

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Dissertação de mestrado

**ANÁLISES NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DE VIBRAÇÕES DO CONJUNTO EIXO-  
ÁRVORE DE UM CENTRO DE USINAGEM**

Autor: Bruno Rossi de Meneses Vargas

Orientador: Alexandre Mendes Abrão

Co-orientador: Marco Tulio Correa de Faria

Belo Horizonte – MG

2016

BRUNO ROSSI DE MENESES VARGAS

**ANÁLISES NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DE VIBRAÇÕES DO CONJUNTO EIXO-  
ÁRVORE DE UM CENTRO DE USINAGEM.**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do grau de mestre em Engenharia Mecânica, submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Mendes Abrão (UFMG)

Co-Orientador: Prof. Dr. Marco Tulio Correa de Faria (UFMG)

Belo Horizonte – MG

2016

V297a Vargas, Bruno Rossi de Meneses.  
Análises numérica e experimental de vibrações do conjunto eixo-árvore de um centro de usinagem [manuscrito] / Bruno Rossi de Meneses Vargas. – 2016.

143 f., enc.: il.

Orientador: Alexandre Mendes Abrão.

Coorientador: Marco Tulio Correa de Faria.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas

Gerais,

Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 96-143.

Bibliografia: f. 89-95.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Máquinas-ferramenta - Teses. 3. Vibração - Teses. 4. Método dos elementos finitos - Teses. I. Abrão, Alexandre Mendes. II. Faria, Marco Tulio Correa de. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU:

621(043)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**  
**ENGENHARIA MECÂNICA**

Av. Antônio Carlos, 6627 - Campus Universitário  
31270-901 - Belo Horizonte - MG  
Tel.: +55 31 3409.5145  
E-mail: [cpgmec@demec.ufmg.br](mailto:cpgmec@demec.ufmg.br)

**"ANÁLISES NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DE VIBRAÇÕES DO  
CONJUNTO EIXO ÁRVORE DE UM CENTRO DE USINAGEM"**

**BRUNO ROSSI DE MENESES VARGAS**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "**Mestre em Engenharia Mecânica**", na área de concentração de "**Processos de Fabricação**".

Dissertação aprovada no dia 17 de fevereiro de 2016.

Por:

**Prof. Alexandre Mendes Abrão**  
Orientador - Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG

**Co-Orientador - Prof. Marco Túlio Correa de Faria**  
Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG

**Prof. Juan Carlos Campos Rubio**  
Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG

**Prof. Marcelo Araújo Câmara**  
Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG

**Prof. Reginaldo Teixeira Coelho**  
Departamento de Engenharia de Produção/EESC-USP

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus  
melhores amigos João Paulo e Renzo.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, assim como aqueles que de alguma forma estiveram presentes na minha formação:

Primeiramente ao professor Alexandre Mendes Abrão pela oportunidade de desenvolvimento deste trabalho e por toda orientação, assim como ao professor Marco Tulio Correa de Faria por toda ajuda e conhecimento transmitido.

Às Indústrias Romi S.A., em especial ao Sr. Douglas Alcantara e ao sr. Floriano Felipe Filho. Sem sua colaboração, não seria possível a realização deste trabalho.

À equipe do Laboratório de Usinagem e Automação da UFMG, especialmente aos professores Marcelo Araújo Câmara e Juan Carlos Campos Rúbio, sempre dispostos a ajudar.

Aos colegas do grupo de Dinâmica de Rotores Gilberto Luiz dos Santos Pimentel Júnior e Frederico Bolsoni pela ajuda nos experimentos.

Ao meu grande amigo Túlio Brasil Martins de Souza pela parceria desde os tempos de graduação e por toda ajuda, imprescindível ao desenvolvimento do presente trabalho.

À Amanda por todo carinho e compreensão, mas especialmente por todos sorrisos que arrancou de meu rosto.

Ao meu irmão João Paulo, meu melhor amigo, sempre presente em minha vida. Mesmo sem saber, é aquele que mais me motiva a evoluir e a me tornar cada vez melhor.

Ao meu cão Renzo, inestimável companheiro, por todas as noites em claro, esquentando meus pés, escutando minhas apresentações, suportando meu mal humor e independente disto me devolvendo toda alegria que posso ter em algum momento deixado passar despercebida.

Ao meu Pai, Raimundo Vargas Filho, agradeço pelo companheirismo e por estar sempre presente em minha vida.

À minha mãe, Silvana Maria Rossi Cardoso de Meneses, agradeço por todo sacrifício, pela minha formação e pelo apoio incondicional.

## RESUMO

Vibrações de máquinas-ferramenta são um dos principais fatores que afetam a qualidade de componentes usinados, o que pode implicar elevado custo de etapas posteriores de acabamento ou até mesmo a rejeição do componente. Por esta razão, faz-se necessário o desenvolvimento contínuo de ferramentas que permitam caracterizar o comportamento dinâmico de máquinas-ferramenta, permitindo a otimização de seu projeto e a definição de condições operacionais que minimizem a resposta vibracional. No presente trabalho é implementada uma rotina de elementos finitos de viga de Timoshenko para cálculo das frequências naturais e modos de vibração do conjunto eixo-árvore, visando o desenvolvimento de uma ferramenta computacional de livre acesso desenvolvida em um *software* gratuito para assistir o projeto de máquinas-ferramenta. Experimentos são conduzidos com o objetivo de levantar os aspectos dinâmicos mais relevantes e fornecer uma maior compreensão da resposta vibracional na operação de fresamento estável, na qual não ocorre ressonância nem vibrações autoexcitadas. A modelagem do eixo-árvore do centro de usinagem analisado considerando os parâmetros de rigidez definidos para rotação nula permite calcular as frequências naturais do conjunto em rotação livre com boa exatidão. Todavia, a operação de fresamento representa um fenômeno de alta complexidade e a análise das propriedades modais com base na configuração estática de rigidez é insuficiente para descrever o comportamento dinâmico do eixo-árvore, devendo ser considerados os efeitos dinâmicos que por sua vez provocam um espalhamento das frequências naturais em torno de um valor central e um deslocamento deste. Embora diversos autores apontem a variação da rigidez dos mancais e o efeito giroscópico como principais efeitos dinâmicos, estes são significativos apenas em altas rotações, muito acima da faixa de operação do centro de usinagem analisado. As análises dispostas no presente trabalho mostram que, no caso da máquina analisada, estes efeitos podem ser considerados desprezíveis quando comparados à influência da introdução de rigidez associada à deformação do sistema de acionamento e à operação de usinagem propriamente dita. O ajuste dos parâmetros de entrada referentes à rigidez do sistema de acionamento e da operação de fresamento permite calcular as frequências naturais com erro inferior a 5%. A análise da influência do comprimento livre da ferramenta nos níveis vibracionais indica que a adoção de um maior comprimento implica em maiores níveis vibracionais, assim como em uma maior sensibilidade do sistema a outros fatores, como rotação e sentido de corte. Finalmente, a análise das respostas espectrais indica que a predominância de determinadas frequências pode estar relacionada, dentre outros fatores, à penetração de trabalho.

Palavras-chave: Máquina-ferramenta, vibrações, eixo-árvore, elementos finitos, MEF.

## ABSTRACT

Machine tool vibrations are one of the most important factors affecting surface quality of machined components. As a consequence of high level vibrations, the costs associated with subsequent finishing operations are usually high and can lead even to the components discard. For this reason, there is a need of a continuous development of computational tools which allows characterizing the machine tool dynamic behavior. In this work, a Timoshenko beam finite elements procedure for calculation of natural frequencies and the relative vibration modes is implemented in a free software, aiming at the development of an open source computational tool to assist machine tool design. Experiments are conducted to point out the most relevant dynamic aspects and to allow a better understanding of the vibrational response of stable milling operation, where no resonance neither self-excited chatter vibrations are observed. The machine tool spindle unit modeled allows the user to calculate with good accuracy its natural frequencies under free rotation. Nevertheless, milling operation represents a phenomenon of high complexity and the analysis of modal parameters based on the stiffness defined for null rotation is not capable of precisely describing the spindle-unit dynamic behavior. Therefore, the dynamic effects involved, which cause a scatter of the natural frequencies around a central value and also its displacement, must be considered. Although several authors point out the roller bearing stiffness variation and the gyroscopic momentum as the main dynamic effects, those are only significant at speeds far above the speed range of the analyzed machine. The results presented in this work show that, for the analyzed machine, those effects can be considered negligible in comparison with the stiffness induction associated with the deformation of the drive system and with the milling operation itself. The adjustment of the input parameters related to this induced stiffness allows the calculation of the first four natural frequencies with maximum error inferior to 5%. Investigating the vibrational response in milling, experimental results show that a longer tool implicates in higher vibrational levels, as well as in a greater sensibility to other factors, such as rotation and cutting direction. Finally, the spectral response analysis shows that the predominance of certain natural frequencies may be related, among other factors, to the width of cut.

Keywords: Machine tool vibrations, spindle unit, finite elements, FEM.



# ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO .....	15
1.1. Objetivos gerais .....	16
1.2. Objetivos específicos .....	17
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	18
2.1. Vibrações de máquinas-ferramenta .....	20
2.1.1. Conceitos básicos .....	21
2.1.2. Tipos de vibração .....	25
2.1.2.1. Vibrações harmônicas .....	25
2.1.2.2. Vibrações forçadas .....	27
2.1.2.3. Vibrações autoexcitadas .....	31
2.1.2.4. Vibração da ferramenta .....	32
2.1.3. Aspectos construtivos de máquinas-ferramenta .....	36
2.1.3.1. Rigidez .....	36
2.1.3.2. Amortecimento .....	42
2.1.3.3. Efeitos dinâmicos .....	43
2.2. Modelagem computacional de sistemas vibratórios .....	47
2.2.1. Método dos elementos finitos .....	49
2.2.2. Seleção dos tipos de elementos e discretização do domínio .....	50
2.2.3. Autovalores e autovetores .....	52
3. METODOLOGIA .....	53
3.1. Procedimento numérico .....	53
3.1.1. Parâmetros de entrada .....	54
3.1.2. Validação do modelo .....	57
3.2. Procedimento experimental .....	58

3.2.1. Materiais e equipamentos .....	58
3.2.2. Planejamento dos experimentos .....	60
4. RESULTADOS .....	61
4.1. Cálculo numérico .....	61
4.2. Análise experimental das vibrações .....	68
4.2.1. Primeiro bloco de experimentos .....	68
4.2.2. Segundo bloco de experimentos .....	76
5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....	83
6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	87
6.1 Conclusões .....	87
6.2 Sugestão para trabalhos futuros .....	88
7. BIBLIOGRAFIA .....	89
APÊNDICE A – CÓDIGO-FONTE .....	96

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1: Solicitação da máquina-ferramenta: a) fluxo de força; b) deformações (Weck, 2006) .....	22
Figura 2.2: Modelagem do conjunto máquina-ferramenta-peça por massas, molas e amortecedores (Haas e Löckmann, 2009) .....	23
Figura 2.3: Tempos requeridos pelo pacote ACK e por um programa FEM comercial (Kono et al., 2010) .....	24
Figura 2.4: Vibrações de um eixo-árvore: a) resposta temporal; b) espectro de frequências (Repo, 2010) .....	27
Figura 2.5: Forças no fresamento do aço ABNT D2 endurecido (Deonísio, 2004) .....	29
Figura 2.6: Esforços no fresamento: a) discordante; b) concordante (Altintas, 2001) .....	29
Figura 2.7: Forças nas arestas laterais de uma fresa helicoidal (Liu et al., 2012) .....	30
Figura 2.8: Definição da evolução progressiva da rigidez: a) definição geral; b) rigidez no ponto de operação (Weck, 2006) .....	37
Figura 2.9: Mancais de rolamento de esferas com diferentes ângulos de contato (Harris e Kotzalas, 2007) .....	38
Figura 2.10: Elemento rolante sujeito a carregamento radial .....	39
Figura 2.11: Efeito da pré-carga na relação força-deformação (Harris e Kotzalas, 2007) .....	41
Figura 2.12: Pré-carga constante induzida por molas (Tlustý, 1993) .....	41
Figura 2.13: Técnica do decremento logarítmico .....	43
Figura 2.14: Superposição dos movimentos de rotação e precessão .....	43
Figura 2.15: Diagrama de Campbell .....	44
Figura 2.16: Rigidez dos mancais em função da rotação (Rantatalo et al., 2007) .....	45
Figura 2.17: Influência da rigidez variável e do efeito giroscópico nas frequências naturais (Rantatalo et al., 2007) .....	46
Figura 2.18: Influência da velocidade nos quatro primeiros modos de vibração (Rantatalo et al., 2007) .....	46
Figura 2.19: Sistema com um grau de liberdade .....	47
Figura 2.20: Curva de resposta dinâmica e análise modal (Brecher et al., 2011) .....	49

Figura 2.21: Definição do elemento de viga de Timoshenko (Nelson, 1980) .....	50
Figura 3.1: Discretização do eixo-árvore: a) desenho básico; b) modelo de elementos finitos .....	53
Figura 3.2: Curva de rigidez radial do mancal anterior .....	55
Figura 3.3: Curva de rigidez radial do mancal posterior .....	56
Figura 3.4: Modelo para validação da rotina de elementos finitos .....	57
Figura 3.5: Ferramenta utilizada nos testes .....	58
Figura 3.6: Diagrama de montagem experimental .....	59
Figura 4.1: Primeiro modo de vibração do conjunto eixo-árvore ( $\omega_1 = 1023$ Hz) .....	61
Figura 4.2: Segundo modo de vibração do conjunto eixo-árvore ( $\omega_2 = 1607$ Hz) .....	62
Figura 4.3: Terceiro modo de vibração do conjunto eixo-árvore ( $\omega_3 = 2309$ Hz) .....	62
Figura 4.4: Quarto modo de vibração do conjunto eixo-árvore ( $\omega_4 = 4841$ Hz) .....	63
Figura 4.5: Diagrama de Campbell do conjunto eixo-árvore .....	64
Figura 4.6: Influência da rigidez do mancal anterior nas frequências naturais .....	64
Figura 4.7: Influência da rigidez do mancal posterior nas frequências naturais .....	65
Figura 4.8: Influência da rigidez introduzida pela operação de fresamento nas frequências naturais .....	66
Figura 4.9: Influência da rigidez introduzida pelo acionamento nas frequências naturais .....	67
Figura 4.10: Influência da rigidez do acionamento no primeiro modo de vibração .....	67
Figura 4.11: Amplitudes de vibração medidas nos ensaios de rotação livre e fresamento .....	69
Figura 4.12: Espectro de frequência do ensaio de rotação livre, $\Omega = 1875$ rpm .....	70
Figura 4.13: Espectro de frequência do ensaio de rotação livre, $\Omega = 3750$ rpm ..	70
Figura 4.14: Espectro de frequência do ensaio de rotação livre, $\Omega = 5625$ rpm .....	71
Figura 4.15: Espectro de frequência do ensaio de rotação livre, $\Omega = 7500$ rpm .....	71
Figura 4.16: Aceleração associada aos picos de frequência predominantes nos ensaios de rotação livre .....	72
Figura 4.17: Espectro de frequência dos ensaios de fresamento, $\Omega = 1194$ rpm .....	73

Figura 4.18: Espectro de frequência dos ensaios de fresamento, $\Omega = 1875$ rpm .....	74
Figura 4.19: Espectro de frequência dos ensaios de fresamento, $\Omega = 2388$ rpm .....	74
Figura 4.20: Aceleração associada aos picos de frequência predominantes nos ensaios de fresamento .....	75
Figura 4.21: Amplitudes de vibração medidas nos ensaios de fresamento com $L = 80$ mm e $a_e = 2$ mm .....	78
Figura 4.22: Amplitudes de vibração medidas dos ensaios de fresamento com $L = 105$ mm e $a_e = 2$ mm .....	79
Figura 4.23: Espectros de frequência dos ensaios de fresamento do segundo bloco de experimentos, $L = 80$ mm .....	80
Figura 4.24: Aceleração associada aos picos de frequência predominantes no fresamento, $L = 80$ mm .....	81
Figura 4.25: Aceleração associada aos picos de frequência predominantes no fresamento, $L = 105$ mm .....	81

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Níveis vibracionais aceitáveis de máquinas-ferramenta (Buzdugan et al., 1986) ...	20
Tabela 3.1: Parâmetros de entrada do modelo .....	54
Tabela 3.2: Dados do mancal anterior .....	54
Tabela 3.3: Dados do mancal posterior .....	55
Tabela 3.4: Soluções numérica e analítica do problema considerado na validação da rotina implementada .....	57
Tabela 3.5: Composição química básica do aço ABNT D2 (Sousa, 1989) .....	58
Tabela 3.6: Dados dos acelerômetros PCB 353B34 .....	59
Tabela 3.7: Organização dos ensaios .....	60
Tabela 4.1: Relação entre os deslocamentos relativos .....	63
Tabela 4.2: Acelerações medidas nos ensaios de rotação livre e de fresamento .....	68
Tabela 4.3: Comparação das frequências naturais calculadas e medidas nos ensaios de rotação livre .....	72
Tabela 4.4: Variação das frequências naturais no ensaio de fresamento .....	76
Tabela 4.5: Influência dos efeitos de rigidez do acionamento e do fresamento nas frequências naturais .....	76
Tabela 4.6: Acelerações medidas nos ensaios de fresamento do segundo bloco .....	77

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_e$	Penetração de trabalho	[mm]
$a_n$	Sobrematerial	[mm]
$a_p$	Profundidade de corte	[mm]
$a_{pmax}$	Profundidade de corte máxima	[mm]
$B_f$	Ângulo de inclinação da ferramenta na direção da velocidade de avanço	[°]
$B_{fn}$	Ângulo de inclinação normal à direção da velocidade de avanço	[°]
$c$	Constante de amortecimento viscoso	[N.m.s/rad]
$C$	Matriz de amortecimento	[N.m.s/rad]
$C_{as}$	Componente antissimétrica da matriz de amortecimento	[N.m.s/rad]
$C_s$	Componente simétrica da matriz de amortecimento	[N.m.s/rad]
$d_{rol}$	Diâmetro do elemento rolante	[mm]
$e$	Excentricidade da massa desbalanceada	[m]
$F$	Força	[N]
$F_a$	Força axial	[N]
$F_d$	Força desbalanceadora	[N]
$f_i$	Frequência de excitação e seus múltiplos	[Hz]
$F_{max}$	Força máxima	[N]
$F_r$	Força radial	[N]
$f_z$	Avanço por dente	[mm/dente]
$G$	Matriz do efeito giroscópico	[N.m.s/rad]
$K$	Matriz de rigidez	[N/m]
$k$	Rigidez	[N/m]
$k_{7013}$	Rigidez do mancal anterior NSK 7013	[N/ $\mu$ m]
$k_{acionamento}$	Rigidez introduzida pelo sistema de acionamento	[N/ $\mu$ m]
$K_{as}$	Componente antissimétrica da matriz de rigidez	[N/m]
$K_{eixo}$	Matriz de rigidez do eixo	[N/m]
$k_{fresamento}$	Rigidez introduzida pela operação de fresamento	[N/ $\mu$ m]
$K_{mancais}$	Matriz de rigidez dos mancais	[N/m]
$k_{NN3011}$	Rigidez do mancal posterior NSK NN3011	[N/ $\mu$ m]
$K_s$	Componente simétrica da matriz de rigidez	[N/m]
$KS$	Pressão específica de corte	[kgf/mm <sup>2</sup> ]
$l$	Comprimento do elemento rolante	[m]
$L$	Comprimento livre da ferramenta	[m]
$M$	Matriz de massa	[kg]
$m$	Massa	[kg]

$m_e$	Massa desbalanceada	[kg]
$n_{esferas}$	Número de esferas	-
$n_{rolos}$	Número de rolos cilíndricos	-
$Q$	Matriz de forças externas	[N]
$Ra$	Rugosidade aritmética	[ $\mu\text{m}$ ]
$Rt$	Rugosidade total	[ $\mu\text{m}$ ]
$u_1, u_2, \dots, u_8$	Graus de liberdade dos elementos de viga de Timoshenko	-
$u$	Posição (coordenadas locais)	-
$\dot{u}$	Derivada da posição em relação ao tempo (coordenadas locais)	-
$\ddot{u}$	Derivada segunda da posição em relação ao tempo (coordenadas locais)	-
$v_c$	Velocidade de corte	[m/min]
$x$	Posição (coordenadas globais)	[m]
$\dot{x}$	Derivada da posição em relação ao tempo (coordenadas globais)	[m/s]
$\ddot{x}$	Derivada segunda da posição em relação ao tempo (coord. globais)	[m/s <sup>2</sup> ]
$X, Y$ e $Z$	Sistema de coordenadas	-
$\alpha$	Ângulo de contato	[°]
$\beta$	Inclinação da curva de rigidez no ponto de tangência	-
$\beta_0$	Inclinação da curva de rigidez pela definição geral	-
$\Delta$	Variação percentual	[%]
$\delta_r$	Deformação radial	[mm]
$\zeta_m$	Amortecimento	-
$\psi$	Posição angular	[rad]
$\Omega$	Rotação	[rpm]
$\omega_n, \omega_1, \omega_2, \dots$	Frequências naturais	[Hz]
$\omega_{sinc}$	Frequência síncrona	[Hz]



## 1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos a indústria de máquinas-ferramenta tem focado seus esforços na aplicação de novos materiais, no desenvolvimento de sistemas flexíveis, no controle e compensação de efeitos térmicos e mecânicos (Grigorev et al., 2013). Contudo, o projeto orientado dos componentes e da máquina como um todo continuam sendo essenciais para assegurar um bom desempenho e a economia de tempo e de custos relacionados às modificações e ajustes, especialmente no caso de máquinas complexas cuja precisão é fortemente influenciada pela temperatura e pelo comportamento estático e dinâmico (Weck, 2006).

O eixo-árvore de máquinas-ferramenta é projetado com base na rigidez à flexão, de forma que a deflexão máxima da extremidade do eixo na qual é fixada a ferramenta, também chamado nariz do eixo, deve ser inferior a um limite pré-estabelecido (Mehta, 1996). Os deslocamentos considerados no dimensionamento de máquinas-ferramenta são muito pequenos quando comparados aos verificados próximo ao estado de falha e o principal critério é, portanto, deformação máxima (Yoshimura et al., 1990). Todavia, embora uma construção robusta confira à máquina-ferramenta as características de rigidez necessárias para garantir uma boa exatidão dimensional dos componentes usinados, devem ser consideradas no projeto as características dinâmicas e vibracionais do conjunto, as quais são determinantes para a qualidade superficial do componente usinado.

A qualidade do componente usinado é diretamente afetada pelas vibrações da máquina-ferramenta. As vibrações do conjunto máquina-ferramenta-peça dão origem a ondulações na superfície usinada e prejudicam a vida da ferramenta e da máquina (Koenigsberg e Tlustý, 1970), podendo ser consideradas o fator que mais influencia a qualidade superficial. Atualmente, erros dinâmicos de máquinas-ferramenta têm sido considerados um dos problemas cruciais em usinagem de alta precisão (Kono et al., 2010).

No caso específico da fabricação de moldes e matrizes, as etapas de usinagem e acabamento chegam a representar 80% do seu custo total. De uma forma geral, estas ferramentas devem ser fabricadas atendendo tolerâncias estreitas, com baixos desvios dimensionais e geométricos. A qualidade dos moldes e matrizes influencia diretamente a qualidade dos componentes produzidos (Altan, 2001). Portanto, diante do alto custo de fabricação deste tipo de ferramental faz-se necessário o controle dos níveis de vibração na operação de fresamento para otimizar a etapa de usinagem e reduzir as etapas seguintes de polimento e de ajuste na prensa (*try out*).

Tendo em mente a influência das vibrações na qualidade superficial, existe uma preocupação com os níveis de vibração do conjunto. Todavia, mais importante que estimar a amplitude máxima das vibrações é determinar as frequências naturais do conjunto eixo-árvore, as quais podem ser excitadas por fatores inerentes ao próprio processo de usinagem. Segundo Weck (2006), as frequências naturais da estrutura da máquina se situam na faixa de 20 a 200 Hz enquanto as frequências do conjunto eixo-árvore chegam a 800 Hz. Embora as frequências naturais da estrutura da máquina como um todo sejam menores que as do conjunto eixo-árvore, elas não representam um problema tão grande no que diz respeito às vibrações uma vez que é necessária uma quantidade de energia muito grande para excitar os modos correspondentes. Além disto, quanto mais distante da base no diagrama de força situa-se o componente em questão, isto é, quanto mais próximo da região de trabalho, mais importante torna-se atingir rigidez suficiente em uma construção leve (Weck, 2006). Desta maneira, assumem maior importância as vibrações do eixo-árvore que, além de serem excitadas por fontes de menor energia, estão mais próximas da ferramenta e transmitem portanto maiores amplitudes de vibração.

No presente trabalho é implementada e validada uma rotina numérica de elementos finitos para auxiliar o projeto de máquinas-ferramenta calculando as frequências naturais e os modos de vibração do conjunto eixo-árvore, a qual permite reduzir a probabilidade de ocorrência de níveis elevados de vibrações e pode ser utilizada na geração de diagramas de estabilidade. Esta ferramenta computacional tem como objetivo principal auxiliar o projetista na definição de uma relação ótima entre rigidez e distribuição de massa. Em seguida são conduzidos experimentos com o objetivo de apontar os aspectos dinâmicos mais relevantes por meio da comparação entre ensaios de rotação livre e de fresamento. Finalmente, é investigada a operação de fresamento estável, na qual não há evidências de ressonância nem de vibrações autoexcitadas.

## **1.1 Objetivos gerais**

Este trabalho tem por objetivos a implementação de uma rotina de elementos finitos de viga de Timoshenko para cálculo das frequências naturais e modos de vibração do conjunto eixo-árvore de máquinas-ferramenta e o estudo das vibrações do conjunto eixo-árvore no processo de usinagem estável.

## 1.2 Objetivos específicos

Mais especificamente, pretende-se:

- Calcular as frequências naturais e os modos de vibração do sistema;
- Validar experimentalmente o modelo;
- Comparar os ensaios de rotação livre (resposta síncrona ao desbalanceamento) e ensaios de fresamento (vibrações forçadas induzidas no processo estável) para levantamento dos aspectos dinâmicos mais significantes;
- Analisar os níveis de vibração e os espectros de frequências referentes aos ensaios de fresamento, relacionando as características desta operação e o comportamento dinâmico da máquina-ferramenta;
- Analisar a influência do processo de usinagem e do sistema de acionamento nas frequências naturais do conjunto eixo-árvore;
- Determinar a influência da rotação, da penetração de trabalho, do sentido de corte e do comprimento livre da ferramenta nas vibrações do conjunto eixo-árvore.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Segundo Weck (2006), os principais fatores que influenciam os desvios geométricos na usinagem de peças são:

- Desgaste da ferramenta e formação de aresta postiça de corte;
- Desvio dos movimentos de avanço da máquina-ferramenta em relação ao movimento relativo teórico entre a ferramenta e a peça;
- Desvios dos movimentos rotativos principais (eixo-árvore);
- Deformação da estrutura da máquina-ferramenta;
- Deformação elástica de ferramentas, peças, acessórios e elementos de fixação.

A qualidade dos componentes usinados com ferramentas de geometria definida pode ser descrita com base na macrogeometria (desvios dimensionais e geométricos, marcas e ondulações na superfície), originada pela geometria da ferramenta e por sua movimentação. À macrogeometria sobrepõe-se a microgeometria, caracterizada principalmente pela rugosidade (Knobel, 2000).

Fortemente influenciada pelas vibrações do conjunto máquina-ferramenta-peça, a rugosidade é frequentemente utilizada como principal parâmetro de qualidade superficial de peças usinadas. Jiang et al. (2008) desenvolveram um modelo que correlaciona as vibrações na operação de fresamento e a qualidade da superfície gerada com base nos sinais vibracionais de deslocamento da ferramenta e da peça. Os resultados indicam que a superfície reconstruída a partir destes sinais fornece uma boa representação da superfície real e confirmam que as vibrações representam o fator mais influente na geração de superfícies.

Diversos autores têm se preocupado em investigar a qualidade de superfícies obtidas por meio da operação de fresamento. Oktem et al. (2005) utilizaram o método de superfícies de resposta para prever a rugosidade de superfícies fresadas, considerando a influência dos parâmetros de corte. A utilização do algoritmo genético permitiu a redução da rugosidade em aproximadamente 10%. Em uma continuidade desse estudo, Erzurumlu e Oktem (2007) compararam os métodos superfície de resposta e rede neural artificial para previsão da rugosidade superficial de moldes. Apesar do maior esforço computacional no segundo método, ele foi capaz de prever a rugosidade superficial com exatidão ligeiramente superior.

Montgomery e Altintas (1991) consideram a influência dos aspectos dinâmicos do fresamento na geração de superfícies em um modelo que calcula os esforços atuantes e, a partir da movimentação da ferramenta, determina a espessura de corte. Os aspectos

cinemáticos da ferramenta são modelados, sendo possível definir a orientação e direção de movimentação da aresta de corte sob condições dinâmicas. Ismail et al. (1993) apresentam um modelo de geração superficial que considera o efeito das vibrações, do batimento e do desgaste de flanco. Por meio da comparação entre resultados computacionais e experimentais demonstram que o desgaste da ferramenta de corte influencia a qualidade da superfície gerada tanto pela alteração da posição da aresta de corte quanto pela variação dos esforços de usinagem. Já o modelo proposto por Heisel e Milberg (1994) propõe a identificação das vibrações a partir da análise das marcas na superfície gerada. O modelo proposto por Arizmendi et al. (2009) é capaz de prever a rugosidade e os desvios de forma da superfície gerada na operação de fresamento considerando a vibração da ferramenta. Neste são considerados os efeitos das vibrações nas equações da trajetória das arestas de corte, as quais são transformadas em equações equivalentes polinomiais e solucionadas para posições discretas ao longo da direção de avanço.

O desenvolvimento das máquinas-ferramenta aos níveis de desempenho de ultraprecisão depende do desenvolvimento contínuo do projeto e fabricação dos subsistemas (conjunto eixo-árvore, guias, sistema de acionamento, etc.) aliado à compensação de erros sistemáticos (McKewon e May-Miller *apud* Sartori e Zhang, 1996). As ferramentas computacionais de compensação ativa baseiam-se na força de deflexão instantânea enquanto as de compensação pré-calibrada baseiam-se em simulações do processo e no ajuste do avanço via controle adaptativo (Suh et al., 1996), sendo ambas alternativas econômicas ao projeto e fabricação de máquinas com alta precisão absoluta, de forma que a precisão da máquina deve apenas ser suficiente para permitir a compensação do erro (Thompson, 1989).

Mesmo havendo uma crescente utilização de sistemas de compensação de erros sistemáticos, continua sendo imprescindível a realização de análises eficientes na etapa de projeto para garantir o bom desempenho e precisão da máquina, além de reduzir o tempo e custo de modificações e ajustes. Neste contexto, a análise estática mostra-se insuficiente, havendo necessidade de considerar também os aspectos dinâmicos da máquina-ferramenta. Para analisar o comportamento dinâmico detalhado de uma máquina-ferramenta e aperfeiçoar o projeto, faz-se necessário não apenas o levantamento da resposta de frequência mas também dos parâmetros modais como frequências naturais, modos de vibração e amortecimento (Stephenson e Agapiou, 1996).

## 2.1 Vibrações de máquinas-ferramenta

A máquina-ferramenta representa um sistema vibracional composto por diversos elementos (Weck et al., 1991). Ao ultrapassar determinada amplitude, as vibrações deste sistema podem prejudicar tanto o acabamento da superfície quanto a integridade de componentes do conjunto máquina-ferramenta. Estas vibrações dão origem a ondulações na superfície usinada, consequência da variação da seção de usinagem, que gera variações na força de corte, as quais prejudicam a vida da ferramenta e da máquina (Koenigsberg e Tlusty, 1970; Rognitz, 1968; Weck, 2006).

O nível de vibrações tolerável deve ser determinado com base no acabamento superficial e na exatidão dimensional da peça usinada, assim como nos efeitos das vibrações sobre a vida da ferramenta (Rivin, 2002). Na tabela 2.1 são definidos níveis admissíveis de vibração para diferentes tipos de máquinas-ferramenta, definidos em função da amplitude máxima de vibração.

Tabela 2.1 – Níveis vibracionais aceitáveis de máquinas-ferramenta. Fonte: Buzdugan et al., 1986.

Tipo de máquina-ferramenta	Amplitude máxima [mm]
Tornos, fresadoras, furadeiras e retificadoras	0,03
Retificadoras internas	0,05
Prensas	0,09
Plainas	0,35

No que diz respeito aos parâmetros que influenciam as vibrações do conjunto, estes podem ser inerentes à própria máquina-ferramenta e seus componentes, ao processo de usinagem e ao posicionamento/ orientação do processo com relação ao sistema vibratório da máquina (Koenigsberg e Tlusty, 1970; Stoeterau, 2004). De uma forma geral, o comportamento dinâmico de uma máquina-ferramenta pode ser melhorado pela redução das fontes de vibração da própria máquina, da ferramenta e de seus componentes de fixação (Stephenson e Agapiou, 1996).

O processo de vibrações tem sido estudado com a intenção de primeiramente criar regras de forma a escolher quais as condições de usinagem podem ser utilizadas e também diretrizes para o projeto de máquinas-ferramentas estáveis (Stoeterau, 1996). Quando se tem por objetivo usinar componentes com rugosidade  $Rt < 200$  nm, isto é, superfícies espelhadas, a soma de todas as amplitudes das vibrações do sistema deve ser inferior a este valor (Stoeterau, 2004).

A eliminação das fontes de vibrações provenientes da máquina-ferramenta se dá pelo despojamento de engrenagens, guias de escorregamento mal lubrificadas, mancais de rolamento, pela minimização do comprimento em balanço das ferramentas e pelo dimensionamento adequado do suporte da ferramenta de corte (Stoeterau, 2004). A redução da influência do processo se dá pela escolha adequada dos parâmetros de usinagem.

Para garantir o bom desempenho dinâmico da máquina-ferramenta, devem ser consideradas no projeto as características vibracionais do conjunto. Rantatalo et al. (2007) apresentaram uma metodologia para análise de vibrações laterais de uma máquina-ferramenta de alta velocidade (*High speed machining* – HSM) que inclui a modelagem do eixo-árvore em elementos finitos, excitação magnética e medição da resposta vibratória por meio de sensores indutivos de proximidade. Nesse trabalho, mostram que o momento giroscópico e a variação da rigidez dos mancais de rolamento modificam as frequências naturais em altas velocidades, sendo maior a influência da variação da rigidez. Gagnol et al. (2011) descrevem um procedimento experimental que permite identificar as frequências modais do eixo-árvore durante operação, por meio de uma montagem de sensores associada a um robusto procedimento de identificação (análise no domínio da frequência modificada). Os resultados das medições foram comparados com um modelo computacional baseado em dinâmica de rotores e verifica-se boa concordância entre eles. Em um trabalho anterior, Gagnol et al. (2007) demonstraram que o efeito giroscópico e o efeito da variação da rigidez dos mancais influenciam significativamente o comportamento do cabeçote, efeito também confirmado por Shuyun e Shufei (2011). Outros métodos de caracterização e análise dos efeitos dinâmicos se baseiam em uma abordagem experimental. Normalmente são medidas as vibrações de partes estacionárias, como no trabalho de Zaghbani e Songmene (2009), no qual foram instalados acelerômetros na peça usinada e na parte livre não rotativa do cabeçote. Neste trabalho, a análise dos espectros de frequência para diferentes configurações da máquina-ferramenta demonstrou que as frequências naturais variam de 2% a 8% enquanto o amortecimento varia de 2 a 10 vezes.

### **2.1.1 Conceitos básicos**

Os principais tipos de vibrações envolvidos no fresamento são as vibrações forçadas e as autoexcitadas, sendo que as forçadas tornam-se problemáticas quando a frequência de excitação é próxima de uma das frequências naturais do sistema e/ou de seus harmônicos (Oliveira, 2007). Enquanto as vibrações autoexcitadas são caracterizadas por uma frequência

natural, as frequências predominantes nas vibrações forçadas podem ser a própria frequência de excitação no caso de uma força periódica ou as frequências naturais no caso de um impulso (Weck, 2006).

As frequências para as quais se verificam maiores amplitudes de vibração correspondem às frequências naturais do sistema, que dependem fortemente do tamanho da máquina (Weck, 2006). Na usinagem de metais, o número de frequências naturais de interesse prático é geralmente limitado, isto é, o comportamento do sistema máquina-ferramenta ou de qualquer subconjunto pode ser simplificado reduzindo-se a análise a poucos modos de vibração e às frequências associadas (Stephenson e Agapiou, 1996).

A deformação instantânea provocada pelos esforços de usinagem corresponde ao somatório das deformações de todos componentes envolvidos no fluxo de força. A análise dos diagramas de fluxo de força e de deformações, representados na figura 2.1, quantifica a solicitação de cada elemento e sua contribuição no deslocamento total em relação ao ponto de aplicação da força (Weck, 2006).

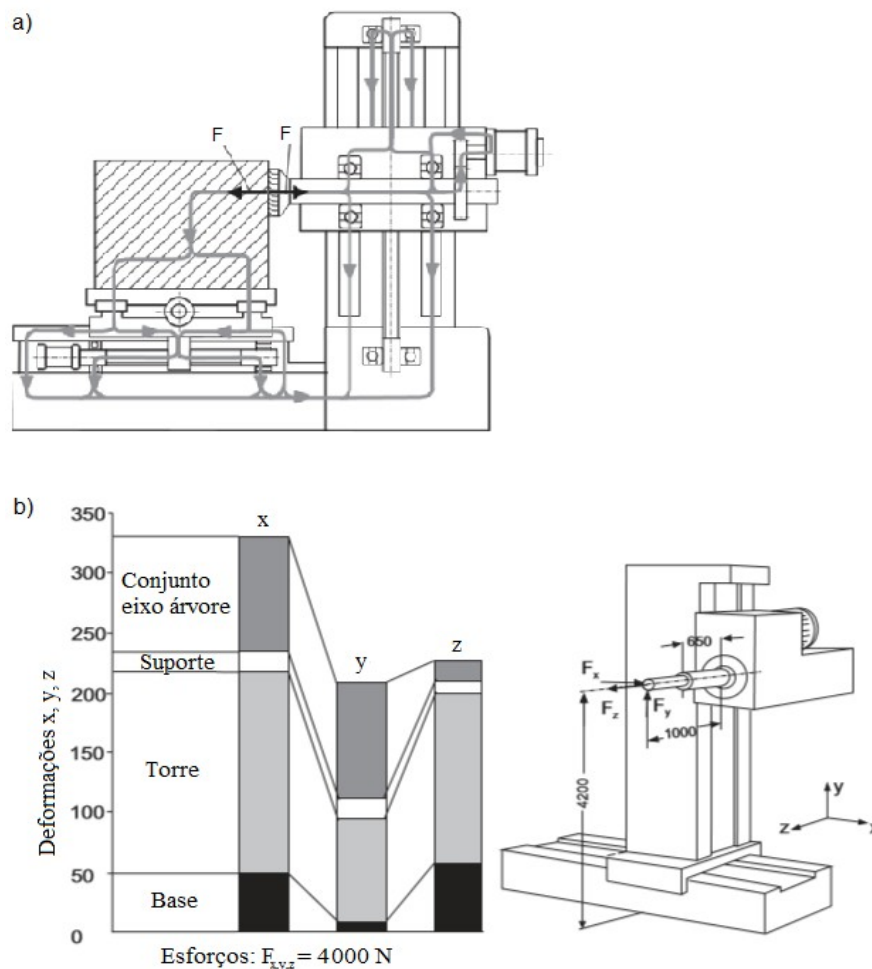


Figura 2.1 – Solicitação da máquina-ferramenta: a) fluxo de força; b) deformações. Fonte: Weck, 2006.



Segundo Weck (2006),

*Quanto mais distante da base no diagrama de força situa-se o componente, isto é, quanto mais próximo da região de trabalho, mais importante torna-se atingir rigidez suficiente em uma construção leve. Para isto, recorre-se a eficientes estratégias de otimização utilizando-se o método dos elementos finitos, sendo possível desta maneira melhorar o comportamento dinâmico da máquina, otimizando a rigidez e distribuição de massa dos componentes.*

As características vibracionais da máquina-ferramenta são especialmente influenciadas pelas propriedades de massa, rigidez e amortecimento do conjunto. A fim de analisar a influência das diferentes configurações de máquinas-ferramenta, foi desenvolvido no Instituto de Máquinas-Ferramenta e Manufatura da ETH Zürich um pacote computacional denominado *Axis Construction Kit* (ACK), o qual permite que propriedades da máquina sejam rapidamente calculadas por um modelo de massas e molas (Kono et al., 2010).

Na figura 2.2 é ilustrada a modelagem de um conjunto máquina-ferramenta-peça utilizando-se massas, molas e amortecedores.

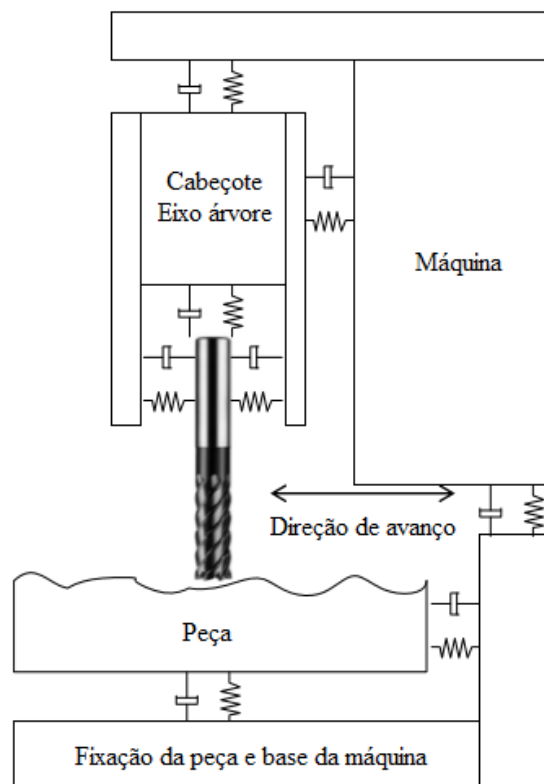


Figura 2.2: Modelagem do conjunto máquina-ferramenta-peça por massas, molas e amortecedores. Fonte: Haas e Löckmann, 2009.

