

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

**Estimadores de Erro “*a posteriori*” para
o Método dos Elementos Finitos
Generalizados (MEFG) aplicados à
análise de estruturas de concreto**

Ivone Passos Ferreira

Orientador: Prof. Felício Bruzzi Barros

Coorientador: Prof. Marcelo Greco

Tese apresentada ao curso de Pós-
Graduação em Engenharia de Estruturas da
Universidade Federal de Minas Gerais.

Belo Horizonte
2016

F383e Ferreira, Ivone Passos.
Estimadores de erro "*a posteriori*" para o método dos elementos finitos generalizados (MEFG) aplicados à análise de estruturas de concreto [manuscrito] / Ivone Passos Ferreira. - 2016.
xv, 137 f., enc.: il.

Orientador: Felício Bruzzi Barros.
Coorientador: Marcelo Greco.

Tese (doutorado) Universidade Federal de Minas Gerais,
Escola de Engenharia.

Anexos: f. 129-137.

Bibliografia: f.118-128.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Método dos elementos finitos - Teses. 3. Análise funcional não-linear - Teses. I. Barros, Felício Bruzzi. II. Greco, Marcelo. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 624(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

**"ESTIMADORES DE ERRO "A POSTERIORI" PARA O MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS (MEFG) APLICADOS À ANÁLISE DE
ESTRUTURAS DE CONCRETO"**

Ivone Passos Ferreira

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Doutor em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros
DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Marcelo Greco
DEES - UFMG (Coorientador)

Prof. Dr. Estevam Barbosa de Las Casas
DEES - UFMG

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira
DEES - UFMG

Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado
UFPR

Prof. Dr. Delfim Soares Júnior
UFJF

Belo Horizonte, 20 de maio de 2016

“Na infância da humanidade, o homem só aplicava a inteligência à cata do alimento, dos meios de se preservar das intempéries e de se defender dos seus inimigos. Deus, porém, lhe deu a mais do que outorga ao animal, o desejo incessante do melhor; e é esse desejo que lhe impele à pesquisa dos meios de melhorar a sua posição, que o leva às descobertas, às invenções, ao aperfeiçoamento da Ciência, porquanto é a Ciência que lhe proporciona o que lhe falta. Pelas suas pesquisas, a inteligência se lhe engrandece, o moral se lhe depura. Às necessidades do corpo sucedem as do espírito: depois do alimento material precisa ele do alimento espiritual. É assim que o homem passa da selvageria à civilização”.

Allan Kardec

DEDICATÓRIA

*Este trabalho é dedicado a todas as pessoas
as quais ele possa ser útil.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus pelas inúmeras possibilidades de aprendizado que me proporciona todos os dias.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros e Prof. Dr. Marcelo Greco por terem, novamente, aceitado estabelecer essa parceria e, também, por toda paciência, dedicação e colaboração incondicionais que sempre me devotaram.

Ao professor Antônio Huerta (Barcelona – Espanha) por responder prontamente, via e-mail, e auxiliar no esclarecimento de algumas dúvidas sobre a estimativa de erro baseada na Recuperação do Gradiente aplicada a problemas não lineares.

À professora Elena Ferretti (Bolonha – Itália) pela gentileza no envio de vários materiais que contribuíram para meu aprendizado.

Ao professor Luís Manuel Soares dos Santos Castro (Lisboa – Portugal) pela presteza no envio de alguns dados solicitados.

Aos meus pais José Xavier Ferreira e Emar Passos Xavier (*in memoriam*).

À CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

Este trabalho traz uma breve descrição das principais potencialidades do Método dos Elementos Finitos Generalizados e/ou Estendidos (MEFG/MEFX), que fazem deles ferramentas robustas e de desempenho superior na resolução de uma ampla gama de problemas numéricos. Na sequência, é introduzido o conceito de erro de discretização e suas implicações para as análises. O estado da arte dos estimadores de erro “*a posteriori*” é apresentado juntamente com o equacionamento mínimo necessário ao entendimento das peculiaridades inerentes a cada um deles. São elencados alguns dos principais melhoramentos conseguidos até o momento para os estimadores residuais Explícitos e Implícitos, os baseados na Recuperação do Gradiente e no Erro da Relação Constitutiva (ERC) e, por fim, os Orientados ao Objetivo. Especial interesse é devotado às estimativas de erro do tipo Implícitas (Método do Resíduo no Elemento Equilibrado – EERM e Subdomínio-SRM). O desempenho de ambos os estimadores, em termos de eficiência e robustez, é avaliado por intermédio dos respectivos índices de efetividade globais e locais. Esses, por sua vez, originam-se do confronto das soluções numéricas MEFG (de estruturas de concreto bidimensionais) com as respectivas soluções de referência obtidas via MEF. Primeiramente, é feita a análise linear e, num segundo momento, os estimadores são estendidos para aplicação ao caso não linear. As estimativas obtidas são utilizadas, de forma independente, para avaliar a qualidade das simulações em estudo. A não linearidade física é incorporada aos cálculos com o auxílio do Modelo de Dano de Mazars e alguns dos importantes avanços nesse segmento de pesquisa são enfatizados. Essa é, sem dúvida, a primeira vez que o SRM é formulado e aplicado na resolução de problemas dessa natureza.

Palavras-chave: Estimador, Erro *a posteriori*, Método dos Elementos Finitos Generalizados, Método dos Elementos Finitos, não linearidade, Concreto, Dano.

ABSTRACT

This work provides a brief description of the main potentialities of the Generalized Finite Element Method (GFEM), which make it a robust tool for solving a wide range of numerical problems. Next, it is introduced the concept of discretization error and its implications for the numerical analysis. The state of art of a posteriori error estimates is presented along with the necessary formulation to the better understanding of their peculiarities. Some of the currently improvements for the Explicit and Implicit residual estimators, based on the Gradient Recovery, Constitutive Relation Error (CRE) and Goal-Oriented are discussed. Special interest is directed to the implicit error estimators (Equilibrated Element Residual-EERM and Subdomain Residual-SRM). The performance of both estimators (efficiency and robustness) is evaluated by local and global effectiveness indices. These measures, are calculated for GFEM numerical solutions of two-dimensional concrete structures, basing on the analysis of coarse and overkill meshes. Firstly, a problem with linear behavior is analyzed and the investigation procedure of the error measures is validated. In the sequence, the estimators are extended for the nonlinear case and two concrete structures are used to assess the quality of EERM and SRM. The physical nonlinearity is incorporated into the calculations adopting the Mazars damage model and some of the main advances in this research segment are emphasized. Undoubtedly, this is the first time that SRM estimator is formulated and applied in solving problems of this kind.

Keywords: *Estimator, A posteriori error, Generalized Finite Element Method, Finite Element Method, nonlinearity, Concrete, Damage.*

LISTA DE SÍMBOLOS

Π	Funcional de energia
N_j	Função de forma no MEF empregada como Partição da Unidade (PU) no MEFG
\mathfrak{S}_j	Conjunto de funções linearmente independentes
L_{ji}	i -ésima função que multiplica a PU no nó x_j (pode ser polinomial ou não)
φ_{ji}	Função de aproximação do MEFG
ω_j	Nuvem de elementos
\mathbf{u}_j e \mathbf{a}_{ji}	Parâmetros nodais
\mathbf{u}^T	Vetor das componentes das componentes de deslocamento
Γ_D	Região do contorno com condições de Dirichlet
Γ_N	Região do contorno com condições de Neumann
$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$	Vetor de tensões
∇^T	Operador gradiente
\mathbf{b}	Vetor de força de volume
$\mathbf{t}(\mathbf{u})$	Vetor de forças superficiais no contorno
$\hat{\mathbf{u}}$ e $\hat{\mathbf{t}}$	Vetores de deslocamento e tração prescritos
\mathbf{n}	Versor que descreve a orientação do contorno
\mathbf{v}^T	Vetor de funções teste de deslocamento
$\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$	Representações vetoriais compactas dos campos de tensão e deformação
$\boldsymbol{\sigma}_{ef}$	Tensão efetiva
$\boldsymbol{\varepsilon}_{ef}$	Deformação efetiva
H^1	Espaço de Hilbert de ordem 1
\tilde{H}	Espaço dimensão finita
$\tilde{\mathbf{u}}$	Solução aproximada
$B(\cdot, \cdot)$	Operador bilinear
$B_K(\cdot, \cdot)$	Operador bilinear restrito ao elemento
$B_{\omega_j}(\cdot, \cdot)$	Operador bilinear restrito à nuvem

$\ \cdot\ _U$	Norma de energia global
$\ \cdot\ _{U(K)}$	Norma de energia no elemento
θ	Índice de efetividade global
θ_K	Índice de efetividade no elemento
θ_{ω_j}	Índice de efetividade e na nuvem
E^I e E^S	Estimativa de limite inferior e superior
θ^I e θ^S	Índice de efetividade para as estimativas de limite inferior e superior
ρ	Índice de robustez
$\mathbf{r}(\cdot)$	Operador de resíduo global no interior do elemento
$\mathbf{R}(\cdot)$	Operador de resíduo global no contorno do elemento
h_k	Tamanho do elemento
h_γ	Tamanho do lado
P	Partição do domínio
C	Constante genérica
c_1 e c_2	Constantes genéricas oriundas da constante C
K'	Elemento vizinho ao elemento K
η_k	Indicador de erro no método do resíduo explícito
$\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}})$	Vetor de tensões aproximado
$\langle \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}) \rangle_m$	Vetor de tensão média atuante sobre a face do elemento
\mathbf{r}	Resíduo no interior do elemento
\mathbf{R}	Resíduo no contorno do elemento
ζ_K	Função indicadora de erro
$\tilde{\mathcal{S}}$	Espaço dimensão finita (melhorado em relação a \tilde{H})
$\tilde{\varepsilon}_K$	Indicadores de erro no elemento para o ERM
$\tilde{\xi}_{\omega_j}$	Indicadores de erro na nuvem para o ERM
$\mathbf{t}_E(\tilde{\mathbf{u}})$	Vetor de tensões equilibradas no EERM
w^j	Função de ponderação
$\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}})^*$	Vetor de tensões recuperado
\mathbf{w}	Função de influência função no espaço dimensão infinita

$\tilde{\mathbf{w}}$	Função de influência no espaço dimensão finita
\mathbf{u}_R	Aproximação obtida em uma malha mais fina do que $\tilde{\mathbf{u}}$
$B_{\tan g}(\cdot, \cdot)$	Representação tangente da forma bilinear para o problema do erro
\mathbf{K}_{sec}	Matriz de rigidez secante
D	Variável de dano
\mathbf{C}	Matriz de propriedades constitutivas
\mathbf{C}_0	Matriz constitutiva não danificada
Δt	Passo de tempo
P	Base polinomial
$J(x)$	Funcional do erro ponderado da aproximação em x
TOL_{Erro}	Tolerância admitida para o erro relativo global
TOL_U	Tolerância para energia de deformação usada como critério de convergência
l_c	Comprimento característico
Π^h	Operador de interpolação

LISTA DE SIGLAS

PVC	Problema de Valor de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MEFG ^{GL}	Método dos Elementos Finitos com Metodologia Global-Local
MEFPU	Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade
SPH	Método das Partículas Hidrodinâmicas Suavizadas
MGLE	Método de Galerkin Livre de Elementos
RKPM	Método das Partículas com Núcleo Reproduzido
ERM	Método do Resíduo no Elemento
EERM	Método do Resíduo no Elemento Equilibrado
SRM	Método do Resíduo no Subdomínio
ZZ	Zienkiewicz e Zhu
SPR	Superconvergent Patch Recovery
PPR	Polynomial Preserving Recovery
REP	Recovery by Equilibrium in Patches
RCP	Recovery by Compatibility in Patches
PU	Partição da Unidade
XMLS	eXtended Moving Least Squares

LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 1 – Comparação entre indicadores e estimadores de erro (Huerta et al., 1999).</i>	18
<i>Tabela 2 – Valores globais para o caso C1.</i>	51
<i>Tabela 3 – Valores globais para o caso C2.</i>	51
<i>Tabela 4 – Valores globais para o caso C3.</i>	51
<i>Tabela 5 – Indicadores de erro vinculados às nuvens θ_ω para o caso C1.</i>	53
<i>Tabela 6 – Indicadores de erro vinculados às nuvens θ_ω para o caso C2.</i>	53
<i>Tabela 7 – Indicadores de erro vinculados às nuvens θ_ω para o caso C3.</i>	53
<i>Tabela 8 – Indicadores de erro vinculados aos elementos θ_L para o caso C1.</i>	55
<i>Tabela 9 – Indicadores de erro vinculados aos elementos θ_L para o caso C2.</i>	55
<i>Tabela 10 – Indicadores de erro vinculados aos elementos θ_L para o caso C3.</i>	55
<i>Tabela 11 – Possibilidades para adaptatividade dentro do MEFX (BORDAS e DUFLOT, 2014).</i>	78
<i>Tabela 12 – Índices globais.</i>	84
<i>Tabela 13 – Índices de efetividade vinculados aos elementos.</i>	86
<i>Tabela 14 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.</i>	87
<i>Tabela 15 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.</i>	87
<i>Tabela 16 – Índices de efetividade vinculados aos elementos.</i>	89
<i>Tabela 17 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.</i>	89
<i>Tabela 18 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.</i>	90
<i>Tabela 19 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.</i>	90
<i>Tabela 20 – Índices de efetividade vinculados aos elementos.</i>	92
<i>Tabela 21 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.</i>	92
<i>Tabela 22 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.</i>	93
<i>Tabela 23 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.</i>	93
<i>Tabela 24 – Valores globais para os casos C1, C2 e C3.</i>	102
<i>Tabela 25 – Índices de efetividade vinculados às nuvens θ_ω para os casos C1.</i>	103
<i>Tabela 26 – Índices de efetividade vinculados às nuvens θ_ω para os casos C2.</i>	104
<i>Tabela 27 – Índices de efetividade vinculados às nuvens θ_ω para os casos C3.</i>	104
<i>Tabela 28 – Índices de efetividade vinculados aos elementos θ_E para os casos C1</i>	105
<i>Tabela 29 – Índices de efetividade vinculados aos elementos θ_E para os casos C2</i>	105
<i>Tabela 30 – Índices de efetividade vinculados aos elementos θ_E para os casos C3</i>	106

LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 1 – (a) Malha original; (b) extensão-h e (c) extensão-p (Cook, 2001);</i>	6
<i>Figura 2 – Construção das funções de aproximação MEFG: (a) Nuvem com enriquecimento polinomial; (b) Nuvem com enriquecimento especial; (c) Enriquecimento com solução analítica; (d) Enriquecimento com solução numérica [Adaptado de Kim et al. (2008) e Belytschko et al. (2009)].</i>	8
<i>Figura 3 – (a) Elementos compatíveis; (b) Elementos incompatíveis (Adaptado de Bathe, 1991);</i>	9
<i>Figure 4 – Tipos de problemas (Adaptado de Szabó et al., 2004).</i>	10
<i>Figura 5 – Estimadores de Erro “a posteriori”.</i>	14
<i>Figura 6 – (a) domínio em forma de L; (b) partição ou malha de elementos finitos e (c) tipos de nuvens de elementos: (c1) e (c2) problemas de Neumann e (c3) problema misto;</i>	15
<i>Figura 7 – Geometria, malha MEFG e malha de referência (Barros et al., 2013);</i>	19
<i>Figura 8 – O problema físico, seu modelo matemático e computacional.</i>	21
<i>Figura 9 - Interface entre elementos (Lackner e Mang, 2002).</i>	23
<i>Figura 10 – Funções de interpolação associadas com: os cantos, os lados e o interior - funções bolha (Díez et al., 2003).</i>	33
<i>Figura 11 – Método do subdomínio; (a) representação da função partição da unidade para malha quadrada e (b) subdomínio;</i>	36
<i>Figura 12 – (a) Partição da Unidade que se sobrepõe no elemento quadrilateral K; (b) Elemento comum às nuvens $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$</i>	37
<i>Figura 13 – Tipos de subdomínios: (a) subdomínio de nó; (b) subdomínio de elementos.</i>	41
<i>Figura 14 – Koyna dam: (a) geometria; (b) condições de contorno (força e deslocamento) e malha inicial;</i>	48
<i>Figura 15 – Malha para a solução de referência: 7013 elementos quadrilaterais com aproximação quadrática. Medidas em metros;</i>	49
<i>Figura 16 – Regiões com diferentes tipos de enriquecimento.</i>	49
<i>Figura 17 – Índices de efetividade – Limite Superior - C1</i>	52
<i>Figura 18 – Índices de efetividade – Limite Superior - C2</i>	52
<i>Figura 19 – Índices de Efetividade - Limite Superior - C3</i>	52
<i>Figura 20 – Índices de Efetividade - Limite Inferior para C1, C2 e C3</i>	52
<i>Figura 21 – Índices de Robustez para C1, C2 e C3</i>	52
<i>Figura 22 – Índice de efetividade vinculado à Nuvem 20 - C1</i>	54
<i>Figura 23 – Índice de efetividade vinculado à Nuvem 34 - C1</i>	54
<i>Figura 24 – Índice de efetividade vinculado à Nuvem 20 - C2</i>	54
<i>Figura 25 – Índice de efetividade vinculado à Nuvem 34 - C2</i>	54
<i>Figura 26 – Índice de efetividade vinculado a Nuvem 20 - C3</i>	54
<i>Figura 27 – Índice de efetividade vinculado a Nuvem 34 - C3</i>	54
<i>Figura 28 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 12 - C1</i>	56
<i>Figura 29 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 12 - C2</i>	56
<i>Figura 30 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 12 - C3</i>	56
<i>Figura 31 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 15 - C1</i>	56
<i>Figura 32 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 15 - C2</i>	56
<i>Figura 33 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 12 - C3</i>	56

<i>Figura 34 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 22 - C1</i>	57
<i>Figura 35 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 22 - C2</i>	57
<i>Figura 36 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 22 - C3</i>	57
<i>Figura 37 – Distribuição da função erro, projetado em $p+2$, para os casos avaliados.</i>	59
<i>Figura 38 – Diferentes escalas de observação para o concreto (KANG e BITTENCOURT, 1998).</i>	60
<i>Figura 39 – Curva tensão-deformação para material quase frágil (Shah, 1995).</i>	61
<i>Figura 41 – Estrutura e malha de elementos finitos.</i>	63
<i>Figura 41 – Resultados da análise: (a) tração e (b) compressão para o nó 5 com as correspondentes curvas genéricas.</i>	63
<i>Figura 42– Interpretação geométrica para a estimativa de erro no caso não linear (Adaptado de Barros, 2002).</i>	70
<i>Figura 43 – Uso dos estimadores de erro (Adaptado de Hernández et al, 2003).</i>	76
<i>Figura 44 – (a) Malha original com a região que deve ser refinada e malha após aplicação da adaptatividade-r; (b) Superposição de malha em dois níveis na adaptatividade-s.</i>	77
<i>Figura 45 – Adaptatividade no MEFX em problema com trinca (BORDAS e DUFLOT, 2014).</i>	79
<i>Figura 46 – Geometria, condições de contorno (de força e deslocamento) e malha inicial.</i>	82
<i>Figura 47 – Gráfico Forçax Deslocamento para o nó 3.</i>	83
<i>Figura 48 – Malha refinada utilizada na obtenção da solução de referência.</i>	83
<i>Figura 49 – Distribuição do dano na malha refinada.</i>	83
<i>Figura 50 – Índices de efetividade – Limite Superior (Passo 4).</i>	84
<i>Figura 51 – Índices de efetividade – Limite Superior (Passo 20) .</i>	84
<i>Figura 52 – Índices de efetividade – Limite Inferior</i>	85
<i>Figura 53 – Índices de robustez.</i>	85
<i>Figura 54 – Distribuição do dano (Passo 4).</i>	85
<i>Figura 55 – Distribuição do dano (Passo 12).</i>	85
<i>Figura 56 – Distribuição do dano (Passo 20).</i>	85
<i>Figura 57 – Regiões de interesse na análise da malha (2x4): (a) elementos e (b) nuvens.</i>	86
<i>Figura 58 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 5 (Passo 20).</i>	87
<i>Figura 59 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 3 (Passo 20).</i>	87
<i>Figura 60 – Índices de efetividade vinculados à</i>	88
<i>Figura 61 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem 7 (Passo 20).</i>	88
<i>Figura 62 – Distribuição do dano (Passo 4).</i>	88
<i>Figura 63 – Distribuição do dano (Passo 12).</i>	88
<i>Figura 64 – Distribuição do dano (Passo 20).</i>	88
<i>Figura 65 – Mapa da posição dos elementos e nuvens de interesse na malha (4x8).</i>	89
<i>Figura 66 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 25 (Passo 20).</i>	90
<i>Figura 67 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 14 (Passo 20).</i>	90
<i>Figura 68 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem 38 (Passo 20).</i>	91
<i>Figura 69 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem25 (Passo 20).</i>	91
<i>Figura 70 – Distribuição do dano (Passo 4).</i>	91
<i>Figura 71 – Distribuição do dano (Passo 12).</i>	91
<i>Figura 72 – Distribuição do dano (Passo 20).</i>	91
<i>Figura 73 – Mapa da posição dos elementos e nuvens de interesse na malha (8x16).</i>	92

<i>Figura 74 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 53 (Passo 20).</i>	93
<i>Figura 75 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 100 (Passo 20).</i>	93
<i>Figura 76 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem 78 (Passo 20).</i>	94
<i>Figura 77 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem 125 (Passo 20).</i>	94
<i>Figura 78 – Distribuição do erro na malha na 2x4.</i>	94
<i>Figura 79 – Distribuição do erro malha na 4x8.</i>	94
<i>Figura 80 – Distribuição do erro na malha 8x16.</i>	94
<i>Figura 81 – Índices de efetividade EERM erro projetado em $p+2$.</i>	95
<i>Figura 82 – Índices de efetividade para o SRM com erro projetado em $p+2$.</i>	95
<i>Figura 83 - Geometria, condições de contorno (de força e deslocamento) e malha inicial.</i>	97
<i>Figura 84 – Topologia de outras malhas de referência testadas.</i>	99
<i>Figura 85 – Regiões de interesse nas análises: (a) nuvens e (b) elementos;</i>	100
<i>Figura 86 – Malha de referência</i>	100
<i>Figura 87 – Evolução do dano – Passo 20</i>	100
<i>Figura 88 – Evolução do dano – Passo 23</i>	101
<i>Figura 89 – Evolução do dano – Passo 26</i>	101
<i>Figura 90 – Evolução do dano – Passo 29</i>	101
<i>Figura 91 – Evolução do dano – Passo 30</i>	101
<i>Figura 92 – Força x Deslocamento (Raio 1,5 cm) no ponto de aplicação da força.</i>	102
<i>Figura 93 – Força x Deslocamento (Raio 3,0 cm) no ponto de aplicação da força.</i>	102
<i>Figura 94 – Limite Superior (passo 1 ao 20)</i>	103
<i>Figura 95 – Limite Superior (passo 29)</i>	103
<i>Figura 96 – Limite Inferior</i>	103
<i>Figura 97 – Índice de Robustez</i>	103
<i>Figura 98 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem 27 (Passo 29).</i>	104
<i>Figura 99 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem 32 (Passo 29).</i>	104
<i>Figura 100 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 19 (Passo 29).</i>	105
<i>Figura 101 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 22 (Passo 29).</i>	105
<i>Figura 102 – Distribuição do erro no Caso 1</i>	106
<i>Figura 103 – Distribuição do erro no Caso 2</i>	106
<i>Figura 104 – Distribuição do erro no Caso 3.</i>	106
<i>Figura 105 – EERM – Caso 1 – $p+1$</i>	107
<i>Figura 106 – EERM – Caso 1 – $p+2$</i>	107
<i>Figura 107 – EERM – Caso 2 – $p+1$</i>	107
<i>Figura 108 – EERM – Caso 2 – $p+2$</i>	107
<i>Figura 109 – EERM – Caso 3 – $p+1$</i>	107
<i>Figura 110 – EERM – Caso 3 – $p+2$</i>	107
<i>Figura 111 – SRM – Caso 1 – $p+1$</i>	108
<i>Figura 112 – SRM – Caso 1 – $p+2$</i>	108
<i>Figura 113 – SRM – Caso 2 – $p+1$</i>	108
<i>Figura 114 – SRM – Caso 2 – $p+2$</i>	108
<i>Figura 115 – SRM – Caso 3 – $p+1$</i>	108
<i>Figura 116 – SRM – Caso 3 – $p+2$</i>	108
<i>Figura 117 – Ampliação da região danificada ao final do passo 30.</i>	112
<i>Figura 118 – Comprimento característico fixo e variável (Adaptado de Pijaudier-Cabot e Gregórie, 2014)</i>	113

SUMÁRIO

VISÃO GERAL E SÍNTESE DO CONTEÚDO	1
OBJETIVOS GERAIS E ESPECÍFICOS	3
1. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS (MEFG).....	5
1.1 Introdução.....	5
1.2 Classificação das soluções exatas dos problemas da Mecânica Estrutural... 	10
2. O PROBLEMA DO ERRO NO CONTEXTO DO MEFG: CASO LINEAR.....	13
2.1 Introdução.....	13
2.2 Problema modelo.....	15
2.2 Definição geral do erro	17
2.2.1 Campos estáticamente e cinematicamente admissíveis e a propriedade do limite superior	23
2.2.2 Características do estimador de erro ideal	25
2.3 Estimativas de erro “a posteriori”	25
2.3.1 Estimadores de erro Explícitos.....	26
2.3.2 Estimadores de erro Implícitos.....	29
2.3.2.1 O Método do Resíduo no Elemento (ERM).....	29
2.3.2.2 O Método de Resíduo no Elemento Equilibrado (EERM).....	32
2.3.2.3 O Método de Resíduo no Subdomínio	36
2.3.3 Estimadores de erro Baseados na Recuperação do Gradiente	39
2.3.3.1 Relação entre as estimativas do tipo residual e de recuperação.....	43
2.3.4 Estimador de erro na Relação Constitutiva (CRE – <i>Constitutive Error Relation</i>).....	44
2.3.5 Estimador de erro Orientado ao Objetivo	45
2.4 Exemplo numérico	48
2.4.1 Koyna Dam linear	48
3. NÃO LINEARIDADE DO MATERIAL: O DANO NO CONCRETO	60
3.1 Introdução.....	60
3.2 O comportamento não linear do concreto	61
3.3 O modelo de dano isotrópico.....	62
3.4 Mecânica do contínuo clássica x regularizado	63

4. O PROBLEMA DO ERRO NO CONTEXTO DO MEFG: CASO NÃO LINEAR	67
4.1 Linearização da equação do erro.....	67
4.2 Componentes do erro: espacial e de linearização.....	75
4.3 Modificação da discretização espacial.....	77
4.4 Procedimento adaptativo baseado na avaliação do erro	79
4.5 Exemplos numéricos	81
4.5.1 Viga parede	81
4.5.2 Chapa com entalhe	97
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	111
5.1 SÍNTESE.....	113
5.2 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	115
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	118
A1. ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA	129
A2. PROCEDIMENTO NUMÉRICO PARA OBTENÇÃO DO ERRO DE REFERÊNCIA	131
A.3 O MODELO DE DANO ISOTRÓPICO DE MAZARS (1984).....	134
A.4 TRANSFERÊNCIA DE VARIÁVEIS	136

INTRODUÇÃO

VISÃO GERAL E SÍNTESE DO CONTEÚDO

Muitas questões referentes ao Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) já foram solucionadas, algumas, provavelmente, estão próximas de serem e outras necessitam ainda de considerável pesquisa adicional.

Esse é o caso, por exemplo, da avaliação do erro de discretização em um contexto essencialmente não linear. A obtenção de limites inferiores e superiores confiáveis para os estimadores *a posteriori* (que sejam comprovadamente próximos à solução exata e/ou de referência e, claro, obtidos a um custo computacional razoável) é, sem dúvida, de grande interesse prático. Esses limites são o ingrediente principal dos procedimentos adaptativos e funcionam como matéria-prima para obtenção da modalidade de estimadores Orientados ao Objetivo.

Este trabalho pode ser visto como sendo a continuidade do trabalho de Barros (2002). Porém, aqui o interesse é totalmente direcionado para o desempenho dos estimadores de erro *a posteriori* do tipo residuais: Método do Resíduo no Elemento Equilibrado – EERM (limite superior) e Método do Subdomínio – SRM (limites superior e inferior), com vistas a uma possível aplicação na condução da adaptatividade-*e* (associada ao enriquecimento polinomial da função de partição da unidade) durante a resolução de problemas envolvendo o comportamento não linear do concreto, especificamente o dano. Apenas a análise do erro é discutida aqui porque ela é, certamente, a componente mais crítica da estratégia adaptativa para problemas desse tipo.

O modelo de dano de Mazars (1984) é o responsável pela incorporação da não linearidade física aos cálculos. Em Barros (2002) o EERM é adaptado para a abordagem do MEFG e, em seguida, estendido para que o erro seja estimado ao longo do procedimento de solução de um problema com não linearidade física. Neste trabalho, a mesma extensão é realizada para o SRM, partindo-se do trabalho de Barros *et al.* (2013). Antes, porém, estes métodos são interpretados dentro do cenário

atual de investigação dos estimadores de erros para o MEFG. Ao final, o desempenho destas duas técnicas de estimativa de erro é avaliado para a análise estrutural, em domínio bidimensional, com comportamento fisicamente linear e não linear.

