

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 882

**FEIXES DE RAIOS COMPLEXOS PARA A ACELERAÇÃO DE ALGORITIMOS
MOM APLICADOS A PROBLEMAS DE ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO**

Alexandre Alves da Rocha

DATA DA DEFESA: 28/08/2015

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**FEIXES DE RAIOS COMPLEXOS PARA A ACELERAÇÃO DE
ALGORITIMOS MOM APLICADOS A PROBLEMAS DE
ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO**

Alexandre Alves da Rocha

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Cássio Gonçalves do Rego

Belo Horizonte - MG

Agosto de 2015

R672f

Rocha, Alexandre Alves da.

Feixes de raios complexos para a aceleração de algoritmos MoM aplicados a problemas de espalhamento eletromagnético [manuscrito] / Alexandre Alves da Rocha. – 2015.
xxiii, 89 f., enc.: il.

Orientador: Cássio Gonçalves do Rego.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 85-89.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Ondas eletromagnéticas - Espalhamento - Teses. 3. Método dos momentos (Estatística) - Teses. I. Rego, Cássio Gonçalves do. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621.3(043)

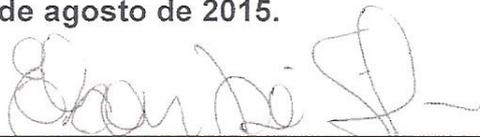
**"Feixes de Raios Complexos para a Aceleração de Algoritmos
MoM Aplicados a Problemas de Espalhamento
Eletromagnético"**

Alexandre Alves da Rocha

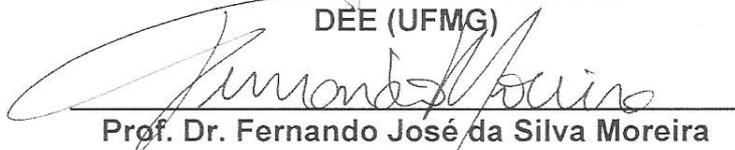
Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 28 de agosto de 2015.

Por:



Prof. Dr. Elson José da Silva
DEE (UFMG)



Prof. Dr. Fernando José da Silva Moreira
DELT (UFMG)



Prof. Dr. Cássio Gonçalves do Rego
DELT (UFMG) - Orientador

Ao meu bom Deus, por estar comigo em todos os momentos, sendo meu refúgio e fortaleza nos momentos mais difíceis. A Ele, minha eterna gratidão.

À minha família, em especial à memória de minha mãe, Maria das Vitorias. Sempre presente na minha vida, exemplo de caráter, determinação, cumplicidade, companheirismo, apoio e amor incondicional.

Agradecimentos

Meus agradecimentos a todos os que compartilharam o trilhar nesse caminho, contribuindo, direta e indiretamente, para que fosse realizado esta pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) e seus professores, pela minha formação científica.

Ao Professor Cássio Gonçalves do Rego, que possibilitou-me aprendizagens únicas, por meio da orientação, o grande incentivo e a confiança.

Ao Professor Fernando José da Silva Moreira, pelos ensinamentos, disponibilidade e contribuições indispensáveis.

Aos colegas do GAPTEM, pelos momentos de descontração e por compartilharem a construção do estudo.

Aos colegas do Niag/FACE/UFMG, pelo apoio e incentivo. Em particular, a Lígia Araújo, professora e amiga, obrigado pelos auxílios e ensinamentos.

Aos amigos que fizeram parte desses momentos sempre acreditando e apoiando.

À Joelma, por me incentivar a escolher esta direção.

À minha família, pelo apoio incondicional e incentivo sempre.

A Deus, obrigado pelas bênçãos, pela oportunidade de vencer todos os obstáculos e alcançar os meus objetivos.

A todos, muito obrigado.

“Pensar é o trabalho mais difícil que existe. Talvez por isso tão poucos se dediquem a ele.”

(Henry Ford)

Resumo

No presente trabalho avalia-se a possibilidade de utilização do Método dos Momentos com Feixes de Raios Complexos (MoM-CSB) em análises de predição de cobertura radioelétrica em perfis topográficos. Com isso, deseja-se verificar se o Método é adequado à análise de problemas de propagação e espalhamento eletromagnéticos considerando terrenos não homogêneos e as perdas do solo aproximadas pela condição de contorno de Leontovich. A técnica numérica do Método dos Momentos (MoM) convencional é utilizada para converter equações integrais em um sistema linear que pode ser resolvido numericamente usando um computador. Entretanto, o método possui grandes limitações em sua aplicabilidade, dada a restrição imposta pelo tamanho elétrico do problema devido à demanda de armazenamento de $O(N^2)$, sendo N o número de incógnitas e $O(N^3)$ o tempo de solução.

O MoM-CSB, por sua vez, é um método que mescla o MoM com a técnica de expansão dos Feixes de Raios Complexos (CSB) na solução de problemas eletromagnéticos de grande porte. Assim, buscamos obter o sistema de equações gerado pelo MoM e solucioná-lo com o auxílio do método dos feixes de raios complexos [1]. Os resultados obtidos mostram que o MoM-CSB é capaz de acelerar o produto matriz-vetor (MVP) das soluções iterativas dos problemas MoM convencional. A conta operacional do produto matriz-vetor e o requerimento de memória foram reduzidos para $O(N^{3/2})$, ao contrário do MVP padrão.

Após alcançados os resultados, as performances do modelo híbrido são comparadas e discutidas através da análise do comportamento da expansão dos feixes e suas propriedades, bem como o desempenho frente a técnica do MoM convencional.

Palavras-chave: *Método dos Momentos (MoM), Feixes de Raios Complexos (CSP), espalhamento eletromagnético.*

Abstract

This research aims at evaluating the possibility of using the Complex Source Beam Method of Moments (CSB-MoM) for the analysis and prediction of electromagnetic fields on topographic profiles. Thus, we intend to verify if the method is suitable for the analysis of electromagnetic propagation and scattering problems over large terrains. The standard Method of Moments (MoM) is employed to convert integral equations into a linear system that can be numerically solved with the help of a computer. However, the method presents critical shortcomings regarding its applicability given the restriction imposed by the electric size of the problem due to the storage requirement of $O(N^2)$, being N the number of unknowns and $O(N^3)$ the solution time.

The CSB-MoM, on its turn, merges the MoM with the Complex Source Beam (CSB) expansion technique in the solution of large electromagnetic problems. Hence, we seek to obtain the equation system generated by the standard MoM and solve it with the help of the complex source point hybrid method. Therefore, our objective was solving the problem in question, that is, calculating the electromagnetic field at any point in space when a source radiates in the presence of an irregular terrain.

The results obtained show that the CSB-MoM is capable of accelerating the matrix-vector product (MVP) of the iterative solutions of standard MoM problems related to large geometries. The operational count of the matrix-vector product and the memory requirement were lessened to $O(N^{3/2})$, for both memory and processing time, as opposed to the standard MVP.

After the results were known, the hybrid model's performances were compared and discussed in light of the beam expansion behavior and its properties, as well as its performance regarding the standard MoM.

Keywords: *Method of Moments (MoM), complex source beams (CSB), Complex Source Beam Moment-Method (CSB-MoM), electromagnetic scattering.*

Lista de Figuras

2.1	Forma do raio para escolha da fonte.	7
2.2	Forma do raio para escolha do feixe.	8
2.3	As escolhas	9
2.4	Condição de radiação	12
2.5	O feixe Gaussiano com a sua largura de feixe e assíntotas.	14
2.6	A geometria para a aproximação paraxial.	16
2.7	O tubo de raios real astigmático.	18
2.8	Simetria de revolução do feixe Gaussiano.	19
2.9	feixe Gaussiano elíptico.	21
3.1	Somente uma pequena porção dos feixes permanecem significativos em P	24
3.2	Densidade volumétrica de correntes.	25
3.3	Problema equivalente com fontes de corrente elétrica e magnética.	26
3.4	Problema equivalente com fontes complexas de corrente elétrica e magnética para o método 1.	28
3.5	Problema equivalente com fontes de corrente elétrica somente.	28
3.6	Problema equivalente com somente fontes de corrente elétrica e esfera CMP.	30
3.7	A geometria dos raios UTD numa esfera complexa.	32
3.8	As definições dos vetores unitários para os pontos de fonte real sobre a esfera.	34
3.9	Discretização da esfera unitária.	35
3.10	Discretização da esfera unitária no plano $x - y$	36
3.11	Os valores de β para diferentes valores de α e c	37
3.12	Valores de N_b em função de kL e c para o caso particular de $\alpha = 4$	38
3.13	O parâmetro α_1 em função de α e c para o caso tridimensional.	40
3.14	O parâmetro α_0 em função de α e c para o caso tridimensional.	41
3.15	As regiões da expansão de feixe CSP.	41
3.16	Ponto de observação P na região inválida $(a < b < \sqrt{a^2 + b_o^2})$	42

3.17	As definições dos vetores unitários para os pontos de fonte real sobre o cilindro circular infinito.	43
4.1	A formação dos grupos, cada um possuindo aproximadamente N/M elementos.	49
4.2	A estrutura dos sub-blocos da matriz $[\bar{\mathbf{Z}}]$	50
4.3	A orientação dos elementos de $[\bar{\mathbf{Z}}_{1,1'}]$ na matriz convencional para o agrupamento G_1 , sendo a escolha de $N/M = 10$	50
4.4	A estrutura da matriz $[\bar{\mathbf{Z}}']$	51
4.5	A expansão do campo do elemento base f_{mi} com raios CSP.	52
4.6	A impedância mútua entre quaisquer duas funções de base pertencentes a grupos bem separados.	54
4.7	A estrutura da matriz $[\mathbf{A}]$	58
4.8	A estrutura da matriz $[\mathbf{T}]$	58
4.9	A separação $d_{mm'} > 2 \tilde{a} $ entre grupos G_m e $G_{m'}$	60
4.10	A separação, $d_{mm'} < 2 \tilde{a} $, entre grupos G_m e $G_{m'}$	61
5.1	Duas fitas envolvidas por CSBs.	69
5.2	O comportamento da magnitude dos elementos da matriz $[\mathbf{T}_{mm'}]$	70
5.3	Os elementos significativos da matriz $[\mathbf{T}_{mm'}]$	71
5.4	As regiões de máximo e mínimo nas interações dos feixes de $[\mathbf{T}_{mm'}]$	72
5.5	Fita CEP iluminada por uma onda plana.	73
5.6	Densidade de corrente na superfície da fita CEP.	74
5.7	A largura de espalhamento para o problema da fita.	75
5.8	A largura de espalhamento para o problema da fita, para $80^\circ < \phi < 100^\circ$	76
5.9	Interações de autogrupos e grupos vizinhos.	77
5.10	Coeficientes CSPs.	77
5.11	A reação entre os feixes associados aos grupos bem separados.	78
5.12	A reação entre os feixes associados a dois grupos bem separados.	78
5.13	Comparação dos requisitos de memória e tempo de processamento entre o MoM-CSB e o MoM convencional.	79

Lista de Tabelas

3.1	Valores de β para diferentes valores de c e α para casos bidimensionais. . .	37
3.2	Números de feixes N_b e β empregados na expansão CSP para $c = 2$ e $L = 5$.	38
3.3	Números de feixes N_θ e β empregados na expansão CSP para $c = 2$ e $L = 5$.	39
3.4	Valores de α_1 para diferentes valores de c e α	39
3.5	Valores de α_0 para diferentes valores de c e α	40
5.1	Números de feixes Q empregados na expansão CSP para $c = 2$ e $L = 10$. . .	70

Sumário

Agradecimentos	ix
Resumo	xiii
Abstract	xv
Lista de Figuras	xvii
Lista de Tabelas	xix
1 Introdução	1
1.1 Contexto	1
1.2 Organização do Texto	3
2 Feixes de Raios Complexos	5
2.1 Introdução	5
2.2 A Geração de um CSP	6
2.2.1 A Escolha da Fonte	8
2.2.2 A Escolha do Feixe	10
2.2.3 A Solução de um CSP	11
2.3 Comportamento Paraxial do feixe CSP	13
2.3.1 Escolha da Fonte	13
2.3.2 A Escolha do Feixe	15
2.4 Expressões Explícitas para o Vetor do Feixe CSP	17
2.5 GB como feixe CSP Paraxial e Raio Ótico Complexo sem Fonte	18
2.6 Considerações Finais	21
3 Expansões CSP de Campos Eletromagnéticos	23
3.1 Introdução	23
3.2 A Representação de um Feixe CSP	25

3.2.1	Método 1: Expansão CSP com Densidades de Correntes Equivalentes Elétricas e Magnéticas	25
3.2.2	Método 2: Expansão CSP com Densidades de Correntes Equivalentes Elétricas	27
3.2.3	Método 3: Expansão CSP com Densidades de Correntes Equivalentes Elétricas em uma Esfera Complexa CMP	30
3.3	Detalhes da Implementação da Expansão do CSP	35
3.4	Região de Validade de Representações de Feixes CSP	40
3.5	Modificações Para o Caso 2-D	42
3.6	Considerações Finais	44
4	O Método Híbrido MoM-CSB	45
4.1	Introdução	45
4.2	Os Elementos das Matrizes Z e V	46
4.2.1	A Formulação para EFIE	46
4.2.2	A Formulação para MFIE	47
4.3	O Algoritmo MoM-CSB	48
4.3.1	A Formação dos Grupos	49
4.3.2	As Interações de Autogrupos e Grupos Próximos	50
4.3.3	A Expansão dos Raios CSP para Grupos de Funções de Base	51
4.3.4	Interações de Grupos	53
4.3.5	A Matriz de Impedância	57
4.3.6	O Cálculo Eficiente do Produto Matricial $V=ZI$	59
4.3.7	Os Critérios de Seleção dos Grupos Próximos	60
4.4	Considerações Finais	61
5	Resultados	63
5.1	Introdução	63
5.2	Ordem dos Tempos de Processamento	63
5.2.1	Ordem de Tempo na Geração das Interações de Autogrupos e Grupos Próximos	63
5.2.2	Ordem de Tempo na Geração das Interações de $[U].[I]$	64
5.2.3	Ordem de Tempo na Geração das Interações de Grupos Bem Separados	64
5.2.4	Ordem de Tempo na Geração das Interações Entre os Grupos Receptores e os Coeficientes dos Feixes	65
5.3	Ordem de Grandeza do Tempo Total	65

5.4	Os Requisitos de Armazenamento e Memória	67
5.5	Estudo de Caso Aplicado ao MoM-CSB	68
5.5.1	Caso 1	68
5.5.2	Caso 2	71
6	Conclusões	81
6.1	Considerações Finais	81
6.2	Propostas de Continuidade	82
	Referências Bibliográficas	85

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contexto

Com os avanços tecnológicos nas pesquisas em eletromagnetismo, métodos mais eficientes para a solução de problemas de espalhamento e perdas em corpos eletricamente grandes têm se tornado cada vez mais necessários. Nesse sentido, várias abordagens vêm sendo desenvolvidas, dentre as quais o Método dos Momentos (MoM) se destaca como uma das mais empregadas. Uma das vantagens de seu uso em relação a outros métodos baseados em equações integrais se encontra em sua habilidade no tratamento de geometrias arbitrárias penetráveis ou não. Além disso, o MoM pode prever as correntes induzidas com grande precisão. Entretanto, quando o combinamos com a discretização usual de $\lambda/20$ ou $\lambda/10$ na análise de estruturas eletricamente grandes, temos o tempo de processamento e o requerimento de memória sobrecarregados. Isto ocorre porque, em termos de comprimento de onda (λ), as estruturas se tornam bastante grandes, fazendo com que o sistema cresça de forma rápida e demande armazenamento e tempo de processamento impraticáveis para a solução, na ordem de N^2 e N^3 respectivamente, onde N é o número de incógnitas. Por isso, pesquisadores têm lançado mão de métodos iterativos [2–8] para reduzir o requerimento de armazenamento e o custo computacional do produto matriz-vetor (PMV) nas soluções iterativas do MoM para $O(N^2)$ por iteração em superfícies eletricamente grandes e irregulares.

Um novo método híbrido, o algoritmo do Método dos Momentos com Feixes de Raios Complexos (MoM-CSB) foi proposto por Koray [9] para diminuir o custo computacional e os requerimentos de armazenamento e memória do Método dos Momentos convencional. Isto pode ser alcançado através da abordagem de raios complexos (CSPs) de forma completamente diferente da proposta em [10, 11], pois os CSPs não servem como funções de base para o MoM. Em vez disso, eles são utilizados para expandir as

iterações entre os grupos nas soluções. O objetivo é acelerar o produto matriz-vetor das soluções iterativas dos problemas MoM padrão. A escolha certa do tamanho dos grupos nos quais os elementos de base são combinados em M grupos faz com que a conta operacional do PMV e o requerimento de memória sejam reduzidos para $O(N^{3/2})$, para ambos memória e tempo de processamento, ao contrário do PMV padrão. O conceito dos pontos de raios complexos foi estabelecido inicialmente como forma de gerar raios Gaussianos [12–14]. Um ponto de raios complexos eletromagnéticos pode ser obtido pela continuação analítica das coordenadas de uma fonte de ponto eletromagnético no espaço real para o domínio complexo de coordenadas. O CSP se reduz aos campos de um feixe Gaussiano (GB) eletromagnético em uma região paraxial de raios que se propagam.

O algoritmo MOM-CSB [1, 9] possui algumas similaridades com o Método Multipolar Rápido (FMM) [15, 16]. Nestas duas abordagens os elementos de base subseccionais definidos na superfície do objeto são agrupados e as interações dos grupos próximos e autogrupos ocorrem como de costume (ver Capítulo 4). Entretanto, para as interações dos grupos bem separados, os campos das funções de base são expandidos em termos dos CSPs, já que eles são soluções exatas das Equações de Maxwell [1, 12, 17, 18]. Para calcular as interações entre os grupos bem separados, suas expansões CSB equivalentes são interagidas utilizando apenas uma pequena porção dos CSPs de cada grupo, devido à propriedade de janela natural Gaussiana que eles possuem. Por isso, as matrizes geradas pelo Método se tornam altamente esparsas [1], o que confere maior eficiência ao cálculo das interações dos grupos bem separados. Entretanto, uma diferença importante entre o FMM e o MoM-CSB diz respeito ao fato de que o primeiro gera um operador de tradução diagonal para os pares de grupos separados enquanto o MoM-CSB produz um operador de tradução altamente esparsos. Ainda, o MoM-CSB é aplicado em um modo que permite que as interações grupo-a-grupo sejam calculadas durante a operação, deste modo ocorre uma redução dos requisitos de memória.

O MoM-CSB tem obtido sucesso na aplicação em alguns problemas eletromagnéticos canônicos [1, 9], no entanto poucos estudos foram realizados a fim de comprovar o potencial de usabilidade da técnica. Sendo assim, este trabalho propõe uma análise do potencial do MoM-CSB na solução de problemas de espalhamento eletromagnético. Com isto em mente, apresentamos, na Seção 1.2, a organização desta pesquisa, que foi estruturada de forma a abordar os principais marcos teóricos sobre o assunto estudado.

1.2 Organização do Texto

Neste primeiro capítulo trazemos uma breve contextualização e um histórico sobre o desenvolvimento do MoM-CSB e suas aplicações, de modo a obter uma visão geral sobre a pesquisa, bem como entender melhor a ideia envolvida neste trabalho. Além disso, expomos a estrutura da dissertação, que é composta por seis capítulos.

Após essa contextualização, o Capítulo 2 discorre sobre os CSPs, método para geração de raios Gaussianos. Nele tratamos da geração de um CSP, da escolha da fonte, da escolha do feixe, da solução de um CSP, do comportamento paraxial do feixe, das expressões explícitas para o vetor do feixe CSP e do GB como feixe CSP paraxial e raio ótico complexo sem fonte. Consideramos esta exposição importante por se tratarem de elementos básicos para o método híbrido e para a compreensão das propriedades desses feixes.

A seguir, o Capítulo 3 trata da expansão de um conjunto de funções de base para a expressão do campo uma fonte de distribuição. São detalhadas as propriedades analíticas das expansões de feixe CSP combinadas à extensão complexa do princípio da equivalência e suas variantes são abordadas. Na expansão, apenas os feixes significativos em determinados pontos são utilizados para avaliar o campo.

Posteriormente, no Capítulo 4 apresentamos o sistema de equações gerado pelo MoM e o solucionamos com o auxílio do MoM-CSB. Deste modo, é possível calcular o campo eletromagnético em um ponto qualquer do espaço com uma fonte transmissora que irradia sobre a estrutura de um tira CEP. Inicialmente apresentamos a geometria do problema. Em seguida, o Método dos Momentos convencional, com as formulações para as equações integrais de campo magnético (MFIE) e as de campo elétrico (EFIE). Por fim, abordamos o Método Híbrido MoM-CSB. Foram demonstradas a formação e a interação entre os grupos, tendo em vista as MFIE e as EFIE e a expansão dos feixes CSP para grupos de funções de base, dentre outros desdobramentos relevantes.

No Capítulo 5, apresentamos os resultados numéricos, que comprovam a relevância da aplicação do MoM-CSB para a análise de problemas de espalhamento eletromagnético.

Por fim, a partir dos resultados obtidos e das informações apresentadas conclui-se a necessidade de pensar maneiras de se aprimorar a técnica almejando alcançar melhores resultados. Considerações técnicas e gerais sobre o trabalho são, então, apresentadas no Capítulo 6, assim como as considerações finais e proposições para a continuidade da pesquisa.

Capítulo 2

Feixes de Raios Complexos

2.1 Introdução

O objetivo deste Capítulo é expor as propriedades básicas da formação dos feixes de pontos de raios complexos (CSP). Na primeira parte tratamos da geração de um CSP, dos cortes de ramificação que produzem duas escolhas, a da fonte e a do feixe, e da solução de um CSP. Na segunda parte, a partir da Seção 2.5, apresentamos o comportamento paraxial do raio CSP, as expressões explícitas para o vetor do feixe CSP e o GB como feixe CSP paraxial e raio ótico complexo sem fonte.

Os primeiros a estudarem o assunto foram Felsen [12], Keller e Streifer [13] e Deschamps [14]. Koray propôs um novo modelo híbrido capaz de unir os benefícios deste ao Método dos Momentos (MoM), já altamente difundido [1, 9, 17]. Tendo em vista o restrito número de pesquisadores do tema proposto, este trabalho se apoia nos estudos desenvolvidos por Koray, Felsen e seus colaboradores [1, 9, 12, 17, 19, 20], sendo do primeiro autor a contribuição mais importante para esta pesquisa.

A geração de um CSP eletromagnético é realizada por meio da continuação analítica das coordenadas de um raio de pontos eletromagnéticos no espaço real em direção ao domínio de coordenadas complexas. Por ser descrito em termos das funções de Green no espaço livre com um raio complexo local, o campo de um CSP no espaço livre é um raio que corresponde a uma solução exata das equações de Maxwell.

Koray e Felsen [9, 12] mostram que o feixe CSP reduz os campos de um feixe Gaussiano eletromagnético dentro da região paraxial. O GB é uma solução para a equação de onda quando ela é substituída por sua aproximação na região paraxial. Entretanto, um feixe CSP se apresenta como uma solução exata para a equação de onda em qualquer local, guardadas suas singularidades. Dessa forma, os feixes CSP funcionam como funções de base, sendo possível expandir um campo eletromagnético

arbitrário em um conjunto de feixes deste tipo [9].

Diante desta breve exposição a respeito das características e propriedades do CSP, é relevante que se trate da sua geração, tema da próxima seção.

2.2 A Geração de um CSP

Tomemos uma corrente elétrica com direção \hat{p} , unitária em \mathbf{r}' , no espaço real, ou seja:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \hat{\rho}\delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}'). \quad (2.1)$$

Substituímos o vetor de posição real nas coordenadas fonte \mathbf{r}' por uma quantidade complexa na geração de um CSP:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - j\mathbf{b}, \quad (2.2)$$

onde a parte real \mathbf{r}_0 determina a localização do ponto de partida do raio no espaço real (ou centro da cintura do feixe). A magnitude do vetor real \mathbf{b} é $b = |\mathbf{b}|$, sendo b um número real positivo definido como o parâmetro do feixe, e o vetor unitário $\hat{b} = \mathbf{b}/b$ indica a direção do eixo do feixe.

Consideremos que a localização do CSP seja escolhida de forma que:

$$\mathbf{r}_0 = 0, \mathbf{b} = b\hat{\mathbf{z}}. \quad (2.3)$$

Para determinar uma melhor identificação das localizações complexas adotaremos $\tilde{\mathbf{r}}'$, usando (2.3) em (2.2), de modo que:

$$\tilde{\mathbf{r}}' = (0, 0, -jb). \quad (2.4)$$

Primeiramente, a distância entre o CSP e qualquer ponto real de observação é calculada para avaliar o campo radiado por estes raios complexos:

$$\tilde{R}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}') = \sqrt{(x - \tilde{x}')^2 + (y - \tilde{y}')^2 + (z - \tilde{z}')^2} = \sqrt{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}') \cdot (\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}')}, \quad (2.5)$$

onde (2.5) é a definição geral. Devido à correspondência para a escolha especial de $\tilde{\mathbf{r}}'$ em (2.4), e sendo a distância radial $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, o deslocamento complexo é:

$$\tilde{R}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}') = \sqrt{\rho^2 + (z + jb)^2}, \quad (2.6)$$

A função $\tilde{R}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}')$ não possui valores únicos, com singularidades de pontos de ramifi-

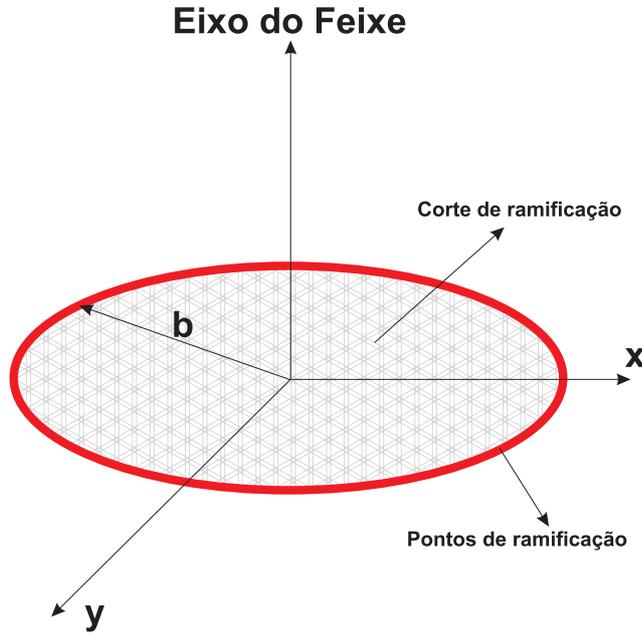


Figura 2.1: Forma do raio para escolha da fonte.

cação no círculo definido por:

$$C_0 = \{\mathbf{r} : x^2 + y^2 = b^2, z = 0\}, \quad (2.7)$$

de maneira que é necessário escolher um ramo para se obter uma função de valor único para \tilde{R} . Há duas possibilidades principais nesse ponto [19]. Para a escolha da fonte, temos:

$$Re[\tilde{R}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}')] \geq 0, \quad (2.8)$$

sendo o a escolha do ramo de (2.8) o disco circular. Para a escolha do feixe, temos:

$$Im[\tilde{R}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}')] \geq 0, \quad (2.9)$$

em que a escolha do ramo de (2.9) torna-se uma superfície planar complementar que exclui o disco. Assim, na seleção da fonte, a superfície deste disco é definida pela elipse D_0 , conforme a Figura 2.1.

$$D_0 = \{\mathbf{r} : x^2 + y^2 \leq b^2, z = 0\}. \quad (2.10)$$

Logo, o complemento \overline{D}_0 de D_0 no plano $z = 0$, que está relacionado a (2.9) (Figura

2.2) para a escolha do feixe, é dado por:

$$\overline{D}_0 = \{\mathbf{r} : x^2 + y^2 \geq b^2, z = 0\}. \quad (2.11)$$

Adotaremos $\tilde{R} = R_r - jR_i$. Estas são coordenadas naturais para o CSP e desempenham papéis físicos distintos [19].

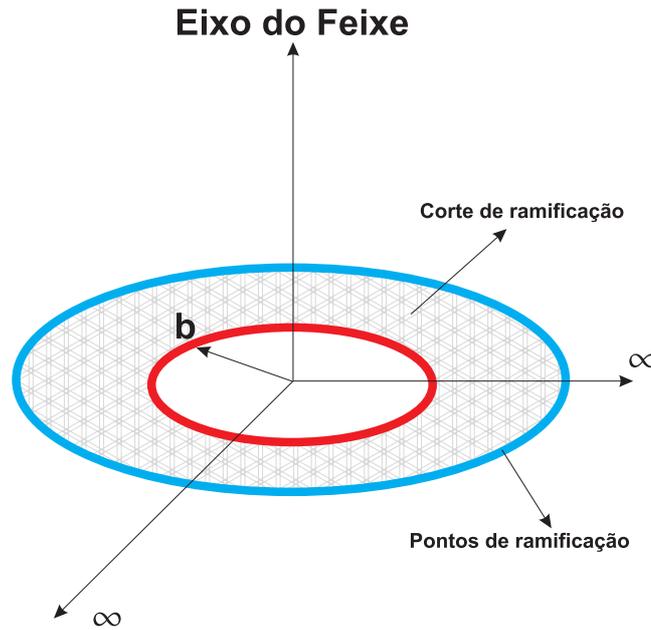


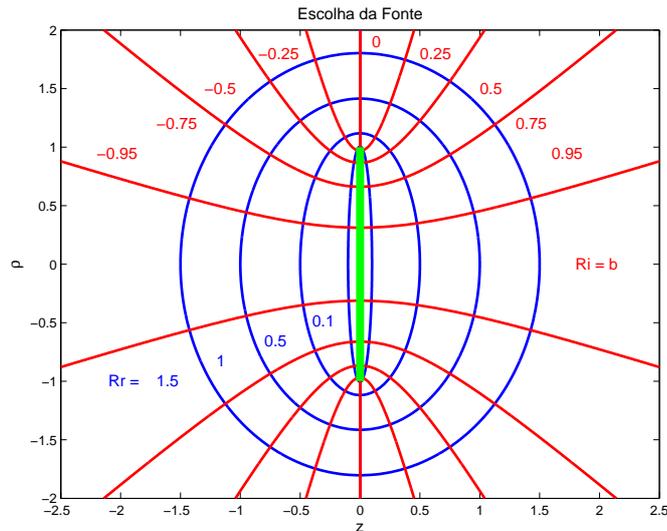
Figura 2.2: Forma do raio para escolha do feixe.