O método ACK apresentado por Kono et al. (2010) requer menos graus de liberdade do que um modelo de elementos finitos e apenas a simulação de determinados componentes é necessária para representar os modos de vibração de ordem mais baixa, necessitando apenas de 30% do tempo total do método de elementos finitos convencional (*finite element method – FEM*), conforme representado na figura 2.3.

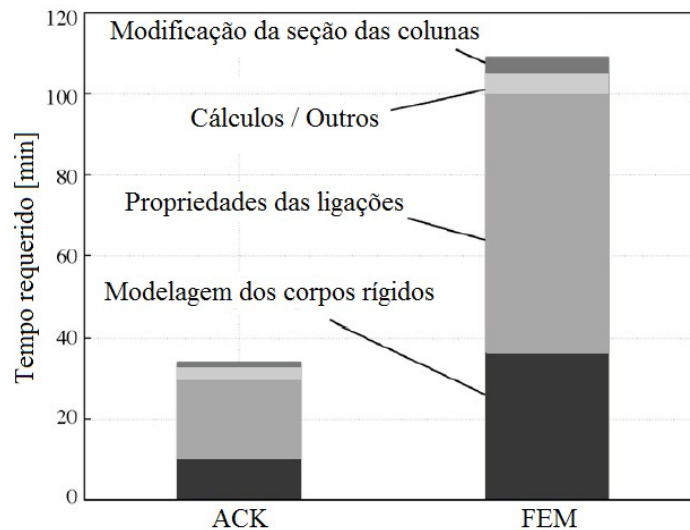


Figura 2.3 – Tempos requeridos pelo pacote ACK e por um programa FEM comercial. Fonte: Kono et al., 2010.

No que se refere à medição das vibrações do conjunto, em vários casos não se obtém uma relação satisfatória entre os valores medidos e calculados para todas faixas de frequência (Weck, 2006). As principais causas são:

- Má escolha da localização do ponto de medição na máquina (por exemplo nó);
- Alto ruído do sinal medido (baixa coerência);
- Não linearidades do sistema;
- Amortecimento não é unicamente viscoso.

Ao se medir as vibrações de uma máquina, observam-se picos pronunciados de ressonância. Para se identificar os componentes que contribuem significativamente, faz-se necessária a determinação experimental dos modos de vibração (Weck, 2006). Atualmente é possível determinar os modos de vibração de uma máquina por meio de uma análise modal auxiliada por computador. A escolha dos pontos de medição influencia significativamente a identificação dos modos de vibração e dos pontos fracos da máquina. Eles devem ser escolhidos de forma a fornecer dados suficientes dos movimentos relativos da máquina, definindo-se dois pontos de medição um em cada componente (Weck, 2006).

## 2.1.2 Tipos de vibração

Nesta seção são apresentados os principais tipos de vibrações de máquinas-ferramentas: vibrações harmônicas, forçadas e autoexcitadas. Além disto, são discutidos os principais aspectos vibracionais da ferramenta propriamente dita.

### 2.1.2.1 Vibrações harmônicas

É possível determinar as frequências naturais de uma máquina-ferramenta tanto por meio de cálculos quanto experimentalmente. Os três parâmetros que determinam o comportamento dinâmico de máquinas-ferramenta em geral são a distribuição de massa, rigidez e amortecimento do sistema. Estes parâmetros determinam as frequências naturais e os respectivos modos de vibração do sistema, os quais por sua vez não dependem diretamente dos esforços. No caso de estruturas complexas como máquinas-ferramenta, o conhecimento dos modos de vibração se faz especialmente importante para identificar quais componentes são os principais responsáveis pelas vibrações (análise dos pontos críticos). Segundo Weck (2006), mesa e cabeçote normalmente vibram com movimentos de flexão e torção, enquanto guias vibram com movimentos de corpo rígido no plano de movimentação da guia.

A análise destas frequências e de seus respectivos modos de vibração deve se limitar a um número finito de graus de liberdade, sendo as frequências mais baixas as mais importantes, uma vez que a elas estão associadas as maiores amplitudes de vibração (Stoterau, 2004). O bom desempenho estático e dinâmico de uma máquina depende muitas vezes da flexibilidade, do amortecimento e especialmente da frequência natural de um componente individual (Weck, 2006).

De acordo com Weck (2006), as frequências naturais da estrutura da máquina se situam na faixa de 20 a 200 Hz enquanto as frequências do conjunto eixo-árvore chegam a 800 Hz. Embora as frequências naturais da estrutura da máquina como um todo sejam menores que as do conjunto eixo-árvore, elas não representam um problema tão grande no que diz respeito às vibrações, uma vez é necessária uma energia muito grande para excitar os modos correspondentes. Assumem maior importância as vibrações do eixo-árvore, que além de serem excitadas por fontes de menor energia estão mais próximas da ferramenta e portanto transmitem maiores amplitudes.

No caso da vibração harmônica o sistema vibra segundo o modo correspondente à frequência natural excitada. Não somente a magnitude dos esforços mas também a fase entre a força e a deformação são variáveis importantes no estudo das vibrações. Verifica-se a

ocorrência de vibrações excessivas do sistema quando a frequência de operação e a frequência natural se sobrepõem, o que também ocorre quando uma fonte externa excita o sistema com uma frequência próxima a natural (Weck, 2006).

Uma das maneiras de se determinar experimentalmente as frequências naturais de um sistema é por meio do ensaio de batida com um martelo (*impact hammer test*). Este ensaio consiste em excitar o sistema utilizando-se um martelo ou uma ferramenta e analisar a resposta, medida normalmente por um acelerômetro fixo em regiões específicas do conjunto, nos domínios do tempo e da frequência. De acordo com Vance (1988), neste ensaio devem ser testados diferentes martelos, duros e macios, para se determinar qual deles resulta em um melhor sinal de vibração livre.

Por meio da análise modal operacional (*operational modal analysis*) é possível estimar os parâmetros modais a partir do sinal de saída sem conhecer a entrada, análise classificada como análise do sinal de resposta (*output only analysis*). Rantatalo (2006) desenvolveu um método para levantamento dos parâmetros modais baseado na excitação por forças magnéticas. Todavia este não é muito representativo em relação à usinagem, uma vez que o simples ensaio de rotação difere da operação de usinagem, especialmente no que se refere às condições de contorno (Schmitz, 2000).

Os sinais de saída dos transdutores de vibrações são uma complexa combinação das respostas às forças internas e externas. A análise da resposta temporal permite comparar os níveis de vibração do sistema enquanto para uma análise eficiente faz-se necessário reduzir o sinal complexo as suas componentes, permitindo assim correlacioná-las com suas fontes (Vance, 1988). Para transformar a resposta temporal, permitindo sua análise no domínio da frequência, pode ser empregada a técnica da transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform – FFT*). Em estudo realizado por Repo (2010), a resposta vibratória do conjunto eixo-árvore de um centro de usinagem foi obtida experimentalmente e transformada utilizando-se a técnica FFT. Segundo o autor, o pico de frequências de 1195 Hz (figura 2.4) pode ser atribuído à frequência natural do conjunto eixo-árvore ou do sistema de fixação da ferramenta.

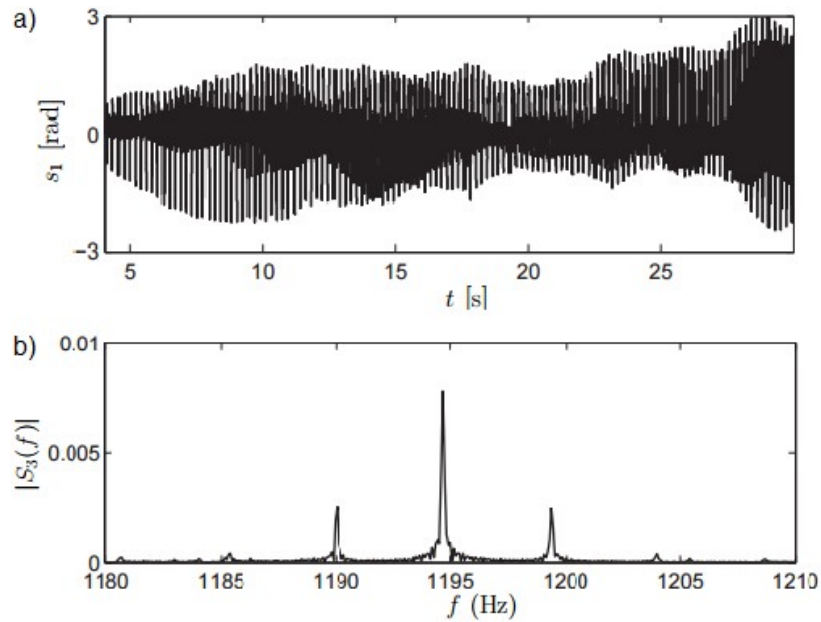


Figura 2.4: Vibrações de um eixo-árvore: a) resposta temporal; b) espectro de frequências. Fonte: Repo, 2010.

### 2.1.2.2 Vibrações forçadas

As principais fontes de excitação que devem ser consideradas nas vibrações forçadas são o desbalanceamento do conjunto eixo-árvore-ferramenta e os próprios esforços inerentes à operação de fresamento.

O desequilíbrio do rotor pode ser causado pelo próprio projeto, material, produção e montagem e a norma DIN 69888 especifica que, para balanceamento de sistemas de ferramentas rotativas, a carga real nos rolamentos causada pelo desbalanceamento não deve exceder 1% da capacidade de carga dinâmica dos rolamentos (Sandvik Coromant, 2015a).

A força desbalanceadora  $F_d$  é função da rotação  $\Omega$ , da massa desbalanceada  $m_e$  e de sua excentricidade  $e$  (Rao, 2004):

$$F_d = m_e e \left( \frac{2\pi}{3600} \Omega \right)^2 \quad (2.1)$$

Os esforços de usinagem inerentes à operação de fresamento também funcionam como fonte de excitação de vibrações forçadas. O processo de corte, principalmente no caso de corte interrompido, promove vibrações forçadas por meio de transiente das forças de corte (Oliveira, 2007). Este tipo de vibração ocorre em todos tipos de usinagem mas é crítico na operação de acabamento, onde desvios geométricos e rugosidade devem ser reduzidos a valores baixos de forma a atender tolerâncias estreitas determinadas no projeto. Este tipo de vibração é especialmente nocivo quando a frequência de excitação está próxima a alguma

frequência natural do sistema ou a algum harmônico, o que pode ocasionar a instabilidade do processo (Stephenson e Agapiou, 1996; Aguiar et al., 2013).

Esforços de usinagem são os principais fatores que influenciam a precisão do processo, a qualidade da superfície gerada, as vibrações do sistema e a vida da ferramenta (Ikua et al., 2001). Ao se usar materiais de alta dureza devem ser considerados os riscos de falha da ferramenta, impactando no custo da troca da ferramenta e de retrabalho da superfície eventualmente danificada, e de danos à própria máquina. Para minimizá-los, recorre-se à tecnologia de manufatura assistida por computador (*computer assisted manufacturing* – CAM) para um planejamento otimizado das etapas e estratégias de usinagem (López de Lacalle et al., 2010).

A força de usinagem depende basicamente da ferramenta, do material da peça e das condições de interface (Machado et al., 2011) e, no caso particular da operação de fresamento, os esforços de usinagem variam ao longo de uma revolução da ferramenta. Estes induzem a deflexão do conjunto máquina-ferramenta e, devido ao seu carácter cíclico, podem provocar vibrações forçadas do sistema. Eles representam uma fonte excitadora do sistema, que pode oscilar com grandes amplitudes em rotações próximas à frequência natural, provocando desvios geométricos na superfície usinada.

Na operação ideal de fresamento, o gráfico de força em função da posição angular seria uma senóide (Ribeiro, 2007). Todavia, isto não ocorre devido à complexidade dinâmica do fresamento e existem diversos modelos capazes de prever os esforços (Smith e Tlustý, 1991; Altintas, 2001; Ikua et al., 2001; Ko, 2002; Omar, 2007; Liu et al., 2012).

Na figura 2.5 são representados os esforços atuantes na operação de fresamento do aço ABNT D2 medidos experimentalmente por Deonísio (2004). Embora possuam diferentes magnitudes, os esforços medidos nas três direções (direção axial, direção de avanço e perpendicular ao avanço) possuem o mesmo comportamento temporal.

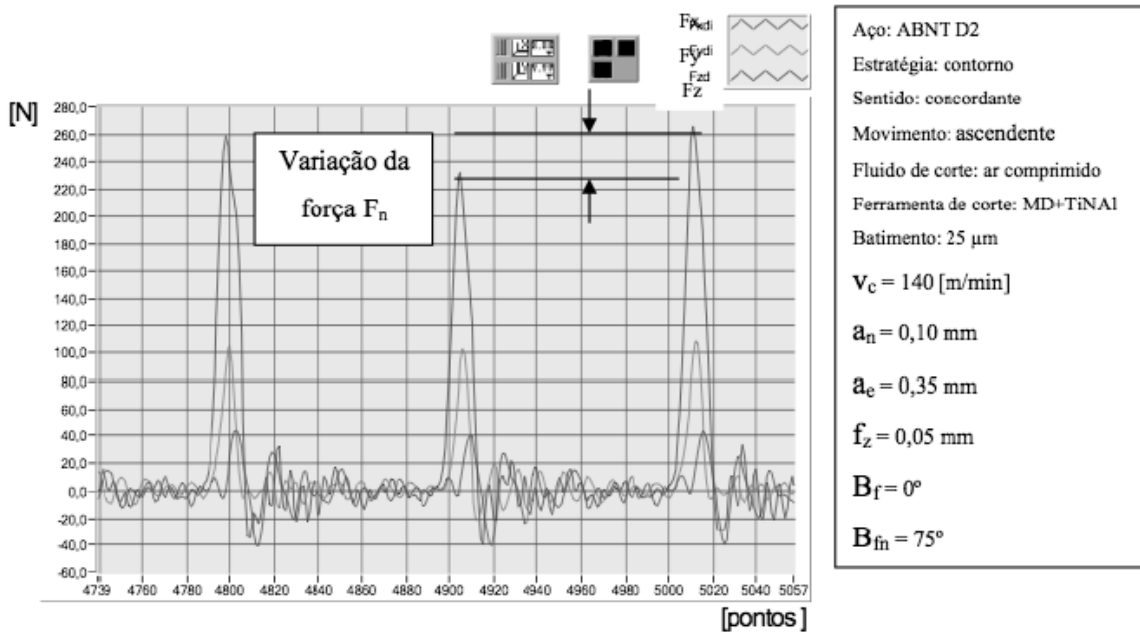


Figura 2.5 – Forças no fresamento do aço ABNT D2 endurecido. Fonte: Deonísio, 2004.

O comportamento dos esforços de usinagem varia de acordo com o sentido de corte conforme mostra a figura 2.6, onde são apresentados os gráficos de simulação de esforços no fresamento considerando-se uma ferramenta de quatro dentes e penetração de trabalho  $a_e$  igual ao raio da fresa (Altintas, 2001): no fresamento discordante, a espessura do cavaco é mínima quando o dente penetra na peça e máxima quando o dente sai dela, de forma que a força de usinagem varia de um valor mínimo a um valor máximo (figura 2.6-a); já no fresamento concordante, a espessura é máxima quando o dente penetra e mínima quando ele sai, de forma que a força varia de um valor máximo a um valor mínimo (figura 2.6-b).

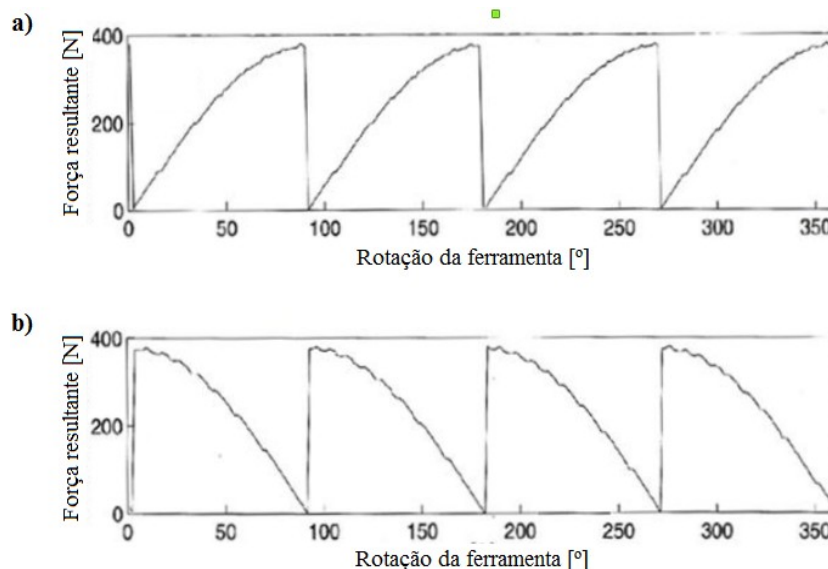


Figura 2.6 – Esforços no fresamento: a) discordante; b) concordante. Fonte: Altintas, 2001.

O fresamento discordante geralmente é utilizado para reduzir a deflexão da ferramenta e as vibrações autoexcitadas quando a rigidez de fixação ou da peça usinada são baixas em alguma região (Sandvik Coromant, 2015c). Além disto, este sentido de corte é preferido no caso de materiais de difícil usinagem por prolongar a vida da ferramenta (Stephenson e Agapiou, 1996).

Visando a redução das vibrações do sistema, diversos fabricantes de ferramentas adotam um espaçamento angular variável entre os insertos ou uma geometria especial de forma a modificar o ângulo de passo da ferramenta (*pitch angle*), reduzindo assim a frequência associada aos esforços de usinagem. Na fabricação de cavidades em moldes e matrizes de aços endurecidos, a utilização de fresas helicoidais tem se mostrado uma alternativa muito eficiente. Na figura 2.7 é mostrado o gráfico dos esforços de usinagem referentes a uma fresa helicoidal. Nota-se que a variação dos esforços com a rotação é bem mais suave, reduzindo os impactos e variações abruptas de esforços.

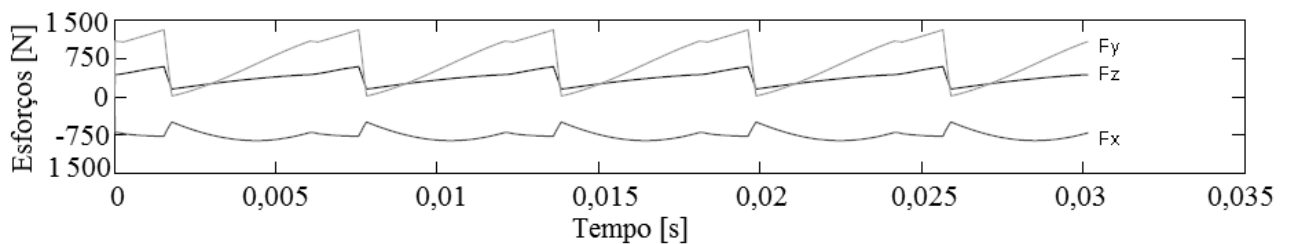


Figura 2.7 – Forças nas arestas laterais de uma fresa helicoidal. Fonte: Liu et al, 2012. Adaptado.

Iyer et al. (2007) compararam o desempenho de fresas com insertos intercambiáveis e inteiriças de metal duro no fresamento helicoidal de furos com 16 mm de diâmetro em uma peça de 13,8 mm de espessura fabricada em aço ABNT D2 com dureza de 60 HRC, obtendo desvios de circularidade de 25 e 10  $\mu\text{m}$ , respectivamente. A fabricação dos furos dentro da tolerância H7 e com rugosidade superficial  $Ra = 0,3 \mu\text{m}$  pode ser suficiente dependendo da aplicação, dispensando neste caso etapas posteriores de acabamento.

Além dos esforços inerentes ao próprio processo de usinagem, vibrações forçadas podem ser excitadas por algumas fontes internas, como perturbações na peça e no acionamento da ferramenta (ex.: componentes desgastados, mancais, engrenagens, instabilidade de eixos e guias), forças de desbalanceamento, cargas dinâmicas geradas pela aceleração ou inversão de movimento de componentes da máquina-ferramenta e vibrações da base (Stephenson e Agapiou, 1996).



### 2.1.2.3 Vibrações autoexcitadas

Além das vibrações harmônicas, são igualmente importantes para o comportamento dinâmico de máquinas-ferramenta as vibrações autoexcitadas (*chatter vibrations*). Este tipo de vibração não resulta diretamente de forças externas mas de energia do processo, podendo ser induzido por variações nos esforços de usinagem relacionados à velocidade ou à seção de corte, pelo efeito *stick-slip*, pela formação da aresta postiça de corte, por variações metalúrgicas no material da peça e por efeitos regenerativos inerentes à dinâmica do processo (Stephenson e Agapiou, 1996). As frequências dominantes das vibrações autoexcitadas podem estar relacionadas às frequências naturais do sistema (Dombóvári et al., 2011) e este tipo de vibração normalmente é gerar marcas profundas na superfície gerada (Surmann e Enk, 2007).

Vibrações regenerativas autoexcitadas, assim chamadas por se repetirem nas revoluções seguintes devido às ondulações geradas, resultam da flutuação de força provocada pela variação da espessura do cavaco em relação ao dente anterior (Stephenson e Agapiou, 1996). A variação da espessura do cavaco, consequência da flexibilidade geral da máquina e do fluxo de força, é responsável por ondulações na superfície usinada (Haas e Löckmann, 2009). Ao remover material com um determinado dente a ferramenta pode ser submetida a um esforço dinâmico relacionado à geração do dente anterior, isto é, se a ferramenta sofre deflexão é removido menos material do que deveria e o próximo inserto remove mais material, provocando a flutuação da força (Smith e Tlustý, 1991). Esta flutuação da força é responsável pelas vibrações regenerativas autoexcitadas, onde um dos modos fundamentais de vibração é inicialmente excitado e a superfície ondulada gerada por um dente é removida pelo dente seguinte, o qual por sua vez também gera uma superfície ondulada devido às oscilações que tem caráter regenerativo (Altintas, 2001).

Enquanto as vibrações forçadas são facilmente detectáveis na fase de desenvolvimento ou na inspeção final de uma máquina-ferramenta, podendo portanto ser reduzidas a níveis suficientemente baixos, as vibrações autoexcitadas podem não ser tão facilmente detectadas a não ser que a máquina seja exaustivamente testada (Weck, 2006).

Vibrações autoexcitadas inciam-se espontaneamente, de certa forma relacionadas à variação da espessura do cavaco em relação à revolução anterior, à profundidade, à penetração de trabalho e à velocidade de corte ( $a_p$ ,  $a_e$  e  $v_c$ ), isto é, parâmetros que resultam em variações das forças de corte (Stephenson e Agapiou, 1996). Sua ocorrência é determinada pela estabilidade do sistema máquina-ferramenta-peça e para reduzir a probabilidade deste tipo de vibração recorre-se aos chamados diagramas de estabilidade, que determinam a

profundidade de corte máxima  $a_{pmax}$  em função da rotação da ferramenta. Normalmente adotam-se, como medida prática, profundidades de corte mais baixas para que o conjunto máquina-ferramenta opere em uma região de forte amortecimento do processo, razão pela qual recorre-se à usinagem de alta velocidade para compensar a produtividade (Tlusty, 1993). Contudo, embora altas velocidades normalmente permitam adotar profundidades de cortes mais altas sem ocorrência de vibrações autoexcitadas, isto nem sempre é possível devido ao material usinado ou a limitações da própria máquina-ferramenta (Budak, 2003b).

A determinação das zonas de operação livres de vibrações autoexcitadas é uma tarefa difícil, pois depende de uma estimativa precisa dos parâmetros modais. Zaghbani e Songmene (2009) demonstraram experimentalmente que algumas zonas definidas como estáveis no diagrama de estabilidade estático, isto é, calculado com base nos parâmetros modais a 0 rpm (parâmetros estáticos de rigidez), podem ser na verdade instáveis nos diagramas de estabilidade dinâmicos. Jensen e Shin (1999) desenvolveram um algoritmo baseado na análise do domínio da frequência que considera os efeitos da geometria dos insertos e da ferramenta, condições de usinagem incluindo não linearidades do processo, ângulos de entrada e saída, assim como a dinâmica da máquina-ferramenta e da peça. Este algoritmo é uma extensão tridimensional do modelo apresentado por Altintas e Budak (1995), que define os diagramas de estabilidade como invariantes por considerar que os parâmetros modais permanecem constantes.

Segundo Tlusty (1985), para fresas com diâmetro entre 10 e 50 mm operando em rotações de 1000 a 3000 rpm, típicas na usinagem de metais, o modo de vibração de fresas flexíveis normalmente não contribui para vibrações autoexcitadas, uma vez que as frequências características de 1600 e 2000 Hz produzem pequenas ondulações (menores que 1 mm) que não se reproduzem bem. Esta característica inesperada, mas compreensível, explicaria porquê fresas longas apresentam menor tendência a vibrações autoexcitadas.

#### **2.1.2.4 Vibração da ferramenta**

Na usinagem de cavidades profundas, aplicação frequente na fabricação de moldes e matrizes, muitas vezes é necessário utilizar fresas de grande comprimento livre e pequeno diâmetro. As ferramentas utilizadas no acabamento geralmente são o elemento mais flexível do conjunto devido a sua esbeltez (Altintas, 2001). A rigidez de ferramentas esbeltas e flexíveis chega a ser 15 vezes menor que a do conjunto enquanto a de ferramentas mais curtas e robustas situa-se entre 5 e 7 vezes (Salgado et al., 2005).

O principal problema no acabamento de cavidades utilizando-se fresas muito esbeltas está relacionado principalmente às superfícies verticais, nas quais a deflexão da ferramenta afeta fortemente a rugosidade e a exatidão dimensional (Kecelj et al., 2004). No fresamento de topo de superfícies complexas, aplicação tipicamente empregada na fabricação de moldes e matrizes, erros superiores a 70  $\mu\text{m}$  não são incomuns e geralmente são consequência da deflexão do conjunto máquina-ferramenta induzida pelos esforços inerentes ao fresamento de aços de alta dureza: os valores de deflexão situam-se na faixa de 0,05 – 0,1 mm em matrizes para estampagem e são geralmente menores que 0,04 mm em moldes de injeção (Salgado et al., 2005).

Grande parte dos modelos computacionais que descrevem a deformação da ferramenta e do restante do conjunto visa a correção de desvios geométricos induzidos nos componentes usinados. Para compensação dos erros, a parcela sistemática a ser compensada deve ser significativamente maior que a parcela aleatória, o aumento da precisão deve justificar o custo da compensação e deve haver um modelo apropriado da máquina a partir do qual seja possível estabelecer uma relação matemática entre as fontes de erro e os erros propriamente ditos. Nos *softwares* de compensação de erros considera-se o princípio de sobreposição, isto é, erros provenientes de diferentes causas (ex.: posição, direção, velocidade, aceleração, distribuição de temperatura, etc.) são analisados separadamente e então somados (Sartori e Zhang, 1996).

Segundo Xu et al. (2003), sob condições estáveis de usinagem a influência da deflexão estática da ferramenta é mais significativa que a dinâmica, ou seja, a deflexão média da ferramenta tem maior influência no acabamento superficial que as vibrações do conjunto. Os esforços de usinagem provocam a deflexão da ferramenta e de seu sistema de fixação, assim como deformações da própria máquina-ferramenta (Kim et al., 2003). As deflexões da ferramenta devem ser controladas especialmente em operações de acabamento, uma vez que afetam a qualidade superficial e a vida da ferramenta. No caso de ferramentas muito flexíveis devem ser adotadas estratégias de usinagem visando minimizar a deflexão da ferramenta (Kecelj et al., 2004).

Uma das maneiras de se estudar a deflexão da ferramenta é por meio da análise estática, considerando-se que esta é uma viga engastada submetida a um esforço médio. Apesar de não considerar a variação dos esforços inerente à dinâmica do fresamento, por meio deste modelo é possível se obter resultados coerentes para a operação de acabamento, na qual as profundidades de usinagem  $a_p$  geralmente são pequenas e o processo é razoavelmente estável, podendo o comportamento da ferramenta ser considerado quase estático (Salgado et al., 2005).

Por suspeitar que a frequência de entrada dos dentes da ferramenta na peça fosse um múltiplo da frequência natural do conjunto ferramenta-mandril, Deonísio (2004) fixou um acelerômetro na ponta da fresa e realizou um ensaio de batida com martelo, obtendo uma frequência natural de 323 Hz. A ferramenta utilizada é uma fresa de topo esférica com diâmetro 16 mm e comprimento total de 135 mm. O valor medido experimentalmente é menor que o calculado considerando-se a analogia de viga engastada, o que pode indicar que a condição de contorno adotada não representa bem a fixação real da ferramenta no conjunto.

A possibilidade de se compensar as deformações elásticas do conjunto por meio de *softwares* permite que o projeto da máquina-ferramenta seja um pouco menos restrito, reduzindo significativamente o custo da fabricação (Sartori e Zhang, 1996). Por esta razão, diversos autores têm se preocupado em desenvolver modelos computacionais capazes de estimar a deflexão da ferramenta e compensar estes efeitos na geração de sua trajetória (Suh et al., 1996; Dugas et al., 2002; Habibi et al., 2011) e em investigar experimentalmente a relação entre a deflexão da ferramenta e os desvios geométricos e dimensionais da peça usinada (Deonísio, 2004; Vargas, 2012; Albuquerque, 2013). Aguiar et al. (2013) correlacionam a rugosidade da superfície usinada com a dinâmica da operação de fresamento por meio do desgaste e dos esforços na ferramenta, com o objetivo de trilhar uma maneira de se reduzir os níveis de vibração no fresamento de cavidades profundas com fresas esbeltas e de se obter um bom acabamento superficial. Kim et al. (2003) desenvolveram um modelo capaz de estimar os erros de forma da superfície usinada com uma fresa de topo esférica com base nos cálculos dos esforços de usinagem e da deflexão da ferramenta considerando-se um modelo de viga engastada. O modelo apresentado por Xu et al. (2003) representa os aspectos estáticos e dinâmicos da operação de fresamento na geração da superfície usinada: considerando-se que o corpo da ferramenta se deforma elasticamente, a deflexão da ferramenta é calculada como resultado da sobreposição dos esforços estáticos e dinâmicos, correspondentes à espessura do cavaco e às vibrações, respectivamente.

Os erros não são diretamente proporcionais à deflexão da ferramenta e à deformação da peça devidos aos esforços de usinagem (Liu et al., 2012). Com base nisto, Dépincé e Hascoët (2006) diferenciam os dois principais métodos de previsão de superfícies fresadas: o primeiro baseia-se na deflexão da ferramenta e na premissa de que o perfil gerado tem o mesmo contorno da ferramenta durante o corte, considerando que a fresa é um cilindro perfeito e que o contato se dá ao longo de uma curva, enquanto o segundo baseia-se na evolução dos pontos de contato entre ferramenta e peça considerando a verdadeira geometria da ferramenta.

No caso de operações de fresamento um pouco mais severas (ex.: semi acabamento) os esforços dinâmicos passam a ter maior influência no processo, fazendo-se necessária a análise das vibrações. Quando a rigidez é insuficiente, por exemplo na usinagem de cavidades profundas com fresas muito esbeltas e portanto flexíveis, as vibrações podem atingir níveis inaceitáveis (Tlusty, 1993).

Uma técnica utilizada para se reduzir tanto as vibrações forçadas quanto as autoexcitadas é a utilização de ferramentas com espaçamento angular desigual entre os dentes, arestas helicoidais variáveis ou de geometria variável (Tlusty, 1985; Slavicek, 1965; Stone, 1970). Estas características modificam o ângulo de passo (*pitch angle*) e conferem ao processo maior estabilidade ao atuar na frequência efetiva de passagem dos dentes interferindo na regeneração da ondulação superficial. Budak (2003a e 2003b) desenvolveu um método de otimização do ângulo de passo com base na análise do domínio da frequência. Song et al. (2011) propuseram um método para determinação dos parâmetros geométricos de fresas baseado na análise do fator de incidência da ferramenta (*engagement factor*). Neste estudo demonstram que ferramentas com maior ângulo de hélice aumentam a estabilidade da operação de fresamento e, em algumas faixas específicas de rotação, ferramentas com ângulo de passo variável podem ter efeito positivo na estabilidade do processo, destacando-se o problema de desbalanceamento em altas rotações.

A microgeometria da ferramenta também influencia as vibrações autoexcitadas: ferramentas muito afiadas são mais propícias à ocorrência deste tipo de vibração, sendo portanto desejável o arredondamento da aresta de corte (Stephenson e Agapiou, 1996).

No que se refere a vibrações da ferramenta, deve ser considerado o fenômeno de batimento, que adiciona uma componente dinâmica à vibração da ferramenta e também aos esforços de usinagem (Weinert et al, 2007). No caso de uma ferramenta ideal, na qual não há batimento, a trajetória descrita pelo centro de qualquer seção transversal da ferramenta corresponde a um ponto. Considerando-se a ocorrência de batimento, durante a operação de fresamento a trajetória passa a ser descrita por uma órbita elíptica. O batimento da ferramenta pode ser consequência de forças diferentes atuantes em cada inserto da ferramenta (consequência de diferentes taxas de desgaste, por exemplo), sendo que em rotação livre a trajetória é aproximadamente pontual. Neste caso, durante a operação de fresamento surge uma componente dinâmica dos esforços de usinagem que pode afetar a vibração da ferramenta (Weinert et al, 2007).

O batimento pode estar relacionado à fixação da ferramenta, de forma que torna-se fundamental selecionar a melhor maneira de fixar a ferramenta em um centro de usinagem. Se

este aspecto do processo não for devidamente abordado o processo pode resultar em maior batimento radial, o que por sua vez pode implicar em pior acabamento superficial e redução da vida da ferramenta (Sandvik Coromant, 2015b). Além disto, o batimento pode ser causado pela diferença entre o eixo de rotação e o eixo da ferramenta, consequência de um ligeiro empenamento da ferramenta ou de uma má fixação. Neste caso, a trajetória da ferramenta em rotação livre é aproximadamente circular (Weinert et al., 2007). Apesar de o batimento não influenciar os limites de vibrações autoexcitadas de acordo com os diagramas de estabilidade, possui grande influência na trajetória de vibração e no acabamento superficial (Weinert et al., 2007). Uma vez que o batimento influencia as vibrações no plano perpendicular à direção de avanço da ferramenta, a qualidade da superfície gerada também é influenciada.

### **2.1.3 Aspectos construtivos de máquinas-ferramenta**

As modificações e a otimização do comportamento estático e dinâmico da máquina-ferramenta devem se basear na máquina como um todo (Weck, 2006), sendo a dinâmica da máquina-ferramenta significativamente afetada pela forma como os esforços inerentes ao processo de usinagem são transmitidos (Stephenson e Agapiou, 1996).

Os três aspectos construtivos mais importantes quando se trata de vibrações de máquinas-ferramentas são a distribuição de massa, a rigidez e o amortecimento. Além destes, existem outros parâmetros importantes que devem ser considerados no dimensionamento de máquinas-ferramenta: faixa de velocidades, requisitos de aceleração e desaceleração, capacidade de carga, atrito, desempenho térmico, compatibilidade de materiais, sensibilidade a fatores externos, precisão e repetibilidade, resolução, pré-carga e manutenção (Stephenson e Agapiou, 1996).

A massa dos componentes para os quais se espera maiores amplitudes de vibração deve ser reduzida a fim de reduzir a energia associada à massa vibrante. De um modo geral, deseja-se a redução da massa e o simultâneo aumento da rigidez. Reunir estas duas características muitas vezes contraditórias em um projeto talvez seja a tarefa mais difícil de um projetista (Weck, 2006).

#### **2.1.3.1 Rigidez**

O aspecto mais relevante no projeto do eixo-árvore talvez seja a rigidez do conjunto, que depende principalmente da flexibilidade do eixo e da rigidez dos mancais. Segundo Haas e Löckmann (2009), a rigidez do conjunto eixo-árvore é composta por:

- Rigidez do eixo;
- Rigidez axial;
- Rigidez torcional;
- Rigidez do acionamento;
- Rigidez dos mancais;
- Rigidez dos acoplamentos;
- Rigidez elétrica do motor.

A rigidez de um determinado componente depende do material, da geometria e, no caso de elementos de máquinas caracterizados por deformações de contato (ex.: mancais de rolamentos de esferas), também depende dos esforços aos quais é submetido (Weck, 2006). Todavia, as características de rigidez estática e dinâmica dependem não só dos componentes individuais da máquina-ferramenta mas também dos elementos de ligação (Yoshimura et al., 1990).

Conforme discutido por Weck (2006), a rigidez do conjunto pode ser definida de duas maneiras: na primeira definição (figura 2.8a) é considerado um valor médio para a faixa de forças  $0 < F < F_0$ , enquanto na segunda definição é calculada como tangente ao ponto  $F_0$  (figura 2.8b). Em ambos os casos há um aumento da inclinação da curva devido ao aumento do contato entre superfícies à medida que os componentes se deformam.

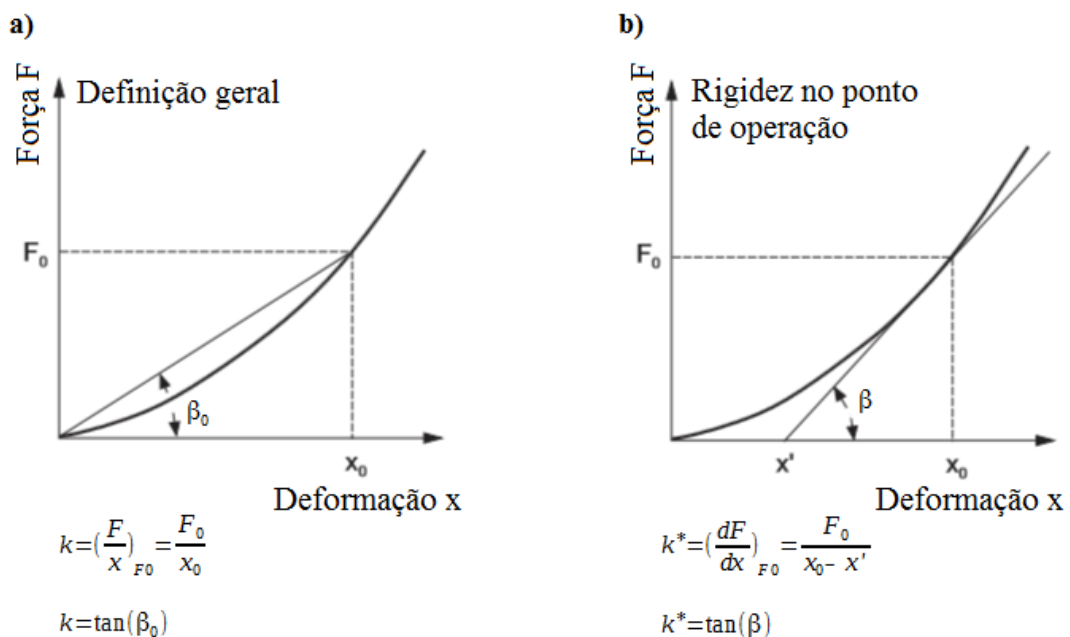


Figura 2.8: Definição da evolução progressiva da rigidez: a) definição geral; b) rigidez no ponto de operação.

Fonte: Weck, 2006. Adaptado.

O posicionamento das ligações entre componentes desempenha papel importante na direção das vibrações. Ao mesmo tempo que o movimento relativo entre os componentes aumenta o amortecimento, isto provoca a redução da rigidez de forma que devem ser calculados valores ótimos destas duas características contraditórias para o melhor desempenho dinâmico da máquina-ferramenta. A rigidez afeta a precisão da máquina, reduzindo as deformações induzidas pelas forças de corte, enquanto o amortecimento é responsável pelo decaimento de vibrações transientes (Stephenson e Agapiou, 1996).

Componentes individuais são geralmente projetados com alta rigidez e de uma forma geral contribuem muito pouco para a deflexão, sendo a deformação de contato em elementos de ligação móveis e estacionários o fator que mais contribui (Stephenson e Agapiou, 1996). As deformações devidas à carga estática dependem da rigidez de cada componente e das ligações entre eles, como acoplamentos, ligações parafusadas, guias, etc. Por outro lado, as deformações devidas às cargas dinâmicas dependem também da distribuição de massa dos componentes e especialmente das características de amortecimento dos componentes e ligações (Weck et al., 1991).

Em máquinas-ferramenta normalmente são utilizados mancais magnéticos, mancais a ar ou mancais de rolamento (esferas de contato angular, rolos cilíndricos, etc.). Os últimos são normalmente híbridos, de forma que a baixa afinidade entre as pistas de aço e os elementos rolantes cerâmicos prolonga a vida do mancal (Tlustý, 1993). Mancais de rolamento de contato angular de esferas simples são projetados para suportar cargas radiais e axiais combinadas, podendo ainda ser montados combinados para conferir maior rigidez na direção axial (Harris e Kotzalas, 2007). Os ângulos de contato variam de  $15^\circ$  a  $60^\circ$  (NSK, 2015; SKF, 2015; Timken, 2015). Na figura 2.9 são ilustrados dois mancais de rolamento de esferas de contato angular com diferentes ângulos de contato.

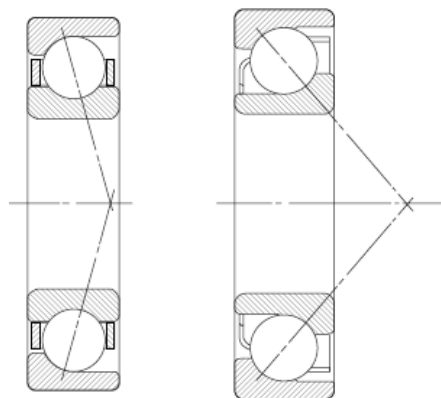


Figura 2.9: Mancais de rolamento de esferas com diferentes ângulos de contato. Fonte: Harris e Kotzalas, 2007.



