

JOAB SYMON COSTA SANTOS

UMA COMPARAÇÃO COMPUTACIONAL DOS
ALGORITMOS DE BENDERS E O DUAL-ASCENT
NO PROBLEMA MULTI-PERÍODO DE
LOCALIZAÇÃO DE FACILIDADES

Belo Horizonte
27 de junho de 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

UMA COMPARAÇÃO COMPUTACIONAL DOS
ALGORITMOS DE BENDERS E O DUAL-ASCENT
NO PROBLEMA MULTI-PERÍODO DE
LOCALIZAÇÃO DE FACILIDADES

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Produção.

JOAB SYMON COSTA SANTOS

Belo Horizonte

27 de junho de 2016



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

FOLHA DE APROVAÇÃO

Uma comparação computacional dos algoritmos de Benders e o Dual-Ascent no Problema multi-período de Localização de Facilidades

JOAB SYMON COSTA SANTOS

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Ph. D. RICARDO SARAIVA DE CAMARGO – Orientador
Universidade Federal de Minas Gerais

Ph. D. ALEXANDRE XAVIER MARTINS
Universidade Federal de Ouro Preto

Ph. D. ELISANGELA MARTINS DE SÁ
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Ph. D. BRUNO NONATO GOMES
Instituto Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte, 27 de junho de 2016

Resumo

O estudo em localização de facilidades é um fator de extrema importância para a vantagem competitiva de muitas empresas que trabalham com transporte de bens de consumo e serviços em uma rede de demanda. Definir as melhores localizações para as facilidades visando custo mínimo é fator primordial para uma maior eficiência na utilização dos recursos. Ao considerar um horizonte de longo prazo, a localização das facilidades pode mudar devido a alterações nas demandas dos clientes. Assim, nesse trabalho é apresentado um modelo de Localização de Facilidades Multi Período, em que é realizado um balanceamento entre as melhores localizações, considerando diferentes períodos de tempo, de acordo com os custos de implantação, realocação e fechamento das possíveis facilidades determinadas. O estudo compreende a implementação do método de decomposição de Benders com abordagens de cortes pareto-ótimos e melhoramento através de combinação convexa, e método *Dual-Ascent* para um modelo adaptado de localização de facilidades multi-período. Os experimentos computacionais foram realizados com dados dos municípios do Estado de Minas Gerais para simular a definição dos melhores locais para se instalar uma rede de centros de distribuição considerando a variação da mancha populacional. Os algoritmos de Benders simples e Cortes Pareto-ótimos não alcançaram resultados satisfatórios para instâncias maiores, enquanto o melhoramento pela combinação convexa foi dominante na maioria das instâncias testadas. O algoritmo *Dual-Ascent* foi o mais eficiente, solucionando as instâncias em menor tempo computacional. Concluiu-se que a variação da mancha populacional para um exemplo de multi-período em localização de facilidades pode se tornar mais interessante quando existe uma variação maior na demanda dentro dos períodos.

Palavras-chaves: Localização de Facilidades Multi Período; Benders; Dual-Ascent.

Abstract

The study of facility location is a very important factor for competitive edge of many companies working with shipping goods consumption and services on a demand network. To define of the best locations for facilities aimed at minimal cost is an essential factor for greater and science in use of resources. When considering a long-term horizon, the location of facilities may change due to changes in customer demands. Thus, this work presents a model Location Multi Period facilities where is an accomplished balance between the best locations, considering different time periods, according to implementation costs and closing reallocation possible certain facilities. The study comprises the implementation of Benders decomposition method approaches pareto-optimal cuts and improvement through convex combination, and Dual-Ascent method for a model adapted for multi-location facilities period. The computational experiments were conducted with data from municipalities in the state of Minas Gerais to simulate the definition of the best places to install a network of distribution centers considering the variation of the population spot. The Benders simple algorithms and Pareto-optimal Cortes did not achieve satisfactory results for larger instances, while improving the convex combination was dominant in most the tested instances. Dual Ascent algorithm was the most aware and, solving instances in less computational time. It was concluded that the variation of the spot populacinal for sample period multi-location facilities can become more interesting when there is a greater variation in demand within the periods.

Keywords: Facility Location Multi Period; Benders; Dual-Ascent.

Dedico o presente trabalho:
Primeiramente a Deus, pela vida e pela graça de me trazer até aqui;
Aos meus pais Delcimir Ferreira dos Santos e Alzemar Mendes Costa Santos e irmãos
Joanne Sâmela e João Gabriel, pela força dada a cada momento difícil;
A minha companheira Karoline Michelle pela presença em minha vida desde a
graduação;

“Se o dinheiro for a sua esperança de independência, você jamais a terá. A única segurança verdadeira consiste numa reserva de sabedoria, de experiência e de competência.” (Henry Ford)

Ame a Deus, ame a Cristo, ame a sua vida, mas nunca ame ao dinheiro, pois ele não lhe terá serventia para o que não se pode pagar.

Agradecimentos

Agradecer significa reconhecer que, assim como não estamos sozinhos nos fracassos, nossas vitórias são o resultado de pessoas que estão ao nosso lado na luta pelos nossos sonhos.

Agradeço a Deus pela vida, pelo favor imeresido, pela oportunidade, dentre as inúmeras, de alcaçar mais um título de conhecimento, e subir mais um degrau nessa jornada que chamamos de vida.

Agradeço aos meus pais pela paciência em entender que eu queria fazer engenharia e não direito. Pelo apoio dado a cada momento na realização dos meus objetivos.

Não posso deixar de creditar aos meus professores (hoje colegas de profissão) Pedro Cândido, Pablo Perón e Ramon Alves pela insistência em dizer que eu deveria fazer um mestrado. Sem esquecer a ajuda no processo seletivo que, hoje, se consolida como um título acadêmico.

Agradeço ao meu orientador Ricardo Saraiva pela paciência em lidar com um orientando ainda novo na área de otimização de grande porte, mas que hoje pega gosto pelo assunto.

E para não me esquecer de ninguém, quero deixar meus agradecimentos a todos que participaram dessa minha jornada, que não começou no primeiro dia de aula do mestrado, mas sim no primeiro dia de aula da minha vida, quando percebi de verdade a importância do conhecimento. Obrigado.

Sumário

Nomenclatura	2
1 Introdução	3
2 Exame de literatura	7
2.1 Problema de Localização de Facilidades – FLP	7
2.2 Problema Dinâmico de Localização de Facilidades – DFLP	11
2.2.1 Problema dinâmico de Localização de concentradores não capa- citado – DUHLP	13
2.2.2 Problema de <i>p-median</i> progressivo aplicado ao DFLP	15
2.2.3 Abordagem em análise de decisão para o DFLP quando o número de facilidades é incerto	15
2.2.4 Estudo de caso em DFLP para localização de Centros de Distri- buição	18
2.2.5 Procedimento de <i>Dual-Based</i> para o DUFLP	19
2.3 Problema de Localização de Facilidades Multi-período	21
2.4 Método de Decomposição de Benders (BDM)	23
2.4.1 Método de Cortes Pareto-ótimos ao BDM	25
2.4.2 Método prático melhorado para Cortes Pareto-ótimos	26
2.5 Método de <i>Dual-Ascent</i> para o DFLP	28
3 Métodos matemáticos aplicados ao Problema de Localização de Fa- cilidades Multi-período	34
3.1 Modelo utilizado para o problema de FLPMP	34
3.2 Método de Decomposição de Benders ao FLPMP	38
3.2.1 Cortes Pareto-ótimo em BDM para o FLPMP	40
3.2.2 Método melhorado de cortes pareto-ótimos em BDM para o FLPMP	42
3.3 Algoritmo <i>Dual-Ascent</i> para o FLPMP	42
3.4 Simulação de um problema de localização multi-período para centros de distribuição com base no Estado de MG-BR	44

4	Resultados computacionais	47
4.1	Comparação computacional dos testes preliminares	48
4.2	Resultados computacionais para a simulação oficial	57
5	Conclusão	60
	Referências Bibliográficas	62

Lista de Figuras

2.1	Exemplo: processo de escolha da facilidade	8
2.2	Exemplo de atuação de facilidades em uma rede de clientes	9
2.3	Visualização de terminais de transbordo em uma definição de HLP (Farahan e Hekmatfar, 2009)	10
2.4	Resultado do <i>p</i> -median progressivo para um problema com 100 nós e cinco períodos, sendo acrescentada uma facilidade em cada período	16
3.1	Visualização gráfica das posições dos clientes e facilidades candidatas	46
4.1	Comparação da quantidade de iterações	49
4.2	Comparação da variação média do GAP por iteração	51
4.3	Comparação da variação média do GAP por segundo	51
4.4	Resultados de BDM simples para as instâncias de 1 a 10.	52
4.5	Resultados de BDM via cortes P–O para as instâncias de 1 a 10.	53
4.6	Resultados de BDM AP para as instâncias de 1 a 10.	53
4.7	Resultados de BDM AP para as instâncias de 1 a 10.	54
4.8	Resultados de BDM AP para as instâncias de 1 a 10.	55
4.9	Resultado gráfico para a simulação oficial	58

Lista de Tabelas

4.1	Instâncias utilizadas para testes preliminares	48
4.2	Resultados básicos dos métodos de Benders para as instâncias de 1 a 10. . .	49
4.3	Resultados computacionais para o Algoritmo <i>Dual-Ascent</i>	55
4.4	Comparação dos resultados computacionais dos algoritmos	56
4.5	Resultados computacionais do Algoritmo <i>Dual-Ascent</i> para a simulação oficial	57

Lista de Algoritmos

1	Método de Decomposição de Benders	25
2	Método de Decomposição de Benders com cortes Pareto-ótimos	27
3	Método de Decomposição de Benders na aboragem de Papadakos	29
4	Método de <i>Dual-Ascent</i> para o FLP	32
5	Método de <i>Dual-Ascent</i> para o DFLP	33
6	Método de decomposição de Benders aplicado ao FLPMP	40
7	Cortes Pareto-ótimo ao algoritmo de Benders no FLPMP	41
8	Abordagem de Papadakos aplicado a Benders no FLPMP	43
9	Método de <i>Dual-Ascent</i> para o FLPMP	44

Nomenclatura

BB Branch-and-Bound

BDM Benders Decomposition Method

BDSP Benders Dual Sub-Problem

BMP Benders Master Problem

DC Distribution Center

DFLP Dynamic Facility Location Problem

DSPMW Dual Sub-Problem of Magananti-Wong

DUHLP Dynamic Uncapacitated Hub Location Problem

FLP Facility Location Problem

FLPMP Facility Location Problem Multi-Period

GAP Diferença em percentagem do UB para o LB

IBGE Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

LB Lower Bound

MA Myopic Algorithm

UB Upper Bound

Capítulo 1

Introdução

“Aqueles que se sentem satisfeitos sentam-se e nada fazem. Os insatisfeitos são os únicos benfeitores do mundo.”

Walter S. Landor

Os estudos em localização de facilidades compreendem entender os métodos apropriados para se definir quais das possíveis facilidades serão escolhidas em um processo de otimização. Tais facilidades podem ser definidas como centrais de carga e descarga, centros de distribuição comercial, aeroportos, postos de saúde, dentre outros. Entender a forma mais apropriada de definir as facilidades a serem utilizadas dentre as opções vigentes é a chave para otimizar sistemas logísticos, alcançando utilização mais eficiente dos recursos.

Segundo [Owen e Daskin \(1998\)](#), o estudo em teoria da localização começou em 1909 quando Alfred Weber analisou a posição de um armazém para minimizar a distância total entre a instalação e os consumidores. Pesquisar acerca da localização de facilidades, ou *Facility Location Problem* (FLP), tem sido uma área de pesquisa bem estabelecida na Pesquisa Operacional (PO). Trabalhos desenvolvidos por [Chen et al. \(2014\)](#), [Marín \(2011\)](#), [Farahan e Hekmatfar \(2009\)](#), [Contreras et al. \(2011\)](#), dentre outros, demonstram a diversidade dos estudos em FLP. A aplicabilidade desses modelos de localização sempre tem estado em discussão nos diversos artigos em PO ([Melo et al., 2009](#)).

O problema de FLP surge da necessidade de se determinar uma rede logística de facilidades (centros de distribuição, armazéns, concentradores etc) em que os clientes sejam atendidos com um custo mínimo de transporte e tais facilidades sejam alocadas com o mínimo de investimento. Para [Gülpinar et al. \(2013\)](#), em uma formulação básica, o FLP consiste em um conjunto de potenciais locais de instalação onde uma facilidade pode ser aberta em um conjunto de pontos de demanda. O objetivo é determinar que

subconjunto de instalações abrir buscando minimizar o custo total de atendimento dos clientes, além dos custos totais de abertura das facilidades.

Para um planejamento a longo prazo, a formulação de FLP para um único período não é suficiente para encontrar a solução ótima do problema em questão, pois a demanda dos nós cliente pode variar de maneira a realocar, fechar e abrir novas facilidades. Faz-se necessário, então, avaliar uma previsão de demanda futura.

A partir disso, surge o Problema Dinâmico de Localização de Facilidades (*Dynamic Facility Location Problem* – DFLP). Esse problema se difere do FLP estático (apresentado acima) devido a existência de parâmetros que alteram as condições de escolha das facilidades. Assim, de acordo com a evolução dos dados do problema, facilidades podem ser abertas e/ou fechadas dependendo do novo contexto.

Autores como [Wesolowsky e Truscott \(1975\)](#), [Contreras et al. \(2011\)](#), [Drezner \(1995\)](#) e [Segura et al. \(2014\)](#) abordam a utilização de diferentes modelos de DFLP para encontrar uma solução viável em diferentes contextos, além dos métodos matemáticos mais eficientes para solucionar os modelos de acordo com suas instâncias. Tais estudos são a base para novas implementações de algoritmos conhecidos no universo da PO.

[Wesolowsky e Truscott \(1975\)](#) apresentam o modelo multi-período de localização de facilidades (*Multi Period Facility Location Problem* – MPFLP), em que se constitui de uma formulação de FLP para diferentes períodos de tempo variando na demanda dos clientes. Esse caso se assemelha aos demais modelos de DFLP por determinar uma variação dos cenários de demanda para cada período.

As instâncias de muitos casos baseados em DFLP fazem surgir a necessidade de se utilizar de métodos matemáticos para uma resolução viável do problema dentro de um tempo e capacidade de processamento aceitáveis. Um dos métodos mais conhecidos em estudos de otimização, e muito aplicável a problemas de localização de facilidades, é o Método de Decomposição de Benders (*Benders Decomposition Method*–BDM) ([Benders, 1962](#)). Dentro da perspectiva desse método, alguns autores como [Papadakos \(2008\)](#) e [Magnanti et al. \(1986\)](#) desenvolveram algumas melhorias para utilização do BDM.

[Van Roy e Erlenkotter \(1982\)](#) contribuem para a implementação de métodos matemáticos ao DFLP com seu estudo do procedimento de *Dual-Based* para um problema dinâmico de localização de facilidades. Tal procedimento é destacado pelo uso do algoritmo *Dual-Ascent*.

Com isso, a comparação computacional de diferentes algoritmos implementados em problemas do tipo DFLP se torna o centro desse trabalho. Parte-se da problemática de: como os parâmetros computacionais (tempo e quantidade de iterações, dentre outros) da resolução via algoritmos de Benders e *Dual-Ascent* se comportam entre um algoritmo e outro implementados em um problema de localização de facilidades

multi-período para diferentes instâncias.

A partir de tais pressupostos, o presente trabalho de dissertação tem por objetivo realizar uma comparação computacional dos parâmetros de resolução do Método de Decomposição de [Benders \(1962\)](#) (BDM) com as melhorias propostas por [Magnanti et al. \(1986\)](#) e [Papadakos \(2008\)](#), e o Método de *Dual-Ascent Procedure* para DFLP proposto por [Van Roy e Erlenkotter \(1982\)](#), utilizando o modelo de localização de facilidades Multi-período de [Wesolowsky e Truscott \(1975\)](#). Os dados referentes aos custos e a demanda são baseados em uma simulação de planejamento de instalação de uma rede de centros de distribuição no Estado de Minas Gerais, para uma previsão de variação de demanda baseada na mancha populacional de estudos do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Essa formulação pode ser caracterizada como um problema de localização de facilidades Multi-Período.

Como as atividades do ambiente que cerca as empresas estão cada vez mais complexas e globalizadas, a gestão da rede internacional integrada tornou-se uma tarefa cada vez mais importante para os gestores ([Chen et al., 2014](#)). Sendo assim, o planejamento a longo prazo, analisando as variáveis que integram essa complexidade de se determinar os fatores críticos, é fundamental para uma gestão mais eficiente dos recursos. O DFLP se torna então uma ferramenta para ponderar um processo de otimização encontrando o *trade-off* no plano de instalação de um conjunto de facilidades.

Além disso, o fator estratégico das empresas, de um modo geral, leva seus gestores a trabalhar com planejamentos de longo prazo para o atendimento de seus clientes, o que resulta na utilização de modelos que abrangem uma série de períodos analisados sob uma perspectiva de previsão de demanda. Como as variáveis populacionais se alteram, mercados tendem a seguir o mesmo caminho, quando as variáveis ambientais mudam, é preciso realocar, expandir e adaptar as facilidades para novos planejamentos ([Owen e Daskin, 1998](#)). Com isso, o trabalho proposto se torna um modelo prático de definição de centros de distribuição em um planejamento multi-período.

Para a comunidade acadêmica, a implementação dos métodos propostos baseados em uma literatura amplamente conhecida e utilizados em outros problemas consiste em um somatório de conhecimentos em como implementar o BDM e suas diferentes abordagens, além de uma demonstração de utilização do método de *Dual-Ascent*.

A pesquisa está dividida da seguinte maneira:

- **Capítulo 2:** Exame de Literatura, onde é apresentada uma revisão bibliográfica acerca dos casos simples e dinâmicos de localização de facilidades, e os métodos matemáticos propostos para o estudo de caso;
- **Capítulo 3:** Métodos matemáticos aplicados ao MPFLP, onde é descrito o problema de Localização de Facilidade Multi-período, implementado através do

BDM com cortes pareto-ótimos e combinação convexa, além do método de *Dual-Ascent*, contanto com toda a estrutura de dados utilizados baseados nos municípios do Estado de Minas Gerais;

- Capítulo 4: Resultados Computacionais, demonstra as análises feitas através da implementação dos métodos matemáticos ao problema proposto;
- Capítulo 5: Conclusão, relata a opinião do autor acerca do trabalho como um todo;
- Referências bibliográficas.

Capítulo 2

Exame de literatura

“A persistência é o menor caminho do êxito”

Charles Chaplin

Neste capítulo, serão abordados o FLP e o DFLP de modo geral, demonstrando algumas das aplicações e variações dos métodos de problemas dinâmicos de localização de facilidades, servindo de base teórica para o trabalho realizado.