2.2.1 A Escolha da Fonte

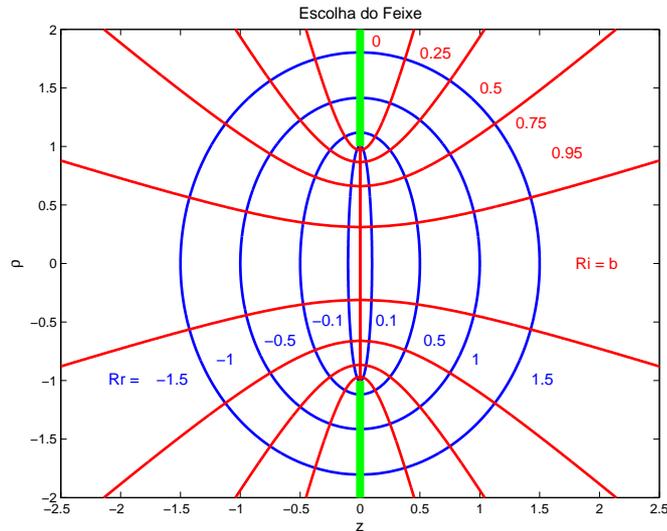
Com a escolha da fonte em (2.8), a parte real R_r de (2.6) é constante em superfícies esferoidais E_{R_r} , de acordo com (2.12) [19].

$$E_{R_r} : 1 = \frac{x^2 + y^2}{b^2 + R_r^2} + \frac{z^2}{R_r^2}, \quad R_r > 0. \quad (2.12)$$

Nas superfícies mostradas na Figura 2.3a, R_r e R_i são constantes. No limite onde $R_r \rightarrow 0$, os esferoides se encolhem para o disco de corte de ramificação circular definido em (2.10). Já para o outro extremo, quando $R_r \gg b$, o esferoide se aproxima de uma esfera com raio $R_r = |\mathbf{r}| = r$. Observamos que a parte real R_r é contínua por todo o espaço. Por sua vez, a parte imaginária R_i é constante em H_{R_i} hiperboloides



(a) A escolha da fonte.



(b) A escolha do feixe.

Figura 2.3: As escolhas

unilaterais ($z \geq 0$), conforme:

$$H_{R_i} : 1 = \frac{x^2 + y^2}{b^2 - R_i^2} - \frac{z^2}{R_i^2}, \quad -b \leq R_i \leq b. \quad (2.13)$$

A parte imaginária é $0 \leq R_i \leq b$ para $z > 0$ e $-b \leq R_i \leq 0$ para $z < 0$. O valor máximo é $R_i = b$ no eixo z positivo e mínimo no eixo z negativo. À medida que os pontos de observação se aproximam da superfície complementar que exclui o disco mostrado na Figura 2.1, R_i se aproxima de zero. Esses hiperboloides interceptam o plano $x - y$ dentro do disco circular, conforme a Figura 2.3a. Quando há o cruzamento

entre a observação e o disco de corte de ramificação em ambos os lados ($z \gtrsim 0$), a distância complexa se torna descontínua:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{R} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\rho^2 + (\pm\epsilon + jb)^2}, \quad (2.14)$$

$$= \pm \sqrt{b^2 - \rho^2}, \quad \rho < b. \quad (2.15)$$

No limite, $z = \pm\epsilon$ para $\epsilon > 0$ e, conseqüentemente, $z \gtrsim 0$. Logo, $R_i \gtrsim 0$ para $z \gtrsim 0$. Também podemos notar que quando $b/r \rightarrow 0$, a distância complexa é $\tilde{R} \rightarrow r$, onde $r = |\mathbf{r}|$.

2.2.2 A Escolha do Feixe

A escolha do feixe em (2.9) faz com que a parte real de R_r seja constante em superfícies esferoidais unilaterais E_{R_r} :

$$E_{R_r} : 1 = \frac{x^2 + y^2}{b^2 + R_r^2} + \frac{z^2}{R_r^2}, \quad -\infty < R_r < \infty. \quad (2.16)$$

A Figura 2.3b ilustra as superfícies sobre as quais R_r se torna descontínuo ao longo do corte de ramificação definido para esta escolha em (2.11):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{R} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\rho^2 + (\pm\epsilon + jb)^2}, \quad (2.17)$$

$$= \pm \sqrt{\rho^2 - b^2}, \quad \rho > b. \quad (2.18)$$

No limite, $z = \pm\epsilon$ para $\epsilon > 0$ e, conseqüentemente, $z \gtrsim 0$. Portanto, $R_r \gtrsim 0$ para $z \gtrsim 0$. A parte imaginária R_i é contínua e constante nos hiperboloides:

$$H_{R_i} : 1 = \frac{x^2 + y^2}{b^2 - R_i^2} - \frac{z^2}{R_i^2}, \quad 0 \leq R_i \leq b. \quad (2.19)$$

A Figura 2.3b ilustra o limite onde $R_i \rightarrow 0$, no qual os hiperboloides se aproximam da superfície de corte de ramificação (excluindo o disco) definida em (2.11). Enquanto isso, para o outro extremo, quando $R_i = b$, os hiperboloides se aproximam do eixo. Notemos que R_i alcança o seu valor máximo $R_i = b$ em ambos eixos z , positivos e negativos.

2.2.3 A Solução de um CSP

O campo elétrico radiado por um CSP eletromagnético (ou vetor CSP) é obtido a partir da função diádica de Green no espaço livre com a substituição das coordenadas de fonte reais pelas suas contrapartes complexas $E(\mathbf{r}) = \overline{\overline{G}}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}) \cdot \hat{\rho}$, onde a função diádica de Green no espaço livre é definida por [19]:

$$\overline{\overline{G}}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}) = -\frac{jkZ_0}{4\pi} \left[\overline{\overline{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2} \right] G_0(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}), \quad (2.20)$$

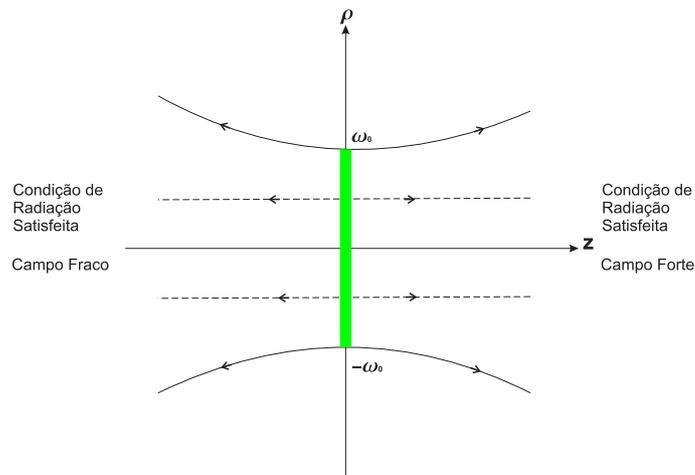
e a função escalar de Green é:

$$G_0(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{\exp(-jk\tilde{R})}{\tilde{R}} = \frac{\exp(kR_i - jkR_r)}{\tilde{R}}. \quad (2.21)$$

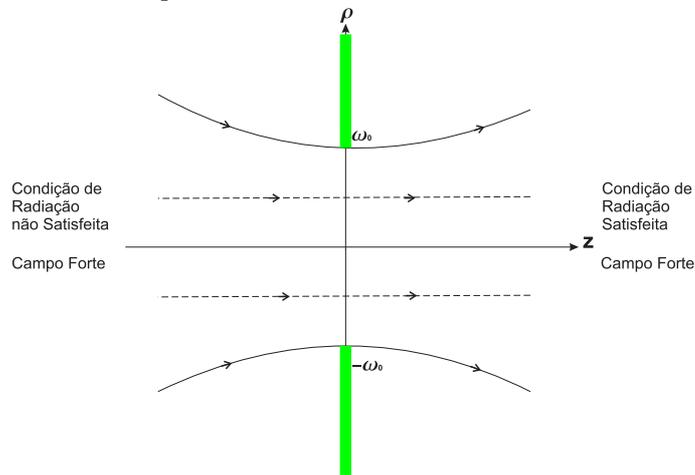
Logo, o vetor de feixe de raio complexo em (2.20) é uma solução exata das equações de Maxwell. Ela é válida em todo espaço, com exceção dos ramos definidos em (2.10) e (2.11), através dos quais \tilde{R} se torna descontínuo. Assim, o vetor de campo de feixe CSP é descontínuo através dessas singularidades de ramo também. O termo feixe CSP será empregado a partir de agora para fazer alusão ao feixe escalar dado em (2.21), a menos que seja especificamente nomeado feixe vetor CSP. O campo de feixe CSP possui características diferentes em relação às duas opções distintas para o corte de ramificação. Para a escolha da fonte $G_0(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}})$, a condição de radiação de Sommerfeld é satisfeita com $r \rightarrow \infty$, uma vez que $R_r > 0$ em todo o espaço, exceto sobre o corte de ramificação. Vemos, na Figura 2.3a, que R_r se afasta do disco em todas as direções ao longo das superfícies hiperboloidais, que são os caminhos de fase do campo $G_0(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}})$. O disco de corte de ramificação, portanto, funciona como a localização dos meios físicos que dão origem ao campo em (2.21). Os esferoides, por outro lado, são as superfícies de frente de fase onde R_r é constante.

Tendo em vista que R_i atinge seu $R_i = b$ máximo no eixo z positivo, o termo exponencial na expressão do feixe CSP em (2.21) possui o valor mais alto ao longo do eixo z positivo. Uma vez que $R_i = -b$ no eixo z negativo, o termo exponencial atinge seu mínimo. Em outras palavras, o feixe CSP, com a escolha da fonte, possui um campo fortemente radiado em uma única direção ($z > 0$), enquanto seu campo na direção oposta ($z < 0$) é negligenciável (ver Figura 2.4a). A condição para que o feixe CSP se reduza a um feixe Gaussiano na região paraxial é, portanto, que $z > 0$. Ele é radiado através das fontes físicas distribuídas por todo o disco de corte de ramificação e, assim, satisfaz a condição de radiação para ambos ($z \gtrless 0$).

Com a escolha do feixe, R_r é descontínuo através do ramo, como ilustra a Figura



(a) O feixe CSP para a escolha da fonte do corte de ramificação.



(b) O feixe CSP para a escolha do feixe do ramo de corte.

Figura 2.4: Condição de radiação

2.3b. Então, a fase do feixe CSP também o é através do mesmo corte. Se $R_r \geq 0$ para $z \geq 0$, o campo de feixe em (2.21) satisfaz a condição de radiação somente para $z > 0$. Os caminhos das fases são originados de $z \rightarrow \infty$ e direcionados para a direção \hat{z} positiva ao longo dos hipéboloides. Portanto, para esta escolha, as fontes físicas estão localizadas em $z \rightarrow -\infty$. Podemos notar que o campo do feixe atinge seu máximo para ambos os eixos negativos e positivos, ao longo dos quais $R_i = b$ é máximo. O mínimo ocorre com $z \rightarrow 0$, para o qual $R_i = b$. Portanto, a escolha do feixe origina um feixe CSP que lembra um feixe Gaussiano convencional para ambos $z > 0$ e $z < 0$ na região paraxial, conforme ilustra a Figura 2.4b.

2.3 Comportamento Paraxial do feixe CSP

2.3.1 Escolha da Fonte

Mencionamos previamente que o feixe CSP possui um campo máximo ao longo da direção $+\hat{z}$ e mínimo ao longo da direção $-\hat{z}$ para a escolha da fonte. Interessa agora obter uma expressão analítica para o comportamento do feixe CSP próximo a seu eixo (direção $\mp\hat{z}$). Consideremos primeiramente a aproximação paraxial do deslocamento complexo \tilde{R} ao longo do eixo z positivo e negativo, de acordo com:

$$\tilde{R} = \sqrt{\rho^2 + (z + jb)^2}, \quad (2.22)$$

$$= \pm(z + jb) \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{(z + jb)^2}}, \quad z \gtrless 0, \quad (2.23)$$

para $\left(\frac{\rho^2}{z^2 + b^2} \ll 1\right)$ pode ser aproximado para:

$$\tilde{R} \simeq \pm \left[z + jb + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{z + jb} \right], \quad z \gtrless 0, \quad (2.24)$$

$$\simeq \pm \left[z + jb + \frac{z}{2} \frac{\rho^2}{z^2 + b^2} - j \frac{b}{2} \frac{\rho^2}{z^2 + b^2} \right], \quad z \gtrless 0, \quad (2.25)$$

onde o termo de magnitude $\tilde{R} \simeq \pm(z + jb)$, como esperado. Usando (2.24) em (2.21) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\exp(jk\hat{R})}{\tilde{R}} &\simeq \pm(z + jb)^{-1} \exp \left[\pm jk \left(z + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{z + jb} \right) \right] \\ &\times \exp(\pm kb), \quad z \gtrless 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

ou através de (2.25):

$$\begin{aligned} \frac{\exp(jk\hat{R})}{\tilde{R}} &\simeq \pm \frac{1}{z + jb} \exp(\pm kb) \\ &\times \exp \left[\pm jkz \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{z^2 + b^2} \right) \right] \exp \left[\mp \frac{kb}{2} \frac{\rho^2}{z^2 + b^2} \right], \quad z \gtrless 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

No eixo z positivo, as expressões em (2.26), (2.27) estão descritas na forma de um feixe Gaussiano rotacionalmente simétrico [19] com a distância em Rayleigh [21], ou seja, a distância à qual o feixe é completamente formado. Presumimos que o campo do feixe permaneça bem colimado até a distância em Rayleigh $z_r = b$, que é medida a partir da cintura do feixe ao longo de seu eixo, como se vê na Figura 2.5. O campo do

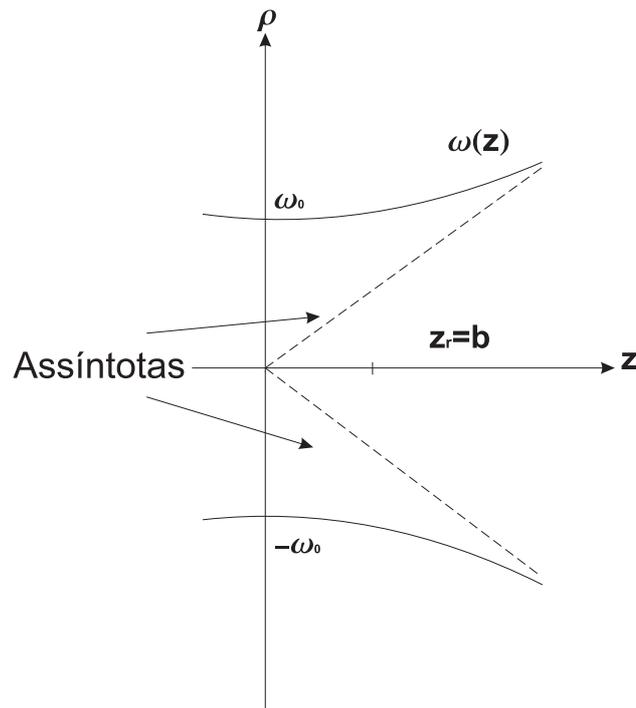


Figura 2.5: O feixe Gaussiano com a sua largura de feixe e assíntotas.

feixe CSP atinge um valor mínimo no eixo z negativo para o qual o termo exponencial se torna mínimo, $|\exp[-jk\tilde{R}]| = \exp[-kb]$. A curvatura do raio de frente de fase $R(z)$ e a largura de meio feixe $\omega(z)$ de um feixe Gaussiano são definidas conforme [19]:

$$R(z) = \frac{(z^2 + b^2)}{2}, \quad (2.28)$$

$$\omega(z) = \sqrt{\frac{2(z^2 + b^2)}{kb}}, \quad (2.29)$$

Para $z \gg b$, a largura de meio feixe se aproxima de uma assíntota cônica com raio transversal, conforme:

$$\omega(z) = \sqrt{\frac{2}{kb}}z, \quad z \gg b. \quad (2.30)$$

A largura do feixe se torna mais estreita em sua cintura ($z = 0$), para qual o raio transversal circular se torna:

$$\omega(0) = \omega_0 = \sqrt{\frac{2b}{k}}. \quad (2.31)$$

Estes parâmetros são também descritos na Figura 2.5.

2.3.2 A Escolha do Feixe

Para a escolha do feixe reescrevemos o deslocamento complexo \tilde{R} em (2.22) da seguinte forma:

$$\tilde{R} = (z + jb) \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{(z + jb)^2}}, \quad -\infty < z < \infty. \quad (2.32)$$

Adotando os mesmos procedimentos empregados em (2.26) e (2.27), observamos que, na região paraxial, $\left(\frac{\rho^2}{z^2 + b^2} \ll 1\right)$ pode ser aproximado:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &\simeq \pm \left[z + jb + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{z + jb} \right] \\ &\simeq \pm \left[z + jb + \frac{z}{2} \frac{\rho^2}{z^2 + b^2} - j \frac{b}{2} \frac{\rho^2}{z^2 + b^2} \right], \quad -\infty < z < \infty. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Substituindo a aproximação em (2.33) por \tilde{R} em (2.21), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\exp(jk\tilde{R})}{\tilde{R}} &\simeq \frac{1}{z + jb} \exp(kb) \\ &\times \exp \left[-jkz \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{z^2 + b^2} \right) \right] \exp \left[\frac{kb}{2} \frac{\rho^2}{z^2 + b^2} \right], \quad -\infty < z < \infty. \end{aligned} \quad (2.34)$$

A expressão em (2.34) está na forma de um feixe Gaussiano que irradia na direção \hat{z} positiva. O feixe converge para a cintura em $z < 0$ e começa a divergir a partir do plano $z = 0$ para $z > 0$.

Apresentamos uma aproximação paraxial alternativa para a localização de raios complexos em geral $\tilde{r}' = \mathbf{r}_0 - jb\hat{b}$ na escolha da fonte. Apesar de a expressão resultante não tomar a forma exata de um GB, ela descreve o comportamento paraxial do feixe CSP e fornece uma melhor descrição para o comportamento paraxial do campo de feixe CSP direcionado arbitrariamente. Utilizando a escolha da fonte, \tilde{R} pode ser reescrito (2.5) com auxílio de (2.2), de modo que:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 + jb\hat{b}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 + jb\hat{b})}, \\ &= \sqrt{(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \pm jb)^2 + 2jb|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \left(\hat{b} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \mp 1 \right)}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Suponhamos que $\mathbf{R}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ seja o vetor real entre o ponto de observação e o centro

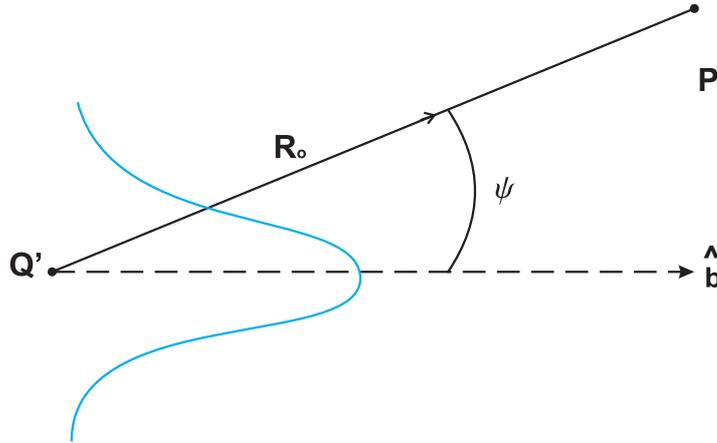


Figura 2.6: A geometria para a aproximação paraxial.

do feixe, conforme a Figura 2.6. Com a substituição deste \mathbf{R}_0 por (2.35), temos:

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= \sqrt{(\mathbf{R}_0 \pm jb)^2 + 2jb\mathbf{R}_0(\hat{R}_0 \cdot \hat{b} \mp 1)}, \\ &= (\mathbf{R}_0 \pm jb) \sqrt{1 + (\hat{R}_0 \cdot \hat{b} \mp 1) \frac{2jb\mathbf{R}_0}{(\hat{R}_0 \pm jb)^2}}.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Para

$$|\hat{R}_0 \cdot \hat{b} \mp 1| \frac{2b\mathbf{R}_0}{\mathbf{R}_0^2 + b^2} \ll 1, \quad (2.37)$$

que descreve a região paraxial, \tilde{R} pode ser aproximado como (2.38):

$$\tilde{R} \simeq \mathbf{R}_0 \pm jb + jb\mathbf{R}_0 \frac{(\hat{R}_0 \cdot \hat{b} \mp 1)}{\mathbf{R}_0 \pm jb}. \quad (2.38)$$

A aproximação (2.38) de \tilde{R} é a seguir substituída em (2.21) para dar a forma aproximada para o feixe de CSP paraxial:

$$\begin{aligned}\frac{\exp(jk\tilde{R})}{\tilde{R}} &\simeq \frac{1}{\mathbf{R}_0 \pm jb} \exp(\pm kb) \exp \left[-jk\mathbf{R}_0 \left(1 \pm (\hat{R}_0 \cdot \hat{b} \mp 1) \frac{b^2}{\mathbf{R}_0^2 + b^2} \right) \right] \\ &\times \exp \left[-kb(1 \mp \hat{R}_0 \cdot \hat{b}) \frac{\mathbf{R}_0^2}{\mathbf{R}_0^2 + b^2} \right].\end{aligned}\quad (2.39)$$

O ângulo Ψ é definido de modo que $\cos\Psi = \hat{R}_0 \cdot \hat{b}$, como observamos na Figura 2.6. Para a direção *forward* ao longo do eixo do feixe, à medida que o ângulo Ψ se aproxima de zero radianos, a função do cosseno pode ser aproximada como $\cos\Psi \simeq 1 - \Psi^2/2$ em

(2.39), gerando:

$$\begin{aligned} \frac{\exp(jk\tilde{R})}{\tilde{R}} &\simeq \frac{1}{\mathbf{R}_0 + jb} \exp(kb) \exp\left[-jk\mathbf{R}_0\left(1 - \frac{\Psi^2}{2} \frac{b^2}{\mathbf{R}_0^2 + b^2}\right)\right] \\ &\times \exp\left[\frac{-kb\Psi^2}{2} \frac{R_0^2}{\mathbf{R}_0^2 + b^2}\right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Como vemos no termo exponencial ao lado direito desta expressão, o termo $\exp(-jk\tilde{R})$ possui um comportamento exponencialmente descendente no ângulo na região paraxial. Na região de campo distante, como $r \rightarrow \infty$, a distância $\mathbf{R}_0 \rightarrow r$, no termo de amplitude, e $\mathbf{R}_0 \rightarrow r - \hat{r} \cdot \hat{r}'$, no segundo termo exponencial de (2.40), produzem:

$$\frac{\exp(jk\tilde{R})}{\tilde{R}} \simeq \exp(kb) \frac{\exp(jkr)}{r} \exp(jk\hat{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \exp\left[\frac{-kb\Psi^2}{2}\right]. \quad (2.41)$$

O decaimento Gaussiano no ângulo é aparente no último termo de (2.41).

2.4 Expressões Explícitas para o Vetor do Feixe CSP

Devido aos CSPs elétricos e magnéticos, as funções diádicas de Green para o campo elétrico são obtidas pela substituição do argumento de fonte por um argumento complexo, conforme:

$$\overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}') = -\frac{jkZ_0}{4\pi} \left[\overline{\overline{I}} \left(1 - \frac{j}{k\tilde{R}} - \frac{1}{(k\tilde{R})^2}\right) - \hat{\tilde{R}}\hat{\tilde{R}} \left(1 - \frac{3j}{k\tilde{R}} - \frac{3}{(k\tilde{R})^2}\right) \right] \frac{\exp(-jk\tilde{R})}{\tilde{R}}, \quad (2.42)$$

$$\overline{\overline{G}}_{em}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}') = \frac{jk}{4\pi} (\hat{\tilde{R}} \times \overline{\overline{I}}) \left(1 - \frac{j}{k\tilde{R}}\right) \frac{\exp(-jk\tilde{R})}{\tilde{R}}, \quad (2.43)$$

onde $\overline{\overline{I}}$ é a identidade diádica. Lembremos que $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}'$, $\tilde{R} = \sqrt{\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}}$ e $\hat{\tilde{R}} = \tilde{\mathbf{R}}/\tilde{R}$. Para obter o feixe CSP vetor paraxial, o termo $\exp(-jk\tilde{R})/\tilde{R}$ precisa ser substituído por sua aproximação paraxial. Na zona distante, a forma do campo distante das funções de Green é usada para obter os campos de feixe CSP:

$$\overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}') = -\frac{jkZ_0}{4\pi} (\overline{\overline{I}} - \hat{r}\hat{r}') \frac{\exp(-jkr)}{r} \exp(jk\hat{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}'), \quad (2.44)$$

$$\overline{\overline{G}}_{em}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}') = \frac{jk}{4\pi} (\overline{\overline{I}} - \hat{r}\hat{r}') \frac{\exp(-jkr)}{r} \exp(jk\hat{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}'). \quad (2.45)$$

descrito analiticamente:

$$U(P_1) \sim U(0) \left[\frac{\det \mathbf{Q}(P)}{\det \mathbf{Q}(0)} \right]^{1/2} \exp \left[-jk \left(z + \frac{\boldsymbol{\rho}^T \mathbf{Q}(P) \boldsymbol{\rho}}{2} \right) \right], \quad (2.48)$$

onde $U(0)$ representa o campo escalar no ponto de referência da frente de fase do tubo de raio astigmático mostrado na Figura 2.7. O símbolo \det denota a operação determinante na função da raiz quadrada, que representa o fator de espalhamento do campo de raio. O ponto P_1 localiza-se na frente de fase centralizada em P . A matriz de curvatura Q e o vetor de deslocamento radial ρ são definidos de acordo com:

$$\mathbf{Q}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+\rho_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z+\rho_2} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

As distâncias cáusticas (ou curvaturas do raio de frente de onda) são denominadas ρ_1 e ρ_2 em (2.49), e mostrados na Figura 2.7. O vetor ρ da coluna contém as coordenadas transversas do ponto P_1 relativas ao eixo do raio. Para chegar à representação do feixe, estes parâmetros de distância cáustica são estendidos analiticamente para valores complexos, de modo que a matriz da fase se torna complexa, conforme:

$$\tilde{\mathbf{Q}}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+jb_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z+jb_2} \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

A substituição de (2.51) por (2.48) gera o GB elíptico mostrado na Figura 2.9:

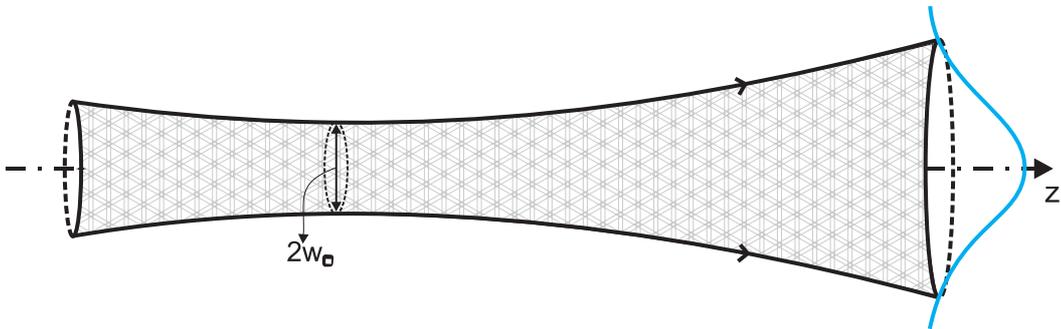


Figura 2.8: Simetria de revolução do feixe Gaussiano.

$$U(P_1) \sim U(0) \left[\frac{\det \tilde{\mathbf{Q}}(P)}{\det \tilde{\mathbf{Q}}(0)} \right]^{1/2} \exp \left[-jk \left(z + \frac{\boldsymbol{\rho}^T \tilde{\mathbf{Q}}(P) \boldsymbol{\rho}}{2} \right) \right]. \quad (2.52)$$

De acordo com [17], temos:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z + jb_1 & 0 \\ 0 & z + jb_2 \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

$$= \begin{bmatrix} jb_1 & 0 \\ 0 & z + jb_2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

$$= \tilde{\mathbf{Q}}^{-1}(0) + z\mathbf{I}, \quad (2.55)$$

onde \mathbf{I} denota a matriz de identidade 2×2 . A matriz de fase complexa em $z = 0$ pode, em geral, ser uma matriz cheia conforme:

$$\tilde{\mathbf{Q}}(0) = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

onde os elementos podem ser números arbitrários complexos, caso em que o GB resultante em (2.52) é chamado de GB geral astigmático. Nesta forma mais generalizada, a equação de onda parabólica ao longo do eixo z ainda é satisfeita pelo campo do GB de raio ótico astigmático. Para chegarmos ao GB simétrico racionalmente mais simples, selecionamos as distâncias cústicas complexas para serem iguais $b_1 = b_2 = b$, de modo que:

$$\tilde{\mathbf{Q}}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+jb} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z+jb} \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Substituindo esta matriz de fase complexa simétrica em (2.52), obtemos o GB rotacionalmente simétrico. Vejamos a Figura 2.8:

$$U(P_1) \sim U(0) \frac{jb}{z+jb} \exp \left[-jk \left(z + \frac{\rho^2}{2(z+jb)} \right) \right], \quad (2.58)$$

$$\sim U(0) \frac{jb}{z+jb} \exp \left[-jkz \left(z + \frac{\rho^2}{2(z^2+b^2)} \right) \right] \exp \left[-\frac{kb}{2} \left(\frac{\rho^2}{z^2+b^2} \right) \right]. \quad (2.59)$$

A diferença entre o GB de raio ótico sem fonte em (2.59) e o GB obtido a partir do CSP em (2.47) é que o primeiro não contém um fator $\exp(kb)$, e sim um fator de jb . O comportamento dos GBs no limite em que o parâmetro de feixe alcança zero ($b \rightarrow 0$) ou se aproxima de uma fonte pontual no espaço real é importante. Neste caso, o campo

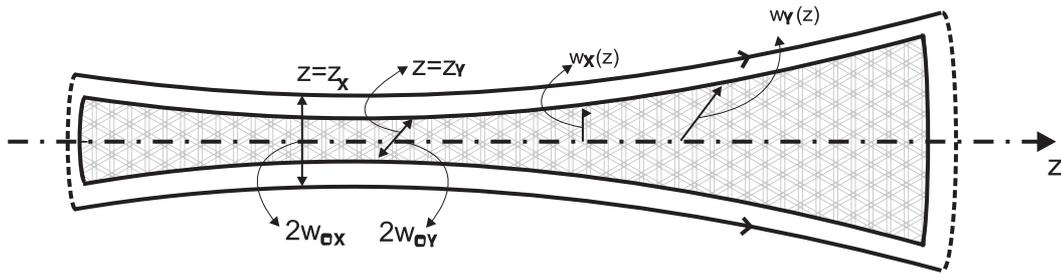


Figura 2.9: feixe Gaussiano elíptico.

de feixe CSP se aproxima a uma onda esférica paraxial:

$$\frac{\exp(-jk\tilde{R})}{\tilde{R}} \Big|_{b=0} \simeq \frac{\exp\left(1 + \frac{\rho^2}{2z^2}\right)}{z}. \quad (2.60)$$

O campo de origem de feixe livre em (2.59) parece ser diretamente proporcional a b . No entanto, o ponto de referência ($z = 0$) em O , na Figura 2.7 se aproxima da cáustica no limite quando ($b \rightarrow 0$). O campo em $z = 0$ (ou na cáustica) vai em direção a infinito, uma vez que o tubo de raios se torna infinitesimalmente estreito, devido ao princípio de conservação de energia. Assim, no limite:

$$\lim_{b \rightarrow 0} bU(0) \rightarrow C, \quad (2.61)$$

onde C é uma constante complexa arbitrária relacionada à força contida no tubo de raio. Ao selecionar $C = 1/j$ e incorporar (2.61) a (2.59), obtemos a mesma onda esférica paraxial como em (2.60). Então, o GB rotacionalmente simétrico sem fonte e o GB de CSP com base paraxial estão exatamente na mesma forma, exceto por um fator b de normalização dependente.