As cargas aplicadas nos mancais são transmitidas da pista interna à externa por meio dos elementos rolantes. A magnitude dos esforços atuantes em cada esfera (figura 2.10) depende da geometria do mancal de rolamento e do tipo de carga (Harris e Kotzalas, 2007).

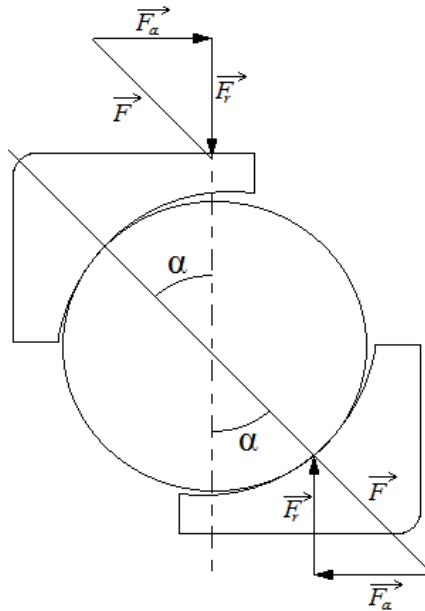


Figura 2.10 – Elemento rolante sujeito a carregamento radial.

Para o cálculo da rigidez dos mancais de rolamento de esferas, primeiramente é necessário determinar a distribuição de cargas nos elementos rolantes. No caso de mancais de rolamento com folga nominal submetidos a carregamento radial simples, a carga máxima  $F_{max}$  é dada por (Stribeck *apud* Harris e Kotzalas, 2007):

$$F_{max} = 5 \frac{F_r}{n_{esferas} \cos(\alpha)} \quad (2.1)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo de contato e  $n_{esferas}$  é o número de esferas.

No equilíbrio estático, a força aplicada no mancal é igual à soma das componentes verticais de todos elementos rolantes (Harris e Kotzalas, 2007):

$$F_r = \sum_{\varphi=0}^{\varphi=\pm\varphi_l} F_{\varphi} \cos(\varphi) \quad (2.2)$$

No caso de mancais de rolamento de esferas de contato angular de sulcos profundos submetidos a carregamento radial em velocidades moderadas, o carregamento radial provoca apenas deformação radial  $\delta_r$  dada pela relação (Harris e Kotzalas, 2007):

$$\delta_r = 4,36 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{F_{max}^{2/3}}{d_{rol}^{1/3} \cdot \cos(\alpha)} \quad (2.3)$$

onde  $d_{rol}$  é o diâmetro do elemento rolante.

A carga máxima  $F_{max}$  atuante nos elementos rolantes de mancais de rolamento de rolos cilíndricos com folga igual a zero submetidos a carregamento radial simples é calculada por (Stribeck *apud* Harris e Kotzalas, 2007):

$$F_{max} = 4,08 \frac{F_r}{n_{rolos} \cos(\alpha)} \quad (2.4)$$

onde  $n_{rolos}$  é o número de rolos cilíndricos.

No caso de mancais de rolamento de rolos cilíndricos em velocidade moderada, a deformação radial  $\delta_r$  dada pela relação (Harris e Kotzalas, 2007):

$$\delta_r = 7,68 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{F_{max}^{0,9}}{l^{0,8} \cdot \cos(\alpha)} \quad (2.5)$$

onde  $l$  é o comprimento do elemento rolante.

Relacionando as equações acima é possível determinar as curvas de deformação dos mancais de rolamento em função da força radial. A rigidez de cada mancal pode ser definida como a secante à curva em um determinado ponto de operação:

$$k_{mancal} = \frac{dF_r}{d\delta_r} \quad (2.6)$$

No caso de mancais axiais é comum a utilização de pré-carga para que operem em uma região na qual a relação entre deflexão e carga é aproximadamente constante (Harris e Kotzalas, 2007), conforme ilustrado na figura 2.11. Além disto, para o aumento da rigidez axial é comum a combinação de mais de dois mancais.

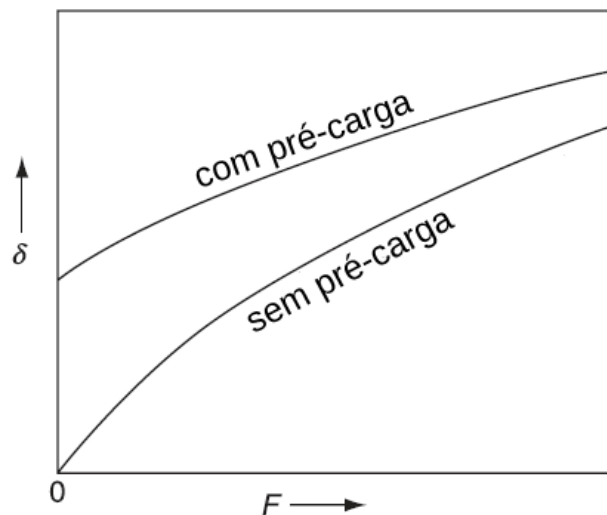


Figura 2.11 – Efeito da pré-carga na relação força-deformação. Fonte: Harris e Kotzalas, 2007.

A pré-carga radial de mancais normalmente não é utilizada para eliminar grandes deformações iniciais, mas sim para distribuir a carga entre o maior número possível de elementos rolantes e para evitar escorregamento (Harris e Kotzalas, 2007). Como regra prática adota-se que a pré-carga do eixo-árvore de centros de usinagem e de retificadoras deve ser leve ou extraleve (NSK, 2015). De acordo com o mesmo fabricante, nos casos em que o produto do diâmetro do rolamento pela frequência de rotação for maior que 500000 mm/s, torna-se mais importante e delicado o cálculo da pré-carga. Os problemas de definição da pré-carga, tanto de falta como de excesso, são geralmente evitados adotando-se o dimensionamento com pré-carga constante: por meio de molas ou de um cilindro hidráulico é induzida uma pré-carga entre os mancais anterior e posterior (Tlusty, 1993).

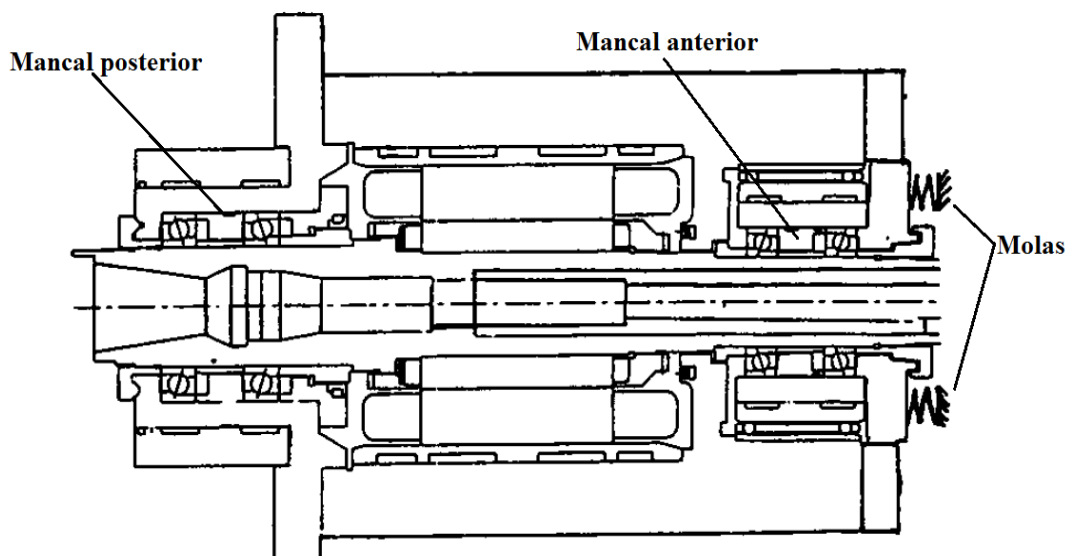


Figura 2.12: Pré-carga constante induzida por molas. Fonte: Tlusty, 1993. Adaptado.

### 2.1.3.2 Amortecimento

De uma forma geral, tanto a rigidez quanto o amortecimento devem ser maximizados para garantir a qualidade dimensional e o controle das vibrações. A rigidez do conjunto normalmente é maximizada por mancais de rolamento, os quais geralmente são montados combinados e pré-carregados na direção radial. Todavia, tem-se por consequência a redução do amortecimento e o aumento da geração de calor (Rivin, 2002). Embora a redução da rigidez seja geralmente indesejável, pode ser tolerada quando leva a um deslocamento das frequências naturais (especialmente em HSM) ou quando é acompanhada por um aumento do amortecimento (Stephenson e Agapiou, 1996).

O amortecimento da máquina-ferramenta deve ser considerado quando se deseja calcular a resposta próxima à frequência natural, podendo-se considerar que é linearmente relacionado à massa e à rigidez do sistema (Stephenson e Agapiou, 1996). O próprio processo de usinagem adiciona rigidez e amortecimento ao sistema, os quais podem ser medidos com boa exatidão por meio da comparação entre as respostas medidas durante o corte e em rotação livre (Stephenson e Agapiou, 1996; Kals, 1971; Peters et al., 1971).

Máquinas-ferramenta são tradicionalmente fabricadas em ferro fundido, material que possui propriedades de amortecimento razoáveis. Embora alguns componentes individuais possuam amortecimento relativamente pequeno, o fator de amortecimento geral da máquina normalmente situa-se entre 0,15 e 0,3 (Stephenson e Agapiou, 1996). Contudo, em algumas aplicações especiais é necessário maior amortecimento do conjunto e uma das maneiras de se aumentar o amortecimento de componentes baseia-se na introdução de camadas de materiais que atuam como amortecedores viscosos internos (Slocum et al., 1994).

Para se determinar experimentalmente o fator de amortecimento viscoso  $\zeta_m$  de um sistema pode ser utilizada a técnica do decremento logarítmico (figura 2.13), a qual relaciona a envoltória das vibrações transientes na resposta temporal do ensaio de batida e a dissipação de energia devida ao amortecimento viscoso.

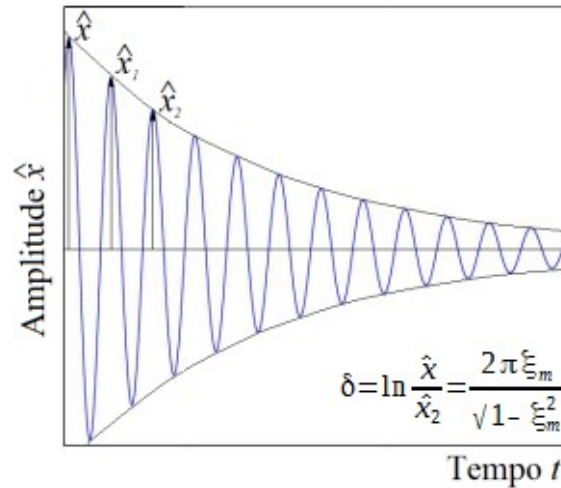


Figura 2.13 – Técnica do decaimento logarítmico.

### 2.1.3.3 Efeitos dinâmicos

Um sistema rotativo geralmente realiza dois movimentos rotativos superpostos: rotação em torno de si próprio (*spin*) e precessão (*whirl*), que corresponde à rotação do eixo fletido em torno de sua configuração não fletida (Pereira, 2005). O efeito giroscópico (ou efeito de Coriolis) corresponde à parcela do momento que tende a mudar o eixo de giro.

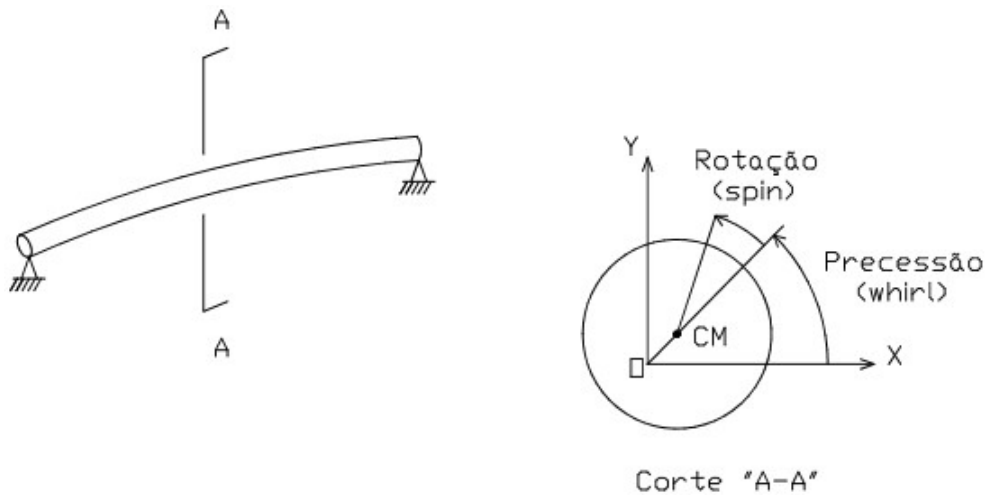


Figura 2.14 – Superposição dos movimentos de rotação e precessão.

A órbita que realiza o centro geométrico pode ter uma trajetória no mesmo sentido que a rotação do próprio eixo, caracterizando a precessão direta também referida como vibração progressiva (*forward whirl*), ou ter sentido contrário à rotação caracterizando a precessão inversa também conhecida por vibração retrógrada ou regressiva (*backward whirl*). De uma forma geral, vibrações progressivas são geralmente mais críticas pois podem ser excitadas pelo desbalanceamento, sempre presente em máquinas rotativas (Krysinski e Malburet, 2010).

No caso dos modos progressivos o momento giroscópico tende a aumentar a rigidez do eixo e consequentemente sua frequência natural. Na situação oposta, modos regressivos, o eixo se torna mais flexível e a frequência diminui (Krysinski e Malburet, 2010). Naturalmente, o efeito giroscópico é mais significativo nos modos de vibração associados à deflexão do eixo.

O gráfico das frequências naturais dos modos progressivos e regressivos em função da rotação é conhecido como diagrama de Campbell (Hota e Vakharia, 2014), ilustrado na figura 2.15. Com ele é possível se obter uma representação gráfica das principais frequências do sistema e verificar sua dependência em relação à velocidade angular de rotação (Magnoli, 2005). Além disto, permite prever a atividade vibratória relacionada às vibrações forçadas em torno de múltiplos da velocidade de rotação por meio da relação (KTH, 2015):

$$f_i = \frac{n\Omega}{60} \quad (2.7)$$

onde  $f_i$  é a frequência de excitação de  $n$ -ésima ordem do sistema em [Hz],  $n$  é um número inteiro positivo e  $\Omega$  é a rotação em [rpm].

Conforme pode ser observado no diagrama da figura 2.15, à medida que se aumenta a rotação verifica-se uma bifurcação das frequências naturais, isto é, há um crescente afastamento entre os modos progressivo e regressivo associados a cada uma delas. As frequências críticas do sistema correspondem às interseções das frequências de excitação  $f_i$  e as frequências naturais – no caso do desbalanceamento, especificamente as frequências dos modos progressivos.

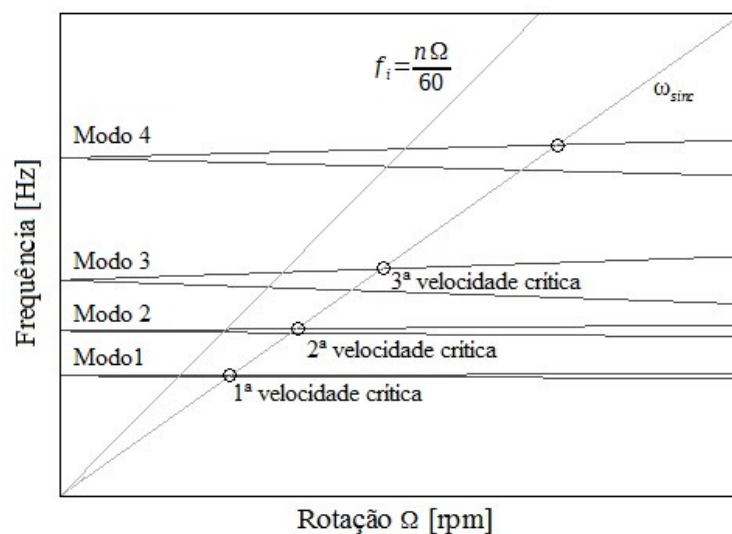


Figura 2.15 – Diagrama de Campbell.

Outro aspecto dinâmico que deve ser considerado é a variação da rigidez dos mancais em função da rotação do eixo. Rantatalo et al. (2007) consideram o efeito da variação da rigidez dos mancais na modelagem de uma máquina-ferramenta (figura 2.16), atribuindo este efeito às forças “centrífugas” atuantes nos elementos rolantes: associado à elevação da velocidade de rotação ocorre o aumento da força que tende a afastar as pistas interna e externa do rolamento, diminuindo portanto a carga atuante em cada elemento rolante e consequentemente a rigidez do mancal.

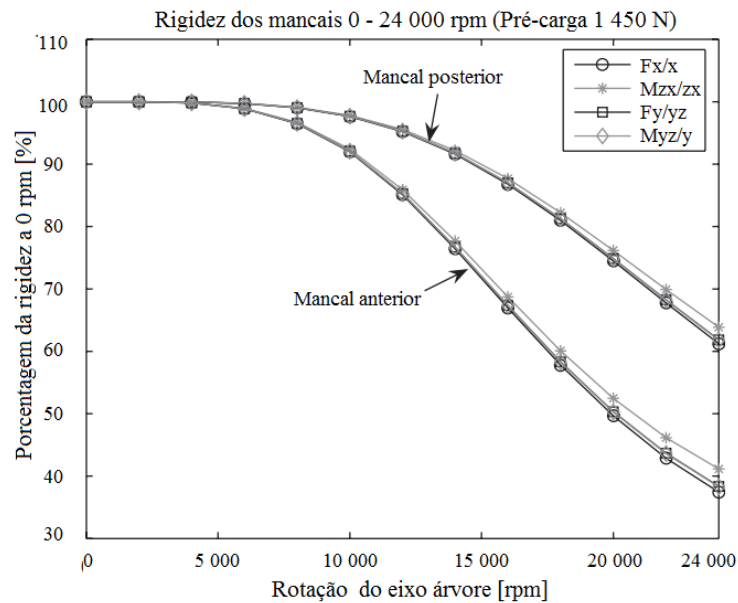


Figura 2.16: Rigidez dos mancais em função da rotação. Fonte: Rantatalo et al., 2007.

Conforme pode ser observado na figura 2.16, para rotações inferiores a 7500 rpm verifica-se uma variação máxima de 2% da rigidez inicial dos mancais enquanto para rotações mais altas a variação chega a 60%.

Na figura 2.17 são combinados o efeito giroscópico e a variação da rigidez dos mancais, calculados no mesmo estudo apresentado por Rantatalo et al. (2007). Na análise desta máquina específica, o primeiro modo de vibração é caracterizado pelo mancal posterior na faixa de operação  $0 < \Omega < 12000$  rpm e pelo anterior na faixa  $16000 \text{ rpm} < \Omega < 24000$  rpm. Já o segundo modo de vibração do eixo-árvore é caracterizado pelo mancal anterior entre 0 e 12000 rpm e pelo posterior entre 16000 rpm e 24000 rpm. Em rotações próximas a 14000 rpm o conjunto passa por uma transição e o segundo modo é então associado a um modo cilíndrico caracterizado pela rigidez dos dois mancais. O terceiro modo corresponde a um modo de flexão do eixo e o quarto modo à sobreposição mancal/flexão do eixo. Os modos de vibração referentes às diferentes faixas de rotação são representados graficamente na figura 2.18.

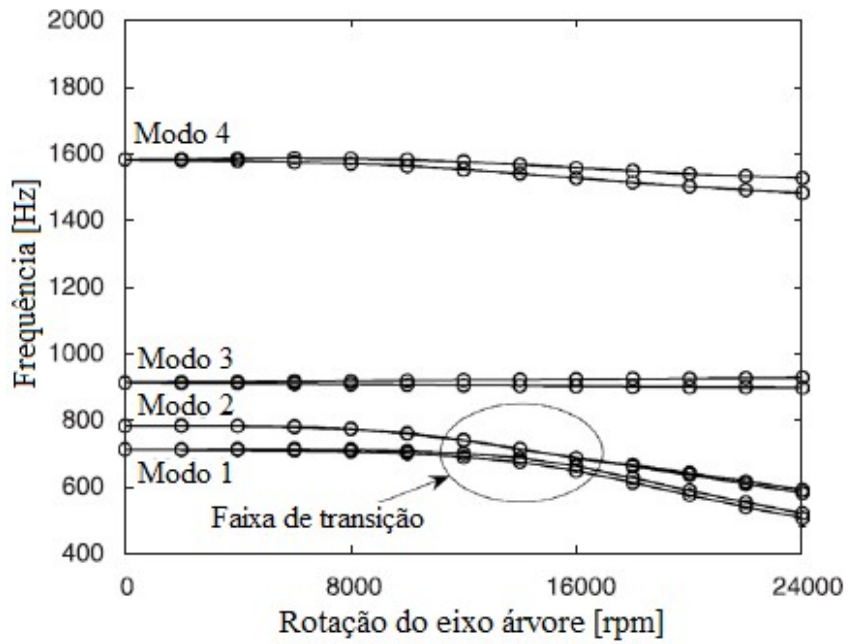


Figura 2.17: Influência da rigidez variável e do efeito giroscópico nas frequências naturais.

Fonte: Rantatalo et al., 2007.

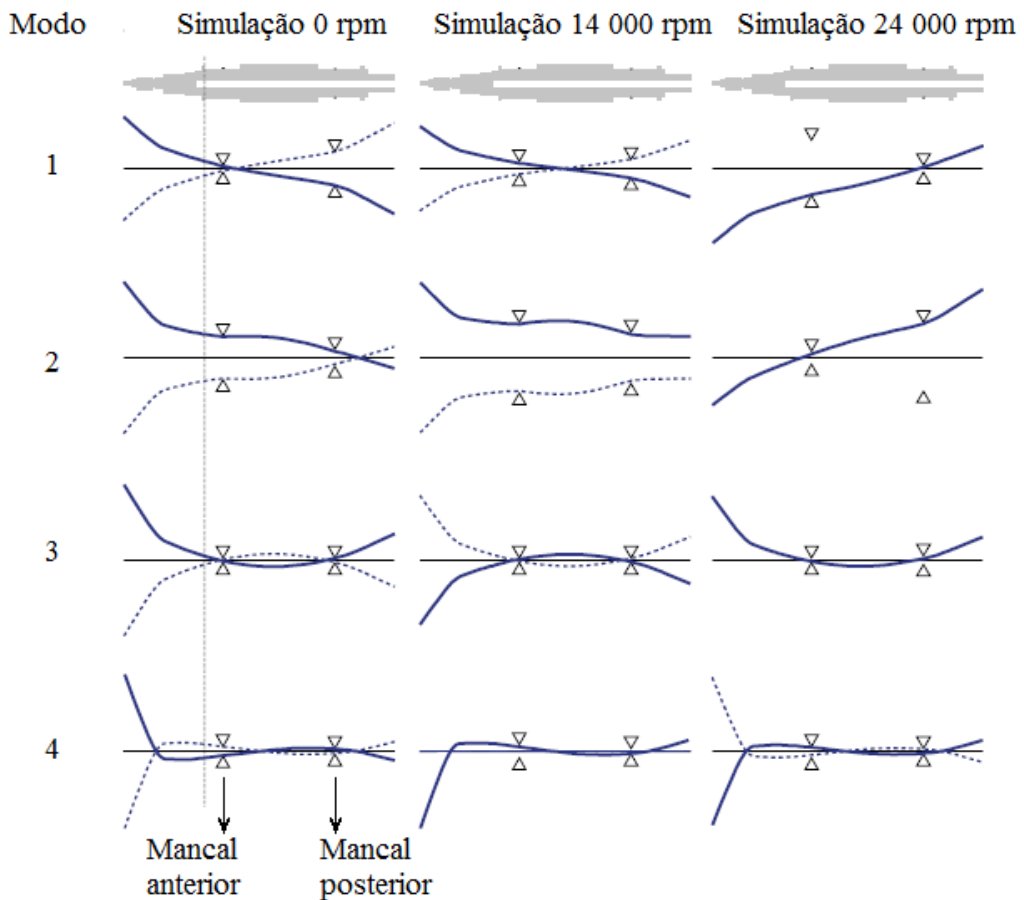


Figura 2.18 – Influência da velocidade nos quatro primeiros modos de vibração. Fonte: Rantatalo et al., 2007.



## 2.2 Modelagem numérica de sistemas vibratórios

Um sistema vibratório com um grau de liberdade pode ser descrito por um conjunto massa-mola-amortecedor, onde  $m$  é a massa do corpo,  $k$  é a rigidez da mola,  $c$  é o amortecimento viscoso do sistema e  $F(t)$  é a força atuante no conjunto. No modelo ilustrado na figura 2.19 é indicado o referencial não inercial de posição  $x$ , velocidade  $\dot{x}$  e aceleração  $\ddot{x}$ .

A análise de sistemas com um grau de liberdade (*Single degree of freedom – SDOF*) é rápida e não requer computadores com alto desempenho. De uma forma geral, ela é menos exata que a análise de sistema com múltiplos graus de liberdade (*Multiple degree of freedom – MDOF*), salvos os raros casos em que a consideração de desacoplamento é satisfatória (Weck, 2006).

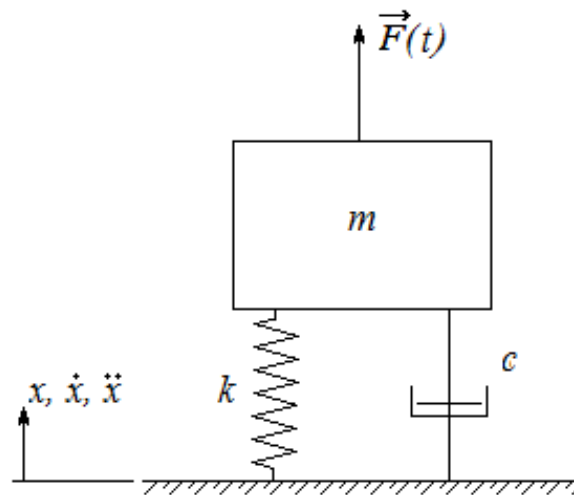


Figura 2.19 – Sistema com um grau de liberdade.

A equação do movimento do sistema vibratório com um grau de liberdade representado na figura 2.19 é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + F(t) = 0 \quad (2.8)$$

Supondo uma solução harmônica do tipo  $x = e^{i\omega t}$  para um sistema não amortecido ( $c = 0$ ), tem-se que:

$$mi^2\omega_n^2 e^{i\omega t} + k e^{i\omega t} + F(t) = 0 \quad (2.9)$$

A solução homogênea é dada por:

$$(mi^2\omega^2 + k)e^{i\omega t} = 0 \quad (2.10)$$

A frequência natural do sistema massa-mola não amortecido com um grau de liberdade  $\omega_n$ , correspondente à solução não trivial da equação 2.10, é dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.11)$$

No caso de um sistema amortecido, a frequência angular  $\omega_a$  é dada por (Weck et al., 1991):

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \frac{c^2}{4m^2\omega_n^2}} \quad (2.12)$$

A frequência de ressonância  $\omega_r$  é dada por (Weck et al., 1991):

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \frac{c^2}{2m^2\omega_n^2}} \quad (2.13)$$

Na etapa preliminar de cálculo do projeto de máquinas-ferramenta não é necessária a diferenciação entre as três frequências supradescritas, uma vez que não há diferença significativa, pois os coeficientes de amortecimento são muito pequenos (Weck et al., 1991).

Tanto as curvas de resposta dinâmica quanto a análise modal experimental são métodos eficientes que descrevem o comportamento dinâmico de máquinas-ferramenta, permitindo identificar os pontos fracos e otimizar o projeto com base em resultados experimentais (Brecher et al, 2011). As curvas de resposta dinâmica são uma ferramenta muito útil para analisar o comportamento dinâmico básico de um sistema vibratório, fornecendo informações sobre a frequência mínima e a amplificação máxima na ressonância, que pode ser utilizada para calcular o movimento relativo entre dois pontos. A deformação de um componente pode ser calculada utilizando os esforços de usinagem como entrada de um modelo de elementos finitos ou multiplicando diretamente a matriz transformação do sistema (Stephenson e Agapiou, 1996). Todavia, um estudo comparativo conduzido por Brecher et al. (2011) demonstrou que ambos não são adequados para a parametrização de modelos de alta exatidão, mas sim para quantificar o comportamento dinâmico de máquinas-ferramenta. Na figura 2.20 são comparadas as curvas de resposta determinadas utilizando diferentes fontes de excitação e os resultados da análise modal de um determinado componente.

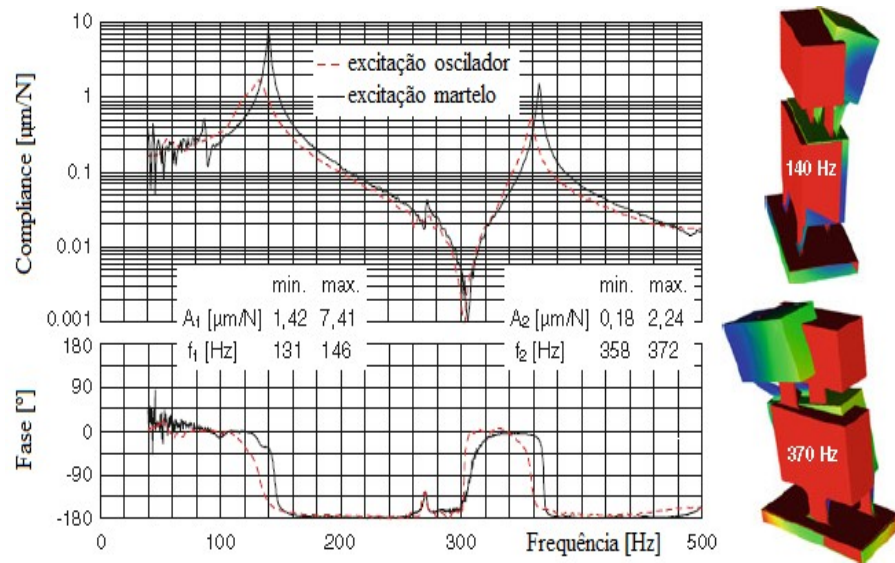


Figura 2.20 – Curva de resposta dinâmica e análise modal. Fonte: Brecher et al., 2011.

Se as frequências naturais forem suficientemente afastadas umas das outras e o amortecimento for pequeno, então o comportamento dinâmico da máquina pode ser descrito por um sistema com um grau de liberdade. Todavia, frequências naturais próximas umas das outras resultam em uma interação nas curvas de resposta dinâmica (*compliance frequency response curves*) e, neste caso, o sistema tem que ser necessariamente descrito por um sistema multimassa (Weck et al. 1991). Sistemas com múltiplos graus de liberdade permitem uma descrição bem mais exata do comportamento dinâmico, podendo também ser calculados sistemas de corpos acoplados e modos fortemente amortecidos (Weck, 2006). Enquanto o sistema com um grau de liberdade possui apenas uma frequência natural, a resposta de um sistema com múltiplos graus pode ser interpretada como a interação entre “os diversos sistemas de uma massa” que o compõem.

### 2.2.1 Método dos elementos finitos

A solução analítica de diversos problemas de engenharia é por vezes muito complexa e até mesmo inviável. Normalmente a solução destes problemas envolve equações diferenciais ordinárias ou parciais e, devido à complexidade da geometria, cargas, propriedades etc., a solução analítica geralmente é impossível de se obter (Logan, 2007). Logan (2007) divide a solução de um problema utilizando o método dos elementos finitos em cinco passos:

- a) Seleção dos tipos de elementos e discretização do domínio;
- b) Definição das funções de deslocamento;
- c) Definição das relações esforços/deslocamento e tensão/deformação;

- d) Derivação das matrizes de flexibilidade e massa dos elementos;
- e) Obtenção das matrizes globais e introdução das condições de contorno.

### 2.2.2 Seleção dos tipos de elementos e discretização do domínio

Um eixo pode ser modelado utilizando-se elementos de viga de Timoshenko com oito graus de liberdade, quatro em cada nó. Conforme ilustrado na figura 2.21, cada um dos nós de um elemento de comprimento  $L_e$  possui dois graus de liberdade translacionais ( $u_1$  e  $u_5$  representam as translações em Y dos nós 1 e 2, respectivamente;  $u_2$  e  $u_6$  representam as translações em Z dos nós 1 e 2, respectivamente) e dois graus de liberdade rotacionais ( $u_3$  e  $u_7$  representam as rotações em torno de Y dos nós 1 e 2;  $u_4$  e  $u_8$  representam as rotações em torno de Z dos nós 1 e 2).

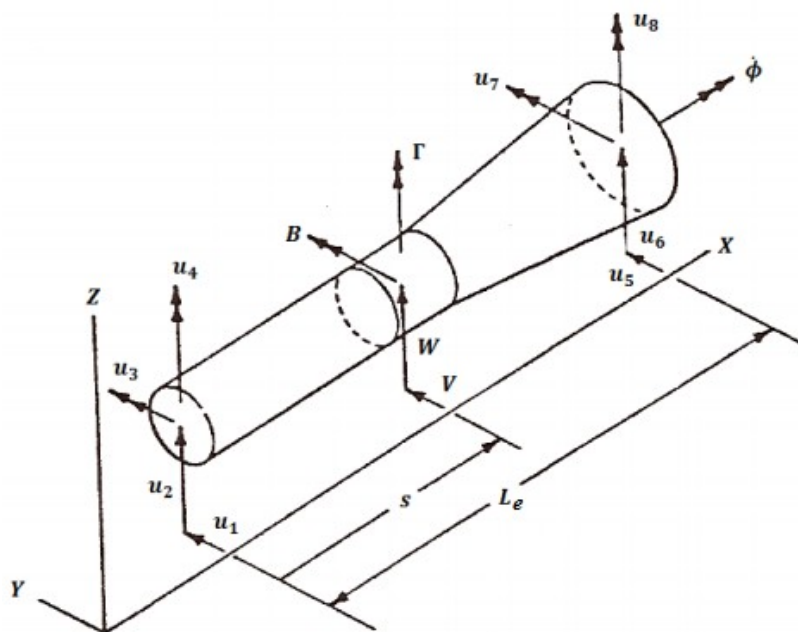


Figura 2.21: Definição do elemento de viga de Timoshenko. Fonte: Nelson, 1980. Adaptado.

A equação de movimento do sistema pode ser escrita na forma matricial:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{Q(t)\} \quad (2.14)$$

onde  $\{u\}$  e  $\{Q(t)\}$  são os vetores de deslocamentos nodais e de forças externas, respectivamente. A matriz de inércia  $[M]$  é simétrica, enquanto as matrizes de amortecimentos  $[C]$  e de rigidez  $[K]$  são assimétricas. As assimetrias devem-se aos mancais e aos momentos giroscópicos.

Alguns componentes de máquinas representam massas, molas ou podem ainda atuar como dissipadores de energia, ou seja, amortecedores (Stoeterau, 2004). Estes foram introduzidos no modelo por meio da matriz de amortecimento viscoso  $[C]$ . Além disto, conforme mencionado anteriormente, a esta matriz associa-se uma componente antissimétrica. Desta maneira, ela pode ser decomposta em uma parte simétrica  $[C_s]$  e outra assimétrica  $[C_{as}]$ :

$$[C] = [C_s] + [C_{as}] \quad (2.15)$$

A matriz de rigidez global  $[K]$  corresponde à sobreposição das matrizes de rigidez do eixo  $[K_{eixo}]$  e dos mancais  $[K_{mancais}]$ . Assim como a matriz de amortecimento  $[C]$  ela pode ser dividida em duas partes, uma simétrica  $[K_s]$  e outra antissimétrica  $[K_{as}]$ :

$$[K] = [K_s] + [K_{as}] \quad (2.16)$$

As componentes simétricas e antissimétricas das matrizes de amortecimento e de rigidez podem ser descritas pelas equações 2.17 a 2.20:

$$[C_s] = \frac{([C] + [C]^T)}{2} \quad (2.17)$$

$$[K_s] = \frac{([K] + [K]^T)}{2} \quad (2.18)$$

$$[C_{as}] = \frac{([C] - [C]^T)}{2} \quad (2.19)$$

$$[K_{as}] = \frac{([K] - [K]^T)}{2} \quad (2.20)$$

A decomposição das matrizes  $[C]$  e  $[K]$  em componentes simétricas e antissimétricas representa a separação das forças conservativas e não conservativas do sistema. Considerando-se que o movimento é harmônico, as forças relacionadas a  $[K_s]$  e a  $[C_{as}]$  são conservativas uma vez que são ortogonais a velocidade. Por outro lado, as forças relacionadas a  $[C_s]$  são parcialmente colineares com a velocidade e portanto não conservativas (Adams e Padovan, 1981).

### 2.2.3 Autovalores e autovetores

A equação de movimento para um referencial fixo, desprezando-se o amortecimento dos mancais, pode ser escrita da seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{u}\} - \Omega[G]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{Q\} \quad (2.21)$$

onde  $[M]$ ,  $[G]$  e  $[K]$  são as matrizes globais de inércia, momento giroscópico e rigidez. O vetor de forças externas  $[Q]$  contém todos efeitos de desbalanceamento considerados no modelo. Por razões computacionais, esta equação pode ser reescrita da seguinte maneira (Przemieniecki, 1968):

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & -\Omega[G] \end{bmatrix} \{\dot{h}\} + \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \{h\} = \{H\} \quad (2.22)$$

onde

$$\{h\} = \begin{bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{u\} \end{bmatrix} \quad \{H\} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{Q\} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Considerando-se uma solução do tipo

$$\{h\} = \{h_0\} e^{\alpha t} \quad (2.24)$$

o problema de autovalor do sistema considerando-se a parcela homogênea é dado por:

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[K]^{-1}[M] & \Omega[K]^{-1}[G] \end{bmatrix} \{h_0\} = \frac{1}{\alpha} * \{h_0\} \quad (2.25)$$

Os  $n$  autovalores calculados pelo procedimento anteriormente descrito correspondem às frequências naturais  $\omega_n$  associadas aos  $n$  primeiros modos de vibração do conjunto.

### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo são descritos os procedimentos numérico e experimental adotados nas análises dispostas no presente trabalho. Na seção 3.1 são detalhados a modelagem do conjunto e os parâmetros de entrada, seguidos da validação da rotina implementada. Na seção 3.2 é descrita a metodologia experimental adotada na análise da resposta vibratória.

#### 3.1 Procedimento numérico

A rotina de elementos finitos de viga de Timoshenko foi implementada no *software* livre “GNU Octave 4.0.0” com base nas matrizes deduzidas por Nelson (1980). O código-fonte encontra-se disposto no APÊNDICE A e a validação experimental da rotina é apresentada na seção 3.1.2.

Na figura 3.1a é apresentado o desenho básico do conjunto eixo-árvore analisado, no qual são representadas dimensões básicas e indicados os mancais, o sistema de acionamento e o porta-ferramenta. Na figura 3.1b é representado graficamente o modelo de elementos finitos do conjunto. Considerou-se que os elementos contribuem integralmente com a massa, correspondente à seção transversal mesmo que a seção contemple mais de um componente, e parcialmente com a resistência, isto é, somente a área da seção transversal do eixo resiste diretamente aos esforços solicitantes.

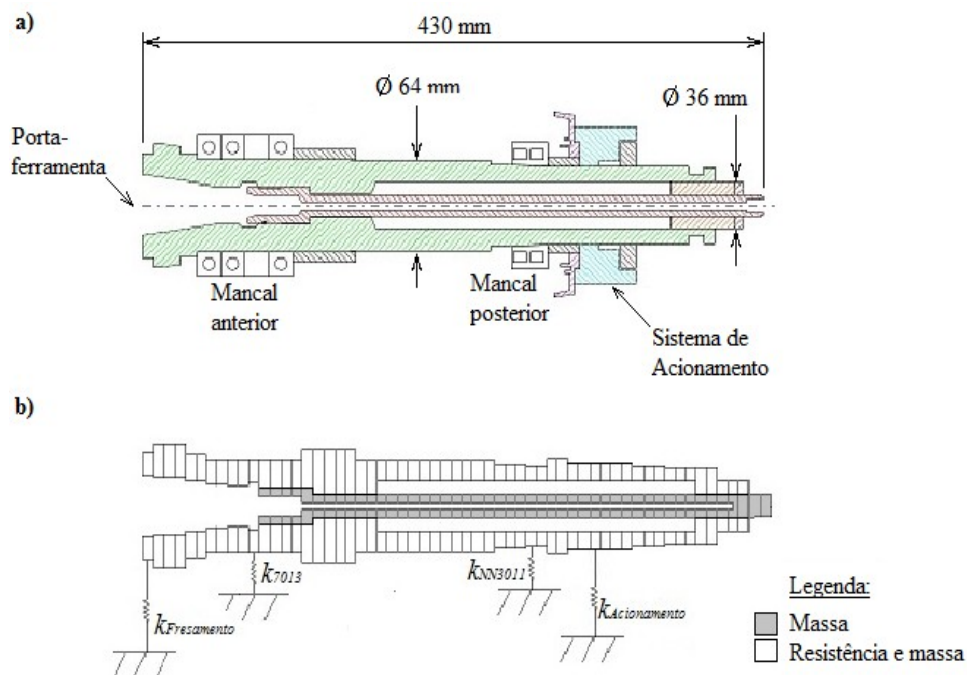


Figura 3.1 – Discretização do eixo-árvore: a) desenho básico; b) modelo de elementos finitos.

### 3.1.1 Parâmetros de entrada

As propriedades de massa e flexibilidade do eixo são calculadas com base nas propriedades geométricas detalhadas nos desenhos técnicos fornecidos pelo fabricante em comunicado pessoal (Alcantara e Felipe Filho, 2015). Uma vez que este componente é fabricado em conformidade com tolerâncias estreitas, os erros gerados na discretização em elementos finitos são superiores aos desvios dimensionais propriamente ditos. De qualquer maneira, considera-se que o erro proveniente deste tipo de incerteza é suficientemente pequeno para o número de elementos adotados. Portanto, considerou-se nas análises dispostas no presente trabalho que as propriedades dimensionais do eixo são invariáveis.