Ambos os estimadores se encontram fortemente respaldados por uma base matemática sólida. A diferença básica entre as duas abordagens está no fato de que as estimativas de erro locais construídas em subdomínios da malha de elementos finitos adequam-se diretamente à estratégia de enriquecimento do MEFG, que é associada às nuvens, ou parcelas de elementos coincidentes com aqueles subdomínios. Por outro lado, no Método do Resíduo no Elemento Equilibrado, sendo os erros locais vinculados a cada elemento, torna-se necessário que um “pós-processamento” seja realizado para se adaptar à abordagem baseada em nuvens do MEFG. Independentemente da técnica para cálculo do erro, os índices de efetividade (tanto locais quanto globais), obtidos pela razão entre as medidas de erro aproximado e exato (ou equivalente), fornecem informação importante sobre o desempenho da estimativa do erro, a partir de limites pré-estabelecidos para a faixa de variação dos mesmos.

Com base na revisão bibliográfica, concluída ainda na fase do projeto de pesquisa, é prontamente assumido que o MEFG não apresenta qualquer inconveniente para a resolução de problemas que envolvem duas escalas tão distintas (macro e micro), como é o caso aqui. Mesmo que seja utilizada uma discretização inicial relativamente grosseira, ainda assim, a convergência não será impactada (veja Apêndice 1).

O equacionamento matemático do método não será apresentado aqui e pode ser visto na íntegra em Barros (2002). Como complemento, sugere-se o trabalho de Fries e Belytschko (2010), que traz uma revisão completa desses métodos (MEFG/MEFX) e suas aplicações. A propósito, variações do MEFG tais como o MFEGS (MEFG estável) e o MEFG- Ck (a extensão ‘ Ck ’ diz respeito à continuidade das funções base) podem ser encontradas em Gupta *et al.* (2015) e Torres e Barcellos (2015), respectivamente.

Todos os resultados e conclusões que serão apresentados derivam da divisão do estudo em dois segmentos distintos: no primeiro, o interesse manteve-se focado no problema do erro de discretização (devido ao uso de malhas mais grosseiras) e, principalmente, no entendimento das limitações, potencialidades e campos de

aplicação das principais estimativas existentes para problemas de comportamento linear. Esse estudo deu origem a uma breve revisão do estado da arte das mesmas, o que possibilitou delinear resumidamente os principais avanços que foram conseguidos até o momento, especificamente sob o enfoque do MEFG. O segundo segmento, por sua vez, é voltado para problemas com comportamento fisicamente não linear, em virtude da manifestação do processo de dano no meio em que o material é o concreto. A complexidade deste fenômeno e a diversidade de parâmetros envolvida, a necessidade de se avaliar/controlar o erro de discretização no espaço e no tempo, bem como a ausência de soluções analíticas para a obtenção do que seria o erro exato foram as questões avaliadas neste trabalho.

As simulações numéricas do comportamento de materiais com localização de deformações (devido à formação e coalescência de microfissuras), como é o caso do concreto, não são capazes de descrever, adequadamente, a espessura da localização e a distância entre elas (i.e a zona de processos de fratura). Elas sofrem de sensibilidade da malha (refinamento e alinhamento) e produz resultados questionáveis. As deformações tendem a se concentrar em um único elemento e as curvas força *versus* deslocamento exibem dependência da malha (especialmente no regime de pós-pico). A razão é que as equações diferenciais mudam de tipo (de elípticas para hiperbólicas) (BOBINSK e TEJCHUMAN, 2005). O Problema de Valor de Contorno (PVC) se torna mal posto, isto é, não tem solução única com dependência contínua dos dados (JIRÁSEK, 2002). Como será discutido em momento oportuno, o uso da abordagem não local, como técnica de regularização, é um dos recursos mais utilizados para coibir a ocorrência dessas manifestações altamente indesejáveis.

OBJETIVOS GERAIS E ESPECÍFICOS

O objetivo geral, do presente estudo, é fornecer mais uma contribuição para solidificar as bases do MEFG e contribuir para sua ampla disseminação (i.e. pesquisas acadêmicas/aplicações práticas), de modo a proporcionar aos usuários finais uma ferramenta que lhes permita tratar de forma simples e elegante os problemas complexos de engenharia com os quais lidam.

Como objetivos específicos, os seguintes tópicos podem ser elencados como sendo primordiais:

- (1) – Examinar a faixa de variação dos índices de efetividade de limite superior do EERM e do SRM (locais e globais), com especial interesse ao enfoque não linear;
- (2) – Utilizar os índices de efetividade para avaliar a qualidade e a estabilidade das simulações com vistas a uma possível utilização desses estimadores em um ambiente essencialmente adaptativo, com o uso da técnica de transferência de variáveis proposta em Barros (2002);
- (3) – Tendo por base as observações no item (1), definir qual das duas estimativas seria a mais apropriada ao contexto do MEFG e, principalmente à condução da adaptatividade-*e*;

Essa é a primeira vez que estimativas de erro para o MEFG foram avaliadas no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas (PROPEES). Até então, apenas trabalhos voltados para aplicações gerais desse método numérico e do MEFG Global-Local tinham sido objeto de estudo. É, também, a primeira vez que um dos estimadores considerados neste trabalho é formulado e aplicado para a análise não linear de estruturas de concreto.

ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Com relação ao conteúdo específico do texto, a disposição de assuntos é descrita de forma resumida a seguir.

O Capítulo 1 traz uma breve descrição das potencialidades do Método dos Elementos Finitos Generalizados e a classificação de problemas da mecânica estrutural.

O Capítulo 2 traz as definições mais importantes para o estudo do erro no contexto do MEFG, o equacionamento necessário ao entendimento de cada uma das estimativas, juntamente com uma breve descrição dos avanços conseguidos. É apresentado um exemplo de aplicação no caso linear.

O Capítulo 3 apresenta o modelo de dano de Mazars e os principais aspectos relativos à modelagem numérica do concreto.

O Capítulo 4 trata da questão do erro no contexto não linear. A necessidade de se proceder a uma discretização no tempo e no espaço e as principais implicações. São apresentados dois exemplos numéricos para o caso não linear.

O Capítulo 5 faz um relato das principais observações e conclusões, além de algumas sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 1

1. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS (MEFG)

1.1 Introdução

O Método dos Elementos Finitos Generalizados – MEFG (Strouboulis *et al.*, 2000 a e b) ou Método dos Elementos Finitos Estendidos – MEFX (Belytschko *et al.*, 1999) são o resultado de várias pesquisas desenvolvidas para os Métodos Sem Malha como, por exemplo, o método *hp-clouds* de Duarte *et al.* 1996 e Método da Partição da Unidade de Melenk e Babuska, 1996 (muitas das técnicas utilizadas nos primeiros estão diretamente relacionadas com as que foram desenvolvidas para os segundos) e do entendimento de que existia uma grande quantidade de códigos e um amplo legado de robustos algoritmos, baseados no MEF, que não seria conveniente descartar. Ambos os métodos são baseados em malha (podem ser usados com malhas estruturadas e não estruturadas) e realizam o enriquecimento extrinsecamente. Portanto, segundo Belytschko *et al.* (2009), a distinção entre as duas modalidades tornou-se muito vaga e sem sentido. Nesse trabalho ele será referido como MEFG apenas.

Esses métodos propõem preservar toda a infraestrutura existente e estendê-la tão somente onde se fizer necessário. Essa perspectiva pode ser observada no trabalho de Strouboulis *et al.* (2000a), onde foi mostrado que o MEFG poderia ser facilmente incorporado aos códigos de MEF existentes, bastando, para isso, a adição de apenas alguns códigos especializados.

Nesse momento, é oportuno lembrar que o MEF disponibiliza as extensões h , p e hp , (Szabó & Babuska, 1991) que são diferentes maneiras de construir seqüências hierárquicas de espaços de elementos finitos, objetivando reduzir erros de discretização. Na extensão- h , o grau polinomial dos elementos é mantido fixo, tipicamente em algum número baixo, tal como $p=1$ ou $p=2$ e o número de elementos é aumentado, simultaneamente ou não, para que h seja progressivamente reduzido, Figura 1(b). Essa estratégia pode ser usada até que os limites impostos pela capacidade do computador sejam atingidos e os erros de operações de ponto

flutuante sejam alcançados. Na extensão- p a malha é mantida fixa e o grau polinomial da aproximação, em um conjunto de elementos ou mesmo de toda a malha, é aumentado, Figura 1(c). Essa estratégia pode continuar até que o polinômio de ordem mais alta codificado no programa seja usado (Cook, 2001). Simultaneamente, refinando a malha e aumentando o grau polinomial dos elementos, de maneira uniforme ou seletiva, tem-se a extensão hp (Babuska & Suri, 1990). Outras estratégias, para a construção de uma solução numérica mais adequada ao problema, são os refinamentos do tipo r e s . O primeiro refere-se à redistribuição dos elementos na malha buscando uma configuração que aproxime melhor o comportamento do problema aproximado (Zienkiewicz *et al.*, 2010). Já o refinamento do tipo s consiste na sobreposição hierárquica de diversos níveis de malha à original, conforme proposto por Fish (1992).

Sem dúvida, é de grande importância prática saber como o primeiro espaço S_1 , na Figura 1(a), deve ser construído, bem como saber quando e de que forma as extensões devem ser usadas.

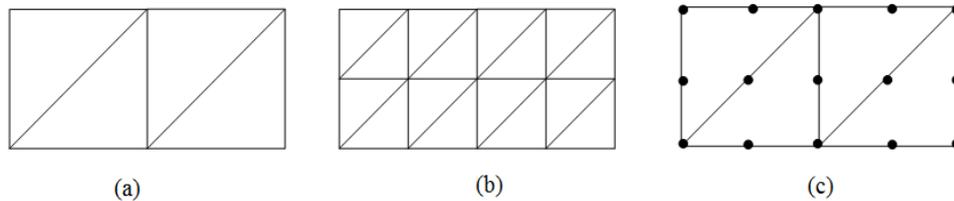


Figura 1 – (a) Malha original; (b) extensão-h e (c) extensão-p (Cook, 2001);

No MEFG, por outro lado, o enriquecimento polinomial está vinculado às nuvens e não mais aos elementos como no MEF. Esse método faz uso da propriedade da Partição da Unidade (PU) para construir um espaço de elemento finito conforme aumentado.

Para tal, partindo-se de uma malha convencional de elementos finitos formada a partir de N pontos nodais $\{x\}_{j=1}^N$, em um domínio aberto e limitado Ω , define-se uma região ou nuvem ω_j , obtida pela união dos elementos que compartilham o ponto nodal x_j . Um conjunto das funções interpoladoras N_j como, por exemplo, as de Lagrange, associadas ao nó x_j , estabelece uma função partição da unidade, de suporte compacto ω_j , de tal modo que:

$$\sum_{j=1}^N N_j(x) = 1 \quad (1)$$

Considere, também, os conjuntos formados por q_j funções linearmente independentes definidas em cada nó x_j com suportes nas nuvens ω_j :

$$\mathfrak{T}_j \stackrel{def}{=} \{1, L_{j1}, L_{j2}, \dots, L_{jq_j}\} \quad (2)$$

É interessante verificar que no GFEM a constante $\mathfrak{T}_j = 1$ estará sempre incluída na base local, para qualquer família de funções especiais, a fim de que o movimento de corpo rígido possa ser reproduzido. Caso essa constante seja o único membro do espaço, a aproximação se reduz, exatamente, ao FEM padrão (Fries & Belytschko, 2010).

Para a construção das funções de forma φ_j , que estarão vinculadas ao nó x_j , as funções Partição da Unidade (PU) são enriquecidas com a multiplicação pelos componentes do conjunto da Eq. (2) o que resulta em:

$$\{\varphi_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = N_j(x) \times \{1, L_{j1}, L_{j2}, \dots, L_{jq_j}\} \quad (3)$$

A aproximação global resultante, para os deslocamentos sobre o domínio Ω , denotada como $\tilde{u}(x)$ pode então ser escrita como uma combinação linear das funções de forma associadas a cada nó, como a seguir:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^N N_j(x) \mathbf{u}_j}_{FEM\ PADR\tilde{A}O} + \underbrace{\sum_{j=1}^N N_j(x) \sum_{i=1}^{q_j} L_{ji}(x) \mathbf{a}_{ji}}_{APROXIMA\tilde{C}\tilde{A}O\ LOCAL} \quad (4)$$

FEM PADRÃO *APROXIMAÇÃO LOCAL*

onde \mathbf{u}_j e \mathbf{a}_{ji} são vetores de parâmetros nodais associados com as funções N_j e L_{ji} respectivamente. A continuidade dessa função sobre o domínio inteiro é assegurada pelo suporte compacto da partição da unidade, ou seja, $N_j(x) = 0$ no contorno de ω_j . As funções especiais determinam as características locais da aproximação resultante (Barros *et al.*, 2004).

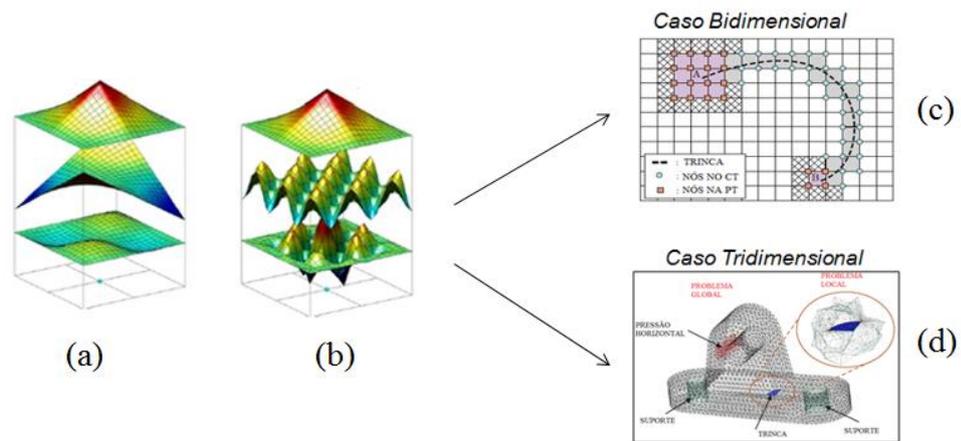


Figura 2 – Construção das funções de aproximação MEFG: (a) Nuvem com enriquecimento polinomial; (b) Nuvem com enriquecimento especial; (c) Enriquecimento com solução analítica; (d) Enriquecimento com solução numérica [Adaptado de Kim et al. (2008) e Belytschko et al. (2009)].

A robustez desta estratégia de enriquecimento é baseada no fato que o espaço de elemento finito padrão pode ser ampliado por meio da adição de funções polinomiais, Figura 2(a) ou especiais, Figura 2(b). As funções especiais, por sua vez, podem ser analíticas, Figura 2(c) ou numéricas, Figura 2(d). As funções analíticas refletem a informação previamente conhecida sobre o Problema de Valor de Contorno (PVC) e sobre os dados de entrada. Essas funções são multiplicadas pela Partição da Unidade e “costuradas” com a base de elementos finitos existente para construir um espaço de elementos finitos conforme aumentado (Strouboulis *et al.*, 2000a). Portanto, a aproximação local (fornecida por funções polinomiais ou especiais) pode ser incluída e, simultaneamente, a infraestrutura dos códigos de elementos finitos é mantida (Strouboulis *et al.*, 2000a). A possibilidade de as funções de enriquecimento serem obtidas numericamente é outro grande atrativo desse método. Isto porque, em contraste aos problemas da elasticidade bidimensional (cujos estudos encontram-se bem solidificados), as soluções gerais das equações da elasticidade tridimensional ainda não foram alcançadas. De qualquer modo, a fim de que soluções bidimensionais possam ser usadas como enriquecimento em problemas tridimensionais é necessário utilizar uma malha mais fina pois, em geral, essas funções não são capazes de fornecer soluções precisas em malhas tridimensionais grosseiras (Kim *et al.*, 2010).

Duarte *et al.* (2008) apresentaram um procedimento dentro da estrutura MEFG chamado Método dos Elementos Finitos Generalizados Global-Local que permite solucionar esse inconveniente. Esta metodologia foi originalmente proposta para

modelar, eficientemente, problemas de propagação de fratura e, após vários estudos, conclui-se que essa metodologia seria uma boa alternativa também para a análise não linear e, claro, para problemas tridimensionais. O procedimento Global-Local permite incorporar na análise global o comportamento local sem onerar o custo computacional.

Obviamente, o MEFG permite reduzir substancialmente a necessidade de refinamento- h em subdomínios (especialmente em modelos bidimensionais) e sua implementação é muito mais simples do que o refinamento- p no MEF (onde é necessário cuidado especial para combinar dois elementos adjacentes de ordens diferentes). Elementos incompatíveis, como na Figura 3(b), são indesejáveis porque eles afetam negativamente a convergência da solução, o que torna tanto a estimação de erro quanto o procedimento adaptativo sem significado. O MEFG mostra-se mais vantajoso mesmo quando comparado à versão- hp do MEF, porque permite efetuar refinamentos locais de uma forma seletiva (em partes da estrutura que são de interesse) e, também a introdução de diferentes tipos de enriquecimento em um mesmo elemento.

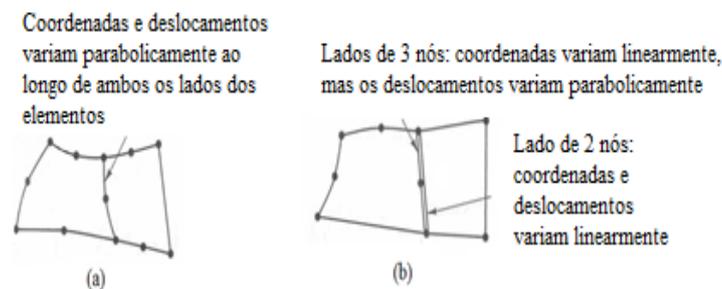


Figura 3 – (a) Elementos compatíveis; (b) Elementos incompatíveis (Adaptado de Bathe, 1991);

Uma vez constatada a versatilidade do MEFG, muitos estudos continuam sendo desenvolvidos com o objetivo de aprimorar ainda mais esses métodos. Essa tendência está refletida em alguns trabalhos como, por exemplo, em Tadano (2010), onde foi apresentada uma formulação original para um elemento finito tridimensional na estrutura do MEFG, que, segundo o autor, é capaz de evitar a dependência linear. Também em 2010, Tadano & Nogushi propuseram um elemento generalizado que pode ser utilizado em análises bidimensionais, geometricamente não lineares, que é capaz de reproduzir o modo de deformação quadrática com apenas os nós dos vértices e, também, não demonstra dependência linear. Li (2011)

efetuou um estudo do comportamento assintótico do número de condição de uma classe de Métodos de Elementos Finitos Generalizados visando o desenvolvimento de técnicas efetivas para a resolução dos sistemas. Mousavi & Sukumar (2010) apresentaram novas regras de quadratura Gaussiana para problemas envolvendo descontinuidades e singularidades.

1.2 Classificação das soluções exatas dos problemas da Mecânica Estrutural

Uma forma primária de controlar o erro de discretização é escolher o método numérico mais apropriado para resolver o problema à mão e tirar proveito de todos os recursos que o mesmo disponibiliza.

Inicialmente, é interessante estabelecer uma classificação simples para a solução exata (u_{EX}), que pode ser uma função tanto escalar quanto vetorial, em três categorias distintas (baseando-se em uma informação prévia disponível sobre sua regularidade) (Szabó *et al.*, 2004):

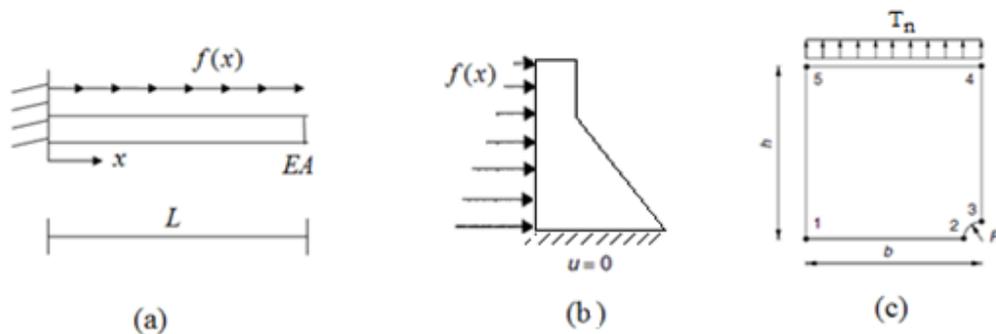


Figure 4 – Tipos de problemas (Adaptado de Szabó *et al.*, 2004).

Categoria A: u_{EX} é analítico em toda parte, sobre o domínio da solução, incluindo os contornos (carregamento, condições de contorno e geometrias suaves). Por exemplo, para a barra elástica linear da Figura 4(a), fazendo $f(x) = -sen(8x)$, chega-se a uma solução da forma $u_{EX} = -(1/64)sen(8x) + (1/8)cos(8x)$;

Categoria B: u_{EX} é analítico em toda parte sobre o domínio da solução, incluindo os contornos, com exceção de um número finito de pontos de descontinuidade geométrica (ou no caso tridimensional, um número finito de pontos e lados). Os locais onde a solução não é analítica são chamados de pontos singulares (caso bidimensional) ou lados singulares (caso tridimensional). Esses pontos podem

ocorrer também devido a mudanças abruptas nas condições de contorno, Figura 4(b). Os problemas nesta categoria são descritos por dados que são parcialmente analíticos.

Em situações onde existam singularidades no canto e nas interseções das interfaces do material em problemas bidimensionais, a solução exata pode, tipicamente, ser escrita como $u_{ex} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i r^{\lambda_i} F_i(\theta)$ com $r < \kappa$ e $\lambda_{\min} > 0$. Nessa equação r e θ são coordenadas polares centradas no ponto singular, A_i e λ_i são números reais, F_i é uma função vetorial analítica (ou analítica por partes) e κ é o raio da convergência para a solução em série u_{EX} . Esta equação é referida como uma expansão assintótica na vizinhança de um ponto singular. Expressões análogas podem ser escritas para os casos uni e tridimensionais com $\lambda_{\min} > 1 - d/2$, onde d é o número de dimensões espaciais. O valor mínimo de λ_i associado ao coeficiente A_i não nulo caracteriza a regularidade (comumente chamada “suavidade”) da solução exata, como mostrado em Barros *et al.* (2013). A grande maioria dos problemas práticos na mecânica dos sólidos pertence a esta categoria.

Categoria C: u_{EX} não pode ser incluído em nenhuma das categorias anteriores. Os problemas não apresentam uma estrutura reconhecível (meios altamente heterogêneos), além de problemas envolvendo plasticidade, dano, etc. Um exemplo seria um quarto de uma chapa com furo (tracionada na face superior) cujo material apresenta um comportamento não linear qualquer (dano, plasticidade, elastoplasticidade, etc.), Figura 4(c).

O MEF não encontra dificuldades para a representação de problemas pertencentes à *Categoria A*. As extensões h , p e hp auxiliam na construção de sequências hierárquicas de espaços de elementos finitos, auxiliando na redução dos erros de discretização. Obviamente, as extensões hp são uma maneira mais eficiente de controlar o erro de aproximação haja vista que elas combinam as propriedades das extensões h (que com projeto de malha adequado a taxa de convergência torna-se independente da suavidade de u_{EX}) com a propriedade das extensões p , onde a taxa de convergência é exponencial quando u_{EX} é suave (Szabó & Babuska, 1991). De qualquer forma, o método apresenta algumas limitações. Embora os polinômios tenham propriedades de aproximação excepcionais, existem situações em que eles

não são efetivos como, por exemplo, em problemas onde as soluções não são suaves ou mesmo descontínuas. Pelo fato de a interpolação ser baseada na malha, os elementos não podem ser divididos (uma trinca não pode propagar dentro do elemento) e/ou distorcidos, já que malhas de baixa qualidade conduzem a erros maiores. Isso, claro, dificulta a simulação de descontinuidades móveis.

As características do MEFG tornam o método uma poderosa ferramenta para a análise de problemas físicos nas *Categorias B e C*. Particularmente, na Mecânica Estrutural existem vários exemplos de soluções não suaves (descontinuidades, singularidades, altos gradientes, etc.) onde no MEF seria necessário o emprego de uma malha muito refinada. A motivação básica do MEFG é justamente procurar a independência da malha para a modelagem dessas entidades. (i.e. trincas e outras características não são impedidas de atravessarem os elementos diferentemente do que ocorre no MEF). Conseqüentemente, malhas simples e fixas podem ser usadas na simulação ficando sua construção e manutenção reduzida significativamente (Fries & Belytschko, 2010).

Sem dúvida, a flexibilidade do MEFG faz com que a precisão local e global do MEF clássico possa ser significativamente aumentada com a adição de apenas alguns poucos graus de liberdade.

CAPÍTULO 2

2. O PROBLEMA DO ERRO NO CONTEXTO DO MEFG: CASO LINEAR

2.1 Introdução

Um aspecto relevante, destacado por Ródenas *et al.* (2010), é o fato de o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) ser particularmente afetado pelo erro de discretização. Isso se deve ao fato de que essas técnicas são frequentemente utilizadas com parâmetros de aproximação (h , p , etc.) relativamente grosseiros, resultando em um erro relativo maior (algo em torno de 40% ou mais na norma de energia). Daí a importância de se estabelecer as bases da estimação de erro *a posteriori* para esses métodos (Strouboulis *et al.* 2006).

Os estimadores de erro são as ferramentas, atualmente disponíveis, que dão aos analistas informações sobre a convergência e a precisão das soluções numéricas. Eles são classificados em duas categorias distintas: os estimadores “*a priori*” (Apêndice 1) e os estimadores “*a posteriori*”. A primeira categoria baseia-se em algumas informações gerais sobre a solução exata e indicam o quão rápido o erro muda quando a discretização é modificada. São essenciais para analisar a convergência, porém são incapazes de dar uma representação adequada do erro computacional. A segunda categoria faz uso da própria solução de elementos finitos com o intuito de apresentar uma medida representativa de sua qualidade, bem como, definir medidas locais que sirvam para alertar sobre as regiões com erros excessivamente altos (REPIN e VALDMAN, 2009).

Dentro da classe geral de estimativas de erro “*a posteriori*” existem, basicamente, quatro grupos de técnicas, Figura 5. O primeiro grupo baseia-se no chamado Erro na Relação Constitutiva (CRE), que, como o próprio nome sugere, direciona a dúvida para a equação correspondente ao comportamento do material. O segundo grupo é composto por uma grande família de métodos, genericamente chamada de métodos residuais, cujo foco é direcionado às deficiências na garantia de estabilidade da solução numérica. Esses estimadores podem ser do tipo Explícito (envolve um cálculo direto usando os dados disponíveis) ou Implícito (envolve a

solução de um sistema de equações algébricas, no nível do elemento ou em subdomínios de elementos). O terceiro grupo é composto pelos métodos baseados na Suavização do Gradiente que se utilizam do fato de que a solução numérica é, em geral, descontínua entre elementos. Nessa abordagem de avaliação do erro, os gradientes são suavizados a fim de que possam ser confrontados com os gradientes não suavizados. Já os estimadores do tipo Orientados ao Objetivo fazem parte do quarto grupo e são considerados como sendo uma espécie de extensão das estimativas de erro “*a posteriori*”. Essa modalidade parte do pressuposto que em muitas aplicações práticas não é suficiente avaliar o erro na norma de energia apenas, ou seja, é comum haver casos onde o interesse do usuário encontra-se focado em magnitudes específicas e, claro, no desenvolvimento de procedimentos adaptativos voltados para obtenção de malhas ótimas para resolver para essas magnitudes.

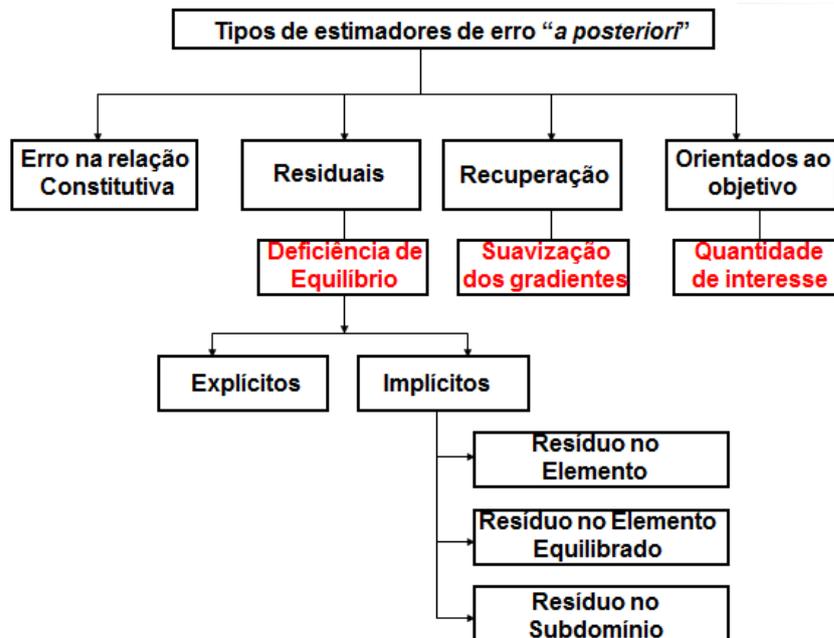


Figura 5 – Estimadores de Erro “*a posteriori*”.

