

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Engenharia de Produção

Bruna Amin Gonçalves

**Análise de Séries Temporais Via Grafo de Visibilidade
Horizontal e Teoria da Informação.**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção do Departamento de Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Produção.

Orientador: *Prof. Dr. Martín Gómez Ravetti*
Co-orientador: *Prof. Dr. Osvaldo Anibal Rosso*

Belo Horizonte
Abril de 2016

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por minha vida e pelas coisas boas que conquistei nos últimos anos.

Ao meu orientador, Martin Gomez Ravetti, que considero um exemplo de professor e uma grande pessoa, pelos ensinamentos, dedicação, paciência, incentivo, disponibilidade e apoio. Obrigada por tudo!

Aos professores Laura Carpi e Osvaldo Rosso, por todo apoio e dedicação nesse trabalho. Obrigada por tudo!

Aos professores da banca, pela participação e sugestões nas correções. Aos professores do Doutorado em Engenharia de Produção, pelos ensinamentos.

Ao Leandro, pelo apoio, amor e paciência durante o trabalho.

À minha família, principalmente meus Pais e minha querida avó Deny (in memorian), com os quais dividi muitos momentos de alegria.

Às amigas que adoro, Ellen e Cristina, pelas horas de estudo, apoio, confiança e paciência.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo

O método chamado de Grafo de Visibilidade Horizontal (*Horizontal Visibility Graph* - HVG) [B Luque *et al.*, Phys. Rev. E 80: 046103 (2009)], tem como função transformar uma série temporal em um grafo. Este método vem sendo utilizado para estudar diversos sistemas dinâmicos e também como uma ferramenta de distinção entre sistemas caóticos e estocásticos [L Lacasa, R Toral, Phys. Rev. E. 82: 036120 (2010)]. Especificamente, neste trabalho, os autores propõem que a distribuição do grau pelo mapeamento utilizando HVG segue uma função exponencial $P(\kappa) \sim \exp(-\lambda \kappa)$, em que κ é o grau do nodo e λ é um parâmetro positivo para fazer a distinção entre dinâmicas estocásticas e dinâmicas caóticas. Primeiramente, neste trabalho investigamos as características da distribuição do grau utilizando o HVG para vários sistemas caóticos e estocásticos e observamos que, mesmo que essa metodologia funcione, são encontrados vários exemplos em que os resultados divergem daqueles esperados. Na sequência, propomos uma metodologia que combina o HVG com quantificadores da Teoria da Informação, com o objetivo de diferenciar a natureza determinística da estocástica por trás dos sistemas em estudo. Especificamente, mostramos que, utilizando o plano causal Shannon-Fisher, é possível caracterizar, através das posições no plano, a natureza dos sistemas. Logo depois, analisamos os sistemas de natureza estocástica, utilizando quantificadores tradicionais de redes, por meio dos quais foi possível a distinção entre os diferentes graus de estruturas de correlações. Através da função de distribuição do grau pelo mapeamento utilizando o HVG das séries temporais do Movimento Browniano Fracionário (fBm), mostramos, também, uma possível metodologia para a aproximação do valor do expoente de Hurst. Em seguida, propomos duas versões adaptadas do método HVG. A primeira, nomeada HVG-Windows, é uma versão computacionalmente mais rápida, que utiliza janelas de pontos para a realização das análises das séries temporais. Após uma extensiva experimentação, mostramos que, por essa nova versão, a série temporal não perde informação com a inclusão das janelas de tempo. A segunda, nomeada HVG-Peso, apresenta forma de mapeamento idêntica à do HVG, contudo é acrescentado o cálculo do peso da aresta, definido pela amplitude entre dois pontos que obedecem ao critério de visibilidade, o que possibilita a extração de uma distribuição alternativa (a distribuição do peso das arestas). Assim, propomos uma maneira diferente de extrair informação de uma série a partir de uma rede construída, comparada à distribuição da distância e à maneira usual pela distribuição do grau. Ao final, mostramos a eficiência da distribuição do peso ao estudarmos aqui as séries temporais do Movimento Browniano Fracionário e dados paleoclimáticos das mudanças temporais durante a época Holoceno pelos registros proxy ENSO milenar, comparando os resultados com a distribuição da distância e do grau.

Palavras-chave: Grafo de Visibilidade Horizontal, Teoria da Informação, Redes Complexas, Sistemas Caóticos, Processos Estocásticos

Abstract

The method called Horizontal Visibility Graph (*Horizontal Visibility Graph* - HVG) [B Luque *et al.*, Phys. Rev. E 80: 046103 (2009)], has the function of converting a time series into a graph. This method has been used to study several dynamical systems and as a distinction tool between chaotic and stochastic systems [L Lacasa, R Toral, Phys. Rev. E. 82: 036120 (2010)]. Specifically, the authors propose the degree distribution of the resulting degrees follows an exponential function $P(\kappa) \sim \exp(-\lambda \kappa)$, wherein κ and the node degree and λ is a positive parameter to distinguish between stochastic dynamics and chaotic dynamics. In this paper, we first investigated the distribution characteristics of the degree using the HVG to several chaotic and stochastic systems and observe that, even if this methodology works, several examples are found wherein results differ from those expected. Then we propose a methodology that combines HVG with Information Theory quantifiers, in order to distinguish the deterministic nature of the stochastic behind the systems under study. Specifically, we showed that, by using the causal Shannon-Fisher plane, it is possible to characterize, by the positions on the plane, the nature of the systems. After that, we analyzed the stochastic nature systems using traditional quantifiers of networks, through which it was possible to distinguish among the different degrees of correlation structures. We also showed, through the degree distribution function by mapping with HVG of Fractional Brownian Motion (fBm) time series, a possible methodology for approaching the value of the Hurst exponent. Then we propose two adapted versions of the HVG method. The first one, called HVG-Windows, is a computationally faster version, which uses point windows to perform the analysis of time series. After extensive experimentation, we showed that, in this new version, time series does not lose information with the inclusion of time windows. In the second one, called HVG-weight, the way of mapping is identical to the HVG. However, we also calculate the edge weight, defined by the amplitude between two points that meet the visibility criteria, which allows the extraction of an alternative distribution (distribution of the edge weight). Thus, we propose a different way to extract series information from a built network, compared to the distance distribution and the usual way through the degree distribution. Finally, we showed the weight distribution efficiency by studying here the Fractional Brownian Motion (fBm) time series and paleoclimatic data of temporal changes during the Holocene age by Millennial Proxy Record of ENSO, comparing the results with the distance and degree distribution.

Keywords: Horizontal Visibility Graph, Information Theory, Complex Network, Chaotic Systems, Stochastic Systems.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	2
1.2	Publicações	3
1.3	Organização do Trabalho	3
1.4	Relevância do Trabalho para Engenharia de Produção	3
2	Materiais e Métodos	5
2.1	Métodos de Transformação de Séries Temporais em Grafos	5
2.1.1	Método de Zhang <i>et al.</i>	6
2.1.2	Método do Grafo Quantil (QG)	6
2.1.3	Grafo de Visibilidade (VG)	6
2.1.4	Grafo de Visibilidade Horizontal (HVG)	8
2.2	Redes Complexas	8
2.3	Quantificadores da Teoria da Informação	12
2.3.1	Entropia de Shannon	12
2.3.2	Medida de Informação de Fisher	13
2.3.3	Divergência de Jensen Shannon	14
2.3.4	Complexidade Estatística	15
2.4	Estimadores da Função de Distribuição de Probabilidade	16
2.4.1	Histograma	16
2.4.2	Bandt e Pompe	17
2.4.3	PDF utilizando VG e HVG	18
3	Caracterização de Sistemas Dinâmicos	21
3.1	Sistemas Caóticos e Sistemas Estocásticos	21
3.1.1	Sistemas Caóticos	21
3.1.1.1	Mapas Caóticos	22
3.1.1.2	Atratores	23
3.1.1.3	Fluxos Caóticos	24
3.1.2	Sistemas Estocásticos	25
3.1.2.1	Ruídos com Espectro de Potência f^{-k} :	25
3.1.2.2	Movimento Browniano Fracionário (fBm) e Ruído Gaussiano Fracionário (fGn)	26
3.1.2.3	Contaminação por Ruído	27
4	Revisão Bibliográfica	29

5	Metodologias Propostas e Resultados	35
5.1	Regra do Lambda λ	36
5.1.1	Cálculo do Lambda λ	36
5.1.2	Assimetria e Curtose	38
5.1.3	Discussões e Conclusões Parciais da Regra do Lambda λ	42
5.2	Plano Causal Shannon-Fisher	44
5.2.1	Análise e Discussões do Plano Causal Shannon-Fisher	45
5.2.2	Conclusões Parciais sobre do Plano Causal Shannon-Fisher	49
5.3	Análise Topológicas das Redes	50
5.3.1	Cálculo dos Quantificadores de Redes	50
5.3.2	Conclusões Parciais sobre os Quantificadores de Redes	53
5.4	Métodos de Aproximação do Expoente de Hurst	54
5.4.1	Análise dos Métodos	57
5.4.2	Metodologia Lambda λ para o Cálculo do Expoente de Hurst H	59
5.4.3	Comparação das Metodologias que Aproximam o Valor do Expoente de Hurst H	61
5.4.4	Discussões e Conclusões Parciais sobre Métodos que Aproximam o Expoente de Hurst	63
5.5	Grafo de Visibilidade Horizontal Windows (HVG-W)	64
5.5.1	Análise do Números de Operações do Algoritmo HVG-W	66
5.5.2	Análise do HVG-W	67
5.5.3	Conclusões Parciais do HVG-W	71
5.6	Grafo de Visibilidade Horizontal Peso (HVG-P)	71
5.6.1	Avaliação do Plano Causal Shannon-Fisher por três Distribuições	72
5.6.2	Aplicação a Redes Climáticas	76
5.6.2.1	Análise do Resultados de Redes Climáticas	77
5.6.3	Conclusões Parciais do HVG-P	82
6	Conclusão Geral e Perspectivas Futuras	83
7	Anexos	85
7.1	Mapas Caóticos	85
7.1.1	Mapas não inversíveis	85
7.1.2	Mapas Dissipativos	89
7.1.3	Mapas Conservativos	93
7.2	Resultados do λ e Teoria da Informação para todos os sistemas	96
7.3	Plano Causal Shannon-Fisher	104
7.4	Métodos de Aproximação do Expoente de Hurst	106
7.5	Avaliação do Plano Causal Shannon-Fisher por três Distribuições	108
7.6	Aplicação do HVG Juntamente com Teoria da Informação no Estudo da Dinâmica do Clima	110
7.7	Algoritmos utilizados	110

Lista de Figuras

2.1	Série temporal e seu mapeamento pelo VG.	7
2.2	Série temporal e mapeamento pelo HVG.	9
2.3	Série temporal e mapeamento pelo HVG e as distribuições grau e distância.	19
3.1	Mapa Caótico de Lorenz.	23
5.1	Cálculo dos valores do λ para os mapas caóticos não inversíveis, dissipativos, conservativos e de Schuster das PDFs determinados pelo HVG.	38
5.2	Cálculo dos valores do λ para os processos estocásticos fBm, fGn e ruído com f^{-k} das PDF's do grau determinados pelo HVG.	39
5.3	Determinação dos valores de λ : Exemplos de sistemas dinâmicos analisados em escalonamento linear bem definido na região.	40
5.4	Determinação dos valores de λ no caso de séries temporais geradas pela dinâmica estocástica de f^{-k} com $k = 1.75$.	41
5.5	Casos com determinação dos valores de λ em escalonamento linear mal definido na região.	42
5.6	Exemplos de PDF para alguns sistemas caóticos e estocásticos.	43
5.7	Estudo do efeito do tamanho da série no cálculo dos quantificadores de Teoria de Informação.	45
5.8	Representação do plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, para todos os sistemas dinâmicos.	46
5.9	Representação do plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$. Zoom da Figura 5.8.	47
5.10	Representação do plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$. Zoom da Figura 5.9.	48
5.11	Representação do plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, para o Mapa Logístico (comportamento caótico, $\rho = 4$), com aditivo ruído branco e amplitude A .	49
5.12	Representação do caminho mínimo L , coeficiente de agrupamento C , medida de centralidade B medida de proximidade CC versus H para fGn.	51
5.13	Representação do caminho Mínimo L , coeficiente de agrupamento C , medida de centralidade B medida de centralidade e <i>closeness</i> CC versus k para Ruídos com Espectro de Potência f^{-k} .	52
5.14	Caminho mínimo L e medida de proximidade CC em função do índice do expoente de Hurst H dos fBm's.	54
5.15	Coeficiente de agrupamento C e medida de centralidade B em função do índice do expoente de Hurst H do fBm.	55
5.16	Medida <i>assortatively</i> r , em função do índice do expoente de Hurst H dos fBms.	56
5.17	PDF do grau para cada índice do expoente de Hurst H dos fBm's pelo VG.	57

5.18	Valor médio de γ para cada índice H dos fBm's pelo VG.	58
5.19	Função $\Delta(k) \propto k^H$ do método QG para $N = 10^4$ com $q = 50$.	59
5.20	Aproximação de H em Função $\Delta(k) \propto k^H$ do método QG.	60
5.21	PDF's do grau para cada índice do expoente de Hurst H dos fBm's para $N = 10^5$.	61
5.22	Valor médio de λ para cada índice H .	62
5.23	Comparação dos resultados obtidos por todas as metodologias de aproximação do expoente de Hurst.	63
5.24	Série mapeadas pelo HVG e HVG-W.	65
5.25	Grafo associado a uma série periódica e uma série aleatória pelo HVG-W.	67
5.26	Função de distribuição do grau do grafo associado aos fBm's pelo HVG-W.	68
5.27	Valores médio do lambda em função de H para os fBm usando o HVG-W.	69
5.28	Plano Plano Causal Shannon-Fisher ($S \times \mathcal{F}$) para o fBm usando o HVG-W.	70
5.29	Caminho mínimo L , em função do índice do expoente de Hurst H dos fBm's usando o HVG-W.	70
5.30	Grafo associado a série abaixo pelo HVG-P.	73
5.31	Plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, para o fBm das três distribuições pelo HVG.	74
5.32	Gráfico da função de distribuição de probabilidade das três distribuições para o fBm.	75
5.33	Plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, das três PDF's para $N = 10^3$.	76
5.34	Dados proxy ENSO recuperados do Lago Laguna Pallcacocha.	79
5.35	Entropias S e \mathcal{F} dos dados proxy ENSO utilizando a três distribuições pelo HVG.	80
5.36	Plano Shannon-Fisher dos registros proxy ENSO pela distribuição do peso.	81
5.37	Caminho mínimo L do grafo gerado pelo HVG no mapeamento dos registros proxy ENSO.	82
7.1	Representação gráfica dos mapas não inversíveis.	88
7.2	Representação gráfica dos mapas dissipativos.	92
7.3	Representação gráfica dos mapas conservativos.	94
7.4	Valor do λ para todos os mapas não invertíveis.	95
7.5	Valor do λ para todos os mapas dissipativos.	98
7.6	Valor do λ para todos os mapas conservativos.	100
7.7	Valor do λ para todos os mapas schuster.	101
7.8	Valor do λ para todos os k-ruídos.	102
7.9	Valor do λ para todos os ruídos fGn.	103
7.10	Valor do λ para todos os ruídos fBm.	104
7.11	Valores da entropia de Shannon (S), Jensen- Shannon (JS), MPR e Fisher \mathcal{F} em função do índice do expoente de Hurst (H) do fBm.	105
7.12	Valores da entropia de Shannon (S), Jensen- Shannon (JS), MPR e Fisher \mathcal{F} em função do índice do expoente de Hurst (H) do fGn.	106
7.13	Equação que relaciona λ em função do índice H .	107
7.14	Equação que relaciona λ em função do índice H .	108
7.15	Representação do plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, para fBm, em função de H , pela função de distribuição do grau.	109
7.16	Plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, das três PDF para $N = 10^4$ do fBm.	110

7.17 Plano Shannon-Fisher dos registros proxy ENSO pelas distribuições do grau e distância.

111

Lista de Tabelas

5.1	Sistemas dinâmicos e alguns valores de seus quantificadores estatísticos e do $\hat{\lambda}$	44
-----	---	----

Lista de Abreviaturas

HVG	Grafo de Visibilidade Horizontal
VG	Grafo de Visibilidade
PDF	Função de Distribuição de Probabilidade
QG	Método do Grafo Quantil
fBm	Movimento Browniano Fracionário
fGn	Ruído Gaussiano Fracionário
HVG-W	Grafo de visibilidade Horizontal Windows
HVG-P	Grafo de visibilidade Horizontal Peso
DFA	Detrended Fluctuation Analysis
MLE	Estimativa de Máxima Verossimilhança
ENSO	<i>El Niño–Southern Oscillation</i>
RCC	Períodos de Mudanças Climáticas
BP	<i>Before Present</i>

Lista de Símbolos

λ	teste
κ	Grau do nó
L	Caminho Mínimo
C	Coefficiente de Agrupamento
B	Medida de Centralidade
CC	Medida de proximidade
r	Coefficiente de <i>Assortativity</i>
S	Entropia de Shannon
\mathcal{H}	Entropia de Shannon Normalizada
\mathcal{F}	Medida de Informação de Fisher
JS	Divergência de Jensen Shannon
C_{JS}	Complexidade Estatística (MPR)
P_{grau}	Função de Distribuição do Grau
P_{δ}	Função de Distribuição da Distância
P_w	Função de Distribuição do Peso
η	Expoente de Lyapunov
T	Número de Nós
D	Dimensão
N	Comprimento da Série Temporal
H	Expoente de Hurst
λ	Parâmetro da Distribuição do Grau do HVG
γ	Parâmetro da Distribuição do Grau do VG
$\hat{\gamma}_1$	Assimetria
$\hat{\gamma}_2$	Curtose
n	Janela de Tempo
w	Peso das Arestas

CAPÍTULO 1

Introdução

Séries temporais podem ser definidas como medições ou observações feitas sequencialmente ao longo do tempo, sobre uma variável de interesse. Por meio de sua análise, podem ser extraídas informações importantes para o entendimento sobre a dinâmica dos processos subjacentes. Na literatura, diversos trabalhos propostos baseiam suas pesquisas na análise de séries temporais, como no caso da detecção de ataques epiléticos [1, 2], sistemas climáticos [3–5], sistemas financeiros [6–9], dentre outros.

Séries temporais extraídas de sistemas caóticos compartilham várias propriedades semelhantes àquelas extraídas de sistemas estocásticos, tornando sua classificação e caracterização uma tarefa árdua e difícil e atraindo, por isso, a atenção de um grande número de pesquisadores. Dentre as propriedades das séries temporais, podem ser citadas largura de banda, densidade espectral (*power spectrum* PS), valores da função de auto - correlação e comportamento irregular na medição de sinais. O comportamento irregular é aparentemente imprevisível, quando observado em séries temporais naturais, emergindo, então, um questionamento importante: a série analisada é caótica (determinística de baixa dimensão) ou estocástica? A determinação da natureza do sistema permite, então, a melhor descrição de sua dinâmica pertinente. Dessa forma, a discriminação entre processos estocásticos e caóticos tem se tornado um dos problemas mais difíceis e atraentes em análise de séries temporais, pois ambos os processos compartilham muitas características e a diferença entre eles é realmente muito sutil.

Devido ao grande interesse pela distinção entre esses processos, muito esforço vem sendo empenhado na busca de se descobrir a causa da imprevisibilidade que rege esses sistemas. Diversos métodos, ao longo dos anos, têm sido propostos para a distinção entre processos estocásticos e caóticos, como o método Grassberger e Procaccia, em [10], o qual determina a dimensão de correlação de um atrator, e que, junto com suas variações, tem sido muito utilizado para a análise de distinção entre sistemas dinâmicos [11, 12]; o método da entropia aproximada para estimar a entropia de Kolmogorov - Sinai [13], proposto por Pincus, em [14]; os métodos que calculam o expoente de Lyapunov para essa distinção, como a metodologia de Gao e Hu, em [15], baseados na escala dependente do expoente de Lyapunov (SDLE). Esses métodos ganharam muita visibilidade ao longo dos anos e muito se tem estudado sobre eles.

Como métodos mais alternativos, citamos Elisner, em [16], método que utiliza redes neurais, e Qinglei *et al.*, em [17], método baseado na Lei de Benford (BL). Este último foi proposto muito recentemente e, em uma primeira análise dos autores, mostrou-se promissor para o estudo de séries temporais.

Especialmente, destacamos a metodologia proposta por Rosso *et al.*, em [18], para a distinção entre processos estocásticos e caóticos. Consideraram dois quantificadores da Teoria da Informação, a entropia normalizada de Shannon e a complexidade estatística, formando o plano

de causalidade o qual são avaliados utilizando a metodologia Bandt e Pompe [19] (método que converte uma série temporal em uma função de distribuição de probabilidade (PDF)). Seguindo a mesma linha, Olivares *et al.*, em [20], propuseram também a utilização do plano de causalidade formado, no entanto, pela entropia normalizada de Shannon com outro quantificador da Teoria da Informação, a informação de Fisher, denominado plano causal Shannon-Fisher [21].

O uso de quantificadores da Teoria da Informação juntamente com o método Bandt e Pompe para ambas as metodologias, em [18] e [20], levaram a resultados promissores sobre as características da dinâmica caótica não linear e auxiliaram na compreensão da sua série temporal associada [22–26]. Ressaltamos também o sucesso na caracterização de sistemas dinâmicos da combinação de quantificadores da Teoria da Informação com utilização de outros métodos já citados acima.

Adicionalmente, métodos foram propostos para converter uma série temporal em um grafo. A partir desta transformação, são também apresentadas metodologias para a distinção entre processos estocásticos e caóticos [27–33]. Destacamos Lacasa e Toral, em [32], que estudaram o problema entre séries temporais caóticas e estocásticas, utilizando o método Grafo de Visibilidade Horizontal (HVG).

O método HVG proposto por Luque *et al.*, em [34], transforma uma série temporal em um grafo, sendo uma versão adaptada e computacionalmente mais rápida do Grafo de Visibilidade (VG) [35]. Ademais, o HVG incorpora, de uma maneira natural, a causalidade temporal, que é um componente fundamental na construção e avaliação de quantificadores da Teoria da Informação no nosso trabalho.

A transformação de uma série temporal num grafo é promissora devido ao grande número de ferramentas desenvolvidas na teoria dos grafos [36–38]. Uma característica importante dessa transformação é a possibilidade de extração de informações através da análise de diferentes funções de distribuições (PDF), tais como a clássica distribuição de grau, a distribuição de distância, a distribuição de agrupamento, a distribuição de subgrafos, dentre outras possíveis. Torna-se possível, assim, com o auxílio de alguma distribuição, a junção do HVG com quantificadores da Teoria da Informação, ou seja, uma nova perspectiva para a análise de séries temporais. Além do mais, essa transformação permite o uso de quantificadores de redes, criando diferentes possibilidades de análise da série temporal.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é propor uma metodologia que combine o grafo de visibilidade horizontal (HVG) com quantificadores da Teoria da informação, tornando possível distinguir e quantificar diferentes sistemas dinâmicos. Seguindo essa metodologia, extraem-se funções de distribuição de probabilidade das séries mapeadas, funções por meio das quais serão calculadas medidas de entropia para a avaliação do sistema.

Para tanto, este trabalho apresenta os seguintes objetivos específicos:

- Avaliar a metodologia proposta por Lacasa e Toral em [32];
- Propor uma metodologia baseado no HVG para a distinção entre a dinâmica estocástica e a caótica, além de distinguir os diferentes graus de correlação;
- Analisar os quantificadores clássicos de redes na avaliação das séries temporais mapeadas;

- Avaliar a eficiência de diferentes possibilidades de extração das distribuições de probabilidade pelo HVG;
- Propor uma versão computacionalmente mais eficiente que a versão do algoritmo HVG;
- Utilizar essa metodologia em uma aplicação e mostrar sua funcionalidade.

1.2 Publicações

Durante o período de estudo do doutorado foi apresentado um trabalho intitulado: *Distinguishing noise from chaos using the visibility graph and information theory*, na Conferência “Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics”, na cidade de Santiago do Chile em 2012. Em 2013, foi submetido o artigo intitulado *Distinguishing Noise from Chaos: Objective versus Subjective Criteria Using Horizontal Visibility Graph*, na revista PLOS ONE (revista a qual o qualis é A1 para engenharias III), tendo sido este artigo aceito e publicado em 2014 [39].

Recentemente, em 2016, foi submetido, o artigo intitulado: *Time Series Characterization via Horizontal Visibility Graph and Information Theory*, na revista Physica A (revista a qual o qualis é A2 para engenharias III), artigo o qual se encontra em análise [40].

Estamos iniciando a preparação de um terceiro artigo baseado nos resultados apresentados na seção 5.4.

1.3 Organização do Trabalho

No Capítulo 2, são apresentados os principais conceitos que foram utilizados no decorrer do trabalho; no Capítulo 3, são descritos os sistemas dinâmicos utilizados como teste; no Capítulo 4, é apresentada a revisão bibliográfica; no Capítulo 5, são descritas todas as metodologias propostas, as correlações das redes obtidas pelo HVG e duas versões do algoritmo HVG propostas. São, também, apresentados os testes computacionais associados e as discussões. Após isso, apresenta-se uma aplicação da Teoria da Informação juntamente com a distribuição do grau, da distribuição da distância e a distribuição do peso na dinâmica das mudanças temporais do ENSO durante a época Holoceno. Conclusões e perspectivas futuras são apresentadas no Capítulo 6. Por último, são apresentados os alguns resultados no anexo no Capítulo 7.

1.4 Relevância do Trabalho para Engenharia de Produção

Em Engenharia de Produção, é muito comum a realização da previsão da demanda de uma empresa. Contudo, para um estudo adequado dessa previsão, é necessário realizar inicialmente uma coleta de dados de vendas realizadas e vendas perdidas, em função do tempo, além de coletar eventos futuros que poderiam influenciar essas previsões. Todos esses dados são representados por uma série temporal. Nos últimos anos, modelos de previsão de séries temporais, como (modelos autorregressivos integrados de médias móveis), foram propostos e têm sido extensivamente usados por engenheiros de produção. Os padrões básicos da maioria das séries

temporais de demanda são:

- flutuação dos dados em torno de uma média constante; - aumento ou diminuição sistemáticos na média das séries ao longo dos tempos; - um padrão repetido de aumentos ou de reduções graduais da demanda, dependendo da hora do dia, da semana, do mês ou da estação;
- aumentos ou diminuições graduais da demanda menos previsíveis em períodos mais longos de tempo (anos ou décadas); - uma variação da demanda que não pode ser prevista.

Assim, a busca de novas ferramentas para análise de séries temporais é também de suma importância para a Engenharia de Produção. As ferramentas propostas no presente trabalho para análise de séries temporais podem ser utilizadas em qualquer área do conhecimento em que suas variáveis são analisadas por séries temporais.

Materiais e Métodos

2.1 Métodos de Transformação de Séries Temporais em Grafos

Série temporal é uma coleção de observações sobre uma variável de interesse. A variável é observada em pontos temporais ordenados e não necessariamente igualmente espaçados; além disso, apresentam dependência entre os instantes de tempo. Em diversas áreas do conhecimento, como engenharias, economia, medicina e geografia, algumas das variáveis em estudo podem ser avaliadas, em função do tempo, pela representação em uma série temporal [1–9]. O objetivo de tal estudo é que, por meio da análise de séries temporais, seja possível extrair informações para o entendimento sobre a dinâmica do sistema e possibilite, até mesmo, a previsões de valores futuros a partir do comportamento passado, orientando possíveis tomadas de decisões.

Nos últimos anos, foram propostos métodos de mapeamento de séries temporais em grafos [27, 30, 33–35]. Devido a diversos avanços na pesquisa da teoria dos grafos nos últimos anos [36–38], essa transformação mostra-se bastante promissora, pois permite a utilização dessas ferramentas desenvolvidas com o propósito de investigar, quantificar e analisar essas séries temporais. Dessas ferramentas, destacam-se os quantificadores de rede, como os cálculos do caminho mínimo, do coeficiente de agrupamento, medida de centralidade, medida de proximidade, do coeficiente de *assortativity*, dentre outros [36–38]. Ademais, possibilita diferentes formas de extração de funções de distribuições de probabilidade (PDF) (como do grau, da distância, do peso, de subgrafos, dentre outras). Assim, por essas PDF's, podem ser utilizadas tanto na avaliação de quantificadores da Teoria da Informação quanto na análise dos parâmetros da função que descreve a relação entre a PDF e a variável em estudo.

Entre os métodos propostos para o mapeamento de uma série temporal em um grafo, citamos o método de Zhang *et al.*, em [27], o algoritmo de visibilidade (VG) sugerido por Lacasa *et al.*, em [35], o algoritmo de visibilidade horizontal (HVG) proposto por Luque *et al.*, em [34] e o método QG proposto por Campanharo *et al.*, em [33].

Na literatura a respeito do tema, destacamos o sucesso dos métodos VG e HVG em descrever uma vasta gama de fenômenos pertencentes a diferentes áreas do conhecimento. São citados e propostos em diversos trabalhos, por exemplo, taxas de dissipação de energia [50], doença de Alzheimer [51], análise de sequências sísmicas [52], séries geofísicas [5], distinção do autismo em crianças [53], cadeias de markov [54], séries temporais financeiras [8, 55, 56], dentre outras aplicações.

Pelas características apresentadas no decorrer do texto referente ao HVG, optamos por trabalhar com este método. Ao compará-lo com outros métodos, tem-se que este é computacionalmente mais rápido que o VG [34]; pode ser usado para qualquer série (diferente do método de

Zhang que é apropriado apenas para séries periódicas); e não é preciso uma definição arbitrária de constantes antes de iniciar o algoritmo (como no método QG em que, antes de inicializar, é necessário escolher arbitrariamente um quantil q e o valor de k).

Nas seções a seguir, descrevemos um pouco de cada método.

2.1.1 Método de Zhang *et al.*

Zhang *et al.*, em [27], propuseram um método de mapeamento de séries temporais pseudoperiódicas, em que os dados das séries são divididos em ciclos disjuntos C_1, C_2, \dots, C_m de acordo com o mínimo ou máximo local e, em seguida, cada ciclo C_i é considerado um nó da rede. A conexão entre os nós (ciclos C_i e C_j) com comprimento l_i e l_j é estabelecida por um limiar D_{ij} de distância no espaço de fase, definido por :

$$D_{ij} = \min_{l=0,1,\dots,l_j-l_i} \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{l_i} |X_k - Y_{k+l}| \quad (2.1)$$

Em que X_k e Y_k são pontos dos ciclos C_i e C_j , respectivamente. Alternativamente, a conexão pode ser definida por meio do coeficiente de correlação linear p_{ij} entre dois ciclos, assim a conexão entre os nós (ciclos C_i e C_j) é dada por:

$$p_{ij} = \max_{l=0,1,\dots,l_j-l_i} \frac{\text{Cov}[C_i(1:l_i), C_j(1+l:l_{i+1})]}{\sqrt{V[C_i(1:l_i)]} \sqrt{V[C_j(1+l:l_{i+1})]}}, \quad (2.2)$$

$C_i(a:b)$ indica o segmento entre a e b , e Cov a covariância.

2.1.2 Método do Grafo Quantil (QG)

Campanharo *et al.*, em [33], propuseram um método de mapeamento em que séries temporais são tratadas como processos de Markov, denominado o método do grafo quantil (QG). Os valores da série temporal são agrupados em quantis q , e cada quantil q corresponde aos nós do grafo. Além disso, as conexões são determinadas pela probabilidade de transição de um modelo de Markov, da seguinte maneira:

Sempre que dois valores $x(t)$ e $x(t+k)$ pertencerem aos quartis q_i e q_j , respectivamente, com $t = 1, 2, \dots, T$ e as diferenças de tempo $k = 1, \dots, k_{max} < T$, os pesos são contabilizados pelo número de vezes que um valor no quartil q_i no tempo t é seguido por um ponto no quartil q_j pelo tempo $t+k$. Em seguida, esses valores são normalizados formando a matriz de adjacência. Logo, as arestas são ponderadas e direcionadas, de forma que o peso é determinado por essa probabilidade de transição de um modelo de Markov.

2.1.3 Grafo de Visibilidade (VG)

Lacasa *et al.*, [35], propuseram o método chamado Grafo de Visibilidade (VG) para o mapeamento de uma série temporal em um grafo. No VG, os nós estão na mesma ordem que o

conjunto de dados da série temporal correspondente. Se uma linha reta que liga dois dados da série não cruza a altura dos termos intermediários entre eles, os nós correspondentes são conectados por um vértice, isto é, existe visibilidade entre esses dados. Formalmente, estabelece-se o seguinte critério de visibilidade: dois valores arbitrários da série temporal (t_a, y_a) e (t_b, y_b) terão visibilidade e, conseqüentemente, se tornarão dois nós conectados por uma aresta no grafo associado, se todos os outros termos (t_c, y_c) intermediários entre eles cumprirem a relação (2.3), como mostrado na Figura 2.1:

$$y_c < y_b + (y_a - y_b) \frac{(t_b - t_c)}{(t_b - t_a)}. \quad (2.3)$$

Algumas propriedades referentes ao grafo associado no mapeamento da série temporal, são listados abaixo:

1. *Conexo*: cada nó está conectado, pelo menos, aos seus vizinhos mais próximos (à esquerda e à direita);
2. *Arestas não dirigidas*: segundo a proposta de como o algoritmo é construído, não há definição das direções nas arestas.
3. *Invariante sob transformações afins dos dados da série*: o critério de visibilidade é invariante sob redimensionando tanto os eixos horizontais e verticais.

Em [35], foi testada a viabilidade do método a partir de séries periódicas, aleatórias e fractais, para a caracterização das séries temporais. Usaram-se ferramentas da teoria dos grafos, especificamente o grau da distribuição gerado pelo mapeamento. Foi demonstrado que esse grafo associado herda estruturas das séries temporais mapeadas. Conclui-se que as séries periódicas são convertidas em grafos regulares, séries aleatórias em grafos aleatórios, e séries fractais em grafos livres de escala.

2.1.4 Grafo de Visibilidade Horizontal (HVG)

Luque *et al.*, em [34], propuseram uma versão geometricamente mais simples e computacionalmente mais eficiente que a versão do algoritmo VG, com o foco também no mapeamento de séries temporais. Sua visibilidade, mais restrita do que o caso geral análogo, é analisada através de retas horizontais e, por isso, é nomeado como grafo de visibilidade horizontal. Isto é, os nós no HVG terão menos visibilidade do que dentro do grafo em VG. Embora tal fato não tenha impacto sobre os aspectos qualitativos dos grafos, a simplicidade da versão do algoritmo horizontal permite que seja aplicado a séries muito longas. De maneira similar, no HVG, as séries periódicas são convertidas em grafos regulares, séries aleatórias em grafos aleatórios, e séries fractais em grafos livres de escala.

No método HVG, similar ao VG, os nós também estão na mesma ordem que o conjunto de dados da série temporal correspondente. Se uma linha horizontal que liga dois dados da série não cruza a altura dos termos intermediários entre eles, os nós correspondentes são conectados

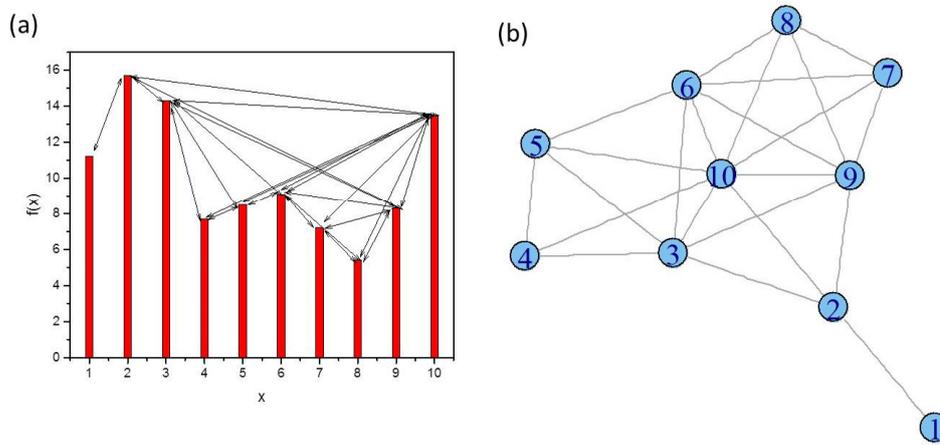


Figura 2.1: (a) Exemplo de uma série temporal. (b) Mapeamento pelo algoritmo de visibilidade.

por uma aresta. Assim, estabelece-se o seguinte critério de visibilidade: dois valores arbitrários da série temporal (t_a, y_a) e (t_b, y_b) terão visibilidade horizontal e, conseqüentemente, se tornarão dois nós conectados por uma aresta no grafo associado, se todos os outros termos (t_c, y_c) intermediários entre eles cumprirem a relação (2.4):

$$t_a t_b > t_c \quad \text{para todo } c \quad \text{tal que } a < c < b. \quad (2.4)$$

Na Figura 2.2 é exemplificado uma série temporal e seu grafo associado. Este método é uma simplificação do método VG que foi citado acima e, geometricamente, é sempre um subgrafo do grafo de visibilidade da série temporal associada. Por esse motivo, as observações do grafo de visibilidade horizontal são as mesmas:

1. *Conexo*: cada nó está conectado, pelo menos, aos seus vizinhos mais próximos (à esquerda e à direita);
2. *Arestas não dirigidas*: segundo a proposta de como o algoritmo é construído, não há definição das direções nas arestas.
3. *Invariante sob transformações afins dos dados da série*: o critério de visibilidade é invariante sob redimensionando tanto os eixos horizontais e verticais.

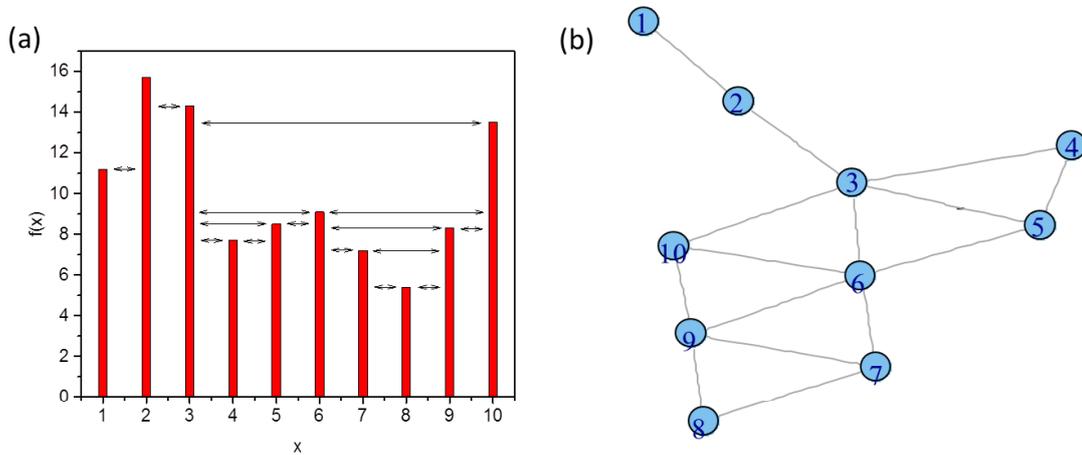


Figura 2.2: (a) Exemplo de uma série temporal. (b) Mapeamento usando o método HVG.

2.2 Redes Complexas

Um grafo G é um conjunto de pontos (vértices ou nós) conectados por arestas, $G(V;A)$, em que V é o conjunto de nós e A é o conjunto de arestas. Na literatura, sistemas modelados com grafos são também chamados de redes. Historicamente, a teoria dos grafos surgiu, no ano de 1736, quando o matemático Leonardo Euler propôs uma solução para o problema das pontes de Königsberg [57]. Na área acadêmica, o estudo das redes, na forma da Teoria dos Grafos, é um dos pilares fundamentais da matemática discreta.

Redes complexas referem-se a um grafo que apresenta uma estrutura topográfica não trivial, cujos padrões de conexão entre seus elementos não são completamente regulares e nem completamente randômicos. A área de estudo de redes complexas é multidisciplinar de várias áreas do conhecimento, como física e computação; já a teoria dos grafos é um subcampo da matemática discreta. Podemos citar, como exemplos de redes, redes de sensores, as redes neurais, as redes elétricas, as vias aéreas, as redes sociais (Orkut, Facebook, MSN, etc.), as rede de contatos sexuais humanos, redes de citações, dentre outras [37, 38].

Em ciências sociais, as redes já vêm sendo estudadas extensivamente há muitos anos. Sociólogos, desde o ano de 1930, notam a importância dos padrões de conexão entre as pessoas para a compreensão do funcionamento das relações nas sociedades [57]. Sendo que, as propriedades das redes começaram a ser reveladas somente com o trabalho do psicólogo Stanley Milgram, no ano de 1967, que formulou a teoria dos seis graus de separação, através de um

experimento nos Estados Unidos, a qual deu origem a um fenômeno que ficou conhecido como “rede de pequeno mundo” e tem sido verificado em diversas redes sociais. Contudo, o interesse e a pesquisa na área de redes complexas somente se estabeleceu nas últimas décadas pelos trabalhos de Watts e Strogatz (1998), em [36], e Barabási e Albert (1999), em [38].

A seguir, serão apresentadas algumas características importantes de grafos que serão utilizadas no decorrer do trabalho. Para uma das características, utilizaremos os nomes em inglês, visto não haver em português um nome apropriado.

Distribuição do Grau: O grau κ_i de um nó i é determinado pelo número de arestas incidentes a ele, definido por:

$$\kappa_i = \sum_{j \in V} M_{ij}. \quad (2.5)$$

em que M_{ij} é a matriz de adjacência. Se $M_{ij} = 1$ se i estiver conectado com j e $M_{ij} = 0$ no caso contrário.

Ao observar uma rede, verifica-se que, geralmente, nem todos os nós têm o mesmo número de extremidades, ou seja, o mesmo grau. A propagação da distribuição dos graus desses nós é caracterizada por uma função de distribuição de probabilidade do grau $P(\kappa) = T_\kappa/T$, em que T_κ é o número de nós com grau κ e T o número de nós. Essa função de distribuição determina a probabilidade de um nó selecionado aleatoriamente ter exatamente k arestas.

Caminho Mínimo: Geodésica, um conceito fundamental na teoria dos grafos, caracterizado também como caminho mínimo L , é um caminho de ligação entre dois nós $i, j \in V$, em que não há outro caminho ligando i a j com um menor número de arestas. É possível haver dois ou mais caminhos mínimos entre dois nós, os quais podem ou não compartilhar alguns vértices. O comprimento do caminho médio L_m de G é dado pelo número médio de todos os caminhos mais curtos, ligando todos os pares de nós em V , definido por:

$$L_m = \frac{1}{T(T-1)} \sum_{i,j \in V; i \neq j} d_{ij} \quad (2.6)$$

em que d_{ij} é a distância entre i e j e T o número de nós. O diâmetro D de um grafo é definido como a distância máxima entre qualquer par de seus nós. Em um grafo desconectado (composto por vários clusters isolados), o diâmetro é infinito.

Coefficiente de Agrupamento: Uma propriedade comum de redes sociais são as "panelinhas", círculos de amigos ou conhecidos em que cada membro é conhecido dos outros membros. Essa tendência é quantificada pelo Coeficiente de agrupamento [38]. Já o Coeficiente de agrupamento local C_i de um nó i é determinado pela razão entre o número de ligações entre os vizinhos do nó i e as ligações totais possíveis entre eles, definido por:

$$C_i = \frac{2 e_i}{r_i(r_i - 1)} \quad (2.7)$$

em que e_i é o número de arestas entre os vizinhos de i , e r_i é o número de vizinhos do vértice i . O valor médio do coeficiente de agrupamento C_m de todos os nós é chamado de coeficiente de agrupamento do grafo G , definido por:

$$C_m = \frac{1}{T} \sum_{i \in V} C_i \quad (2.8)$$

e T o número de nós.

Medida de Centralidade: Na comunidade científica a centralidade B_i é métrica de grande interesse, pois é uma medida da centralidade de um nó em uma rede, indicador dos nós mais influentes, aqueles que controlam o fluxo de informações entre a maioria dos nós. A remoção de nós com maior centralidade resulta no aumento da distância entre os outros nós. É calculada como a fração de caminhos mínimos entre os pares de nós que passam através do nó de interesse, definido por:

$$B_i = \sum_{s,t \in T: s \in V: s \neq t} \frac{\sigma(s, i, t)}{\sigma(s, t)} \quad (2.9)$$

em que $\sigma(s, i, t)$ é o número de caminhos mínimos entre nós s e t que passam pelo nó i , $\sigma(s, t)$ é o número total de caminhos curtos entre s e t , e T o número de nós.

Medida de Proximidade: Medida de proximidade CC_v mede a proximidade ou distância entre os nós. É um conceito importante na análise de redes sociais, pois determina o quão perto está um nó de todos os outros nós de um grafo conexo. É calculado usando a distância mínima, como mostrado a seguir:

$$CC_v = \frac{N - 1}{\sum_{i=1}^T d_{vi}} \quad (2.10)$$

em que d_{vi} é a distância do nó v aos outros nós i da rede e T o número de nós.

Coefficiente de Assortativity: Uma rede é dita *assortative*, se os nós da rede que possuem alto grau tendem a ligar-se a outros nós com alto grau. Já a rede é considerada *disassortative*, quando os nós da rede que possuem alto grau tendem a ligar-se a outros nós com baixo grau [58, 59]. Newman definiu dois tipos de coeficientes *assortativity*.

O primeiro é definido em [58], pela equação:

$$r = \frac{\sum_i e_{ii} - \sum_i a_i b_i}{1 - \sum_i a_i b_i} = \frac{Tre - \|e^2\|}{1 - \|e\|} \quad (2.11)$$

em que e é a matriz, cujos elementos e_{ij} e $\|x\|$ significam a soma de todos os elementos da matriz x .

Em um grafo não direcionado, essa quantidade é simétrica $e_{ij} = e_{ji}$, satisfazendo as seguintes regras:

$$\sum_{ij} e_{ij} = 1, \sum_j e_{ij} = a_i, \sum_i e_{ij} = b_i \quad (2.12)$$

No qual a_i e b_i são frações de cada tipo de extremidade de uma aresta que está ligada a vértices do tipo i . Em um grafo não direcionado, em que as extremidades das arestas são todas do mesmo tipo, $a_i = b_i$.

Para $r = 0$ não têm mistura *assortative* desde que $e_{ij} = a_i b_j$. Já para $r = 1$ existe mistura *assortative* perfeita e tem-se $\sum_i e_{ii} = 1$. Se a rede é *disassortative*, ou seja, cada aresta conecta dois vértices de diferentes tipos, então r é negativo e tem valor:

$$r_{min} = \frac{\sum_i a_i b_i}{1 - \sum_i a_i b_i} \quad (2.13)$$

A segunda variante *assortativity* é definida em [59]:

$$r = \frac{1}{\sigma_q^2} \sum_{jk} jk(e_{jk} - q_j q_k) \quad (2.14)$$

em que, num grafo com função de distribuição de probabilidade do grau $p(k)$, tem-se $q_k = \frac{(k+1) p_{k+1}}{\sum_j j P_j}$, e, para grafos sem direção, tem-se $\sum_{jk} e_{jk} = 1, \sum_j e_{jk} = q_k$, e, além disso tem se que: $\sigma_q^2 = \sum_k K^2 q_k - [\sum_k K q_k]^2$

A equação (2.14) acima é simplesmente o coeficiente de correlação de Pearson do grau em ambas as extremidades de uma aresta e situa-se no intervalo $-1 \leq r \leq 1$. O cálculo de r pode ser reescrito como [59]:

$$r = \frac{M^{-1} \sum_i j_i k_i - [M^{-1} \sum_i \frac{1}{2} (j_i + k_i)]^2}{M^{-1} \sum_i \frac{1}{2} (j_i^2 + k_i^2) - [M^{-1} \sum_i \frac{1}{2} (j_i + k_i)]^2} \quad (2.15)$$

em que j_i, k_i denota os graus dos dois vértices nas extremidades da aresta de i , com $i = 1, \dots, M$. Uma rede é considerada *assortative*, se $r > 0$ e, *disassortative*, se $r < 0$.

2.3 Quantificadores da Teoria da Informação

A Teoria da Informação teve seus pilares estabelecidos por Claude Shannon que, em 1948, no seu artigo publicado no *The Bell Systems Journal* "A Teoria Matemática da Comunicação",

formalizou conceitos de medida, capacidade e transferência de informação, com aplicações na teoria da comunicação e na estatística [60]. Originalmente, tal teoria foi desenvolvida para compressão, transmissão e armazenamento de dados. Contudo, sua aplicabilidade é muito mais ampla e tem sido usada em diversas outras áreas do conhecimento [61–63]. A seguir, serão apresentados alguns elementos da Teoria da Informação, que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho.

2.3.1 Entropia de Shannon

Com o objetivo de definir o grau de incerteza ou de quantificar a informação que se pode ter a respeito de um acontecimento, Shannon formalizou essa ideia pelo conceito de entropia. Ou seja, para qualquer distribuição de probabilidades, a quantidade de informação é calculada pela entropia do sistema. Assim, define-se a Entropia de Shannon como a medida de incerteza de uma variável aleatória.

O cálculo da entropia é dado por $S[P] = -\sum_{i=1}^N p_i \log_b(p_i)$, em que p_i indica a probabilidade de evento da distribuição de probabilidades $P = \{p_i; i = 1, \dots, N\}$ de uma variável aleatória discreta, com $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.

A base usada no logaritmo (\log_b), em que b é a base, determina a unidade em que se deve medir a quantidade de informação. Se for usada a base 2 (\log_2), a unidade é o bit. Se for usada a base natural e (\ln) a unidade é o nat [1 nat equivale $1/(\ln 2)$]. Se for usada a base 10, a unidade não recebe um nome especial. Nesse trabalho, optamos pela base e , de modo que a entropia deverá ser determinada por:

$$S[P] = -\sum_{i=1}^N p_i \ln(p_i)$$

Em [60], o cálculo da entropia é analisado no caso de duas probabilidades p e $q = 1 - p$, tem-se que $S = -p(\ln p) - q(\ln q)$. Logo, observa-se que:

1. O valor de $S = 0$, se e somente se, $p = 0$ ou $p = 1$, ou seja, para o conhecimento total do sistema.
2. O valor de S máximo é igual a $\ln 2$, pois todos as probabilidades são iguais $p = q = 1/2$, ou seja, quando o conhecimento do sistema é incerto.