2.6 Considerações Finais

Neste capítulo foram abordadas as propriedades dos raios complexos e as escolhas pertinentes ao corte de ramificação e comportamento dos raios.

Tratamos da importância das regiões de interesse a partir da escolha do corte de ramificação que, por sua vez, definiu um disco circular como a escolha da fonte e a superfície planar que exclui esse disco como a escolha do feixe. Foi estabelecida, ainda, a solução do vetor de feixe de raios complexos como uma solução exata das equações de Maxwell. O comportamento do CSP é dependente da escolha do corte de ramificação, pois apenas diante desta é possível definir as regiões de campo forte, as negligenciáveis

e as descontinuidades.

Em seguida explicamos, com os detalhes necessários, o comportamento paraxial do CSP para a escolha da fonte e do feixe. Termos como a cintura e a largura do feixe foram esclarecidos.

Posteriormente, explicitamos as funções de Green com argumento complexo para os CSPs elétricos e magnéticos. Deste modo, foi possível perceber o comportamento Gaussiano para a aproximação angular.

Por fim, trouxemos a representação paraxial do CSP comparada à expressão do GB obtida pela representação do campo de raio GO astigmático com as curvaturas de frente de onda complexas.

Fica, assim, estabelecido que os requisitos necessários para a utilização dos CSPs como solução exata das equações de Maxwell foram alcançados. Portanto, os Capítulos 3 e 4 apresentam técnicas que utilizam os CSPs como recurso para análise de problemas EM.

Capítulo 3

Expansões CSP de Campos Eletromagnéticos

3.1 Introdução

Os problemas de radiação eletromagnéticos (EM) em estruturas eletricamente grandes frequentemente demandam que o campo de uma fonte de distribuição seja expresso em termos de uma expansão de um conjunto de funções de base adequado para sua solução. Em seguida podemos, então, rastrear cada componente do campo na expansão no ambiente, e estes campos são passíveis de serem sobrepostos em qualquer ponto de observação a fim de obtermos o valor do campo naquele local. Sendo assim, com problemas em ambientes complicados, os feixes de CSP se tornam atraentes para a expansão de radiação de campos EM, pois são soluções exatas das equações de Maxwell [9, 12] e, portanto, válidos em todo espaço. Além disso, eles possuem a propriedade de janela natural devido ao seu comportamento semelhante ao de feixe.

A Figura 3.1 ilustra que é possível realizar exclusivamente o truncamento dos feixes significativos em determinados pontos para avaliar o campo. Para melhor compreensão podemos compreender os feixes significativos como sendo a região de iluminação para um determinado ponto de observação P . Além disso, por meio da continuação analítica, as soluções disponíveis para os problemas EM com fontes de pontos reais podem ser facilmente convertidas em soluções com iluminação de CSP. Isso quer dizer que uma vez que se conhece a função de Green para o problema em questão, as locações complexas podem ser definidas para os argumentos de fonte dessa função. Isso permitirá calcular a resposta do ambiente para um feixe CSP [17].

A aplicação da expansão de feixes CSP tem sido combinada a outras técnicas

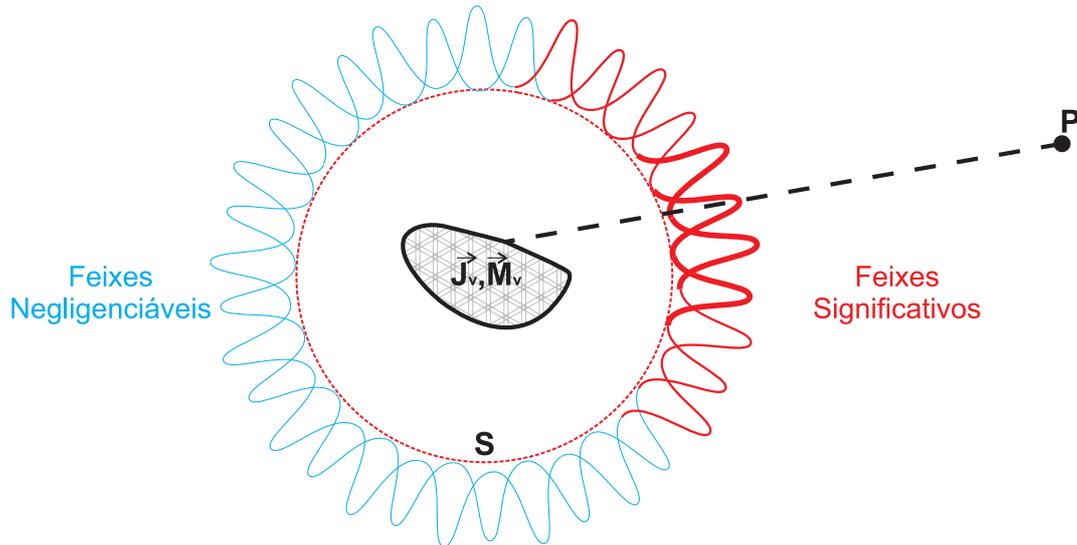


Figura 3.1: Somente uma pequena porção dos feixes permanecem significativos em P .

já consagradas. Kim [22], por exemplo, mesclou a expansão de feixes à extensão do método da teoria geométrica uniforme da difração (UTD) [23] e demonstrou que esta combinação pode prevenir problemas com as cústicas. Outra aplicação recente é encontrada na análise de grandes antenas refletoras [24].

Neste capítulo empregamos uma extensão complexa do princípio da equivalência [25] visando à expansão do vetor de campo EM com feixes CSP de uma superfície fechada S , envolvendo as fontes. O princípio da equivalência para fontes reais é primeiramente aplicado para representar o campo fora de S com fontes equivalentes dentro de S [25, 26]. Atribuímos, em seguida, valores complexos aos parâmetros de superfície para que as novas correntes equivalentes estejam localizadas, agora, na superfície complexa.

Três variantes do princípio da equivalência [17, 27] proporcionam três representações distintas dos feixes CSP, que são investigadas a partir de uma superfície esférica de expansão. Em duas destas representações emprega-se a função de Green no espaço livre em correspondência a duas diferentes equivalências no espaço livre. Na terceira, uma função de Green especial se torna necessária para uma esfera cuja superfície é uma esfera condutora magnética perfeita (CMP).

Esta função de Green especial pode ser representada, por convenção, como uma expansão de autofunções convergentes em termos de harmônicos esféricos. Essa expansão converge muito lentamente para esferas eletricamente grandes. No entanto, uma aproximação assintótica de alta frequência da função de Green especial para a esfera CMP pode ser utilizada no princípio da equivalência anterior para calcular os campos do CSP de forma rápida e precisa [17].

A seguir, retomaremos e detalharemos as propriedades analíticas das expansões de feixe CSP investigadas [17, 27]. Apresentaremos orientações para a seleção do número de feixes necessários a fim de satisfazer um determinado critério de erro. Mostraremos, ainda, um algoritmo de truncamento simples para que se consiga atingir um controle médio de erro na região de validade da expansão. Trataremos, por fim, da escolha ideal do parâmetro de feixe.

3.2 A Representação de um Feixe CSP

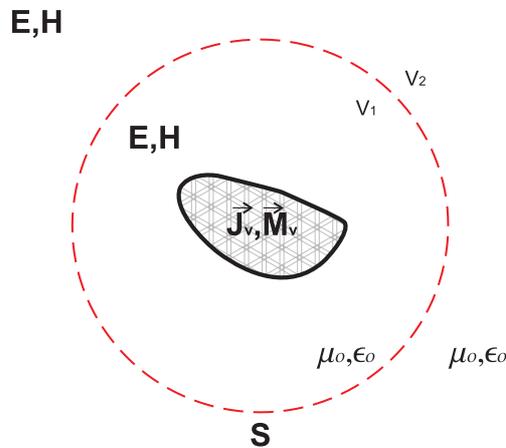


Figura 3.2: Densidade volumétrica de correntes.

Consideremos a distribuição de um conjunto de densidades volumétricas de corrente elétrica \vec{J}_v e magnética \vec{M}_v que irradiam o campo elétrico \mathbf{E} e o campo magnético \mathbf{H} no espaço livre, como ilustra a Figura 3.2. Estas correntes podem representar, por exemplo, a alimentação do refletor de uma antena, a abertura de um guia de ondas, ou uma estrutura de dispersão (por exemplo, um subrefletor em um sistema multirefletor). Portanto, é necessário que as fontes possam ser envolvidas pela superfície esférica S de raio a . O objetivo é representar os campos \mathbf{E} , \mathbf{H} em termos de feixes CSP irradiados a partir da esfera. Para este fim, três tipos diferentes de teoremas de superfície equivalente foram considerados [17, 27].

3.2.1 Método 1: Expansão CSP com Densidades de Correntes Equivalentes Elétricas e Magnéticas

As correntes elétrica \vec{J}_{eq} e magnética \vec{M}_{eq} equivalentes localizadas sobre a esfera de raio a geram os campos, junto com outras fontes externas se existirem, fora da superfície

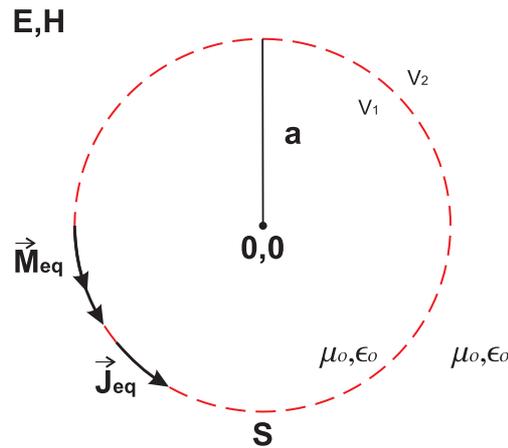


Figura 3.3: Problema equivalente com fontes de corrente elétrica e magnética.

S :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{eq}(\mathbf{r}') + \overline{\overline{G}}_{em}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}_{eq}(\mathbf{r}') \right] a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi', \quad (3.1)$$

ou ainda:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot [\hat{r}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')] + \overline{\overline{G}}_{em}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \hat{r}'] \right\} a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi', \quad (3.2)$$

onde r' é o vetor radial na esfera. $\vec{\mathbf{J}}_{eq}$ e $\vec{\mathbf{M}}_{eq}$ irradiam no espaço livre, como ilustra a Figura 3.3. Em (3.1), $\overline{\overline{G}}_{ee}$ e $\overline{\overline{G}}_{em}$ denotam as funções diádicas de Green das fontes de correntes elétrica e magnética, respectivamente, no espaço livre. Estas $\overline{\overline{G}}_{ee}$ e $\overline{\overline{G}}_{em}$ estão disponíveis em forma fechada [26]. Uma vez que $|\mathbf{r}'| = a$ define a esfera S em (3.1), podemos estendê-la analiticamente em um novo valor análogo ao valor em [17,20,27,28]:

$$a \rightarrow \tilde{a} = a - jb_0. \quad (3.3)$$

A seguinte relação é satisfeita pelos pontos nesta nova esfera complexa \tilde{S} :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \tilde{a}^2, \quad (3.4)$$

onde as coordenadas x' , y' e z' podem ser complexas. A nova esfera complexa possui, então, a seguinte representação paramétrica:

$$\tilde{\mathbf{r}}' = \mathbf{f}_r(\theta', \phi') - j\mathbf{f}_i(\theta', \phi'), \quad (3.5)$$

onde

$$\mathbf{f}_r(\theta', \phi') = a\hat{r}'(\theta', \phi'), \quad (3.6)$$

$$\mathbf{f}_i(\theta', \phi') = b_o\hat{r}'(\theta', \phi'), \quad (3.7)$$

e θ', ϕ' são reais. Substituindo (3.5) em (3.2) temos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}') \cdot \left[\hat{r}' \times \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{r}}') \right] + \overline{\overline{G}}_{em}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}') \cdot \left[\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{r}}') \times \hat{r}' \right] \right\} \tilde{a}^2 \sin \theta' d\theta' d\phi', \quad (3.8)$$

onde o vetor normal unitário \hat{r}' permanece real, uma vez que $\tilde{\mathbf{r}}' = \tilde{a}\hat{r}'$.

Retomemos o exposto na Seção 2.4: as funções diádicas de Green no espaço livre $\overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}')$, $\overline{\overline{G}}_{em}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}')$ com uma localização de raios complexos geram um vetor CSP. A parte real $\mathbf{f}_r(\theta', \phi')$ do vetor de localização complexa designa os centros dos feixes (centros de cintura dos feixes) que lançam os feixes CSP, neste caso, a esfera S . A parte imaginária $\mathbf{f}_i(\theta', \phi')$ determina a direção \hat{r}' dos eixos dos feixes, bem como o tamanho da cintura do feixe $w_o = \sqrt{8b_o/k}$. Sendo assim, a representação em (3.8) está na forma de uma expansão de feixe CSP cujos centros de feixe se encontram sobre a esfera S e os eixos de feixe se dirigem radialmente para fora (para $b_o > 0$), conforme ilustrado na Figura 3.4. Os coeficientes de feixe ou pesos, ou seja, as fontes equivalentes ($\vec{\mathbf{J}}_{eq}$, $\vec{\mathbf{M}}_{eq}$), são facilmente calculados através desta formulação dos campos (\mathbf{E} , \mathbf{H}) de fontes conhecidas presumidas ($\vec{\mathbf{J}}_v$, $\vec{\mathbf{M}}_v$) dentro de S e avaliadas nas locações complexas.

Observemos que a integração em (3.8) deve ser avaliada numericamente através de discretização. Logo, (3.8) gera um conjunto discreto de feixes, ou uma expansão de feixe.

O ponto de observação deve ser externo à esfera. Isso quer dizer que a representação com fontes reais em (3.2) é válida quando $|\mathbf{r}| > |a|$. No caso complexo em (3.8), somente para $|\mathbf{r}| > |\tilde{a}|$ a representação permanecerá exata. No entanto, com precisão limitada, a expansão de (3.8) ainda pode ser utilizada em um sentido aproximado para $a < |\mathbf{r}| > |\tilde{a}|$.

3.2.2 Método 2: Expansão CSP com Densidades de Correntes Equivalentes Elétricas

A Figura 3.5 ilustra que é possível alcançar uma expansão alternativa do feixe CSP por meio de uma formulação de problema equivalente diferente, na qual se invalida a restrição de que os campos devem ter valor zero no interior da esfera. Em vez disso,

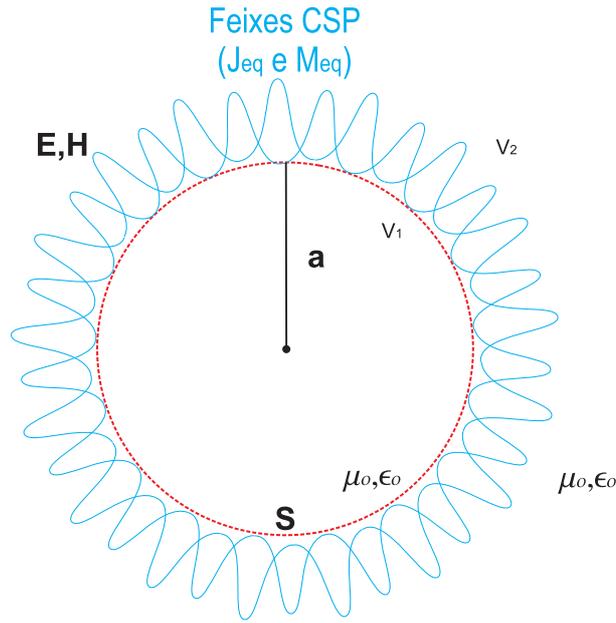


Figura 3.4: Problema equivalente com fontes complexas de corrente elétrica e magnética para o método 1.

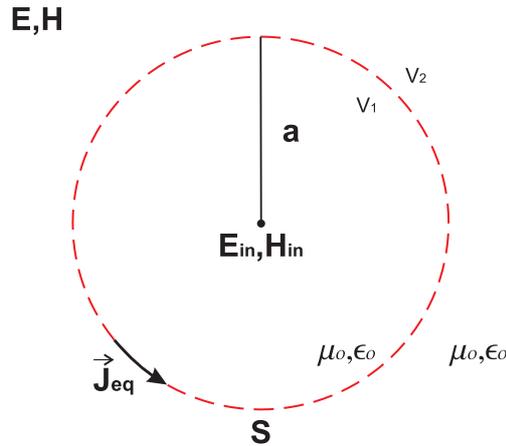


Figura 3.5: Problema equivalente com fontes de corrente elétrica somente.

a componente tangencial de \mathbf{E} ou \mathbf{H} deve ser contínua na esfera. Assim, conforme a Figura 3.5, temos:

$$\hat{\mathbf{r}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') = \hat{\mathbf{r}}' \times \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}' \in S. \quad (3.9)$$

Com o campo elétrico tangente contínuo através de S , não há correntes magnéticas equivalentes em S . No entanto, podemos definir uma corrente elétrica equivalente $\vec{\mathbf{J}}_{eq}$ criando, assim, o campo $(\mathbf{E}_{\text{in}}, \mathbf{H}_{\text{in}})$ e (\mathbf{E}, \mathbf{H}) dentro e fora de S , respectivamente. É importante observarmos que $\vec{\mathbf{J}}_{eq}$ e (3.3) são diferentes para o caso da Seção 3.2.1. A

representação equivalente, neste caso, se dá como se segue:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{eq}(\mathbf{r}') \right] a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'. \quad (3.10)$$

A exemplo do que foi tratado na Seção 3.2.1, atribuímos ao raio da esfera um valor denotado por \tilde{a} para a representação do feixe CSP desejada, similar a (3.8), conforme:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}') \cdot \mathbf{J}_{eq}(\tilde{\mathbf{r}}') \right] \tilde{a}^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'. \quad (3.11)$$

Os coeficientes dos feixes, ou $\vec{\mathbf{J}}_{eq}$, podem ser obtidos por meio da resolução desta equação integral numa superfície de teste. A seguir, apresentamos uma abordagem simples de solução numérica. A equação integral (3.11) é primeiro discretizada utilizando amostragem de ponto na esfera complexa:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^Q \overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}'_q) \cdot \mathbf{w}_q(\tilde{\mathbf{r}}'_q), \quad (3.12)$$

onde Q é número total de feixes nesta expansão discreta, \mathbf{w}_q (para $q = 1, 2, \dots, Q$) representa as funções de peso desconhecidas a serem resolvidas e $\tilde{\mathbf{r}}'_q = \tilde{a}\hat{\mathbf{r}}'_q$ denota a localização complexa das fontes. Este vetor de peso pode ser dividido em duas componentes tangenciais, gerando:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^Q \overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}'_q) \cdot (\hat{\theta}'_q w_q^\theta + \hat{\phi}'_q w_q^\phi). \quad (3.13)$$

Esta equação é testada em relação ao ponto em uma superfície esférica de raio a_t , onde $a_t > |\tilde{a}|$

$$\hat{\theta}_p \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})_p = \sum_{q=1}^Q \hat{\theta}_p \cdot \overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}_p|\tilde{\mathbf{r}}'_q) \cdot (\hat{\theta}'_q w_q^\theta + \hat{\phi}'_q w_q^\phi). \quad (3.14)$$

$$\hat{\phi}_p \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})_p = \sum_{q=1}^Q \hat{\phi}_p \cdot \overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}_p|\tilde{\mathbf{r}}'_q) \cdot (\hat{\theta}'_q w_q^\theta + \hat{\phi}'_q w_q^\phi), \quad (3.15)$$

onde $p = 1, 2, \dots, P$ e os pontos de teste são alocados em $\mathbf{r}'_p = a_t \hat{\mathbf{r}}_p$. Podemos converter estas equações lineares em uma equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_\theta \\ \mathbf{V}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\theta\theta} & \mathbf{Z}_{\theta\phi} \\ \mathbf{Z}_{\phi\theta} & \mathbf{Z}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_\theta \\ \mathbf{W}_\phi \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

onde:

$$[\mathbf{Z}_{\theta\theta}]_{pq} = \hat{\theta}_p \cdot \overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}_p | \tilde{\mathbf{r}}'_q) \cdot \hat{\theta}'_q, \quad (3.17)$$

$$[\mathbf{Z}_{\theta\phi}]_{pq} = \hat{\theta}_p \cdot \overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}_p | \tilde{\mathbf{r}}'_q) \cdot \hat{\phi}'_q, \quad (3.18)$$

$$[\mathbf{Z}_{\phi\theta}]_{pq} = \hat{\phi}_p \cdot \overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}_p | \tilde{\mathbf{r}}'_q) \cdot \hat{\theta}'_q, \quad (3.19)$$

$$[\mathbf{Z}_{\phi\phi}]_{pq} = \hat{\phi}_p \cdot \overline{\overline{G}}_{ee}(\mathbf{r}_p | \tilde{\mathbf{r}}'_q) \cdot \hat{\phi}'_q, \quad (3.20)$$

$$[\mathbf{W}_\theta]_q = w_q^\theta, \quad (3.21)$$

$$[\mathbf{W}_\phi]_q = w_q^\phi, \quad (3.22)$$

$$[\mathbf{V}_\theta]_p = \hat{\theta}_p \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})_p, \quad (3.23)$$

$$[\mathbf{V}_\phi]_p = \hat{\phi}_p \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})_p. \quad (3.24)$$

Com a condição de que $[\mathbf{V}_\theta]_p$ e $[\mathbf{V}_\phi]_p$ de (3.23) e (3.24), respectivamente, sejam conhecidos através de $\vec{\mathbf{J}}_v$ e $\vec{\mathbf{M}}_v$, a solução para a equação matricial em (3.16) produz os pesos de feixe desconhecidos.

3.2.3 Método 3: Expansão CSP com Densidades de Correntes Equivalentes Elétricas em uma Esfera Complexa CMP

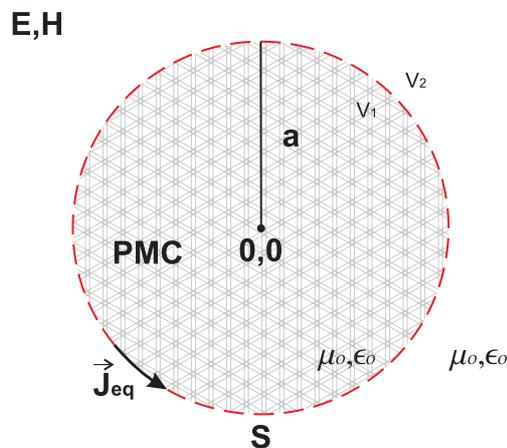


Figura 3.6: Problema equivalente com somente fontes de corrente elétrica e esfera CMP.

Um condutor magnético perfeito (CMP) ou um condutor elétrico perfeito (CEP) preenche o volume interno da Figura 3.3, conforme Figura 3.6, gerando um terceiro tipo de problema equivalente. Aqui, as correntes equivalentes $\vec{\mathbf{M}}_{eq}$ são curto-circuitadas e, as restantes, irradiam na presença da superfície fechada esférica CMP. Pelo princípio da dualidade, o mesmo pode ser observado quando as correntes equivalentes $\vec{\mathbf{J}}_{eq}$ são curto-circuitadas e a superfície equivalente é um esfera CEP. Para o método 3 adotaremos o uso da esfera CMP, assim o campo elétrico é expresso da seguinte maneira:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{pmc}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{eq}(\mathbf{r}') \right] a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi', \quad (3.25)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{pmc}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot (\hat{\mathbf{r}}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) \right] a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi', \quad (3.26)$$

onde $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{pmc}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ é a função diádica de Green para radiação de fontes em superfície esférica CMP. Dando prosseguimento, substituímos o raio a da esfera por um raio complexo \tilde{a} . Com isso, de modo semelhante às Seções 3.2.1 e 3.2.2, obtemos a seguinte representação equivalente em termos da continuidade dos feixes CSP:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{pmc}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}') \cdot (\hat{\mathbf{r}}' \times \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{r}}')) \right] a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'. \quad (3.27)$$

A solução exata da série da autofunção conhecida para $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{pmc}$ [29] pode ser usada e analiticamente continuada para o raio complexo. Entretanto, é rápido o crescimento do número de termos da série da solução da autofunção com o aumento de $|\tilde{a}|$. De modo alternativo, temos uma solução uniforme da teoria geométrica de difração (UTD) para a radiação a partir de fontes em superfícies convexas [30]. Esta pode ser utilizada como uma aproximação assintótica a função de Green. A formulação em [30] se destina a uma superfície CEP. Portanto, aplicamos o princípio de dualidade na obtenção das expressões para a extensão complexa para uma superfície CMP.

Na solução UTD, existem duas regiões de interesse, ou seja, regiões iluminadas e de sombras, como ilustrado na Figura 3.7. Sabemos que o CSP irradia fortemente na região dos raios diretos, ou seja, na direção *forward* e insignificamente na região das sombras, também compreendida como sendo os raios orientados para a direção *backward*. Além disso, o eixo do feixe, ao longo do qual o campo de feixe é o mais forte, encontra-se na direção normal para fora da esfera complexa.

Portanto, a maior parte da força do feixe é direcionada para a região fortemente iluminada, como mostrado simbolicamente, pois os raios são complexos e não pode ser representados em um sistema de coordenadas real, na Figura 3.7.

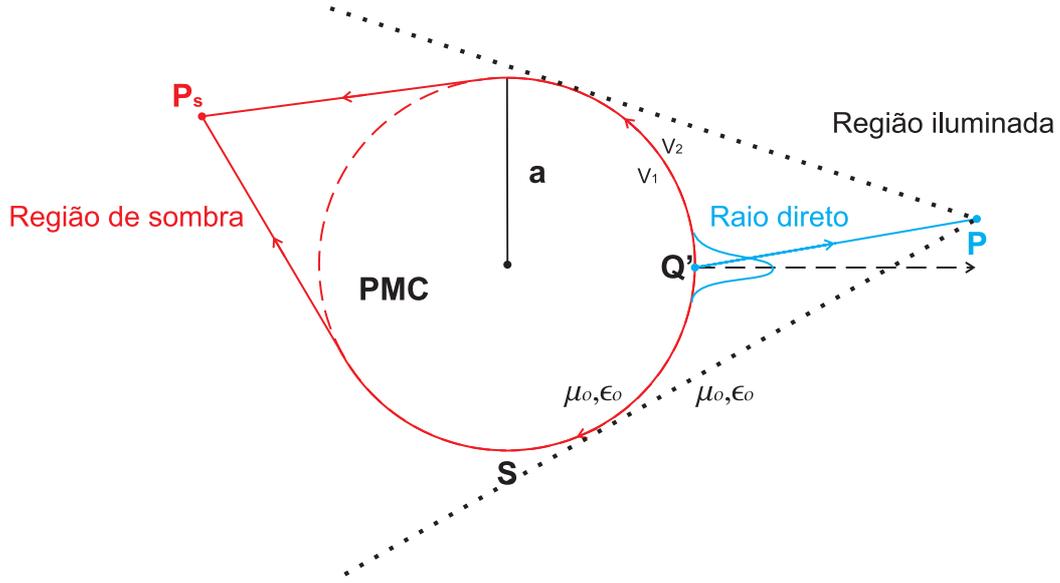


Figura 3.7: A geometria dos raios UTD numa esfera complexa.