O conhecimento das particularidades inerentes a cada um dos estimadores é de suma importância, haja vista que das diferentes abordagens podem decorrer não só vantagens, como também inconveniências, que por serem intrínsecas a cada um deles, não podem ser contornadas, como fazem notar Tetambe *et al.* (1995): “Um estimador que funciona bem em um caso pode, simplesmente, não ser aplicável a outro”. Alguns desses aspectos devem, necessariamente, ser considerados no momento da escolha do estimador, tais como: (LADEVÈZE e PELLE, 2005):

Qualidade intrínseca (possibilita que o erro medido seja comparado com o erro “verdadeiro” realmente cometido); Confiabilidade (o erro estimado é um limite superior do erro “verdadeiro”); Sensibilidade a configurações particulares da malha (malhas grosseiras, elementos com altas taxas de aspecto, elementos distorcidos). Sensibilidade a tipos particulares de comportamento (material isotrópico, anisotrópico...); Economia (fácil implementação, custo de utilização...); Extensão do domínio de aplicação (aplicação a problemas lineares e não lineares).

A seguir, são apresentadas algumas definições importantes para o estudo do erro bem como o raciocínio que conduz a cada um dos tipos de estimativas “*a posteriori*” na Figura 5. O objetivo é unificar a notação para ressaltar as principais características de cada uma das abordagens e, dessa forma, facilitar a percepção de seus pontos fortes e fracos. A sequência em que essas estimativas aparecem no texto foi escolhida de forma didática e independente da ordem cronológica de proposição das mesmas.

2.2 Problema modelo

Seja o Problema de Valor de Contorno PVC que exprime o equilíbrio na forma forte e em função dos deslocamentos, em um ponto aberto do domínio e limitado $\Omega \in \mathbb{R}^2$, Figura 6. O contorno é decomposto como $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ com $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$.

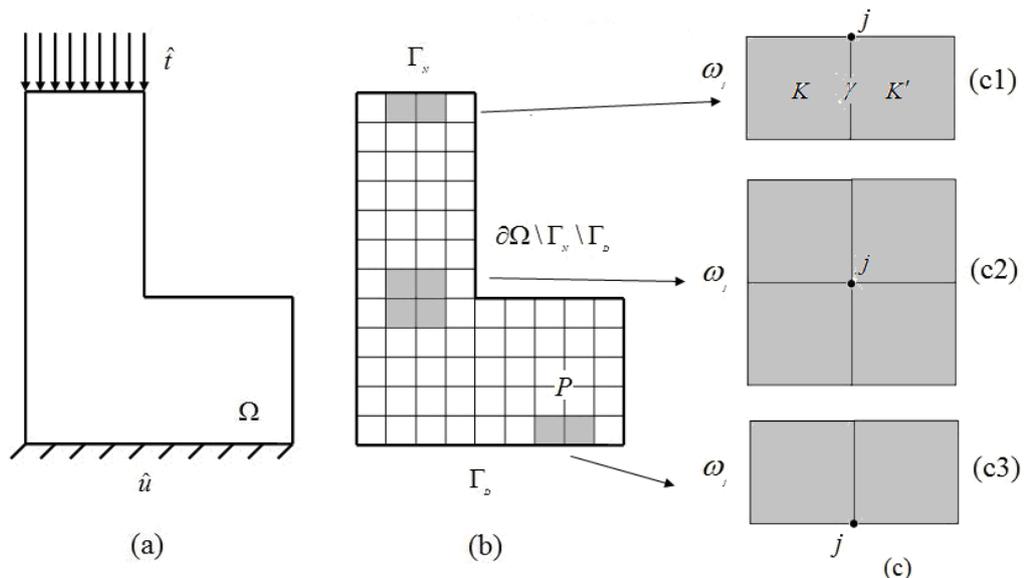


Figura 6 – (a) domínio em forma de L; (b) partição ou malha de elementos finitos e (c) tipos de nuvens de elementos: (c1) e (c2) problemas de Neumann e (c3) problema misto;

Encontre \mathbf{u} , tal que:

$$\nabla^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} = 0 \text{ no } \Omega \text{ (a)}$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ no } \Gamma_D \text{ (b)}$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{t}} \text{ no } \Gamma_N \text{ (c)}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \text{ (d)}$$

(5)

sendo:

$\mathbf{u}^T \stackrel{def}{=} [u_x \ u_y]$ é o vetor das componentes de deslocamento nas direções dos eixos x e

y ;

Γ_D = região do contorno onde as condições de Dirichlet são definidas;

Γ_N = região do contorno onde as condições de Neumann são definidas;

$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ = vetor de tensões;

$$\nabla^T = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \text{ (operador gradiente);}$$

\mathbf{b} = vetor das forças de volume;

$\mathbf{t}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$, vetor de forças superficiais no contorno $\partial\Omega$;

$\hat{\mathbf{u}}$ e $\hat{\mathbf{t}}$ vetores de deslocamento e tensões prescritos;

\mathbf{n} versor que descreve a orientação do contorno $\partial\Omega$;

Com a seguinte forma variacional correspondente:

$$\text{Encontre } \mathbf{u} \in H^1 \text{ tal que: } B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H^1 \quad (6)$$

onde H^1 é o espaço de Hilbert de ordem 1;

As formas bilinear e linear, respectivamente, são definidas como:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV \quad (7)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_N} \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{t}} dS \quad (8)$$

$\mathbf{v}^T \stackrel{def}{=} [v_x \ v_y]$ é o vetor das funções teste de deslocamento em x e y ;

$\boldsymbol{\sigma} \stackrel{def}{=} [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{xy}]$ e $\boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{def}{=} [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_{xy}]$ são representações vetoriais compactas dos campos de tensão e deformação. Sendo \mathbf{C} a matriz de propriedades constitutivas elásticas.

A aproximação de Galerkin para a Eq. (6) corresponde a uma solução pertencente ao espaço de dimensão finita $\tilde{H} \subset H^1$, construído por funções de forma MEEG cinematicamente admissíveis, o que resulta em:

$$\text{Encontrar } \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{H} \text{ tal que: } B(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = l(\tilde{\mathbf{v}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{H} \quad (9)$$

Para as aproximações globais generalizadas, $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\tilde{\mathbf{v}}$, tem a forma descrita nas Eqs. (10) e (11):

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N N_j(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^{n_j^p} L_{jk}^p(\mathbf{x}) \mathbf{b}_{jk}^p + \sum_{l=1}^{n_j^s} L_{jl}^s(\mathbf{x}) \mathbf{b}_{jl}^s \right\} \Rightarrow \tilde{\mathbf{u}} = \Phi^T \mathbf{U} \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N N_j(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{v}_j + \sum_{k=1}^{n_j^p} L_{jk}^p(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{jk}^p + \sum_{l=1}^{n_j^s} L_{jl}^s(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{jl}^s \right\} \Rightarrow \tilde{\mathbf{v}} = \Phi^T \mathbf{V} \quad (11)$$

O vetor $\Phi^T = [\Phi_j^T]_{j=1}^N$ consiste dos seguintes elementos associados com cada um dos N subdomínios ω_j :

$$\Phi_j^T = \left[N_j(\mathbf{x}) \quad [N_j(\mathbf{x}) L_{jk}^p(\mathbf{x})]_{k=1}^{n_j^p} \quad [N_j(\mathbf{x}) L_{jl}^s(\mathbf{x})]_{l=1}^{n_j^s} \right] \quad (12)$$

onde n_j^p é a quantidade de funções polinomiais $\sum_{k=1}^{n_j^p} L_{jk}^p(\mathbf{x})$ e n_j^s é a quantidade de funções especiais $\sum_{l=1}^{n_j^s} L_{jl}^s(\mathbf{x})$ usadas para o enriquecimento das funções de partição da

unidade $N_j(\mathbf{x})$. Analogamente, os vetores dos parâmetros $\mathbf{U}^T = [\mathbf{u}_j^T]_{j=1}^N$ e

$\mathbf{V}^T = [\mathbf{v}_j^T]_{j=1}^N$ consistem dos seguintes elementos: $\mathbf{u}_j^T = \left[\mathbf{u}_j \quad [\mathbf{b}_{jk}^p]_{k=2}^{n_j^p} \quad [\mathbf{b}_{jl}^s]_{l=1}^{n_j^s} \right]$ e

$\mathbf{v}_j^T = \left[\mathbf{v}_j \quad [\mathbf{c}_{jk}^p]_{k=2}^{n_j^p} \quad [\mathbf{c}_{jl}^s]_{l=1}^{n_j^s} \right]$ que são parâmetros nodais associados;

Introduzindo-se agora a matriz de operadores diferenciais (que determina o campo de deformações a partir dos deslocamentos) e o operador que relaciona os deslocamentos generalizados \mathbf{U} às componentes de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\mathbf{L}^{def} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (a) \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \mathbf{L} \Phi^T \quad (b) \quad (13)$$

2.2 Definição geral do erro

Dois abordagens diferentes podem ser usadas na avaliação do erro: os *estimadores de erro* e os *indicadores de erro heurísticos* (HUERTA *et al.*, 1999). *Estimadores de erro* aproximam uma medida do erro real em uma dada norma e

podem ser utilizados para alcançar uma precisão prescrita (fornecem uma informação quantitativa sobre o erro exato). A ideia dos estimadores, que serão avaliados, é tentar aproximar o erro por meio da resolução de problemas locais de baixo custo. O fracionamento do problema global em vários problemas locais possibilita a obtenção dos *indicadores de erro locais* para propósitos adaptativos. Os *Indicadores de erro heurísticos*, por outro lado, são indicadores aproximados baseados na experiência do usuário que definirá um indicador apropriado para resolver o problema em questão. Em geral, eles são baseados em variações das soluções como, por exemplo, a taxa de aspecto do elemento (ou, principalmente a distorção no elemento), mudanças abruptas das variáveis de estado, etc. Para cada aplicação específica, uma quantidade prontamente disponível é escolhida como um indicador de erro (ASKES e RODRIGUEZ-FERRAN, 2001). As vantagens e limitações dos indicadores e estimadores de erro encontram-se resumidas na Tabela 1 (HUERTA *et al.*, 1999).

Deve ser enfatizado que os *indicadores de erro locais* não devem ser confundidos com os *indicadores de erro heurísticos*. Os primeiros, como será visto adiante, encontram-se vinculados à estrutura dos estimadores de erro e estão baseados na elipticidade das equações. Não obstante, devido ao cunho essencialmente matemático, eles possuem custo computacional e confiabilidade significativamente maiores.

Tabela 1 – Comparação entre indicadores e estimadores de erro (Huerta *et al.*, 1999).

<i>Estimador de erro</i>	
Vantagens	Medida objetiva do erro real;
	Amplas faixas de aplicação;
Limitações	Deve ser baseado em fundamentos matemáticos sólidos
	Mais caro de calcular
<i>Indicador de erro heurístico</i>	
Vantagens	Baseado em considerações intuitivas (mecânicas, geométricas, etc.);
	Cálculo fácil;
Limitações	Informação relativa (erro não quantificado), ou seja, ele diz apenas onde a discretização deve ser melhorada, mas não diz o quanto ela deve ser melhorada.
	Dependente do problema (deve ser calibrado com auxílio de soluções analíticas ou testes simples);

No caso linear, o erro da solução $\tilde{\mathbf{u}}$ pode ser definido como:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \quad (14)$$

Uma vez que é impossível (exceto em situações muito simples) determinar analiticamente a solução exata $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ de um modelo mecânico contínuo, lança-se mão de uma solução de referência $(\boldsymbol{\sigma}_R, \mathbf{u}_R)$ ou “*overkill*”, obtida em uma malha mais refinada e, que por essa razão, é considerada ser melhor aproximação da solução exata, Figura 7.

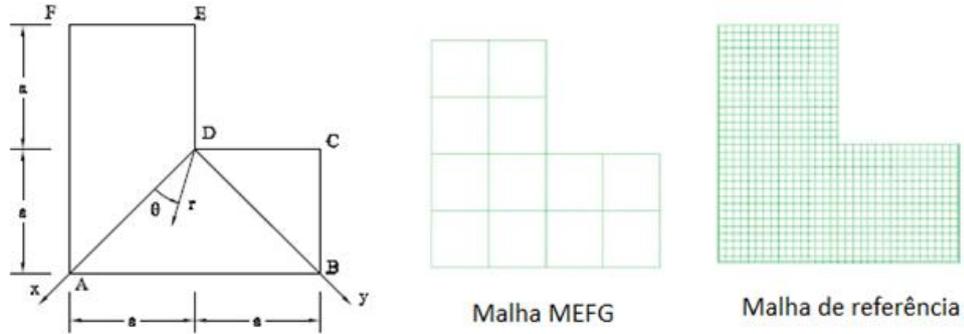


Figura 7 – Geometria, malha MEF e malha de referência (Barros *et al.*, 2013);

A definição do erro, como na Eq. (14), é uma função vetorial que exprime um resultado local, passível de sofrer variação ao longo do domínio e que pode estabelecer um critério de controle muito rigoroso, nos casos em que o mesmo esteja distribuído uniformemente (LINS, 2011). O erro avaliado dessa forma pode conduzir a resultados ruins, por exemplo, em pontos abaixo de cargas pontuais ou em cantos onde ocorrem singularidades. Daí a necessidade da adoção de uma quantidade escalar que representa o erro médio em todo o domínio.

As normas de energia e a norma L_2 são as normas comumente empregadas para o erro de discretização. A segunda é uma medida mais direta do que a primeira, já que não envolve a matriz com as propriedades constitutivas (LINS, 2011).

Assim, $\forall \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{H} \subset H^1$, a Eq. (6) pode ser reescrita como:

$$B(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}) = l(\tilde{\mathbf{v}}) \quad (15)$$

ao subtrair a Eq. (9) da Eq. (15) chega-se a bem conhecida propriedade de ortogonalidade do erro:

$$B(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = B(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{v}}) = 0 \quad (16)$$

que significa que a solução de Galerkin é a melhor aproximação em \tilde{H} da solução exata na norma de energia (PRUDHOMME e ODEN, 1999). Obviamente, se o

espaço \tilde{H} for ampliado, a precisão da solução aumentará continuamente (BATHE, 1996).

A norma de energia do erro, $\|\mathbf{e}\|_U$ induzida por $B(\cdot, \cdot)$ é dada por:

$$\|\mathbf{e}\|_U = \sqrt{B(\mathbf{e}, \mathbf{e})} \quad (17)$$

onde \mathbf{e} é o erro exato em deslocamentos, Eq. (14).

Para que as estimativas de erro sejam realmente úteis no cálculo, elas devem ser medidas confiáveis (nunca subestimar demais) e eficientes (nunca superestimar demais) o erro. Juntas essas propriedades implicam na equivalência entre a estimativa de erro e o erro verdadeiro definido pela Eq.(14). Porém, dependendo do tipo de estimador em consideração, a confiabilidade ou a eficiência será mais difícil de provar (HOLST *et. al*, 2011).

A qualidade de um estimador de erro é frequentemente aferida pelo índice de efetividade, ou seja, a taxa entre o erro estimado e o erro verdadeiro. Esse índice pode ser definido em termos globais, Eq. (18a), ou em termos locais (no elemento K ou em um subdomínio formado por um conjunto de elementos e que no MEFM é conhecido como parcela/nuvem ω), Eqs. (18b) e (18c), de acordo com a conveniência, fazendo uso da norma de energia ou mesmo de outras normas.

$$\theta = \frac{\|\tilde{\mathbf{e}}\|_U}{\|\mathbf{e}\|_U} \quad (a) \quad \theta_K = \frac{\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{U(K)}}{\|\mathbf{e}\|_{(K)}} \quad (b) \quad \theta_{\omega_j} = \frac{\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{U(\omega_j)}}{\|\mathbf{e}\|_{(\omega_j)}} \quad (c) \quad (18)$$

sendo \mathbf{e} o erro exato e $\tilde{\mathbf{e}}$ o erro estimado.

Esses índices podem ser usados para medir a qualidade de um estimador quando o erro exato ou mesmo uma boa aproximação dele são conhecidos. Eles representam o grau de subestimação ou superestimação, devendo variar preferencialmente entre $0,8 \leq \theta \leq 1,2$ (AINWORTH e ODEN, 1997).

O estimador é chamado eficiente se seu índice de efetividade permanece limitado para todos os tamanhos de malha (VERFÜRTH, 1997). Naturalmente, espera-se que os índices de efetividade obtidos sejam próximos à unidade, ou seja, que $\theta \rightarrow 1$ à medida que $\|e\| \rightarrow 0$, caso, em que o estimador é referido como assintoticamente exato.

Índices de efetividade globais de valores 2, 3 ou mesmo superior, são, frequentemente, considerados como aceitáveis em muitas situações (AINSWORTH e ODEN, 2000).

A aplicação prática dos estimadores com índices de efetividade considerados como sendo relativamente grandes pode ser bem entendida com o auxílio da filosofia de *validação* e *verificação* (CHAILLOU e SURI, 2006). Lembrando que *validação* refere-se ao processo de determinar se o modelo matemático é capaz de representar o problema físico com precisão suficiente e a *verificação* significa determinar se o modelo computacional (ou modelo discreto) é capaz de representar o modelo matemático com precisão suficiente, Figura 8. Quantificar o erro de discretização é o objetivo principal da *verificação* (BABUSKA e ODEN, 2004).

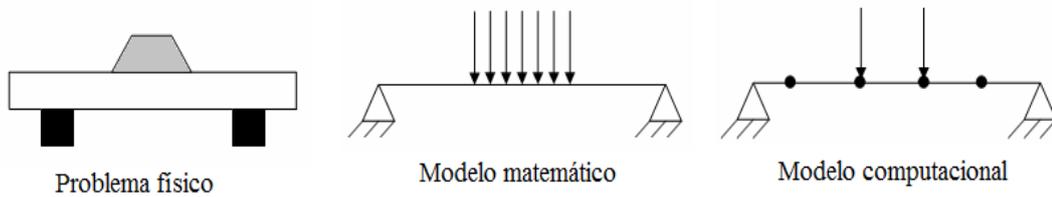


Figura 8 – O problema físico, seu modelo matemático e computacional.

O erro relativo global também é uma medida importante, especialmente para a interrupção dos procedimentos adaptativos, e corresponde à razão entre as normas do erro “ \mathbf{e} ” e da solução “ \mathbf{u} ”, calculada para todo o domínio Ω . Adotando-se a norma de energia, tem-se:

$$\eta(\%) = \frac{\|\mathbf{e}\|_U}{\|\mathbf{u}\|_U} \times 100\% \quad (19)$$

No caso de se conhecer apenas a estimativa do erro $\|\tilde{\mathbf{e}}\|_U$, bem como a solução aproximada $\|\tilde{\mathbf{u}}\|_U$, a definição na Eq. (20) é empregada para obtenção do erro relativo global estimado. Como no caso anterior, essa medida também pode ser global ou local.

$$\tilde{\eta}_{\%} = \frac{\|\tilde{\mathbf{e}}\|_U}{\sqrt{(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_U)^2 + (\|\tilde{\mathbf{e}}\|_U)^2}} \times 100\% \quad (20)$$

Os estimadores assintoticamente exatos convergem para o valor verdadeiro do erro quando a solução aproximada converge, porém não é possível garantir, em cada caso, encontrar-se acima ou abaixo do erro verdadeiro. Soma-se a isso, o fato que a exatidão assintótica é baseada em superconvergência e permanece apenas para topologias de malha particulares (VERFÜRTH, 1997). Do ponto de vista prático, é

mais importante garantir, para uma dada solução, que o erro verdadeiro esteja abaixo de uma dada tolerância definida pelo usuário. Isto pode ser garantido apenas se o limite superior do erro for calculado, a partir do qual um limite superior e inferior para a solução exata pode ser obtido (ALMEIDA e PEREIRA, 2006). A necessidade da construção de estimativas bilaterais, Eq. (21), foi enfatizada também no trabalho de Strouboulis *et al.* (2006).

$$\|\mathbf{e}\|^I \leq \|\mathbf{e}\|_U \leq \|\mathbf{e}\|^S \quad (21)$$

onde $\|\mathbf{e}\|^I$ e $\|\mathbf{e}\|^S$ são as estimativas inferior e superior da medida de erro verdadeira, respectivamente.

Aproximações ao erro que não apresentem um desses dois comportamentos (exatidão assintótica ou limites para o erro) devem ser usadas com cuidado. Embora seja possível exigir que ambos os comportamentos estejam presentes, em geral, isso é evitado (ALMEIDA e PEREIRA, 2006).

Uma vez que a Eq. (21) tenha sido estabelecida, é possível avaliar, também, a confiabilidade de $\|\mathbf{e}\|^I$ e $\|\mathbf{e}\|^S$, por estimar a faixa dos seus respectivos índices de efetividade, como a seguir:

$$\theta^I = \frac{\|\mathbf{e}\|^I}{\|\mathbf{e}\|} \leq 1 \quad \theta^S = \frac{\|\mathbf{e}\|^S}{\|\mathbf{e}\|} \geq 1 \quad \rho = \frac{\|\mathbf{e}\|^S}{\|\mathbf{e}\|^I} \quad (22)$$

onde ρ é o índice de robustez. Se ρ , θ^I e θ^S são próximos à unidade conclui-se que os estimadores são confiáveis.

Ainda segundo Strouboulis *et al.* (2006), embora exista uma relativa facilidade na construção de estimadores de limite inferior, em geral, a construção de estimadores de limite superior não é fácil. Por outro lado, eles advertem que é preciso estabelecer uma distinção entre o estimador superior teórico (com base no espaço da solução exata), sua versão calculada (com base em um espaço discretizado) e o estimador superior calculável. Isso porque é possível obter um estimador superior teórico, com boa efetividade, maior do que um, enquanto sua versão calculada pode, sobre certas circunstâncias, subestimar severamente a norma do erro exato, especialmente no contexto do MEEG e outros métodos similares. Os autores explicam que o estimador superior calculável se refere à versão corrigida do estimador calculado, para que ele possa garantir a propriedade do limite superior.

2.2.1 Campos estaticamente e cinematicamente admissíveis e a propriedade do limite superior

Um campo é estaticamente admissível se, para um dado conjunto de forças aplicadas, ele satisfaz as condições de equilíbrio no domínio do problema, Eq. (5a), e no contorno de Neumann, Eq. (5c). Similarmente, um campo é cinematicamente admissível se, para um dado conjunto de deslocamentos prescritos, ele satisfaz as condições de compatibilidade no domínio do problema (deformações) e no contorno de Dirichlet, Eq. (5b) (ALMEIDA e PEREIRA, 2006). A solução exata corresponde a campos que são estaticamente e cinematicamente admissíveis do tipo $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$.

Exceto para casos particulares (onde é possível a obtenção da solução exata de um dado problema), de modo geral, os métodos numéricos fornecem apenas um campo aproximado $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{u}})$.

O campo de deslocamentos verifica as restrições cinemáticas, porém, o campo de tensões apresenta três tipos de deficiências:

R1- Não verifica a equação de equilíbrio interno:

$$\nabla^T \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}) + \mathbf{b} \neq 0 \text{ no } \Omega \quad (23)$$

R2- O vetor de tensões não está em equilíbrio com as forças aplicadas:

$$\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}) \neq \hat{\mathbf{t}} \text{ no } \Gamma_N \quad (24)$$

(Mede a precisão da aproximação da condição de contorno);

R3- O vetor de tensões é descontínuo na interface entre dois elementos, Figura 9:

$$[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{n}_1]_{K1} + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{n}_1]_{K2} \neq 0 \quad (25)$$

(Reflete a regularidade da solução).

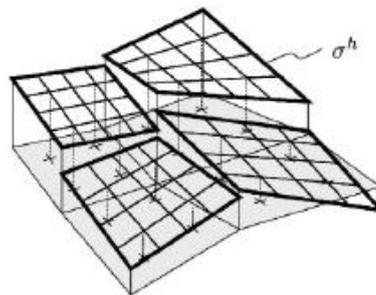


Figura 9 - Interface entre elementos (Lackner e Mang, 2002).

Entretanto, é perfeitamente possível estabelecer formulações para dedução de soluções admissíveis (estática e cinemática).

Soluções cinematicamente admissíveis podem ser obtidas diretamente usando ambas as formulações convencionais do método dos elementos finitos e formulações de deslocamento híbrido. Modelos de elementos finitos de equilíbrio e formulações de elemento finito de tensões híbridas podem ser usados para obtenção de soluções estaticamente admissíveis. É possível também deduzir indiretamente soluções estaticamente admissíveis a partir de soluções cinematicamente admissíveis e vice-versa (ALMEIDA e PEREIRA, 2006).

A construção de campos cinematicamente admissíveis no MEF é fácil, porque, usualmente, se considera que $\tilde{\mathbf{u}}_{CA}^* = \tilde{\mathbf{u}}$ no domínio (já que $\tilde{\mathbf{u}}$ verifica as restrições cinemáticas, exceto no caso de materiais incompressíveis para os quais um método especial deve ser empregado) (PLED *et al.*, 2011). Foi mostrado em Moës *et al.* (2006) que essa escolha também é válida para o MEFG. Em contrapartida, o desafio, comum a esses métodos numéricos (MEF e MEFG), é a construção de campos de tensão estaticamente admissíveis $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{EA}^*$. Essa é uma tarefa mais elaborada porque exige o emprego de algum método específico para esse fim. Ladèveze *et al.* (2010) propuseram uma nova técnica para a construção de um campo de tensões admissível. Para isso é utilizado o método da Partição da Unidade para o cálculo de tensões equilibradas, portanto, os problemas são definidos em subdomínios de elementos e podem ser resolvidos de forma automática e não intrusiva. As principais técnicas disponíveis, denominadas Técnica de Equilíbrio de Elemento (EET), Técnica de Equilíbrio Estrela-Subdomínio (SPET) e a Técnica de Equilíbrio do Elemento juntamente com a Técnica Estrela-Subdomínio (EESPT), foram investigadas em Pled *et al.* (2011).

É possível provar, após o desenvolvimento matemático (DÍEZ *et al.*, 2000), que um campo de tensões estaticamente admissível produz uma estimativa na norma de energia que é maior ou igual à norma de energia do erro.

Os estimadores de erro do tipo residual constroem um campo de tensão estaticamente admissível e podem fornecer limites superiores da norma de energia do erro. Isto tem sido uma vantagem tradicional desses estimadores sobre os estimadores baseados na recuperação (RÓDENAS *et al.*, 2010).

Como será visto no item 2.3.4, esse conceito é importante também para os estimadores de erro baseados na relação constitutiva.

A capacidade de produzir tanto limites superiores quanto inferiores é, especialmente, desejável no contexto da adaptatividade orientada ao objetivo (DÍEZ *et al.*, 2000), como será visto mais adiante, no item 2.3.5.

2.2.2 Características do estimador de erro ideal

Para que um estimador de erro possa ser considerado efetivo, segundo Grätsh e Bathe (2005), ele deve exibir as seguintes características:

1. Ser preciso, ou seja, o erro previsto seja próximo ao erro real (desconhecido);
2. Ser assintoticamente exato de forma que, com o aumento da densidade da malha, o estimador de erro tenda a zero na mesma taxa que o erro real;
3. Fornecer, idealmente, limites superiores e inferiores garantidos e precisos;
4. Ambos, o estimador e os limites (inferior e superior), devem ser simples e obtidos a um custo computacional razoável quando comparados ao custo total da análise, ou seja, esse custo deve ser muito menor do que o de simplesmente usar uma malha mais fina;
5. Ser robusto no que diz respeito a uma ampla faixa de aplicações, incluindo análise não linear;
6. Uma implementação do estimador de erro deve ser possível para guiar um processo de refinamento adaptativo com o estimador de erro sendo usado para otimizar a malha com relação ao objetivo do cálculo.

Um estimador com essas características não está disponível e, ao que tudo indica, a comunidade científica encontra-se longe do estimador de erro ideal. Isso porque, considerando-se apenas análises lineares, ou os limites sobre as quantidades de interesse são garantidos, mas são caros de calcular ou, simplesmente, não são calculáveis. Por outro lado, para os casos onde esses limites possam ser calculados, talvez eles não sejam garantidos. Soma-se a isso, o fato de que o que foi conseguido, até o momento, para problemas simples pode ser muito caro para problemas complexos (GRÄTSH e BATHE, 2005).

2.3 Estimativas de erro “*a posteriori*”

Os estimadores de erro residuais se propõem a avaliar as normas do erro, como definido na Eq. (17), fazendo uso:

- da própria aproximação de Galerkin $\tilde{\mathbf{u}}$;
- dos dados do problema \mathbf{b} e \mathbf{t} ;
- da equação que caracteriza o erro verdadeiro:

$$B(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - B(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) - B(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = R(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H^1 \quad (26)$$

sendo $R(\mathbf{v})$ o resíduo na forma fraca associado com a função teste \mathbf{V} . Essa equação denota a relação entre o erro real e o resíduo;

- da propriedade de ortogonalidade na Eq. (16).

As discussões posteriores, relacionadas aos diversos tipos de estimadores de erro, serão ilustradas pelo modelo da Figura 6, que representa um problema de estado plano de tensão. Por ser bidimensional, todo o equacionamento matemático dos estimadores será apresentado considerando as formas vetoriais compactas representativas das grandezas tensoriais.