2.1 Problema de Localização de Facilidades – FLP

Para entender a definição de um problema de localização de facilidades, é necessário partir da ideia de que se trata de uma rede de nós que devem ser, de alguma maneira, atendidos e/ou interligados por arestas. Tais nós são denominados como clientes (Figura 2.1(a)). Dessa forma, esse atendimento pode ser facilitado quando se define um ou mais nós como sendo aqueles que distribuem o atendimento a uma parte dos clientes, ou a rede toda se necessário. Esses nós são denominados de facilidades. Problemas desse tipo são comumente utilizados na alocação de centros de distribuição, armazéns, terminais de transporte, dentre outros.

Como deve-se escolher uma ou mais facilidades dentro do conjunto de nós, determina-se então dois conjuntos distintos: facilidades candidatas e clientes. Dentro do conjunto de facilidades candidatas, estão os nós em que é permitida a instalação da(s) facilidade(s) necessária(s). O conjunto de clientes é composto pelos demais nós que deverão ser atendidos. A Figura 2.1(b) demonstra um conjunto de nós e sua divisão em nós de facilidades candidatas e nós clientes.

A Figura 2.1(c) demonstra que uma das facilidades foi escolhida, e logo em seguida ela faz o atendimento dos demais nós (Figura 2.1(d)).

Basicamente, o FLP consiste em: dado um conjunto de potenciais locais de instalação (facilidades candidatas), escolher onde uma ou mais facilidades devem ser abertas.

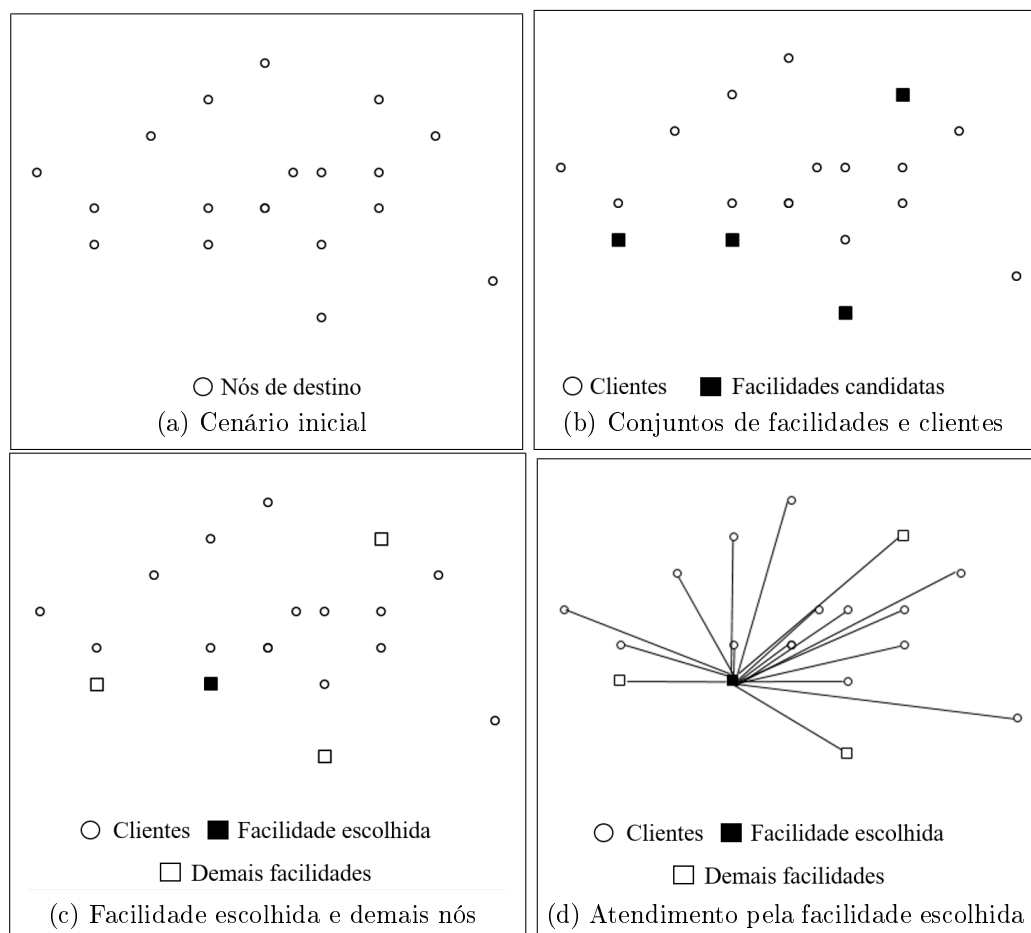


Figura 2.1: Exemplo: processo de escolha da facilidade

O objetivo é determinar qual subconjunto de instalações abrir minimizando o custo total de entrega de mercadorias para os clientes, além da soma dos custos totais de abertura das facilidades do subconjunto escolhido (Gülpinar et al., 2013). O FLP considera apenas esses parâmetros e variáveis básicas, pois o problema trata os dados apenas para um único período de tempo. A Figura 2.2 é o resultado de um problema de localização de facilidades simples em que foram instaladas três facilidades candidatas para o atendimento dos nós clientes.

A literatura que aborda a localização de facilidades pode ser amplamente classificada em duas áreas: avaliação de fatores e abordagens matemáticas. A avaliação de fatores muitas vezes tem um foco em questões estratégicas na tomada de decisão e pode ser generalizada em quatro etapas: (i) estabelecer os fatores críticos de sucesso do negócio; (ii) avaliar as opções para configurações regionais de manufatura; (iii) definir um número de locais potenciais; e (iv) classificar as soluções adequadas. Já as abordagens matemáticas são tipicamente formuladas como de minimização em problemas de custo, em que modelos matemáticos são utilizados nessas abordagens. Por esse motivo, a dimensão econômica da sustentabilidade tem historicamente dominado os problemas

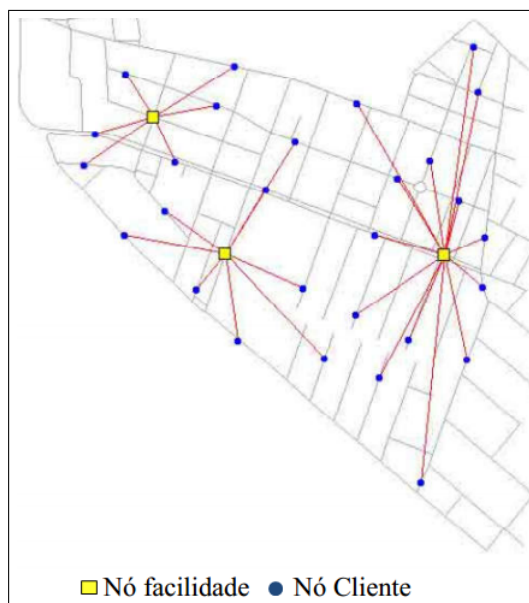


Figura 2.2: Exemplo de atuação de facilidades em uma rede de clientes

de localização (Chen et al., 2014).

No caso da presente pesquisa, o foco dado será na abordagem matemática, que trata de métodos de otimização utilizados para tratar problemas, em geral, de grande porte, fazendo uso de métodos matemáticos como relaxação Lagrangeana, decomposição de Benders, dentre outros.

O estudo em otimização com foco em FLP tem uma ampla área de atuação. Durante as últimas décadas, diferentes modelos que apresentam problemas de localização foram introduzidos na literatura. Entre as principais características abordadas nesses modelos, a equidade na distribuição dos custos e/ou distância da viagem em relação aos clientes, tem atraído considerável atenção (Marín, 2011).

Um dos problemas mais utilizados para tratar o FLP é o *p-median*. Segundo Owen e Daskin (1998), essa abordagem é baseada em encontrar a localização das p instalações, de modo a minimizar a distância total entre os nós de demanda e os nós de facilidades. Para Melo et al. (2009), em um problema discreto de localização de instalação, a seleção dos locais onde novas instalações são estabelecidas é restrito a um conjunto finito de locais candidatos disponíveis. A definição mais simples de tal problema é aquele em que as instalações de p facilidades devem ser selecionadas para minimizar o custo total de demanda ou as distâncias dos clientes.

Outra abordagem de FLP é denominado como *Competitive Location Problem*, que consiste da inserção de fatores competitivos ao problema. É um problema muito utilizado na criação de monopólios empresariais, em que as facilidades são instaladas de acordo com a melhor performance competitiva das atividades que elas desempenharão. Esse problema foi apresentado por Farahan e Hekmatfar (2009).

Um problema típico de localização de aeroportos e rodoviárias, é conceituado como localização de concentradores, termo em inglês denominado como “*Hubs*”, que é um tipo específico de facilidade. [Contreras et al. \(2011\)](#) conceitua o *Hub Location Problem*–HLP, como o centro de planejamentos de projetos em sistemas de transporte, com destaque às empresas aéreas e de veículos industriais.

A eficiência desses sistemas pode ser melhorada com a instalação de concentradores de transporte (*Hubs*). A instalação dos *Hubs* faz com que o fluxo entre os pares “origem-destino” passe por algum concentrador, determinando o caminho de fluxo entre as origens e destinos. A Figura 2.3 demonstra a atuação de terminais de transbordo em um problema de *Hub-Location*. Percebe-se que os nós A, F e K funcionam como ligações para os demais nós, fazendo com que todos os nós estejam ligados através desses *hubs*. Com isso, pode-se sair e chegar a qualquer par de nós através dos concentradores. Por exemplo: se um veículo pretende sair do nó G e chegar ao nó N, ele pode passar pelos concentradores F e K e assim chegar ao seu destino.

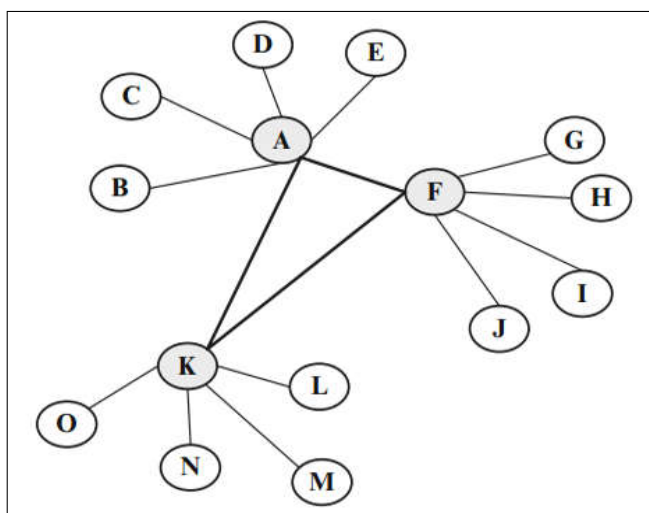


Figura 2.3: Visualização de terminais de transbordo em uma definição de HLP ([Farahan e Hekmatfar, 2009](#))

HLPs consistem em definir a localização dos *Hubs* em uma rede de nós de oferta/demanda com o objetivo de minimizar o custo total de fluxo, sujeito a um conjunto de restrições ([Contreras et al., 2011](#)).

Contudo, em algumas situações, os possíveis locais selecionados que assim minimizam a média das distâncias de transporte, podem não ser apropriadas. Por exemplo, os casos em que se quer localizar, em uma cidade, estações de serviço de emergência como Corpo de bombeiros ou ambulatórios. A natureza crítica da demanda pelo serviço irá ditar o máximo aceitável da distância de viagem ou tempo para atender a população. Esse é o típico problema de cobertura (*Covering Problem*). Nesses casos, o objetivo é

minimizar o custo da facilidade localizada tal que um nível especificado de cobertura seja obtido (Owen e Daskin, 1998).

Farahan e Hekmatfar (2009) apresentam outra abordagem do FLP denominada de Problema de Localização hierárquica, que consiste na localização múltipla de diferentes facilidades hierarquizadas. Tais facilidades são classificadas com um peso numérico, de acordo com seu nível de importância. Sua utilização segue em:

- Sistemas de saúde, integrados a hospitais, clínicas e centros médicos;
- Fábricas e Centros de Distribuição integrados ao problema;
- Sistemas de educação como: escolas, centros técnicos e faculdades.

Um outro FLP muito utilizado é o problema de centralização (P-Centro). Para Owen e Daskin (1998), o *P-Center Problem* trabalha para atingir uma cobertura em toda a demanda, mas é viável buscar um dado número de facilidades em que exista um caminho mínimo coberto pela distância entre os nós de demanda e as facilidades. Segundo Farahan e Hekmatfar (2009), esse problema pode ser aplicado para localização de serviços de emergência, postos militares, parques, hotéis, dentre outros. Outras abordagens do FLP podem ser pesquisados na obra de Farahan e Hekmatfar (2009).

As abordagens apresentadas seguem o modelo estático do FLP. Para a presente pesquisa, foi necessário abordar o modelo dinâmico do FLP, sendo denominado de *Dynamic Facility Location Problem*—DFLP. Essa abordagem é apresentada a seguir.

2.2 Problema Dinâmico de Localização de Facilidades – DFLP

O problema estático de localização trata da instalação de facilidades para um único período de tempo, utilizando os dados vigentes, ou de uma previsão para um período específico. Porém, isso pode interferir no fator competitivo ao não se tratar as variações ao longo do tempo.

A globalização das atividades econômicas em conjunto com a rápida evolução das tecnologias da informação levaram a ciclos de vida mais curtos tanto de produtos quanto de tamanhos de lotes, além de um comportamento mais dinâmico por parte dos clientes em termos de preferências. Esses aspectos têm contribuído para aumentar a incerteza da demanda e, como resultado, uma rede de cadeia de fornecedores robusta e bem projetada tornou-se ainda mais importante. Assim, os modelos de localização de facilidades mais sofisticados podem ser necessários para determinar a melhor configuração da cadeia de abastecimento (Melo et al., 2009).

Em geral, um projeto de rede começa com a identificação de locais potencialmente interessantes para novas instalações e suas capacidades necessárias. Normalmente, grandes quantidades de capital devem ser alocados para uma nova instalação, tornando esse investimento um projeto de longo prazo (Melo et al., 2009). Mudanças nas variáveis ocorrem naturalmente, seja pela alteração no perfil dos clientes, pelo ciclo de vida dos produtos, pela realocação de um mercado consumidor. Com isso, surge a necessidade de tratar essas variações nas abordagens de FLP, gerando assim o problema dinâmico de localização de facilidades (DFLP).

Em suma, o DFLP se baseia em determinar as melhores instalações de facilidades para um plano a longo prazo, quando determinadas variáveis tendem a mudar com o tempo.

Segundo Chen et al. (2014), o problema de localização de facilidades tem se caracterizado cada vez mais como um planejamento a longo prazo. Assim, a necessidade de tratar a variação dos parâmetros em FLPs se torna necessário para o melhor planejamento estratégico das empresas. Em geral, esse planejamento diz respeito à localização das facilidades, sendo uma questão estratégica relacionada à rede de produção.

Instalações tais como escolas, hospitais, fábricas, centros de distribuição e pontos de venda são frequentemente operados por décadas. Conseqüentemente, pode haver uma incerteza considerável para o manuseio seguro dos parâmetros relevantes na decisão de localização. Demanda (interface na quantidade e na localização) e custos (instalação, operação e fechamento de uma facilidade) são exemplos de parâmetros que se modificam ao longo do tempo (Sonmez e Lim, 2012).

A natureza estratégica do FLP requer que o modelo matemático considere, de maneira razoável, alguns aspectos de um futuro incerto para o problema. O período desde o investimento inicial até a alocação da facilidade é muito longo. Além disso, espera-se que as facilidades funcionem por um longo período de tempo, por essa razão, o FLP necessita de um planejamento a longo prazo (Owen e Daskin, 1998). O DFLP trabalha com esse tipo de planejamento para se ter uma apuração mais competitiva e correta do problema, envolvendo períodos com variações de parâmetros-chave da abordagem a ser tratada.

Problemas de localização de vários períodos têm sido propostos para abordar situações em que parâmetros mudam ao longo do tempo de uma forma previsível. Sendo assim, faz-se uma adaptação da configuração das facilidades para esses parâmetros. Um horizonte de planejamento dividido em vários períodos de tempo é geralmente considerado para esses casos (Melo et al., 2009).

Considerando uma região com clientes organizados em pontos de demanda, o fluxo transportado na rede muda com o tempo. As facilidades são planejadas para cada área de nós de clientes de acordo com a demanda vigente em cada nó. Planejar um determi-

nado horizonte de tempo é o mesmo que entender como as facilidades se movimentam de acordo com a variação de demanda (Drezner, 1995).

Um problema típico do DFLP é o *Dinamic p -median Problem* (DPMP), que é aplicado a todas as situações modeladas no padrão *p -median problem* sempre que a demanda muda com o tempo de acordo com períodos pré-determinados. Se constitui então como um problema de localização sucessiva de facilidades em cada conjunto de demandas para minimizar o custo total do sistema (Drezner, 1995). Algumas abordagens desse problema são exemplificados na seção 2.2.2.

Para melhor entender como são trabalhados os problemas de otimização do tipo DFLP e algumas de suas variações, realizou-se um estudo baseado em leitura e análise de alguns trabalhos acerca do DFLP de autores como Contreras et al. (2011), Drezner (1995), Current et al. (1997), dentre outros. As seções a seguir demonstram tais trabalhos.

2.2.1 Problema dinâmico de Localização de concentradores não capacitado – DUHLP

Contreras et al. (2011)

Contreras et al. (2011) fez uma introdução ao HLP não capacitado e dinâmico (*Dynamic Uncapacity Hub Location Problem* – DUHLP). Esse problema consiste em minimizar o custo total em cada período determinado para o planejamento a longo prazo com variação de demanda entre os períodos. A pesquisa focou no caso em que um padrão de atribuição múltipla sobre os fluxos é desejado. Isso significa que fluxos originados no mesmo nó, mas com pontos diferentes de destino, podem ser encaminhadas através de diferentes conjuntos de concentradores. Os custos incluem o funcionamento e fechamento das instalações e custos de transporte ao longo do tempo, utilizando os seguintes parâmetros:

H – conjunto de nós candidatos (*Hubs*) indexados como j ;

I – conjunto de clientes indexados como i ;

E – conjunto de caminhos (i, j) indexados como e ;

T – conjunto de períodos;

K^t – conjunto de *commodities* em cada período t ;

f_j^t – custo fixo de abertura do Hub j no período t ;

g_j^t – custo de operação do Hub j no período t ;

q_j^t – custo de fechamento do Hub j no período t ;

F_{ek}^t – custo de fluxo da *commoditie* k pelo arco (i, j) cliente/concentrador representado por e no período t ;

w_k^t – montante transportado da *commoditie* k no período t

As variáveis de decisão são expressas por:

x_{ek}^t – referente a utilização do caminho e do concentrador no período t para a *commoditie* k ;

z_j^t – referente ao funcionamento da facilidade no nó j para o período t .