Assim, no caso de uma série temporal $X = \{x_t, t = 1, \dots, M\}$ de tamanho M , associada a um conjunto de distribuição de probabilidade discreto (em específico, do grau) $P = \{p_i, i = 1, \dots, N\}$ em que $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^N p_i = 1$, em que N é o número de possíveis estados, a entropia de Shannon será definida como:

$$S[P] = -\sum_{i=1}^N p_i \ln(p_i) \quad (2.16)$$

De maneira análoga ao mostrado acima, se $S[P] = 0$, é possível prever com certeza os possíveis resultados de i , cujas probabilidades são dadas pelo p_i 's, ou seja, o conhecimento do sistema é máximo. No caso das redes, podem-se exemplificar com as redes regulares em que sua entropia é 0. Já quando o valor é máximo para uma distribuição uniforme, $P_e = \{p_i =$

$1/n \forall i$, em que T é o número de nós da rede e, nesse caso, $S[P_e] = S_{max} = \ln(T)$ em que há um sistema totalmente incerto. Por isso, a entropia de Shannon pode ser normalizada fazendo:

$$\mathcal{H}[P] = S[P]/S_{max}. \quad (2.17)$$

2.3.2 Medida de Informação de Fisher

Uma medida alternativa de informação, denominada Informação de Fisher e muito importante na teoria dos estimadores em estatística, foi criada por Fisher, em 1922 [64], para medir incerteza sobre um espaço ordenado, sendo esta muito útil no estudo de várias áreas, como química quântica e mecânica quântica. A entropia de Shannon mede a incerteza sobre um espaço de probabilidade, mas é insensível as permutações das distribuições das funções de probabilidade. Já o estimador da Informação de Fisher se mostra sensível às permutações nas distribuições de probabilidade [65–69].

A Informação de Fisher, associada com translações de observações x unidimensional, é definida como,

$$\mathcal{F}_x = \int f(x) \left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.18)$$

em que $f(x)$ é a função de densidade de probabilidade correspondente a x .

Em geral, x é vetor de valores e a Informação de Fisher tem a seguinte forma:

$$\mathcal{F}[f] = \int \frac{|\vec{\nabla} f|^2}{f} dx \quad (2.19)$$

em que o operador gradiente $\vec{\nabla} f$ leva em consideração as variações da distribuição X em todo seu domínio, razão pela qual a Medida de Informação de Fisher \mathcal{F} é conhecida como um melhor descritor da distribuição. Para o caso de uma PDF discreta, a Medida de Informação de Fisher mais apropriada é determinada em [70] por:

$$\mathcal{F}[P] = \mathcal{F}_0 \sum_{i=1}^{N-1} [(p_{i+1})^{1/2} - (p_i)^{1/2}]^2. \quad (2.20)$$

Aqui a normalização constante \mathcal{F}_0 é:

$$\mathcal{F}_0 = \begin{cases} 1 & \text{se } p_i = 1 \text{ para } i = 1 \text{ ou } i = N \text{ e } p_i = 0 \forall i \neq i \\ 1/2 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.21)$$

Como é possível observar, qualquer pequena perturbação localizada nas densidades irá ser detectada por \mathcal{F} .

Um detalhe importante é se $\mathcal{F}[P] = \mathcal{F}_{max}$, é possível prever com certeza os possíveis resultados de i , ou seja, o conhecimento do sistema é máximo. Já quando o valor $\mathcal{F}[P] = 0$, nesse caso, há um sistema incerto.

2.3.3 Divergência de Jensen Shannon

Divergência de Jensen-Shannon é um método que mede a similaridade entre duas distribuições de probabilidades. Essa divergência é uma versão simetrizada da divergência de Kullback-Leiber, uma medida importante da Teoria da Informação [66, 69].

Para duas funções de distribuição de probabilidade $P_1 = \{p_1, \dots, p_n\}$ e $P_2 = \{q_1, \dots, q_n\}$ a Divergência de Jensen-Shannon é definida em

$$J[P_1, P_2] = S\left[\frac{P_1 + P_2}{2}\right] - \frac{S[P_1]}{2} - \frac{S[P_2]}{2} \quad (2.22)$$

em que $S[P]$ é a entropia de Shannon da função de distribuição de probabilidade P . A raiz quadrada da J é uma métrica, ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

1. $J^{(1/2)}[P_1, P_2] \geq 0$.
2. $J^{(1/2)}[P_1, P_2] = J^{(1/2)}[P_2, P_1]$.
3. $J^{(1/2)}[P_1, P_2] + J^{(1/2)}[P_2, P_3] = J^{(1/2)}[P_1, P_3]$.
4. Se $J^{(1/2)}[P_1, P_2] = 0$, então $P_1 = P_2$.

2.3.4 Complexidade Estatística

Complexidade denota um estado de coisas que podem ser facilmente apreciadas quando confrontadas; isso, no entanto, torna bastante difícil defini-la quantitativamente, provavelmente devido ao fato de que não há nenhuma definição universal de complexidade.

Uma medida de Complexidade Estatística, caracteriza a distribuição de probabilidade P associada a uma série temporal gerada por um sistema dinâmico, além de quantificar a aleatoriedade e capturar a presença de estruturas de correlações dessa série temporal.

Dada uma distribuição de probabilidade P , a quantidade de “desordem” de um sistema é dada pela entropia normalizada definida por $\mathcal{H}[P] = \frac{S[P]}{S_{max}}$.

Complexidade Estatística não é apenas definida em termos de “desordem” ou “informação”. Para tal definição é adotada uma PDF P do sistema, uma PDF de referência P_e (PDF associada à distribuição uniforme) e definida uma medida de distância $D[P, P_e]$. Assim, a medida de “desequilíbrio” Q é, portando, definida como:

$$Q[P, P_e] = Q_0 \cdot D[P, P_e], \quad (2.23)$$

em que Q_0 é uma constante de normalização e $0 \leq Q \leq 1$. Logo, a medida de complexidade estatística é definida como:

$$C[P] = \mathcal{H}[P] \cdot Q[P, P_e]. \quad (2.24)$$

Nos últimos anos, foram propostas várias medidas de Complexidade Estatística que utilizaram diferentes medidas de Entropia: Shannon, Tsallis e Renyi. E, para o cálculo do desequilíbrio $Q[P, P_e]$, foram propostas a Distância Euclidiana, Distância de Wootters, entropia relativa de Kullback-Leiber e a Divergência Jensen-Shannon [71–74].

Em destaque, a medida de Complexidade Estatística denominada Martín, Plastino e Rosso (MPR), segundo a qual se calcula o desequilíbrio usando a divergência Jensen-Shannon e a Entropia de Shannon. Foi mostrado, em [18], que a medida de complexidade MPR foi adequada não apenas para distinguir processos estocásticos de sistemas caóticos, mas também para classificar diferentes graus de "estocasticidade", para distinguir processos gaussianos e não gaussianos e para distinguir diferentes tipos de ruídos. Por isso, ele é o sugerido nesse projeto.

Portanto, a complexidade estatística utilizada nesse trabalho é a MPR:

$$C_{JS} = \mathcal{H}[P] \cdot Q_J[P, P_e], \quad (2.25)$$

em que a desordem é medida pela Entropia de Shannon normalizada e a distância Q do equilíbrio é definida pela divergência de Jensen-Shannon:

$$Q_J[P, P_e] = Q_0 \cdot J_S[P, P_e], \quad (2.26)$$

em que Q_0 é uma constante de normalização:

$$Q_0 = -2 \left\{ \frac{T+1}{T} \ln(T+1) - 2 \ln(2T) + \ln(T) \right\}^{(-1)} \quad (2.27)$$

em que T é o número de elementos de P .

2.4 Estimadores da Função de Distribuição de Probabilidade

Para utilizar os quantificadores baseados na Teoria da Informação (como \mathcal{H} e C_{JS}), é necessária uma função de distribuição de probabilidade (PDF) associada à série temporal em análise. Por isso, a determinação da PDF mais adequada é um problema fundamental e importante. Diversos métodos têm sido propostos nos últimos anos para uma seleção adequada do espaço de probabilidade. Pode-se citar: o Bandt e Pompe [19], a transformada wavelet [75], os procedimentos na análise Fourier [76], a análise simbólica [77], as estatísticas de amplitude [78, 79], a PDF com base em histogramas [80, 81], dentre outros. Sua aplicabilidade depende das características particulares dos dados das séries temporais.

As conversões das séries por esses métodos têm sido usadas com a finalidade de distinguir a natureza de diferentes sistemas, caóticos, determinísticos, estocásticos, entre outros. O método Bandt e Pompe e suas variações é usado em diversos trabalhos, apresentando grande sucesso nas discriminação de sistemas.

A seguir, descreveremos o método de Bandt Pompe (metodologia que converte uma série temporal em uma PDF, sem a necessidade de intercalação de outro método), o Histograma

(metodologia que utiliza amplitude estatística) e os diferentes tipos de PDF que podem ser extraídas por métodos que transformam uma série em uma rede, como o VG ou o HVG.

2.4.1 Histograma

Para extrair uma função de distribuição de probabilidade (PDF) via amplitude estatística, o intervalo $[a, b]$ (com a e b o valor mínimo e máximo das séries de tempo, respectivamente), primeiramente, dividi-se um número finito N de não sobreposição nos subintervalos. Em seguida, emprega-se o método do histograma, com base na contagem relativa às frequências dos valores da série temporal dentro de cada subintervalo. A PDF resultante não tem informação sobre a evolução temporal. São os valores de x_t que permitem a classificação em caixas, ignorando, assim, a localização temporal.

2.4.2 Bandt e Pompe

Bandt e Pompe [19] desenvolveram um método simples, robusto e computacionalmente rápido que converte uma série temporal em uma função de distribuição de probabilidade (PDF) apropriada. O método utiliza "partições" concebidas por meio da comparação da ordem dos valores relativos dos dados vizinhos, essas partições podem ser feitas com diferentes níveis.

Dada uma série temporal $\mathcal{X}(t) = \{x_t, t = 1, \dots, N\}$, sobre uma dimensão $D > 1$ com ($D \in \mathbb{N}$), e um atraso τ ($\tau \in \mathbb{N}$), o padrão Bandt e Pompe de ordem D em tempo s , é gerado por:

$$(s) \mapsto (x_{s-(D-1)\tau}, x_{s-(D-2)\tau}, \dots, x_{s-\tau}, x_s) . \quad (2.28)$$

Para cada tempo s , BP designa um vetor de dimensional D , o qual será obtido considerando-se os valores da série de temporal $s - (D - 1)\tau, \dots, s - \tau, s$. O padrão de ordinal BP de ordem D , associado ao tempo de s , corresponde à permutação $\pi = \{r_0, r_1, \dots, r_{D-1}\}$ de $[0, 1, \dots, D - 2, D - 1]$ será definido por:

$$x_{s-r_{D-1}\tau} \leq x_{s-r_{D-2}\tau} \leq \dots \leq x_{s-r_1\tau} \leq x_{s-r_0\tau} . \quad (2.29)$$

Sendo assim, o vetor definido pela equação (2.28) é convertido em um símbolo definitivo de π . Com o propósito de se obter um resultado único, o método BP considera que $r_i < r_{i-1}$ se $x_{s-r_i} = x_{s-r_{i-1}}$. Isso justifica-se visto que os valores de x_t referem-se a uma distribuição contínua, de modo que não é comum que haja valores iguais.

O número possível de ordenações é dado pela permutação $D!$. Os π são obtidos pelo tempo de atraso τ associado à dimensão D e calculados a partir do número de vezes que essa sequência é encontrada na série temporal. Em seguida, divide-se o resultado pelo número total de sequências. Para uma distribuição $P \equiv \{p(\pi)\}$, é definido,

$$p(\pi) = \frac{\#\{s | s \leq M - (D-1)\tau; (s), \text{ tem o tipo } \pi\}}{M - (D-1)\tau} \quad (2.30)$$

em que o símbolo $\#$ significa "número". Assim, um padrão ordinal de distribuição de probabilidade $P \equiv \{p(\pi)\}$ com $i = 1, \dots, D!$ é obtido a partir da série temporal.

Considere o seguinte exemplo do método de Bandt e Pompe ilustrado em [19]. Dada a série temporal $\mathcal{X} = \{4, 7, 9, 10, 6, 11, 3\}$ com ($N = 7$), suponha que a PDF-BP é determinada com $D = 3$ e $\tau = 1$. Como $3! = 6$, têm-se 6 padrões possíveis de permutação $\{012\}, \{021\}, \{102\}, \{120\}, \{012\}, \{021\}$. Os termos $(4, 7, 9)$ e $(7, 9, 10)$ representam o padrão de permutação $\{012\}$ em que $x_s < x_{s+1} < x_{s+2}$, pois, por exemplo, na sequência $x_s = 4 < x_{s+1} = 7 < x_{s+2} = 9$. Já os termos $(9, 10, 6)$ e $(6, 11, 3)$ correspondem ao padrão de permutação $\{201\}$ em que $x_{s+2} < x_s < x_{s+1}$, como também em $x_{s+2} = 6 < x_s = 9 < x_{s+1} = 10$. De maneira análoga, $(10, 6, 11)$ tem o padrão de permutação $\{102\}$ e não existem termos para $\{021\}, \{120\}$ e $\{210\}$. Então, as probabilidades resultantes são: $p(\{012\}) = p(\{201\}) = 2/5; p(\{102\}) = 1/5; p(\{021\}) = p(\{120\}) = p(\{210\}) = 0$.

As vantagens do método resumem em sua simplicidade, robustez, rapidez no cálculo e a invariância em relação à transformação não-linear. Além disso, pode ser aplicado a qualquer tipo de série temporal (regular, caótico, estocástica, fractal ou real). A escolha da dimensão D desempenha um papel muito importante para a determinação da distribuição de probabilidade apropriada, uma vez que D determina o número possível de padrões $D!$ necessários para trabalhar com estatísticas confiáveis. Para se alcançar uma estatística confiável, o valor do comprimento da série temporal N deve satisfazer a condição $N \gg D!$ [3]. Sugere-se a utilização de $3 \leq D \leq 7$, com um tempo de retardo $\tau = 1$.

2.4.3 PDF utilizando VG e HVG

A possibilidade de transformar a série temporal num grafo, abre as portas a uma serie de novas formas de avaliar as séries temporais. Dada uma rede, podemos extrair muitas características através da análise de diferentes PDF's, estas podem ser a clássica distribuição de grau, a distribuição de distâncias, a distribuição de agrupamento, a distribuição de peso entre outras possíveis. Neste trabalho utilizamos a distribuição de graus da rede, a distribuição da distâncias e a distribuição do peso.

O grau de um nó é definido como o número de arestas incidentes sobre o mesmo. Esta distribuição pode ser definida como a PDF ($P_{grau}(\kappa)$) associada à probabilidade de que um nó escolhido aleatoriamente possua grau κ . Esta distribuição representa a dispersão no número de arestas de cada nó. Muitas redes reais possuem distribuições de graus que segue uma lei de potência (ao menos assintoticamente) $P(\kappa) \sim \kappa^{-\gamma}$, $\gamma > 0$.

A distribuição da distância de um grafo pode ser definida como a distribuição ($P_{\delta}(d)$) associada à probabilidade de que dois nós i e j , escolhidos aleatoriamente, possuam entre eles um caminho mínimo d . A distância máxima possível é $n - 1$, em que n é o número de nós. Quando um par está desconectado, consideramos ∞ . Assim, a distribuição é dada pelo conjunto $1, 2, \dots, n - 1, \infty$, em que n é o número de nós. Apesar de pouco explorada, a distribuição da distância mostrou eficiência ao capturar as mudanças topológicas da rede [82].

Já na distribuição dos pesos P_w da rede pelo grafo de visibilidade horizontal, proposta aqui é apresentada no capítulo 5, o peso é determinado pela amplitude entre os pontos associados.

A utilização da PDF de grau, de distância e do peso pelo HVG é interessante em vários aspectos, como o fato de não precisar de uma definição arbitrária como o tamanho do padrão no caso do método de BPBandt e Pompe, ou a divisão dos histogramas. Além disso, o HVG incorpora de forma natural a causalidade temporal da série. Na Figura 2.3, está exemplificado

o mapeamento de uma série temporal pelo HVG, a distribuição de graus e a distribuição de distâncias.

Por estes motivos optamos pela utilização do HVG com a distribuição grau da rede, a distribuição da distância e a distribuição dos pesos para a análise das séries.

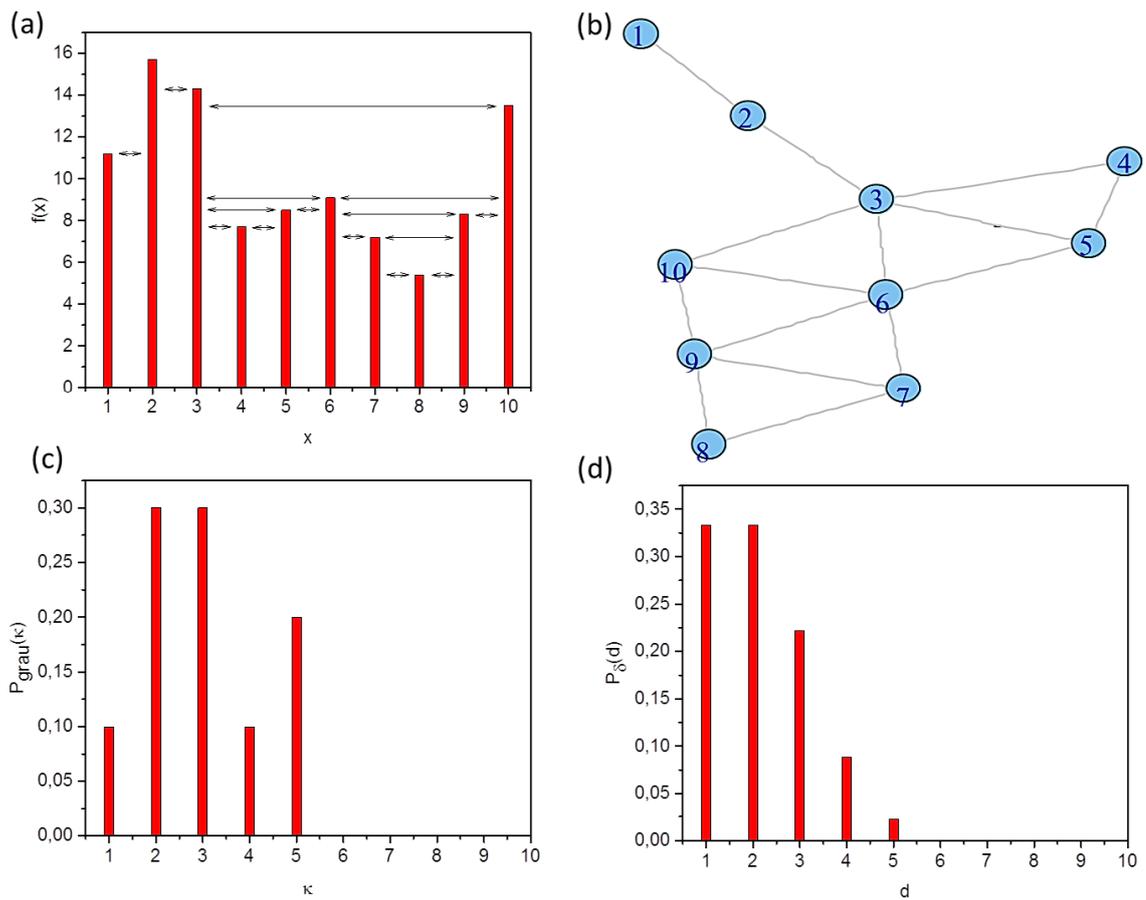


Figura 2.3: (a) Exemplo de uma série temporal. (b) Grafo associado a série temporal. (c) Distribuição do grau P_{grau} . (d) distribuição de distância P_{δ} .

Caracterização de Sistemas Dinâmicos

3.1 Sistemas Caóticos e Sistemas Estocásticos

3.1.1 Sistemas Caóticos

Muitos sistemas determinísticos simples podem exibir um comportamento imprevisível, estocástico, a longo prazo. Tal fenômeno é conhecido como caos. O primeiro sistema desse tipo foi investigado pelo matemático francês Henri Poincaré, no final do século XIX; trata-se do problema das órbitas planetárias de corpos celestes, sujeitos apenas às atrações gravitacionais entre eles, conhecido como o problema dos três corpos da mecânica clássica.

Em 1963, Lorenz descobriu que um sistema dinâmico representado por 3 variáveis acopladas, cada uma descrita por uma equação diferencial não-linear de primeira ordem, pode levar a trajetórias completamente caóticas. Essa descoberta só ganhou importância anos depois de sua publicação, sendo esse um dos primeiros exemplos de caos determinístico em sistemas dissipativos [83–88]. Desde então, um grande número de sistemas dinâmicos que exibem comportamento caótico tornou-se conhecido.

A evolução temporal de um sistema dinâmico é determinada pela evolução de uma equação determinística. Sistemas dinâmicos em tempo contínuo são representados por sistemas de equações diferenciais

$$d\vec{x}/dt = \vec{F}(\vec{x}), \quad (3.1)$$

onde, $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $\vec{F} \equiv (f_1, f_2, \dots, f_N)$. Sistemas dinâmicos discretos no tempo são representados por uma relação de recorrência conhecida como mapas:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n), \quad (3.2)$$

os quais determinam a evolução no tempo de um estado inicial x_0 .

O estudo de mapas tem apresentado contínuo progresso nos últimos anos, devido principalmente a resultados teóricos, ao avanço da tecnologia com computadores mais potentes e a técnicas experimentais refinadas. As simulações das equações dos mapas nos computadores são rápidas, além disso, tais experimentos têm gerado gráficos com padrões interessantes e bonitos. Destaca-se, também, o fato de que sua aplicabilidade tem surpreendido o mundo acadêmico com a possibilidade de descrever sistemas caóticos, osciladores químicos, fluidos, etc.

Mapas surgem de diversas maneiras e com diferentes aplicabilidades. São usados como ferramentas na modelagem de fenômenos naturais, tais como na teoria das finanças e economia, no estudo da população de seres vivos, em sistemas mecânicos, etc [83]. E além disso, são

interessantes para o estudo de caos, pois apresentam um comportamento mais suave do que equações diferenciais [83–88].

A trajetória de um mapa pode ser obtida apenas empiricamente ou por um experimento no computador e não pode ser prevista por meio de análise. Para a geração do movimento caótico, sabe-se que a não linearidade é uma condição necessária. O comportamento caótico, observado no tempo, não é devido a fontes externas de ruído, nem a um número infinito de graus de liberdade e nem à incerteza associada à mecânica quântica. A fonte real dessa irregularidade é a propriedade do sistema não-linear de separar, exponencialmente, trajetórias inicialmente próximas em uma região limitada do espaço de fase. Torna-se, assim, praticamente impossível prever o comportamento a longo prazo desses sistemas, pois, na prática, observa-se que só se poderiam corrigir as condições iniciais com precisão finita, visto que erros aumentam exponencialmente. Lorenz nomeou essa dependência sensível das condições iniciais de "efeito borboleta" [83]. Dentre as várias questões que podem ser levantadas no mundo acadêmico, uma das mais importantes é referente à imprevisibilidade desses sistemas [83–88].

Devido a essa imprevisibilidade, a trajetória só pode ser descrita pela significância estatística. Um procedimento comum é, então, selecionar para determinar a relativa frequência da iteração em uma determinada sub-região do espaço de fase, ou seja, para investigar as distribuições de probabilidade das iterações. Mas, para um mapa caótico genérico, essa distribuição de probabilidade torna-se extremamente complicada. Em alguns pontos, no espaço de fase X a densidade de probabilidade pode divergir, muitas vezes, em um número infinito de pontos. Além disso, o subconjunto de X que atrai as trajetórias tem, frequentemente, uma estrutura fractal. Uma outra estrutura que também complica essa análise pode ser observada no que respeita à dependência sensível das condições iniciais. Para os dados iniciais de algumas regiões do espaço de fase, a incerteza na especificação desses dados podem crescer muito mais rápido durante a evolução temporal do que para outras regiões.

O objetivo em estudar sistemas caóticos, então, é encontrar formas adequadas de descrição que sejam capazes de compreender as mais importantes características do sistema, analisando o comportamento complexo gerado por sistemas dinâmicos não-lineares.

3.1.1.1 Mapas Caóticos

O espaço de fase é a representação das variáveis relevantes que descrevem a dinâmica do sistema.

Um mapeamento em uma dimensão D , com coordenadas apropriadas (como em coordenadas cartesianas) é determinado por um conjunto de possíveis valores das coordenadas do espaço de fase x , no qual o mapa é dado por:

$$x_{n+1} = f(x_0, x_1, \dots, x_n) \quad (3.3)$$

Se a dinâmica do sistema da função $f(x)$ é não linear, então o mapa pode exibir um comportamento caótico.

Inicia-se com um ponto x_0 e, a cada iteração, o ponto x_n é chamado para repetir o processo. A sequência de iterações x_0, x_1, x_2, \dots , tal qual é denominada a trajetória, descreve o movimento dos pontos no espaço x . A trajetória pode se tornar periódica ou ficar aperiódica para sempre. Ela é periódica quando, depois de um certo número k de iterações, aproxima-se de

uma sequência $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l}$ e satisfaz $x_{k+l} = x_k$. A sequência $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+L}$ é chamada de órbita periódica ou ciclo de f , e L é o tamanho do ciclo. No caso em que $L = 1$, o ponto do mapa f é um ponto fixo $x^* = f(x^*)$.

Na Figura 3.1, ilustramos o conceito de um mapa caótico com a representação do mapa caótico de Lorenz, o qual é definido na seção 3.1.1.3.

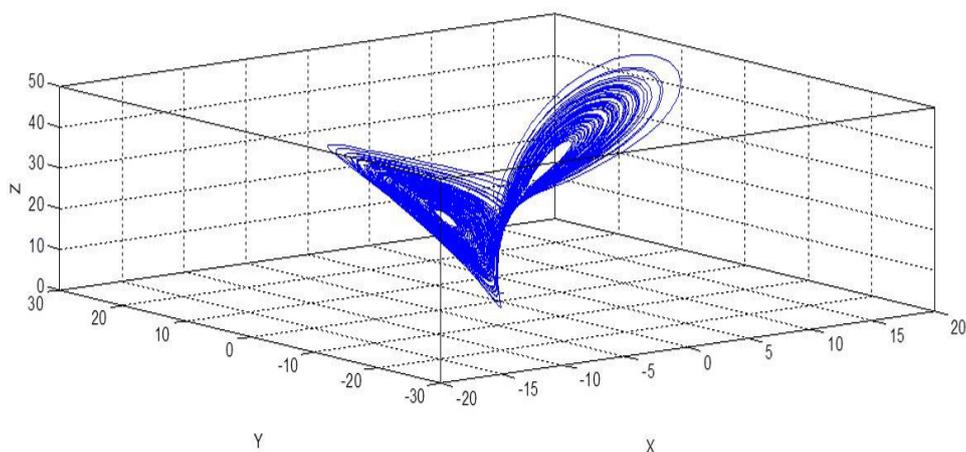


Figura 3.1: Mapa Caótico de Lorenz

3.1.1.2 Atratores

Na dinâmica não-linear, geralmente, interessa-se pelo comportamento de longo prazo de um mapa dado um valor inicial. Esse comportamento de longo prazo é totalmente diferente para diferentes tipos de mapas. Pode-se distinguir entre os chamados sistemas dinâmicos hamiltonianos e sistemas dinâmicos dissipativos. O Sistema de Hamilton conserva o volume de um elemento de volume arbitrário do espaço de fase durante a evolução no tempo. Pode-se expressar esse fato por meio do determinante Jacobi

$$U(\vec{x}) = \det \{ \mathcal{D}[\vec{F}(\vec{x})] \} \quad (3.4)$$

(por $\mathcal{D}[\bullet]$ denotamos a matriz Jacobiana). Ou seja, um sistema Hamiltoniano satisfaz $U(\vec{x}) = 1$, para todos os \vec{x} . Para um sistema dissipativo, no entanto, um volume de espaço de fase pequeno ou encolhe ou expande, e isso geralmente depende da posição \vec{x} no espaço de fase. Típica

para um sistema de dissipação é o fato de um grande número de trajetórias abordar um certo subconjunto AT do espaço de fase no limite $n \rightarrow \infty$. O subconjunto AT é chamado de atrator, o qual se trata de uma representação da dinâmica de um sistema no espaço de fase. Em um sistema pode haver um ou vários atratores, mas tipicamente, em sistemas de baixa dimensão, o número de diferentes atratores é muito pequeno. De fato, em muitos casos, há apenas um atrator que atrai quase todas as trajetórias.

Um sistema dinâmico é considerado "caótico" se possui sensibilidade às condições iniciais. Isso significa, que escolhidos aleatoriamente, valores iniciais muito próximos x_0 e $x'_0 = x_0 + \delta_0$ geram trajetórias totalmente diferentes no tempo a longo prazo. Para simplificar, considere-se o momento de um mapa uni-dimensional f , e seja x_n ser a iteração de x_0 , e x'_n repete a de x'_0 . Como regra geral, para se obter um mapa caótico, um aumento exponencial da diferença $\|x'_n - x_n\|$ é observado: $\|x'_n - x_n\| \sim \|\delta_0\| \exp(\eta t)$. A média da taxa de separação η é chamada de expoente de Lyapunov do mapa. Movimento caótico corresponde a pelo menos um expoente Lyapunov positivo.

A seguir, serão apresentados diversos mapas como: o mapa logístico, que desempenhou um papel importante no desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos não lineares; o mapa Hénon, que tem desempenhado um papel histórico importante, pois foi o primeiro exemplo de um mapeamento bidimensional publicado que possuía um atrator estranho. Os mapas são classificados como não-inversíveis, conservativos e dissipativos. No anexo (na seção 7.1), apresenta-se uma descrição dos mapas estudados neste trabalho, seus parâmetros, condições iniciais e expoente de Lyapunov.

Mapas Não Invertíveis : (1) mapa Logistic; (2) mapa Sine; (3) mapa Tent; (4) mapa gerador Linear Congruencial; (5) mapa Cubic; (6) mapa Ricker's population model; (7) mapa Gauss; (8) mapa Cusp; (9) mapa Pinchers ; (10) mapa Spence; (11) mapa Sine-Circle.

Mapas Dissipativos : (12) mapa Henon; (13) mapa Lozi; (14) mapa Delayed logistic; (15) mapa Tinkerbell; (16) mapa Burgers ; (17) mapa Holmes Cubic; (18) mapa Dissipative; (19) mapa Ikeda; (20) mapa Sinai; (21) mapa Predador Discreto.

Mapas Conservativos : (22) mapa Chirikov; (23) mapa Henon area - quadrática ; (24) mapa Arnold Cat; (25) mapa Gingerbreadman; (26) mapa Web ; (27) mapa Lorenz três Dimensões.

Também foi analisado o Mapa de Schusters f^{-z} , que foi introduzido por Schusters e colaboradores em [84]. É definido por:

$$x_{n+1} = x_n + x_n^z \pmod{1} . \quad (3.5)$$

Neste trabalho consideramos $z = 1.25, 1.50, 1.75, 2.00$.

3.1.1.3 Fluxos Caóticos

Em séries temporais geradas por fluxos caóticos (integração de equações diferenciais ordinárias não-lineares contínuas), o valor correspondente de τ requer uma análise cuidadosa, em oposição aos mapas caóticos, nos quais o período de amostragem é $\tau = 1$:

a) Se τ é muito pequeno, existe pouca informação de ganho ou de acúmulo entre sucessivos valores amostrados (os valores nas séries temporais correspondentes são quase linearmente dependentes), evidenciando um efeito de redundância [89].

b) Se τ é muito grande, valores amostrados sucessivos podem tornar-se independentes, um efeito de irrelevância [89].

Uma alternativa para a geração desses mapas é simplificar a análise das equações diferenciais não-lineares correspondentes, reduzindo-as a um mapa iterado de algum tipo, por exemplo, um mapa de Poincaré ou uma série temporal formada pelos valores mínimos de uma variável do sistema dinâmico caótico. No presente trabalho, seguimos a última opção e consideramos, nesse caso, o mapa mínimo Lorenz [90]. Os nossos resultados referem-se a dois sistemas caóticos paradigmáticos em um espaço em três dimensões, isto é:

Mapa caótico de Lorenz [91]

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma (y - x) \\ \dot{y} = x (r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (3.6)$$

No qual os parâmetros são $\sigma = 10$, $b = 8/3$, e $r = 28$, corresponde a um atrator caótico. Os expoentes de Lyapunov (base- e) são $\eta = 0.9056, 0, -14.5723$ [83].

Mapa caótico de Rössler [92]

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c), \end{cases} \quad (3.7)$$

Em que os parâmetros usados aqui são $a = b = 0.2$ and $c = 5.7$, que corresponde a um atrator caótico. Os expoentes de Lyapunov (base- e) são $\eta = 0.0714, 0, -5.3943$ [83].

No correspondente mapa caótico mínimo de Lorenz, tanto sistemas de Lorenz quanto Rössler foram obtidos pela integração das correspondentes equações diferenciais ordinárias não-lineares (3.6) e (3.7), utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem com controle adaptativo do tamanho do passo [93] e integração do passo $\Delta = 0.0001$ (no sistema de Lorenz) e $\Delta = 0.001$ (no sistema Rössler), respectivamente, com 10^9 iterações. Foram determinados os valores mínimos para uma órbita com valor inicial $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

3.1.2 Sistemas Estocásticos

3.1.2.1 Ruídos com Espectro de Potência f^{-k} :

A série temporal correspondente é gerada da seguinte forma: a função RAND é usada para produzir números pseudo-aleatórios no intervalo $(-0,5; 0,5)$, com (a) um espectro de potência simples (PS), (b) uma função de distribuição de probabilidade uniforme (PDF), e (c) valor médio zero de x_i . Em seguida, a transformada de Fourier (FFT) y_k da série temporal é obtida

e multiplicada por $f^{-k/2}$ ($k > 0$), originando $(y_k)^{(2)}$; Agora, y_k é simetrizada, de modo a obter uma função real e, em seguida, o pertinente inverso FFT x_i é obtido, depois de descartar o componente imaginário produzido pelas aproximações numéricas. O tempo que segue-se à série x_i tem as propriedades de energia de espectro desejadas e, por construção, é representativo de ruídos não gaussianos [94].

3.1.2.2 Movimento Browniano Fracionário (fBm) e Ruído Gaussiano Fracionário (fGn)

O termo movimento Browniano fracionário (fBm) foi introduzido para se referir a uma família de funções gaussianas capazes de gerar modelos de séries temporais naturais, auto-similares e dotados de incrementos estacionários [95–99].

As famílias normalizadas desses processos Gaussianos, $B^h(t), t > 0$, são dotadas das seguintes propriedades: *i*) $B^h(0) = 0$ com probabilidade 1, *ii*) $\mathbb{E}[B^h(t)] = 0$ (média zero), e *iii*) covariância dada por:

$$\mathbb{E}[B^h(t)B^h(s)] = (t^{2h} + s^{2h} - |t - s|^{2h}) / 2 \quad (3.8)$$

para $s, t \in \mathbb{R}$. Aqui $\mathbb{E}[\bullet]$ refere-se à média calculada com um processo Gaussiano. O parâmetro H é o expoente de Hurst. Através do seu cálculo, tem-se que para $H = 1/2$ há uma série decorrelacionada e, para valores diferentes de H , há uma série com correlações de longo alcance.

Quando $0.5 < H < 1$, a série é positivamente correlacionada e apresenta persistência. No caso de $0 < H < 0.5$, a série é negativamente correlacionada e apresenta anti-persistência. Uma série anti-persistente possui a característica de "reversão à média", o que significa que um aumento no valor da série é mais provavelmente seguida de uma diminuição no valor e vice-versa. Quanto mais próximo de 0 estiver, maior a intensidade da "reversão à média". Já a série persistente é uma série em que a tendência se mantém, a direção (aumento ou diminuição, comparado ao último valor) do próximo valor será, provavelmente, a mesma do valor corrente.

Introduzindo a quantidade $W^h(t), t > 0$:

$$W^h(t) = B^h(t+1) - B^h(t) \quad (3.9)$$

de modo a expressar o ruído Gaussiano Fracionário fGn:

$$\begin{aligned} \rho(k) &= \mathbb{E}[W^h(t)W^h(t+k)] \\ &= \frac{1}{2} [(k+1)^{2h} - 2k^{2h} + |k-1|^{2h}], \quad k > 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Note que, para $H = 1/2$, todas as correlações diferentes de zero desaparecem e $W^{1/2}(t), t > 0$ representa o ruído gaussiano branco.

O fBm e fGn são contínuos, mas não processos diferentes (no sentido clássico). Os processos não estacionários não possuem um espectro definido no sentido usual, no entanto, é possível definir um espectro de energia ou potência generalizada da forma:

$$\Phi_1 \propto |f|^{-\alpha} \quad \text{e} \quad \Phi_2 \propto |f|^{-\beta} \quad (3.11)$$

com $\alpha = 2h + 1$, e $1 < \alpha < 3$ para fBm e $\beta = 2h - 1$, e $-1 < \beta < 1$, para fGn. As séries de fBm e de fGn foram gerados pela função "wfbm" no Matlab.

3.1.2.3 Contaminação por Ruído

Wold provou, em [48], que qualquer série temporal (estacionária) pode ser decomposta em duas partes diferentes. A primeira parte (determinista) pode ser exatamente descrita por uma combinação linear do seu próprio passado. A segunda parte é um componente de média móvel de ordem finita.

O mapa logístico constitui um exemplo canônico, muitas vezes empregado para ilustrar esse novo conceito. Para esse trabalho foi proposto um mapa logístico (comportamento caótico, $\rho = 4$), com aditivo ruído branco (ruído observacional) em ordem, para exemplificar o comportamento de ruído.

O mapa logístico é um mapeamento de polinômio de grau 2, $F: x_n \rightarrow x_{n+1}$, descrito pelo sistema dissipativo representado pela equação de diferenças de primeira ordem [83].

Considerando que η é o ruído branco observacional, esse parâmetro foi gerado utilizando a função RAND MATLAB, a qual produz números pseudo-aleatórios no intervalo $(-0.5, 0.5)$, com espectro de potência quase plano (PS), PDF uniforme e média zero.

Foram consideradas séries temporais da forma $\mathcal{S} = \{S_n, n = 1, \dots, N\}$ geradas pelo sistema discreto:

$$S_n = x_n + A \cdot \eta_n \quad (3.12)$$

em que x_n é dada pelo mapa logístico caótico completo, e $\eta_n \in (-0.5, 0.5)$ é o ruído aditivo com uma amplitude A .

Revisão Bibliografica

Nesse capítulo, são citados os principais trabalhos que utilizaram métodos de distinção de processos estocásticos e caóticos e alguns métodos que trabalharam com mapeamento de séries temporais em grafos.

Sistemas dinâmicos que exibem comportamento caótico têm um atrator estranho no espaço de fase, o qual pode ser caracterizado pelo cálculo da dimensão fractal, (conhecido também como dimensão de Hausdorff) [41]. Para o cálculo da dimensão fractal é comumente usado o algoritmo de contagem de caixa. Contudo, a ordem de complexidade desse algoritmo é alta. Grassberger e Procaccia, em [10], propuseram um algoritmo mais eficiente e com uma implementação mais simples que o de contagem de caixas, para o cálculo da dimensão de correlação de um atrator, especialmente para dimensões mais altas. O algoritmo de Grassberger e Procaccia ficou conhecido no mundo acadêmico e tem sido muito utilizado para análise de distinção de sistemas dinâmicos.

Osborne e Provenzale, em [11], propuseram a junção do método Grassberger e Procaccia [10] com o método de Monte Carlo, para calcular a dimensão de correlação de uma classe de processos estocásticos caracterizados por espectros de potência. Para ruídos estocásticos coloridos, encontraram um valor de dimensão de correlação finito e previsível, contradizendo, assim, a hipótese de que a dimensão de correlação de processos estocásticos tem um valor infinito.

Sugihara e May, em [42], propuseram um método de distinção entre sistemas caóticos e estocásticos, baseado em previsão não linear, em que eles comparam as trajetórias previstas com as reais e, a partir dos resultados obtidos, levantam conjecturas sobre os sistemas em questão. Os erros na previsão não linear diminuem com o aumento dos intervalos considerados para séries temporais provenientes de sistemas caóticos. Essa dependência não é observada nas séries de ruídos não correlacionados.

Pincus, em [14], propôs o método da entropia aproximada para estimar a entropia de Kolmogorov-Sinai [13]. Essa metodologia é uma variante do algoritmo Grassberger e Procaccia [10]. O cálculo da entropia de Kolmogorov-Sinai é proposto para quantificar séries temporais, o seu valor finito indica um sistema caótico e, quando seu valor tende ao infinito, indica um sistema estocástico.

Kaplan e Glass, em [43], observaram que a tangência da trajetória gerada por um sistema determinístico é função da posição no espaço de fases e que, conseqüentemente, todas as tangentes às trajetórias num determinado espaço de fases terão orientações similares. Como a dinâmica estocástica não apresenta esse comportamento, Kaplan e Glass propuseram um teste para a distinção entre sistemas dinâmicos baseado neste fato. Em [44], Kaplan e Glass utilizaram a metodologia que propuseram em [43] para analisar o movimento browniano fracionário,

os processos aleatórios de Gauss, mapas caóticos (como o mapa cubic e o mapa sine) e fluxos caóticos (como o sistema de Lorenz e o sistema de Rossler), reforçando a hipótese de que, por essa metodologia, é possível fazer a distinção entre sistemas caóticos e estocásticos .

Cencini *et al.*, em [12], propuseram um método que analisa o comportamento da (ϵ)-entropia [45] (uma generalização da entropia de Kolmogorov-Sinai) e do tamanho finito do Expoente de Lyapunov (FSLE) [46] (uma generalização do Expoente de Lyapunov) como uma função de diferentes escalas de resolução e, feito isso, aplicaram essas ideias na classificação e distinção entre um processo estocástico e um processo caótico. Na análise, utilizaram mapas caóticos, ruído branco e ruído colorido. Essa metodologia pode ser considerada uma generalização do método Grassberger e Procaccia [10], para a estimativa da dimensão de correlação e para a consideração de valores finitos como referências de comportamento determinístico.

Em [15], Gao e Hu propuseram um método baseado no cálculo da escala dependente do expoente de Lyapunov (SDLE) para caracterizar e distinguir importantes tipos de sistemas complexos, como caos ruidoso, caos induzido por ruído, processos aleatórios com espectro f^{-k} , processos de Levy aleatórios, oscilações estocásticas, movimentos complexos com comportamento caótico em pequenas escalas, comportamento difusivo em grandes escalas, dentre outros.

Em [16], Elisner propôs a utilização de redes neurais como um método mais confiável para distinguir o caos do ruído aditivo. Mostra que as redes neurais fazem melhor as previsões de curto prazo de um sinal caótico do que um modelo auto-regressivo. Ele justifica que os métodos que utilizam o cálculo da dimensão do atrator para distinguir caos de ruídos, pela reconstrução do estado de fase da série temporal com aplicação de alguma variante do algoritmo de Grassberger e Procaccia, em [10], estão sujeitos a vários problemas, como comprimento e período de tempo adequados da série temporal. Além disso, a região escalar utilizada para o dimensionamento considera um pequeno número de pontos entre o espaço de fase, o que justifica a perda de grande parte da informação da série temporal.

Rosso *et al.*, em [18], propuseram uma metodologia para a distinção entre a dinâmica estocástica e a caótica através da utilização de dois quantificadores de informação como medidas, combinando, num plano de causalidade, a entropia normalizada de Shannon no eixo horizontal e a complexidade estatística no vertical. Para a utilização desses dois quantificadores a metodologia Bandt e Pompe [19] é utilizada para converter uma série temporal em uma função de distribuição de probabilidade (PDF). Na análise, foram considerados 8 sistemas, sendo 3 mapas caóticos, o de mapa Schuster, 1 fluxo caótico (sistema caótico Rössler), ruídos com Espectro de Potência f^{-k} , séries temporais geradas pelo movimento browniano fracionário (fBm) e ruído gaussiano fracionário (fGn). Mostraram, assim, que esse plano é capaz de representar eficientemente as diferentes naturezas dos sistemas em uma representação plana, bem como a distinção entre os diferentes graus de estruturas de correlações.

Amigó *et al.* [47], propuseram um método para distinção entre sistemas pela análise do aparecimento de padrões de ordem pelo método Bandt and Pompe, e mostraram que, no caso de mapas caóticos determinísticos unidimensionais, nem todos os padrões de ordem podem ser efetivamente encontrados, o que os fazem "proibidos", contrariamente ao que se espera que aconteça em mapas caóticos de alta-dimensão. A existência ou não desses padrões de ordem torna-se uma característica persistente que pode ser considerada uma nova propriedade

da dinâmica.

Já em [22–24], Rosso *et al.* utilizaram o plano de causalidade proposto em [18] e a metodologia que analisa o aparecimento de padrões de ordem pelo método Bandt and Pompe, em [47], para a distinção entre caos e ruídos. Em [22, 23], estudaram o mapa logístico contaminado por ruído em diferentes amplitudes e os ruídos correlacionados contaminados com aditivos (ruídos com espectro de potência f^{-k}). Observaram que os sistemas estocásticos podem também apresentar padrões proibidos [23]. No entanto, em sistemas estocásticos não correlacionados (ruído branco), ou processos estocásticos correlacionados ruídos com espectro de potência f^{-k} , movimento Browniano fracionário (fBm) e ruídos Gaussianos fracionários (fGn)), pode ser numericamente provado que não existem proibições no aparecimento dos padrões para séries suficientemente longas. Para sistemas estocásticos correlacionados, a probabilidade de observar a "proibição" de padrões de ordem, depende não somente do tamanho da série, mas também da estrutura de auto-correlação. A mesma situação se repete no caso de séries provenientes de sistemas reais, já que sempre possuem uma componente estocástica [48]. Já em [24], o estudo foi estendido para 27 mapas caóticos e ruídos com espectro de potência f^{-k} , e mostrou-se que, mesmo que a presença de padrões de ordem proibidos seja uma característica de dinâmica caótica, é necessária uma longitude mínima do padrão e da série para ele ser detectado. No caso de quantificadores avaliados fazendo uso da PDF por Bandt e Pompe, um comportamento específico surge se a dinâmica caótica fornecer uma maior robustez (mais distinção) entre dinâmica determinística e estocástica.

Olivares *et al.*, em [20], propuseram a utilização de dois quantificadores de informação como medidas, ou seja, a entropia normalizada de Shannon e a informação de Fisher combinadas no denominado plano causal Shannon-Fisher [21], incorporando as informações causais através da metodologia Bandt e Pompe [19]. Olivares *et al.*, em [25], utilizou essa metodologia proposta, em [20], para analisar 3 mapas caóticos, o mapa Schuster, 1 fluxo caótico (sistema caóticos Rössler), 1 ruído com espectro de potência f^{-k} e o movimento browniano fracionário (fBm). Já Rosso *et al.*, em [26], estendeu essa análise para 27 mapas caóticos e 1 ruído com espectro de potência f^{-k} . Em todos os experimentos puderam observar que dinâmicas estocásticas e caóticas estão mapeadas em diferentes regiões do plano [20, 25, 26].

Qinglei *et al.*, em [17], propuseram uma metodologia baseada em informação digital, para distinguir processos estocásticos de processos caóticos, em específico, um método baseado na Lei de Benford (BL). Nessa análise, foram utilizados os seguintes processos: ruídos com Espectro de Potência f^{-k} , séries temporais geradas pelo movimento browniano fracionário (fBm) e ruído gaussiano fracionário (fGn), 8 mapas caóticos, mapas de Schuster e 1 fluxo caótico (sistema caótico Lorenz). Primeiramente, mostraram que a frequência com que ocorreu uma variação dos primeiros dígitos com diferentes fatores de escala foi diferente para processos estocásticos e para processos caóticos. Encontram, também, quebras drásticas da lei de Benford, mas apenas nos sistemas caóticos. Em seguida, definiram uma medida de distância da diferença da frequência entre os primeiros algarismos significativos, com frequência esperada da distribuição, em função da escala, a partir da lei de Benford. Foi verificado que esse parâmetro não varia muito para processos estocásticos, mas, para processos caóticos, as variações são significativas.

Alguns novos métodos foram propostos para transformar uma série temporal em um gra-

fos, com esta transformação tenta-se a análise do sistema através da análise das características topológicas das redes geradas [27–31, 33–35]. A literatura sugere que a análise dessas podem distinguir diferentes dinâmicas em séries temporais, de modo que tal análise torna-se uma importante ferramenta para o estudo dessas séries [33].

Em [27], Zhang *et al.* propuseram um método de mapeamento de séries temporais pseudoperiódicas, em que os dados das séries são divididos em ciclos disjuntos de acordo com o mínimo ou máximo local e, em seguida, cada ciclo é considerado um nó da rede. A conectividade da rede foi determinada pela força da correlação entre os ciclos. A partir dessa perspectiva, Zhang e Small, em [49], juntamente com algumas métricas de redes, como a distribuição do grau, o caminho mínimo e coeficiente de clustering, analisaram séries periódicas com ruídos e séries caóticas. Observaram, que as redes construídas a partir de séries temporais periódicas com ruídos correspondem a um grafo aleatório, enquanto as séries temporais caóticas exibem tipicamente características de redes de mundo pequeno e redes livres de escala.

Em [28], para o mapeamento de alguns sistemas caóticos e estocásticos, foi utilizado um método que analisa os vizinhos mais próximos no espaço de fase. Estudou-se a frequência relativa de sub-grafos dentro dessas redes e observou-se que essa distribuição pode ser útil na distinção e caracterização de diferentes sistemas como: periódicos, caóticos e periódicos com ruído. Utilizou-se, para as análises, 3 mapas caóticos, 2 mapas Hipercaóticos, 2 fluxos caóticos (sistema caóticos Rössler e Lorenz) e 1 ruído Gaussiano Fracionário (fGn).

O uso de grafo de visibilidade, introduzidos por Lacasa *et al.* [35], metodologia que transforma uma série temporal num grafo, também havia sido utilizado com o propósito de discriminar entre processos estocásticos e caóticos. Especificamente, o grafo de visibilidade horizontal [34], simplificação geométrica do VG computacionalmente mais eficiente, foi utilizada na classificação e caracterização de dinâmicas periódicas e caóticas por Lacasa e Toral [32]. Eles propõem que a distribuição de grau dos grafos resultantes, segue uma função exponencial $P(\kappa) \sim \exp(-\lambda \kappa)$, em que λ é um parâmetro positivo e κ e o grau do nodo. Eles computaram analiticamente a PDF do HVG para o caso de ruído não correlacionado (ruído branco) [34], e encontraram o valor λ_c . Además, trabalharam com a hipótese que este valor (λ_c) corresponde a um valor central que separa dinâmicas estocásticas ($\lambda > \lambda_c$) de dinâmicas caóticas ($\lambda < \lambda_c$).