Sendo assim, é suficiente tomar a aproximação da região fortemente iluminada [30] e estendê-la ao caso de esfera complexa para avaliar a expansão do feixe em (3.27) se a e b_o forem escolhidos de forma que $Ka > 3$ e $b_o > a$. O campo UTD para região iluminada é dado por [17]:

$$\overline{\overline{G}}_{pmc}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \sim -\frac{jkZ_o}{4\pi} \left[\hat{b}\hat{b}' H^l(\xi_l) - \hat{n}\hat{n}' S^l(\xi_l) \right] \frac{-jkR}{R}. \quad (3.28)$$

Notemos que $\overline{\overline{G}}_{pmc}$ em (3.28) pode ser obtido a partir da formulação em [30], utilizando dualidade. As funções $H^l(\xi_l)$ e $S^l(\xi_l)$ estão relacionadas ao tipo de funções de Fock de irradiação [30] e possuem as seguintes formas limitadoras para a região fortemente iluminada [31]:

$$H^l(\xi_l) \sim 2 - \frac{j}{2\xi_l^3}, \quad (3.29)$$

$$S^l(\xi_l) \sim 2\cos\theta^i \left(1 + \frac{j}{2\xi_l^3} \right), \quad (3.30)$$

onde

$$\xi_l = -m\cos\theta^i, \quad (3.31)$$

$$m = \left(\frac{ka}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.32)$$

$$\cos\theta^i = \hat{n}' \cdot \hat{R}, \quad (3.33)$$

e $\mathbf{R} = \overline{Q'P}$, $R = |\mathbf{R}|$ e $\hat{R} = \mathbf{R}/R$.

Os vetores unitários em (3.28) são definidos na Figura 3.8. Notemos que $(\hat{n}, \hat{b}, \hat{R})$ são fixados ao raio e $(\hat{n}', \hat{b}', \hat{t}')$ são fixados à superfície no ponto real Q' , onde $\hat{n}' = \hat{r}'$. Utilizando as formas limitadoras de H^l e S^l e continuando analiticamente o raio a para o valor complexo \tilde{a} , podemos escrever a função diádica de Green para o campo de feixe CSP na presença do CMP como segue:

$$\overline{\overline{G}}_{pmc}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}') = -\frac{jkZ_o}{4\pi} \left[\hat{b}\hat{b}' 2 \left(1 - \frac{j}{4\tilde{\xi}_l^3} \right) - \hat{n}\hat{t}' 2 \cos\tilde{\theta}^i \left(1 + \frac{j}{4\tilde{\xi}_l^3} \right) \right] \frac{-jk\tilde{R}}{\tilde{R}}. \quad (3.34)$$

Na sequência temos as definições dos parâmetros complexos a partir das contrapartes reais:

$$\tilde{\xi}_l = -\tilde{m} \cos\tilde{\theta}^i, \quad (3.35)$$

$$\tilde{m} = \left(\frac{k\tilde{a}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.36)$$

$$\cos\tilde{\theta}^i = \hat{n}' \cdot \hat{R}, \quad (3.37)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \overline{Q'P}, \quad (3.38)$$

$$\tilde{R} = |\tilde{\mathbf{R}}|, \quad (3.39)$$

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{\mathbf{R}}/\tilde{R}, \quad (3.40)$$

onde a fonte \tilde{Q}' se localiza sobre a esfera complexa $\tilde{a}\hat{r}'$. Incorporando o parâmetro de Fock ξ_l em (3.35) e (3.36) com (3.34), temos a seguinte forma simples da função de Green:

$$\overline{\overline{G}}_{pmc}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}') \sim -\frac{jkZ_o}{4\pi} \left[\hat{b}\hat{b}' 2 \left(1 + \frac{j}{4k\tilde{a}\cos^3\tilde{\theta}^i} \right) - \hat{n}\hat{t}' 2 \cos\tilde{\theta}^i \left(1 - \frac{j}{2k\tilde{a}\cos^3\tilde{\theta}^i} \right) \right] \frac{-jk\tilde{R}}{\tilde{R}}. \quad (3.41)$$

Os vetores unitários satisfazem as seguintes relações:

$$\hat{\tilde{R}} = \hat{n}' \cos\tilde{\theta}^i + \hat{t}' \sin\tilde{\theta}^i, \quad (3.42)$$

$$\hat{b} = \hat{\tilde{R}} \times \hat{n}, \quad (3.43)$$

$$\hat{b}' = \hat{t}' \times \hat{n}', \quad (3.44)$$

e o vetor unitário binormal complexo é $\hat{b} = \hat{b}'$. Observemos que $(\hat{n}', \hat{b}', \hat{R}')$ são fixados ao raio complexo e $(\hat{n}', \hat{b}', \hat{t}')$ são fixados à superfície complexa no ponto \tilde{Q}' . A normal para a esfera permanece real $\hat{n}' = \hat{r}'$. A representação desejada do feixe é obtida com

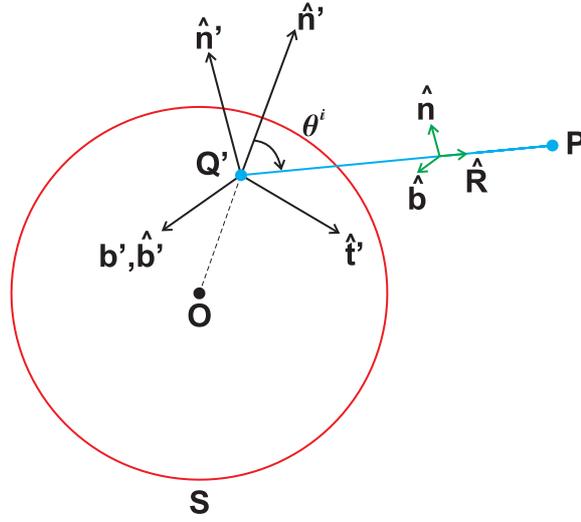


Figura 3.8: As definições dos vetores unitários para os pontos de fonte real sobre a esfera.

a incorporação da função de Green aproximada UTD de (3.34) na integral em (3.27). Notemos que sem o segundo conjunto de termos em parênteses de (3.34), a função de Green se reduz simplesmente à aproximação da ótica geométrica (GO) com raios complexos. Entretanto, verificamos, a partir de resultados numéricos, que a presença desse segundo conjunto de termos amplia significativamente a precisão da expansão na maioria dos casos [17].

Embora a expressão em (3.34) e (3.41) seja semelhante a um feixe CSP, ela não está sob esta forma no sentido estrito, uma vez que o segundo conjunto de termos em parênteses depende do ângulo complexo $\tilde{\theta}^i$. No entanto, para desfazer essa dependência, podemos realizar a aproximação $\tilde{\theta}^i = 0$ na definição do parâmetro de Fock ($\tilde{\xi}_l = -\tilde{m}$), de tal forma que a função de Green em (3.34) será precisa para as direções ao longo do eixo do feixe onde o campo do feixe é mais forte e, gradualmente, se torna menos precisa para as direções mais distantes do eixo do feixe onde o campo do feixe se torna mais fraco. A função de Green, com esta modificação, toma a seguinte forma [17]:

$$\overline{\overline{G}}_{pmc}(\mathbf{r}|\tilde{\mathbf{r}}') \sim -\frac{jkZ_o}{4\pi} \left[\hat{b}\hat{b}' 2 \left(1 + \frac{j}{4k\tilde{a}} \right) - \hat{n}\hat{t}' 2 \cos \tilde{\theta}^i \left(1 - \frac{j}{2k\tilde{a}} \right) \right] \frac{-jk\tilde{R}}{\tilde{R}}. \quad (3.45)$$

Notemos que (3.45) está agora na forma de um feixe CSP escalonado com duas constantes para as duas polarizações independentes. Esta representação é observada para dar precisão suficiente aos feixes diretivos ($b_o > 2a$) [17].

3.3 Detalhes da Implementação da Expansão do CSP

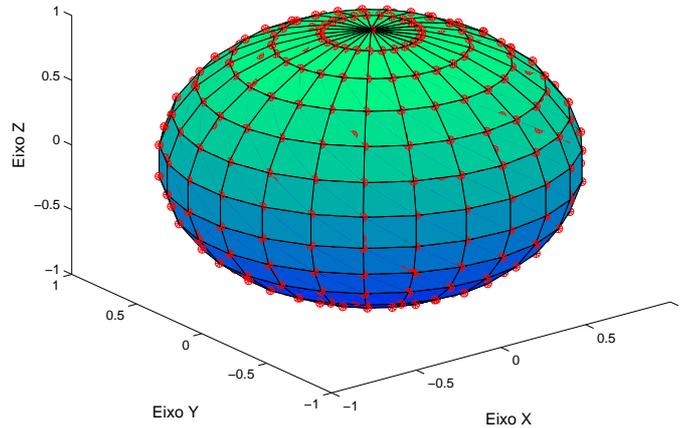


Figura 3.9: Discretização da esfera unitária.

O feixe em (3.12) é representado como um somatório, de acordo com o que vimos na Seção 3.2.2 e em [17,27]. No entanto, os feixes são desconhecidos e um procedimento de correspondência numérica é utilizado para calculá-los. Para o cálculo, é necessária a discretização da esfera de expansão, semelhante à da Figura 3.9. Nesta figura, os pontos representam os centros dos feixes distribuídos na esfera quase uniformemente. Logo, as variações em θ são mantidas semelhantes para todos os anéis e aproximadamente iguais às variações em θ , que são constantes. As expansões de feixes CSP em (3.8) e (3.11) são representadas na forma de integrais sobre a esfera complexa e necessitam ser discretizadas por técnicas numéricas. Uma das avaliações que podem ser realizadas refere-se à utilização de um dos modelos de integração numérica já bem estabelecidos. A eficiência ou a taxa de convergência destas expansões dependem do esquema de integração empregado na avaliação numérica. De acordo com estudos numéricos, uma avaliação eficiente da integral pode ser atingida por meio de uma integração de quadratura de Gauss em θ aliada à regra de integração de ponto médio em ϕ , fornecendo um conjunto compacto de feixes [32].

Estudos numéricos foram realizados [17, 27] para compreender os efeitos dos parâmetros no raio complexo $\tilde{a} = a - jb_o$ sobre a precisão e eficiência da expansão. Estes estudos revelaram que para uma representação de feixe convergir rapidamente, a escolha de a deve ocorrer de tal forma que S se torne a menor esfera a envolver completamente todas as fontes ($\vec{\mathbf{J}}_v$ e $\vec{\mathbf{M}}_v$). Ora, se o tamanho da superfície S aumenta,

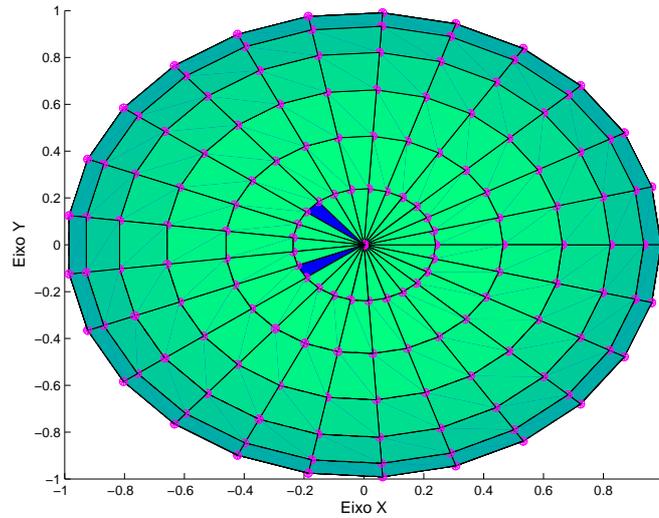


Figura 3.10: Discretização da esfera unitária no plano $x - y$.

é necessário inserir nela mais feixes, de modo a manter a densidade de feixes alta o suficiente para uma representação precisa.

Observamos, ainda, que a dependência do número de CSPs necessários para um determinado parâmetro de feixe b_o é relativamente pequena. No entanto, se b se torna muito grande, é preciso que se aumentem os pontos sobre a superfície da esfera. Por outro lado, se $b_o = cL$ se torna muito pequeno, as localizações das correntes equivalentes assemelham-se a de uma esfera real com raio a .

Neste caso, para evitar as variações rápidas dos campos da fonte na região próxima, é necessário que a seja um pouco maior (aproximadamente um comprimento de onda) do que a esfera mínima para circundar as fontes originais ($\vec{\mathbf{J}}_v$ e $\vec{\mathbf{M}}_v$).

A expansão de uma distribuição de feixes com representação CSP demanda um determinado número de feixes (N_b). O número de feixes necessários para esta expansão, por sua vez, é dependente do erro de limiar ($\epsilon_t = 10^{-\alpha}$) e do parâmetro do feixe ($b_o = cL$), onde c e α são números reais positivos e L é o diâmetro mínimo da esfera que envolve as fontes ($\vec{\mathbf{J}}_v$ e $\vec{\mathbf{M}}_v$).

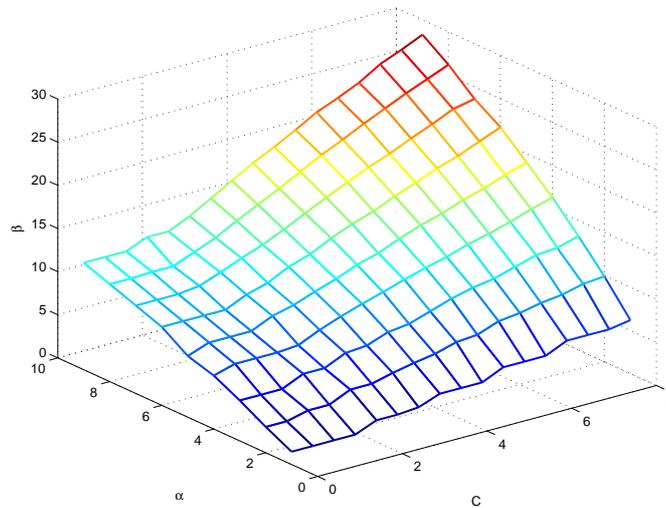
Para quantificar o número de N_b necessários em um problema de expansão CSP [17,27] em casos bidimensionais, temos:

$$N_b = \sqrt[3]{kL + \beta(kL)}, \quad (3.46)$$

onde β é um número positivo real. Na Figura 3.11 observamos o comportamento de β em função dos parâmetros c e α . Feixes com cinturas maiores tendem a requerer mais feixes. Logo, este aumento do número de feixes se deve à necessidade de maior precisão

Tabela 3.1: Valores de β para diferentes valores de c e α para casos bidimensionais.

$\frac{\alpha \rightarrow}{c \downarrow}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.5	3.0	4.7	6.2	7.1	9.1	10.2	11.3	12.4
0.5	1.5	3.0	4.7	6.9	8.0	9.1	10.2	11.3	12.4
1.0	1.5	3.6	4.7	6.9	8.0	9.1	10.2	11.4	12.4
1.5	1.5	3.6	5.8	6.9	8.0	9.1	10.5	11.4	13.4
2.0	2.5	4.7	5.8	7.1	9.1	10.2	11.4	12.4	13.4
2.5	2.5	4.7	6.9	8.2	9.7	10.9	12.4	13.4	14.5
3.0	2.7	5.3	7.1	9.1	10.6	12.1	13.3	14.7	15.9
3.5	3.6	5.8	8.0	9.9	11.4	12.9	14.4	15.9	17.3
4.0	3.6	6.2	8.3	10.6	12.4	14.1	15.6	17.1	18.7
4.5	3.6	6.9	9.1	11.4	13.1	15.1	16.8	18.4	19.9
5.0	4.7	7.1	9.9	12.1	14.1	15.9	17.9	19.7	21.2
5.5	4.7	8.0	10.5	12.7	15.0	17.0	19.0	20.8	22.6
6.0	4.7	8.3	10.9	13.5	15.7	17.9	19.9	22.0	23.6
6.5	5.8	8.8	11.6	14.1	16.6	18.9	21.0	23.1	24.7
7.0	5.8	9.1	12.3	14.8	17.3	19.7	22.0	24.2	26.2
7.5	5.8	9.7	12.5	15.6	18.2	20.7	23.1	25.2	27.2
8.0	6.2	9.9	13.2	16.3	19.0	21.7	23.6	26.2	28.3

Figura 3.11: Os valores de β para diferentes valores de α e c .

da expansão.

A Tabela 3.1 fornece o parâmetro β obtido para um conjunto de valores de erro de limiar ($\epsilon_t = 10^{-\alpha}$) e c . Adotamos estes valores para gerar a Figura 3.11. Nos casos em que não há correspondência exata entre os parâmetros ϵ_t e c de um determinado problema e os parâmetros da Tabela 3.1, é possível obter uma estimativa para β por meio de uma interpolação linear simples.

Na Figura 3.12 apresentamos o número de feixes N_b necessários em função dos parâmetros kL e c para uma escolha particular de $\alpha = 4$. O critério das observações feitas aqui é o mesmo utilizado para a Figura 3.11: cinturas de feixes maiores requerem maior número de feixes.

Recorrendo a (3.46) e estabelecendo L , o diâmetro do círculo que circunda as fontes, como sendo igual a 5 e o parâmetro c igual a 2. Deste modo para um conjunto de diferentes valores de erro de limiar temos a necessidade de diferentes de feixes N_b , conforme estabelecido na Tabela 3.2. Deve ser observado que os valores de β da Tabela 3.2 são obtidos através da Tabela 3.1.

Tabela 3.2: Números de feixes N_b e β empregados na expansão CSP para $c = 2$ e $L = 5$.

$\alpha \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$N_b \rightarrow$	39	46	50	53	60	63	67	70	73
$\beta \rightarrow$	2.5	4.7	5.8	7.1	9.1	10.2	11.4	12.4	13.4

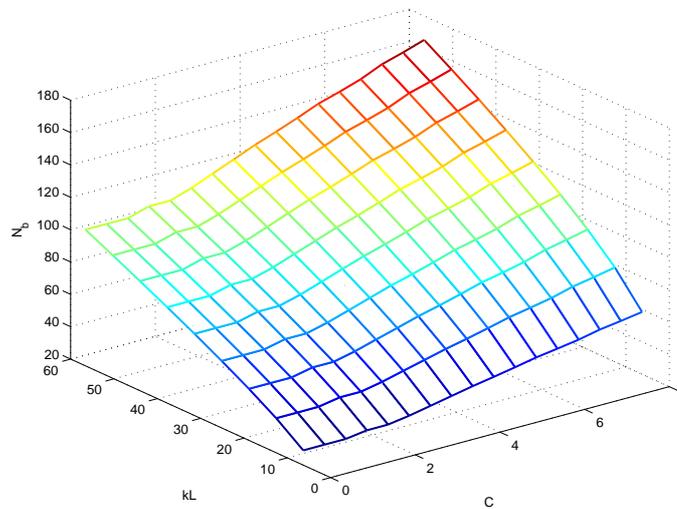


Figura 3.12: Valores de N_b em função de kL e c para o caso particular de $\alpha = 4$.

Em casos tridimensionais, distribuimos os feixes CSP ao longo do domínio de uma esfera uniforme, como na Figura 3.9. Uma vez que a separação entre as amostras em θ é mantida aproximadamente igual, o número de amostras ϕ em cada anel pode ser formado com a aproximação:

$$N_\phi(\theta) = 2N_\theta \sin \theta, \quad (3.47)$$

sendo N_θ o número de anéis em θ e N_ϕ o número de amostras ϕ em cada anel. O número mínimo de N_θ pode ser estimado com mais eficácia traçando uma divisão entre os dados numéricos, como temos a seguir:

$$N_\theta = \alpha_1 kL + \alpha_0, \quad (3.48)$$

onde os parâmetros α_0 e α_1 são tabulados nas Tabelas 3.5 e 3.4 para valores diferentes de b_o e ϵ_t , sendo α_0 e α_1 dependentes dos parâmetros c e α , e as Figuras 3.13 e 3.14 mostram o comportamento destes parâmetros.

Utilizando a (3.48), fazendo $L = 5$ e $c = 2$. Deste modo para um conjunto de diferentes valores de erro de limiar temos os N_θ necessários, empregando as Tabelas 3.4 e 3.5.

Tabela 3.3: Números de feixes N_θ e β empregados na expansão CSP para $c = 2$ e $L = 5$.

$\alpha \rightarrow$	1	2	3	4	5	6
$N_\theta \rightarrow$	16	20	27	32	36	40

Tabela 3.4: Valores de α_1 para diferentes valores de c e α

$\frac{\alpha \rightarrow}{c \downarrow}$	1	2	3	4	5	6
0.0	0.49	0.59	0.49	0.74	0.64	0.73
0.5	0.35	0.47	0.56	0.56	0.68	0.64
1.0	0.32	0.46	0.59	0.64	0.68	0.75
1.5	0.32	0.44	0.64	0.71	0.75	0.84
2.0	0.36	0.44	0.64	0.75	0.84	0.93
2.5	0.36	0.49	0.69	0.83	0.95	1.00
3.0	0.36	0.56	0.72	0.88	1.00	1.07
3.5	0.45	0.61	0.83	0.88	1.03	1.19
4.0	0.44	0.64	0.83	1.00	1.12	1.27
4.5	0.45	0.68	0.87	1.03	1.16	1.35
5.0	0.48	0.75	0.95	1.07	1.25	1.44
5.5	0.49	0.72	0.93	1.12	1.27	1.47
6.0	0.51	0.75	1.00	1.20	1.35	1.51

Para os métodos de expansão nas Seções 3.2.1 e 3.2.3 é necessário realizar uma integração numérica na superfície de expansão, sendo que o número de amostras para um dado ϵ_t depende dos esquemas de integração utilizados. No caso bidimensional, o esquema de integração do ponto médio gera números em concordância com aqueles em (3.46). Já nos casos tridimensionais, um esquema de quadratura gaussiana em θ ,

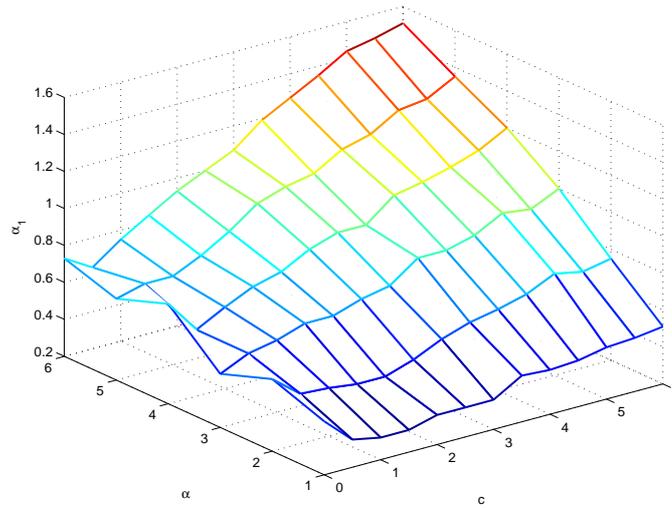


Figura 3.13: O parâmetro α_1 em função de α e c para o caso tridimensional.

Tabela 3.5: Valores de α_0 para diferentes valores de c e α .

$\frac{\alpha \rightarrow}{c \downarrow}$	1	2	3	4	5	6
0.0	2.93	3.33	5.93	5.07	7.00	7.67
0.5	3.27	4.47	5.47	7.47	7.33	9.00
1.0	4.00	4.40	5.33	7.00	8.33	9.20
1.5	4.00	5.20	6.00	7.53	9.20	9.80
2.0	4.33	6.20	7.00	8.20	9.80	10.80
2.5	4.33	6.27	7.40	8.73	9.67	11.67
3.0	5.33	6.47	8.27	9.13	10.67	12.20
3.5	4.93	6.80	7.73	10.13	11.53	12.40
4.0	5.20	7.33	8.73	9.67	11.53	13.00
4.5	5.93	7.33	9.07	10.53	12.47	13.53
5.0	5.87	7.20	8.67	10.87	12.47	13.53
5.5	6.27	8.27	9.80	11.53	13.00	14.47
6.0	6.73	8.20	9.67	11.13	13.53	15.40

juntamente com a regra de ponto médio em ϕ , requer números similares, como em (3.48).

3.4 Região de Validade de Representações de Feixes CSP

Os feixes CSP possuem singularidades de ponto de ramificação e escolhas de ramo [19] (ver Seção 2.2), descritos na Figura 2.1. Se considerarmos uma expansão de feixe CSP a partir de uma superfície esférica com raio complexo $\tilde{a} = a - jb_o$, o lócus dos pontos de

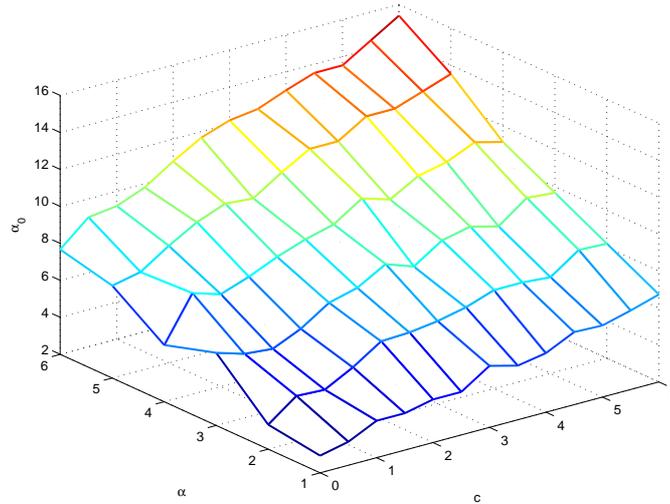


Figura 3.14: O parâmetro α_0 em função de α e c para o caso tridimensional.

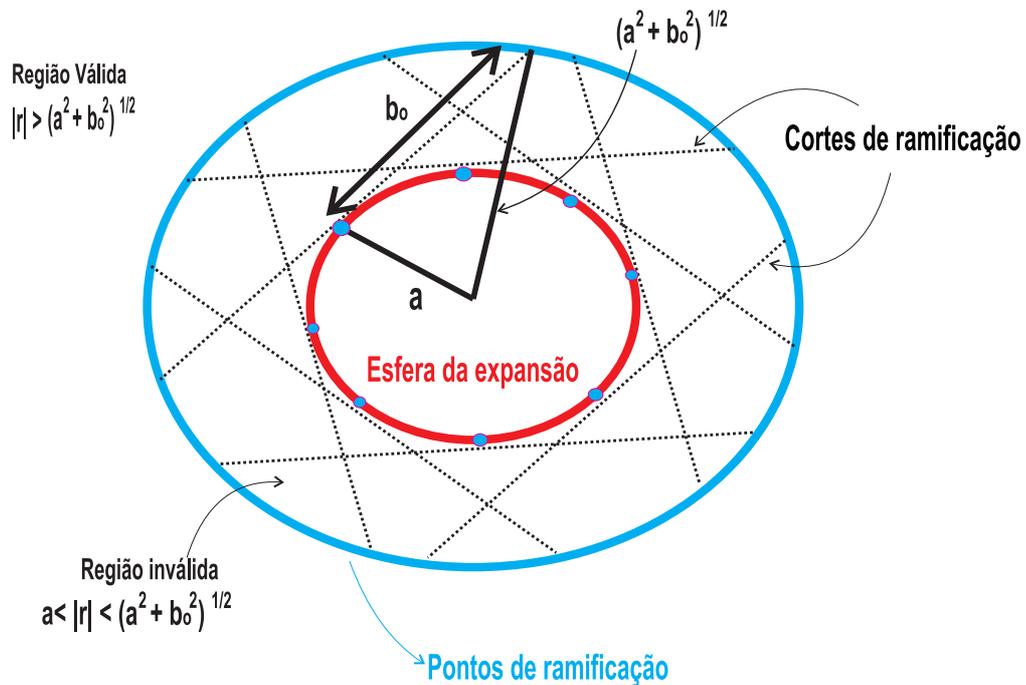


Figura 3.15: As regiões da expansão de feixe CSP.

ramificação formam uma esfera de raio $\sqrt{a^2 + b_0^2}$, conforme observamos na Figura 3.15.

As escolhas de ramo se ocorrem no volume entre as esferas com raios a e $\sqrt{a^2 + b_0^2}$. Para que a expansão do feixe seja válida (ou exata), o ponto de observação e as singularidades do ponto de ramificação e das escolhas de ramo devem estar afastados entre si.

Portanto, a região de validade é definida como o volume infinito excluindo a esfera com raio $\sqrt{a^2 + b_0^2}$. Ainda que o ponto de observação esteja dentro da região inválida,

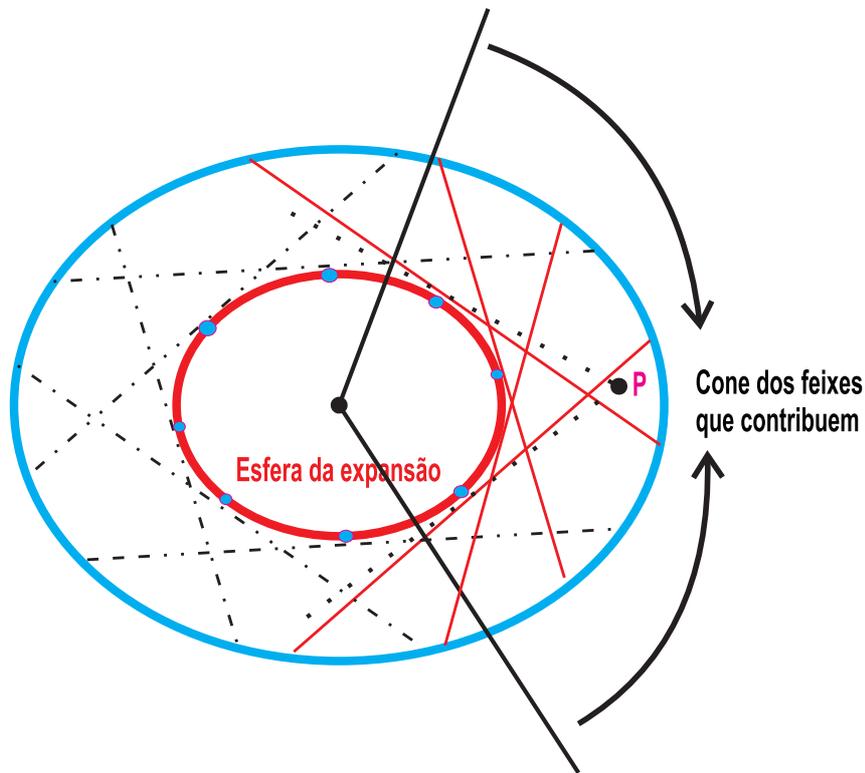


Figura 3.16: Ponto de observação P na região inválida $(a < |b| < \sqrt{a^2 + b_o^2})$.

como na Figura 3.16, é possível calcular o campo com uma precisão limitada.