Na tabela 3.1 são detalhadas os principais parâmetros de entrada considerados nos cálculos. O valor de base corresponde ao valor adotado no cálculo das frequências naturais e a faixa de valores ao intervalo considerado na análise da influência de cada parâmetro.

Tabela 3.1 – Parâmetros de entrada do modelo.

Parâmetro	Valor de base [N/μm]	Faixa de valores [N/μm]
Rigidez do mancal anterior	540	540-1080
Rigidez do mancal posterior	1100	1100-2200
Rigidez do processo de usinagem	0	0-30
Rigidez do acionamento	0	0-200

No que se refere à rigidez dos mancais, os valores calculados pela teoria foram comparados com os valores determinados utilizando-se a metodologia simplificada do fabricante. Na tabela 3.2 são listados os principais dados do mancal anterior.

Tabela 3.2: Dados do mancal anterior.

Fabricante e modelo	NSK 7013 A5 DBD
Elementos rolantes	Esferas de aço
Diâmetro primitivo [mm]	84,2
Número de esferas	19
Ângulo de contato [°]	25
Diâmetro da esfera [mm]	9,1
Pré-carga leve [N]	390
Rigidez radial [N/μm]	540



Na figura 3.2 encontra-se disposta a curva de rigidez radial do mancal anterior calculada pelas equações dispostas em 2.1.4.1, de acordo com a teoria de deformação de contato dos elementos rolantes.

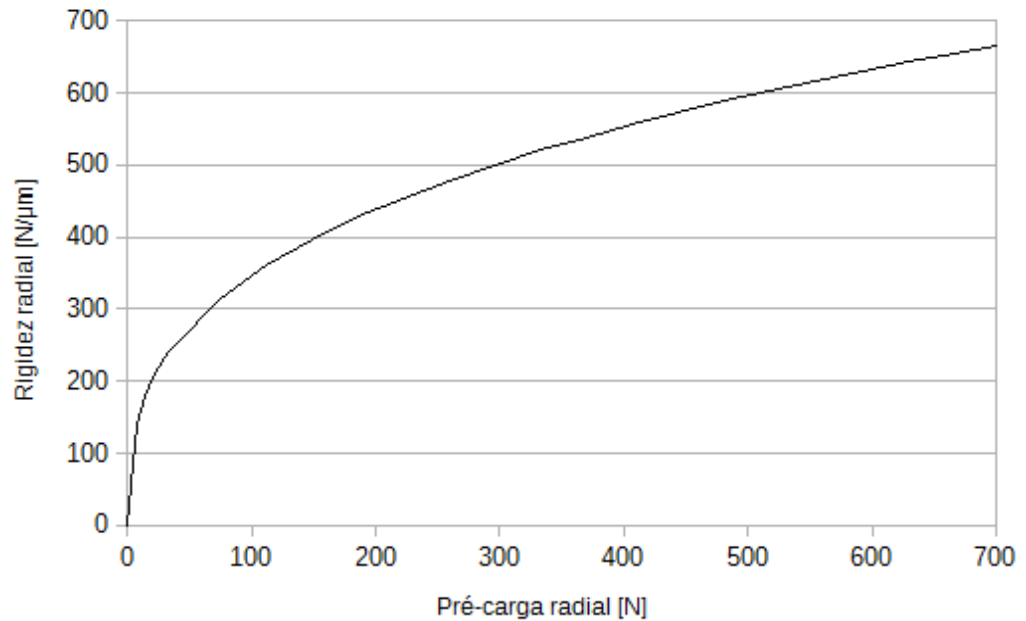


Figura 3.2 – Curva de rigidez radial do mancal anterior.

Considerando-se o valor de pré-carga leve indicado por NSK (2015), os valores de rigidez calculados pela metodologia do fabricante e pela teoria de contato são próximos. Adotou-se no modelo o valor  $k_{7013} = 540 \text{ N}/\mu\text{m}$ .

Na tabela 3.3 encontram-se listados os principais dados do mancal posterior.

Tabela 3.3: Dados do mancal posterior.

Fabricante e modelo	NSK NN 3011
Elementos rolantes	Rolos de aço
Número de fileiras	2
Número de rolos por fileira	19
Ângulo de contato [°]	25
Diâmetro primitivo [mm]	72,47
Diâmetro do rolo [mm]	8,53
Comprimento do rolo [mm]	8,58
Carga básica estática [kN]	96,5
Carga básica dinâmica [kN]	69,3
Rigidez radial <sup>1)</sup> [N/μm]	1220

1) Mancal similar SKF NN 3011 KTN/SP adotado como referência.

Na figura 3.3 é representada graficamente a rigidez radial do mancal posterior calculada de acordo com a teoria de deformação de contato dos elementos rolantes.

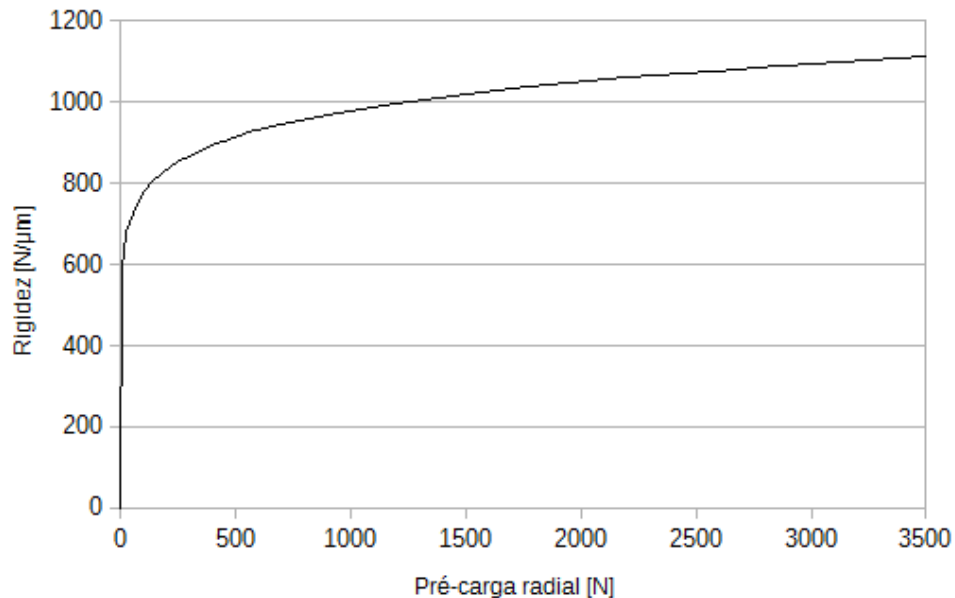


Figura 3.3 – Curva de rigidez radial do mancal posterior.

Embora o valor de rigidez radial calculado pela teoria de contato seja ligeiramente menor que o valor de referência listado na tabela 3.3, ainda assim são condizentes. Desta maneira, adotou-se no modelo o valor de rigidez calculado  $k_{NN\ 3011} = 1100\text{ N}/\mu\text{m}$ .

Valores de rigidez introduzidos pela própria operação de fresamento foram estimados com base em deslocamentos da ferramenta, da ordem de  $150\ \mu\text{m}$  (Vargas, 2012; Albuquerque, 2013), e em esforços de usinagem de  $450\text{ N}$ , valor calculado considerando-se  $a_p = 2\text{ mm}$ ,  $f_z = 0,05\text{ mm/dente}$  e  $KS = 470\text{ kgf}/\text{mm}^2$ . Considerou-se portanto que a rigidez do fresamento varia de  $0$  a  $30\text{ N}/\mu\text{m}$ .

Os valores de rigidez introduzidos pelo acionamento do eixo-árvore, que se deforma durante a operação de fresamento devido aos esforços de usinagem, foram estimados com base em evidências experimentais de testes preliminares. Considerou-se que este parâmetro varia de  $0$  a  $200\text{ N}/\mu\text{m}$ .

Finalmente, o fator de amortecimento do conjunto foi determinado experimentalmente pela técnica do decremento logarítmico. O eixo-árvore foi excitado na região próxima ao nariz do eixo utilizando-se um martelo e o fator de amortecimento  $\zeta_m = 0,17 \pm 0,09$  calculado a partir da resposta medida por um acelerômetro. Adotou-se na modelagem o valor médio aplicado nos elementos correspondentes aos mancais.

### 3.1.2 Validação do modelo

Para validar a rotina implementada foram comparadas a solução numérica do problema de uma viga bi apoiada e a analítica disponível na literatura. Considerou-se uma viga de seção circular vazada, detalhada na figura 3.4, módulo de elasticidade  $E = 200$  GPa e massa específica  $\rho = 7.850$  kg/m<sup>3</sup>, com dois apoios rígidos ( $k = 10^{15}$  N/m). No cálculo numérico a malha é composta por 59 elementos de viga no plano e 60 nós, definidos por meio de um teste de convergência. Na solução analítica são feitas as considerações da viga de Rayleigh.

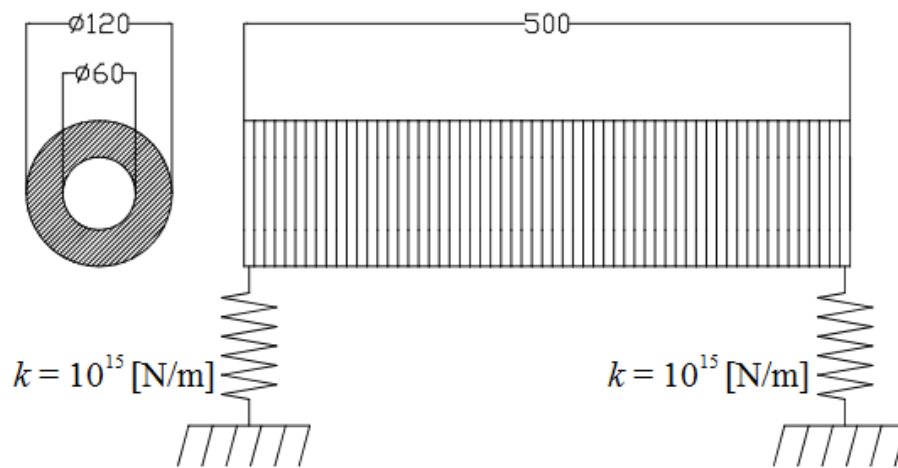


Figura 3.4 – Modelo para validação da rotina de elementos finitos.

Na tabela 3.4 são comparadas as soluções numérica e a analítica do problema considerado na validação da rotina de elementos finitos implementada no presente trabalho.

Tabela 3.4: Soluções numérica e analítica do problema considerado na validação da rotina implementada.

Modo de vibração	Frequências naturais $\omega_n$ [Hz]		
	Solução numérica	Solução analítica	$\Delta$ [%]
Modo 1	530	529	0,1
Modo 2	2092	2082	0,5
Modo 3	4612	4564	1,0
Modo 4	7979	7842	1,7
Modo 5	12063	11764	2,5

Os resultados dispostos na tabela 3.4 indicam que o modelo numérico é capaz de fornecer uma solução suficientemente exata. O erro aumenta com a frequência, sendo este inferior a 2% no cálculo das quatro primeiras frequências.

### 3.2 Procedimento experimental

Na seção 3.2.1 são descritos os materiais e equipamentos adotados no estudo experimental das vibrações do conjunto eixo-árvore. Na seção 3.2.2 é detalhado o planejamento dos experimentos

#### 3.2.1 Materiais e equipamentos

Todos experimentos foram conduzidos no Laboratório de Usinagem e Automação da Universidade Federal de Minas Gerais. Os ensaios foram realizados no centro de usinagem Romi Discovery 560 (7500 rpm e 9 kW de potência) utilizando-se uma fresa de topo Sandvik Coromant R390-016A16L-11L com dois insertos intercambiáveis Sandvik Coromant R390-11T3-12E-PM (classe GC1010) de metal duro revestidos por deposição física de vapor (PVD), classe ISO H. As principais dimensões da ferramenta são detalhadas na figura 3.5.

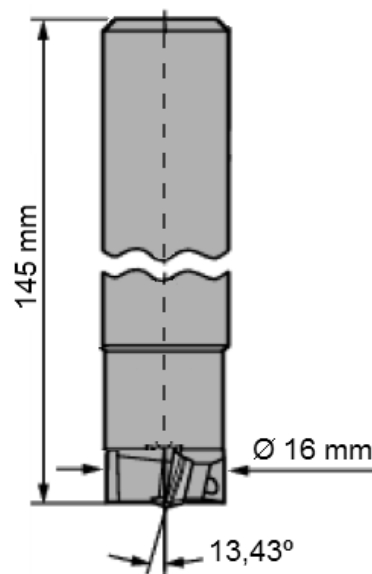


Figura 3.5 – Ferramenta utilizada nos testes.

Como corpo de prova dos ensaios de fresamento foi utilizado um bloco de aço ABNT D2 com dimensões aproximadas de 255 x 210 x 140 mm e dureza média de 190 HV. A faixa de composição química básica deste aço encontra-se detalhada na tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Composição química básica do aço ABNT D2. Fonte: Sousa, 1989.

C	Mn	Si	Cr	V	Mo
1,40-1,60	0,20-0,60	0,20-0,60	11,00-13,00	1,00 (mín)	0,70-1,20

Para medir os níveis de vibração foi utilizado um acelerômetro PCB 353B34 instalado na parte estacionária do conjunto eixo-árvore ligado à placa de aquisição de dados National Instruments PXI 4462, com quatro canais analógicos que permitem amostragem simultânea. Na tabela 3.6 são listados os dados do acelerômetro.

Tabela 3.6: Dados dos acelerômetros PCB 353B34.

Sensibilidade	97,7 mV/g
Sensibilidade transversal	0,5 %
Frequência de ressonância	26 kHz
Faixa de leitura	$\pm 50$ g
Resolução	0,001 g

O acelerômetro foi firmemente conectado a uma base de alumínio por uma ligação rosqueada e colada na região estacionária do conjunto eixo-árvore indicada na figura 3.6. Para reduzir a influência da rede elétrica no sinal, foi realizado o aterramento do sistema de aquisição na estrutura da própria máquina.

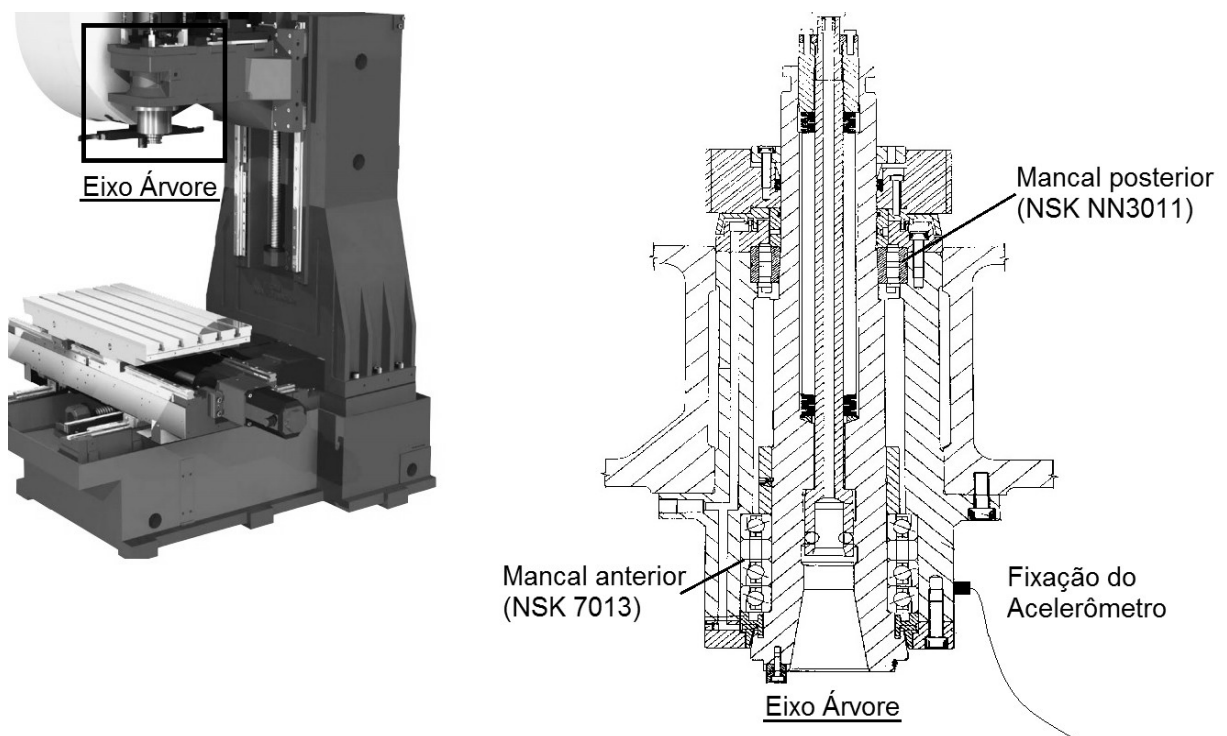


Figura 3.6 – Diagrama de montagem experimental.

### 3.2.2 Planejamento dos experimentos

Os ensaios foram divididos em dois blocos: o primeiro bloco de experimentos tem como objetivo levantar os aspectos dinâmicos mais significantes, comparando a operação da máquina em rotação livre e durante o fresamento; o segundo bloco tem como objetivo um estudo mais aprofundado das vibrações induzidas na operação de fresamento, analisando também a influência de parâmetros do processo. Na tabela 3.7 são descritos os parâmetros adotados em cada um dos testes. Para cada teste foram realizadas 5 medições das vibrações com tempo amostral de 1 s e frequência de aquisição de 200 kHz.

Tabela 3.7 – Organização dos ensaios.

Descrição		Rotação [rpm]					
Bloco 1	Rotação livre	1194	1875	2388	3750	5625	7500
	Fresamento discordante $L = 80$ mm $a_e = 8$ mm, $a_p = 2$ mm, $f_z = 0,05$ mm/dente	1194	1875	2388	-	-	-
Bloco 2	Fresamento concordante $L = 80$ mm $a_e = 2$ mm, $a_p = 2$ mm, $f_z = 0,05$ mm/dente	1194	1875	2388	-	-	-
	Fresamento discordante $L = 80$ mm $a_e = 2$ mm, $a_p = 2$ mm, $f_z = 0,05$ mm/dente	1194	1875	2388	-	-	-
	Fresamento concordante $L = 105$ mm $a_e = 2$ mm, $a_p = 2$ mm, $f_z = 0,05$ mm/dente	1194	1875	2388	-	-	-
	Fresamento discordante $L = 105$ mm $a_e = 2$ mm, $a_p = 2$ mm, $f_z = 0,05$ mm/dente	1194	1875	2388	-	-	-

Nos ensaios de rotação livre foram adotadas rotações de 1194 a 7500 rpm com o objetivo de estudar a resposta vibracional em toda faixa de rotações da máquina. Já os ensaios de fresamento foram limitados à rotação máxima de 2388 rpm devido às condições de corte recomendadas pelo fabricante da ferramenta utilizada.

Sobre os parâmetros de usinagem adotados nos dois blocos de experimentos, utilizou-se uma menor penetração de trabalho  $a_e$  nos ensaios do segundo bloco, pois o aumento do comprimento livre da ferramenta  $L$  aumenta significativamente sua flexibilidade e reduz, portanto, sua capacidade de carga. Os demais parâmetros foram mantidos constantes.

## 4 RESULTADOS

Na seção 4.1 são apresentados os resultados da análise numérica do conjunto eixo-árvore do centro de usinagem. Na seção 4.2 encontram-se dispostos os resultados experimentais da análise da resposta vibracional.

### 4.1 Cálculo numérico

As quatro primeiras frequências naturais calculadas pela rotina de elementos finitos considerando-se os parâmetros de rigidez referentes a rotação nula são  $\omega_1 = 1023$  Hz,  $\omega_2 = 1607$  Hz,  $\omega_3 = 2309$  Hz e  $\omega_4 = 4841$  Hz. Considera-se neste caso que não há rigidez introduzida pelo processo de usinagem nem pela deformação do sistema de acionamento.

Na figura 4.1 é representado graficamente o primeiro modo de vibração por meio da deformada relativa instantânea. Nas figuras 4.2, 4.3 e 4.4 são representados o segundo, o terceiro e o quarto modos de vibração, respectivamente.

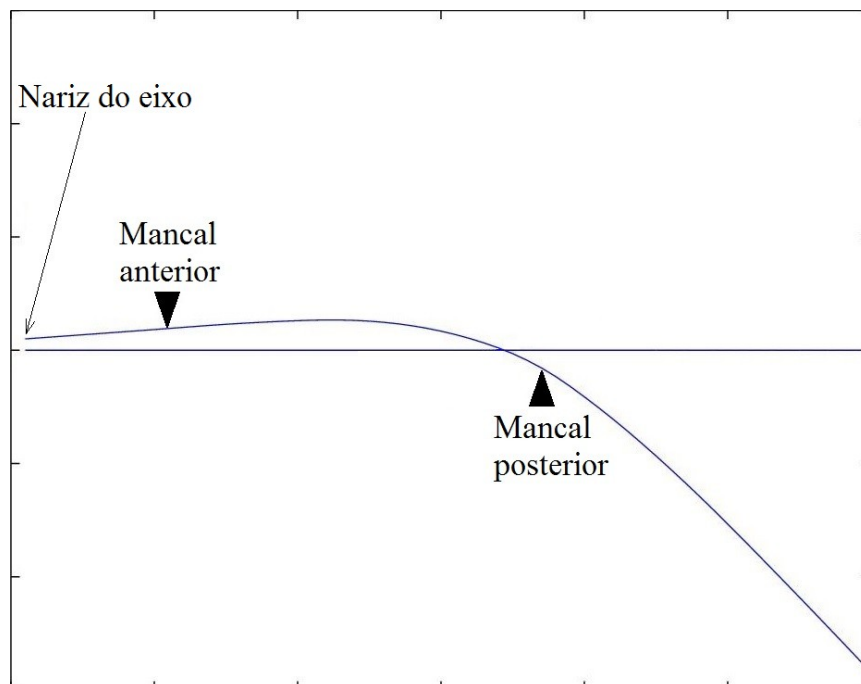


Figura 4.1 – Primeiro modo de vibração do conjunto eixo-árvore ( $\omega_1 = 1023$  Hz).

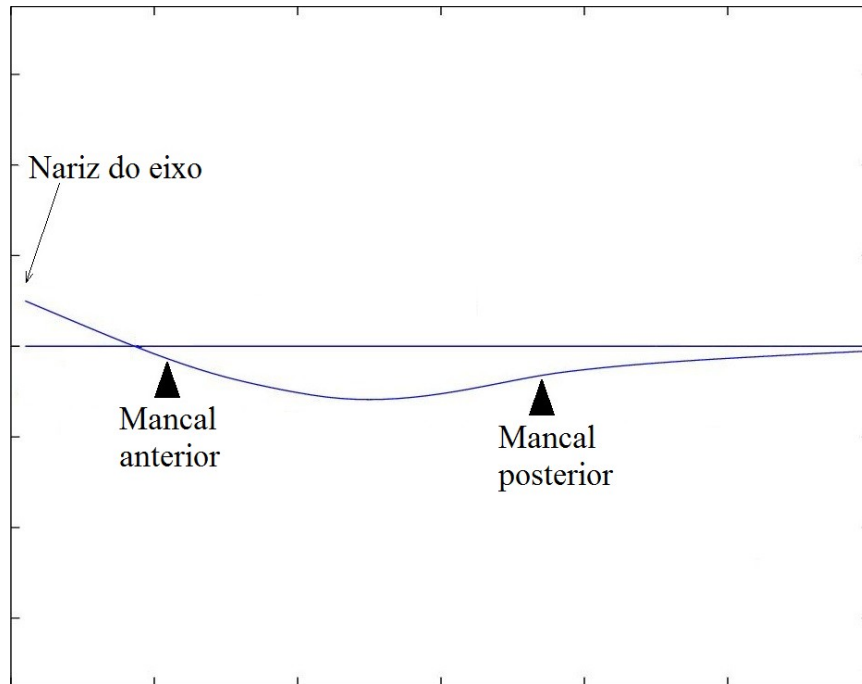


Figura 4.2 – Segundo modo de vibração do conjunto eixo-árvore ( $\omega_2 = 1607$  Hz).

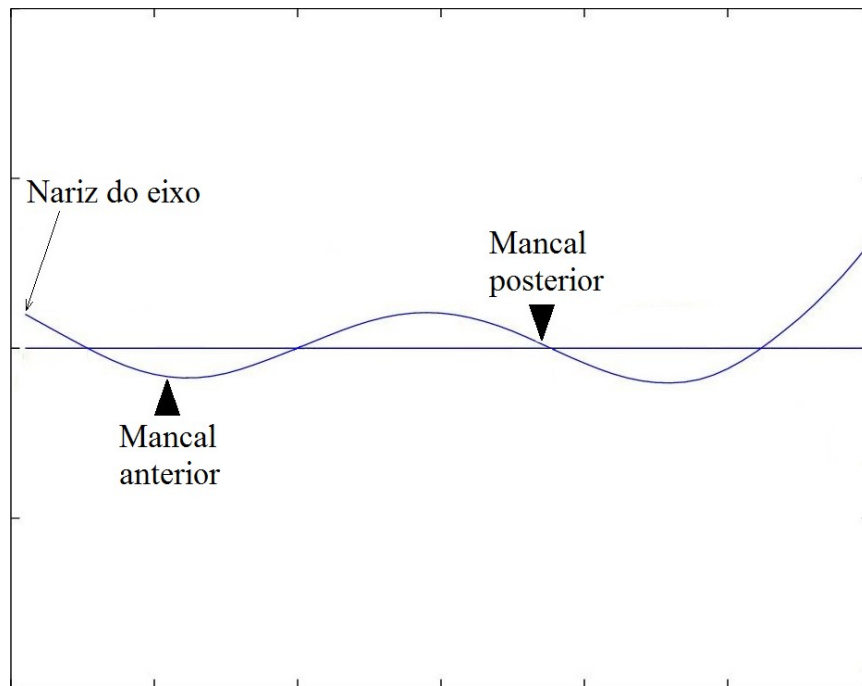


Figura 4.3 – Terceiro modo de vibração do conjunto eixo-árvore ( $\omega_3 = 2309$  Hz).



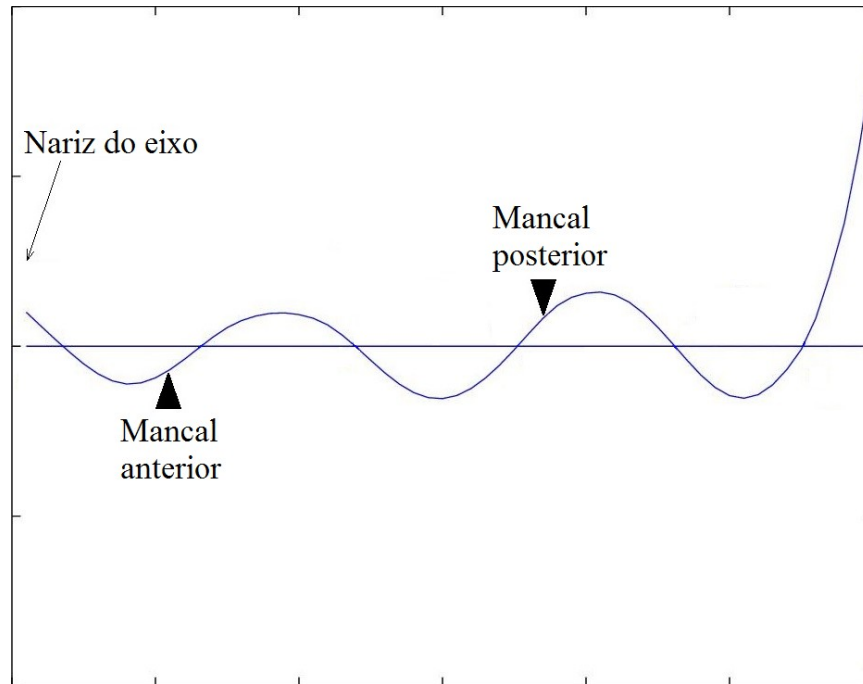


Figura 4.4 – Quarto modo de vibração do conjunto eixo-árvore ( $\omega_4 = 4841$  Hz).

A fim de se determinar as características de cada modo de vibração, são comparadas na tabela 4.1 as razões entre os deslocamentos relativos dos mancais anterior, posterior e máximo do sistema ( $\delta_{MA}$  e  $\delta_{MP}$  e  $\delta_{Max}$ , respectivamente) em relação ao deslocamento relativo do nariz do eixo  $\delta_0$ .

Tabela 4.1: Relação entre os deslocamentos relativos.

Modo	$\omega_n$ [Hz]	$\delta_{MA}/\delta_0$	$\delta_{MP}/\delta_0$	$\delta_{Max}/\delta_0$
1	1023	1,9	1,6	28,4
2	1607	0,3	0,6	1,0
3	2309	0,8	0,1	3,1
4	4841	0,7	0,8	8,4

Conforme discutido na seção 2.1.4.3, o efeito giroscópico em máquinas rotativas é responsável pela bifurcação das frequências naturais em modos regressivos e progressivos. O diagrama de Campbell disposto na figura 4.5 representa a variação das frequências naturais em função da rotação. Não foram considerados nos cálculos a variação de rigidez dos mancais nem a introdução de rigidez pela operação de usinagem e pela deformação do acionamento.

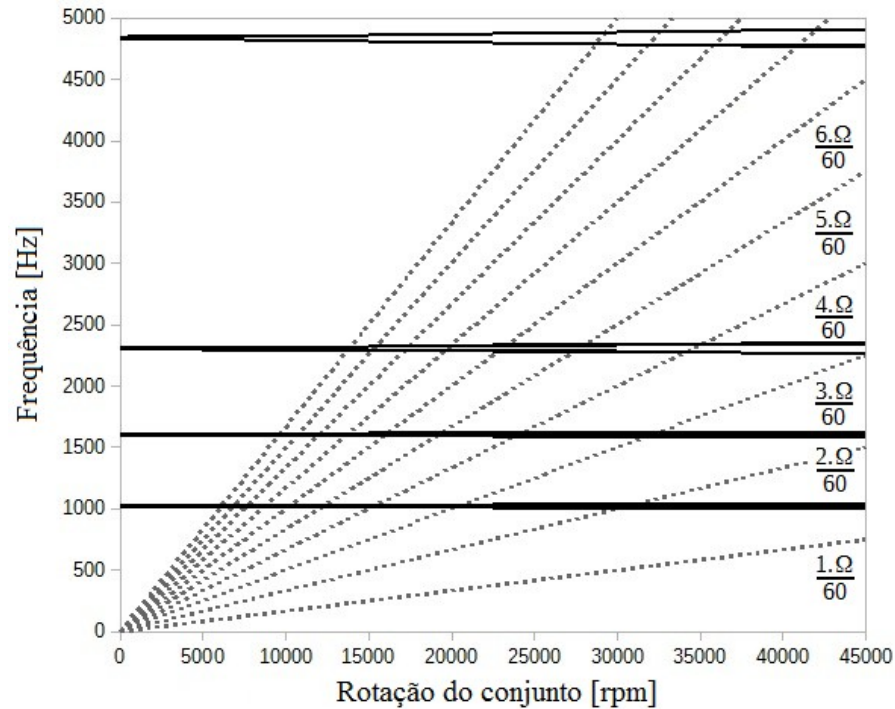


Figura 4.5 – Diagrama de Campbell do conjunto eixo-árvore.

Embora no diagrama da figura 4.5 sejam representadas as frequências naturais associadas a rotações de até 45000 rpm, a rotação máxima do centro de usinagem analisado é de 7500 rpm. Nesta rotação, a variação máxima da frequência natural em relação rotação nula é de 0,3% e pode-se dizer, portanto, que o efeito giroscópico neste caso é pouco significativo.

Nas figuras 4.6 e 4.7 são representados graficamente os efeitos da variação da rigidez dos mancais anterior e posterior, respectivamente, nas quatro primeiras frequências naturais do conjunto eixo-árvore.

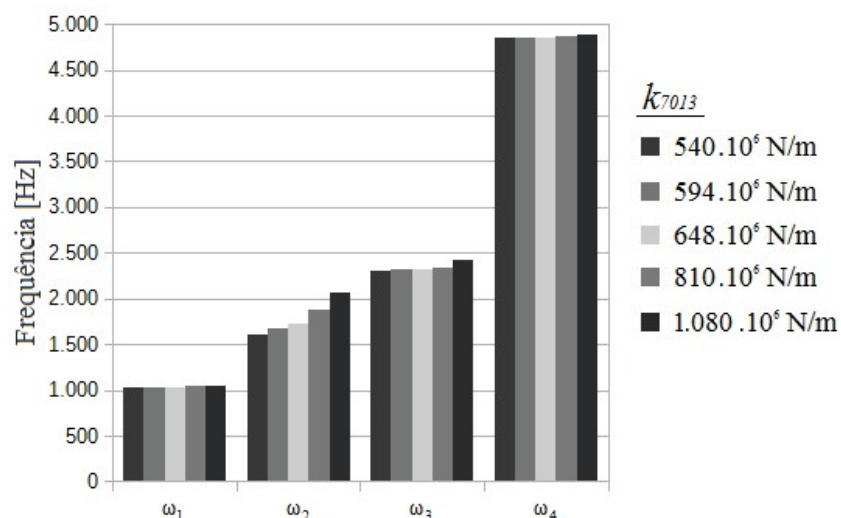


Figura 4.6 – Influência da rigidez do mancal anterior nas frequências naturais.

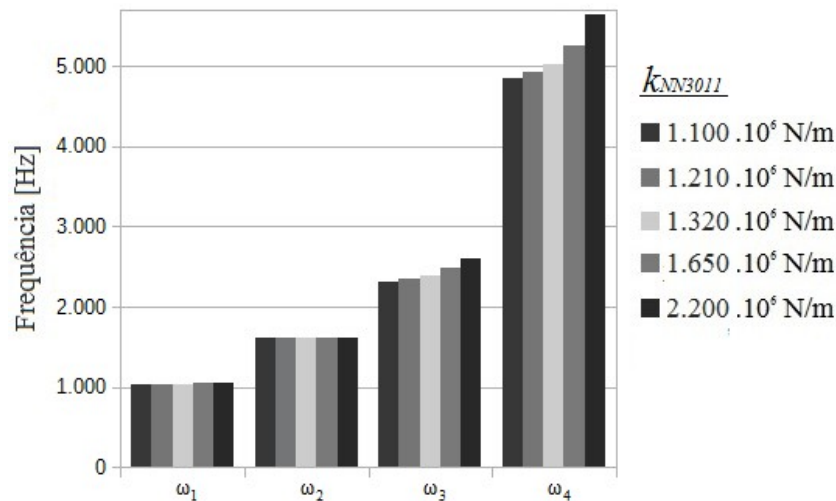


Figura 4.7 – Influência da rigidez do mancal posterior nas frequências naturais.

Observa-se nas figuras 4.6 e 4.7 que a primeira frequência natural permanece praticamente inalterada sob efeito da variação da rigidez dos mancais anterior e posterior. O mancal anterior influencia a segunda frequência natural e a influência da variação da rigidez do mancal posterior é insignificante quando comparada à do anterior. Já o mancal posterior influencia a terceira e a quarta frequências naturais, sendo a influência da variação da rigidez do mancal anterior praticamente desprezível quando comparada à do mancal posterior.

Para verificar se há interação significativa entre a variação simultânea da rigidez, elevou-se a rigidez dos dois mancais simultaneamente em 50%. Verifica-se que a segunda frequência natural sofre uma variação similar à verificada com o aumento apenas da rigidez do mancal anterior enquanto a terceira e quarta frequências variam de forma similar a quando se varia apenas a rigidez do mancal posterior. Portanto, os efeitos da variação da rigidez dos dois mancais nas primeiras frequências naturais podem ser considerados independentes.

Relacionando as características dos modos de vibração e o efeito da variação da rigidez dos mancais nas frequências naturais é possível inferir que:

- No primeiro modo de vibração o deslocamento relativo máximo  $\delta_{max}/\delta_0$  é muito superior aos dos mancais  $\delta_{MA}/\delta_0$  e  $\delta_{MP}/\delta_0$ . Além disto, a primeira frequência natural é pouco sensível à variação da rigidez dos mancais. Portanto, o primeiro modo de vibração não é determinado pelos mancais, mas principalmente pelas demais características do conjunto.
- O segundo modo de vibração é caracterizado principalmente pelo movimento do nariz do eixo ( $\delta_{MA}/\delta_0 = 1$ ) e a segunda frequência natural é influenciada principalmente pela variação da rigidez do mancal anterior, o mais solicitado

radialmente durante o fresamento. Apesar de ser o mancal mais solicitado pelos esforços de usinagem, sua amplitude de vibração é inferior à de outros pontos do conjunto, de forma que a fixação do acelerômetro em uma região próxima não implica necessariamente a medição predominante dos níveis de vibração associados ao segundo modo.

Na figura 4.8 são mostrados os diferentes valores das quatro primeiras frequências naturais calculados considerando-se a influência da rigidez introduzida pela própria operação de fresamento.

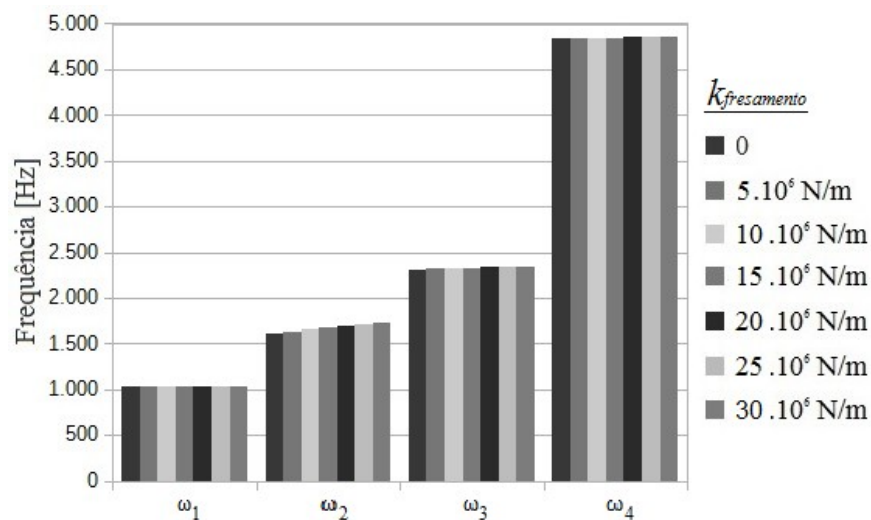


Figura 4.8 – Influência da rigidez introduzida pela operação de fresamento nas frequências naturais.

Os resultados indicam que a introdução de rigidez pela operação de fresamento influencia significativamente apenas a segunda frequência natural, cujo modo de vibração associado é caracterizado principalmente pela maior amplitude translacional do nariz do eixo, ponto do conjunto mais próximo da zona de trabalho.

Na figura 4.9 são representados os resultados da análise da influência da rigidez introduzida pelo sistema de acionamento nas frequências naturais.

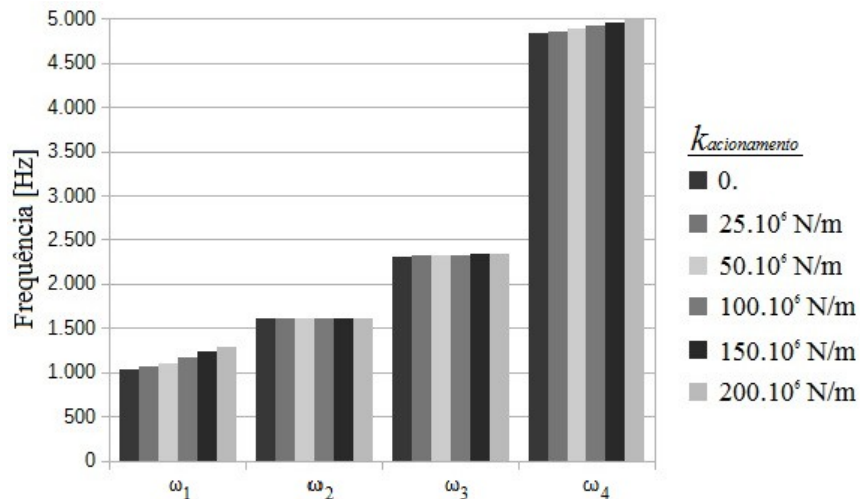


Figura 4.9 – Influência da rigidez introduzida pelo acionamento nas frequências naturais.

O primeiro modo de vibração, desconsiderando-se os efeitos de rigidez do fresamento e do acionamento, é caracterizado por uma grande variação relativa de posição na região do eixo próxima ao acionamento (vide figura 4.1). O sistema de acionamento atua de certa forma limitando a translação do eixo nesta região e, por esta razão, influencia especialmente o primeiro modo. Na figura 4.10 são comparados os deslocamentos relativos do primeiro modo de vibração nas duas situações: sem efeito de rigidez adicional do acionamento ( $k_{\text{acionamento}} = 0$ ) e com efeito de rigidez do acionamento ( $k_{\text{acionamento}} = 200 \text{ N}/\mu\text{m}$ ).