2.3.1 Estimadores de erro Explícitos

Esses estimadores podem ser calculados, diretamente, a partir da aproximação de elementos finitos e dos dados do problema original.

Se o domínio, Figura 6(a), for dividido em contribuições de cada elemento K da partição P , Figura 6(b), então, a Eq. (26) toma a forma:

$$B(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = \sum_{K \in P} \left\{ \int_{\partial K \cap \Gamma_N} \mathbf{v}^T [\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}})] d\Gamma + \int_{\partial K \setminus \Gamma_N} \mathbf{v}^T \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}) d\Gamma - \iint_K \nabla^T \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}) + \mathbf{b} d\Omega \right\} \quad (27)$$

$$\forall \mathbf{v} \in H^1$$

ou de modo compacto:

$$B(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = \sum_{K \in P} \int_K \mathbf{v}^T \mathbf{r} d\Omega + \sum_{\gamma \in P} \int_{\gamma} \mathbf{v}^T \mathbf{R} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in H^1 \quad (28)$$

onde \mathbf{r} é o resíduo interno:

$$\mathbf{r} = \nabla^T \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}) + \mathbf{b} \quad (29)$$

decorrente da não verificação da equação diferencial, Eq. (5a) do PVC no interior dos elementos K , e \mathbf{R} é o resíduo no contorno:

$$\mathbf{R} = \begin{cases} [\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma_{\text{int}}} & \text{se } \gamma \not\subset \Gamma_N \quad (\text{a}) \\ \hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}) & \text{se } \gamma \subset \Gamma_N \quad (\text{b}) \\ 0 & \text{se } \gamma \subset \Gamma_D \quad (\text{c}) \end{cases} \quad (30)$$

cuja definição foi estendida para incorporar o salto da componente normal $\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}})$ nos lados γ entre elementos vizinhos K e K' , com $\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}) = \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n}$. Esse resíduo surge como resultado da não verificação da continuidade do campo de tensão (DÍEZ *et al.*, 2010).

A estimativa de erro do tipo residual explícita consiste em calcular as duas fontes de erro, na Eq. (28), separadamente.

Após o desenvolvimento matemático (AINSWORTH e ODEN, 2000), chega-se a seguinte expressão para o estimador de erro:

$$\|\mathbf{e}\|_U^2 \leq C \left(\sum_{K \in P} h_k^2 \|\mathbf{r}\|_{L_2(K)}^2 + \sum_{\gamma \in P} h_k \|\mathbf{R}\|_{L_2(\gamma)}^2 \right) \quad (31)$$

h_k é o diâmetro do elemento e P é a partição e L_2 é uma norma alternativa, que não envolve a matriz constitutiva. Os resíduos, na Eq. (31), são o resultado da aplicação da desigualdade do triângulo sobre a equação residual seguida de várias aplicações da desigualdade de Cauchy-Schwarz, conseqüentemente, qualquer possível cancelamento entre os dois tipos de resíduo é perdido nesse processo (AINSWORTH e ODEN, 2000).

Observando-se o lado direito da Eq. (31), percebe-se que com exceção da constante C , todos os outros termos são conhecidos. Por fazer $C = 1$, essa expressão deixa de representar um estimador de erro e passa a ser apenas um *indicador de erro global* (STEWART e HUGHES, 1996).

Rearranjando os termos do lado direito, chega-se a:

$$\|\mathbf{e}\|_U^2 \leq C \sum_{K \in P} \left(h_k^2 \|\mathbf{r}\|_{L_2(K)}^2 + \frac{1}{2} h_k \|\mathbf{R}\|_{L_2(\partial K)}^2 \right) \quad (32)$$

O segundo termo, do lado direito da Eq. (32), está multiplicado pelo fator $\frac{1}{2}$ na hipótese de que o erro seja distribuído igualmente em ambos os elementos que tenham lados comuns (GRÄTSH e BATHE, 2005). A partir dessa equação, é possível obter a quantidade η_k :

$$\eta_k^2 = c_1 h_k^2 \|\mathbf{r}\|_{L_2(K)}^2 + c_2 \frac{1}{2} h_k \|\mathbf{R}\|_{L_2(\partial K)}^2 \quad (33)$$

que é uma medida do erro de discretização local, ou seja, permite identificar a contribuição de cada um dos elementos.

É importante notar que a quantidade η_k pode não fornecer uma boa estimativa para o erro local verdadeiro, devido à possibilidade de ela ser afetada por erros de

poluição que surgem de influências remotas, tais como singularidades (que não foram resolvidas de forma satisfatória), mas, ainda assim, ela pode ser um bom guia na condução dos procedimentos adaptativos (AINSWORTH *et al.*, 2000).

Os estimadores de erro Explícitos apresentam dois problemas (Ainsworth *et al.*, 1997):

1) – Conduzem a indicadores de erro locais que contêm constantes genéricas. Isso porque na prática, a constante C é dividida em duas contribuições c_1 e c_2 , Eq. (33), correspondendo, respectivamente, ao resíduo no interior do elemento e ao resíduo no contorno, e essas constantes são em geral desconhecidas. Embora seja possível tentar encontrar limites adequados sobre os valores das mesmas, ele seria ditado para o pior cenário e, portanto, usualmente forneceria estimadores pessimistas (GRÄTSH e BATHE, 2005).

2) – Não é conveniente tratar com os dois tipos de resíduo separadamente, porque a correta ponderação relativa entre eles está longe de ser óbvia. Em problemas bidimensionais, o resíduo interno domina o erro em elementos finitos de ordem par enquanto o resíduo no contorno é dominante nos de ordem ímpar; para os problemas unidimensionais ambos resíduos são relevantes (BABUSKA e RHEINBOLDT, 1978 *apud* WIBERG e ABDULWAHAB, 1997).

A precisão desses estimadores é totalmente dependente da precisão das constantes que estão contidas neles. Essas, por sua vez, são dependentes do grau de suavidade do problema e da malha usada na análise (ZHU, 1997). Em geral, estimadores Explícitos não podem produzir limites superiores garantidos para a norma de energia (DÍEZ *et al.*, 2010).

Estimadores de erro deste tipo para o MEFM podem ser vistos em Hild *et al.* (2009a) e (2009b). Esses autores afirmam terem sido os pioneiros na proposição de uma estimativa residual explícita para análise com esses métodos. Mais recentemente, Gerasimov *et al.* (2012) também forneceram uma contribuição para esse segmento. Esses três artigos têm em comum o fato de que os autores conseguiram eliminar a constante C na Eq. (32), o que permitiu a obtenção de um limite superior para o erro na norma de energia. A independência da malha (para modelagem de descontinuidades como uma trinca) e o uso de um operador de quase interpolação *específico* para o MEFM contribuíram para se chegar a esses resultados. Hild *et al.* (2009a) mostram que caso a malha coincida com a trinca, o estimador

residual clássico é recuperado. A independência da malha, de qualquer modo, requer o uso de um algoritmo de integração especial.

2.3.2 Estimadores de erro Implícitos

Com vistas a contornar os problemas associados aos métodos Explícitos, conforme seção 2.3.1, os estimadores do tipo Implícito procuram reter, tanto quanto possível, a estrutura do problema original do erro, Eq. (26). Dessa forma, as constantes genéricas são evitadas e o correto equacionamento entre os dois tipos de resíduo fica assegurado pelo próprio processo de solução (GRÄTSH e BATHE, 2005).

Um Problema de Valor de Contorno local é resolvido, ou no elemento (método do Resíduo no Elemento e método do Resíduo no Elemento Equilibrado) ou sobre um subdomínio de elementos (método do Subdomínio), tendo os resíduos como dados. A precisão dos estimadores de erro Implícitos depende de como o problema local é resolvido, em particular, de como as condições de contorno são fixadas (ZHU, 1997). Por outro lado, os esquemas implícitos são mais laboriosos porque envolvem a resolução de um sistema de equações algébricas (AINSWORTH e ODEN, 2000).

As condições de contorno impostas aos problemas locais podem ser de Dirichlet ou Neumann. De modo geral, as de Dirichlet fornecem aproximações contínuas ao erro de deslocamento e limites inferiores da energia. As condições de Neumann, por outro lado, fornecem campos de tensão estaticamente admissíveis e limites superiores para o erro de energia.

2.3.2.1 O Método do Resíduo no Elemento (ERM)

O MRE propõe que o problema global, Eq. (26), seja substituído por um dado número de problemas locais independentes, definidos sobre cada elemento.

Para tal, considere que $\mathbf{e}_K = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}$ seja o erro local no elemento K que satisfaz a seguinte forma variacional do problema modelo:

$$B_K(\mathbf{e}_K, \mathbf{v}) = l_k(\mathbf{v}) - B_K(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \int_{\partial K \setminus \Gamma_N} \mathbf{v}^T \mathbf{t}(\mathbf{u}) d\Gamma \quad (\text{a}) \quad \text{ou} \quad (34)$$

$$B_K(\mathbf{e}_K, \mathbf{v}) = \int_K \mathbf{v}^T \mathbf{r} d\Omega + \int_{\partial K} \mathbf{v}^T \mathbf{R} dS \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(K) \quad (\text{b})$$

onde o índice K denota a restrição da forma bilinear ao elemento simples.

A existência e unicidade do problema variacional, Eq. (34a), não são garantidos. Para que o mesmo possa ser resolvido, é preciso substituir o vetor de tensões verdadeiras $\mathbf{t}(\mathbf{u})$ por um vetor de tensões aproximado $\mathbf{t}_A(\tilde{\mathbf{u}})$, que deve ser escolhido cuidadosamente para que o problema seja bem-posto. Por substituir os dados do contorno de Neumann verdadeiros pela aproximação obtemos um problema de valor de contorno local de Neumann puro. A maior dificuldade é suprir essa equação com as condições de contorno apropriadas.

A propriedade do limite superior (seção 2.2.1) está condicionada à obtenção de um campo de tensões estaticamente admissível $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{EA}^*$ (isto é, tensores de tensão que verificam as equações de equilíbrio no interior do elemento K e no contorno de Neumann). Para obtenção de tal campo, é necessário que duas propriedades sejam necessariamente satisfeitas (DÍEZ *et al.*, 2010):

1) Na aresta comum a dois elementos vizinhos, K e K' , os saltos de tensões correspondentes a aproximação $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{H}$, obedecem a relação:

$$\mathbf{t}_A(\tilde{\mathbf{u}})_K = -\mathbf{t}_A(\tilde{\mathbf{u}})_{K'} \quad \text{em todo } \partial K \cap \partial K' \quad (35)$$

o que assegura a *continuidade do campo*.

2) Estar em equilíbrio com as forças internas:

$$l_k(\mathbf{v}) - B_K(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \int_{\partial K \setminus \Gamma_N} \mathbf{t}_A(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{v} d\Gamma = 0 \quad (36)$$

essa condição de *equilíbrio* é necessária para garantir que o problema tenha solução. Essas duas condições são indispensáveis para a obtenção de uma função aproximadora ao erro verdadeiro no elemento \mathbf{e}_K .

A primeira sugestão para determinar o vetor de tensões aproximadas $\mathbf{t}_A(\tilde{\mathbf{u}})$ foi introduzida por Bank e Weiser (1985) e consiste em tomar um valor médio das tensões obtidas numericamente, da seguinte forma:

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}) \approx \mathbf{t}_A(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}})_K + \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}})_{K'} \} \quad (37)$$

A Eq. (37) é válida para as arestas dos elementos internos à partição. Para os lados do elemento que interceptam o contorno de Neumann e de Dirichlet do domínio, permanecem válidas as Eqs. (30b) e (30c), respectivamente. A aproximação

obtida dessa forma satisfaz a condição de continuidade, Eq. (35), mas não é capaz de garantir a condição de equilíbrio, Eq. (36), (DÍEZ *et al.*, 2010).

Outra opção seria reformular o problema na Eq. (34) fazendo uso de um espaço reduzido de funções admissíveis. O espaço completo não é apropriado porque o estimador forneceria resultados completamente inconsistentes com o erro verdadeiro. Perceba que a solução verdadeira do problema residual é composta por um conjunto de componentes, algumas delas correspondem a modos reais e outras a modos espúrios (modos de corpo rígido ou de energia zero). Quando o espaço completo é utilizado para aproximar o problema, todas essas componentes estão presentes na aproximação e, conseqüentemente, o estimador resultante torna-se inconsistente devido à contribuição dos modos indesejáveis. Porém, se o subespaço puder ser escolhido para que precisamente os modos espúrios sejam eliminados, então a consistência do estimador será recuperada.

Esse estimador é, portanto, bem sensível à escolha do subespaço usado para aproximar o problema. Segundo Ainsworth e Oden (2000), um guia para a seleção de espaços de elemento finito de primeira ordem (elementos quadrilaterais e triangulares) já está, razoavelmente, bem estabelecido. Infelizmente, o mesmo não pode ser dito para elementos finitos de ordem mais alta.

Por fim, cabe destacar que, além da metodologia apresentada na Eq. (30), outras duas metodologias foram propostas também por Bank e Weiser (1985), que são: (a) Tomar a função \mathbf{V} , na Eq. (34), em um espaço funcional restrito de funções que desaparecem nos nós dos vértices do elemento. Essa abordagem simples fornece campos de tensões estaticamente admissíveis apenas se o erro nos nós da malha for zero. Como, geralmente, este não é o caso, se esta estratégia for utilizada, a propriedade do limite superior não pode ser garantida; (b) Substituir, no lado direito da Eq. (27), \mathbf{V} por $\mathbf{v} - \Pi^h \mathbf{v}$ (sendo Π^h um operador de interpolação). Segundo o autor, isto automaticamente garante que o problema seja compatível (ou equilibrado). A propriedade do limite superior global é preservada porque ao subtrair $\Pi^h \mathbf{v}$ no argumento de $R(\cdot)$ a equação do erro não é modificada. A projeção Π^h é introduzida a fim de equilibrar o problema local e assegurar sua solvabilidade (existência e unicidade). Equivale a reformular o problema em um espaço no qual a forma bilinear na Eq. (34a) permaneça elíptica. Esta operação pode ser vista como uma forma implícita de recuperar um vetor de tensões compatíveis (DÍEZ *et al.*, 2010).

2.3.2.2 O Método de Resíduo no Elemento Equilibrado (EERM)

Uma alternativa aos problemas relatados no item 2.3.2.1 seria construir um campo de tensões aproximadas para o problema fazendo uso de procedimentos de equilíbrio. Dessa forma, o MREE propõe que o vetor de tensões $\mathbf{t}(\mathbf{u})$ desconhecido, no contorno dos elementos ∂K , Eq. (34a), seja substituído pelo vetor de tensões equilibradas $\mathbf{t}_E(\tilde{\mathbf{u}})$. Aqui, o grande desafio, é o desenvolvimento de algoritmos eficientes e práticos para a construção de tais campos. Algumas dessas estratégias de equilíbrio apresentam o inconveniente de serem realizadas por algoritmos não triviais, fortemente dependentes do tipo de elemento. Além do mais, pode ser necessário o uso de uma estrutura de dados que não é natural nos códigos de elementos finitos (MARINÉ, 2005).

O vetor de tensões $\mathbf{t}_E(\tilde{\mathbf{u}})$ é dito equilibrado se as seguintes condições forem satisfeitas:

1) **Condição de consistência:**

$$\int_{\Gamma_N} \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma = \sum_{K \in P} \int_{\partial K} \mathbf{v}^T \mathbf{t}_E(\tilde{\mathbf{u}}) dS \quad \text{no } \partial K \cap \Gamma_N \quad (38)$$

A condição de consistência é satisfeita se e apenas se:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_E(\tilde{\mathbf{u}})_K + \mathbf{t}_E(\tilde{\mathbf{u}})_{K'} &= 0 \quad \text{em todo } \partial K \cap \partial K' \quad (\text{a}) \\ \mathbf{t}_E(\tilde{\mathbf{u}}) &= \hat{\mathbf{t}} \quad \text{no } \partial K \cap \Gamma_N \quad (\text{b}) \end{aligned} \quad (39)$$

É interessante verificar que as contribuições das arestas dos elementos os lados internas ao domínio se cancelam, Eq. (39a). Já as contribuições das arestas coincidentes com o contorno de Neumann são tratadas com o uso da Eq. (39b).

2) **Condição de compatibilidade ou equilíbrio:**

$$\int_K \mathbf{v}^T \mathbf{r}_K d\Omega + \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{t}_E(\tilde{\mathbf{u}}) dS = 0 \quad \text{em todo } K \in P \quad (40)$$

para qualquer movimento de corpo rígido \mathbf{v} .

Graças à condição de equilíbrio os problemas são bem-postos, embora a solução dos mesmos não seja necessariamente única. Existem inúmeras possibilidades para a seleção de tensões equilibradas, mas nem todas resultarão em um limite superior útil para o estimador de erro (AINSWORTH *et al.*, 2007). A estimativa de limite superior do erro é garantida apenas se os problemas locais forem resolvidos exatamente.

A estratégia de equilíbrio, adotada no estimador utilizado nesse trabalho, foi proposta por Ladevèze e Maunder (1996) e adaptada por Barros (2002) para o contexto do MEF. Essa estratégia faz uso do conceito de forças nodais e do diagrama de forças de Maxwell, para apresentar geometricamente uma estratégia que recupera no elemento finito um campo de tensões equilibradas tornando o problema bem-posto.

Como o erro é sempre ortogonal ao espaço das aproximações \tilde{H} , no sentido do operador $B(\cdot, \cdot)$, o ideal seria procurar a solução para o problema Eq. (34) em um espaço ortogonal a \tilde{H} . Dadas às dificuldades de fazê-lo, são utilizados procedimentos alternativos para a construção de espaços de aproximação local ao erro. A mudança de espaço é motivada pelo fato de que no espaço em que a solução foi calculada o erro é nulo, isto é $\tilde{H}(K) \Rightarrow \mathbf{e}_K = 0$. Por essa razão, as funções referentes a esse espaço são excluídas.

Um recurso muito comum, para construção desse espaço de aproximação local ao erro, é a utilização do espaço formado por funções bolha (*bubble-like function space*), abrangendo as funções da formulação hierárquica do MEF, associadas aos nós de face, Figuras 10 (a) e (b), e internos, Figura 10 (c). Perceba que apenas as funções associadas aos nós internos apresentam, realmente, a forma de uma bolha no elemento finito.

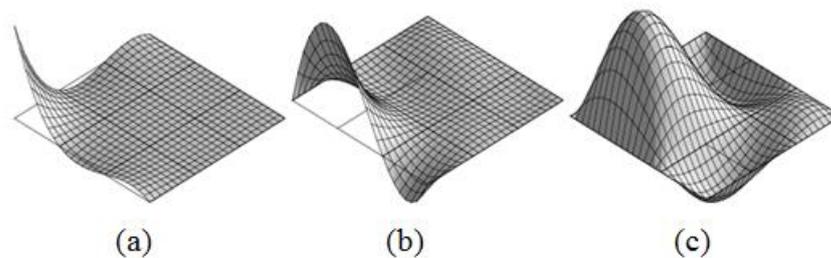


Figura 10 – Funções de interpolação associadas com: os cantos, os lados e o interior - funções bolha (Díez *et al.*, 2003).

Um espaço equivalente a esse pode ser definido se o espaço de funções bolha for construído a partir de um conjunto de funções polinomiais usadas no MEF. (Obs: a função bolha não acrescenta informações nos nós do domínio). Neste caso, o suporte compacto de cada função assume um caráter “*patch-bubble like*”.

Pelas considerações anteriores, um espaço polinomial para o erro pode ser definido em cada elemento, como segue:

$$\tilde{S}_{p+q}^0(K) = \left\{ \tilde{\mathbf{v}}_{p+q} \in \tilde{H}_{p+q}(K); \Pi_p(\tilde{\mathbf{v}}_{p+q}) = 0; \tilde{\mathbf{v}}_{p+q} = 0 \text{ no } \partial K \cap \partial\Gamma_D \right\} \quad (41)$$

onde $\Pi_p : \tilde{H}_{p+q}(K) \rightarrow \tilde{H}_p(K)$ é um operador de interpolação local.

$\tilde{H}_p(K)$ e $\tilde{H}_{p+q}(K)$ denotam espaços de ordem polinomial até “ p ” e até “ $p+q$ ”, respectivamente. A hipótese de que o erro pode ser aproximado pelos termos polinomiais com grau “ q ” maior do que o espaço da solução aproximada é a motivação para esta escolha. O parâmetro “ q ” pode ser escolhido para que uma melhor aproximação ao erro possa ser encontrada. De qualquer modo, quando a solução verdadeira “ \mathbf{u} ” não é suave, pode não ser efetivo aumentar “ q ” a menos que funções especiais usadas para construir “ $\tilde{\mathbf{u}}$ ” sejam capazes de representar o comportamento não suave da solução. Teoricamente, quanto maior a dimensão do espaço de funções bolha, melhor deve ser a estimativa de erro. Entretanto, normalmente, são usados espaços cujas funções reproduzem polinômios de apenas um grau a mais. A adição de mais graus permite que novas componentes do erro, que não seriam consideradas no espaço anterior, possam ser aproximadas.

Após a imposição de dados equilibrados, o problema na Eq. (34) pode ser resolvido localmente e passa a ser o de encontrar uma função de aproximação ao erro $\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K \in \tilde{S}_{p+q}^0(K)$, que satisfaz:

$$B_K(\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K, \tilde{\mathbf{v}}_{p+q}) = \int_K \mathbf{r}_K \tilde{\mathbf{v}}_{p+q} d\Omega + \int_{\partial K} \mathbf{R}_{\partial K} \tilde{\mathbf{v}}_{p+q} dS \quad \forall \tilde{\mathbf{v}}_{p+q} \in \tilde{S}_{p+q}^0(K) \quad (42)$$

Na equação acima, $\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K$ é a aproximação de Galerkin da função erro na Eq. (34), que define a função indicadora de erro, e $\tilde{\mathbf{v}}_{p+q}$ é a função teste do problema. Ambos são descritos por funções do MEFG, como segue:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K &= (\Phi_{p+q}^K)^T \mathbf{I}^K & (a) \\ \tilde{\mathbf{v}}_{p+q}^K &= (\Phi_{p+q}^K)^T \mathbf{V}^K & (b) \end{aligned} \quad (43)$$

Onde o vetor de funções de aproximação polinomial é composto dos seguintes vetores associados com os N_K subdomínios ω_j que cobrem o elemento K :

$$\left(\Phi_{p+q}^K \right)_j^T = \left[N_j(x) L_{jk}^p(x) \right]_{k=n_j^p+1}^{n_j^p+n_j^q} \quad (44)$$

onde n_j^p representa um conjunto de funções polinomiais no qual a constante unitária, responsável pela reprodução dos movimentos de corpo rígido, está incluída. Aqui

$n_j^p + n_j^q$ é o número de monômios necessários para obtenção de uma aproximação polinomial completa de ordem “ p ” e “ $p+q$ ” (BARROS, 2002). Os polinômios na Eq. (44) são descritos em termos de coordenadas não dimensionais (BARROS *et al.*, 2013), e os vetores:

$$(\mathbf{I}^K)^T = \left[\left(\left[\mathbf{b}_k^K \right]_{k=n_j^p+1}^{n_j^p+n_j^q} \right) \right]_{j=1}^{N_K} \quad (45)$$

$$(\mathbf{V}^K)^T = \left[\left(\left[\mathbf{v}_k^K \right]_{k=n_j^p+1}^{n_j^p+n_j^q} \right) \right]_{j=1}^{N_K} \quad (46)$$

de parâmetros nodais associados com função de aproximação na Eq. (37). O vetor na Eq. (45) é chamado de vetor de indicadores de erro.

Os valores locais da norma de energia das funções $\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K$, obtidas para cada elemento, podem ser estimados como segue:

$$\tilde{\xi}_K = \|\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K\|_{U(K)} = \left[B_k(\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K, \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

em que $\tilde{\xi}_K$ são os *indicadores de erro*. O estimador de erro global é calculado a partir da contribuição dos indicadores locais, como a seguir:

$$\|\mathcal{E}_1\|_U = \|\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K\|_U = \sqrt{\sum_{K \in \Omega} (\tilde{\xi}_K)^2} \quad (48)$$

Na abordagem do MEFG, é interessante definir uma medida de erro associada a cada nuvem ω_j porque o enriquecimento encontra-se vinculado aos nós e não mais aos elementos como no MEF. Para obtenção de tal medida, Barros (2002) optou por calcular a média ponderada dos indicadores de erro Eq. (47) de todos os elementos K contidos na nuvem ω_j , usando como peso, o volume V_K desses elementos. Obtendo-se, por conseguinte, um indicador de erro por nuvem, dado por:

$$\mathcal{E}_1^{\omega_j} = \sum_{K \in \omega_j} \frac{V_K \|\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K\|_{U(K)}}{V_{\omega_j}} \quad (49)$$

onde $V_{\omega_j} = \sum_{K \in \omega_j} V_K$ corresponde ao volume total da nuvem ω_j .

Este estimador foi, com certeza, o primeiro nesta categoria para análises com o MEFG na resolução de problemas não lineares da mecânica do dano. A mesma

estratégia de equilíbrio foi utilizada também por Stein *et al.* (2011) para problemas da mecânica da fratura com o MEFX.

2.3.2.3 O Método de Resíduo no Subdomínio

A idéia básica desse estimador é a decomposição do resíduo global $R(\mathbf{v})$, Eq. (26), com o auxílio da propriedade da Partição da Unidade (PU), em um número de problemas locais definidos em pequenas parcelas ou subdomínios ω_j .

Esse método pode ser visto como uma alternativa atraente ao método dos Resíduos no Elemento Equilibrados, principalmente no contexto do MEEG, porque contorna a necessidade de encontrar trações adequadas como condições de contorno para os problemas locais e, simultaneamente, fornece limites, teoricamente, superiores. As condições de contorno são naturais e as estimativas são ditas livres de fluxo Díez *et al.* (2010).

Considere, inicialmente, que $N_j(x)$ a partição da unidade, esteja subordinada à nuvem ω_j , Figura 11 (a). As funções Lagrangeanas lineares $N_j(x)$ são adotadas aqui, mas elas podem ser substituídas por qualquer tipo de partição de unidade.

O problema da Eq. (26) pode ser reescrito usando o conceito de partição da unidade e a propriedade linear do funcional residual $R(\mathbf{v})$, do seguinte modo (Strouboulis, 2006):

$$B(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = R(\mathbf{v}) = R\left(\mathbf{v} \sum_{j=1}^n N_j\right) = \sum_{j=1}^n R(N_j \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H^1 \quad (50)$$

onde n denota o número total de nós.

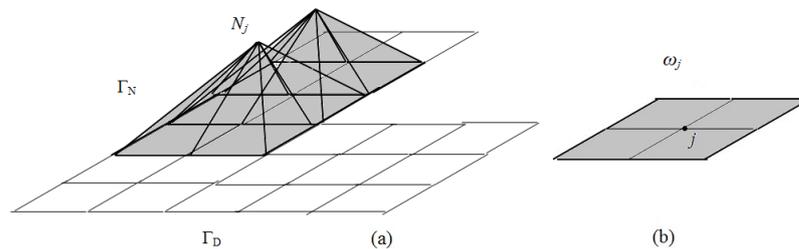


Figura 11 – Método do subdomínio; (a) representação da função partição da unidade para malha quadrada e (b) subdomínio;

Como $R(N_j \mathbf{v}) = 0$ quando $\omega_j \cap \text{suporte}(\mathbf{v}) = \text{vazio}$, o resíduo pode ser decomposto em contribuições locais, definidas sobre cada subdomínio ω_j , Figura 11 (b). O erro na Eq. (50) deve ser substituído por um indicador de erro $\mathbf{e}^{\omega_j} \in H^1(\omega_j)$,

que é definido como sendo a solução dos seguintes problemas locais de Neumann, considerados sobre cada parcela ω_j :

$$B_{\omega_j}^{\zeta_j}(\mathbf{e}^{\omega_j}, \mathbf{v}) = R_{\omega_j}(N_j \mathbf{v}) = l_{\omega_j}(N_j \mathbf{v}) - B_{\omega_j}(\tilde{\mathbf{u}}, N_j \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\omega_j) \quad (51)$$

Desmembrando as expressões na Eq. (51):

$$\begin{aligned} B_{\omega_j}^{\zeta_j}(\mathbf{e}^{\omega_j}, \mathbf{v}) &= \iint_{\omega_j} \zeta_j \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}^{\omega_j}) d\Omega \quad (a) \\ l_{\omega_j}(N_j \mathbf{v}) &= \iint_{\omega_j} (N_j \mathbf{v})^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\omega_j \cap \Gamma_N} (N_j \mathbf{v})^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (b) \\ B_{\omega_j}(\tilde{\mathbf{u}}, N_j \mathbf{v}) &= \iint_{\omega_j} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}) d\Omega \quad (c) \end{aligned} \quad (52)$$

Onde ζ_j representa uma função de ponderação (BARROS *et al.*, 2013). O seguinte estimador superior teórico pode ser definido pela soma das medidas locais associadas com cada subdomínio:

$$\mathcal{E}_k^U = \sqrt{M} \sqrt{\sum_j \|\mathbf{e}^{\omega_j}\|_{U(\omega_j)}^2} = \sqrt{M} \sqrt{\sum_{j=1}^N B_{\omega_j}^{\zeta_j}(\mathbf{e}^{\omega_j}, \mathbf{e}^{\omega_j})} \quad (53)$$

k indica tipos de estratégias para a definição de medidas do erro associados à escolha ζ_j na Eq. (52a).