É importante ressaltar que os feixes CSP irradiam significativamente apenas na direção direta em relação ao ponto de observação, e que os feixes de cor vermelha, ou as linhas contínuas, na Figura 3.16 contribuem fortemente para o campo, ao passo que a contribuição dos feixes na cor preta, as linhas pontilhadas, é desprezível. Se a porção vermelha da esfera na figura contiver informação suficiente para o campo em P , os feixes lançados desta porção podem, ainda, prover precisão limitada. A precisão tende a aumentar na medida em que P se aproxima da esfera exterior.

3.5 Modificações Para o Caso 2-D

Podemos converter as representações de feixes CSP em (3.8), (3.11) e (3.27) em um caso 2-D por meio de dois procedimentos. Primeiramente, substituímos as integrais da superfície sobre uma esfera complexa pela integral de limite sobre o círculo complexo e, em seguida, utilizamos as funções diádicas de Green para 2-D.

Por exemplo, temos a seguinte representação para o método 1 da Seção 3.2.1:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}) = \int_0^{2\pi} \left\{ \overline{\overline{G}}_{ee}(\boldsymbol{\rho}|\tilde{\boldsymbol{\rho}}') \cdot [\hat{\boldsymbol{\rho}}' \times \mathbf{H}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}')] + \overline{\overline{G}}_{em}(\boldsymbol{\rho}|\tilde{\boldsymbol{\rho}}') \cdot [\mathbf{E}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}') \times \hat{\boldsymbol{\rho}}'] \right\} \tilde{a}^2 d\phi', \quad (3.49)$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\rho}}' = \tilde{a}\hat{\boldsymbol{\rho}}'$ e $\hat{\boldsymbol{\rho}}' = \hat{x} \cos \phi' + \hat{y} \sin \phi'$.

A função diádica de Green de UTD para a radiação de uma fonte na presença do cilindro CMP infinito para uma fonte real é dada conforme segue [30]:

$$\overline{\overline{G}}_{pmc}(\boldsymbol{\rho}|\boldsymbol{\rho}') \sim -\sqrt{\frac{kZ_o^2}{8\pi}} \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) \left[\hat{b}\hat{b}'H^l(\xi_l) - \hat{n}\hat{t}'S^l(\xi_l) \right] \frac{-jkR}{\sqrt{R}}, \quad (3.50)$$

onde as definições dos vetores unitários e dos parâmetros são as mesmas do caso tridimensional na Seção 3.2.3.

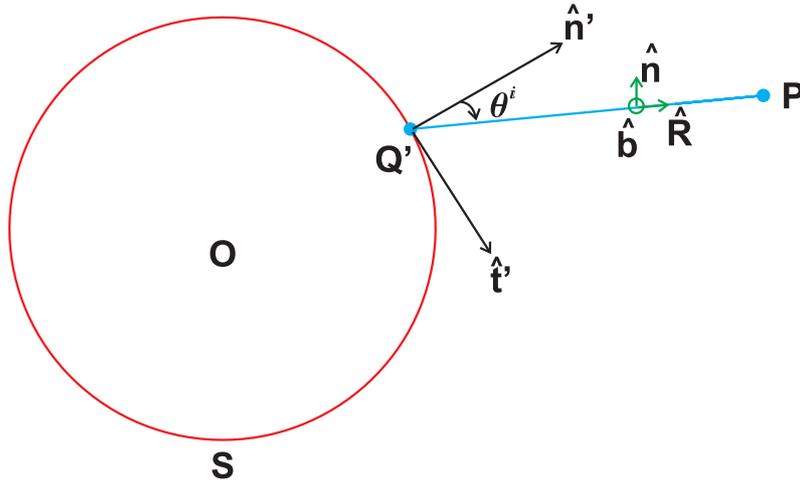


Figura 3.17: As definições dos vetores unitários para os pontos de fonte real sobre o cilindro circular infinito.

Os vetores unitários $(\hat{n}, \hat{b}, \hat{R})$ estão fixados ao raio e $(\hat{n}', \hat{b}', \hat{t}')$ estão fixados à superfície no ponto Q' , como visto na Figura 3.17, onde $\hat{n}' \cdot \hat{R} = \cos \theta^i$, $\hat{R} = \hat{n}' + \hat{t}' \sin \theta^i$ e $\hat{b} = \hat{R} \times \hat{n} = \hat{b}' = \hat{t}' \times \hat{n}'$. Realizamos, então, a extensão complexa e utilizamos as formas limitadoras para as funções de Fock. As funções de Green resultantes possuem a seguinte forma:

$$\overline{\overline{G}}_{pmc}(\boldsymbol{\rho}|\tilde{\boldsymbol{\rho}}') \sim -\sqrt{\frac{kZ_o^2}{8\pi}} \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) \left[\hat{b}\hat{b}'2 \left(1 + \frac{j}{4k\tilde{a}\cos^3\tilde{\theta}^i}\right) - \hat{n}\hat{t}'2\cos\tilde{\theta}^i \left(1 - \frac{j}{2k\tilde{a}\cos^3\tilde{\theta}^i}\right) \right] \frac{-jk\tilde{R}}{\tilde{R}}. \quad (3.51)$$

3.6 Considerações Finais

Neste capítulo, as expansões CSPs foram estabelecidas de acordo com o princípio da equivalência [26, 33] e os três métodos descritos demonstram ser uma boa aproximação numérica para cálculo de problemas EM. A convergência dos métodos é similar, conforme [17]. No entanto, o emprego destes modelos deve ser considerado de acordo com as características de cada um.

No Método 1, os coeficientes de feixe são computados diretamente do campo da fonte original. Deste modo, existe a necessidade de soluções numéricas. No entanto, ambas as densidades de correntes são necessárias para que seja estabelecida a expansão CSP. Por sua vez, o método 2 necessita de apenas uma densidade de corrente. Contudo, os coeficientes de feixe são computados com auxílio de técnicas numéricas para solução da equação matricial, que para ambientes eletricamente grandes pode comprometer a eficiência do método. No método 3, os coeficientes de feixes são computados a partir do campo da fonte original e demanda apenas um tipo de corrente. Entretanto, para alcançar uma boa convergência, é necessária a solução de séries de autofunção, que poderia vir a ser menos interessante computacionalmente que os métodos 1 e 2, devido à necessidade de os termos requeridos da série aumentarem juntamente com o raio da esfera da expansão.

Posteriormente, na Seção 3.3, detalhes sobre o número de feixes requeridos na expansão são estabelecidos. Escolhas primordiais, como o erro de limiar, o parâmetro de feixe e o diâmetro mínimo da esfera que envolve as fontes envolvidas no problema são considerados. Para futuras análises e representação da expansão CSP é necessário recorrer à Seção 3.3 e atender aos requisitos nela estabelecidos.

Um assunto de relevância tratado no Capítulo 2 foi retomado: a região de validade de representações CSPs. A expansão deve ser tratada com os cuidados necessários a fim de que não seja prejudicada pelas singularidades e pela precisão limitada, devido às regiões estabelecidas de acordo com o raio da esfera.

Foi introduzida a possibilidade de que a expansão CSP seja abordada como um círculo de raio complexo para análise de problemas bidimensionais. Tal procedimento comprova que o método é totalmente aplicável a problemas bidimensionais e tridimensionais.

Concluimos, então, que a Expansão CSP de campos eletromagnéticos é completamente apta a ser utilizada para resolução de problemas EM, guardados os critérios de seleção dos feixes e a definição das regiões de validade. Sabendo disso, o próximo capítulo introduz o algoritmo híbrido MoM-CSB, unindo os benefícios do CSBs e do Método dos Momentos para a análise de problemas EM.

Capítulo 4

O Método Híbrido MoM-CSB

4.1 Introdução

O método dos momentos (MoM) [34] tem sido extensivamente utilizado para soluções de problemas de espalhamento eletromagnético e tem sido utilizado como referência na solução de equações integrais.

O MoM baseado em uma equação integral de superfície demanda um número fixo de incógnitas por comprimento de onda ao quadrado na superfície espalhadora, de modo que obtemos $O(f^4)$ para armazenamento e $O(f^6)$ para computação, dado o crescimento de N com o quadrado da frequência f . É possível reduzir a conta operacional para $O(IN^2)$ por iteração, sendo I igual ao número de iterações, comparado a $O(N^2)$ da solução direta, mantendo o mesmo requerimento de memória $O(N^2)$. Para tanto, a equação da matriz MoM resultante deve ser resolvida por métodos iterativos. Nesses processos, o passo mais dispendioso é a repetição do produto matriz-vetor, que se dá uma ou mais vezes a cada iteração.

Tendo conhecimento das vantagens do MoM e dos CSPs, este capítulo tem por objetivo trazer à luz e discutir a possibilidade de adotar o modelo híbrido MoM-CSB [1] como alternativa para análise de problemas de espalhamento eletromagnéticos. Princípios empregados em algoritmos matemáticos anteriores são revisitados [35–39] a fim de se estabelecer uma formulação concisa e eficaz, que possibilite o emprego do modelo. Assim, as seções a seguir estão organizadas de modo a estabelecer a geometria do problema e as equações integrais que o regem, a formulação do MoM convencional e, finalmente, o algoritmo MoM-CSB.

O MoM convencional consiste principalmente em procedimentos capazes de discretizar as equações integrais para estabelecer, de modo eficiente e preciso, as densidades de correntes induzidas desconhecidas. Assim, as equações integrais de campo

elétrico e magnético, EFIE e MFIE respectivamente, são discretizadas com auxílio do Método de Galerkin. O passo adotado a seguir consiste na expansão das correntes envolvidas nas EFIE e MFIE numa série com a seguinte forma:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\rho}') \simeq \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{f}_n(\boldsymbol{\rho}'), \quad (4.1)$$

onde N representa o número de segmentações do objeto em análise, também nomeadas variáveis desconhecidas, f_n representa as funções de base e, I_n , os coeficientes desconhecidos. O produto interno, considerando o domínio ℓ , tem a forma:

$$\int_{\ell} W_i(\boldsymbol{\rho}) \cdot [\dots] d\ell. \quad (4.2)$$

Incorporando a (4.1) às equações integrais, temos um sistema de equações lineares na seguinte forma:

$$[\mathbf{V}] = [\bar{\mathbf{Z}}][\bar{\mathbf{I}}], \quad (4.3)$$

onde \mathbf{V} é o vetor de excitação de dimensão $N \times 1$ cujos elementos são os valores do campo incidente em cada segmento do objeto, $\bar{\mathbf{Z}}$ é a matriz de impedância de dimensão $N \times N$ e $\bar{\mathbf{I}}$ é o vetor solução de dimensão $N \times 1$, que contém o valor dos coeficientes desconhecidos da densidade de correntes induzidas em cada segmento do objeto. $\bar{\mathbf{I}}$ pode ser encontrado através da solução de (4.3), ou:

$$[\bar{\mathbf{I}}] = [\bar{\mathbf{Z}}]^{-1}[\mathbf{V}]. \quad (4.4)$$

4.2 Os Elementos das Matrizes \mathbf{Z} e \mathbf{V}

A seguir, apresentamos a formulação para obtenção dos elementos do vetor de excitação $[\mathbf{V}]$ e da matriz de impedância $[\bar{\mathbf{Z}}]$ para as EFIE e MFIE.

4.2.1 A Formulação para EFIE

O primeiro passo para o desenvolvimento da formulação aplicada à EFIE é a expansão da solução das correntes induzidas J na forma discreta. Deste modo, a discretização

em (4.1) é modificada para:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\rho}') \simeq \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{f}_n(\boldsymbol{\rho}'), \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\rho}')$ são as funções de base. Por conveniência, (4.3) é modificada incluindo o índice (E) para diferenciação das soluções aplicadas ao caso das EFIE. Portanto, temos:

$$[\mathbf{V}^{(E)}] = [\bar{\mathbf{Z}}^{(E)}][\bar{\mathbf{I}}^{(E)}]. \quad (4.6)$$

Os elementos da matriz de impedância $[\bar{\mathbf{Z}}^{(E)}]$ são definidos conforme:

$$Z_{nn'}^{(E)} = - \int_{S_n} \int_{S_{n'}} \mathbf{f}_n(\boldsymbol{\rho}) \cdot \bar{G}(\boldsymbol{\rho}|\boldsymbol{\rho}') \cdot \mathbf{f}_{n'}(\boldsymbol{\rho}') \, d\rho' d\rho, \quad (4.7)$$

onde S_n é o suporte local dos n elementos de base. Os elementos do vetor de excitação $[\mathbf{V}^{(E)}]$ são produzidos por:

$$V_n^{(E)} = \int_{S_n} \mathbf{f}_n(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}^{inc}(\boldsymbol{\rho}) \, d\rho, \quad (4.8)$$

Aplicando as funções de peso para avaliar a equação (4.7), produzimos:

$$\begin{aligned} Z_{nn'}^{(E)} &= jkZ_0 \int_{S_n} \int_{S_{n'}} \mathbf{f}_n(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{f}_{n'}(\boldsymbol{\rho}') \cdot G_0(\boldsymbol{\rho}|\boldsymbol{\rho}') \, d\rho' d\rho \\ &\quad - \frac{jkZ_0}{k} \int_{S_n} \nabla \cdot \mathbf{f}_n(\boldsymbol{\rho}) \int_{S_{n'}} \nabla' \cdot \mathbf{f}_{n'}(\boldsymbol{\rho}') G_0(\boldsymbol{\rho}|\boldsymbol{\rho}') \, d\rho' d\rho. \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.2.2 A Formulação para MFIE

Similarmente ao caso das EFIE, a formulação aplicada à MFIE é a expansão da solução das correntes induzidas J na forma discreta. Deste modo, a discretização em (4.1) é modificada para:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\rho}') \simeq \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{f}_n(\boldsymbol{\rho}'), \quad (4.10)$$

Por conveniência, (4.3) é modificada incluindo o índice (M) para diferenciação das soluções aplicadas ao caso das MFIE. Assim, temos:

$$[\mathbf{V}^{(M)}] = [\bar{\mathbf{Z}}^{(M)}][\bar{\mathbf{I}}^{(M)}]. \quad (4.11)$$

Os elementos da matriz de impedância $[\bar{\mathbf{Z}}^{(M)}]$ são definidos conforme:

$$Z_{nn'}^{(M)} = - \int_{S_n} \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\rho}) \cdot \left[\frac{\mathbf{f}_{n'}(\boldsymbol{\rho}')}{2} - \hat{n} \times \int_{S_{n'}(PV)} \bar{\bar{G}}_{me}(\boldsymbol{\rho}|\boldsymbol{\rho}') \cdot \mathbf{f}_{n'}(\boldsymbol{\rho}') \, d\rho' \right] d\rho, \quad (4.12)$$

onde S_n é o suporte local dos n elementos de base, $\bar{\bar{G}}_{me}$ são as funções diádicas de Green para o campo magnético de uma corrente elétrica, definido por $\bar{\bar{G}}_{me}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = (1/4\pi)\nabla G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \times \bar{\bar{I}}$, e (PV) indica o valor principal da integral de superfície. Os elementos do vetor excitação $[\mathbf{V}^{(M)}]$ são produzidos por:

$$V_n^{(M)} = \int_{S_n} \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\rho}) \cdot \hat{n} \times \mathbf{H}^{inc}(\boldsymbol{\rho}) \, d\rho, \quad (4.13)$$

onde $\mathbf{H}^{inc}(\boldsymbol{\rho}) = -H_y^{inc}(\boldsymbol{\rho})\hat{t}$.

Suponhamos que as funções de teste \mathbf{g}_n compartilhem o mesmo suporte local S_n das funções de base \mathbf{f}_n . Deste modo, o primeiro termo de (4.12) desaparece e, além disso, os vetores \mathbf{f}_n e \mathbf{g}_n são tangentes à superfície. Desta forma, podemos simplificar a (4.12), gerando:

$$Z_{nn'}^{(H)} = - \int_{S_n} \mathbf{g}_n \cdot \int_{S_{n'}} \bar{\bar{G}}_{me}(\boldsymbol{\rho}|\boldsymbol{\rho}') \cdot \mathbf{f}_{n'}(\boldsymbol{\rho}') \, d\rho' d\rho. \quad (4.14)$$

4.3 O Algoritmo MoM-CSB

Como mencionado, o objetivo do MoM-CSB é acelerar o produto matriz-vetor de (4.3). O algoritmo alcança esta aceleração por meio de uma decomposição esparsa da matriz Z , de modo semelhante ao Método Rápido Multipolar [15, 16], de maneira que:

$$[\bar{\mathbf{Z}}] = [\bar{\mathbf{Z}}'] + [\mathbf{U}]^T[\mathbf{T}][\mathbf{U}], \quad (4.15)$$

onde, $[\bar{\mathbf{Z}}']$, $[\mathbf{U}]$ e $[\mathbf{T}]$ são todas matrizes esparsas, $[\bar{\mathbf{Z}}']$ são as interações de autogrupos e grupos próximos, $[\mathbf{U}]$ são os coeficientes do raio CSP e $[\mathbf{T}]$ é a reação entre os raios associados aos grupos bem separados. Os blocos da matriz $[\mathbf{T}]$ que possuem valores diferentes de zero não são diagonais, como no FMM, mas vazios, exceto por um número

pequeno de raios significantes na interação dos grupos G_m e $G_{m'}$. As estruturas destas matrizes são detalhadamente explicadas na sequência.

4.3.1 A Formação dos Grupos

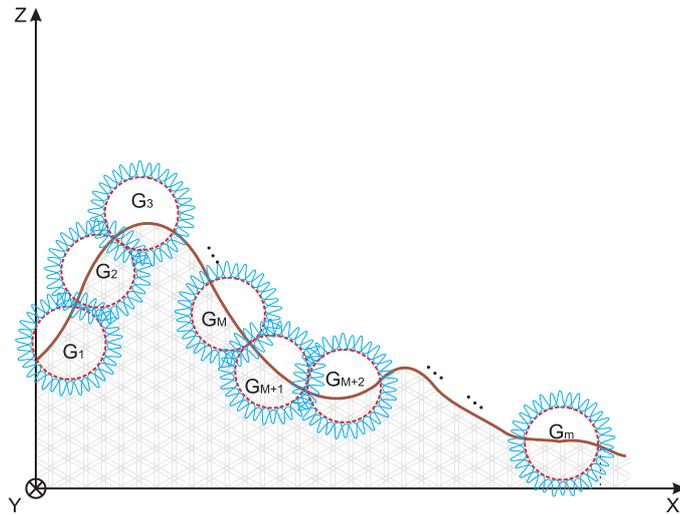


Figura 4.1: A formação dos grupos, cada um possuindo aproximadamente N/M elementos.

Os subdomínios de funções de base definidos na superfície de um determinado problema, por exemplo um perfil topográfico, são primeiramente combinados para formar M grupos de tamanho similar, conforme vemos na Figura 4.1. Para propósitos ilustrativos, a figura ilustra uma geometria bidimensional. Contudo, o método desenvolvido em [1,9] direciona-se também à problemas tridimensionais. O n ésimo grupo é denotado por G_m , e cada elemento no grupo é indexado por i , onde $i = 1, 2, \dots, N/M$. Para fins de simplificação, o número de elementos base em cada grupo será considerado N/M . Entretanto, sabemos que eles podem ser diferentes em problemas práticos. Estabelece-se, então, uma correspondência um-a-um entre (m, i) e o índice global n , produzindo:

$$n \longleftrightarrow (m, i). \quad (4.16)$$

A interação entre os elementos de cada par de grupos pode ser identificada como um sub-bloco na matriz de impedância convencional $[\bar{Z}]$, cuja estrutura pode ser representada como uma combinação de sub-blocos:

Percebemos na Figura 4.2 que se trata de uma matriz densa, com os subdomínios de funções de base. Para melhor entendimento deste processo, a Figura 4.3 apresenta

$$[\bar{Z}] = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,2} & Z_{1,3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{1,M'-2} & Z_{1,M'-1} & Z_{1,M'} \\ Z_{2,1} & Z_{2,2} & Z_{2,3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{2,M'-2} & Z_{2,M'-1} & Z_{2,M'} \\ Z_{3,1} & Z_{3,2} & Z_{3,3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{3,M'-2} & Z_{3,M'-1} & Z_{3,M'} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{m-1,1} & Z_{m-1,2} & Z_{m-1,3} & \cdots & Z_{m-1,m'-1} & Z_{m-1,m'} & Z_{m-1,m'+1} & \cdots & Z_{m-1,M'-2} & Z_{m-1,M'-1} & Z_{m-1,M'} \\ Z_{m,1} & Z_{m,2} & Z_{m,3} & \cdots & Z_{m,m'-1} & Z_{m,m'} & Z_{m,m'+1} & \cdots & Z_{m,M'-2} & Z_{m,M'-1} & Z_{m,M'} \\ Z_{m+1,1} & Z_{m+1,2} & Z_{m+1,3} & \cdots & Z_{m+1,m'-1} & Z_{m+1,m'} & Z_{m+1,m'+1} & \cdots & Z_{m+1,M'-2} & Z_{m+1,M'-1} & Z_{m+1,M'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ Z_{M-2,1} & Z_{M-2,2} & Z_{M-2,3} & \cdots & Z_{M-2,m'-1} & Z_{M-2,m'} & Z_{M-2,m'+1} & \cdots & Z_{M-2,M'-2} & Z_{M-2,M'-1} & Z_{M-2,M'} \\ Z_{M-1,1} & Z_{M-1,2} & Z_{M-1,3} & \cdots & Z_{M-1,m'-1} & Z_{M-1,m'} & Z_{M-1,m'+1} & \cdots & Z_{M-1,M'-2} & Z_{M-1,M'-1} & Z_{M-1,M'} \\ Z_{M,1} & Z_{M,2} & Z_{M,3} & \cdots & Z_{M,m'-1} & Z_{M,m'} & Z_{M,m'+1} & \cdots & Z_{M,M'-2} & Z_{M,M'-1} & Z_{M,M'} \end{bmatrix}$$

Figura 4.2: A estrutura dos sub-blocos da matriz $[\bar{Z}]$.

os elementos da matriz $[\bar{Z}_{1,1'}]$ para o agrupamento G_1 diante da escolha de N/M ser igual a 10 segmentos de um perfil topográfico qualquer.

$$[\bar{Z}_{1,1}] = \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & z_{1,3} & z_{1,4} & z_{1,5} & z_{1,6} & z_{1,7} & z_{1,8} & z_{1,9} & z_{1,10} \\ z_{2,1} & z_{2,2} & z_{2,3} & z_{2,4} & z_{2,5} & z_{2,6} & z_{2,7} & z_{2,8} & z_{2,9} & z_{2,10} \\ z_{3,1} & z_{3,2} & z_{3,3} & z_{3,4} & z_{3,5} & z_{3,6} & z_{3,7} & z_{3,8} & z_{3,9} & z_{3,10} \\ z_{4,1} & z_{4,2} & z_{4,3} & z_{4,4} & z_{4,5} & z_{4,6} & z_{4,7} & z_{4,8} & z_{4,9} & z_{4,10} \\ z_{5,1} & z_{5,2} & z_{5,3} & z_{5,4} & z_{5,5} & z_{5,6} & z_{5,7} & z_{5,8} & z_{5,9} & z_{5,10} \\ z_{6,1} & z_{6,2} & z_{6,3} & z_{6,4} & z_{6,5} & z_{6,6} & z_{6,7} & z_{6,8} & z_{6,9} & z_{6,10} \\ z_{7,1} & z_{7,2} & z_{7,3} & z_{7,4} & z_{7,5} & z_{7,6} & z_{7,7} & z_{7,8} & z_{7,9} & z_{7,10} \\ z_{8,1} & z_{8,2} & z_{8,3} & z_{8,4} & z_{8,5} & z_{8,6} & z_{8,7} & z_{8,8} & z_{8,9} & z_{8,10} \\ z_{9,1} & z_{9,2} & z_{9,3} & z_{9,4} & z_{9,5} & z_{9,6} & z_{9,7} & z_{9,8} & z_{9,9} & z_{9,10} \\ z_{10,1} & z_{10,2} & z_{10,3} & z_{10,4} & z_{10,5} & z_{10,6} & z_{10,7} & z_{10,8} & z_{10,9} & z_{10,10} \end{bmatrix}$$

Figura 4.3: A orientação dos elementos de $[\bar{Z}_{1,1'}]$ na matriz convencional para o agrupamento G_1 , sendo a escolha de $N/M = 10$.

4.3.2 As Interações de Autogrupos e Grupos Próximos

Por causa das singularidades dos raios CSP, explicadas no Capítulo 2, as interações entre os grupos vizinhos e os autogrupos (interações entre os grupos quando $m = m'$) na multiplicação matriz-vetor ocorrem do modo convencional. A proximidade entre dois grupos pode fazer com que os escolhas de ramo de seus raios se sobreponham e comprometam a exatidão da avaliação da interação de grupo, assunto que será aprofundado na Seção 4.3.7.

Os grupos próximos são definidos pela escolha de uma distância crítica D_c . Eles são definidos como grupos vizinhos próximos quando a distância centro-a-centro de qualquer par de grupos (G_m e $G_{m'}$) for menor do que D_c . Os termos da autoimpedância $[\bar{Z}_{nn}]$ pertencem às interações de grupo próximos e autogrupos e, por conseguinte, são calculados por métodos convencionais também. Assim, a avaliação de autotermo não é uma questão no método MoM-CSB. A matriz $[\bar{Z}']$ contém as interações entre os autogrupos e grupos próximos.

A Figura 4.4 demonstra um exemplo, considerando que D_c equivale ao diâmetro de um grupo da expansão. Então, os termos de autoimpedância possuem apenas dois grupos vizinhos.

$$[\bar{Z}'] = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,2} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & Z_{1,M'} \\ Z_{2,1} & Z_{2,2} & Z_{2,3} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & Z_{3,2} & Z_{3,3} & Z_{3,4} & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & Z_{m-1,m'-2} & Z_{m-1,m'-1} & Z_{m-1,m'} & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & Z_{m,m'-1} & Z_{m,m'} & Z_{m,m'+1} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & Z_{m+1,m'} & Z_{m+1,m'+1} & Z_{m+1,m'+2} & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & Z_{M-2,M'-3} & Z_{M-2,M'-2} & Z_{M-2,M'-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & Z_{M-1,M'-2} & Z_{M-1,M'-1} & Z_{M-1,M'} \\ Z_{M,1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & Z_{M,M'-1} & Z_{M,M'} \end{bmatrix}$$

Figura 4.4: A estrutura da matriz $[\bar{Z}']$.

O número de blocos não-zero depende da seleção do parâmetro D_c . Portanto, $[\bar{Z}']$ não é explicitamente armazenada nesta forma. Apenas os blocos não-zero necessitam ser armazenados na memória. A estrutura na Figura 4.4 é totalmente aplicável à problemas tridimensionais; no entanto, a distribuição pode ocorrer de modo não estruturado, permanecendo $[\bar{Z}']$ uma matriz altamente esparsa.

4.3.3 A Expansão dos Raios CSP para Grupos de Funções de Base

Após a formação dos grupos, os campos dos elementos dos subdomínios de funções de base contidos em cada grupo são expandidos em termos de raios CSP, conforme a Figura 4.5. Entre as três abordagens possíveis descritas no Capítulo 3.2, adota-se o método 2 da Seção 3.2.2, que provê uma representação do raio com apenas fontes

complexas do tipo elétrico. O diâmetro da esfera Dg é escolhido de forma que a esfera envolva compactamente todo o grupo.

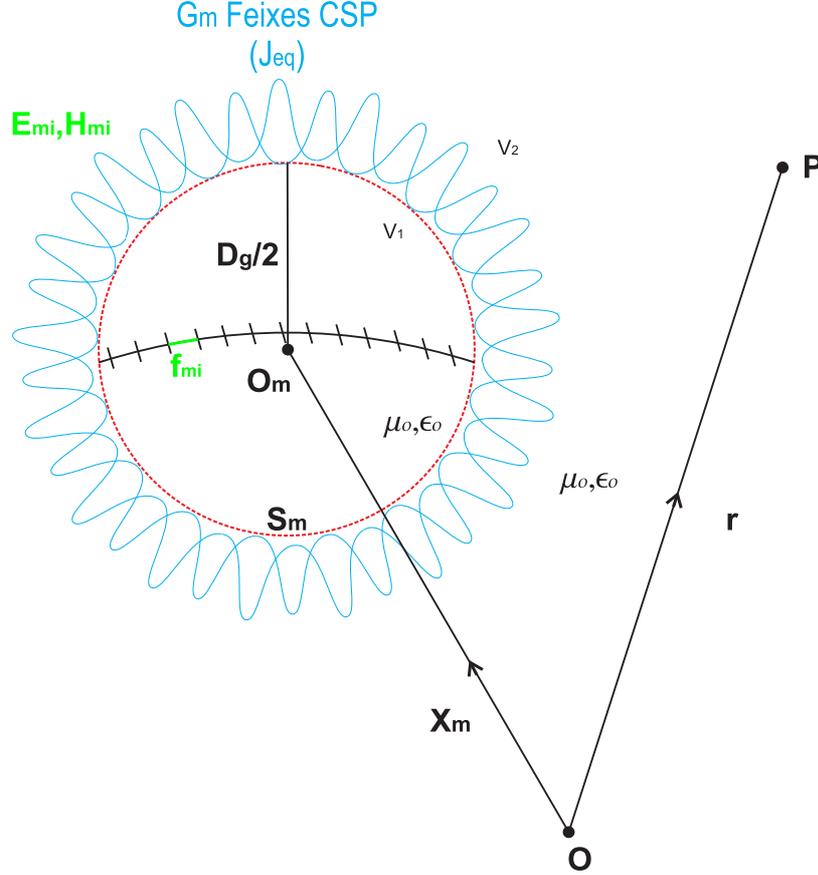


Figura 4.5: A expansão do campo do elemento base f_{mi} com raios CSP.

