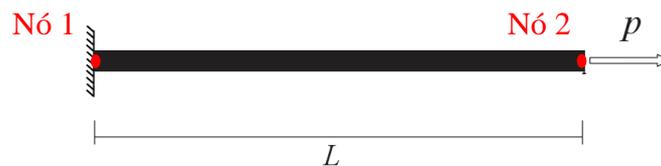


Figura 6-17: Modelos da barra tracionada

Para calibração são utilizadas forças referentes a seis níveis de tensão ensaiados (1,8; 3,6; 5,5; 9,1; 11,0 e 13,0 MPa), enquanto a força referente ao outro nível de tensão (7,2 MPa) é utilizada posteriormente para verificação da qualidade da calibração.

Utilizando-se o método dos mínimos quadrados entre os parâmetros que fornecem os melhores ajustes e o nível de tensão aplicado é possível obter as regressões cúbicas apresentadas nas Equações (6-4) e (6-5), respectivamente, para o módulo de viscosidade η e para o módulo de elasticidade longitudinal E_1 , sendo o módulo de elasticidade longitudinal E_2 calculado pela Equação (6-6).

$$\eta = 3,9356 \cdot 10^{13} - 1,3125 \cdot 10^7 |\sigma| + 1,5785 \sigma^2 - 5,9758 \cdot 10^{-8} |\sigma|^3 \quad (6-4)$$

$$E_1 = 12415 \cdot 10^8 + 9,6925 \cdot 10^1 |\sigma| - 1,5773 \cdot 10^{-5} \sigma^2 + 6,5522 \cdot 10^{-13} |\sigma|^3 \quad (6-5)$$

$$E_2 = E - E_1 \quad (6-6)$$

Nas Equações (6-4) e (6-5), $|\sigma|$ representa o valor absoluto do nível de tensão, sendo o valor do nível de tensão σ inserido em Pascal [Pa]. Assim, por simplificação, é considerado que o

material apresenta as mesmas propriedades mecânicas tanto no comportamento de fluência à tração quanto à compressão. Já E representa o módulo de elasticidade da fase elástica, o qual deve ser definido para cada nível de tensão, devido ao comportamento fisicamente não linear preponderante apresentado pelo Polietileno de Alta Densidade (PEAD). Neste trabalho foram utilizados os valores de módulo de elasticidade E obtidos em Kühn (2014) e apresentados na Tabela 6-1.

Tabela 6-1: Módulo de elasticidade do PEAD na fase elástica (adaptado de Kühn, 2014)

Tensão [MPa]	Módulo de elasticidade E [MPa]
1,8	638,66
3,6	1038,55
5,5	986,98
7,2	1086,73
9,1	459,19
11,0	420,09
13,0	370,96

As curvas que descrevem o comportamento dos parâmetros η e E_l em relação ao nível de tensão σ aplicado, descritas pelas Equações (6-4) e (6-5), podem ser conferidas pelas Figuras 6-18 e 6-19, respectivamente.

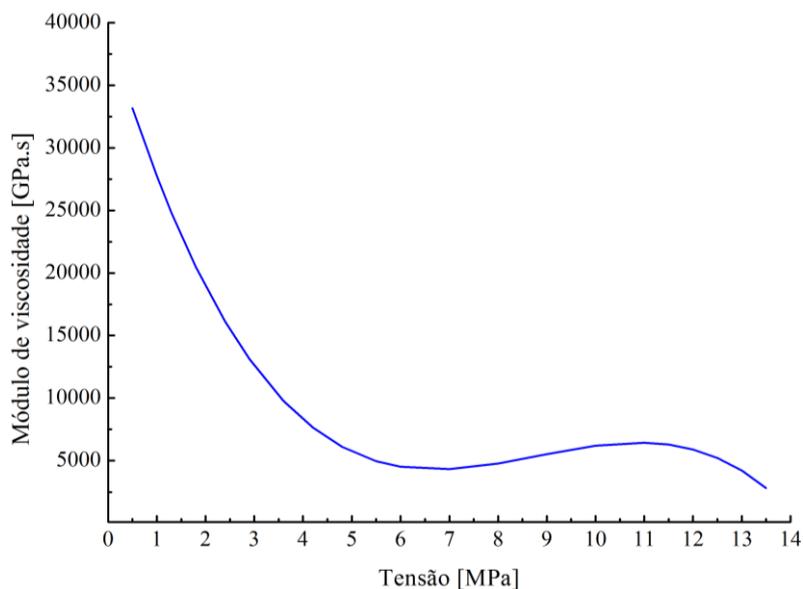


Figura 6-18: Relação entre o módulo de viscosidade η e o nível de tensão σ para o PEAD

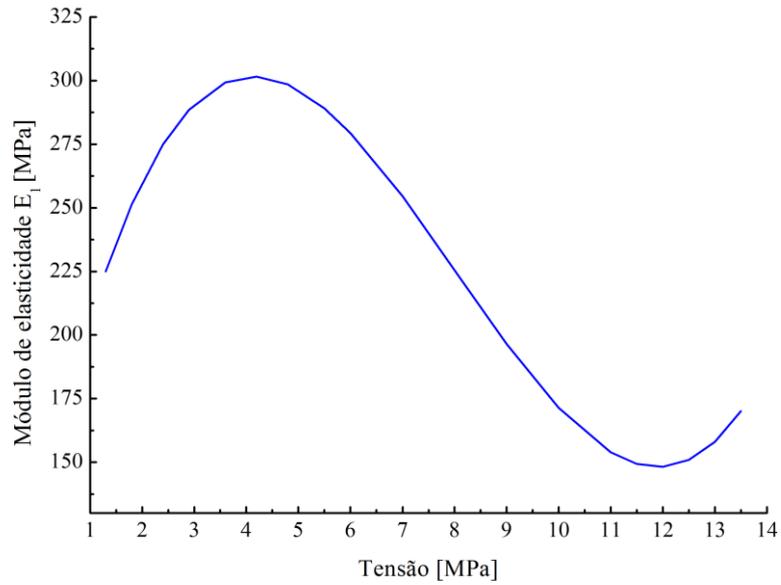


Figura 6-19: Relação entre o módulo de elasticidade longitudinal E_l e o nível de tensão σ para o PEAD

Na sequência, o ensaio realizado por Kühn (2014) é novamente simulado numericamente utilizando-se a formulação calibrada por meio da substituição das Equações (6-4), (6-5) e (6-6) na Equação (3-37) ou na Equação (4-2). Os resultados numéricos obtidos pela formulação calibrada dessa forma estão representados na Figura 6-20 pelas linhas tracejadas nos seis níveis de tensão e demonstram a capacidade de ajuste da formulação.

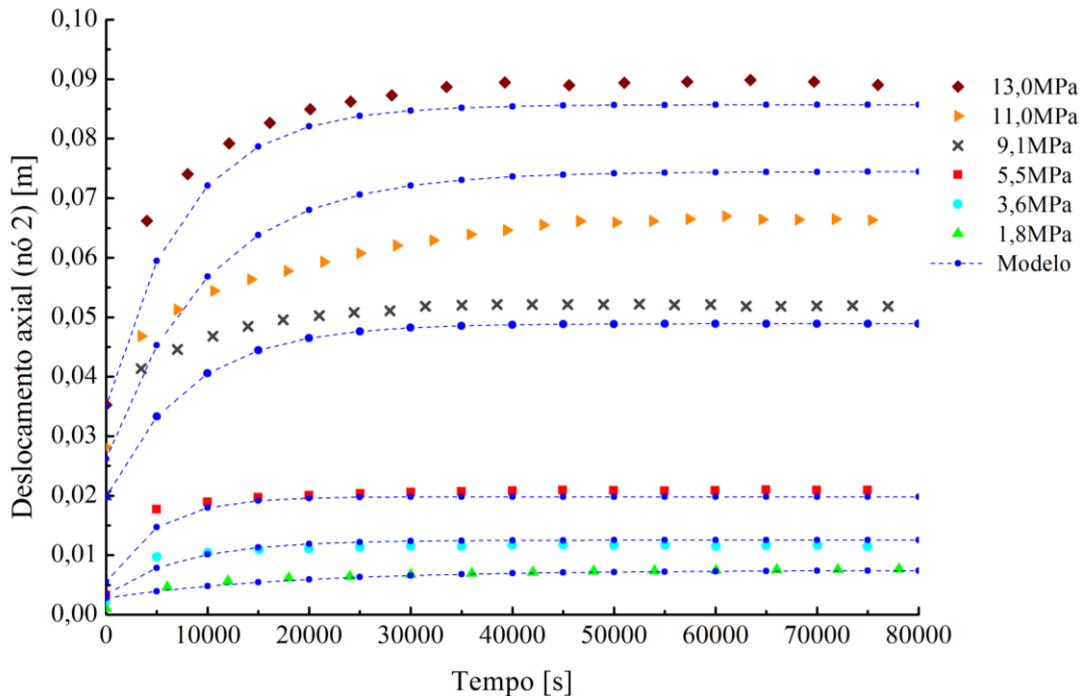


Figura 6-20: Deslocamentos axiais numéricos e experimentais por fluência para o PEAD

Como forma de demonstrar a qualidade da calibração desenvolvida, é simulada a fluência à tração da barra de PEAD no nível de tensão de 7,2 MPa. Esse nível de tensão foi utilizado nos ensaios de Kühl (2014), porém não foi utilizado na calibração e obtenção das equações de ajuste dos parâmetros do modelo padrão de sólido. Os resultados de fluência à tração para 7,2 MPa utilizando-se a formulação calibrada estão representados pela linha tracejada na Figura 6-21, juntamente com os resultados experimentais obtidos por Kühl (2014) e representados por pontos discretos.