A formulação do problema compreende as equações de (2.1) a (2.5).

$$\text{Min} \quad \sum_{j \in H} \sum_{t \in T} f_j^t (1 - z_j^{t-1}) z_j^t + \sum_{j \in H} \sum_{t \in T} g_j^t z_j^t - \sum_{j \in H} \sum_{t \in T} q_j^t (1 - z_j^t) z_j^{t-1} + \sum_{t \in T} \sum_{k \in K^t} \sum_{e \in E} F_{ek}^t x_{ek}^t \quad (2.1)$$

A função objetivo (2.1) inclui os custos de abertura, operação, fechamento e de fluxo de todos os concentradores e caminhos em que suas variáveis binárias forem ativadas.

s.a

$$\sum_{e \in E} x_{ek}^t = 1 \quad \forall t \in T, k \in K^t \quad (2.2)$$

A restrição (2.2) permite que apenas um caminho e seja estabelecido para cada *commoditie* k em cada período t .

$$\sum_{e \in E: j \in e} x_{ek}^t \leq z_j^t \quad \forall j \in H, t \in T, k \in K^t \quad (2.3)$$

Já (2.3) garante que o fluxo entre um cliente e um concentrador no período t só pode existir se o mesmo estiver ativo nesse período.

$$z_j^t \in \{0, 1\} \quad \forall j \in H, t \in T \quad (2.4)$$

$$x_{ek}^t \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, t \in T, k \in K^t \quad (2.5)$$

As restrições (2.4) e (2.5) apenas definem a natureza matemática das variáveis de decisão.

Foram feitos, de forma conjunta, testes computacionais com três diferentes métodos matemáticos para o modelo descrito, sendo eles: relaxação lagrangeana, testes de redução e algoritmo *branch-and-bound* (BB) exato. As instâncias utilizadas são denominadas pelo autor como *Australian Post*, que é um conjunto de dados utilizados em diferentes literaturas que abordam o DUHLP, utilizando 200 cidades australianas com distância euclidiana entre os nós.

Os resultados demonstraram que o BB aumenta a eficiência da relaxação lagrangeana ao acelerar a diminuição do custo. Os testes de redução diminuem consideravelmente a quantidade de variáveis do problema. Os resultados levam a conclusão de que o método proposto é eficiente para um total de 100 nós e 10 períodos.

2.2.2 Problema de *p-median* progressivo aplicado ao DFLP

Drezner (1995)

Drezner (1995) utilizou o Problema Dinâmico Progressivo (*Dynamic P-Median Problem*– DPMP) para definir onde seriam localizadas cada uma das facilidades adicionais em uma instância de 100 nós de demanda e 5 períodos, sendo adicionada uma facilidade em cada período e definido quais nós clientes seriam atendidos por cada facilidade adicionada, além das que já estariam instaladas através de uma formulação por distâncias euclidianas.

A Figura 2.4 representa o resultado encontrado da adição de uma facilidade em cada período para um problema com 100 nós e cinco períodos.

Percebe-se que o modelo definiu, para cada período, onde uma facilidade adicional deveria ser localizada para atender a demanda vigente.

O problema pode ser utilizado em todas as situações em que os modelos de *p-median* são usados para uma demanda que varia consideravelmente ao longo do tempo, e de uma forma previsível, o que pode ser evidenciado em problemas que envolvem crescimento populacional. Um sistema de instalações como hospitais, escolas, restaurantes, dentre outros, deve ser calculado adicionando-se novas unidades de forma sequenciada em períodos de tempo pré-definidos, o que se adequa ao problema proposto por Drezner (1995).

2.2.3 Abordagem em análise de decisão para o DFLP quando o número de facilidades é incerto

Current et al. (1997)

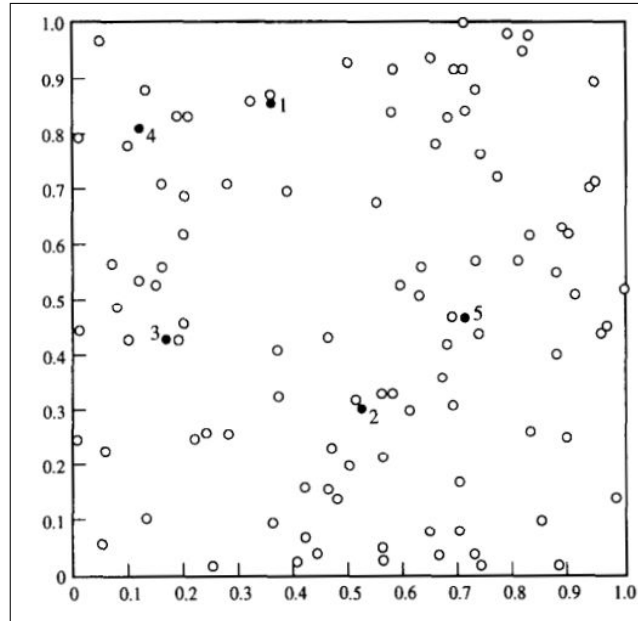


Figura 2.4: Resultado do p -median progressivo para um problema com 100 nós e cinco períodos, sendo acrescentada uma facilidade em cada período

Na pesquisa de [Current et al. \(1997\)](#), foram apresentados dois métodos para análise do DFLP em que o número total de facilidades é incerto. Para resolução, foi utilizado o modelo de DPMP para o DFLP de [ReVelle e Swain \(1970\)](#), que é padronizado como:

I – conjunto de clientes;

J – conjunto de facilidades candidatas;

a_i – custo de transporte associado ao nó i ;

d_{ij} – distância do nó i para a facilidade j ;

X_{ij} – variável binária para determinar se o nó cliente i está ou não conectado com a facilidade j ;

X_{jj} – variável binária para determinar se a facilidade j está ou não ativa;

p – quantidade de facilidades a serem instaladas.

O modelo matemático para o problema é descrito nas equações de (2.6) a (2.10).

$$\text{Min } Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i d_{ij} X_{ij} \quad (2.6)$$

A função objetivo (2.6) minimiza o custo total de instalação das facilidades e seu custo de fluxo para os clientes.

s.a

$$\sum_{j \in J} X_{jj} = 1, \quad (2.7)$$

A restrição (2.7) garante que, para cada cliente i , apenas uma facilidade j faça o atendimento de sua demanda.

$$\sum_{j \in J} X_{ij} = p \quad \forall i \in I, \quad (2.8)$$

A restrição (2.7) define que a quantidade de facilidades disponíveis a cada cliente seja o valor definido de facilidades.

$$X_{ij} \leq X_{jj} \quad \forall i \in I, j \in J, \quad (2.9)$$

A restrição (2.7) faz com que uma fluxo de cliente i para uma facilidade j seja criado somente quando a facilidade estiver em operação.

$$X_{ij}, X_{jj} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J \quad (2.10)$$

A restrição (2.7) define as variáveis de decisão como binárias.

O método utilizado foi a análise do problema através de dois critérios de decisão: (i) minimização da perda por oportunidade esperada (*Expected Opportunity Loss* – EOL), referente ao tempo em que se utiliza uma facilidade menos eficiente que outra, e a (ii) minimização da perda máxima por alocar erroneamente (*Maximum Regreat* – MR), que está relacionada a diferença de custo entre alocar erroneamente (custo máximo) e corretamente (custo mínimo).

A abordagem de MR geralmente assume que não é necessário ou não se pode determinar as probabilidades para os vários períodos. O critério EOL assume que se pode atribuir probabilidades para a ocorrência de vários estados de natureza e, com isso, encontrou-se o conjunto inicial de localizações de instalações que minimizam a soma das perdas esperadas em todos os períodos. Os critérios avaliados por MR encontraram o padrão de localizações de instalações iniciais cuja perda máxima é minimizada sobre todos os estados possíveis futuros (todos os demais períodos).

As conclusões do autor demonstram que essa abordagem se torna necessária apenas para casos menos complexos, com um número relativamente pequeno de instalações iniciais, e que heurísticas podem ser desenvolvidas com o objetivo de melhorar a performance do método.

2.2.4 Estudo de caso em DFLP para localização de Centros de Distribuição

Segura et al. (2014)

A pesquisa foi feita através de uma abordagem da decisão de localização com o propósito de exemplificar a seguinte hipótese: *a localização de centros de distribuição (facilidade) muda sempre que a demanda pelo produto em cada nó de cliente tem uma alta variabilidade e o custo de investimento para a localização de cada centro de distribuição (CD) é pequeno.*

Foi apresentado um estudo de caso real para trabalhar com tal hipótese. A companhia utilizada como exemplo teve sua identificação em sigilo. A empresa deseja otimizar sua rede de centros de distribuição. O problema está em identificar o projeto de redes de distribuição, que envolve a alocação de centros de distribuição e atendimento de seus nós de demanda. O modelo utilizado foi o *p-median problem* dinâmico (DPMP) baseado em Daskin (1995), idêntico ao modelo de ReVelle e Swain (1970) e que utiliza a seguinte nomenclatura:

h_i – demanda do nó i ;

d_{ij} – custo de transporte do nó i a facilidade candidata j ;

p – quantidade de facilidades para localizar;

X_j – variável binária para definir se a facilidade j está ativa ou não;

Y_{ij} – variável binária que define se o nó de demanda i é atendido pela facilidade j .

O problema matemático é demonstrado nas equações de (2.11) a (2.16).

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_i d_{ij} Y_{ij} + \sum_{j=1}^m f_j X_j \quad (2.11)$$

s.a

$$\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i, \quad (2.12)$$

$$\sum_j X_j = p, \quad (2.13)$$

$$Y_{ij} - X_j \leq 0 \quad \forall i, j, \quad (2.14)$$

$$X_j \in (0, 1) \quad \forall j, \quad (2.15)$$

$$Y_{ij} \in (0, 1) \quad \forall i, j \quad (2.16)$$

Apresentou-se o chamado Algoritmo míope (*Myopic Algorithm* – MA) no DPMP. O MA responde a interrogativa de qual nó procurado deve ser um CD. Esse algoritmo é utilizado para construir uma primeira solução que pode ser o local de um ou mais CDs. Apesar desse algoritmo não necessariamente apresentar soluções ótimas, ele é atraente devido a ser muito simples de entender e de implementar e, na prática, muitas decisões são feitas dessa maneira.

Os resultados demonstraram que há uma alta variabilidade na alocação dos centros de distribuição, confirmando a hipótese inicial do estudo. Isso ocorre devido aos baixos custos de alocação/relocação e a alta variabilidade na demanda ao longo do tempo. O algoritmo míope pode não ter encontrado a solução ótima, mas a comprovação da hipótese foi demonstrada com êxito.

2.2.5 Procedimento de *Dual-Based* para o DUFLP

Van Roy e Erlenkotter (1982)

Os autores [Van Roy e Erlenkotter \(1982\)](#) trabalharam com o Problema Dinâmico de Localização de Facilidades não capacitado (*Dynamic Uncapacited Facility Location Problem* – DUFLP) que, segundo os autores, tem o objetivo de minimizar o custo total de demanda em diferentes períodos de tempo para uma variedade de clientes localizados, analisando pelos custos de abertura, operação e fechamento de facilidades ao longo do tempo em várias possíveis localidades para produção e distribuição de bens a partir de instalações para os clientes.

A pesquisa utilizou os modelos matemáticos introduzidos por [Roodman e Schwarz \(1975\)](#). Foi apresentado um procedimento de resolução por BB incorporando um método de *Dual Based* que estende a abordagem desenvolvida por [Bilde e Krarup \(1977\)](#) e [Erlenkotter \(1978\)](#) para problemas estáticos não capacitados. Ou seja, utilizou-se de uma abordagem estática para aplicar em uma abordagem dinâmica.

O modelo matemático é composto pelos seguintes conjuntos, parâmetros e variáveis:

J – Conjunto de facilidades indexadas como j ;

I – Conjunto de clientes indexados como i ;

T – Conjunto de períodos indexados como t para os clientes e τ para as facilidades;

$c_{ij}^{t\tau}$ – Custo relativo ao fluxo do cliente i no período t para a facilidade j no período τ ;

$x_{ij}^{t\tau}$ – Fração da demanda do cliente i no período t para a facilidade j no período τ ;

z_j^τ – variável de decisão para a instalação da facilidade j no período τ ;

F_j^τ – Custo fixo de funcionamento da facilidade j no período τ para períodos futuros.

A formulação utilizada é descrita de (2.17) a (2.21).

$$\text{Min}_{x,z} \quad \sum_t \sum_i \sum_j \sum_\tau c_{ij}^{t\tau} x_{ij}^{t\tau} \quad + \quad \sum_\tau \sum_j F_j^\tau z_j^\tau \quad (2.17)$$

s.a

$$\sum_j \sum_\tau x_{ij}^{t\tau} = 1 \quad \forall i, t, \quad (2.18)$$

$$x_{ij}^{t\tau} \leq z_j^\tau \quad \forall i, j, t, \tau, \quad (2.19)$$

$$x_{ij}^{t\tau} \geq 0 \quad \forall i, j, t, \tau, \quad (2.20)$$

$$z_j^\tau \in \{0, 1\} \quad \forall j, \tau, \quad (2.21)$$

A formulação de [Van Roy e Erlenkotter \(1982\)](#) utiliza apenas o custo fixo de funcionamento da facilidade j no período t . Sua função objetivo descrita em (2.17) inclui os custos relacionados ao fluxo e às facilidades. As restrições (2.18) e (2.19) garantem, para cada período, o fluxo de demanda de um cliente i para apenas uma facilidade j , sendo que esta deve estar obrigatoriamente aberta no período vigente. O problema constitui de variável contínua (restrição 2.20) para o fluxo de demanda, e binária para designação da facilidade j a ser aberta (restrição 2.21).

A comparação dos testes demonstrou que o método de *Dual – Based* é computacionalmente mais eficiente que os propostos por [Roodman e Schwarz \(1975\)](#), com instâncias em torno de 25 facilidades candidatas, 50 nós de demanda e 10 períodos, solucionando dentro de 1 segundo em um computador IBM 3033. O autor ainda afirma que extensões do DUFLP como *price-sensitive demands*, *linearized concave costs*, *interdependent projects* e *multiple stages* podem ser solucionados pelo método de *Dual Ascent*. Tal método pode servir como um componente ao processo de solução do problema dinâmico de localização de facilidades capacitado (*Dynamic Capacitated Facility Location Problem–DCFLP*).

A complexidade computacional da maioria dos problemas de localização de facilidades tem inspirado uma série de procedimentos heurísticos para determinar as soluções de "quase ideais" dos problemas (Owen e Daskin, 1998). Os próximos tópicos abordam os métodos matemáticos utilizados no capítulo 3 para melhorar a eficiência dos processos de otimização com foco em DFLP.

2.3 Problema de Localização de Facilidades Multi-período

Wesolowsky e Truscott (1975)

Os autores Wesolowsky e Truscott (1975) propõem a resolução do Problema de Localização de Facilidades Multi-Período (*Multi-Period Facility Location Problem—MPFLP*) com realocação de facilidades, através da técnica de programação dinâmica. No trabalho feito pelos autores, foi feita uma abordagem com uma formulação que abrange períodos e estágios ótimos em cada período analisado. Para formulação do problema, são apresentados os parâmetros e variáveis:

N – número de clientes;

M – número de facilidades candidatas;

G – número de facilidades necessárias para instalação;

K – Quantidade de períodos;

A_{jik} – Custo fixo para conectar o nó cliente i a facilidade j no período k ;

c'_{jk} – Custo fixo para remover a facilidade j no período k ;

c''_{jk} – Custo fixo para manter a facilidade j ativa no período k ;

m_k – Máximo de facilidades que podem ser alteradas em cada período k ;

x_{ijk} – variável de decisão para conectar o cliente i a facilidade j no período k ;

y'_{jk} – variável de decisão para fechamento de uma facilidade j no período k ;

y''_{jk} – variável de decisão para funcionamento de uma facilidade j no período k .

O modelo matemático segue de (2.22) a (2.30).

$$\text{Min} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M A_{jik} x_{jik} + \sum_{k=2}^k \sum_{j=1}^M (c'_{jk} y'_{jk} + c''_{jk} y''_{jk}) \quad (2.22)$$

A função (2.22) compreende os custos de conexão de facilidades j a clientes i a partir da designação de sua variável binária x_{jik} somados aos custos de operação e fechamento de facilidades desde que suas respectivas variáveis binárias y''_{jk} e y'_{jk} estejam ativas. Esse somatório gera a função objetivo do problema, que procura minimizar esse custo total em todos os K períodos.

s.a

$$\sum_{j=1}^M x_{jik} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, K, \quad (2.23)$$

A restrição (2.23) determina que, em cada período k , cada cliente i só poderá ser atendido por uma facilidade j .

$$\sum_{i=1}^N x_{jik} \leq N x_{jik} \quad \forall j = 1, \dots, M; k = 1, \dots, K, \quad (2.24)$$

A restrição (2.24) garante a quantidade de clientes i ligados a uma facilidade j seja de no máximo a quantidade de clientes disponíveis. Percebe-se que essa restrição pouco agrega ao problema, pois é natural que as demais restrições devam manter o problema sempre com o máximo de clientes.

$$\sum_{j=1}^M x_{jik} = G \quad \forall k = 1, \dots, K, \quad (2.25)$$

A restrição (2.25) garante que a quantidade de facilidades escolhidas seja conforme o determinado.

$$\sum_{j=1}^M y'_{jk} \leq m_k \quad \forall k = 2, \dots, K, \quad (2.26)$$

Como existe um máximo de alterações m_k de facilidades em cada período k , a restrição (2.26) serve para garantir esse quesito.

$$x_{jjk} - x_{jjk-1} + y'_{jk} - y''_{jk} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, M; k = 2, \dots, K, \quad (2.27)$$

A restrição (2.27) é o resultado das possíveis combinações que podem ser feitas entre as variáveis. Ela faz com que uma facilidade seja fechada apenas quando ela já tenha sido aberta, e que uma conexão de clientes só pode ser feita quando a facilidade j estiver ativa.

$$x_{jik} = \begin{cases} 1 & \text{Se o nó } i \text{ está conectado a um nó } j \text{ no período } k \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (2.28)$$

$$y'_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{Se a facilidade foi removida do local } j \text{ no período } k \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (2.29)$$

$$y''_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{Se a facilidade } j \text{ está ativa no período } k \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (2.30)$$

Através do modelo de (2.22) a (2.30), foi feito um processo de programação dinâmica. Essa técnica é viável para problemas desse tipo, que são delimitados por parâmetros como G , M e m_k . Concluiu-se que a técnica de programação dinâmica aplicada ao problema foi usual no sentido de aumentar a eficiência na busca da solução ótima, especialmente para problemas que tem um grande número de períodos.

2.4 Método de Decomposição de Benders (BDM)

[Benders \(1962\)](#) e [Magnanti et al. \(1986\)](#)

O BDM foi introduzindo por J. F. Benders em 1962. Esse método matemático parte do princípio de que, ao tentar resolver um problema de grande porte em localização de facilidades, o processo de otimização pode demandar um alto índice de tempo e esforço computacional. Sendo assim, ao invés de se resolver o problema de FLP em sua modelagem padrão, Benders o divide em problemas menores nos quais podem ser solucionados de forma mais eficiente, ou seja, demandando um tempo computacional menor e maiores variações na diminuição do custo total.