Donner *et al.*, em [30, 31], apresentaram uma técnica de mapeamento baseada nas propriedades de recorrência no espaço de fase de um sistema dinâmico. Várias propriedades de redes complexas foram estudadas para o mapa Hénon, o Sistema Rossler, o sistema de Lorenz e o mapa Bernoulli. O coeficiente de *clustering* local foi proposto como uma forma de detectar objetos dinamicamente invariantes (pontos de sela ou órbitas periódicas instáveis). Além disso, o estudo das propriedades do grafo em função da dimensão foi sugerido como uma metodologia para distinguir sistemas caóticos de estocásticos.

Campanharo *et al.*, em [33], propuseram um método de mapeamento em que séries temporais são tratadas como processos de Markov, denominado o método do grafo quantil (QG). Os valores da série temporal são agrupados em quantis, e cada quantil corresponde aos nós do grafo. As conexões são determinadas pela probabilidade de transição de um modelo de Markov. Os autores estudaram sistemas de mapas caóticos (de Lorenz e Rossler atratores), através do mapeamento de séries em redes, tornando possível a distinção entre as diferentes dinâmicas.

O principal objetivo deste trabalho é propor uma metodologia em que seja possível dis-

tinguir e quantificar diferentes sistemas dinâmicos. Para isso, propomos a utilização de um método que transforma uma série temporal em um grafo, em específico o HVG, combinado com quantificadores da Teoria da Informação. Esse mapeamento é promissor, pois com ele tem-se a possibilidade de analisar séries temporais pelas funções de distribuição de probabilidade que podem ser extraídas das séries mapeadas (como a do grau, da distância, do peso, de subgrafos, dentre outras) ou por vários outros meios, citando os quantificadores de redes (como, os cálculo do caminho mínimo, do coeficiente de *clustering*, medidas de centralidade como *betweenness* e *closeness*), do coeficiente de *assortativity*, dentre outros). Por essas distribuições, pode-se quantificar essas distribuições por meio de quantificadores da Teoria da Informação; além disso, pode-se atribuir funções que descrevam melhor essas relações e utilizar os parâmetros dessas funções para análise. Nessa revisão bibliográfica, analisamos trabalhos que propõem diversas metodologias e cujo propósito assemelha-se ao nosso, sendo que alguns desses trabalhos utilizam em sua metodologia métodos iguais ou com funcionamento similar à metodologia que estamos propondo.

Metodologias Propostas e Resultados

Neste capítulo, são apresentadas as metodologias analisadas, as metodologias propostas e seus respectivos resultados. A organização é descrita a seguir: São considerados um total de 34 sistemas, sendo 27 mapas caóticos, o mapa Schuster, 2 fluxos caóticos (sistemas caóticos de Lorenz e Rössler), ruídos com Espectro de Potência f^{-k} , séries temporais geradas pelo Movimento Browniano Fracionário (fBm), ruído Gaussiano Fracionário (fGn) e 1 ruído contaminado, todas apresentadas no trabalho. Na Seção 5.1, é feita uma análise numérica completa desses sistemas pela metodologia de Lacasa e Toral [32], proposta para distinção entre a dinâmica estocástica e a caótica, utilizando-se a distribuição do grau do grafo de visibilidade horizontal. Em seguida, na Seção 5.2, é apresentada uma metodologia que combina a distribuição do grau do grafo de visibilidade horizontal com quantificadores da Teoria da informação (em específico, o Plano Shannon-Fisher), com o objetivo de distinguir a dinâmica estocástica da caótica. Utilizando esses mesmos sistemas, é feita uma extensiva análise dessa metodologia. O mapeamento pelo grafo de visibilidade horizontal permite a utilização de quantificadores clássicos de redes. Assim, na Seção 5.3, foram analisados processos estocásticos com diferentes graus de correlação (ruídos com Espectro de Potência f^{-k} , séries temporais geradas pelo Movimento Browniano Fracionário (fBm) e ruído Gaussiano Fracionário (fGn)), e foi calculado o caminho mínimo, o coeficiente de agrupamento, as medidas de centralidade e proximidade e o coeficiente de *assortativity*. Na Seção 5.4, são analisadas metodologias baseadas em mapeamento de séries temporais que aproximam o expoente de Hurst, em específico as propostas por Lacasa *et al.* [100] e por Campanharo e Ramos [101]. Em seguida, propõe-se uma nova metodologia de aproximação do expoente de Hurst, utilizando a distribuição do grau do HVG, nomeada metodologia Lambda λ .

Já na Seção 5.5, é proposta uma versão adaptada do HVG, nomeada Grafo de visibilidade Horizontal Windows (HVG-W), um algoritmo simplificado do HVG que utiliza janelas de pontos para a realização das análises das séries temporais; em seguida é feita uma análise extensiva da versão proposta, comparando os resultados obtidos pelo HVG-W com os do HVG. Por último, na Seção 5.6, é proposta mais uma versão adaptada do HVG, nomeada Grafo de visibilidade Horizontal Peso (HVG-P), à qual é acrescentado o cálculo do peso da aresta, definido pela amplitude entre dois pontos que obedecem ao critério de visibilidade, o que possibilita a extração de uma distribuição alternativa (a distribuição do peso das arestas). Essa nova distribuição, juntamente com as distribuições do grau e da distância, são usadas na análise do fBm e de dados paleoclimáticos das mudanças temporais durante a época Holoceno.

5.1 Regra do Lambda λ

Lacasa e Toral [32] utilizaram o HVG para discriminar sistemas caóticos de processos estocásticos. A metodologia utilizada por eles baseia-se no uso da distribuição de grau obtido após o mapeamento da série temporal. Assumindo que as distribuições de grau associadas aos sistemas estudados seguem uma distribuição exponencial da forma $P(\kappa) \propto \exp\{-\lambda \kappa\}$, mostraram analiticamente que, para os ruídos não correlacionados, $\lambda = \ln(3/2)$ e propuseram que este desempenha o papel de uma fronteira entre os processos estocásticos e caóticos, sendo que as séries associadas aos sistemas estocásticos possuem $\lambda > \ln(3/2)$ e, no caso das séries caóticas, $\lambda < \ln(3/2)$. O parâmetro λ é calculado ajustando uma reta ao gráfico $\ln(P(\kappa))$ versus o grau κ , o valor de λ é encontrado usando o método dos mínimos quadrados, sendo λ a inclinação da reta ajustada. A região de escalonamento linear considerado por Lacasa e Toral é $3 \leq \kappa \leq 20$ ou $3 \leq \kappa \leq \kappa_{max}$ (se $\kappa_{max} \leq 20$) para processos estocásticos, e $3 \leq \kappa \leq 25$ ou $3 \leq \kappa \leq \kappa_{max}$ (se $\kappa_{max} \leq 25$) para processos caóticos.

Ao reproduzir o teste acima, proposto por Lacasa, para todos os sistemas descritos no trabalho, observamos que, mesmo que essa metodologia funcione para vários sistemas caóticos e estocásticos, são encontrados vários exemplos em que os resultados divergem daqueles esperados. Tais resultados são apresentados a seguir. Para os processos estocásticos analisados, foram calculadas média de 10 amostras.

5.1.1 Cálculo do Lambda λ

Considerando a distribuição do grau obtida pelo grafo de visibilidade horizontal e dada pela relação exponencial $P(\kappa) \propto \exp\{-\lambda \kappa\}$, foi calculado o parâmetro λ para os mapas caóticos e processos estocásticos, como representado nas Figuras 5.1 e 5.2, respectivamente. O tamanho de série considerado em todos os casos foi 10^5 dados. Os valores foram obtidos seguindo a metodologia proposta por Lacasa e Toral. O parâmetro λ foi calculado através do ajuste, utilizando-se o método dos mínimos quadrados, sendo λ a inclinação da linha reta. A região de escalonamento linear considerada em todos os casos é de $3 \leq \kappa \leq 20$ ou de $3 \leq \kappa \leq \kappa_{max}$ (se $\kappa_{max} \leq 20$) para processos estocásticos, e, para processos caóticos, $3 \leq \kappa \leq 25$ ou $3 \leq \kappa \leq \kappa_{max}$ (se $\kappa_{max} \leq 25$). A aproximação foi realizada com intervalos de confiança de 95 por cento, supondo-se que o parâmetro segue um modelo Gaussiano, uma estrutura linear para a regressão e erros de média zero. Esses valores serão indicados entre parênteses após a estimativa ponto de λ .

Na Figura 5.1, para os mapas caóticos, estão em azul os valores do parâmetro λ dentro do intervalo proposto, em que λ é menor que $\ln(3/2)$ [32]; já os valores de λ maiores que $\ln(3/2)$, ou seja, fora do intervalo proposto, estão em vermelho. Exemplos de mapas caóticos em que λ é maior que $\ln(3/2)$ correspondem a: (5) mapa cúbico, (9) mapa Pinchers, (10) mapa Spence, (11) mapa sine - círculo, (14) mapa logístico, (15) mapa Tinkerbell (X), (16) mapa do Burger (Y), (17) mapa Holmes cúbico, (19) mapa Ikeda (Y), (21) mapa predador-presa (Y), (23) mapa web, (27) mapa Lorenz tridimensional. Para os fluxos caóticos, os valores do parâmetro λ obtidos foram $\lambda = 0,292 [0,267;0,317]$ e $\lambda = 0,412 [0,385;0,439]$, para o sistema de Lorenz (coordenada X) e sistema de Rossler (coordenada X), respectivamente.

Já na Figura 5.1, para os processos estocásticos, em azul, os valores do parâmetro λ maior

que $\ln(3/2)$, dentro do intervalo proposto [32]; fora do intervalo, em vermelho, os valores de λ menores que $\ln(3/2)$. Os processos estocásticos em que λ é menor correspondem a fGn com $-0,8 \leq \beta \leq -0,4$.

É possível ver, a partir dessas figuras, que vários mapas caóticos e sistemas estocásticos seguem a regra acima mencionada; no entanto, encontramos outros que não seguem, de forma que a relação proposta não pode ser considerada universal.

Ao plotar a distribuição do grau em escalas semi-logarítmicas a partir do intervalo definido $\kappa = 3$, foram encontrados vários exemplos de sistemas dinâmicos com escalonamento linear bem definido na região, como pode ser observado na figura 5.3. Contudo, mesmo com um comportamento linear bem definido, como por exemplo o Mapa Cúbico Holmes (x), o valor do parâmetro λ foi maior que $\ln(3/2)$, o qual não satisfaz a distinção proposta por Lacasa e Toral [32]. Já na Figura 5.5, estão representados casos com valores de λ em escalonamento linear mal definido na região: mapa de cusp e mapa schuster com $z = 2$, associados à distribuição do grau, em que a cauda pesada dificulta a representação da zona de escala linear, além do mapa Tinkerbell (Y) e mapa do Burger (X) para os quais é impossível definir uma zona de escala linear única e, em consequência, a hipótese de um comportamento exponencial para todos os sistemas não pode ser confirmada.

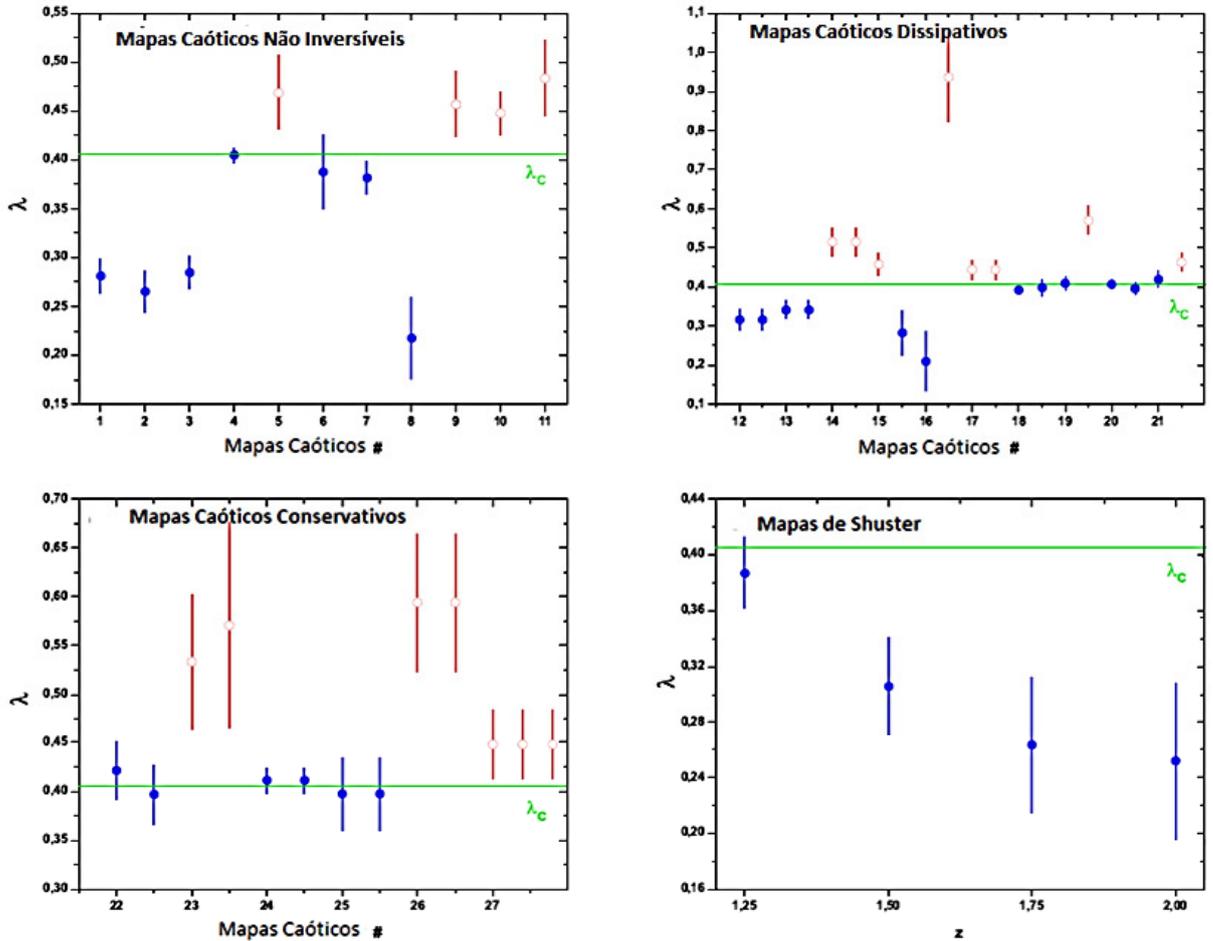


Figura 5.1: Cálculo dos valores do λ para os mapas caóticos não inversíveis, dissipativos, conservativos e de Schuster das PDFs determinados pelo HVG. A linha horizontal representa o valor de λ_c correspondente ao ruído branco (dinâmica estocástica não correlacionadas). Círculos completos (azuis) estão de acordo com Lacassa e Toral [32] regra proposta e círculos vazios (vermelho) não.

5.1.2 Assimetria e Curtose

Dada a distribuição de probabilidade de uma dimensão $f(x)$, com $x \in \Delta \subset \mathbb{R}$, a medida de dispersão usual é a variância $V[f] = \int_{\Delta} (x - \langle x \rangle)^2 dx$. A variância mede a variabilidade (quadrática) em torno da média. Esta propriedade faz com que a variância (ou sua raiz quadrada, o desvio padrão) seja particularmente útil e boa para distribuições unimodais. Outras quantidades interessantes baseadas em momentos de ordem superior são a assimetria ou obliquidade (medida de momento de terceira ordem) e a curtose (momento de quarta ordem). A assimetria mede a assimetria ou distorção da distribuição da cauda da PDF e a curtose descreve o "achatamento" relativo da densidade com respeito à lei de Gauss.

O uso da assimetria e da curtose dependem da interpretação dos dados, sendo, por isso, de uso limitado ao lidarmos com distribuições assimétricas, como é o caso da distribuição de

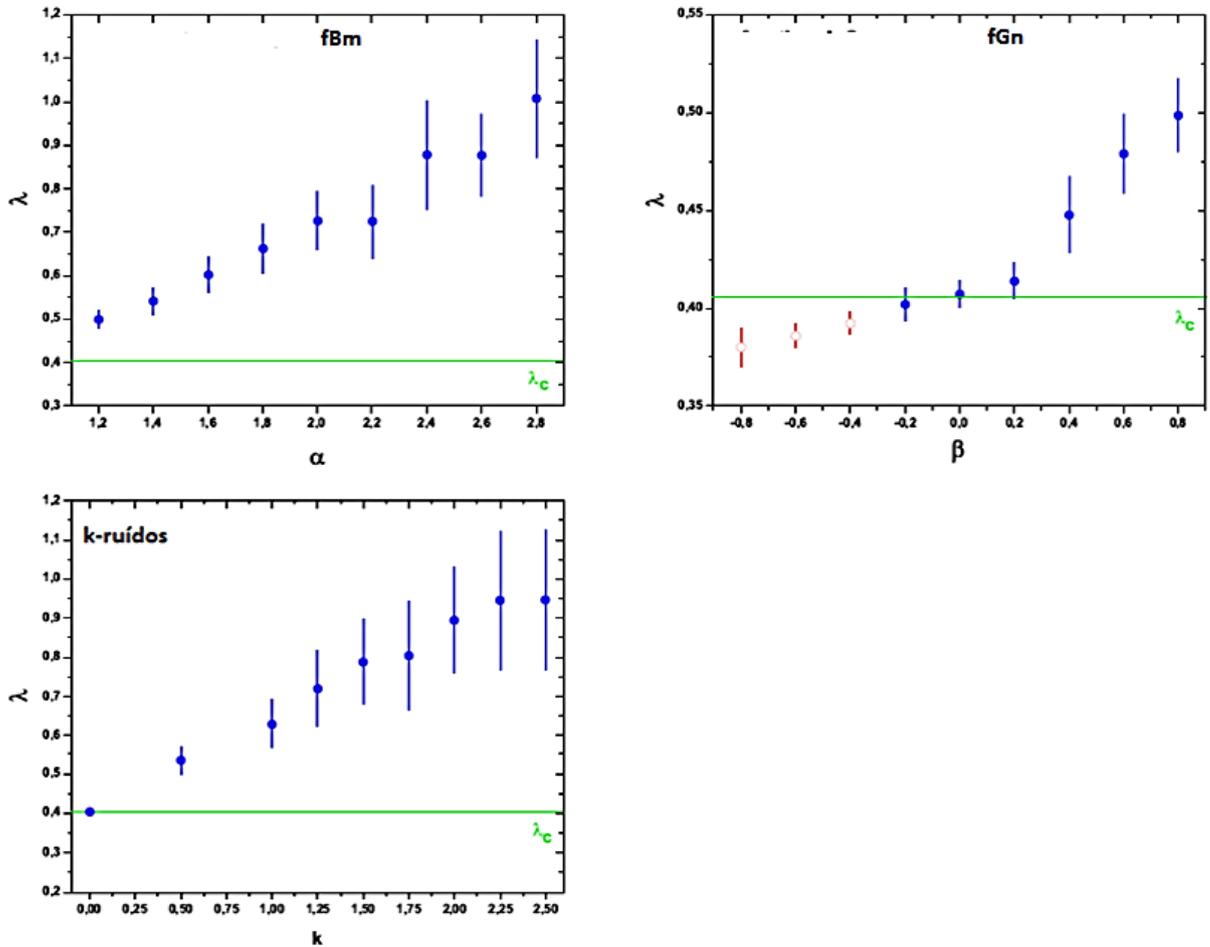


Figura 5.2: Cálculo dos valores do λ para os processos estocásticos fBm, fGn e ruído com f^{-k} das PDF's do grau determinados pelo HVG. A linha horizontal representa o valor de λ_c correspondente ao ruído branco (dinâmica estocástica não correlacionadas). Círculos completos (azuis) estão de acordo com [32] regra proposta e círculos vazios (vermelho) não.

grau $P(\kappa)$, que é sempre positiva. Entre as muitas alternativas disponíveis na literatura, para a avaliação da assimetria e da curtose, Brys em [102] empregam com sucesso as informações fornecidas. Em particular, tem-se que uma medida alternativa da curtose é capaz de descrever as diferentes caudas pesadas do nó observadas na distribuição do grau pelo HVG.

Valores de assimetria maiores que zero indicam uma cauda à direita, isto é, valores acima da média. Valores menores que zero indicam cauda à esquerda e valores iguais a zero indicam uma distribuição simétrica. Já os valores da curtose é maiores que zero indicam um formato mais alto (afunilado) da distribuição em relação à distribuição normal (leptocúrtica). Valores maiores que zero indicam um achatamento com relação à normal (platicúrtica). Valores iguais a zero é um indicativo de achatamento igual à distribuição normal (mesocúrticas).

Considere $x_i = (x_1, \dots, x_n)$ uma amostra de valores reais n . O quartil amostra de ordem $0 < \eta < 1$ é $q(\eta) = \min\{x \in \mathbb{R} : \hat{F}(x) \geq \eta\}$ e $\hat{F}(x) = n^{-1}\#\{x_i : x_i \leq x\}$, em que $\#\Theta$ denota

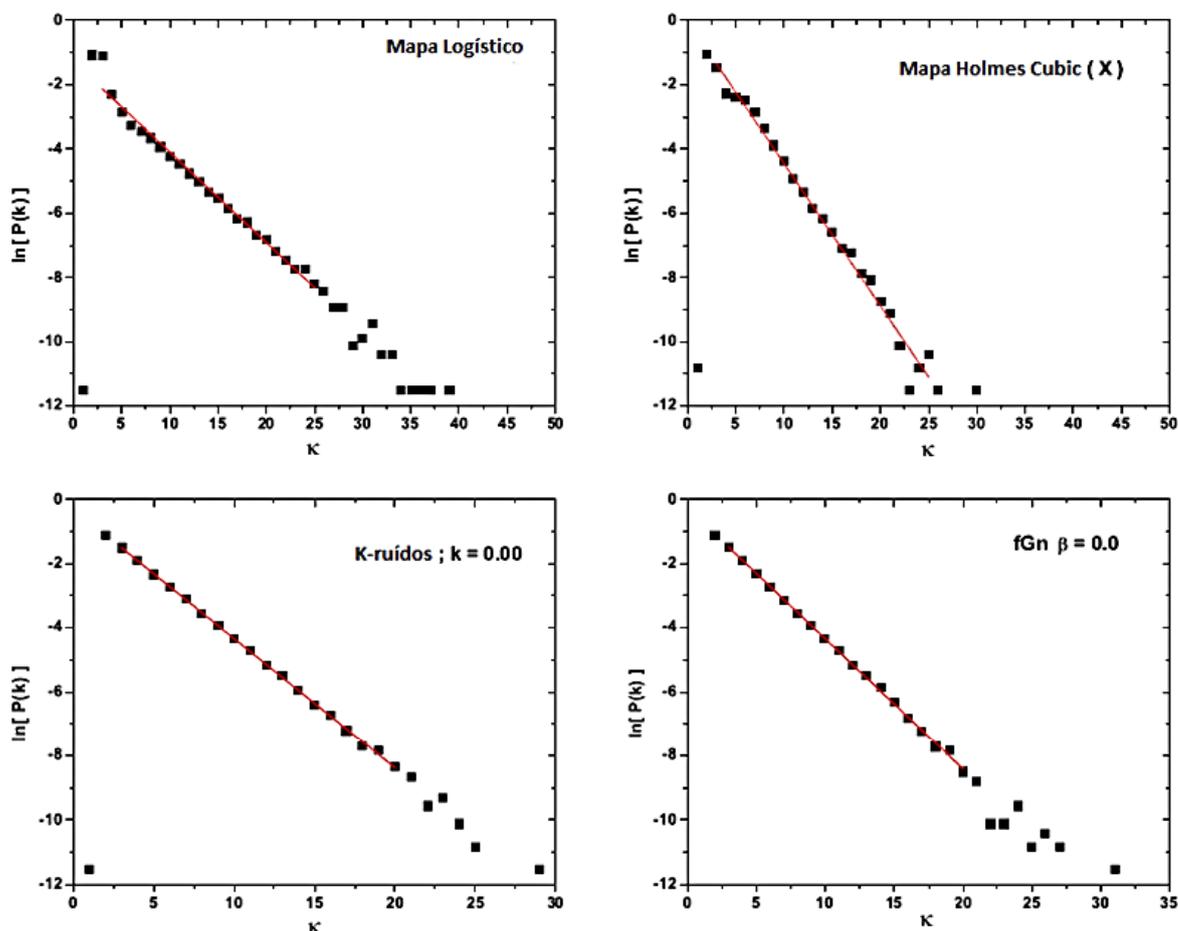


Figura 5.3: Determinação dos valores de λ : Exemplos de sistemas dinâmicos analisados em escalonamento linear bem definido na região. Em todos os casos, séries temporais com $N = 10^5$ são considerados, e as regiões de escala lineares são definidas por $3 \leq \kappa \leq 25$ para mapas caóticos e $3 \leq \kappa \leq 20$ para séries temporais estocásticas.

a cardinalidade do conjunto Θ , é a distribuição cumulativa da amostra função também conhecida como função empírica. Medidas baseadas em quartil de assimetria e curtose podem ser definidos como:

$$\hat{\gamma}_1(\xi) = \frac{q(1-\xi) + q(\xi) - 2q(1/2)}{q(1-\xi) - q(\xi)} \quad (5.1)$$

e

$$\hat{\gamma}_2(\xi, \rho) = \frac{q(1-\rho) - q(\rho)}{q(1-\xi) - q(\xi)} \quad (5.2)$$

respectivamente, em que $0 < \xi < \rho < 1$. Os valores para duas distribuições de referência foram calculadas analiticamente com $\xi = 1/10$ e $\rho = 1/100$. Para a distribuição exponencial com

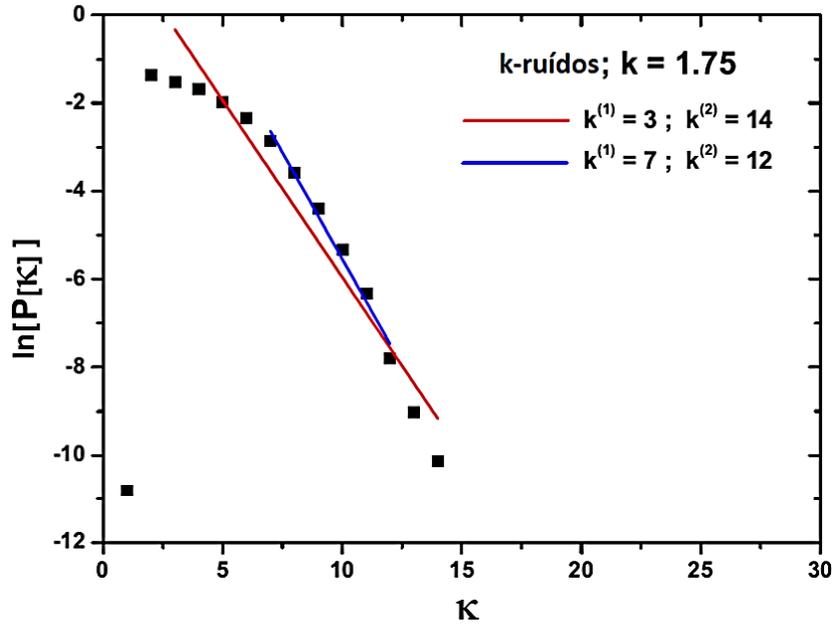


Figura 5.4: Determinação dos valores de λ no caso de séries temporais geradas pela dinâmica estocástica de f^{-k} com $k = 1.75$. Séries temporais com $N = 10^5$ dados. Duas diferentes zonas de escalares linear: a) $3 \leq \kappa \leq 14$, resultou em 0.803 $[0.666; 0.941]$ e b) $7 \leq \kappa \leq 12$, resultou em 0.966 $[0.797; 1.136]$.

função densidade de probabilidade $P(\kappa) = \exp(-\kappa)$, $\kappa > 0$, são eles:

$$\gamma_1(1/10) = \frac{2 \log(1/2) - \log(1/10) - \log(9/10)}{\log(9/10) - \log(1/10)} \approx 0.465 \quad (5.3)$$

e

$$\gamma_2(1/10, 1/100) = \frac{\log(99/100) - \log(1/100)}{\log(9/10) - \log(1/10)} \approx 2.091 \quad (5.4)$$

e para a distribuição do grau sob o ruído branco, cuja função de probabilidade $P(\kappa) = 3^{-1}(2/3)^{\kappa-2}$, $\kappa \geq 2$ [32, 35], são $\gamma_1(1/10) = 3/5 = 0.6$ e $\gamma_2(1/10, 1/100) = 11/5 = 2.2$.

Vale a pena notar que vários mapas caóticos apresentam valores elevados da curtose com valores positivos de assimetria, indicando uma PDF com cauda pesada, o que mostra a importância do uso de um quantificador que considere toda a informação disponível. A Figura 5.6, mostra exemplos de PDF de vários sistemas caóticos e estocásticos. Note-se que, para alguns sistemas, os PDF não apresentam um comportamento exponencial. Comprometendo a hipótese inicial considerada por Lacasa e Toral.

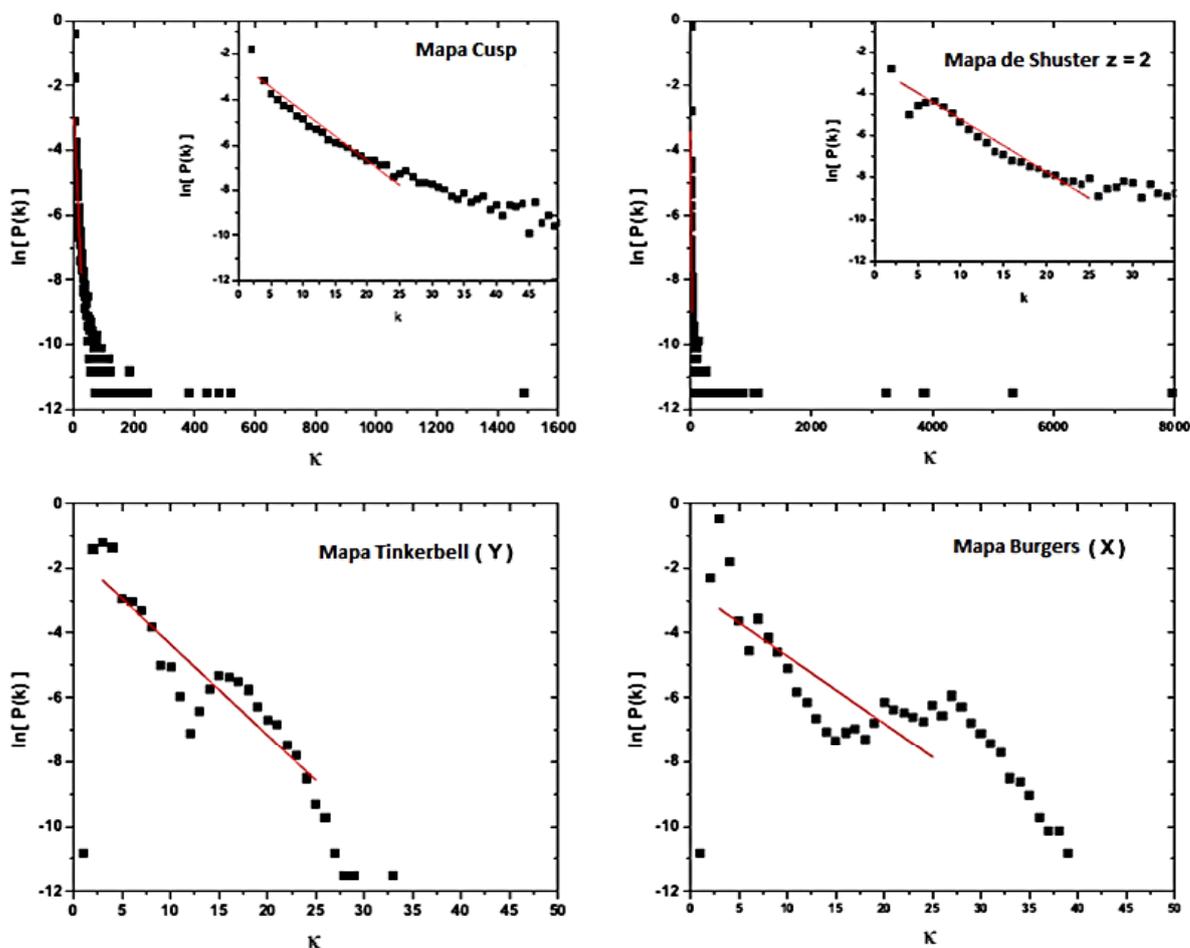


Figura 5.5: Casos com determinação dos valores de λ em escalonamento linear mal definido na região. Séries temporais com $N = 10^5$ dados foram considerados.

5.1.3 Discussões e Conclusões Parciais da Regra do Lambda λ

Na metodologia proposta por Lacasa e Toral, existe uma perda de informação provocada pela simplificação do método; mesmo assim o *trade-off* (tempo vs informação) continua sendo muito favorável ao uso do HVG. O grave problema da metodologia proposta, ao nosso ver, é a definição de um valor universal de λ para a determinação da natureza dos sistemas estudados. Destacamos, em particular, os seguintes problemas pontuais:

Região linear: Vários sistemas apresentam uma região linear bem definida, possibilitando a determinação de λ . Exemplos desta situação são o mapa logístico, o mapa Holmes cúbico (X), o k -ruído com $k = 0$ e o fBm com $\beta = 0$, apresentados na Figura 5.3 e na Tabela 5.1. No entanto, devemos salientar que o fato de haver uma região escalar bem definida não garante a satisfação da regra λ . Veja, por exemplo, o mapa de Holmes cúbico (X) que, apesar de apresentar uma região de escala linear clara, apresenta um $\lambda = 0,443 [0,418; 0,469] > \ln 3/2$, contradizendo a hipótese. Outro ponto importante

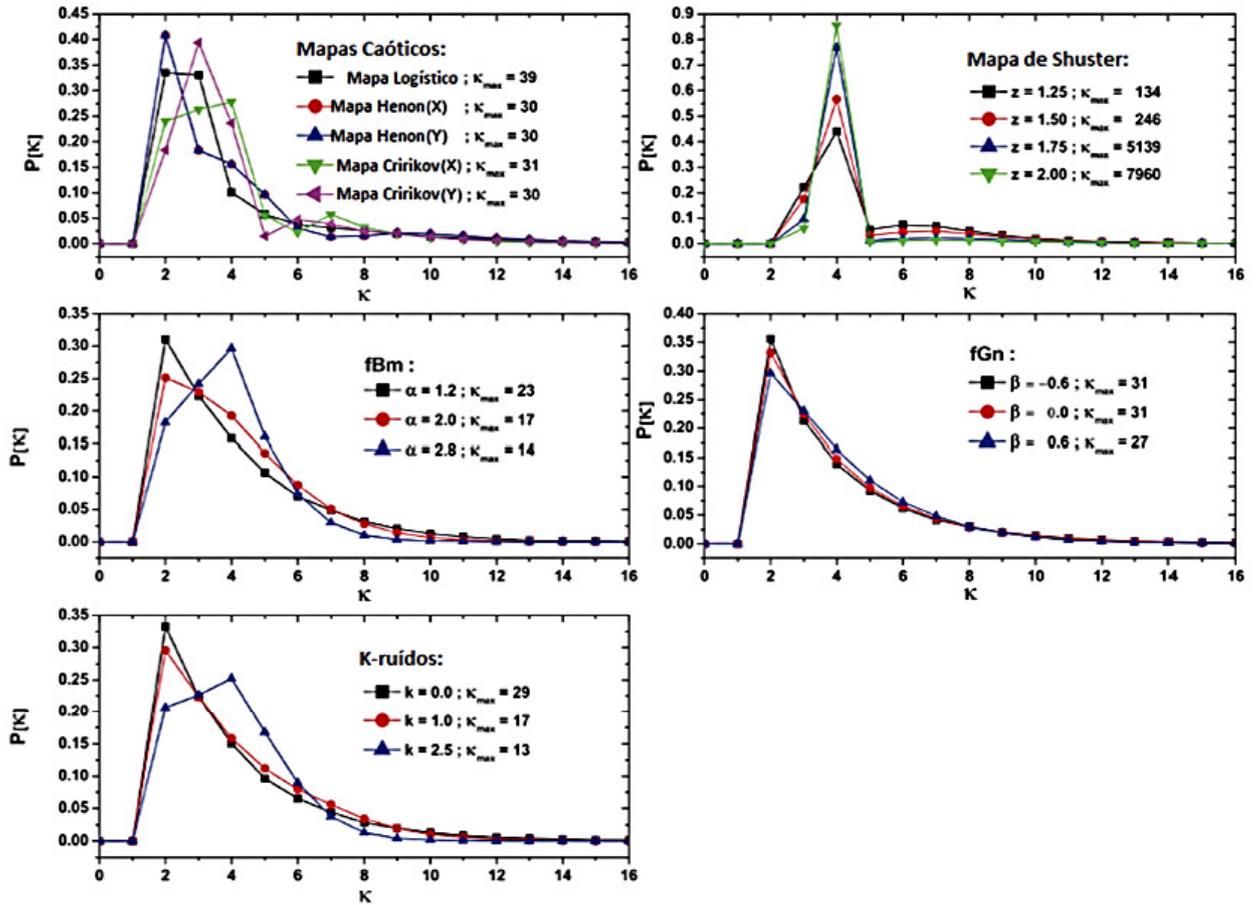


Figura 5.6: Exemplos de PDF-HVG para alguns sistemas caóticos e estocásticos. O tamanho das séries temporais é $N = 10^5$. (a) Mapas Caóticos. (b) Mapas de Schuster. (c) fBm. (d) fGn. (e) k-ruídos.

é a seleção da região linear, pois a inclusão ou exclusão de alguns pontos nos extremos da região pode mudar drasticamente o valor de λ . A Figura 5.4 mostra o efeito de se selecionar diferentes zonas escalares para um processo estocástico com $f^{-1,75}$. Se a região linear é definida no intervalo do grau do nó $3 \leq \kappa \leq 14$, então obter-se-á $\lambda = 0,803 [0,666; 0,941]$. No entanto, se a região linear é redefinida para o intervalo de $7 \leq \kappa \leq 12$, então obter-se-á $\lambda = 0,966 [0,797; 1,136]$, o que representa uma variação de 16,3 por cento.

Caudas Pesadas: A definição de uma região linear única é uma tarefa difícil para sistemas com uma PDF de cauda pesada. Note-se que, quando definimos uma região escalar, informações importantes contidas nas caudas podem ser perdidas. Exemplos de sistemas com PDF's de caudas pesadas são o mapa de Cusp e o de Schuster (ver Figura 5.5).

Comportamento não exponencial: Alguns sistemas apresentam PDF com nenhuma região

Sistemas	$\hat{\lambda}$	$\hat{\gamma}_1(\xi)$	$\hat{\gamma}_2(\xi, \rho)$
Exponencial	1	0,465	2,091
Ruído Branco	$\log 3/2 \approx 0,405$	0,600	2,200
$k = 0$ Ruído	0,404 [0,398; 0,409]	0,600	2,200
$\alpha = 2$ fBm	0,726 [0,660; 0,791]	0,200	1,600
$\beta = 0$ fGn	0,407 [0,400; 0,414]	0,600	2,200
Mapa Logístico	0,281 [0,264; 0,298]	0,666	2,333
Mapa Cusp	0,217 [0,175; 0,259]	0,500	5,250
$z = 1,25$ Schuster	0,387 [0,362; 0,412]	0,600	2

Tabela 5.1: Sistemas dinâmicos e alguns valores de seus quantificadores estatísticos: assimetria ($\hat{\gamma}_1$), curtose ($\hat{\gamma}_2$) de evolução para $\xi = 1/10$ e $\rho = 1/100$, $\hat{\lambda}$ é obtido (com intervalo de confiança) da função exponencial proposta por Lacasa e Toral em [32]. São considerados séries com $N = 10^5$ dados.

linear e, em consequência disso, a hipótese de um comportamento exponencial não pode ser confirmada, comprometendo seriamente a hipótese de trabalho de Lacasa e Toral. Ver, por exemplo, o mapa de Tinkerbell e o mapa de Burger (X) na (ver Figura 5.5).

Em anexo (na seção 7.2), encontram-se todos os gráficos das PDF's para todos os sistemas dinâmicos citados aqui.

5.2 Plano Causal Shannon-Fisher

Rosso *et. al.* [18], propuseram uma metodologia baseada em quantificadores de Teoria da Informação para a distinção entre processos caóticos e estocásticos. Especificamente, utilizaram a entropia de Shannon normalizada, e a complexidade estatística. Para a obtenção da PDF associada a cada sistema utilizaram o método Bandt e Pompe (BP). O uso dessa metodologia levou a resultados interessantes sobre as características da dinâmica caótica e estocástica, melhorando a compreensão da série temporal associada. Em [20, 25] houve um seguimento da metodologia mencionada, onde foi estendida a análise a um maior número de mapas e foi proposta a utilização do Plano Causal Shannon-Fisher ($S \times \mathcal{F}$), para o mapeamento dos sistemas, mantendo a utilização de PDF-BP no processamento das séries temporais.

O Plano Causal Shannon-Fisher, ($S \times \mathcal{F}$), introduzido por Vignat e Bercher [21] é uma representação planar em que os eixos horizontais e verticais são funcionais da distribuição de probabilidade pertinente, ou seja, a entropia de Shannon S e a medida de informação de Fisher \mathcal{F} , respectivamente. Esta ferramenta é uma maneira conveniente de representar, no mesmo plano de informação, aspectos globais e locais das PDF's associadas ao sistema estudado.

Baseando nas ideias acima, propomos uma metodologia capaz de discriminar processos caóticos de processos estocásticos (não correlacionados e correlacionados) de séries temporais [39]. Para isto, utilizamos o grafo de visibilidade horizontal (HVG), que como discutido anteriormente permite capturar naturalmente a causalidade temporal da série. Para a análise do grafo obtido, utilizamos a distribuição de grau da rede em conjunto com quantificadores da

Teoria da Informação, mais especificamente o plano Shannon-Fisher ($S \times \mathcal{F}$), que capta características globais e locais da dinâmica do sistema. Os resultados são apresentados a seguir.

5.2.1 Análise e Discussões do Plano Causal Shannon-Fisher

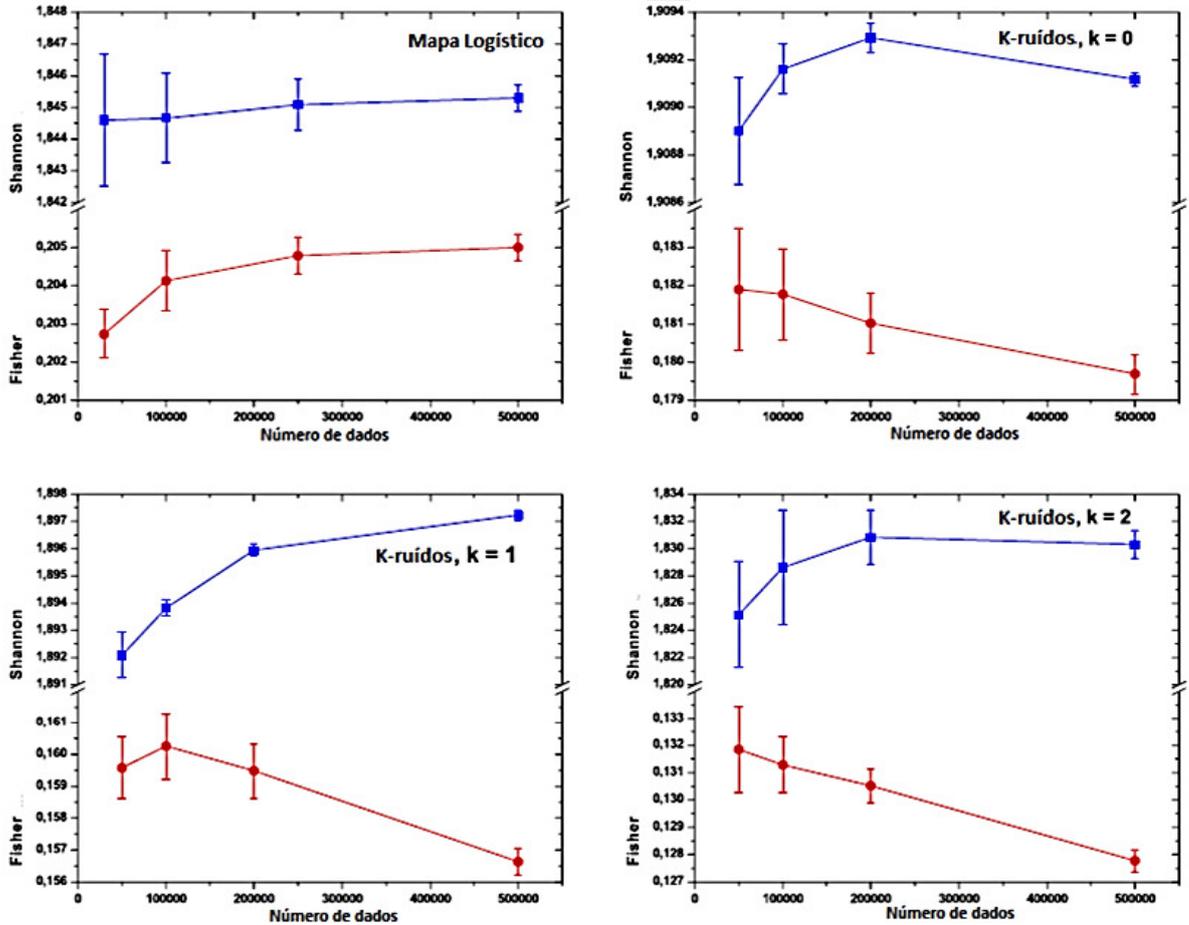


Figura 5.7: Estudo do efeito do tamanho da série no cálculo dos quantificadores de Teoria de Informação. Foram considerados o mapa logístico e k-ruídos.

A complexidade estatística, um quantificador da teoria da informação com base na relação entre a entropia de Shannon normalizada e a divergência Jensen-Shannon, foi previamente utilizada para distinguir, com sucesso, dinâmica estocástica de dinâmica caótica [18, 22–24]. Contudo, quando se extrai a PDF do sistema através de HVG, esse quantificador apresenta resultados insatisfatórios, se considerados todos os sistemas. Grafos obtidos através da aplicação de HVG apresentam caudas de distribuições do grau muito curtas. Assim, quando se considera uma série temporal suficientemente longa para capturar a dinâmica dos sistemas, a divergência Jensen Shannon não pode fazer uma discriminação clara entre os diferentes sistemas de distribuições do grau, devido ao elevado número de componentes com $p_i = 0$. Como consequência direta, a complexidade estatística transmite informações limitadas. A utilização da informação

de Fisher traz percepções locais do grau de distribuição. Portanto, o plano $S \times \mathcal{F}$ permite mapear a informação global e local, descrevendo a natureza e as semelhanças entre os sistemas. Para ilustrar essas observações, representamos, em anexo (ver seção 7.3), as entropias de Shannon (S), Jensen-Shannon (JS), MPR e Fisher (\mathcal{F}), em função do expoente de Hurst H para os fBm e fGn, para o tamanho de série $N = 10^5$.

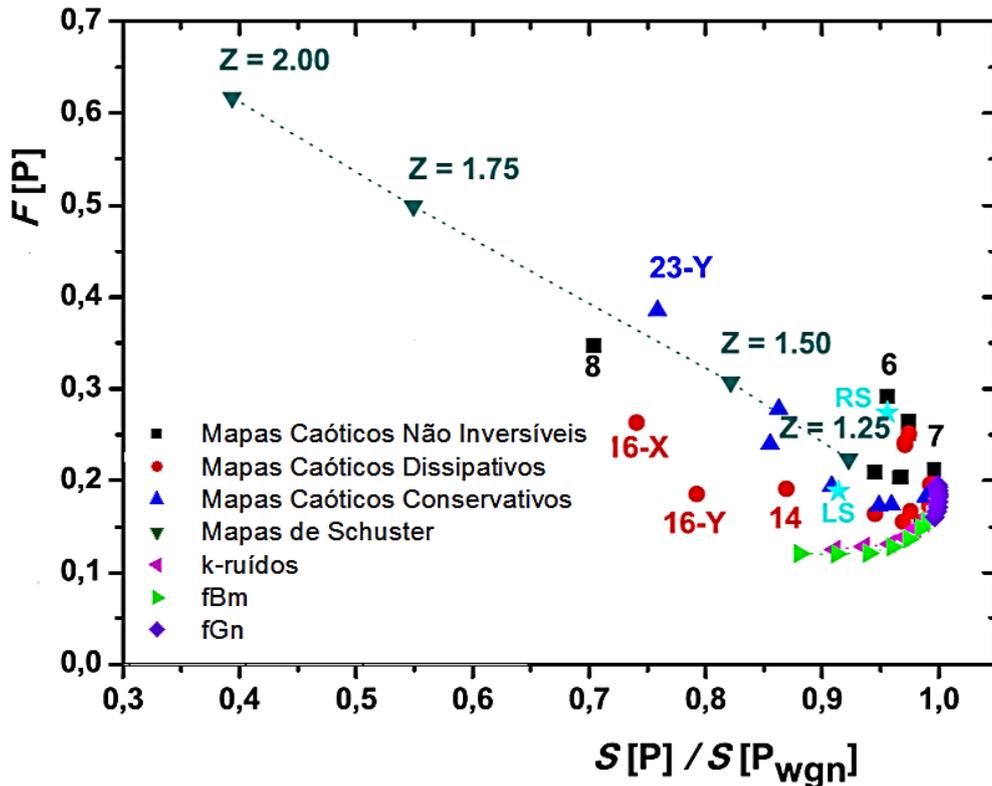


Figura 5.8: Representação do plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, para todos os sistemas dinâmicos. Séries de tamanho $N = 10^5$ foram consideradas. O símbolo (\star) representa os fluxos caóticos, o atrator caótico Lorenz (LS) e o atrator caótico Rössler (RS).

A dependência dos quantificadores da Teoria da Informação, com séries de tamanhos de $N = 3 \cdot 10^4$ a $N = 5 \cdot 10^5$ dados, foi calculada com objetivo de estudar a dependência desses quantificadores em relação ao tamanho da série temporal, como pode ser visto nessa Figura ???. A Informação de Fisher e a entropia de Shannon rapidamente convergem para valores estáveis. Por exemplo, para esses casos representados, a ordem de grandeza das variações percentuais do valor médio nas séries com $N = 10^5$ e $N = 5 \cdot 10^5$, encontra-se entre 10^{-4} e 10^{-5} . Por essa razão, para todos os experimentos, daqui em diante, foram consideradas séries temporais com valores de $N = 10^5$.