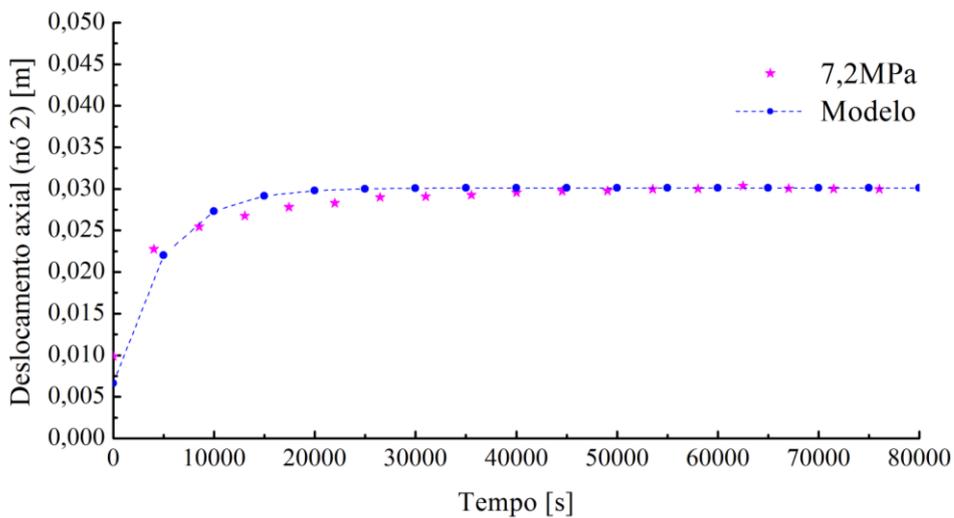


Figura 6-21: Deslocamentos axiais numéricos e experimentais por fluência para 7,2 MPa

Resultados semelhantes aos apresentados na Figura 6-21 também podem ser obtidos utilizando-se outros conjuntos de níveis de tensão, adotando-se seis dos sete níveis de tensão aplicados experimentalmente, para definição das equações de ajuste dos parâmetros do modelo pelo método proposto e adotando-se um dos níveis de tensão intermediários para verificação da qualidade do ajuste. O que pode ser obtido utilizando-se, por exemplo, o conjunto de níveis de tensão constituído pelas tensões de 1,8; 3,6; 7,2; 9,1; 11,0 e 13,0 MPa para ajuste dos parâmetros e o nível de tensão de 5,5 MPa para verificação da qualidade do ajuste. Porém, os melhores resultados obtidos são os apresentados na Figura 6-21. No entanto, se forem utilizados conjuntos de níveis de tensão, dentre as tensões aplicadas experimentalmente, em que é adotado ou o nível de tensão mais baixo (1,8 MPa) ou o nível de tensão mais alto (13,0 MPa) para verificação da qualidade do ajuste, são observadas diferenças consideráveis entre os resultados experimentais e numéricos. O que pode ser obtido utilizando-se, por exemplo, o conjunto de níveis de tensão constituído pelas tensões de 1,8;

3,6; 5,5; 7,2; 9,1 e 11,0 MPa para ajuste dos parâmetros e o nível de tensão de 13,0 MPa para verificação da qualidade do ajuste.

Adicionalmente, utilizando-se a formulação calibrada, é simulado o procedimento de carregamento e recuperação considerando-se os efeitos da fluência. Essa simulação é realizada com o intuito de demonstrar a aplicabilidade da formulação e do código implementado. Para tanto, a mesma barra de Polietileno de Alta Densidade (PEAD) utilizada na simulação do ensaio de Kühl (2014) é submetida a um nível de tensão de 1,8 MPa, durante 85000 s. Em seguida a barra é descarregada e mantida dessa forma durante tempo suficiente para o seu retorno a posição não deformada. O resultado da simulação do processo de carregamento e recuperação, assim como os resultados experimentais e numéricos obtidos por Kühl (2014) estão representados, respectivamente, pela linha tracejada em azul, por pontos discretos e pela linha tracejada em vermelho na Figura 6-22.

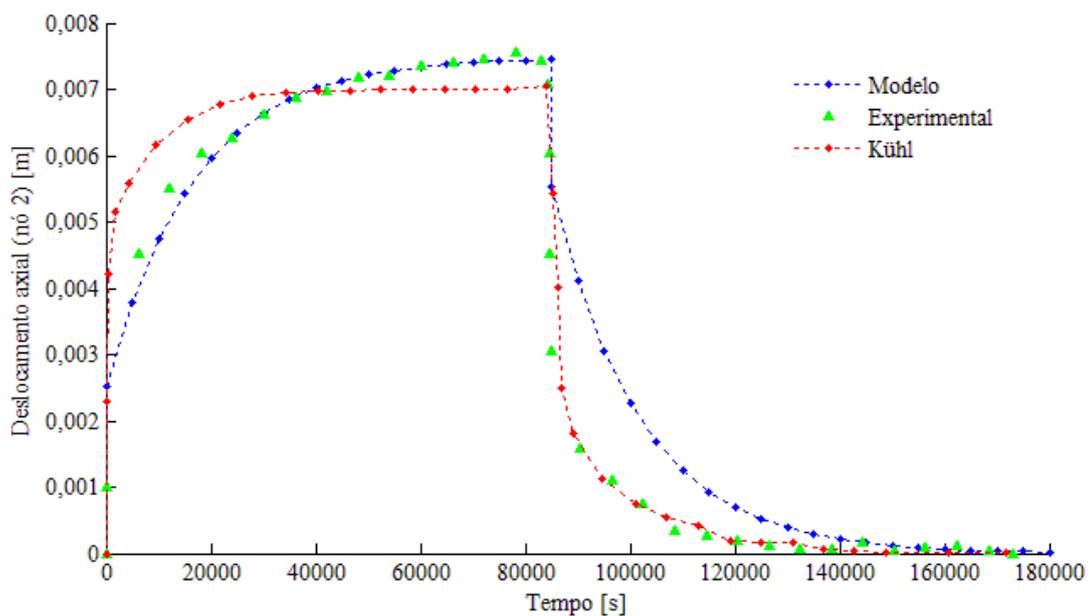


Figura 6-22: Resultados numéricos e experimentais de carregamento e recuperação em barra de PEAD

A partir da Figura 6-22 observa-se que, na simulação, após o descarregamento a barra precisou de 95000 s para retornar a posição não deformada, apresentando um tempo total de 180000 s para o processo completo de carregamento e recuperação. Observa-se também que o comportamento ficou próximo do obtido experimentalmente e em concordância com o esperado pela teoria da viscoelasticidade, apresentando um retorno com taxa de deformação decrescente e não apresentando deformação residual após um tempo suficientemente grande.

Em relação aos resultados numéricos apresentados em Kühn (2014), a simulação numérica utilizando-se a abordagem proposta no presente trabalho se mostrou mais adequada para descrição do comportamento de fluência no carregamento sob nível de tensão de 1,8 MPa. No entanto, para a recuperação, após o descarregamento, os resultados numéricos apresentados em Kühn (2014) apresentaram maior concordância com os resultados experimentais em relação à abordagem proposta. É importante destacar que, na calibração da formulação proposta, não foi levado em consideração a etapa de recuperação. Isto justifica a diferença entre as respostas obtidas na simulação e os resultados experimentais após o descarregamento. Apesar disso, os tempos necessários para recuperação total da posição não deformada nos três casos, simulação numérica proposta, resultado numérico e resultado experimental apresentados em Kühn (2014), ficaram próximos. Além disso, deve-se destacar que a metodologia proposta por Kühn (2014) é diferente da proposta neste trabalho. Nesse caso, o modelo reológico adotado é o de Kelvin-Voigt generalizado, sendo a relação matemática para descrição do comportamento viscoelástico baseada em série de Prony, em que os parâmetros associados ao material são determinados pelo método de otimização por nuvem de partículas.

6.3 Calibração com base em ensaios de fluência à flexão em PRFV

O terceiro exemplo de calibração é baseado nos resultados experimentais apresentados em Sá (2007) e Sá *et al.* (2011a). Os resultados desses trabalhos são obtidos a partir de ensaios de fluência à flexão em corpos de prova retirados de perfis estruturais pultrudados de Plástico Reforçado com Fibra de Vidro (PRFV), constituídos de fibra de vidro do tipo E-Glass e resina poliéster. São utilizados corpos de prova com comprimento, altura e largura iguais a, respectivamente, 0,16 m; 0,008 m e 0,015 m, e com módulo de elasticidade na fase elástica igual a 25,3 GPa (obtido experimentalmente nos referidos trabalhos).

Os experimentos apresentados em Sá (2007) e Sá *et al.* (2011a) consistem em ensaios de flexão de três pontos. Nos quais são aplicados cinco carregamentos distintos, proporcionando cinco níveis distintos de tensão máxima (20%, 30%, 40%, 50% e 60% em relação à tensão última de flexão do material, que é de 550 MPa), sendo estes carregamentos mantidos constantes ao longo do tempo. O esquema representativo do corpo de prova submetido ao ensaio de flexão de três pontos pode ser observado na Figura 6-23. Esse procedimento é utilizado nos ensaios de fluência à flexão dos corpos de prova para obtenção da evolução do deslocamento vertical no centro do vão (flecha máxima) ao longo do tempo. Os resultados

obtidos dessa forma e apresentados em Sá (2007) e Sá *et al.* (2011a) estão representados por pontos discretos na Figura 6-24.