O trabalho proposto por [Benders \(1962\)](#) inicia com uma formulação padrão de um problema de localização de facilidades, como é descrito de (2.31) a (2.34).

$$\min \quad c^T x + c(y) \quad (2.31)$$

s.a

$$Ax + y = b, \quad (2.32)$$

$$x \geq 0, \quad (2.33)$$

$$y \in Y \quad (2.34)$$

Pode-se ajustar a equação (2.32) para (2.35) tratando a variável y como uma aproximação do ponto ótimo.

$$Ax = b - \bar{y} \quad (2.35)$$

Tal variável y é considerada como uma variável complicante, por fazer o problema conter um número maior de restrições, o que ocasiona um atraso na resolução do mesmo. Como o objetivo é decompor o modelo e resolvê-lo em partes, Benders retira essa variável complicante, e a função objetivo (2.31) passa a ter o formato descrito em (2.36).

$$\min \quad z(x) = c^T x \quad (2.36)$$

Utilizando as funções (2.36), (2.35) e (2.33), gera-se um subproblema do FLP original. Tal subproblema é dualizado e chega-se no Sub-Problema Dual de Benders (*Benders Dual Sub-Problem*–BDSP) em (2.37) e (2.38).

$$\max \quad z(u) = (b - \bar{y})^T u, \quad (2.37)$$

s.a

$$A^T u \leq c \quad (2.38)$$

De acordo com Benders (1962), a função objetivo (2.37) será um limitante do ponto ótimo, funcionando assim como uma restrição do problema. Cria-se então uma nova variável para determinar esse limitante, e substitui $c^T x$ por essa nova variável z , gerando assim o Problema Mestre de Benders (*Benders Master Problem*–BMP) de (2.39) a (2.42).

$$\min \quad c(y) + z \quad (2.39)$$

s.a

$$z \geq (b - y)^T u \quad \forall u \in P, \quad (2.40)$$

$$0 \geq (b - y)^T u \quad \forall u \in R, \quad (2.41)$$

$$y \in Y \quad (2.42)$$

A restrição (2.41) garante a viabilidade do BMP, e os conjuntos P e R constituem os conjuntos de pontos extremos e raios extremos respectivamente.

Com o BMP e o BDSP, Benders (1962) apresenta o Algoritmo 1 para resolução do problema FLP de grande porte com base na decomposição apresentada.

Algoritmo 1: Método de Decomposição de Benders

PASSO 1: Inicie com $P = R \leftarrow \emptyset$, $UB \leftarrow \infty$. Declare ε com um valor numérico;

PASSO 2: Resolva o problema mestre (BMP – 2.39 a 2.42) relaxado. Se houver solução viável, vá para o **PASSO 3**. Se não, PARE.

PASSO 3: No sub-problema Dual (BDSP), faça: $\bar{y} \leftarrow y$. Resolva BDSP (2.37) a (2.38). Se BDSP é ilimitado, faça $R \leftarrow R \cup \{\bar{u}\}$, e retorne ao **PASSO 2**. Se não, vá para o **PASSO 4**.

PASSO 4: Faça:

$$P \leftarrow P \cup \{\bar{u}\}$$

$$LB \leftarrow c(\bar{y}) + \bar{z}$$

$$UB \leftarrow \min \{UB, c(\bar{y}) + z(\bar{u})\}$$

PASSO 5: Se $UB - LB > \varepsilon$, retorne ao **PASSO 2**, se não: FIM.

Os valores de UB e LB são o *Upper-Bound* e o *Lower-Bound* respectivamente. O "erro" corresponde ao valor especificado para o *gap* (Diferença entre UB e LB). Primeiramente, o algoritmo inicia com um valor nulo para os conjuntos de viabilidade e otimalidade, e um valor infinito para o *Upper Bound*, além do erro máximo para a diferença entre os dois subproblemas declarados.

Em seguida, o método de Benders resolve o problema mestre e atualiza a variável y para que o subproblema Dual seja resolvido. Com a função objetivo do problema mestre, é determinado o limite inferior (LB).

Os valores para o subproblema dual são limitados aos valores encontrados pelo problema mestre, fazendo com que ambos se aproximem com as iterações. O UB recebe sempre o menor valor do custo $c(\bar{y})$ e do limitante $z(\bar{u})$. Percebe-se que o algoritmo repete o procedimento até que UB e LB estejam satisfatoriamente próximos.

Alguns problemas de grande porte apresentam dificuldade de resolução mesmo com o BDM. Problemas de localização de facilidades com grande quantidade de nós de demanda necessitam de uma melhoria no BDM para que consigam gerar resultados em um tempo viável. O método de cortes Pareto-ótimos é uma delas.

2.4.1 Método de Cortes Pareto-ótimos ao BDM

Magnanti et al. (1986)

O método de Magnanti-Wong parte do princípio de que, tendo a seguinte inequação do problema mestre de Benders:

$$z \geq (b - y)^T . u \quad \forall u \in P, \quad (2.43)$$

Considera-se a inequação (2.43) como sendo um corte no poliedro do problema de FLP, e tal corte tem a função de aproximar o valor de z ao ponto ótimo.

Para um valor u_1 , o corte exemplificado por (2.43) não é dominado por um valor u_2 no mesmo corte, se e somente se:

$$(b - y)^T . u_1 \geq (b - y)^T . u_2 \quad \forall y \in Y, \quad (2.44)$$

Ou seja, u_2 não pode sobrepor u_1 no corte gerado, assumindo a condição de (2.44). Sendo assim, o ponto u_1 gera o **Corte Pareto-ótimo**.

Para encontrar esse corte, pode-se utilizar do BDSP com um valor central $y_o \in Y$ na função objetivo e uma restrição adicional que determina o corte pareto-ótimo como sendo $z(\bar{u})$. Com isso, cria-se o Sub-Problema Dual de Magnanti-Wong (DSPMW) com esse ponto central e o corte. O modelo de DSPMW segue de (2.45) a (2.47)

$$\max \quad (b - y_o)^T . u \quad (2.45)$$

s.a

$$z(\bar{u}) = (b - \bar{y})^T . u, \quad (2.46)$$

$$A^T . u \leq c \quad (2.47)$$

Por definição, *Um ponto de Magnanti-Wong é um ponto central y_o em que a solução ótima do Sub-problema dual de Magnanti-Wong gera um corte Pareto-ótimo u_o .*

Com esse corte adicional, o algoritmo de Benders terá o formato como descrito no Algoritmo 2.

Magnanti-Wong atualiza os valores de $z(\bar{u})$ para um ponto em que outros cortes não podem ser sobrepostos, ou seja, um corte mais próximo do valor ótimo.

2.4.2 Método prático melhorado para Cortes Pareto-ótimos

Papadakos (2008)

Partindo do método proposto por Magnanti-Wong (Magnanti et al., 1986), o princípio que rege o método de Papadakos é o de que: *se y_o é um ponto central de Magnanti*

Algoritmo 2: Método de Decomposição de Benders com cortes Pareto-ótimos

PASSO 1: Inicie com $P = R \leftarrow \emptyset$, $UB \leftarrow \infty$. Declare ε com um valor numérico;

PASSO 2: Resolva o problema mestre (BMP – 2.39 a 2.42) relaxado. Se houver solução viável, vá para o **PASSO 3**. Se não, PARE.

PASSO 3: No sub-problema Dual (BDSP), faça: $\bar{y} \leftarrow y$. Resolva BDSP (2.37) a (2.38). Se BDSP é ilimitado, faça $R \leftarrow R \cup \{\bar{u}\}$, e retorne ao **PASSO 2**. Se não, vá para o **PASSO 4**.

PASSO 4: No sub-problema Dual de Magnanti-Wong (DSPMW), encontre um ponto central y_o . Utilize y_o e $z(\bar{u})$ em DSPMW. Resolva DSPMW.

PASSO 5: Faça:

$$P \leftarrow P \cup \{\bar{u}\}$$

$$LB \leftarrow c(\bar{y}) + \bar{z}$$

$$UB \leftarrow \min \{UB, c(\bar{y}) + z(\bar{u})\}$$

PASSO 6: Se $UB - LB > \varepsilon$, retorne ao **PASSO 2**, se não: FIM.

e Wong, e $y \in Y$, então alguma combinação convexa de y_o e y também é um ponto de Magnanti e Wong. Para comprovar tal afirmação, o autor realiza o seguinte teste:

- Faça P_o ser o DSPMW;
- Faça $0 < \lambda < 1$ e P_+ ser o problema substituto de y_o para (2.48) em P_o ;

$$\lambda y_o + (1 - \lambda)y \tag{2.48}$$

- Faça u_o e u_+ serem as soluções ótimas de P_o e P_+ ;
- Se u_+ é uma solução ótima de P_o , então de acordo com o pressuposto por Magnanti et al. (1986), ele será pareto-ótimo;
- Se assumirmos o contrário, ou seja, que u_+ não é uma solução ótima de P_o , então:

$$\lambda(b - y_o)^T \cdot u_+ + (1 - \lambda)(b - y)^T \cdot u_+ = \tag{2.49}$$

$$= (b - [\lambda y_o + (1 - \lambda)y])^T u_+ \tag{2.50}$$

$$\geq (b - [\lambda y_o + (1 - \lambda)y])^T u_o = \tag{2.51}$$

$$= \lambda(b - y_o)^T u_o + (1 - \lambda)(b - y)^T u_o \tag{2.52}$$

$$> \lambda(b - y_o)^T u_+ + (1 - \lambda)(b - y)^T u_o \quad (2.53)$$

- Quando (2.51) assume que u_+ é o ótimo para P_+ e (2.53) assume que u_+ não é ótimo para P_o e $\lambda > 0$, resta apenas que:

$$(b - y)^T u_+ > (b - y)^T u_o \quad (2.54)$$

O que não pode ser verdade dado que u_o não é dominado por $y \in Y$.

Sendo assim, para o modelo de BDM, é adicionado o Sub-Problema Dual de Papadakos (DSPP), que contém a mesma abordagem de DSPMW adicionada a combinação convexa. O DSPP é descrito na formulação composta de (2.55) a (2.56).

$$\max (b - y_o)^T .u \quad (2.55)$$

s.a

$$A^T .u \leq c \quad (2.56)$$

Portanto, se $(b - Y) \supseteq Y$, $c \geq 0$, e existe um $x \geq 0$ em que $Ax = b$, então para todo $y \in Y$ e $0 \leq \lambda < 1$, λy é um ponto de Magnanti e Wong. A adição da concepção de Papadakos ao algoritmo de Benders resume-se a (2.57).

$$y_o = \lambda \cdot \bar{y} + (1 - \lambda)y_o \quad (2.57)$$

O algoritmo de BDM, então, passa a ter o formato descrito no Algoritmo 3 com o DSPP.

2.5 Método de *Dual-Ascent* para o DFLP

Van Roy e Erlenkotter (1982)

O método de *Dual-Ascent* para o problema dinâmico de localização de facilidades foi proposto por Van Roy e Erlenkotter (1982) no artigo que trata do método de *Dual-Based* para o DFLP, já apresentado anteriormente na seção 2.2.5.

Para melhor entender o funcionamento do *Dual-Ascent*, fez-se necessário compreender a sua aplicação no problema de localização de facilidades em sua forma simples (estático). Para isso, é apresentada nas equações de (2.58) a (2.62), uma formulação simples de FLP do estudo de Erlenkotter (1978). Seus conjuntos, parâmetros e variáveis são expressos por:

Algoritmo 3: Método de Decomposição de Benders na abordagem de Papadakos

PASSO 1: Inicie com $P = R \leftarrow \emptyset$, $UB \leftarrow \infty$ e $\lambda \leftarrow 0.5$. Declare ε com um valor numérico;

PASSO 2: No sub-problema de Papadakos (DSPP), encontre um ponto central y_o . Resolva DSPP e faça $P \leftarrow P \cup \{\bar{u}\}$;

PASSO 3: Resolva o problema mestre (BMP – 2.39 a 2.42) relaxado. Se houver solução viável, vá para o **PASSO 4**. Se não, PARE.

PASSO 4: No sub-problema Dual (BDSP), faça: $\bar{y} \leftarrow y$. Resolva BDSP (2.37) a (2.38) utilizando y_o e $z(\bar{u})$. Se BDSP é ilimitado, faça $R \leftarrow R \cup \{\bar{u}\}$, e retorne ao **PASSO 2**. Se não, vá para o **PASSO 5**.

PASSO 5: Faça:

$$LB \leftarrow c(\bar{y}) + \bar{z}$$

$$UB \leftarrow \min \{UB, c(\bar{y}) + z(\bar{u})\}$$

$$\bar{y}_{jt,o} \leftarrow \bar{y}_{jt} * \lambda + (1 - \lambda) * \bar{y}_{jt,o}$$

PASSO 6: Se $UB - LB > \varepsilon$, retorne ao **PASSO 2**, se não: FIM.

n : Quantidade de clientes;

m : Quantidade de facilidades candidatas;

I : Conjunto de clientes ($1 \dots n$);

J : Conjunto de facilidades candidatas ($1 \dots m$);

c_{ij} : Custo de fluxo do cliente i para a facilidade j ;

f_j : Custo fixo de instalação da facilidades j ;

x_{ij} : variável de criação de fluxo do cliente i para a facilidade j ;

y_j : variável binária de decisão para alocar a facilidade j .

Apresentando a formulação, tem-se:

$$\text{Min } z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} f_j y_j \quad (2.58)$$

s.a

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I, \quad (2.59)$$

$$y_j - x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, \quad (2.60)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, \quad (2.61)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J. \quad (2.62)$$

A princípio, o autor decidiu tratar a variável binária y_j relaxada. Fazendo o dual do problema, obtém-se as equações de (2.63) a (2.67).

$$\text{Max } z_D = \sum_{i \in I} v_i \quad (2.63)$$

s.a

$$\sum_{i \in I} w_{ij} \leq f_j \quad \forall j \in J, \quad (2.64)$$

$$v_i - w_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall i \in I, j \in J, \quad (2.65)$$

$$w_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, \quad (2.66)$$

$$v_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in I. \quad (2.67)$$

Para cada valor da variável dual v_j , defini-se também um valor viável para a variável w_{ij} através da restrição (2.65). Como a restrição (2.66) define a variável w_{ij} , pode-se fazer uma junção dessas duas restrições, encontrando a equação (2.68).

$$w_{ij} = \max \{0, v_i - c_{ij}\}. \quad (2.68)$$

A restrição (2.64) define o somatório para os valores da variável dual w_{ij} limitado ao valor do custo de instalação f_j . Trazendo essa restrição para (2.68) tem-se o que pode ser denominado de *Dual Condensado*, como é demonstrado em (2.69) e (2.70).

$$\text{Max } z_D = \sum_{i \in I} v_i \quad (2.69)$$

s.a

$$\sum_{i \in I} \max \{0, v_i - c_{ij}\} \leq f_j \quad \forall j \in J. \quad (2.70)$$

Para buscar as soluções ótimas do problema de programação linear através das soluções viáveis duais, utiliza-se das restrições de complementariedade de folga em

(2.71) e (2.72).

$$y_j^*[f_j - \sum_{i \in I} \max\{0, v_i^* - c_{ij}\}] = 0 \quad (2.71)$$

$$[y_j^* - x_{ij}^*] \max\{0, v_i^* - c_{ij}\} = 0 \quad (2.72)$$

Pode-se supor uma solução viável dual v_i^+ e um conjunto correspondente de facilidades J^+ em que $\sum_{i \in I} \max\{0, v_i^+ - c_{ij}\} = f_j$ para cada $j \in J^+$ e para cada $i | v_i^+ \geq c_{ij}$ para algum $j \in J^+$. Para cada nó cliente i , define-se uma facilidade $j^+(i)$ de custo mínimo c_i^+ em que $j^+(i) \in J^+$. Tal custo mínimo é definido em (2.73).

$$c_i^+ = c_{i, j^+(i)} = \min_{j \in J^+} c_{ij} \quad \forall i \in I \quad (2.73)$$

Pode-se concluir então que uma solução primal inteira y_j^+ e x_{ij}^+ que obedece as restrições de (2.59) a (2.62) e as complementariedades de folga (2.71) e (2.72) pode ser definida como em (2.74) e (2.75).

$$y_j^+ = \begin{cases} 1 & \text{Se } j \in J^+ \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (2.74)$$

$$x_{ij}^+ = \begin{cases} 1 & \text{Se } j = j^+(i), \quad \forall i \in I \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (2.75)$$

A violação da restrição (2.72) só ocorrerá no seguinte caso: para algum i em que mais algum $j \in J^+$ tem $c_{ij} < v_i$ desde que $y_j^+ = x_{ij}^+ = 1$ para o único menor valor de c_{ij} .

O método *Dual-Ascent* gera, através das propriedades descritas nessa seção, uma solução dual v_i^+ e um conjunto associado J^+ de facilidades. O processo inicia com uma solução viável dual v_i , e vai percorrendo os nós cliente i um a um, na tentativa de aumentar v_i para o próximo maior valor de c_{ij} . Essa abordagem gradual do aumento do valor de v_i é necessária para diminuir a probabilidade de violação da complementariedade de folga, inicialmente, distribuindo o número de $c_{ij} \leq v_i$ igualmente entre os nós-cliente i . Se alguma restrição (2.70) limita o aumento de v_i para o próximo maior c_{ij} , v_i então é aumentado para o nível máximo permitido pela restrição. Quando todos os v_i forem impedidos de novos aumentos, o procedimento finaliza.

Para facilitar a implementação computacional, reindexou-se c_{ij} para cada i em ordem crescente como sendo c_i^k em que $k = 1 \dots n+1$, e é incluso um custo infinito $c_i^{m+1} = +\infty$. Para obter uma solução viável dual inicial, define-se $v_i = c_i^1$ para cada $i \in I$. Com esses parâmetros e variáveis finalizados, pode-se então implementar o método através

do Algoritmo 4.

Algoritmo 4: Método de *Dual-Ascent* para o FLP

PASSO 1: Inicialize com alguma solução dual viável v_i em que $v_i \geq c_i^1$ para cada $i \in I$ e $s_j = f_j - \sum_{i \in I} \max\{0, v_i - c_{ij}\} \geq 0$ para cada $j \in J$. Para cada $i \in I$, faça:

$k(i) = \min\{k : v_i \leq c_i^k\}$. Se $v_i = c_i^{k(i)}$, aumente $k(i)$ em 1.

PASSO 2: Inicialize com $i = 1$ e $\delta = 0$;

PASSO 3: Se $i \notin I^+$, vá para o **PASSO 7**. Se não, continue;

PASSO 4: Faça $\Delta_i = \min_{j \in J} \{s_j : v_i - c_{ij} \geq 0\}$;

PASSO 5: Se $\Delta_i > c_i^{k(i)} - v_i$, faça:

$$\Delta_i = c_i^{k(i)} - v_i,$$

$$\delta = 1,$$

Aumente $k(i)$ em 1;

PASSO 6: Subtraia s_j de Δ_i para cada $j \in J$ em que $v_i - c_{ij} \geq 0$ e aumente v_i de Δ_i ;

PASSO 7: Se $i \neq n$, aumente i em 1 e retorne ao **PASSO 3**. Se não, continue;

PASSO 8: Se $\delta = 1$, retorne ao **PASSO 2**. Caso contrário, FIM.

