

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Fase topológica fracionária em qudits fotônicos codificados espacialmente

Artur Araújo Matoso

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do grau de Mestre em Ciências

ICEx
Departamento de Física

Fevereiro de 2014

“Why so serious?”

Joker

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Resumo

ICE_x

Departamento de Física

Artur Araújo Matoso

Neste trabalho nós propomos duas montagens experimentais para observar fases topológicas fracionárias em qudits. O grau de liberdade em que os qudits são codificados é a posição transversal de pares de fótons gerados pela conversão paramétrica descendente espontânea após serem transmitidos por fendas múltiplas. Os fótons gerados neste fenômeno são quanticamente correlacionados em momento e energia. Inicialmente discutimos a teoria básica sobre fases topológicas, o contexto em que elas são fracionárias, e sua relação com o emaranhamento. Vemos então como operações unitárias locais podem ser aplicadas neste grau de liberdade utilizando moduladores espaciais de luz, que introduzem um perfil de fase programável na frente de onda dos fótons. Desta forma, a fase fracionária desejada pode ser observada através da interferência de dois fótons controlada por polarização. A influência do emaranhamento e da dimensão do espaço de Hilbert nas fases é revelada pelo comportamento das franjas de interferência à medida que as operações unitárias são continuamente modificadas. Essas idéias são corroboradas por cálculos analíticos e numéricos dos padrões de interferência esperados. Mostramos ainda como o chamado efeito Hong-Ou-Mandel está presente no interferômetro proposto, o qual exige simultaneidade na recombinação dos fótons gerados para se obter a interferência.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Abstract

ICEx

Departamento de Física

Artur Araújo Matoso

In this work we propose two experimental setups to observe fractional topological phases in qudits. The degree of freedom in which the qudits are encoded is the transverse position of photon pairs generated by spontaneous parametric down-conversion after being transmitted through multiple slits. The photons generated in this phenomenon are quantum correlated in energy and momenta. Initially we discuss the basic theory about topological phases, the context in which they are fractional, and its relation with entanglement. Then, we see how local unitary operations can be applied in this degree of freedom with the aid of spatial light modulators that introduce a programmable phase profile on the wavefront of the photons. Thus, the desired fractional phases can be observed through polarization-controlled two-photon interference. The roles played by entanglement and Hilbert space dimension are revealed by the behavior of the interference fringes as the unitary operations are continuously changed. These ideas are supported by analytical and numerical calculations of the expected interference fringes. We also show how the so called Hong-Ou-Mandel effect is present in the proposed interferometer, which requires simultaneity on the recombination of the photons generated to allow for the interference.

Agradecimentos

Primeiro a Deus, porque meu modo de viver é acreditando no Seu amor.

Aos meus pais, a quem foi confiada a missão de formar o meu caráter e ela foi cumprida. Juntamente com minha irmã eles ainda proporcionaram todas as condições para que eu pudesse estudar tranquilamente, seja quando meus pais investiram em mim para que eu não precisasse trabalhar durante a graduação, ou quando meu pai me ajudou em física desde o ensino fundamental até a graduação, ou quando todos eles se esforçaram para cuidar do lar enquanto eu não podia ajudar, e em tantos outros momentos.

A minha família que sempre e muito me incentivou, em especial minhas tias Cláudia, Clarete e Zelma, minha madrinha Messe e meu padrinho Vanderlei, e meus primos (irmãos) Christian e Gabriel, que estiveram mais próximos de mim em todos os momentos de planejamento e conquista.

A Juzinha, pois começamos a trilhar um caminho juntos que com a benção de Deus tem trazido sublime felicidade.

Aos meus amigos que conheci no ensino médio, em especial Ana, Peteco, Jão e Alice, amizades sem igual.

Aos meus amigos que conheci na física, em especial Guilhermito, Érico, Monsieur, Barbrita (Black), Barbrita (Flower), Davi, Dani e Karol, e meus companheiros de laboratório Wanderson, Breno e Aleja. Estas não são só amizades no ambiente acadêmico, mas para a vida toda.

Ao meu orientador Sebastião, que além de excelente orientador é um exemplo de pesquisador dedicado, pois mesmo frente a inúmeras responsabilidades que a vida lhe compete, parece incansável para poder lidar com todas.

Ao professor Zelaquett, colaborador neste trabalho. Foi ele quem propôs a medição da fase topológica para dois qutrits, que vem discutindo conosco desde o início da implementação da proposta experimental, até durante a sua montagem no laboratório.

As agências de fomento CNPq, Capes, Fapemig e INCT, pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo	ii
Abstract	iii
Agradecimentos	iv
Lista de Figuras	vi
Introdução	1
1 Fundamentos Teóricos	3
1.1 Fase geométrica	3
1.1.1 Fase geométrica e aproximação adiabática	3
1.1.2 Análise da fase geométrica	6
1.1.3 Fase geométrica para processos não adiabáticos	9
1.1.4 Fases Topológicas Fracionárias	11
1.2 Geração de um estado emaranhado	15
1.2.1 Fonte de fótons emaranhados	15
1.2.2 Estados de caminho	20
2 Propostas Experimentais	25
2.1 Primeira Proposta	26
2.1.1 Interferência de dois fótons controlada por polarização	26
2.1.2 Resultados numéricos	30
2.2 Efeito Hong-Ou-Mandel	36
2.3 Segunda Proposta	41
3 Resultados Parciais	44
Conclusão	50
A Artigo Publicado	52
Referências Bibliográficas	53

Lista de Figuras

1.1	Transporte paralelo de um vetor tangente	8
1.2	Diagrama da conversão paramétrica	16
1.3	Tipos de casamento de fase	17
1.4	Fótons da CPDE transmitidos através de fendas múltiplas	21
1.5	Aberturas das fendas múltiplas e suas funções de transmissão	21
2.1	Proposta experimental publicada em artigo	25
2.2	1ª proposta experimental	27
2.3	Interferência de coincidência para o 1º conjunto de operações unitárias	33
2.4	Interferência de coincidência para o 2º conjunto de operações unitárias	34
2.5	Interferência de coincidência para o 3º conjunto de operações unitárias	35
2.6	Interferência de coincidência para o 4º conjunto de operações unitárias	36
2.7	2ª proposta experimental	41
3.1	SLM	45
3.2	Modulação do SLM no Sagnac com deslocador de fase	46
3.3	Modulação do SLM no Sagnac sem deslocador de fase	46
3.4	Deslocador de Fase	47
3.5	Modulação do deslocador de fase	47
3.6	Medida do efeito HOM	48

Aos meus pais e minha irmã

Introdução

O conceito de fase geométrica em quântica surgiu em 1984 desenvolvido por M. V. Berry[1], em um artigo que investiga a evolução de um estado quântico sob a atuação de um Hamiltoniano que depende do tempo através de um conjunto de parâmetros. Nele, Berry mostra que quando estes parâmetros são modificados lentamente, o estado adquire uma fase além daquela relacionada à evolução unitária. Esta fase é chamada de fase geométrica devido ao fato de que ela pode ser calculada através dos autoestados do Hamiltoniano que também recebem a parametrização, e o cálculo depende do caminho percorrido pelos parâmetros no espaço associado a eles. Uma abordagem mais elementar pode ser encontrada nas referências [2–4]. Embora o desenvolvimento realizado por Berry considerasse a condição de mudanças adiabáticas, mais tarde verificou-se que a manifestação da fase geométrica não necessita desta exigência[5].

O aparecimento da fase geométrica também foi investigado para sistemas bipartidos emaranhados[6], nos quais é possível perceber que ela possui uma dependência com o grau de emaranhamento[7]. Estudos posteriores, já no início dos anos 2000, mostraram sua manifestação para o caso de sistemas quânticos de dois níveis[8, 9], os chamados qubits. Nestas últimas referências citadas podemos verificar a utilização do termo fase topológica; isto se deve ao fato de que a fase geométrica pode trazer uma contribuição de natureza topológica, isto é, relacionada à topologia de um espaço. Cuidado neste ponto para não fazer a associação com o espaço de parâmetros ou com o espaço de Hilbert dos estados. No desenvolvimento da seção 1.1.4 ficará mais claro sobre a topologia de qual espaço nos referimos. Em meio as discussões teóricas percebeu-se também uma relação da fase topológica com a dimensão do espaço de Hilbert dos estados, sendo que mais recentemente foi mostrado que ela de fato influencia a fase que surge para qudits[10] (sistemas quânticos de d níveis). A presença da fase topológica é uma propriedade notável em sistemas de dois qudits, mas também ocorre para múltiplos qudits[11].

No campo experimental os avanços ocorreram paralelamente a todo o embasamento teórico que se construía. Ainda no fim da década de 80 e durante a década de 90, experimentos verificaram a manifestação da fase topológica em sistemas quânticos de nêutrons[12, 13] e sistemas fotônicos[14]. Também na primeira década dos anos 2000 foram feitas medições da fase topológica[15, 16], evidenciando duas características importantes: as medições podem ser feitas utilizando técnicas de interferometria e o fato de que o espaço associado à aparição das fases pode não ser simplesmente conexo¹ se reflete nelas. Este último conceito vai nos ajudar quando falarmos de topologia mais tarde.

¹Um espaço é dito simplesmente conexo se todo caminho entre dois pontos do espaço pode ser continuamente transformado em outro que preserva os dois pontos nas extremidades e o novo caminho pertença ao espaço.

Entre outros motivos, existe um interesse em estudar as fases topológicas por conta de sua possível aplicação em processamento quântico de informação. Pesquisas relacionadas à implementação de portas unitárias quânticas utilizando estas fases[17, 18] discutem as formas de se concretizar tais possibilidades. Seguindo nesta direção há também discussões sobre como realizar computação quântica tolerante a falhas[19], o que abre interessantes perspectivas para que se continuem as pesquisas envolvendo a descrição teórica e os meios de se medir as fases topológicas.

Neste trabalho vamos apresentar duas propostas experimentais semelhantes para se observar fases topológicas fracionárias em qudits. O primeiro capítulo está dividido em duas seções; na primeira vamos introduzir o conceito de fase geométrica e mostrar uma situação em que ela apresenta uma contribuição fracionária de natureza topológica; na segunda vamos apresentar uma fonte de fótons emaranhados e como podemos utilizá-la para gerarmos o sistema quântico fotônico com o qual trabalharemos.

No segundo capítulo vamos explicar como funcionam as propostas experimentais, que utilizam Moduladores Espaciais de Luz (*Space Light Modulators* - SLM) para implementar operações unitárias locais em um estado de dois fótons, além da interferometria com o grau de liberdade de polarização como auxiliar para viabilizar a medição das fases topológicas. Serão exibidas simulações numéricas dos padrões de interferência previstos em diferentes situações, de modo a evidenciar a relação entre o emaranhamento e a dimensão do espaço de Hilbert com as fases. Há ainda uma seção destinada a mostrar que é preciso levarmos em conta o chamado efeito Hong-Ou-Mandel na execução do experimento. Nele é necessário que os fótons gerados se recombinem simultaneamente para que haja interferência.

No terceiro capítulo apresentaremos alguns resultados parciais da implementação dos experimentos, bem como alguns detalhes sobre os alinhamentos feitos, os equipamentos e elementos ópticos utilizados, e as coletas de dados realizadas. Por fim, daremos uma visão geral sobre todos os pontos importantes desenvolvidos durante a dissertação. O apêndice A traz ainda o resumo da publicação resultante deste trabalho.

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos

Para abrir as discussões desta dissertação, vamos apresentar neste capítulo as bases teóricas sobre fase topológica e geração de fótons emaranhados necessárias ao entendimento deste trabalho. Vamos considerar sempre **estados puros**, a não ser em pequenas discussões isoladas onde seja natural mencionar operadores de estado mais gerais. Na primeira seção abordaremos a fase geométrica sob a ótica da aproximação adiabática, onde vamos ver que esta é uma fase adquirida por um estado quando ele passa por uma evolução em que o Hamiltoniano depende do tempo. Porém, esta fase não está diretamente relacionada com a evolução unitária pela qual o estado passa, mas sim com a geometria do espaço associado aos parâmetros escolhidos para parametrizar o Hamiltoniano. Em seguida, discutiremos a fase geométrica sob a perspectiva da decomposição polar de matrizes para um estado bipartido, o que nos permitirá ver que ela é composta por uma fase topológica fracionária e por uma parte relacionada com a I-concorrência, que é um quantificador de emaranhamento para este tipo de estado. Por fim, na segunda seção, discutiremos como obter a geração controlada de estados emaranhados, motivada justamente pela relação existente entre a fase geométrica e a I-concorrência.

1.1 Fase geométrica

O tratamento que faremos a seguir é feito por Wolfgang P. Schleich em [20].

1.1.1 Fase geométrica e aproximação adiabática

Veremos o que acontece quando começamos em um autoestado de um Hamiltoniano, e lentamente modificamos a interação descrita por ele. Vamos considerar também que os autovalores de energia não são degenerados. Aqui lentamente significa lento comparado

a todas as escalas de tempo do sistema, o que vai configurar as chamadas mudanças adiabáticas. Conseqüentemente, para cada instante de tempo existe um autoestado de energia instantâneo $|n(t)\rangle$. Como resultado, teremos que sob mudanças adiabáticas, o sistema vai permanecer no mesmo autoestado do Hamiltoniano em que ele estava inicialmente. No entanto, ele adquire uma fase que consiste de duas partes: uma **fase dinâmica**, originada do fato de que um estado estacionário passa por uma evolução temporal unitária, e uma **fase geométrica**, relacionada à geometria do espaço de parâmetros. Esta última é chamada também fase de Berry[1], que foi o primeiro a desenvolvê-la. Além disso, vamos ver que a exigência de mudanças adiabáticas não é necessária, e que é possível definir a fase geométrica para mudanças não adiabáticas.

Vamos considerar a evolução temporal de um estado quântico quando o Hamiltoniano H do sistema depende do tempo através de parâmetros externos $\mathbf{R}(t)$, isto é, $H = H(\mathbf{R}(t))$. A evolução para qualquer estado quântico $|\psi(t)\rangle$ segue da equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(\mathbf{R}(t)) |\psi(t)\rangle. \quad (1.1)$$

Um autoestado de energia instantâneo $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ do Hamiltoniano $H(\mathbf{R}(t))$ com energia $E_n(\mathbf{R}(t))$ é definido por

$$H(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle = E_n(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle. \quad (1.2)$$

Para resolver a equação de Schrödinger (1.1), supomos o seguinte estado expandido em termos de $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-i\phi_n^{(d)}(t)} |n(\mathbf{R}(t))\rangle. \quad (1.3)$$

Aqui nós incluímos a fase dinâmica

$$\phi_n^{(d)}(t) \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(\mathbf{R}(t')), \quad (1.4)$$

que é a generalização do fator de fase usual $E_n t/\hbar$ de sistemas com H independente do tempo. Substituindo a eq.(1.3) na equação de Schrödinger (1.1) temos que

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = i\hbar \sum_n \left\{ \left[\left(\frac{d}{dt} c_n \right) + c_n \left(-i \frac{d}{dt} \phi_n^{(d)} \right) \right] e^{-i\phi_n^{(d)}} |n\rangle + c_n e^{-i\phi_n^{(d)}} \left(\frac{d}{dt} |n\rangle \right) \right\},$$

onde suprimimos as dependências das variáveis por simplicidade. Da eq.(1.4) que define a fase dinâmica temos

$$\frac{d}{dt}\phi_n^{(d)}(t) = \frac{1}{\hbar}E_n(\mathbf{R}(t)),$$

e o lado esquerdo da equação de Schrödinger fica na forma

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = i\hbar\sum_n e^{-i\phi_n^{(d)}} \left[\left(\frac{d}{dt}c_n \right) |n\rangle + c_n \left(\frac{d}{dt}|n\rangle \right) \right] + \sum_n E_n c_n e^{-i\phi_n^{(d)}} |n\rangle. \quad (1.5)$$

A eq.(1.2) permite calcular o lado direito da equação de Schrödinger

$$H|\psi(t)\rangle = \sum_n E_n c_n e^{-i\phi_n^{(d)}} |n\rangle. \quad (1.6)$$

Igualando as expressões para o lado direito (1.6) e o lado esquerdo (1.5) da equação de Schrödinger, ficamos com

$$\sum_n e^{-i\phi_n^{(d)}} \left[\left(\frac{d}{dt}c_n \right) |n\rangle + c_n \left(\frac{d}{dt}|n\rangle \right) \right] = 0$$

Agora, tomamos o produto interno da equação acima com o autoestado de energia $|m(\mathbf{R}(t))\rangle$, e assumimos a condição de ortonormalidade $\langle m | n \rangle = \delta_{m,n}$, o que nos leva à equação diferencial

$$\frac{d}{dt}c_m = -\langle m | \frac{d}{dt} |m\rangle c_m - \sum_{m \neq n} e^{-i(\phi_n^{(d)} - \phi_m^{(d)})} \langle m | \frac{d}{dt} |n\rangle c_n. \quad (1.7)$$

Nós reconhecemos que o elemento de matriz

$$I_{m,n}(t) \equiv \langle m | \frac{d}{dt} |n\rangle,$$

acopla o n -ésimo autoestado de energia com o m -ésimo estado. Portanto, a princípio, mesmo se começamos em um dado autoestado de energia, a evolução temporal unitária faz com que outros autoestados sejam excitados. Três fatores determinam a probabilidade destas transições: o elemento de matriz $I_{m,n}$, a diferença $\phi_n^{(d)} - \phi_m^{(d)}$ das fases dinâmicas, e a amplitude de probabilidade inicial c_n . Vamos analisar primeiro o papel

de $I_{m,n}$ e tentar estimar sua magnitude. Substituímos a diferenciação com respeito ao tempo pela diferenciação com respeito ao parâmetro $\mathbf{R}(t)$ multiplicada pela taxa com que $\mathbf{R}(t)$ muda

$$I_{m,n}(t) = \langle m(\mathbf{R}(t)) | \frac{d}{dt} |n(\mathbf{R}(t))\rangle = \langle m(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R}(t))\rangle \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{R}(t), \quad (1.8)$$

e temos a indicação de que a magnitude de $I_{m,n}$ é governada pela taxa com que $\mathbf{R}(t)$ muda. Se esta taxa é pequena comparada às escalas temporais envolvidas no problema, o acoplamento de $I_{m,n}$ é pequeno. Agora voltemos nossa atenção para a diferença $\phi_n^{(d)} - \phi_m^{(d)}$; devemos notar que estes fatores de fase variam como funções do tempo, e estas oscilações também reduzem o acoplamento do m -ésimo estado com os demais. Sendo assim, é razoável negligenciar os termos em que $m \neq n$ quando estamos realizando uma mudança adiabática.

A então chamada aproximação adiabática estabelece que um sistema inicialmente em um autoestado de energia permanece nele se as mudanças em $\mathbf{R}(t)$ são adiabáticas.