Na representação do plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, são apresentados todos os mapas e ruídos apresentados na Seção 3, como pode ser visto na Figura 5.8. Neste trabalho, trocamos a normalização clássica ($\ln N$), em que N é tamanho da série para facilitar a comparação de resultados quando utilizadas séries de diferentes tamanhos. Assim, os valores da entropia de Shannon foram normalizados usando o valor da entropia do ruído gaussiano branco (fGn para

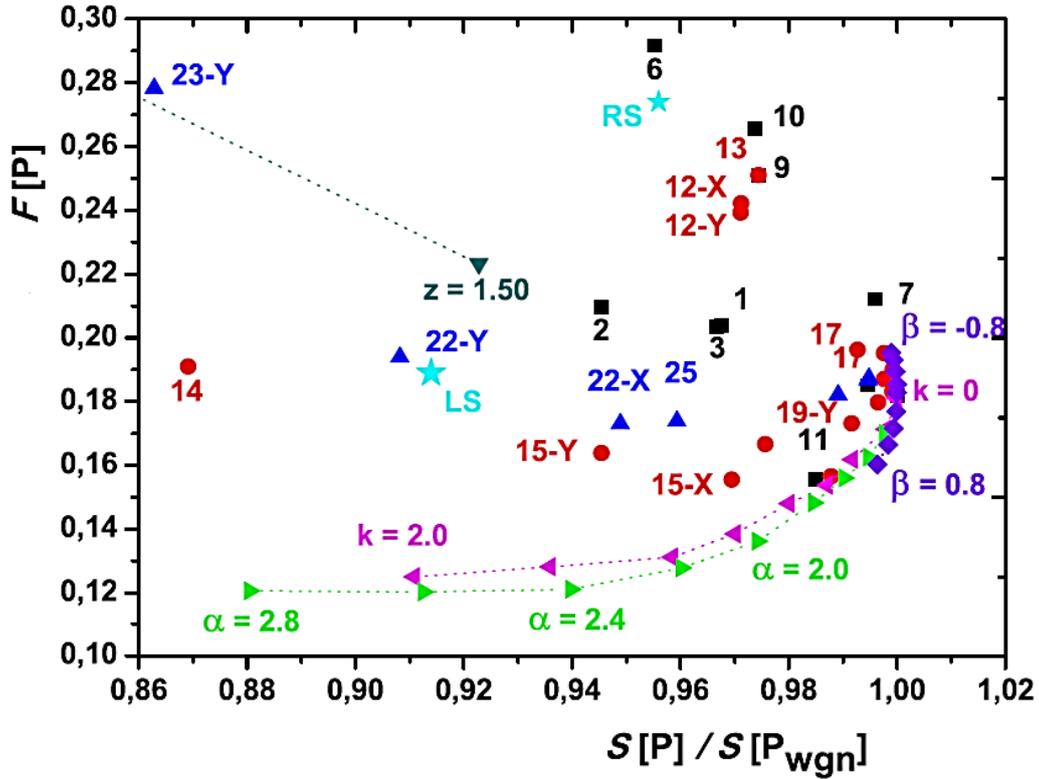


Figura 5.9: Representação do plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$. Zoom da Figura 5.8.

$\beta = 0$ e $S[P_{wgn}]$). O uso do comportamento de $S[P_{wgn}]$ garante uma estabilização dos valores, permitindo, assim, uma melhor comparação.

Um resultado interessante é o fato de que a informação de Fisher (\mathcal{F}) diminui com a força da correlação dos ruídos, como mostrado na Figura 5.8. A distribuição do grau correspondente a ruídos com menor correlação e apresenta picos altos, bem como caudas longas.

Quando as correlações ficam mais fortes, os picos diminuem e as caudas ficam mais curtas. Para a situação não correlacionada (ruído branco), a forte contribuição da cauda longa, mesmo tendo o pico mais elevado, faz com que a forma da distribuição seja mais próxima à distribuição uniforme. Esses efeitos podem ser vistos na Figura 5.6.

A informação de Fisher é sensível a pequenas flutuações. É possível ver que as maiores diferenças em valores de p_κ consecutivos da distribuição $P(\kappa)$ resultam em maiores valores de \mathcal{F} . Neste caso, os picos mais elevados nas distribuições do grau, correspondem a valores mais baixos da correlação, e representam a principal contribuição para \mathcal{F} . Os termos extras presentes na cauda longa, mesmo contribuindo com valores pequenos, ainda assim aumentam o valor de \mathcal{F} , como visto nas Figuras 5.6 e 5.9. O valor mais baixo de \mathcal{F} corresponde ao ruído com forte estrutura de correlação (fBm com $\alpha = 2,8$), ver Figura 5.9.

A entropia de Shannon S , que não é tão sensível a pequenas flutuações, apresenta seu valor mais alto para ruídos com menor correlação e, com estruturas de correlação mais fortes, S diminui. A localização planar da informação de Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, dá informações interessantes sobre a relação entre os sistemas. Ruídos parecem ser organizados como uma

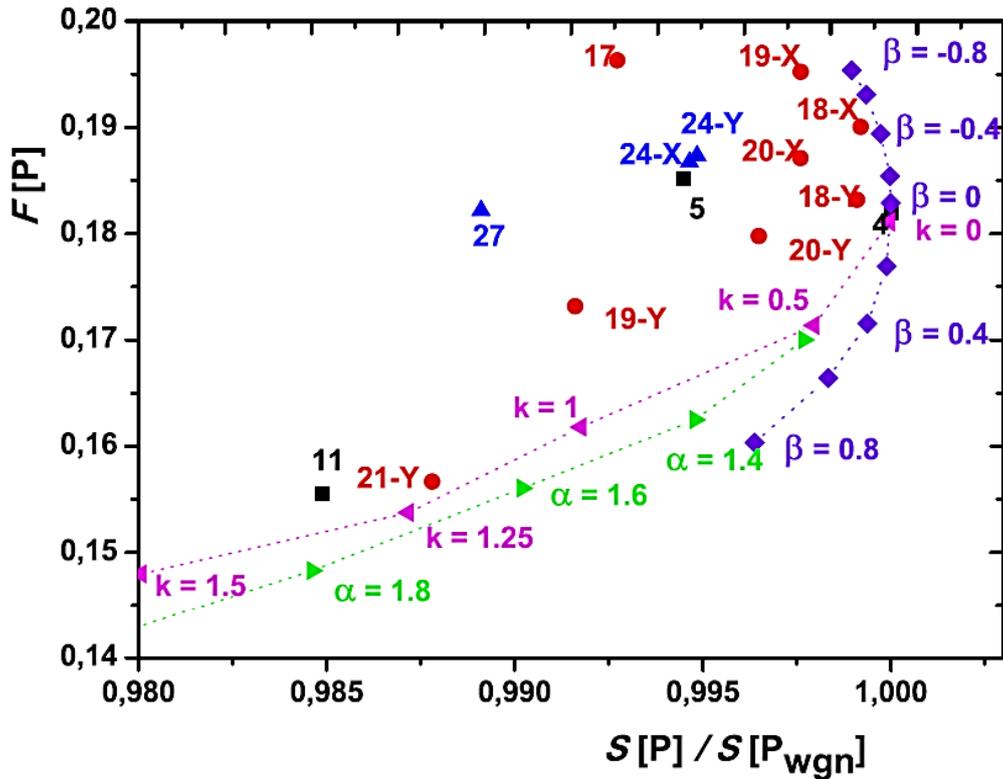


Figura 5.10: Representação do plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$. Zoom da Figura 5.9.

fronteira a partir da qual todos os mapas caóticos se concentram, como pode ser visto nas Figuras 5.8, 5.9 e 5.10.

Note-se que alguns mapas caóticos estão localizados nas proximidades da “fronteira” no plano $S \times \mathcal{F}$. Estes mapas são: o gerador linear congruente (4), o mapa de dissipação padrão (18) e o mapa Sinai (20). Esta localização planar pode ser compreendida uma vez que esses mapas apresentam um comportamento dinâmico estocástico quando representados num plano bidimensional. No entanto, quando representados em planos dimensionais mais elevados, estruturas planares aparecem, denotando seu comportamento caótico.

O uso do Plano causal $S \times \mathcal{F}$ pode revelar informações importantes sobre a estrutura do sistema subjacente. Por exemplo, os mapas Schuster exibem um comportamento linear no plano $S \times \mathcal{F}$ ao variar o parâmetro z . Regiões laminares mais amplas $z = 2$ geram um maior número de nós com valores pequenos dos graus. Ao mesmo tempo, nós localizados nos extremos de uma região laminar possuem maiores valores dos graus. À medida que o parâmetro z diminui, as estruturas laminares diminuem, reduzindo o número de nós com maiores valores de graus. Esse fato posiciona o sistema Schuster mais longe da fronteira, à medida que z aumenta, como pode ser visto nas Figuras 5.6 e 5.9.

Na Figura 5.11, estão representados os resultados obtidos para o ruído contaminado (ruído com distribuição uniforme e com diferentes amplitudes, $0 \leq A \leq 1$ com $\Delta A = 0.1$), juntamente ao mapa logístico com $\rho = 4$ (dinâmicas caóticas totalmente desenvolvidas). É fácil ver que ambos os quantificadores são capazes de capturar o aumento da amplitude do ruído, mapeando

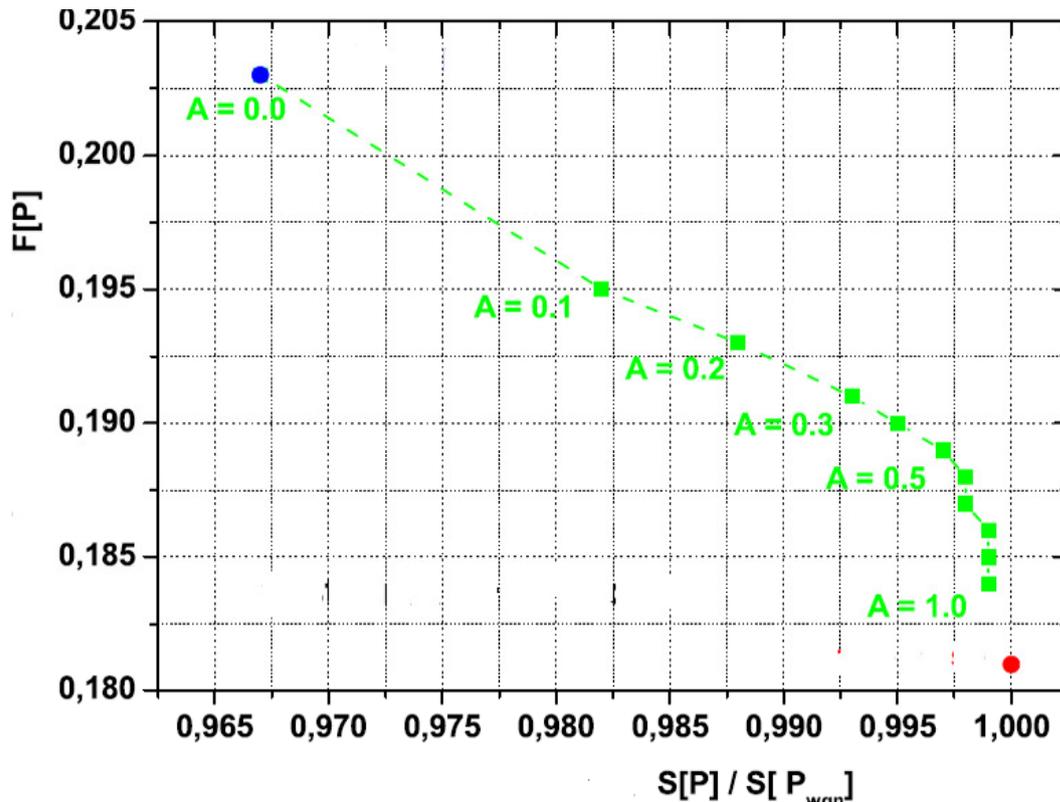


Figura 5.11: Representação do plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, para o Mapa Logístico (comportamento caótico, $\rho = 4$), com aditivo ruído branco e amplitude A . Em $A = 0.0$ temos o mapa logístico puro e em $A = 1.0$ temos o ruído puro. Séries de tamanho $N = 10^5$ foram consideradas.

o sistema de localização do mapa logístico original ($A = 0$) até a região do ruído puro.

5.2.2 Conclusões Parciais sobre do Plano Causal Shannon-Fisher

Propomos, assim, uma nova metodologia para o estudo de sistemas dinâmicos: o uso do grafo de visibilidade horizontal em combinação com dois quantificadores da Teoria de Informação, a entropia de Shannon e a informação de Fisher. A avaliação dos quantificadores para a série temporal foi feita utilizando a função de distribuição de probabilidade do grau do nó obtida pelo HVG. Foram considerados um total de 34 sistemas, sendo 27 mapas caóticos, o mapa Schuster, 2 fluxos caóticos (sistemas caóticos de Lorenz e Rössler), Ruídos com Espectro de Potência f^{-k} , séries temporais geradas pelo Movimento Browniano Fracionário (fBm), ruído Gaussiano Fracionário (fGn) e 1 ruído contaminado. Ao organizar esses resultados no plano $S \times \mathcal{F}$, mostramos que esta nova ferramenta gráfica é capaz de capturar características que revelam a natureza que rege esses sistemas, distinguindo processos estocásticos e caóticos. Além disso, nos processos estocásticos foi possível distinguir os diferentes graus de estruturas de correlações.

5.3 Análise Topológicas das Redes

Em [27, 30, 31, 33–35] foram propostos métodos para transformar uma série temporal em um grafo, de modo que a dinâmica do processo pudesse ser compreendida analisando a topologia dos grafos. Na literatura, diversos trabalhos utilizaram métodos de mapeamento de séries temporais em redes e, em seguida, analisaram essas redes por quantificadores da teoria dos grafos, pode-se citar como exemplo: no estudo de séries financeiras [8, 56], do movimento browniano fracionário [5, 103], na distinção de caos e ruídos [28, 49], dentre outros. Sendo que, o uso desses quantificadores clássicos mostram-se promissor nesses trabalhos.

Em destaque, o trabalho Xie e Zhou [103], aplicaram o grafo de visibilidade horizontal no mapeamento das séries de movimento browniano fracionário (fBm) e analisaram os dados através das várias propriedades topológicas dos grafos, como coeficiente de agrupamento, caminho mínimo, coeficiente de *assortativity* correlacionado com o expoente de Hurst. No mesmo trabalho, esboçaram conclusões a respeito da análise por esses quantificadores em função do aumento da correlação. O trabalho de Xie e Zhou, contudo, chamou nossa atenção, em especial, por causa de uma das afirmativas finais com relação ao coeficiente de *assortativity* com a qual não concordamos. Motivados à análise desse fato, reproduzimos alguns testes feitos por Xie e Zhou em [103] em relação ao fBm e ao coeficiente *assortativity* chegamos a resultados divergentes.

Com o objetivo também de analisar outras séries temporais por quantificadores clássicos, no presente trabalho, calculamos essas medidas das redes geradas para outros sistemas estocásticos (fGn e Ruídos com Espectro de Potência f^{-k}), obtidas pelo método HVG. Utilizamos como quantificadores as métricas das redes (como coeficiente de agrupamento (C), caminho mínimo (L), medidas de centralidade (B) e medida de proximidade (CC)). As análises são apresentadas a seguir. Para cada tipo de série analisada, foi calculada uma média de 10 amostras.

5.3.1 Cálculo dos Quantificadores de Redes

Para os processos estocásticos fGn e ruídos com Espectro de Potência f^{-k} , foi gerado os valores de L , C , B e CC versus o valor de H e k , considerando para ambos um tamanho de série $N = 10^5$, como mostrado nas Figuras 5.12 e 5.13, respectivamente. No fGn, tem-se que, à medida que aumenta o valor de H os valores de L e B aumentam gradativamente. Já o CC e o C diminuem gradativamente. Já para os ruídos com Espectro de Potência f^{-k} , tem-se que, à medida que aumenta o valor de k os valores de L e B aumentam consideravelmente, sendo que em B a partir de $k = 0.25$, o valor aumenta tanto que não possível computar pelo software R. Em relação a CC e o C diminuem gradativamente.

Para o processo estocástico fBm, foi calculado o valor de L e CC , em função do índice do expoente de Hurst H , para as séries de tamanho $N = 10^4$ até $N = 10^5$, como mostrado na Figura 5.14. Em relação ao L , essa Figura mostra, qualitativamente, que seus valores aumentam exponencialmente com o aumento do índice de H . Além disso, é observado, também, que o valor de L , para cada índice de H , aumenta em função do tamanho N da série. Para verificar se esse aumento é realmente exponencial, traçamos L em função de H , em escalas semi-logarítmicas, para os valores de N acima, como mostrado nessa mesma Figura 5.14-a, evidenciando, assim, que o valor de L em função de H pode ser dado pela relação: $L = a e^{bH}$, em que a e b são

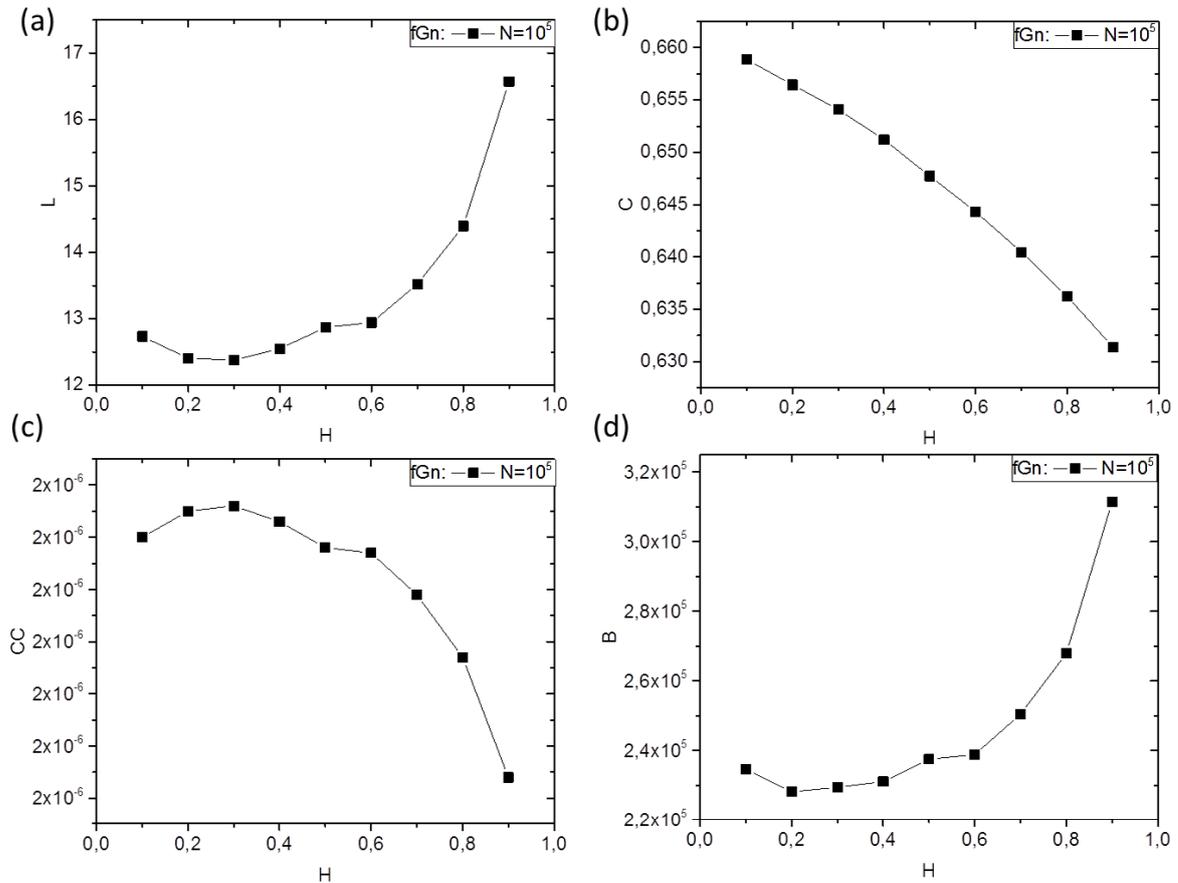


Figura 5.12: Representação do (a) Caminho mínimo L versus H para fGn. (b) Coeficiente de agrupamento C versus H para fGn. (c) Medida de centralidade B versus H para fGn. (d) medida de proximidade CC versus H para fGn. O tamanho considerado de cada série foi 10^5 .

contantes que aumentam em função de N . Já em relação a CC , os valores diminuem exponencialmente com o aumento do índice de H . Além disso, é observado, também, que o valor de CC , para cada índice de H , diminui em função do tamanho N da série. Para verificar se essa diminuição é realmente exponencial, traçamos também CC em função de H , em escalas semi-logarítmicas, para os valores de N acima, como mostrado na Figura 5.14-b, evidenciando, assim, que o valor de CC em função de H pode ser dado pela relação: $CC = d \exp^{-cH}$, em que c é uma constante que aumentam em função de N .

Em seguida, analisamos os valores de C , em função do índice do expoente de Hurst H do fBm, os valores do caminho mínimo normalizado versus os valores coeficiente de agrupamentos, e os valores de B , ambos em função de H e com séries de tamanho $N = 10^5$, como mostrado na Figura 5.15. Em relação a C na Figura 5.15-a, tem-se que o seu valor diminui gradativamente em função do índice H . Ao comparar caminho mínimo L com C coeficiente de *clustering*, tem-se que, à medida que o C diminui, o L aumenta, ambos em função do índice H .

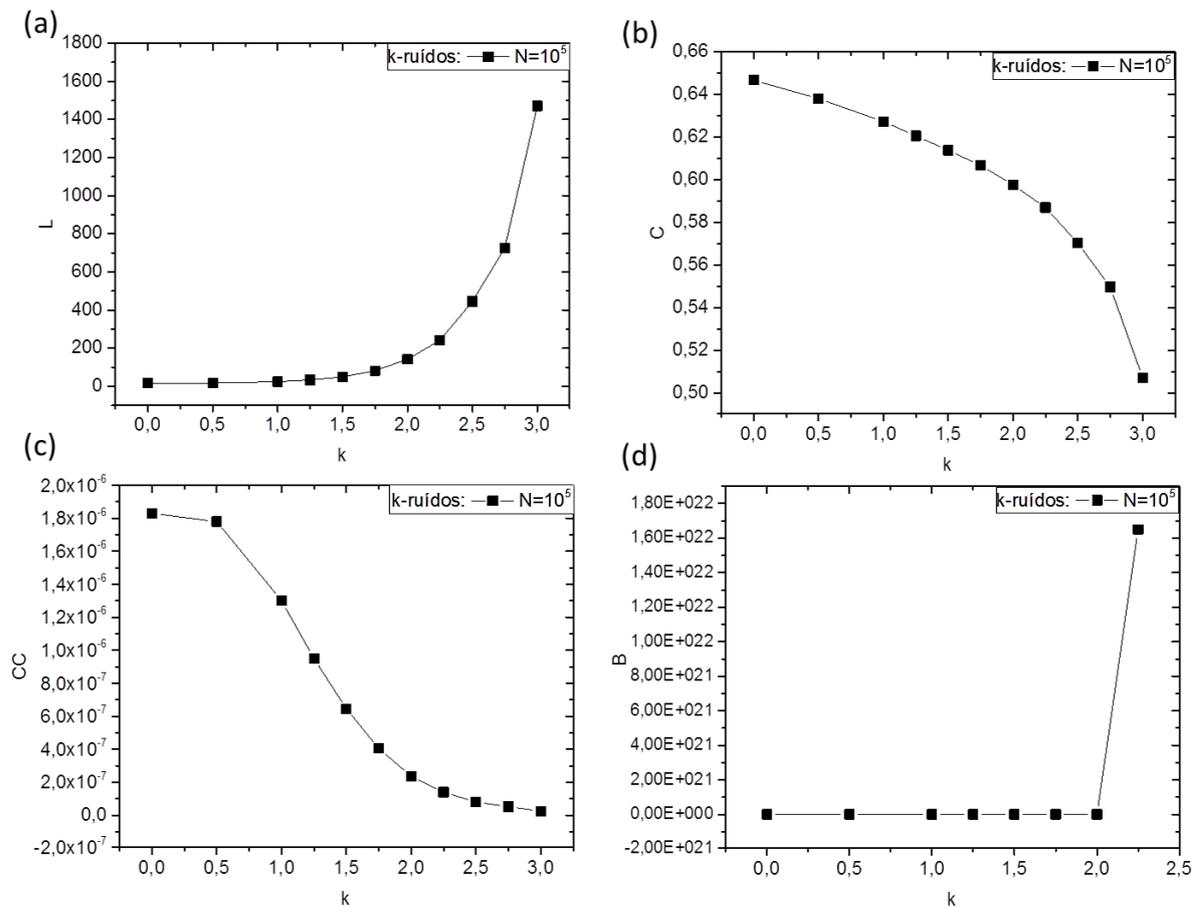


Figura 5.13: Representação do (a) Caminho mínimo L versus k para Ruídos com Espectro de Potência f^{-k} . (b) Coeficiente de agrupamento C versus k para Ruídos com Espectro de Potência f^{-k} . (c) Medida de centralidade B versus k para Ruídos com Espectro de Potência f^{-k} . (d) medida de proximidade CC versus k para Ruídos com Espectro de Potência f^{-k} . O tamanho considerado de cada série foi 10^5 .

Já em relação a B , o seu valor aumenta muito rápido em função do índice H , bem mais rápido que o caminho mínimo. Além disso, para $H > 0.5$, não foi possível computar o valor do B por causa do seu tamanho, como mostrado na Figura 5.15-b.

Por último, na Figura 5.16, foi calculado o coeficiente *assortatively* r , em função do índice do expoente de Hurst H dos fBms, para as séries de tamanho $N = 10^4$ até $N = 2 \cdot 10^6$. É observado nessa Figura que, para $N = 10^4$ e $N = 2 \cdot 10^4$, o valor de r diminuiu até $H = 0.6$ e, para valores maiores de H , essa medida volta a aumentar gradativamente, sendo menor para $N = 2 \cdot 10^4$. Quando $N = 5 \cdot 10^4$, o valor de r diminuiu até $H = 0.7$ e, para valores maiores de H , essa medida volta a aumentar gradativamente, sendo esse aumento menor do que as séries de tamanho menor. Quando $N = 10^5$ e $N = 5 \cdot 10^5$, o valor de r diminuiu até $H = 0.8$ (chegando a valores negativos) e, para valores maiores de H , essa medida volta a aumentar

gradativamente, sendo menor que as séries anteriores. Já a partir da série $N = 10^6$, o valor de r decresce em função todos os valores de H e a partir de $H = 0.5$ os valores são negativos, implicando que a rede tem um comportamento *disassortative*, ou seja, com valores de $r > 0$, indicando que nós com maior grau são mais propensos a serem conectados com outros nós de grau baixo. Fato esse que contrária a hipótese em [103], que ao calcular o coeficiente *assortativity* r para o fBm com tamanho de série $N = 10^4$, com H variando de $[0, 1]$, observaram, também, que o coeficiente r começa a decair até $H < 0.6$, mas, a partir de $H \geq 0.6$, o valor de r começa a aumentar. Assim, eles concluíram que, para todos os valores de H tem-se um comportamento *assortative*, ou seja, com valores de $r > 0$, indicando que nós com maior grau são mais propensos a serem conectados com outros nós de grau alto. Além disso, afirmam que, para essas séries, o valor médio do grau $\kappa(x)$ de um nó é uma função monótona crescente de altura x , especialmente, também, para $H < 0.6$.

O aumento de L em função do aumento da correlação da série (aumento de H e k) está relacionado ao fato de que as séries temporais começam a apresentar valores superiores (um atrás do outro) ou inferiores (um atrás do outro), sendo assim, a visibilidade nessas regiões é mais restrita para a maioria dos nós. Como consequência, o número de arestas diminui, aumentando, assim, o caminho mínimo. Já medida CC é calculado pela divisão da soma da distância de um nó em relação aos outros da rede, assim, quanto maior o valor de L , menor o valor de CC . Correlação essa também observada no comportamento exponencial da relação L e CC em função de H para o fBm. A medida de centralidade B é calculado pelo número de caminhos mínimos entre nós s e t que passam pelo nó i , dividido pelo número total de caminhos mínimos entre s e t , assim, se aumenta o valor do caminho L , o valor de B também aumenta. Já C é caracterizado por descrever a ocorrência de triângulos na rede, de modo que, quanto menor o número de arestas na rede, menor o valor de C . Por último, essa variação também influencia na diminuição de r .

5.3.2 Conclusões Parciais sobre os Quantificadores de Redes

Foram avaliadas métricas clássicas da área de redes como coeficiente de agrupamento (C), caminho mínimo (L), medidas de centralidade (B) e medida de proximidade (CC) para alguns sistemas estocásticos. Observamos para o fBm, fGn e Ruídos com Espectro de Potência f^{-k} que todos quantificadores clássicos variam em função de H e k , respectivamente. Para os Ruídos com Espectro de Potência f^{-k} , L e B aumentam rapidamente com o aumento de k , já CC e C diminuem. Já para os fGn, observa-se que, mesmo que os valores dos quantificadores da rede possuem a mesma variação dos ruídos com Espectro de Potência f^{-k} , em função do aumento de H , mas sendo esse aumento e diminuição bem menores. Para o fBm, no caso do caminho mínimo L esse aumento é exponencial. Já para o CC o decaimento é também exponencial, relação essa, que ainda não havia sido citada em nenhum outro trabalho.

Para apenas o fBm calculamos o coeficiente r em função do índice H , calculamos com variações do tamanho da série em tamanho $N = 10^4$ até $N = 2 \cdot 10^6$, chegando a observações diferente de Xie e Zhou em [103], que, ao testar os fBms com série de tamanho $N = 10^4$, chegaram a conclusões erradas devido ao tamanho da série que foi utilizada e que para analisar os fBm.

Ademais, mostramos que pelos quantificadores clássicos da teoria dos grafos foi possível

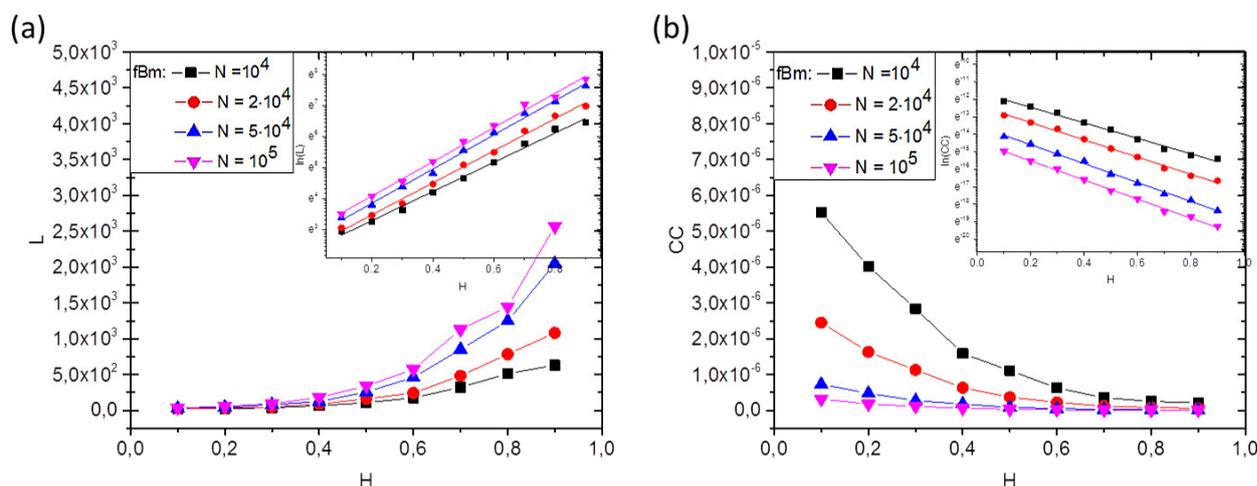


Figura 5.14: (a) Caminho mínimo L em função do índice do expoente de Hurst H dos fBm's. No gráfico inserido: CC e em função de H , em escalas semi-logarítmicas. (b) medida de proximidade CC , em função do índice do expoente de Hurst H dos fBms. No gráfico inserido: L e em função de H , em escalas semi-logarítmicas. Séries de tamanhos $N = 10^4$, $N = 2 \cdot 10^4$, $N = 5 \cdot 10^4$ e $N = 10^5$ em todos os casos.

distinguir os diferentes graus de estruturas de correlações nos processos estocásticos.

5.4 Métodos de Aproximação do Expoente de Hurst

Periodicamente séries temporais não estacionárias exibem flutuações e um comportamento imprevisível. Essas flutuações podem ser analisadas a partir do cálculo da correlação desses dados. Pela aproximação do expoente de Hurst, H , é possível detectar informações importantes dessas correlações de longo alcance em séries temporais. A aproximação do expoente de Hurst H é proposto na literatura em diversas situações, como no estudo de DNA [104], na dinâmica de frequência cardíaca [105], registros de climáticos [106, 107], séries temporais econômicas [6, 7, 108], dentre outras.

Nos últimos anos, têm sido apresentadas diversas metodologias para aproximação do expoente de Hurst, em destaque o Detrended Fluctuation Analysis (DFA), uma técnica robusta e eficiente que foi proposta por Peng *et al.* em [109]. Recentemente, destacam-se também métodos que se baseiam no mapeamento de séries, como a metodologia proposta por Lacasa *et al.* em [100] e aquela proposta por Campanharo e Ramos, em [101].

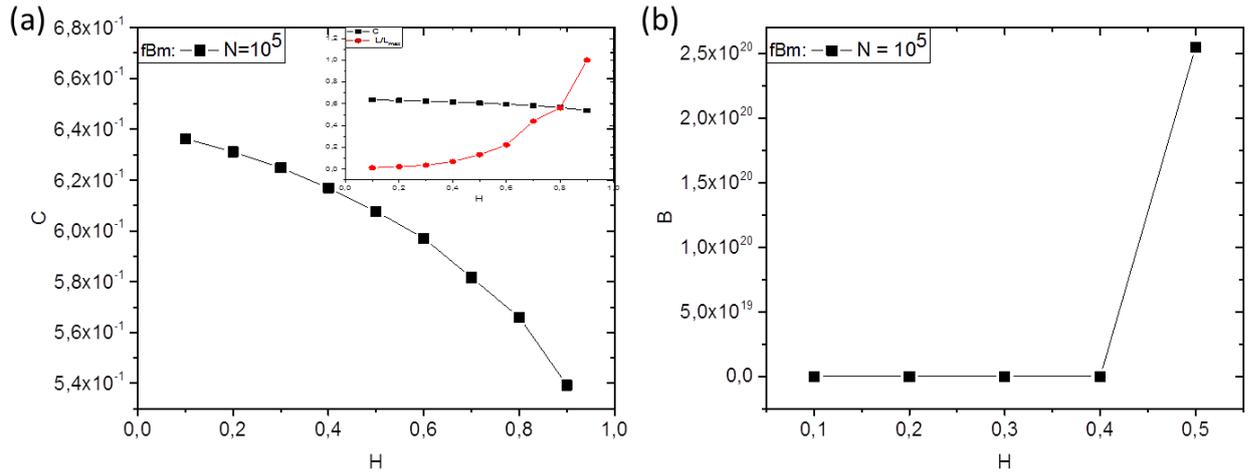


Figura 5.15: (a) Coeficiente de agrupamento C em função do índice do expoente de Hurst H do fBm. No gráfico inserido: Coeficiente de agrupamento C versus caminho mínimo normalizado L/L_{max} , em função do índice do expoente de Hurst H do fBm. (b) Medida de centralidade B , em função do índice do expoente de Hurst H do fBm, para o tamanho de série $N = 10^5$. Para $H > 0.5$, não foi possível computar o valor de B por causa do seu tamanho.

Lacasa *et al.* [100], consideram que a função de distribuição do grau do fBm é $P(\kappa) \propto \kappa^{-\gamma}$ para o grafo de visibilidade (VG) e relacionam o valor do expoente de Hurst H com o valor de γ . Na determinação do valor do expoente γ da lei da potência, utilizam a estimativa de máxima verossimilhança (MLE) [110], dada pela equação :

$$\gamma = 1 + n \left(\sum_{i=1}^N \log \frac{\kappa_i}{\kappa_{min}} \right)^{-1}, \quad (5.5)$$

com ($\kappa_{min} = 10$). Considerando uma série de tamanho 10^4 , calculam o valor de γ em função de H e observaram que $\gamma(H) = 3 - 2H$, sendo, assim, possível afirmar que essa relação é universal e que, por essa metodologia, é possível aproximar o valor de H .

Já Campanharo e Ramos, em [101], utilizaram o método QG proposto em [33], para também caracterizar o valor do expoente de Hurst dos fBm. Depois de mapear a série pelo método QG, contabilizaram os saltos até $l = L$ do comprimento da matriz q por q em: $\delta_{i,k}(i, j) = |i - j|$, com $i, j = 1, \dots, q$ sendo i, j os índices dos nós. A média de comprimento de saltos $\Delta(k)$ é definida por:

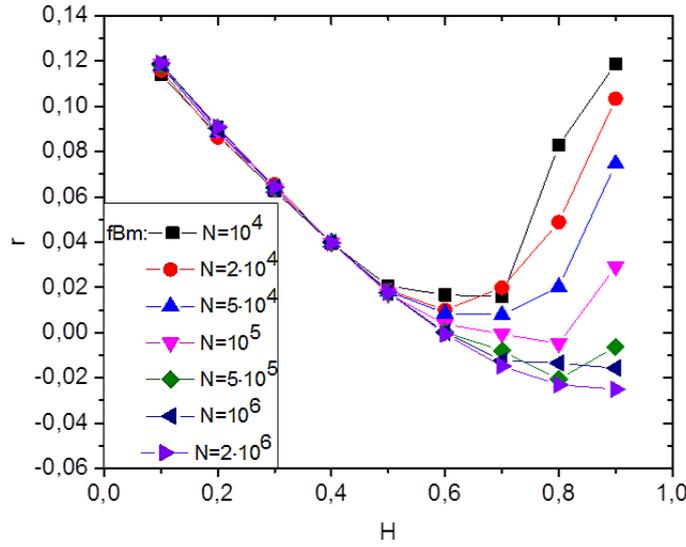


Figura 5.16: Medida *assortativity* r , em função do índice do expoente de Hurst H dos fBMs, para as séries de tamanho $N = 10^4$, $N = 2 \cdot 10^4$, $N = 5 \cdot 10^4$, $N = 10^5$, $N = 5 \cdot 10^5$, $N = 10^6$ e $N = 2 \cdot 10^6$.

$$\Delta(k) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \delta_{i,k}(i, j). \quad (5.6)$$

Em seguida, mostraram que, para os fBMs, o tempo médio do salto $\Delta(k)$ segue uma lei da potência $\Delta(k) \propto k^H$, em que H é o expoente de Hurst.

Para as metodologias propostas por Lacasa *et al.* e por Campanharo e Ramos, reproduzimos os testes feitos, com o intuito de analisar se esses modelos são apropriados.

Em seguida, baseando nessas ideias para o Grafo de Visibilidade Horizontal (HVG), analisamos a possibilidade de relacionar o expoente de Hurst H com a função de distribuição do grau. A partir de certo valor de κ , a PDF do grau tem um formato exponencial. Assim, primeiramente, analisamos qual modelo exponencial adequa-se melhor: $P(\kappa) \propto \exp\{-\lambda \kappa\}$ ou $P(\kappa) \propto \kappa^{-\lambda}$. Em seguida, calculamos o valor λ , variando o tamanho N da série e observamos a relação entre λ e H . Esse método é nomeado metodologia Lambda λ . Por último, comparamos essas três metodologias mais o DFA. Tais resultados são apresentados nas seções a seguir. Em todos os testes feitos abaixo, foi utilizada a média de 10 amostras para cada índice H considerado.

5.4.1 Análise dos Métodos

Nesta seção, serão analisadas as metodologias propostas por Lacasa *et al.* e por Campanharo e Ramos para a aproximação do expoente de Hurst. O objetivo da análise é verificar se essas metodologias são apropriadas e a ordem de precisão das mesmas.

Para verificar se o modelo $P(\kappa) \propto \kappa^{-\gamma}$ é adequado na representação da distribuição do grau do fBm pelo mapeamento usando o VG, na Figura 5.17, foram plotadas as PDF's do grau em função dos índices do expoente de Hurst, para as séries de tamanho $N = 10^4$, $N = 5 \cdot 10^4$ e $N = 10^5$, respectivamente. É observado, que, para valores a partir de $\kappa > 9$, essas PDF's têm um comportamento de lei de potência como afirmado por Lacasa, em [100]. Na Subfigura 5.17 traçamos também as PDF's em escalas logarítmicas, e como pode ser observado, reforçamos, assim, a hipótese em [100] para os fBm's utilizando o VG, em que a PDF pode ser dada melhor pela relação: $P(\kappa) \propto \kappa^{-\gamma}$.

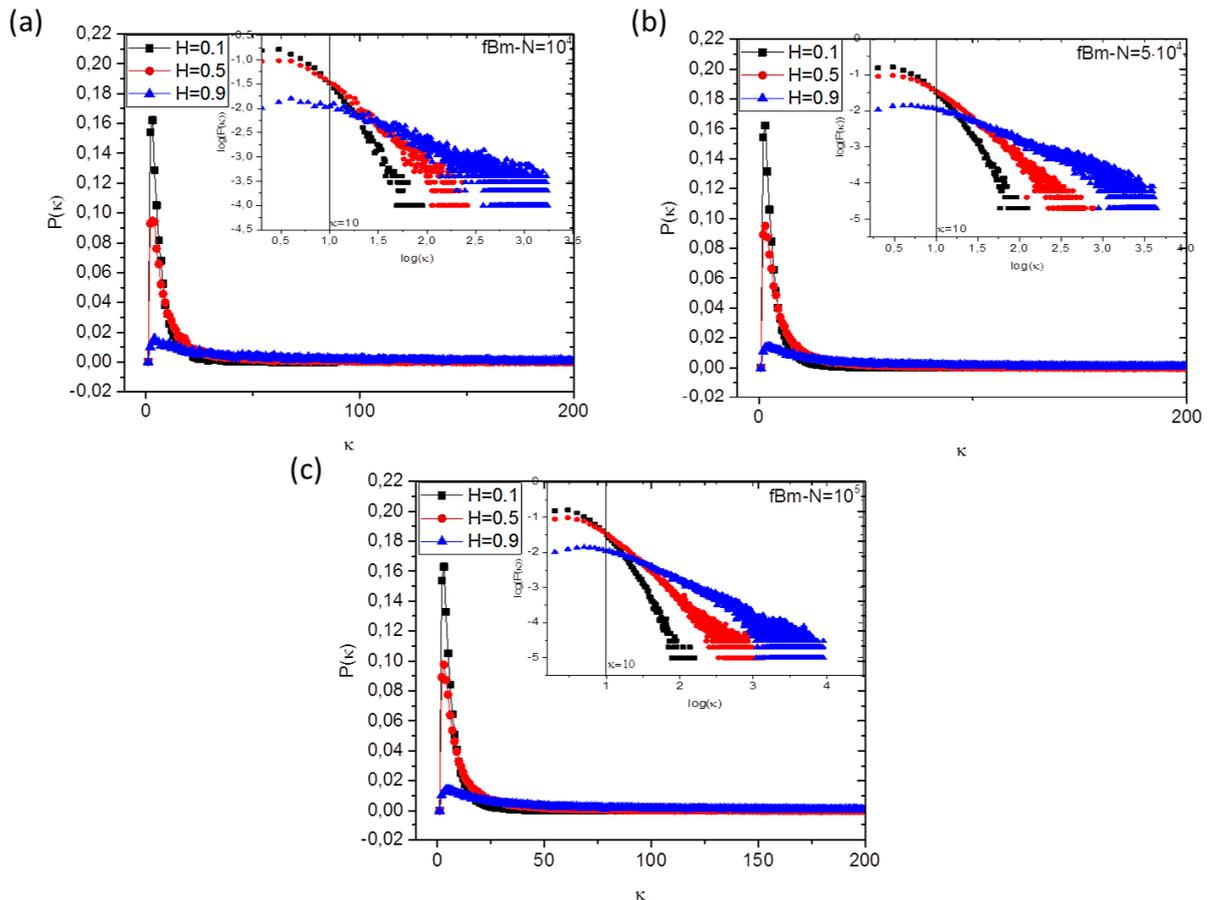


Figura 5.17: PDF do grau para alguns índice do expoente de Hurst H dos fBm's pelo VG; Subfigura: PDF's em escalas semi-logarítmicas para alguns índice do expoente de Hurst H dos fBms pelo VG: (a) Séries de tamanho $N = 10^4$. (b) Séries de tamanho $N = 5 \cdot 10^4$. (c) Séries de tamanho $N = 10^5$.

Para analisar se γ varia em função do tamanho da série N , reproduzimos os testes em [100], calculando o valor médio de γ para cada índice H , considerando os tamanhos de séries $N = 10^4$, $N = 5 \cdot 10^4$ e $N = 10^5$, como mostrado na Figura 5.18. O parâmetro γ foi calculado através da estimativa de máxima verossimilhança com ($\kappa_{min} = 10$), idêntica em [100]. É possível observar que, à medida que aumenta N , a relação γ versus H distancia de uma relação linear, podendo, assim, também comprometer a hipótese em [100].

A relação γ versus H , foi encontrada usando o método dos mínimos quadrados. Para $N = 10^4$, chegamos aproximadamente à relação $\gamma(H) = 3,00917 - 1,73511H$, aproximadamente a mesma proposta em [100] ($\gamma(H) = a - bH$ com $a = 3,1 \pm 0,1$ e $b = 2,0 \pm 0,1$), para $N = 5 \cdot 10^4$, à relação $\gamma(H) = 2,59292 - 1,39287H$, diferente da proposta em [100], e, para $N = 10^5$, à relação $\gamma(H) = 2,47245 - 1,31621H$, também diferente da proposta em [100]. Logo, não é possível afirmar que a relação $\gamma(H) = 3 - 2H$ é universal.

Relação proposta por Lacasa *et al.*: ($\gamma(H) = a - bH$ com $a = 3,1 \pm 0,1$ e $b = 2,0 \pm 0,1$).

Para $N = 10^4$: $\gamma(H) = 3,00917 - 1,73511H$

Para $N = 5 \cdot 10^4$: $\gamma(H) = 2,59292 - 1,39287H$

Para $N = 10^5$: $\gamma(H) = 2,47245 - 1,31621H$ aproximadamente a mesma proposta em [100] ($\gamma(H) = a - bH$ com $a = 3,1 \pm 0,1$ e $b = 2,0 \pm 0,1$), para $N = 5 \cdot 10^4$, à relação $\gamma(H) = 2,59292 - 1,39287H$, diferente da proposta em [100], e, para $N = 10^5$, à relação $\gamma(H) = 2,47245 - 1,31621H$, também diferente da proposta em [100].

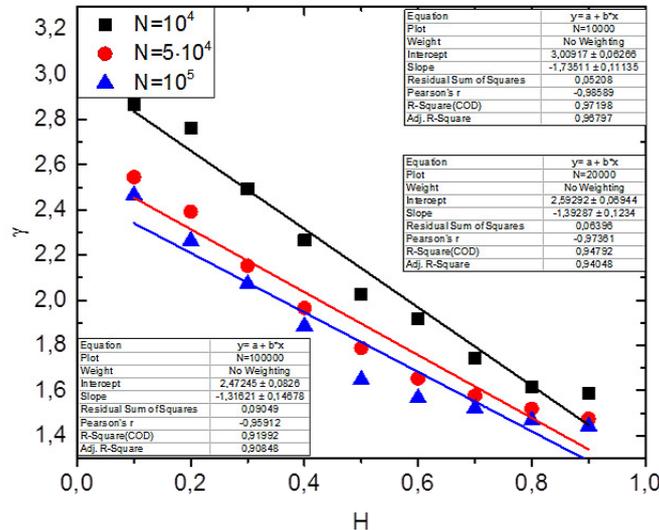


Figura 5.18: Valor médio de γ para cada índice H , considerando séries de tamanho $N = 10^4$, $N = 5 \cdot 10^4$ e $N = 10^5$. O parâmetro γ foi calculado através a estimativa de máxima verossimilhança.

Em relação a metodologia de Campanharo e Ramos [101], nas Figuras 5.19, foram representadas as funções $\Delta(k) \propto k^H$ em função de k . Fez-se o mapeamento pelo método QG e, para cada índice do expoente de Hurst (H) dos fBMs, variou-se k até 1000, para séries de tamanho

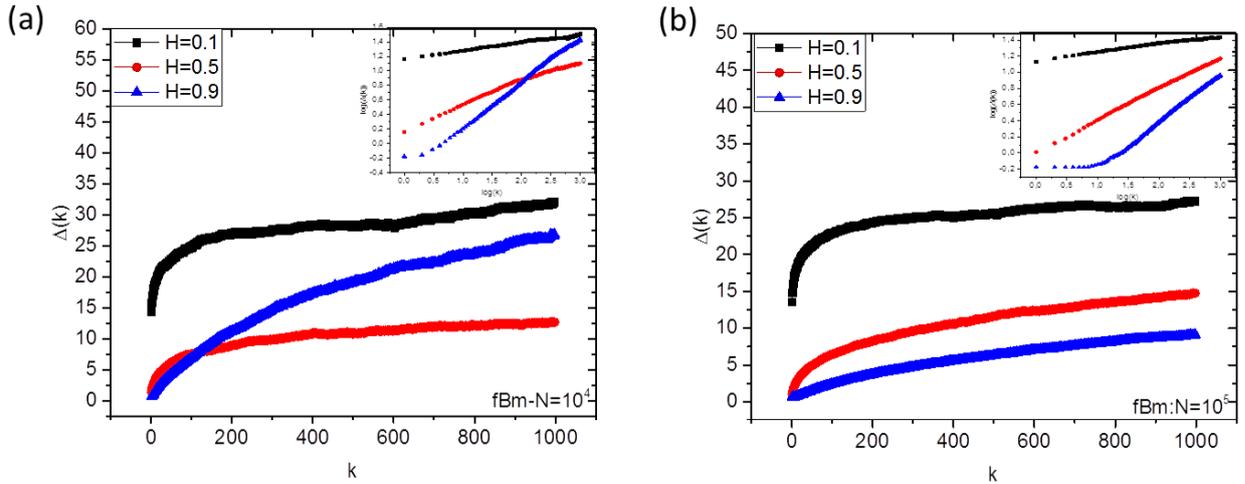


Figura 5.19: Função $\Delta(k) \propto k^H$ do método QG em função do índice do expoente de Hurst (H) dos fBm's. Subfiguras: PDF's em escalas logarítmicas para cada índice do expoente de Hurst (H) dos fBm's. (a) Séries de tamanho $N = 10^4$ com $q = 100$. (b) Séries de tamanho $N = 10^5$ com $q = 100$.