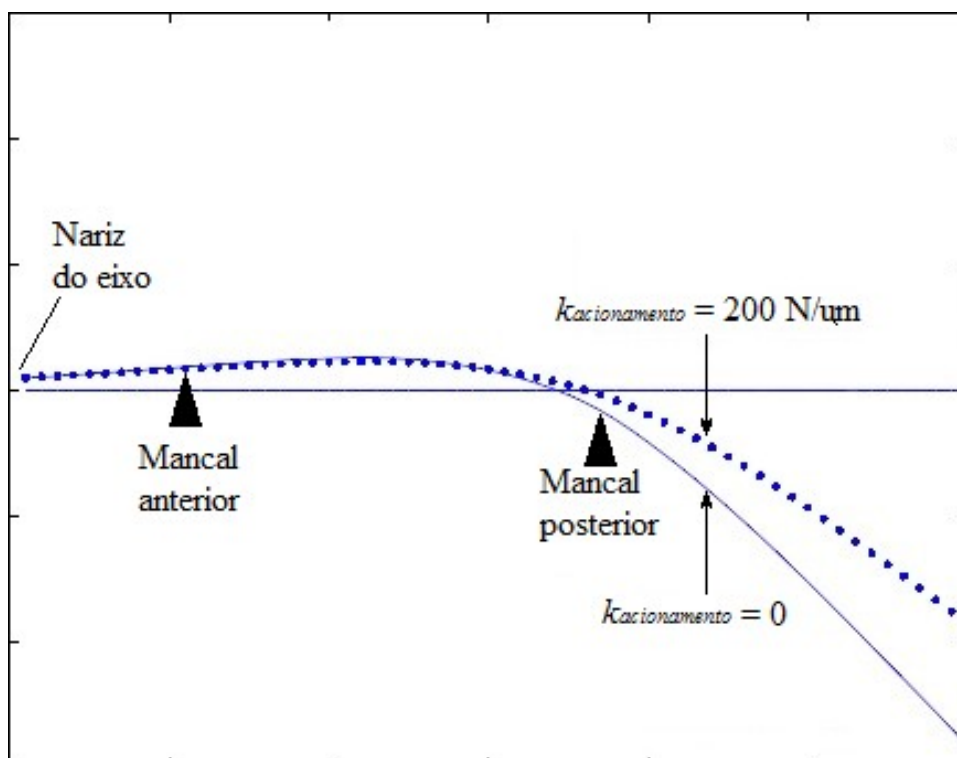


Figura 4.10 – Influência da rigidez do acionamento no primeiro modo de vibração.

## 4.2 Análise experimental das vibrações

Nesta seção são apresentados os resultados da análise de resposta vibracional do conjunto eixo-árvore do centro de usinagem, divididos em dois blocos de experimentos.

### 4.2.1 Primeiro bloco de experimentos

O primeiro bloco de experimentos foi conduzido com o objetivo de levantar os aspectos dinâmicos mais relevantes na operação da máquina-ferramenta. Para tal, são comparados os ensaios de rotação livre e de fresamento.

Na tabela 4.2 são comparados os valores médios quadráticos (*Root mean square* – RMS) de aceleração medidos nos ensaios de rotação livre e de fresamento em diversas rotações. Os níveis de vibração induzidos na operação de fresamento são bem mais altos que na rotação livre. Isto se deve à energia envolvida no processo de corte, que é relativamente alta, e aos esforços de usinagem inerentes à operação de fresamento que são bem maiores que a força de desbalanceamento predominante no ensaio de rotação livre.

Tabela 4.2: Acelerações medidas nos ensaios de rotação livre e de fresamento.

Rotação [rpm]	Aceleração [m/s <sup>2</sup> ]	
	Rotação livre	Fresamento
1194	0,75 ± 0,01	1,96 ± 0,30
1875	1,05 ± 0,01	1,50 ± 0,06
2388	1,31 ± 0,01	2,38 ± 0,13
3750	2,40 ± 0,09	-
5625	3,97 ± 0,09	-
7500	4,81 ± 0,04	-

Nos ensaios de rotação livre verifica-se um crescimento praticamente linear da aceleração com a rotação. No caso da operação de fresamento a relação entre a aceleração e a rotação não tem o mesmo comportamento, pois os esforços de usinagem não variam linearmente com a velocidade: em uma determinada faixa de valores de velocidade de corte (proporcional à rotação), verifica-se uma redução da dureza do material usinado devido a efeitos térmicos e como consequência tem-se uma redução da força de usinagem.

Na figura 4.11 são comparadas as respostas vibracionais medidas nos ensaios, o que permite visualizar com maior clareza a influência da rotação na resposta do sistema nos dois

casos. Nota-se que nos ensaios de fresamento, o espaçamento entre os sinais de maior amplitude decresce à medida que aumenta a rotação e, conseqüentemente, a frequência de excitação associada à penetração de cada inserto na peça, indicando que o sistema é excitado principalmente pelas forças de corte.

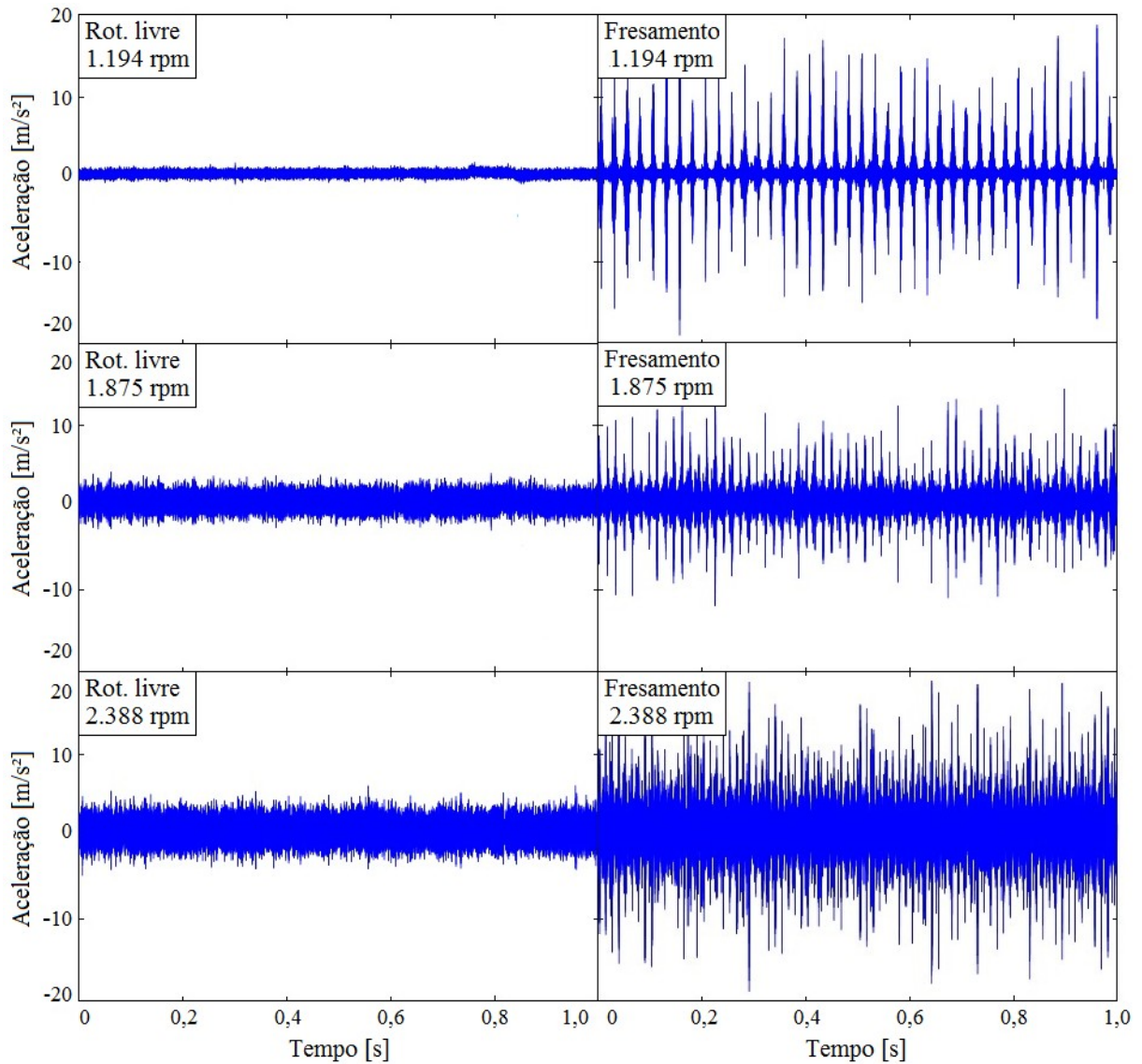


Figura 4.11 – Amplitudes de vibração medidas nos ensaios de rotação livre e fresamento.

Nas figuras 4.12 a 4.15 são apresentados espectros de frequência referentes aos ensaios de rotação livre obtidos em diferentes rotações. Neles é possível identificar os picos de frequência associados à vibração síncrona, a primeira frequência natural e seus harmônicos, os quais predominam na resposta vibratória.



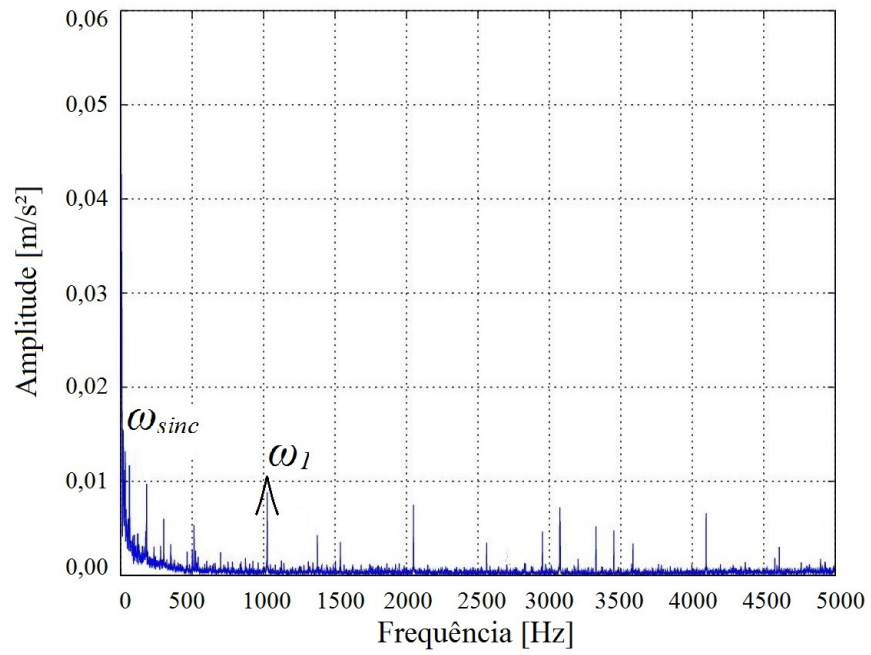


Figura 4.12 – Espectro de frequência do ensaio de rotação livre,  $\Omega = 1875$  rpm.

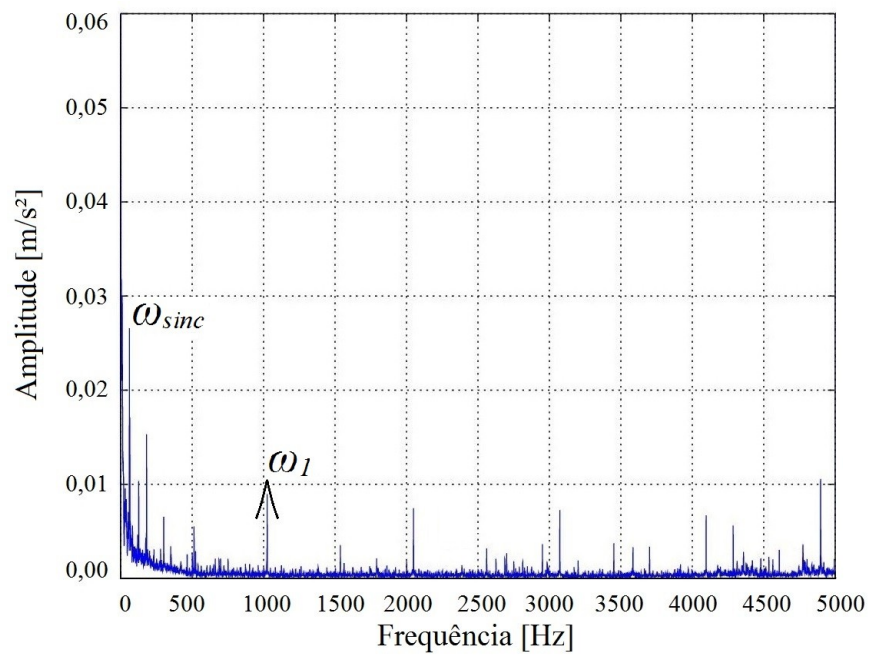


Figura 4.13 – Espectro de frequência do ensaio de rotação livre,  $\Omega = 3750$  rpm.



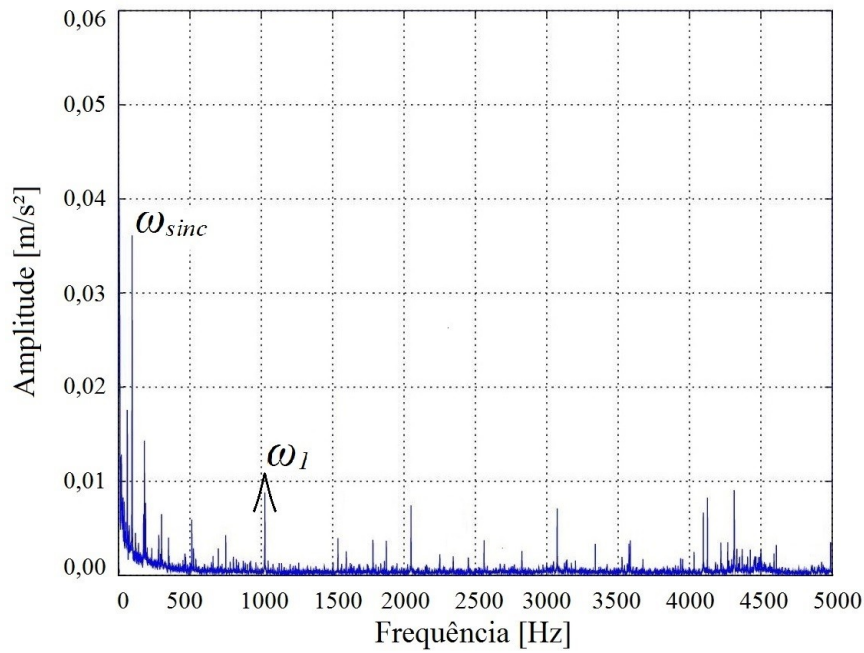


Figura 4.14 – Espectro de frequência do ensaio de rotação livre,  $\Omega = 5625$  rpm.

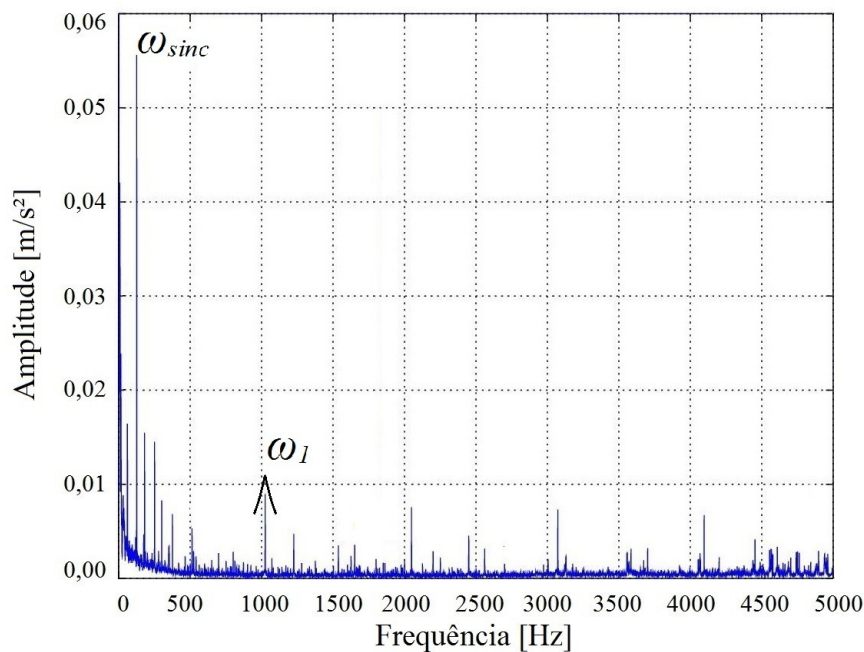


Figura 4.15 – Espectro de frequência do ensaio de rotação livre,  $\Omega = 7500$  rpm.

No caso da rotação livre, o desbalanceamento atua como principal fonte de excitação do sistema, tendo como principal consequência a excitação da vibração síncrona. Desta maneira, o espectro de frequências é dominado pela frequência correspondente à rotação do conjunto. Quanto às frequências naturais, com base nos gráficos das figuras 4.12 a 4.15 é possível afirmar que os valores de frequência natural são pouco influenciados pela rotação do conjunto, permanecendo praticamente constantes.

Na tabela 4.3 são comparadas as frequências naturais calculadas utilizando-se a rotina de elementos finitos e os valores experimentais. Com exceção da segunda frequência, cujo erro é de 11,58 %, há boa concordância entre os valores medidos e calculados, sendo o erro inferior a 2%.

Tabela 4.3 – Comparação das frequências naturais calculadas e medidas nos ensaios de rotação livre.

Identificação	Frequência natural [Hz]		$\Delta$ [%]
	Calculado	Rot. livre	
$\omega_1$ [Hz]	1023	$1025 \pm 1$	0,20
$\omega_2$ [Hz]	1607	$1793 \pm 72$	11,58
$\omega_3$ [Hz]	2309	$2265 \pm 35$	-1,90
$\omega_4$ [Hz]	4841	$4892 \pm 65$	1,04

Na figura 4.16 é representado graficamente o aumento da amplitude dos picos de frequência síncrona com a rotação. Observa-se que, assim como o valor médio quadrático, os picos dominantes correspondentes à resposta síncrona ao desbalanceamento variam linearmente com a rotação.

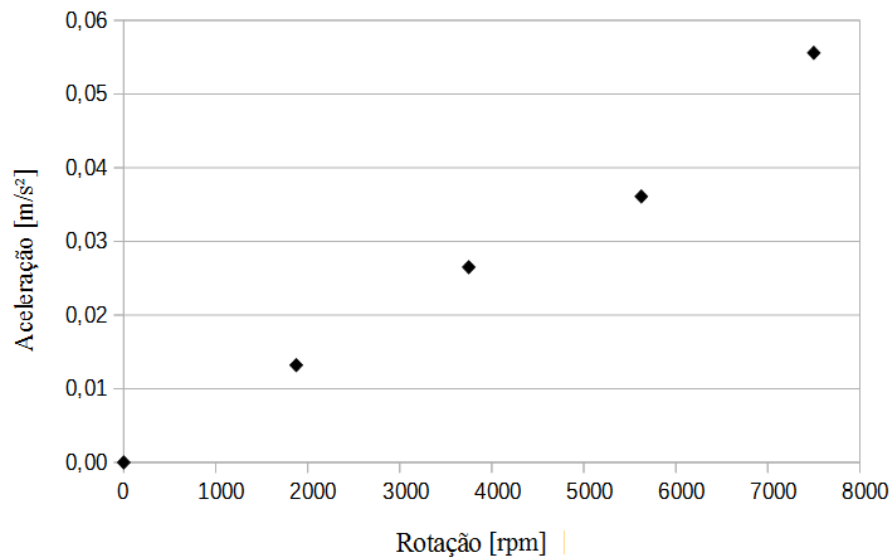


Figura 4.16 – Aceleração associada aos picos de frequência predominantes nos ensaios de rotação livre.

Nas figuras 4.17 a 4.19 encontram-se dispostos os espectros de frequência referentes aos ensaios de fresamento em diferentes rotações, nos quais a segunda frequência natural predomina a resposta. Observa-se que outras frequências nas vizinhanças de um valor central  $\omega_2$  também são excitadas e o espaçamento entre elas corresponde à frequência de rotação, isto é, todas estas frequências são múltiplos da rotação. Além disto, estas frequências apresentam-

se em níveis de intensidade alternados, sugerindo que os esforços do fresamento podem ser decompostos em duas parcelas: permanente e transiente. A parcela permanente corresponde basicamente à ação de cada inserto e se repete duas vezes ao longo da rotação, aparecendo no gráfico na forma de  $2.\omega_{rot}$ , enquanto a parcela transiente estaria associada à assimetria vibratória da ferramenta (ex.: desgaste desigual dos inserts, batimento da ferramenta, etc.), atuando uma vez por rotação e portanto aparecendo na forma de  $\omega_{rot}$ .

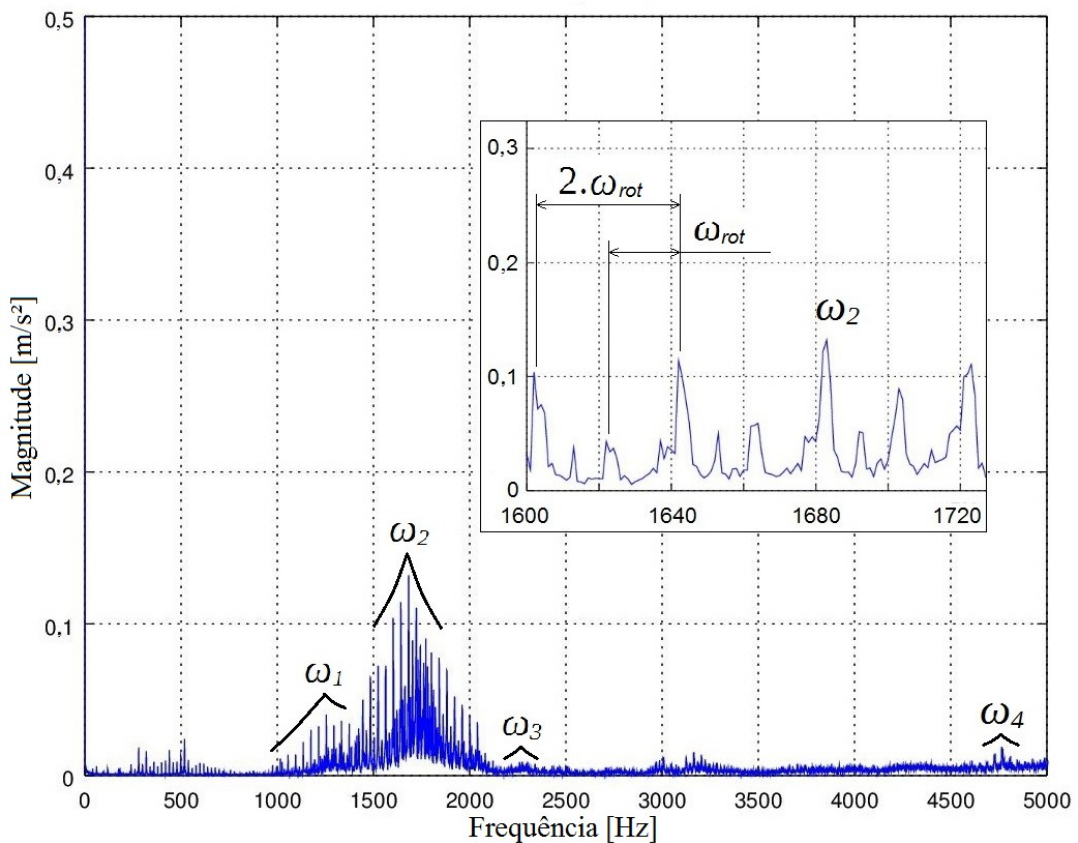


Figura 4.17 – Espectro de frequência dos ensaios de fresamento,  $\Omega = 1194$  rpm.

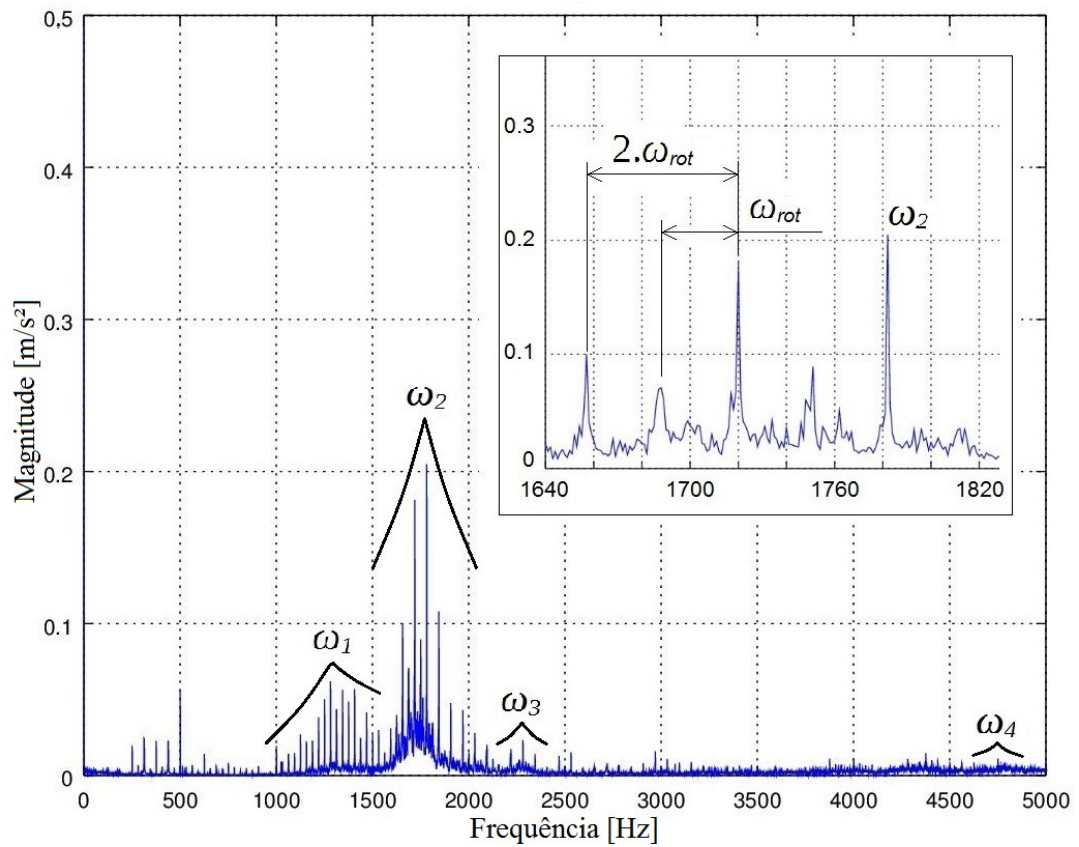


Figura 4.18 – Espectro de freqüência dos ensaios de fresamento,  $\Omega = 1875$  rpm.

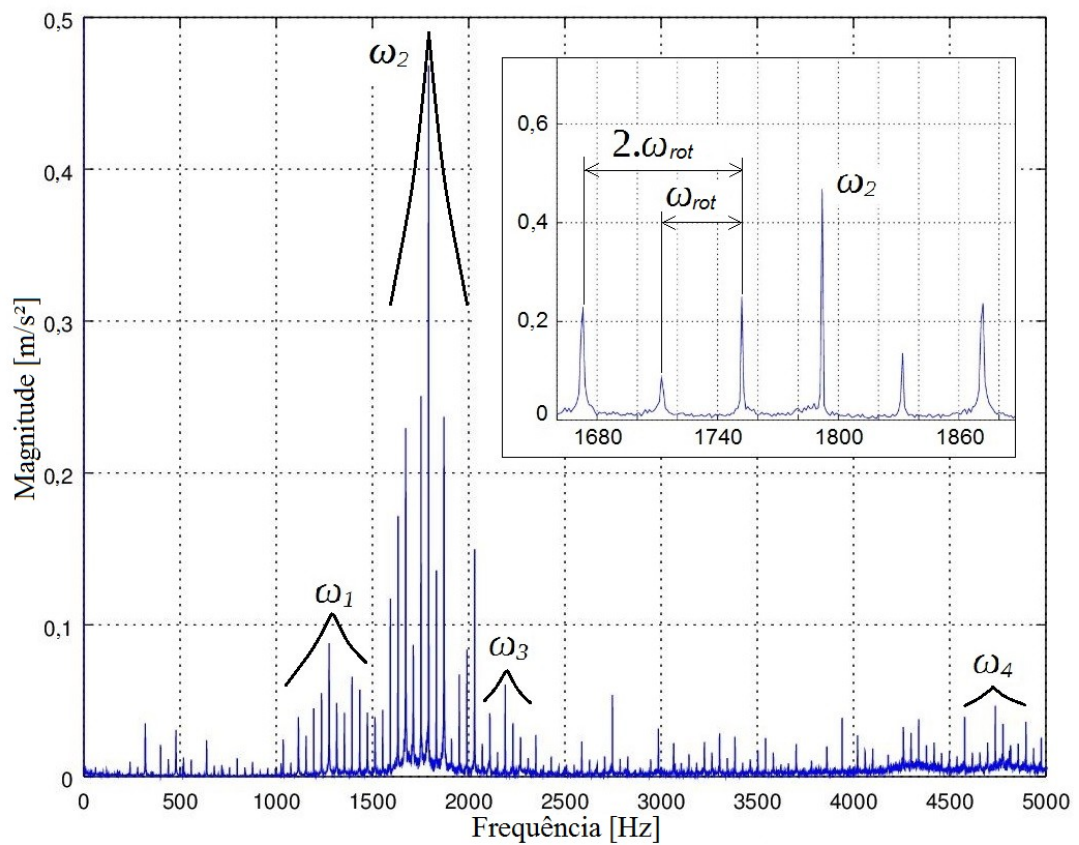


Figura 4.19 – Espectro de freqüência dos ensaios de fresamento,  $\Omega = 2388$  rpm.

Nas figuras 4.17 a 4.19 não é possível identificar isoladamente o pico de frequência referente à rotação da ferramenta, o que permite inferir que a resposta síncrona ao desbalanceamento é insignificante quando comparada à operação de fresamento propriamente dita. Além disto, enquanto nos ensaios de rotação livre apenas o pico associado à primeira frequência natural é claro, nos ensaios de fresamento é possível identificar com maior facilidade os picos associados às demais frequências naturais.

Na figura 4.20 são representadas graficamente as amplitudes das principais frequências naturais em função da rotação do conjunto. Nota-se que os picos relacionados a  $\omega_2$  predominam a resposta, seguidos de  $\omega_1$  e  $\omega_3$ . Além disto, o aumento da amplitude de cada uma das frequências com a velocidade é aproximadamente linear, o que permite inferir que a excitação de cada frequência é linearmente dependente da energia envolvida no processo.

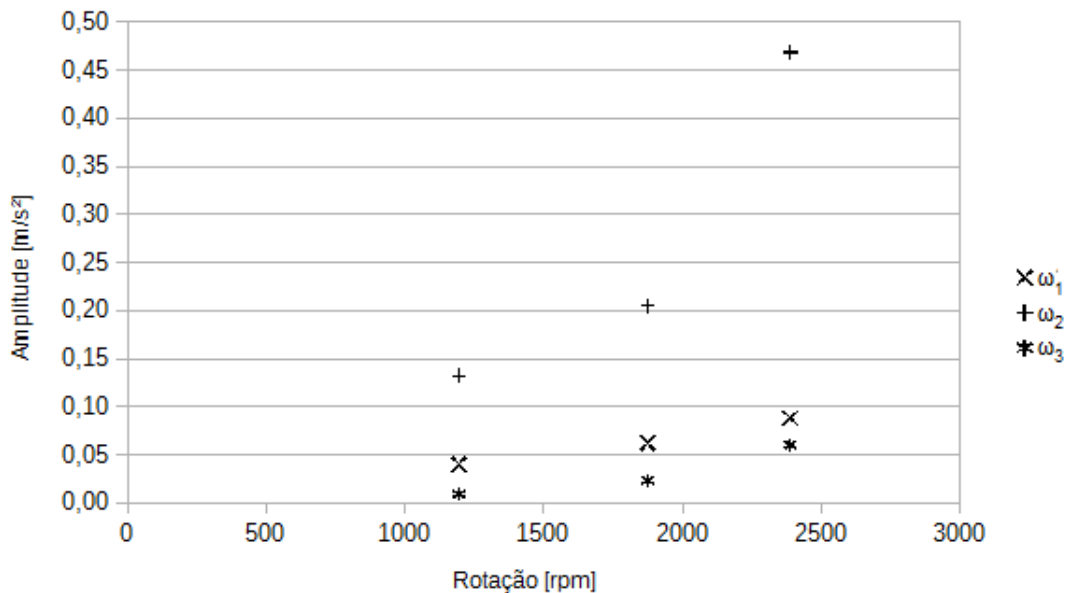


Figura 4.20 – Aceleração associada aos picos de frequência predominantes nos ensaios de fresamento.

Comparando os resultados dos ensaios de rotação livre e os de fresamento, observa-se que há não somente uma variação dos níveis vibracionais mas também um deslocamento das frequências naturais. O deslocamento das frequências naturais e o espalhamento das frequências excitadas em suas proximidades, ambos efeitos verificados nos ensaios de fresamento, podem ser atribuídos à variação da rigidez dos mancais e principalmente à rigidez introduzida pelo sistema de acionamento e pela própria operação de fresamento.

Na tabela 4.4 são comparadas as frequências naturais determinadas experimentalmente nos dois casos. Verifica-se um aumento significativo de  $\omega_1$  e uma ligeira variação das demais frequências naturais. O aumento da primeira frequência natural pode ser relacionado ao

aumento da rigidez introduzido pelo acionamento do eixo-árvore enquanto a variação das demais frequências naturais pode ser atribuída à rigidez introduzida pela própria operação de fresamento.

Tabela 4.4 – Variação das frequências naturais no ensaio de fresamento.

Identificação	Valor calculado	Valor experimental		
		Rot. livre	Fresamento	$\Delta$ [%]
$\omega_1$ [Hz]	1023	1025 $\pm$ 1	1275 $\pm$ 50	24,42
$\omega_2$ [Hz]	1607	1793 $\pm$ 72	1748 $\pm$ 66	-2,51
$\omega_3$ [Hz]	2309	2265 $\pm$ 35	2244 $\pm$ 57	-0,92
$\omega_4$ [Hz]	4841	4892 $\pm$ 65	4765 $\pm$ 77	-2,58

Na tabela 4.5 são comparadas as frequências naturais calculadas e os valores experimentais dos ensaios de fresamento para análise da influência destes efeitos dinâmicos, inseridos no modelo como  $k_{\text{fresamento}} = 15 \text{ N}/\mu\text{m}$  e  $k_{\text{acionamento}} = 200 \text{ N}/\mu\text{m}$ .

Tabela 4.5 – Influência dos efeitos de rigidez do acionamento e do fresamento nas frequências naturais.

Identificação	Valor experimental	Sem efeito de rigidez		Com efeito de rigidez	
		Valor calculado	$\Delta$ [%]	Valor calculado	$\Delta$ [%]
$\omega_1$ [Hz]	1275 $\pm$ 50	1023	-19,76	1.280	0,392
$\omega_2$ [Hz]	1748 $\pm$ 66	1607	-8,07	1.677	-4,06
$\omega_3$ [Hz]	2244 $\pm$ 57	2309	2,90	2.350	4,72
$\omega_4$ [Hz]	4765 $\pm$ 77	4841	1,60	4.975	4,41

Conforme pode ser observado na tabela 4.5, a consideração da introdução de rigidez referente à operação de fresamento e à deformação do sistema de acionamento aumenta a exatidão das duas primeiras frequências naturais. Embora ocorra uma ligeira redução da exatidão do cálculo da segunda e da terceira frequências naturais, o modelo mostra-se capaz de calcular as quatro primeiras frequências naturais com erro inferior a 5%.

#### 4.2.2 Segundo bloco de experimentos

Os ensaios do segundo bloco foram conduzidos com o objetivo de analisar a influência do comprimento livre  $L$  e do sentido de corte. Embora parte dos ensaios do segundo bloco adotem os mesmos parâmetros dos ensaios de fresamento do primeiro com exceção da penetração de trabalho, quatro vezes menor ( $a_e = 2 \text{ mm}$ ), a comparação entre os resultados dos

dois blocos de experimento não é possível, pois os acelerômetros não foram fixados necessariamente no mesmo ponto e isto pode influenciar significativamente a amplitude da resposta vibracional.

Na tabela 4.6 são listados os valores médios quadráticos de aceleração medidos nos ensaios de fresamento do segundo bloco de experimentos, organizados quanto ao comprimento livre da ferramenta e sentido de corte. Verifica-se a tendência geral do aumento da aceleração com a rotação.

Tabela 4.6: Acelerações medidas nos ensaios de fresamento do segundo bloco.

Rotação [rpm]	Aceleração [ $m/s^2$ ]			
	$L = 80$ mm		$L = 105$ mm	
	Concordante	Discordante	Concordante	Discordante
1194	$0,21 \pm 0,01$	$0,21 \pm 0,01$	$0,26 \pm 0,02$	$0,60 \pm 0,03$
1875	$0,57 \pm 0,02$	$0,52 \pm 0,01$	$0,53 \pm 0,02$	$0,67 \pm 0,04$
2388	$1,06 \pm 0,02$	$1,13 \pm 0,02$	$1,05 \pm 0,02$	$1,45 \pm 0,07$

Na figura 4.21 são exibidos os gráficos da amplitude vibracional em função do tempo medida nos ensaios com  $L = 80$  mm, comparando-se a influência do sentido de corte. Assim como os valores listados na tabela 4.6, os gráficos de resposta temporal dos testes com  $L = 80$  mm representados na figura 4.21 não indicam diferença significativa entre os níveis vibracionais nos cortes concordante e discordante para este comprimento livre da ferramenta.



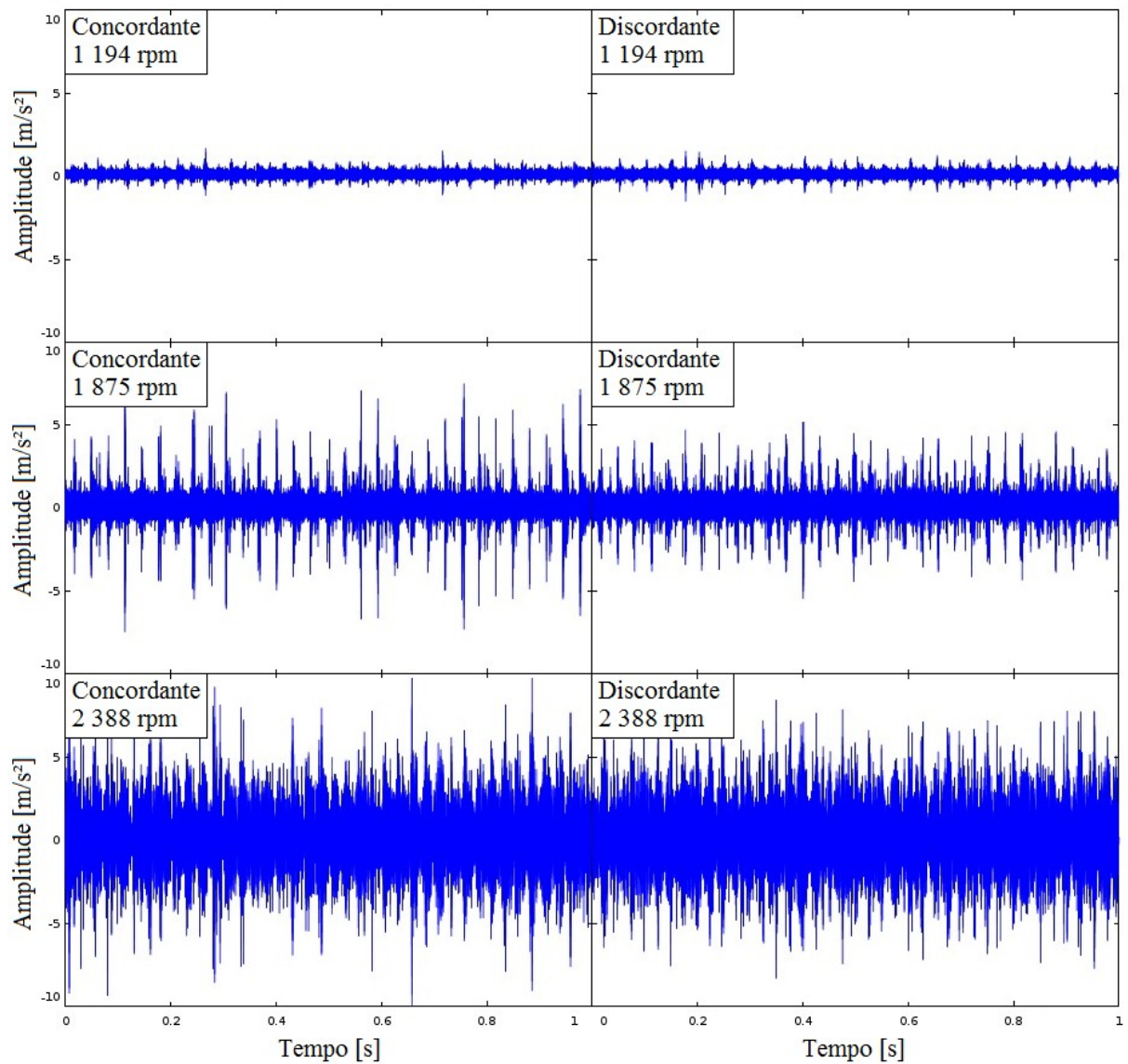


Figura 4.21 – Amplitudes de vibração medidas nos ensaios de fresamento com  $L = 80$  mm e  $a_e = 2$  mm.

Na figura 4.22 é representada graficamente a resposta temporal referente aos ensaios de fresamento com  $L = 105$  mm, com sentidos de corte concordante e discordante. Tanto os valores de aceleração listados na tabela 4.6 quanto os gráficos da figura 4.22 permitem afirmar que os níveis de vibração induzidos no fresamento discordante são superiores aos no concordante para este valor de  $L$ .