1.1.2 Análise da fase geométrica

Nos próximos passos iremos definir uma expressão para a fase geométrica, e tentar relacioná-la com a geometria do espaço de parâmetros. Na aproximação adiabática, a eq.(1.7) se torna

$$\frac{d}{dt} c_m(t) \cong - \langle m(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} |m(\mathbf{R}(t))\rangle \cdot \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} c_m(t). \quad (1.9)$$

Agora vamos mostrar que o termo $\langle m(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} |m(\mathbf{R}(t))\rangle$ é um imaginário puro. De fato, diferenciando a condição de normalização $\langle m(\mathbf{R}(t)) | m(\mathbf{R}(t))\rangle = 1$, encontramos

$$\nabla_{\mathbf{R}} (\langle m(\mathbf{R}(t)) | m(\mathbf{R}(t))\rangle) = \langle \nabla_{\mathbf{R}} m(\mathbf{R}(t)) | m(\mathbf{R}(t))\rangle + \langle m(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} |m(\mathbf{R}(t))\rangle = 0,$$

ou

$$\langle m(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} |m(\mathbf{R}(t))\rangle^* + \langle m(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} |m(\mathbf{R}(t))\rangle = 2\text{Re}\{\langle m(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} |m(\mathbf{R}(t))\rangle\} = 0,$$

isto é, a parte real desaparece. Consequentemente, a amplitude de probabilidade adquire uma fase determinada pela equação diferencial

$$\frac{d}{dt}c_m(t) = -i\text{Im}\{\langle m(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} | m(\mathbf{R}(t)) \rangle\} \cdot \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} c_m(t),$$

que fornece

$$c_m(t) = e^{-i\gamma_m^{(g)}(t)} c_m(0).$$

Aqui introduzimos a fase geométrica

$$\gamma_m^{(g)}(t) \equiv \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} d\mathbf{R}' \text{Im}\{\langle m(\mathbf{R}'(t)) | \nabla_{\mathbf{R}'} | m(\mathbf{R}'(t)) \rangle\}. \quad (1.10)$$

O nome fase geométrica se origina do fato de que o caminho da integral pertence à geometria do espaço de parâmetros. Para o caso em que o estado inicial é $|m(\mathbf{R}(0))\rangle$, as eqs.(1.3, 1.4) para $t = 0$ fornecem a condição inicial $c_n(0) = \delta_{n,m}$, e o estado

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\gamma_m^{(g)}(t)} e^{-i\phi_m^{(d)}(t)} |m(\mathbf{R}(t))\rangle \quad (1.11)$$

adquire além da fase dinâmica $\phi_m^{(d)}(t)$ a fase geométrica $\gamma_m^{(g)}(t)$. Considerando o caso de uma evolução cíclica com um caminho fechado \mathcal{C} , vemos da eq.(1.11) que o estado após um ciclo não é idêntico ao inicial, mas adquire uma fase geométrica

$$\gamma_m^{(g)}(t) = \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{R} \text{Im}\{\langle m(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} | m(\mathbf{R}(t)) \rangle\}. \quad (1.12)$$

Com este resultado já podemos perceber o aparecimento da fase geométrica e a motivação de seu nome, sendo que poderíamos seguir para as próximas duas subseções onde veremos sua generalização sem a aproximação adiabática e uma análise à luz da decomposição polar de matrizes. Antes disso, porém, discutiremos brevemente mais alguns desdobramentos da expressão acima que reforçam a utilização do nome geométrica.

A eq.(1.12) traz em si elementos da geometria diferencial. Apesar de que vamos utilizar a seguir alguns termos referentes a ela para elucidar a relação entre a fase geométrica e a geometria do espaço de parâmetros, não é nosso objetivo aqui explicar conceitos de geometria diferencial. Contudo, a expressão remete ao conceito de medir a curvatura de uma superfície através do transporte paralelo de um vetor tangente[21, 22]. Propaga-se

um vetor que é tangente a uma superfície curva ao longo de um caminho nesta superfície, como na Fig.(1.1). Quando consideramos um caminho fechado, o vetor após um ciclo não é idêntico ao vetor inicial, mas há um certo ângulo entre eles, que está relacionado à curvatura da superfície.

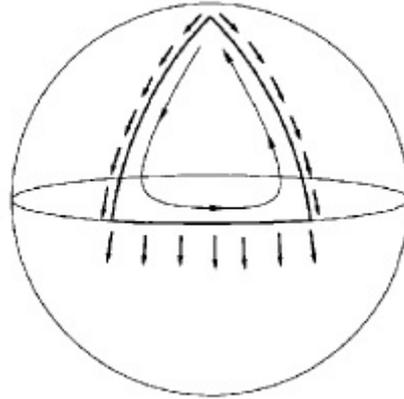


FIGURA 1.1: Consideramos um vetor que é sempre tangente à superfície de uma esfera, e o propagamos ao longo de um caminho fechado na esfera. Quando retornamos ao ponto em que começamos, o vetor inicial e o propagado não são idênticos, mas delimitam um ângulo. Este ângulo se relaciona com a curvatura da esfera.[20]

Podemos ir além e aplicar o teorema de Stokes para transformar a integral de linha ao longo de \mathcal{C} em uma integral de superfície. A fase geométrica

$$\gamma_m^{(g)}(t) = \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{f} \cdot \mathcal{B}_m(\mathbf{R}(t))$$

é também o fluxo do campo

$$\mathcal{B}_m(\mathbf{R}(t)) \equiv \nabla_{\mathbf{R}} \times \text{Im}\{\langle m(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} | m(\mathbf{R}(t)) \rangle\}$$

através da superfície \mathcal{F} com o vetor normal \mathbf{f} delimitada pelo caminho \mathcal{C} .

Um exemplo: o efeito Aharonov-Bohm

Na eletrodinâmica clássica, os potenciais escalar e vetor são introduzidos como um auxílio matemático conveniente para se calcular os campos elétrico e magnético, mas apenas estes são considerados como tendo significado físico. Por causa de sua origem clássica, é natural supor que o princípio da *invariância por calibre*¹ no contexto da mecânica quântica apenas expressa a noção de que só os campos tem significado físico.

¹Vale lembrar que para a mecânica quântica, além das mudanças de calibre nos campos, é preciso considerar também um fator de fase no estado[23].

No entanto, Aharonov e Bohm[24] mostraram que em algumas situações esta interpretação é difícil de ser mantida.

Vamos tentar resumir a ideia por trás do efeito. Elétrons atravessam uma região onde há um potencial vetor criado por um solenóide longo e fino. Este dispositivo possui um campo magnético que pode ser bem aproximado como sendo constante em seu interior mas nulo fora dele. Assim, as linhas de contorno do potencial vetor podem ser escolhidas como sendo círculos em torno do solenóide. A função de onda de um elétron que rodeia o solenóide pelo lado esquerdo adquire um fator de fase que é diferente quando se rodeia o lado direito. O deslocamento de fase total no efeito Aharonov-Bohm que determina o padrão de interferência será a integral

$$\gamma^{(g)} \approx \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) = \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{f} \cdot [\nabla_{\mathbf{R}} \times \mathbf{A}(\mathbf{R})] = \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{R})$$

do potencial vetor \mathbf{A} ao longo do caminho fechado \mathcal{C} dos elétrons, que é o fluxo de \mathbf{B} através da área \mathcal{F} definida por \mathcal{C} . O ponto chave aqui é mostrar que \mathbf{A} equivale a $\text{Im}\{\langle m(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} | m(\mathbf{R}(t)) \rangle\}$, o que é possível com a teoria de uma partícula carregada em um campo magnético. Este exemplo traz à tona o fato de que a fase geométrica também pode ser vista como o fluxo de um campo.

1.1.3 Fase geométrica para processos não adiabáticos

Consideremos novamente a equação de Schrödinger (1.1) com o Hamiltoniano dependente do tempo. Desejaremos que o estado quântico que obedece esta equação tenha uma propriedade especial: no tempo T o estado será igual ao inicial a menos de uma fase φ

$$|\psi(T)\rangle = e^{i\varphi} |\psi(0)\rangle, \quad (1.13)$$

onde φ é real. Definiremos então o estado

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-i\phi(t)} |\psi(t)\rangle, \quad (1.14)$$

e construiremos nesta seção a dependência temporal da fase ϕ , também real, de modo a remover a fase φ e obtermos

$$|\tilde{\psi}(T)\rangle = |\tilde{\psi}(0)\rangle. \quad (1.15)$$

Vamos mostrar então que neste caso a fase ϕ consiste de uma parte dinâmica e uma parte geométrica. Para tanto, diferenciamos o estado $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ com respeito ao tempo e utilizamos a equação de Schrödinger, o que fornece

$$\frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = -i\dot{\phi}(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle - \frac{i}{\hbar} e^{-i\phi(t)} H(t) |\psi(t)\rangle.$$

Tomando o produto interno com $|\tilde{\psi}(t)\rangle$, temos

$$\dot{\phi}(t) = i \langle \tilde{\psi}(t) | \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle - \frac{1}{\hbar} \langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle.$$

Após integrarmos em um tempo T , a equação acima fornece a seguinte diferença de fase

$$\phi(T) - \phi(0) = i \int_0^T dt' \langle \tilde{\psi}(t') | \frac{d}{dt'} |\tilde{\psi}(t')\rangle - \frac{1}{\hbar} \int_0^T dt' \langle \psi(t') | H(t') | \psi(t') \rangle. \quad (1.16)$$

Agora definimos

$$\phi(T) - \phi(0) \equiv \varphi \quad (1.17)$$

para mostrar que é possível obter a eq.(1.15). De fato, das eqs.(1.13) e (1.14) encontramos

$$|\tilde{\psi}(T)\rangle = e^{-i\phi(T)} |\psi(T)\rangle = e^{-i\phi(T)} e^{i\varphi} |\psi(0)\rangle,$$

e ainda utilizando a eq.(1.17) temos

$$|\tilde{\psi}(T)\rangle = e^{-i\phi(0)} |\psi(0)\rangle = |\tilde{\psi}(0)\rangle.$$

Assim, o estado quântico $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ no tempo T é idêntico ao estado no tempo $t = 0$, mas o estado $|\psi(t)\rangle$ adquire a fase φ que consiste de duas partes associadas com a evolução temporal (2º termo da eq.(1.16)) e com a geometria (1º termo da eq.(1.16)). Desta vez não temos uma expressão para calcular diretamente a fase geométrica, como encontramos fazendo a aproximação adiabática, mas em compensação, vemos que ela surge mesmo quando H possui uma dependência temporal arbitrária. A seguir, vamos mostrar que para um estado bipartido, a decomposição polar de matrizes revela a divisão

da fase geométrica em uma parte topológica fracionária e uma parte relacionada a I-concorrência.

1.1.4 Fases Topológicas Fracionárias

Seja $|\psi\rangle = \sum_{m,n=1}^d \alpha_{mn} |m, n\rangle$ o estado puro mais geral de dois qudits. Vamos representar este estado por uma matriz α de dimensões $d \times d$ cujos elementos são os coeficientes α_{ij} . Com esta notação a norma ao quadrado do vetor de estado é $\langle\psi | \psi\rangle = \text{Tr}[\alpha^\dagger \alpha] = 1$, e o produto escalar de dois estados é $\langle\phi | \psi\rangle = \text{Tr}[\beta^\dagger \alpha]$, onde β é a matriz $d \times d$ contendo os coeficientes do estado $|\phi\rangle$. Utilizaremos agora o fato de que qualquer matriz inversível admite uma decomposição polar

$$\alpha = e^{i\phi} Q S, \quad (1.18)$$

onde Q é uma matriz hermitiana positiva definida e $S \in \text{SU}(d)$ ². Sob as operações unitárias locais U_s e V_i (os índices s e i indicando os diferentes subespaços), a matriz de coeficientes é transformada de acordo com

$$\alpha' = U_s \alpha V_i^T. \quad (1.19)$$

Utilizando as relações³ $U_s = \sqrt[d]{\det U_s} \bar{U}_s$ e $V_i = \sqrt[d]{\det V_i} \bar{V}_i$, onde \bar{U}_s e \bar{V}_i são as partes $\text{SU}(d)$ das operações unitárias locais, e (1.18), podemos escrever

$$\alpha' = e^{i\phi'} Q' S', \quad (1.20)$$

onde $e^{i\phi'} = e^{i\phi} \sqrt[d]{\det U_s \det V_i}$, $Q' = \bar{U}_s Q \bar{U}_s^\dagger$, e $S' = \bar{U}_s S \bar{V}_i^T$. Identificamos então a transformação separada em três setores da estrutura da matriz: uma transformação $U(1)$ $\phi \mapsto \phi'$, uma transformação fechada no espaço das matrizes hermitianas positivas definidas $Q \mapsto Q'$, e uma transformação fechada em $\text{SU}(d)$ $S \mapsto S'$. Como as raízes de um número complexo possuem múltiplos valores, é preciso ter cuidado para se definir as quantidades acima. Para operações unitárias variando no tempo, podemos supor que qualquer uma das raízes possíveis é tomada como o tempo inicial e os valores subsequentes devem formar uma evolução contínua como uma função do tempo, assim $\phi(t)$ é uma função suave, diferenciável em toda parte.

² $\text{SU}(d)$ é o grupo de matrizes unitárias de dimensões $d \times d$ e que possuem determinante 1.

³Como o determinante de uma matriz unitária possui módulo igual a 1, ou seja, é igual a uma fase, podemos reescrevê-la como o produto desta fase por uma matriz $\text{SU}(d)$ cujo determinante é igual a 1. Aqui a fase é escrita na forma $\sqrt[d]{\det M}$, M a matriz unitária.

Vamos definir como cíclica a evolução em que o estado final é fisicamente equivalente ao estado inicial, isto é, eles estão relacionados apenas por um fator de fase global

$$\alpha' = e^{i\gamma} \alpha. \quad (1.21)$$

Neste ponto nós podemos nos valer da decomposição polar para investigar a contribuição vinda de cada setor da matriz de coeficientes para um estado evoluindo no tempo. Se considerarmos uma evolução cíclica após o intervalo T , fizermos as associações $\alpha(T) = \alpha'$ e $\alpha(0) = \alpha$, e escrevermos $\gamma = \Delta\phi + \gamma_q + \gamma_s$, das eqs.(1.18, 1.20, 1.21) temos

$$e^{i\phi(T)} Q(T) S(T) = e^{i(\Delta\phi + \gamma_q + \gamma_s)} e^{i\phi(0)} Q(0) S(0). \quad (1.22)$$

Primeiro identificamos uma evolução de fase trivial $\phi(T) = \phi(0) + \Delta\phi$ no setor $U(1)$. No setor das Hermitianas positivas, se escrevemos $Q(T) = e^{i\gamma_q} Q(0)$, as condições de sua definição impõem $\gamma_q = 0$ e nenhuma contribuição de fase decorre deste setor. Finalmente, no setor $SU(d)$ nós temos $S(T) = e^{i\gamma_s} S(0)$; contudo, $\det S(T) = e^{id\gamma_s} \det S(0)$, e como ambas $S(T)$ e $S(0)$ são matrizes $SU(d)$, chegamos a

$$\gamma_s = \frac{2n\pi}{d} \quad n = 0, 1, 2, \dots, d-1. \quad (1.23)$$

Portanto, apenas valores de fase fracionários surgem do setor $SU(d)$. Embora $SU(d)$ seja simplesmente conexo, a natureza topológica dessas fases fracionárias depende da múltipla conexidade da variedade⁴ que representa o conjunto de matrizes S em $SU(d)$ com a restrição $e^{i\gamma_s} S \equiv S$. A seguir veremos como essa fase aparece na fase geométrica adquirida por um estado evoluindo no tempo, além de uma contribuição integral advinda dos setores hermitiano e $SU(d)$ da decomposição polar. A fase geométrica é sempre definida como

$$\begin{aligned} \gamma_g &= \arg \langle \psi(0) | \psi(T) \rangle + i \int_0^T dt \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle \\ &= \arg \text{Tr}[\alpha^\dagger(0)\alpha(T)] + i \int_0^T dt \text{Tr}[\alpha^\dagger(t)\dot{\alpha}(t)], \end{aligned} \quad (1.24)$$

⁴Uma variedade em matemática é um espaço que se assemelha ao espaço Euclidiano nas vizinhanças de cada ponto.

que corresponde à fase total subtraída da fase dinâmica, como vimos anteriormente na eq.(1.16). É fácil verificar que o primeiro termo é $\gamma = \Delta\phi + \gamma_s$. Podemos também investigar a fase dinâmica utilizando a decomposição polar. Neste ponto é útil escrever

$$\dot{\alpha}(t) = i\dot{\phi}(t)\alpha(t) + e^{i\phi(t)}[\dot{Q}(t)S(t) + Q(t)\dot{S}(t)]. \quad (1.25)$$

Substituindo esta expressão na integral e utilizando a condição de normalização $\text{Tr}[\alpha^\dagger(t)\alpha(t)] = 1$, vemos que o primeiro termo da integral é igual a $-\Delta\phi$, que se cancela com a fase $\Delta\phi$ da fase total, restando apenas γ_s . Para os outros termos da integral, fazendo $\alpha^\dagger(t) = e^{-i\phi(t)}S^\dagger(t)Q(t)$ e utilizando a ciclicidade do traço, chegamos a

$$\gamma_g = \frac{2n\pi}{d} + i \int_0^T dt (\text{Tr}[Q(t)\dot{Q}(t)] + \text{Tr}[Q^2(t)\dot{S}(t)S^\dagger(t)]). \quad (1.26)$$

A condição de normalização implica em $\text{Tr}[Q^2(t)] = 1$. Diferenciando-a de ambos os lados com respeito a t e utilizando novamente a ciclicidade do traço, teremos $\text{Tr}[Q(t)\dot{Q}(t)] = 0$. Para lidar com a última contribuição restante da integral, vamos identificar os seguintes invariantes sob evoluções unitárias locais: $\text{Tr}[\rho_f^p]$, $p = 1, \dots, d$, onde ρ_f é a matriz densidade reduzida do qudit $f = s, i$

$$\rho_s = (\alpha^\dagger \alpha)^T = (S^\dagger Q^2 S)^T, \quad (1.27)$$

$$\rho_i = \alpha \alpha^\dagger = Q^2. \quad (1.28)$$

De fato, os invariantes são independentes de f , já que é fácil mostrar que $\text{Tr}[\rho_s^p] = \text{Tr}[\rho_i^p] = \text{Tr}[Q^{2p}]$. O primeiro ($p = 1$) é simplesmente a norma do vetor de estado, como já estabelecido. O segundo invariante está relacionado à I-concorrência[25–27] de um estado puro de dois qudits $C = \sqrt{2(1 - \text{Tr}[\rho_f^2])}$, logo sua invariância expressa o fato bem conhecido de que emaranhamento não é afetado por operações unitárias locais. Para uma dada dimensão d , a I-concorrência vai de 0 para estados produto a $C_m = \sqrt{2(d-1)/d}$ para estados maximamente emaranhados. A fim de explorarmos o papel desempenhado por esses invariantes na fase geométrica, vamos torná-los explícitos na expressão de Q^2 em termos da identidade e dos geradores T_n ($n = 1, 2, \dots, d^2 - 1$) de $\text{SU}(d)$. Os geradores são matrizes de traço nulo normalizadas de acordo com $\text{Tr}[T_n T_m] = \delta_{nm}/2$. É possível mostrar que uma matriz geral Q^2 com $\text{Tr}[Q^2] = 1$ e $\text{Tr}[Q^4] = 1 - C^2/2$ pode ser escrita como

$$Q^2(t) = \frac{\mathbb{I}}{d} + \sqrt{C_m^2 - C^2} \hat{\mathbf{q}}(t) \cdot \mathbf{T}, \quad (1.29)$$

onde $\hat{\mathbf{q}}$ é um vetor unitário em \mathbb{R}^{d^2-1} . Para estados maximamente emaranhados ($C = C_m$), as matrizes densidade reduzidas se tornam $\rho_s = \rho_i = \mathbb{I}/d$.