Para $k=2 \rightarrow \zeta_j = N_j$ e $M=1$ (PRUDHOME *et al.*, 2004) para o MEF

Para $k=3 \rightarrow \zeta_j = 1$ e $M \neq 1$ (STROUBOULIS *et al.*, 2006) para o MEF_G

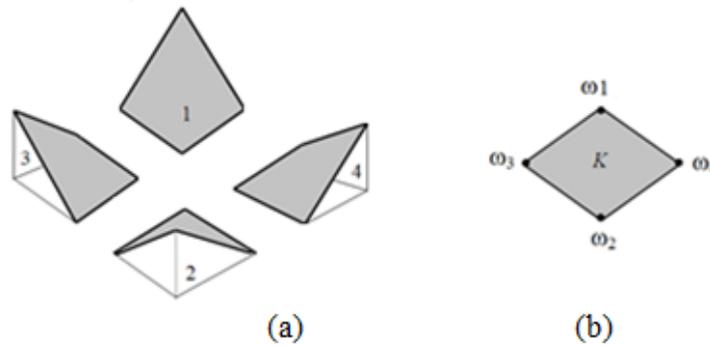


Figura 12 – (a) Partição da Unidade que se sobrepõe no elemento quadrilateral K ; (b) Elemento comum às nuvens $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$.

Note que no caso $k=3$, M representa o índice de sobreposição da partição da unidade (número de nós do elemento finito), Figura 12.

Novamente, não é possível encontrar a solução exata dos problemas locais. Por isso, em aplicações práticas, são procuradas aproximações $\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j}$ ao erro verdadeiro, em cada subdomínio ω_j .

O espaço $\tilde{S}_{p+q}^0(\omega_j)$ e as funções $\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j}$ e $\tilde{\mathbf{v}}_{p+q}$ são resolvidos seguindo as mesmas definições apresentadas nas Eqs. (41), (43a) e (43b). A diferença é que agora essas funções estão vinculadas a cada um dos n nós x_j que pertencem ao subdomínio ω_j e não mais aos elementos K . Em todos os subdomínios ω_j tem-se $M=4$ (BARROS *et al.*, 2013).

A vantagem principal da abordagem de subdomínio é a simplicidade de sua implementação, o que o torna extensível para o caso tridimensional. Contrasta, então, com a técnica de Resíduo Equilibrado onde o nível de complexidade aumenta drasticamente no caso 3D (PARÉS *et al.*, 2006). A definição na Eq. (44) é mais simples do que a dada na Eq. (34b). O erro no vetor de tensões $\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}})$ não é considerado diretamente porque o suporte dos problemas locais coincide com o subdomínio de elementos e os saltos das tensões na interface entre elementos no interior do subdomínio são implicitamente considerados. Não há, portanto, necessidade de calculá-lo na solução aproximada. Observe que a presença da função N_j anula qualquer integração ao longo do contorno de um subdomínio interno.

A possibilidade de se obter *indicadores de erro* vinculados às nuvens torna o método mais vantajoso com *adaptatividade-e*.

Seja qual for a ponderação escolhida, o limite inferior pode ser obtido pela seguinte expressão (PARÉS *et. al.*, 2006):

$$\mathcal{E}_k^L = \frac{(\mathcal{E}_k^2)}{M \|z(\mathbf{x})\|_U} \quad (54)$$

sendo $z(\mathbf{x})$ uma função contínua, dada por $z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N N_j(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j}(\mathbf{x})$ e

$$\|z\|_U^2 = B(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{z}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}) d\Omega \quad (55)$$

é a norma de energia calculada sobre todo o domínio. A função $z(\mathbf{x})$ é contínua porque é obtida pelo produto das funções de erro locais $\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j}(\mathbf{x})$ (que são

descontínuas no contorno das nuvens) pela PU que se anula nesses mesmos contornos.

As estimativas de subdomínio (ou livres de fluxo) padrão foram comparadas com as estimativas do tipo resíduo no elemento equilibrado (ou fluxo-híbrido) em termos de efetividade e eficiência computacional. A conclusão mais importante desta investigação é que, na maioria dos casos testados, as estimativas de fluxo-híbrido são mais precisas enquanto o custo computacional global é inferior para as estimativas livres de fluxo. Porém, ainda não existe um consenso geral sobre essas questões (PARÉZ, 2006).

Os estimadores residuais podem ser adaptados aos problemas não lineares de forma mais direta e confiável (HUERTA *et al.*, 2002). A propósito, Ródenas *et al.* (2010) consideram que os métodos implícitos possuem uma base matemática mais sólida. Em consonância com esses autores, Stein *et al.* (2011) enfatizam que tanto os métodos explícitos quanto os métodos implícitos receberam menos atenção na literatura do MEF/MEFG porque são estratégias mais sofisticadas.

2.3.3 Estimadores de erro Baseados na Recuperação do Gradiente

Trata-se de uma maneira simples e eficiente de avaliar o erro “*a posteriori*” em problemas práticos de engenharia.

As soluções numéricas aproximadas são, em geral, menos suaves que as soluções exatas, porque as primeiras estão sujeitas a certas limitações: (1) O grau dos polinômios de interpolação (quando usados) pode não ser suficiente para representar a solução exata (já que essa pode ser de ordem polinomial mais alta ou mesmo não polinomial); (2) As derivadas da solução aproximada (que descrevem os campos aproximados de tensões e deformações) podem ser descontínuas nas interfaces entre elementos (isso porque, em geral, funções de interpolação de continuidade C^0 são empregadas na aproximação dos deslocamentos) enquanto as derivadas da solução exata são, usualmente, contínuas. Essas duas características constituem uma indicação útil para estimação dos erros de discretização.

Dessa forma, a ideia básica desse estimador é utilizar um campo de tensões contínuo $\sigma(\tilde{\mathbf{u}})^*$, que elimina os saltos de tensão nas interfaces dos elementos e é, pelo menos, uma ordem mais preciso do que o campo de tensões $\sigma(\tilde{\mathbf{u}})$ obtido com o auxílio do MEF/MEFG. Para isso, é necessário fazer uso de alguma técnica de

recuperação que possibilite a obtenção de uma solução mais precisa ou mesmo superconvergente a partir da aproximação numérica.

A tensão exata $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ desconhecida é então substituída por essa tensão melhorada $\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}})^*$. A construção desse campo melhorado é uma questão chave para os estimadores, porque ele permite que uma estimativa de erro calculável seja, prontamente, obtida:

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}})^* - \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (56)$$

Considerando-se um problema de elasticidade linear, a estimativa do erro total medida na norma de energia, é dada por:

$$\|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\|_U^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}})^* - \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}))^T \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}})^* - \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}})) d\Omega \quad (57)$$

onde \mathbf{C} é o tensor constitutivo do material.

Os estimadores ZZ (ZIENKIEWICZ e ZHU, 1987) e o ZZ-SPR (*Superconvergent Patch Recovery*) (ZIENKIEWICZ e ZHU, 1992) são os principais representantes desse tipo de estimativa. A diferença entre essas duas abordagens reside, basicamente, na metodologia utilizada para recuperar o campo de tensões.

O estimador ZZ propõe recuperar o campo de tensões nos nós dos elementos, fazendo uso das funções de forma (que são utilizadas nos cálculos dos deslocamentos) e do campo de tensões aproximado. Essa metodologia foi originalmente usada em combinação com ajuste de mínimos quadrados global e média nodal direta para obter um campo de ordem mais alta. Foi demonstrado que ele será assintoticamente exato se a solução recuperada, utilizada na estimativa do erro, for superconvergente.

Prange *et al.* (2012) propuseram um estimador baseado no método ZZ para o MEFG aplicado em problemas de simulação de fratura. A diferença entre o estimador proposto e a técnica original reside, basicamente, no conjunto de funções utilizadas na recuperação do campo de tensões.

O ZZ-SPR, por sua vez, é considerado como sendo uma evolução do estimador ZZ por dois motivos: (1) faz uso dos chamados pontos superconvergentes (onde a solução de numérica tem precisão maior do que em qualquer outra posição. A taxa de convergência é também maior nesses pontos, do que em outros lugares); (2) introduz o conceito de subdomínios. Um campo de tensões é calculado em cada subdomínio e, então, um novo campo de tensões é recuperado para o domínio inteiro, ao se fundir, de forma adequada, os campos de tensão obtidos em cada subdomínio, isoladamente.

Os subdomínios podem ser projetados de duas maneiras diferentes: ao redor de um nó (conhecido como nó do subdomínio), ou ao redor de um elemento, Figura 13, letras (a) e (b), respectivamente. Segundo Beneditti *et al.* (2006), o subdomínio de elementos possibilita simplificar drasticamente o processo de recuperação e torna a implementação numérica muito mais fácil.

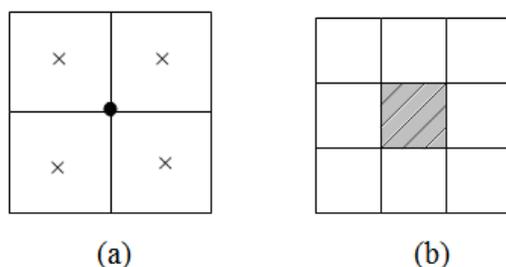


Figura 13 – Tipos de subdomínios: (a) subdomínio de nó; (b) subdomínio de elementos

O desenvolvimento matemático dos estimadores ZZ e ZZ-SPR pode ser visto no trabalho de Lins (2011), que trabalhou com ambos para o MEFG. A segunda técnica provou ser mais eficiente e fornecer melhores resultados do que a primeira.

Experimentos numéricos conduzidos com o SPR mostraram que a precisão dos resultados obtidos com essa metodologia era notavelmente maior no interior do domínio do que junto ao contorno e, obviamente, esse fato tende a comprometer a qualidade da estimativa de erro nesses locais (RÓDENAS *et al.*, 2007).

Embora os estimadores do tipo residual tenham uma base matemática mais sólida, os estimadores baseados na idéia de Zienkiewicz e Zhu e, em particular, os baseados na técnica SPR são frequentemente preferidos devido à facilidade de implementação e à robustez (RÓDENAS *et al.*, 2010). De qualquer modo, possuem inconvenientes também (AINSWORTH e ODEN, 2000). Um exemplo disso é o fato de que suas abordagens não são efetivas na presença de descontinuidades materiais e, portanto, eles não são atrativos para a resolução de problemas Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), que tem recebido muita atenção para aplicação do MEFG. Conseqüentemente, diferentes técnicas têm sido propostas, especialmente, para consideração da parte singular durante o processo de recuperação. A divisão do campo de tensões exato em duas partes (uma suave e uma singular) como mostrado em Ródenas (2008) e o XMLS (Mínimos Quadrados Móveis Estendidos) de Bordas e Duflot (2007) são dois exemplos dessas técnicas.

Outro agravante é a hipótese implícita de que as oscilações indicam erros e que tensões suaves significam tensões precisas, isso porque o método pode falhar se as tensões pós-processadas forem suaves (GRÄTSH e BATHE, 2005). A robustez depende, também, da regularidade do problema e da malha usada. Quando o problema em consideração é suave e, adicionalmente, a aproximação numérica possui a propriedade de superconvergência, este tipo de estimador é assintoticamente exato. Esta propriedade assegura controle de erro preciso para malhas suficientemente pequenas. De qualquer modo, para problemas não suaves, em particular aqueles com gradiente descontínuo é bem sabido que esses estimadores não são eficientes em malhas relativamente grosseiras. Eles podem refinar demasiadamente regiões onde não existem erros e falhar em reduzir o erro global (CAI e ZHANG, 2010). A propósito, um estimador de erro que possibilita encontrar o raio de enriquecimento ótimo para o MEFG (o que é referido como *adaptatividade*, veja seção 4.3) foi proposto por Bordas e Duflot (2008). Baseia-se na recuperação da derivada global e divide o campo de tensões em três partes: uma parte padrão (proveniente das funções de forma padrão), uma parte descontínua e uma parte próxima à ponta da trinca (as duas últimas com ou auxílio de funções específicas para cada caso).

Os estimadores do tipo *ZZ* são apenas *indicadores de erro* em problemas não lineares, porque as propriedades de superconvergência, que servem de base para eles, não podem ser automaticamente estendidas para o regime não linear (HUERTA *et al.*, 1999 e 2002). Outro aspecto que deve ser enfatizado é o fato de os pontos de superconvergência não serem conhecidos para graus polinomiais elevados, o que impõe limitações à condução do procedimento adaptativo com refinamento do tipo *p* e, fatalmente, torna-se inadequado para abordagem de enriquecimento polinomial do MEFG.

Em decorrência dessas constatações, os esforços de aprimoramento subsequentes deram origem a três segmentos de pesquisa distintos:

- 1) Proposição de modificações na estratégia original do SPR, por meio da adição de restrições (seja de equilíbrio, de condição de contorno, de compatibilidade ou mesmo da combinação delas) objetivando, simplesmente, um campo recuperado de melhor qualidade. Fazem parte desse segmento o SPR-E e o SPR-EB de Wiberg e Abdulwahab (1997), o SPR-R de Ródenas *et al.* (2003) e sua extensão o SPR-C de Ródenas *et al.* (2007), o SPR-CK de Ródenas *et al.* (2008) para o MEF e sua versão

melhorada para o MEFX chamada SPR-CX de Ródenas *et al.* (2010), ambos para problemas que envolvem singularidade e, recentemente, Lins *et al.* (2015).

2) Desenvolvimento de procedimentos alternativos, que não necessitam do conhecimento de pontos superconvergentes, tais como: o PPR (*Polynomial Preserving Recovery*) de Zhang e Naga (2004), o REP (*Recovery by Equilibrium in Patches*) de Borroomand *et al.* (2004), RCP (*Recovery by Compatibility in Patches*) de Ubertini (2004) versão em subdomínio de nós, de Bennedeti *et al.* (2006) versão em subdomínio de elementos e Daghia *et al.* (2013) versão em subdomínio de elementos aplicada a problemas de elastoplasticidade. Eles têm uma faixa de aplicação mais ampla, especialmente em análises não lineares;

3) Recuperação de um campo estaticamente admissível (ou mesmo “aproximadamente” estaticamente admissível), com vistas a alcançar a propriedade do limite superior nesse tipo estimativa. Fazem parte desse segmento os trabalhos de Díez *et al.* (2007), Ródenas *et al.* (2010) e Ródenas *et al.* (2012).

2.3.3.1 Relação entre as estimativas do tipo residual e de recuperação

Em Zhu (1997) foi estabelecida uma relação entre as abordagens residual e de recuperação. Segundo o autor, muito embora os estimadores do tipo residual e os estimadores do tipo recuperação, em suas formas originais, tenham sido deduzidos por metodologias diferentes e, não obstante, os pesquisadores que lidam com esses estimadores tenham sempre seguido trajetórias distintas (na construção e análise dos mesmos), existem registros de alguns esforços que foram feitos no sentido de tentar encontrar uma conexão entre eles.

Nesse artigo foi apresentada uma investigação detalhada sobre a relação entre esses estimadores. Demonstrou-se que alguns dos populares estimadores de erro do tipo residual (ou seus equivalentes) podem de fato ser deduzidos a partir dos estimadores do tipo recuperação.

Para o autor o estudo dessa relação merece investigação adicional, não só teórica como também numérica, com vistas à possibilidade de que algum dia uma abordagem unificada, para a teoria e o desenvolvimento de estimadores de erro “*a posteriori*”, seja alcançada.

2.3.4 Estimador de erro na Relação Constitutiva (CRE – *Constitutive Error Relation*)

O estimador de erro na relação constitutiva pode ser visto como sendo um estimador global. Nesta estratégia, as equações do problema a ser resolvido são divididas em dois grupos distintos. Na elasticidade linear, o primeiro grupo é composto pela restrição cinemática e pela equação de equilíbrio e o segundo grupo é composto pela relação constitutiva.

O princípio básico desta abordagem consiste em encontrar um par admissível $(\tilde{\mathbf{u}}_{CA}^*, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{EA}^*)$, como já mencionado no item 2.2.1, que verifica as equações do primeiro grupo. A qualidade da solução numérica é medida por meio do resíduo relacionado à verificação da relação constitutiva. Obviamente, se esse par verificar, também, a equação do segundo grupo, tem-se que $(\tilde{\mathbf{u}}_{CA}^*, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{EA}^*) = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ e, nesse caso, a solução exata é encontrada.

Uma vez que a solução admissível tenha sido construída por algum método (fluxo-híbrido ou livre de fluxo) Gallimard (2009), o estimador de erro na relação constitutiva é expresso por:

$$\|\tilde{\mathbf{e}}_{RC}\|_U^2 = \int_{\Omega} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{EA}^*(\tilde{\mathbf{u}}) - \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}))^T \mathbf{C}^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{EA}^*(\tilde{\mathbf{u}}) - \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}})) d\Omega \quad (58)$$

A propriedade fundamental do CRE é sua relação com a solução exata, (PLÉD *et al.*, 2011). O teorema de Prager-Synge conduz a seguinte desigualdade:

$$\|\mathbf{e}\|_U^2 = \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_U^2 \leq \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_U^2 + \|\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{EA}^*\|_U^2 = \|\tilde{\mathbf{e}}_{RC}\|_U^2 \quad (59)$$

A Eq. (59) é essencial para a dedução de limites estritos (com relação ao erro exato) sobre ambos os erros de discretização (local e global) na elasticidade (PANATIER *et al.*, 2010)

O CRE pode ser aplicado a problemas lineares e não lineares. Nos trabalhos de Panatier *et al.* (2010) e Lin *et al.* (2012), o CRE foi utilizado em problemas da mecânica da fratura linear abordados no contexto do MEFX.

Para problemas com plasticidade e viscoplasticidade sem amolecimento, foram propostos dois tipos de estimadores: o de Drucker e o de Dissipação.

O erro de Drucker assume que a lei funcional que vincula o *estado de tensão atual* à *história da deformação* satisfaz a estabilidade do material (desigualdade de Drucker). Ele pode ser aplicado a uma ampla classe de problemas de plasticidade e

viscoplasticidade. Esse estimador também faz uso do par admissível $(\tilde{\mathbf{u}}_{CA}^*, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{EA}^*)$ e as equações do problema são divididas exatamente como no caso linear.

Para formulações com variáveis de estado internas, como é o caso dos modelos de dano, o erro de dissipação representa uma forma mais natural de avaliação porque o erro é estimado por meio dos resíduos das leis que descrevem a evolução do estado do material, portanto, do próprio processo de dissipação. Nesse caso, a noção de admissibilidade deve ser revisada. As equações são divididas em dois grupos: o primeiro grupo relacionado à energia livre (define a admissibilidade da solução) e o segundo grupo (relacionado à dissipação) inclui as leis de evolução. A qualidade da solução admissível será estimada por meio da qualidade da satisfação dessas leis (LADEVÈZE, 2001). É importante notar que para o erro de Dissipação, existe um vínculo com o “erro da solução” similar ao teorema Prager-Synge, Eq. (59).

Esses estimadores padecem do fato de que são difíceis de implementar e o custo é bastante elevado em comparação com outros estimadores (LADEVÈZE e ROUGEOT, 1997). Adicionalmente, eles demandam conhecimentos muito específicos e, por isso, não são acessíveis a grande maioria dos usuários de métodos numéricos. Não obstante, os índices de efetividade desses estimadores podem ser impactados em presença de elementos distorcidos e concentração de tensões em problemas da elasticidade (LADEVÈZE e ROUGEOT, 1997).

2.3.5 Estimador de erro Orientado ao Objetivo

Esse tipo de estimativa é considerado como sendo uma extensão das estimativas “*a posteriori*”.

O erro medido na norma de energia fornece uma boa indicação do erro global, mas pode ser relativamente insensível a certos valores locais das variáveis de estado e, principalmente, à precisão delas. Pensando-se em termos de procedimento adaptativo, em geral, o refinamento introduzido por uma redução ótima do erro global não será o mesmo para o erro local (ALMEIDA e PEREIRA, 2006). Todavia, em problemas de análise estrutural, de modo geral, os engenheiros frequentemente estão mais interessados em grandezas vinculadas ao projeto, tais como tensões, deslocamentos em pontos específicos ou em sub-regiões da estrutura, ao invés de deslocamentos globais.

Com algum custo extra, esse estimador pode ser aplicado no final de qualquer passo computacional da análise de elementos finitos. Técnicas de medida de erro orientada ao objetivo fazem uso do conceito de *função de influência*, que no contexto de estimativa de erro indica como o erro de discretização afeta a quantidade de interesse (PANNACHET *et al.*, 2010).

A questão mais relevante da estimativa de erro orientada ao objetivo é como escolher a quantidade de interesse $Q(\mathbf{u})$ para que ela possa ser analisada diretamente. Basicamente, a escolha depende do problema e ela pode ser uma integral sobre o domínio, uma integral sobre o contorno ou quantidades pontuais (LIN *et al.*, 2012). Os fatores de intensidade de tensão na ponta de uma trinca, por exemplo, são funções lineares dos deslocamentos e podem ser representados pelo funcional:

$$Q(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} b^0 \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (60)$$

onde b^0 é uma função peso. Se a função de ponderação for uma função constante unitária, a quantidade local é igual ao valor médio do campo multiplicado pelo comprimento, área ou volume da sub-região de interesse, mas outras funções podem ser usadas. Se a sub-região for um ponto, a quantidade local é o valor do campo naquele ponto (ALMEIDA e Pereira, 2006). Idealmente, $Q(\mathbf{u})$ é um funcional linear, mas caso não seja, alguma técnica de linearização deve ser aplicada (PANNACHET *et al.*, 2010). Este procedimento pode ser visto no trabalho de Rüter e Stein (2006) que adotaram a integral- J (que é um funcional quadrático do deslocamento) como quantidade de interesse.

O erro de discretização da quantidade de interesse é definido como:

$$Q(\mathbf{e}) = Q(\mathbf{u}) - Q(\tilde{\mathbf{u}}) = Q(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \quad (61)$$

Uma opção seria resolver para o erro e encontrar o funcional exato para a quantidade de interesse:

$$Q(\mathbf{u}) = Q(\mathbf{e}) + Q(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (62)$$

Novamente, é impossível resolver para o erro exato. Uma abordagem alternativa é relacionar o funcional do erro, Eq. (62), com o resíduo global na Eq. (26), que contém toda a informação que conduz ao erro numérico (ODEN e PRUDHOME, 2001).

É necessário introduzir o problema *secundário* ou *adjunto*, objetivando encontrar uma função linear contínua $\mathbf{w} \in H^1$ para que o erro na quantidade de interesse possa ser expresso em termos do erro de energia. Novamente, como esse problema é dimensão infinita, só será possível obter uma aproximação $\tilde{\mathbf{w}}$, em um espaço dimensão finita. Obviamente, quanto mais precisa for a aproximação $\tilde{\mathbf{w}}$ da função de influência, mais preciso será o cálculo da quantidade de interesse em si.

O erro do problema secundário é definido como $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}$ (que na prática é substituído pelo erro de referência $\boldsymbol{\varepsilon}_R = \mathbf{w}_R - \tilde{\mathbf{w}}$) obtido em uma malha mais fina.

Após desenvolvimento matemático, que está além do escopo deste trabalho, é possível provar que o erro na quantidade de interesse está limitado em termos dos erros na norma de energia dos problemas primário e secundário:

$$|Q(\mathbf{e})| = |B(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}})| \leq \|\mathbf{e}\|_U \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_U \quad (63)$$

Um limite óbvio do erro para a quantidade $Q(\mathbf{e})$ varia entre $\pm \|\mathbf{e}\|_U \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_U$. Ou seja, limites para as quantidades de interesse são recuperados combinando-se limites superiores e inferiores do erro na norma de energia para ambos os problemas primário e secundário. Portanto, um limite superior para essa quantidade (em valor absoluto) poderá ser obtido se os limites superiores para $\|\mathbf{e}\|_U$ e $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_U$ estiverem disponíveis.

Qualquer um dos estimadores de erro, residuais, de recuperação ou o CRE, pode ser usado para estimar o erro no cálculo da quantidade de interesse. A Eq. (63) mostra que a taxa de convergência $|Q(\mathbf{e})|$ é maior que a taxa de convergência do erro na norma de energia. Isso significa que qualquer funcional linear agindo sobre o espaço de elemento finito é superconvergente comparado à convergência na norma de energia. Obviamente, a taxa de convergência real depende da regularidade das soluções dos problemas original e secundário (GRÄTSH e BATHE, 2005). Aliás, esse fato foi demonstrado no trabalho de Oden e Prudhome (2001) onde para a classe de problemas analisados o procedimento orientado ao objetivo mostrou-se grandemente acelerado se comparado aos esquemas adaptativos tradicionais baseados na norma de energia. Os experimentos também mostraram que a qualidade dos limites sobre o erro é muito sensível à qualidade das estimativas de erro na norma de energia e na própria quantidade de interesse. Os autores concluíram que a

confiabilidade desses limites poderia ser melhorada ao se melhorar os índices de efetividade das estimativas de energia globais.

Para o cálculo da estimativa do erro em uma quantidade de interesse qualquer, dois conjuntos de equações, para o problema primário e secundário, respectivamente, são resolvidas. De qualquer modo, é possível utilizar a matriz de rigidez global fatorada, que é montada durante a resolução do problema original, também no problema secundário. Esta fatoração, na verdade, é o cálculo principal na resolução das equações globais.

Vale notar a contribuição de Stein *et al.* (2011), que apresentaram e compararam o desempenho de estimadores de erro do tipo residual (explícito e implícito), aplicados à Mecânica da Fratura Linear Elástica, no contexto do MEFX. Em ambos os casos, foram deduzidos limites superiores para o erro de discretização medido na norma de energia e, na sequência, essas duas abordagens foram estendidas para os estimadores de erro orientados ao objetivo.

2.4 Exemplo numérico

2.4.1 Koyna Dam linear

Uma seção de barragem de concreto por gravidade com dimensões correspondentes ao bem conhecido Koyna Dam (atingido por um terremoto em na Índia em 1967) foi escolhido como exemplo numérico.

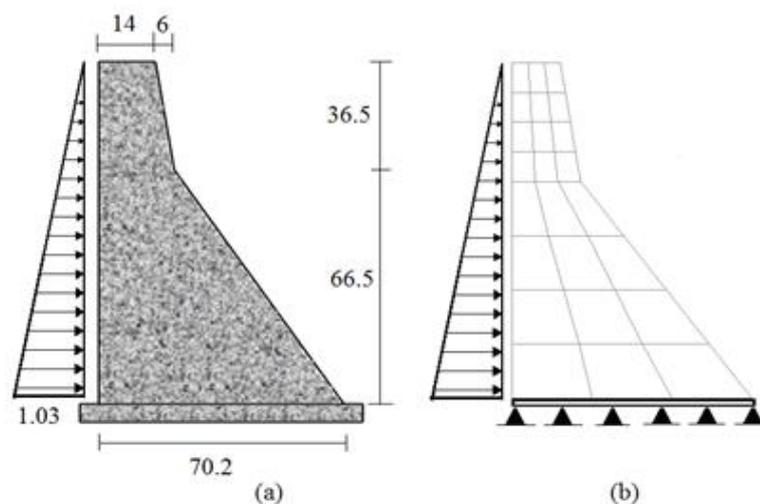


Figura 14 – Koyna dam: (a) geometria; (b) condições de contorno (força e deslocamento) e malha inicial;

A análise foi realizada considerando estado de deformação plana e que o concreto apresenta resposta elástica linear para este nível de sollicitação. As seguintes propriedades materiais foram consideradas: módulo de elasticidade igual a 25 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,2. A geometria, esforços e a malha inicial são mostrados na Figura 14. As dimensões são dadas em metros e a força em MPa.

A malha utilizada para obtenção da solução de referência numérica é mostrada na Figura 15. Note que a malha foi mais refinada nas regiões onde é esperada a ocorrência de um elevado gradiente da solução – vide detalhe 1 e 2, respectivamente.