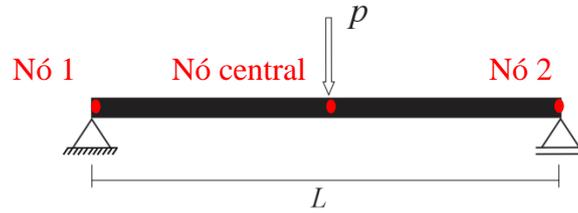


Figura 6-23: Esquema representativo do corpo de prova submetido ao ensaio de flexão de três pontos

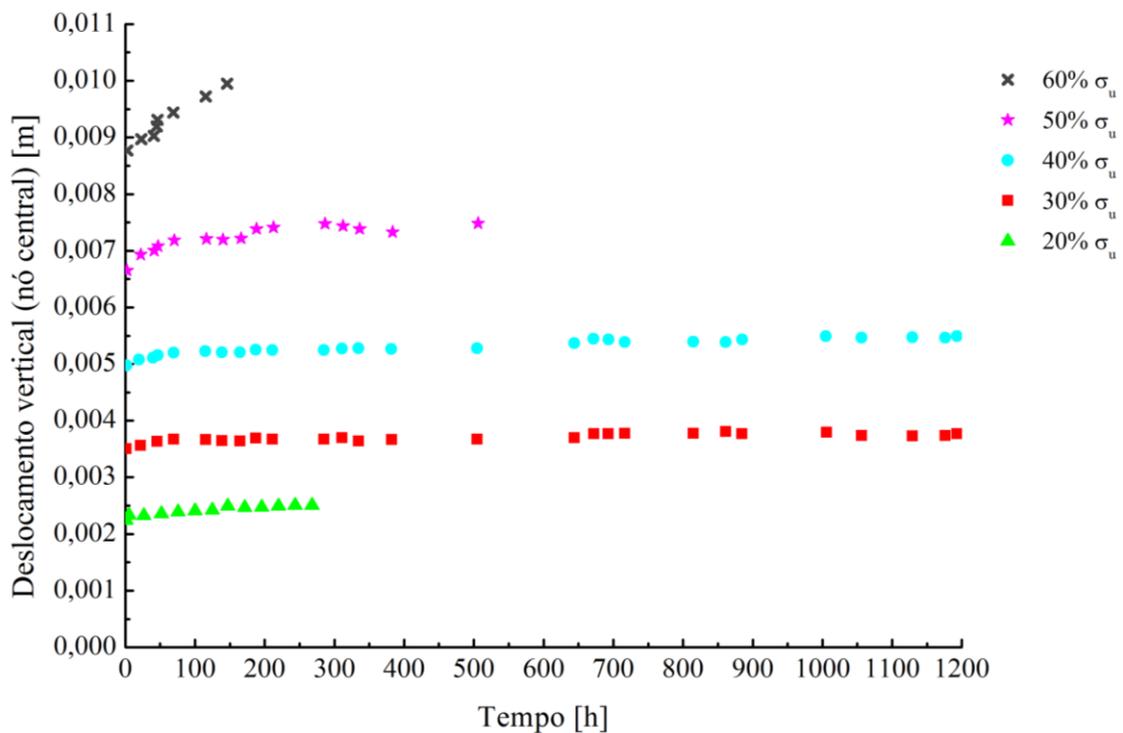


Figura 6-24: Resultados experimentais de deslocamento vertical nos corpos de prova de PRFV submetidos a flexão de três pontos (adaptado de Sá *et al.* 2011a)

Na Figura 6-24, para o carregamento que proporciona um nível de tensão máximo igual a 20% da tensão última do material, os dados do ensaio a partir de aproximadamente 300 h não são apresentados por se manterem constantes ao longo do tempo. Já para os carregamentos que proporcionam níveis de tensão de 50% e 60%, os ensaios foram interrompidos por apresentarem falha do material, respectivamente, em 500 h e 150 h.

A metodologia de calibração adotada neste item consiste na simulação numérica dos ensaios de flexão de três pontos de Sá (2007) e Sá *et al.* (2011a) a partir da obtenção de conjuntos de parâmetros (E_1 , E_2 e η) do modelo padrão de sólido. Esses conjuntos de parâmetros são

definidos por tentativa e erro de forma a obter uma melhor aproximação dos resultados numéricos em relação aos resultados experimentais para cada nível de tensão. Em seguida, a partir desses conjuntos de parâmetros e utilizando-se o método dos mínimos quadrados, são obtidas equações de ajuste dos parâmetros do modelo padrão de sólido em função do nível de tensão máximo no material. Assim, diferentemente da metodologia adotada nos itens 6.1 e 6.2, neste item é adotada uma calibração em âmbito global, ou seja, não é considerado o nível de tensão em cada ponto de Gauss do elemento finito, mas sim, o nível de tensão máximo no elemento finito.

No modelo numérico utilizado na simulação é levado em consideração a simetria do problema. Dessa forma, a simulação é realizada utilizando-se um elemento finito de pórtico, apoiado em uma extremidade e com um engaste móvel na outra extremidade, de acordo com a Figura 6-25. Esse modelo representa metade do corpo de prova submetido à metade das forças concentradas referentes aos níveis de tensão ensaiados.

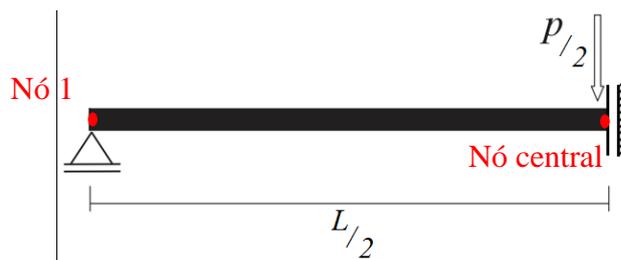


Figura 6-25: Modelo utilizado na simulação

Utilizando-se o método dos mínimos quadrados entre os parâmetros que fornecem os melhores ajustes e o nível de tensão máximo aplicado é possível obter as regressões apresentadas nas Equações (6-7) e (6-8). Neste caso, são adotadas regressões quadrática e cúbica para descrição, respectivamente, do módulo de viscosidade η e do módulo de elasticidade longitudinal E_1 , por apresentarem resultados mais próximos do comportamento experimental do material. Já o módulo de elasticidade longitudinal E_2 é calculado pela Equação (6-9).

$$\eta = 1,0408 \cdot 10^{12} - 2,5158 \cdot 10^2 |\sigma| - 2,2506 \cdot 10^{-6} \sigma^2 \quad (6-7)$$

$$E_1 = (1,0003 - 6,3734 \cdot 10^{-10} |\sigma| + 1,8976 \cdot 10^{-18} \sigma^2 - 3,9882 \cdot 10^{-27} |\sigma|^3) \cdot E \quad (6-8)$$

$$E_2 = E - E_1 \quad (6-9)$$

Nas Equações (6-7) e (6-8), $|\sigma|$ representa o valor absoluto do nível de tensão, sendo o valor do nível de tensão σ inserido em Pascal [Pa]. Assim, é considerado, por simplificação, que o material apresenta as mesmas propriedades mecânicas tanto no comportamento de fluência à tração quanto à compressão. O que pode ser uma fonte de erro, visto que, em geral, o comportamento mecânico de elementos estruturais de plástico reforçado com fibra de vidro não é simétrico em relação à tensão. As curvas que descrevem o comportamento dos parâmetros η e E_l com o nível de tensão σ aplicado, descritas pelas Equações (6-7) e (6-8), podem ser conferidas pelas Figuras 6-25 e 6-26, respectivamente.

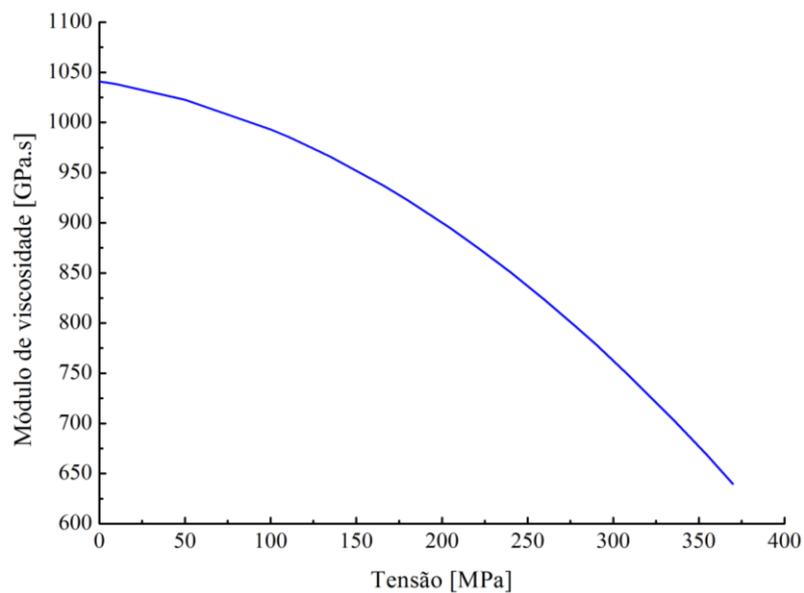


Figura 6-26: Relação entre o módulo de viscosidade η e o nível de tensão máximo σ para o PRFV