Notemos que para problemas tridimensionais, quando os raios são liberados da esfera, a distância crítica Dc , quando normalizada com Dg para selecionar os grupos próximos, tende a ser maior, se comparada ao caso bidimensional. Por conveniência, os raios CSP são lançados do centro da esfera para os problemas tridimensionais. Este assunto é discutido na Seção 4.3.7. A formulação a seguir se aplica também quando os raios são lançados do centro com a substituição $\tilde{a} = -jb_0$.

Na forma discretizada, a expansão do raio CSP para o campo elétrico do elemento i no grupo G_m é dada abaixo:

$$\mathbf{E}_{mi}^{(E)}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{q=1}^Q \overline{\overline{G}}_{ee}(\boldsymbol{\rho}|\tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{mq}) \cdot \mathbf{w}_{miq}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{mq}), \quad (4.17)$$

onde Q é o número de raios na expansão, $\tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{mq}$ denota as localizações dos CSPs equivalentes dos grupos m , e \mathbf{w}_{miq} indica o vetor de peso dos raios dos elementos mi .

Na Figura 4.5, observamos que as localizações complexas das fontes complexas são as mesmas para todos os elementos do grupo, e medidas relativamente ao sistema global de coordenadas centralizado em O .

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{mq} = \mathbf{X}_m + \tilde{a}\hat{\rho}_q, \quad (4.18)$$

onde $\mathbf{X}_m = \overline{OO}_m$ e o raio da esfera complexa é \tilde{a} e é igual para todos os grupos. O vetor de direção $\hat{\rho}_q$ representa a direção dos raios.

Os pesos dos raios \mathbf{w}_{miq} em (4.3) são diferentes para cada elemento de base no grupo. Isto se deve ao fato de que a expansão é realizada relativamente ao centro do grupo e a posição de cada elemento base relativo ao O_m ser diferente. Como mencionado na Seção 3.2.2, estes pesos do raio são numericamente computados por meio da solução de uma equação matricial do tipo:

$$[\mathbf{F}_{mi}] = [\mathbf{B}][\mathbf{W}_{mi}], \quad (4.19)$$

onde $[\mathbf{F}_{mi}]$ e $[\mathbf{W}_{mi}]$ são vetores de coluna. Observamos que uma vez que o tamanho da esfera de expansão do raio é o mesmo para todos os grupos, a matriz $[\mathbf{B}]$ permanece a mesma para todos os elementos. Logo, pode ser fatorizada na forma LU e o vetor de coluna desconhecido $[\mathbf{W}_{mi}]$ contendo os pesos dos raios pode ser eficientemente calculado para cada função de base.

4.3.4 Interações de Grupos

A impedância mútua entre quaisquer duas funções de base pertencentes a grupos bem separados pode ser calculada usando raios CSP. Devido à natureza direta desses raios, somente uma pequena parcela deles contribui significativamente para a reação (ver Capítulo 3 para mais detalhes sobre os critérios de regiões significativas).

Na Figura 4.6 podemos observar a reação entre as funções de base f_{mi} e $f_{m'i'}$ dos grupos bem separados G_m e $G_{m'}$, respectivamente. Os raios significativos desta interação são representados pela região na cor vermelha. A impedância mútua $Z_{nn'}^{(*)}$ representa estas reações, sendo " * " a referência ao tipo de equação integral empregada, ou seja, pode ser substituído por E ou H para avaliação das EFIE ou MFIE, respectivamente.

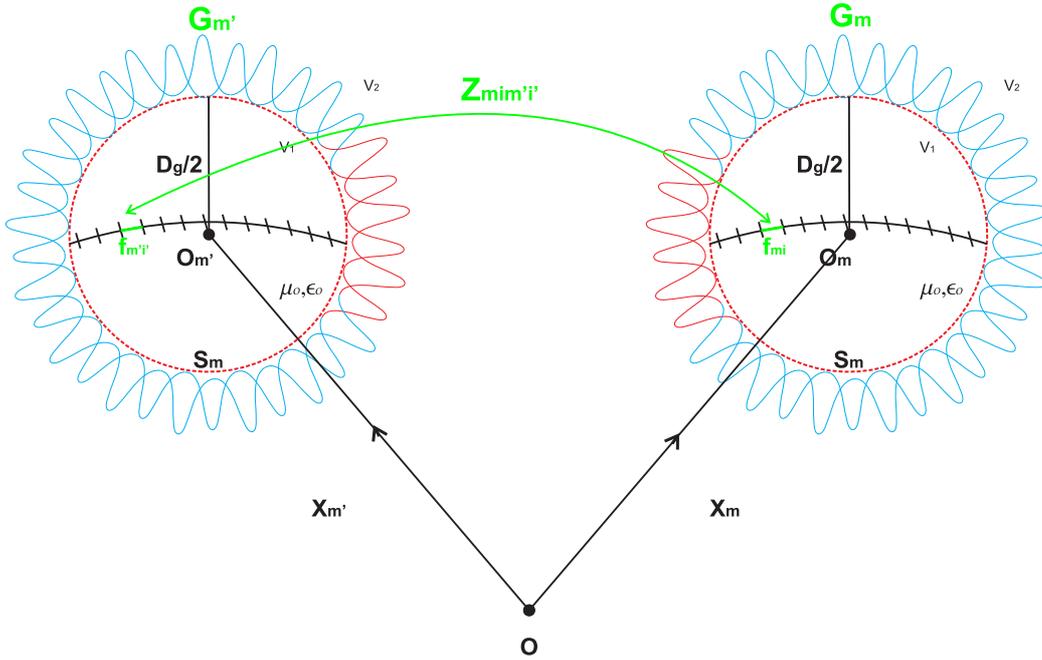


Figura 4.6: A impedância mútua entre quaisquer duas funções de base pertencentes a grupos bem separados.

4.3.4.1 EFIE

A impedância mútua $Z_{nn'}^{(E)}$ entre os elementos de base f_{mi} e $f_{m'i'}$ pode ser computada pelo uso dos raios CSP dos grupos G_m e $G_{m'}$. Notemos que $n \longleftrightarrow (m, i)$ e $n' \longleftrightarrow (m', i')$, assim a definição de $Z_{nn'}^{(E)}$ remete a (4.7). O campo elétrico de $f_{n'}$ avaliado no suporte S_n de f_n é dado pela segunda integral. Este campo pode ser representado pelos raios de CSP irradiados por $G_{m'}$, como em (4.17). A impedância mútua se torna:

$$Z_{nn'}^{(E)} = - \int_{S_n} \mathbf{f}_n(\boldsymbol{\rho}) \cdot \sum_{q=1}^Q \overline{\overline{G}}_{ee}(\boldsymbol{\rho} | \tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{mq}) \cdot \mathbf{w}_{miq} \cdot d\rho, \quad (4.20)$$

que pode ser reescrita mudando a ordem do somatório e da integração, e usando as propriedades de reciprocidade e de simetria da função diádica de Green. Deste modo, o campo do elemento f_n avaliado nas localizações complexas de $G_{m'}$ é representado pela integral de $\int_{S_n} \overline{\overline{G}}_{ee}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{m'q'} | \boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{f}_n(\boldsymbol{\rho}) \cdot d\rho$. Ao substituir esta integral pela expansão do raio CSP equivalente em (4.20), temos:

$$Z_{nn'}^{(E)} = - \sum_{q=1}^Q \sum_{q'=1}^Q \mathbf{w}_{miq} \cdot \overline{\overline{G}}_{ee}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{mq} | \tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{m'q'}) \cdot \mathbf{w}_{m'i'q'}. \quad (4.21)$$

A reação entre os raios CSP liberados dos grupos G_m e $G_{m'}$ é representada pela função diádica de Green com argumentos complexos. Assim, (4.21) está na forma de um somatório das reações dos raios irradiados de um par de grupos. Por causa das propriedades analíticas de G_m com argumentos complexos, apenas uma pequena parte dos raios no somatório duplo contribui significativamente para $Z_{nn'}$.

4.3.4.2 MFIE

Ainda considerando os grupos bem separados, G_m e $G_{m'}$, a impedância mútua $Z_{nn'}^{(H)}$ entre os elementos de base $f_{m'i'}$ e o elemento de teste g_{mi} pode ser computada pelo uso dos raios CSP destes grupos. É importante ressaltar que $Z_{nn'}^{(H)} = Z_{mim'i'}^{(H)}$.

Consideremos que as funções de teste g_n compartilhem do mesmo suporte local S_n das funções de base f_n e, ainda, que as funções f_n e g_n são tangentes na superfície S . O campo magnético de $f_{n'}$ avaliado no suporte S_n de g_n é dado pelo somatório em (4.22). Assim, impedância mútua para MFIE é representada por:

$$Z_{nn'}^{(H)} = - \int_{S_n} \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\rho}) \cdot \sum_{q=1}^Q \overline{\overline{G}}_{me}(\boldsymbol{\rho} | \tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{m'q'}) \cdot \mathbf{w}_{m'i'q'} \cdot d\rho, \quad (4.22)$$

onde $\overline{\overline{G}}_{me}$ é a função diádica de Green para o campo magnético de uma fonte de corrente elétrica, definido por:

$$\overline{\overline{G}}_{me}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = \frac{\nabla G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}')}{4\pi} \times \overline{\overline{I}}, \quad (4.23)$$

onde $\overline{\overline{I}}$ denota a identidade diádica, $G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$ é a função escalar de Green, conforme (2.21).

Através das propriedades das funções de Green no espaço livre, podemos mostrar que:

$$\mathbf{g}_n(\boldsymbol{\rho}) \cdot \overline{\overline{G}}_{me}(\boldsymbol{\rho} | \tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{m'q'}) \cdot \mathbf{w}_{m'i'q'} = \mathbf{w}_{m'i'q'} \cdot \overline{\overline{G}}_{em}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{m'q'} | \boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\rho}), \quad (4.24)$$

onde $\overline{\overline{G}}_{em}$ é a função diádica de Green para o campo magnético de uma fonte de corrente magnética.

Aplicando a propriedade (4.24) em (4.22), uma nova integral é produzida, sendo:

$$\int_{S_n} \overline{\overline{G}}_{em}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{m'q'} | \boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\rho}) \cdot d\rho = \sum_{q=1}^Q \overline{\overline{G}}_{ee}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{m'q'} | \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{mq}) \cdot \mathbf{u}_{miq}, \quad (4.25)$$

onde $\overline{\overline{G}}_{ee}$ é a função diádica de Green para o campo elétrico de uma fonte de corrente elétrica, \mathbf{u}_{miq} é o vetor de peso dos raios. Assim, levando (4.25) e (4.24) em (4.22), produzimos:

$$Z_{nn'}^{(H)} = - \sum_{q=1}^Q \cdot \sum_{q'=1}^Q \mathbf{u}_{miq} \cdot \overline{\overline{G}}_{ee}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{mq} | \tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{m'q'}) \cdot \mathbf{w}_{m'i'q'}, \quad (4.26)$$

4.3.4.3 Otimizando o Cálculo das Interações

Os somatórios em (4.21) e (4.26) podem ser avaliados um por um, para todos os N segmentos do objeto em estudo, o que resulta num algoritmo ineficiente. Isto seria o mesmo que realizar as multiplicações das matrizes $[\mathbf{U}]^T [\mathbf{T}] [\mathbf{U}]$ em (4.15), o que seria dispendioso, ainda que as matrizes sejam esparsas.

O MoM convencional em (4.3) é tido como o somatório das interações entre os grupos do MoM-CSB. Entretanto, os raios CSP são convenientemente usados no método híbrido para transmitir a informação do campo de um grupo para o outro, contando que eles não sejam grupos próximos (conforme a Seção 4.3.2).

O destaque das interações fica por parte da pequena porção de raios de cada grupo que contribui para a interação entre dois grupos bem separados. Estas interações, por sua vez, podem ser computadas com muita eficiência. A região desses raios significativos varia de acordo com os grupos avaliados. E, ainda, os pesos dos raios dos elementos de base possuem os vetores unitários definidos considerando-se o sistema global de coordenadas, referenciada a origem em O , definida na Seção 4.3.3.

Definida a submatriz $\overline{\overline{\mathbf{Z}}}_{mm'}^{(*)}$ da matriz operacional $\overline{\overline{\mathbf{Z}}}^{(*)}$, que representa a reação entre os elementos de base dos grupos separados G_m e $G_{m'}$, definimos a fatoração a seguir aplicada à representação dos raios em (4.21) e (4.26):

$$\left[\overline{\overline{\mathbf{Z}}}_{mm'}^{(*)} \right] = \left[\mathbf{A}_m \right]^T \left[\mathbf{T}_{mm'} \right] \left[\mathbf{U}_{m'} \right], \quad (4.27)$$

onde os elementos da matriz são definidos de acordo com a escolha de " * ", ou seja, podem ser substituídos por E ou H para avaliação das EFIE ou MFIE, respectivamente. Deste modo, para a escolha de E , ou seja, a matriz operacional $\overline{\overline{\mathbf{Z}}}^{(E)}$, temos a submatriz

$\bar{\mathbf{Z}}_{mm'}^{(E)}$ cujos elementos são:

$$\left[\mathbf{A}_m\right]_{iq}^T = \mathbf{w}_{miq}, \quad (4.28)$$

$$\left[\mathbf{T}_{mm'}\right]_{qq'} = \bar{\bar{G}}_{ee}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{mq}|\tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{m'q'}), \quad (4.29)$$

$$\left[\mathbf{U}_{m'}\right]_{q'i'} = \mathbf{w}_{m'i'q'}. \quad (4.30)$$

Para a escolha de H , ou seja, a matriz operacional $\bar{\mathbf{Z}}^{(H)}$, temos a submatriz $\bar{\mathbf{Z}}_{mm'}^{(H)}$. Seus elementos são:

$$\left[\mathbf{A}_m\right]_{iq}^T = \mathbf{u}_{miq}, \quad (4.31)$$

$$\left[\mathbf{T}_{mm'}\right]_{qq'} = \bar{\bar{G}}_{ee}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{mq}|\tilde{\boldsymbol{\rho}}'_{m'q'}), \quad (4.32)$$

$$\left[\mathbf{U}_{m'}\right]_{q'i'} = \mathbf{w}_{m'i'q'}. \quad (4.33)$$

As dimensões das matrizes em (4.27) são:

$$\left[\bar{\mathbf{Z}}_{mm'}^{(*)}\right] = \left(\frac{N}{M} \times \frac{N}{M}\right), \quad (4.34)$$

$$\left[\mathbf{A}_m\right] = \left(\frac{N}{M} \times Q\right), \quad (4.35)$$

$$\left[\mathbf{T}_{mm'}\right] = (Q \times Q), \quad (4.36)$$

$$\left[\mathbf{U}_{m'}\right] = \left(Q \times \frac{N}{M}\right). \quad (4.37)$$

4.3.5 A Matriz de Impedância

A matriz de impedância $Z^{(*)}$ é definida através da fatoração esparsa de todas as interações dos grupos bem separados, dos autogrupos e dos grupos próximos, conforme:

$$\left[\bar{\mathbf{Z}}^{(*)}\right] = \left[\bar{\mathbf{Z}}'^{(*)}\right] + \left[\mathbf{A}\right]^T \left[\mathbf{T}\right] \left[\mathbf{U}\right], \quad (4.38)$$

onde ”*” pode ser substituído por E ou H para as avaliações das EFIE ou MFIE respectivamente. $[\mathbf{A}]$ é uma matriz esparsa diagonal que contém os blocos $[\mathbf{A}_m]$, distribuídos de modo similar à Figura 4.7.

A matriz $[\mathbf{T}]$ contém as submatrizes $[\mathbf{T}_{mm'}]$ que, por sua vez, contém as interações entre os pares de grupos bem separados. Elas produzem as interações de raios entre o baixo de grupos bem separados, sendo a estrutura da matriz $[\mathbf{T}]$ similar à da Figura 4.8.

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & A_4 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & A_{m-1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & A_m & \vdots \\ \vdots & A_{m+1} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & A_{M-4} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & A_{M-3} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{M-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{M-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & A_M \end{bmatrix}$$

Figura 4.7: A estrutura da matriz $[\mathbf{A}]$.

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_{1,3} & T_{1,4} & \dots & T_{1,M'-2} & T_{1,M'-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{2,4} & \vdots & T_{2,M'-1} & T_{2,M'} \\ T_{3,1} & 0 & 0 & 0 & T_{3,5} & \vdots & T_{3,M'} \\ T_{4,1} & T_{4,2} & 0 & 0 & 0 & T_{4,6} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & T_{M,2} & T_{M,3} & \dots & T_{M-2,M'-4} & 0 & 0 & 0 & T_{M-2,M'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & T_{M-1,M'-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & T_{M,M'-3} & T_{M,M'-2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 4.8: A estrutura da matriz $[\mathbf{T}]$.

Apesar de não ser aparente, a matriz $[\mathbf{T}]$ também pode ser bastante esparsa. Isto ocorre porque as matrizes de blocos individuais $[\mathbf{T}_{mm'}]$ são muito esparsas devido ao comportamento direcional dos raios CSP, conforme Capítulo 3. Então, a matriz $[\mathbf{T}_{mm'}]$ pode ser armazenada de forma esparsa para reduzir os requerimentos de memória e também gerar economias computacionais no produto matriz-vetor, já que apenas os elementos não-zero devem ser multiplicados. A estrutura de $[\mathbf{T}_{mm'}]$ para o problema aqui apresentado é definida por $Q_t \times Q_t$ raios, que representam os elementos não-zero, sendo Q_t as interações dos raios significativos do par de grupos envolvidos.

4.3.6 O Cálculo Eficiente do Produto Matricial $\mathbf{V}=\mathbf{Z}\mathbf{I}$

Finalmente, após estabelecermos os elementos da matriz $Z^{(*)}$ através do algoritmo MoM-CSB em uma forma esparsa em (4.38), trataremos do cálculo do produto matricial (4.4), que se dará da seguinte forma:

$$[\mathbf{V}] = [\bar{\mathbf{Z}}'^{(*)}] [\bar{\mathbf{I}}] + [\mathbf{A}]^T [\mathbf{T}] [\mathbf{U}] [\bar{\mathbf{I}}], \quad (4.39)$$

onde as dimensões das matrizes em (4.39) são:

$$[\mathbf{V}] = (N \times 1), \quad (4.40)$$

$$[\bar{\mathbf{Z}}'^{(*)}] = (N \times N), \quad (4.41)$$

$$[\bar{\mathbf{I}}] = (N \times 1), \quad (4.42)$$

$$[\mathbf{A}]^T = (N \times QM), \quad (4.43)$$

$$[\mathbf{T}] = (QM \times QM), \quad (4.44)$$

$$[\mathbf{U}] = (QM \times N). \quad (4.45)$$

A fim de estabelecer um cálculo mais eficiente da (4.39), convenientemente consideremos o vetor $[\mathbf{V}]$ de modo que ele esteja dividido em M grupos. Desta maneira estabeleceremos $[\mathbf{V}_m]$, que corresponde ao grupo receptor G_m . Assim, expressamos as contribuições do grupo transmissor bem separado $G_{m'}$ para $[\mathbf{V}_m]$, conforme:

$$[\mathbf{V}_m^{(m')}] = [\mathbf{A}_m]^T [\mathbf{T}_{mm'}] [\mathbf{U}_{m'}] [\bar{\mathbf{I}}_{m'}], \quad (4.46)$$

onde as dimensões das matrizes em (4.46) são:

$$[\mathbf{V}_m^{(m')}] = \left(\frac{N}{M} \times 1\right), \quad (4.47)$$

$$[\bar{\mathbf{I}}_{m'}] = \left(\frac{N}{M} \times 1\right), \quad (4.48)$$

$$[\mathbf{A}_m]^T = \left(\frac{N}{M} \times Q\right), \quad (4.49)$$

$$[\mathbf{T}_{mm'}] = (Q \times Q), \quad (4.50)$$

$$[\mathbf{U}_{m'}] = \left(Q \times \frac{N}{M}\right). \quad (4.51)$$

$\bar{\mathbf{I}}_{m'}$, em (4.46), contém os coeficientes de excitação dos elementos de base do grupo transmissor $G_{m'}$.

O cálculo de (4.46) é realizado por etapas. A primeira consiste no produto $[\mathbf{U}_{m'}] \cdot [\bar{\mathbf{I}}_{m'}]$, no qual os pesos dos raios coletivos do grupo transmissor $G_{m'}$ são computados por escalonamento dos pesos dos raios dos elementos individuais com os coeficientes de excitação correspondentes. Na etapa seguinte, os raios irradiados do grupo transmissor são traduzidos para as localidades de raios complexos do grupo receptor com um produto da forma $[\mathbf{T}_{mm'}] \cdot ([\mathbf{U}_{m'}] \cdot [\bar{\mathbf{I}}_{m'}])$. A seguir, os campos de raios traduzidos são finalmente reagidos com os pesos dos raios de cada elemento no grupo receptor através de $[\mathbf{A}_m]^T \cdot ([\mathbf{T}_{mm'}] \cdot ([\mathbf{U}_{m'}] \cdot [\bar{\mathbf{I}}_{m'}]))$. Após estes passos, a contribuição do grupo $G_{m'}$ para $[\mathbf{V}_m^{(m')}]$ é calculada.

É importante destacar que este último passo deve ser realizado após os raios de todos os grupos transmissores bem separados serem traduzidos para o grupo receptor. Assim, os produtos matriz-vetor devem ser realizados globalmente, conforme (4.39).

4.3.7 Os Critérios de Seleção dos Grupos Próximos

Os raios CSP possuem escolhas de ramo nas quais a função do raio CSP é indefinida (ver Seção 2.2 [27]). Se a superfície de expansão escolhida for um cilindro com raio complexo \tilde{a} , obtemos a condição $r > |\tilde{a}|$, onde r se estende da origem da esfera ao ponto de observação P . Entretanto, quando $r < |\tilde{a}|$, ainda é possível avaliar o campo com o uso dos raios com uma precisão limitada. Retomemos os detalhes na Seção 3.3.

As interações entre dois grupos G_m e $G_{m'}$ são realizadas como em (4.46), com o uso das representações dos raios CSP dos grupos. Digamos que a separação entre os grupos seja definida por $d_{mm'}$. Quando são bem separados $d_{mm'} > 2|\tilde{a}|$, como ilustra Figura 4.9, a interação do grupo pode ser computada de maneira exata, exceto pelo erro de discretização, uma vez que as escolhas de ramo dos dois grupos não se interceptam.

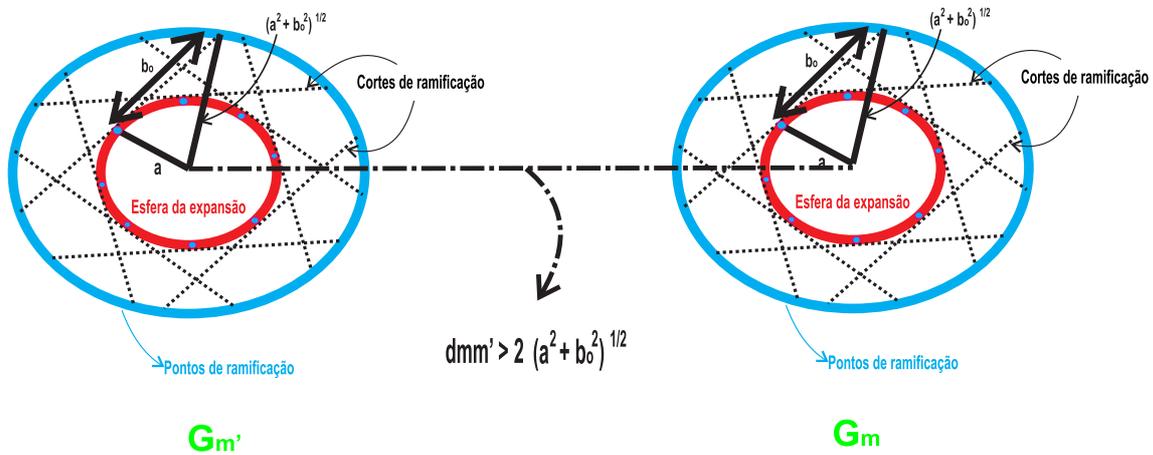


Figura 4.9: A separação $d_{mm'} > 2|\tilde{a}|$ entre grupos G_m e $G_{m'}$.

Entretanto, quando os dois grupos estão próximos, as escolhas de ramo dos raios deles irradiados se sobrepõem. A sobreposição ocorre quando $d_{mm'} < 2|\tilde{a}|$, como ilustra Figura 4.10. Como consequência, apenas uma porção das interações dos raios entre estes grupos permanece válida. Quando os grupos se sobrepõem, a magnitude da matriz $[\mathbf{T}_{mm'}]$ se torna descontínua e negligenciável em um dado momento. Deste modo, o erro introduzido pela exclusão destas interações depende de quanto a representação do raio está localizada em volta dos raios acoplados mais fortemente.

Portanto, para o agrupamento MoM-CSB, os grupos para os quais a separação entre eles $d_{mm'}$ é menor que a separação crítica Dc devem ser considerados grupos próximos. Suas interações devem ser incluídas na matriz $[\bar{\mathbf{Z}}^{(*)}]$ em (4.38). A separação crítica Dc depende do raio complexo \tilde{a} da expansão, bem como do erro de limiar especificado ϵ_t . Observemos que a Dc aumenta ao passo que o parâmetro do raio b_o se torna maior. Isto é esperado, uma vez que raios com cintura maior possuem discos de escolhas de ramo maior. Além disso, concluímos que à medida que os tamanhos dos grupos aumenta, Dc/Dg se torna menor, de modo que menos grupos devem ser incluídos na categoria de próximos e autogrupos. A presença de mais grupos próximos pode levar a um aumento em tempo e memória de CPU.

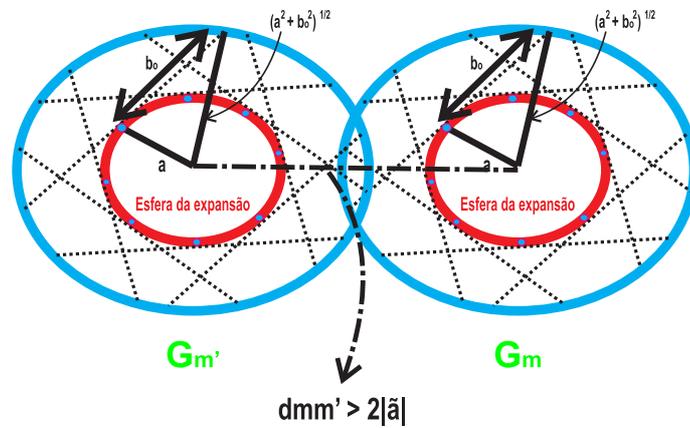


Figura 4.10: A separação, $d_{mm'} < 2|\tilde{a}|$, entre grupos G_m e $G_{m'}$.

4.4 Considerações Finais

Neste capítulo determinamos o algoritmo híbrido MoM-CSB desenvolvendo uma lógica para que este seja eficiente. Foi convenientemente representada a geometria básica do problema com a formulação das EFIE e MFIE. A seguir, a formulação convencional do Método dos Momentos foi revisitada para uma contextualização com o algoritmo construído e, conseqüentemente, calcular as EFIE e MFIE.

Portanto, após esta contribuição para a construção da formulação do modelo híbrido, o passo seguinte é a confirmação da funcionalidade do mesmo. Desta maneira, o Capítulo 5 é desenvolvido visando a analisar a estrutura do modelo, a ordem de grandeza dos requerimentos de tempo de CPU e de memória de armazenamento, a precisão da técnica e, finalmente, um problema canônico de espalhamento eletromagnético sobre uma tira eletricamente grande.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Introdução

Neste capítulo, nas Seções 5.2 e 5.3, apresentamos a ordem dos tempos de processamento e armazenamento para o algoritmo MoM-CSB. Na Seção 5.4 apresentamos os requisitos de armazenamento e memória.

Em seguida, na Seção 5.5, demonstramos o comportamento de janela natural dos feixes CSP através do comportamento das interações entre grupos bem separados. Ao final, trazemos uma comparação do crescimento dos requisitos de memória e tempo de CPU entre os algoritmos MoM-CSB e MoM convencional. Finalizamos com o estudo do espalhamento EM sobre uma fita que tem sua largura e ângulo de incidência variados, para que seja observado se o erro entre as técnicas é aceitável.

5.2 Ordem dos Tempos de Processamento

O algoritmo apresentado no Capítulo 4, Seção 4.3, tem sua grandeza para o tempo de processamento e requerimentos de memória dependente do número de grupos M . Então, são avaliados os produtos matriciais descritos na Seção 4.3.6, que se referem ao cálculo de (4.39) em suas etapas. Sendo assim, são definidas quatro etapas para avaliação destes produtos, divididas nas Seções 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 e 5.2.4.

5.2.1 Ordem de Tempo na Geração das Interações de Autogrupos e Grupos Próximos

Na etapa das interações de autogrupos e grupos próximos, Seção 4.3.2, deve-se notar que estas são altamente dependentes da geometria do problema analisado.

C_{ap} é dito ser o número médio das interações de autogrupos e grupos próximos. Para um determinado agrupamento as operações envolvidas nos cálculos de $[\bar{\mathbf{Z}}'^{(*)}] \cdot [\bar{\mathbf{I}}]$ são definidas como:

$$O_{agp}^M = C_{ap}(N^2/M^2), \quad (5.1)$$

sendo O_{agp}^M a ordem de tempo na geração das interações de autogrupos e grupos próximos para um determinado agrupamento M . Por conseguinte, ao avaliarmos os requerimentos de operações para todos os M grupos, temos um total de:

$$O_{agp} = C_{ap}(N^2/M^2)M = C_{ap}(N^2/M). \quad (5.2)$$

5.2.2 Ordem de Tempo na Geração das Interações de $[\mathbf{U}] \cdot [\mathbf{I}]$

Sendo o vetor $[\bar{\mathbf{I}}_m]$ de tamanho $((N/M) \times 1)$, convertendo-o no coeficiente de feixe PQ para P polarizações, é necessário um total de:

$$O_{ui}^M = PQ(N/M) \quad (5.3)$$

operações por grupo, sendo O_{ui}^M a ordem de tempo na geração das interações de cada grupo M de $[\mathbf{U}] \cdot [\bar{\mathbf{I}}]$. Consequentemente, para M grupos teremos:

$$O_{ui} = PQ(N/M)M = PQN. \quad (5.4)$$

Se considerarmos duas polarizações, estas operações são $2QN$.