O estudo de [Van Roy e Erlenkotter \(1982\)](#) apenas adaptou o Algoritmo 4 para o problema dinâmico de localização de facilidades. O modelo utilizado pelos autores nesse novo estudo já foi abordado na seção 2.2.5, onde descreve a formulação de (2.17) a (2.21), com m facilidades, n clientes e T períodos. Adaptou-se o problema para apenas um t , e não dois como havia no estudo original, o que muda apenas a nomenclatura, não alterando a estrutura de resolução do problema.

Adaptando o Algoritmo 4 ao problema dinâmico de localização de facilidades, gerou-se então o Algoritmo 5, com $\{c_i^{tk} | k = 1 \dots m + 1\}$ e $c_i^{t(m+1)} = +\infty$.

[Van Roy e Erlenkotter \(1982\)](#) ainda afirmam que, caso o *Dual-Ascent* não resulte em uma solução ótima inteira, pode ser utilizado outro procedimento denominado de *Dual Adjustment*. Se ainda não encontrar uma solução desejada, pode-se utilizar de um procedimento de *Branch-and-Bound*, finalizando o método de *Dual Based* proposto pelo autor.

O capítulo 3 (a seguir) trata do modelo dinâmico de localização de facilidades utilizado na comparação computacional do capítulo 4 com a implementação dos algoritmos estudados.

Algoritmo 5: Método de *Dual-Ascent* para o DFLP

PASSO 1: Inicialize com alguma solução dual viável v_i^t em que $v_i^t \geq c_i^{t1}$ para cada (i, t) e $s_j^t = F_j^t - \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \max\{0, v_i^t - c_{ij}^t\} \geq 0$ para todo (j, t) . Para cada (i, t) , faça:

$k(i, t) = \min\{k : v_i^t \leq c_i^{tk}\}$. Se $v_i^t = c_i^{tk(i,t)}$, aumente $k(i, t)$ em 1. Para cada $t \in T$, execute as operações do **PASSO 2** ao **PASSO 8**.

PASSO 2: Inicialize com $i = 1$, e $\delta = 0$;

PASSO 3: Se $(i, t) \notin I^+$, vá para o **PASSO 7**. Se não, continue;

PASSO 4: Faça $\Delta_i^t = \min_{(j,t)} \{s_j^t : v_i^t - c_{ij}^t \geq 0\}$;

PASSO 5: Se $\Delta_i^t > c_i^{tk(i,t)} - v_i^t$, faça:

$$\Delta_i^t = c_i^{tk(i,t)} - v_i^t,$$

$$\delta = 1,$$

Aumente $k(i, t)$ em 1;

PASSO 6: Subtraia s_j^t de Δ_i^t para cada $j \in J$ em que $v_i^t - c_{ij}^t \geq 0$ e aumente v_i^t de Δ_i^t ;

PASSO 7: Se $i \neq n$, aumente i em 1 e retorne ao **PASSO 3**. Se não, continue;

PASSO 8: Se $\delta = 1$, retorne ao **PASSO 2**. Caso contrário, FIM.

Capítulo 3

Métodos matemáticos aplicados ao Problema de Localização de Facilidades Multi-período

“A ciência nunca resolve um problema sem criar pelo menos outros dez.”

George Bernard Shaw

O estudo dos modelos e métodos matemáticos do problema dinâmico de localização de facilidades possibilitou entender de forma prática esse problema. Como o foco da pesquisa se dá no problema do tipo multi-período, faz-se necessário implementar os métodos de Benders e *Dual-Ascent* ao problema proposto.

Neste capítulo serão apresentados os métodos implementados para resolução do problema: de decomposição de Benders simples; Benders com cortes pareto-ótimo; Benders com estratégia proposta por Papadakos; por fim, o algoritmo *Dual-Ascent*.

Os dados utilizados são baseados nos municípios do Estado de Minas Gerais, com uma simulação para localização de centros de distribuição. O modelo utilizado é uma adaptação da formulação apresentada na seção 2.3. Tal formulação é apresentada no tópico abaixo.

3.1 Modelo utilizado para o problema de FLPMP

Para implementação dos métodos matemáticos, foram feitas algumas alterações no modelo de FLPMP de Wesolowsky e Truscott (1975). A formulação descrita de (2.22) a (2.30) foi adaptada para o modelo que segue de (3.1) a (3.12). Os conjuntos são expressos por:

I : Conjunto de nós clientes;

J : Conjuntos de nós das facilidades candidatas (Centros de Distribuição);

T : Conjunto de períodos;

Os parâmetros de demanda, custos referentes às facilidades e ao fluxo de transporte são:

a_j : Custo fixo de cada facilidade j ;

a_t^o : Aumento decimal para custo fixo de abertura da facilidade j no período t ;

a_t^c : Aumento decimal para custo fixo de fechamento da facilidade j no período t ;

a_t^f : Aumento decimal para custo fixo para manter em operação a facilidade j no período t ;

p_t : Aumento decimal de custo de transporte em cada período t ;

c_{ij} : Custo fixo de transporte do cliente i para a facilidade j ;

d_{it} : demanda do cliente i no período t .

As variáveis de decisão do modelo são:

x_{ijt} : variável de fluxo de transporte do cliente i para a facilidade j no período t ;

y_{jt}^o : variável binária para determinar a abertura da facilidade j no período t ;

y_{jt}^f : variável binária de operação da facilidade j no período t ;

y_{jt}^c : variável binária de fechamento da facilidade j no período t ;

y_{jt}^k Se a facilidade j permaneceu fechada no período t para $y_{j,t-1}^c = 1$.

Com os parâmetros e variáveis definidos, o modelo para a Localização de facilidades multi-período é descrito em (3.1)...(3.12).

$$\text{Min} \quad \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} a_t^o a_j y_{jt}^o + \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} a_t^f a_j y_{jt}^f + \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} a_t^c a_j y_{jt}^c + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} p_t c_{ij} x_{ijt} \quad (3.1)$$

A função objetivo (3.1) corresponde a mesma função objetivo do modelo de [We-solowsky e Truscott \(1975\)](#) descrita na equação (2.22) da seção 2.3. A diferença está no fato da função objetivo adaptada ser mais estratificada que a original, separando o custo de abertura em dois: abertura mais funcionamento. Essa adaptação foi baseada na formulação de DHLP em [Contreras et al. \(2011\)](#) demonstrada na na seção 2.2.1. Os quatro somatórios relacionados ao custo total do processo são:

- $\sum_{j \in J} \sum_{t \in T} a_t^o a_j y_{jt}^o$: custo total de abertura das facilidades, em que é multiplicado o custo fixo a_j de cada facilidade j com o correspondente decimal a_t^o no período t para todas as facilidades abertas em cada período de $y_{jt}^o = 1$. Por exemplo, para um custo fixo de $a_j = 1000um$ de uma facilidade j , o custo de abertura no período é de $a_t^o = 1.1$. Assim, a multiplicação dos dois parâmetros resultará no custo atualizado $a_t^o \cdot a_j$ para o período t ;
- $\sum_{j \in J} \sum_{t \in T} a_t^f a_j y_{jt}^f$: custo total de funcionamento das facilidades, em que é multiplicado o custo fixo a_j de cada facilidade j com o correspondente decimal a_t^f no período t para a facilidade que estiver em funcionamento em cada período de $y_{jt}^f = 1$. O cálculo segue o mesmo princípio do item anterior;
- $\sum_{j \in J} \sum_{t \in T} a_t^c a_j y_{jt}^c$: custo total de fechamento das facilidades, em que é multiplicado o custo fixo a_j da facilidade j com o correspondente decimal a_t^c no período t para a facilidade que for fechada em cada período de $y_{jt}^c = 1$;
- $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} p_t c_{ij} x_{ijt}$: custo total de fluxo x_{ijt} do cliente i para a facilidade j no período t . O custo c_{ij} é multiplicado pelo adicional decimal p_t em cada período t , o que altera o custo do fluxo em cada período.

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} x_{ijt} = d_{it} \quad \forall i \in I, t \in T, \quad (3.2)$$

A restrição (3.2) garante que toda a demanda d_{it} de cada cliente i no período t seja atendida pelo somatório total de fluxos x_{ijt} no período. Ela adapta as restrições originais (2.23) e (2.24) para uma variável contínua ao invés da forma binária do modelo original, e uma demanda de cada nó i é criada tanto para substituir o $N.x_{jjk}$ quanto para tornar o modelo mais usual para o estudo de caso.

$$x_{ijt} \leq d_{it} y_{jt}^f \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T, \quad (3.3)$$

A inequação (3.3) faz com que o fluxo x_{ijt} seja gerado se e somente se a facilidade j estiver em funcionamento. Caso contrário, $x_{ijt} = 0$.

$$y_{j,t-1}^k + y_{j,t-1}^f = y_{j,t}^k + y_{j,t}^f \quad \forall j \in J, t \in T : t > 0, \quad (3.4)$$

A inequação (3.4) é utilizada para garantir matematicamente que uma facilidade anteriormente fechada possa ser aberta (e vice-versa) sem desrespeitar a lógica da variável binária empregada no modelo.

$$y_{j1}^f \leq y_{j1}^o \quad \forall j \in J, \quad (3.5)$$

A restrição (3.5) faz com que uma facilidade j esteja em funcionamento no período $t = 1$ somente se ela foi aberta no mesmo período. Isso impede que uma facilidade esteja em funcionamento sem ter sido aberta.

$$y_{jt}^o \geq y_{j,t-1}^k + y_{jt}^f - 1 \quad \forall j \in J, t \in T : t > 1, \quad (3.6)$$

$$y_{jt}^c \geq y_{j,t-1}^f + y_{jt}^k - 1 \quad \forall j \in J, t \in T : t > 1, \quad (3.7)$$

As restrições (3.6) e (3.7) servem para impedir que uma facilidade j que não foi aberta no período t , também não esteja em funcionamento no mesmo período dado que estava fechada no período anterior ($t - 1$), e que uma facilidade que não foi fechada no período t não "permaneça" fechada no dado período já que estava em funcionamento no período ($t - 1$) anterior.

As restrições de (3.8) a (3.12) definem as variáveis do modelo.

$$x_{ijt} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T, \quad (3.8)$$

$$y_{jt}^o = \begin{cases} 1 & \text{Se a facilidade } j \text{ foi aberta no período } t \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T, \quad (3.9)$$

$$y_{jt}^f = \begin{cases} 1 & \text{Se a facilidade } j \text{ está em operação no período } t \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T, \quad (3.10)$$

$$y_{jt}^c = \begin{cases} 1 & \text{Se a facilidade } j \text{ foi fechada no período } t \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T, \quad (3.11)$$

$$y_{jt}^k = \begin{cases} 1 & \text{Se a facilidade } j \text{ permaneceu fechada no período } t \text{ para } y_{j,t-1}^c = 1 \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T, \quad (3.12)$$

As seções a seguir mostram a implementação dos métodos para o modelo acima.

3.2 Método de Decomposição de Benders ao FLPMP

Baseado no estudo acerca do BDM presente na seção 2.4, a formulação para o FLPMP apresentada na seção 3.1 nas formulações de (3.1) a (3.12) é decomposta em duas partes: Sub-Problema Dual de Benders (BDSP) e Problema Mestre de Benders (BMP).

Pada definição do BDSP, verificou-se que a variável complicante do problema é y_{jt}^f . A partir disso, o sub-problema de Benders deve retirar essa variável da função objetivo e de suas restrições, resultando no sub-problema primal descrito de (3.13) a (3.16).

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} p_t c_{ij} x_{ijt} \quad (3.13)$$

s.a

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} x_{ijt} = d_{it} \quad \forall i \in I, t \in T, \quad (3.14)$$

$$-x_{ijt} \geq -d_{it} y_{jt}^f \quad \forall i \in I, j \in /j, t \in T, \quad (3.15)$$

$$x_{ijt} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T, \quad (3.16)$$

A partir do Sub-Problema Primal, faz-se o dual para chegar ao BDSP, que é descrito de (3.17) e (3.20).

$$\text{Max} \quad \text{FO-BDSP} = \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} u_{it} d_{it} - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \bar{y}_{jt}^f v_{ijt} d_{it} \quad (3.17)$$

s.a

$$u_{it} - v_{ijt} \leq c_{ij} p_t \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T, \quad (3.18)$$

$$u_{it} \in R \quad \forall i \in I, t \in T, \quad (3.19)$$

$$v_{ijt} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T, \quad (3.20)$$

Onde:

u_{it} : variável dual relativa a x_{ijt} na restrição (3.14);

v_{it} : variável dual relativa a x_{ijt} na restrição (3.15);

\bar{y}_{jt}^f : parâmetro da variável y_{jt}^f na restrição (3.16)

A equação (3.17) é a função objetivo do BDSP, obtida pelo lado esquerdo das restrições (3.14) e (3.15) do Sub-problema primal em conjunto com as variáveis duais geradas. A restrição (3.18) foi gerada a partir do lado direito das restrições (3.14) e (3.15) com o sinal de desigualdade “ \leq ” obtido de “ \geq ” da variável primal x_{ijt} na restrição (3.16).

Com o BDSP finalizado, a próxima etapa é formular o BMP, que consiste da parte não complicante da função objetivo original (3.1) somando a variável “ η ” do conjunto de pontos extremos.

No caso do modelo utilizado para o problema, pode-se utilizar uma restrição de otimalidade mais simples, contendo apenas o somatório total da variável y_{jt}^f para maior ou igual a 1, isso garante a viabilidade do problema, já que só serão assumidas facilidades em funcionamento desde que estejam ativas. Assim sendo, o BMP resulta como descrito em (3.21)...(3.28).

$$\text{Min FO-BMP} = \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} a_t^o a_j y_{jt}^o + \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} a_t^f a_j y_{jt}^f + \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} a_t^c a_j y_{jt}^c + \eta \quad (3.21)$$

s.a

$$\eta \geq \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \bar{u}_{it}^r d_{it} - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} y_{jt}^f \bar{v}_{ijt}^r d_{it} \quad \forall r \in 1 \dots nh, \quad (3.22)$$

$$\sum_{j \in J} y_{jt}^f \geq 1 \quad \forall t \in T, \quad (3.23)$$

$$y_{j,t-1}^k + y_{j,t-1}^f = y_{j,t}^k + y_{j,t}^f \quad \forall j \in J, t \in T : t > 0, \quad (3.24)$$

$$y_{j1}^f \leq y_{j1}^o \quad \forall j \in J, \quad (3.25)$$

$$y_{jt}^o \geq y_{j,t-1}^k + y_{jt}^f - 1 \quad \forall j \in J, t \in T : t > 1, \quad (3.26)$$

$$y_{jt}^c \geq y_{j,t-1}^f + y_{jt}^k - 1 \quad \forall j \in J, t \in T : t > 1, \quad (3.27)$$

$$\eta \geq 0 \quad (3.28)$$

Definidos o BDSP e o BMP, parte então para a etapa final com o algoritmo do BDM (Algoritmo 6).

Algoritmo 6: Método de decomposição de Benders aplicado ao FLPMP

PASSO 1: Inicie com $UB = \infty$, $LB = 0.00$, $GAP = 100.00$ e declare $\varepsilon = 0.00001$;

PASSO 2: Resolva BMP ((3.21) a (3.28)) relaxado. Faça:

$$\bar{y}_{jt}^f \leftarrow y_{jt}^f \quad \forall i \in I, t \in T,$$

$$LB \leftarrow \text{FO-BMP},$$

$$\bar{\eta} \leftarrow \eta.$$

Se houver solução viável, vá para o **PASSO 3**. Se não, PARE;

PASSO 3: Resolva BDSP(3.17 a 3.20). Faça:

$$\bar{u}_{it} \leftarrow u_{it} \quad \forall i \in I, t \in T;$$

$$\bar{v}_{ijt}^r \leftarrow v_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T;$$

PASSO 4: Faça:

$$\overline{\text{FO-BDSP}} \leftarrow \text{FO-BDSP},$$

$$UB \leftarrow \text{Min} \{UB, LB - \bar{\eta} + \overline{\text{FO-BDSP}}\};$$

$$GAP \leftarrow 100 * \frac{(UB-LB)}{UB};$$

PASSO 5: Se $GAP > \varepsilon$, retorne ao **PASSO 2**, se não: FIM.

Assim como descrito no exame de literatura para o problema estático de localização de facilidades, o algoritmo de Benders para o FLPMP tem a mesma funcionalidade. Primeiro são determinados os parâmetros iniciais e resolve-se o problema mestre. Com os valores atualizados para a variável complicante, pode-se resolver o subproblema Dual e atualizar as variáveis duais. Ao final são definidos os valores de UB, LB e GAP, repetindo a operação até o valor do GAP se encontrar abaixo do erro máximo determinado.

As melhorias para o algoritmo de Benders seguem nas subseções abaixo.

3.2.1 Cortes Pareto-ótimo em BDM para o FLPMP

O princípio de Magnanti et al. (1986) é aplicado ao problema utilizando um novo Subproblema Dual para o BDM. Esse novo sub-dual é definido como Problema Sub-dual de Magnanti e Wong (DSPMW) apresentado em (3.29)–(3.33).

$$\text{Max DSPMW} = \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} u_{it} d_{it} - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \bar{y}_{jt,o}^f v_{ijt} d_{it} \quad (3.29)$$

s.a

$$\overline{\text{FO-BDSP}} = \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} u_{it} d_{it} - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \bar{y}_{jt}^f v_{ijt} d_{it} \quad (3.30)$$

$$u_{it} - v_{ijt} \leq c_{ij}p_t \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T, \quad (3.31)$$

$$u_{it} \in \mathbf{R} \quad \forall i \in I, t \in T, \quad (3.32)$$

$$v_{ijt} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T, \quad (3.33)$$

Aplicando os cortes Pareto-ótimo ao algoritmo de Benders no FLPMP, tem-se então o algoritmo com a abordagem de [Magnanti et al. \(1986\)](#), descrito no Algoritmo 7.

Algoritmo 7: Cortes Pareto-ótimo ao algoritmo de Benders no FLPMP

PASSO 1: Inicie com $UB = \infty$, $LB = 0.00$, $GAP = 100.00$ e declare:

$$\varepsilon = 0.00001 \text{ e } \bar{y}_{jt,o}^f \leftarrow 0.5;$$

PASSO 2: Resolva BMP (3.21 a 3.28) relaxado. Faça:

$$\bar{y}_{jt}^f \leftarrow y_{jt}^f \quad \forall i \in I, t \in T,$$

$$LB \leftarrow \text{FO-BMP},$$

$$\bar{\eta} \leftarrow \eta.$$

Se houver solução viável, vá para o **PASSO 3**. Se não, PARE;

PASSO 3: Resolva BDSP(3.17 a 3.20). Faça:

$$\bar{u}_{it} \leftarrow u_{it} \quad \forall i \in I, t \in T;$$

$$\bar{v}_{ijt}^r \leftarrow v_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T;$$

$$\overline{\text{FO-BDSP}} \leftarrow \text{FO-BDSP},$$

PASSO 4: Com $\bar{y}_{jt,o}^f$ e $\overline{\text{FO-BDSP}}$, resolva DSPMW (3.29 a 3.33). Faça:

$$\bar{u}_{it} \leftarrow u_{it} \quad \forall i \in I, t \in T;$$

$$\bar{v}_{ijt}^r \leftarrow v_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T;$$

PASSO 5: Faça:

$$UB \leftarrow \text{Min} \{UB, LB - \bar{\eta} + \overline{\text{FO-BDSP}}\};$$

$$GAP \leftarrow 100 * \frac{(UB-LB)}{UB};$$

PASSO 6: Se $GAP > \varepsilon$, retorne ao **PASSO 2**, se não: PARE, Solução ótima.