A expressão (1.29) pode ser substituída na integral da eq.(1.26) para estabelecer uma conexão entre a fase geométrica e a I-concorrência de um estado de dois qudits que passa por uma evolução cíclica. No entanto, será útil trabalhar em uma parametrização conveniente para $\dot{S}S^\dagger$. Primeiro recorremos ao fato de que para uma matriz inversível geral A nós temos[28]

$$\frac{d(\det A)}{dt} = \det A \operatorname{Tr} \left[A^{-1} \frac{dA}{dt} \right]. \quad (1.30)$$

Como a evolução de $S(t)$ é fechada em $SU(d)$ ($\det S(t) = 1$), nós facilmente chegamos a $\operatorname{Tr}[\dot{S}S^\dagger] = 0$. Ainda, notamos que⁵ $\dot{S}S^\dagger = -S\dot{S}^\dagger$, o que nos permite definir o vetor velocidade⁶ $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{d^2-1}$ tal que $\dot{S}S^\dagger = i\mathbf{s} \cdot \mathbf{T}$. Então, utilizando a condição de normalização para os geradores e o fato de que eles são matrizes com traço nulo, nós chegamos a uma expressão compacta para a fase geométrica

$$\gamma_g = \frac{2n\pi}{d} - \frac{1}{2} \sqrt{C_m^2 - C^2} \oint \hat{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.31)$$

onde nós definimos $d\mathbf{x} = \mathbf{s} dt$. Este resultado chave mostra que a fase geométrica para uma evolução cíclica é composta por uma contribuição fracionária de natureza topológica e uma contribuição integral que depende da história da evolução do estado quântico, parametrizada nos setores hermitiano e $SU(d)$ da decomposição polar. Essa contribuição integral é pesada pelo emaranhamento e desaparece para estados maximamente emaranhados, para os quais apenas os valores fracionários são permitidos.

⁵Basta diferenciar $SS^\dagger = \mathbb{I}$ de ambos os lados com respeito a t . O produto $\dot{S}S^\dagger$ é então anti-hermitiano, isto é, $\dot{S}S^\dagger = -(\dot{S}S^\dagger)^\dagger$.

⁶Como o produto $\dot{S}S^\dagger$ possui traço nulo, ele pode ser escrito como uma combinação linear dos geradores T_n com coeficientes introduzidos aqui através do vetor \mathbf{s} . Ainda por ser anti-hermitiano, os coeficientes aparecem multiplicados por i . O vetor \mathbf{q} que apareceu anteriormente na eq.(1.29) é introduzido de uma forma similar, porém o fator i não aparece por Q^2 ser hermitiana, e o termo \mathbb{I}/d aparece por Q^2 possuir traço igual a 1.

1.2 Geração de um estado emaranhado

Em vista da eq.(1.31), se voltarmos nossa atenção para o ponto de vista experimental, é interessante trabalhar com a geração controlada de um estado emaranhado a fim de se explorar a influência da contribuição integral para a fase geométrica. Em particular, vamos abordar a utilização de uma fonte de fótons emaranhados, a *Conversão Paramétrica Descendente Espontânea* (CPDE). Entre as fontes de fótons, a CPDE é bastante explorada em virtude da possibilidade de se obter o emaranhamento em vários graus de liberdade, como por exemplo em energia-tempo[29, 30], polarização[31, 32], momento[33], e momento angular orbital[34, 35], sendo que o nosso objeto de estudo será as correlações em momento. Posteriormente, veremos como o estado quântico dos fótons gerados na CPDE é modificado quando os fótons atravessam um arranjo de fendas múltiplas, resultando nos chamados estados de caminho, com os quais trabalharemos nesta dissertação. Vamos apresentar também o efeito sobre os estados de caminho quando o feixe que dá origem aos fótons emaranhados é focalizado no plano das fendas. As discussões sobre a CPDE e os estados de caminho que serão feitas aqui são retiradas da tese de doutorado escrita por Leonardo Neves[36].

1.2.1 Fonte de fótons emaranhados

A CPDE é um processo óptico não-linear no qual um feixe de laser com vetor de onda \mathbf{k}_o e frequência ω_o , ao incidir em um cristal não-linear, tem uma pequena probabilidade de ser convertido espontaneamente em dois fótons (chamados tradicionalmente de *signal* e *idler*) com vetores de onda \mathbf{k}_s e \mathbf{k}_i e frequências ω_s e ω_i , respectivamente. Um diagrama da CPDE é mostrado na Fig.(1.2). A criação do *signal* e *idler* é simultânea, por isso eles são também chamados de fóton gêmeos. No processo, energia e momento são conservados, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_o &= \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i, \\ \omega_o &= \omega_s + \omega_i.\end{aligned}\tag{1.32}$$

As condições de conservação acima serão satisfeitas quando as condições de casamento de fase entre os três feixes de luz forem satisfeitas. Estas condições surgem utilizando-se $|\mathbf{k}| = n\omega/c$ (n é o índice de refração) na equação de conservação de momento, levando-se em conta que o índice de refração em um cristal birrefringente depende da direção de propagação do feixe de luz, de sua polarização, e da sua frequência. Teremos então

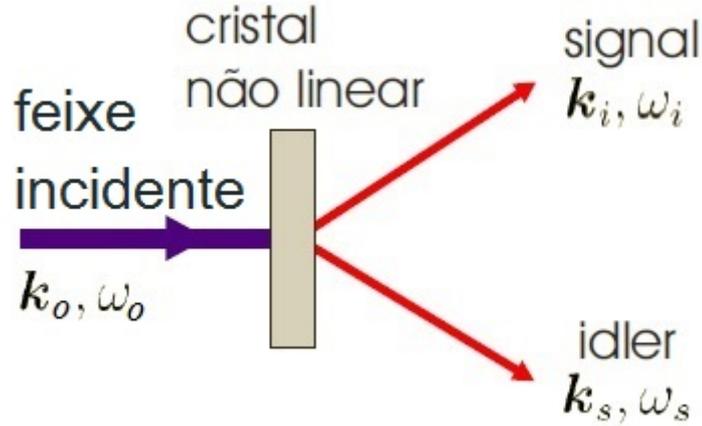


FIGURA 1.2: Diagrama da conversão paramétrica descendente espontânea.[36]

$$n(\theta_o, \omega_o)\omega_o\hat{\mathbf{k}}_o = n(\theta_s, \omega_s)\omega_s\hat{\mathbf{k}}_s + n(\theta_i, \omega_i)\omega_i\hat{\mathbf{k}}_i, \quad (1.33)$$

onde θ_l ($l = o, s, i$) é o ângulo entre a direção do feixe e o eixo óptico do cristal. Há duas maneiras de satisfazer esta equação, conhecidas como casamento de fase tipo I e tipo II. No tipo I, os feixes convertidos tem polarizações ortogonais à do incidente e são emitidos em um contínuo de frequências em forma de cones concêntricos em torno da direção do feixe de laser incidente e cujo vértice se encontra no cristal. No casamento de fase tipo II, os pares *signal* e *idler* tem polarizações ortogonais, com uma delas coincidindo com a polarização do feixe incidente, e são emitidos em dois cones distintos. A Fig.(1.3) mostra os dois tipos considerando um exemplo com três comprimentos de onda para os pares de fótons gerados. Os pares de símbolos indicam exemplos de regiões onde os fótons gêmeos podem ser encontrados.

Devido às leis de conservação nas eqs.(1.32) que governam o processo da CPDE, o estado quântico dos pares de fótons criados é intrinsecamente emaranhado em pelo menos um grau de liberdade, a energia. Portanto, é perigoso pensar neste estado como um estado de dois fótons individuais, devido à sua natureza intrinsecamente não-separável. A princípio, todo grau de liberdade pode ser utilizado para realização de tarefas de informação quântica ou testes fundamentais da teoria quântica. Neste trabalho, vamos considerar somente o emaranhamento na componente transversal do momento.

Vamos chegar ao estado de dois fótons gerado na CPDE sem detalhar os cálculos envolvidos no processo; um tratamento adequado para se chegar a este estado é aquele descrito por Mandel[37]. Quando um campo eletromagnético se propaga em um meio não-linear de segunda ordem⁷ e a interação não-linear deste campo com o meio é suficientemente

⁷A resposta não-linear de segunda ordem do meio ao campo elétrico aplicado é proporcional ao primeiro termo não-linear de sua susceptibilidade elétrica, $\chi^{(2)}$, o qual é um tensor de segunda ordem.

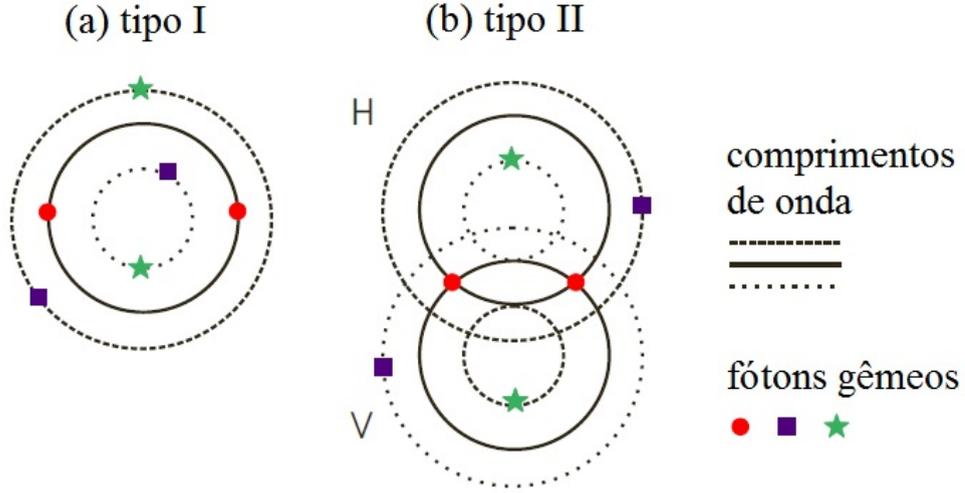


FIGURA 1.3: Casamentos de fase (a) tipo I e (b) tipo II. Os cones são mostrados para três comprimentos de onda dos fótons gêmeos. Os símbolos mostram exemplos de onde os pares de fótons gerados podem ser encontrados.[36]

fraca, podemos tratá-la como uma perturbação. A Hamiltoniana da interação total pode então ser dividida em duas partes

$$H = H_o + H_I, \quad (1.34)$$

onde H_o é a componente linear e a perturbação H_I a componente não linear, que é a parte que nos interessa. Ela é dada por

$$H_I = \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t - t') E_k(\mathbf{r}, t - t''), \quad (1.35)$$

onde V é o volume de interação dado pela região iluminada do meio não linear, E_i o campo do feixe incidente, e E_j e E_k os campos dos feixes possivelmente gerados na interação mediada por $\chi_{ijk}^{(2)}(t', t'')$. Para tratar o problema quanticamente, substituímos os campos pelos operadores campo elétrico dados por

$$E(\mathbf{r}, t) = E^+(\mathbf{r}, t) + E^-(\mathbf{r}, t) \quad (1.36)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, p} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, p} \left[l(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}, p} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + l^*(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}, p}^\dagger e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right], \quad (1.37)$$

onde \mathbf{k} é o vetor de onda dentro do cristal, p a polarização do campo, $\hat{a}_{\mathbf{k}, p}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}, p}^\dagger$ os operadores aniquilação e criação respectivamente, $\mathbf{e}_{\mathbf{k}, p}$ um vetor bidimensional de polarização, ω a frequência, e $l(\omega)$ é dado por

$$l(\omega) = i \left[\frac{\hbar\omega(\mathbf{k}, s)}{2\epsilon_0 n^2(\mathbf{k}, s)} \right]^{1/2}, \quad (1.38)$$

com $n(\mathbf{k}, s)$ sendo o índice de refração do meio não linear. Eliminando os termos que não conservam energia, ficamos com

$$H_I = \frac{1}{V^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}_s, p_s} \sum_{\mathbf{k}_i, p_i} \sum_{\mathbf{k}_o, p_o} l^*(\omega_s) l^*(\omega_i) l(\omega_o) \hat{a}_{\mathbf{k}_s, p_s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_i, p_i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_o, p_o} e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_o)t} \\ \times [\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}(\mathbf{e}_{\mathbf{k}_o, p_o})_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s, p_s})_j * (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_i, p_i})_{k*}] \int_V d\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_o) \cdot \mathbf{r}} + c.H., \quad (1.39)$$

onde os índices s, i, o denotam os campos signal, idler e incidente, respectivamente, $c.H.$ representa o conjugado Hermitiano, e $\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}$ é definido como

$$\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)} = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_o = \omega_s + \omega_i) + \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_s = \omega_o - \omega_i) + \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_i = \omega_p - \omega_s), \quad (1.40)$$

com

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega = \omega' + \omega'') = \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') e^{-i(\omega't' + \omega''t'')}. \quad (1.41)$$

O importante a se notar no operador Hamiltoniano é que um fóton do feixe incidente é aniquilado ($\hat{a}_{\mathbf{k}_o, p_o}$) e dois outros são criados ($\hat{a}_{\mathbf{k}_s, p_s}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}_i, p_i}^\dagger$). Agora, vamos supor que no tempo $t = 0$ temos um campo cujo estado inicial é $|\psi(0)\rangle = |vac\rangle$. O laser de bombeamento é então ligado dando início a interação não linear. De posse do Hamiltoniano da eq.(1.39), obtemos o estado quântico da luz produzida na CPDE em um tempo t aplicando o operador evolução temporal no estado inicial do sistema

$$|\psi(t)\rangle = U(t, 0) |\psi(0)\rangle = U(t, 0) |vac\rangle, \quad (1.42)$$

e neste caso o operador evolução é

$$U(t, 0) = e^{\frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' H_I(t')} = \mathbb{I} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' H_I(t') + \dots \quad (1.43)$$

Os termos de segunda ordem em diante estão associados à geração de mais de um par de fótons, e portanto podem ser desprezados se considerarmos o feixe de bombeamento

pouco intenso. Substituindo a eq.(1.39) no segundo termo da eq.(1.43), é possível mostrar que

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' H_I(t') &= \frac{1}{V^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}_s, p_s} \sum_{\mathbf{k}_i, p_i} \sum_{\mathbf{k}_o, p_o} l^*(\omega_s) l^*(\omega_i) l(\omega_o) \hat{a}_{\mathbf{k}_s, p_s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_i, p_i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_o, p_o} e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_o)t/2} \\ &\times [\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}(\mathbf{e}_{\mathbf{k}_o, p_o})_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s, p_s})_j * (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_i, p_i})_k] \frac{\sin[(\omega_s + \omega_i - \omega_o)t/2]}{(\omega_s + \omega_i - \omega_o)/2} \\ &\times \prod_{m=1}^3 \left[\frac{\sin[(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_o)_m l_m/2]}{(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_o)_m/2} \right] e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_o) \cdot \mathbf{r}_o} + c.H. . \end{aligned} \quad (1.44)$$

Aqui, l_m são as dimensões do volume de interação e \mathbf{r}_o a origem do sistema de coordenadas. As funções do tipo $\text{sinc} \equiv \sin x/x$ acima carregam as condições de conservação de energia e momento na CPDE.

Podemos simplificar a eq.(1.44) através de aproximações que levam em conta quais propriedades da luz pretendemos estudar. Um importante resultado obtido por Monken, Souto Ribeiro e Pádua[38] mostra, após um longo cálculo, que a eq.(1.44) pode ser reescrita de uma forma bastante compacta, se feitas uma série de considerações e aproximações listadas a seguir:

- **Monocromática:** os feixes incidente, *signal* e *idler* são aproximadamente monocromáticos, e tem polarizações definidas. Isso se justifica pelas propriedades do laser, pela presença de filtros de largura de banda estreita na entrada dos detectores, e pelas propriedades da CPDE que gera feixes polarizados;
- O feixe de bombeamento pode ser tratado classicamente, pois é muito mais intenso que os feixes convertidos. Desta forma, substituímos o operador aniquilação $\hat{a}_{\mathbf{k}_o}$ pela amplitude coerente do feixe $v(\mathbf{k}_o)$;
- O cristal está centrado na origem do sistema de coordenadas ($\mathbf{r}_o = 0$) e o feixe se propaga na direção z ;
- **Paraxial:** Os campos são observados somente em pontos próximos ao eixo z , de forma que $|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{k}|$, isto é, o módulo da componente transversal do vetor de onda é muito menor que o módulo do próprio vetor;
- Os somatórios em \mathbf{k} podem ser aproximados por integrais em \mathbf{k} , $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}$;
- **Cristal fino:** A espessura do cristal na direção de propagação do feixe incidente (z) é suficientemente pequena, da ordem de milímetros.

Desta forma, a eq.(1.44) se torna

$$\int_0^t dt' H_I(t') = \eta \int_{\Omega} d\mathbf{q}_s \int_{\Omega} d\mathbf{q}_i v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_s) \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_i) + c.H. , \quad (1.45)$$

onde η é uma constante que absorve todas as outras constantes que aparecem no cálculo, Ω é a região onde valem as aproximações, e $v(\mathbf{q})$ é o espectro angular do feixe de bombeamento em $z = 0$, ou seja, a transformada de Fourier do perfil transversal do campo neste ponto[39]. Por fim, utilizando o resultado da eq.(1.45) na eq.(1.43) e substituindo esta na eq.(1.42), temos

$$|\psi\rangle = |vac\rangle + \eta \int_{\Omega} d\mathbf{q}_s \int_{\Omega} d\mathbf{q}_i v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) |1\mathbf{q}_s\rangle |1\mathbf{q}_i\rangle , \quad (1.46)$$

onde $|1\mathbf{q}_j\rangle$ é o estado de Fock para um fóton no modo $j = s, i$ com vetor de onda transversal \mathbf{q}_j . O resultado mostrado é muito interessante, pois mostra que essencialmente com as aproximações monocromática, paraxial e de cristal fino, o espectro angular do feixe de bombeamento é transferido para o estado de dois fótons. Isto significa que este estado carrega informação sobre o feixe de laser que o gerou. Como consequência, a correlação transversal entre os fótons gêmeos pode ser controlada manipulando-se o feixe de bombeamento. Além disso, como $v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)$ é uma função não fatorável de \mathbf{q}_s e \mathbf{q}_i , os fótons gêmeos são gerados em um estado emaranhado nas variáveis de momento transversal.