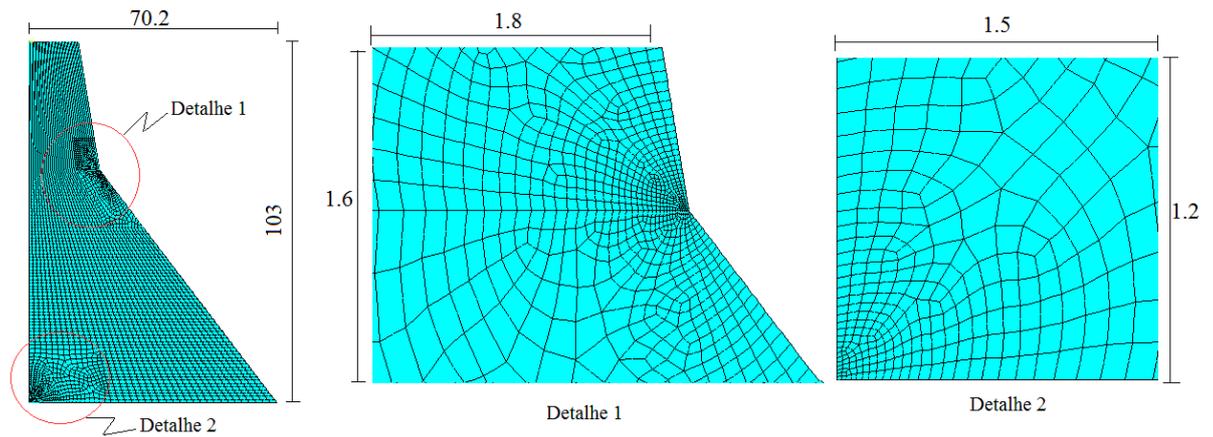


Figura 15 – Malha para a solução de referência: 7013 elementos quadrilaterais com aproximação quadrática. Medidas em metros;

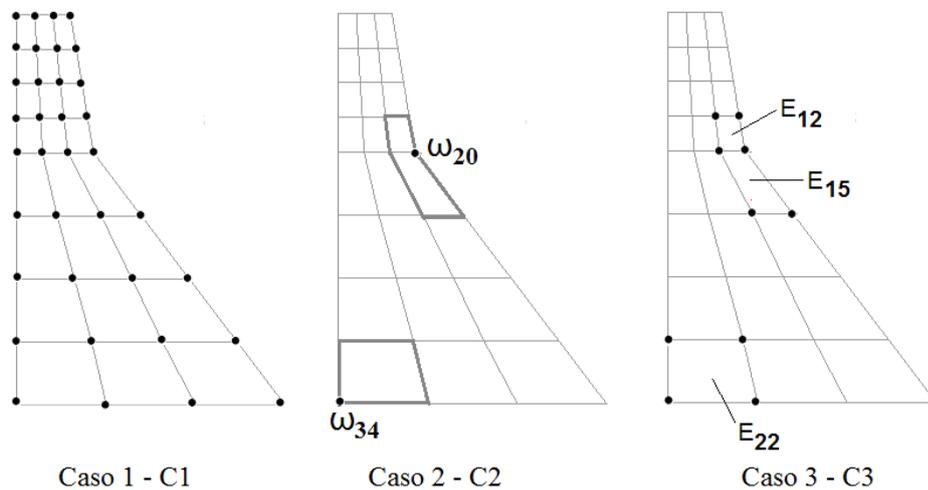


Figura 16 – Regiões com diferentes tipos de enriquecimento.

Os estimadores de erro utilizados nesse exemplo serão referidos como:

$$\tilde{\xi}^1 = \text{Resíduo no Elemento Equilibrado – EERM, Eq. (49);}$$

$$\tilde{\xi}^2 = \text{Resíduo no Subdomínio – SRM com } M=4, \text{ Eq. (53);}$$

As medidas de erro globais, calculadas para as malhas na Figura 16, são usadas para obter os índices de efetividade Eqs. (14), letras a, b e c, o erro relativo global Eq. (20) e os índices de robustez, Eq. (22). O comportamento do problema é aproximado pelas funções do MEFG, Eqs. (10) e (11). Três tipos de aproximações são adotados que diferem, basicamente, na forma como as PU's são enriquecidas com monômios que produzem funções de forma de grau polinomial p : Caso 1 – todas as PU's são uniformemente enriquecidas; Caso 2 – Apenas as PU's das nuvens 20 e 34 são enriquecidas; e Caso 3 – Apenas as PU's das nuvens que contém os elementos são enriquecidas. O grau polinomial p , resultante sobre cada nuvem, varia de 1 a 4. A função erro é aproximada por funções MEFG polinomiais de um $(p+1)$ ou dois graus $(p+2)$ mais alta. A integração numérica é realizada com 25x25 pontos de Gauss-Legendre (elementos E₁₂, E₁₅ e E₂₂) e 7x7 pontos nos demais elementos. Essa distribuição de pontos é necessária porque a integração com a solução de referência é realizada na malha grosseira. Os elementos na malha MEFG correspondem a áreas que na malha de referência encontram-se extremamente refinadas. A respeito do procedimento para cálculo do erro com relação à malha de referência vide Apêndice 2.

Os dados provenientes das análises estão organizados para cada caso, da seguinte forma: os resultados globais (C1, C2 e C3) estão resumidos nas Tabelas 2, 3 e 4 e nos gráficos das Figuras 17 a 21. Os resultados locais para as nuvens (C1, C2 e C3) estão nas tabelas 5, 6 e 7 e nos gráficos das Figuras 22 a 27. Por fim, os resultados locais para os elementos (C1, C2 e C3) estão nas tabelas 8, 9 e 10 e nos gráficos das Figuras 28 a 36.

Tabela 2 – Valores globais para o caso C1.

Caso 1						
Grau polinomial da solução do erro	Grau polinomial “p” da solução do problema	EERM	SRM		ρ	η (%)
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$			
		$\tilde{\theta}$	$\tilde{\theta}^s$	$\tilde{\theta}^l$		
p+1	1	0,859	1,029	0,820	1,25	29,8
	2	0,509	0,789	0,669	1,19	11,94
	3	0,640	0,898	0,696	1,29	10,44
	4	0,592	0,885	0,670	1,32	7,79
p+2	1	0,993	1,199	0,827	1,45	29,8
	2	0,816	1,250	0,835	1,50	11,94
	3	0,849	1,224	0,825	1,48	10,44
	4	0,836	1,244	0,815	1,53	7,79

Tabela 3 – Valores globais para o caso C2.

Caso 2						
Grau polinomial da solução do erro	Grau polinomial “p” da solução do problema	EERM	SRM		ρ	η (%)
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$			
		$\tilde{\theta}$	$\tilde{\theta}^s$	$\tilde{\theta}^l$		
p+1	1	0,859	1,029	0,820	1,25	29,8
	2	0,856	1,012	0,816	1,24	29,29
	3	0,912	1,041	0,824	1,26	28,72
	4	0,909	1,016	0,838	1,21	24,68
p+2	1	0,993	1,199	0,827	1,45	29,8
	2	0,985	1,187	0,827	1,44	29,26
	3	1,001	1,193	0,837	1,43	28,72
	4	1,035	1,134	0,827	1,37	24,68

Tabela 4 – Valores globais para o caso C3.

Caso 3						
Grau polinomial da solução do erro	Grau polinomial “p” da solução do problema	EERM	SRM		ρ	η (%)
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$			
		$\tilde{\theta}$	$\tilde{\theta}^s$	$\tilde{\theta}^l$		
p+1	1	0,859	1,029	0,820	1,25	29,28
	2	0,831	0,994	0,792	1,26	21,13
	3	0,852	1,012	0,799	1,27	19,63
	4	0,877	1,017	0,805	1,26	17,18
p+2	1	0,993	1,199	0,827	1,45	29,8
	2	0,973	1,202	0,823	1,46	21,13
	3	0,983	1,208	0,823	1,47	19,63
	4	1,016	1,187	0,821	1,45	17,18

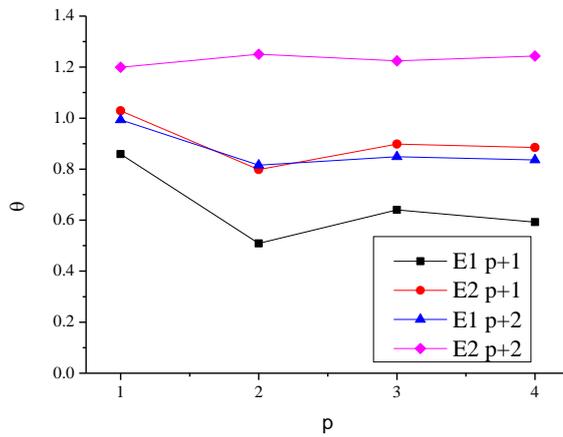


Figura 17 – Índices de efetividade – Limite Superior - C1

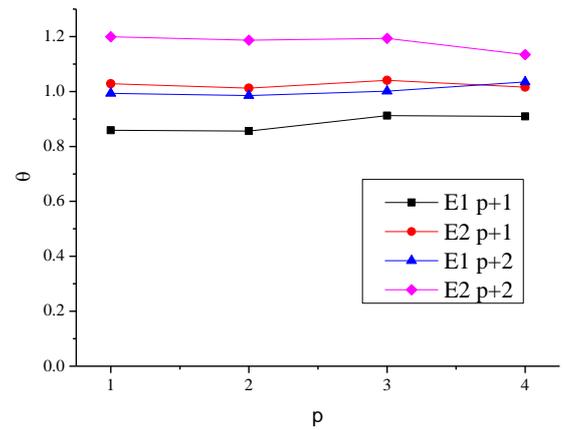


Figura 18 – Índices de efetividade – Limite Superior - C2

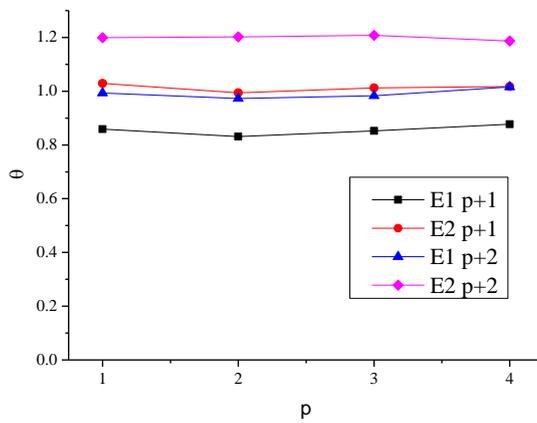


Figura 19 – Índices de Efetividade - Limite Superior - C3

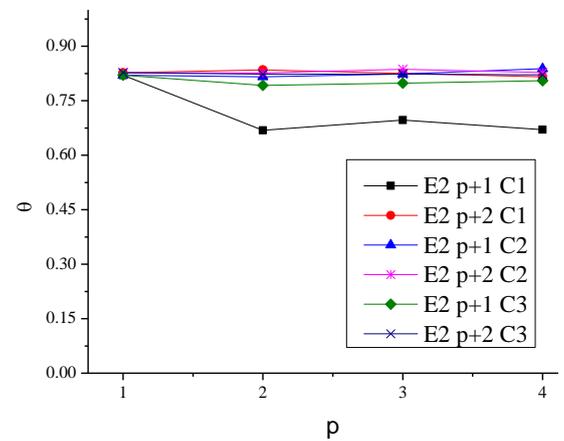


Figura 20 – Índices de Efetividade - Limite Inferior para C1, C2 e C3

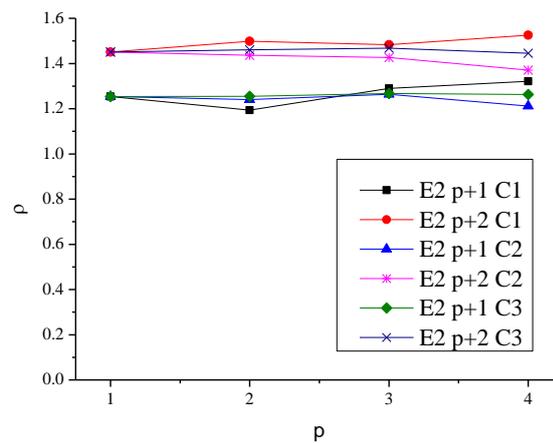


Figura 21 – Índices de Robustez para C1, C2 e C3

Tabela 5 – Indicadores de erro vinculados às nuvens θ_ω para o caso C1.

CASO 1						
Grau polinomial da solução do erro	Grau polinomial “p” da solução do problema	Nuvem 20		Nuvem 34		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		θ	θ	θ	θ	
p+1	1	0,802	1,054	0,498	0,905	29,8
	2	0,437	1,035	0,257	0,755	11,9
	3	0,363	0,887	0,329	0,851	10,4
	4	0,295	0,796	0,326	0,862	7,79
p+2	1	0,924	1,240	0,633	1,391	29,8
	2	0,480	1,406	0,531	1,310	11,9
	3	0,484	1,249	0,482	1,274	10,4
	4	0,417	1,202	0,463	1,305	7,79

Tabela 6 – Indicadores de erro vinculados às nuvens θ_ω para o caso C2.

CASO 2						
Grau polinomial da solução do erro	Grau polinomial “p” da solução do problema	Nuvem 20		Nuvem 34		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		θ	θ	θ	θ	
p+1	1	0,802	1,054	0,498	0,905	29,8
	2	0,656	1,242	0,491	0,863	29,3
	3	0,429	1,115	0,627	1,074	28,7
	4	0,466	1,080	0,256	0,848	24,7
p+2	1	0,924	1,240	0,633	1,391	29,8
	2	0,746	1,467	0,629	1,400	29,3
	3	0,595	1,202	0,664	1,432	28,7
	4	0,597	1,184	0,497	1,275	24,7

Tabela 7 – Indicadores de erro vinculados às nuvens θ_ω para o caso C3.

CASO 3						
Grau polinomial da solução do erro	Grau polinomial “p” da solução do problema	Nuvem 20		Nuvem 34		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	
		θ	θ	θ	θ	
p+1	1	0,802	1,054	0,498	0,905	29,8
	2	0,528	1,087	0,253	0,720	21,1
	3	0,430	0,739	0,385	0,922	19,6
	4	0,276	0,665	0,357	0,899	17,2
p+2	1	0,924	1,240	0,633	1,391	29,8
	2	0,547	1,366	0,494	1,269	21,1
	3	0,546	0,932	0,520	1,327	19,6
	4	0,350	0,886	0,478	1,334	17,2

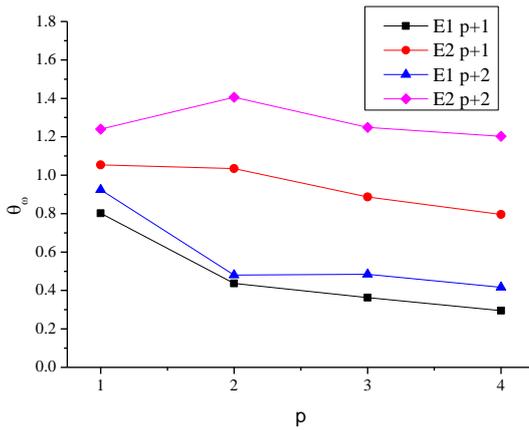


Figura 22 – Índice de efetividade vinculado à Nuvem 20 - C1

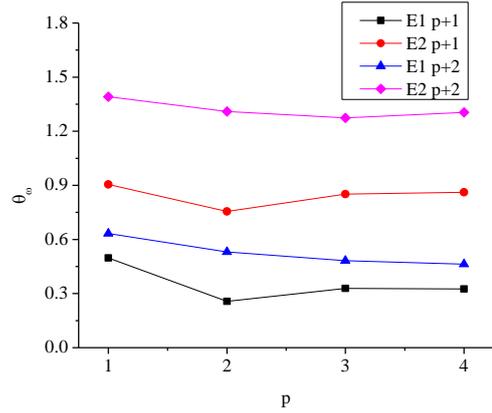


Figura 23 – Índice de efetividade vinculado à Nuvem 34 - C1

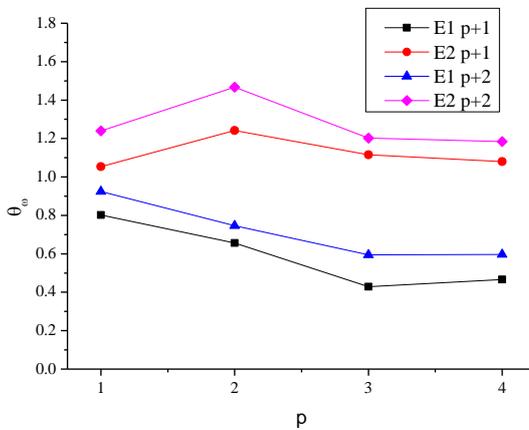


Figura 24 – Índice de efetividade vinculado à Nuvem 20 - C2

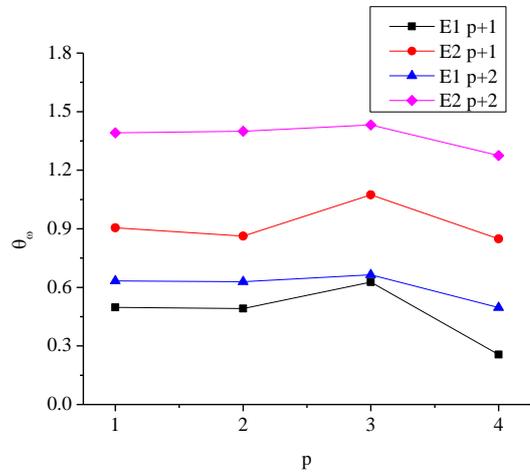


Figura 25 – Índice de efetividade vinculado à Nuvem 34 - C2

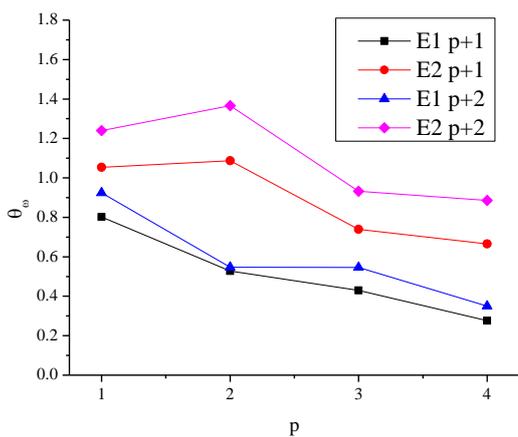


Figura 26 – Índice de efetividade vinculado a Nuvem 20 - C3

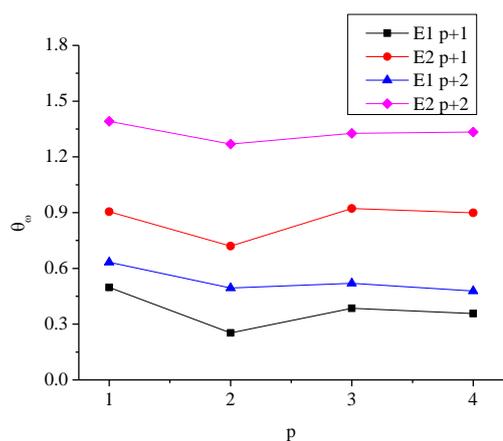


Figura 27 – Índice de efetividade vinculado a Nuvem 34 - C3

Tabela 8 – Indicadores de erro vinculados aos elementos θ_L para o caso C1.

CASO 1								
Grau “p” da solução do erro	Grau “p” da solução do problema	Elemento 12		Elemento 15		Elemento 22		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		θ	θ	θ	θ	θ	θ	
p+1	1	0,947	1,161	0,983	1,102	0,674	0,981	29,8
	2	1,078	0,962	0,816	0,989	0,402	0,729	11,94
	3	1,069	0,861	0,668	0,880	0,539	0,810	10,44
	4	1,050	0,884	0,496	0,696	0,550	0,853	7,79
p+2	1	1,030	1,411	1,137	1,225	0,857	1,304	29,8
	2	1,100	1,323	0,934	1,220	0,783	1,228	11,94
	3	1,208	1,202	0,981	1,115	0,790	1,178	10,44
	4	1,341	1,252	0,787	1,025	0,780	1,227	7,79

Tabela 9 – Indicadores de erro vinculados aos elementos θ_L para o caso C2.

CASO 2								
Grau “p” da solução do erro	Grau “p” da solução do problema	Elemento 12		Elemento 15		Elemento 22		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		θ	θ	θ	θ	θ	θ	
p+1	1	0,947	1,161	0,983	1,102	0,674	0,981	29,8
	2	1,012	1,277	0,884	1,068	0,662	0,939	29,26
	3	0,969	1,222	0,661	0,832	0,842	1,038	28,72
	4	0,881	1,228	0,643	0,824	0,367	0,866	24,68
p+2	1	1,030	1,411	1,137	1,225	0,857	1,304	29,8
	2	1,028	1,452	1,033	1,210	0,848	1,278	29,26
	3	1,034	1,375	0,823	1,004	0,891	1,303	28,72
	4	1,009	1,386	0,843	0,991	0,713	1,141	24,68

Tabela 10 – Indicadores de erro vinculados aos elementos θ_L para o caso C3.

CASO 3								
Grau “p” da solução do erro	Grau “p” da solução do problema	Elemento 12		Elemento 15		Elemento 22		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		θ	θ	θ	θ	θ	θ	
p+1	1	0,947	1,161	0,983	1,102	0,674	0,981	29,8
	2	1,004	1,180	0,914	1,046	0,392	0,689	21,13
	3	0,855	0,849	0,676	0,828	0,607	0,877	19,63
	4	0,839	0,934	0,402	0,456	0,585	0,876	17,18
p+2	1	1,030	1,411	1,137	1,225	0,857	1,304	29,8
	2	1,011	1,328	0,965	1,270	0,766	1,185	21,13
	3	0,928	1,049	0,881	0,997	0,820	1,220	19,63
	4	0,975	1,090	0,543	0,613	0,784	1,231	17,18

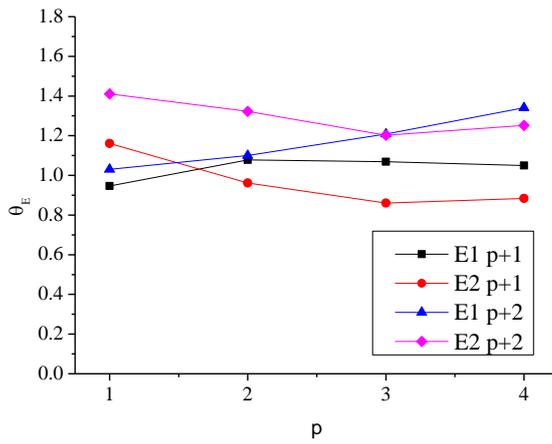


Figura 28 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 12 - C1

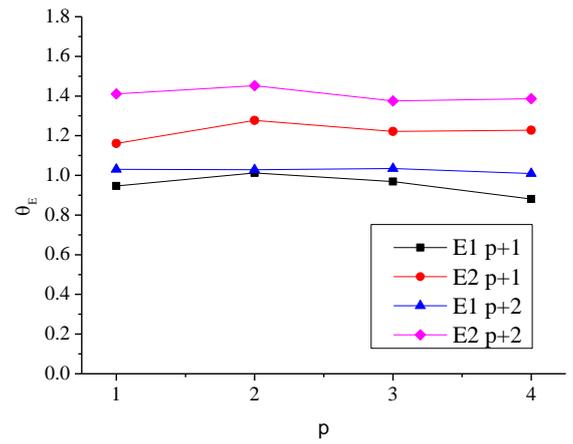


Figura 29 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 12 - C2

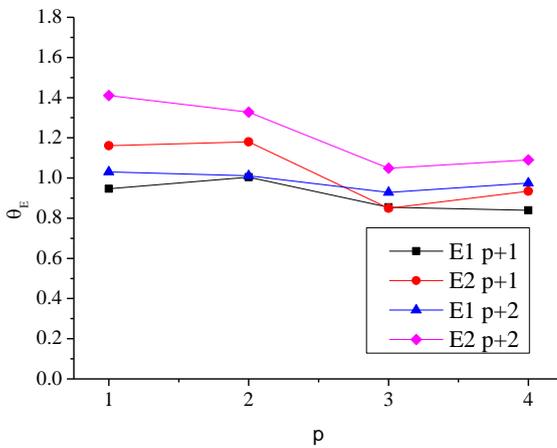


Figura 30 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 12 - C3

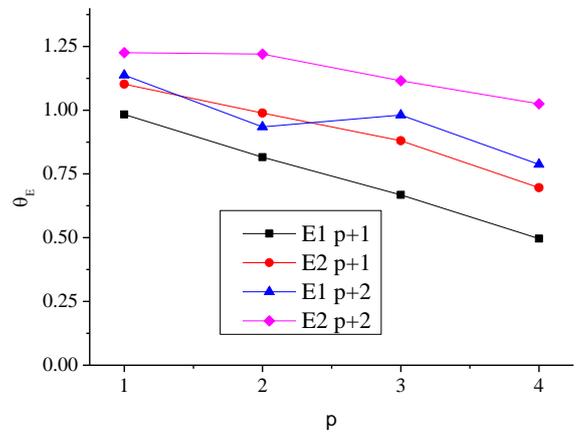


Figura 31 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 15 - C1

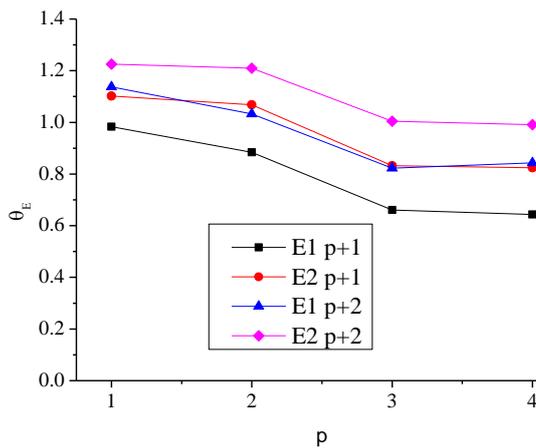


Figura 32 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 15 - C2

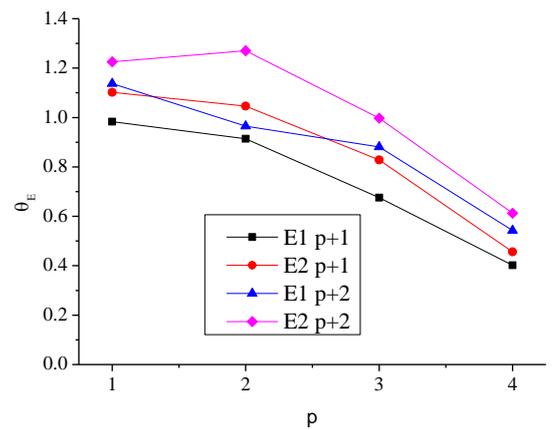


Figura 33 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 12 - C3

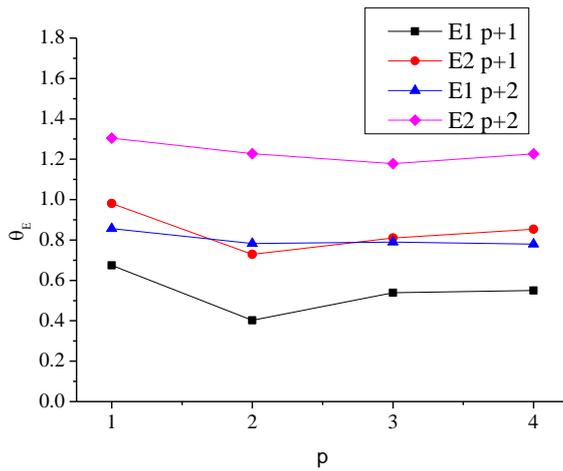


Figura 34 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 22 - C1

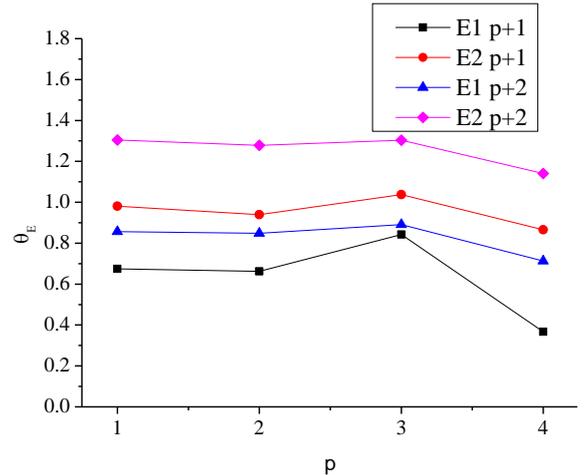


Figura 35 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 22 - C2

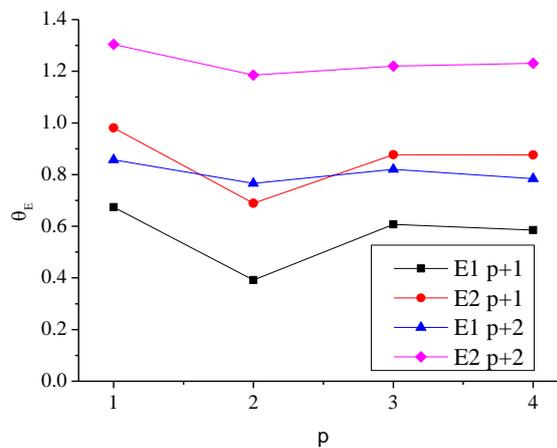


Figura 36 – Índice de efetividade vinculado ao Elemento 22 - C3

A partir dos resultados globais, apresentados nas Tabelas 2, 3 e 4, é possível afirmar que apenas o estimador SRM, com erro projetado em $p+2$, foi capaz de fornecer uma estimativa de limite superior para a norma de energia do erro. Este comportamento se repete nos três casos apresentados C1, C2 e C3. Os limites inferiores exibiram comportamentos semelhantes, com valores em torno de 0,8, exceto no caso C1. É possível que essa estimativa de limite inferior tenha sido impactada por erros de poluição (para mais informações veja PARÉS *et al.*, 2006) ou mesmo que o espaço do erro $p+1$ não seja adequado, já que em $p+2$ os resultados voltam a exibir valores na faixa de 0,8. Os índices de robustez exibem valores no intervalo entre 1,19 a 1,53.