5.2.3 Ordem de Tempo na Geração das Interações de Grupos Bem Separados

Esta etapa consiste nas interações de grupos bem separados, Seção 4.3.4, e de cada grupo receptor, ou seja, $[\mathbf{T}] \cdot ([\mathbf{U}][\bar{\mathbf{I}}])$. O número de grupos que interagem com um grupo receptor será de aproximadamente $M - C_{ap}$, e o número de operações envolvidas na tradução dos coeficientes de feixes \mathbf{T} destes grupos bem separados é:

$$O_{gs}^M \sim P^2(M - C_{ap})Q_t^2, \quad (5.5)$$

sendo O_{gs}^M a ordem de tempo na geração das interações de grupos bem separados e, P^2 , as possibilidades de combinações de polarizações. Assim, se considerados os M grupos

e todas interações envolvidas com eles teremos, aproximadamente:

$$O_{gs} \sim P^2(M - C_{ap})Q_t^2M, \quad (5.6)$$

sendo O_{gs} a ordem de tempo na geração das interações de todos os M grupos bem separados. Para um M muito grande podemos aproximar (5.6) para:

$$O_{gs} \sim P^2Q_t^2M^2. \quad (5.7)$$

Se consideradas duas polarizações, estas operações são $O_{gs} = Q_t^2M^2$.

5.2.4 Ordem de Tempo na Geração das Interações Entre os Grupos Receptores e os Coeficientes dos Feixes

Os coeficientes dos feixes traduzidos são reagidos com os coeficientes dos feixes dos elementos em cada grupo receptor. Assim, $[\mathbf{A}]^T \cdot ([\mathbf{T}][\mathbf{U}][\bar{\mathbf{I}}])$, de modo que para cada grupo as operações requeridas são:

$$O_{cf}^M = PQ(N/M), \quad (5.8)$$

sendo O_{cf}^M a ordem de tempo na geração das interações entre grupos receptores e os coeficientes dos feixes dos elementos no grupo receptor M . Logo, quando consideramos todos os M grupos, temos:

$$O_{cf} = PQ(N/M)M = PQN. \quad (5.9)$$

Conforme adotamos anteriormente, as operações para duas polarizações são $O_{cf} = 2QN$.

5.3 Ordem de Grandeza do Tempo Total

Tendo sido avaliadas as ordens dos produtos nas Seções 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 e 5.2.4, podemos designar a ordem de grandeza do tempo total de processamento O_t envolvido nos requisitos operacionais de (4.39). Portanto, os custos envolvidos nestas quatro etapas são adicionados, conforme:

$$O_t = O_{agp} + O_{ui} + O_{gs} + O_{cf}. \quad (5.10)$$

Substituindo em (5.10) os resultados obtidos em (5.2), (5.4), (5.7) e (5.9), produzimos:

$$O_t = C_{ap} \frac{N^2}{M} + PQN + P^2 Q_t^2 M^2 + PQN, \quad (5.11)$$

sendo reduzida para:

$$O_t = C_{ap} \frac{N^2}{M} + 2PQN + P^2 Q_t^2 M^2. \quad (5.12)$$

No caso da avaliação para duas polarizações, esta é reescrita como se segue:

$$O_t = C_{ap} \frac{N^2}{M} + 4QN + 4Q_t^2 M^2. \quad (5.13)$$

O número de feixes Q requeridos para uma representação acurada é proporcional ao número de elementos no grupo (N/M) [17] que, por sua vez, é proporcional ao tamanho da esfera da expansão. Portanto:

$$Q \sim O(N/M). \quad (5.14)$$

O número médio de feixes retidos nas interações de um grupo bem separado é definido por Koray [1,9,17] como sendo proporcional à raiz quadrada do número total de feixes para grupos grandes [1,18]:

$$Q_t \sim O(\sqrt{Q}). \quad (5.15)$$

Aplicando-se (5.15) e (5.14) em (5.13), a ordem de grandeza do tempo total de processamento produzido é:

$$O_t = C_1 \frac{N^2}{M} + C_2 NM, \quad (5.16)$$

onde as constantes C_1 e C_2 são dependentes de implementação. Observamos que (5.16) pode ser minimizada através da escolha do número de grupos, conforme:

$$M = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \sqrt{N}. \quad (5.17)$$

Ao aplicar (5.17) em (5.16), temos:

$$O_t = \frac{C_1 N^2}{\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \sqrt{N}} + C_2 N \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \sqrt{N}, \quad (5.18)$$

produzindo um algoritmo de ordem:

$$O_t \sim O(N^{3/2}). \quad (5.19)$$

5.4 Os Requisitos de Armazenamento e Memória

Os requisitos de armazenamento e memória são fundamentais no desenvolvimento do algoritmo e do ambiente a ser analisado. Portanto, para computar os requerimentos de memória, primeiro consideramos o armazenamento para os coeficientes de feixe. Uma vez que há Q feixes para cada elemento base, um total de memória O_M é requerido:

$$O_M \sim PQN \sim 2QN \sim O(N^2/M) \sim O(N^{3/2}) \quad (5.20)$$

para armazenamento de todos os coeficientes de feixe. Neste caso, $P = 2$ devido à consideração de duas polarizações para os coeficientes de feixe.

Por sua vez, nas interações dos grupos próximos e autogrupos incluídas na matriz $[\bar{\mathbf{Z}}'^{(*)}]$, é necessário para cada grupo M um total de memória de

$$O_Z^M = C_{ap}(N^2/M^2), \quad (5.21)$$

e para todos os grupos M um total de

$$O_Z \sim MC_{ap}(N^2/M^2) \sim O(N^{3/2}). \quad (5.22)$$

O armazenamento da matriz de tradução \mathbf{T} para cada par de grupos bem separados requer um total de memória:

$$O_T^M \sim Q_t^2. \quad (5.23)$$

Dado que o número de todas as interações de grupo está na ordem de M^2 , a memória necessária para armazenamento é

$$O_T \sim P^2(M - C_{ap})^2 Q_t^2. \quad (5.24)$$

Quando consideramos $P = 2$ polarizações, o requerimento de memória é:

$$O_T \sim 4(M - C_{ap})^2 Q_t^2 \sim O(NQ) \sim O(N^{3/2}). \quad (5.25)$$

Portanto, o requerimento de memória é mantido na ordem de $O(N^{3/2})$ e esta

complexidade computacional presume que as matrizes de (4.38) sejam pré-computadas e armazenadas em memória. No entanto, os elementos de \mathbf{T} são avaliações pontuais das funções de Green e não requerem integrações numéricas como as das matrizes $[\bar{\mathbf{Z}}'^{(*)}]$, $[\mathbf{A}]$ ou $[\mathbf{U}]$. Por conseguinte, durante o cálculo do produto $[\mathbf{T}] \cdot ([\mathbf{U}][\bar{\mathbf{I}}])$, os elementos de \mathbf{T} podem ser calculados em tempo real, produzindo, assim, um requisito de memória na ordem de $O(N^2/M)$. Então, esta opção pelo cálculo em tempo real de \mathbf{T} contribui para a redução de memória do algoritmo. A definição dos grupos M pode ser mantida em aproximadamente $O(N^{1/2})$ visando à manutenção do custo global no grau de $O(N^{3/2})$. A escolha de um número grande de grupos M favorece a redução dos requerimentos de memória, mas também contribui negativamente, elevando o tempo de processamento.

Considerando que um dos principais obstáculos na análise de problemas de espalhamento eletromagnético de dimensões elétricas grandes são os requisitos de memória computacional, a degradação do tempo de processamento é aceitável. No entanto, caso a memória disponível seja suficiente para análise dos problemas, deve-se estabelecer um valor ideal de grupos M a fim de haver ganhos com o tempo de processamento.

5.5 Estudo de Caso Aplicado ao MoM-CSB

5.5.1 Caso 1

Nesta seção apresentamos os resultados de simulações do algoritmo MoM-CSB aplicado na interação de duas fitas condutoras elétricas perfeitas (CEP), o objetivo é avaliar o comportamento da magnitude dos elementos destas fitas quando envolvidos por grupos CSBs. Assim, visando representar o comportamento de janela natural dos feixes CSP, ou seja, a pequena porção de feixes de cada grupo que contribui para a interação entre dois grupos bem separados, conforme Seção 4.3.4, é analisada a interação entre os grupos G_m e $G_{m'}$, com auxílio de (4.29).

Após esta premissa são definidas as parametrizações do problema. Cada fita CEP é definida com uma largura de 10λ , sendo discretizadas por pulsos de funções de bases e são envolvidas por uma esfera complexa de raio $\tilde{a} = Dg/2 - j2Dg$, onde $Dg = 10\lambda$. A Figura 5.1 ilustra a geometria do problema. Os grupos CSBs que envolvem cada uma das fitas, G_m e $G_{m'}$, são separados por uma distância $d_{mm'}$, para bons resultados $d_{mm'}$ deve obedecer os critérios expostos na Seção 4.3.7. Portanto a partir de (4.29),

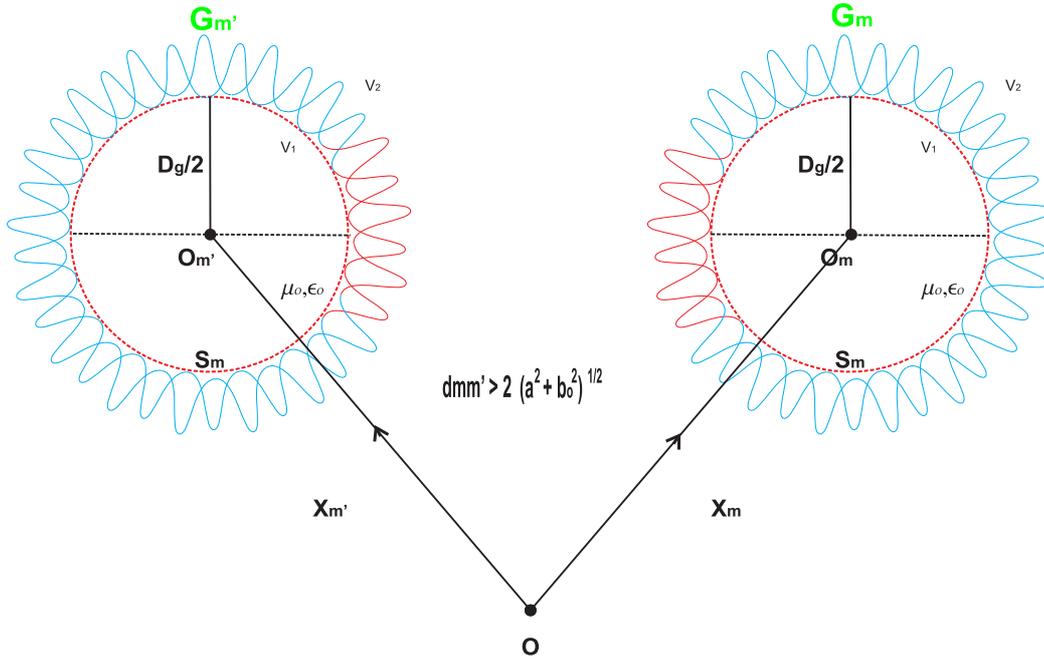


Figura 5.1: Duas fitas envolvidas por CSBs.

podemos emprega-lá no referido problema de modo que:

$$G(\boldsymbol{\rho}_{mq}, \boldsymbol{\rho}'_{m'q'}) = -\frac{jH_o^2(k_0 |\boldsymbol{\rho}_{mq} - \boldsymbol{\rho}'_{m'q'}|)}{4}. \quad (5.26)$$

Para argumentos grandes a função de Hankel é definida por:

$$H_o^2(k_0 |\boldsymbol{\rho}_{mq} - \boldsymbol{\rho}'_{m'q'}|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) \frac{\exp(-jk |\boldsymbol{\rho}_{mq} - \boldsymbol{\rho}'_{m'q'}|)}{\sqrt{k |\boldsymbol{\rho}_{mq} - \boldsymbol{\rho}'_{m'q'}|}} \times \left(1 + \frac{j}{8k |\boldsymbol{\rho}_{mq} - \boldsymbol{\rho}'_{m'q'}|} - \frac{9}{128(k |\boldsymbol{\rho}_{mq} - \boldsymbol{\rho}'_{m'q'}|)^2}\right). \quad (5.27)$$

Portanto, a magnitude das funções de Green é dominada pelo termo exponencial de (5.27), de modo que:

$$G(\boldsymbol{\rho}_{mq}, \boldsymbol{\rho}'_{m'q'}) \propto \exp(-jk |\boldsymbol{\rho}_{mq} - \boldsymbol{\rho}'_{m'q'}|). \quad (5.28)$$

Posto que a separação entre os dois grupos bem separados G_m e $G_{m'}$ é de $5Dg$, demonstramos o comportamento dos elementos da matriz $[\mathbf{T}_{mm'}]$ na Figura 5.2.

Na Figura 5.2 a magnitude dos elementos da matriz $[\mathbf{T}_{mm'}]$ foi convenientemente normalizada por um e ordenada de modo crescente. Devemos notar, também, que os elementos com magnitude significativa são uma pequena porção destas interações. Uma

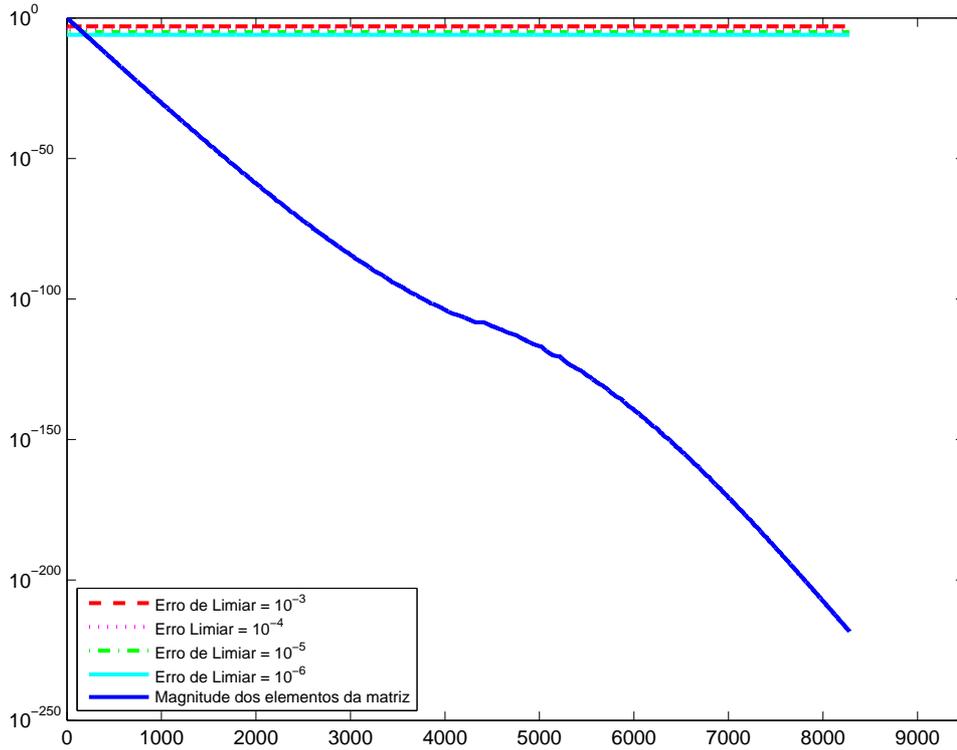


Figura 5.2: O comportamento da magnitude dos elementos da matriz $[T_{mm}']$.

maneira de comprovar isto é a comparação com alguns erros de limiar $\epsilon_t = 10^{-\alpha}$ que foram estabelecidos no gráfico e o decaimento abrupto dos elementos negligenciáveis.

A escolha do erro de limiar $\epsilon_t = 10^{-\alpha}$ determina o número de feixes Q empregados na expansão CSP (retome a Seção 3.3). Empregando (3.46), sendo $c = 2$ e $L = 10$, e variando os valores de α , conforme a Tabela 3.1, produzimos a Tabela 5.1, com os prováveis números de feixes a serem utilizados na expansão.

Tabela 5.1: Números de feixes Q empregados na expansão CSP para $c = 2$ e $L = 10$.

$\alpha \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$N_b \rightarrow$	73	82	86	91	99	103	108	112	116

Na Figura 5.2 o número de feixes escolhidos foi $Q = 91$, e o erro de limiar é, conseqüentemente, $\epsilon_t = 10^{-4}$. Obtivemos um total de 8281 interações de feixes, das quais aproximadamente apenas 132 são consideradas significativas. A Figura 5.3 ilustra uma visão mais detalhada da Figura 5.2, considerando apenas os elementos de magnitude significativa. Para melhor compreensão das interações entre os feixes apresentamos a Figura 5.4, que exibe um gráfico de calor, ou seja, a escala é definida para variar entre o valor mínimo de $-200dB$ e o máximo de $0dB$, sendo as cores mais escuras as regiões de maior valor e, as mais claras, as de menor valor. Portanto,

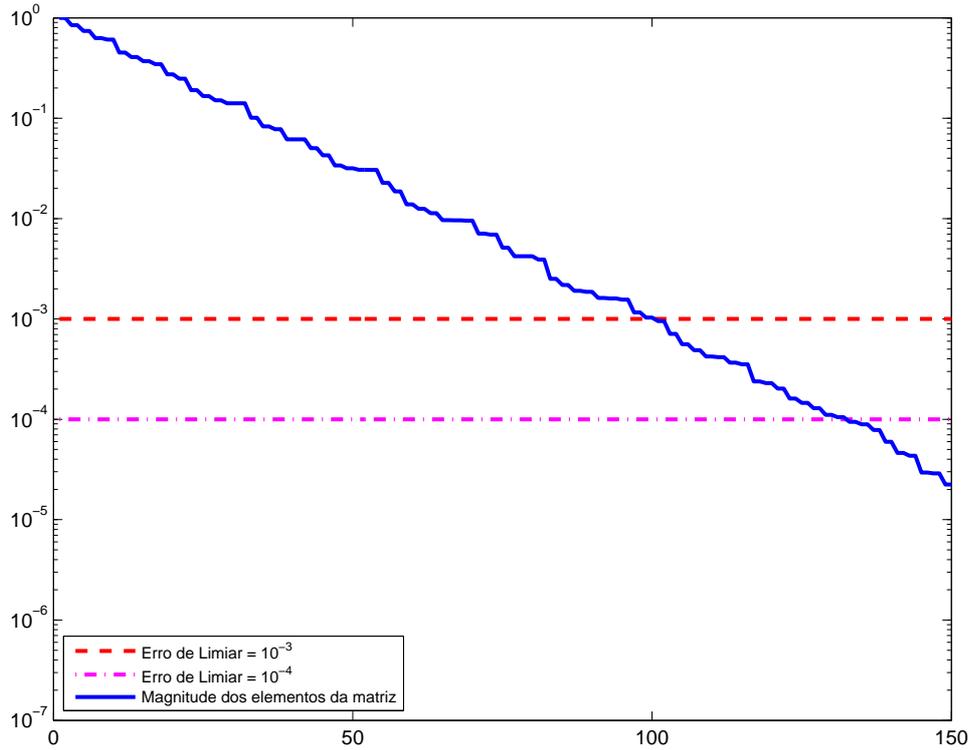


Figura 5.3: Os elementos significativos da matriz $[T_{mm}']$.

podemos definir o número médio de feixes que são válidos nas interações de grupos, sendo $Q_t \sim \sqrt{Q}$, ou seja, $Q_t \sim 9$. A definição de Q_t , também chamada de número de feixes truncados por grupo, é um dos parâmetros responsáveis por otimizar as interações do algoritmo MoM-CSB.

5.5.2 Caso 2

Consideremos uma fita condutora elétrica perfeita (CEP) com um comprimento de 400λ e largura infinita, com uma onda plana uniforme TM_z incidindo sobre a mesma. Os campos elétrico e magnético podem ser escritos conforme a seguir:

$$E^{inc} = \hat{z}E_0 e^{jk(x\cos\phi_i + y\sin\phi_i)} \quad (5.29)$$

$$H^{inc} = \frac{E_0}{\eta} (-\hat{x}\sin\phi_i + \hat{y}\cos\phi_i) e^{jk(x\cos\phi_i + y\sin\phi_i)}, \quad (5.30)$$

onde E_0 é uma constante e representa a magnitude do campo incidente e ϕ_i é o ângulo de incidência. A Figura 5.5 ilustra a superfície da fita.

A definição do parâmetro de dispersão, referido como a largura de espalhamento (SW) ou, alternativamente, como a secção transversal de radar por unidade de com-

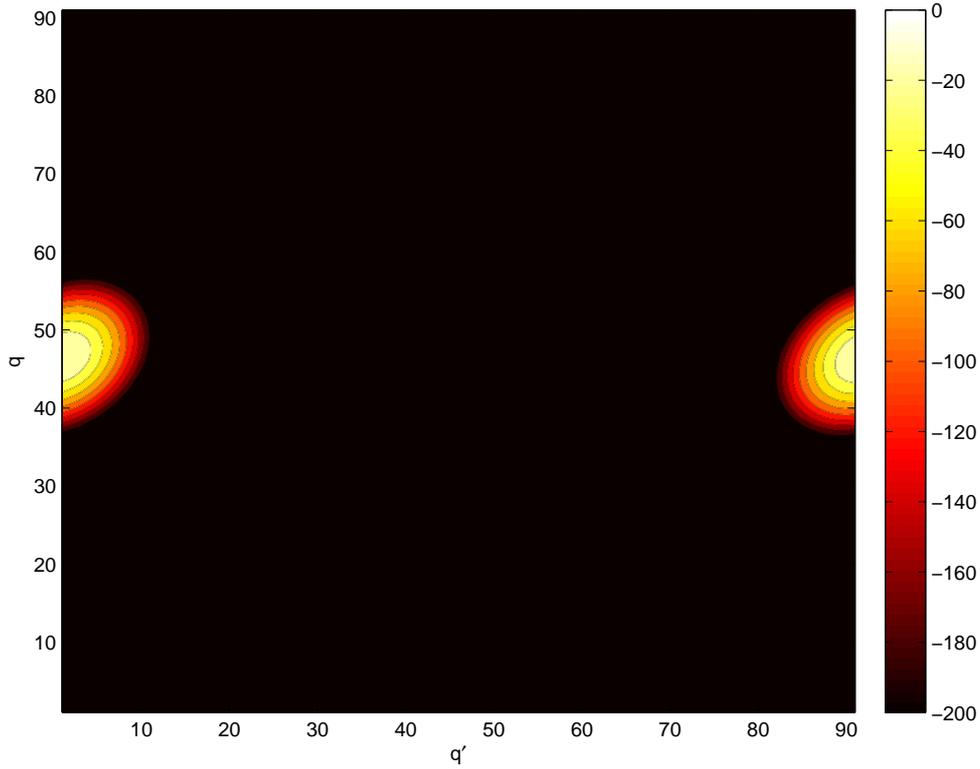


Figura 5.4: As regiões de máximo e mínimo nas interações dos feixes de $[\mathbf{T}_{mm'}]$.

primento, é dada por:

$$\sigma_{2-D} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[2\pi\rho \frac{|E^s|^2}{|E^{inc}|^2} \right]. \quad (5.31)$$

O erro relativo entre as duas técnicas é computado de acordo com a norma de Frobenius, sendo:

$$erro = \frac{\|R_R - R_T\|_2}{\|R_R\|_2}, \quad (5.32)$$

onde $\|\cdot\|$ indica a norma de Frobenius, R_R é o resultado de referência e R_T , o resultado de teste. Neste caso, o resultado fornecido pelo modelo MoM é o resultado de referência, e o MoM-CSB é o resultado de teste.

Portanto, para cálculo do parâmetro de dispersão adotaremos os dois métodos supracitados, ou seja, o MoM convencional e o MoM-CSB. O ângulo de incidência adotado é $\phi_i = 90^\circ$. Na formulação do MoM a fita é discretizada com pulsos de funções de base, e examinada com as EFIE. Logo, o número de partições na análise, ou seja, o número de incógnitas (N) foi selecionado para ser 3960.

Nas definições do MoM-CSB, o diâmetro da esfera da expansão selecionado foi

$Dg = 8,9888\lambda$, $c = 4$ para um limiar de erro aceitável de 10^{-3} e, o número de feixes, $Q = 89$. Lembremos que o raio do círculo complexo é $\tilde{a} = Dg/2 - jb_o$. Assim, o número de grupos é $M = 44$, o que leva a $N/M = 90$ partições por grupo. Deve ser observado que os grupos envolvem somente os N/M elementos que lhes pertencem, não compartilhando nenhum elemento com o grupo adjacente.

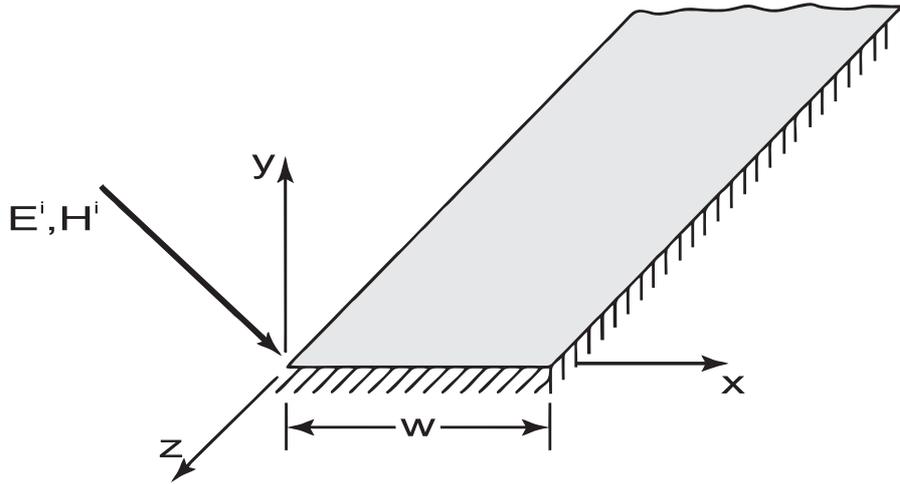


Figura 5.5: Fita CEP iluminada por uma onda plana.

Na Figura 5.6 temos uma comparação da densidade de corrente elétrica na superfície da fita CEP, mensurada em amperes por metro, através dos métodos. Por sua vez, na Figura 5.7, temos a secção transversal de radar, para uma melhor comparação entre as técnicas a Figura 5.8 faz uma aproximação limitada a $80^\circ < \phi < 100^\circ$ ilustrando a região de relevância.

O erro encontrado entre as técnicas, calculado através de (5.32), foi de $8,5412 \times 10^{-4}$, estando de acordo com o esperado. O tempo de processamento total, ou seja, para estabelecer todos os cálculos e montagem das matrizes, para o MoM foi de 77,76 segundos, enquanto do MoM-CSB foi de 49,58 segundos.

As estruturas das matrizes da (4.39) são apresentadas para que se compreenda o comportamento na análise da fita. Logo, a Figura 5.9 representa $[\bar{\mathbf{Z}}']$, que são as interações de autogrupos e grupos próximos. Por sua vez, a Figura 5.10 demonstra a matriz dos coeficientes de feixes $[\mathbf{A}]$. A Figura 5.11 expõe os blocos da matriz $[\mathbf{T}]$, que são as reações entre os feixes associados aos grupos bem separados. Para que se possa comparar o comportamento altamente esparsas das interações entre grupos bem separados temos a Figura 5.12, que apresenta a interação de dois grupos bem separados, comprovando que o número de feixes adotados no truncamento foi $Q_t = 8 \sim \sqrt{Q}$.

A Figura 5.13 apresenta uma breve comparação do comportamento dos algoritmos MoM-CSB e MoM convencional. Nela é possível observar a comparação dos

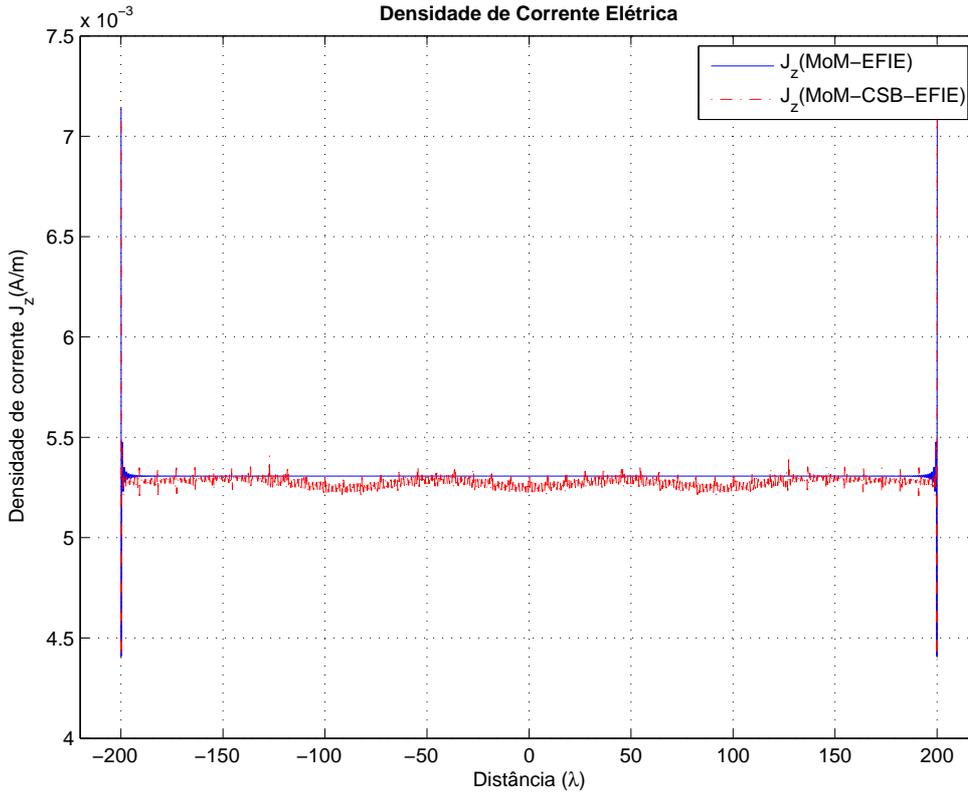


Figura 5.6: Densidade de corrente na superfície da fita CEP.

requisitos de memória para o armazenamento das matrizes dos dois métodos, na qual, para o MoM-CSB, o grau de complexidade é de $O(N^{3/2})$ e, para o MoM, é de $O(N^2)$. A eficiência do MoM-CSB é comprovada, por exemplo, através da análise do requisito de memória para um determinado problema, que pode requerer 900MB para armazenamento, sendo que para o MoM é preciso aproximadamente 8689MB. Assim, concluímos que a economia de memória do MoM-CSB em relação ao MoM convencional é atrativa e gera um grande benefício.