1.2.2 Estados de caminho

O estado na eq.(1.46) representa o estado de dois fótons na face de saída do cristal ($z \approx 0$ na aproximação de cristal fino). Nesta seção, vamos discutir a evolução deste estado quando os fótons gêmeos são transmitidos através de um arranjo de fendas múltiplas. O resultado que será apresentado pode ser obtido utilizando-se algumas ferramentas da óptica de Fourier, as quais não detalharemos aqui.

Consideremos uma montagem experimental típica onde a CPDE é utilizada, como na Fig.(1.4). Cada fóton gerado é enviado a um conjunto de fendas denotados por A_s e A_i . Após serem transmitidos através de A_s e A_i , os fótons gêmeos podem se progagar através do espaço livre e/ou através de outros sistemas ópticos, antes de serem detectados. As setas pontilhadas indicam o estado de dois fótons no ponto após a transmissão através das fendas. Desprezando o termo de vácuo, que é cancelado na detecção dos fótons, podemos escrever o estado de uma forma geral como

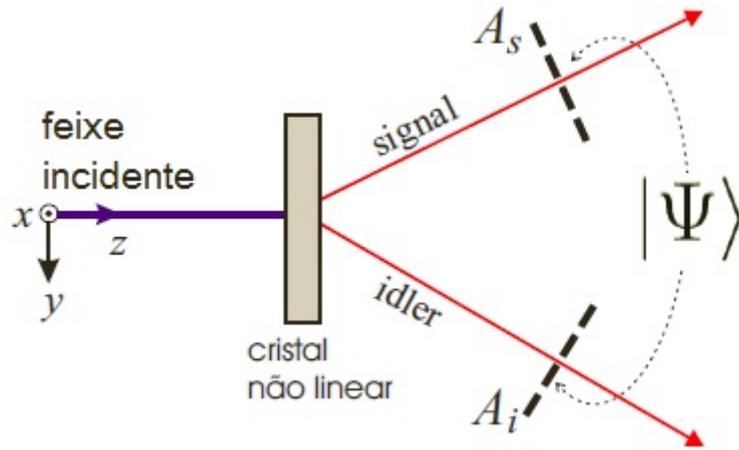


FIGURA 1.4: Fótons *signal* e *idler* gerados pela CPDE em um cristal não linear são transmitidos através dos conjuntos de fendas A_s e A_i . [36]

$$|\psi\rangle = \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i \mathcal{F}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) |1\mathbf{q}_s\rangle |1\mathbf{q}_i\rangle, \quad (1.47)$$

onde a amplitude $\mathcal{F}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$ é a quantidade a ser calculada. Vamos definir que os arranjos de fendas sejam anteparos opacos com D fendas transparentes ($D \geq 2$), como ilustrado na Fig.(1.5) para $D = 4$, que mostra também a orientação das aberturas em relação aos feixes. A função transmissão $A(x)$ da abertura também é ilustrada.

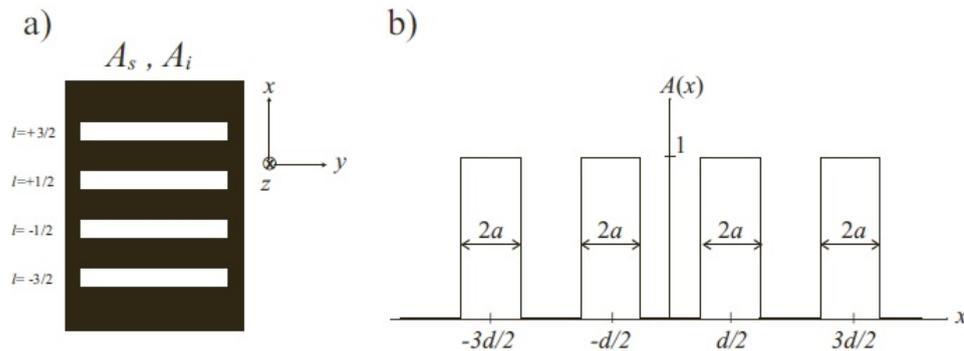


FIGURA 1.5: (a) Ilustração das aberturas (4 fendas) colocadas nos caminhos do *signal* e *idler*. À esquerda é mostrado o rótulo l de cada fenda. (b) Função transmissão desta abertura. [36]

Para realizar o cálculo do estado de dois fótons após as fendas, faremos as seguintes restrições:

- Consideraremos somente o caso degenerado, isto é, fótons com o mesmo comprimento de onda, o que pode ser obtido através de filtros espectrais no caminho de cada fóton. Assim, $|\mathbf{k}_s| = |\mathbf{k}_i| = k/2$;

- Ambos A_s e A_i são igualmente distantes do cristal, então $z_{A_s} = z_{A_i} = z_A$;
- A dimensão das fendas na direção y é muito maior que na direção x , e portanto é suficiente considerar as equações em uma dimensão ($\mathbf{q}_j \rightarrow q_j$ e $\mathbf{u}_j \rightarrow x_j$, onde \mathbf{u}_j é a componente transversal dos vetores posição \mathbf{r}_j dos fótons).

Desta forma, utilizando-se os métodos da óptica de Fourier, é possível chegar a[36]

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \gamma \int dx_s \int dx_i A_s(x_s) A_i(x_i) e^{ik(x_i - x_s)^2 / 8z_A} W\left(\frac{1}{2}(x_s + x_i); z_A\right) e^{-i(q_s x_s + q_i x_i)}, \quad (1.48)$$

onde γ é uma constante de normalização e $W(\frac{1}{2}(x_s + x_i); z_A)$ é o perfil transversal do campo do feixe de bombeamento transferido para o estado de dois fótons via espectro angular, que está relacionado com $v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)$. Assim, as correlações transversais dos fótons gêmeos dependerão da forma do perfil transversal do feixe de bombeamento no plano das fendas. A função transmissão das aberturas é dada por

$$A(x) = \sum_{l=-l_D}^{l_D} \Pi\left(\frac{x - ld}{2a}\right), \quad (1.49)$$

onde $l_D = (D - 1)/2$, $2a$ é a largura de cada fenda, e d é a separação (centro a centro) entre duas fendas consecutivas. A função $\Pi(\xi)$ é uma função retângulo de largura e altura unitária

$$\Pi(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |\xi| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1.50)$$

O índice l na eq.(1.49) funciona como o rótulo de uma dada fenda deslocada de ld do centro do anteparo. Teremos então l semi-inteiro (inteiro) se D é par (ímpar), o que vai nos permitir representar o estado por uma notação do tipo de spin. Inserindo a eq.(1.49) na eq.(1.48) e fazendo uma mudança de variáveis ($x_s \rightarrow x_s - ld$ e $x_i \rightarrow x_i - md$), ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) &= \gamma \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} e^{-i(q_s l + q_i m)d} \int_{-a}^a dx_s \int_{-a}^a dx_i W\left(\frac{x_s + ld}{2} + \frac{x_i + md}{2}; z_A\right) \\ &\times e^{\frac{ik}{8z_A}((x_i - x_s) + d(m-l))^2 - i(q_s x_s + q_i x_i)}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Neste ponto, podemos fazer novas aproximações envolvendo os parâmetros a , d e z_A , todos relacionados às fendas, que permitirão simplificar a eq.(1.51). Tais aproximações estão descritas em [36] (ver pág. 42), e não as explicitaremos aqui. Como resultado, $\mathcal{F}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$ pode ser escrita como

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} W_{lm} e^{i \frac{kd^2}{8z_A} (m-l)^2} e^{-iq_s ld} \text{sinc}(q_s a) e^{-iq_i md} \text{sinc}(q_i a), \quad (1.52)$$

com

$$W_{lm} \equiv \gamma W \left(\frac{(l+m)d}{2}; z_A \right). \quad (1.53)$$

Substituindo a eq.(1.52) na eq.(1.47), o estado de dois fótons após as fendas pode finalmente ser escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} W_{lm} e^{i \frac{kd^2}{8z_A} (m-l)^2} |l\rangle_s \otimes |m\rangle_i, \quad (1.54)$$

onde os estados $|l\rangle$ (ou $|m\rangle$) são estados de um fóton definidos, a menos de um fator de fase global, por

$$|l\rangle \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq e^{-iqld} \text{sinc}(qa) |1q\rangle. \quad (1.55)$$

É possível mostrar que estes estados são ortonormais e formam uma base no espaço de Hilbert. Além disso, nas aproximações consideradas, os feixes da CPDE podem ser aproximados por ondas planas[40], tal que podemos considerar uma representação de posição $|1x\rangle$ para o estado de um fóton, relacionada com o estado de Fock $|1q\rangle$ por uma transformada de Fourier

$$|1x\rangle = \frac{1}{2\pi} \int dq e^{iqx} |1q\rangle. \quad (1.56)$$

Utilizando este resultado na eq.(1.55) nós teremos

$$|l\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int dx \Pi\left(\frac{x-l d}{2a}\right) |1x\rangle. \quad (1.57)$$

Portanto, os estados $|l\rangle$ representam um fóton transmitido através da fenda que está a uma distância ld do centro da abertura, em outras palavras, transmitido através da

fenda l . Nos referimos a estes estados como **estados de caminho** ou **estados de fenda**.

Se notarmos que os coeficientes complexos W_{lm} e a fase na eq.(1.54) não fatoram, vemos que este é um estado emaranhado de dois qudits onde os fótons *signal* e *idler* são emaranhados nos diferentes modos transversais espaciais definidos pelas fendas. Levando em conta a condição de normalização do estado de dois fótons, os coeficientes W_{lm} são dados pelo perfil transversal normalizado do feixe de bombeamento no plano das fendas. Com este significado, vemos claramente da eq.(1.54) que diferentes estados emaranhados de qudits podem ser preparados utilizando-se diferentes tipos de feixes de bombeamento e através da manipulação da distribuição transversal desses feixes no plano das fendas. É nesse sentido que este método de geração de qudits é controlado, uma vez que podemos definir a dimensão e as propriedades do emaranhamento entre eles.

É possível mostrar ainda que quando o perfil transversal do feixe de bombeamento é menor do que a separação entre as fendas, o que pode ser muito bem aproximado focalizando-se o feixe no plano das fendas, a forma assumida por W_{lm} é proporcional a $\delta_{m,-l}$, resultando em

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{l=-l_D}^{l_D} e^{ik\frac{q^2 l^2}{2z_A}} |l\rangle_s \otimes |-l\rangle_i. \quad (1.58)$$

Neste estado, as correlações dos fótons gêmeos são tais que se o fóton signal for detectado logo após passar através da fenda l , o fóton idler será detectado com certeza ao passar através da fenda simetricamente oposta $-l$. Portanto, eles são maximamente emaranhados, já que os estados que formam esta superposição coerente têm a mesma probabilidade $1/D$.

Capítulo 2

Propostas Experimentais

Neste capítulo vamos apresentar duas propostas experimentais nas quais a fase geométrica se manifesta. Um artigo publicado recentemente por Khoury *et al.*[41], utilizado como base para esta dissertação, contém uma proposta para a medição da fase topológica em um sistema de dois qudits (veja o *abstract* no Apêndice A). A montagem é descrita na Fig.(2.1).

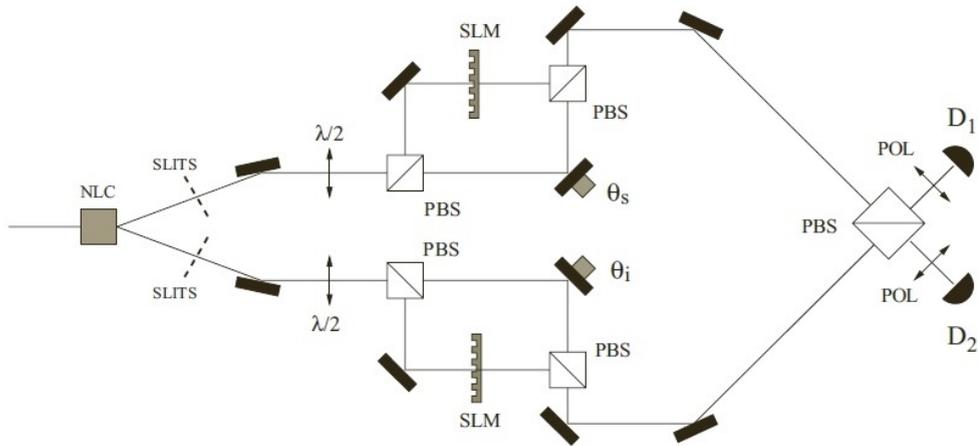


FIGURA 2.1: Um feixe de bombeamento incide no cristal não-linear (NLC) gerando dois feixes não-colineares de fótons emaranhados. Os feixes gerados passam por um arranjo de fendas múltiplas (SLITS) e por placas de meia onda $\lambda/2$. Em seguida percorrem um interferômetro Mach-Zehnder com PBSs de entrada e saída, e com um SLM e deslocadores de fase (θ_s e θ_i) inseridos nele. Os feixes se recombinam em outro PBS, passam por polarizadores lineares (POL), e são detectados nos detectores de fótons (D1 e D2).[41]

No entanto, esta montagem envolve a construção de dois interferômetros Mach-Zehnder, os quais requerem estabilização ativa. Desta forma, ao invés de descrevermos o funcionamento desta proposta, vamos partir para a descrição de uma outra onde a discussão teórica é essencialmente a mesma feita no artigo citado acima, porém os interferômetros

Mach-Zehnder são substituídos por interferômetros Sagnac. Ao final da análise, veremos na seção seguinte que um aspecto experimental relacionado à interferência dos dois feixes no ponto em que eles se recombina motivou a elaboração da segunda proposta, apresentada na terceira e última seção deste capítulo.

2.1 Primeira Proposta

No desenvolvimento desta primeira proposta será mostrado como a interferência de dois fótons pode ser utilizada para medir a fase geométrica. Será possível perceber também como o grau de liberdade de polarização será utilizado como auxílio para a aplicação da evolução no estado de caminho de dois fótons. Além disso, a relação da fase geométrica com o emaranhamento e a dimensionalidade do espaço de Hilbert serão explicitadas em simulações numéricas feitas a partir do resultado teórico para a interferência prevista.

2.1.1 Interferência de dois fótons controlada por polarização

Vamos considerar a montagem esquematizada na Figura 2.2.

Para um casamento de fase tipo I e um feixe de bombeamento polarizado verticalmente, a CPDE gera pares de fótons com polarização horizontal. As correlações espaciais entre *signal* e *idler* podem ser controladas modificando-se o espectro angular do feixe de bombeamento, como por exemplo adicionando-se uma lente L_P apropriada em seu caminho. Portanto, utilizando-se fendas múltiplas, qudits espaciais codificados nos caminhos transversais dos pares de fótons gerados pela CPDE são produzidos imediatamente após os planos das fendas. No caso em que uma lente convergente focaliza o feixe de bombeamento no plano das fendas múltiplas, foi mostrado anteriormente que um estado maximamente emaranhado de dois qudits fotônicos é gerado se o perfil transversal do feixe de bombeamento é mais estreito que a separação entre as fendas neste plano[42]. Assim, as correlações espaciais citadas determinam as correlações de caminho de dois fótons através das fendas. O estado de dois fótons após as fendas pode ser escrito como

$$|\psi_0\rangle = \sum_{m,n} \alpha_{mn} |mH, nH\rangle, \quad (2.1)$$

onde α_{mn} é a amplitude de probabilidade de se obter um fóton *signal* passando pela fenda m e um fóton *idler* passando pela n . Após as fendas, uma placa de onda $\lambda/2$ gira a polarização dos fótons de 45° , e o estado se torna

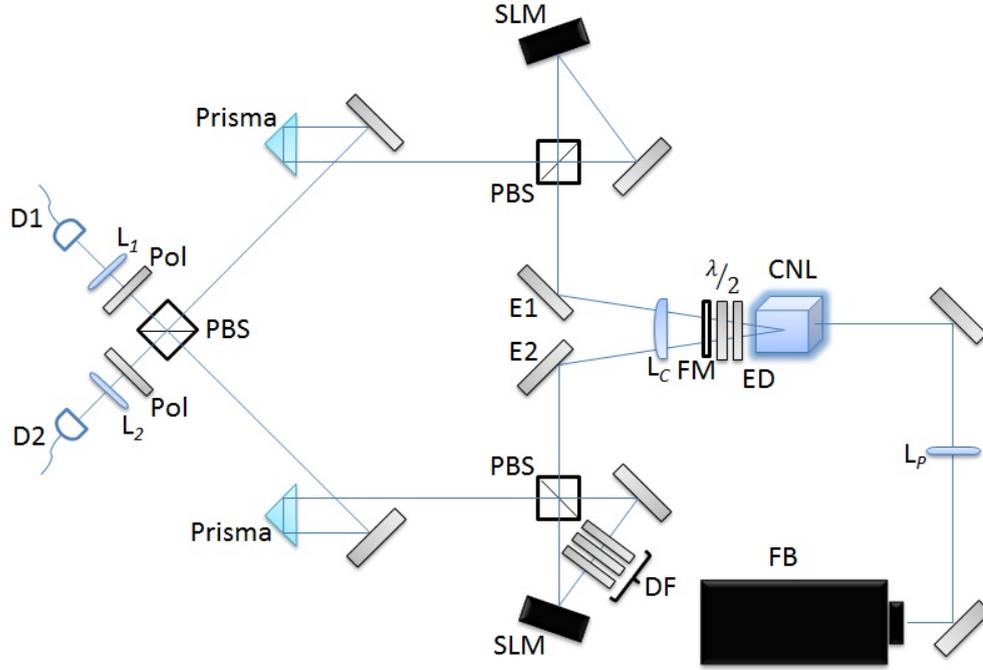


FIGURA 2.2: Um feixe de laser de bombeamento (FB) passa por uma lente (L_P) e incide no cristal não-linear (CNL) gerando dois feixes não-colineares de fótons emaranhados. A parcela do FB transmitida através do CNL é refletida de volta pelo espelho dielétrico (ED). Os feixes gerados passam por uma placa de meia onda $\lambda/2$, atravessam um arranjo de fendas múltiplas (FM), e passam por uma lente cilíndrica (L_C). Em seguida percorrem um interferômetro Sagnac com um PBS e um SLM, e passam por um trombone óptico (Prisma). Um dos Sagnacs possui ainda um deslocador de fase (DF) em seu interior. Os feixes se recombinaem em outro PBS, passam por polarizadores lineares (Pol), e são focalizados (L_1 e L_2) nos detectores de fótons (D1 e D2).

$$|\psi_1\rangle = \sum_{m,n} \frac{\alpha_{mn}}{2} (|mH, nH\rangle + |mH, nV\rangle + |mV, nH\rangle + |mV, nV\rangle). \quad (2.2)$$

Então, cada fóton passa por uma porta unitária controlada por polarização composta por um interferômetro Sagnac com um divisor de feixes polarizador (*polarizer beam splitter* - PBS) de entrada e saída e um SLM inserido no interferômetro. As operações unitárias sobre o *signal* e *idler*, U_s e V_i respectivamente, são implementadas nas componentes com polarização horizontal dos qudits espaciais¹. A implementação eficiente das operações unitárias requer que a imagem das fendas seja projetada nos SLMs, já que os caminhos dos fótons definidos pelas fendas é que definem os “dits” quânticos, e as operações unitárias realizadas pelo SLM atuam sobre os caminhos dos fótons. Para tanto pode-se utilizar uma lente cilíndrica L_C plano-convexa com foco no plano das fendas, de modo que a imagem se forma distante da lente em direção aos SLMs. Após as portas controladas, o estado de dois fótons se torna

¹No capítulo 3 discutimos brevemente o funcionamento de um SLM e mencionamos a característica dos SLMs utilizados na implementação deste experimento de adicionar fase apenas em uma componente de polarização da luz.

$$|\psi_2\rangle = \sum_{m,n} \frac{\alpha_{mn}}{2} (U_s V_i |mH, nH\rangle - U_s |mH, nV\rangle - e^{i\theta} V_i |mV, nH\rangle + e^{i\theta} |mV, nV\rangle), \quad (2.3)$$

onde os sinais de menos resultam de duas reflexões no PBS das componentes verticais e θ é uma fase longitudinal adicionada à componente vertical do *signal* quando ele cruza um dos interferômetros Sagnac. A tarefa é realizada por um deslocador de fase²[43, 44] inserido no interferômetro, que fornece uma fase relativa entre as polarizações H e V.