$N = 10^4$ e $N = 10^5$, com $q = 100$. Nas Subfiguras, traçamos as PDF's em escalas logarítmicas para as séries em função dos valores de H . Como observado nessas figuras, confirmamos a hipótese de que o tempo médio do salto $\Delta(k)$ segue uma lei da potência, definida por: $\Delta(k) \propto k^H$ e além disso, para menores valores de H , apresenta uma região de escalonamento linear melhor definida.

Em seguida, para as séries $N = 10^4$ e $N = 10^5$ o cálculo do valor de H foi realizado a partir do gráfico $\log(\Delta(k))$ versus $\log(k^H)$, H foi calculado através do ajuste utilizando a método dos mínimos quadrados, sendo H a inclinação da linha reta. observamos que, para valores pequenos de H , as aproximações foram melhores e, além disso, a precisão para $N = 10^4$ foi similar a $N = 10^5$, como pode ser visto na Figura 5.20.

5.4.2 Metodologia Lambda λ para o Cálculo do Expoente de Hurst H

Nesta seção, é proposta uma metodologia para aproximação do expoente de Hurst H , utilizando a distribuição do grau pelo HVG, nomeada metodologia Lambda λ . Primeiramente é analisada a relação que melhor descreve a distribuição do grau pelo HVG; em seguida, são avaliados os parâmetros dessa relação em função de H e o tamanho da série.

Para analisar o comportamento da distribuição do grau pelo HVG, inicialmente foi plotado as PDF's do grau para alguns índice do expoente de Hurst H dos fBm's, pelo mapeamento usando o HVG, para as séries de tamanho $N = 10^4$ até $N = 2 \cdot 10^6$, respectivamente, como ilustrado na Figura 5.21 para $N = 10^4$ e $N = 10^6$. É observado, que para valores a partir de $\kappa > 3$, essas PDF's têm um comportamento exponencial. Em seguida, nas Subfiguras 5.21, traçamos as PDF's em escalas semi-logarítmicas e traçamos as PDF's em escalas logarítmicas,

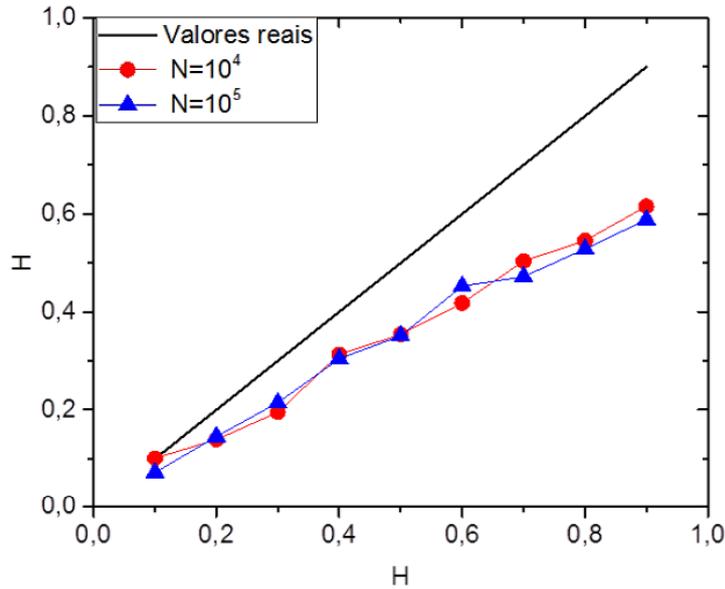


Figura 5.20: Aproximação de H em Função $\Delta(k) \propto k^H$ do método QG para cada índice do expoente de Hurst H dos fBms, para as séries de tamanho $N = 10^4$ e $N = 10^5$ com $q = 100$. Cálculo com intervalos de confiança de 95 por cento, supondo que o parâmetro segue um modelo de Gaussiano, uma estrutura linear para a regressão e erros de média zero.

ambas em função dos valores de H . Analisando esses resultados, reforçamos, assim, a hipótese de para os fBm's, em que a PDF pode ser dada melhor pela relação: $P(\kappa) \propto \exp\{-\lambda \kappa\}$, do que $P(\kappa) \propto \kappa^{-\gamma}$.

Em seguida, verificamos se λ varia, em função do tamanho da série, e se esse aumento converge a partir de um dado tamanho de N , para isso foi calculado o valor médio de λ para cada índice H , considerando os tamanhos de séries tamanho $N = 10^4$ até $N = 2 \cdot 10^6$, como mostrado na Figura 5.22. O parâmetro λ é calculado ajustando uma reta ao gráfico $\ln(P(\kappa))$ versus o grau κ , o valor de λ é encontrado usando o método dos mínimos quadrados, sendo λ a inclinação da reta ajustada. A região de escalonamento linear considerada em todos os casos é com $\kappa = 4$ até $\kappa < \kappa_{max-1}$ (em que κ_{max} é definido pelo primeiro $\kappa = 0$). O cálculo foi realizado com intervalos de confiança de 95 por cento, supondo que o parâmetro segue um modelo de Gaussiano, uma estrutura linear para a regressão e erros de média zero. A partir desses resultados, observamos que, à medida que aumenta N , os valores de λ aumentam, sendo que a partir de N grande, os valores de λ começam a convergir.

Observamos, também, na Figura 5.22 que, para todos os valores de N , a relação λ em função de H é linear e, além disso, à medida que aumenta N , aumenta o valor do coeficiente angular e coeficiente linear aumentam gradativamente, sendo que, para $N = 2 \cdot 10^6$, esse valor começa a convergir, chegando à seguinte relação $\lambda = 0,677 H + 0,460$ (esses cálculos encontram-se em anexo na Seção 7.4). Logo, o valor de H , para uma série de tamanho $N = 2 \cdot 10^6$, pode ser obtido pela seguindo relação $H = \frac{\lambda - 0,460}{0,677}$, após a obtenção da PDF do grau.

Com isso concluímos que o modelo mais adequado para a função de distribuição do grau

dos fBm's é $P(\kappa) \propto \exp\{-\lambda \kappa\}$ no HVG e, além disso, as informações da série variam em função do seu tamanho, ou seja, a partir do aumento do tamanho da série, os valores de λ variam, gerando relações diferentes.

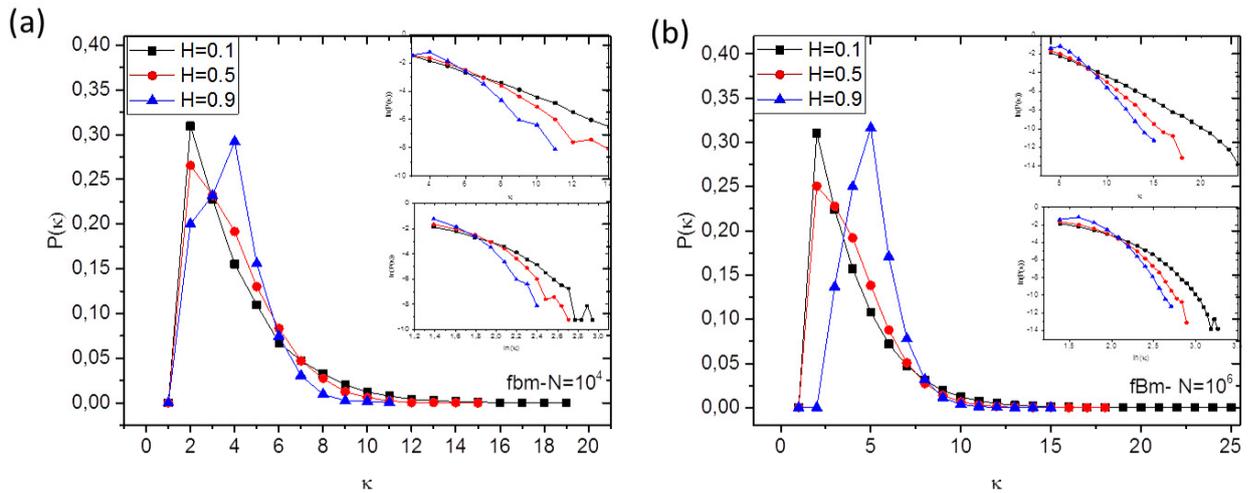


Figura 5.21: PDF's do grau em função do índice do expoente de Hurst H dos fBm's. Subfiguras: PDF's em escalas semi-logarítmicas e PDF's em escalas logarítmicas.(a) Séries de tamanho $N = 10^4$. (b) Séries de tamanho $N = 10^6$.

5.4.3 Comparação das Metodologias que Aproximam o Valor do Expoente de Hurst H

Nessa seção, comparamos a precisão da aproximação do valor do expoente de Hurst pelos métodos do γ pelo VG, do método QG e DFA com o método proposto aqui em que se utiliza o valor de λ da PDF do grau do HGV. Para isso, utilizamos séries fBm geradas no (MATLAB) com valores de H diferentes de 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, para cada H , foram geradas 5 séries e calculado o valor médio. Os valores de H escolhidos foram: 0.21, 0.47, 0.63, 0.88. Os tamanhos das séries utilizadas foram $N = 10^4$, $N = 5 \cdot 10^4$ e $N = 10^5$ e utilizamos a relação linear compatível a esse tamanho que se encontra em anexo para o método de λ para o HVG. As séries de fBm foram gerados pela função "wfbm" no matlab.

O Detrended Fluctuation Analysis (DFA), uma técnica robusta e eficiente que foi proposta por Peng *et al.* em [109] é definida a seguir: A sequência dos desvios médios é dada por $D(t) = \sum_{i=1}^t (r(i) - \bar{r})$. Dividindo a série $D(t)$ em N intervalos não sobrepostos I_n , todos de tamanho p , em que $n = 0, 1, \dots, N - 1$, e N é a parte inteira de T/p , para cada t pertencente ao

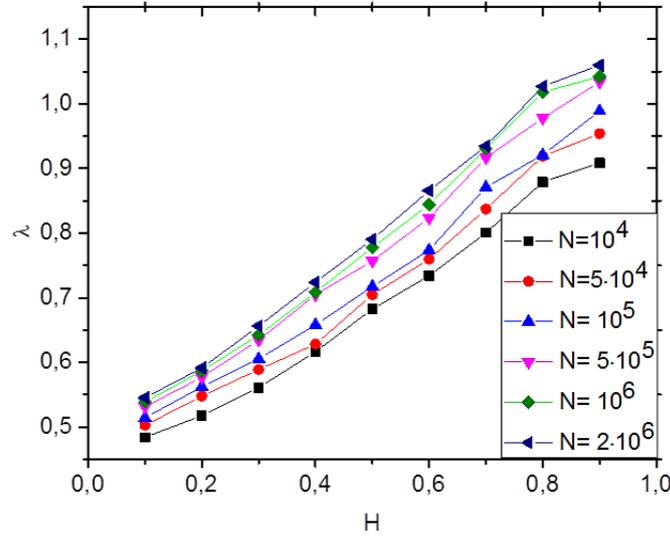


Figura 5.22: Valor médio de λ para cada índice H , considerando os tamanhos de séries de tamanho $N = 10^4$, $N = 5 \cdot 10^4$, $N = 10^5$, $N = 5 \cdot 10^5$, $N = 10^6$ e $N = 2 \cdot 10^6$.

intervalo I_n , é obtida uma reta de tendência local definida da seguinte forma:

$$Y_p(t) = a_n + b_n \cdot t \quad (5.7)$$

Em que os valores de a_n e b_n são encontrados pelo método de mínimos quadrados ordinários. Usando como parâmetro $D(t)$ no intervalo I_n , a função de flutuação F_t é definida pelo desvio padrão:

$$F(p) = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [D(t) - Y_p(t)]^2} \quad (5.8)$$

O valor do expoente de Hurst H é obtido pela relação $F(p) = p^H$. O expoente H é calculado como a inclinação da reta ajustada no gráfico em escala logarítmica.

Na Figura 5.23, comparamos os resultados obtidos por todos os métodos, variando o tamanho da série em $N = 10^4$, $N = 5 \cdot 10^4$ e $N = 10^5$. No método QG, consideramos $q = 100$; na metodologia do γ pelo VG, consideramos estimativa de máxima verossimilhança, com ($\kappa_{min} = 10$) e a relação $\gamma(H) = 3 - 2H$ para todos os valores de N , como propõe Lacasa; na metodologia do λ pelo HGV, consideramos a relação λ em função de H , de acordo com o tamanho da série (relação, em anexo na seção 7.4).

Como pode ser observado nessa Figura 5.23, o cálculo pela metodologia utilizando o λ pelo HVG e o método DFA aproximou-se melhor dos valores reais de H . À medida que aumenta o tamanho da série, a aproximação pelo método QG e a metodologia do γ pelo VG divergem do valor esperado, principalmente no método QG. Já para a metodologia do Lambda λ , a aproximação melhora com o aumento do tamanho da série.

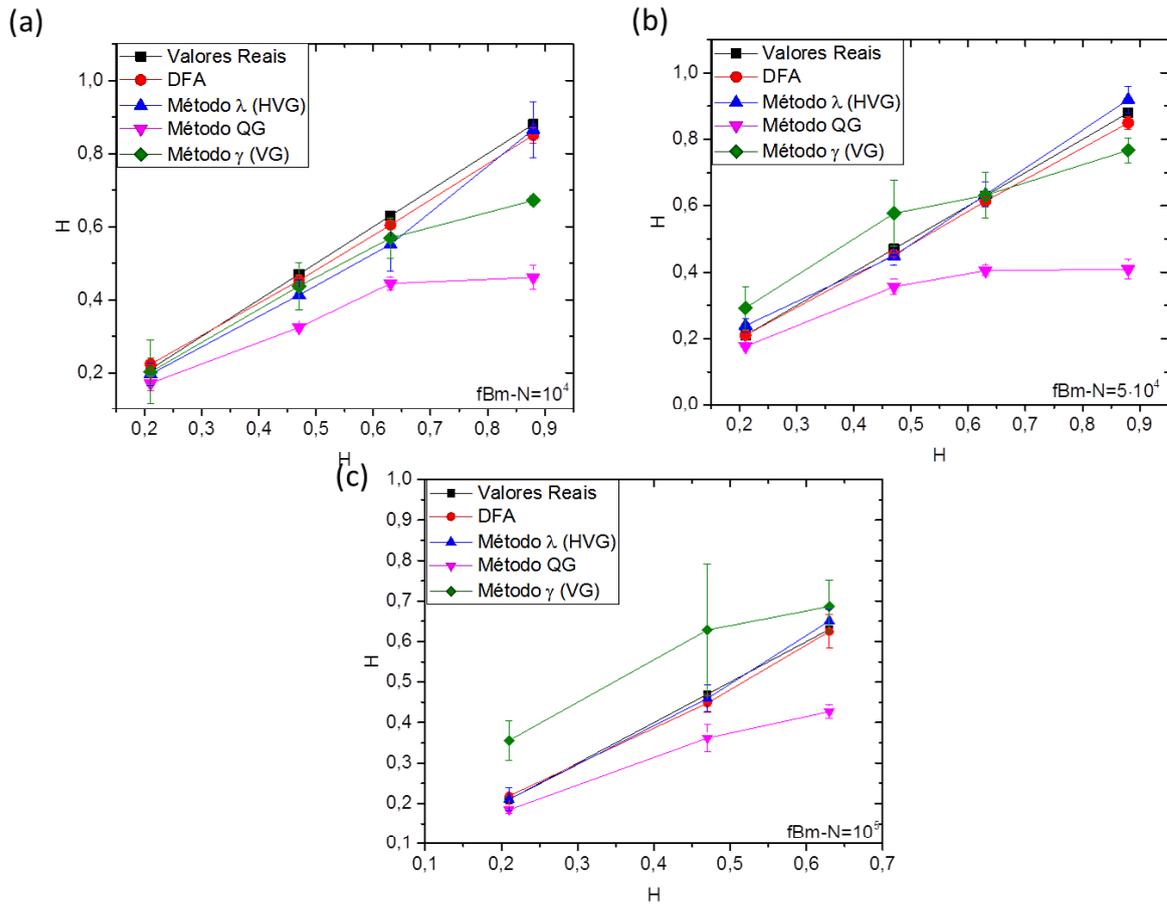


Figura 5.23: Comparação dos resultados obtidos pelos dois métodos. Em preto os valores reais, em vermelho os valores aproximados pelo DFA, em azul os valores aproximados pela metodologia utilizando o λ pelo HVG, em rosa os valores aproximados pelo método QG e em verde os valores aproximados pela metodologia utilizando o γ pelo VG. (a) Séries de tamanho $N = 10^4$. (b) Séries de tamanho $N = 5 \cdot 10^4$. (c) Séries de tamanho $N = 10^5$.

5.4.4 Discussões e Conclusões Parciais sobre Métodos que Aproximam o Expoente de Hurst

O problema da metodologia proposta por Lacasa e colaboradores em [100], ao nosso ver, é a definição de uma relação universal de γ em função de H . Ao reproduzir os testes em [100], mostramos que à medida que aumenta N , o valor de γ diminui, fazendo com que surja uma relação diferente de γ versus H em função de N . Além disso, na relação proposta os coeficientes foram arredondados, fazendo que os resultados estejam mais suscetíveis aos erros.

Em relação ao método QG, à medida que aumenta o valor de H , a aproximação piora. Além disso, para menores valores de H , apresenta uma região de escalonamento linear melhor definida.

Já através do grafo de visibilidade horizontal (HVG) juntamente com o cálculo da função

de distribuição do grau da rede, mostramos uma metodologia alternativa do cálculo do índice do expoente de Hurst H , para quantificar dependência de longo alcance em séries temporais. Por testes numéricos, reforçamos a hipótese de que a PDF do grau associado ao HVG dos movimentos brownianos segue a seguinte lei: $P(\kappa) \propto \exp\{-\lambda \kappa\}$. Ao calcular o valor de λ a partir de $\kappa = 4$ para as séries de tamanho $N = 10^4$ até $N = 2 \cdot 10^6$ em função do índice H , observamos que, para todos os valores de N , a relação λ em função de H é linear e, além disso, à medida que aumenta N , aumenta o valor de λ gradativamente, sendo que, para $N = 2 \cdot 10^6$, esse valor começa a convergir, chegando à seguinte relação $\lambda = 0,677 H + 0,460$. Logo, o valor de H pode ser obtido por $H = \frac{\lambda - 0,460}{0,677}$, após a obtenção da PDF do grau, para uma série de tamanho $N = 2 \cdot 10^6$. O que mostra também que um tamanho de série $N = 10^4$ nessa metodologia é muito pequeno pra que se possa afirmar que a relação é universal.

Ao compararmos os resultados obtidos pelos métodos aqui estudado, a metodologia por λ aproximou-se muito melhor do método QG e da metodologia por γ usando VG, principalmente a medida que aumenta o tamanho da série, já ao comparar com o método DFA os resultados de H foram praticamente similares em ordem de precisão. Contudo, uma desvantagem dessa metodologia foi o elevado tempo computacional para a execução de séries maiores que $N = 10^5$, além do mais, o estudo por essa metodologia utilizando o valor de λ ainda necessita de testes mais aprofundados.

5.5 Grafo de Visibilidade Horizontal Windows (HVG-W)

No estudo da seção 5.4 para analisar o movimento browniano fracionário a partir de certo valor de H , para séries maiores que $N = 10^5$, encontramos muita dificuldade pelo método HVG, devido a inviabilidade do tempo computacional gasto. Observamos, também, que esse alto custo computacional se repete em outros processos estocásticos mais correlacionados, como os Ruídos com Espectro de Potência f^{-k}). Além do mais, hipotetizamos que muitos trabalhos na literatura que utilizaram o HVG para caracterizar processos estocásticos, como o fBm, trabalharam com séries de tamanho até $N = 10^4$ por causa do custo computacional. Contudo, dependendo do quantificador proposto, tem-se a necessidade de trabalhar com mais dados para realizar uma adequada caracterização, de modo que trabalhos que não levam essa condição em consideração estão suscetíveis a possíveis erros, como visto em [103].

Por esse motivo, apresentamos aqui uma versão computacionalmente mais eficiente que a versão do algoritmo HVG, com o foco também no mapeamento de séries temporais, nomeado como grafo de visibilidade horizontal Windows (HVG-W), método o qual preserva as informações da série. Sua visibilidade, mais restrita do que a do caso HVG, é também analisada através de retas horizontais, contudo essa análise é feita em janelas de tempo. Por esse motivo, os nós no HVG-W terão menos visibilidade do que dentro do grafo em HVG. Embora tal fato não tenha impacto sobre os aspectos qualitativos dos grafos, a simplicidade da versão do algoritmo HVG-W permite que ele seja aplicado a séries muito longas, maiores que aquelas em que se aplicava o HVG. Utilizando a mesma série temporal, o grafo gerado pelo HVG-W é um subgrafo do grafo gerado pelo HVG. O mesmo foi observado por Luque, em [34], na relação o VG e HVG, o grafo obtido pelo HVG é um subgrafo do grafo obtido pelo VG. Além

disso, de maneira similar ao VG e ao HVG, no HVG-W, as séries periódicas são convertidas em grafos regulares, as séries aleatórias em grafos aleatórios, e as séries fractais em grafos livres de escala. Nos fBm's, as PDF's do grau seguem também um comportamento exponencial, assim, pelo método HVG-W, elas podem, também, ser dadas pela relação: $P(\kappa) \sim \exp(-\lambda \kappa)$, em que λ aumenta em função de H e do tamanho da série. Além disso, o valor de λ , S e \mathcal{F} varia muito pouco em função do tamanho da janela. Aqui, o caminho mínimo tem também um comportamento exponencial. Esses resultados são mostrados a seguir.

No método HVG-W, similar ao VG E HVG, os nós também estão na mesma ordem que o conjunto de dados da série temporal correspondente. Se uma linha horizontal que liga dois dados da série de tamanho (N) dentro de uma janela de tempo (n) não cruza a altura dos termos intermediários entre eles, os nós correspondentes são conectados por uma aresta. Assim, estabelece-se o seguinte critério de visibilidade:

Dentro da janela da série temporal $(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+n-1})$, em que i pertence ao intervalo $(0, N - n)$, dois valores arbitrários (t_{i+a}, y_{i+a}) e (t_{i+b}, y_{i+b}) terão visibilidade horizontal e, consequentemente, tornar-se-ão dois nós conectados por uma aresta no grafo associado, se todos os outros termos (t_{i+c}, y_{i+c}) intermediários entre eles cumprirem a relação abaixo:

$$t_{i+a}, t_{i+b} > t_{i+c} \quad \text{para todo } c \quad \text{tal que } i+a < i+c < i+b. \quad (5.9)$$

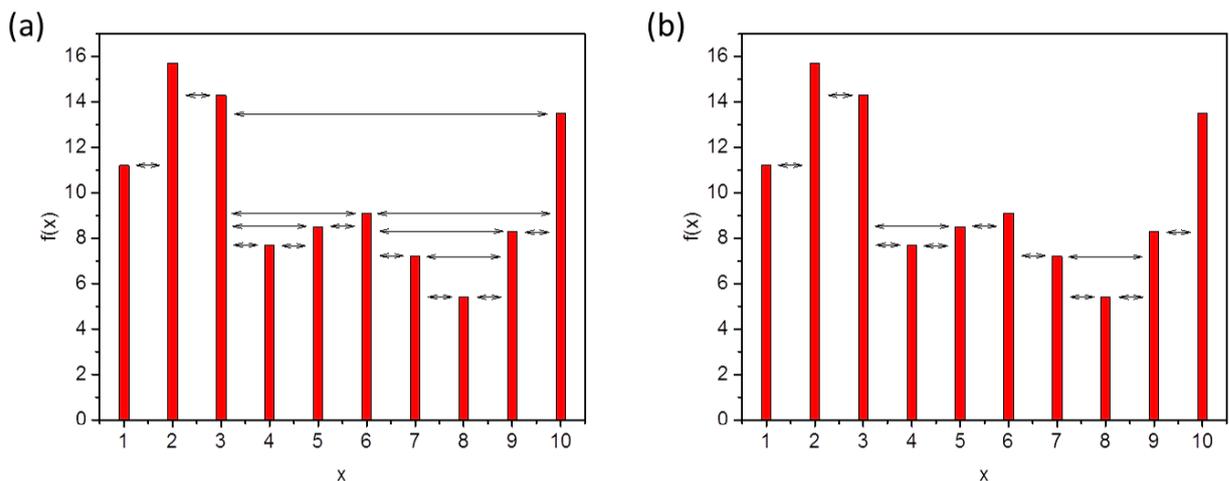


Figura 5.24: Série mapeadas pelo: (a) pelo HVG. (b) pelo HVG-W com janela igual a 3.

Na Figura 5.24, é exemplificada uma série temporal e seu grafo associado pelos dois métodos, o HVG e HVG-W. Este último método é uma simplificação do método HVG e, geome-

tricamente, é sempre um subgrafo do grafo de visibilidade da série temporal associada, como mostrado, também, nessa figura. Por esse motivo, as observações do grafo de visibilidade horizontal são as mesmas:

1. *Conexo*: cada nó está conectado pelo menos aos seus vizinhos mais próximos (à esquerda e à direita);
2. *Arestas não dirigidas*: segundo a proposta de como o algoritmo é construído, não há definição das direções nas arestas.
3. *Invariante sob transformações afins dos dados da série*: o critério de visibilidade é invariante sob redimensionamento tanto dos eixos horizontais quanto dos verticais.

5.5.1 Análise do Número de Operações do Algoritmo HVG-W

Em anexo, é apresentado em duas partes o algoritmo proposto para o HVG-W para um série de tamanho N e com janela n . Como pode ser observado, ele foi otimizado da seguinte maneira: -Os n primeiros termos são calculados de maneira similar ao algoritmo que propomos para o HVG, em que se analisa a visibilidade do ponto t_0 até o ponto t_{n-1} . Para o ponto t_0 , é analisada a visibilidade com $(t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_{n-1})$, um a um, até que se encontre um ponto $t_i > t_0$, de modo que a análise para t_0 seja finalizada sem a necessidade de ir até t_{n-1} . Em seguida, inicia-se a análise de t_1 para os pontos $(t_3, t_4, \dots, t_i, \dots, t_{n-1})$, um a um, até que se encontre um ponto $t_i > t_1$, assim a análise para t_1 é, também, finalizada sem a necessidade de ir até t_{n-1} . Depois, inicia-se a análise de t_2 para os pontos $(t_4, t_5, \dots, t_i, \dots, t_{n-1})$, um a um, até que se encontre um ponto $t_i > t_2$, assim a análise para t_2 é, também, finalizada sem a necessidade de ir até t_{n-1} . Essa análise é feita sucessivamente, até o ponto t_{n-3} para os pontos (t_{n-2}, t_{n-1}) . Lembrando que os pontos adjacentes são conectados.

Para os termos da posição n até N , é feita a análise de trás pra frente, considerando n posições pra trás. Ou seja, para o ponto t_n , é analisada a visibilidade com $(t_{n-2}, t_{n-3}, \dots, t_{n-i}, \dots, t_1)$, um a um, até que se encontre um ponto $t_{n-i} > t_n$, assim, a análise para t_n é finalizada sem a necessidade de ir até t_1 . Em seguida, inicia-se a análise de t_{n+1} para os pontos $(t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_{n-i}, \dots, t_2)$, um a um, até que se encontre um ponto $t_{n-i} > t_{n+1}$, assim, a análise para t_{n+1} é, também, finalizada sem a necessidade de ir até t_2 . Depois, inicia-se a análise de t_{n+2} para os pontos $(t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-i}, \dots, t_3)$, um a um, até que se encontre um ponto $t_{n-i} > t_{n+2}$, assim, a análise para t_{n+2} é, também, finalizada sem a necessidade de ir até t_3 . Essa análise é feita sucessivamente, até o ponto t_{N-1} para os pontos $(t_{N-3}, t_{N-4}, \dots, t_{N-n-1})$. Lembrando que os pontos adjacentes são conectados.

Logo, no HVG, para o pior caso, quando a análise não é interrompida, o número de operações para uma série de tamanho N é no máximo: $N!$. Já para o HVG-Windows, a número de operações para uma série de tamanho N e janela de tamanho n , para o pior caso, é no máximo $n!(N-n)n$. Assim, por exemplo, para uma série de tamanho $N = 10^6$, número de operações no HVG para o pior caso é $10^6!$. Já se consideramos o HVG-W com mesmo tamanho de série $N = 10^6$ e janela $n = 10^4$, a número de operações para o pior caso é $10^4!(990000) 10^4$. Ou seja, pelo HGV a número de operações é aproximadamente 10 vezes maior do que pelo HGV-W, uma diferença bem considerável.

5.5.2 Análise do HVG-W

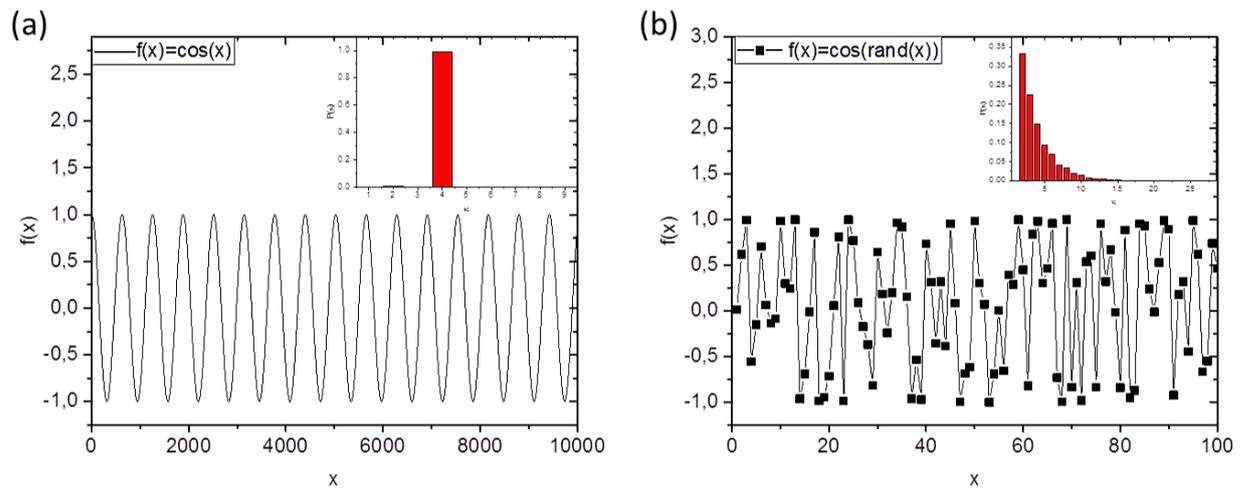


Figura 5.25: (a) PDF do grau do grafo associado a série $f(x) = \cos(x)$ pelo HVG-W. (b) PDF do grau do grafo associado a série $f(x) = \cos(\text{rand}(x))$ pelo HVG-W. O tamanho da série e $N = 10^4$ e janela $n = 10^2$.

Com o intuito de verificar se o HVG-W preserva as mesmas informações da série temporal comparado ao HVG, as seguintes medidas foram tomadas: calculamos as distribuições do grau de séries periódicas e aleatórias, verificamos se as funções de distribuição do grau também seguem um comportamento exponencial $P(\kappa) \sim \exp(-\lambda \kappa)$ a partir de $\kappa > 3$, calculamos os valores de λ , representamos o plano Shannon-Fisher para o fBm e, por último, calculamos o valor do caminho mínimo L . Em todos os testes pelo HVG-W, os resultados foram consistentes com o HVG. Abaixo, são apresentados esses resultados e suas respectivas análises.

A função de distribuição do grau referente mapeamento pelo HVG-W da função periódica $f(x) = \cos(x)$, com tamanho $N = 10^4$ e janela $n = 10^2$, está representada na Figura 5.25-a, como pode ser observado, a probabilidade do grau do grafo ser $\kappa = 4$ é de quase 100%, o que caracteriza essa rede como um grafo regular. Nessa mesma Figura 5.25-b, está representada a PDF do grau referente ao mapeamento pelo HVG-W da função aleatória $f(x) = \cos(\text{rand}(x))$, em que $\text{rand}(x)$ representa um número aleatório no intervalo $(0, 1)$, com tamanho $N = 10^4$ e janela $n = 10^2$; como pode ser observado, a PDF do grau é uma distribuição de Poisson, o que caracteriza essa rede como um grafo aleatório.

Em seguida, para analisar o comportamento da função de distribuição do grau dos fBm's, na Figura 5.26, foram geradas as PDF's do grau para cada índice do expoente de Hurst H ,

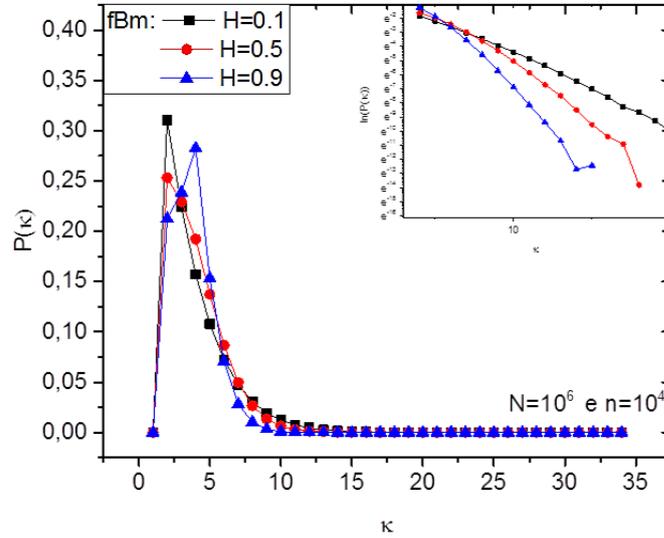


Figura 5.26: Função de distribuição do grau do grafo associado aos fBm's pelo HVG-W para alguns valores de H . Subfigura: PDF's em escalas semi-logarítmicas. Séries de tamanho $N = 10^6$ e janela $n = 10^4$ para todos os casos.

para as séries de tamanho $N = 10^6$ e janela $n = 10^4$, pelo mapeamento utilizando o usando o HVG-W. É observado, nessa Figura, que, para valores a partir de $\kappa > 3$, essas PDF's têm um comportamento exponencial, comportamento esse que já havia sido observado pelo mapeamento utilizando HVG. Já no lado direito da figura 5.26, traçamos as PDF's em escalas semi-logarítmicas, quando $N = 10^6$ e $n = 10^4$, para todos valores de H , reforçando, assim, a hipótese, de que a PDF pelo método usando o HVG-W pode, também, ser dada pela relação: $P(\kappa) \sim \exp(-\lambda \kappa)$ e em que λ aumenta em função de H e do tamanho da série, também.

Como o comportamento da distribuição do grau é também $P(\kappa) \sim \exp(-\lambda \kappa)$ para os fBm's, foi calculado o valor médio de λ em função de H , como mostrado na Figura 5.27, tendo como principal objetivo avaliar se o valor de λ coincide como os valores obtidos por HVG em séries do mesmo tamanho. Foram calculadas 10 amostras para cada H , para as séries de tamanho $N = 10^4$ até $N = 10^6$. As cinco primeiras colunas referem-se ao mapeamento pelo HVG e as duas últimas pelo mapeamento pelo usando o HVG-W, para as séries de tamanho $N = 10^6$ e janelas $n = 10^4$ e $n = 10^5$, respectivamente. Os valores de λ para a série de tamanho $N = 10^6$ e janela $n = 10^4$ pelo HVG-W aproximaram-se melhor das séries de tamanho $N = 10^6$ do que as séries de tamanho $N = 10^4$, ambas obtidas pelo HVG. A mesma coisa ocorreu com os valores de λ obtidos para a série de tamanho $N = 10^6$ e janela $n = 10^5$, sendo que essa aproximação foi melhor comparada à janela igual a $n = 10^4$, sendo igual a duas casas depois da virgula comparada $N = 10^6$ pelo HVG.

Já em relação a $N = 2 \cdot 10^6$, também na Figura 5.27, foram calculadas 10 amostras para cada H , para as séries de tamanho $N = 10^4$ até $N = 2 \cdot 10^6$. As seis primeiras colunas referem-se ao mapeamento pelo HVG e as duas últimas pelo mapeamento usando HVG-W, para as séries

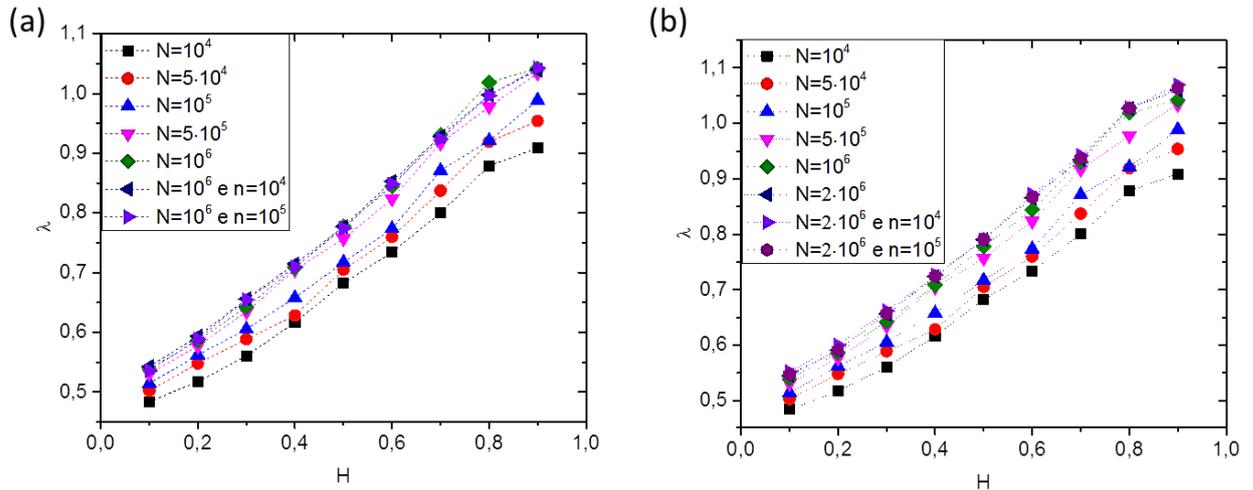


Figura 5.27: (a) Valores médio do lambda em função de H para os fBm's. As cinco primeiras colunas referem-se ao mapeamento pelo HVG para as séries de tamanho $N = 10^4$, $N = 5 \cdot 10^4$, $N = 10^5$, $N = 5 \cdot 10^5$ e $N = 10^6$ e as duas últimas séries de tamanho $N = 10^6$ e janelas $n = 10^4$ e $n = 10^5$, respectivamente, pelo mapeamento pelo HVG-W. (b) Valores médio do lambda em função de H para os fBm's. As seis primeiras colunas referem-se ao mapeamento pelo HVG para as séries de tamanho $N = 10^4$, $N = 5 \cdot 10^4$, $N = 10^5$, $N = 5 \cdot 10^5$, $N = 10^6$ e $N = 2 \cdot 10^6$ e as duas últimas séries de tamanho $N = 2 \cdot 10^6$ e janelas $n = 10^4$ e $n = 10^5$, respectivamente, pelo mapeamento pelo HVG-W.

de tamanho $N = 2 \cdot 10^6$ e janelas $n = 10^4$ e $n = 10^5$, respectivamente. Os valores de λ para a série de tamanho $N = 2 \cdot 10^6$ e janela $n = 10^4$ aproximaram-se melhor das séries de tamanho $N = 2 \cdot 10^6$ do que as séries de tamanho $N = 10^4$, ambas obtidas pelo HVG. A mesma coisa ocorreu com os valores de λ obtidos para a série de tamanho $N = 2 \cdot 10^6$ e janela $n = 10^5$, sendo que essa aproximação foi melhor comparada à janela igual a $n = 10^4$, sendo igual a duas casas depois da virgula comparada $N = 2 \cdot 10^6$ pelo HVG.

Continuando os testes, na Figura 5.28, representamos o plano casual Shannon Fisher para o fBm variando H , as séries de tamanho $N = 10^5$ e $N = 10^6$ referem-se ao mapeamento pelo HVG e a série de tamanho $N = 10^6$ e janela $n = 10^5$ pelo mapeamento usando usando o HVG-W. Como pode ser observado, os valores de Shannon S e Fisher \mathcal{F} para a série de de tamanho $N = 10^6$ e janela $n = 10^5$ aproximaram-se bem, comparados aos valores obtidos pelo HVG, com tamanho de série $N = 10^6$ e ficaram um pouco distantes para série de tamanho $N = 10^5$.

Por fim, na Figura 5.29, foi plotado o valor do caminho mínimo L , em função do índice do

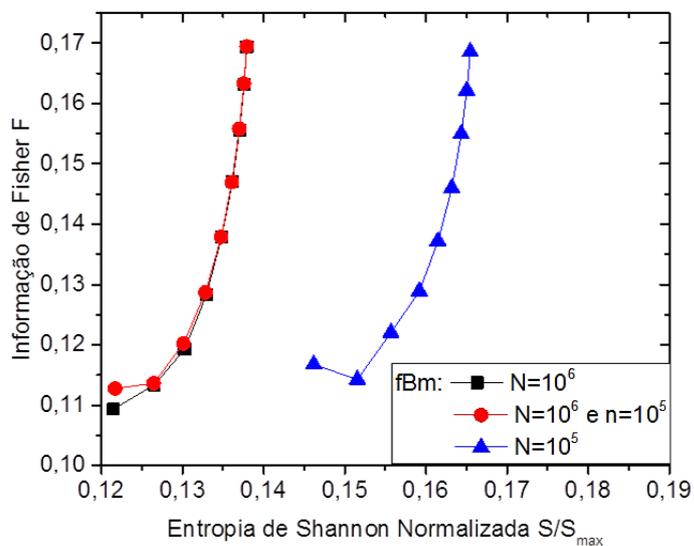


Figura 5.28: Plano Plano Causal Shannon-Fisher ($S \times \mathcal{F}$), para as séries de tamanho $N = 10^5$ e $N = 10^6$ pelo HVG e $N = 10^6$ e janela $n = 10^5$ usando o HVG-W.

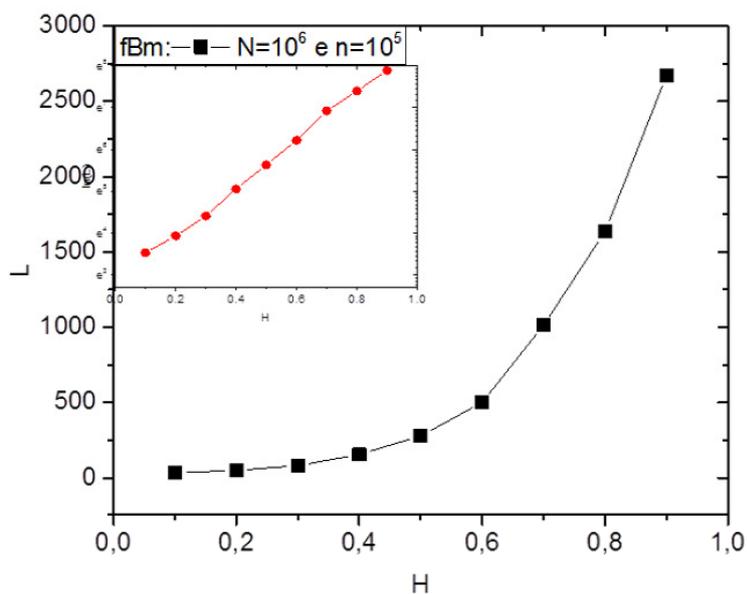


Figura 5.29: Caminho mínimo L , em função do índice do expoente de Hurst H dos fBm's, para as séries de tamanho $N = 10^6$ e janela $n = 10^5$ usando o HVG-W. Subfigura: L em função de H , em escalas semi-logarítmicas.

expoente de Hurst H dos fBm's, para as séries de tamanho $N = 10^6$ com tamanho de janela $n = 10^5$. Essa figura mostra que os valores de L aumentam exponencialmente com o aumento

do índice de H e que ao traçamos L em função de H , em escalas semi-logarítmicas, para os valores de N acima, como mostrado na Figura 5.29, temos que o valor de L em função de H pode ser dado pela relação: $L = a e^{bH}$. Relação esta que também foi obtida ao utilizar o HVG.

Observamos assim que, usando o HVG-W, de maneira similar ao VG e ao HVG, as séries periódicas são convertidas em grafos regulares, e as séries aleatórias em grafos aleatórios. Comparando os resultados do fBm pelo HVG, com $N = 10^6$ e $N = 2 \cdot 10^6$, aos do usando o HVG-Windows, com $N = 10^6$ e $N = 2 \cdot 10^6$, e janelas de $n = 10^4$ e de $n = 10^5$, respectivamente, chegamos a resultados similares em relação ao cálculo do λ , sendo que, com a janela $n = 10^5$, esses resultados foram melhores, como pode ser observado na Figura 5.27. Verificamos, também, que, após a utilização da janela, as PDF's do grau permanecem, ainda, com um comportamento exponencial, visto na figura 5.26. Além disso, ao calcular o caminho mínimo L , para $N = 10^6$, com $n = 10^5$, chegamos a uma relação exponencial, sendo, também, os valores de L maiores, quando comparados aos valores de $N = 10^5$, como observado em 5.29. Tentamos mostrar assim que, pelo algoritmo usando o HVG-W, não se perdem informações da série ao utilizar janelas em sua análise. Um ponto importante a ser discutido é o tamanho da janela em função do tamanho da série: em nossos testes, observamos que na maioria dos casos a janela $n = 10^4$ foi suficiente para preservar as informações da série, apesar de que, aumentando a janela para $n = 10^5$, conseguimos resultados melhores. Contudo, ao utilizar janelas maiores que $n = 10^5$ em séries com alta correlação, o tempo computacional do algoritmo é muito alto.

5.5.3 Conclusões Parciais do HVG-W

Incidados pela limitação do tamanho da série temporal, propomos uma versão computacionalmente mais eficiente que a versão do algoritmo HVG, grafo de visibilidade horizontal Windows (HVG-W), sua visibilidade, mais restrita do que a do caso HVG, é também analisada através de retas horizontais, contudo essa análise é feita em janelas de tempo. No HVG, número de operações, para o pior caso, para uma série de tamanho N , é de no máximo: $N!$. Já para o HVG-W, número de operações, para uma série de tamanho N e janela de tamanho n , para o pior caso, é de no máximo $n!(N - n) n$. Embora tal fato não tenha impacto sobre os aspectos qualitativos dos grafos, a simplicidade da versão do algoritmo HVG-W permite que ele seja aplicado a séries muito longas, maiores que aquelas em que se aplicava o HVG. Além disso, mostramos, através de uma análise extensiva pelas séries do fBm, que o método (HVG-W) possuiu as mesmas características do HVG e que, ao utilizar janelas temporais, as informações das séries são preservadas. Além disso, sugerimos que uma janela de tamanho $n = 10^5$ já seria suficiente pra preservar as informações da série, além de manter um gasto computacional viável.

5.6 Grafo de Visibilidade Horizontal Peso (HVG-P)

Nessa seção, propomos uma versão adaptada do algoritmo HVG, nomeada como grafo de Visibilidade Horizontal Peso (HVG-P), em que se calcula o valor da amplitude entre dois pontos que obedecem ao critério de visibilidade de cada aresta mantendo sua forma de mapeamento idêntica à do HVG. Considerando $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_n\}$ uma amostra de n valores reais, se t_i e t_j são

conectados, a aresta (i, j) tem o peso $w_{ij} = t_i - t_j$. Como w é uma variável contínua, um histograma é construído para estimar a distribuição de probabilidade. $P_w(AP)$ representa a fração de arestas com amplitude AP .

Na construção da função de distribuição de probabilidade, pegamos o valor do menor peso w_{min} e o valor do maior peso w_{max} dentro de um conjunto de séries que se deseja compará-las. De forma que, a distribuição de frequência será dada dividindo o intervalo aproximado $w_{min} - \zeta, w_{max} + \zeta$ em um número de bins definido, ζ é uma constante real. No algoritmo (9), (na Seção 7.7, em anexo), é mostrado a obtenção da distribuição do peso.

Uma das vantagens desse algoritmo é a possibilidade de voltar à série mapeada. Em anexo (na Seção 7.7), é representando o algoritmo [8] e abaixo a Figura 5.30 que ilustram esse mapeamento com peso, observando que a inclusão do cálculo do peso não aumenta a complexidade do algoritmo. Utilizando um vetor de posição do ligamento dos nós $MD[i]$, como ilustrado no algoritmo (8), (na Seção 7.7, em anexo), o valor real da amplitude e o primeiro ponto da série $t[0]$, como mostrado na equação 5.10 a seguir, em que $y[i]$ é a série mapeada pelo grafo. Isso torna o algoritmo invertível.

$$y[0] = t[0]; y[MD[i + 1]] = y[MD[i]] + w[j]. \quad (5.10)$$

Outra motivação ao propor essa adaptação é hipotetizar que pela distribuição do peso juntamente com a Teoria da Informação, será possível obter uma forma alternativa e possivelmente mais eficiente na análise de série temporais. Pois, ao mapear as séries pelo HVG, as informações da série temporal podem ser perdidas no mapeamento. Como exemplo, duas séries $T_1 = \dots, 3, 1, 3, 1, \dots$ e $T_2 = \dots, 3, 2, 3, 2, \dots$ teriam o mesmo grafo de visibilidade, resultando na mesma distribuição do grau e distribuição da distância, apesar de serem quantitativamente diferentes. Por esse motivo, acreditamos que as informações da série preservar-se-iam melhor se se utilizassem pesos para determinar a diferença de altura nos nós associados.

Nas seções a seguir, investigamos as distribuições de probabilidade alternativas (a distribuição da distância P_δ e a distribuição do peso P_w das arestas) e comparamos seus desempenhos com a distribuição de grau P_{grau} que é muito utilizada em trabalhos com HVG e com outras metodologias também, como por exemplo em [100, 111–114]. Esses estudos basearam-se na análise no fBm e na dinâmica das mudanças temporais durante a época Holoceno pelos registros proxy ENSO milenar.

5.6.1 Avaliação do Plano Causal Shannon-Fisher por três Distribuições

A seguir, calculamos o plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, para o processo estocástico fBm com séries de tamanho $N = 10^3$, $N = 10^4$ e $N = 10^5$, utilizando as distribuições do grau P_{grau} , da distância P_δ e do peso P_w . Os testes foram feitos com 10 amostras para cada H e, em seguida, calculada a média.