A intenção de se utilizar desses cortes pareto-ótimos é de determinar um caminho mais direto ao ponto ótimo do problema tratado. A ideia do algoritmo é melhorar o método de Benders adicionando uma atualização das variáveis duais em que não possam ser sobrepostas por outros cortes, resolvendo o Subproblema Dual de Magnanti-Wong (DSPMW) após o subproblema Dual de Benders (BDSP).

A próxima abordagem é de [Papadakos \(2008\)](#), com o método alternativo para [Magnanti et al. \(1986\)](#), descrito na seção 3.2.2.

3.2.2 Método melhorado de cortes pareto-ótimos em BDM para o FLPMP

O método alternativo é baseado no estudo de Papadakos (2008) descrito de forma resumida anteriormente na seção 2.4.2. Para o FLPMP, o método de Papadakos apenas adiciona ao BDM, o Subproblema Dual de Papadakos (DSPP), como é decrito de (3.34) a (3.37).

$$\text{Max DSPP} = \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} u_{it} d_{it} - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \bar{y}_{jt,o}^f v_{ijt} d_{it} \quad (3.34)$$

s.a

$$u_{it} - v_{ijt} \leq c_{ij} p_t \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T, \quad (3.35)$$

$$u_{it} \in \mathbf{R} \quad \forall i \in I, t \in T, \quad (3.36)$$

$$v_{ijt} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T, \quad (3.37)$$

Ao algoritmo de Benders é adicionada a combinação convexa da concepção de Papadakos (2008), como é demonstrado na equação (3.38).

$$\bar{y}_{jt,o}^f = \lambda \bar{y}_{jt}^f + (1 - \lambda) \bar{y}_{jt,o}^f \quad \forall j \in J, t \in T, \quad (3.38)$$

Assim sendo, o algoritmo de BDM com a abordagem de Papadakos (2008) para o FLPMP apresentado é descrito no Algoritmo 8.

3.3 Algoritmo *Dual-Ascent* para o FLPMP

A implementação do algoritmo *Dual-Ascent* seguiu as mesmas prerrogativas descritas na seção 2.5. A seguir, são apresentados os procedimentos para a formulação adotada e descrita na seção 3.1.

Primeiramente, faz-se o dual condensado do modelo de (3.1) a (3.12). O problema dual segue de (3.39) a (3.41).

$$\text{Max } z_{D-cond} = \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} v_{it} \quad (3.39)$$

Algoritmo 8: Abordagem de Papadakos aplicado a Benders no FLPMP

PASSO 1: Inicie com $UB = \infty$, $LB = 0.00$, $GAP = 100.00$. Declare $\varepsilon = 0.00001$, $\lambda \leftarrow 0.5$ e $\bar{y}_{jt,o}^f \leftarrow 0.5$.

PASSO 2: Com $\bar{y}_{jt,o}^f$, resolva DSPP (3.34 a 3.37). Faça:

$$\bar{u}_{it} \leftarrow u_{it} \quad \forall i \in I, t \in T;$$

$$\bar{v}_{ijt}^r \leftarrow v_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T;$$

PASSO 3: Resolva BMP (3.21 a 3.28) relaxado. Faça:

$$\bar{y}_{jt}^f \leftarrow y_{jt}^f \quad \forall i \in I, t \in T,$$

$$LB \leftarrow \text{FO-BMP},$$

$$\bar{\eta} \leftarrow \eta.$$

Se houver solução viável, vá para o **PASSO 4**. Se não, PARE;

PASSO 4: Com $\bar{y}_{jt,o}^f$ e $\overline{\text{FO-BDSP}}$, resolva BDSP (3.17 a 3.20). Faça:

$$\bar{u}_{it} \leftarrow u_{it} \quad \forall i \in I, t \in T;$$

$$\bar{v}_{ijt}^r \leftarrow v_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T;$$

PASSO 5: Faça:

$$\overline{\text{FO-BDSP}} \leftarrow \text{FO-BDSP},$$

$$UB \leftarrow \text{Min}(UB, LB - \eta + \overline{\text{FO-BDSP}}),$$

$$GAP \leftarrow 100 * \frac{(UB-LB)}{UB},$$

$$\bar{y}_{jt,o}^f \leftarrow \lambda \bar{y}_{jt}^f + (1 - \lambda) \bar{y}_{jt,o}^f \quad \forall j \in J, t \in T.$$

PASSO 6: Se $GAP > \varepsilon$, retorne ao **PASSO 2**, se não: PARE, Solução ótima.

s.a

$$\sum_{i \in I} \max \{0, v_{it} - c_{ij} \cdot p_t\} \leq a_t^f a_j \quad \forall j \in J, t \in T, \quad (3.40)$$

$$v_{it} \geq 0 \quad \forall i \in I, t \in T. \quad (3.41)$$

Pode-se definir então o parâmetro s_j^t como sendo:

$$s_j^t = a_t^f a_j - \sum_{i \in I} \max \{0, v_{it} - c_{ij} \cdot p_t\} \quad \forall j \in J, t \in T, \quad (3.42)$$

Reindexa $c_{ij} \cdot p_t$ para $c_i^k \cdot p_t$ ($k = 1 \dots n + 1$), define $c_i^{(n+1)} = +\infty$ para cada $i \in I$ e padroniza a variável dual v_{it} inicialmente como sendo:

$$v_{it} = c_i^1 \cdot p_t \quad \forall i \in I, t \in T, \quad (3.43)$$

A partir do que é definido em (3.42) e (3.43), parte-se então para o método de *Dual-Ascent* descrito no Algoritmo 9.

Com os algoritmos formulados, resta somente a coleta dos dados para o estudo de caso, apresentados na seção 3.4.

Algoritmo 9: Método de *Dual-Ascent* para o FLPMP

PASSO 1: Inicialize com alguma solução dual viável $v_{it} = c_i^1 \cdot p_t$ para cada (i, t) e $s_j^t = a_i^f a_j - \sum_{i \in I} \max \{0, v_{it} - c_{ij} \cdot p_t\} \geq 0$ para todo (j, t) . Para cada (i, t) , faça:

$k(i, t) = \min \{k : v_{it} \leq c_i^k \cdot p_t\}$. Se $v_{it} = c_i^{k(i,t)} p_t$, aumente $k(i, t)$ em 1. Para cada $t \in T$, execute as operações do **PASSO 2** ao **PASSO 8**.

PASSO 2: Inicialize com $i = 1$, e $\delta = 0$;

PASSO 3: Se $(i, t) \notin I^+$, vá para o **PASSO 7**. Se não, continue;

PASSO 4: Faça $\Delta_i^t = \min_{(j,t)} \{s_j^t : v_{it} - c_{ij} \cdot p_t \geq 0\}$;

PASSO 5: Se $\Delta_i^t > c_i^{k(i,t)} p_t - v_{it}$, faça:

$$\Delta_i^t = c_i^{k(i,t)} p_t - v_{it},$$

$$\delta = 1,$$

Aumente $k(i, t)$ em 1;

PASSO 6: Subtraia s_j^t de Δ_i^t para cada $j \in J$ em que $v_{it} - c_{ij} p_t \geq 0$ e aumente v_{it} de Δ_i^t ;

PASSO 7: Se $i \neq m$, aumente i em 1 e retorne ao **PASSO 3**. Se não, continue;

PASSO 8: Se $\delta = 1$, retorne ao **PASSO 2**. Caso contrário, PARE.

3.4 Simulação de um problema de localização multi-período para centros de distribuição com base no Estado de MG-BR

O objetivo inicial dessa pesquisa é realizar uma comparação entre o método de decomposição de Benders (com suas melhorias) e o Dual Ascent. Para isso, fez-se necessário implementar os métodos em uma simulação de definição de Centros de Distribuição (CD), utilizando a abordagem do problema multi-período de localização de facilidades.

Como exemplo, utilizou-se a variação da mancha populacional de Minas Gerais. Definiu-se então uma faixa etária para ser trabalhada, sendo essa a de 0 a 4 anos (segundo os padrões do IBGE), determinando assim que a simulação trata de CD's de produtos exclusivos a essa faixa etária. A população de 0 a 4 anos tende a diminuir em quase todos os municípios, mas com uma percentagem maior em alguns do que em outros, o que leva a uma variação no ritmo de mudança da demanda de um período para o outro.

Para realizar a simulação, a base de dados é expressa por:

- Custo de transporte facilidade–cliente: distância euclidiana (Farahan e Hekmatfar, 2009) entre cada facilidade j e um cliente i . Para esse cálculo, foi utilizado como coordenadas, a latitude la_i e longitude lo_i dos clientes e das facilidades

(la_j e lo_j) através dos dados do IBGE, coletados do banco de dados do IBGE. A equação (3.44) demonstra esse cálculo.

$$c_{ij}^t = \sqrt{(la_i - la_j)^2 + (lo_i - lo_j)^2} \quad \forall t \in T, i \in I, j \in J; \quad (3.44)$$

- Definição dos municípios candidatos à facilidade (CD): 150 municípios com maior PIB (Produto Interno Bruto) de Minas Gerais são definidos para o grupo de facilidades candidatas;
- Custos relacionados às facilidades: estimativa proporcional ao tamanho de cada município. Padronizou-se que quanto maior o PIB do município, maior é o custo proporcional. Definiu-se então um limite superior de 130.000 u.m para o município candidato de maior PIB e 100.000 u.m para a facilidade de menor PIB, sendo o custo das demais facilidades proporcional a essa relação;
- Variação de custos: previsão da inflação para os períodos. Foram simulados três cenários diferentes, sendo o primeiro com um perfil de aumento da inflação mais moderado e com um decrescimento ao final. O segundo cenário é o mais pessimista, com um longo período de crescimento inflacionário e depois uma permanência. O terceiro cenário aborda uma visão mais otimista, com um longo período de estabilidade e decrescimento da inflação ao final. Em nenhum dos três casos foi abordada uma diminuição dos custos, mas apenas diminuição da inflação;
- Demanda: população de 0 a 4 anos em cada período a ser analisado;
- Variações de demanda: baseado na mancha populacional do Estado de MG. Teve como índice a previsão via regressão linear da variação por período da população de zero a quatro anos de cada nó cliente, baseado em dados do IBGE (2015).

A Figura 3.1 demonstra de forma gráfica as localidades definidas como clientes e como facilidades candidatas. Os pontos em "○" representam os clientes, e os pontos em "△" preenchido representam as localizações das facilidades candidatas.

Com os dados coletados, pôde-se então realizar os experimentos computacionais e demonstrar os resultados. O próximo capítulo apresenta uma discussão acerca da implementação dos algoritmos com os dados apresentados.

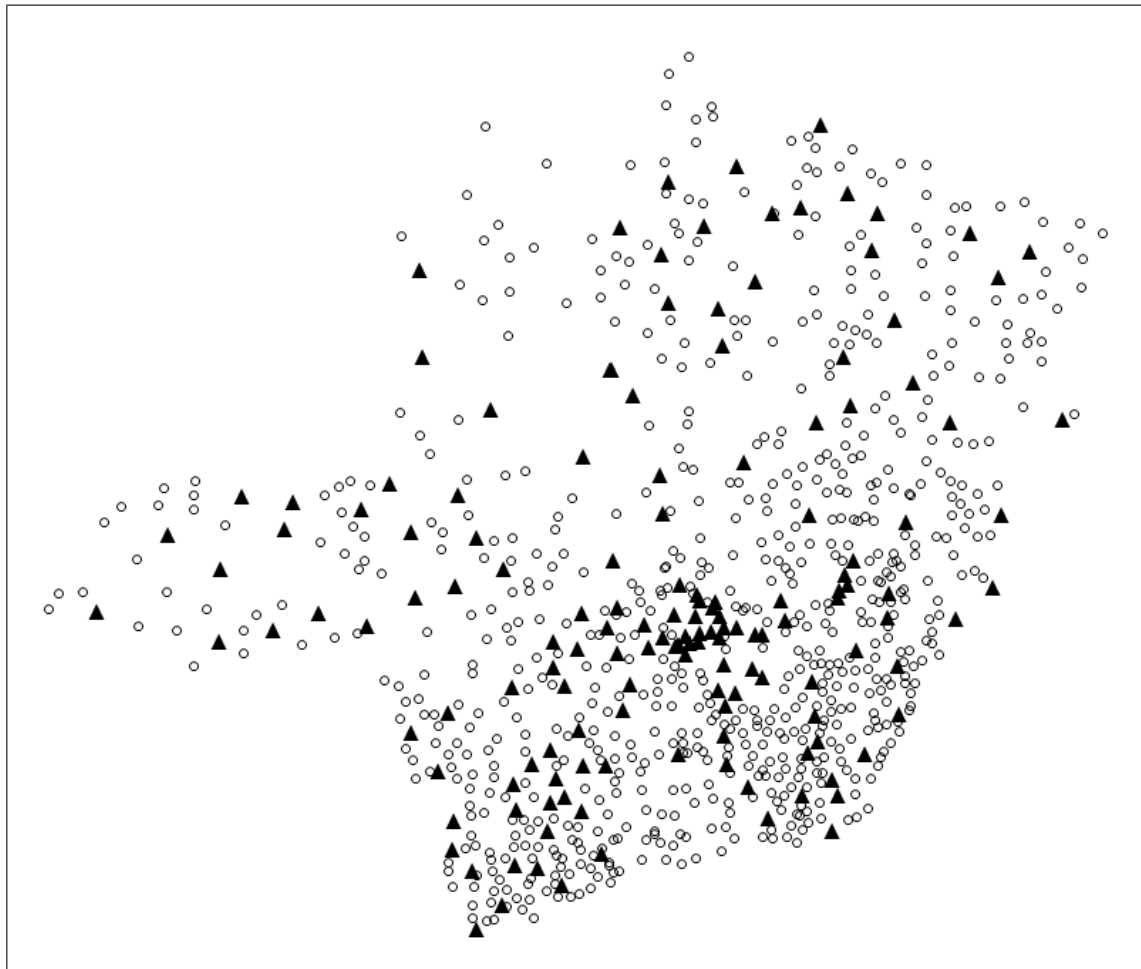


Figura 3.1: Visualização gráfica das posições dos clientes e facilidades candidatas

Capítulo 4

Resultados computacionais

“Descobrir consiste em olhar para o que todo mundo está vendo e pensar uma coisa diferente.”

Roger Von Oech

A implementação do modelo proposto e apresentado na formulação de (3.1)... (3.12), com os algoritmos: BDM (seção 3.2), Cortes Pareto-ótimos (tópico 3.2.1), Método de Papadakos (tópico 3.2.2) e o método *Dual-Ascent* (seção 3.3) resultaram nos dados computacionais da pesquisa.

Para a análise dos resultados, em cada algoritmo coletou-se os seguintes dados:

- Tempo de CPU, que é considerado o tempo para chegar a solução do problema. Esse dado é imprescindível para comparar o ritmo de resolução de cada algoritmo;
- Quantidade de iterações. Esse dado se torna importante para comparar o quanto um algoritmo foi capaz de chegar a sua solução utilizando de um número menor ou maior de iterações em relação a outro algoritmo, demonstrando o esforço computacional de cada método;
- Variação do custo, que serve de parâmetro para comparar o quanto cada algoritmo foi capaz de variar o custo para um valor mínimo. Ou seja, um algoritmo que diminui o custo para um valor menor que outro algoritmo, utilizando a mesma quantidade de iterações (ou até menos), é considerado como um algoritmo mais eficiente;

Primeiramente, para se testar a eficiência dos algoritmos, foram realizados testes preliminares em 15 instâncias diferentes, todas essas para uma quantidade de 5 períodos, sendo demonstradas pela Tabela 4.1.

A instância oficial compreende o problema de simulação descrito na seção 3.4, com 703 clientes e 150 facilidades candidatas, onde será abordada no tópico 4.2. Os testes foram executados em um computador tipo *Desktop*, processador *Intel Core E5630*

Tabela 4.1: Instâncias utilizadas para testes preliminares

Instância	n: nós cliente	m: facilidades candidatas
1	100	10
2	150	50
3	200	50
4	300	50
5	350	50
6	250	60
7	300	60
8	350	60
9	400	60
10	450	60
11	500	80
12	550	80
13	600	80
14	650	80
15	700	80

com 2.53 GHz e sistema operacional Linux. O *software* utilizado foi o CPLEX com o código AMPL para geração do modelo matemático (formulação do FLPMP), e código C++ para programação dos algoritmos.

As tabelas, gráficos e análises resultantes das iterações possuem algumas simbologias utilizadas e identificadas como:

T(min) : Define o tempo (em minutos) que levou para a resolução do problema;

Quant. iter : Quantidade de iterações para a instância proposta.

A seguir, são demonstrados os resultados computacionais para as instâncias preliminares.

4.1 Comparação computacional dos testes preliminares

Feitos os testes computacionais, os resultados apresentados utilizaram do tempo de resolução para cada algoritmo em todas as instâncias preliminares. Com a capacidade de variação de custo e o tempo necessário para aproximação dos custos mínimos, foi possível comparar a eficiência dos algoritmos na resolução dos problemas propostos. Ou seja, um algoritmo é mais eficiente que outro, em determinada instância, quando este é capaz de chegar ao custo mínimo do problema, de forma mais rápida e/ou com menos iterações.

Os resultados demonstraram que o método de Papadakos é o mais eficiente para todas as 10 primeiras instâncias propostas. Os resultados são demonstrados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Resultados básicos dos métodos de Benders para as instâncias de 1 a 10.

Instância	Benders simples		Benders cortes P-O		Benders AP	
	T(min)	Quant. iter	T(min)	Quant. iter	T(min)	Quant. iter
1	0,23	15	35,73	38	0,38	14
2	0,70	27	369,07	92	0,97	24
3	2,67	59	1309,00	122	2,23	40
4	3,82	59	1060,00	110	4,90	58
5	10,77	96	625,78	83	2,65	33
6	10,25	85	653,75	89	3,23	41
7	19,40	118	2265,80	137	9,70	82
8	37,65	136	1913,57	117	4,38	42
9	90,45	197	486,27	63	9,76	69
10	67,42	170	5255,45	161	11,28	71

Percebe-se que o método acelerado de Papadakos ao BDM, tanto para as instâncias maiores quanto para as instâncias menores, foi mais eficiente do que BDM simples e BDM com os cortes Pareto-ótimos de Magnanti–Wong. Papadakos alcançou os mesmos resultados com até metade das iterações de Benders. O gráfico da Figura 4.1 demonstra esse dado com mais clareza.