Finalmente, após o *signal* e o *idler* passarem pelos interferômetros Sagnac, eles são direcionados para as diferentes portas de entrada de um PBS. Logo, apenas as componentes $|mH, nH\rangle$ e $|mV, nV\rangle$ contribuem para as contagens de coincidências, como ficará claro mais abaixo. Os operadores campo elétrico na saída do PBS são

$$\begin{aligned} E_1^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{sH}^+ + iE_{iV}^+), \\ E_2^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(iE_{sV}^+ + E_{iH}^+), \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $E_{s\mu}^+$ ($E_{i\nu}^+$) são as componentes de frequência positiva dos operadores campo do *signal* (*idler*) para as diferentes polarizações ($\mu, \nu = H, V$). Cada componente é expandida em termos dos modos de transmissão do campo elétrico da luz pelas fendas $\eta_m(\mathbf{r})$ como

$$\begin{aligned} E_{s\mu}^+ &= \sum_p a_{p\mu} \eta_p(\mathbf{r}_s), \\ E_{i\nu}^+ &= \sum_q b_{q\nu} \eta_q(\mathbf{r}_i), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $\eta_m(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{x} | m \rangle$, $|\mathbf{x}\rangle$ o autovetor do operador posição, e $a_{p\mu}$ ($b_{q\nu}$) é o operador aniquilação de fótons no modo η_p (η_q). Portanto, após as fendas, o campo pode ser escrito como uma superposição dos operadores campo transmitidos pelas diferentes fendas. Nos referimos aos modos espaciais do campo transmitido como os modos de fenda. Estes satisfazem a condição de ortonormalidade

$$\int d^2\mathbf{r} \eta_m^*(\mathbf{r}) \eta_n(\mathbf{r}) = \delta_{mn}. \quad (2.6)$$

²Ver no capítulo 3 como é construído o deslocador de fase para fornecer especificamente a fase relativa mencionada.

Os operadores $a_{p\mu}$ e $b_{q\nu}$ atuam de forma análoga aos operadores aniquilação para estados de Fock

$$a_{p\mu}b_{q\nu} |m\sigma, n\epsilon\rangle = \delta_{pm}\delta_{\mu\sigma}\delta_{qn}\delta_{\nu\epsilon} |vac\rangle, \quad (2.7)$$

onde $|vac\rangle$ é o estado de vácuo e $|m\sigma, n\epsilon\rangle$ é um estado de fenda de dois fótons correspondente a um fóton *signal* passando através da fenda m com polarização σ e um fóton *idler* passando através da fenda n com polarização ϵ .

As contagens de coincidência detectadas na saída do PBS são proporcionais a

$$\langle\psi_2| E_1^- E_2^- E_2^+ E_1^+ |\psi_2\rangle = \|E_2^+ E_1^+ |\psi_2\rangle\|^2, \quad (2.8)$$

onde $E_j^- = (E_j^+)^\dagger$ e $j = 1, 2$. Utilizando a eq.(2.7), vemos que os termos do produto de operadores campo com duas componentes *signal* ou *idler* anulam a função de correlação de quarta ordem da eq.(2.8) em virtude de se aplicar o operador aniquilação duas vezes na mesma parte do estado com apenas um fóton *signal* ou *idler*. Os termos do produto de operadores campo com uma componente *signal* e uma componente *idler*, ao atuarem nas partes do estado que possuem polarizações diferentes, também dão contribuição nula à função de correlação. Assim, como dito anteriormente, apenas $|nH, mH\rangle$ e $|nV, mV\rangle$ contribuirão para a contagem de coincidências. As coincidências normalizadas se reduzem a

$$C(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{16} \left\| \sum_{m,n} (\alpha'_{mn} E_{iH}^+ E_{sH}^+ |mH, nH\rangle + e^{i\theta} \alpha_{mn} E_{sV}^+ E_{iV}^+ |mV, nV\rangle) \right\|^2. \quad (2.9)$$

O coeficiente α'_{mn} resulta das transformações unitárias locais no estado de dois qudits

$$U_s V_i \sum_{m,n} \alpha_{mn} |mH, nH\rangle = \sum_{mn} \alpha'_{mn} |mH, nH\rangle. \quad (2.10)$$

O padrão de interferência de dois fótons previsto pode ser obtido através da contagem de coincidências

$$C(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{16} \left| \sum_{m,n} (\alpha'_{mn} + e^{i\theta} \alpha_{mn}) \eta_m(\mathbf{r}_s) \eta_n(\mathbf{r}_i) \right|^2. \quad (2.11)$$

O desaparecimento da informação sobre a polarização que ocorre entre a eq.(2.9) e a eq.(2.11) se deve aos polarizadores posicionados a 45° antes dos detectores. Estamos interessados apenas na fase adquirida pelos qudits quando eles evoluem sob a ação das portas unitárias U_s e V_i . Como os modos de fenda são ortonormais e a imagem das fendas é propagada, a contagem de coincidência integrada elimina a interferência espacial entre diferentes fendas e apenas a interferência do Sagnac aparece nas correlações de dois fótons. A integração nas variáveis espaciais corresponde a um detector com abertura grande, insensível à estrutura espacial detalhada das correlações quânticas de dois fótons. Contudo, a dimensão do espaço de Hilbert se manifesta através dos coeficientes do estado de dois qudits na função das coincidências integrada

$$C \equiv \int d^2\mathbf{r}_s d^2\mathbf{r}_i C(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{16} \sum_{m,n} |\alpha'_{mn} + e^{i\theta} \alpha_{mn}|^2. \quad (2.12)$$

Note que a polarização foi usada como um grau de liberdade subsidiário para fornecer dois caminhos para a evolução dos qudits espaciais. De fato, a interferência descrita pela eq.(2.12) pode ser pensada como resultado da superposição entre o estado de dois qudits inicial $|\phi_o\rangle$ e o estado evoluído $|\phi\rangle = U_s V_i |\phi_o\rangle$ com uma fase relativa $-\theta$ entre eles

$$C = \left\| \frac{|\phi_o\rangle + e^{-i\theta} |\phi\rangle}{\sqrt{2}} \right\|^2 = 1 + |\langle \phi_o | \phi \rangle| \cos(\gamma - \theta), \quad (2.13)$$

onde $\gamma = \arg \langle \phi_o | \phi \rangle$. A visibilidade das franjas de interferência é o valor absoluto da superposição dos estados $\langle \phi_o | \phi \rangle$, enquanto a fase da interferência é o argumento da superposição. Para uma evolução cíclica $|\phi\rangle = e^{i\gamma} |\phi_o\rangle$, a interferência recupera a visibilidade máxima com as franjas deslocadas de γ .

As transformações unitárias no estado de dois qudits espaciais condicionadas à sua polarização ser horizontal produzirão a evolução cíclica cuja fase geométrica é medida com a montagem mostrada. Essa fase é obtida no padrão de interferência entre o estado evoluído ciclicamente e o estado inicial.

2.1.2 Resultados numéricos

Podemos ilustrar as fases fracionárias com o exemplo simples de dois qutrits ($d = 3$) sob a ação de operações unitárias diagonais $U_s = \text{diag}[e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, e^{i\phi_3}]$ e $V_i = \text{diag}[e^{i\chi_1}, e^{i\chi_2}, e^{i\chi_3}]$, onde ϕ_m e χ_n são fatores de fase introduzidos pelos SLMs nos estados de caminho dos

fótons. Para garantir que nenhuma fase trivial³ seja adicionada pelas operações, vamos impor que $\sum_m \phi_m = \sum_n \chi_n = 0$.

Os coeficientes das matrizes evoluem segundo $\alpha' = U_s \alpha V_i^T$. Então

$$\alpha'_{mn} = e^{i(\phi_m + \chi_n)} \alpha_{mn}, \quad (2.14)$$

e a contagem de coincidências se torna

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{16} \sum_{m,n} |\alpha_{mn}|^2 |e^{i\theta} + e^{i(\phi_m + \chi_n)}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m,n} |\alpha_{mn}|^2 \cos^2 \left[\frac{\phi_m + \chi_n - \theta}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sob essa operação $SU(3) \otimes SU(3)$, vamos comparar o estado maximamente emaranhado

$$|\psi_e\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle); \quad \alpha_{mn} = \frac{\delta_{mn}}{\sqrt{3}}, \quad (2.16)$$

com o estado produto possuindo a mesma distribuição de população de um qudit

$$|\psi_p\rangle = \frac{1}{3}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle); \quad \alpha_{mn} = \frac{1}{3}. \quad (2.17)$$

Vamos considerar primeiro operações idênticas nas duas partes do sistema de dois qutrits, capaz de mostrar ambas a fase fracionária e a assinatura do emaranhamento. Nossas operações cíclicas serão descritas por um parâmetro real t no intervalo $t \in [0, 1]$. Como primeiro exemplo vamos considerar

$$\begin{aligned} \phi_1 = \chi_1 &= \frac{\pi}{3} \left[2t - (2t - 1)H \left(t - \frac{1}{2} \right) \right], \\ \phi_2 = \chi_2 &= -\frac{2\pi}{3}t, \\ \phi_3 = \chi_3 &= \frac{\pi}{3}(2t - 1)H \left(t - \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde $H(t)$ é a função de Heaviside

³Uma fase trivial aqui é no sentido de que se $\sum_m \phi_m = c$ por exemplo, onde c é uma constante, essa fase pode ser compensada fazendo-se $\phi'_m = \phi/m$.

$$H(t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Para $t = 0$ temos $\phi_1 = \chi_1 = \phi_2 = \chi_2 = \phi_3 = \chi_3 = 0$, e de acordo com a eq.(2.15)

$$C_e = C_p = \frac{1}{4} \cos^2[\theta/2], \quad (2.20)$$

(C_e a coincidência para estados emaranhados e C_p para estados produto). Para $t = 1/2$ obtemos $\phi_1 = \chi_1 = \frac{\pi}{3}, \phi_2 = \chi_2 = \frac{-\pi}{3}, \phi_3 = \chi_3 = 0$, e

$$C_e = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{3} \left(\cos^2 \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2} \right] + \cos^2 \left[\frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{2} \right] + \cos^2 \left[\frac{\theta}{2} \right] \right) \right\}, \quad (2.21)$$

$$C_p = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{9} \left(\cos^2 \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2} \right] + \cos^2 \left[\frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{2} \right] \right) + \frac{1}{3} \cos^2 \left[\frac{\theta}{2} \right] + \frac{2}{9} \left(\cos^2 \left[\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{2} \right] + \cos^2 \left[\frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{2} \right] \right) \right\}. \quad (2.22)$$

E finalmente para $t = 1$ ficamos com $\phi_1 = \chi_1 = \frac{\pi}{3}, \phi_2 = \chi_2 = \frac{-2\pi}{3}, \phi_3 = \chi_3 = \frac{\pi}{3}$, sendo

$$C_e = \frac{1}{4} \left\{ \frac{2}{3} \cos^2 \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2} \right] + \frac{1}{3} \cos^2 \left[\frac{2\pi}{3} + \frac{\theta}{2} \right] \right\}, \quad (2.23)$$

$$C_p = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{9} \cos^2 \left[\frac{2\pi}{3} + \frac{\theta}{2} \right] + \frac{4}{9} \left(\cos^2 \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2} \right] + \cos^2 \left[\frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{2} \right] \right) \right\}. \quad (2.24)$$

As interferências mostradas nas contagens de coincidências resultantes das eqs.(2.20) a (2.24) são mostradas na Fig.(2.3). Como podemos ver, o comportamento é consideravelmente diferente para estados emaranhado e produto. Para o estado emaranhado, as franjas de interferência desaparecem completamente quando $t = 1/2$ e o estado emaranhado de dois qudits se torna ortogonal ao estado inicial. Em seguida, as franjas reaparecem com um deslocamento de fase fracionário igual a $2\pi/3$, atingindo novamente a máxima visibilidade em $t = 1$. Em contraste, para o estado produto, as franjas nunca desaparecem e a visibilidade máxima não é recuperada.

Vamos considerar agora que as operações nas partes não são necessariamente idênticas, e são da forma

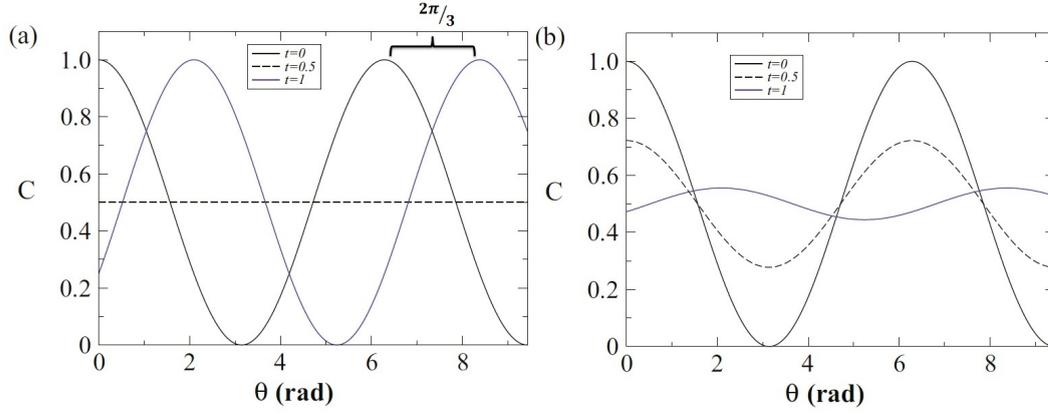


FIGURA 2.3: Interferência de coincidências para (a) um estado maximamente emaranhado e (b) um estado produto, correspondentes às operações unitárias dadas pelas eqs.(2.18) para três valores de t : $t=0$ (linha sólida preta), $t=1/2$ (linha tracejada preta) e $t=1$ (linha sólida azul).

$$\begin{aligned}\phi_1 = \phi_2 &= \frac{\pi}{3}t_s, & \phi_3 &= \frac{-2\pi}{3}t_s, \\ \chi_1 = \chi_2 &= \frac{\pi}{3}t_i, & \chi_3 &= \frac{-2\pi}{3}t_i.\end{aligned}\quad (2.25)$$

Neste caso a coincidência é

$$C_e = \frac{1}{4} \left\{ \frac{2}{3} \cos^2 \left[\frac{\pi}{3}t - \frac{\theta}{2} \right] + \frac{1}{3} \cos^2 \left[\frac{2\pi}{3}t + \frac{\theta}{2} \right] \right\}, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}C_p &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{4}{9} \cos^2 \left[\frac{\pi}{3}t - \frac{\theta}{2} \right] + \frac{1}{9} \cos^2 \left[\frac{2\pi}{3}t + \frac{\theta}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{9} \left(1 + \frac{\cos \left[\frac{2\pi}{3}t - \pi t_s - \theta \right]}{2} + \frac{\cos \left[\frac{2\pi}{3}t - \pi t_i - \theta \right]}{2} \right) \right\},\end{aligned}\quad (2.27)$$

onde definimos $t = (t_s + t_i)/2$. Como podemos ver, as interferências em coincidências são outra vez completamente diferentes em cada caso. Elas não dependem dos termos t_s e t_i separadamente para estado emaranhado, o que não acontece para o estado produto. Mesmo para $t_s = t_i = t$ os comportamentos também são diferentes, como é mostrado na Fig.(2.4). Nesta condição, o estado emaranhado evoluído nunca se torna ortogonal ao inicial, mas as franjas recuperam novamente a visibilidade máxima para $t = 1$, com o deslocamento de fase fracionário igual a $2\pi/3$. No entanto, o mesmo não ocorre para o estado produto, que outra vez nunca recupera a visibilidade máxima.

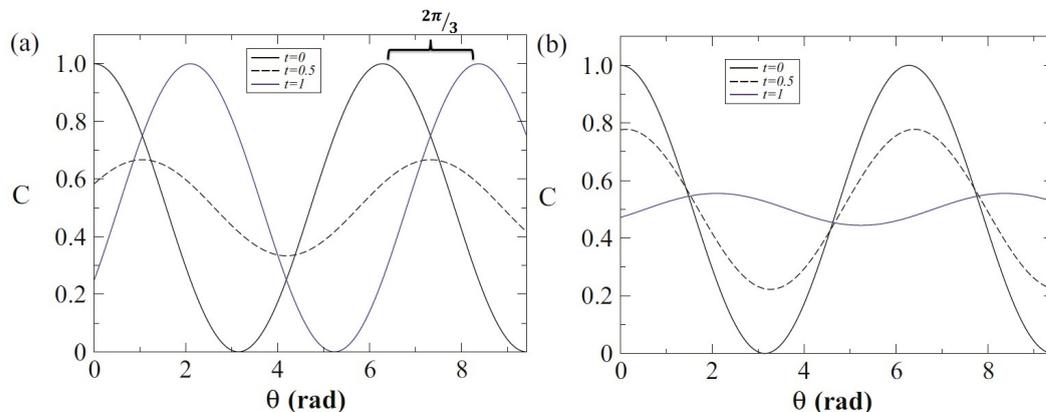


FIGURA 2.4: Interferência de coincidências para (a) um estado maximamente emaranhado e (b) um estado produto, correspondentes às operações unitárias dadas pelas eqs.(2.25) para três valores de t : $t=0$ (linha sólida preta), $t=1/2$ (linha tracejada preta) e $t=1$ (linha sólida azul).