Na Figura 5.31, representamos o plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, em função do índice do expoente de Hurst H do fBm, para o tamanho de série $N = 10^5$, utilizando a distribuição do grau P_{grau} , a distribuição da distância P_δ e a distribuição do peso P_w , respectivamente. Na

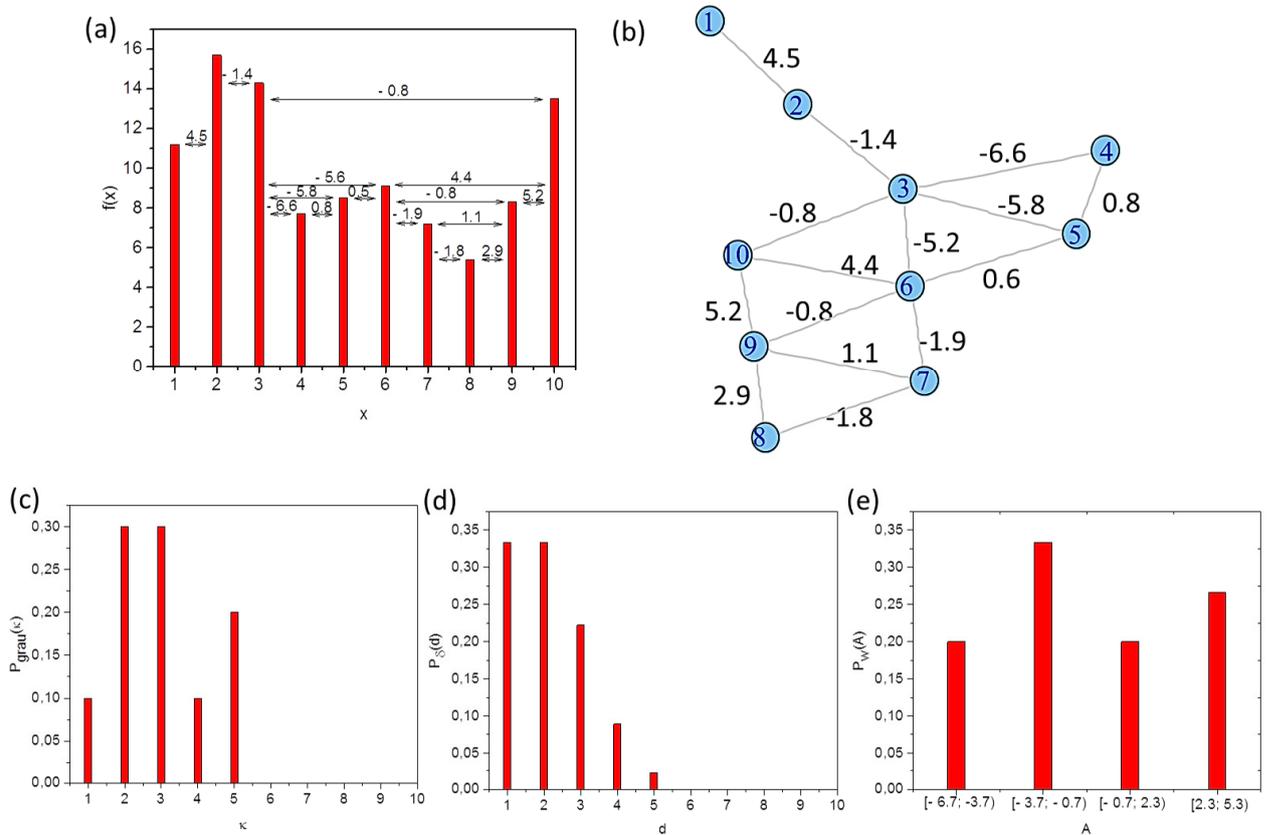


Figura 5.30: (a) Representação dos nós associados da série pelo HVG-P, no intervalo com 4 Bins . (b) O grafo associado e o valor do peso. (c) A distribuição do grau P_{grau} . (d) A distribuição da distância P_δ (e) A distribuição do peso P_w .

distribuição do peso foi considerado 50 bins na construção do histograma. Para especificados valores de H , dentro das figuras plotamos os grafos correspondentes ao mapeamento pelo HVG, para o tamanho de série $N = 10^3$.

Na Figura 5.32, para $H = 0.1$, $H = 0.6$ e $H = 0.9$ plotamos as três funções de distribuição de probabilidade, do grau P_{grau} , da distância P_δ e do peso P_w , respectivamente. Já na Figura 7.16, representamos o plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, em função do índice do expoente de Hurst H do fBm, para o tamanho de série $N = 10^3$, para as três distribuições.

Os valores da entropia de Shannon foram normalizados usando o valor da entropia máxima $S_{max} = \ln(M)$. Para a distribuição do grau e da distância foi considerado $S_{max} = \ln(M) = \ln(N)$, em que N é o tamanho da série. Já para distribuição do peso foi considerado $S_{max} = \ln(M) = \ln(50)$, em que 50 é o número de bins utilizado.

Na distribuição do grau P_{grau} , os pontos mais altos do plano são para as séries temporais com menores valores de H . Para o valor de $H = 0.1$, as séries apresentam o maior valor da

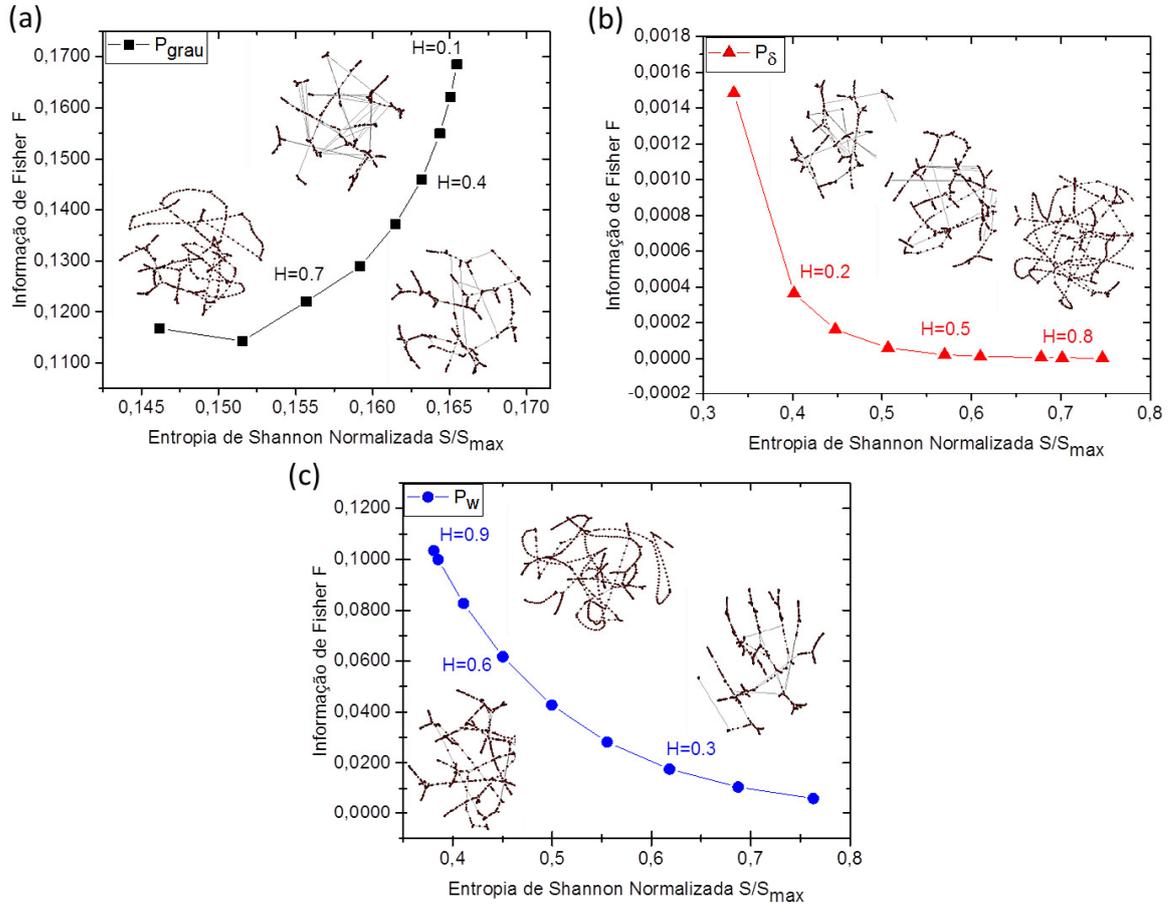


Figura 5.31: Representação do plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, para fbm, em função de H , pelas três distribuições pelo HVG: (a) do grau P_{grau} . (b) da distância P_{δ} . (c) do peso P_w . Séries de tamanho $N = 10^5$ foram consideradas.

informação de Fisher \mathcal{F} e da entropia de Shannon S , como observado na Figura 5.31. Quando ocorre a persistência, as séries temporais começam a apresentar sequências de valores superiores ou inferiores, sendo que a visibilidade nessas regiões aumenta para poucos nós, mas fica mais restrita para a maioria. As redes começam a refletir esse efeito, aumentando o grau de apenas um pequeno grupo de nós. Logo, a função de distribuição dos graus presentes fica mais achatada, mas, ao mesmo tempo, as suas caudas ficam mais curtas, deslocando-se para uma distribuição menos uniforme e diminui os valores das entropias, como visto nas Figuras 5.32 e 5.31. Contudo, a informação de Fisher é incapaz de discriminar séries temporais com valores mais altos de H , essa percepção só fica mais clara para séries maiores que $N = 10^5$, como pode ser observado em anexo (na Seção 7.5) para uma série com tamanho $N = 10^6$.

Ao considerar a distribuição da distância P_{δ} , a dinâmica do plano é diferente, como observado na Figura 5.31. Valores pequenos de H , de baixa persistência, indicam valores menores do caminho mínimo L . Com o aumento da persistência, como mencionado, a visibilidade de

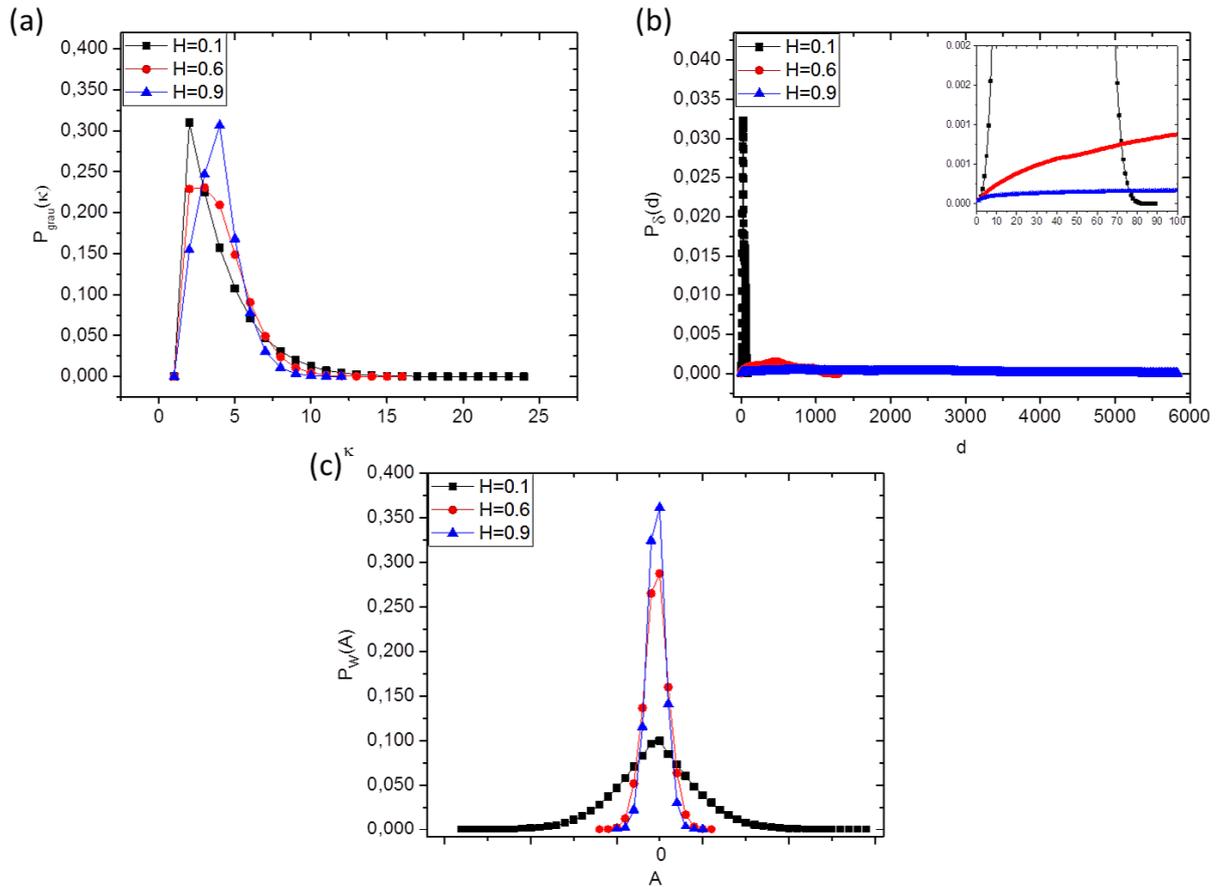


Figura 5.32: Gráfico da função de distribuição de probabilidade das três distribuições para fBm. (a) do grau P_{grau} ; (b) da distância P_{δ} ; (c) do peso P_w . Séries de tamanho $N = 10^5$ foram consideradas. Para especificados valores de H , dentro das figuras plotamos os grafos correspondentes ao mapeamento pelo HVG, para o tamanho de série $N = 10^3$.

um pequeno grupo de nós aumenta, mas, ao mesmo tempo, restringe o número de conexões de muitos outros nós, como mostrado na Seção 5.3. De maneira que a baixa persistência gera uma grande quantidade de ligações curtas e faz com que a função de distribuição da distância com muitos valores de distâncias pequenas. O aumento da persistência, aumenta o número de ligações mais longas, fazendo com que a densidade da distância se aproxime de uma distribuição uniforme e levando, também, a um aumento da entropia S , como visto em 5.32. No caso de \mathcal{F} , diferentemente da distribuição do grau, a medição é muito mais sensível a pequenas perturbações localizadas; contudo mudanças acontecem nos diferentes estados da distribuição da distância, diminuindo os valores de \mathcal{F} com o aumento da persistência.

Ao analisar os resultados da distribuição de peso P_w , observamos que para valores menores de H , baixa persistência, as amplitudes entre os pontos (nós) são mais elevadas, as PDFs apresentam caudas mais longas, fazendo com que a densidade do peso se aproxime de uma dis-

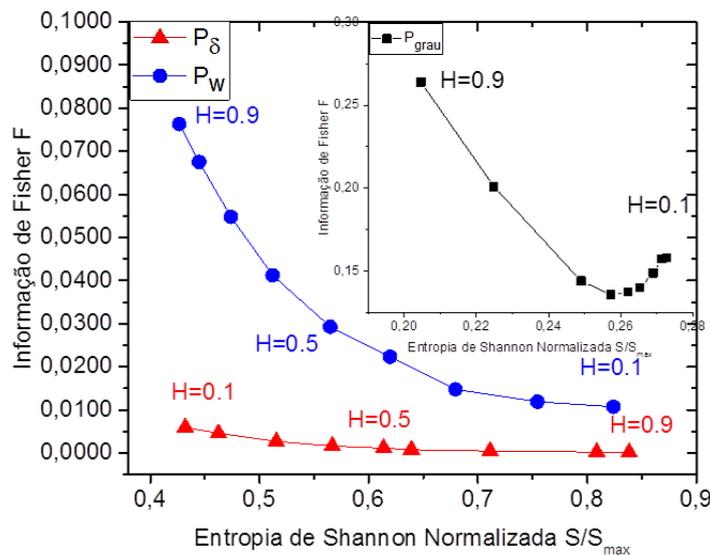


Figura 5.33: Representação do plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, para fBm, em função de H , pelas três distribuições do grau P_{grau} (em preto), da distância P_{δ} (em vermelho) e do peso P_w (em azul). Séries de tamanho $N = 10^3$ foram consideradas.

tribuição uniforme e aumente o valor de S , como pode ser visto nas Figuras 5.32 e 5.31. Com o aumento de H , o valor absoluto das amplitudes entre os pontos são menores, consequentemente, aumenta a parte central de frequência, obtendo caudas menores e influenciando na diminuição dos valores da entropia S . Também nas Figuras 5.32 e 5.31, é fácil observar que com o aumento de H , maiores perturbações acontecem perto da parte central de frequência, influenciando assim no aumento do valor de \mathcal{F} .

Além disso, é possível observar que essa distribuição do peso é capaz de capturar suavemente as mudanças dinâmicas da série temporal, mesmo precisando de menor quantidade de dados, como observado na Figura 7.16 que mostra a caracterização de séries temporais, considerando comprimentos $N = 10^3$.

5.6.2 Aplicação a Redes Climáticas

A tentativa de compreensão do clima tem sido objeto de estudo desde as civilizações mais antigas da história. Nos últimos anos, houve um crescente interesse no estudo da variação do clima com o objetivo principal de entender os mecanismos subjacentes à sua variação. Os impactos da variação climática alteram profundamente inúmeros aspectos do meio ambiente e da sociedade, impondo uma necessidade premente de melhorar e a aumentar a compreensão sobre o tema. Sabe-se que períodos de rápidas mudanças climáticas foram catastróficos para alguns impérios, como o Império Romano [115] e a Civilização Maia no século IX [116]. A mudança climática também teve efeitos dramáticos sobre diversas espécies animais [117]. O estudo das mudanças climáticas ao longo da história da Terra foi possível usando-se dados

paleoclimáticos, com registros tirados de corais fósseis, camadas de gelo, anéis de árvores, dentre outros. Uma variação climática que ocorre anualmente em todo o mundo e tem tido impactos socioeconômicos é o *El Niño–Southern Oscillation* (ENSO), eventos do fenômeno El Niño que modificam um sistema de flutuação das temperaturas do Oceano Pacífico chamado Oscilação Sul. O fenômeno El Niño trata-se de alterações significativas de curta duração de 15 a 18 meses na distribuição da temperatura da superfície da água do Oceano Pacífico. Diferentes metodologias, nos últimos anos, foram propostas para melhorar a compreensão da dinâmica ENSO. Destaca-se, nas últimas décadas, o desenvolvimento e a utilização da teoria de redes complexas, que levou a avanços importantes na análise da dinâmica do clima [5, 118, 119].

Nosso objetivo é propor uma metodologia cuja utilização seja possível em qualquer sistema dinâmico. Como exemplificação, escolhemos a aplicação em clima, em específico em dados de frequência de eventos ENSO. Como já citado acima, a motivação em trabalhar com sistemas climáticos advém do grande interesse da comunidade científica, além do sucesso da utilização do uso de redes complexas na análise do tema.

5.6.2.1 Análise do Resultados de Redes Climáticas

Nesta seção, utilizamos a metodologia proposta pelas três distribuições, no plano Shannon-Fisher, para a análise da dinâmica temporal durante a época Holoceno pelos registros proxy ENSO. Inicialmente, apresentamos metodologias propostas para a mesma análise, seguidas pelos resultados e discussões da metodologia aqui proposta.

As mudanças temporais durante a época Holoceno têm sido fortemente influenciadas pela variabilidade do ENSO (*El Niño–Southern Oscillation*) nos últimos 12.000 anos. O Holoceno é caracterizado pelo aumento da frequência de eventos ENSO. Os períodos de mudanças climáticas (RCC), baseando-se nos principais períodos de Holoceno, foram identificados por Denton e Karlén em [120], a partir de registros de flutuação de geleira. Esses períodos RCC's identificados foram em 9000-8000 BP, 6.000-5000 BP, 4200-3800 BP, 3500-2500 BP, 1200 - 1000 BP, e desde 600 BP, em que BP é *Before Present*.

Em [3, 4, 121], analisa-se a dinâmica das mudanças temporais durante a época Holoceno, usando registros proxy ENSO recuperados a partir dos valores de intensidade de cor de um núcleo de sedimentos localizados há cerca de 9 m de profundidade no Lago Laguna Pallcacocha, no sul do Equador (representado na Figura 5.34), dados disponíveis em [122]. As séries temporais são obtidas a partir da intensidade da cor vermelha da superfície das seções de núcleos que estavam digitalizadas e um modelo de idade com base na cronologia radio carbono [124]. Luz colorida, lâminas em sedimentos inorgânicos e núcleo do sedimento são conhecidos por ser correlacionados moderadamente com eventos do El Niño [4, 121], que é uma variação irregular periódica de ventos e temperaturas da superfície do mar sobre o Oceano Pacífico, que afetam grande parte dos trópicos e subtropicais.

Em [121] o estudo foi feito a partir da análise de Wavelet, na qual encontraram uma oscilação milenar, escala coerente ao longo do Holoceno, mas exibindo menos variação significativa no início do Holoceno. Além disso, identificaram uma mudança na variação em torno de BP 5000, a partir de um período de 1500 anos no início do meio do Holoceno, para um período de 2000 anos no final do Holoceno. Períodos de atividade relativamente alta e baixa ENSO, alternando em uma escala de tempo de cerca de 2.000 anos, sobrepostos a esta tendência de

longo prazo.

Tsonis em [3], analisaram os registros usando várias técnicas de dinâmica não-linear, observando que a mudança de comportamento em torno de 5000 BP poderia ser explicada como uma bifurcação dada por uma transição na dinâmica, como consequência dessa mudança eventos El Niño mais frequentes e fortes.

Já em [4], o estudo dessas mudanças temporais durante a época Holoceno pelos registros proxy ENSO foi baseado na utilização da entropia de Shannon através do método de Bandt e Pompe (com $D=5$). Em particular, analisaram-se as possíveis conexões entre mudanças na entropia e as épocas de mudanças climáticas (RCC). Identificaram os períodos de atividade relativamente alta e baixa ENSO, alternando em uma escala de tempo de cerca de 2.000 anos citados de [121]; uma mudança na variação em torno de BP 5000 como em [121] e [3].

Em Mayewskiem *et. al.*, em [123], utilizando outros registros paleoclimáticos estudaram os períodos RCC do holoceno, nesse estudo destaca-se que intervalo de RCC 9000-8000 BP é o único que coincide com um aumento significativo da produção de aerossol vulcânico, e ocorreu quando dinâmicas bipolares das camadas de gelo ainda tinham o potencial para efeitos substanciais sobre clima global.

Neste trabalho, a série temporal original em [122], foi interpolada utilizando um polinômio de Hermite cúbico, em seguida, foi considerada uma janela de 1000 valores de dados de tempo, o deslocamento de uma pra outra foi de 100 dados entre as janelas. Uma janela deslizante foi usada para permitir uma melhor localização de alterações na dinâmica da ENSO através do tempo. Mapeando os dados pelo HVG, foi computado os valores da entropia de Shannon S e Fisher \mathcal{F} utilizando a distribuição do grau P_{grau} , a distribuição da distância P_{δ} e a distribuição do peso P_w , respectivamente, como pode ser visto na Figura 5.35. Na distribuição do peso foi considerado 50 bins na construção do histograma. Ao lado da distribuição do peso, os grafos correspondentes aos pontos de interseção e máximo de S . Na Figura 5.36, está representado o plano causal Shannon-Fisher ($S \times \mathcal{F}$) da distribuição do peso.

A partir da Figura 5.35, pode-se observar que, embora todas as distribuições detectem a mudança em torno de 5000 BP [3, 121], a distribuição de peso mostra um comportamento suave. Mudança essa no qual as distribuições do grau e peso, a entropia S termina um período mais longo de tendência crescente (o oposto ocorre com \mathcal{F} apenas na distribuição do peso). Já em relação a distribuição da distância, esse comportamento é contrário.

Para as três distribuições o valor de S e para apenas a distribuição do peso o valor \mathcal{F} , em 9000-8000 BP, segue um comportamento contrário dos outros RCCs do Holoceno, coincidindo com a observação em [4, 123]. Pela distribuição do grau e do peso, em 9000-8000 BP, o valor de S apresenta uma entropia mais baixa (alta previsibilidade) e, pela distribuição do peso, o valor de \mathcal{F} uma entropia mais alta (baixa previsibilidade). Já na distribuição da distância, em 9000-8000 BP, acontece o contrário, o valor de S é mais alta (baixa previsibilidade) e valor de \mathcal{F} não diferencia a mudança. Além de que, a distribuição do peso é a única em que S no intervalo 9000-8000 BP os valores permanecem mais constantes de maneira similar em [4], como visto na Figura 5.35. Além disso, pela distribuição peso, os valores das entropias sugerem que esses RCCs apresentam uma dinâmica mais correlacionada. Esse fato pode, também, ser observado na Figura 5.36, pois na posição desse período estão localizados os processos mais correlacionadas (ver também na Figura 5.31 e (na figura 7.17, em anexo)).

Ambos os quantificadores de entropia da distribuição do peso e apenas S na distribuição do grau, a partir de 6500 BP, seguem um comportamento cíclico, similar a um período de cerca de 2000 anos (aproximadamente 6000-4000 BP, 4000-2000 BP), dinâmica esta consistente com as observadas em [4, 121]. Além disso, para a distribuição do peso foi encontrada uma tendência de aumento da entropia S (e diminuição de \mathcal{F}) durante os três maiores RCC (9000-8000 BP, 6000-5000 BP e 3500-2500 BP), em relação a distribuição do grau, esse comportamento foi observado apenas para S . Já as entropias pela distribuição da distância não exibiram esse comportamento cíclico, e apenas em \mathcal{F} foi encontrada uma tendência de aumento da entropia, durante os dois RCC (6000-5000 BP e 4200-3800 BP).

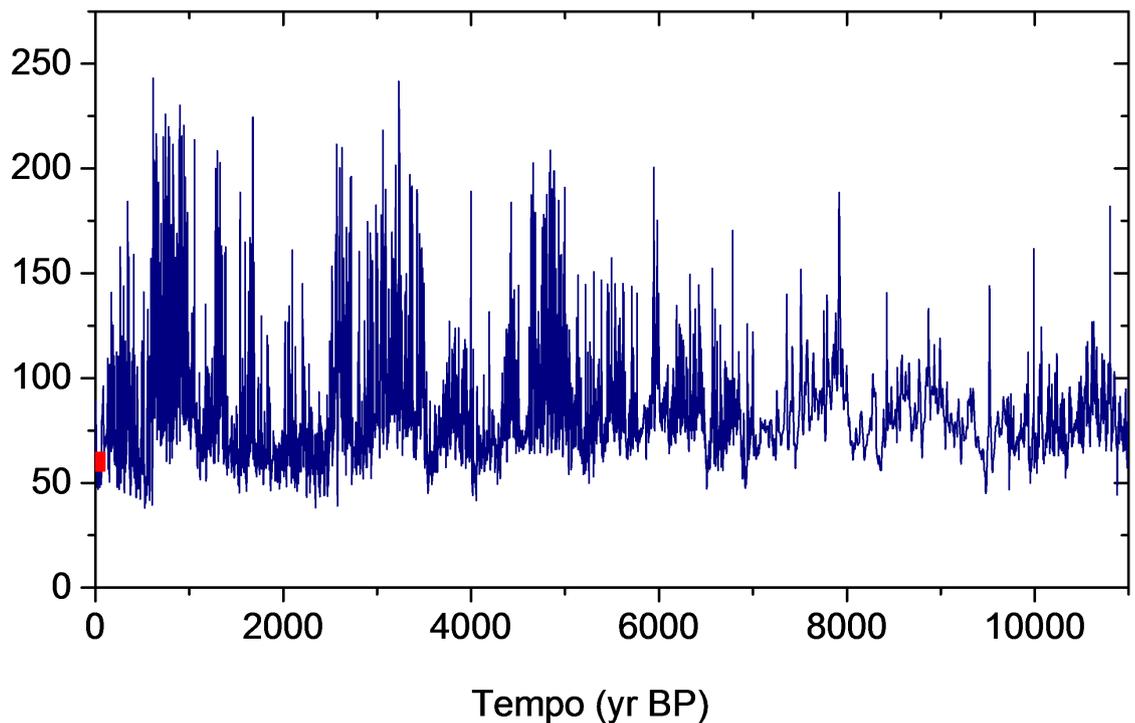


Figura 5.34: Dados proxy ENSO recuperados do Lago Laguna Pallcacocha.

Na Figura 5.37, representamos o caminho mínimo L do grafo gerado pelo HVG no mapeamento dos registros proxy ENSO. Observamos que o RCC 9000-8000 BP apresentou maiores

valores de L , e outros RCCs do Holoceno, valores menores de L . Já o comportamento cíclico de um período de cerca de 2000 anos é observado em todos os RCCs do Holoceno. Uma tendência de aumento de L , por sua vez, é observada durante os dois RCC, períodos mais longos (6000-5000 e 3500-2500 BP). Ao comparar os resultados de L com os resultados de S e \mathcal{F} pela distribuição, sugerimos uma possível correlação com os resultados na seção 5.36, em que o aumento de L , na distribuição da distância, influencia o aumento de S e diminuição de \mathcal{F} , já em relação a distribuição do grau, influencia na diminuição de S .

Os valores de S pelas três distribuições capturaram bem as informações, sendo que o valor de S pela pdf do peso foi mais suave e os resultados coincidiram mais com os trabalho [3, 4, 121, 123]. Já em relação a cálculo de \mathcal{F} , apenas a distribuição do peso conseguiu capturar bem as informações em [3, 4, 121, 123]. Além disso, ao calcular o caminho mínimo, observamos uma correlação de L com S e \mathcal{F} também.

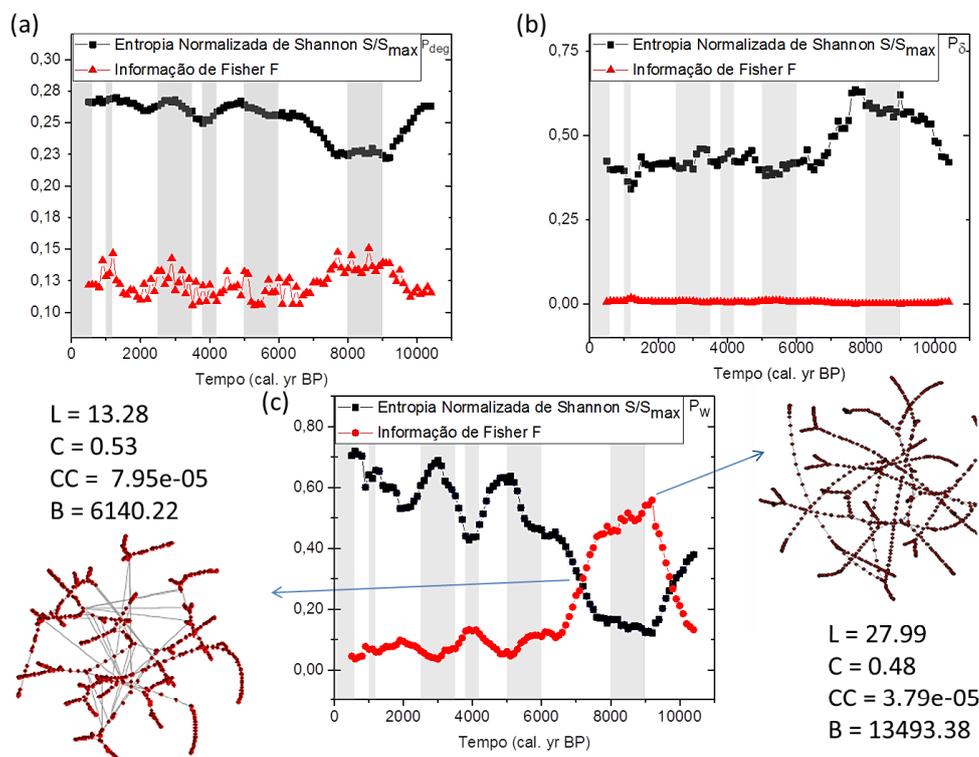


Figura 5.35: Entropias S e \mathcal{F} dos dados proxy ENSO utilizando as três distribuições pelo HVG: (a) do grau P_{grau} ; (b) da distância P_{δ} ; (c) do peso P_w . Para ambos foi considerada uma janela de 1000 valores de dados de tempo, o deslocamento de uma pra outra foi de 100 dados entre as janelas. Na distribuição dos pesos, ao lado os grafos correspondentes aos pontos de máximo de \mathcal{F} e a interseção das entropias. Ao lado também os valores do caminho mínimo L ; coeficiente de agrupamento C ; medida de centralidade B ; medida de proximidade CC . Em \mathcal{F} o valor máximo foi dado em 9100 e a interseção em 6800. Na parte cinza os períodos RCCs identificados: em 9000-8000 BP, 6.000-5000 BP, 4200-3800 BP, 3500-2500 BP, 1200 - 1000 BP, e desde 600 BP.

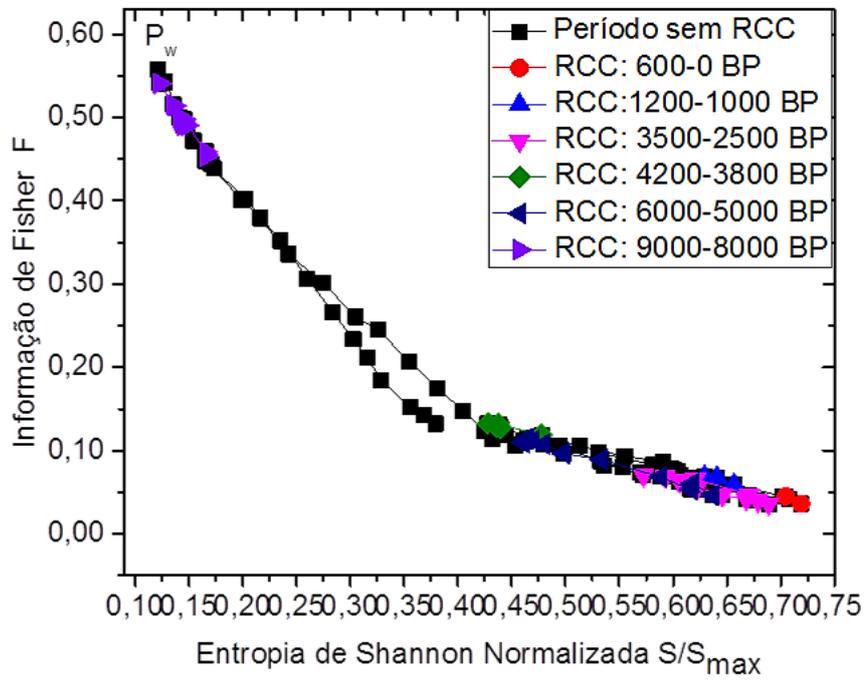


Figura 5.36: Plano Shannon-Fisher dos registros proxy ENSO pela distribuição do peso.

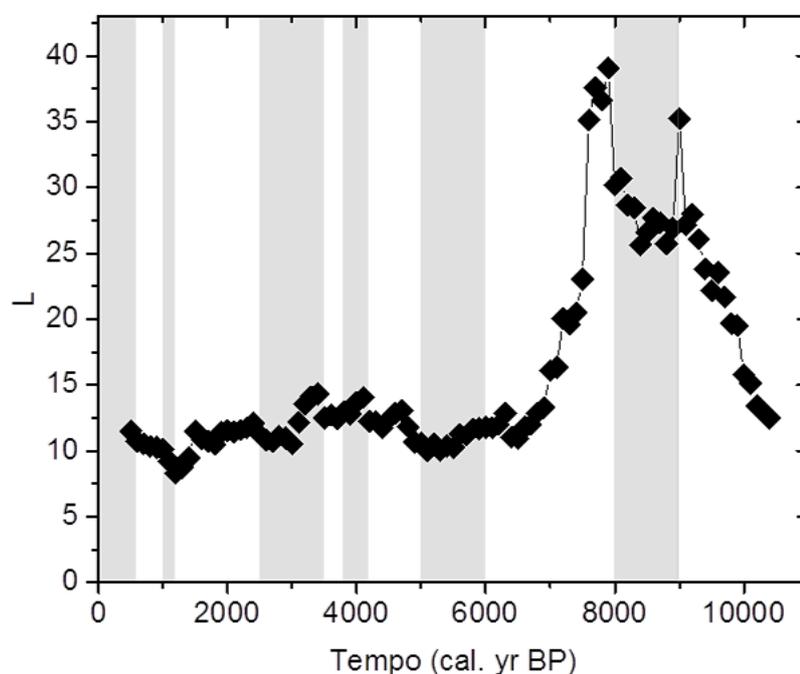


Figura 5.37: Caminho mínimo L do grafo gerado pelo HVG no mapeamento dos registros proxy ENSO. Foi considerada uma janela de 1000 valores de dados de tempo, o deslocamento de uma pra outra foi de 100 dados entre as janelas. Na parte cinza os períodos RCCs identificados: em 9000-8000 BP, 6.000-5000 BP, 4200-3800 BP, 3500-2500 BP, 1200 - 1000 BP, e desde 600 BP.

5.6.3 Conclusões Parciais do HVG-P

Propomos mais uma versão adaptada do algoritmo HVG, o grafo de Visibilidade Horizontal Peso (HVG-P), em que se calcula o valor da amplitude entre dois pontos que obedecem ao critério de visibilidade de cada aresta mantendo sua forma de mapeamento idêntica à do HVG. Essa versão do algoritmo, foi possível gerar uma distribuição alternativa (do peso das arestas). Através de uma extensiva experimentação usando as três distribuições (grau, distância e peso), mostramos que o uso da distribuição de peso permite uma melhor caracterização do sistema. Outra vantagem importante é a exigência de menos dados para realizar uma adequada caracterização. Estudamos aqui o fBm, com diferentes graus de correção, e a dinâmica das mudanças temporais durante a época Holoceno, usando registros proxy ENSO. Verificamos que a distribuição de peso identificou o melhor evento durante o Holoceno. Em resumo, propusemos uma maneira alternativa de extrair informações do HVG, demonstrando maior eficiência na caracterização de sistemas dinâmicos quando comparados com outras técnicas mais usadas.

Conclusão Geral e Perspectivas Futuras

A transformação de uma série temporal em redes (grafos) mostra-se bastante promissora devido a vários aspectos, como, por exemplo, a possibilidade de sua junção com o método usado no mapeamento com quantificadores da Teoria da Informação, transformação essa que possibilita diferentes maneiras de extração de funções de distribuições de probabilidade pelo HVG.

No decorrer deste trabalho, propomos uma nova metodologia capaz de distinguir processos estocásticos de caóticos: o uso do grafo de visibilidade horizontal combinado com dois quantificadores da Teoria da Informação, o Plano causal Shannon-Fisher. A avaliação desses quantificadores foi feita utilizando a distribuição de probabilidade do grau e , ao todo, foram considerados 33 sistemas.

Em seguida, foram avaliadas métricas clássicas de área de redes em função do índice do expoente de Hurst H dos fBms e fGns e, além disso, em função de k dos Ruídos com Espectro de Potência f^{-k} . O que se pôde observar foi que todas essas medidas variam em função de H e K , mostrando, assim, que, por esses quantificadores de redes, torna-se possível distinguir os diferentes graus de estruturas de correlações. Além disso, ao verificar a afirmação de Xie e Zhou, em [103], em relação ao cálculo do coeficiente *assortativity* em função do índice H dos fBm's, observamos que chegaram a conclusões erradas devido ao tamanho pequeno da série que foi testada para a análise.

A metodologia aqui proposta também pode ser utilizada para o cálculo do expoente de Hurst, a qual nomeamos como metodologia do lambda λ . Testamos diferentes métodos que se apresentam na literatura com o mesmo propósito, como, por exemplo, a metodologia pelo VG, em [100], e a metodologia usando o método QG, em [101], e nos foi possível observar que essas metodologias apresentam várias falhas em sua formulação. Em seguida, geramos séries artificiais do fBm com diferentes valores de H e calculamos o expoente de Hurst H pelo método DFA, pela metodologia pelo VG, pela metodologia usando o método QG e a pela metodologia do lambda λ , sendo que, na maioria dos casos, os resultados obtidos pela metodologia do λ e pelo método DFA aproximaram-se mais dos valores reais de H .

Por fim, propomos duas versões adaptadas do método HVG: a primeira, nomeada grafo de visibilidade horizontal Windows (HVG-W), uma versão computacionalmente mais eficiente que a versão do algoritmo HVG, método pelo qual, depois de uma extensiva simulação, foi-nos possível mostrar que, utilizando-se janelas temporais, as informações das séries são preservadas; e a segunda, nomeada grafo de Visibilidade Horizontal Peso (HVG-P), em que se calcula o valor da amplitude entre dois pontos que obedecem ao critério de visibilidade de cada aresta, mantendo sua forma de mapeamento idêntica à do HVG. Por essa versão, geramos uma distribuição alternativa (do peso das arestas). Em seguida, estudamos o sistema fBm e os dados do registro proxy ENSO, utilizando a distribuição do peso proposta juntamente com a do grau e e a

da distância, podendo, assim, mostrar a eficiência da distribuição do peso comparada às outras em estudo.

Como o trabalho futuro é proposto:

- Utilização da metodologia do lambda λ para o cálculo do expoente de Hurst em séries temporais financeiras de mercados emergentes e mercados desenvolvidos. Em seguida, comparação desses resultados com trabalhos da literatura que utilizaram o método DFA para realizar a mesma análise.
- Estudo mais aprofundado do grafo de visibilidade horizontal Windows, comparando os resultados obtidos pelo HVG-W com o HVG para séries muito longas quando se utiliza computação paralela.
- Uso do HGV-W para aproximação do expoente de Hurst pela distribuição do grau.
- Aplicação da metodologia HVG-P juntamente com quantificadores da Teoria da Informação na análise de diferentes sistemas complexos.

CAPÍTULO 7

Anexos

7.1 Mapas Caóticos

Segue abaixo descrição dos mapas caóticos estudados nesse trabalho, seus parâmetros, condição inicial, expoente de Lyapunov e sua representação grafica.

7.1.1 Mapas não inversíveis

Mapas não inversíveis são representados abaixo, seus parâmetros, condição inicial e expoente de Lyapunov η são listados a seguir, veer em [83].

- *Mapa Logístico* [88]:

$$X_{n+1} = A X_n (1 - X_n) . \quad (7.1)$$

Valor do parâmetro: $A = 4$;

Condição inicial: $X_0 = 0.1$;

Expoente de Lyapunov: $\eta = \ln 2 = 0.693147181 \dots$;

- *Mapa Sine* [86]:

$$X_{n+1} = A \sin \pi X_n . \quad (7.2)$$

Valor do parâmetro: $A = 1$;

Condição inicial: $X_0 = 0.1$;

Expoente de Lyapunov: $\eta \simeq 0.689067 \dots$;

- *Mapa Tent* [145]:

$$X_{n+1} = A \text{Min}\{ X_n, 1 - X_n \} . \quad (7.3)$$

Valor do parâmetro: $A = 2$;

Condição inicial: $X_0 = 1/\sqrt{2}$;

Expoente de Lyapunov: $\eta = \ln |A| = 0.693147181 \dots$;

- *Gerador congruencial linear* [125]

$$X_{n+1} = A X_n + B X_n \quad (\text{Mod } C) . \quad (7.4)$$

Valor do parâmetro: $A = 7141, B = 54773, C = 259200$;

Condição inicial: $X_0 = 0$;

Expoente de Lyapunov: $\eta = \ln|A| = 8.873608101\dots$

- *Mapa Cubic* [126]:

$$X_{n+1} = A X_n (1 - X_n^2). \quad (7.5)$$

Valor do parâmetro: $A = 3$;

Condição inicial: $X_0 = 0.1$;

Expoente de Lyapunov: $\eta \simeq 1.0986122883$.

- *Modelo populacional de Ricker* [127]:

$$X_{n+1} = A X_n e^{-X_n}. \quad (7.6)$$

Valor do parâmetro: $A = 20$;

Condição inicial: $X_0 = 0.1$;

Expoente de Lyapunov: $\eta \simeq 0.384846$.

- *Mapa de Gauss* [128]

$$X_{n+1} = 1/X_n \quad (\text{Mod } 1). \quad (7.7)$$

Condição inicial: $X_0 = 1$;

Expoente de Lyapunov: $\eta \simeq 2.373445$.

- *Mapa de Cusp* [85];

$$X_{n+1} = 1 - A \sqrt{|X_n|}. \quad (7.8)$$

Valor do parâmetro: $A = 2$;

Condição inicial: $X_0 = 0.5$;

Expoente de Lyapunov: $\eta = 0.5$.

- *Mapa de Pincher* [129];

$$X_{n+1} = |\tanh S (X_n - C)|. \quad (7.9)$$

Valor do parâmetro: $S = 2, C = 0.5$;

Condição inicial: $X_0 = 0$;

Expoente de Lyapunov: $\eta \simeq 0.467944$.

- *Mapa de Spence* [130]:

$$X_{n+1} = | \ln X_n | . \quad (7.10)$$

Condição inicial: $X_0 = 0.5$;
Expoente de Lyapunov: $\eta \rightarrow \infty$.

- *Mapa Sine-circle* [131];

$$X_{n+1} = X_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi X_n \quad (\text{Mod } 1) . \quad (7.11)$$

Valor do parâmetro: $\Omega = 0.5, K = 2$;
Condição inicial: $X_0 = 0.1$;
Expoente de Lyapunov: $\eta \simeq 0.353863$.

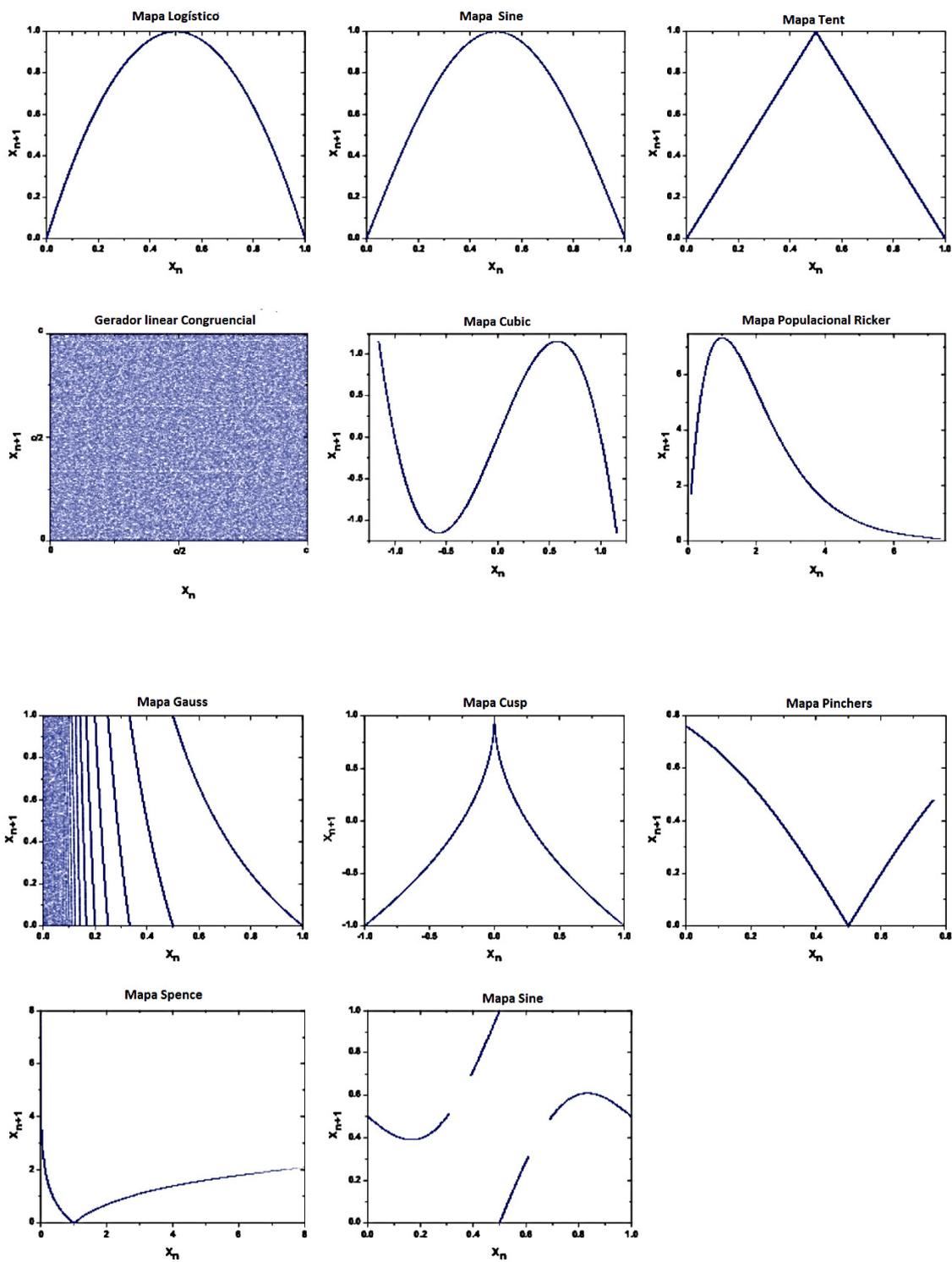


Figura 7.1: Representação gráfica dos mapas não inversíveis.

7.1.2 Mapas Dissipativos

Mapas Dissipativos são representados abaixo, seus parâmetros, condição inicial e expoente de Lyapunov são listados a seguir, veer em [83]. Mostramos mapas X_n versus Y_n para duas -(três-) dimensões.

- *Mapa de Hénon* [132]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = 1 - a X_n^2 + b Y_n \\ Y_{n+1} = X_n \end{cases} \quad (7.12)$$

Valor do parâmetro: $a = 1.4, b = 0.3$;

Condição inicial: $X_0 = 0, Y_0 = 0.9$;

Expoente de Lyapunov: $\eta_1 \simeq 0.41922, \eta_2 \simeq -1.62319$.

- *Mapa de Lozi* [133]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = 1 - a |X_n| + b Y_n \\ Y_{n+1} = X_n \end{cases} \quad (7.13)$$

Valor do parâmetro: $a = 1.7, b = 0.5$;

Condição inicial: $X_0 = -0.1, Y_0 = 0.1$;

Expoente de Lyapunov: $\eta_1 \simeq 0.47023, \eta_2 \simeq -1.16338$.

- *Mapa Logístico Delayed* [134]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = A X_n (1 - Y_n) \\ Y_{n+1} = X_n \end{cases} \quad (7.14)$$

Valor do parâmetro: $A = 2.27$; Condição inicial: $X_0 = 0.001, Y_0 = 0.001$; Expoente de Lyapunov: $\eta_1 \simeq 0.18312, \eta_2 \simeq -1.24199$.