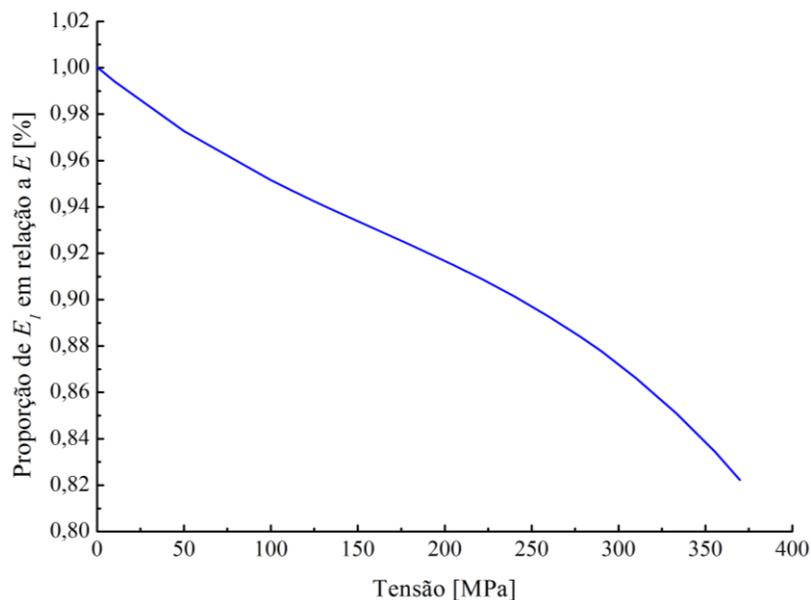


Figura 6-27: Relação entre o módulo de elasticidade longitudinal E_l e o nível de tensão máximo σ para o PRFV

Na sequência os ensaios realizados por Sá (2007) e Sá *et al.* (2011a) são novamente simulados numericamente utilizando-se a formulação calibrada por meio da substituição das Equações (6-7), (6-8) e (6-9) na Equação (3-37) ou na Equação (4-2). Os resultados numéricos obtidos pela formulação calibrada dessa forma estão representados na Figura 6-28 pelas linhas tracejadas nos cinco níveis de tensão máximos e demonstram a capacidade de ajuste da formulação.

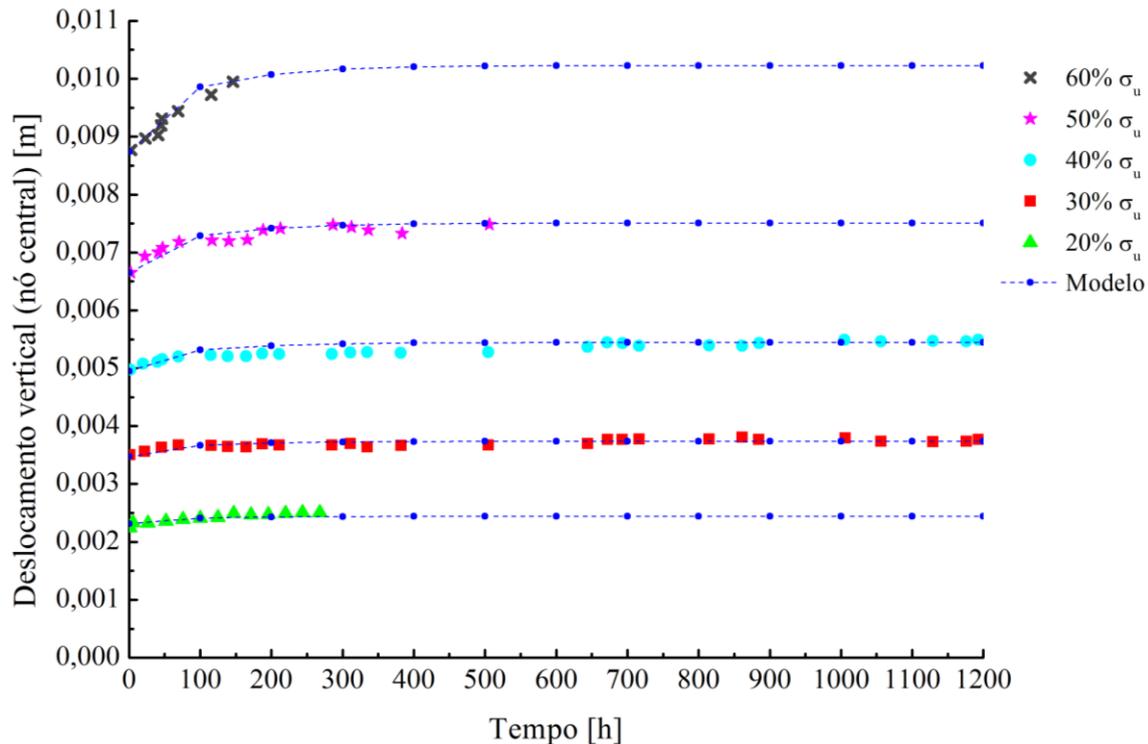


Figura 6-28: Deslocamentos verticais numéricos e experimentais por fluência para o PRFV

Com o intuito de demonstrar a capacidade de representação quantitativa da formulação calibrada através de ensaios de fluência à flexão de elementos pultrudados de PRFV, o código implementado e calibrado é utilizado na simulação numérica da fluência no ensaio de flexão de quatro pontos de um perfil estrutural constituído pelo mesmo material. Os resultados numéricos obtidos são então comparados aos resultados experimentais fornecidos em Sá (2007) e Sá *et al.* (2011a).

O perfil estrutural analisado consiste de uma viga biapoiada com comprimento (L) igual a 1,8 m e seção transversal “T” (150x75x8 cm), sendo discretizada em seis elementos finitos de 0,3 m cada. Sendo que, segundo Sá (2007), o módulo de elasticidade na fase elástica obtido experimentalmente para o perfil estrutural é de 33,9 GPa, diferentemente do obtido

experimentalmente para os corpos de prova constituídos pelo mesmo material. Os carregamentos são aplicados a 0,6 m dos apoios, com intensidade de 11,4 kN cada, e mantidos constantes durante 1600 h. As características do ensaio e as dimensões da seção transversal da viga estão expostas na Figura 6-29. Já na Figura 6-30 é possível verificar o perfil estrutural real e algumas características do ensaio realizado.

É importante observar que a abordagem de discretização da altura do elemento finito possibilita ainda a simulação de elementos estruturais com seção transversal que apresenta variação na dimensão da base ao longo da altura (largura da seção transversal). Assim, no modelo utilizado nesta simulação, para os pontos de Gauss distribuídos ao longo da altura, os dois pontos de Gauss da extremidade superior e os dois pontos de Gauss da extremidade inferior apresentam base (b_z) igual a 75 mm. Já para os demais pontos de Gauss distribuídos ao longo da altura a base considerada é igual a 8 mm.

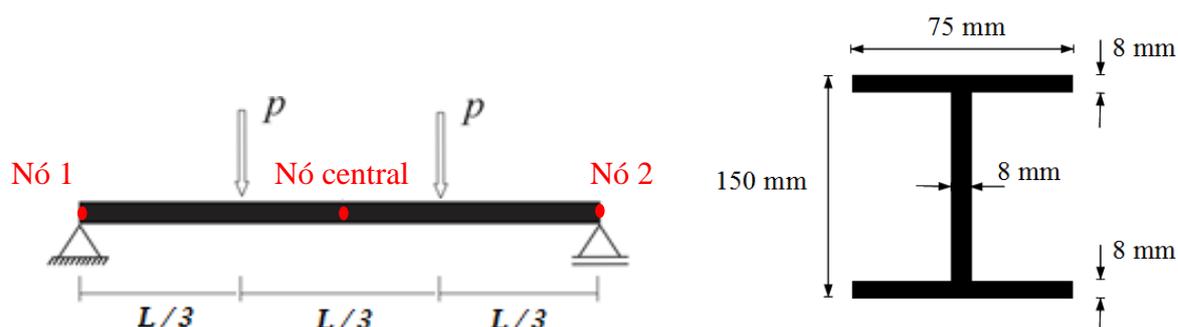


Figura 6-29: Viga ensaiada e suas características geométricas



Figura 6-30: Perfil estrutural real submetido à fluência no ensaio de flexão de quatro pontos (Sá, 2007)

Os resultados da simulação numérica da fluência no ensaio de flexão de quatro pontos do perfil estrutural de PRFV, assim como os resultados experimentais obtidos em Sá (2007), estão representados, respectivamente, pela linha tracejada e por pontos discretos na Figura 6-31.

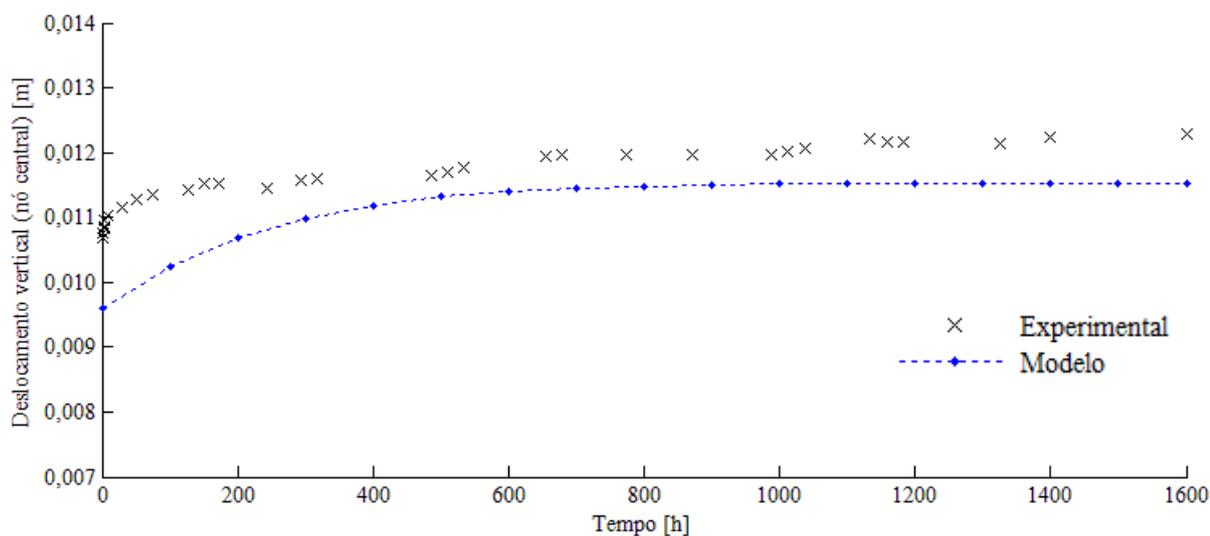


Figura 6-31: Resultados numéricos e experimentais de fluência no ensaio de flexão de quatro pontos do perfil estrutural de PRFV