Finalmente, a fim de se observar o efeito da dimensão do espaço de Hilbert, é instrutivo considerar a situação em que apenas duas componentes dos qutrits são operadas e comparar sua evolução com um par de qubits. Por exemplo, vamos escolher

$$\begin{aligned} \phi_1 = -\phi_2 = \frac{\pi}{2}t_s, \quad \phi_3 = 0, \\ \chi_1 = -\chi_2 = \frac{\pi}{2}t_i, \quad \chi_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Neste caso, a coincidência é

$$C_e = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{6} (1 + 2 \cos[\pi t]) \right\}, \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} C_p = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{9} \left(\frac{1}{2} + \cos[\pi t] + \cos[\pi\tau] \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \left[\frac{\pi}{2}t_s \right] + \cos \left[\frac{\pi}{2}t_i \right] \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde definimos $\tau = (t_s - t_i)/2$. Como antes, a contagem de coincidência associada com o estado emaranhado é independente dos parâmetros t_s e t_i , e agora também de τ , enquanto que o mesmo não é verdade para o estado produto. Entretanto, como pode ser visto na Fig.(2.5) (novamente para $t_s = t_i = t$, isto é, $\tau = 0$), nenhum dos estados é governado por uma evolução cíclica no intervalo total do parâmetro de controle t . As franjas de interferência nunca recuperam a visibilidade máxima.

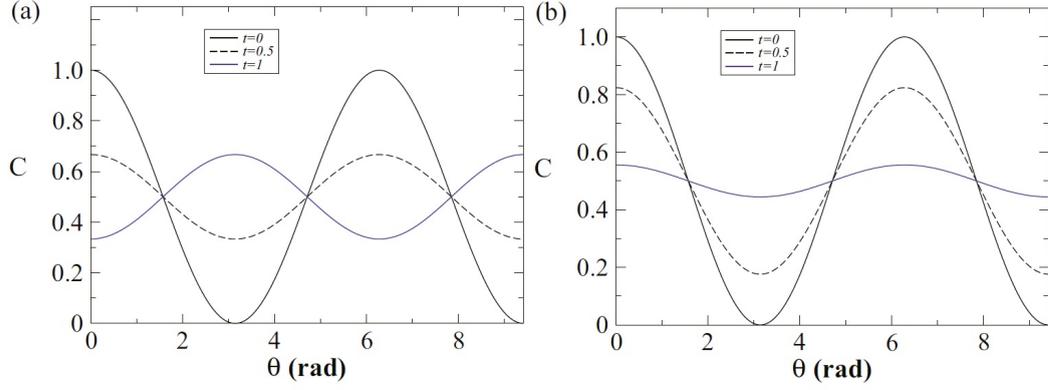


FIGURA 2.5: Interferência de coincidências para (a) um estado máximamente emaranhado e (b) um estado produto, correspondentes às operações unitárias dadas pelas eqs.(2.28) para três valores de t : $t=0$ (linha sólida preta), $t=1/2$ (linha tracejada preta) e $t=1$ (linha sólida azul).

Podemos comparar estes resultados com aqueles esperados para um par de qubits ($d = 2$) preparados tanto no estado emaranhado

$$|\psi_e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle); \quad \alpha_{mn} = \frac{\delta_{mn}}{\sqrt{2}}, \quad (2.31)$$

ou no estado produto possuindo a mesma distribuição de população de um qudit

$$|\psi_p\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle); \quad \alpha_{mn} = \frac{1}{2}, \quad (2.32)$$

evoluindo de acordo com

$$\phi_1 = -\phi_2 = \frac{\pi}{2}t_s, \quad \chi_1 = -\chi_2 = \frac{\pi}{2}t_i. \quad (2.33)$$

Neste caso, a coincidência é

$$C_e = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} (1 + \cos \theta \cos[\pi t]) \right\}, \quad (2.34)$$

$$C_p = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\cos \theta}{4} (\cos[\pi t] + \cos[\pi \tau]) \right\}. \quad (2.35)$$

Estas contagens de coincidência são mostradas na Fig.(2.6) (para $\tau = 0$). Agora o estado emaranhado é levado através de uma evolução cíclica, e recupera a visibilidade máxima

com uma fase topológica π , como esperado para qubits maximamente emaranhados[8–10, 16]. Em contraste, o estado produto não completa uma evolução cíclica; ele termina em um estado ortogonal ao inicial.

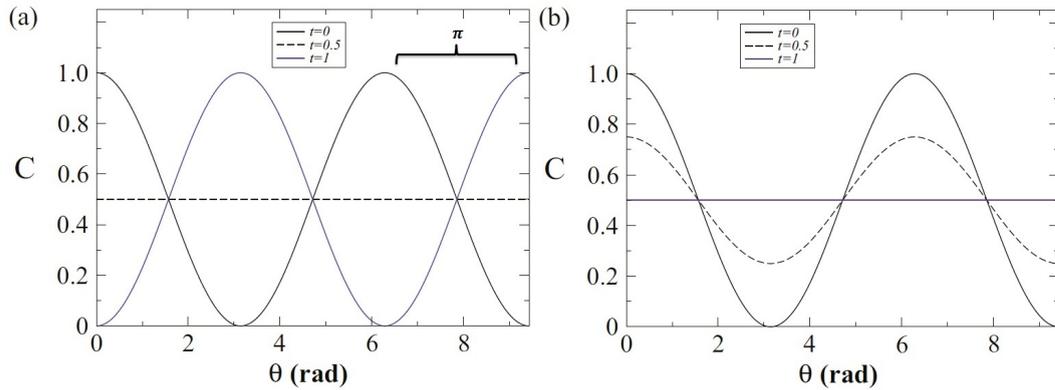


FIGURA 2.6: Interferência de coincidências para (a) um estado máximamente emaranhado e (b) um estado produto, correspondentes às operações unitárias dadas pelas eqs.(2.33) para três valores de t : $t=0$ (linha sólida preta), $t=1/2$ (linha tracejada preta) e $t=1$ (linha sólida azul).

Portanto, o comportamento da interferência é sensível não apenas ao emaranhamento, mas também à dimensão dos qudits sendo operados.

2.2 Efeito Hong-Ou-Mandel

Neste ponto, vamos analisar o fato de que dois fótons são recombinados nas diferentes portas de entrada de um PBS. Embora a frequência ω_o do laser de bombeamento seja bem definida no experimento, as frequências individuais ω_s e ω_i dos fótons gerados possuem uma larga incerteza. Na prática, a incerteza em frequência dos fótons detectados é determinada pela largura de banda dos filtros de interferência colocados no caminho dos feixes logo antes da detecção. Estas larguras de banda são da ordem de $10nm$, que corresponde em frequência a $5,9 \times 10^{12}Hz$, que por sua vez corresponde a um tempo de coerência para cada fóton de aproximadamente $100fs$. Espera-se que as amplitudes de probabilidade para a detecção de dois fótons em coincidência nos detectores D1 e D2 interfiram apenas se elas se sobrepõem com essa precisão. Este aspecto foi discutido inicialmente por Hong, Ou e Mandel[45] em um experimento similar onde os fótons *signal* e *idler* se sobrepõem em um divisor de feixes 50/50 (*Beam Splitter* - BS), e por isso vamos utilizar o termo efeito HOM⁴.

⁴Posteriormente, outros trabalhos demonstraram que a sobreposição dos pacotes de onda no BS é desnecessária para a visualização da interferência de dois fótons desde que as amplitudes de probabilidade que a produzem sejam indistinguíveis[46].

Vamos mostrar como o efeito HOM influencia a contagem de coincidências, considerando o subespaço das frequências; vamos tomar o estado inicial com uma certa distribuição de frequências respeitando a condição de conservação de energia

$$\omega_o = \omega_s + \omega_i. \quad (2.36)$$

Considerando também o subespaço da polarização, o estado de dois fótons logo após a primeira placa de meia onda na Fig.(2.2) é

$$|\Omega\rangle = \int d\omega \Phi(\omega, \omega_o - \omega) |\omega, \alpha; \omega_o - \omega, \beta\rangle, \quad (2.37)$$

onde utilizamos a eq.(2.36) para eliminar ω_i , e omitimos o índice de ω_s , já que foi a única variável restante. Os estados de polarização são dados por

$$|\Gamma\rangle = \cos(\Gamma) |H\rangle + e^{i\lambda\Gamma} \sin \Gamma |V\rangle \quad \Gamma = \alpha, \beta \quad , \quad (2.38)$$

onde α e β são determinados pela placa de onda logo após o cristal não linear da Fig.(2.2). No tratamento desta seção consideraremos a montagem da Fig.(2.2) sem a presença da abertura com fendas múltiplas, os moduladores desligados funcionando apenas como espelhos, e o deslocador de fase em um dos interferômetros Sagnac sem introduzir fase extra. A probabilidade conjunta da detecção de fótons em ambos os detectores D1 e D2 nos tempos t e $t + \tau$ respectivamente é

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \langle \Omega | \mathcal{E}_1^-(t) \mathcal{E}_2^-(t + \tau) \mathcal{E}_2^+(t + \tau) \mathcal{E}_1^+(t) | \Omega \rangle \\ &= \| \mathcal{E}_2^+(t + \tau) \mathcal{E}_1^+(t) | \Omega \rangle \|^2, \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde $\mathcal{E}_1^-(t)$ e $\mathcal{E}_2^+(t)$ são as partes de frequência positiva dos operadores campo nos detectores D1 e D2. Elas se relacionam às componentes $\mathcal{E}_{s\mu}^+(t)$ e $\mathcal{E}_{i\nu}^+(t)$ ($\mu, \nu = H, V$) nos espelhos E1 e E2 da Fig.(2.2), sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^+(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{E}_{sH}^+(t - \tau_1) + i\mathcal{E}_{iV}^+(t - \tau_2)), \\ \mathcal{E}_2^+(t + \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (i\mathcal{E}_{sV}^+(t - \tau_3 + \tau) + \mathcal{E}_{iH}^+(t - \tau_4 + \tau)), \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde τ_r ($r = 1, 2, 3, 4$) é o tempo de propagação de cada fóton *signal* ou *idler* com componentes de polarização vertical ou horizontal dos espelhos E1 e E2 até os detectores D1 e D2. Cada componente possui a seguinte expansão[37]

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{s\mu}^+(t) &= \sum_{\omega'} C(\omega') e^{i\omega't} a_{\omega'\mu} \\ \mathcal{E}_{i\nu}^+(t) &= \sum_{\omega''} C(\omega'') e^{i\omega''t} b_{\omega''\nu}.\end{aligned}\quad (2.41)$$

A atuação dos operadores aniquilação $a_{\omega'\mu}$ e $b_{\omega''\nu}$ é dada por

$$\begin{aligned}a_{\omega'\mu} b_{\omega''\nu} |\omega, \alpha; \omega_o - \omega, \beta\rangle &= \delta_{\omega'\omega} \delta_{\omega''\omega_o - \omega} \left(\delta_{\mu H} \delta_{\nu H} \cos \alpha \cos \beta + \delta_{\mu V} \delta_{\nu V} e^{i(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)} \sin \alpha \sin \beta \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\mu H} \delta_{\nu V} \cos \alpha e^{i\lambda_\beta} \sin \beta + \delta_{\mu V} \delta_{\nu H} e^{i\lambda_\alpha} \sin \alpha \cos \beta \right) |vac\rangle.\end{aligned}\quad (2.42)$$

Da eq.(2.42) vemos que os termos do produto de operadores campo com duas componentes *signal* ou *idler* anulam todas as contribuições de $|\Omega\rangle$, novamente em virtude de se aplicar o operador aniquilação duas vezes na mesma parte do estado com apenas um fóton *signal* ou *idler*. Assim, a probabilidade conjunta fica

$$\begin{aligned}P(\tau) &= ||(\mathcal{E}_{iH}^+(t - \tau_4 + \tau) \mathcal{E}_{sH}^+(t - \tau_1) - \mathcal{E}_{sV}^+(t - \tau_3 + \tau) \mathcal{E}_{iV}^+(t - \tau_2)) \\ &\quad \times \int d\omega \Phi(\omega, \omega_o - \omega) |\omega, \alpha; \omega_o - \omega, \beta\rangle ||^2,\end{aligned}\quad (2.43)$$

e se reduz a

$$\begin{aligned}P(\tau) &= \left| C \int d\omega \Phi(\omega, \omega_o - \omega) (e^{-i\omega(\tau_1 - \tau_4 + \tau)} e^{i\omega_o(\tau - \tau_4)} \cos \alpha \cos \beta \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\omega(\tau_3 - \tau_2 - \tau)} e^{-i\omega_o \tau_2} e^{i(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)} \sin \alpha \sin \beta) \right|^2.\end{aligned}\quad (2.44)$$

Os coeficientes $C(\omega)$ nas expansões dos campos são funções que variam de forma lenta com ω em comparação ao resto da função no integrando, o que nos permitiu fazer uma aproximação que os retira da integral e os engloba na constante C [37]. Se considerarmos

a distribuição $\Phi(\omega, \omega_o - \omega)$ como sendo uma gaussiana, teremos que a integral em ω será sua transformada de Fourier, que também é uma função gaussiana. Assim, utilizando

$$\Phi(\omega, \omega_o - \omega) = e^{-\frac{(\omega - \frac{\omega_o}{2})^2}{2\Delta\omega^2}}, \quad (2.45)$$

onde $\Delta\omega$ é a largura de banda dos filtros de interferência, e

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-\frac{(\omega - \frac{\omega_o}{2})^2}{2\Delta\omega^2}} e^{-i\omega T} = \sqrt{2\pi}\Delta\omega e^{-\frac{i\omega_o T}{2}} e^{-\frac{\Delta\omega^2 T^2}{2}}, \quad (2.46)$$

chegamos a

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \left| C\sqrt{2\pi}\Delta\omega e^{-i\frac{\omega_o}{2}(\tau_1 + \tau_4 - \tau)} e^{-\frac{\Delta\omega^2}{2}(\tau_1 - \tau_4 + \tau)^2} \cos\alpha \cos\beta \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\frac{\omega_o}{2}(\tau_3 + \tau_2 - \tau)} e^{-\frac{\Delta\omega^2}{2}(\tau_3 - \tau_2 - \tau)^2} e^{i(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)} \sin\alpha \sin\beta \right|^2 \\ &= 2\pi\Delta\omega^2 |C|^2 \left[e^{-\Delta\omega^2(\tau_1 - \tau_4 + \tau)^2} \cos^2\alpha \cos^2\beta + e^{-\Delta\omega^2(\tau_3 - \tau_2 - \tau)^2} \sin^2\alpha \sin^2\beta \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{\Delta\omega^2}{2}[(\tau_1 - \tau_4 + \tau)^2 + (\tau_3 - \tau_2 - \tau)^2]} 2 \cos\left[\frac{\omega_o}{2}(\tau_1 + \tau_4 - \tau_3 - \tau_2) + \lambda_\alpha + \lambda_\beta\right] \frac{\sin(2\alpha)}{2} \frac{\sin(2\beta)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Na prática, a medida de coincidência corresponde a uma integração da probabilidade conjunta $P(\tau)$ com τ varrendo o tempo da janela de coincidências, de alguns nanosegundos. Mas como este tempo é muito maior do que o tempo de correlação da função na eq.(2.47), vamos fazer a integral para todo τ . Como o colchete no expoente da terceira gaussiana da eq.(2.47) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} 2\tau^2 + 2\tau[(\tau_1 - \tau_4) - (\tau_3 - \tau_2)] + (\tau_1 - \tau_4)^2 + (\tau_3 - \tau_2)^2 &= 2 \left[\tau - \frac{(\tau_1 - \tau_4) - (\tau_3 - \tau_2)}{2} \right]^2 \\ &\quad + \frac{(\tau_1 - \tau_4)^2}{2} + \frac{(\tau_3 - \tau_2)^2}{2} + (\tau_1 - \tau_4)(\tau_3 - \tau_2), \end{aligned}$$

vemos que esta se torna proporcional a uma gaussiana que é função de τ de forma similar às gaussianas presentes nos outros termos. Vamos definir $\tau_1 = \tau_s + \tau'$, $\tau_2 = \tau_i + \tau'$, $\tau_3 = \tau_s + \tau''$ e $\tau_4 = \tau_i + \tau''$, onde τ_s (τ_i) é o tempo de propagação do fóton *signal* (*idler*) do espelho E1 (E2) ao PBS, e τ' (τ'') o tempo de propagação do PBS ao detector D1 (D2). Com isso, temos que a quantidade $\tau_1 + \tau_4 - \tau_3 - \tau_2$ é igual a zero e o terceiro termo

na eq.(2.47) assume uma forma mais simples. Sabendo que o resultado da integração de uma gaussiana do tipo $e^{-\Delta\omega^2(\tau-b)^2}$ é $\sqrt{\pi}/\Delta\omega$, temos

$$P \equiv \int d\tau P(\tau) = 2\pi^{\frac{3}{2}} \Delta\omega |C|^2 \left[\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \frac{1}{2} e^{-\Delta\omega^2(\tau_s - \tau_i)^2} \cos(\lambda_\alpha + \lambda_\beta) \sin(2\alpha) \sin(2\beta) \right]. \quad (2.48)$$

Como a placa de onda é posicionada de forma que os estados de polarização sejam lineares a 45° , podemos substituir $\alpha = \beta = \pi/4$ e $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = 0$ na equação acima, ficando

$$P = \pi^{\frac{3}{2}} \Delta\omega |C|^2 (1 - e^{-\Delta\omega^2(\tau_s - \tau_i)^2}). \quad (2.49)$$

Segue da relação acima que $P = 0$ quando $\tau_s - \tau_i = 0$, enquanto que P se torna constante quando $\tau_s - \tau_i$ excede apreciavelmente o tempo de correlação de $e^{-\Delta\omega^2(\tau_s - \tau_i)^2}$. Portanto, um gráfico do número de coincidências $N \propto P$ em função do deslocamento $\tau_s - \tau_i$ deve exibir uma queda acentuada próximo a $\tau_s = \tau_i$, com uma largura determinada pelo tempo de coerência dos fótons. O desaparecimento da contagem de coincidência é um fenômeno puramente quântico, resultante da interferência destrutiva de quarta ordem em campos [47, 48].

Por outro lado, se $\alpha = -\beta = \pi/4$ e $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = 0$, temos

$$P = \pi^{\frac{3}{2}} \Delta\omega |C|^2 (1 + e^{-\Delta\omega^2(\tau_s - \tau_i)^2}). \quad (2.50)$$

Neste caso vemos um pico ($\tau_s \approx \tau_i$) com o dobro do valor em relação ao patamar de contagens de coincidências quando $\tau_s \gg \tau_i + \tau_c$ (onde τ_c é o tempo de coerência).

Por esta razão há a necessidade da presença dos trombones ópticos mostrados na Fig.(2.2), cuja função não havia sido discutida na seção anterior. Movimentando-se os prismas ao longo da direção de propagação dos fótons é possível ajustar o tamanho dos caminhos dos feixes, tal qual o instrumento musical faz com as ondas sonoras, por isso a alusão feita pelo nome trombone óptico. Assim é possível igualar os caminhos dos feixes, e satisfazer a condição $\tau_s \approx \tau_i$. No entanto, mesmo com este dispositivo, atingir tal condição apresenta grandes dificuldades, como discutiremos no próximo capítulo. A fim de não interrompermos as discussões dos aspectos teóricos envolvendo o experimento, vamos apresentar na seção seguinte uma outra proposta que visa eliminar este problema.