No caso C1 (onde todas as nuvens do domínio são enriquecidas), o erro relativo diminui rapidamente de 29,8% para apenas 7,79%, na medida em que o espaço no

qual a solução é procurada é ampliado de $p=1$ para $p=4$. O enriquecimento de todos os nós possibilita a obtenção de soluções com menor erro de aproximação. Obviamente, quanto menor for o erro da solução, menores serão os valores a serem estimados e maiores serão as possibilidades de ocorrência de perturbação numérica. É exatamente o que se observa, nos índices de efetividade de limite superior e inferior, quando a solução é procurada em $p=2, 3$ e 4 e o erro é projetado em $p+1$. A projeção do erro em $p+2$ é suficiente para que os índices de efetividade, superiores e inferiores dos casos anteriormente citados, reestabeleçam os desempenhos desejados.

Para os casos C2 (apenas duas nuvens são enriquecidas nas regiões tidas como críticas) e C3 (todas as nuvens são enriquecidas nas regiões tidas como críticas) os índices de efetividade mostram um desempenho muito semelhante. Entretanto, no caso C3 a diminuição do erro relativo de 29,8% para 17,2% é sem dúvida mais satisfatória do que no caso C2 onde o erro diminui de 29,8% para 24,7%. Obviamente, o preço a se pagar por essa maior redução do erro é um acréscimo em termos de esforço computacional.

A partir dos resultados locais, observa-se que a nuvem 34 exibe um erro maior do que a nuvem 20. Esse fato é motivado pela existência de uma mudança abrupta nas condições de contorno Dirichlet/Neumann dessa nuvem. Em contrapartida, o erro da nuvem 20 é influenciado apenas por uma leve singularidade em razão da geometria. Com estimador EERM, tanto em $p+1$ quanto em $p+2$ para todos os casos (C1, C2 e C3) percebe-se uma subestimativa do erro nessas nuvens o que não ocorre globalmente. O mesmo não ocorre para o estimador SRM (exceto no Caso 3 da nuvem 20).

Para os estimadores de erro vinculados aos elementos, primeiramente, para melhor compreensão dos resultados, é importante destacar que o Elemento E_{12} apresentou uma leve distorção angular enquanto no Elemento E_{15} essa distorção é significativa e, por essa razão, o segundo apresenta um erro maior que o primeiro em todos os casos (C1, C2 e C3). Por outro lado, observa-se que no Elemento E_{22} a referida distorção é pequena e simultaneamente esse elemento representa a própria nuvem. Para o estimador vinculado à nuvem esse fato não parece ter influência na qualidade do indicador local. Entretanto, para o indicador vinculado ao elemento é facilmente perceptível a deterioração da qualidade do erro. Nessa situação a adoção do primeiro indicador em detrimento do segundo para a condução do procedimento adaptativo seria, sem dúvida, uma opção mais eficaz.

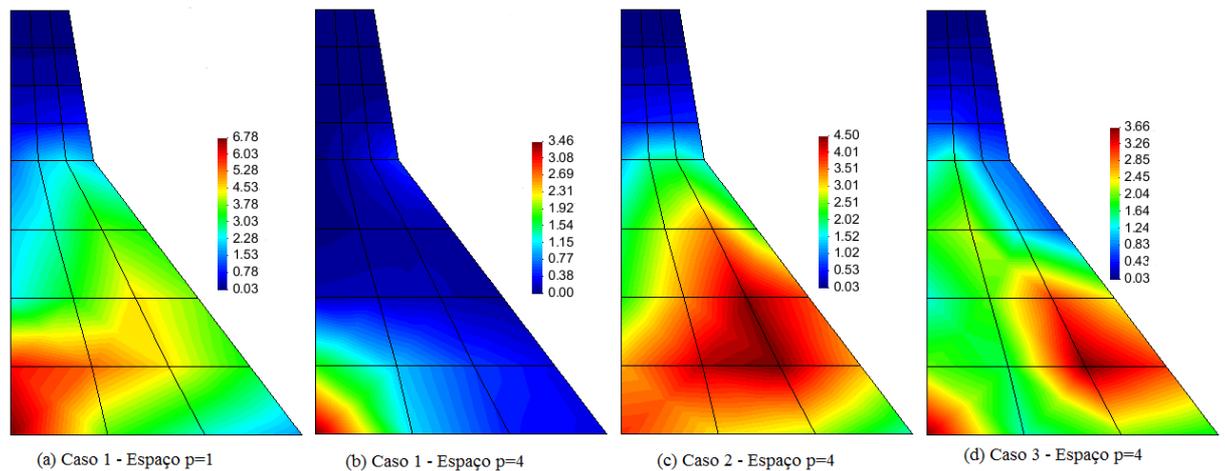


Figura 37 – Distribuição da função erro, projetado em $p+2$, para os casos avaliados.

A Figura 37 mostra a distribuição do erro nos três casos avaliados. Comparando-se os resultados das Figuras 37(a) e 37(b), ambas considerando o caso C1, é possível perceber uma diminuição significativa do erro (algo em torno de 50%) como resultado da ampliação do espaço no qual a solução era procurada de $p=1$ para $p=4$. Por outro lado, ao se comparar as Figuras 37(b) – caso C1, 37(c) – caso C2 e 37(d) – caso C3, todas com solução procurada no espaço $p=4$, sem dúvida a opção em 37(d), ou seja, o enriquecimento das nuvens ao redor dos elementos E_{12} , E_{15} e E_{22} se mostra mais eficaz na redução do erro, principalmente se comparado a 38(b), onde o preço a ser pago pelo desempenho superior é um pouco maior.

CAPÍTULO 3

3. NÃO LINEARIDADE DO MATERIAL: O DANO NO CONCRETO

3.1 Introdução

O concreto é um material heterogêneo de múltipla escala, Figura 38. Em simulações numéricas duas dessas escalas são de particular interesse: a escala métrica (10m) que é a escala de laboratório, onde são executados os experimentos com o concreto (simples ou armado), e as escalas maiores (10^2 e 10^3) que englobam as estruturas correntes na engenharia civil. Essas escalas, por sua vez, podem ser agrupadas em três níveis distintos de interesse, a saber: micro (a estrutura interna do cimento e pasta de cimento endurecida), meso (onde se constata a natureza heterogênea do material e a existência de poros) e macro (onde nenhuma estrutura interna do material pode ser reconhecida, exceto a presença de armadura no caso de concreto armado) (KANG e BITTENCOURT, 1998):

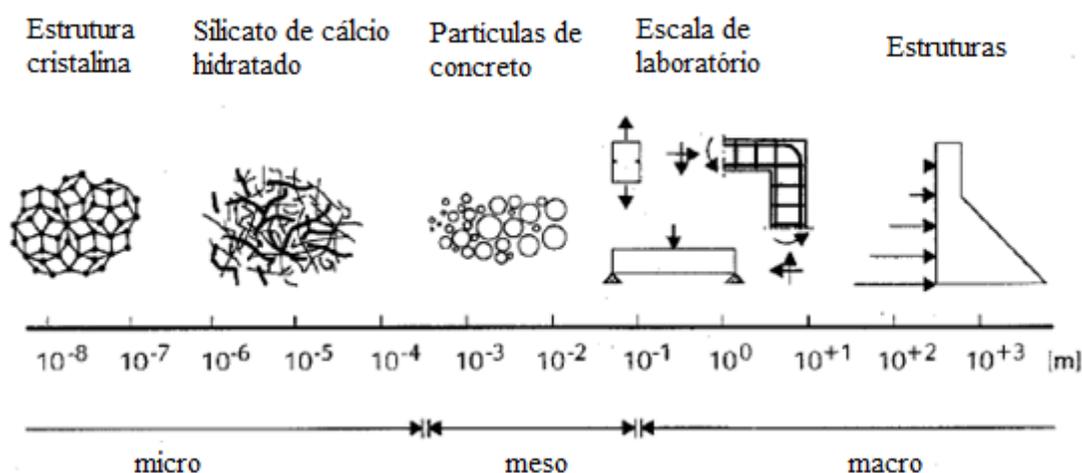


Figura 38 – Diferentes escalas de observação para o concreto (KANG e BITTENCOURT, 1998).

Na abordagem desses três níveis de observação, é normalmente assumido que o comportamento em um nível pode ser explicado em termos da estrutura observada no nível inferior (KANG e BITTENCOURT, 1998).

O dano, que será objeto de estudo nesse capítulo, se apresenta como um processo fundamental na resposta não linear desse material (PITUBA e PROENÇA, 2005).

A possibilidade de reproduzir o comportamento do concreto (simples e armado) em simulações numéricas, de forma confiável e objetiva para fins de projeto, é de grande interesse. Tendo em vista que as descrições cinemáticas nas formulações de elementos finitos são muito gerais, a fim de que a formulação de um elemento possa ser aplicada à predição de uma resposta específica, é necessária a adoção de um modelo constitutivo a ser escolhido de acordo com os propósitos da análise. Vários modelos constitutivos para o concreto estão disponíveis e cada um deles é capaz de exibir um bom desempenho dentro de uma determinada faixa de aplicabilidade. Nesse trabalho, a não linearidade do material será incorporada aos cálculos com o auxílio do modelo de dano de Mazars (1984).

3.2 O comportamento não linear do concreto

Muitos materiais mostram uma diminuição mais ou menos gradual de sua capacidade de carregamento quando deformados além de certo limite. É possível observar que existe uma não linearidade substancial antes da tensão máxima, Figura 40.

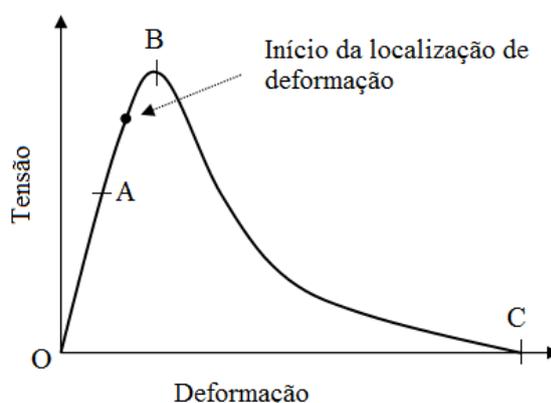


Figura 39 – Curva tensão-deformação para material quase frágil (Shah, 1995).

Embora a parte inicial da curva pareça quase reta, medições mais detalhadas mostram que existe uma ligeira curvatura desde o início do carregamento (KANG e BITTENCOURT, 1998). Os mecanismos de deformação, além do limite de proporcionalidade, não são bem compreendidos. Um conceito comumente aceito é o de que inicialmente são formadas microfissuras, distribuídas aleatoriamente em

algum ponto antes da tensão de pico, e que elas tendem a se localizar dando origem a uma macrotrinca que se propaga criticamente na tensão de pico. A deformação de amolecimento será observada durante a propagação dessa trinca. O estágio de pós-pico consiste da abertura da trinca principal acompanhada pelo descarregamento do resto da estrutura (SHAH *et al.*, 1995). Esse amolecimento age como um precursor para a ruptura completa. Evidências experimentais conclusivas indicam que o amolecimento é um efeito estrutural ao invés de uma propriedade intrínseca do material (PEERLINGS *et al.*, 1996 *apud* HEAD and HEGEMIER, 1984).

Os mecanismos responsáveis pelo comportamento com amolecimento podem ser calculados de uma maneira natural em *modelos materiais micromecânicos*. De qualquer modo, as análises baseadas nesses modelos não são apropriadas para simulações de grande escala, porque demandam um tremendo esforço computacional (PEERLINGS *et al.*, 1996). Uma alternativa é a descrição do amolecimento no nível contínuo.

O modelo de dano contínuo inclui, basicamente, as seguintes diretrizes (Barros, 1996):

- (i) caracterização do dano por intermédio de uma variável ou de um conjunto de variáveis;
- (ii) estabelecimento da tensão efetiva ou da lei constitutiva em função das referidas variáveis de dano;
- (iii) definição das leis que traduzem a evolução do dano.

3.3 O modelo de dano isotrópico

A mecânica do dano é um ramo da mecânica do contínuo que se serve de um conjunto de variáveis para incorporar nas equações constitutivas a perda local de integridade do material e assim poder descrevê-la.

Um modelo de dano muito popular para o concreto, proposto por Mazars (1984), e apresentado no Apêndice 3, é indicado para os casos onde o material encontra-se submetido a carregamento proporcionalmente crescente ou radial.

O exemplo numérico a seguir possibilita visualizar, graficamente, as curvas ajustadas resultantes da adoção das hipóteses simplificadoras inerentes a esse modelo. A estrutura analisada é uma chapa de espessura unitária, em estado plano de tensão, submetida a um esforço de tração no valor de 1MN/m (no primeiro ensaio) e

a um esforço de compressão no valor de 10.000 MN/m (no segundo ensaio), ambos uniaxiais.

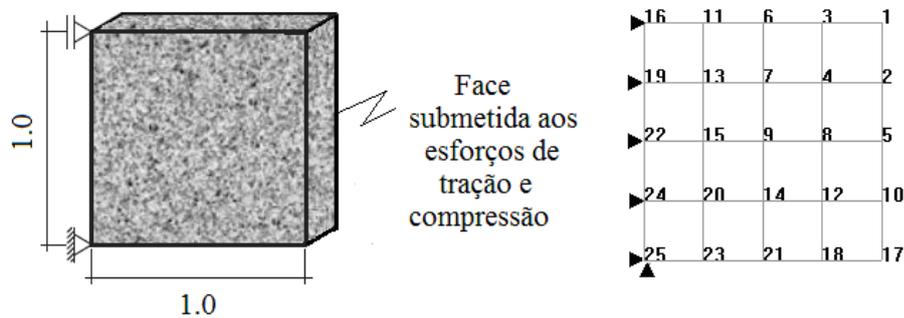


Figura 40 – Estrutura e malha de elementos finitos.

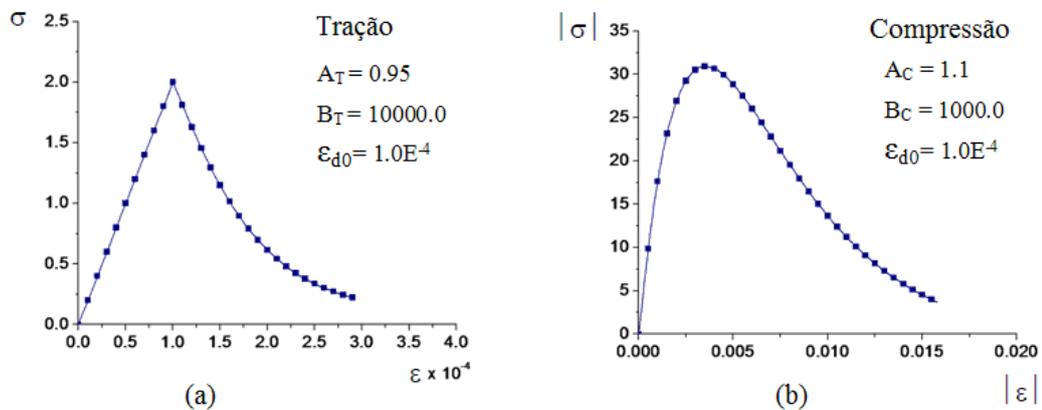


Figura 41 – Resultados da análise: (a) tração e (b) compressão para o nó 5 com as correspondentes curvas genéricas.

Os parâmetros do modelo estão listados abaixo para cada caso específico. A malha utilizada na simulação é constituída por 16 elementos planos quadrilaterais de quatro nós, Figura 40. O módulo de elasticidade é igual a 20 GPa e o coeficiente de Poisson igual a 0,2 são os mesmos nas duas análises.

Pelos gráficos, Figura 41, apresenta as respostas do modelo de Mazars na tração e na compressão, respectivamente.

3.4 Mecânica do contínuo clássica x regularizado

As formulações de dano podem ser incorporadas em algoritmos de elementos finitos e finitos generalizados e implementadas em códigos com relativa facilidade. No entanto, tem sido observado que as soluções numéricas dos problemas de dano padrão frequentemente parecem não convergir com o refinamento da malha. Na verdade, convergem a uma solução, porém sem significado físico real como

consequência da incapacidade da modelagem de descrever adequadamente o fenômeno físico que está ocorrendo. Isto pode ser mais facilmente compreendido ao se perceber que o conceito de ‘variável de dano contínuo’ presume certa homogeneidade local ou, pelo menos, uma suavidade da distribuição de dano micro estrutural. Mas, os modelos contínuos baseados neste conceito permitem soluções “descontínuas”, nas quais o desenvolvimento do dano localiza-se em uma pequena região enquanto o material ao redor permanece inalterado. Esta localização do dano está em contradição com a suavidade presumida do campo de dano e isso afeta a relevância física do modelo (PEERLING *et al.*, 2002).

Simulações numéricas usando modelos de dano contínuo mostram-se susceptíveis à chamada sensibilidade da malha (tamanho e alinhamento dos elementos). Este comportamento não é único para modelos de dano e nem está necessariamente relacionado ao método dos elementos finitos, já que outros modelos de discretização mostram irregularidades em circunstâncias similares.

A sensibilidade da malha é a consequência numérica das deficiências da modelagem matemática fundamental (PEERLING *et al.*, 2002). A aplicação direta da deformação de amolecimento na plasticidade clássica ou na teoria do dano contínuo normalmente conduz a resultados errados (PEERLING *et al.*, 1996).

Os modelos materiais que são tradicionalmente usados para descrever o processo de degradação podem prever o início de trinca prematura e instantânea. Esta resposta não física é causada por instabilidades de localização. Embora intimamente relacionados, os mecanismos por trás da localização patológica são fundamentalmente diferentes no estágio inicial e no estágio de crescimento das trincas.

Durante o estágio inicial a variável dano satisfaz $D < 1$ em toda parte do domínio e não existe nenhuma trinca. Mesmo assim, soluções descontínuas podem surgir como o resultado de instabilidades de localização (PEERLING *et al.*, 2002). Pode ser facilmente mostrado que o problema de equilíbrio elástico inicial é elíptico. Em certo estágio do processo de crescimento do dano, de qualquer maneira, esta elipticidade pode ser perdida localmente, como resultado dos campos de deformações variando fortemente.

Tão logo a trinca tenha sido iniciada, ou pelo mecanismo “patológico”, descrito acima, ou de forma natural, quando $D = 1$ em algum lugar do domínio, o campo de

deformação contém uma singularidade. A taxa de dano é uma função da taxa de deformação e, portanto, também é singular.

A introdução de não localidade em modelos de dano baseados na elasticidade tem mostrado impedir o desenvolvimento de descontinuidades de deslocamento e as singularidades de deformação associadas. O termo não local foi usado no passado com dois significados: um restrito e um amplo. No sentido restrito, refere-se a modelos com média integral. No sentido amplo, refere-se a todos os modelos que envolvem um tamanho característico (comprimento material) que também inclui os modelos gradientes. Amplamente falando, modelos não locais tipo ‘integral’ substituem uma ou mais variáveis de estado por seus equivalentes não locais obtidos por média ponderada sobre a vizinhança espacial de cada ponto considerado. Isto conduz ao abandono do princípio da ação local. Em modelos não locais tipo ‘gradiente’, o princípio da ação local é preservado e o campo na vizinhança imediata ao ponto é considerado por enriquecer as relações constitutivas locais com gradientes de primeira ordem ou de ordem mais alta de algumas variáveis de estado ou forças termodinâmicas. Um comprimento de escala é incorporado na descrição matemática de ambos os modelos.

Nesse trabalho, a abordagem não local é viabilizada pela definição de uma largura mínima para a concentração do dano. Para tal, lança-se mão do chamado comprimento característico do material l_c . Esse parâmetro relaciona-se à microestrutura do material e representa a heterogeneidade do meio (volume representativo do material), sendo o mesmo da ordem de 2,7 de d_a (d_a é o tamanho do maior agregado) (BAZANT *et al.*, 1989).

A determinação de um comprimento característico representativo de uma microestrutura é muito complexa, nesse caso, porque os resultados dependem do tipo de concreto, do espécime, da estrutura dos grãos, entre outros. Em vista disso, Volokh (2013) propôs uma fórmula para o cálculo de l_c que dispensa o conhecimento da estrutura interna do concreto e as componentes da referida equação podem ser deduzidas a partir de experimentos macroscópicos apenas. O cálculo teste forneceu uma magnitude para o comprimento característico igual a 2,6 cm que, de acordo com o autor, está em boa concordância com os dados experimentais cuja faixa varia entre 1 a 3 cm. É suficiente introduzir a não localidade apenas na variável que controla a degradação do material.

A quantidade não local é então inserida na relação constitutiva original. Nesse trabalho a deformação equivalente ε_{eq} (que governa o dano no modelo de Mazars e traduz o estado de alongamento do material durante o carregamento) é substituída por uma média ponderada $\bar{\varepsilon}_{eq}$ calculada em uma vizinhança de raio $R_{nl} \approx 0,5l_c$ (BARROS, 2002).

Além de atuar como um limitador de localização, a abordagem não local pode reduzir substancialmente o efeito de orientação de malha. Adicionalmente, a convergência das estratégias de resolução incremental/iterativa é melhorada.

A aplicação de modelos do contínuo regularizado na simulação, em substituição à abordagem clássica, tem motivação matemática, numérica e física. Eles são aplicados a fim de (PAMIN, 2011): (a) manter o Problema de Valor de Contorno (PVC) bem-posto; (b) eliminar a dependência da malha; (c) representar a microestrutura dentro de uma descrição macroscópica.

CAPÍTULO 4

4. O PROBLEMA DO ERRO NO CONTEXTO DO MEEG: CASO NÃO LINEAR

Dois fatores têm impacto determinante nos resultados numéricos: (a) *a modelagem do material* (um modelo particular ou diferentes combinações de parâmetros podem conduzir a padrões de falência completamente diferentes). Obviamente, esta influência pode ser tanto quantitativa como qualitativa; (b) *os erros de discretização* que, em geral, têm influência quantitativa. Exceto se houver mecanismos de falência complexos envolvidos, porque nesse caso a malha de elementos finitos pode exercer influência qualitativa na resposta.

Para um prognóstico eficiente de uma possível falha do material é essencial que os erros de discretização sejam mantidos dentro de estrito controle para que os mesmos não sejam erroneamente interpretados do ponto de vista do modelo constitutivo (RODRÍGUEZ-FERRAN e HUERTA, 2000). Claro, o contrário também pode acontecer, isto é, o modelo constitutivo pode servir de fonte de erro. Por outro lado, se o interesse do analista estiver focado na avaliação do erro de discretização e no desempenho dos estimadores de erro (como é o caso deste trabalho), é imprescindível que o comportamento do material seja reproduzido razoavelmente bem a fim de que ele não influencie negativamente os resultados finais.

4.1 Linearização da equação do erro

Uma vez que o processo de danificação tem início, o comportamento do material torna-se não linear e isso tem impacto direto no primeiro argumento da forma $B(\cdot, \cdot)$, Eq. (26), ou seja:

$$B(\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \neq B(\mathbf{e}, \mathbf{v}) + B(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H^1 \quad (64)$$

Fontes gerais de não linearidade estão incluídas neste caso. Em problemas mecânicos, por exemplo, ambas as não linearidades (materiais e geométricas) podem ser contabilizadas (HUERTA *et al.*, 2002).

A resolução de um problema não linear implica, na verdade, na resolução de uma série de problemas lineares usando esquemas iterativos (Newton-Raphson, Newton-Raphson Modificado) e incrementais (controle de força, controle de deslocamento).

Considerando que, para o problema com não linearidade física em questão, o equilíbrio já esteja verificado no tempo t . Cada passo t deve ser entendido como uma configuração de equilíbrio do procedimento de solução do problema não linear e que resultará em uma nova configuração de equilíbrio, no passo $t+\Delta t$, quando esta configuração é alterada de Δt . Estabelece-se assim, da mesma forma que em na Eq. (5), o seguinte PVC:

Encontre \mathbf{u} , tal que:

$$\begin{aligned} \nabla^T \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) + {}^{t+\Delta t} \mathbf{b} &= 0 \text{ no } \Omega \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} &= {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}} \text{ no } \Gamma_D \\ \mathbf{t}({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) &= {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{t}} \text{ no } \Gamma_N \end{aligned} \quad (65)$$

Onde:

${}^{t+\Delta t} \mathbf{b}$ e ${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{t}}$ são forças de volume e tensões de superfície no final ao passo $t+\Delta t$

${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}$ é o deslocamento prescrito ao final do passo $t+\Delta t$

${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$ é solução obtida ao final do passo $t+\Delta t$

Aqui a variável t é utilizada como forma de denotar diferentes passos (i.e intensidades de força ou deslocamento). Naturalmente, esses passos podem ser variáveis ao longo da análise e tão pequenos quanto seja necessário.

Assumindo que ${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{H}$ seja uma aproximação da solução no passo $t+\Delta t$, o problema do erro passa a ser o seguinte:

Encontre ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}$ tal que:

$$\begin{aligned} \nabla^T [\boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}})] + \mathbf{r}_\Omega({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}) &= 0 \text{ no } \Omega \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{e} &= 0 \text{ no } \Gamma_D \\ \mathbf{t}({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) - \mathbf{t}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}) &= \mathbf{R}_\Gamma({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}) \text{ no } \Gamma_N \end{aligned} \quad (66)$$

Onde:

$$\mathbf{r}_\Omega({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}) = \nabla^T \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) + {}^{t+\Delta t} \mathbf{b} = 0 \text{ no } \Omega \quad (67)$$

é o resíduo no interior do domínio e

$$\mathbf{R}_\Gamma({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}) = \hat{\mathbf{t}}({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) - \mathbf{t}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}) \text{ no } \Gamma_N \quad (68)$$

é o resíduo no contorno de Neumann

Em decorrência da não linearidade do problema, as propriedades do meio podem ser diferentes para a solução e sua aproximação. Conseqüentemente, o erro não é exclusivo da aproximação e, por isso:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) &\neq \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}) \\ \hat{\mathbf{t}}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}) - \mathbf{t}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) &\neq \mathbf{t}({}^{t+\Delta t}\mathbf{e})\end{aligned}\quad (69)$$

Para que seja descrito apenas segundo ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$, é preciso eliminar os termos em ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$. Utilizando a expansão de Taylor para as tensões em torno da solução ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}) &= \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) + \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) + \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \right|_{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^2({}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) + \dots\end{aligned}\quad (70)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações.

Desprezando-se, agora, os termos de elevada ordem, a expressão acima pode ser representada pelos dois primeiros termos apenas. Dessa forma, ao final do passo $t+\Delta t$, o tensor de tensões pode ser aproximado em torno da solução ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}$ como:

$$\boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) + \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) \quad (71)$$

onde $\left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})}{\partial \mathbf{E}} \right|_{t+\Delta t}$ representa a forma tangente exata da relação constitutiva para um campo de deslocamentos definido por ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}$.

Ao substituir essa expressão na Eq. (66), tem-se um novo PVC estabelecido para a aproximação ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{e}}$ ao erro exato ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$:

$$\begin{aligned}\nabla^T \left[\left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\delta+\Delta\delta} \boldsymbol{\varepsilon}({}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{e}}) \right] + \mathbf{r}_\Omega({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) &= 0 \text{ no } \Omega \\ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{e}} &= 0 \text{ no } \Gamma_D\end{aligned}\quad (72)$$

$$\left[\left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\delta+\Delta\delta} \boldsymbol{\varepsilon}({}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{e}}) \right] \mathbf{n} = \mathbf{R}_\Gamma({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) \text{ no } \Gamma_N$$

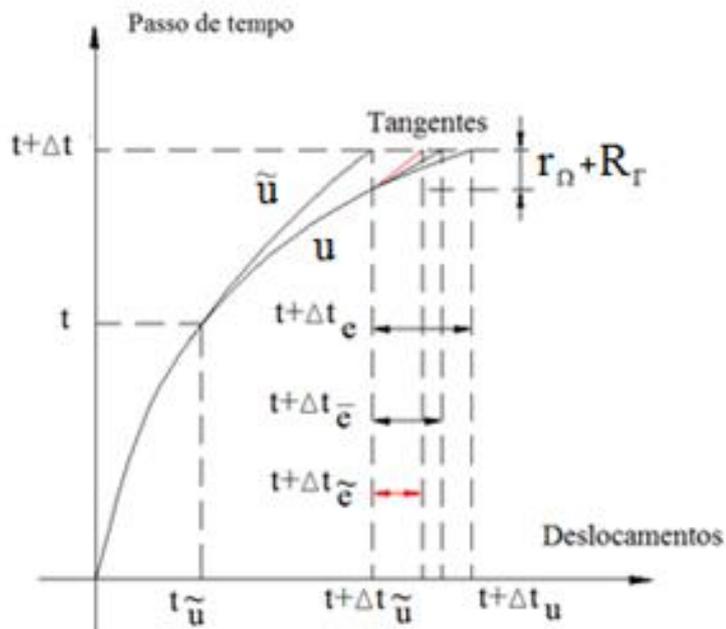


Figura 42– Interpretação geométrica para a estimativa de erro no caso não linear (Adaptado de Barros, 2002).

Uma interpretação geométrica para o PVC acima, pode ser dada através da Figura 42, considerando-se a representação do comportamento do passo de tempo versus deslocamento pontual. Resumindo, a tangente da curva exata \mathbf{u} no ponto ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}$ juntamente com o resíduo correspondente a incapacidade da solução aproximada ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}$ em verificar o equilíbrio do problema na Eq. (65) são utilizados para se calcular ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{e}}$. Caso fossem empregados todos os termos da série na Eq. (70) a solução deste problema corresponderia ao valor exato de aproximação, ou seja, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$. Como é utilizada a forma linearizada, a solução ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{e}}$ corresponde a uma aproximação desse erro, tão mais próxima quanto melhor for a aproximação ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}$. Tais condições, apesar de não terem sido explicitadas nesse trabalho, dizem respeito ao comportamento da curva \mathbf{u} que deve ser sempre ascendente (para que o erro linearizado tenha o comportamento assintótico equivalente ao erro exato).