Os resultados apresentados na Figura 6-31 demonstram a capacidade de representação quantitativa da formulação proposta a partir de uma metodologia de calibração simples com base em ensaios de fluência à flexão. A resposta numérica obtida pela formulação calibrada apresenta perfil de evolução dos deslocamentos verticais no centro do vão de acordo com a teoria da viscoelasticidade. Além disso, a flecha numérica máxima obtida por fluência foi de 11,5 mm após 1600 h, apresentando um aumento de 20% em relação à flecha elástica numérica, que foi de 9,6 mm. Já a flecha experimental máxima por fluência foi de 12,5 mm após 1600 h, apresentando um aumento de 15% em relação à flecha elástica experimental, que foi de 10,6 mm. Lembrando-se que, assim como destacado por Bank e Mosallan (1992) e pelo próprio trabalho de Sá (2007), os efeitos do cisalhamento no comportamento de fluência em perfis estruturais pultrudados de PRFV podem ser relevantes. Dessa forma, é natural a obtenção de uma diferença considerável entre os resultados numéricos e experimentais, visto que na formulação é considerada a teoria clássica de vigas de Bernoulli-Euler, que apresentou resposta mais rígida para o problema. Além disso, as aproximações utilizadas para estimar os parâmetros viscoelásticos não lineares dos materiais contêm erros, assim como os próprios resultados experimentais também contêm erros.

É importante observar ainda que a calibração desenvolvida neste item leva em consideração o nível de tensão máximo no elemento finito, diferentemente das calibrações desenvolvidas nos itens 6.1 e 6.2 que levam em consideração o nível de tensão em cada ponto de Gauss do elemento. Essa diferença de metodologia de calibração proporciona um menor detalhamento na definição dos parâmetros do modelo padrão de sólido, sendo neste caso calculado um conjunto de parâmetros que governa o comportamento de fluência de todo o elemento finito em função da tensão máxima. Já na metodologia de calibração desenvolvida nos itens 6.1 e 6.2 são calculados vários conjuntos de parâmetros que governam o comportamento de fluência de cada elemento finito em função dos níveis de tensão locais.

7

CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

No presente trabalho foi desenvolvida uma formulação numérica capaz de descrever o comportamento mecânico viscoelástico não linear, mais especificamente o fenômeno de fluência, em vigas e estruturas de pórtico plano, baseado na formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos e no modelo reológico padrão de sólido. A formulação foi desenvolvida de uma forma relativamente simples baseada em conceitos físicos de equilíbrio de energia potencial total, o que facilita o entendimento da mesma. A introdução do comportamento de fluência na formulação se deu de uma forma natural considerando a relação reológica do modelo padrão de sólido na obtenção da energia de deformação total, visto que essa relação se baseia no comportamento físico da associação de molas e amortecedores que fornece equações conhecidas como fenomenológicas.

O desenvolvimento da formulação posicional para descrição do comportamento de fluência com base em um modelo reológico foi possível graças a uma importante troca de variáveis proposta. Empregando-se a regra da cadeia, a taxa de variação da deformação é substituída pelo produto entre a derivada da deformação em relação aos parâmetros nodais da formulação posicional e a velocidade de variação destes parâmetros. Esse procedimento foi necessário visto que a formulação posicional considera as posições nodais como variáveis do problema enquanto a relação reológica é uma função da taxa de deformação. Uma forma de representação dessa velocidade de variação dos parâmetros nodais foi proposta, baseando-se na variação das dimensões e da orientação de trechos compreendidos entre dois pontos de Gauss adjacentes de um elemento, com o intuito de desconsiderar os movimentos de corpo rígido e permitir a introdução dessa variável nas integrações numéricas. No entanto, um estudo mais detalhado sobre o comportamento dessa variável se faz necessário para verificar a qualidade da representação proposta.

A formulação desenvolvida foi possível de implementar computacionalmente e se mostrou capaz de representar de forma qualitativa a evolução dos deslocamentos das estruturas com o tempo sob carregamento estático, apresentando perfis de deslocamento e posições de equilíbrio característicos do comportamento de fluência e de acordo com o esperado pela teoria da viscoelasticidade, assim como pode ser verificado nos itens 5.1 a 5.4. Podendo esse comportamento de fluência alterar de forma significativa a posição de equilíbrio final de uma estrutura dependendo das características geométricas e das propriedades do material.

Além disso, foram apresentadas análises das influências dos parâmetros do material e dos parâmetros numéricos. Os resultados obtidos nessas análises apresentaram coerência em relação ao comportamento esperado pela teoria da viscoelasticidade e demonstraram a estabilidade da formulação e do código implementado, como pode ser verificado no item 5.5. A formulação demonstrou importante coerência e versatilidade em relação à variação dos módulos de elasticidade longitudinais E_1 e E_2 , sendo esta capaz de representar os comportamentos do modelo de Maxwell e do modelo de Kelvin-Voigt quando, respectivamente, E_1 tende a zero e E_2 tende a infinito. Esses resultados demonstram a coerência da formulação desenvolvida e do código implementado em relação aos comportamentos esperados para o modelo padrão de sólido, além, de expandir as possibilidades de suas aplicações.

Com o intuito de considerar o comportamento da fluência não apenas a partir de sua contribuição ao longo da linha centroidal, como também ao longo da altura da seção transversal, foi proposta uma parametrização descrita em faixas longitudinais. Essa abordagem possibilitou ainda a adoção de uma metodologia de calibração simples da formulação, com base em ensaios de fluência à tração em barras.

Dessa forma, três exemplos de calibração foram apresentados, dois desses baseados em resultados experimentais de fluência à tração e um em resultados experimentais de fluência à flexão, como pode ser verificado nos itens 6.1, 6.2 e 6.3. Os procedimentos de calibração apresentados, com base em ajustes dos parâmetros do modelo padrão de sólido em relação aos níveis de tensão utilizando-se o método dos mínimos quadrados, se mostraram simples e eficientes. Os resultados numéricos obtidos utilizando-se a formulação e o código calibrado ficaram próximos aos resultados experimentais obtidos na literatura. Esses resultados demonstram a capacidade de ajuste e de representação quantitativa do comportamento de fluência em materiais com propriedades específicas, utilizando-se a abordagem e os

procedimentos desenvolvidos. Entretanto, para uma confirmação dos resultados quantitativos obtidos, se faz necessária a obtenção de resultados experimentais de fluência à flexão em vigas e pórticos constituídos dos mesmos materiais utilizados nas calibrações. Além disso, um cuidado especial deve ser tomado em relação aos resultados quantitativos obtidos, visto que, os efeitos do cisalhamento no comportamento de fluência em perfis estruturais podem ser relevantes dependendo das características geométricas e das propriedades do material. Dessa forma, como na formulação apresentada foi adotada a teoria de vigas de Bernoulli-Euler, esses efeitos não foram considerados, o que pode gerar diferenças nos resultados.

Considerando-se as análises e exemplos apresentados, verificou-se que os efeitos da fluência podem ocorrer de forma mais pronunciada dependendo das condições de contorno e da geometria da estrutura, devido aos níveis e as distribuições de tensões proporcionadas, podendo alterar de forma significativa a posição de equilíbrio final de uma estrutura dependendo das propriedades do material. Ainda com base nos exemplos analisados, é possível perceber que os efeitos da fluência podem gerar deslocamentos adicionais consideráveis em estruturas submetidas a carregamentos estáticos, conforme destacado por pesquisas citadas ao longo do trabalho. Assim, dependendo da aplicação, das condições de serviço e das tolerâncias de projeto e de segurança adotadas, esse fenômeno de fluência não pode ser negligenciado, podendo gerar falhas em períodos longos sob tensões consideravelmente inferiores a tensão limite do material.

Algumas sugestões para trabalhos futuros e para prosseguimento de pesquisas na área, com base nos desenvolvimentos e resultados obtidos, são apresentadas a seguir.

A fim de considerar os efeitos do cisalhamento na contribuição da fluência, sugere-se o desenvolvimento da formulação posicional para descrição do comportamento de fluência com base na teoria de vigas de Timoshenko. Assim como o desenvolvimento e o estudo dos parâmetros necessários à descrição do cisalhamento em materiais que apresentam comportamento viscoelástico.

Para confirmação dos resultados obtidos neste trabalho, sugere-se a execução de ensaios de fluência à flexão em elementos estruturais constituídos dos mesmos materiais utilizados nas calibrações.

Com o intuito de verificar a qualidade da proposta de representação da velocidade de variação das posições, sugere-se uma análise e um estudo mais detalhado sobre o comportamento dessa variável e de possíveis representações alternativas.

Com o objetivo de expandir a aplicação e a capacidade de representação do comportamento viscoelástico, sugere-se a implementação de outros modelos reológicos como os modelos de Boltzmann e de Burger, além da implementação dos modelos generalizados de Maxwell e de Kelvin-Voigt com vários ramos e blocos reológicos.