2.3 Segunda Proposta

Em vista da dificuldade de se igualar os caminhos dos feixes mantendo a superposição transversal dos pacotes de ondas, uma proposta alternativa foi elaborada, na qual os caminhos percorridos são automaticamente os mesmos, da geração até o PBS onde os feixes são recombinados. Vamos mostrar que as operações implementadas culminam em um resultado próximo ao da proposta anterior (seção 2.1), conservando as características onde se manifestam as correlações quânticas da CPDE, dos estados de caminho, e a dimensionalidade do espaço de Hilbert. A demonstração será feita a partir de uma aproximação monocromática (monomodo em frequência).

Consideremos agora a montagem esquematizada na Figura 2.7.

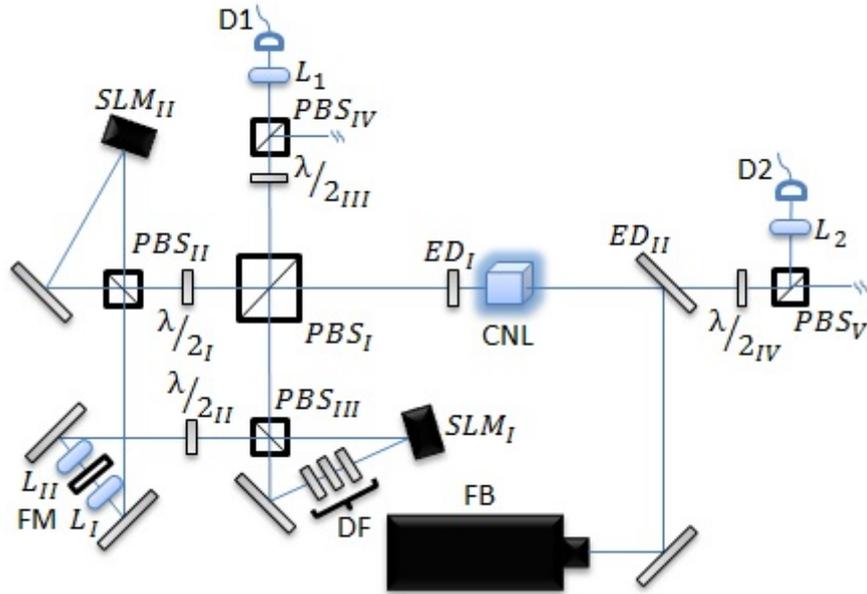


FIGURA 2.7: Um feixe de bombeamento (FB) incide no cristal não linear (CNL) gerando dois feixes colineares de fótons emaranhados. A parcela do FB transmitida no CNL é refletida de volta pelo espelho dicróico (ED_I). Os feixes gerados são divididos no PBS_I e percorrem um interferômetro maior com dois interferômetros tipo Sagnac (SLM_I , SLM_{II} , PBS_{II} e PBS_{III}), duas placas de onda ($\lambda/2_I$ e $\lambda/2_{II}$), duas lentes (L_I e L_{II}), e fendas múltiplas (FM) inseridos nele. No interior de um dos Sagnacs menores há ainda um deslocador de fase (DF). Após se recombinarem no PBS_I , uma das saídas passa pelo conjunto $\lambda/2_{III}$ - PBS_{IV} - L_1 e é detectada em D1; a outra retorna através do CNL, é transmitida pelo espelho dicróico (ED_{II}), passa pelo conjunto $\lambda/2_{IV}$ - PBS_V - L_2 , e é detectada em D2.

Para um casamento de fase tipo II e um feixe de bombeamento polarizado verticalmente, a CPDE gera pares de fótons com polarizações ortogonais, sendo a de um deles igual a do feixe de bombeamento. O estado logo após a geração pode ser escrito como

$$|\psi_0\rangle = |\Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)\rangle \otimes |H, V\rangle, \quad (2.51)$$

onde $|\Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)\rangle$ é o estado de momento dos fótons gerados definido pela condição de casamento de fase e pelo perfil transversal do feixe de laser que gera os fótons. Como a direção da geração do par é colinear, *signal* (polarização horizontal) e *idler* (vertical) seguem juntos até o PBS_I onde são divididos; em seguida ambos irão percorrer o mesmo interferômetro propagando em direções contrárias até se recombinarem novamente no PBS_I . Os fótons percorrem portanto caminhos iguais naturalmente, a menos do atraso devido à birrefringência do cristal, que pode ser compensado com placas retardadoras⁵.

Após a geração, o fóton *signal* passa pela placa de meia onda $\lambda/2_I$ que gira a polarização de 90° , e o *idler* é refletido três vezes (uma no PBS_I e duas no PBS_{III}) ganhando uma fase $-i$. O *signal* é então refletido duas vezes no PBS_{II} ganhando uma fase -1 , e o *idler* passa pela placa $\lambda/2_{II}$ que gira a polarização de -45° , ficando o estado após o PBS_{II} (*signal*) e a placa $\lambda/2_{II}$ (*idler*)

$$|\psi_1\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} |\Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)\rangle \otimes (|V, H\rangle + |V, V\rangle). \quad (2.52)$$

Neste ponto, ambos os feixes passam pela fenda múltipla, onde são gerados os estados de fenda. Como antes, os qudits espaciais são codificados nos caminhos transversais dos pares de fótons gerados pela CPDE. Os índices m e n que indexam os estados de caminho aparecem no lugar da função $\Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$ assumindo os valores de 1 a d (d a dimensão do subespaço correspondente, igual ao número de fendas). Neste caso, as correlações entre *signal* e *idler* serão controladas por duas lentes L_I e L_{II} posicionadas cada uma de um lado das fendas múltiplas à distância focal do plano das fendas. Foi mostrado[49] que esta disposição de lentes gera a mesma correlação de caminhos dos fótons transmitidos que a vista no caso de uma lente anterior ao cristal focalizando o feixe de bombeamento no plano das fendas[42]. Deste modo, o estado geral pode ser escrito como uma superposição dos estados de fenda para dois fótons

$$|\psi_2\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{m,n} \alpha_{mn} (|mV, nH\rangle + |mV, nV\rangle), \quad (2.53)$$

onde α_{mn} é a amplitude de probabilidade de se obter um fóton *signal* passando pela fenda m e um fóton *idler* passando pela n . O *signal* passa pela placa $\lambda/2_{II}$ que gira a polarização de 45° . O *idler* passa por uma porta unitária controlada por polarização, composta por um interferômetro Sagnac com o PBS_{II} de entrada e saída e o SLM_{II} inserido no interferômetro. A evolução espacial do *idler* dada por V_i é implementada na componente com polarização horizontal do feixe. O estado então se torna

⁵As componentes H e V se propagarão com velocidades diferentes dentro do cristal (*walkoff* longitudinal), podendo o atraso ser compensado com placas birrefringentes de quartzo inseridas logo após o cristal.

$$|\psi_3\rangle = -\frac{i}{2} \sum_{m,n} \alpha_{mn} (V_i |mH, nH\rangle - V_i |mV, nH\rangle - |mH, nV\rangle + |mV, nV\rangle). \quad (2.54)$$

Finalmente, o *signal* passa por uma porta unitária semelhante a descrita acima (com o PBS_{III} e o SLM_I) onde é implementada sua evolução U_s . Nesta porta ainda há um deslocador de fase cuja função é aplicar uma fase θ na componente vertical em relação a horizontal do feixe[43, 44]. O *idler* passa pela $\lambda/2_I$ que gira a polarização de -90° . O estado agora é

$$|\psi_4\rangle = -\frac{i}{2} \sum_{m,n} \alpha_{mn} (U_s V_i |mH, nV\rangle + e^{i\theta} V_i |mV, nV\rangle - U_s |mH, nH\rangle - e^{i\theta} |mV, nH\rangle). \quad (2.55)$$

Após *signal* e *idler* retornarem para as diferentes entradas do PBS_I , vamos ter que apenas as componentes $|nH, mH\rangle$ e $|nV, mV\rangle$ contribuem para as coincidências, como na proposta anterior. Seguindo os mesmos passos anteriores (seção 2.1), obtém-se que a função das coincidências integrada é

$$C \equiv \int d^2\mathbf{r}_s d^2\mathbf{r}_i C(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{16} \sum_{m,n} |e^{i\theta} \alpha''_{mn} + \alpha'_{mn}|^2, \quad (2.56)$$

sendo que desta vez temos as seguintes transformações

$$\begin{aligned} U_s \sum_{m,n} \alpha_{mn} |mH, nH\rangle &= \sum_{m,n} \alpha'_{mn} |mH, nH\rangle, \\ V_i \sum_{m,n} \alpha_{mn} |mV, nV\rangle &= \sum_{m,n} \alpha''_{mn} |mV, nV\rangle. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Capítulo 3

Resultados Parciais

Neste capítulo vamos apresentar alguns testes feitos no processo de implementação das propostas experimentais. Até o momento da escrita desta dissertação os experimentos ainda não foram finalizados, portanto mostraremos os resultados obtidos até aqui para o alinhamento em algumas etapas importantes do experimento. Em complemento, quando relevante, vamos descrever alguns equipamentos e elementos ópticos utilizados e detalhes sobre coleta e manipulação de dados realizadas.

Fizemos a montagem do experimento de acordo com a Fig.(2.2), exceto pela ausência das fenda múltiplas e do último PBS antes dos detectores. Para a fonte de fótons gêmeos utilizamos um laser CW de estado sólido modelo Genesis CX-355-100-STM da empresa Coherent, com potência máxima de 100mW operando com $\lambda = 355nm$. O laser bombeia um cristal não-linear BiBO (BiB_3O_6) tipo I de 5mm de espessura. Um espelho dicróico posicionado após o cristal reflete o feixe de bombeamento para fora do experimento.

Os interferômetros Sagnac pelos quais os fótons passam após a geração são modificados, substituindo-se um dos espelhos por um SLM. Os SLMs são aparelhos que utilizam painéis de cristais líquidos[50, 51] (*liquid crystal display* - LCD) para modular amplitude e fase do feixe que incide sobre sua superfície. Existem basicamente dois tipos de SLM: os de reflexão, que modulam o feixe refletido pelo LCD, e os de transmissão, que modulam o feixe transmitido. Há disponíveis no mercado SLMs que podem modular amplitude e fase separadamente, e os que o fazem simultaneamente.

Utilizamos SLMs de reflexão modelo LCOS-SLM x10468 da empresa Hamamatsu, como o da Fig.(3.1), que modulam apenas a fase do feixe incidente. Quando conectado ao computador, o SLM é reconhecido como um segundo monitor; a modulação é feita através de um programa que utiliza escalas de cinza (EC) como parâmetro de entrada. São 256 EC possíveis (de 0 a 255), sendo que a cada uma delas corresponde uma certa tensão



FIGURA 3.1: Ilustração de um SLM da empresa Hamamatsu, modelo LCOS-SLM x10468.

elétrica enviada ao SLM. A tensão provoca um reordenamento das moléculas do LCD, resultando na modulação de fase desejada. De acordo com o fabricante, para o funcionamento correto do aparelho o ângulo entre o feixe incidente e a normal à superfície do LCD precisa ser igual ou menor do que 10° . Cientes disso, escolhemos o tamanho dos interferômetros Sagnac de forma a satisfazer esta condição. Por fim, o SLM possui a importante característica de adicionar um fator de fase apenas na componente de polarização horizontal dos fótons (direção paralela à menor dimensão do SLM mostrado da Fig.(3.1)). Como vimos (consultar eq.(2.3)), tal característica é crucial na implementação das operações cíclicas oriundas dos coeficientes da eq.(2.10).

Na ausência do último PBS, os feixes enviados aos detectores contém exatamente a informação da fase relativa aplicada pelos SLMs entre as componentes com polarização H e V de um dos fótons. Desta forma, com os polarizadores logo antes dos detectores para apagar a informação sobre a polarização, as contagens simples de um detector e as contagens de coincidência exibem um padrão de interferência em função das EC do SLM. As Figs.¹(3.2, 3.3) mostram os padrões resultantes das modulações de cada SLM registrados pelos detectores. Destes padrões podemos retirar duas informações importantes: o valor máximo de fase que a modulação do SLM pode aplicar, e as EC correspondentes aos valores de fase para interferência construtiva, interferência destrutiva, ou qualquer outro valor de fase que seja de interesse para a aplicação das evoluções cíclicas.

¹As barras de erro para estas figuras são do mesmo tamanho dos pontos na escala utilizada.

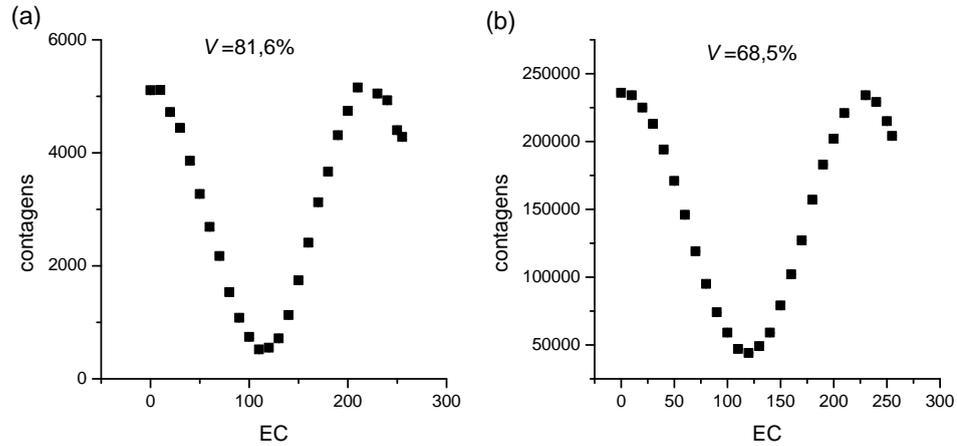


FIGURA 3.2: Padrão de interferência das contagens (a) em coincidências e (b) simples para a modulação do SLM inserido no interferômetro Sagnac com deslocador de fase. A visibilidade calculada é mostrada nos gráficos.

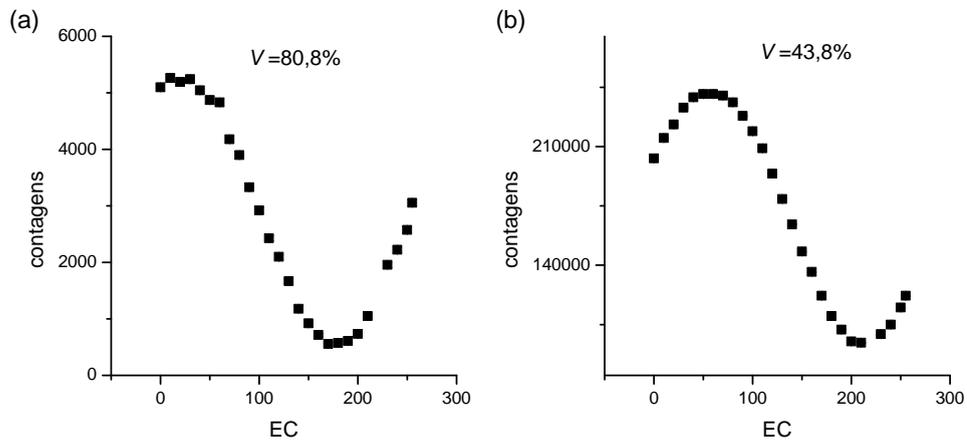


FIGURA 3.3: Padrão de interferência das contagens (a) em coincidências e (b) simples para a modulação do SLM inserido no interferômetro Sagnac sem deslocador de fase. A visibilidade calculada é mostrada nos gráficos.

Calculamos a visibilidade $V = (max - min) / (max + min)$ para todos os casos. Os valores de max e min considerados foram respectivamente o maior e o menor valor da tabela de valores que dá origem aos padrões. Como podemos ver nos gráficos, a visibilidade das contagens de coincidência está sempre acima de 80%.

O interferômetro Sagnac que possui o deslocador de fase[43, 44] inserido em seu interior admite uma análise análoga às feitas acima. Assim como o SLM, o deslocador de fase também fornece uma fase relativa entre as componentes com polarização H e V do fóton. Este dispositivo é composto por duas placas de onda $\lambda/4$ orientadas a -45° e uma placa de onda $\lambda/2$ entre elas, a qual terá o ângulo de orientação variado, como mostra a Fig.(3.4). Portanto, foram medidos mais um padrão de contagens simples para o detector D1 e mais um padrão de contagem de coincidências, em função do ângulo do deslocador de

fase, ambos mostrados na Fig.²(3.5). A visibilidade novamente está acima de 80% para a contagem de coincidências.

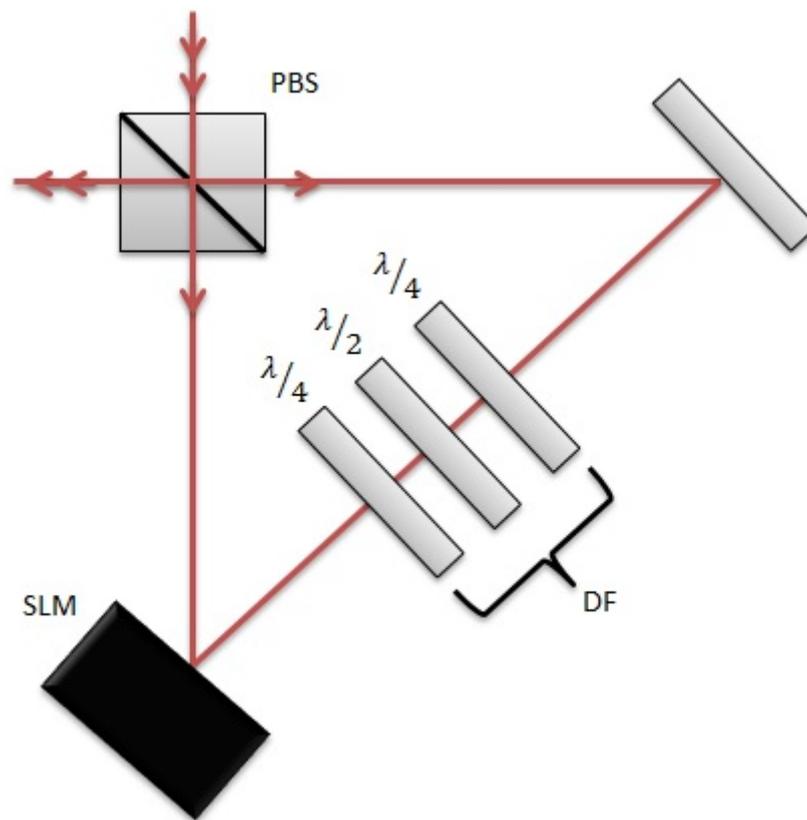


FIGURA 3.4: Deslocador de fase (DF) inserido em um dos interferômetros Sagnac.