- *Mapa de Tinkerbell* [135]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 + a X_n + b Y_n \\ Y_{n+1} = 2 X_n Y_n + c X_n + d Y_n \end{cases} \quad (7.15)$$

Valor do parâmetro: $a = 0.9, b = -0.6, c = 2, d = 0.5$; Condição inicial: $X_0 = 0, Y_0 = 0.5$;

Expoente de Lyapunov: $\eta_1 \simeq 0.18997, \eta_2 \simeq -0.52091$.

- *Mapa de Burgers* [136]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = a X_n^2 - Y_n^2 \\ Y_{n+1} = b Y_n + X_n Y_n \end{cases} \quad (7.16)$$

Valor do parâmetro: $a = 0.75, b = 1.75$;

Condição inicial: $X_0 = -0.1, Y_0 = 0.1$;

Expoente de Lyapunov: $\eta_1 \simeq 0.12076, \eta_2 \simeq -0.22136$.

- *Mapa de Cubic Holmes* [137]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = Y_n \\ Y_{n+1} = -b X_n + d Y_n - Y_n^3 \end{cases} \quad (7.17)$$

Valor do parâmetro: $b = 0.2, d = 2.77$; Condição inicial: $X_0 = 1.6, Y_0 = 0$; Expoente de Lyapunov: $\eta_1 \simeq 0.59458, \eta_2 \simeq -2.20402$.

- *Mapa Dissipative* [138]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} \pmod{2\pi} \\ Y_{n+1} = b Y_n + k \sin(X_n) \pmod{2\pi} \end{cases} \quad (7.18)$$

Valor do parâmetro: $b = 0.1, k = 8.8$;

Condição inicial: $X_0 = 0.1, Y_0 = 0.1$;

Expoente de Lyapunov: $\eta_1 \simeq 1.46995, \eta_2 \simeq -3.77254$.

- *Mapa de Ikeda* [139]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = \gamma + \mu (X_n \cos \phi - Y_n \sin \phi) \\ Y_{n+1} = \mu (X_n \sin \phi + Y_n \cos \phi) \end{cases}, \quad (7.19)$$

where $\phi = \beta - \alpha / (1 + X_n^2 + Y_n^2)$.

Valor do parâmetro: $\alpha = 6, \beta = 0.4, \gamma = 1, \mu = 0.9$;

Condição inicial: $X_0 = 0, Y_0 = 0$;

Expoente de Lyapunov: $\eta_1 \simeq 0.50760, \eta_2 \simeq -0.71832$.

- *Sinai map* [140]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + Y_n + \delta \cos 2\pi Y_n \pmod{1} \\ Y_{n+1} = X_n + 2 Y_n \pmod{1} \end{cases} \quad (7.20)$$

Valor do parâmetro: $\delta = 0.1$;

Condição inicial: $X_0 = 0.5, Y_0 = 0.5$;

Expoente de Lyapunov: $\eta_1 \simeq 0.95946, \eta_2 \simeq -1.07714$.

- *Mapa Predator* [141]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n \exp[r (1 - X_n/K) - \alpha Y_n] \quad (\text{Prey}) \\ Y_{n+1} = X_n [1 - \exp(-\alpha Y_n)] \quad (\text{Predator}) \end{cases} \quad (7.21)$$

Valor do parâmetro: $r = 3, K = 1, \alpha = 5$;

Condição inicial: $X_0 = 0.5, Y_0 = 0.5$;

Expoente de Lyapunov: $\eta_1 \simeq 0.19664$, $\eta_2 \simeq 0.03276$.

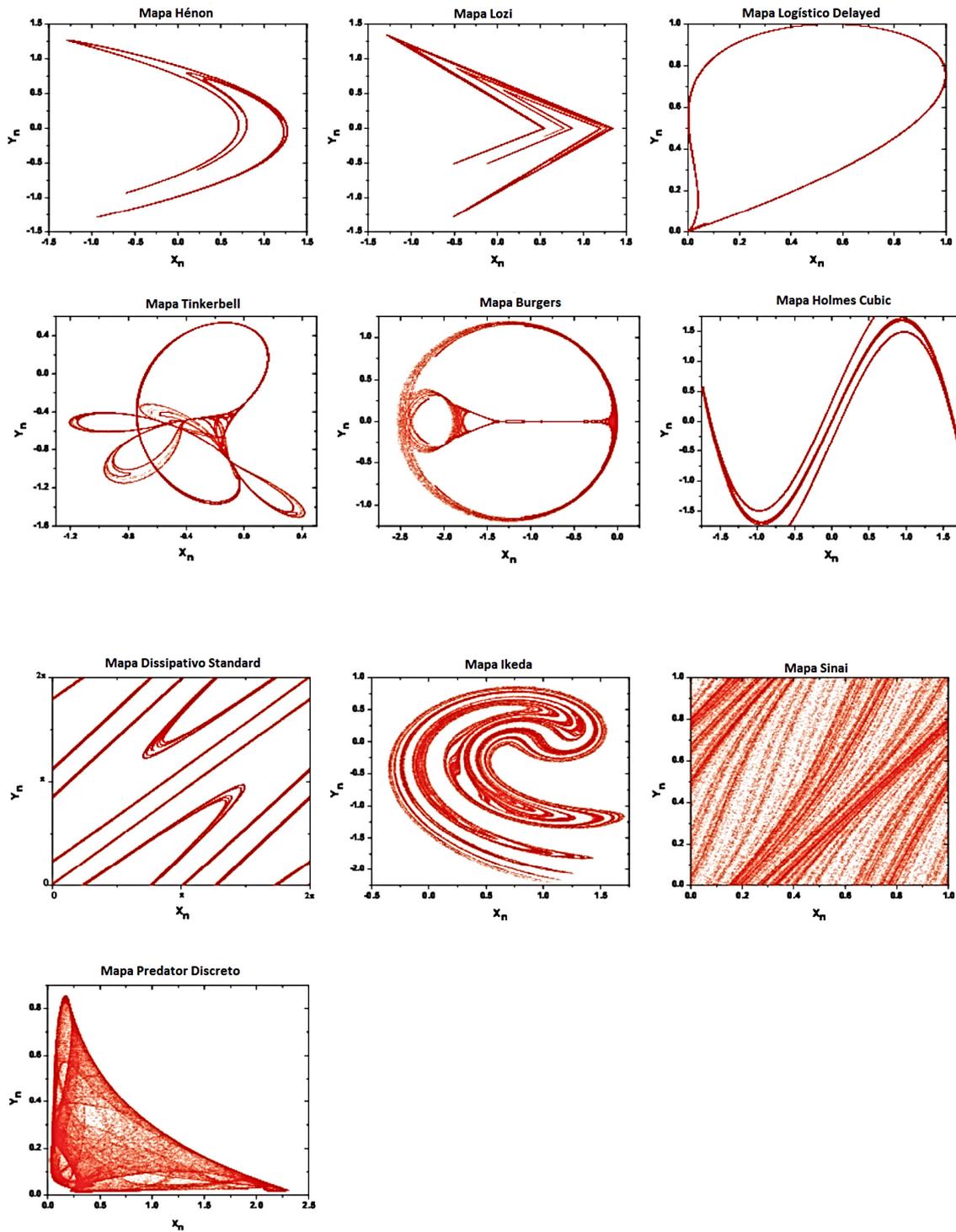


Figura 7.2: Representação gráfica dos mapas dissipativos.

7.1.3 Mapas Conservativos

Mapas conservativos são representados abaixo, seus parâmetros, condição inicial e expoente de Lyapunov são listados a seguir, veer em [83]. Mostramos mapas X_n versus Y_n para duas -(três-) dimensões.

- *Mapa de Chirikov* [142]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} & (\text{Mod } 2\pi) \\ Y_{n+1} = Y_n + k \sin X_n & (\text{Mod } 2\pi) \end{cases} \quad (7.22)$$

Valor do parâmetro: $k = 1$;

Condição inicial: $X_0 = 0, Y_0 = 6$;

Expoente de Lyapunov: $\eta_{1,2} \simeq \pm 0.10497$.

- *Mapa de Hénon* [143]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n \cos \alpha - (Y_n - X_n^2) \sin \alpha \\ Y_{n+1} = X_n \sin \alpha + (Y_n - X_n^2) \cos \alpha \end{cases} \quad (7.23)$$

Valor do parâmetro: $\cos \alpha = 0.24$;

Condição inicial: $X_0 = 0.6, Y_0 = 0.13$;

Expoente de Lyapunov: $\eta_{1,2} \simeq \pm 0.00643$.

- *Mapa de Arnold* [144]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + Y_n & (\text{Mod } 1) \\ Y_{n+1} = X_n + k Y_n & (\text{Mod } 1) \end{cases} \quad (7.24)$$

Valor do parâmetro: $k = 2$;

Condição inicial: $X_0 = 0, Y_0 = 1/\sqrt{2}$;

Expoente de Lyapunov: $\eta_{1,2} = \pm \ln[\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})] = \pm 0.96242365\dots$

- *Mapa de Gingerbreadman* [145]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = 1 + |X_n| - Y_n \\ Y_{n+1} = X_n \end{cases} \quad (7.25)$$

Condição inicial: $X_0 = 0.5, Y_0 = 3.7$;

Expoente de Lyapunov: $\eta_{1,2} \simeq \pm 0.07339$.

- *Mapa web Chaotic*: [146]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n \cos \alpha - (Y_n + k \sin X_n) \sin \alpha \\ Y_{n+1} = X_n \sin \alpha + (Y_n + k \sin X_n) \cos \alpha \end{cases} \quad (7.26)$$

Valor do parâmetro: $\alpha = \pi/2, k = 1$;
 Condição inicial: $X_0 = 0, Y_0 = 3$;
 Expoente de Lyapunov: $\eta_{1,2} \simeq \pm 0.04847$.

- *Mapa de Lorenz três-dimensões* [147]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n Y_n - Z_n \\ Y_{n+1} = X_n \\ Z_{n+1} = Y_n \end{cases} \quad (7.27)$$

Condição inicial: $X_0 = 0.5, Y_0 = 0.5, Z_0 = -1$;
 Expoente de Lyapunov: $\eta_{1,2,3} \simeq 0.07456, 0, -0.07456$.

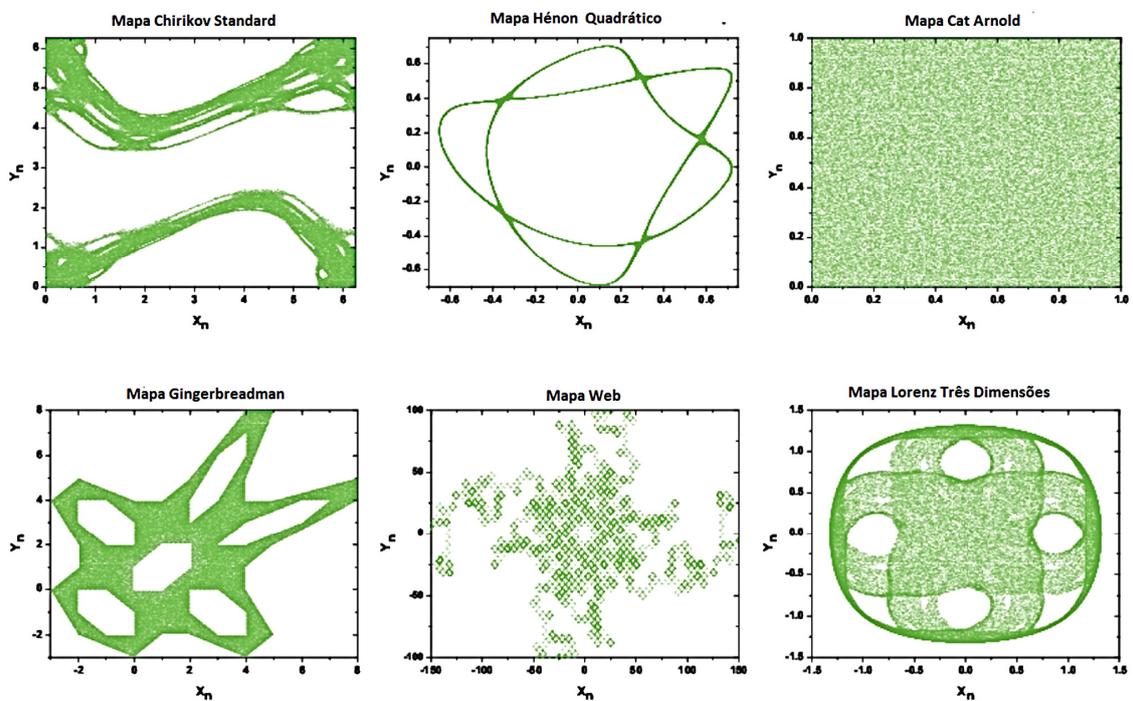


Figura 7.3: Representação gráfica dos mapas conservativos.

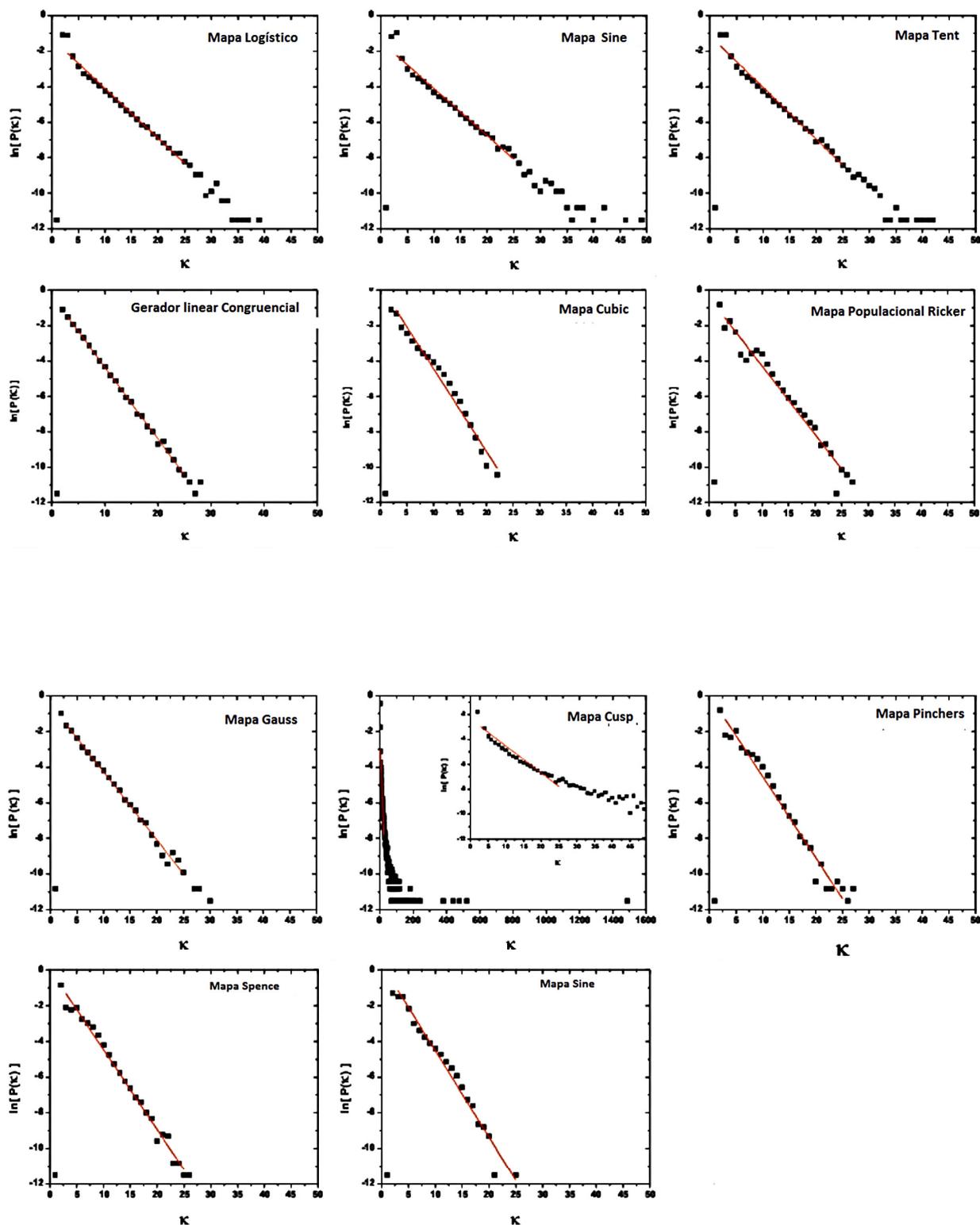
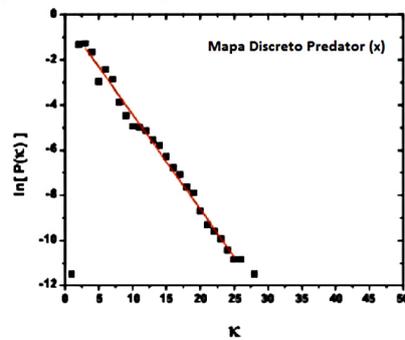
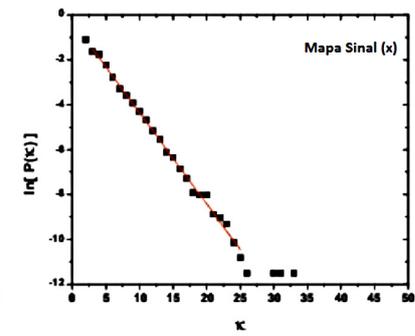
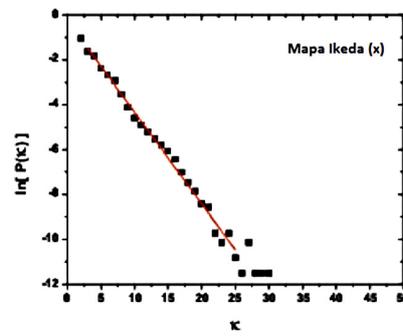
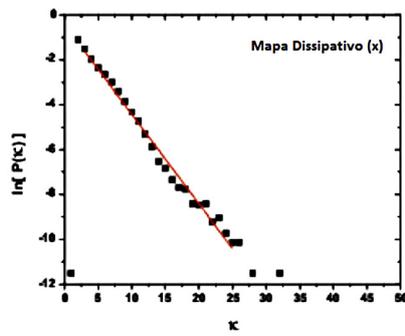
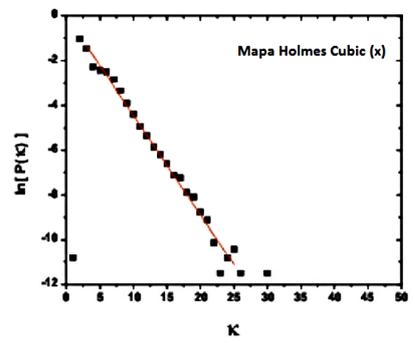
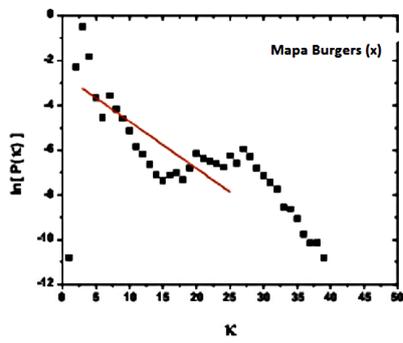
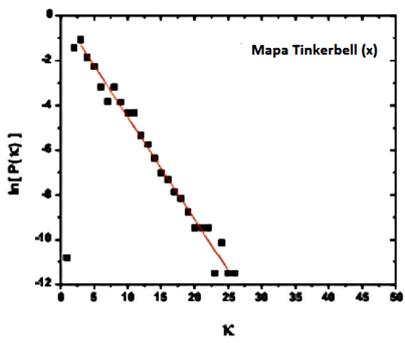
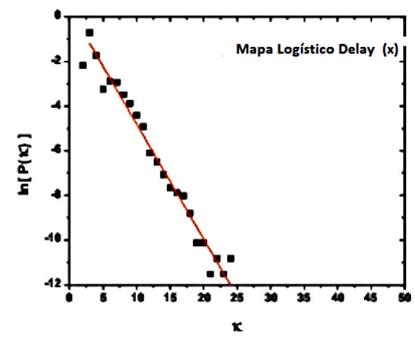
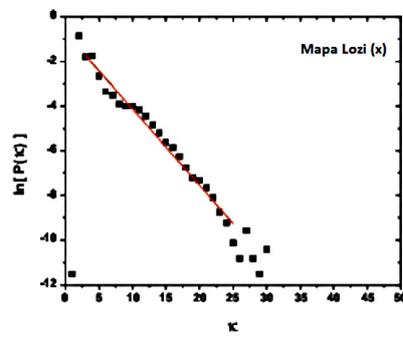
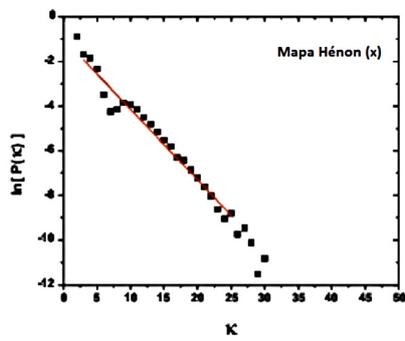


Figura 7.4: Valor do λ para todos os mapas não invertíveis. Em todos os casos, as séries temporais consideradas tem tamanho $N = 10^5$ e a região escalar linear definida é $3 \leq \kappa \leq 5$ ou $3 \leq \kappa \leq \kappa_{min}$ se $\kappa_{min} < 25$.

7.2 Resultados do λ e Teoria da Informação para todos os sistemas

Nessa seção, segue o valor λ e a representação gráfica para todos os mapas caóticos e processos estocásticos. Segue também os resultados dos valores da teoria da informação, curtose e assimetria.



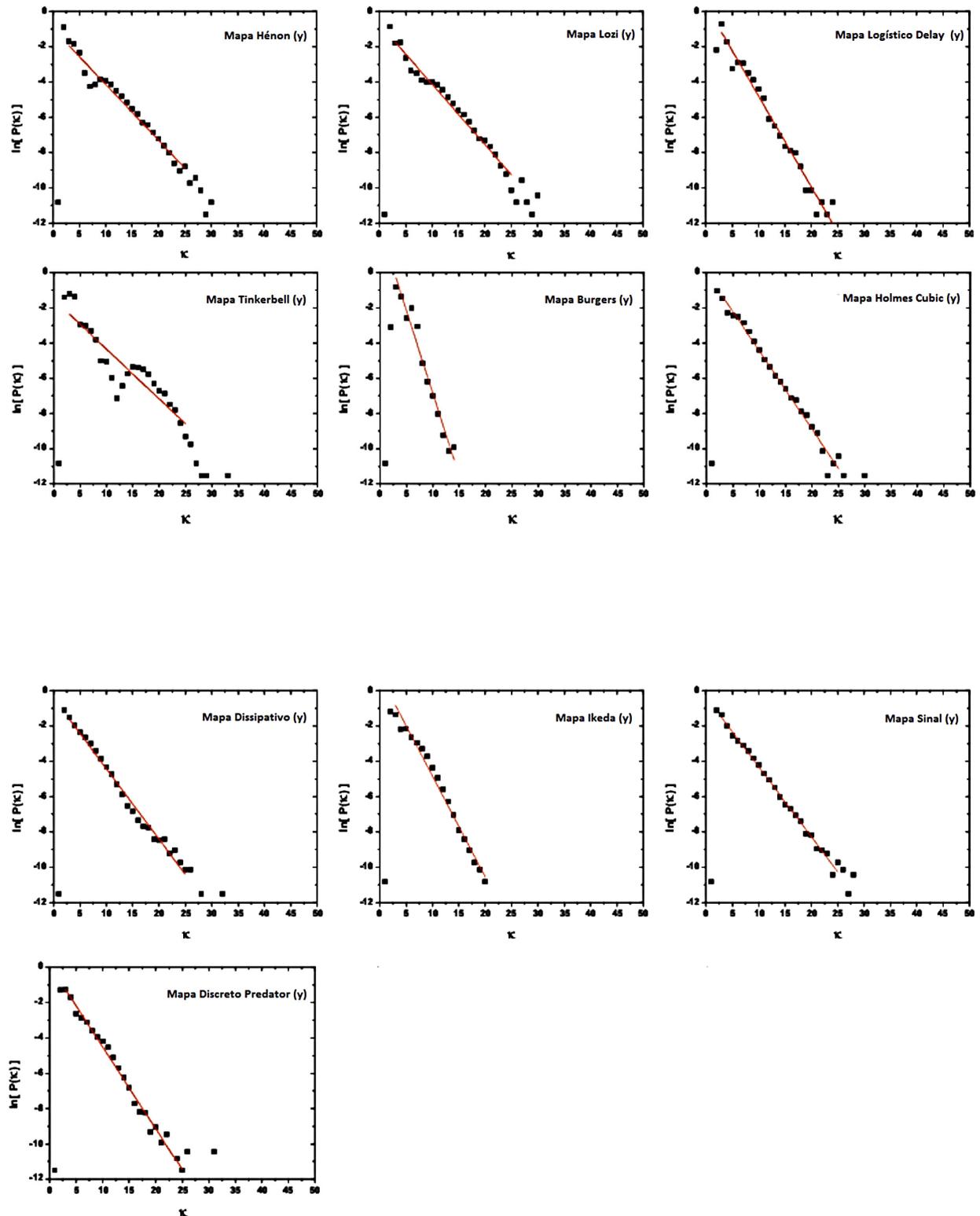
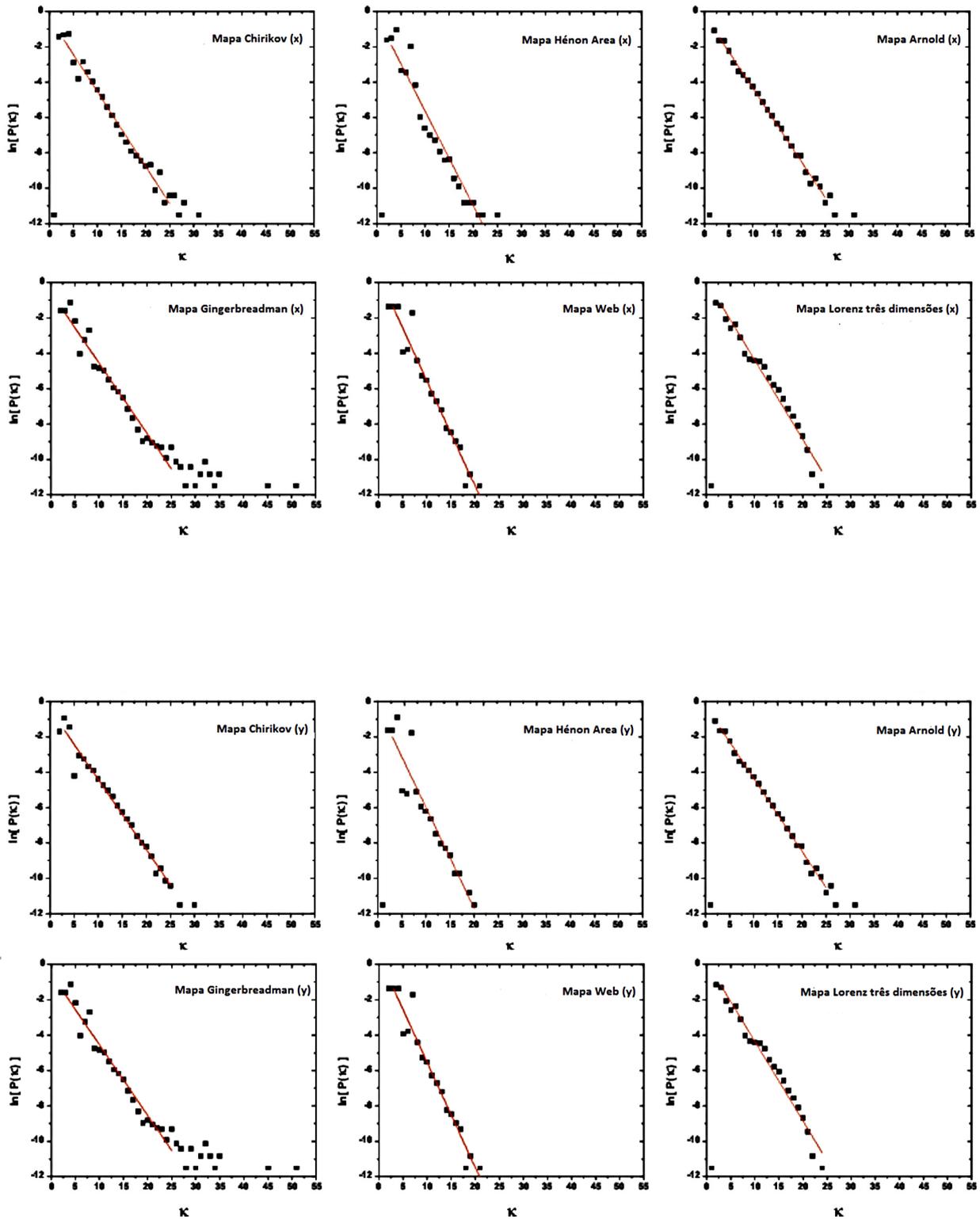


Figura 7.5: Valor do λ para todos os mapas dissipativos. Em todos os casos, as series temporais consideradas tem tamanho $N = 10^5$ e a região escalar linear definida é $3 \leq \kappa \leq 25$ ou $3 \leq \kappa \leq \kappa_{min}$ se $\kappa_{min} < 25$.



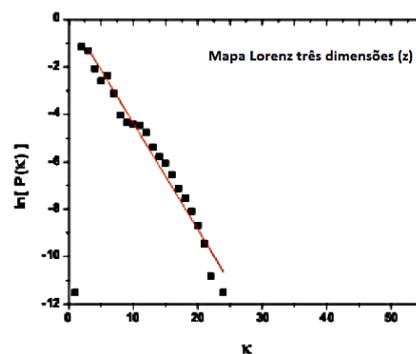


Figura 7.6: Valor do λ para todos os mapas conservativos. Em todos os casos, as séries temporais consideradas tem tamanho $N = 10^5$ e a região escalar linear definida é $3 \leq k \leq 25$ ou $3 \leq k \leq k_{min}$ se $k_{min} < 25$.

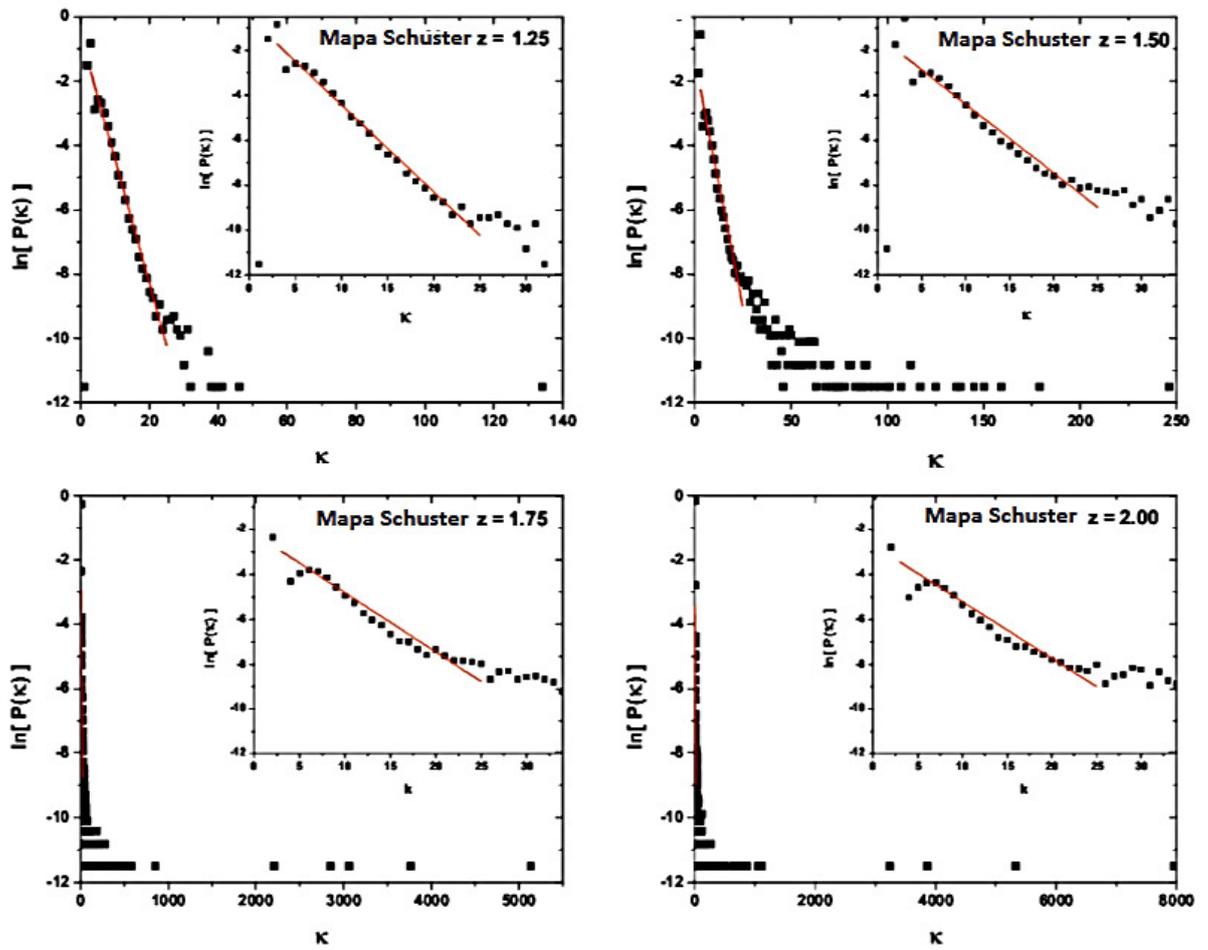


Figura 7.7: Valor do λ para todos os mapas schuster. Em todos os casos, as series temporais consideradas tem tamanho $N = 10^5$ e a região escalar linear definida é $3 \leq \kappa \leq 25$ ou $3 \leq \kappa \leq \kappa_{min}$ se $\kappa_{min} < 25$.

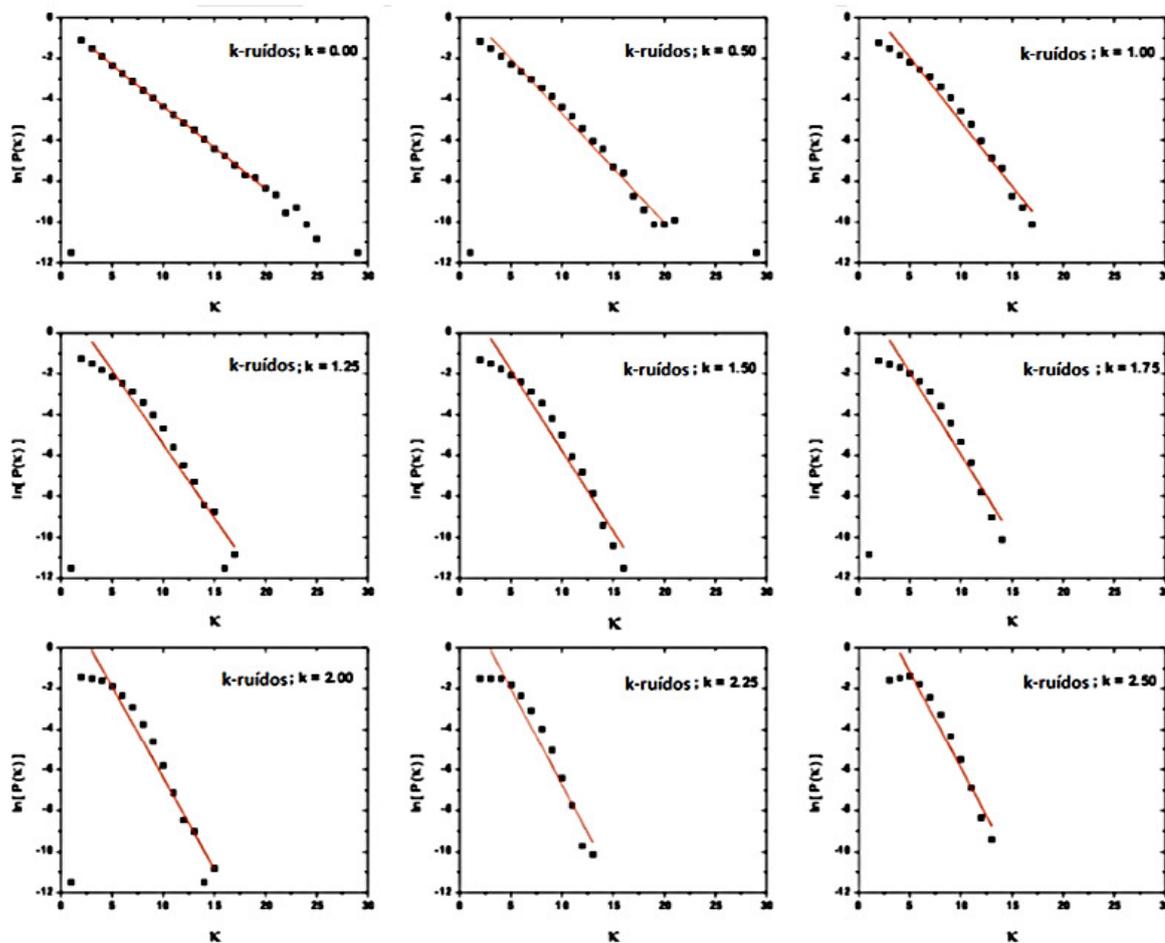


Figura 7.8: Valor do λ para todos os k-ruidos. Em todos os casos, as series temporais consideradas tem tamanho $N = 10^5$ e a região escalar linear definida é $3 \leq \kappa \leq 20$ ou $3 \leq \kappa \leq \kappa_{min}$ se $\kappa_{min} < 20$.

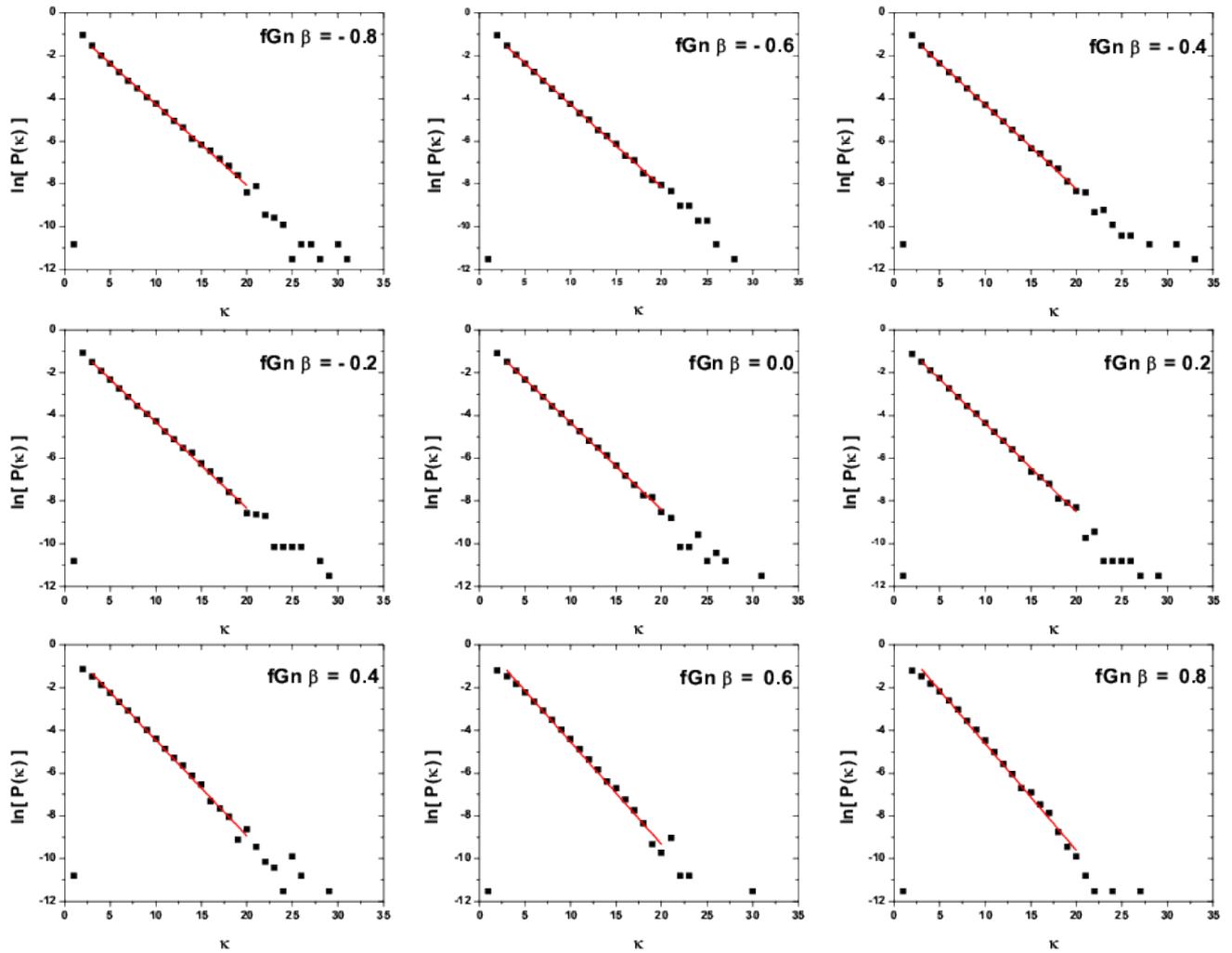


Figura 7.9: Valor do λ para todos os ruídos fGn. Em todos os casos, as séries temporais consideradas tem tamanho $N = 10^5$ e a região escalar linear definida é $3 \leq \kappa \leq 20$ ou $3 \leq \kappa \leq \kappa_{min}$ se $\kappa_{min} < 20$.

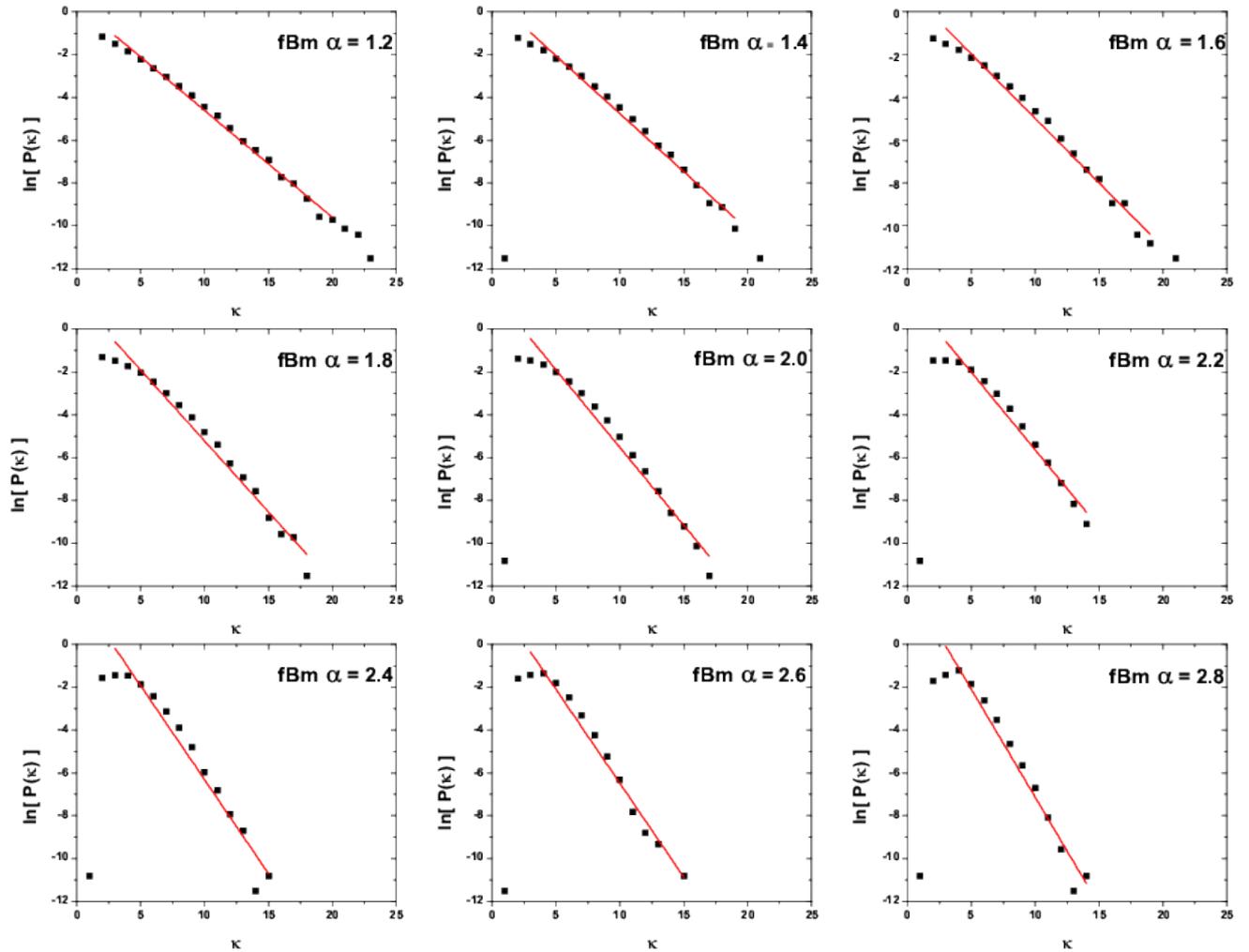


Figura 7.10: Valor do λ para todos os ruídos fBm. Em todos os casos, as series temporais consideradas tem tamanho $N = 10^5$ e a região escalar linear definida é $3 \leq \kappa \leq 20$ ou $3 \leq \kappa \leq \kappa_{min}$ se $\kappa_{min} < 20$.

7.3 Plano Causal Shannon-Fisher

Nessa seção, segue os resultados do cálculo de todos os quantificadores em função do índice do expoente de Hurst (H) do fBm e do fGn referentes a distribuição do grau.

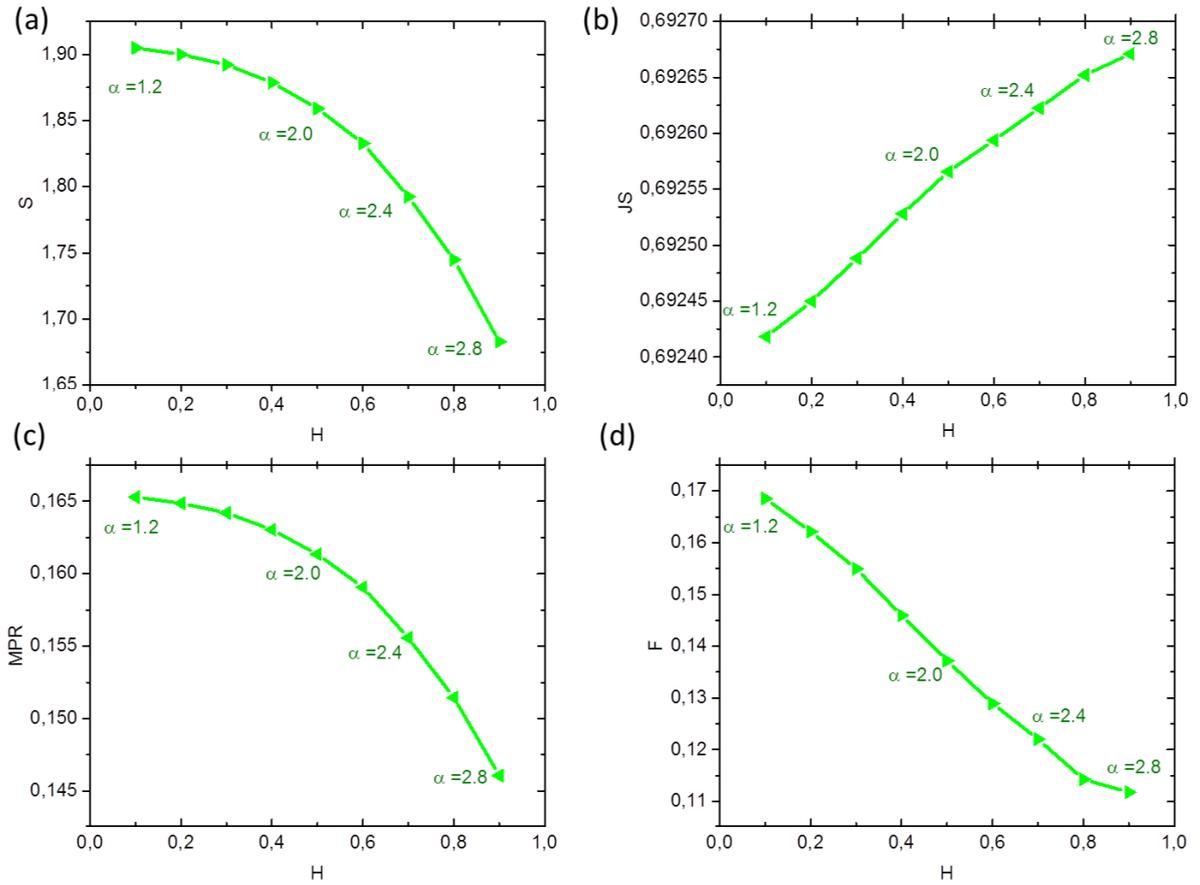


Figura 7.11: Valores da (a) entropia de Shannon (S), (b) Jensen- Shannon (JS), (c) MPR e (d) Fisher \mathcal{F} em função do índice do expoente de Hurst (H) do fBm ,respectivamente, referentes a PDF do grau. Para o tamanho de série $N = 10^5$ em todos os casos.