Sugere-se ainda o desenvolvimento da formulação posicional para descrição do comportamento de fluência em elementos finitos planos e espaciais. Além, da extensão da formulação proposta para descrição do comportamento de relaxação a partir da prescrição das posições nodais.

8

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARGYRIS, J.; DOLTSINIS, I. St.; DA SILVA, V. D. Constitutive modelling and computation of non-linear viscoelastic solids. Part I: Rheological models and numerical integration techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 88, n. 2, p. 135-163, 1991.
- ARGYRIS, J.; DOLTSINIS, I. St.; DA SILVA, V. D. Constitutive modelling and computation of non-linear viscoelastic solids. Part II: Application to orthotropic PVC-coated fabrics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 98, n. 2, p. 159-226, 1992.
- BAHRAINI, S. M. S.; EGHTEHAD, M.; FARID, M.; GHAVANLOO, E. Large deflection of viscoelastic beams using fractional derivative model. *Journal of Mechanical Science and Technology*, v. 27, n. 4, p. 1063-1070, 2013.
- BANK, L. C.; MOSALLAM, A. S. Creep and failure of a full-size fiber-reinforced plastic pultruded frame. *Composites Engineering*, v. 2, n. 3, p. 213-227, 1992.
- BATHE, K.J. *Finite element procedures*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- BECHO, J. S.; BARROS, F. B.; GRECO, M. Formulação posicional para descrição do comportamento mecânico de fluência em vigas e estruturas de pórtico. *Ciência & Engenharia*, v. 24, n. 1, p. 31-41, 2015.
- BIOT, M. A. *Mechanics of incremental deformations: theory of elasticity and viscoelasticity of initially stressed solids and fluids, including thermodynamic foundations and applications to finite strain*. John Wiley & Sons, New York, 1965.
- CARNIEL, T. A.; MUÑOZ-ROJAS, P. A.; VAZ, M. A viscoelastic viscoplastic constitutive model including mechanical degradation: Uniaxial transient finite element formulation at finite strains and application to space truss structures. *Applied Mathematical Modelling*, v. 39, n. 5, p. 1725-1739, 2015.
- CARRAZEDO, R. *Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- CHRISTENSEN, R. M. *Theory of viscoelasticity*. Dover Publications, New York, 2003.
- CHUNG, C. W.; BUIST, M. L. A novel nonlinear viscoelastic solid model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 13, n. 3, p. 1480-1488, 2012.

- CODA, H. B. An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description. In: *XVIII Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, São Paulo, Brazil, 2003.
- CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, n. 33, p. 3541-3557, 2004.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically nonlinear analysis of shells-curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, v. 40, n. 1, p. 185-200, 2007.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 5, n. 1, p. 205-223, 2008.
- COSTA-HAVEROTH, T. C.; MUÑOZ-ROJAS, P. A.; KÜHL, A.; SASSE, F. D. Modeling HDPE nonlinear viscoelastic behavior using fractional derivatives: parameters interpolation and economy schemes. In: *V International Symposium on Solid Mechanics*, Belo Horizonte, Brazil, 2015.
- CRISFIELD, M. A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. v.1. John Wiley & Sons, England, 1991.
- DUTTA, P. K.; HUI, D. Creep rupture of a GFRP composite at elevated temperatures. *Computers & Structures*, v. 76, n. 1, p. 153-161, 2000.
- FELTON, L. P.; NELSON, R. B. *Matrix structural analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1997.
- FINDLEY, W. N. 26-Year creep and recovery of poly (vinyl chloride) and polyethylene. *Polymer Engineering & Science*, v. 27, n. 8, p. 582-585, 1987.
- FINDLEY, W. N.; LAI, J. S.; ONARAN, K. *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials*. Dover Publications, New York, 1989.
- FINNIE, I.; HELLER W. R. *Creep of Engineering Materials*, McGraw-Hill, New York, 1959.
- GODAT, A.; LÉGERON, F.; GAGNÉ, V.; MARMION, B. Use of FRP pultruded members for electricity transmission towers. *Composite Structures*, v. 105, p. 408-421, 2013.
- GRECO, M. *Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2004.
- GRECO, M.; CODA H. B.; VENTURINI, W. S. An alternative contact/impact identification algorithm for 2d structural problems. *Computational Mechanics*, v. 34, n. 5, p. 410-422, 2004.
- GRECO, M.; GESUALDO, F. A. R.; VENTURINI, W. S.; CODA, H. B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite Element in Analysis and Design*, v.42, n. 12, p.1079-1086, 2006.

- GRECO, M.; CODA, H. B. Positional fem formulation for flexible multi-body dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, v. 290, n. 3, p. 1141-1174, 2006.
- GRECO, M.; VENTURINI, W.S. Stability analysis of three-dimensional trusses, *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 3, 325-344, 2006.
- GRECO, M.; FERREIRA, I.P. Logarithmic strain measure applied do the nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite Element in Analysis and Design*, v.45, n. 10, p.632-639, 2009.
- GRECO, M.; ANUNCIACÃO, A. C.; OLIVEIRA, F. M.; VECCI, M. A. M. Nonlinear analysis of sagged cables with moving masses, In: *XXI Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, Natal, Brazil, 2011.
- GRECO, M.; DA COSTA, L. J. R. Discussion on “The logarithmic strian measure applied to the nonlinear positional formulation for space truss analysis” [Finite element in analysis and design 45 (2009) 632-639] and “Nonlinear positional formulation for space truss analysis” [Finite element in analysis and design 42 (2006) 1079-1086]. *Finite Element in Analysis and Design*, v.52, p.93-95, 2012.
- GRECO, M.; FERREIRA, I. P.; BARROS, F. B. A classical time integration method applied for solution of nonlinear equations of a double-layer tensegrity. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 35, n. 1, p. 41-50, 2013.
- JURKIEWIEZ, B.; DESTREBECQ, J. F.; VERGNE, A. Incremental analysis of time-dependent effects in composite structures. *Computers & Structures*, v. 73, n. 1, p. 425-435, 1999.
- JURKIEWIEZ, B.; BUZON, S.; SIEFFERT, J. G. Incremental viscoelastic analysis of composite beams with partial interaction. *Computers & Structures*, v. 83, n. 21, p. 1780-1791, 2005.
- KALISKE, M.; ROTHERT, H. Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. *Computational Mechanics*, v. 19, n. 3, p. 228-239, 1997.
- KASSNER, M. E.; PÉREZ-PRADO, M. *Fundamentals of creep in metals and alloys*. Elsevier, New York, 2004.
- KÄSTNER, M.; OBST, M.; BRUMMUND, J.; THIELSCH, K.; ULBRICHT, V. Inelastic material behavior of polymers—experimental characterization, formulation and implementation of a material model. *Mechanics of Materials*, v. 52, p. 40-57, 2012.
- KÜHL, A.; MUÑOZ-ROJAS, P. A.; VAZ, M. Jr.; CARNIEL, T. A. Modeling nonlinear viscoelastoplastic behavior or high density polyethylene (HDPE) using particle swarm optimization (PSO). In: *XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. Pirenópolis, Brazil, 2013.
- KÜHL, A. *Uma formulação viscoelastoplástica não linear aplicada ao polietileno de alta densidade (PEAD)*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade do estado de Santa Catarina, Joinville, Brasil, 2014.

- LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica. 4ª edição, v. 2, Harbra, São Paulo, 1994.
- LIU, H.; POLAK, M.; PENLIDIS, A. A practical approach to modeling time-dependent nonlinear creep behavior of polyethylene for Structural applications. *Polymer Engineering and Science*, v. 48, n. 1, p. 159-167, 2008.
- LOGAN, D.L. *A first course in the finite element method*. 4ª edition, Thomson Learning, Platteville, 2007.
- LUO, W.; YANG, T.; AN, Q. Time-temperature-stress equivalence and its application to nonlinear viscoelastic materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*, v. 14, n. 3, p. 195–199, 2001.
- MACIEL, D. N. *Análise de problemas elásticos não-lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2008.
- MARQUES, G. C. d. S. C. *Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2006.
- MARQUES, S. P. C.; CREUS, G. J. *Computational viscoelasticity*. Springer, Heidelberg, 2012.
- MECLACHLAN, G.; KRISHNAN, T. *The EM algorithm and extensions*. John Wiley & Sons, Chichester, 2007.
- MESQUITA, A. D. *Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento MEC/MEF progressivo*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2002.
- MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. A simple Kelvin and Boltzmann viscoelastic analysis of three-dimensional solids by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 27, n. 9, p. 885-895, 2003.
- MEYERS, M. A.; CHAWLA, K. K.. *Mechanical behavior of materials*. Cambridge university press, Cambridge, 2009.
- MUÑOZ-ROJAS, P. A.; KÜHL, A.; MENDONÇA, P. T. R.; BENVENUTTI, I. J.; CREUS, G. J. Modeling nonlinear viscoelastic behavior of High Density Polyethylene (HDPE): application of stress-time equivalence versus interpolation of rheological properties. In: *III International Symposium on Solid Mechanics*. Florianópolis, Brazil, 2011.
- OGDEN, R. W. *Non-linear elastic deformation*. Ellis Horwood, Chichester, 1984.
- OLIVEIRA, F. M. *Análise dinâmica não linear de problemas envolvendo massas móveis aplicadas em cabos e elementos de viga*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2012.