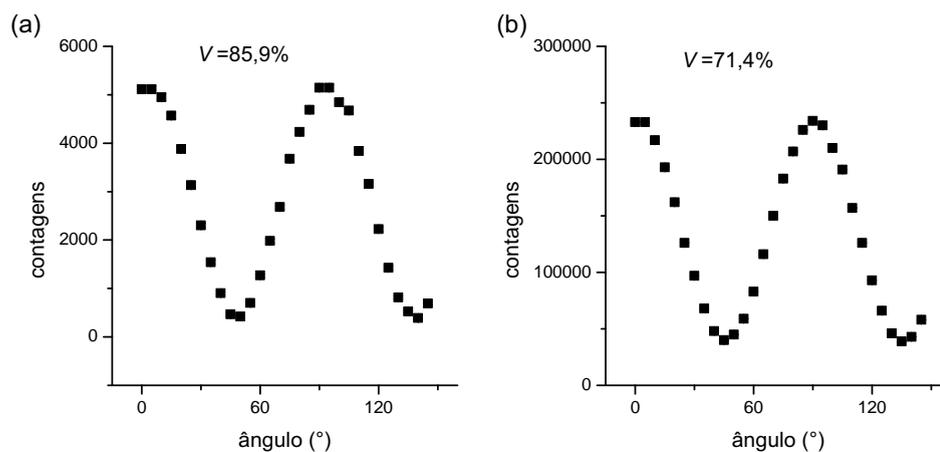


FIGURA 3.5: Padrão de interferência das contagens (a) em coincidências e (b) simples para a modulação do deslocador de fase inserido em um dos interferômetros Sagnac. A visibilidade calculada é mostrada nos gráficos.

Uma vez realizados os alinhamentos dos interferômetros Sagnac e feitas as análises dos padrões possíveis de serem extraídos deles, o último PBS foi posicionado no ponto de

²Novamente as barras de erro para esta figura são do mesmo tamanho dos pontos na escala utilizada.

encontro dos feixes. O objetivo seguinte é então variar as posições dos prismas de modo a ajustar os caminhos dos fótons *signal* e *idler* para que eles interfiram, de acordo com as discussões do efeito Hong-Ou-Mandel realizadas anteriormente. Para tanto, os prismas foram acoplados em transladores micrométricos com precisão de $10\mu\text{m}$; um dos prismas é mantido parado enquanto varremos as várias posições do outro. Se o micrômetro é inteiramente percorrido e o ponto correto não é encontrado, deslocamos o prisma que se encontrava parado de um intervalo igual e reiniciamos a varredura. As varreduras eram feitas de 10 em $10\mu\text{m}$, sendo que para cada ponto coletamos 10s de contagem de coincidências. O aparecimento de um aumento³ das contagens em coincidência é o indicativo de que encontramos o ponto correto, como ocorreu no intervalo de posições mostrado na Fig.(3.6). Nesta figura, o passo foi reduzido para $5\mu\text{m}$ no intervalo de $100\mu\text{m}$ em torno da posição onde percebemos o aumento das contagens de coincidência; também reduzimos o tamanho das íris que marcavam o caminho dos feixes antes e depois do PBS para melhorar o efeito da interferência, e diminuimos o tempo de coleta para 5s.

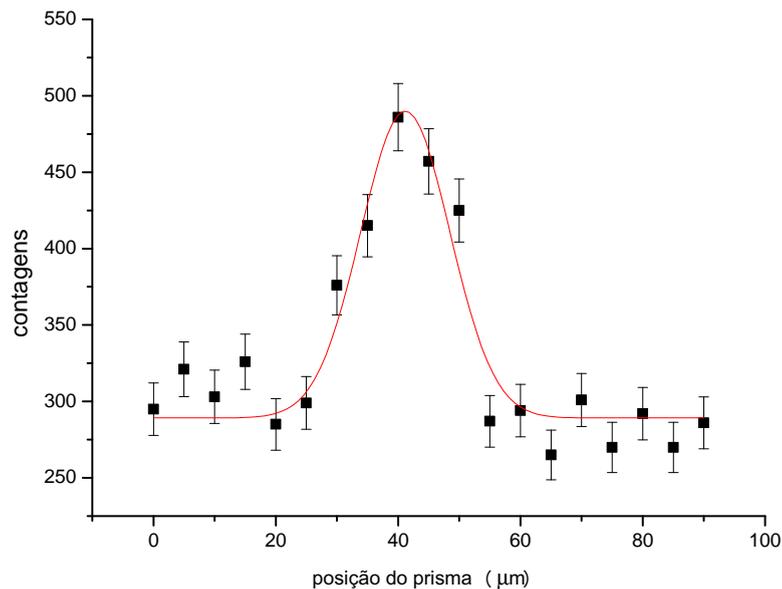


FIGURA 3.6: O aumento das coincidências em um intervalo de posições com largura determinada pelo comprimento de coerência dos fótons é uma medida do efeito HOM.

A curva em vermelho representa um ajuste gaussiano dos dados.

Note que a largura a meia altura da curva mostrada é aproximadamente $20\mu\text{m}$. Como em cada passo do prisma de x os caminhos dos fótons são variados de $2x$, a largura da curva está de acordo com o comprimento de coerência previsto dos fótons gêmeos para essa montagem, que é de $50\mu\text{m}$. Calculamos a visibilidade $V = (max - base)/base$ para o

³Dependendo da paridade do estado quântico, ao invés de uma queda nas coincidências ocorre um aumento, como visto anteriormente.

efeito de interferência HOM. Os valores *max* e *base* considerados foram respectivamente o maior e o menor valor do ajuste gaussiano dos dados representado pela linha vermelha, e a visibilidade foi de 69,4%. Este valor indica uma certa distinguibilidade dos modos transversais dos fótons *signal* e *idler*, que possivelmente será corrigida com a segunda proposta de montagem.

Concluimos este capítulo com a assertativa de que a implementação da segunda proposta se encontra atualmente em andamento e com a perspectiva de finalizarmos o experimento com ela.

Conclusão

O objetivo principal deste trabalho foi propor experimentos para a observação da fase topológica fracionária adquirida por um sistema de dois qudits. Para tanto utilizamos como base um sistema fotônico com pares de fótons emaranhados gerados na Conversão Paramétrica Descendente Espontânea. A partir da referência [36] apresentamos como é possível produzir qudits codificados espacialmente em estados de caminho discretos utilizando fendas múltiplas e os fótons gerados na CPDE. De posse de uma fonte controlada de estados emaranhados, elaboramos as propostas para implementação das fases.

Antes de desenvolvermos as propostas, introduzimos o conceito de fase geométrica seguindo a referência [20]. Vimos como o conceito surgiu apoiado na hipótese de mudanças adiabáticas, e também como ele foi posteriormente generalizado para uma dependência temporal arbitrária do Hamiltoniano. Através da análise da fase geométrica em mudanças adiabáticas e do exemplo do efeito Aharonov-Bohm, pudemos entender melhor sua relação com a geometria do espaço de parâmetros. Além disso, com base na referência [41], mostramos que utilizando a decomposição polar de matrizes indentificamos a fase geométrica dividida em uma parte topológica fracionária e uma parte ligada ao grau de emaranhamento do sistema bipartido.

Ainda com base na referência [41] seguimos com a descrição das propostas. Nelas o grau de liberdade de polarização é utilizado como auxiliar para fornecer dois caminhos para a aplicação das operações unitárias no estado de dois fótons. Isto também foi possível graças à característica dos Moduladores Espaciais de Luz de aplicar a modulação condicionada a polarização dos fótons, isto é, a modulação só é feita na componente com polarização horizontal. Com esta configuração conseguimos realizar a superposição de um estado onde as operações não aparecem com um estado em que elas foram aplicadas, como na eq.(2.12). Desta forma, ao se promover a interferência recombinando os fótons em um divisor de feixes é possível observar a fase topológica fracionária enquanto manipulamos as operações unitárias.

Como exemplo consideramos um sistema de dois qutrits para o qual fizemos simulações numéricas dos padrões de interferência. Escolhendo conjuntos de operações adequados, comparamos a evolução de estados maximamente emaranhados com a de estados produto, onde explicitamos uma relação da fase geométrica com o emaranhamento. Como resultado vimos que quando os estados emaranhados executam uma evolução cíclica, a visibilidade do padrão diminui durante a evolução e recupera seu valor total no fim. Para os estados produto também existe uma queda no valor da visibilidade, porém ela não acompanha o caso emaranhado, sendo que para o mesmo conjunto de operações o estado produto não passa por uma evolução cíclica e conseqüentemente não recupera

visibilidade total no final. Além disso, comparamos a evolução de um estado de dois qubits com um estado de dois qutrits, onde evidenciamos a influência da dimensão do espaço de Hilbert nas fases. Vimos que se aplicarmos um conjunto de fases no estado de dois qubits tal que ele execute uma evolução cíclica, o comportamento das franjas de interferência é diferente de aplicarmos as mesmas fases nos estados de dois qutrits.

Mostramos também que a interferência na recombinação dos fótons no divisor de feixes só ocorre se eles se superpõem simultaneamente. Simultaneamente aqui significa em um intervalo de tempo compatível com o tempo de coerência da distribuição de frequência do estado de dois fótons. Devido à presença de filtros interferência com largura de banda de alguns nanômetros colocados no caminho dos feixes antes da detecção, a frequência de cada fóton apresenta uma larga incerteza, o que resulta em um tempo de coerência da ordem de 10 femtosegundos. Utilizando uma teoria multimodo em frequência encontramos que as contagens de coincidência sofrem uma modulação da probabilidade conjunta de detecção dos fótons. Isso se reflete de maneira direta na implementação do experimento, uma vez que para se obter uma superposição com essa precisão em tempo é preciso que os caminhos percorridos pelos fótons sejam igualados com a precisão de algumas dezenas de micrometros. Além disso, a superposição transversal dos feixes também precisa ser mantida.

Por fim apresentamos alguns resultados parciais da implementação das propostas experimentais. Com a montagem da primeira proposta (sem as fendas múltiplas) conseguimos medir os padrões de interferência resultantes da modulação dos SLMs quando na ausência do último PBS. Com este inserido em sua posição, registramos também uma medição do efeito HOM. Contudo, devido a dificuldades de se superpor os modos transversais e longitudinais dos pacotes de onda, não foi possível seguir com a inserção das fendas múltiplas. Futuramente esperamos que a montagem da segunda proposta, a qual está sendo feita no momento, possibilite a realização das medições.

Apêndice A

Artigo Publicado

PHYSICAL REVIEW A **87**, 042113 (2013)

Fractional topological phase on spatially encoded photonic qudits

A. Z. Khoury,¹ L. E. Oxman,¹ B. Marques,² A. Matoso,² and S. Pádua²

¹*Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, 24210-346 Niterói, Rio de Janeiro, Brazil*

²*Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, 31270-901 Belo Horizonte, Minas Gerais, Brazil*

(Received 17 January 2013; published 19 April 2013)

We discuss the appearance of fractional topological phases on cyclic evolutions of entangled qudits encoded on photonic degrees of freedom. We show how the spatial correlations between photons generated by spontaneous parametric down-conversion can be used to evidence the multiple topological phases acquired by entangled qudits and the role played by the Hilbert space dimension. A realistic experimental proposal is presented with numerical predictions of the expected results.

DOI: [10.1103/PhysRevA.87.042113](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.042113)

PACS number(s): 03.65.Vf, 03.67.Mn, 07.60.Ly, 42.50.Dv

Referências Bibliográficas

- [1] M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 392:45–57, 1984.
- [2] M. V. Berry. The geometric phase. *Sci. Am.*, 259(6):46–52, 1988.
- [3] B. R. Holstein. The adiabatic theorem and berry phase. *Am. J. Phys.*, 57:1079–1084, 1989.
- [4] A. Shaphere and F. Wilczek. *Geometric Phases in Physics*. World Scientific, Singapore, 1989.
- [5] Y. Aharonov and J. Anandan. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Physical Review Letters*, 58:1593–1596, 1987.
- [6] Erik Sjöqvist. Geometric phase for entangled spin pairs. *Phys. Rev. A*, 62:022109, 2000.
- [7] Björn Hessmo and Erik Sjöqvist. Quantal phase for nonmaximally entangled photons. *Phys. Rev. A*, 62:062301, 2000.
- [8] Pérola Milman and Rémy Mosseri. Topological phase for entangled two-qubit states. *Physical Review Letters*, 90:230403, 2003.
- [9] Pérola Milman. Phase dynamics of entangled qubits. *Phys. Rev. A*, 73:062118, 2006.
- [10] L. E. Oxman and A. Z. Khoury. Fractional topological phase for entangled qudits. *Physical Review Letters*, 106:240503, 2011.
- [11] Markus Johansson, Marie Ericsson, Kuldip Singh, Erik Sjöqvist, and Mark S. Williamson. Topological phases and multiqubit entanglement. *Phys. Rev. A*, 85:032112, 2012.
- [12] T. Bitter and D. Dubbers. Manifestation of berry’s topological phase in neutron spin rotation. *Physical Review Letters*, 59:251–254, 1997.

- [13] D. J. Richardson, A. I. Kilvington, K. Green, and S. K. Lamoreaux. Demonstration of berry's phase using stored ultracold neutrons. *Physical Review Letters*, 61:2030–2033, 1988.
- [14] R. Y. Chiao. Optical manifestations of berry's topological phases: Aharonov-bohm-like effects for the photon. In Shun ichi Kobayashi *et al.*, editor, *Proc. 3rd Int. Symp. Foundations of Quantum Mechanics*, pages 80–92, Tokyo, 1990. The Physical Society of Japan.
- [15] C. E. R. Souza, J. A. O. Huguenin, P. Milman, and A. Z. Khoury. Topological phase for spin-orbit transformations on a laser beam. *Physical Review Letters*, 99:160401, 2007.
- [16] Jiangfeng Du, Jing Zhu, Mingjun Shi, Xinhua Peng, and Dieter Suter. Experimental observation of a topological phase in the maximally entangled state of a pair of qubits. *Phys. Rev. A*, 76:042121, 2007.
- [17] Jonathan A. Jones, Vlatko Vedral, Artur Ekert, and Giuseppe Castagnoli. Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance. *Nature*, 403:869–871, 2000.
- [18] L.-M. Duan, J. I. Cirac, and P. Zoller. Geometric manipulation of trapped ions for quantum computation. *Science*, 292:1695–1697, 2001.
- [19] A.Yu. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Annals of Physics*, 303(1):2–30, 2003.
- [20] Wolfgang P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. WILEY-VCH, Verlag Berlin GmbH, Berlin, 2001.
- [21] H. C. Ohanian. *Gravitation and Spacetime*. W. W. Norton, New York, 1976.
- [22] C. W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, New York, 1973.
- [23] Leslie E. Ballentine. *Quantum Mechanics - A Modern Development*. World Scientific, Singapore, 2000.
- [24] Y. Aharonov and D.Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115:485–57, 1959.
- [25] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wothers. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, 54:3824–3851, 1996.
- [26] S. Hill and W. K. Wothers. Entanglement of a pair of quantum bits. *Physical Review Letters*, 78:5022–5025, 1997.

- [27] W. K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, 80:2245–2248, 1998.
- [28] K. B. Petersen and M. S. Pedersen. <http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/p.php?3274>, Version Nov. 15:[see p. 8, Eq. (46)], 2012.
- [29] J. D. Franson. Bell inequality for position and time. *Physical Review Letters*, 62:2205–2208, 1989.
- [30] P. R. Tapster, J. G. Rarity, and P. C. M. Owens. Violation of bell’s inequality over 4 km of optical fiber. *Physical Review Letters*, 73:1923–1926, 1994.
- [31] P. G. Kwiat and K. Mattle, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Physical Review Letters*, 75:4337–4341, 1995.
- [32] P. G. Kwiat, E. Waks, A. G. White, I. Applebaum, and P. H. Eberhard. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A*, 60:R773–R776, 1999.
- [33] J. G. Rarity and P. R. Tapster. Experimental violation of bell’s inequality based on phase and momentum. *Physical Review Letters*, 64:2495–2498, 1990.
- [34] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature*, 412:313–316, 2001.
- [35] A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger. Experimental two-photon, three-dimensional entanglement for quantum communication. *Physical Review Letters*, 89:240401, 2002.
- [36] Leonardo Teixeira Neves. *Estados Emaranhados de Qubits e Qudits Criados com Pares de Fótons Produzidos na Conversão Paramétrica Descendente*. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, Brazil, 2006.
- [37] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [38] C. H. Monken, P. H. S. Ribeiro, and S. Pádua. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 57:3123–3126, 1998.
- [39] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. Roberts and Company Publishers, Greenwood Village, United States, 2005.
- [40] A. F. Abouraddy, B. E. A. Saleh, A. V. Sergienko, and M. C. Teich. Role of entanglement in two-photon imaging. *Physical Review Letters*, 87:123602, 2001.

- [41] A. Z. Khoury, L. E. Oxman, B. Marques, A. Matoso, and S. Pádua. Fractional topological phase on spatially encoded photonic qudits. *Phys. Rev. A*, 87:042113, 2013.
- [42] Leonardo Neves, S. Pádua, and C. Saavedra. Controlled generation of maximally entangled qudits using twin photons. *Phys. Rev. A*, 69:042305, 2004.
- [43] Enrique J. Galvez. *Applications of Geometric Phase in Optics*. Department of Physics and Astronomy, Colgate University.
- [44] E. J. Galvez, M. Malik, and B. C. Melius. Phase shifting of an interferometer using nonlocal quantum-state correlations. *Phys. Rev. A*, 75:020302(R), 2007.
- [45] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Physical Review Letters*, 59:2044–2046, 1990.
- [46] Yoon-Ho Kim. Two-photon interference without bunching two photons. *Physics Letters A*, 315:352–357, 2003.
- [47] R. Ghosh and L. Mandel. Observation of nonclassical effects in the interference of two photons. *Physical Review Letters*, 59:1903–1905, 1987.
- [48] R. Ghosh, C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel. Interference of two photons in parametric down conversion. *Phys. Rev. A*, 34:3962–3968, 1986.
- [49] Gen Taguchi, Tatsuo Dougakiuchi, Nobuaki Yoshimoto, Katsuya Kasai, Masataka Iinuma, Holger F. Hofmann, and Yutaka Kadoya. Measurement and control of spatial qubits generated by passing photons through double slits. *Phys. Rev. A*, 78:012307, 2008.
- [50] I. Moreno, P. Velásquez, C. R. Fernández-Pousa, M. M. Sánchez-López, and F. Mateos. Jones matrix method for predicting and optimizing the optical modulation properties of a liquid-crystal display. *Journal of Applied Physics*, 94(6):3697, 2003.
- [51] A. Márquez, I. Moreno, C. Iemmi, A. Lizana, J. Campos, and M. J. Yzuel. Mueller-stokes characterization and optimization of a liquid crystal on silicon display showing depolarization. *Opt. Express*, 16(3):1669, 2008.