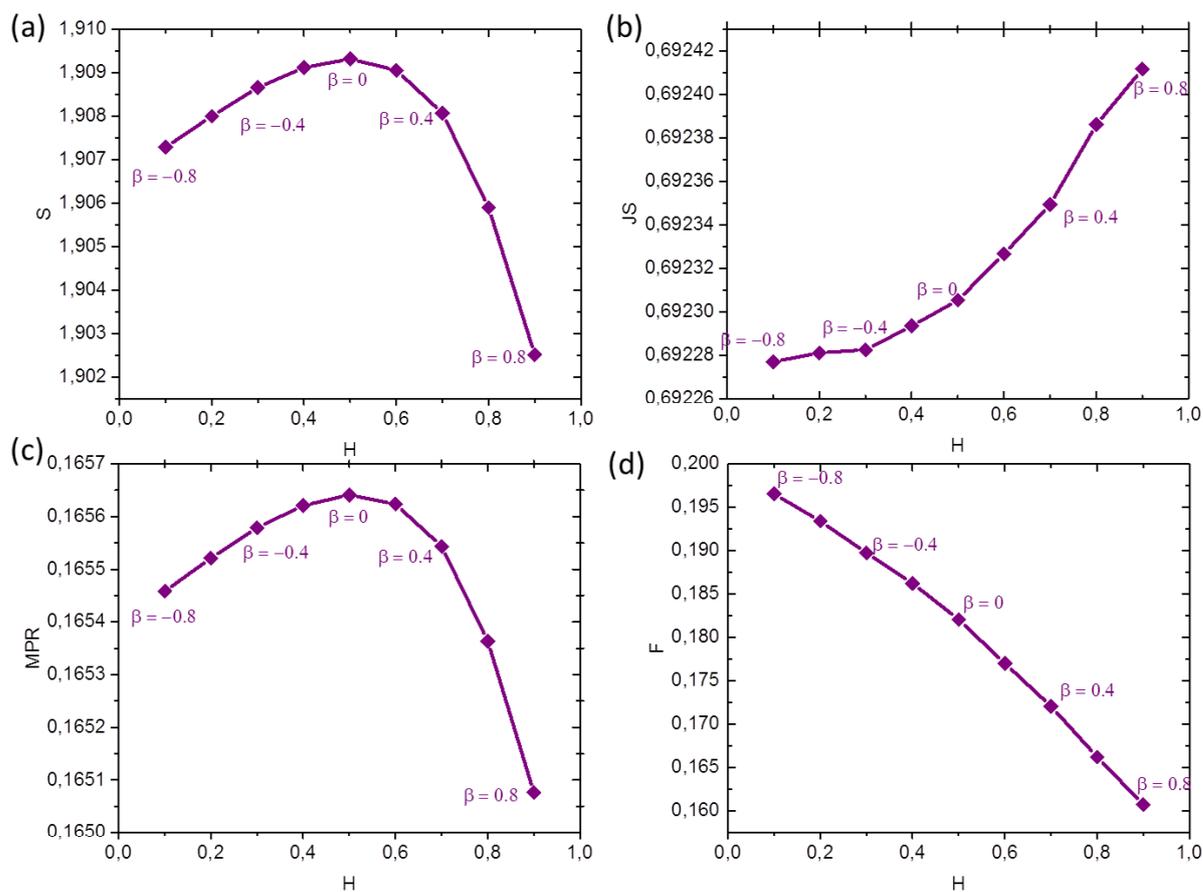


Figura 7.12: Valores da (a) entropia de Shannon (S), (b) Jensen- Shannon (JS), (c) MPR e (d) Fisher \mathcal{F} em função do índice do expoente de Hurst (H) do fGn ,respectivamente, referentes a PDF do grau. Para o tamanho de série $N = 10^5$ em todos os casos.

7.4 Métodos de Aproximação do Expoente de Hurst

Nessa seção, segue a relação entre o valor λ e H para os fBm utilizando o HVG, o cálculo foi realizado com intervalos de confiança de 95 por cento, supondo que o parâmetro segue um modelo de Gaussiano, uma estrutura linear para a regressão e erros de média zero. Nas figuras 7.13 e 7.13, foram plotadas as funções lineares que relaciona o valor médio de λ em função de H , para os tamanhos das séries, $N = 10^4$, $N = 2 \cdot 10^4$, $N = 5 \cdot 10^4$, $N = 10^5$, $N = 5 \cdot 10^5$, $N = 10^6$ e $N = 2 \cdot 10^6$, respectivamente.

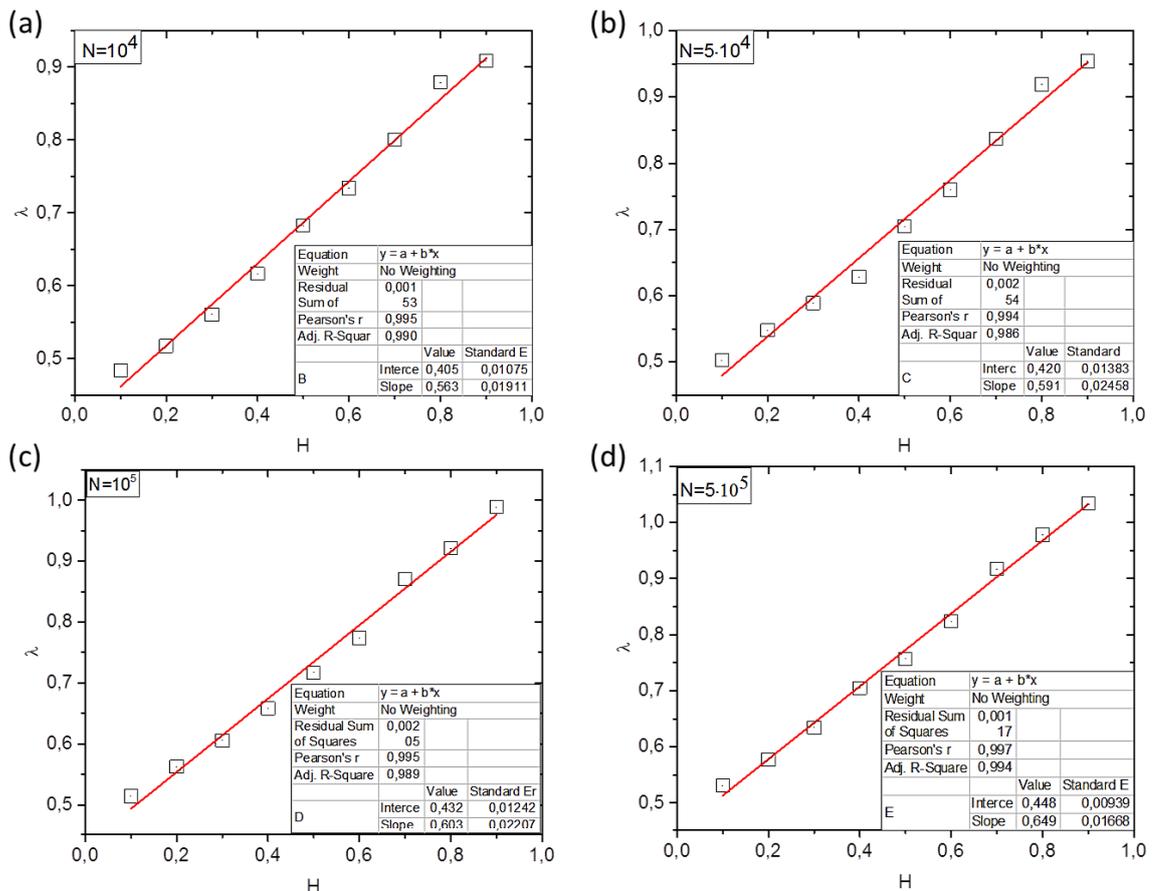


Figura 7.13: Equação que relaciona λ em função do índice H , considerando os tamanhos de séries de tamanho em (a) $N = 10^4$, em (b) $N = 5 \cdot 10^4$, em (c) $N = 10^5$, em (d) $N = 5 \cdot 10^5$.

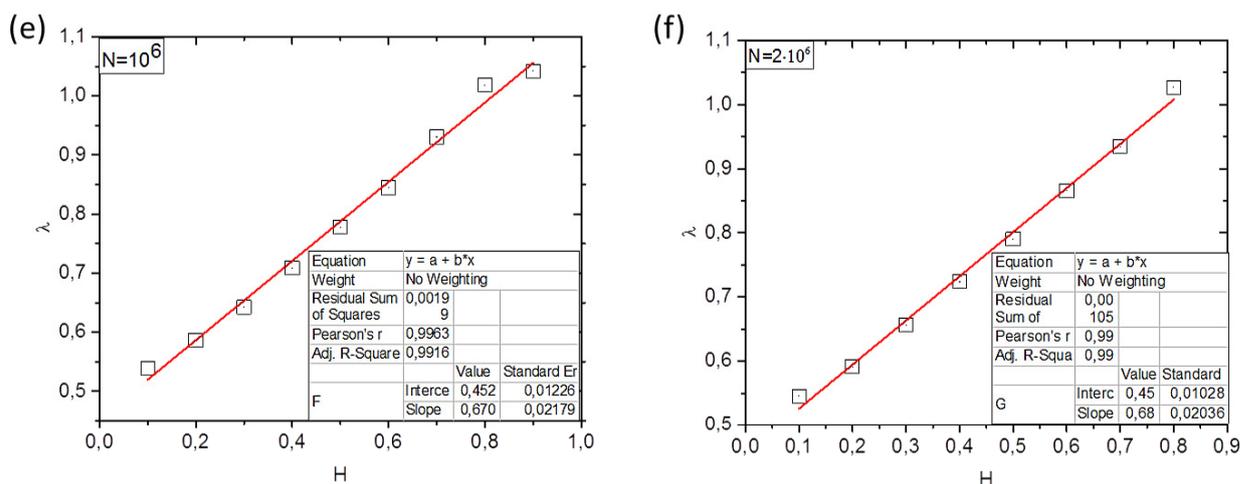


Figura 7.14: Equação que relaciona λ em função do índice H , considerando os tamanhos de séries de tamanho em em (e) $N = 10^6$, em (f) $N = 2 \cdot 10^6$.

7.5 Avaliação do Plano Causal Shannon-Fisher por três Distribuições

Nessa seção, segues os gráficos das três distribuições (Grau, Distância e Peso) no plano Shannon Fisher para o fBm para séries de tamanho $N = 10^4$ e $N = 10^6$.

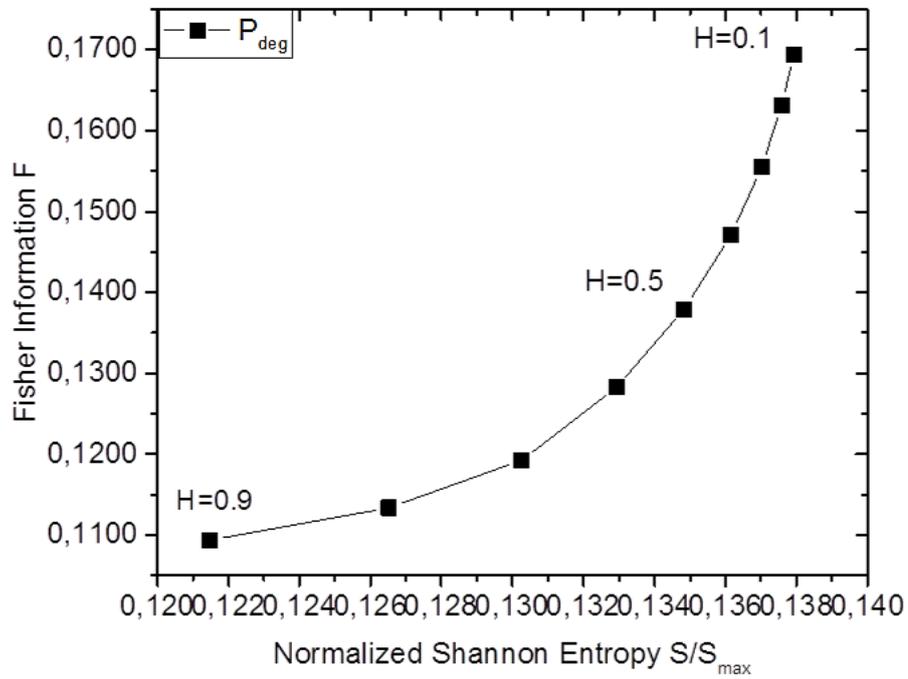


Figura 7.15: Representação do plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, para fBm, em função de H , pela função de distribuição do grau. Série de tamanho $N = 10^6$ foi considerada.

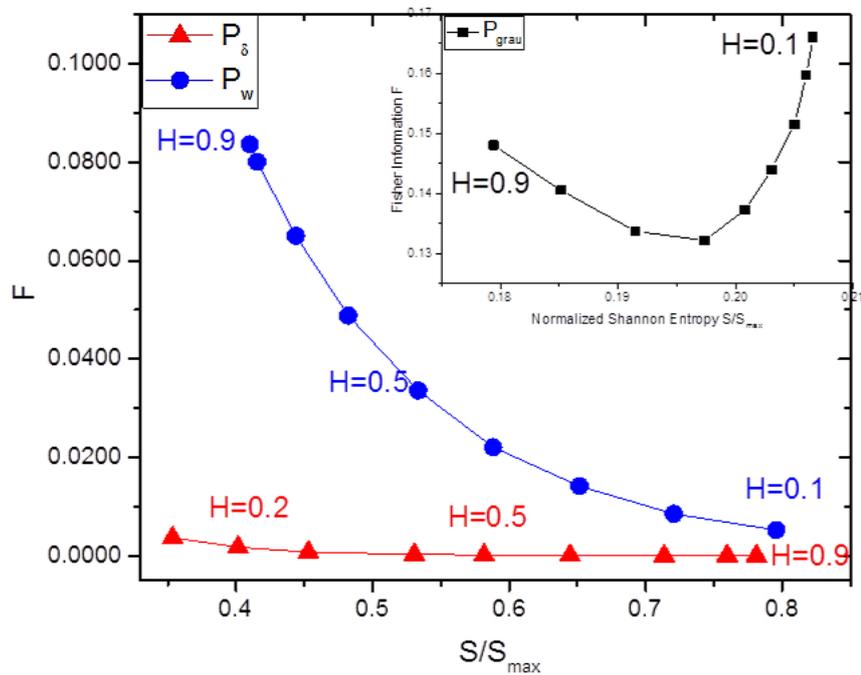


Figura 7.16: Representação do plano Shannon-Fisher, $S \times \mathcal{F}$, para fBm, em função de H , pelas três distribuições. Série de tamanho $N = 10^4$ foi considerada.

7.6 Aplicação do HVG Juntamente com Teoria da Informação no Estudo da Dinâmica do Clima

Nessa seção, segue o plano Shannon-Fisher para as distribuições (Grau e Distância) para os dados proxy ENSO.

7.7 Algoritmos utilizados

A seguir, serão apresentados os algoritmos usados para as simulações descritas, principalmente nas seções 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4. No algoritmo 5, a função HVG, no qual é feito o mapeamento da série temporal em uma rede complexa, também, é extraída a PDF do grau do nó da rede mapeada. Em seguida, nos algoritmos 1 e 2, a função Fisher e a função Shannon, respectivamente, são calculados a Informação de Fisher e a Entropia de Shannon da PDF obtida no algoritmo 3 e a entropia de Tsallis no algoritmo 4. Já as versões mais eficientes do algoritmo de visibilidade horizontal, o HVG-SHORT no algoritmo 6 e 7, para o cálculo do peso de cada aresta o algoritmo 8 e a distribuição de probabilidade dos pesos algoritmo 9.

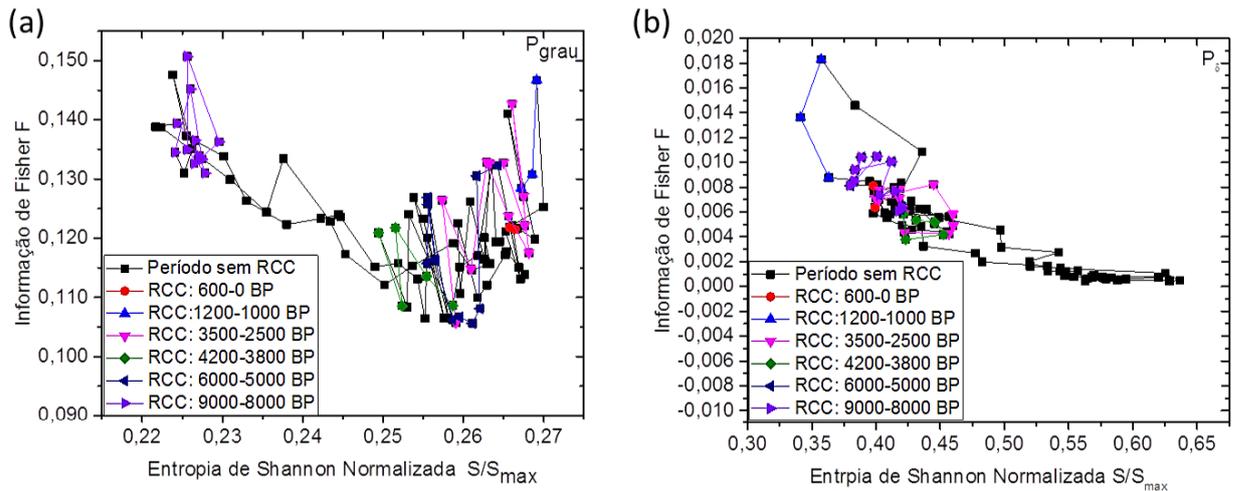


Figura 7.17: Plano Shannon-Fisher dos registros proxy ENSO pelas distribuições: (a) do grau. (b) da distância.

Algorithm 1 Algoritmo cálculo da Informação de Fisher

```

1: função FISHER(PDF)
2:   para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
3:      $F = F + \sqrt{PDF[i]} - \sqrt{PDF[i-1]}$  return  $0,5F$ 
4:   fim para
5: fim função

```

Algorithm 2 Algoritmo cálculo da Entropia de Shannon

```

função SHANNON(PDF)
2:   para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
3:      $S = S - PDF[i] \log PDF[i]$  return  $S$ 
4:   fim para
5: fim função

```

Algorithm 3 Algoritmo cálculo da Entropia de Tsallis

```

função TSALLIS(PDF,q)
  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
3:    $SOMA = SOMA + PDF[i]^q$ 
  fim para
   $TS = (1 - SOMA)/(q - 1)$  return  $TS$ 
6: fim função

```

Algorithm 4 Algoritmo cálculo da Entropia de Jensen Shannon

```

função JENSEN-SHANNON(PDF)
  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
     $SUni = SUNi - (1/n) \log 1/n$ 
4:    $AVG[i] = ((1/n) + PDF[i])/2$ 
  fim para
   $JS = Shannon(AVG)$ 
   $S = Shannon(PDF)$ 
8:    $JS = JS - 0.5 * SUNi - 0.5S$ 
  return  $JS$ 
fim função

```

Algorithm 5 Algoritmo do Grafo de Visibilidade Horizontal

```

função HVG(X)
  para  $i \leftarrow 1$  até  $n-1$  faça      ▷  $n$  é o tamanho da série. Primeiro contabiliza os dados
  adjacentes
     $M[i][i+1] = 1$                                 ▷ Preenche a matriz de adjacência
     $PDF[grau[i]] = PDF[grau[i]] - 1$ 
5:    $PDF[grau[i+1]] = PDF[grau[i+1]] - 1$ 
     $grau[i] = grau[i] + 1$ 
     $grau[i+1] = grau[i+1] + 1$ 
     $PDF[grau[i]] = PDF[grau[i]] + 1$                 ▷ Cálculo da PDF
     $PDF[grau[i+1]] = PDF[grau[i+1]] + 1$           ▷ Cálculo da PDF
10:  fim para
     $flagA = 0$                                        ▷ Análisa a visibilidade de  $i$  até um valor  $j$ 
    para  $j \leftarrow i+2$  até  $j < n$  e  $flagA == 0$  faça
       $flag = 0$ 
       $p = j - 1$ 
15:   enquanto  $flag == 0$  e  $p > i$  faça
     se  $X[p] \leq X[j]$  então
        $flag = 1$ 
     fim se
     se  $X[p] \leq X[i]$  então
20:        $flag = 1$ 
        $flagA = 1$ 
     fim se
    fim enquanto
     $p = p - 1$ 
25:   se  $flag == 0$  então
      $M[i][j] = 1$                                 ▷ Preenche a matriz de adjacência
      $PDF[grau[i]] = PDF[grau[i]] - 1$ 
      $PDF[grau[j]] = PDF[grau[j]] - 1$ 
      $grau[i] = grau[i] + 1$ 
30:    $grau[j] = grau[j] + 1$ 
      $PDF[grau[i]] = PDF[grau[i]] + 1$                 ▷ Cálculo da PDF
      $PDF[grau[j]] = PDF[grau[j]] + 1$                 ▷ Cálculo da PDF
    fim se
  fim para return  $PDF$ 
35: fim função

```

Algorithm 6 Algoritmo do Grafo de Visibilidade Horizontal-Short-1 Parte

função HVG-SHORT(X) \triangleright Com série de tamanho N e janela n . Primeiro é analisado os n primeiros termos da série

para $i \leftarrow 0$ até $n-1$ **faça** \triangleright Primeiro contabiliza os dados adjacentes

$M[i][i+1] = 1$ \triangleright Preenche a matriz de adjacência

$PDF[grau[i]] = PDF[grau[i]] - 1$

$PDF[grau[i+1]] = PDF[grau[i+1]] - 1$

6: $grau[i] = grau[i] + 1$

$grau[i+1] = grau[i+1] + 1$

$PDF[grau[i]] = PDF[grau[i]] + 1$ \triangleright Cálculo da PDF

$PDF[grau[i+1]] = PDF[grau[i+1]] + 1$ \triangleright Cálculo da PDF

fim para

$flagA = 0$ \triangleright Análisa a visibilidade de i até um valor j

12: **para** $j \leftarrow i+2$ até $j < n$ e $flagA == 0$ **faça**

$flag = 0$

$p = j - 1$

enquanto $flag == 0$ e $p > i$ **faça**

se $X[p] \geq X[j]$ **então**

$flag = 1$

18: **fim se**

se $X[p] \geq X[i]$ **então**

$flag = 1$

$flagA = 1$

fim se

fim enquanto

24: $p = p - 1$

se $flag == 0$ **então**

$M[i][j] = 1$ \triangleright Preenche a matriz de adjacência

$PDF[grau[i]] = PDF[grau[i]] - 1$

$PDF[grau[j]] = PDF[grau[j]] - 1$

$grau[i] = grau[i] + 1$

30: $grau[j] = grau[j] + 1$

$PDF[grau[i]] = PDF[grau[i]] + 1$ \triangleright Cálculo da PDF

$PDF[grau[j]] = PDF[grau[j]] + 1$ \triangleright Cálculo da PDF

fim se

fim para \triangleright finalizada as n primeiros termos da janela

fim função

Algorithm 7 Algoritmo do Grafo de Visibilidade Horizontal-Short-2 Parte

```

função HVG-SHORT(X)                                ▷ Analise os termos a partir da posição n
  para f ← n até N faça                          ▷ Contabiliza o restante dos nós adjacentes
    M[f][f + 1] = 1                                  ▷ Preenche a matriz de adjacência
    PDF[grau[f]] = PDF[grau[f]] - 1
    PDF[grau[f + 1]] = PDF[grau[f + 1]] - 1
    grau[f] = grau[f] + 1
  7:   grau[f + 1] = grau[f + 1] + 1
      PDF[grau[f]] = PDF[grau[f]] + 1                ▷ Cálculo da PDF
      PDF[grau[f + 1]] = PDF[grau[f + 1]] + 1      ▷ Cálculo da PDF
  fim para                                            ▷ A partir do termo de posição n analisa de trás pra frente
  se X[f - 1] < X[f] então
    flagAA = 0
    flagBB = 0
  14:   max = -100000.0
      para ii ← 0 até ii < n - 2 e flagAA == 0 faça
        se X[f - 1 - ii] > max então                ▷ Calcula o valor máximo no intervalo
          pre-determinado
            max = S[f - 1 - ii]
          fim se
          se X[f - 2 - ii] > X[f - 1 - ii] e X[f - 2 - ii] > max então
            flagBB = 1                                  ▷ o nó f é conectado ao nó f-2-ii
          21:   fim se
          se X[f - 2 - ii] > X[f] então
            flagAA = 1                                  ▷ critério de parada, o nó f não pode ser conectado a mais
          nenhum nó atrás
          fim se
          se flagBB == 1 e f) <= (t - 1) então        ▷ o nó f é conectado ao nó f-2-ii
            flagBB = 0;
            M[f][f - 2 - ii] = 1                    ▷ Preenche a matriz de adjacência
            PDF[degree[f - 2 - ii]] = PDF[degree[f - 2 - ii]] - 1
            28:   PDF[degree[f]] = PDF[degree[f]] - 1                ▷ cálculo da pdf
                degree[f - 2 - ii] ++
                degree[f] ++
                PDF[degree[f - 2 - ii]] = PDF[degree[f - 2 - ii]] + 1
                PDF[degree[f]] = PDF[degree[f]] + 1
          fim se
          fim para
  35:   fim sereturn PDF
fim função

```

Algorithm 8 Algoritmo do Grafo de Visibilidade Horizontal Peso

```

função HVG-PESO(X)
  para  $i \leftarrow 1$  até  $n-1$  faça      ▷  $n$  é o tamanho da série. Primeiro contabiliza os dados
  adjacentes
     $M[i][i+1] = 1$                                 ▷ Preenche a matriz de adjacência
     $PESO[f] = X[i+1] - X[i]$ 
     $MD[L] = i; L++$ ;  $MD[L] = i+1; L++$ ;      ▷ Preenche o vetor de posição do grau
     $PDF[grau[i]] = PDF[grau[i]] - 1$ 
     $PDF[grau[i+1]] = PDF[grau[i+1]] - 1$ 
8:    $grau[i] = grau[i] + 1$ 
     $grau[i+1] = grau[i+1] + 1$ 
     $PDF[grau[i]] = PDF[grau[i]] + 1$                                 ▷ Cálculo da PDF
     $PDF[grau[i+1]] = PDF[grau[i+1]] + 1$                                 ▷ Cálculo da PDF
  fim para
   $flagA = 0$                                         ▷ Análisa a visibilidade de  $i$  até um valor  $j$ 
  para  $j \leftarrow i+2$  até  $j < n$  e  $flagA == 0$  faça
     $flag = 0$ 
16:    $p = j - 1$ 
    enquanto  $flag == 0$  e  $p > i$  faça
      se  $X[p] <= X[j]$  então
         $flag = 1$ 
      fim se
      se  $X[p] <= X[i]$  então
         $flag = 1$ 
         $flagA = 1$ 
24:   fim se
    fim enquanto
     $p = p - 1$ 
    se  $flag == 0$  então
       $M[i][j] = 1$                                 ▷ Preenche a matriz de adjacência
       $w[f] = X[j] - X[i]$ 
       $MD[L] = j; L++$ ;  $MD[L] = i; L++$ ;      ▷ Preenche o vetor de posição do grau
       $PDF[grau[i]] = PDF[grau[i]] - 1$ 
32:    $PDF[grau[j]] = PDF[grau[j]] - 1$ 
       $grau[i] = grau[i] + 1$ 
       $grau[j] = grau[j] + 1$ 
       $PDF[grau[i]] = PDF[grau[i]] + 1$                                 ▷ Cálculo da PDF
       $PDF[grau[j]] = PDF[grau[j]] + 1$                                 ▷ Cálculo da PDF
    fim se
  fim para return  $PDF, L, MD, w$ 
fim função

```

Algorithm 9 Algoritmo que retorna a PDF do peso do HVG-Peso

```

função PDF-PESO(X)
   $MAX(PESO)$                                 ▷ Calculo do peso máximo do conjunto de séries
   $MIN(PESO)$                                 ▷ Calculo do peso mínimo do conjunto de séries
  divide o intervalo  $w_{min} + t, w_{max} + t$  em um número de BINS especificado.
  para  $i \leftarrow 0$  até  $L/2$  faça                ▷ considera os (L/2) pesos
    Contabiliza o número de pesos em cada BITS em GPESO[i]
  fim para
   $TAMANHODAPDFdoPESO = BITS - 1$ ;
9:  para  $i \leftarrow 0$  até  $BITS-1$  faça                ▷ considera os (L/2) pesos
  PDFPESO[i]=(GPESO[i]/double ((L/2)));
  fim parareturn PDFPESO
fim função

```

Referências Bibliográficas

- [1] Martinerie J, Adam C, Quyen MLV, Baulac MLV, Clemenceau C, Renault B, Varela FJ. (1998). Epileptic seizures can be anticipated by non-linear analysis. *Nature Medicine* 4, 1173 –1176
- [2] Ocak H. (2009). Automatic detection of epileptic seizures in EEG using discrete wavelet transform and approximate entropy. *Physica A* 36: 2027– 2036.
- [3] Tsonis A (2009). Dynamical changes in the ENSO system in the last 11,000 years. *Climate Dynamics* 33: 1069 – 1074.
- [4] Saco PM, Carpi LC, Figliola A, Serrano E, Rosso OA (2010). Entropy Analysis of the Dynamics of EL Niño Southern Oscillation during the Holocene. *Physica A* 389: 5022 – 5027 .
- [5] Donner RV, Donges JF (2012). Visibility Graph Analysis of Geophysical Time Series: Potentials and Possible Pitfalls. *Acta Geophysica*. 60: 589 – 623.
- [6] Liu Y, Gopikrishnan P, Cizeau P, Meyer M, Peng CK, Stanley HE. (1999). Statistical properties of the volatility of price fluctuations, *Phys. Rev. E* 60, 1390–1400.
- [7] Hasan R, Salim M.(2015). Multifractal analysis of Asian markets during 2007–2008 financial crisis. *Physica A* 419, 746 – 761.
- [8] Zhang B, Wang J, Fang W (2015). Volatility behavior of visibility graph EMD financial time series from Ising interacting system. *Physica A* 432. 301 – 314.
- [9] Atman APF, Gonçalves BA (2012). Influence of the Investor's Behavior on the Complexity of the Stock Market. *Brazilian Journal of Physics* , v. 42, p. 137-145.
- [10] Grasberger P, Procaccia I (1983). Characterization of Strange Attractors. *Phys. Rev. Lett.* 50: 346 – 349.
- [11] Osborne AR, Provenzale A (1989). Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra. *Physica D* 35: 357 – 381.
- [12] Cencini M, Falcioni M, Olbrich E, Kantz H, Vulpiani A (2000). Chaos or noise: Difficulties of a distinction. *Phys. Rev. E* 62: 427 – 437.
- [13] Kolmogorov AN. (1958). A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (NS)* 119: 861–864

- [14] Pincus SM. (1991). Approximate entropy as a measure of system complexity. Proc. Natl. Acad. Sci. USA Vol. 88, 2297 – 2301.
- [15] Gao JB, Hu J, Tung W, Cao YH (2006). Distinguishing chaos from noise by scale-dependent Lyapunov exponent. Phys. Rev. E 74: 1 – 9
- [16] Elsner JB (1992). Predicting time series using a neural network as a method of distinguishing chaos from noise. J. Phys. A: Math. Gen. 25: 843 – 852.
- [17] Qinglei L, Zuntao F, Naiming Y. (2015) Beyond Benford's Law: Distinguishing Noise from Chaos. PLoS ONE 10(6): e0129161.
- [18] Rosso OA, Larrondo HA, Martín MT, Plastino A, Fuentes MA (2007). Distinguishing noise from chaos. Phys. Rev. Lett. 99: 154102.
- [19] Bandt C, Pompe B (2002). Permutation entropy: a natural complexity measure for time series. Phys. Rev. Lett. 88: 174102
- [20] Olivares F, Plastino A, Rosso OA (2012). Ambiguities in Bandt Pompe's methodology for local entropic quantifiers. Physica A 391: 2518 – 2526.
- [21] Vignat C, Bercher JF (2003) Analysis of signals in the Fisher-Shannon information plane. Phys. Lett. A. 32: 27 – 33.
- [22] Rosso OA, Carpi LC, Saco PM, Gómez Ravetti M, Plastino A, Larrondo HA (2012). Causality and the entropy-complexity plane: robustness and missing ordinal patterns. Physica A 391: 42 – 55.
- [23] Rosso OA, Carpi LC, Saco PM, Gómez Ravetti M, Larrondo HA, Plastino A (2012). The Amigo paradigm of forbidden/missing patterns: a detailed analysis. Eur. Phys. J. B 85: 419 – 431.
- [24] Rosso OA, Olivares F, Zunino L, De Micco L, Aquino ALL, Plastino A, Larrondo HA (2013). Characterization of chaotic maps using the permutation Bandt-Pompe probability distribution. Eur. Phys. J. B 86: 116 – 129.
- [25] Olivares F, Plastino A, Rosso OA (2012). Contrasting chaos with noise via local versus global information quantifiers. Phys. Lett A 376: 1577 – 1583.
- [26] Rosso OA, Olivares F, Plastino A. (2015). Noise versus chaos in a causal Fisher-Shannon plane. Papers in Physics, v. 7, p. 070006.
- [27] Zhang J, Luo X, Small M (2006). Detecting chaos in pseudoperiodic time series without embedding. Phys. Rev. E 73.
- [28] Xu X, Zhang J, Small M (2008). Superfamily phenomena and motifs of networks induced from time series. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 105: 19601 – 19605.

- [29] Gao ZK, Jin ND (2009). Complex network from time series based on phase space reconstruction. *Chaos* 19 :033137.
- [30] Donner RV, Zou Y, Donges JF, Marwan N, Kurths J (2010). A novel paradigm for nonlinear time series analysis. *New Journal of Physics*, 12: 033025.
- [31] Donner RV, Small M, Donges JF, Marwan N, Zou Y, Xiang R Kurths J (2010). Recurrence-based time series analysis by means of complex network methods. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 21: 1019–1046.
- [32] Lacasa L, Toral R (2010). Description of stochastic and chaotic series using visibility graphs. *Phys. Rev. E*. 82: 036120.
- [33] Campanharo ASLO, Simer M, Malmgren RD, Ramos FM, Nunes Amaral LA (2011). Duality between Time Series and Networks. *PLoS ONE* 6: e23378
- [34] Luque B, Lacasa L, Ballesteros F, Luque J (2009). Horizontal visibility graphs: exact results for random time series. *Phys. Rev. E* 80: 046103.
- [35] Lacasa L, Luque B, Ballesteros F, Luque J, Nuno JC (2008). From time series to complex networks: The visibility graph. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 105: 4972 – 4975.
- [36] Watts DJ, Strogatz, SH (1998). Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature*, v. 393: 440–442.
- [37] Boccaro, N (2004). *Modeling Complex Systems*. Chicago, USA: Springer. (Graduate Texts in Contemporary Physics).
- [38] Albert R, Barabassi AL (2002). Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*. 74: 48 – 94.
- [39] Ravetti MG, Carpi LC, Gonçalves BA, FRERY AC, Rosso OA. (2014). Distinguishing Noise from Chaos: Objective versus Subjective Criteria Using Horizontal Visibility Graph. *Plos One*, v. 9, p. e108004.
- [40] Gonçalves BA, Carpi LC, Rosso AO, Ravetti MG. (2016). Time Series Characterization via Horizontal Visibility Graph and Information Theory. Submetido na revista *Physica A*.
- [41] Mandelbrot BB (1977). *FRactals—Form, Chance and Dimension*. Freeman, San Francisco.
- [42] Sugihara G, May RM (1983). Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series. *Nature* 344: 734 – 741.
- [43] Kaplan DT, Glass, L (1992). Direct test for determinism in a time series. *Phys. Rev. Lett.* 68: 427 – 430.
- [44] Kaplan DT, Glass L (1993). Coarse-grained embeddings of time series: random walks, Gaussian random processes, and deterministic chaos. *Physica D* 64: 431 – 454.

- [45] Kolmogorov A.(1956). On the Shannon theory of information transmission in the case of continuous signals IRE Trans. Inf. Theory 1.
- [46] Aurell E, Boffetta G, Crisanti A, Paladin G, Vulpiani A. (1996). Predictability in the large: an extension of the concept of Lyapunov exponente. Phys. Rev. Lett. 77, 1262;
- [47] Amigó JS, Zambrano S, Sanjuán MAF (2007). True and false forbidden patterns in deterministic and random dynamics. Europhys. Lett. 79: 50001.
- [48] Wold H (1938). A Study in the Analysis of Stationary Time Series. Upsala, Sweden: Almqvist and Wiksell.
- [49] Zhang J, Small M (2006). Complex Network from Pseudoperiodic Time Series: Topology versus Dynamics. Phys. Rev. Letts 96: 238701.
- .
- [50] Chuang L, Wei-X Z, Wei-Kang Y (2010). Statistical properties of visibility graph of energy dissipation rates in three-dimensional fully developed turbulence. Physica A. 389: 2675 – 2681.
- [51] Ahmadlou M, Adeli H, Adeli A,(2010). New diagnostic EEG markers of the Alzheimer's disease using visibility graph. J Neural Transm 117.
- [52] Telesca L, Lovallo M (2012). Analysis of seismic sequences by using the method of visibility graph. EPL (Europhysics Letters) 97.
- [53] Ahmadloua M, Adelic H, Adelid A (2012). Improved visibility graph fractality with application for the diagnosis of Autism Spectrum Disorder. Physica A. 391: 4720 – 4726.
- [54] Lacasa L(2014). On the degree distribution of horizontal visibility graphs associated with Markov processes and dynamical systems: diagrammatic and variational approaches. Non-linearity 27: 2063 – 2093
- [55] Yue Y, Jianbo W, Huijie Y (2009). Visibility graph approach to exchange rate series Physica A 388: 4431 – 4437.
- [56] Zhuang E, Small M, Feng G (2014). Time series analysis of the developed financial markets integration using visibility graphs. Physica A 410: 483 – 495.
- [57] Newman MEJ. (2003). The Structure and Function of Complex Networks. Society for Industrial and Applied Mathematics. Vol. 45, No. 2, pp. 167–256.
- [58] Newman MEJ (2003). Mixing patterns in networks. Phys. Rev. E 67 – 026126.
- [59] Newman MEJ (2002). Assortative mixing in networks. Phys. Rev. Lett. 89 – 208701
- [60] Shannon CE (1948). A mathematical theory of communication, Bell Syst. Technol. J. 27: 379 – 423.

- [61] Lin J (1991). IEEE Transactions on Information theory. 37: 145 – 151.
- [62] Jaynes ET (1957). Information Theory and Statistical Mechanics. The Physical Review 106: 620 – 630.
- [63] Weaver W (1949). Recent Contributions to The Mathematical Theory of Communication. Mathematical Theory of Communication.
- [64] Fisher RA (1922). On the mathematical foundations of theoretical statistics. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A 222: 309 – 368.
- [65] Rissanen J (1996). Fisher information and Stochastic Complexity. (IEEE) Transactions on Information Theory, Volume 42, 40 – 47.
- [66] Frieden BR (1998). Physics from Fisher Information. Cambridge University Press.
- [67] Frieden BR (1998). Physics from Fisher Information: A Unification. Cambridge. USA: Cambridge University Press.
- [68] Frieden BR (2004). *Science from Fisher information: A Unification*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [69] Fuglede B, Topsøe F (2004). Jensen-Shannon Divergence and Hilbert space embedding. University of Copenhagen, Department of Mathematics.
- [70] Sanchez MP, nez RY, Dehesa J(2009). Discrete densities and Fisher information, in: Proceedings of the 14th International Conference on Difference Equations and Applications, Bahcesehir University Press: 291 – 298.
- [71] Martín MT, Plastino A, Rosso OA. (2003). Statistical complexity and disequilibrium. Physics Letters A 311, 126–132.
- [72] Lamberti PW, Martín MT, Plastino A, Rosso AO. (2004). Intensive entropic non-triviality measure. Physica A 334, 119–131.
- [73] Martín MT, Plastino A, Rosso OA (2006) Generalized statistical complexity measures: Geometrical and analytical properties. Physica A. 369: 439 – 462.
- [74] Ferri GL, Pennini F, Plastino A (2009). LMC-complexity and various chaotic regimes. Physics Letters A, volume 373: 2210 – 2214.
- [75] Rosso OA, Mairal ML (2002). Characterization of time dynamical evolution of electroencephalographic epileptic records. Physica A 312 , 469–504.
- [76] Powell GE, Percival IC (1979). A spectral entropy method for distinguishing regular and irregular motion of Hamiltonian systems. J. Phys. A: Math. Gen. 12
- [77] Daw CS, Finney CE, Tracy ER (2003). A review of symbolic analysis of experimental dat. Rev. Sci. Instrum 74. 915 – 930.

- [78] Micco L, González CM, Larrondo HA, Martín MT, Plastino A, Rosso OA (2008) Randomizing nonlinear maps via symbolic dynamics. *Physica A*.387: 3373 — 3383.
- [79] Micco L, González CM, Larrondo HA, Plastino A, Rosso OA (2009). Quantifiers for randomness of chaotic pseudo-random number generators. *Philos Trans A Math Phys Eng Sci*. 81 – 96.
- [80] Micco L, González CM, Larrondo HA, Plastino A, Rosso OA (2008). Randomizing nonlinear maps via symbolic dynamics. *Physica A*.387: 3373 – 3383.
- [81] Rosso OA, Masoller C (2009) Detecting and quantifying stochastic and coherence resonances via information-theory complexity measurements. *Phys. Rev. E*. 79: 37 – 43.
- [82] Schieber TA, Carpi L, Frery AC, Rosso OA, Pardalos, PM, Ravetti MG(2016). Information theory perspective on network robustness. *Phys. Lett. A* 380: 359 – 364.
- .
- [83] Sprott JC (2012) Chaos and Time series analysis. *Complex Systems* 21: 193 – 200.
- [84] Schuster HG (1988) *Deterministic Chaos*, 2nd ed. Weinheim: VHC,
- [85] Beck C, Schlogl F (1995) *Thermodynamics of chaotic systems*. New York, USA: Cambridge University Press.
- [86] Strogatz SH (1994). *Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Reading, MA: Addison-Wesley-Longman.
- [87] Olt E (1993). *Chaos dynamical in systems*. Cambridge
- [88] May R (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* 261: 45 – 67.
- [89] Rosenstein MT, Collins JJ, De Luca CJ (1994). Reconstruction expansion as geometry based framework for choosing proper delay times. *Physica D* 73: 82–98.
- [90] Strogatz SH (2000). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Cambridge, MA, USA: Perseus Books Group.
- [91] Lorenz EN (1963). Deterministic nonperiodic flows. *J. Atmos. Sci.* 20: 130 – 141.
- [92] Rossler OE (1976). An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A* 57: 397 – 398.
- [93] Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP (1992). *Numerical Recipes in Fortran. The art of Scientific Computing*, Second Edition. New York, USA: Cambridge University Press.

- [94] Larrondo HA (2012). *Matab program: noisefk.m* (<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/35381>).
- [95] Falconer, K. Fractal geometry: mathematical foundations and applications.
- [96] Matsumoto M, Nishimura T (1998). Mersenne twister: a 623-dimensionally uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation* 8: 3 – 30.
- [97] Zunino L, Pérez DG, Martín MT, Plastino A, Garavaglia M, Rosso OA (2007). Characterization of Gaussian self-similar stochastic processes using wavelet-based informational tools. *Phys. Rev. E* 75: (2007) 021115.
- [98] Abry P, Sellan F (1996). The wavelet-based synthesis for the fractional Brownian motion proposed by F. Sellan and Y. Meyer: Remarks and fast implementation. *Applied and Computational Harmonic Analysis* 3: 377 – 383.
- [99] Bardet JM, Lang G, Oppenheim G, Philippe A, Stoev S, Taqqu MS (2003). Generators of long-range dependence processes: a survey. *Theory and applications of long-range dependence*. Birkhauser, 579 – 623.
- [100] Lacasa L, Luque B, Luque J, Nuno J. C (2009). The visibility graph: A new method for estimating the Hurst exponent of fractional Brownian motion. *EPL* 86: 30001.
- [101] Campanharo ASLO, Ramos FM(2016).Hurst exponent estimation of self-affine time series using quantile graphs. *Physica A* 444: 43 – 48.
- [102] Brys G, Hubert M, Struyf A (2009). Robust measures of tail weight. *Computational Statistics and Data Analysis* 50: 733–759.
- [103] Xie WJ, Zhou W X (2011).Horizontal visibility graphs transformed from fractional Brownian motions: Topological properties versus Hurst index. *Physica A* 390: 3592 – 3601.
- [104] Buldyrev SV, Goldberger AL, Havlin S, Mantegna RN, Malsa SE, Peng CK, Simons M, Stanley HE.(1995). Long-range correlation properties of coding and noncoding DNA sequences: GenBank analysis, *Phys. Rev. E* 51, 5084–5091, .
- [105] Bunde A, Havlin S, Kantelhardt JW, Penzel T, Pete JH, Voigt K. (2000). Correlated and uncorrelated regions in heart-rate fluctuations during sleep, *Phys. Rev. Lett.* 85, 3736–3739.
- [106] Nascimento RS, Araujo LHG, Moraes RB, Barbosa CT, Guedes RC, Nogueira RA, Stošić T. (2010). Analysis of signal fluctuations of cortical spreading depression: Preliminary findings, *Physica A* 389, 1869–1873.
- [107] A. Király, I.M. Jánosi, Detrended fluctuation analysis of daily temperature records: geographic dependence over Australia, *Meteorol. Atmos. Phys.* 88 , 119–128, (2005).

- [108] Mantegna RN, Stanley HE.(2000). An Introduction to Econophysics, Cambridge University Press, Cambridge.
- [109] PENG C, BULDYREV SH, SIMONS M, STANLEY HE, GOLDBERGER AL(1994). Mosaic Organization of DNA Nucleotides. *Phys. Rev. E* 49: 1685 – 1689.
- [110] Newmann MEJ.(2005).Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. *Contemp. Phys.* 46.
- [111] Carpi LC, Rosso OA, Saco PM, Ravetti MG (2011). Analyzing complex networks evolution through information theory quantifiers. *Physics Letters A* 375: 801 – 804.
- [112] Carpi LC, Saco PM, Rosso OA,Ravetti MG (2012). Structural evolution of the tropical pacifico climate network. *Eur. Phys. J. B* 85: 1 – 7.
- [113] Braga AC, Alves LGA, Costa LS, Ribeiro AA, Jesus MMA, Tateishi AA, Ribeiro HV (2016). Characterization of river flow fuctuations via horizontal visibility graphs. *Physica A* 444: 1003 – 1011.
- [114] Aragoneses A, Carpi LC, Tarasov N, Churkin DV, Torrent MC, Masoller C, Turitsyn SK (2016). Unveiling temporal correlations characteristic of a phase transition in the output intensity of laser. *Phys. Rev. Lett.* 116: 033902.
- [115] Armento BJ, Alva J, Nash G (1991). *A Message of Ancient Days*. Houghton Mifflin, Boston.
- [116] Haug GH, Gunther D, Peterson LC, Sigman DM, Hughen KA, Aeschlimann B (2003). Climate and the Collapse of Maya Civilization. In: *Science* 299: 1731 – 1735.
- [117] Nogués DB, Rodriguez J, Hortal J, Batra P, Araújo MB (2008). Climate Change, Humans, and the Extinction of the Woolly Mammoth. *PLoS Biology* 6, e79.
- [118] Tsonis AA, Roebber PJ (2004). The architecture of the climate network. In: *Physica A* 333, pp. 497–504.
- [119] Tsonis AA, Swanson KL (2008). Topology and Predictability of El Nino and La Nina Networks. In: *Physical Review Letters* 100, p. 228502.
- [120] Denton GH, Karlén W (1973). Holocene climatic variations: Their pattern and possible cause. *Quaternary Research* 3: 155 – 205.
- [121] Moy CM, Seltzer GO, Rodbell DT, Anderson DM (2002). Variability of El Nino/Southern Oscillation activity at millennial time scales during the Holocene epoch. *Nature* 420: 162 – 165.
- [122] Moy CM, Seltzer GO, Rodbell DT, Anderson DM (2002). Laguna Pallcacocha Sediment Color Intensity Data. IGBP PAGES/Word Data Center for Paleoclimatology Data Contribution Series 2002-76.NOAA/NCDC Paleoclimatology Program, Boulder, CO. www.ngdc.noaa.gov/paleo/pubs/moy2002.

- [123] Mayewski PA, Rohling EE, Curt Stager J, Karlén W, Maasch KA, Meeker DL, Meyerson EA, Gasse F, Kreveld S, Holmgren K, Lee-Thorp J, Rosqvist G, Rack F, Staubwasser M, Schneider RR, Steig EJ (2004). Holocene climate variability. *Quaternary Research* 62: 243 – 255.
- [124] Rodbell DT, Seltzer GO, Anderson DM, Abbott MB, Enfield DB, Newman JH (1999). An 15,000-year record of el nino-driven alluviation in southwestern ecuador. *Science* 283: 516 – 520.
- [125] Knuth, DE (1997). *Sorting and searching 3: of The art of computer programming*, (3rd Edition). Reading, MA: Addison-Wesley-Longman.
- [126] Zeng W, Ding M, Li J (1985). Symbolic description of periodic windows in the antisymmetric cubic map. *Chinese Physics Letter* 2: 293 – 296.
- [127] Ricker W (1954). Stock and recruitment. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada* 11: 559 – 663..
- [128] Van Wyk MA, Steeb W (1997). *Chaos in electronics* Dordrecht, Belgium: Kluwer.
- [129] Potapov A, Ali MK (2000). Robust chaos in neural networks. *Phys. Lett. A* 277: 310 – 322.
- [130] Shaw R (1981). Strange attractors, chaotic behaviour, and information flow; *Zeitschrift fur Naturforschung A* 36: 80 – 112.
- [131] Arnold VI (1965). Small denominators, I: mappings of the circumference into itself. *American Mathematical Society Translation Series* 46: 213 – 284.
- [132] Hénon M (1976). *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, *Communication on Mathematical Physics* 50: 69 – 77.
- [133] Lozi, R (1978). Un attracteur étrange Du type attracteur de Hénon. *Journal de Physique* 39: 9 – 10.
- [134] Aronson DG, Chory MA, Hall GR, McGehee RP (1982). Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane: a computer-assisted study. *Communications in Mathematical Physics* 83: 304 – 354.
- [135] Nusse HE, Yorke JA (1994). *Dynamics: numerical explorations*. New York, USA: Springer.
- [136] Whitehead RR, Macdonald N (1984). A chaotic mapping that displays its own homoclinic structure. *Physica D* 13: 401 – 407.
- [137] Holmes P (1979). A nonlinear oscillator with a strange attractor. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* 292: 419 – 448.

- [138] Schmidt G, Wang BH (1985). Dissipative standard map. *Physical Review A* 32: 2994 – 2999.
- [139] Ikeda E (1979). Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system *Optics Communications* 30: 257 – 61.
- [140] Sinai Ya G (1972). Gibbs measures in ergodic theory. *Russian Mathematical Surveys* 27: 21 – 69.
- [141] Beddington JR, Free CA, Lawton JH (1975). Dynamic complexity in predator-prey models framed in difference equations. *Nature* 255: 58 – 60..
- [142] Chirikov BV (1979). A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports* 52: 273 – 379.
- [143] Hénon M (1969). Numerical study of quadratic area-preserving mappings. *Quarterly of Applied Mathematics* 27: 291 – 312.
- [144] Arnold VI, Avez A (1968). *Ergodic problems of classical mechanics*. New York, USA: Benjamin.
- [145] Devaney RL (1984) A piecewise linear model for the zones of instability of an area-preserving map. *Physica D* 10: 387 – 93.
- [146] Chernikov AA, Sagdeev RZ, Zaslavskii GM (1988) *Chaos: how regular can it be?* *Physics Today* 41: 27 – 35.
- [147] Lorenz EN (1993). *The essence of chaos* Seattle, USA: University of Washington Press.