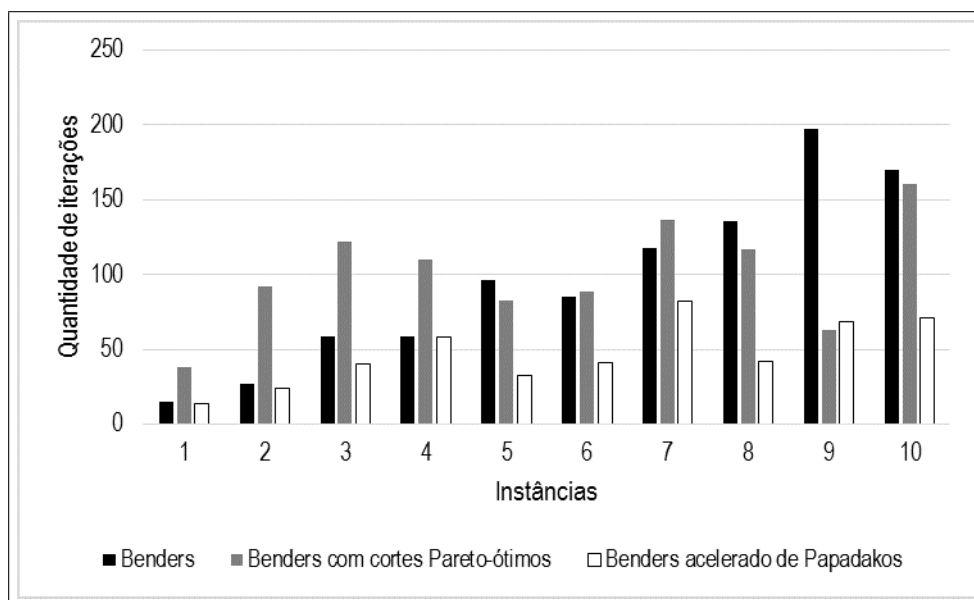


Figura 4.1: Comparação da quantidade de iterações

Analisando gráfico 4.1, percebe-se que os cortes pareto-ótimos utilizaram de um

número bastante superior de iterações para as instâncias 2, 3 e 4, tanto em relação a BDM quanto ao método de Papadakos.

Sendo assim, Magnanti–Wong foi ineficiente para instâncias onde a relação de facilidades candidatas para nós clientes é de 1:3 a 1:5, levando de 200 a 400 vezes o tempo de BDM simples e Papadakos, segundo a Tabela 4.2. Porém, para as instâncias seguintes, os cortes pareto-ótimos utilizaram uma quantidade de iterações próxima de BDM simples para as instâncias 5, 6, 7, 8 e 10, com um destaque para as instâncias 5 e 8, onde os cortes pareto-ótimos resolveram o problema com uma quantidade de iterações um pouco menor que BDM simples.

Em relação a Papadakos, os cortes pareto-ótimos só tiveram um número menor de iterações na instância 9, onde a relação de facilidades candidatas e nós clientes é de aproximadamente 1:7. Percebe-se que Magnanti–Wong não obteve bons resultados para nenhuma das instâncias, mesmo que apresentasse uma quantidade de iterações menor, seus tempos de resolução foram substancialmente mais altos em todas. Porém, é notório o fato de que para instâncias em que a quantidade de clientes para cada facilidade candidata está entre 6 e 8, os cortes pareto-ótimos conseguem uma solução com menos iterações do que para outras instâncias.

No caso de Benders simples, levando em consideração o tempo de resolução e o número de iterações, seus resultados no geral foram superiores a Magnanti–Wong para todas as instâncias, com destaque para as instâncias menores com no máximo 300 clientes e 50 facilidades, onde o número de iterações foi menor.

Utilizando o método de Papadakos, foi alcançado um perfil de resolução superior a BDM simples e cortes pareto-ótimo em todas as instâncias, tendo um tempo de iteração até 10 vezes menor em relação a BDM simples (com exceção das instâncias de 1 a 4, onde os tempos foram próximos), e mais de 100 vezes menor que os cortes pareto-ótimos. Percebe-se que, para esses experimentos, o método de Papadakos tem uma resolução mais eficiente para instâncias da ordem facilidades/clientes de 1:7, assim como nos cortes pareto-ótimos de Magnanti–Wong. Além disso, o número de iterações de Papadakos tem uma crescente com a quantidade de nós clientes.

O gráfico da Figura 4.2 demonstra a variação média do GAP por iteração em cada um dos métodos de Benders. Esse índice se torna importante para entender o esforço computacional das iterações. Com exceção da instância 9, o algoritmo de Papadakos foi superior, com variação média do custo mínimo mais eficiente nas instâncias maiores de 5 a 10. Ou seja, nessas instâncias, Papadakos foi capaz de diminuir o custo em índices maiores e utilizando um número menor de iterações. Para as instâncias de 1 a 4, seus resultados foram superiores mas próximos de Benders simples, devido ao fato de o tempo de resolução segundo a Tabela 4.2 ter sido próximo.

O gráfico da Figura 4.3 representa a variação média do GAP em relação ao tempo

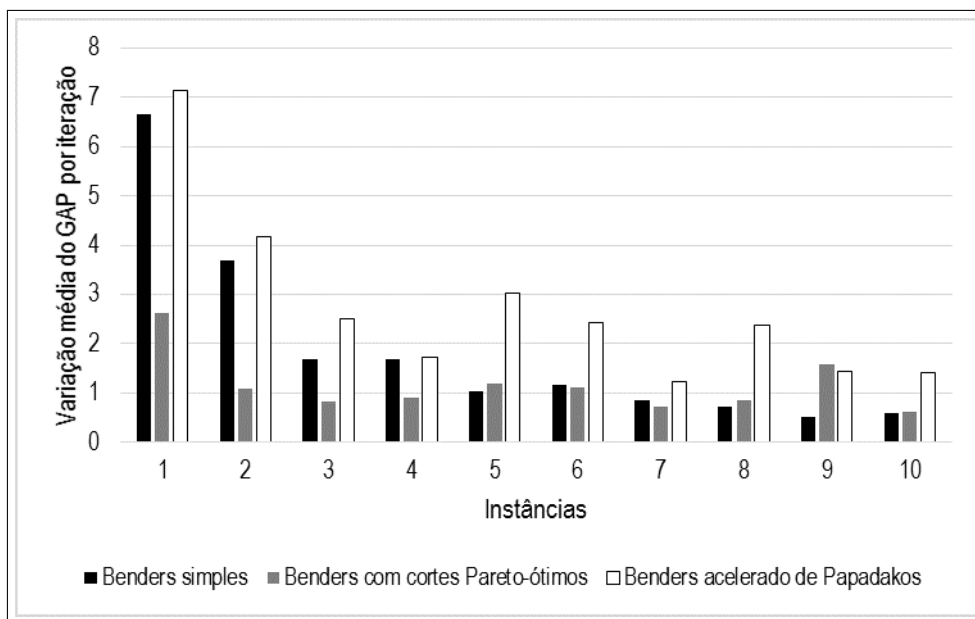


Figura 4.2: Comparação da variação média do GAP por iteração

de iteração em segundos. Mais uma vez, Papadacos é mais eficiente que os outros dois métodos em todas as instâncias. Os cortes pareto-ótimo tiveram um índice de praticamente zero em todos os casos, e Benders obteve valores significativos de variação do GAP apenas para as 2 primeiras instâncias. Nas demais, Papadacos foi superior, tendo destaque para instâncias onde a relação facilidades/clientes é de 1:3 a 1:7.

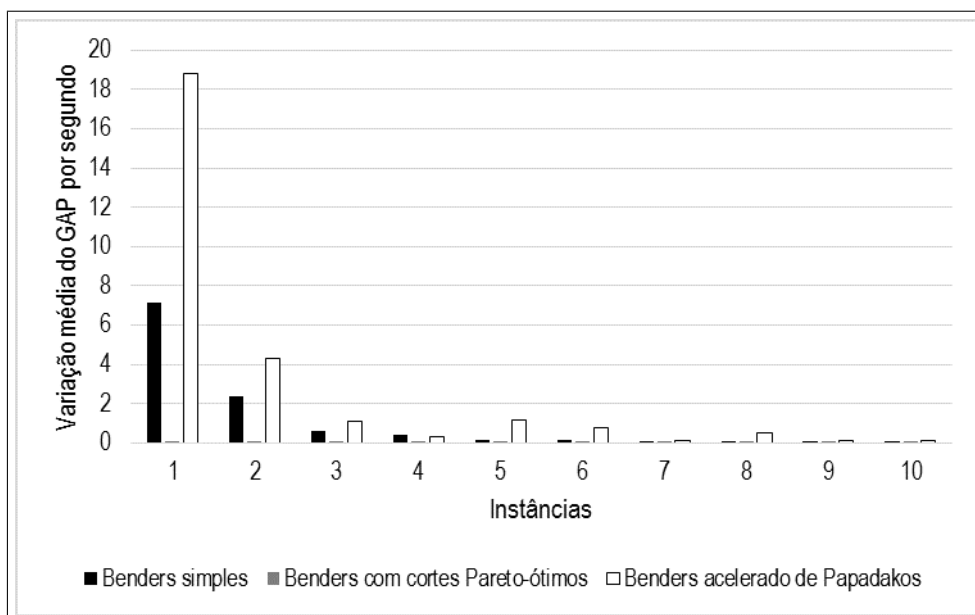


Figura 4.3: Comparação da variação média do GAP por segundo

O gráfico da Figura 4.4 deixa claro que, quanto maior a instância, maior a quantidade de iterações necessárias para BDM simples, sendo que até a instância 4, BDM

conseguiu bons resultados de variação média do GAP por segundo e por iteração, e a partir da instância 5, com valores maiores de quantidade de iterações, o esforço computacional foi maior, com a variação do GAP por segundo chegando a praticamente zero.

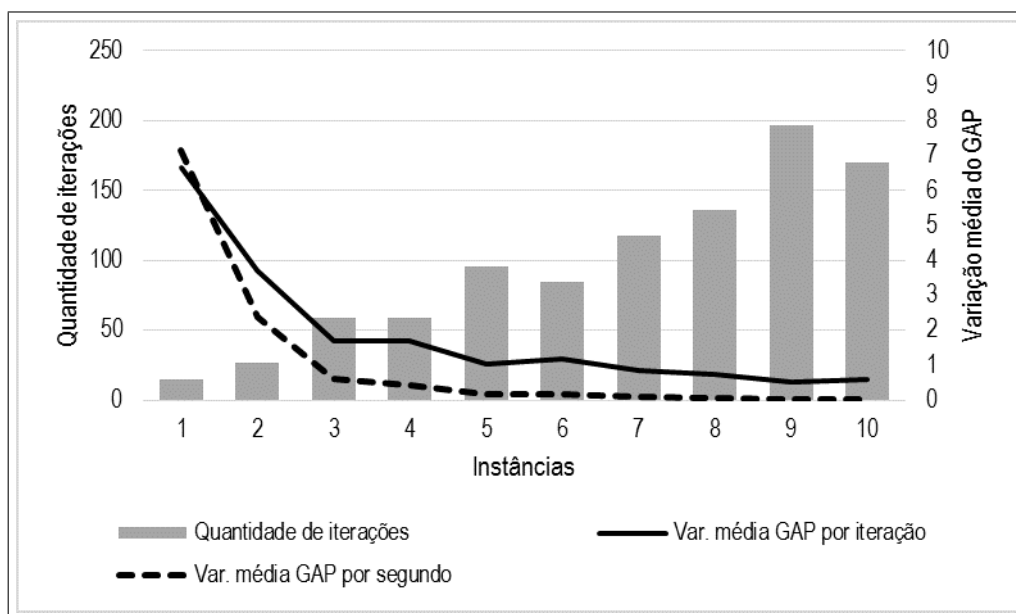


Figura 4.4: Resultados de BDM simples para as instâncias de 1 a 10.

Segundo o gráfico da Figura 4.5, os cortes pareto-ótimo alcançaram uma variação considerável em quantidade de iterações para as 10 instâncias, com uma variação média do GAP em um patamar quase constante (abaixo de 50) mesmo nas instâncias menores. A variação em relação ao tempo foi nitidamente próximo de zero.

Para os demais testes, apenas o Papadakos foi capaz de solucionar as instâncias de 11 a 14 em um tempo menor que 10 horas de iteração. No caso da instância 15, o método de Papadakos não conseguiu solucioná-lo em um tempo aceitável. Os resultados dessas instâncias para Papadakos são demonstrados no gráfico da Figura 4.6.

Percebe-se que o algoritmo de Papadakos obteve índices significativos de variação do GAP por segundo e por iteração para as instâncias 1, 2, 3, 5 e 8, onde a relação facilidades/clientes é de 1:3, 1:4, 1:6 e 1:7. A variação do GAP por segundo tem uma diminuição considerável a partir da instância 4, e se mantém em um patamar menor daí em diante.

Porém, a eficiência do método de Papadakos está, para as instâncias testadas, na variação do GAP por iteração, em que se mantém num patamar superior a variação por segundo até a instância 10, fazendo com que o algoritmo de Papadakos continue eficiente em relação a BDM simples e Magnanti–Wong. Quanto às instâncias de 11 a 14, mesmo o algoritmo de Papadakos tendo uma boa eficiência para instâncias do tipo 1:7

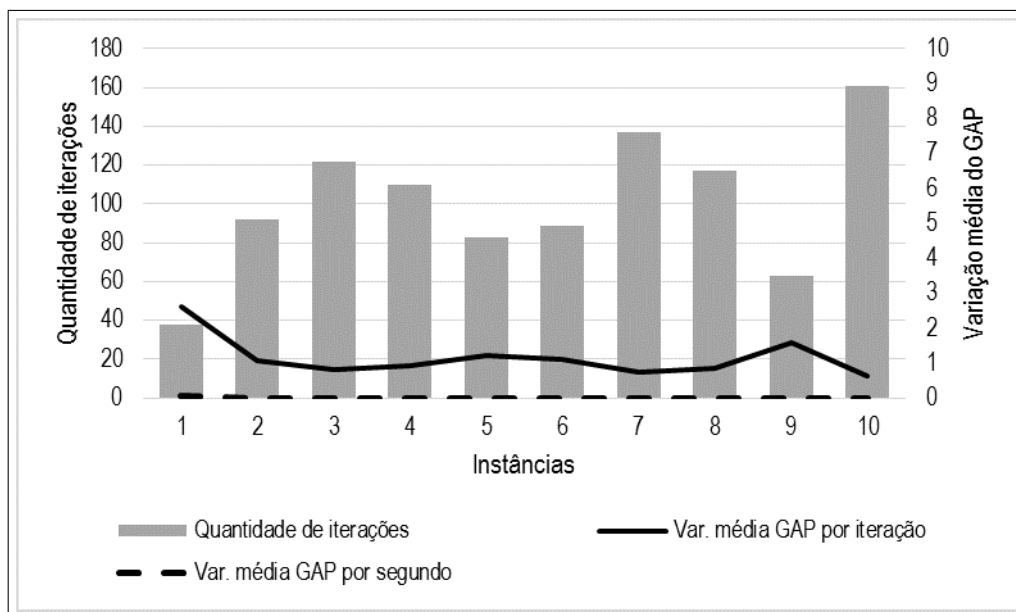


Figura 4.5: Resultados de BDM via cortes P-O para as instâncias de 1 a 10.

facilidades/clientes, para instâncias acima de 500 nós cliente, o método de Papadakos diminuiu o seu ritmo, obtendo resultados pouco satisfatórios em relação às instâncias anteriores.

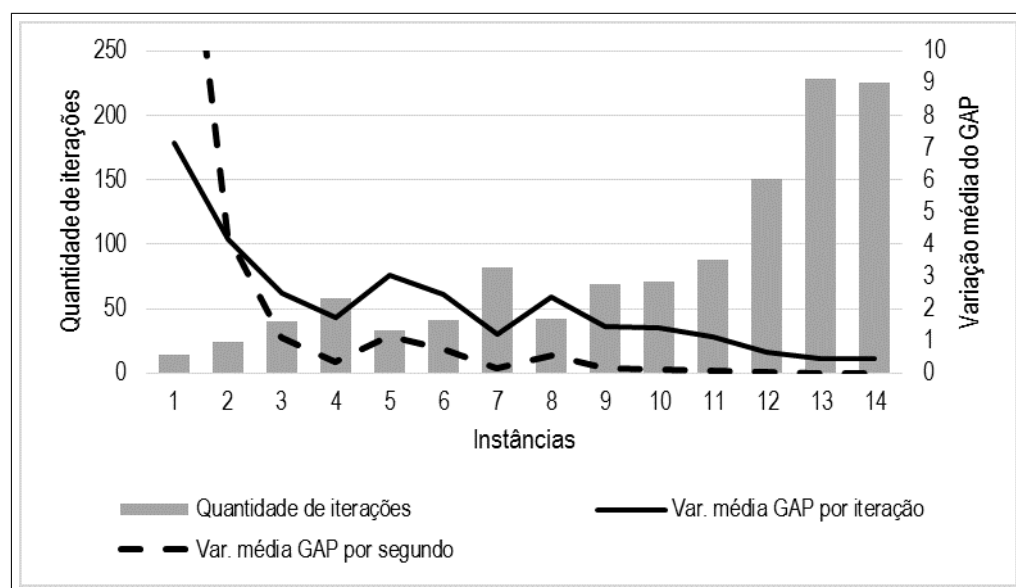


Figura 4.6: Resultados de BDM AP para as instâncias de 1 a 10.

O gráfico da Figura 4.7 mostra a evolução da eficiência dos três algoritmos analisados até o momento em relação ao tamanho de cada instância. No caso de Benders com cortes pareto-ótimo, a eficiência do algoritmo se manteve praticamente a mesma, apesar do aumento significativo dos nós clientes (n) e das facilidades (m). A eficiência do algoritmo de Benders simples se manteve próxima da eficiência de Benders com

Papadakos até $n = 300$ e $m = 50$. Para as instâncias superiores, Papadakos se manteve soberano, tendo uma eficiência muito superior a BDM simples e cortes pareto-ótimos, exceto para as instâncias 7 e 9. A partir de $n = 450$ e $m = 60$, Papadakos começa a perder força e diminui sua variação do GAP em cada iteração.