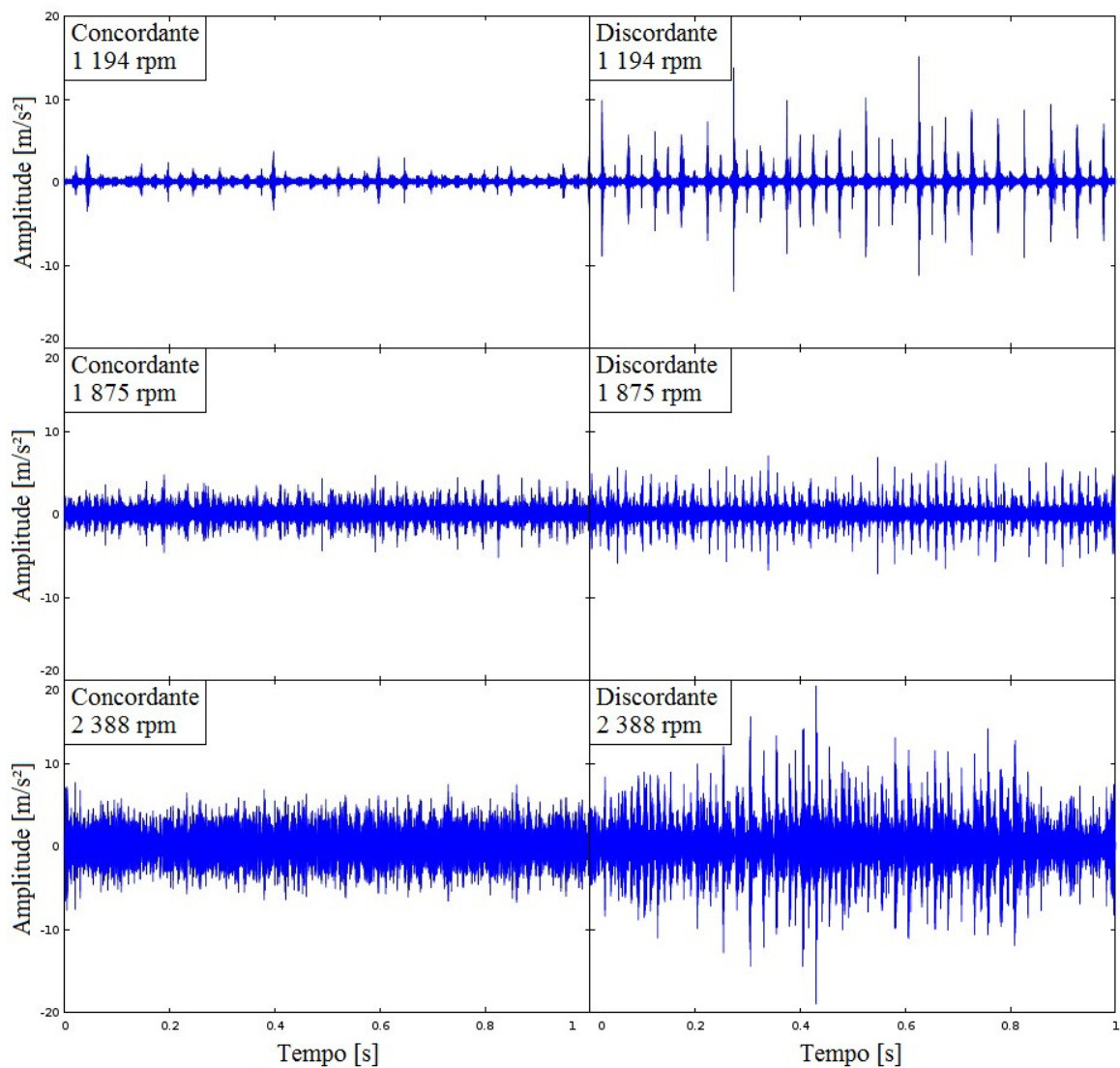


Figura 4.22 – Amplitudes de vibração medidas nos ensaios de fresamento com  $L = 105$  mm e  $a_e = 2$  mm.

Os valores de aceleração e os gráficos de resposta temporal indicam que o aumento do comprimento da ferramenta e, portanto, de sua flexibilidade implica maiores níveis de vibração da ferramenta. Além disto, a adoção de uma maior comprimento da ferramenta aumenta a sensibilidade do sistema a outros fatores (neste caso, ao sentido de corte e à rotação). É importante lembrar que, conforme discutido no capítulo 2, o corte concordante é preferido em operações de acabamento, pois reduz a deflexão e os níveis gerais de vibração da ferramenta, especialmente no caso de fresas esbeltas, normalmente sujeitas a maiores níveis vibracionais.

Na figura 4.23 são apresentados os espectros de frequência obtidos nos ensaios de fresamento do segundo bloco de experimentos utilizando-se  $L = 80$  mm e os dois sentidos de corte.

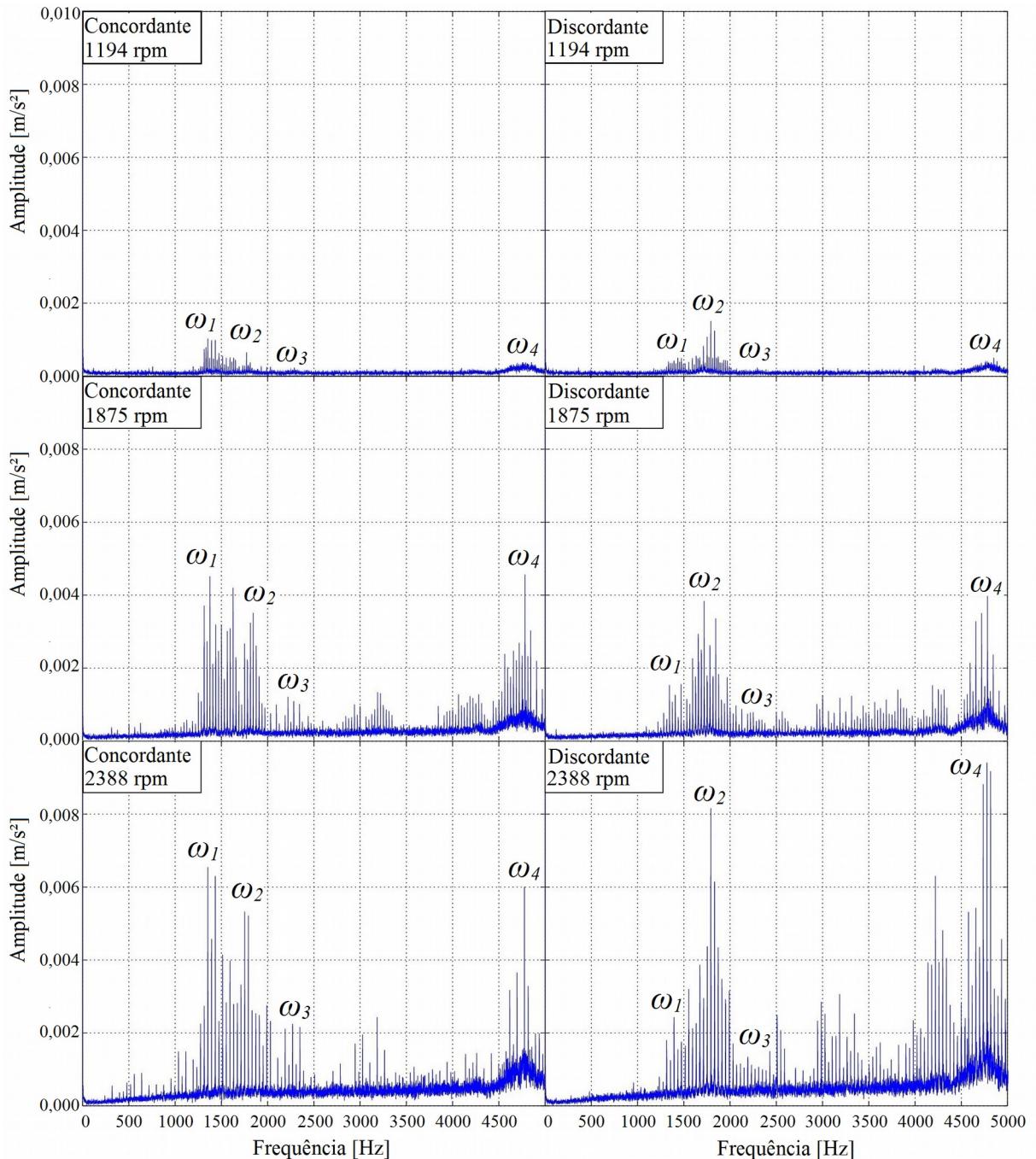


Figura 4.23 – Espectros de frequência dos ensaios de fresamento do segundo bloco de experimentos,  $L = 80$  mm.

Assim como nos testes de fresamento do primeiro bloco, verifica-se a predominância das frequências naturais e de seus harmônicos na resposta vibracional do conjunto. Todavia, provavelmente devido à menor penetração de trabalho adotada, há predominância da quarta frequência natural, cuja amplitude é ligeiramente maior que a associada à segunda.

A análise dos espectros de frequência dispostos na figura 4.23 mostra que a relação entre as principais frequências excitadas pode ser considerada independente do sentido de corte, de forma que os maiores picos estão associados a  $\omega_4$ , seguidos de  $\omega_2$  e  $\omega_1$ .

Nas figuras 4.24 e 4.25 são representadas as amplitudes das frequências que predominam a resposta dos ensaios do segundo bloco, referentes aos comprimentos livres da ferramenta  $L = 80$  mm e  $L = 105$  mm, respectivamente.

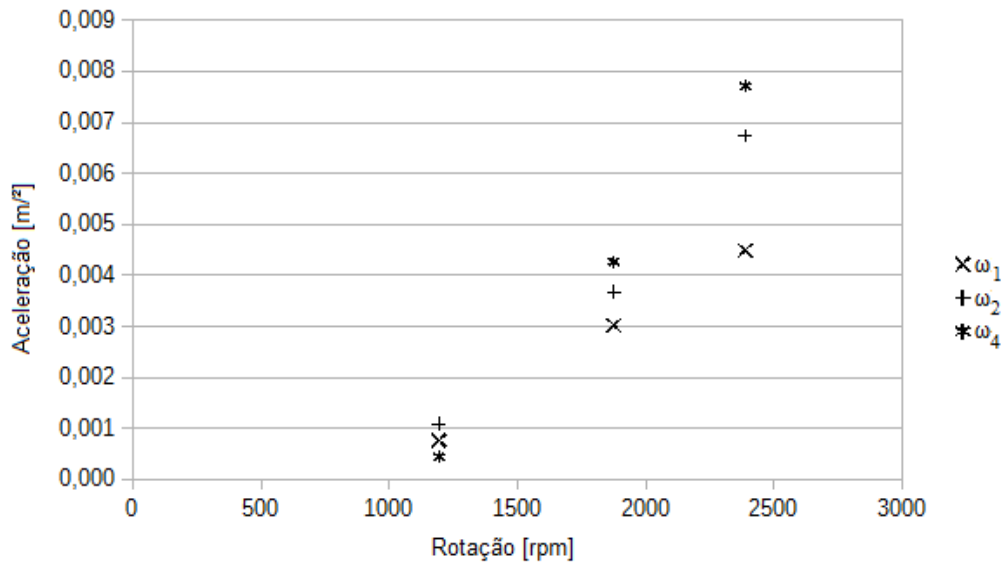


Figura 4.24 – Aceleração associada aos picos de frequência predominantes no fresamento,  $L = 80$  mm.

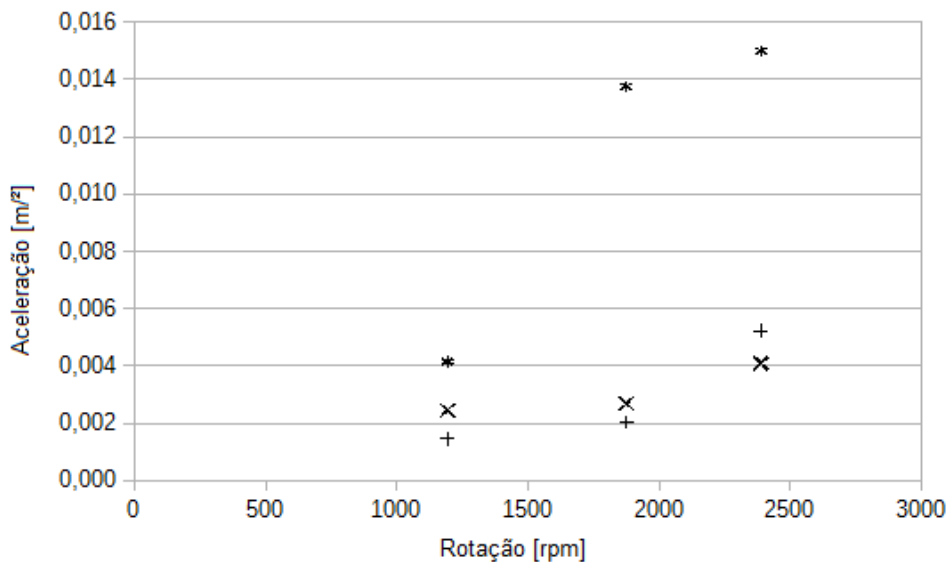


Figura 4.25 – Aceleração associada aos picos de frequência predominantes no fresamento,  $L = 105$  mm.

Das figuras 4.23 a 4.25 é possível inferir que, se por um lado o sentido de corte exerce modesta influência no nível de excitação de cada frequência natural, o comprimento livre da ferramenta é significativo. Verifica-se que as amplitudes associadas às principais frequências excitadas chega a ser cerca de 9 vezes maior no caso da ferramenta mais esbelta.

Nos ensaios do segundo bloco de experimentos há predominância da quarta frequência natural, mesmo nos ensaios com  $L = 80$  mm, enquanto nos ensaios de fresamento do primeiro bloco há predominância da segunda frequência natural. Embora possa haver diferença entre os pontos de medição adotados em cada bloco de experimentos, a distância entre eles é relativamente pequena, menor que 5 cm, e apesar deste fator poder resultar em diferenças significativas entre as amplitudes vibracionais medidas, a relação entre as frequências predominantes é pouco influenciada. Desta maneira, pode-se inferir que a penetração de trabalho  $a_e$  pode ser um fator determinante na resposta vibracional, que induz a predominância de determinadas frequências na resposta espectral.

## 5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A análise dos modos de vibração indica que enquanto a primeira frequência natural permaneceria praticamente inalterada sob ação da variação da rigidez dos mancais, a variação da rigidez do mancal anterior influenciaria significativamente a segunda frequência natural e a variação da rigidez do mancal posterior influenciaria a terceira e a quarta frequências. Além disto, as análises computacionais indicam que não há interação das variações simultâneas de rigidez dos mancais, sendo os efeitos de variação de rigidez de cada um deles independentes.

A operação de fresamento representa um fenômeno de alta complexidade, sendo os efeitos dinâmicos bastante significativos especialmente em altas velocidades de operação. Os resultados computacionais indicam que a variação das frequências naturais devido ao efeito giroscópico é insignificante na faixa de rotações do centro de usinagem analisado, sendo a variação máxima inferior a 0,3%. Em outras palavras, a influência do efeito giroscópico só se tornaria significativa em rotações elevadas, muito acima da faixa de operação do centro de usinagem. Os demais efeitos dinâmicos, isto é, variação da rigidez dos mancais e a introdução de rigidez pela operação de fresamento e pela deformação do sistema de acionamento, foram analisados por meio de ajustes dos parâmetros de entrada do modelo de forma a se aproximarem a resposta numérica e os resultados experimentais, revelando-se muito mais significativos na faixa de rotações analisada que o efeito giroscópico.

Relacionando as características dos modos de vibração e o efeito da rigidez dos mancais, da operação de fresamento e do acionamento, é possível inferir que o primeiro modo de vibração não é sensível a pequenas variações de rigidez dos mancais, sendo mais influenciado por outras características do conjunto. Como o primeiro modo é caracterizado por um grande deslocamento relativo na região próxima ao acionamento, a primeira frequência natural é sensível à introdução de rigidez pela deformação do sistema de acionamento. Já o segundo modo de vibração, caracterizado principalmente pelo deslocamento relativo do nariz do eixo, é influenciado pela rigidez do mancal anterior e por características da zona de trabalho, isto é, pelo processo de usinagem propriamente dito.

A variação da rigidez dos mancais devido às “forças centrífugas” atuantes nos elementos rolantes, que reduziria a pré-carga, é pouco significativa em baixas rotações. Da mesma maneira, o efeito das forças do fresamento que implicariam uma sollicitação radial dos elementos rolantes é pouco significativo, uma vez que estas encontram-se em uma ordem de grandeza inferior à da pré-carga. Portanto, o efeito da variação da rigidez dos mancais pode ser desprezado no caso da máquina analisada.

O primeiro bloco de experimentos foi conduzido com o objetivo de comparar as respostas vibracionais dos ensaios de rotação livre e de fresamento, visando o levantamento dos aspectos dinâmicos mais relevantes. Os níveis de vibração medidos na operação de fresamento são bem mais altos que em rotação livre, consequência da alta energia envolvida no processo de usinagem.

Nos espectros de frequência referentes aos ensaios de rotação livre, embora seja possível identificar a excitação de frequências naturais, há predominância dos picos associados a frequência síncrona, indicando que a principal fonte de excitação é o desbalanceamento do conjunto. Quanto aos níveis vibracionais, verifica-se que tanto os valores médios quadráticos quanto as amplitudes das vibrações síncronas aumentam linearmente com a rotação.

A comparação das frequências naturais determinadas experimentalmente e calculadas considerando-se os parâmetros de rigidez definidos para rotação nula demonstra que o modelo é capaz de estimá-las com boa exatidão. Excetuando-se a segunda frequência natural, cujo erro é de 11,58 %, as demais frequências foram calculadas com erro inferior a 1,90%. O maior erro da segunda frequência natural pode estar relacionado ao valor de rigidez do mancal anterior considerado no modelo, calculado pela teoria de deformação de contato dos elementos rolantes. Possivelmente, haveria uma redução do erro associado à segunda frequência natural caso fosse considerado um valor de rigidez medido experimentalmente.

Devido à complexidade da operação de fresamento, verifica-se experimentalmente a excitação de uma faixa muito ampla de frequências. Nos espectros de frequência dos ensaios de fresamento há predominância dos picos associados às frequências naturais e não é possível identificar isoladamente o pico de vibração síncrona, o que por sua vez indica que a resposta síncrona ao desbalanceamento é insignificante quando comparada à operação de fresamento propriamente dita. Ao contrário dos ensaios de rotação livre, onde o sinal RMS varia linearmente com a rotação, verifica-se no ensaios de fresamento uma variação não linear. Isto pode ser explicado pelos esforços de usinagem que não tem um comportamento necessariamente linear: em uma determinada faixa de velocidades de corte (proporcional à rotação), pode ocorrer uma redução da dureza do material usinado devido a efeitos térmicos e como consequência tem-se uma redução dos esforços de usinagem.

Embora a principal fonte de excitação de vibrações seja os esforços de usinagem, não há pico referente à frequência de corte ( $2.\omega_{rot}$ ). A resposta vibracional durante a operação de fresamento é caracterizada pela excitação de frequências naturais. Os resultados experimentais indicam que durante a operação de fresamento estável, onde não ocorre

ressonância nem vibrações autoexcitadas, as amplitudes dos picos de vibração associadas às frequências naturais variam linearmente com a rotação.

Além das frequências naturais, verifica-se nos espectros de frequência dos ensaios de fresamento a excitação de outras frequências nas vizinhanças de valores centrais  $\omega_n$ , cujos espaçamentos correspondem alternadamente à frequência de rotação e à frequência de ação de cada inserto, duas vezes por rotação, sugerindo que a influência dos esforços de fresamento pode ser decomposta em uma parcela permanente e uma transiente: a parcela permanente corresponderia basicamente à ação de cada inserto, se repetindo duas vezes ao longo da rotação e portanto associada a  $2.\omega_{rot}$ ; a parcela transiente estaria associada à assimetria vibratória da ferramenta (ex.: batimento da ferramenta, desgaste desigual dos insertos, etc.), atuando uma vez por rotação e portanto associada a  $\omega_{rot}$ .

Ainda sobre os espectros de frequência dos ensaios de fresamento, verifica-se não só o espalhamento das frequências ao redor de um valor central  $\omega_n$  mas também um deslocamento deste. Comparando os valores de frequência natural determinados experimentalmente nos ensaios de fresamento e nos de rotação livre, verifica-se um aumento significativo de  $\omega_1$  (cerca de 25%) e uma ligeira variação das demais frequências naturais (cerca de 2,5%).

No cálculo das frequências naturais, apenas as características estacionárias do eixo e mancais são insuficientes para descrever o comportamento dinâmico da máquina em operação. O ajuste dos parâmetros de rigidez referentes à operação de fresamento e ao acionamento permitem quantificar de maneira semi-empírica estes efeitos dinâmicos. Além disto, considerando-se a introdução de rigidez ( $k_{fresamento} = 15 \text{ N}/\mu\text{m}$  e  $k_{acionamento} = 200 \text{ N}/\mu\text{m}$ ) verifica-se um aumento significativo da exatidão do modelo, que mostra-se capaz de calcular as quatro primeiras frequências naturais com erro inferior a 5%.

No caso de altas rotações, há influência do efeito giroscópico e da variação da rigidez dos mancais. Todavia, na faixa de rotações analisada no presente trabalho estes efeitos são relativamente pequenos quando comparados à introdução de rigidez associada à própria operação de fresamento e à deformação do sistema de acionamento.

O segundo bloco de experimentos foi conduzido com o objetivo de analisar a influência do comprimento livre e do sentido de corte nas vibrações induzidas na operação de fresamento. Devido a limitações da fresa utilizada, isto é, o comprimento livre  $L = 105 \text{ mm}$  implica uma esbelteza muito elevada e risco de quebra, foi necessário adotar uma largura de trabalho quatro vezes menor que a adotada no primeiro bloco de experimentos. Embora os demais parâmetros de usinagem adotados sejam os mesmos dos ensaios de fresamento do primeiro bloco, não é possível realizar uma comparação precisa dos níveis de vibração, uma

vez que os acelerômetros não foram fixados necessariamente no mesmo ponto e isto pode implicar variações da amplitude do sinal.

Os resultados do segundo bloco de experimentos indicam que, independente do comprimento livre da ferramenta e do sentido de corte, os níveis de vibração aumentam com a rotação. O aumento do comprimento livre da ferramenta, e portanto de sua flexibilidade, implica em maiores níveis vibracionais (as amplitudes associadas às principais frequências excitadas chega a ser cerca de nove vezes maior no caso da ferramenta mais longa e esbelta) e a utilização de um maior comprimento aumenta a sensibilidade do sistema a outros fatores, como sentido de corte e rotação. Embora no caso do menor comprimento livre a diferença entre os níveis de vibração nos sentidos concordante e discordante não seja significativa, no caso do maior comprimento livre há diferença pronunciada entre os níveis vibracionais dos dois sentidos, sendo maiores no corte discordante. É importante lembrar que adota-se por medida prática o sentido de corte concordante em operações de acabamento, minimizando a deflexão e as vibrações da ferramenta, além de reduzir a probabilidade de ocorrência de vibrações autoexcitadas.

Finalmente, nos espectros de frequência dos ensaios do segundo bloco de experimentos com comprimento livre da ferramenta  $L = 80$  mm há predominância da quarta frequência natural, enquanto nos ensaios de fresamento do primeiro bloco a segunda frequência caracteriza a resposta. Embora possa haver diferença entre os pontos de fixação dos acelerômetros nos dois blocos de experimentos, a distância entre eles é muito pequena. Apesar deste fator poder influenciar as amplitudes vibracionais, a relação entre as amplitudes associadas a cada frequência no mesmo espectro é pouco influenciada. Portanto, a predominância de determinadas frequências na resposta espectral pode ser atribuída, dentre outros fatores, à penetração de trabalho  $a_e$ .



## 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

### 6.1 Conclusões

A rotina numérica de elementos finitos de viga de Timoshenko implementada é capaz de calcular as frequências naturais do conjunto eixo-árvore com boa exatidão. Nos ensaios de rotação livre, a principal fonte de excitação é o desbalanceamento e os esforços são relativamente pequenos, de forma que é razoável considerar os parâmetros de rigidez definidos para rotação nula nos cálculos das frequências naturais e modos de vibração obtendo-se uma estimativa com exatidão satisfatória.

Nos ensaios de rotação livre predomina a resposta ao desbalanceamento, que confere ao espectro de frequências a predominância característica da vibração síncrona, sendo também possível identificar picos associados às frequências naturais. Já nos ensaios de fresamento, há predominância clara das frequências naturais, excitadas pelos esforços de usinagem inerentes à própria operação de fresamento. De uma forma geral, os picos de frequência predominantes e os níveis gerais de vibração variam de maneira aproximadamente linear com a rotação.

A operação de fresamento representa um fenômeno de alta complexidade e, portanto, apenas as características estacionárias do eixo e mancais são insuficientes para descrever o comportamento dinâmico da máquina em operação. Verifica-se experimentalmente uma variação das frequências naturais em relação aos ensaios de rotação livre, consequência dos esforços atuantes no conjunto e de efeitos dinâmicos. O ajuste dos parâmetros de rigidez referentes à operação de fresamento e ao acionamento permitem quantificar de maneira semi-empírica estes efeitos, sendo possível calcular as frequências naturais com erro inferior a 5%.

A análise da influência do comprimento livre da ferramenta nos níveis vibracionais indica que a adoção de um maior comprimento implica em maiores níveis vibracionais, assim como em uma maior sensibilidade do sistema a outros fatores, como rotação e sentido de corte.

Finalmente, a análise das respostas espectrais indica que a predominância de determinadas frequências pode estar relacionada, dentre outros fatores, à penetração de trabalho.

## 6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Para dar continuidade a atividades nesta linha de pesquisa, alguns temas são sugeridos:

- Análise numérica de vibrações forçadas do conjunto eixo-árvore, considerando-se como fonte de excitação esforços de usinagem medidos experimentalmente.
- Análise comparativa da influência dos efeitos dinâmicos (efeito giroscópico, variação da rigidez dos mancais, introdução de rigidez pela operação de fresamento, introdução de rigidez pela deformação do sistema de acionamento, etc.) em máquinas de alta velocidade.
- Estudo da influência dos parâmetros de usinagem  $a_p$  e  $a_e$  nas vibrações do conjunto eixo-árvore, investigando mais precisamente a influência do aumento gradual destes dois parâmetros na transição usinagem estável-instável (vibrações autoexcitadas).
- Estudo experimental das vibrações do conjunto eixo-árvore na operação de fresamento estável em diferentes posições da máquina.
- Estudo da influência das massas/inércias da ferramenta e do sistema de fixação, utilizando-se para tal ferramentas com maior inércia rotatória.

## 7 BIBLIOGRAFIA

- AGUIAR, M. M., DINIZ, A. E., PEDERIVA, R., *Correlating surface roughness, tool wear and tool vibration in the milling process of hardened steel using long slender tools*. International Journal of Machine Tools and Manufacture, v. 68, p. 1-10, 2013.
- ALBUQUERQUE, P. S., **Influência da deflexão da ferramenta sobre a qualidade de peças em aço ABNT D2 durante o fresamento**. 2013, 73 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.
- ALCANTARA, D., FELIPPE FILHO, F., **Dados Centro de Usinagem Romi 560D**. [E-mail] recebido por <[brmv@ufmg.br](mailto:brmv@ufmg.br)>, Santa Barbara D'Oeste (SP), Agosto de 2016.
- ALTAN, T., LILLY, B., YEN, Y. C., *Manufacturing of Dies and Molds*. CIRP Annals – Manufacturing Technology, v.50, n.2, p. 404-422, 2001.
- ALTINTAS, Y., BUDAK, E., *Analytical prediction of stability lobes in milling*. CIRP Annals – Manufacturing Technology, v. 44 (1), p. 357-362, 1995.
- ALTINTAS, Y., (2001). *Manufacturing automation – Metal cutting mechanics, machine tool vibrations and cnc design*. Nova Iorque, Ed. Cambridge University Press, 2006.
- BUDAK, E., *An Analytical Design Method for Milling Cutters With Nonconstant Pitch to Increase Stability, Part 1: Theory*. ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering, v. 125, p.35-38, 2003(a).
- BUDAK, E., *An Analytical Design Method for Milling Cutters With Nonconstant Pitch to Increase Stability, Part 2: Application*. ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering, v. 125, p.29-34, 2003(b).
- BUZDUGAN, G., MIHAILESCU, E., RADES, M., *Vibration measurement*. Dordrecht, Ed. Springer Science and Business Media, 1986.
- DAVIS, H. E., TROXELL, G. E., HAUCK, G. F. W. *The Testing of Engineering Materials*. Nova Iorque, McGraw Hill, 1982.
- DEONÍSIO, C. C. C., **Estudo do Fresamento do aço D2 endurecido em altas velocidades de corte**. 2004, 107 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

- DÉPINCÉ, P., HASCOËT, J. Y., *Active integration of tool deflection effects in end milling. Part 2. Compensation of tool deflection.* International Journal of Machine Tools and Manufacture, v. 46, p. 945-956, 2006.
- DOMBÓVARI, Z., IGLESIAS, A., ZATARAIN, M., INSPERGER, T., *Prediction of multiple dominant chatter frequencies in milling processes.* International Journal of Machine Tools and Manufacture, v. 51, p. 457-464, 2011.
- DUGAS, A., LEE, J. J., HASCOGT, J. Y., *An Enhanced Machining Simulation with Tool Deflection Error Analysis.* Journal of Manufacturing Systems, v. 21, n. 6, p. 451-463, 2002.
- ERZURUMLU, T., OKTEM, H. *Comparison of response surface model with neural network in determining the surface quality of moulded parts.* Materials and Design, v. 28, p. 459-465, 2007.
- GAGNOL, V., BOUZGARROU, C. B., RAY, P., BARRA, C., *Stability-based spindle design optimization.* ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering, v. 129, p. 407-415, 2007.
- GAGNOL, V., LE, T. P., RAY, P., *Modal Identification of Spindle-tool Unit in High-speed Machining.* Mechanical Systems and Signal Processing, v. 25 p. 2388-2398, 2011.
- GRIGOREV, S. N., GRIBKOV, A. A., ZAKHARCHENKO, D. V., *Global trends in machine-tool design.* Russian Engineering Research, v.33, no. 8, p.468-470, 2013.
- HAAS, R., LÖCKERMANN, D., *Werkzeugmaschinen – Vorlesung WS 09/10.* Material didático adotado no curso de engenharia mecânica da Hochschule Karlsruhe – Technik und Wirtschaft, Karlsruhe, 2009.
- HABIBI, M., AREZOO, B., NOJEDEH, M. V., *Tool Deflection and Geometrical Error Compensation by Tool Path Modification.* International Journal of Machine Tools and Manufacture. v. 51 p. 439-449, 2001.
- HARRIS, T. A., KOTZALAS, M. N., *Essential concepts of bearing technology.* Boca Raton, Ed. CRC Press, 2006.
- HEISEL, U., MILBERG, J., *Vibrations and surface generation in slab milling.* Annals of the CIRP, v. 43 (1), p.1442-1448, 1994.
- HOTA, M. J, VAKHARIA, D. P., *A review of rotating machinery critical speeds and modes of vibrations.* International Review of Applied Engineering Research, v.4(3), p.241-250, 2014.

- IKUA, B. W., TANAKA, H., OBATA, F., SAKAMOTO, S., *Prediction of cutting forces and machining error in ball end milling of curved surfaces – theoretical analysis*. Precision Engineering Journal of the International Societies for Precision Engineering and Nanotechnology, v. 25, p. 266-273, 2001.
- ISMAIL, F., ELBESTAWI, M. A., DU, R., URBASIK, K., *Generation of milled surfaces including tool dynamics and wear*. Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry, v. 115, p. 245-252, 1993.
- JENSEN, S. A., SHIN, Y. C., *Stability analysis in face milling operations. Part 1: experimental validation and influencing factors*. Journal of Manufacturing Science and Engineering – Transactions of the ASME, v. 121 (4), p.600-606, 1999.
- JIANG, H., LONG., X., MENG, G., *Study of the correlation between surface generation and cutting vibrations in peripheral milling*. Journal of Materials Processing Technology, v. 208, p. 229-238, 2008.
- KECELJ, B., KOPAC, J., KAMPUS, Z., KUZMAN, K., *Speciality of HSC in manufacturing of forging dies*. Journal of Materials Processing Technology, v. 20, p. 536-542, 2004.
- KIM, G. M., KIM, B. H., CHU, C. N., *Estimation of cutter deflection and form error in ball-end milling processes*. International Journal of Machine Tools and Manufacture, v. 43, p.917-924, 2003.
- KNOBEL, P. P., *Feinstfräsen – Fräsen von Freiformflächen mit Schleifqualität*. 2000, 104 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Zúrique, 2004.
- KO, J. H., YUN, W. S., CHO, D. W., EHMANN, K. F., *Development of a virtual machining system, part 1: approximation of the size effect for cutting force prediction*. International Journal of Machine Tools and Manufacture, v. 42, p. 1595-1605, 2002.
- KOENIGSBERG, F., TLUSTY, J., *Machine Tool Structures*. Nova Iorque, Pergamon Press, 1970.
- KONO, D., LORENZER, T., WEIKERT, S., WEGENER, K., *Evaluation of modelling approaches for machine tool design*. Precision Engineering, v. 34, p. 399-407, 2010.

KRYSINSKI, T., MALBURET, F., *Mechanical vibrations: active and passive control*. Londres, Wiley-ISTE, 2010.

KTH, *Energiteknik*. Departamento de Energia da Suécia. Disponível em: <<http://www.kth.se/itm/inst/energiteknik>>. Acessado em: 04/11/2015.

LIU, C., WANG, G., DARGUSCH, M. S., *Modelling, simulation and experimental investigation of cutting forces during helical milling operations*. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, v. 63 (9) p. 839-850, 2012.

LOGAN, D. L., *A First Course in the Finite Element Method*. Toronto, Ed. Thomson. 2007.

LÓPEZ DE LACALLE, L. N., LAMIKIZ, A., SALGADO, M. A., HERRANZ, S., RIVERO, A., *Process planning for reliable high-speed machining of moulds*. International Journal of Production Research, v. 40 (12), p. 2789-2809, 2010.

MACHADO, A. R.; ABRÃO, A. M., COELHO, R. T., DA SILVA, M. B., *Teoria da usinagem dos metais*. São Paulo, Ed. Edgard Blücher, 2011.

MAGNOLI, M. V., *Cálculo das velocidades angulares críticas da linha de eixo de turbinas hidráulicas com ênfase no comportamento estrutural dinâmico do gerador*. 2005, 191 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

MONTGOMERY, D., ALTINTAS, Y, *Mechanism of cutting force and surface generation in dynamic milling*. Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry, v. 113, p. 160-168, 1991.

NELSON, H. D., *A Finite Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory*. Engineering Research Center Report ERC-R-77023, Arizona State University. 1977.

NSK, *Super precision bearings*. Disponível em: <<http://www.nsk.com.br/upload/file/e1254f.pdf>>, Acessado em: 02/07/2015.

Przemieniecki, J.S., *Theory of Matrix Structural Analysis*. Nova Iorque, Dover Publications. 1968.

OKTEM, H., ERZURUMLU, T., KURTARAN, H., *Application of response surface methodology in the optimization of cutting conditions for surface roughness*. Journal of Materials Processing Technology, v. 170, p. 11-16, 2005.

OMAR, E. E. L, WARDANYC, T. E., NG, E., ELBESTAWIA, M. A., *An improved cutting force and surface topography prediction model in end milling*. International Journal of Machine Tools and Manufacture, v. 47, p. 1263-1275, 2007.

PEREIRA, J. C., **Introdução à dinâmica de rotores**. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

RANTATALO, M., *Non-contact measurements and modeling of milling machine tool vibrations*. 2006, 110 f. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Tecnológica de Luleå, Luleå 2006.

RANTATALO, J. M., AIDANPA, J., GÖRANSSON, B., NORMAN, P., *Milling Machine Spindle Analysis Using FEM and Non-contact Spindle Excitation and Response Measurement*. International Journal of Machine Tools and Manufacture, v. 47, p.1034-1045, 2007.

RAO. S. S., *Mechanical vibrations*. 4 edição. Nova Iorque. Ed. Pearson. 2004.

RIBEIRO, J. L. S., **Fresamento do aço vhsuper nos estados recozido e temperado com metal duro e cermet**. 2007, 106 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.

RIVIN, E. I., *Machine-tool vibrations*. In: HARRIS, C. M., PIERSOL, A.G., *Harris' Shock and Vibration Handbook*, Nova Iorque, McGraw-Hill, 5 ed., p. 40.1-40.22, 2002.

SALGADO, M. A., LÓPEZ DE LACALLE, L. N., LAMIKIZ, A., MUÑOA, J., SÁNCHEZ, J. A., *Evaluation of the stiffness chain on the deflection of end-mills under cutting forces*. International Journal of Machine Tools and Manufacture, v. 45, p. 727-739, 2005.

SANDVIK COROMANT, *CoroChuck 930 is balanced according to DIN 69888*. Disponível em: <http://www.sandvik.coromant.com/en-us/knowledge/tooling-systems/Machine-and-tooling-systems-considerations/balancing-and-rpm>>. Acesso em: 13/08/2015. 2015(a).

SANDVIK COROMANT, *Tips film: Minimizing tool run-out in rotating applications*. Disponível em: [https://www.youtube.com/watch?v=VLW\\_P\\_rFUJo](https://www.youtube.com/watch?v=VLW_P_rFUJo)>. Acesso em: 28/11/2015. 2015(b).

SANDVIK COROMANT, *Vibration: how to reduce vibrations*. Disponível em: [http://www.sandvik.coromant.com/en-gb/knowledge/milling/getting\\_started/general\\_guidelines](http://www.sandvik.coromant.com/en-gb/knowledge/milling/getting_started/general_guidelines)>. Acesso:25/12/2015. 2015(c).

SARTORI, S., ZHANG, G. X., *Geometric error measurement and compensation of machines*. CIRP Annals – Manufacturing Technology, vol. 44(2), p. 599-609, 1996.

SCHMITZ, T. L., *Predicting high-speed machining dynamics by substructure analysis*. CIRP Annals – Manufacturing Technology, v. 49 (1), p. 303-308, 2000.

SHUYUN, J., SHUFEI, Z. *A Modeling Approach for Analysis and Improvement of Spindle-drawbar-bearing Assembly Dynamics*. International Journal of Machine tool and Manufacture, v. 50 (1), p. 131–142, 2010.

SKF, *Super-precision bearings*. Disponível em: <[http://www.skf.com/binary/57-129877/Super-precision-bearings---13383\\_1-EN.pdf](http://www.skf.com/binary/57-129877/Super-precision-bearings---13383_1-EN.pdf)>. Acesso em: 12/08/2015.

SLOCUM, A. H., MARSH, E. R., SMITH, D. H., *A new damper design for machine tool structures: the replicated internal viscous damper*. Precision Engineering, v. 16, p. 174-183, 1994.

SMITH, S., TLUSTY, J., *An overview of modeling and simulation of the milling process*. Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry, v. 13, p. 169-175, 1991.

SONG, Q., AI, X., ZHAO, J., *Design for variable pitch end mills with high milling stability*. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, v. 5 (9), p. 891-903, 2011.

SOUZA, S. A. (1989). *Composição química dos aços*. São Paulo, Ed. Edgard Blucher, 2009.

STEPHENSON, D. A., AGAPIOU, J. S., *Metal cutting theory and practice*. Nova Iorque, Ed. Marcel Dekker Inc., 1997.

STOETERAU, R. L., *Introdução ao projeto de máquina-ferramentas modernas*. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.

SUH, S. H., CHO, J. H., HASCOET, J. Y., *Incorporation of tool deflection in tool path computation: simulation and analysis*. Journal of Manufacturing Systems, v. 15(3), p. 190-199, 1996.

SURMANN, T., ENK, D., *Simulation of milling tool vibration along changing engagement conditions*. International Journal of Machine Tools and Manufacture, v. 47, p. 1442-1448, 2007.

TIMKEN, *Super Precision Bearings for Machine Tool Applications*. Disponível em: <<http://www.timken.com/pt-BR/products/Documents/Super-Precision-Bearings-for-Machine-Tool-Applications-Catalog.pdf>>, Acessado em: 23/07/2015.



- THOMPSON, D. C., *The design of an ultra-precision CNC measuring machine*. Annals of the CIRP, v. 38 (1), p. 501-504, 1989.
- TLUSTY, J., *Machine Dynamics.*, In: KING, R. I., *Handbook of high-speed machining technology*. Nova Iorque, Ed. Chapman and Hall, 1985, p.48-153.
- VANCE, J. M., *Rotordynamics of turbomachinery*. Nova Iorque, Ed. John Wiley and Sons, 1988.
- VARGAS, B. R. M., **Desvios dimensionais e geométricos induzidos no fresamento do aço ABNT D2**. 2012, 72 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.
- WECK, M., BISPINK, T., PYRA, M., *Analyzing the dynamic performance of high precision machines*. Tutorial, Fraunhofer-Institut für Produktionstechnologie, Aachen. 1991.
- WECK, M., *Werkzeugmaschinen*. Aachen, Ed. Springer-Verlag, 2006.
- XU, A. P., QU, Y. X., ZHANG, D. W., HUANG, T., *Simulation and experimental investigation of the end milling process considering the cutter flexibility*. International Journal of Machine Tools and Manufacture, v. 43, p. 283-292, 2003.
- YOSHIMURA, M., MONTUSIEWICZ, J., OSYCZKA, A., ZAMORSKI, J., *Machine tool design*. In: ESCHENAUER, H., KOSKI, J., OSYCZKA, A., *Multicriteria design optimization: Procedures and application*. Ed. Springer Berlin Heidelberg, 1990, p. 261-302.
- ZAGHBANI, I., SONGMENE, V., *Estimation of Machine-tool Dynamic Parameters During Machining Operation Through Operational Modal Analysis*. International Journal of Machine Tools and Manufacture, v. 49, p. 947-957, 2009.

## APÊNDICE A – CÓDIGO-FONTE

O código-fonte da rotina de elementos finitos de viga de Timoshenko implementada no *software* GNU Octave 4.0.0 é dividido em cinco partes:

- “1\_Auto.m” - Programa principal, que calcula os autovalores e autovetores;
- “2\_Eixo.m” - Subrotina que calcula as propriedades de inércia e de massa do eixo;
- “3\_Matrizes.m” - Subrotina que monta as matrizes de rigidez, de massa translacional, massa rotatória, efeito giroscópico e incremento da rigidez devido ao carregamento axial;
- “4\_Plot.m” - Subrotina que plota as propriedades de inércia e de massa do eixo;
- “5\_Mancais.m” - Subrotina que insere os efeitos de rigidez nas matrizes globais.