A avaliação dos requerimentos de tempo de processamento por interações para o MoM-CSB e o MoM convencional possui grau de complexidade $O(N^{3/2})$ e $O(N^2)$ respectivamente, sendo também ilustrada na Figura 5.13. No entanto, observamos que o algoritmo MoM-CSB tem seu tempo de CPU variado de acordo com o tamanho dos M grupos. Logo, a escolha de um número grande de grupos favorece a redução dos requerimentos de memória, mas contribui negativamente elevando o tempo de processamento. Deste modo, devemos manter os M grupos em aproximadamente $O(N^{1/2})$.

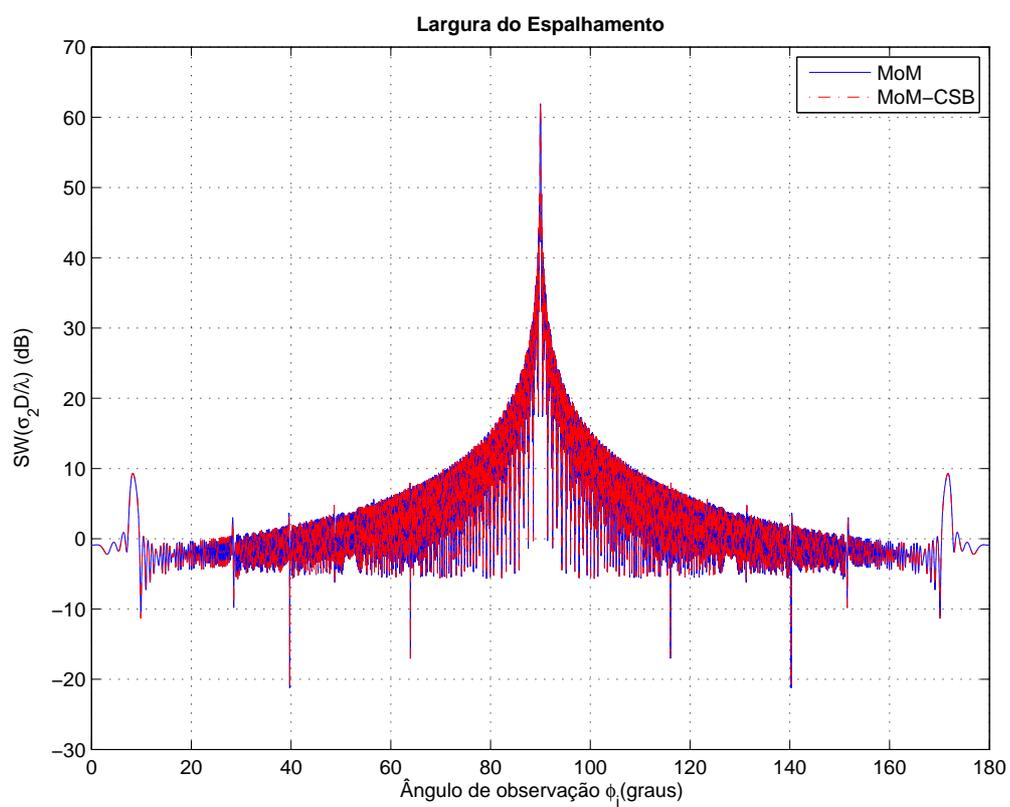


Figura 5.7: A largura de espalhamento para o problema da fita.

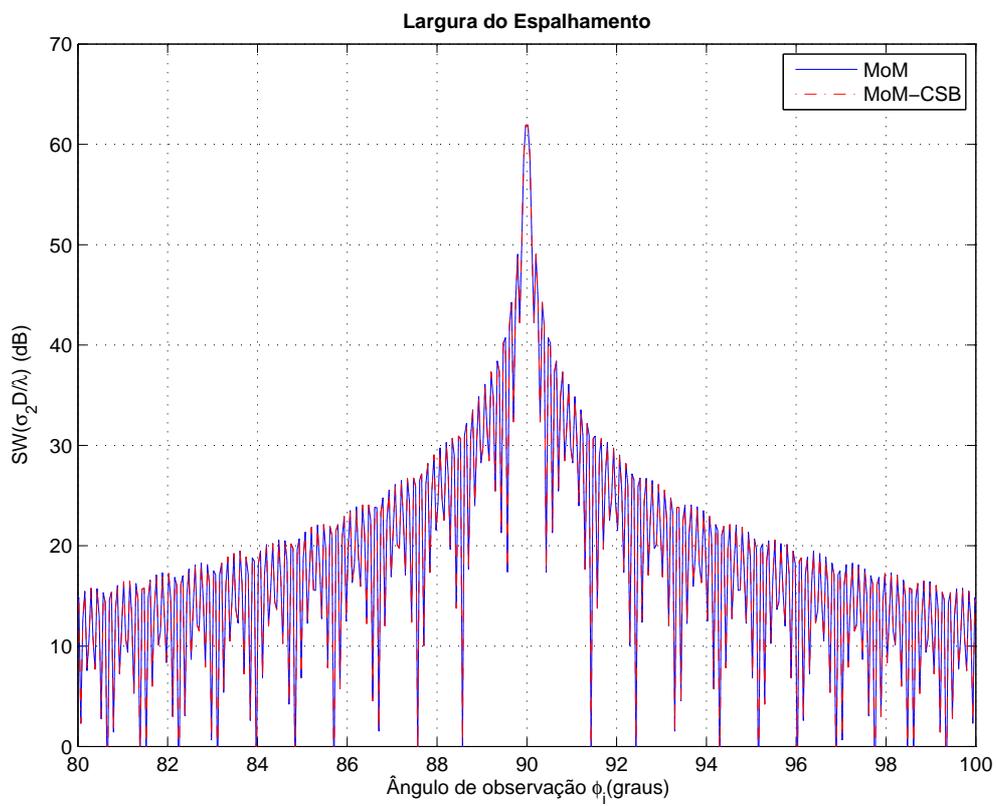


Figura 5.8: A largura de espalhamento para o problema da fita, para $80^\circ < \phi < 100^\circ$.

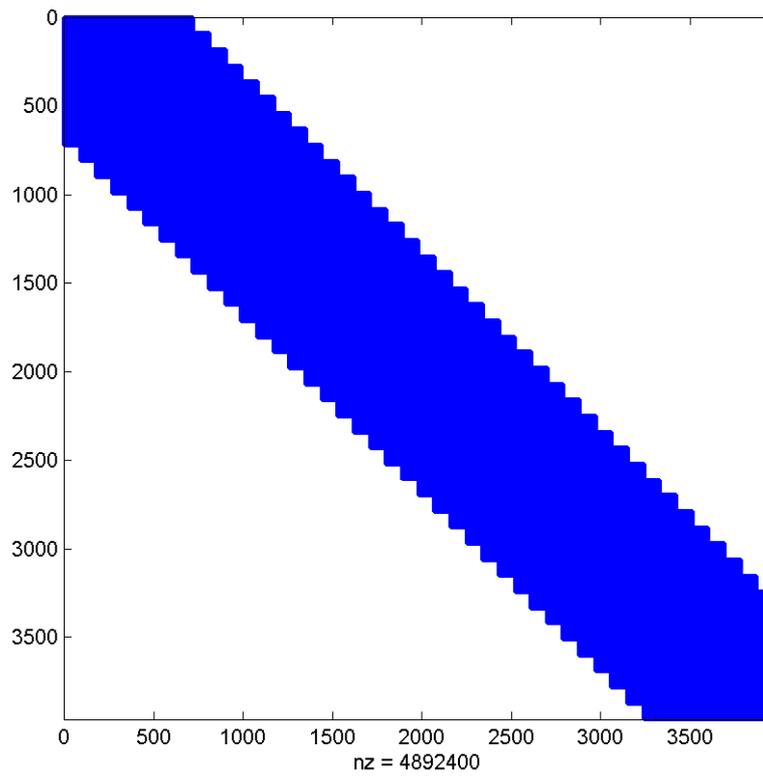


Figura 5.9: Interações de autogrupos e grupos vizinhos.

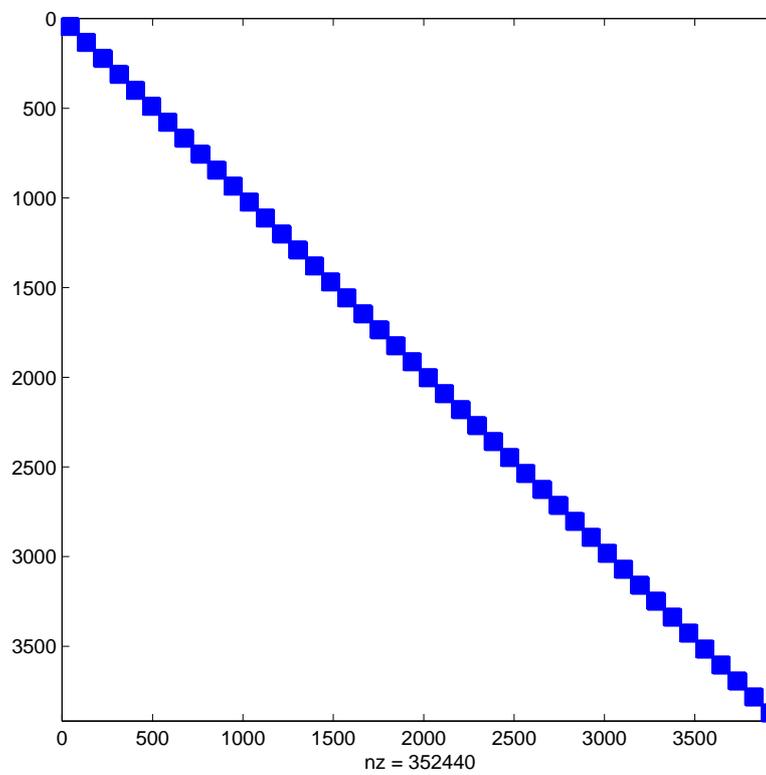


Figura 5.10: Coeficientes CSPs.

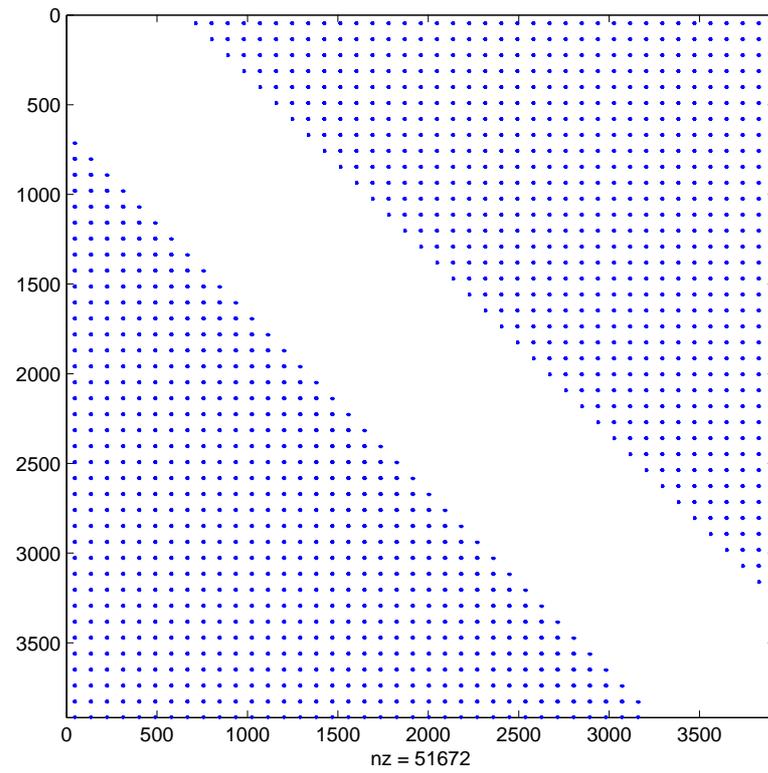


Figura 5.11: A reação entre os feixes associados aos grupos bem separados.

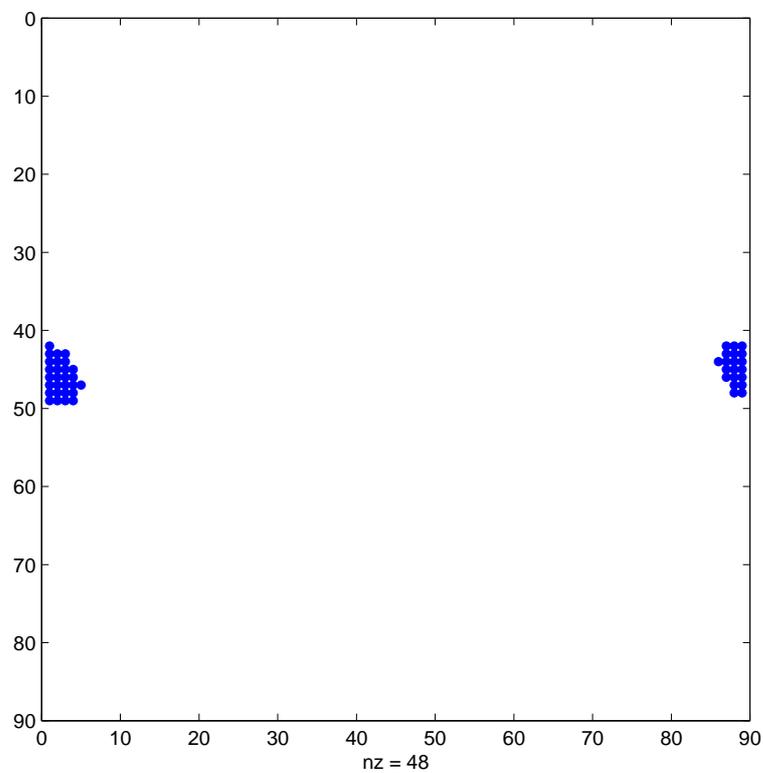


Figura 5.12: A reação entre os feixes associados a dois grupos bem separados.

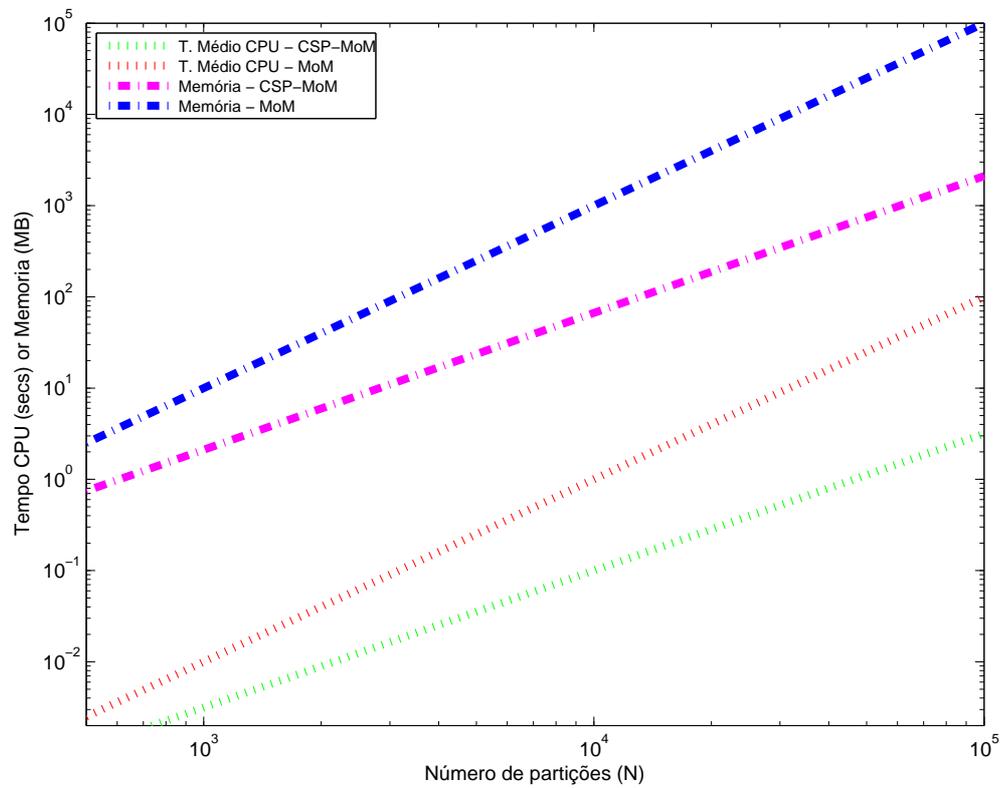


Figura 5.13: Comparação dos requisitos de memória e tempo de processamento entre o MoM-CSB e o MoM convencional.

Capítulo 6

Conclusões

6.1 Considerações Finais

Este trabalho se constituiu no estudo e desenvolvimento da nova técnica híbrida de feixes de raios complexos (MoM-CSB), que foi apresentada como uma possibilidade para solução de problemas de propagação radioelétrica nas faixas de frequências VHF e UHF sobre terrenos.

Portanto, foram introduzidos os feixes de pontos de fonte complexa (CSP) e suas propriedades, que os estabelecem como soluções exatas das equações de Maxwell. As três diferentes variações de teoremas de superfícies equivalentes com representações de feixes CSP foram consideradas, sendo que o modelo híbrido utiliza do método 2, a expansão CSP com densidades de correntes equivalentes elétricas somente. Assim, o perfil de terreno analisado deve ser rigorosamente envolvido por uma superfície complexa - para o caso bidimensional, um círculo complexo e, para o tridimensional, um esfera complexa - e, a seguir, realizar a expansão dos feixes CSP através do princípio da equivalência.

A expansão do terreno deve ser tratada com auxílio do algoritmo MoM-CSB, uma vez que o terreno é eletricamente grande, o que faria o método 2 tornar-se computacionalmente dispendioso. As propriedades dos feixes CSP contemplam possibilidades de regiões de singularidades de ponto de ramificação e cortes de ramificação, acarretando, assim, uma atenção na formação dos grupos e definição de seus elementos, visando a manter a região de validade dos feixes CSP e, conseqüentemente, obter uma expansão precisa com uma tolerância de erro aceitável.

O MoM-CSB apresentado neste trabalho tem como principal objetivo acelerar o produto matriz-vetor gerado pelas interações da formulação do MoM. Mostramos os benefícios do algoritmo híbrido, o qual reduz para $O(N^{3/2})$ os requisitos de memória e

tempo processamento computacional que, no modelo convencional, é de $O(N^2)$.

As restrições e limitações do algoritmo não foram abordadas, uma vez que as funções de Green empregadas na solução dos feixes CSP não assumem nenhuma forma particular, favorecendo a aplicação em diversos problemas EM. Adiciona-se a isto o fato de o algoritmo híbrido ser totalmente aplicável a problemas tridimensionais, apesar de sua eficiência ser maior em casos bidimensionais.

A validação da formulação proposta foi realizada no problema de uma tira plana condutora elétrica perfeita. Os resultados foram comparados com a solução das equações integrais de campo elétrico, computadas através do Método dos Momentos tradicional. O MoM-CSB convergiu para a tira de 400λ , e o erro médio permaneceu dentro do limiar de erro aceitável.

Concluimos, assim, que de maneira geral a técnica apresenta um potencial altamente recomendável para solução de problemas de predição de cobertura radioelétrica. No entanto, estudos devem ser realizados a fim de estabelecer melhores critérios na expansão do perfil para corrigir os problemas ocasionados por singularidades. Alterações devem ser realizadas no algoritmo para corrigir o tempo médio de computação das interações, pois foi observado que o comportamento deste não atendeu ao esperado, ou seja, um tempo médio de $O(N^{3/2})$.

6.2 Propostas de Continuidade

Poucos trabalhos foram desenvolvidos até o presente abordando o modelo híbrido de feixes de raios complexos com Método dos Momentos. Portanto, diversas possibilidades de trabalhos estão abertas. Enfatizamos, então, possibilidades na análise de predição de cobertura radioelétrica.

Por esse motivo, são sugeridas propostas de continuidade para a presente pesquisa, pois é de interesse prosseguir as análises de perfis canônicos clássicos e casos reais para se obter a comparação dos resultados entre o modelo ora proposto, técnicas já consolidadas e medições. Sendo assim, sugerimos:

- Estabelecer melhores critérios na expansão do perfil para corrigir os problemas ocasionados por singularidades.
- Comparar o método apresentado com outras técnicas, determinando outros parâmetros, como campo eletromagnético e atenuação sobre o perfil, e a taxa de erro de um método em relação a outro.
- Implementar um modelo tridimensional.

- Verificar o algoritmo MoM-CSB em rotinas de otimização.
- Melhorar o custo computacional com a utilização de processamento paralelo ou em unidade de processamento gráfico.
- Desenvolver interface gráfica amigável que integre o algoritmo a outros métodos numéricos e modelos de propagação, dispondo de recursos para comparação de resultados e requisitos de sistema.

Referências Bibliográficas

- [1] K. Tap, P. Pathak, and R. Burkholder, “Complex source beam-moment method procedure for accelerating numerical integral equation solutions of radiation and scattering problems,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 62, no. 4, pp. 2052–2062, April 2014.
- [2] C. Tunc, A. Altintas, and V. Erturk, “Examination of existent propagation models over large inhomogeneous terrain profiles using fast integral equation solution,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 53, no. 9, pp. 3080–3083, Sept 2005.
- [3] F. Chen, “The numerical calculation of two-dimensional rough surface scattering by the conjugate gradient method,” *International Journal of Remote Sensing*, vol. 17, no. 4, pp. 801–808, 1996. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1080/01431169608949046>
- [4] D. Kapp and G. Brown, “A new numerical method for rough-surface scattering calculations,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 44, no. 5, pp. 711–, May 1996.
- [5] C. Smith, A. Peterson, and R. Mittra, “The biconjugate gradient method for electromagnetic scattering,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 38, no. 6, pp. 938–940, Jun 1990.
- [6] D. Torrungrueng, H.-T. Chou, and J. Johnson, “A novel acceleration algorithm for the computation of scattering from two-dimensional large-scale perfectly conducting random rough surfaces with the forward-backward method,” *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 38, no. 4, pp. 1656–1668, Jul 2000.
- [7] J. West and J. Sturm, “On iterative approaches for electromagnetic rough-surface scattering problems,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 47, no. 8, pp. 1281–1288, Aug 1999.

- [8] J. West, “Integral equation formulation for iterative calculation of scattering from lossy rough surfaces,” *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 38, no. 4, pp. 1609–1615, Jul 2000.
- [9] K. Tap, P. Pathak, and R. Burkholder, “Fast complex source point expansion for accelerating the method of moments,” in *Electromagnetics in Advanced Applications, 2007. ICEAA 2007. International Conference on*, Sept 2007, pp. 986–989.
- [10] E. Erez and Y. Leviatan, “Electromagnetic scattering analysis using a model of dipoles located in complex space,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 42, no. 12, pp. 1620–1624, Dec 1994.
- [11] A. Boag, E. Michielssen, V. Lomakin, and E. Heyman, “Non-uniform grid time domain (ngtd) algorithm for fast evaluation of transient fields,” in *Electromagnetic Compatibility, 2003. EMC '03. 2003 IEEE International Symposium on*, vol. 2, May 2003, pp. 875–877 Vol.2.
- [12] L. B. Felsen, “Complex-source-point solutions of the field equations and their relation to the propagation and scattering of gaussian beams,” *Symposia Matematica, Istituto Nazionale di Alta Matematica*, vol. 18, pp. 39–56, 1976.
- [13] J. B. KELLER and W. STREIFER, “Complex rays with an application to gaussian beams,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 61, no. 1, pp. 40–43, Jan 1971. [Online]. Available: <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=josa-61-1-40>
- [14] G. Deschamps, “Gaussian beam as a bundle of complex rays,” *Electronics Letters*, vol. 7, no. 23, pp. 684–685, November 1971.
- [15] V. Rokhlin, “Rapid solution of integral equations of classical potential theory,” *Journal of Computational Physics*, vol. 60, no. 2, pp. 187 – 207, 1985. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999185900026>
- [16] R. Coifman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, “The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription,” *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, vol. 35, no. 3, pp. 7–12, June 1993.
- [17] K. Tap, P. Pathak, and R. Burkholder, “Exact complex source point beam expansions for electromagnetic fields,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 59, no. 9, pp. 3379–3390, Sept 2011.
- [18] T. Hansen and G. Kaiser, “Huygens’ principle for complex spheres,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 59, no. 10, pp. 3835–3847, Oct 2011.

- [19] E. Heyman and L. B. Felsen, “Gaussian beam and pulsed-beam dynamics: complex-source and complex-spectrum formulations within and beyond paraxial asymptotics,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 18, no. 7, pp. 1588–1611, Jul 2001. [Online]. Available: <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-18-7-1588>
- [20] I. T. Lu, L. B. Felsen, and Y. Z. Ruan, “Spectral aspects of the gaussian beam method: reflection from a homogeneous half-space,” *Geophysical Journal International*, vol. 89, no. 3, pp. 915–932, 1987. [Online]. Available: <http://gji.oxfordjournals.org/content/89/3/915.abstract>
- [21] J. Ramsay, “Rayleigh distance as a normalizing range for beam power transmission,” in *G-MTT Symposium Digest, 1965*, vol. 65, no. 1, May 1965, pp. 27–32.
- [22] Y. Kim, “A uniform geometrical theory of diffraction analysis of reflector antennas with a complex source point beam expansion for feed radiation,” Ph.D. dissertation, Ohio State University, Columbus, OH, USA, 2007.
- [23] R. Kouyoumjian and P. Pathak, “A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 62, no. 11, pp. 1448–1461, Nov 1974.
- [24] Y. Kim, R. Burkholder, and P. Pathak, “Complex source extension of utd for analyzing large reflector antennas,” in *Antennas and Propagation (EuCAP), 2010 Proceedings of the Fourth European Conference on*, April 2010, pp. 1–4.
- [25] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. Wiley, May 1989. [Online]. Available: <http://www.worldcat.org/isbn/9780471621942>
- [26] R. F. Harrington, *Time-harmonic electromagnetic fields*, ser. IEEE press series on electromagnetic wave theory. Piscataway, NJ: J. Wiley and sons New York Chichester Weinheim, 2001. [Online]. Available: <http://opac.inria.fr/record=b1105789>
- [27] K. Tap, P. Pathak, and R. Burkholder, “An exact csp beam representation for em wave radiation,” in *Electromagnetics in Advanced Applications, 2007. ICEAA 2007. International Conference on*, Sept 2007, pp. 75–78.
- [28] T. B. Hansen and A. N. Norris, “Exact complex source representations of transient radiation,” *Wave Motion*, vol. 26, no. 2, pp. 101 – 115, 1997. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165212597000218>

- [29] J. Bowman, T. Senior, and P. Uslenghi, *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*. New-York: Hemisphere Publishing Corporation, 1987. [Online]. Available: <http://opac.inria.fr/record=b1099227>
- [30] P. Pathak, N. Wang, W. Burnside, and R. Kouyoumjian, “A uniform gtd solution for the radiation from sources on a perfectly conducting convex surface,” in *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1979*, vol. 17, Jun 1979, pp. 536–539.
- [31] W. Burnside, R. J. Marhefka, and N. Wang, “Computer programs, subroutines and functions for the short course on the modern geometrical theory of diffraction,” in *Appendices for the Short Course on Applications of the Modern Geometrical Theory of Diffraction*, Ohio State University, 1984.
- [32] E. Schlemmer, J. Steffan, W. Rucker, and K. Richter, “Accuracy improvement using a modified gauss-quadrature for integral methods in electromagnetics,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 28, no. 2, pp. 1755–1758, Mar 1992.
- [33] S. A. Schelkunoff, “Some equivalence theorems of electromagnetics and their application to radiation problems,” *Bell System Technical Journal*, vol. 15, no. 1, pp. 92–112, 1936. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1002/j.1538-7305.1936.tb00720.x>
- [34] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. IEEE Press, 1993.
- [35] A. Yagbasan, C. Tunc, V. Erturk, A. Altintas, and R. Mittra, “Characteristic basis function method for solving electromagnetic scattering problems over rough terrain profiles,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 58, no. 5, pp. 1579–1589, May 2010.
- [36] F. J. da Silva Moreira, “Aplicação de equações integrais para a predição da propagação radioelétrica sobre solos suavemente irregulares e incidência rasante,” *X Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica (SBMO 2002)*, Recife, PE, pp. 191–195, aug 2002.
- [37] W. E. Silva, “Predição de cobertura radioelétrica em terrenos irregulares usando método de funções de base características,” Master’s thesis, PPGEE-UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2011.
- [38] A. E. de Freitas, “Predição de cobertura em enlaces radioelétricos sobre terrenos irregulares através de equações integrais,” Master’s thesis, PPGEE-UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2001.

- [39] B. Babaoglu, C. Tunc, A. Altintas, and V. Erturk, “Fast integral equation techniques for propagation problems,” in *Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, 2004. 10th International Conference on*, Sept 2004, pp. 553–555.