- OLIVEIRA, F. M.; GRECO, M. Nonlinear dynamic analysis of beams with layered cross sections under moving masses. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 37, p. 451-462, 2015.
- PANAGIOTOPOULOS, C. G.; MANTIĆ, V.; ROUBÍČEK, T. A simple and efficient BEM implementation of quasistatic linear visco-elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, v. 51, n. 13, p. 2261-2271, 2014.
- PÉREZ ZERPA, J. M.; CANELAS, A.; SENSALÉ, B.; BIA SANTANA, D.; ARMENTANO, R. L. Modeling the arterial wall mechanics using a novel high-order viscoelastic fractional element. *Applied Mathematical Modelling*, v. 39, n. 16, p. 4767-4780, 2015.
- RABELO, J. M. G.; BECHO, J. S.; GRECO, M.; CIMINI, C. A. J. Formulação não linear posicional para a análise de materiais viscosos. In: *XXXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Fortaleza, Brazil, 2014.
- REIS, M. C. J. *Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando ligações semirrígidas elastoplásticas*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2012.
- SÁ, M. F. *Comportamento mecânico e estrutural de FRP. Elementos pultrudidos de GFRP*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2007.
- SÁ, M. F.; GOMES, A. M.; CORREIA, J. R.; SILVESTRE, N. Creep behavior of pultruded GFRP elements—Part 1: Literature review and experimental study. *Composite Structures*, v. 93, n. 10, p. 2450-2459, 2011a.
- SÁ, M. F.; GOMES, A. M.; CORREIA, J. R.; SILVESTRE, N. Creep behavior of pultruded GFRP elements—Part 2: Analytical study. *Composite Structures*, v. 93, n. 9, p. 2409-2418, 2011b.
- SCHAPERLY, R. A. On the characterization of nonlinear viscoelastic materials. *Polymer Engineering & Science*, v. 9, n. 4, p. 295-310, 1969.
- SCOTT, D. W.; LAI, J. S.; ZUREICK, A. Creep behavior of fiber-reinforced polymeric composites: a review of the technical literature. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, v. 14, n. 6, p. 588-617, 1995.
- SEMPTIKOVSKI, S. C.; MUÑOZ-ROJAS, P. A. A Geometrically Nonlinear Simplified Beam Element with Linear Viscoelastic Behaviour. In: *IV International Symposium on Solid Mechanics*, Porto Alegre, Brazil, 2013.
- SHEN, J. J.; LI, C. G.; WU, H. T.; KALANTARI, M. Fractional order viscoelasticity in characterization for atrial tissue. *Korea-Australia Rheology Journal*, v. 25, n. 2, p. 87-93, 2013.
- TRURSTON, R. H. *Materials of construction*. John Wiley, New York, 1895.
- UTKU, S.; NORRIS, C. H.; WILBUR, J. B. *Elementary structural analysis*. 4^a edition, McGraw-Hill, New York, 1991.

- VICAT, L. T. Note sur l'allongement progressif du fil de fer soumis à diverses tensions. *Annales, Ponts et Chaussées, Mémoires et Docum*, v.7, 1834.
- YAO, H. T.; XUAN, F. Z.; WANG, Z.; TU, S. T. A review of creep analysis and design under multi-axial stress states. *Nuclear Engineering and Design*, v. 237, n. 18, p. 1969-1986, 2007.
- YOUSSEF, T. A. *Time-dependent behavior of fibre reinforced polymer (FRP) bars and FRP reinforced concrete beams under sustained load*. Ph.D. thesis, University of Sherbrooke, Sherbrooke, Canada, 2010.

APÊNDICE – EXEMPLO DE OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE AJUSTE DOS PARÂMETROS

Neste apêndice tem-se o objetivo de descrever de forma mais detalhada os procedimentos (apresentados no capítulo 6) adotados para obtenção das equações de ajuste dos parâmetros do modelo padrão de sólido, a partir de resultados experimentais de fluência. Essas equações são adotadas como forma de calibração da formulação numérica, visto que estas descrevem o comportamento dos parâmetros do modelo padrão de sólido em função do nível de tensão, os quais representam as propriedades mecânicas do material constituinte do elemento estrutural.

O exemplo apresentado neste apêndice se refere à calibração desenvolvida no item 6.1 (Calibração com base em ensaios de fluência à tração em PRFV) e, dessa forma, os dados e detalhes do material, assim como os dados e detalhes do ensaio e da simulação, não serão descritos novamente neste item.

Assim como já destacado no item 6.1, a metodologia de calibração adotada consiste na simulação numérica dos ensaios de fluência a tração de Youssef (2010) a partir da obtenção de conjuntos de parâmetros (E_1 , E_2 e η) do modelo padrão de sólido. Esses conjuntos de parâmetros são definidos por tentativa e erro de forma a obter uma melhor aproximação dos resultados numéricos em relação aos resultados experimentais para cada nível de tensão. Em seguida, a partir desses conjuntos de parâmetros e utilizando-se o método dos mínimos quadrados, são obtidas equações de ajuste dos parâmetros do modelo padrão de sólido em função do nível de tensão. Finalmente, a formulação é calibrada por meio da substituição dessas equações de ajuste na Equação (3-37). Essa metodologia será descrita a seguir por dois procedimentos principais.

1º) Definição dos parâmetros que fornecem os melhores ajustes (tentativa e erro):

Os conjuntos de parâmetros que fornecem os melhores ajustes são obtidos por tentativa e erro de forma isolada para cada nível de tensão ensaiado. Dessa forma, para cada nível de tensão são obtidos os parâmetros E_1 , E_2 e η que melhor aproximam os resultados numéricos dos resultados experimentais. Esses conjuntos de parâmetros estão expostos na Tabela A-1. Já os resultados numéricos obtidos a partir da simulação dos ensaios de fluência a tração de

Youssef (2010), utilizando-se esses parâmetros, juntamente com os resultados experimentais obtidos no referido trabalho para cada nível de tensão, estão expostos na Figura A-1.

Tabela A-1: Parâmetros que fornecem os melhores ajustes

Tensão aplicada σ [Pa]	Módulo de elasticidade E_1 em relação a E [%]	Módulo de elasticidade E_2 em relação a E [%]	Módulo de viscosidade η [$\times 10^{13}$ Pa·h]
0	1,000	0,000	-
128100000	0,965	0,035	7,1
256200000	0,990	0,010	5,0
384300000	0,950	0,050	4,9
512400000	0,935	0,065	6,8

Dados do material ensaiado: Plástico Reforçado com Fibra de Vidro (PRFV) - Fibra de vidro E-Glass e resina vinil éster;
Módulo de elasticidade da fase elástica $E = 46,9$ GPa;
Tensão última à tração do material $\sigma_u = 854$ MPa.

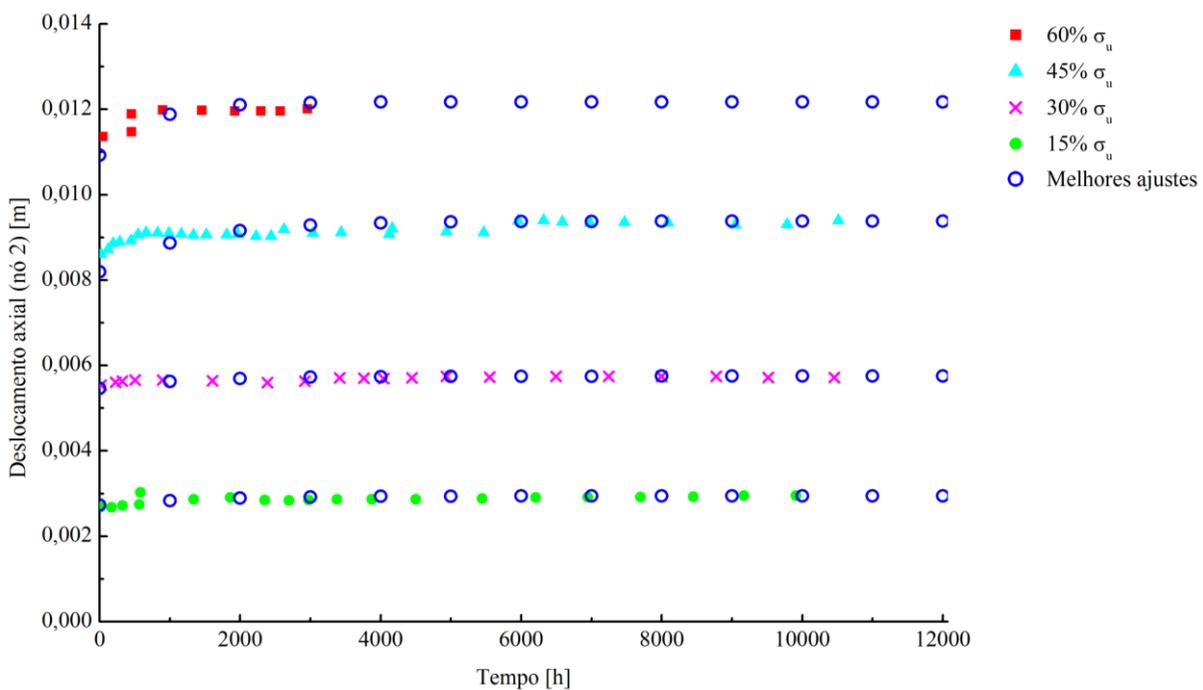


Figura A-1: Deslocamentos axiais numéricos (melhores ajustes) e experimentais para o PRFV

2º) Definição das equações de ajuste (Método dos Mínimos Quadrados):