**1\_Auto.m**

%PROGRAMA PRINCIPAL "1\_Auto.m"

%CALCULA OS AUTOVALORES E AUTOVETORES

% Ultima atualizacao: 05/01/2016

close all

clear all

clc

tic

clear;

format compact;

% DADOS GERAIS

rotacao=0; %rotacao do conjunto eixo arvore[rpm]

omega=rotacao\*(1/60)\*(2\*pi); %[rad/s]

n=59; %numero de elementos

p=4\*n+4; %cria os graus-de-liberdade: 2 trans e 2 rot por no

ro=7850; %peso especifico [kg/m<sup>2</sup>]

g=9.81; %gravidade [m/s<sup>2</sup>]

E=200E9; %modulo de elasticidade [Pa]

% PARAMETROS DE RIGIDEZ

%Mancal Anterior - Mancal de rolamento de esferas de contato angular

%NSK 7013-A5-DBD; angulo de contato 25°; dp=84,2 [mm]; de= [mm]; 9,1 19 esferas

k\_7013=540e6; %rigidez do mancal anterior [N/m]

c\_7013=0.17/2; %amortec. do mancal anterior [N.s/m]

no\_7013=11; %posicao do mancal anterior

%Mancal Posterior - Mancal de rolamento de rolos cilíndricos

%NSK NN3011; dp=72,47 [mm]; dr=8,533[mm]; 16 rolos

k\_NN3011=1100e6; %rigidez do mancal posterior [N/m]

c\_NN3011=0.17/2; %amortec. do mancal posterior [N.s/m]

no\_NN3011=37; %posicao do mancal inferior

%Rigidez introduzida pela operacao de fresamento

k\_Fresamento=20e6; %rigidez do fresamento [N/m]  
 c\_Fresamento=0.15; %amortecimento do fresamento [N.s/m]  
 no\_Fresamento=1; %posicao da ferramenta

%Rigidez introduzida pelo acionamento

k\_Acionamento=200e6; %rigidez do acionamento [N/m]  
 c\_Acionamento=0.05; %amortecimento do acionamento [N.s/m]  
 no\_Acionamento=44; %posicao do mancal superior

%DISCRETIZACAO DO EIXO

l=8/1000\*n; %[m]  
 L=l/n; %Divide o comp. barra por n elementos

%Propriedades das secoes (Ver planilha "Discretizacaoeixo")

% raios externos - em [m]

re(1)=37.00/1000;  
 re(2)=44.00/1000;  
 re(3)=36.00/1000;  
 re(4)=32.70/1000;  
 re(5)=32.70/1000;  
 re(6)=32.70/1000;  
 re(7)=32.70/1000;  
 re(8)=40.00/1000;  
 re(9)=40.00/1000;  
 re(10)=32.00/1000;  
 re(11)=32.00/1000;  
 re(12)=29.00/1000;  
 re(13)=27.70/1000;  
 re(14)=33.56/1000;  
 %re(15)=55.62/1000;  
 re(16)=27.70/1000;  
 re(15)=(re(14)+re(16))/2;  
 re(17)=26.75/1000;

re(18)=26.75/1000;

re(19)=17.00/1000;

re(20)=8.10/1000;

%raios internos - em [m]

ri(1)=21.42/1000;

ri(2)=19.38/1000;

ri(3)=16.97/1000;

ri(4)=15.01/1000;

ri(5)=14.00/1000;

ri(6)=16.00/1000;

ri(7)=7.90/1000;

ri(8)=9.20/1000;

ri(9)=9.20/1000;

ri(10)=17.00/1000;

ri(11)=17.00/1000;

ri(12)=17.00/1000;

ri(13)=17.00/1000;

ri(14)=17.00/1000;

ri(15)=17.00/1000;

ri(16)=17.00/1000;

ri(17)=3.00/1000;

ri(18)=3.00/1000;

ri(19)=3.00/1000;

ri(20)=0.00/1000;

%raios externos secao vazada - em [m]

%resv(1)=0;

%resv(2)=0;

%resv(3)=0;

%resv(4)=0;

%resv(5)=0;

%resv(6)=0;

%resv(7)=0;

```
%resv(8)=3.00/1000;  
%resv(9)=3.00/1000;  
%resv(10)=3.00/1000;  
%resv(11)=3.00/1000;  
%resv(12)=3.00/1000;  
%resv(13)=3.00/1000;  
%resv(14)=3.00/1000;  
%resv(15)=3.00/1000;  
%resv(16)=3.00/1000;  
%resv(17)=0;  
%resv(18)=0;  
%resv(19)=0;  
%resv(20)=0;  
%raios internos Secao vazada - em [m]  
%risv(1)=0;  
%risv(2)=0;  
%risv(3)=0;  
%risv(4)=0;  
%risv(5)=0;  
%risv(6)=0;  
%risv(7)=0;  
%risv(8)=8.10/1000;  
%risv(9)=8.10/1000;  
%risv(10)=8.10/1000;  
%risv(11)=8.10/1000;  
%risv(12)=8.10/1000;  
%risv(13)=8.10/1000;  
%risv(14)=8.10/1000;  
%risv(15)=8.10/1000;  
%risv(16)=8.10/1000;  
%risv(17)=0;  
%risv(18)=0;  
%risv(19)=0;  
%risv(20)=0;
```

%Raios internos e externos dos componentes externos

%rece(1:14)=0;

%rece(16:20)=0;

%rice(1:14)=0;

%rice(16:20)=0;

%rece(15)=55.62/1000;

%rice(15)=re(15);

resv(1:20)=0;

risv(1:20)=0;

rice(1:20)=0;

rece(1:20)=0;

run("2\_Eixo"); % Rotina que calcula propriedades do eixo

%EQUACAO DO MOVIMENTO

%  $[M]\{q''\} + [C]\{q'\} + [K]\{q\} = [R]$

% onde  $[M]=[M]+[N]$ ;  $[C]=[C1]-\omega*[G]$ ;  $[K]=[K]+[A]+[K\_mancais]$

run("3\_Matrizes"); %Rotina que calcula matrizes de Timoshenko

R=zeros(p,1); %preenche com zeros o vetor [R] da forca externa

C=zeros(p,p); %preenche com zeros a matriz de amortecimento

C1=zeros(p,p); %preenche com zeros a matriz de amortecimento

run("4\_Plot"); %Plota as propriedades do eixo

run("5\_Mancais") %Matrizes dos mancais

%COMPLEMENTO DA EQUACAO DO MOVIMENTO

%  $[M]\{q''\} + [C]\{q'\} + [K]\{q\} = [R]$

% onde  $[M]=[M]+[N]$ ;  $[C]=[C1]-\omega*[G]$ ;  $[K]=[K]+[A]+[K\_mancais]$

K=K\_eixo+K\_mancais;

[C]=[C1]-omega\*[G]; % Matriz de amortecimento [C]=[C1]-omega\*[G]

% onde [G]=matriz girosc e C1 e a matriz de amortecimento

% com os coeficientes dos mancais nas devidas diagonais (EF)

%Estimativa SDOF

massa	%mostra a massa [kg] calculada no programa
k_7013	%rigidez do mancal anterior
k_NN3011	%rigidez do mancal posterior
k_eq = 1/(1/k_7013+1/k_NN3011)	%rigidez equivalente dos mancais combinados
FN_SDOF=sqrt(k_eq/massa)/(2*pi)	%Freq. não amortecida calculada com um g.d.L.

%FORMULACAO POR VARIAVEIS DE ESTADO

% Transforma a formulacao original:  $[M]\{q''\} + [C]\{q'\} + [K]\{q\} = [R]$

% em  $[M]\{q''\} + [C]\{q'\} + [K]\{q\} = [0]$

% e no problema de var. de estado:  $[MM]\{q'\} + [KK]\{q\} = [0]$

%Przemieniecki 1968 - ver TG Tulio Brasil

MM=zeros(2\*p,2\*p);

KM=-inv(K)\*M;

KG=omega\*inv(K)\*G;

KI=eye(2\*p);

for contlinha=1:1:p

  for contcoluna=1:1:p

    MM(contlinha,contcoluna)=0;

    MM(contlinha+p,contcoluna)=KM(contlinha,contcoluna);

    MM(contlinha+p,contcoluna+p)=KG(contlinha,contcoluna);

    MM(contlinha,contcoluna+p)=KI(contlinha,contcoluna);

  endfor

endfor

for contlinha=1:1:p

  for contcoluna=p+1:1:2\*p

    if contlinha==contcoluna-p

      MM(contlinha,contcoluna)=1;

    else

      MM(contlinha,contcoluna)=0;

    endif

  endfor

endfor



```

%AUTOVALORES E AUTOVETORES
[AVetor,AVvalor]=eig(MM);
%A matriz AValor é uma matriz diagonal
%Os elementos da diag principal são os autovalores

for contAV=1:1:2*p
    AV(contAV)=AValor(contAV,contAV);
endfor
REAL=real(AV);
IM=imag(AV);
for contFN=1:1:2*p
    FN(contFN)=abs(AV(contFN));
endfor
for contINV=1:1:2*p
    FN(contINV)=1/FN(contINV);
endfor

FD4=zeros(8,1);
for contFD5=1:1:8
    FD4(contFD5)=FN(2*contFD5-1);
endfor
% Quatro primeiras frequências naturais [Hz]
FD4=FD4/(2*pi)

%MODOS
for contModo=1:1:(n+1)
    Modo1r(contModo)=real(AVetor(4*contModo-3,1));
    Modo1p(contModo)=real(AVetor(4*contModo-3,3));
    Modo2r(contModo)=real(AVetor(4*contModo-3,9));
    Modo2p(contModo)=real(AVetor(4*contModo-3,11));
    Modo3r(contModo)=real(AVetor(4*contModo-3,17));
    Modo3p(contModo)=real(AVetor(4*contModo-3,19));
    Modo4r(contModo)=real(AVetor(4*contModo-3,25));
    Modo4p(contModo)=real(AVetor(4*contModo-3,27));

```

```

    CordModo(contModo)=contModo;
    referencia(contModo)=0;
endfor

%Normalizacao com base na deflexao da extremidade (nariz do eixo)
Modo1r=Modo1r/Modo1r(1);
Modo2r=Modo2r/Modo2r(1);
Modo3r=Modo3r/Modo3r(1);
Modo4r=Modo4r/Modo4r(1);
Drelativo(1,1)=Modo1r(1);
Drelativo(1,2)=Modo1r(11);
Drelativo(1,3)=Modo1r(37);
Drelativo(1,4)=max(abs(Modo1r(:)));
Drelativo(2,1)=Modo2r(1);
Drelativo(2,2)=Modo2r(11);
Drelativo(2,3)=Modo2r(37);
Drelativo(2,4)=max(abs(Modo2r(:)));
Drelativo(3,1)=Modo3r(1);
Drelativo(3,2)=Modo3r(11);
Drelativo(3,3)=Modo3r(37);
Drelativo(3,4)=max(abs(Modo3r(:)));
Drelativo(4,1)=Modo4r(1);
Drelativo(4,2)=Modo4r(11);
Drelativo(4,3)=Modo4r(37);
Drelativo(4,4)=max(abs(Modo4r(:)));

figure
plot(CordModo,Modo1r)
hold on
plot(CordModo,referencia,' - ')
hold on
plot(CordModo,-Modo1r,' . ')
axis([0 60 -30 30])
print('Modo1.jpg')

```

```
figure
plot(CordModo,Modo2r)
hold on
plot(CordModo,referencia,' - ')
hold on
plot(CordModo,-Modo2r,' . ')
axis([0 60 -7.5 7.5])
print('Modo2.jpg')
```

```
figure
plot(CordModo,Modo3r)
hold on
plot(CordModo,referencia,' - ')
hold on
plot(CordModo,-Modo3r,' . ')
axis([0 60 -10 10])
print('Modo3.jpg')
```

```
figure
plot(CordModo,Modo4r)
hold on
plot(CordModo,referencia,' - ')
hold on
plot(CordModo,-Modo4r,' . ')
axis([0 60 -10 10])
print('Modo4.jpg')
```

```
toc
```

**2\_Eixo.m**

```
%Subrotina "2_Eixo.m"
```

```
%Propriedades das secoes
```

```
%Componentes acoplados contribuem apenas com massa, não com resistencia
```

```
for j=1:1:20;
```

```
Isecao(j)=pi*(re(j)^4-ri(j)^4)/4; %-pi*(resv(j)^4-risv(j)^4)/4
```

```
Asecao(j)=pi*(re(j)^2-ri(j)^2)+pi*((resv(j)^4-risv(j)^4)+(rece(j)^4-ricv(j)^4));
```

```
end
```

```
%Secao1          Elemento 1
```

```
I(1)=Isecao(1);
```

```
%Secao2          Elementos 2-4
```

```
I(2)=Isecao(2);
```

```
I(3)=Isecao(2);
```

```
I(4)=Isecao(2);
```

```
%Secao3          Elementos 5-6
```

```
I(5)=Isecao(3);
```

```
I(6)=Isecao(3);
```

```
%Secao4          Elementos 7-8
```

```
I(7)=Isecao(4);
```

```
I(8)=Isecao(4);
```

```
%Secao5          Elementos 9-10
```

```
I(9)=Isecao(5);
```

```
I(10)=Isecao(5);
```

```
%Secao6          Elemento 1
```

```
I(11)=Isecao(6);
```

```
%Secao7          Elementos 12-15
```

```
I(12)=Isecao(7);
```

```
I(13)=Isecao(7);
```

```
I(14)=Isecao(7);
```

```
I(15)=Isecao(7);
```

```
%Secao8          Elemento 16
```

```
I(16)=Isecao(8);
```

%Secao9                    Elementos 17-20  
I(17)=Isecao(9);  
I(18)=Isecao(9);  
I(19)=Isecao(9);  
I(20)=Isecao(9);  
%Secao10                    Elementos 21-22  
I(21)=Isecao(10);  
I(22)=Isecao(10);  
%Secao11                    Elementos 23-33  
I(23)=Isecao(11);  
I(24)=Isecao(11);  
I(25)=Isecao(11);  
I(26)=Isecao(11);  
I(27)=Isecao(11);  
I(28)=Isecao(11);  
I(29)=Isecao(11);  
I(30)=Isecao(11);  
I(31)=Isecao(11);  
I(32)=Isecao(11);  
I(33)=Isecao(11);  
%Secao12                    Elementos 34-36  
I(34)=Isecao(12);  
I(35)=Isecao(12);  
I(36)=Isecao(12);  
%Secao13                    Elementos 37-38  
I(37)=Isecao(13);  
I(38)=Isecao(13);  
%Secao14                    Elementos 39-40  
I(39)=Isecao(14);  
I(40)=Isecao(14);  
%Secao15                    Elementos 41-46  
I(41)=Isecao(15);  
I(42)=Isecao(15);  
I(43)=Isecao(15);

I(44)=Isecao(15);

I(45)=Isecao(15);

I(46)=Isecao(15);

%Secao16 Elementos 47-49

I(47)=Isecao(16);

I(48)=Isecao(16);

I(49)=Isecao(16);

%Secao17 Elementos 50-52

I(50)=Isecao(17);

I(51)=Isecao(17);

I(52)=Isecao(17);

%Secao18 Elementos 53-54

I(53)=Isecao(18);

I(54)=Isecao(18);

%Secao19 Elementos 55-57

I(55)=Isecao(19);

I(56)=Isecao(19);

I(57)=Isecao(19);

%Secao20 Elementos 58-59

I(58)=Isecao(20);

I(59)=Isecao(20);

%Secao1 Elemento 1

Ae(1)=Asecao(1);

%Secao2 Elementos 2-4

Ae(2)=Asecao(2);

Ae(3)=Asecao(2);

Ae(4)=Asecao(2);

%Secao3 Elementos 5-6

Ae(5)=Asecao(3);

Ae(6)=Asecao(3);

%Secao4 Elementos 7-8

Ae(7)=Asecao(4);

Ae(8)=Asecao(4);

%Secao5            Elementos 9-10

Ae(9)=Asecas(5);

Ae(10)=Asecas(5);

%Secao6        Elemento 1

Ae(11)=Asecas(6);

%Secao7        Elementos 12-15

Ae(12)=Asecas(7);

Ae(13)=Asecas(7);

Ae(14)=Asecas(7);

Ae(15)=Asecas(7);

%Secao8        Elemento 16

Ae(16)=Asecas(8);

%Secao9            Elementos 17-20

Ae(17)=Asecas(9);

Ae(18)=Asecas(9);

Ae(19)=Asecas(9);

Ae(20)=Asecas(9);

%Secao10        Elementos 21-22

Ae(21)=Asecas(10);

Ae(22)=Asecas(10);

%Secao11        Elementos 23-33

Ae(23)=Asecas(11);

Ae(24)=Asecas(11);

Ae(25)=Asecas(11);

Ae(26)=Asecas(11);

Ae(27)=Asecas(11);

Ae(28)=Asecas(11);

Ae(29)=Asecas(11);

Ae(30)=Asecas(11);

Ae(31)=Asecas(11);

Ae(32)=Asecas(11);

Ae(33)=Asecas(11);

%Secao12        Elementos 34-36

Ae(34)=Asecas(12);

Ae(35)=Asecao(12);

Ae(36)=Asecao(12);

%Secao13            Elementos 37-38

Ae(37)=Asecao(13);

Ae(38)=Asecao(13);

%Secao14            Elementos 39-40

Ae(39)=Asecao(14);

Ae(40)=Asecao(14);

%Secao15            Elementos 41-46

Ae(41)=Asecao(15);

Ae(42)=Asecao(15);

Ae(43)=Asecao(15);

Ae(44)=Asecao(15);

Ae(45)=Asecao(15);

Ae(46)=Asecao(15);

%Secao16    Elementos 47-49

Ae(47)=Asecao(16);

Ae(48)=Asecao(16);

Ae(49)=Asecao(16);

%Secao17    Elementos 50-52

Ae(50)=Asecao(17);

Ae(51)=Asecao(17);

Ae(52)=Asecao(17);

%Secao18    Elementos 53-54

Ae(53)=Asecao(18);

Ae(54)=Asecao(18);

%Secao19    Elementos 55-57

Ae(55)=Asecao(19);

Ae(56)=Asecao(19);

Ae(57)=Asecao(19);

%Secao20    Elementos 58-59

Ae(58)=Asecao(20);

Ae(59)=Asecao(20);



```
massa=0;
%Massa do conjunto
for i=1:1:n
me(i)=ro*Ae(i)*L;
massa=massa+me(i);
endfor
massa;

%Carga axial (peso próprio do conjunto)
P=massa*g;

%definindo a massa específica de cada elemento
me=me/L;
```

### 3\_Matrizes.m

%Subrotina "3\_Matrizes.m"

K=zeros(p,p);                    %matriz rigidez de tamanho igual ao numero de elementos  
M=zeros(p,p);                    %matriz massa translacional  
N=zeros(p,p);                    %matriz massa rotatoria  
G=zeros(p,p);                    %matriz giroscopia  
A=zeros(p,p);                    %matriz de incremento da rigidez devido ao carregamento axial

for i\_matriz=1:4:(p-5);

  elemento=0.75+0.25\*i\_matriz;

  k1(elemento)=12\*(E\*I(elemento)/L^3);

  k2(elemento)=-6\*L\*(E\*I(elemento)/L^3);

  k3(elemento)=4\*(L^2)\*(E\*I(elemento)/L^3);

  k4(elemento)=6\*L\*(E\*I(elemento)/L^3);

  k5(elemento)=-12\*(E\*I(elemento)/L^3);

  k6(elemento)=2\*(L^2)\*(E\*I(elemento)/L^3);

  m1(elemento)=156\*(me(elemento)\*L)/420;

  m2(elemento)=-22\*L\*(me(elemento)\*L)/420;

  m3(elemento)=4\*(L^2)\*(me(elemento)\*L)/420;

  m4(elemento)=54\*(me(elemento)\*L)/420;

  m5(elemento)=13\*L\*(me(elemento)\*L)/420;

  m6(elemento)=-3\*L^2\*(me(elemento)\*L)/420;

  m7(elemento)=22\*L\*(me(elemento)\*L)/420;

  m8(elemento)=-13\*L\*(me(elemento)\*L)/420;

  m9(elemento)=-12\*L\*(me(elemento)\*L)/420; %Não foi definida no programa do Wederlei;

  n1(elemento)=36\*((me(elemento)\*sqrt(4\*I(elemento)/pi))/(120\*L));

  n2(elemento)=-3\*L\*((me(elemento)\*sqrt(4\*I(elemento)/pi))/(120\*L));

  n3(elemento)=4\*L^2\*((me(elemento)\*sqrt(4\*I(elemento)/pi))/(120\*L));

  n4(elemento)=-36\*((me(elemento)\*sqrt(4\*I(elemento)/pi))/(120\*L));

  n5(elemento)=3\*L\*((me(elemento)\*sqrt(4\*I(elemento)/pi))/(120\*L));

  n6(elemento)=-L^2\*((me(elemento)\*sqrt(4\*I(elemento)/pi))/(120\*L));

%Sinais da matriz G estao invertidos porque a matriz G e anti-simetrica  
 %(Skew Symmetric) e aqui a matriz e formada primeiro pela diagonal superior,  
 %diferente do paper do Nelson, que comeca pela diagonal inferior.

```
g1(elemento)=-36*((2*me(elemento)*sqrt(4*I(elemento)/pi))/(120*L));
g2(elemento)=3*L*((2*me(elemento)*sqrt(4*I(elemento)/pi))/(120*L));
g3(elemento)=-4*L^2*((2*me(elemento)*sqrt(4*I(elemento)/pi))/(120*L));
g4(elemento)=36*((2*me(elemento)*sqrt(4*I(elemento)/pi))/(120*L));
g5(elemento)=-L^2*((2*me(elemento)*sqrt(4*I(elemento)/pi))/(120*L));
g6(elemento)=L^2*((2*me(elemento)*sqrt(4*I(elemento)/pi))/(120*L));
g7(elemento)=-3*L*((2*me(elemento)*sqrt(4*I(elemento)/pi))/(120*L));
g8(elemento)=4*L^2*((2*me(elemento)*sqrt(4*I(elemento)/pi))/(120*L));
```

```
a1=36*(P/(30*L));
a2=-3*L*(P/(30*L));
a3=4*L^2*(P/(30*L));
a4=-36*(P/(30*L));
a5=3*L*(P/(30*L));
a6=-L^2*(P/(30*L));
```

% MATRIZ K

```
K(i_matriz,i_matriz)=K(i_matriz,i_matriz)+k1(elemento)+0;
K(i_matriz,i_matriz+1)=K(i_matriz,i_matriz+1)+0;
K(i_matriz,i_matriz+2)=K(i_matriz,i_matriz+2)+0;
K(i_matriz,i_matriz+3)=K(i_matriz,i_matriz+3)-k2(elemento);
K(i_matriz,i_matriz+4)=K(i_matriz,i_matriz+4)+k5(elemento);
K(i_matriz,i_matriz+5)=K(i_matriz,i_matriz+5)+0;
K(i_matriz,i_matriz+6)=K(i_matriz,i_matriz+6)+0;
K(i_matriz,i_matriz+7)=K(i_matriz,i_matriz+7)+k4(elemento);
```

```
K(i_matriz+1,i_matriz)=K(i_matriz,i_matriz+1);
K(i_matriz+1,i_matriz+1)=K(i_matriz+1,i_matriz+1)+k1(elemento);
K(i_matriz+1,i_matriz+2)=K(i_matriz+1,i_matriz+2)+k2(elemento);
K(i_matriz+1,i_matriz+3)=K(i_matriz+1,i_matriz+3)+0;
```

$K(i\_matriz+1,i\_matriz+4)=K(i\_matriz+1,i\_matriz+4)+0;$   
 $K(i\_matriz+1,i\_matriz+5)=K(i\_matriz+1,i\_matriz+5)+k5(elemento);$   
 $K(i\_matriz+1,i\_matriz+6)=K(i\_matriz+1,i\_matriz+6)+k2(elemento);$   
 $K(i\_matriz+1,i\_matriz+7)=K(i\_matriz+1,i\_matriz+7)+0;$

$K(i\_matriz+2,i\_matriz)=K(i\_matriz,i\_matriz+2);$   
 $K(i\_matriz+2,i\_matriz+1)=K(i\_matriz+1,i\_matriz+2);$   
 $K(i\_matriz+2,i\_matriz+2)=K(i\_matriz+2,i\_matriz+2)+k3(elemento);$   
 $K(i\_matriz+2,i\_matriz+3)=K(i\_matriz+2,i\_matriz+3)+0;$   
 $K(i\_matriz+2,i\_matriz+4)=K(i\_matriz+2,i\_matriz+4)+0;$   
 $K(i\_matriz+2,i\_matriz+5)=K(i\_matriz+2,i\_matriz+5)+k4(elemento);$   
 $K(i\_matriz+2,i\_matriz+6)=K(i\_matriz+2,i\_matriz+6)+k6(elemento);$   
 $K(i\_matriz+2,i\_matriz+7)=K(i\_matriz+2,i\_matriz+7)+0;$

$K(i\_matriz+3,i\_matriz)=K(i\_matriz,i\_matriz+3);$   
 $K(i\_matriz+3,i\_matriz+1)=K(i\_matriz+1,i\_matriz+3);$   
 $K(i\_matriz+3,i\_matriz+2)=K(i\_matriz+2,i\_matriz+3);$   
 $K(i\_matriz+3,i\_matriz+3)=K(i\_matriz+3,i\_matriz+3)+k3(elemento);$   
 $K(i\_matriz+3,i\_matriz+4)=K(i\_matriz+3,i\_matriz+4)+k2(elemento);$   
 $K(i\_matriz+3,i\_matriz+5)=K(i\_matriz+3,i\_matriz+5)+0;$   
 $K(i\_matriz+3,i\_matriz+6)=K(i\_matriz+3,i\_matriz+6)+0;$   
 $K(i\_matriz+3,i\_matriz+7)=K(i\_matriz+3,i\_matriz+7)+k6(elemento);$

$K(i\_matriz+4,i\_matriz)=K(i\_matriz,i\_matriz+4);$   
 $K(i\_matriz+4,i\_matriz+1)=K(i\_matriz+1,i\_matriz+4);$   
 $K(i\_matriz+4,i\_matriz+2)=K(i\_matriz+2,i\_matriz+4);$   
 $K(i\_matriz+4,i\_matriz+3)=K(i\_matriz+3,i\_matriz+4);$   
 $K(i\_matriz+4,i\_matriz+4)=K(i\_matriz+4,i\_matriz+4)+k1(elemento);$   
 $K(i\_matriz+4,i\_matriz+5)=K(i\_matriz+4,i\_matriz+5)+0;$   
 $K(i\_matriz+4,i\_matriz+6)=K(i\_matriz+4,i\_matriz+6)+0;$   
 $K(i\_matriz+4,i\_matriz+7)=K(i\_matriz+4,i\_matriz+7)+k2(elemento);$

$K(i\_matriz+5,i\_matriz)=K(i\_matriz,i\_matriz+5);$   
 $K(i\_matriz+5,i\_matriz+1)=K(i\_matriz+1,i\_matriz+5);$

```

K(i_matriz+5,i_matriz+2)=K(i_matriz+2,i_matriz+5);
K(i_matriz+5,i_matriz+3)=K(i_matriz+3,i_matriz+5);
K(i_matriz+5,i_matriz+4)=K(i_matriz+4,i_matriz+5);
K(i_matriz+5,i_matriz+5)=K(i_matriz+5,i_matriz+5)+k1(elemento);
K(i_matriz+5,i_matriz+6)=K(i_matriz+5,i_matriz+6)+k4(elemento);
K(i_matriz+5,i_matriz+7)=K(i_matriz+5,i_matriz+7)+0;

```

```

K(i_matriz+6,i_matriz)=K(i_matriz,i_matriz+6);
K(i_matriz+6,i_matriz+1)=K(i_matriz+1,i_matriz+6);
K(i_matriz+6,i_matriz+2)=K(i_matriz+2,i_matriz+6);
K(i_matriz+6,i_matriz+3)=K(i_matriz+3,i_matriz+6);
K(i_matriz+6,i_matriz+4)=K(i_matriz+4,i_matriz+6);
K(i_matriz+6,i_matriz+5)=K(i_matriz+5,i_matriz+6);
K(i_matriz+6,i_matriz+6)=K(i_matriz+6,i_matriz+6)+k3(elemento);
K(i_matriz+6,i_matriz+7)=K(i_matriz+6,i_matriz+7)+0;

```

```

K(i_matriz+7,i_matriz)=K(i_matriz,i_matriz+7);
K(i_matriz+7,i_matriz+1)=K(i_matriz+1,i_matriz+7);
K(i_matriz+7,i_matriz+2)=K(i_matriz+2,i_matriz+7);
K(i_matriz+7,i_matriz+3)=K(i_matriz+3,i_matriz+7);
K(i_matriz+7,i_matriz+4)=K(i_matriz+4,i_matriz+7);
K(i_matriz+7,i_matriz+5)=K(i_matriz+5,i_matriz+7);
K(i_matriz+7,i_matriz+6)=K(i_matriz+6,i_matriz+7);
K(i_matriz+7,i_matriz+7)=K(i_matriz+7,i_matriz+7)+k3(elemento);

```

```
% MATRIZ M
```

```

M(i_matriz,i_matriz)=M(i_matriz,i_matriz)+m1(elemento);
M(i_matriz,i_matriz+1)=M(i_matriz,i_matriz+1)+0;
M(i_matriz,i_matriz+2)=M(i_matriz,i_matriz+2)+0;
M(i_matriz,i_matriz+3)=M(i_matriz,i_matriz+3)+m7(elemento);
M(i_matriz,i_matriz+4)=M(i_matriz,i_matriz+4)+m4(elemento);
M(i_matriz,i_matriz+5)=M(i_matriz,i_matriz+5)+0;
M(i_matriz,i_matriz+6)=M(i_matriz,i_matriz+6)+0;
M(i_matriz,i_matriz+7)=M(i_matriz,i_matriz+7)+m8(elemento);

```

$M(i\_matriz+1,i\_matriz)=M(i\_matriz,i\_matriz+1);$   
 $M(i\_matriz+1,i\_matriz+1)=M(i\_matriz+1,i\_matriz+1)+m1(elemento);$   
 $M(i\_matriz+1,i\_matriz+2)=M(i\_matriz+1,i\_matriz+2)+m2(elemento);$   
 $M(i\_matriz+1,i\_matriz+3)=M(i\_matriz+1,i\_matriz+3)+0;$   
 $M(i\_matriz+1,i\_matriz+4)=M(i\_matriz+1,i\_matriz+4)+0;$   
 $M(i\_matriz+1,i\_matriz+5)=M(i\_matriz+1,i\_matriz+5)+m4(elemento);$   
 $M(i\_matriz+1,i\_matriz+6)=M(i\_matriz+1,i\_matriz+6)+m5(elemento);$   
 $M(i\_matriz+1,i\_matriz+7)=M(i\_matriz+1,i\_matriz+7)+0;$

$M(i\_matriz+2,i\_matriz)=M(i\_matriz,i\_matriz+2);$   
 $M(i\_matriz+2,i\_matriz+1)=M(i\_matriz+1,i\_matriz+2);$   
 $M(i\_matriz+2,i\_matriz+2)=M(i\_matriz+2,i\_matriz+2)+m3(elemento);$   
 $M(i\_matriz+2,i\_matriz+3)=M(i\_matriz+2,i\_matriz+3)+0;$   
 $M(i\_matriz+2,i\_matriz+4)=M(i\_matriz+2,i\_matriz+4)+0;$   
 $M(i\_matriz+2,i\_matriz+5)=M(i\_matriz+2,i\_matriz+5)+m9(elemento);$   
 $M(i\_matriz+2,i\_matriz+6)=M(i\_matriz+2,i\_matriz+6)+m6(elemento);$   
 $M(i\_matriz+2,i\_matriz+7)=M(i\_matriz+2,i\_matriz+7)+0;$

$M(i\_matriz+3,i\_matriz)=M(i\_matriz,i\_matriz+3);$   
 $M(i\_matriz+3,i\_matriz+1)=M(i\_matriz+1,i\_matriz+3);$   
 $M(i\_matriz+3,i\_matriz+2)=M(i\_matriz+2,i\_matriz+3);$   
 $M(i\_matriz+3,i\_matriz+3)=M(i\_matriz+3,i\_matriz+3)+m3(elemento);$   
 $M(i\_matriz+3,i\_matriz+4)=M(i\_matriz+3,i\_matriz+4)+m5(elemento);$   
 $M(i\_matriz+3,i\_matriz+5)=M(i\_matriz+3,i\_matriz+5)+0;$   
 $M(i\_matriz+3,i\_matriz+6)=M(i\_matriz+3,i\_matriz+6)+0;$   
 $M(i\_matriz+3,i\_matriz+7)=M(i\_matriz+3,i\_matriz+7)+m6(elemento);$

$M(i\_matriz+4,i\_matriz)=M(i\_matriz,i\_matriz+4);$   
 $M(i\_matriz+4,i\_matriz+1)=M(i\_matriz+1,i\_matriz+4);$   
 $M(i\_matriz+4,i\_matriz+2)=M(i\_matriz+2,i\_matriz+4);$   
 $M(i\_matriz+4,i\_matriz+3)=M(i\_matriz+3,i\_matriz+4);$   
 $M(i\_matriz+4,i\_matriz+4)=M(i\_matriz+4,i\_matriz+4)+m1(elemento);$   
 $M(i\_matriz+4,i\_matriz+5)=M(i\_matriz+4,i\_matriz+5)+0;$   
 $M(i\_matriz+4,i\_matriz+6)=M(i\_matriz+4,i\_matriz+6)+0;$

$M(i\_matriz+4,i\_matriz+7)=M(i\_matriz+4,i\_matriz+7)+m2(elemento);$

$M(i\_matriz+5,i\_matriz)=M(i\_matriz,i\_matriz+5);$

$M(i\_matriz+5,i\_matriz+1)=M(i\_matriz+1,i\_matriz+5);$

$M(i\_matriz+5,i\_matriz+2)=M(i\_matriz+2,i\_matriz+5);$

$M(i\_matriz+5,i\_matriz+3)=M(i\_matriz+3,i\_matriz+5);$

$M(i\_matriz+5,i\_matriz+4)=M(i\_matriz+4,i\_matriz+5);$

$M(i\_matriz+5,i\_matriz+5)=M(i\_matriz+5,i\_matriz+5)+m1(elemento);$

$M(i\_matriz+5,i\_matriz+6)=M(i\_matriz+5,i\_matriz+6)+m7(elemento);$

$M(i\_matriz+5,i\_matriz+7)=M(i\_matriz+5,i\_matriz+7)+0;$

$M(i\_matriz+6,i\_matriz)=M(i\_matriz,i\_matriz+6);$

$M(i\_matriz+6,i\_matriz+1)=M(i\_matriz+1,i\_matriz+6);$

$M(i\_matriz+6,i\_matriz+2)=M(i\_matriz+2,i\_matriz+6);$

$M(i\_matriz+6,i\_matriz+3)=M(i\_matriz+3,i\_matriz+6);$

$M(i\_matriz+6,i\_matriz+4)=M(i\_matriz+4,i\_matriz+6);$

$M(i\_matriz+6,i\_matriz+5)=M(i\_matriz+5,i\_matriz+6);$

$M(i\_matriz+6,i\_matriz+6)=M(i\_matriz+6,i\_matriz+6)+m3(elemento);$

$M(i\_matriz+6,i\_matriz+7)=M(i\_matriz+6,i\_matriz+7)+0;$

$M(i\_matriz+7,i\_matriz)=M(i\_matriz,i\_matriz+7);$

$M(i\_matriz+7,i\_matriz+1)=M(i\_matriz+1,i\_matriz+7);$

$M(i\_matriz+7,i\_matriz+2)=M(i\_matriz+2,i\_matriz+7);$

$M(i\_matriz+7,i\_matriz+3)=M(i\_matriz+3,i\_matriz+7);$

$M(i\_matriz+7,i\_matriz+4)=M(i\_matriz+4,i\_matriz+7);$

$M(i\_matriz+7,i\_matriz+5)=M(i\_matriz+5,i\_matriz+7);$

$M(i\_matriz+7,i\_matriz+6)=M(i\_matriz+6,i\_matriz+7);$

$M(i\_matriz+7,i\_matriz+7)=M(i\_matriz+7,i\_matriz+7)+m3(elemento);$

`% MATRIZ N`

$N(i\_matriz,i\_matriz)=N(i\_matriz,i\_matriz)+n1(elemento);$

$N(i\_matriz,i\_matriz+1)=N(i\_matriz,i\_matriz+1)+0;$

$N(i\_matriz,i\_matriz+2)=N(i\_matriz,i\_matriz+2)+0;$

$N(i\_matriz,i\_matriz+3)=N(i\_matriz,i\_matriz+3)+n5(elemento);$

$N(i\_matriz,i\_matriz+4)=N(i\_matriz,i\_matriz+4)+n4(elemento);$   
 $N(i\_matriz,i\_matriz+5)=N(i\_matriz,i\_matriz+5)+0;$   
 $N(i\_matriz,i\_matriz+6)=N(i\_matriz,i\_matriz+6)+0;$   
 $N(i\_matriz,i\_matriz+7)=N(i\_matriz,i\_matriz+7)+n5(elemento);$

$N(i\_matriz+1,i\_matriz)=N(i\_matriz,i\_matriz+1);$   
 $N(i\_matriz+1,i\_matriz+1)=N(i\_matriz+1,i\_matriz+1)+n1(elemento);$   
 $N(i\_matriz+1,i\_matriz+2)=N(i\_matriz+1,i\_matriz+2)+n2(elemento);$   
 $N(i\_matriz+1,i\_matriz+3)=N(i\_matriz+1,i\_matriz+3)+0;$   
 $N(i\_matriz+1,i\_matriz+4)=N(i\_matriz+1,i\_matriz+4)+0;$   
 $N(i\_matriz+1,i\_matriz+5)=N(i\_matriz+1,i\_matriz+5)+n4(elemento);$   
 $N(i\_matriz+1,i\_matriz+6)=N(i\_matriz+1,i\_matriz+6)+n2(elemento);$   
 $N(i\_matriz+1,i\_matriz+7)=N(i\_matriz+1,i\_matriz+7)+0;$

$N(i\_matriz+2,i\_matriz)=N(i\_matriz,i\_matriz+2);$   
 $N(i\_matriz+2,i\_matriz+1)=N(i\_matriz+1,i\_matriz+2);$   
 $N(i\_matriz+2,i\_matriz+2)=N(i\_matriz+2,i\_matriz+2)+n3(elemento);$   
 $N(i\_matriz+2,i\_matriz+3)=N(i\_matriz+2,i\_matriz+3)+0;$   
 $N(i\_matriz+2,i\_matriz+4)=N(i\_matriz+2,i\_matriz+4)+0;$   
 $N(i\_matriz+2,i\_matriz+5)=N(i\_matriz+2,i\_matriz+5)+n5(elemento);$   
 $N(i\_matriz+2,i\_matriz+6)=N(i\_matriz+2,i\_matriz+6)+n6(elemento);$   
 $N(i\_matriz+2,i\_matriz+7)=N(i\_matriz+2,i\_matriz+7)+0;$

$N(i\_matriz+3,i\_matriz)=N(i\_matriz,i\_matriz+3);$   
 $N(i\_matriz+3,i\_matriz+1)=N(i\_matriz+1,i\_matriz+3);$   
 $N(i\_matriz+3,i\_matriz+2)=N(i\_matriz+2,i\_matriz+3);$   
 $N(i\_matriz+3,i\_matriz+3)=N(i\_matriz+3,i\_matriz+3)+n3(elemento);$   
 $N(i\_matriz+3,i\_matriz+4)=N(i\_matriz+3,i\_matriz+4)+n2(elemento);$   
 $N(i\_matriz+3,i\_matriz+5)=N(i\_matriz+3,i\_matriz+5)+0;$   
 $N(i\_matriz+3,i\_matriz+6)=N(i\_matriz+3,i\_matriz+6)+0;$   
 $N(i\_matriz+3,i\_matriz+7)=N(i\_matriz+3,i\_matriz+7)+n6(elemento);$

$N(i\_matriz+4,i\_matriz)=N(i\_matriz,i\_matriz+4);$   
 $N(i\_matriz+4,i\_matriz+1)=N(i\_matriz+1,i\_matriz+4);$



$N(i\_matriz+4,i\_matriz+2)=N(i\_matriz+2,i\_matriz+4);$   
 $N(i\_matriz+4,i\_matriz+3)=N(i\_matriz+3,i\_matriz+4);$   
 $N(i\_matriz+4,i\_matriz+4)=N(i\_matriz+4,i\_matriz+4)+n1(elemento);$   
 $N(i\_matriz+4,i\_matriz+5)=N(i\_matriz+4,i\_matriz+5)+0;$   
 $N(i\_matriz+4,i\_matriz+6)=N(i\_matriz+4,i\_matriz+6)+0;$   
 $N(i\_matriz+4,i\_matriz+7)=N(i\_matriz+4,i\_matriz+7)+n2(elemento);$

$N(i\_matriz+5,i\_matriz)=N(i\_matriz,i\_matriz+5);$   
 $N(i\_matriz+5,i\_matriz+1)=N(i\_matriz+1,i\_matriz+5);$   
 $N(i\_matriz+5,i\_matriz+2)=N(i\_matriz+2,i\_matriz+5);$   
 $N(i\_matriz+5,i\_matriz+3)=N(i\_matriz+3,i\_matriz+5);$   
 $N(i\_matriz+5,i\_matriz+4)=N(i\_matriz+4,i\_matriz+5);$   
 $N(i\_matriz+5,i\_matriz+5)=N(i\_matriz+5,i\_matriz+5)+n1(elemento);$   
 $N(i\_matriz+5,i\_matriz+6)=N(i\_matriz+5,i\_matriz+6)+n5(elemento);$   
 $N(i\_matriz+5,i\_matriz+7)=N(i\_matriz+5,i\_matriz+7)+0;$