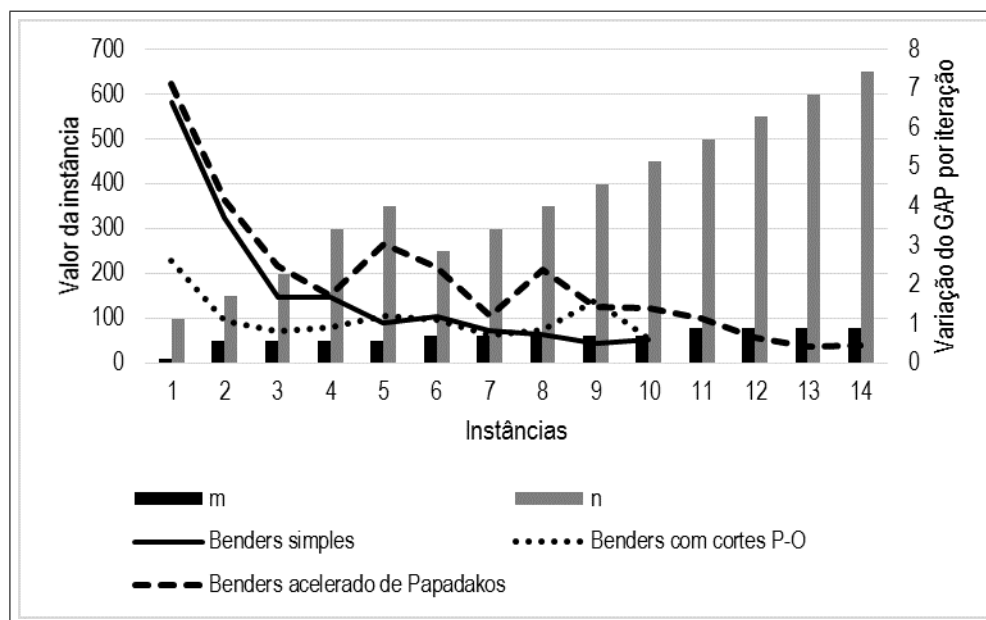


Figura 4.7: Resultados de BDM AP para as instâncias de 1 a 10.

A Figura 4.8 mostra o gráfico geral da variação do GAP por segundo em cada algoritmo em relação ao tamanho das instâncias. Como já tratado anteriormente, os cortes pareto-ótimos de Magnanti–Wong não obtiveram bons resultados em relação ao tempo de resolução. No caso de BDM simples e Papadakos, os valores de variação do GAP por segundo tem um nível significativo até $n = 150$ e $m = 50$ (instância 2). Para instâncias maiores, ambos os algoritmos diminuem o ritmo e se aproximam da eficiência de Magnanti–Wong

Portanto, entende-se que o algoritmo de Benders simples foi capaz de realizar sucessivas variações significativas no custo mínimo até $n = 300$ e $n = 50$. Sendo assim, foram feitos testes com valores de m entre 60 e 100 para $n = 300$, e os resultados foram piores que na instância 3 apresentada. Os valores de P–O foram ineficientes em todas as instâncias, principalmente pelo fato de necessitar de uma quantidade maior de iterações do que Benders simples e AP. Já o método AP, por sua vez, conseguiu atender às expectativas descritas no estudo de Papadakos (2008), em que a combinação convexa acelera o rendimento do algoritmo de Benders. Porém, para instâncias maiores de $m = 450$ e $n = 60$, o algoritmo perde ritmo.

Para o algoritmo *Dual-Ascent*, todas as instâncias foram resolvidas em tempos de menos de 10 segundos, sendo inteiramente o mais eficiente de todos. Os resultados de-

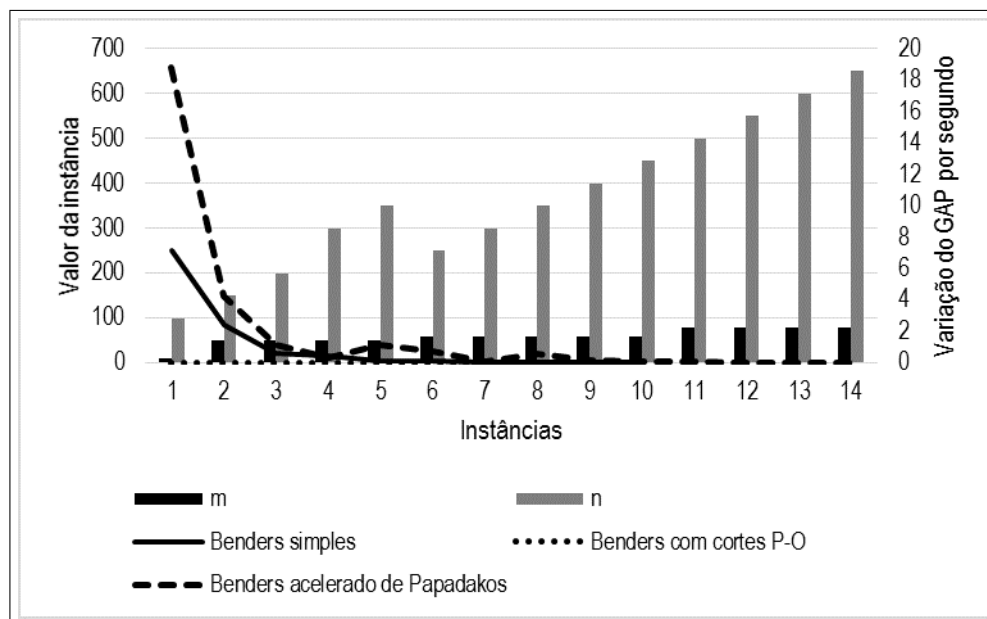


Figura 4.8: Resultados de BDM AP para as instâncias de 1 a 10.

monstrados na Tabela 4.3 inferem que o algoritmo utiliza uma quantidade de iterações apenas até o número total n de clientes multiplicado pelo total h de períodos. Ou seja, a quantidade de iterações está limitado ao valor de n . Como não há a necessidade de se resolver subproblemas ou problemas originais pelo solver do CPLEX — fazendo apenas verificações sucessivas do custo mínimo para cada cliente — os testes são resolvidos em um curto espaço de tempo computacional, fazendo as iterações serem finalizadas de forma mais rápida e prática.

Tabela 4.3: Resultados computacionais para o Algoritmo *Dual-Ascent*

Isnt.	n	m	c_{min}	Quant. Iter
1	100	10	2149890	500
2	150	50	2390510	750
3	200	50	2810730	1000
4	300	50	3277620	1500
5	350	50	3450290	1750
6	250	60	2941660	1250
7	300	60	3144630	1500
8	350	60	3319310	1750
9	400	60	3481220	2000
10	450	60	3592720	2250
11	500	80	3690170	2500
12	550	80	3789300	2750
13	600	80	3863120	3000
14	650	80	3939650	3250
15	700	80	3985150	3500

Para comparação dos resultados dos algoritmos de forma conjunta, a Tabela 4.4 demonstra os resultados do índice de esforço computacional, resultante da relação do tempo de resolução com a quantidade de iterações de cada algoritmo nas instâncias testadas.

É notório que o algoritmo *Dual-Ascent* obteve uma performance muito superior aos demais pelo fato de seu tempo computacional ser substancialmente inferior, o que faz com que o esforço para se encontrar o *bound* do problema seja bem menor. Além do mais, foi o único algoritmo a encontrar valores satisfatórios em todas as instâncias em um tempo menor que 10 horas de resolução.

O custo mínimo encontrado foi o mesmo em todos os algoritmos, mesmo que o *Dual-Ascent* forneça *bounds*, ou seja, aproximações do ponto ótimo, esse algoritmo, assim como os demais, foi capaz de chegar no custo ótimo em todas as instâncias.

Tabela 4.4: Comparação dos resultados computacionais dos algoritmos

Tempo/Quant. Iter							
Inst.	n	m	Benders	Mag-Wong	Papadakos	Dual-Ascent	C_{min}
1	100	10	0,932	56,416	1,629	0,002	2149890
2	150	50	1,556	240,698	2,425	0,001	2390510
3	200	50	2,712	643,770	3,345	0,005	2810730
4	300	50	3,882	578,182	5,069	0,003	3277620
5	350	50	6,729	452,371	4,818	0,003	3450290
6	250	60	7,235	440,730	4,727	0,004	2941660
7	300	60	9,864	992,321	7,098	0,003	3144630
8	350	60	16,610	981,318	6,257	0,003	3319310
9	400	60	27,548	463,114	8,487	0,005	3481220
10	450	60	23,794	1958,553	9,532	0,004	3592720
11	500	80	-	-	15,430	0,004	3690170
12	550	80	-	-	22,868	0,004	3789300
13	600	80	-	-	44,615	0,005	3863120
14	650	80	-	-	48,345	0,005	3939650
15	700	80	-	-	-	0,004	3985150

Os resultados demonstram que, em todos os casos, a formulação descrita de (3.1) a (3.12) tende a escolher o mínimo de instalações em cada período, fazendo o custo total que, nos dados utilizados, seja determinado em maior parte pelo custo de instalação e funcionamento das facilidades em cada período, que varia de acordo com a simulação de tendência da inflação. Quanto mais se aumenta as facilidades candidatas m , mais ao centro dos nós clientes o algoritmo vai definindo qual facilidade será escolhida, e esse é o motivo pelo qual as facilidades escolhidas vão mudando de acordo com cada instância. Além disso, para os dados utilizados, não houve variação de facilidades nem

fechamento das mesmas, o que demonstra que seria necessário uma variação muito maior nos dados do que a simulação utilizada.

Como apenas o algoritmo *Dual-Ascent* foi capaz de resolver todas as instâncias preliminares, somente esse algoritmo foi utilizado para finalizar a pesquisa testando as instâncias oficiais com os três cenários propostos, sendo seus resultados apresentados na seção 4.2.

4.2 Resultados computacionais para a simulação oficial

Implementando as instâncias oficiais com $n = 703$ e $m = 150$, seguindo a simulação para definição de centros de distribuição do Estado de Minas Gerais, já tratado anteriormente na seção 3.4, o resultado da implementação do algoritmo *Dual-Ascent* para os três cenários propostos segue na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Resultados computacionais do Algoritmo *Dual-Ascent* para a simulação oficial

Periodo	Cenario 1	Cenario 2	Cenario 3
1	102432,1	102432,1	102432,1
2	19319,53	20157,95	16942,69
3	24999,56	37820,79	19295,7
4	31417,96	70315,12	21091,02
5	56768,31	113370,6	22672,98
Custo total	234937,5	344096,6	182434,5

As iterações para a instância oficial seguem o mesmo princípio das instâncias preliminares, sendo utilizadas um total de $703 * 5 = 3.515$ iterações para resolução do problema.

Os resultados da Tabela 4.5 deixam explícito que a mudança brusca no cenário altera os custos de forma substancial, e que portanto, a determinação de qual cenário seguir pode ser crucial para o problema. Quanto às facilidades escolhidas, em todos os cenários foram determinadas as mesmas facilidades, como é demonstrado na Figura 4.9.

O algoritmo determinou, de início, a instalação de facilidades em dois municípios: Campos Gerais e Belo Oriente, sequenciados como 146 e 147 no total de 150 facilidades candidatas, como é mostrado na Figura 4.9(a). É importante destacar que a sequência dos municípios seguiu a diminuição de seus custos a_j para facilidade, ou seja, quanto maior a numeração do município sequenciado, menor foi o seu custo de facilidade



Figura 4.9: Resultado gráfico para a simulação oficial

associado. Por isso a tendência em sempre escolher o que estivesse no grupo de custos mais baixos, comprovando que o custo de fluxo não foi o determinante para o problema, o que sugere um aprofundamento para definir custos de fluxo mais abrangentes.

Ambas as facilidades continuam instaladas nos períodos subsequentes até o período

5, quando a facilidade de Belo Oriente é fechada e apenas a facilidade de Campos Gerais continua em operação, como demonstra a Figura 4.9(b). Como a demanda diminui consideravelmente no período 5, é natural que o algoritmo ordene o fechamento de uma das facilidades instaladas, e atue com apenas um centro de distribuição para o atendimento dos clientes.

Entende-se que o perfil de custo mínimo não só faz com que seja escolhido o menor número de facilidades, como também se faz necessário evitar o fechamento das facilidades já instaladas, mesmo por que o custo para se instalar uma nova é substancialmente maior que o de manter a atual facilidade em operação.

A escolha da facilidade em um ponto mais abaixo do mapa pode ser uma evidência de que, tendo em vista a concentração de municípios clientes nessa região mais ao sul de Minas Gerais, além da previsão de demanda ser maior nesse conjunto de municípios, o algoritmo tendeu a instalar as facilidades em um ponto de balanceamento entre esses fatores e o custo de instalação, já constatado como o mais determinante para os dados propostos.

Após a apresentação dos resultados computacionais, segue-se para a conclusão do trabalho no Capítulo 5.

Capítulo 5

Conclusão

“Quanto mais aumenta nosso conhecimento, mais evidente fica nossa ignorância.”

John F. Kennedy

Nessa dissertação foi abordado o problema de localização de facilidades multi-período com realocação e fechamento de facilidades. O objetivo do trabalho foi realizar uma comparação computacional da implementação dos algoritmos de decomposição de Benders simples, decomposição de Benders com cortes pareto-ótimo e abordagem de Papadakos, além do algoritmo *Dual-Ascent*.

As literaturas estudadas foram de imensa utilidade para se entender do que se constitui o FLP, quais os tipos de modelos existentes e como interpretar cada restrição de tais modelos. Acerca do DFLP, foi possível fazer uma análise técnica de cada artigo coletado para pesquisa, absorvendo de forma subjetiva os conhecimentos que levaram cada autor a utilizar seus modelos de DFLP em problemas diversos.

No FLP multi período, o modelo de [Wesolowsky e Truscott \(1975\)](#) adaptado funcionou bem para a formulação e implementação dos métodos propostos por [Magnanti et al. \(1986\)](#) e [Papadakos \(2008\)](#), além do método tradicional de [Benders \(1962\)](#). O algoritmo *Dual-Ascent* baseado em [Van Roy e Erlenkotter \(1982\)](#) teve uma implementação mais complexa, devido a esse método não ser muito divulgado em estudos atuais de FLP. O estudo dos algoritmos utilizados facilitou sua implementação computacional, e serviu para entender os passos de BDM e *Dual-Ascent*.

Quanto aos resultados computacionais, concluiu-se que o método de decomposição de Benders na sua forma simples foi eficiente até 450 nós clientes vinculados a 60 facilidades candidatas, obtendo tempos computacionais em índices acima do desejado para instâncias maiores nos dados do problema. O algoritmo de cortes pareto-ótimos não obteve rendimento satisfatório em praticamente nenhuma instância, sendo o mais ineficiente dos métodos testados.

A combinação convexa do método de aceleração de Papadakos, dentre os métodos de Benders, foi o mais eficiente, alcançando tempos computacionais satisfatórios em 14 das 15 instâncias propostas, sendo superior, em índices gerais, a Benders e Magnanti-Wong, resolvendo os testes com menos da metade das iterações, em alguns casos, e menos da metade do tempo computacional, em outros.

O algoritmo *Dual-Ascent* superou as expectativas, trazendo resultados em tempos computacionais com menos de 10 segundos, resolvendo até mesmo a instâncias maiores com uma eficiência em nenhum momento vista nos demais métodos, sendo o único dentre os algoritmos testados a resolver instâncias acima de $n = 450$ e $m = 60$, resolvendo também o problema de simulação proposto, apenas fazendo verificações sucessivas em cada nó cliente.

Como sugestão de trabalho futuro, pode-se utilizar do modelo de [Wesolowsky e Truscott \(1975\)](#) para um problema de centros de distribuição levando em consideração não somente um Estado da federação, mas uma região mais abrangente de um país. Pode-se também implementar o método independente de M-W descrito no artigo de [Papadakos \(2008\)](#) e comparar seus resultados, utilizando períodos mais curtos e numerosos. Pode-se ainda utilizar dos mesmos métodos para um problema de *p-median* dinâmico, adicionando facilidades em um número especificado de períodos.

O presente estudo foi de grande valia para o desenvolvimento de práticas em otimização de sistemas logísticos, sendo mais uma parcela de extrema importância para estudos futuros sobre problemas de localização de facilidades multi-período.

Referências Bibliográficas

- Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *8th International Meeting of the Institute of Management Sciences: Numerische Mathematik*, 4:238–252.
- Bilde, O. e Krarup, J. (1977). Sharp lower bounds and efficient algorithms for the simple plant location problem. *Ann Discrete Math*, 1:79–97.
- Chen, L.; Olhager, J. e Tang, O. (2014). Manufacturing facility location and sustainability: A literature review and research agenda. *Int. J. Production Economics*, 149:154–163.
- Contreras, I.; Cordeau, J.-F. e Laporte, G. (2011). The dynamic uncapacitated hub location problem. *Transportation Science*, 45:18–32.
- Current, J.; Ratick, S. e ReVelle, C. (1997). Dynamic facility location when the total number of facilities is uncertain: A decision analysis approach. *European Journal of Operational Research*, 110:597–609.
- Daskin, M. S. (1995). *"Median Problems" in Network and discrete Location: Models, Algorithms and Applications*. Wiley and Sons. Ed. New York.
- Drezner, Z. (1995). Dynamic facility location: the progressive p-median problem. *Elsevier Science*, 3:1–7.
- Erlenkotter, D. (1978). A dual-based procedure for uncapacitated facility location. *Operations Research*, 26:992–1009.
- Farahan, R. Z. e Hekmatfar, M. (2009). *Facility location: concepts, models, algorithms and case studies*. Physica-Verlag.
- Gülpinar, N.; Dessislava, P. e Ç Canakoş glu, E. (2013). Robust strategies for facility location under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 225:21–35.

- Magnanti, T.; Wong, R. e of Technology. Operations Research Center, M. I. (1986). *Decomposition Methods for Facility Location Problems*. Operations Research Center, Massachusetts Institute of Technology.
- Marín, A. (2011). The discrete facility location problem with balanced allocation of customers. *European Journal of Operational Research*, 210:27–38.
- MBI (2015). Ddd, cep e coordenadas de todas as cidades e localidades de minas gerais. Access date: 2015-07-06 15:35:00.
- Melo, M. T.; Nickel, S. e Saldanha-da Gama, F. (2009). Facility location and supply chain management—a review. *European Journal of Operational Research*, 196:401–412.
- Owen, S. H. e Daskin, M. S. (1998). Strategic facility location: A review. *European Journal of Operational Research*, 111:423–447.
- Papadakos, N. (2008). Practical enhancements to the magnanti-wong method. *Operations Research Letters*, 36:444–449.
- ReVelle, C. e Swain, R. W. (1970). Central facilities location. *Geographical Analysis*, 2:30–42.
- Roodman, G. M. e Schwarz, L. B. (1975). Optimal and heuristic facility phase-out strategies. *AIIE Tras*, 7:177–184.
- Segura, E.; Carmona-Benitez, R. B. e Lozano, A. (2014). Dynamic location of distribution centers, a real case study. *Transportation Research Procedia*, 3:547–554.
- Sonmez, A. D. e Lim, G. J. (2012). A decomposition approach for facility location and relocation problem with uncertain number of future facilities. *European Journal of Operational Research*, 218:327–338.
- Van Roy, T. J. e Erlenkotter, D. (1982). A dual-based procedure for dynamic facility location. *Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS)*, 28:1091–1105.
- Wesolowsky, G. O. e Truscott, W. G. (1975). The multiperiod location-allocation problem with relocation of facilities. *Management Science*, 22:57–65.