A partir dos conjuntos de parâmetros que fornecem os melhores ajustes, expostos na Tabela A-1, são obtidas as equações de ajuste dos parâmetros do modelo padrão de sólido em função do nível de tensão utilizando-se o Método dos Mínimos Quadrados. Esse método busca soluções aproximadas baseado na minimização da função erro quadrático. Além disso, o

método é muito utilizado no ajuste de curvas obtidas a partir de dados experimentais e na resolução de sistemas de equações não convencionais. A aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para ajuste de curvas a partir de dados discretos pode ser resumida pelo seguinte sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n X_i^k \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 & \sum_{i=1}^n X_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^n X_i^{k+1} \\ \sum_{i=1}^n X_i^2 & \sum_{i=1}^n X_i^3 & \sum_{i=1}^n X_i^4 & \dots & \sum_{i=1}^n X_i^{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n X_i^k & \sum_{i=1}^n X_i^{k+1} & \sum_{i=1}^n X_i^{k+2} & \dots & \sum_{i=1}^n X_i^{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i^2 Y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n X_i^k Y_i \end{bmatrix} \quad (\text{A-1})$$

onde k representa o grau do polinômio que se obtém com a regressão e n representa a quantidade de dados discretos. Já X e Y representam os pares ordenados dos dados discretos. A solução desse sistema fornece os valores das constantes C_k que constituem a equação de regressão desejada, representada de forma genérica pela Equação (A-2).

$$Y(X) = C_0 + C_1 X + C_2 X^2 + \dots + C_k X^k \quad (\text{A-2})$$

Assim, para o caso do parâmetro E_I , utilizando-se os dados da Tabela A-1, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 5 & \sum_{i=1}^5 \sigma_i & \sum_{i=1}^5 \sigma_i^2 \\ \sum_{i=1}^5 \sigma_i & \sum_{i=1}^5 \sigma_i^2 & \sum_{i=1}^5 \sigma_i^3 \\ \sum_{i=1}^5 \sigma_i^2 & \sum_{i=1}^5 \sigma_i^3 & \sum_{i=1}^5 \sigma_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^5 E_{1i} \\ \sum_{i=1}^5 E_{1i} \sigma_i \\ \sum_{i=1}^5 E_{1i}^2 \sigma_i \end{bmatrix} \quad (\text{A-3})$$

Resolvendo-se os somatórios, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1,281 \cdot 10^9 & 4,923 \cdot 10^{17} \\ 1,281 \cdot 10^9 & 4,923 \cdot 10^{17} & 2,102 \cdot 10^{26} \\ 4,923 \cdot 10^{17} & 2,102 \cdot 10^{26} & 9,532 \cdot 10^{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,84 \\ 1,221 \cdot 10^9 \\ 4,666 \cdot 10^{17} \end{bmatrix} \quad (\text{A-4})$$

Resolvendo-se o sistema, tem-se:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9934 \\ -5,7433 \cdot 10^{-11} \\ -1,0882 \cdot 10^{-19} \end{bmatrix} \quad (\text{A-5})$$

Dessa forma, a equação de regressão para o parâmetro E_1 é definida como:

$$E_1 = (0,9934 - 5,7433 \cdot 10^{-11}|\sigma| - 1,0882 \cdot 10^{-19}\sigma^2) \cdot E \quad (\text{A-6})$$

em que $|\sigma|$ representa o valor absoluto do nível de tensão, sendo o valor do nível de tensão σ inserido em Pascal [Pa]. Já o parâmetro E_2 é definido pela seguinte expressão que relaciona o parâmetro E_1 e o módulo de elasticidade E do material na fase elástica:

$$E_2 = E - E_1 \quad (\text{A-7})$$

Já para o caso do parâmetro η , utilizando-se os dados da Tabela A-1, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 4 & \sum_{i=1}^5 \sigma_i & \sum_{i=1}^5 \sigma_i^2 \\ \sum_{i=1}^5 \sigma_i & \sum_{i=1}^5 \sigma_i^2 & \sum_{i=1}^5 \sigma_i^3 \\ \sum_{i=1}^5 \sigma_i^2 & \sum_{i=1}^5 \sigma_i^3 & \sum_{i=1}^5 \sigma_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^5 \eta_i \\ \sum_{i=1}^5 \eta_i \sigma_i \\ \sum_{i=1}^5 \eta_i^2 \sigma_i \end{bmatrix} \quad (\text{A-8})$$

Resolvendo-se os somatórios, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1,281 \cdot 10^9 & 4,923 \cdot 10^{17} \\ 1,281 \cdot 10^9 & 4,923 \cdot 10^{17} & 2,102 \cdot 10^{26} \\ 4,923 \cdot 10^{17} & 2,102 \cdot 10^{26} & 9,532 \cdot 10^{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,90 \cdot 10^{14} \\ 5,124 \cdot 10^{22} \\ 1,707 \cdot 10^{31} \end{bmatrix} \quad (\text{A-9})$$

Resolvendo-se o sistema, tem-se:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,2500 \cdot 10^{13} \\ -1,9516 \cdot 10^4 \\ -1,5235 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (\text{A-10})$$

Dessa forma, a equação de regressão para o parâmetro η é definida como:

$$\eta = 7,2500 \cdot 10^{13} - 1,9516 \cdot 10^4 |\sigma| - 1,5235 \cdot 10^{-4} \sigma^2 \quad (\text{A-11})$$

em que $|\sigma|$ representa o valor absoluto do nível de tensão, sendo o valor do nível de tensão σ inserido em Pascal [Pa].

Finalmente, a formulação pode ser calibrada a partir da substituição das Equações (A-6), (A-7) e (A-11) na Equação (3-37), obtendo-se a seguinte expressão em função do nível de tensão:

$$U = l_0 \int_0^1 h \int_{-1}^1 b_\lambda \left[\frac{E_1(\sigma)}{2} (\varepsilon_{LC}^2 - 2\varepsilon_{LC}\kappa z(\lambda) + \kappa^2 z(\lambda)^2) + \int_{X_i} \frac{\eta(\sigma)(E_1(\sigma) + E_2(\sigma))}{E_2(\sigma)} (\varepsilon_{LC,i}^2 - 2\varepsilon_{LC,i}\kappa_{,i} z(\lambda) + \kappa_{,i}^2 z(\lambda)^2) \dot{X}_i dX_i \right] d\lambda d\xi \quad (\text{A-12})$$

Utilizando-se a Equação (A-12) na Equação (3-6), que representa a aplicação do princípio da mínima energia potencial total estacionária, é possível obter a resolução do sistema que fornece a posição de equilíbrio de uma estrutura plana, discretizada em elementos de pórtico e submetida a um estado de carregamento estático específico, considerando-se a contribuição do comportamento viscoelástico de fluência do PRFV.

Os resultados numéricos obtidos na simulação do ensaio realizado por Youssef (2010), utilizando-se a formulação calibrada da forma descrita, estão representados na Figura A-2 pelas linhas tracejadas nos quatro níveis de tensão e demonstram a capacidade de ajuste da formulação.

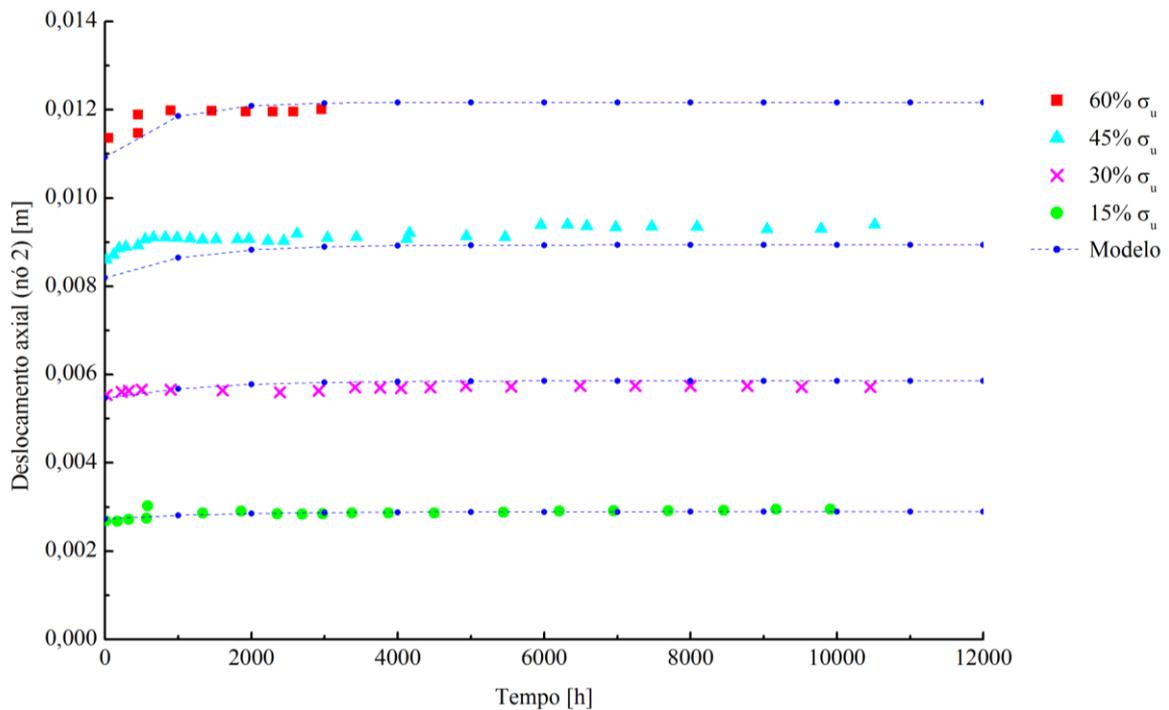


Figura A-2: Deslocamentos axiais numéricos (modelo calibrado) e experimentais para o PRFV