$N(i\_matriz+6,i\_matriz)=N(i\_matriz,i\_matriz+6);$   
 $N(i\_matriz+6,i\_matriz+1)=N(i\_matriz+1,i\_matriz+6);$   
 $N(i\_matriz+6,i\_matriz+2)=N(i\_matriz+2,i\_matriz+6);$   
 $N(i\_matriz+6,i\_matriz+3)=N(i\_matriz+3,i\_matriz+6);$   
 $N(i\_matriz+6,i\_matriz+4)=N(i\_matriz+4,i\_matriz+6);$   
 $N(i\_matriz+6,i\_matriz+5)=N(i\_matriz+5,i\_matriz+6);$   
 $N(i\_matriz+6,i\_matriz+6)=N(i\_matriz+6,i\_matriz+6)+n3(elemento);$   
 $N(i\_matriz+6,i\_matriz+7)=N(i\_matriz+6,i\_matriz+7)+0;$

$N(i\_matriz+7,i\_matriz)=N(i\_matriz,i\_matriz+7);$   
 $N(i\_matriz+7,i\_matriz+1)=N(i\_matriz+1,i\_matriz+7);$   
 $N(i\_matriz+7,i\_matriz+2)=N(i\_matriz+2,i\_matriz+7);$   
 $N(i\_matriz+7,i\_matriz+3)=N(i\_matriz+3,i\_matriz+7);$   
 $N(i\_matriz+7,i\_matriz+4)=N(i\_matriz+4,i\_matriz+7);$   
 $N(i\_matriz+7,i\_matriz+5)=N(i\_matriz+5,i\_matriz+7);$   
 $N(i\_matriz+7,i\_matriz+6)=N(i\_matriz+6,i\_matriz+7);$   
 $N(i\_matriz+7,i\_matriz+7)=N(i\_matriz+7,i\_matriz+7)+n3(elemento);$

```

% MATRIZ G
G(i_matriz,i_matriz)=G(i_matriz,i_matriz)+0;
G(i_matriz,i_matriz+1)=G(i_matriz,i_matriz+1)+g1(elemento);
G(i_matriz,i_matriz+2)=G(i_matriz,i_matriz+2)+g2(elemento);
G(i_matriz,i_matriz+3)=G(i_matriz,i_matriz+3)+0;
G(i_matriz,i_matriz+4)=G(i_matriz,i_matriz+4)+0;
G(i_matriz,i_matriz+5)=G(i_matriz,i_matriz+5)+g4(elemento);
G(i_matriz,i_matriz+6)=G(i_matriz,i_matriz+6)+g2(elemento);
G(i_matriz,i_matriz+7)=G(i_matriz,i_matriz+7)+0;

G(i_matriz+1,i_matriz)=-G(i_matriz,i_matriz+1);
G(i_matriz+1,i_matriz+1)=G(i_matriz+1,i_matriz+1)+0;
G(i_matriz+1,i_matriz+2)=G(i_matriz+1,i_matriz+2)+0;
G(i_matriz+1,i_matriz+3)=G(i_matriz+1,i_matriz+3)+g2(elemento);
G(i_matriz+1,i_matriz+4)=G(i_matriz+1,i_matriz+4)+g1(elemento);
G(i_matriz+1,i_matriz+5)=G(i_matriz+1,i_matriz+5)+0;
G(i_matriz+1,i_matriz+6)=G(i_matriz+1,i_matriz+6)+0;
G(i_matriz+1,i_matriz+7)=G(i_matriz+1,i_matriz+7)+g2(elemento);

G(i_matriz+2,i_matriz)=-G(i_matriz,i_matriz+2);
G(i_matriz+2,i_matriz+1)=-G(i_matriz+1,i_matriz+2);
G(i_matriz+2,i_matriz+2)=G(i_matriz+2,i_matriz+2)+0;
G(i_matriz+2,i_matriz+3)=G(i_matriz+2,i_matriz+3)+g3(elemento);
G(i_matriz+2,i_matriz+4)=G(i_matriz+2,i_matriz+4)+g2(elemento);
G(i_matriz+2,i_matriz+5)=G(i_matriz+2,i_matriz+5)+0;
G(i_matriz+2,i_matriz+6)=G(i_matriz+2,i_matriz+6)+0;
G(i_matriz+2,i_matriz+7)=G(i_matriz+2,i_matriz+7)+g6(elemento);

G(i_matriz+3,i_matriz)=-G(i_matriz,i_matriz+3);
G(i_matriz+3,i_matriz+1)=-G(i_matriz+1,i_matriz+3);
G(i_matriz+3,i_matriz+2)=-G(i_matriz+2,i_matriz+3);
G(i_matriz+3,i_matriz+3)=G(i_matriz+3,i_matriz+3)+0;
G(i_matriz+3,i_matriz+4)=G(i_matriz+3,i_matriz+4)+0;
G(i_matriz+3,i_matriz+5)=G(i_matriz+3,i_matriz+5)+g2(elemento);

```

$G(i\_matriz+3,i\_matriz+6)=G(i\_matriz+3,i\_matriz+6)+g5(elemento);$   
 $G(i\_matriz+3,i\_matriz+7)=G(i\_matriz+3,i\_matriz+7)+0;$

$G(i\_matriz+4,i\_matriz)=-G(i\_matriz,i\_matriz+4);$   
 $G(i\_matriz+4,i\_matriz+1)=-G(i\_matriz+1,i\_matriz+4);$   
 $G(i\_matriz+4,i\_matriz+2)=-G(i\_matriz+2,i\_matriz+4);$   
 $G(i\_matriz+4,i\_matriz+3)=-G(i\_matriz+3,i\_matriz+4);$   
 $G(i\_matriz+4,i\_matriz+4)=G(i\_matriz+4,i\_matriz+4)+0;$   
 $G(i\_matriz+4,i\_matriz+5)=G(i\_matriz+4,i\_matriz+5)+g1(elemento);$   
 $G(i\_matriz+4,i\_matriz+6)=G(i\_matriz+4,i\_matriz+6)+g7(elemento);$   
 $G(i\_matriz+4,i\_matriz+7)=G(i\_matriz+4,i\_matriz+7)+0;$

$G(i\_matriz+5,i\_matriz)=-G(i\_matriz,i\_matriz+5);$   
 $G(i\_matriz+5,i\_matriz+1)=-G(i\_matriz+1,i\_matriz+5);$   
 $G(i\_matriz+5,i\_matriz+2)=-G(i\_matriz+2,i\_matriz+5);$   
 $G(i\_matriz+5,i\_matriz+3)=-G(i\_matriz+3,i\_matriz+5);$   
 $G(i\_matriz+5,i\_matriz+4)=-G(i\_matriz+4,i\_matriz+5);$   
 $G(i\_matriz+5,i\_matriz+5)=G(i\_matriz+5,i\_matriz+5)+0;$   
 $G(i\_matriz+5,i\_matriz+6)=G(i\_matriz+5,i\_matriz+6)+0;$   
 $G(i\_matriz+5,i\_matriz+7)=G(i\_matriz+5,i\_matriz+7)+g7(elemento);$

$G(i\_matriz+6,i\_matriz)=-G(i\_matriz,i\_matriz+6);$   
 $G(i\_matriz+6,i\_matriz+1)=-G(i\_matriz+1,i\_matriz+6);$   
 $G(i\_matriz+6,i\_matriz+2)=-G(i\_matriz+2,i\_matriz+6);$   
 $G(i\_matriz+6,i\_matriz+3)=-G(i\_matriz+3,i\_matriz+6);$   
 $G(i\_matriz+6,i\_matriz+4)=-G(i\_matriz+4,i\_matriz+6);$   
 $G(i\_matriz+6,i\_matriz+5)=-G(i\_matriz+5,i\_matriz+6);$   
 $G(i\_matriz+6,i\_matriz+6)=G(i\_matriz+6,i\_matriz+6)+0;$   
 $G(i\_matriz+6,i\_matriz+7)=G(i\_matriz+6,i\_matriz+7)+g3(elemento);$   
 $G(i\_matriz+7,i\_matriz)=-G(i\_matriz,i\_matriz+7);$   
 $G(i\_matriz+7,i\_matriz+1)=-G(i\_matriz+1,i\_matriz+7);$   
 $G(i\_matriz+7,i\_matriz+2)=-G(i\_matriz+2,i\_matriz+7);$   
 $G(i\_matriz+7,i\_matriz+3)=-G(i\_matriz+3,i\_matriz+7);$   
 $G(i\_matriz+7,i\_matriz+4)=-G(i\_matriz+4,i\_matriz+7);$

```

G(i_matriz+7,i_matriz+5)=-G(i_matriz+5,i_matriz+7);
G(i_matriz+7,i_matriz+6)=-G(i_matriz+6,i_matriz+7);
G(i_matriz+7,i_matriz+7)=G(i_matriz+7,i_matriz+7)+0;

```

```
% MATRIZ A
```

```

A(i_matriz,i_matriz)=A(i_matriz,i_matriz)+a1;
A(i_matriz,i_matriz+1)=A(i_matriz,i_matriz+1)+0;
A(i_matriz,i_matriz+2)=A(i_matriz,i_matriz+2)+0;
A(i_matriz,i_matriz+3)=A(i_matriz,i_matriz+3)+a5;
A(i_matriz,i_matriz+4)=A(i_matriz,i_matriz+4)+a4;
A(i_matriz,i_matriz+5)=A(i_matriz,i_matriz+5)+0;
A(i_matriz,i_matriz+6)=A(i_matriz,i_matriz+6)+0;
A(i_matriz,i_matriz+7)=A(i_matriz,i_matriz+7)+a5;

```

```

A(i_matriz+1,i_matriz)=A(i_matriz,i_matriz+1);
A(i_matriz+1,i_matriz+1)=A(i_matriz+1,i_matriz+1)+a1;
A(i_matriz+1,i_matriz+2)=A(i_matriz+1,i_matriz+2)+a2;
A(i_matriz+1,i_matriz+3)=A(i_matriz+1,i_matriz+3)+0;
A(i_matriz+1,i_matriz+4)=A(i_matriz+1,i_matriz+4)+0;
A(i_matriz+1,i_matriz+5)=A(i_matriz+1,i_matriz+5)+a4;
A(i_matriz+1,i_matriz+6)=A(i_matriz+1,i_matriz+6)+a2;
A(i_matriz+1,i_matriz+7)=A(i_matriz+1,i_matriz+7)+0;

```

```

A(i_matriz+2,i_matriz)=A(i_matriz,i_matriz+2);
A(i_matriz+2,i_matriz+1)=A(i_matriz+1,i_matriz+2);
A(i_matriz+2,i_matriz+2)=A(i_matriz+2,i_matriz+2)+a3;
A(i_matriz+2,i_matriz+3)=A(i_matriz+2,i_matriz+3)+0;
A(i_matriz+2,i_matriz+4)=A(i_matriz+2,i_matriz+4)+0;
A(i_matriz+2,i_matriz+5)=A(i_matriz+2,i_matriz+5)+a5;
A(i_matriz+2,i_matriz+6)=A(i_matriz+2,i_matriz+6)+a6;
A(i_matriz+2,i_matriz+7)=A(i_matriz+2,i_matriz+7)+0;

```

```

A(i_matriz+3,i_matriz)=A(i_matriz,i_matriz+3);
A(i_matriz+3,i_matriz+1)=A(i_matriz+1,i_matriz+3);

```

$A(i\_matriz+3,i\_matriz+2)=A(i\_matriz+2,i\_matriz+3);$   
 $A(i\_matriz+3,i\_matriz+3)=A(i\_matriz+3,i\_matriz+3)+a3;$   
 $A(i\_matriz+3,i\_matriz+4)=A(i\_matriz+3,i\_matriz+4)+a2;$   
 $A(i\_matriz+3,i\_matriz+5)=A(i\_matriz+3,i\_matriz+5)+0;$   
 $A(i\_matriz+3,i\_matriz+6)=A(i\_matriz+3,i\_matriz+6)+0;$   
 $A(i\_matriz+3,i\_matriz+7)=A(i\_matriz+3,i\_matriz+7)+a6;$

$A(i\_matriz+4,i\_matriz)=A(i\_matriz,i\_matriz+4);$   
 $A(i\_matriz+4,i\_matriz+1)=A(i\_matriz+1,i\_matriz+4);$   
 $A(i\_matriz+4,i\_matriz+2)=A(i\_matriz+2,i\_matriz+4);$   
 $A(i\_matriz+4,i\_matriz+3)=A(i\_matriz+3,i\_matriz+4);$   
 $A(i\_matriz+4,i\_matriz+4)=A(i\_matriz+4,i\_matriz+4)+a1;$   
 $A(i\_matriz+4,i\_matriz+5)=A(i\_matriz+4,i\_matriz+5)+0;$   
 $A(i\_matriz+4,i\_matriz+6)=A(i\_matriz+4,i\_matriz+6)+0;$   
 $A(i\_matriz+4,i\_matriz+7)=A(i\_matriz+4,i\_matriz+7)+a2;$

$A(i\_matriz+5,i\_matriz)=A(i\_matriz,i\_matriz+5);$   
 $A(i\_matriz+5,i\_matriz+1)=A(i\_matriz+1,i\_matriz+5);$   
 $A(i\_matriz+5,i\_matriz+2)=A(i\_matriz+2,i\_matriz+5);$   
 $A(i\_matriz+5,i\_matriz+3)=A(i\_matriz+3,i\_matriz+5);$   
 $A(i\_matriz+5,i\_matriz+4)=A(i\_matriz+4,i\_matriz+5);$   
 $A(i\_matriz+5,i\_matriz+5)=A(i\_matriz+5,i\_matriz+5)+a1;$   
 $A(i\_matriz+5,i\_matriz+6)=A(i\_matriz+5,i\_matriz+6)+a5;$   
 $A(i\_matriz+5,i\_matriz+7)=A(i\_matriz+5,i\_matriz+7)+0;$

$A(i\_matriz+6,i\_matriz)=A(i\_matriz,i\_matriz+6);$   
 $A(i\_matriz+6,i\_matriz+1)=A(i\_matriz+1,i\_matriz+6);$   
 $A(i\_matriz+6,i\_matriz+2)=A(i\_matriz+2,i\_matriz+6);$   
 $A(i\_matriz+6,i\_matriz+3)=A(i\_matriz+3,i\_matriz+6);$   
 $A(i\_matriz+6,i\_matriz+4)=A(i\_matriz+4,i\_matriz+6);$   
 $A(i\_matriz+6,i\_matriz+5)=A(i\_matriz+5,i\_matriz+6);$   
 $A(i\_matriz+6,i\_matriz+6)=A(i\_matriz+6,i\_matriz+6)+a3;$   
 $A(i\_matriz+6,i\_matriz+7)=A(i\_matriz+6,i\_matriz+7)+0;$

```

A(i_matriz+7,i_matriz)=A(i_matriz,i_matriz+7);
A(i_matriz+7,i_matriz+1)=A(i_matriz+1,i_matriz+7);
A(i_matriz+7,i_matriz+2)=A(i_matriz+2,i_matriz+7);
A(i_matriz+7,i_matriz+3)=A(i_matriz+3,i_matriz+7);
A(i_matriz+7,i_matriz+4)=A(i_matriz+4,i_matriz+7);
A(i_matriz+7,i_matriz+5)=A(i_matriz+5,i_matriz+7);
A(i_matriz+7,i_matriz+6)=A(i_matriz+6,i_matriz+7);
A(i_matriz+7,i_matriz+7)=A(i_matriz+7,i_matriz+7)+a3;
end

[M]=[M]+[N]; %Soma das matrizes de massa e de inercia rotativa
if P~=0      %Peso próprio de aprox. 15 kg, desprezível
    [K]=[K]+[A]; %Soma da matriz de rigidez com a de carga axial incremental
end

K_eixo=K;    %Matriz K_eixo, posteriormente somada a K_mancal

```

**4\_Plot.m**

```
%Subrotina "4_Plot.m"
```

```
%Plota o eixo (propriedades de inercia vs massa)
```

```
n=59; %numero de elementos
```

```
l=8/1000*n; %[mm]
```

```
L=l/n; %Divide o comp. da barra por n elementos
```

```
resolucao=5; %[pontos/elemento]
```

```
npontos=resolucao*n;
```

```
cord_s(1)=0; %cordenada inicial
```

```
%Raio externo eixo1 Elemento 1
```

```
p_re(1)=re(1);
```

```
%Raio externo eixo2 Elementos 2-4
```

```
p_re(2)=re(2);
```

```
p_re(3)=re(2);
```

```
p_re(4)=re(2);
```

```
%Raio externo eixo3 Elementos 5-6
```

```
p_re(5)=re(3);
```

```
p_re(6)=re(3);
```

```
%Raio externo eixo4 Elementos 7-8
```

```
p_re(7)=re(4);
```

```
p_re(8)=re(4);
```

```
%Raio externo eixo5 Elementos 9-10
```

```
p_re(9)=re(5);
```

```
p_re(10)=re(5);
```

```
%Raio externo eixo6 Elemento 1
```

```
p_re(11)=re(6);
```

```
%Raio externo eixo7 Elementos 12-15
```

```
p_re(12)=re(7);
```

```
p_re(13)=re(7);
```

```
p_re(14)=re(7);
```

```
p_re(15)=re(7);
```

```
%Raio externo eixo8 Elemento 16
```

```

p_re(16)=re(8);
%Raio externo eixo9          Elementos 17-20
p_re(17)=re(9);
p_re(18)=re(9);
p_re(19)=re(9);
p_re(20)=re(9);
%Raio externo eixo10       Elementos 21-22
p_re(21)=re(10);
p_re(22)=re(10);
%Raio externo eixo11       Elementos 23-33
p_re(23)=re(11);
p_re(24)=re(11);
p_re(25)=re(11);
p_re(26)=re(11);
p_re(27)=re(11);
p_re(28)=re(11);
p_re(29)=re(11);
p_re(30)=re(11);
p_re(31)=re(11);
p_re(32)=re(11);
p_re(33)=re(11);
%Raio externo eixo12       Elementos 34-36
p_re(34)=re(12);
p_re(35)=re(12);
p_re(36)=re(12);
%Raio externo eixo13       Elementos 37-38
p_re(37)=re(13);
p_re(38)=re(13);
%Raio externo eixo14       Elementos 39-40
p_re(39)=re(14);
p_re(40)=re(14);
%Raio externo eixo15       Elementos 41-46
p_re(41)=re(15);
p_re(42)=re(15);

```



p\_re(43)=re(15);

p\_re(44)=re(15);

p\_re(45)=re(15);

p\_re(46)=re(15);

%Raio externo eixo16 Elementos 47-49

p\_re(47)=re(16);

p\_re(48)=re(16);

p\_re(49)=re(16);

%Raio externo eixo17 Elementos 50-52

p\_re(50)=re(17);

p\_re(51)=re(17);

p\_re(52)=re(17);

%Raio externo eixo18 Elementos 53-54

p\_re(53)=re(18);

p\_re(54)=re(18);

%Raio externo eixo19 Elementos 55-57

p\_re(55)=re(19);

p\_re(56)=re(19);

p\_re(57)=re(19);

%Raio externo eixo20 Elementos 58-59

p\_re(58)=re(20);

p\_re(59)=re(20);

%Raio interno eixo1 Elemento 1

p\_ri(1)=ri(1);

%Raio interno eixo2 Elementos 2-4

p\_ri(2)=ri(2);

p\_ri(3)=ri(2);

p\_ri(4)=ri(2);

%Raio interno eixo3 Elementos 5-6

p\_ri(5)=ri(3);

p\_ri(6)=ri(3);

%Raio interno eixo4 Elementos 7-8

p\_ri(7)=ri(4);

```
p_ri(8)=ri(4);
%Raio interno eixo5      Elementos 9-10
p_ri(9)=ri(5);
p_ri(10)=ri(5);
%Raio interno eixo6     Elemento 1
p_ri(11)=ri(6);
%Raio interno eixo7     Elementos 12-15
p_ri(12)=ri(7);
p_ri(13)=ri(7);
p_ri(14)=ri(7);
p_ri(15)=ri(7);
%Raio interno eixo8     Elemento 16
p_ri(16)=ri(8);
%Raio interno eixo9      Elementos 17-20
p_ri(17)=ri(9);
p_ri(18)=ri(9);
p_ri(19)=ri(9);
p_ri(20)=ri(9);
%Raio interno eixo10     Elementos 21-22
p_ri(21)=ri(10);
p_ri(22)=ri(10);
%Raio interno eixo11     Elementos 23-33
p_ri(23)=ri(11);
p_ri(24)=ri(11);
p_ri(25)=ri(11);
p_ri(26)=ri(11);
p_ri(27)=ri(11);
p_ri(28)=ri(11);
p_ri(29)=ri(11);
p_ri(30)=ri(11);
p_ri(31)=ri(11);
p_ri(32)=ri(11);
p_ri(33)=ri(11);
%Raio interno eixo12     Elementos 34-36
```

p\_ri(34)=ri(12);  
 p\_ri(35)=ri(12);  
 p\_ri(36)=ri(12);  
 %Raio interno eixo13            Elementos 37-38  
 p\_ri(37)=ri(13);  
 p\_ri(38)=ri(13);  
 %Raio interno eixo14            Elementos 39-40  
 p\_ri(39)=ri(14);  
 p\_ri(40)=ri(14);  
 %Raio interno eixo15            Elementos 41-46  
 p\_ri(41)=ri(15);  
 p\_ri(42)=ri(15);  
 p\_ri(43)=ri(15);  
 p\_ri(44)=ri(15);  
 p\_ri(45)=ri(15);  
 p\_ri(46)=ri(15);  
 %Raio interno eixo16    Elementos 47-49  
 p\_ri(47)=ri(16);  
 p\_ri(48)=ri(16);  
 p\_ri(49)=ri(16);  
 %Raio interno eixo17    Elementos 50-52  
 p\_ri(50)=ri(17);  
 p\_ri(51)=ri(17);  
 p\_ri(52)=ri(17);  
 %Raio interno eixo18    Elementos 53-54  
 p\_ri(53)=ri(18);  
 p\_ri(54)=ri(18);  
 %Raio interno eixo19    Elementos 55-57  
 p\_ri(55)=ri(19);  
 p\_ri(56)=ri(19);  
 p\_ri(57)=ri(19);  
 %Raio interno eixo20    Elementos 58-59  
 p\_ri(58)=ri(20);  
 p\_ri(59)=ri(20);

%Raio externo secao vazada1	Elemento 1
p_resv(1)=resv(1);	
%Raio externo secao vazada2	Elementos 2-4
p_resv(2)=resv(2);	
p_resv(3)=resv(2);	
p_resv(4)=resv(2);	
%Raio externo secao vazada3	Elementos 5-6
p_resv(5)=resv(3);	
p_resv(6)=resv(3);	
%Raio externo secao vazada4	Elementos 7-8
p_resv(7)=resv(4);	
p_resv(8)=resv(4);	
%Raio externo secao vazada5	Elementos 9-10
p_resv(9)=resv(5);	
p_resv(10)=resv(5);	
%Raio externo secao vazada6	Elemento 1
p_resv(11)=resv(6);	
%Raio externo secao vazada7	Elementos 12-15
p_resv(12)=resv(7);	
p_resv(13)=resv(7);	
p_resv(14)=resv(7);	
p_resv(15)=resv(7);	
%Raio externo secao vazada8	Elemento 16
p_resv(16)=resv(8);	
%Raio externo secao vazada9	Elementos 17-20
p_resv(17)=resv(9);	
p_resv(18)=resv(9);	
p_resv(19)=resv(9);	
p_resv(20)=resv(9);	
%Raio externo secao vazada10	Elementos 21-22
p_resv(21)=resv(10);	
p_resv(22)=resv(10);	
%Raio externo secao vazada11	Elementos 23-33
p_resv(23)=resv(11);	

p\_resv(24)=resv(11);  
 p\_resv(25)=resv(11);  
 p\_resv(26)=resv(11);  
 p\_resv(27)=resv(11);  
 p\_resv(28)=resv(11);  
 p\_resv(29)=resv(11);  
 p\_resv(30)=resv(11);  
 p\_resv(31)=resv(11);  
 p\_resv(32)=resv(11);  
 p\_resv(33)=resv(11);  
 %Raio externo secao vazada12                      Elementos 34-36  
 p\_resv(34)=resv(12);  
 p\_resv(35)=resv(12);  
 p\_resv(36)=resv(12);  
 %Raio externo secao vazada13                      Elementos 37-38  
 p\_resv(37)=resv(13);  
 p\_resv(38)=resv(13);  
 %Raio externo secao vazada14                      Elementos 39-40  
 p\_resv(39)=resv(14);  
 p\_resv(40)=resv(14);  
 %Raio externo secao vazada15                      Elementos 41-46  
 p\_resv(41)=resv(15);  
 p\_resv(42)=resv(15);  
 p\_resv(43)=resv(15);  
 p\_resv(44)=resv(15);  
 p\_resv(45)=resv(15);  
 p\_resv(46)=resv(15);  
 %Raio externo secao vazada16    Elementos 47-49  
 p\_resv(47)=resv(16);  
 p\_resv(48)=resv(16);  
 p\_resv(49)=resv(16);  
 %Raio externo secao vazada17    Elementos 50-52  
 p\_resv(50)=resv(17);  
 p\_resv(51)=resv(17);

p\_resv(52)=resv(17);  
 %Raio externo secao vazada18 Elementos 53-54  
 p\_resv(53)=resv(18);  
 p\_resv(54)=resv(18);  
 %Raio externo secao vazada19 Elementos 55-57  
 p\_resv(55)=resv(19);  
 p\_resv(56)=resv(19);  
 p\_resv(57)=resv(19);  
 %Raio externo secao vazada20 Elementos 58-59  
 p\_resv(58)=resv(20);  
 p\_resv(59)=resv(20);  
 %Raio interno secao vazada1 Elemento 1  
 p\_risv(1)=risv(1);  
 %Raio interno secao vazada2 Elementos 2-4  
 p\_risv(2)=risv(2);  
 p\_risv(3)=risv(2);  
 p\_risv(4)=risv(2);  
 %Raio interno secao vazada3 Elementos 5-6  
 p\_risv(5)=risv(3);  
 p\_risv(6)=risv(3);  
 %Raio interno secao vazada4 Elementos 7-8  
 p\_risv(7)=risv(4);  
 p\_risv(8)=risv(4);  
 %Raio interno secao vazada5 Elementos 9-10  
 p\_risv(9)=risv(5);  
 p\_risv(10)=risv(5);  
 %Raio interno secao vazada6 Elemento 1  
 p\_risv(11)=risv(6);  
 %Raio interno secao vazada7 Elementos 12-15  
 p\_risv(12)=risv(7);  
 p\_risv(13)=risv(7);  
 p\_risv(14)=risv(7);  
 p\_risv(15)=risv(7);  
 %Raio interno secao vazada8 Elemento 16

p_risv(16)=risv(8);	
%Raio interno secao vazada9	Elementos 17-20
p_risv(17)=risv(9);	
p_risv(18)=risv(9);	
p_risv(19)=risv(9);	
p_risv(20)=risv(9);	
%Raio interno secao vazada10	Elementos 21-22
p_risv(21)=risv(10);	
p_risv(22)=risv(10);	
%Raio interno secao vazada11	Elementos 23-33
p_risv(23)=risv(11);	
p_risv(24)=risv(11);	
p_risv(25)=risv(11);	
p_risv(26)=risv(11);	
p_risv(27)=risv(11);	
p_risv(28)=risv(11);	
p_risv(29)=risv(11);	
p_risv(30)=risv(11);	
p_risv(31)=risv(11);	
p_risv(32)=risv(11);	
p_risv(33)=risv(11);	
%Raio interno secao vazada12	Elementos 34-36
p_risv(34)=risv(12);	
p_risv(35)=risv(12);	
p_risv(36)=risv(12);	
%Raio interno secao vazada13	Elementos 37-38
p_risv(37)=risv(13);	
p_risv(38)=risv(13);	
%Raio interno secao vazada14	Elementos 39-40
p_risv(39)=risv(14);	
p_risv(40)=risv(14);	
%Raio interno secao vazada15	Elementos 41-46
p_risv(41)=risv(15);	
p_risv(42)=risv(15);	

p\_risv(43)=risv(15);  
 p\_risv(44)=risv(15);  
 p\_risv(45)=risv(15);  
 p\_risv(46)=risv(15);  
 %Raio interno secao vazada16    Elementos 47-49  
 p\_risv(47)=risv(16);  
 p\_risv(48)=risv(16);  
 p\_risv(49)=risv(16);  
 %Raio interno secao vazada17    Elementos 50-52  
 p\_risv(50)=risv(17);  
 p\_risv(51)=risv(17);  
 p\_risv(52)=risv(17);  
 %Raio interno secao vazada18    Elementos 53-54  
 p\_risv(53)=risv(18);  
 p\_risv(54)=risv(18);  
 %Raio interno secao vazada19    Elementos 55-57  
 p\_risv(55)=risv(19);  
 p\_risv(56)=risv(19);  
 p\_risv(57)=risv(19);  
 %Raio interno secao vazada20    Elementos 58-59  
 p\_risv(58)=risv(20);  
 p\_risv(59)=risv(20);  
 %Raio externo componentes externos1                    Elemento 1  
 p\_rece(1)=rece(1);  
 %Raio externo componentes externos2                    Elementos 2-4  
 p\_rece(2)=rece(2);  
 p\_rece(3)=rece(2);  
 p\_rece(4)=rece(2);  
 %Raio externo componentes externos3                    Elementos 5-6  
 p\_rece(5)=rece(3);  
 p\_rece(6)=rece(3);  
 %Raio externo componentes externos4                    Elementos 7-8  
 p\_rece(7)=rece(4);  
 p\_rece(8)=rece(4);



%Raio externo componentes externos5 p_rece(9)=rece(5); p_rece(10)=rece(5);	Elementos 9-10
%Raio externo componentes externos6 p_rece(11)=rece(6);	Elemento 1
%Raio externo componentes externos7 p_rece(12)=rece(7); p_rece(13)=rece(7); p_rece(14)=rece(7); p_rece(15)=rece(7);	Elementos 12-15
%Raio externo componentes externos8 p_rece(16)=rece(8);	Elemento 16
%Raio externo componentes externos9 p_rece(17)=rece(9); p_rece(18)=rece(9); p_rece(19)=rece(9); p_rece(20)=rece(9);	Elementos 17-20
%Raio externo componentes externos10 p_rece(21)=rece(10); p_rece(22)=rece(10);	Elementos 21-22
%Raio externo componentes externos11 p_rece(23)=rece(11); p_rece(24)=rece(11); p_rece(25)=rece(11); p_rece(26)=rece(11); p_rece(27)=rece(11); p_rece(28)=rece(11); p_rece(29)=rece(11); p_rece(30)=rece(11); p_rece(31)=rece(11); p_rece(32)=rece(11); p_rece(33)=rece(11);	Elementos 23-33
%Raio externo componentes externos12 p_rece(34)=rece(12);	Elementos 34-36

```

p_rece(35)=rece(12);
p_rece(36)=rece(12);
%Raio externo componentes externos13      Elementos 37-38
p_rece(37)=rece(13);
p_rece(38)=rece(13);
%Raio externo componentes externos14      Elementos 39-40
p_rece(39)=rece(14);
p_rece(40)=rece(14);
%Raio externo componentes externos15      Elementos 41-46
p_rece(41)=rece(15);
p_rece(42)=rece(15);
p_rece(43)=rece(15);
p_rece(44)=rece(15);
p_rece(45)=rece(15);
p_rece(46)=rece(15);
%Raio externo componentes externos16      Elementos 47-49
p_rece(47)=rece(16);
p_rece(48)=rece(16);
p_rece(49)=rece(16);
%Raio externo componentes externos17      Elementos 50-52
p_rece(50)=rece(17);
p_rece(51)=rece(17);
p_rece(52)=rece(17);
%Raio externo componentes externos18      Elementos 53-54
p_rece(53)=rece(18);
p_rece(54)=rece(18);
%Raio externo componentes externos19      Elementos 55-57
p_rece(55)=rece(19);
p_rece(56)=rece(19);
p_rece(57)=rece(19);
%Raio externo componentes externos20      Elementos 58-59
p_rece(58)=rece(20);
p_rece(59)=rece(20);

```

%Raio interno componentes externos1 p_rice(1)=rice(1);	Elemento 1
%Raio interno componentes externos2 p_rice(2)=rice(2); p_rice(3)=rice(2); p_rice(4)=rice(2);	Elementos 2-4
%Raio interno componentes externos3 p_rice(5)=rice(3); p_rice(6)=rice(3);	Elementos 5-6
%Raio interno componentes externos4 p_rice(7)=rice(4); p_rice(8)=rice(4);	Elementos 7-8
%Raio interno componentes externos5 p_rice(9)=rice(5); p_rice(10)=rice(5);	Elementos 9-10
%Raio interno componentes externos6 p_rice(11)=rice(6);	Elemento 1
%Raio interno componentes externos7 p_rice(12)=rice(7); p_rice(13)=rice(7); p_rice(14)=rice(7); p_rice(15)=rice(7);	Elementos 12-15
%Raio interno componentes externos8 p_rice(16)=rice(8);	Elemento 16
%Raio interno componentes externos9 p_rice(17)=rice(9); p_rice(18)=rice(9); p_rice(19)=rice(9); p_rice(20)=rice(9);	Elementos 17-20
%Raio interno componentes externos10 p_rice(21)=rice(10); p_rice(22)=rice(10);	Elementos 21-22
%Raio interno componentes externos11 p_rice(23)=rice(11);	Elementos 23-33

p\_rice(24)=rice(11);  
 p\_rice(25)=rice(11);  
 p\_rice(26)=rice(11);  
 p\_rice(27)=rice(11);  
 p\_rice(28)=rice(11);  
 p\_rice(29)=rice(11);  
 p\_rice(30)=rice(11);  
 p\_rice(31)=rice(11);  
 p\_rice(32)=rice(11);  
 p\_rice(33)=rice(11);  
 %Raio interno componentes externos12                      Elementos 34-36  
 p\_rice(34)=rice(12);  
 p\_rice(35)=rice(12);  
 p\_rice(36)=rice(12);  
 %Raio interno componentes externos13                      Elementos 37-38  
 p\_rice(37)=rice(13);  
 p\_rice(38)=rice(13);  
 %Raio interno componentes externos14                      Elementos 39-40  
 p\_rice(39)=rice(14);  
 p\_rice(40)=rice(14);  
 %Raio interno componentes externos15                      Elementos 41-46  
 p\_rice(41)=rice(15);  
 p\_rice(42)=rice(15);  
 p\_rice(43)=rice(15);  
 p\_rice(44)=rice(15);  
 p\_rice(45)=rice(15);  
 p\_rice(46)=rice(15);  
 %Raio interno componentes externos16    Elementos 47-49  
 p\_rice(47)=rice(16);  
 p\_rice(48)=rice(16);  
 p\_rice(49)=rice(16);  
 %Raio interno componentes externos17    Elementos 50-52  
 p\_rice(50)=rice(17);  
 p\_rice(51)=rice(17);

```

p_rice(52)=rice(17);
%Raio interno componentes externos18 Elementos 53-54
p_rice(53)=rice(18);
p_rice(54)=rice(18);
%Raio interno componentes externos19 Elementos 55-57
p_rice(55)=rice(19);
p_rice(56)=rice(19);
p_rice(57)=rice(19);
%Raio interno componentes externos20 Elementos 58-59
p_rice(58)=rice(20);
p_rice(59)=rice(20);

cord_s(1)=0;
for iplot=1:npontos
    if iplot<npontos
        cord_s(iplot+1)=cord_s(iplot)+L/resolucao;
    endif
    iiplot=floor((iplot-1)/resolucao)+1;
    plot_re(iplot)=p_re(iiplot);
    plot_ri(iplot)=p_ri(iiplot);
    plot_resv(iplot)=p_resv(iiplot);
    plot_risv(iplot)=p_risv(iiplot);
    plot_rece(iplot)=p_rece(iiplot);
    plot_rice(iplot)=p_rice(iiplot);
endfor
plot2_re=-plot_re;
plot2_ri=-plot_ri;
plot2_resv=-plot_resv;
plot2_risv=-plot_risv;
plot2_rece=-plot_rece;
plot2_rice=-plot_rice;

figure(1)
plot(cord_s,plot_re)

```

```
axis([0,L*n,-L*n,L*n])
hold on
plot(cord_s,plot2_re)
hold on
plot(cord_s,plot_ri)
hold on
plot(cord_s,plot2_ri)
title('Propriedades de resistencia')

for i_raios=1:npontos
RAIOS(1,i_raios)=plot_re(i_raios);
RAIOS(2,i_raios)=plot_ri(i_raios);
RAIOS(3,i_raios)=plot_resv(i_raios);
RAIOS(4,i_raios)=plot_risv(i_raios);
endfor

figure(2)
plot(cord_s,plot_re)
axis([0,L*n,-L*n,L*n])
hold on
plot(cord_s,plot2_re)
hold on
plot(cord_s,plot_ri)
hold on
plot(cord_s,plot2_ri)
hold on
plot(cord_s,plot_resv)
hold on
plot(cord_s,plot2_resv)
hold on
plot(cord_s,plot_risv)
hold on
plot(cord_s,plot2_risv)
```

```
hold on
plot(cord_s,plot_rece)
hold on
plot(cord_s,plot2_rece)
hold on
plot(cord_s,plot_rice)
hold on
plot(cord_s,plot2_rice)
title('Propriedades de massa')
```

**5\_Mancais.m**

%Subrotina "5\_mancais.m"

% [K\_mancal] entra somando a matriz [K] ja existente

coef\_rig\_cruzada=0;           %coeficiente de rigidez cruzada

K\_mancais=zeros(p,p);

%MANCAL SUPERIOR

K\_7013=k\_7013\*[1, coef\_rig\_cruzada; coef\_rig\_cruzada , 1];

C\_7013=[c\_7013 0; 0 c\_7013];

elem\_7013=4\*(no\_7013-1)+1; % elemento Kyy do no indicado na matriz K

K\_mancais(elem\_7013,elem\_7013)=K\_7013(2,2);                           % Kyy

K\_mancais(elem\_7013,elem\_7013+1)=K\_7013(2,1);                       % Kyx

K\_mancais(elem\_7013+1,elem\_7013)=K\_7013(1,2);                       % Kxy

K\_mancais(elem\_7013+1,elem\_7013+1)=+K\_7013(1,1);                   % Kxx

C1(elem\_7013,elem\_7013)=C\_7013(2,2);                               % Cyy

C1(elem\_7013,elem\_7013+1)=C\_7013(2,1);                               % Cyx

C1(elem\_7013+1,elem\_7013)=C\_7013(1,2);                               % Cxy

C1(elem\_7013+1,elem\_7013+1)=C\_7013(1,1);                           % Cxx

%MANCAL INFERIOR

K\_NN3011=k\_NN3011\*[1, coef\_rig\_cruzada; coef\_rig\_cruzada , 1];

C\_NN3011=c\_NN3011\*[1 0; 0 1];

elem\_NN3011=4\*(no\_NN3011-1)+1;           % elemento Kyy do no indicado na matriz K

% [K\_mancal] entra somando a matriz [K] ja existente

K\_mancais(elem\_NN3011,elem\_NN3011)=K\_NN3011(2,2);                   % Kyy

K\_mancais(elem\_NN3011,elem\_NN3011+1)=K\_NN3011(2,1);               % Kyx

K\_mancais(elem\_NN3011+1,elem\_NN3011)=K\_NN3011(1,2);               % Kxy

K\_mancais(elem\_NN3011+1,elem\_NN3011+1)=K\_NN3011(1,1);           % Kxx

C1(elem\_NN3011,elem\_NN3011)=C\_NN3011(2,2);                           % Cyy

C1(elem\_NN3011,elem\_NN3011+1)=C\_NN3011(2,1);                       % Cyx

C1(elem\_NN3011+1,elem\_NN3011)=C\_NN3011(1,2);                       % Cxy

C1(elem\_NN3011+1,elem\_NN3011+1)=C\_NN3011(1,1);                   % Cxx



%Fresamento

K\_Fresamento=k\_Fresamento\*[1, coef\_rig\_cruzada; coef\_rig\_cruzada , 1];

C\_Fresamento=[c\_Fresamento 0; 0 c\_Fresamento];

elem\_Fresamento=4\*(no\_Fresamento-1)+1; %elemento Kyy do no indicado na matriz K

K\_mancais(elem\_Fresamento,elem\_Fresamento)=K\_Fresamento(2,2); % Kyy

K\_mancais(elem\_Fresamento,elem\_Fresamento+1)=K\_Fresamento(2,1); % Kyx

K\_mancais(elem\_Fresamento+1,elem\_Fresamento)=K\_Fresamento(1,2); % Kxy

K\_mancais(elem\_Fresamento+1,elem\_Fresamento+1)=K\_Fresamento(1,1); % Kxx

C1(elem\_Fresamento,elem\_Fresamento)=C\_Fresamento(2,2); % Cyy

C1(elem\_Fresamento,elem\_Fresamento+1)=C\_Fresamento(2,1); % Cyx

C1(elem\_Fresamento+1,elem\_Fresamento)=C\_Fresamento(1,2); % Cxy

C1(elem\_Fresamento+1,elem\_Fresamento+1)=C\_Fresamento(1,1); % Cxx

%Acionamento

K\_Acionamento=k\_Acionamento\*[1, coef\_rig\_cruzada; coef\_rig\_cruzada , 1];

C\_Acionamento=[c\_Acionamento 0; 0 c\_Acionamento];

elem\_Acionamento=4\*(no\_Acionamento-1)+1; % elemento Kyy do no indicado em K

K\_mancais(elem\_Acionamento,elem\_Acionamento)=K\_Acionamento(2,2); % Kyy

K\_mancais(elem\_Acionamento,elem\_Acionamento+1)=K\_Acionamento(2,1); % Kyx

K\_mancais(elem\_Acionamento+1,elem\_Acionamento)=K\_Acionamento(1,2); % Kxy

K\_mancais(elem\_Acionamento+1,elem\_Acionamento+1)=K\_Acionamento(1,1); % Kxx

C1(elem\_Acionamento,elem\_Acionamento)=C\_Acionamento(2,2); % Cyy

C1(elem\_Acionamento,elem\_Acionamento+1)=C\_Acionamento(2,1); % Cyx

C1(elem\_Acionamento+1,elem\_Acionamento)=C\_Acionamento(1,2); % Cxy

C1(elem\_Acionamento+1,elem\_Acionamento+1)=C\_Acionamento(1,1); % Cxz