O problema assim formulado parte do pressuposto que se conheça o comportamento real do meio para que se possa utilizar a forma exata $\partial\sigma(\mathbf{u})/\partial\varepsilon|_{t+\Delta t}$, Eq. (71). Na realidade, a distribuição do dano em $t+\Delta t$ é função da flexibilidade da estrutura definida pelos graus de liberdade da aproximação ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}$. Como apenas a forma aproximada $\partial\sigma(\tilde{\mathbf{u}})/\partial\varepsilon|_{t+\Delta t}$ está disponível, Eq. (72), é possível obter apenas uma

aproximação ao erro, isto é, ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}$, Figura 42, que, por sua vez, aproxima assintoticamente o erro ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$. Esta é uma questão relacionada com a não linearidade do problema analisado sendo, portanto, importante que dois aspectos da análise adaptativa sejam avaliados:

1) O tamanho dos passos de tempo para o procedimento de solução incremental – Considerando que a solução $\tilde{\mathbf{u}}$ reproduza exatamente \mathbf{u} até o passo t , o erro ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}$ a ser encontrado é proveniente somente do passo Δt . Se esse passo for suficientemente pequeno, a não linearidade nas relações tensão-deformação é menos significativa. Dessa forma espera-se que $\partial\sigma(\tilde{\mathbf{u}})/\partial\boldsymbol{\varepsilon}|_{t+\Delta t}$ aproxime bem $\partial\sigma(\mathbf{u})/\partial\boldsymbol{\varepsilon}|_{t+\Delta t}$, e, conseqüentemente, ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}$ aproxima bem ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{e}}$;

2) Controle do erro a cada passo – a hipótese assumida no parágrafo anterior de inexistência de erro entre as soluções exata e aproximada até o passo δ é muito severa e, claro, sempre haverá um erro de aproximação. Pode-se, entretanto, chegar a essa situação desde que o controle do erro seja realizado a cada passo, de modo que a solução seja refinada caso seja necessário.

Conseqüentemente, a Eq. (26) não é mais válida. De fato, a única equação disponível para o erro é a Eq. (73), que é uma equação não linear geral.

$$B(\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H^1 \quad (73)$$

Esse problema não linear pode ser adequadamente aproximado usando uma expansão tangente na vizinhança de $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$B(\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \approx B(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + B_{\text{tan } g}(\tilde{\mathbf{u}}; \mathbf{e}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H^1 \quad (74)$$

onde $B_{\text{tan } g}(\tilde{\mathbf{u}}; \mathbf{e}, \mathbf{v})$ é a forma linearizada de $B(\cdot, \cdot)$.

Ao substituir a Eq. (74) na Eq. (73), uma aproximação para a equação do erro é encontrada:

$$B_{\text{tan } g}(\tilde{\mathbf{u}}; \mathbf{e}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) - B(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H^1 \quad (75)$$

Um dos métodos mais comuns para a geração de estimadores para problemas de comportamento não linear é generalizar aqueles que foram desenvolvidos para os problemas lineares (HERNANDÉZ *et al.*, 2003). A principal ideia por trás da generalização do estimador de erro é reproduzir a mesma estrutura do caso linear fazendo uso de uma equação diferente para o erro.

A Eq. (75) é linear e muito semelhante à Eq. (26): o termo do resíduo, do lado

direito, é idêntico, mas o termo do lado esquerdo difere em decorrência da forma tangente. Uma vez que essa equação tenha sido obtida, a filosofia e a estrutura dos estimadores implícitos baseados em resíduo apresentados nos itens 2.3.2.2 e 2.3.2.3 podem ser empregados para estimar o erro em problemas não lineares. Lembrando que essa afirmação é válida apenas para os estimadores que não dependem da propriedade de superconvergência, que foram provadas apenas para problemas lineares (HUERTA *et al.*, 2002).

As seguintes formas variacionais podem ser empregadas para obter as funções indicadoras de erro nos estimadores EERM e SRM, no passo $t+\Delta t$:

Encontrar:

${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q} \in \tilde{S}_{p+q}^0(K)$ (**Resíduo no Elemento Equilibrado - EERM**), tal que:

$$B_{\tan g}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K, \mathbf{v}_{p+q}^0) = l(\mathbf{v}_{p+q}^0) \quad \forall \mathbf{v}_{p+q}^0 \in \tilde{S}_{p+q}^0(K) \quad (76)$$

Desmembrando os termos na Eq. (76):

$$\begin{aligned} B_{\tan g}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K, \mathbf{v}_{p+q}^0) &= \iint_{\omega_j} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}_{p+q}^0) \boldsymbol{\sigma}^{\tan g}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K) d\Omega \\ l_K(\mathbf{v}_{p+q}^0) &= \iint_K \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}_{p+q}^0)^{t+\Delta t} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega \cap \partial\Gamma_N} (\mathbf{v}_{p+q}^0)^T ({}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{t}}) d\Gamma \\ &+ \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} (\mathbf{v}_{p+q}^0)^T \langle {}^{t+\Delta t} \mathbf{t}_E(\tilde{\mathbf{u}}) \rangle dS - B_K({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_{p+q}^0) \end{aligned} \quad (77)$$

A medida global de erro utilizada como estimador é obtida através dos valores locais da norma de energia, como na Eq. (48):

$$\|\mathcal{E}_1\|_U = \|{}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K\|_U = \sqrt{\sum_{K \in \Omega} (\tilde{\xi}_K)^2} \quad (78)$$

Lembrando que para o MEEG permanece:

$$\mathcal{E}_1^{\omega_j} = \sum_{K \in \omega_j} \frac{V_K \|{}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K\|_{U(K)}}{V_{\omega_j}} \quad (79)$$

onde para cada elemento tem-se:

$$\tilde{\xi}_K = \|{}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K\|_{U(K)} = [B_K({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K, {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K)]^{\frac{1}{2}} \quad (80)$$

e ${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q} \in \tilde{S}_{p+q}^0(\omega_i)$ (**Resíduo no Subdomínio - SRM**), tal que:

$$B_{\tan g}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j}, \mathbf{v}_{p+q}^0) = l(\mathbf{v}_{p+q}^0) \quad \forall \mathbf{v}_{p+q}^0 \in \tilde{\mathcal{S}}_{p+q}^0(\omega_j) \quad (81)$$

Desmembrando os termos na Eq. (80):

$$B_{\tan g}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j}, \mathbf{v}_{p+q}) = \iint_{\omega_j} \zeta_j \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}_{p+q}) \boldsymbol{\sigma}^{\tan g}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j}) d\Omega \quad (82)$$

$$l_{\omega_j}(N_j \mathbf{v}_{p+q}) = \iint_{\omega_j} (N_j \mathbf{v}_{p+q})^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\omega_j \cap \Gamma_N} (N_j \mathbf{v}_{p+q})^T {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{t}} d\Gamma -$$

$$B_{\omega_j}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}, N_j \mathbf{v}_{p+q})$$

Onde ζ_j representa a mesma função de ponderação da Eq. (52) (Barros *et al.*, 2013).

A estimativa global pode ser definida pela soma das medidas locais associadas com cada subdomínio:

$$\varepsilon_k^U = \sqrt{M} \sqrt{\sum_j \left\| {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j} \right\|_{U(\omega_j)}^2} = \sqrt{M} \sqrt{\sum_{j=1}^N B_{\omega_j}^{\zeta_j}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j}, {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j})} \quad (83)$$

Lembrando que, como no caso linear, k indica tipos de estratégias para a definição de medidas do erro associados à escolha ζ_j .

Para $k=2 \rightarrow \zeta_j = N_j$ e $M=1$ (Prudhome *et al.*, 2004) para o MEF

Para $k=3 \rightarrow \zeta_j = 1$ e $M \neq 1$ (Strouboulis *et al.*, 2006) para o MEFG

Note que no caso $k=3$, M representa o índice de sobreposição da partição da unidade (número de nós do elemento finito).

As funções $\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}$ determinadas localmente (para cada elemento ou nuvem) são, portanto, representações da função $\bar{\mathbf{e}}$ que, dependendo das condições de análise, podem ou não ser boas aproximações dos erros locais.

Finalmente, o sistema de equações para as funções indicadoras de erro (de ambos os estimadores) no passo $t+\Delta t$, pode ser definido de maneira análoga ao caso linear.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{erro} {}^{t+\Delta t} \mathbf{I} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} \quad (84)$$

Funções indicadoras do erro:

$${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q} = (\boldsymbol{\Phi}_{p+q}^0)^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{I} \quad (85)$$

Matriz de rigidez

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{erro} = \left(\mathbf{B}_{p+q}^0 \right)^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{C}_{\tan g} \left(\mathbf{B}_{p+q}^0 \right) d\Omega \quad (86)$$

Vetor de Forças Residuais para o MREE:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_K = & \iint_K \left(\Phi_{p+q}^0 \right)^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} \left(\Phi_{p+q}^0 \right)^T {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \\ & \int_{\partial K \cap \Gamma_N} \left(\Phi_{p+q}^0 \right)^T \left\langle \mathbf{t}_E \left({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}} \right) \right\rangle dS - {}^{t+\Delta t} \mathbf{K} {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} \end{aligned} \quad (87)$$

Vetor de Forças Residuais para o SRM:

$$\begin{aligned} {}^{\delta+\Delta\delta} \mathbf{R}_{\omega_j} = & \iint_{\omega_j} \left(\Phi_{p+q}^0 \right)^T \left(N_j \mathbf{v}_{p+q} \right) {}^{t+\Delta t} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial \omega_j \cap \Gamma_N} \left(\Phi_{p+q}^0 \right)^T \left(N_j \mathbf{v}_{p+q} \right) {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{t}} d\Gamma \\ & - {}^{t+\Delta t} \mathbf{K} {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} \end{aligned} \quad (88)$$

Uma questão chave na resolução de sistemas não lineares é a escolha da matriz de rigidez. Segundo Rodriguez-Ferran e Huerta (2000), o cálculo da matriz de rigidez consistente não é uma tarefa fácil já que a expressão entre colchetes, na Eq. (89), é não-simétrica.

$$\mathbf{K}_{tg} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \left[(1-D)\mathbf{C}_0 - \mathbf{C}_0 \mathcal{E} \mathfrak{S}(\mathcal{E}_{eq}) \frac{\partial \mathcal{E}_{eq}}{\partial \mathcal{E}} \right] \mathbf{B} d\Omega \quad (89)$$

Nesse trabalho optou-se por adotar a matriz secante em a substituição à matriz tangente. A matriz calculada com o módulo secante $[(1-D)\mathbf{C}]$, Eq. (90), é simétrica e positiva-definida:

$$\mathbf{K}_{sec} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T [(1-D)\mathbf{C}] \mathbf{B} d\Omega \quad (90)$$

Devido ao uso da técnica de solução incremental iterativa, para a resolução do problema não linear, é possível distinguir dois tipos diferentes de medidas de erro:

- medida de erro total que é calculada a partir de quantidades provenientes do histórico de carregamento total;
- medida de erro incremental que emprega quantidades relacionadas, apenas, ao incremento considerado.

Optou-se pelo uso da medida de erro incremental, que se aplicada adequadamente, apresenta a vantagem de acelerar o processo de solução do problema não linear, porque apenas o passo de carga, para o qual a solução é refinada, é repetido, no caso de um procedimento adaptativo da solução. Caso a medida de erro total seja adotada, toda a análise deveria ser reiniciada sempre que o refinamento p for conduzido. Por

questões óbvias, essa opção pode se tornar proibitivamente cara para análises de grande escala. O erro deve ser controlado, em cada passo, e mantido, tanto quanto possível, pequeno. Se tal regra for violada, corre-se o risco de não se convergir para uma solução equilibrada ao final do passo em que a aproximação é enriquecida (BARROS, 2002).

Por fim, cabe destacar que muito embora os métodos de Newton-Raphson sejam poderosos e bastante utilizados eles não são inerentemente robustos e requerem experiência do usuário quando a análise se processa em regiões próximas a singularidades e, também, na escolha dos parâmetros associados aos incrementos de força ou deslocamento, número de iterações e tolerância (RODRIGUES, 2000). É essencial que o procedimento iterativo faça uso de um critério de convergência apropriado para que ele não seja interrompido antes que a precisão requerida seja alcançada (BATHE, 1996).

4.2 Componentes do erro: espacial e de linearização

O tratamento de problemas de comportamento não linear pelos métodos incrementais consiste na discretização no espaço e em incrementos (de força e deslocamento). A primeira consequência da discretização do espaço é que os campos de tensão calculados ($\bar{\sigma}$) não verificam as equações de equilíbrio do modelo, na melhor das hipóteses verificam apenas as equações fracas no sentido de elemento finito. Já a discretização em incrementos (linearização) introduz novas aproximações (LADÈVEZE e PELLE, 2005):

- A hipótese sobre a variação do campo de deslocamento em incrementos constitui a primeira aproximação. Portanto, se os passos escolhidos forem muito grandes, pode ser uma fonte de erro significativa.
- A solução do problema não linear sobre cada incremento, com uso de um método iterativo, também introduz aproximações, quando, no final das iterações, a equação de equilíbrio não é verificada exatamente.
- No decurso dessas iterações, a relação constitutiva deve ser integrada usando um esquema numérico, para uma dada história de deformação. Essa integração numérica introduz aproximações, que podem ser significativas quando se usa um esquema de integração insuficientemente preciso.

- O campo de tensão (${}^{t+\Delta t}\tilde{\sigma}$) procurado no final de um incremento é conhecido apenas pelos seus valores em certo número de pontos de Gauss dentro de cada elemento.

Portanto, o erro global incorporado ao processo pode ser descrito como:

$$e_G = e_T + e_S \quad (91)$$

onde e_G é o erro global; e_T é o erro de discretização no tempo (linearização) e e_S é o erro de discretização no espaço (devido à subdivisão do domínio).

É possível avaliar essas duas fontes de erro separadamente por meio de um processo adaptativo seccionado em dois níveis. Obviamente, o grau de complexidade aumenta consideravelmente nesta situação. Esta abordagem foi apresentada no trabalho de Hernández *et al.* (2003). As componentes do erro (espacial e incremental) foram avaliadas usando três tipos de estimadores de erro: (a) estimador de erro de espacial (que é função do número de graus de liberdade); (b) estimador de erro temporal (que é basicamente sensível à magnitude do passo de força) e (c) um estimador global (que é a soma dos anteriores).

Uma segunda opção seria manter uma das fontes de erro sob controle e avaliar a outra, como foi feito em Chaillou and Suri (2006) no contexto do MEF.

No presente trabalho o interesse encontra-se restrito ao erro de aproximação do espaço pelo MEEG. Essa fonte de erro será bem mais relevante (em relação ao de linearização), quanto menor forem os passos de força aplicados e a tolerância arbitrada para a análise.

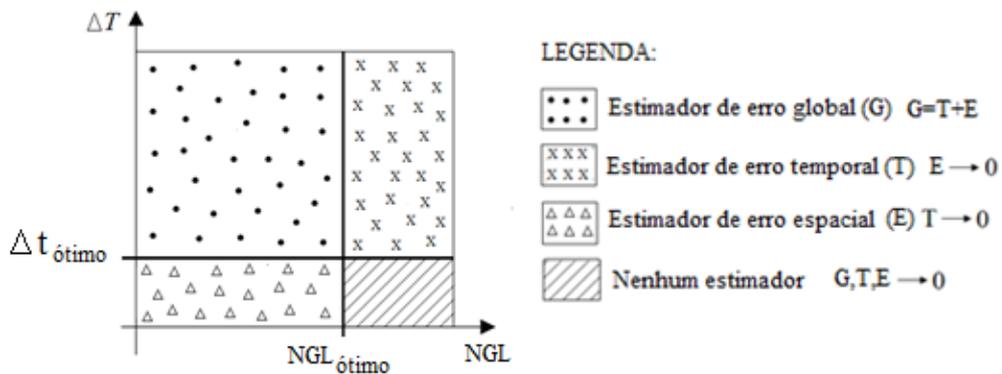


Figura 43 – Uso dos estimadores de erro (Adaptado de Hernández *et al.*, 2003).

A Figura 43 auxilia na identificação das regiões onde é necessário o uso dos estimadores de erro de discretização. Observa-se que abaixo de um determinado tamanho de passo ótimo ($\Delta t_{\text{ótimo}}$) ou acima do número de graus de liberdade ótimo ($NGL_{\text{ótimo}}$) as magnitudes dos estimadores de erro temporal ou espacial são

desprezíveis. Obviamente, que *a priori* esses valores ótimos são desconhecidos.

Tendo em vista que os estimadores estudados nesse trabalho são específicos para erros de discretização, o emprego dos mesmos deve ficar restrito a um contexto no qual o Δt seja menor ou igual ao ótimo. O erro de iteração, que está vinculado ao procedimento de solução das equações não lineares, será minimizado pelo ajuste das tolerâncias.

4.3 Modificação da discretização espacial

A discretização espacial pode ser alterada manualmente ou de forma automática, a partir de um procedimento adaptativo que se baseia em medidas locais do erro de aproximação, item 4.4.

No caso do MEF, as estratégias $-h$, $-p$, $-hp$, $-r$ e $-s$ podem ser usadas para adaptar a discretização espacial de acordo com as exigências da solução.

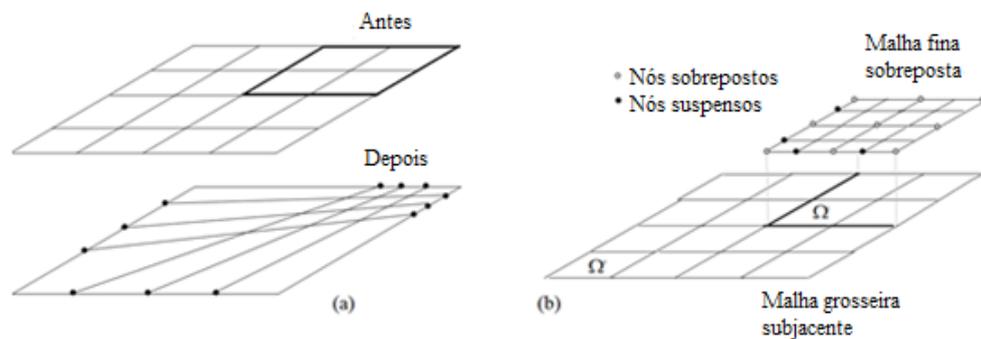


Figura 44 – (a) Malha original com a região que deve ser refinada e malha após aplicação da adaptatividade-r; (b) Superposição de malha em dois níveis na adaptatividade-s.

Na adaptatividade- h o grau polinomial dos elementos é mantido fixo, tipicamente em algum número baixo, tal como $p=1$ ou $p=2$ e o número de elementos é aumentado, simultaneamente ou não, para que h seja progressivamente reduzido. Na adaptatividade- p a malha é mantida fixa e o grau polinomial da aproximação, em um conjunto de elementos ou mesmo de toda a malha, é aumentado. A versão p é bem apropriada para a criação de espaços de elemento finito hierárquicos. Na prática a adaptatividade- p é tipicamente combinada com a adaptatividade- h . Na adaptatividade- r os nós são redistribuídos ao longo do domínio, Figura 44 (a). A informação é transportada de uma maneira natural, da antiga para a nova malha, porque ambas têm a mesma conectividade. Na adaptatividade- s , Figura 44 (b), novos elementos são sobrepostos à malha original enriquecendo-a de forma hierárquica.

Esse procedimento apresenta dois inconvenientes: a complexidade computacional e a necessidade de remalhamento da malha sobreposta (BARROS, 2002) e, talvez por essa razão, ela é pouco referenciada na literatura.

Tabela 11 – Possibilidades para adaptatividade dentro do MEFX (BORDAS e DUFLOT, 2014).

<i>Adaptatividade-h</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Refinamento da malha (não há diferenças em relação ao MEF); • O elemento local é o alvo para distribuir uniformemente o erro abaixo de um dado valor. Para mais detalhes, veja Barros (2002).
<i>Adaptatividade-p</i>
<ul style="list-style-type: none"> • A ordem das funções de forma regulares e daquelas multiplicando os enriquecimentos é aumentada onde o erro local é muito grande.
<i>Adaptatividade-e</i>
<ul style="list-style-type: none"> • O tamanho da região enriquecida é adaptado • A natureza e o número dos enriquecimentos são modificados.

A tabela 11 apresenta as possibilidades para a adaptatividade no MEFX. Em Bordas e Duflot (2008), foi introduzido o conceito de adaptatividade-*e* para o MEFX, que é um procedimento baseado na adaptação das funções de enriquecimento e da zona sobre a qual elas estão ativas. A determinação de um *raio de enriquecimento ótimo* que varia conforme a natureza do problema é um aspecto crucial dessa adaptatividade *e*, sem dúvida, ela é mais adequada à abordagem desses métodos.

O enriquecimento polinomial em um procedimento adaptativo MEFX pode ser considerado como sendo um tipo especial de adaptatividade-*e* com polinômios ou ainda um tipo adaptatividade-*p* não convencional (FRIES e BELYTCHKO, 2009). Sem dúvida, as adaptatividades *-hp* e *-s* também são possíveis no contexto do MEFX. O procedimento está vinculado às nuvens e não mais aos elementos como no MEF, Figura 45.

A adaptatividade é uma ferramenta essencial para resolução de qualquer problema *e*, principalmente, para a obtenção de soluções numéricas com precisão controlada. Para alguns problemas tipicamente não lineares, as estratégias adaptativas são realmente cruciais. Este é o caso dos problemas que envolvem localização de dano, grandes deformações, entre outros, onde a configuração ótima da malha muda continuamente ao longo do processo. Frequentemente, devido à distorção do

elemento ocorre uma degradação rápida da solução global impedindo a obtenção de uma solução para a região de interesse. Concomitantemente, a consideração da falência do material pode acarretar complexidades adicionais que devem ser prontamente identificadas e solucionadas. O procedimento numérico deve ser capaz de indicar o local correto onde a qualidade da solução pode ser melhorada e modificar a malha eficientemente.

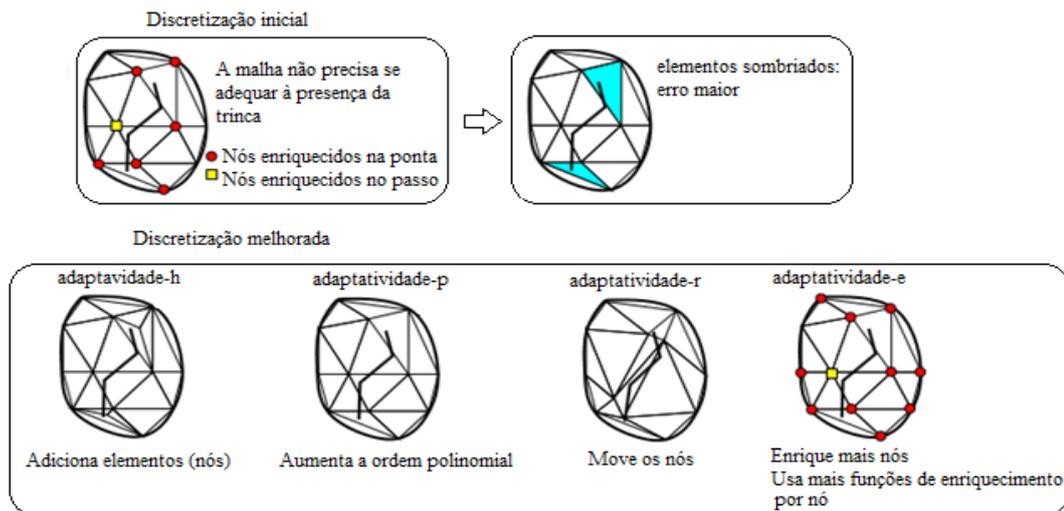


Figura 45 – Adaptatividade no MEFX em problema com trinca (BORDAS e DUFLOT, 2014).

De acordo com Askes e Rodríguez-Ferran (2001) é possível distinguir entre dois objetivos para usar a adaptatividade de malha nas análises numéricas, que são: (a) *obter uma precisão prescrita* e (b) *limitar os custos computacionais* (no que diz respeito a tempo de processamento e exigência de memória em análises tridimensionais de grande escala, por exemplo).

4.4 Procedimento adaptativo baseado na avaliação do erro

O procedimento adaptativo é composto, basicamente, por dois ingredientes: (1) uma ferramenta para avaliar o erro (estimador ou indicador) e (2) um algoritmo capaz de definir uma nova discretização espacial.

A fusão desses dois elementos objetiva restringir, na medida do possível, a ação do usuário a operações básicas, como por exemplo: (a) descrição da geometria; (b) descrição dos dados mecânicos (deslocamentos impostos, carregamentos, propriedades materiais, parâmetros do modelo utilizado para descrição do comportamento do concreto); (c) definição do tipo de estimativa de erro e definição da tolerância e (d) geração da malha inicial.

A princípio, qualquer uma das abordagens para avaliação do erro (estimador ou indicador) pode ser combinada com qualquer dos procedimentos para modificar a discretização espacial. De qualquer modo, por razões óbvias, algumas combinações são, geralmente, preferidas (HUERTA *et. al.*,1999).

Uma estratégia adaptativa muito simples pode ser obtida ao se combinar a adaptatividade- r e um indicador de erro. Isso porque a informação relativa (ou seja, onde o erro é maior e onde ele é menor) é exatamente o que é necessário para realocação dos nós. Como, nessa modalidade, nenhum novo grau de liberdade pode ser adicionado, o indicador de erro é utilizado apenas para decidir onde os nós existentes devem ser posicionados. Já a combinação adaptatividade- r e estimador de erro, claramente, não é uma estratégia adequada. Nessa situação, todo o esforço em estimar o erro de maneira objetiva e quantitativa é perdido haja vista que a informação obtida não pode ser completamente explorada. Ainda segundo o autor, a adaptatividade- h ou p baseada em indicadores de erro heurísticos é uma escolha comum na literatura. De qualquer modo, ela apresenta um importante inconveniente: um procedimento adaptativo caro (h , p ou hp) estará baseado em uma informação heurística sobre o erro. Conseqüentemente, essa abordagem é recomendada apenas nas situações em que o indicador de erro possa ser adequadamente calibrado para uma aplicação específica (HUERTA *et al.*, 1999). Patzák e Jirásek (2004) utilizaram um indicador de erro baseado na variável dano (no caso isotrópico) e no valor principal máximo do tensor de dano (no caso anisotrópico) para conduzir a adaptatividade- h . Eles estabelecerem que quando o indicador de erro (ou indicador de dano) excedesse um valor pré-determinado, a malha deveria ser modificada e as variáveis deveriam ser transferidas.

Já a conjunção adaptatividade- h ou p e estimador de erro não só é uma estratégia válida como é a única abordagem que permite obter uma solução com precisão prescrita “*a priori*”. O preço a pagar é o custo computacional.

Para o MEFG a adaptatividade- e é considerada devido ao esquema de enriquecimento nodal desses métodos. É importante assegurar que o refinamento seja conduzido apenas para as regiões onde ele é realmente necessário. Os estimadores de erro são sem dúvida ferramentas mais confiáveis para realizar essa tarefa.

Todo o processo adaptativo pode ser assim sintetizado: após ser efetuada a leitura dos dados, a análise é realizada seguida pelo cálculo da estimativa de erro. Se o erro relativo estimado for maior que a tolerância definida pelo usuário, o enriquecimento

das funções PU será conduzido segundo os indicadores de erro por nuvens. Uma vez definida uma nova aproximação para o problema, é necessário efetuar a transferência de variáveis (item 4.5), que deverão ser descritas segundo a nova aproximação (ou seja, de acordo com os novos graus de liberdade e com a nova ordem de quadratura). Após isso, o incremento de força deve ser reaplicado. Consequentemente, a sequência composta por cálculo da estimativa de erro, refinamento, transferência de informações, reequilíbrio do passo anterior e equilíbrio do passo atual, é repetida até que se alcance a tolerância determinada pelo usuário.

Nesse momento, é possível compreender o porquê da exigência básica de que o estimador de erro *a posteriori* forneça uma estimativa confiável do erro verdadeiro, tanto local quanto global. Pelo exposto, fica evidente que o mesmo não é utilizado tão somente para avaliar a qualidade da solução aproximada. É inegável que ele desempenha o papel decisivo de guia na condução do processo de refinamento da malha que, por sua vez, é projetado para controlar e minimizar o erro de discretização. Obviamente, espera-se que esse processo se dê de forma eficiente e barata, ou seja, o estimador deve ter um custo computacional acessível.

4.5 Exemplos numéricos

Dois exemplos foram selecionados para ilustrar a importância da avaliação do erro em um contexto não linear. No primeiro exemplo, o de uma viga parede, que é problema bem suave mesmo na presença do dano, procura-se estudar o desempenho dos estimadores de erro por elemento e subdomínio (EERM e SRM) ao longo do *refinamento-h*. O segundo exemplo, correspondente a uma chapa com a presença de um entalhe, é um problema mais complexo devido à possibilidade de ocorrência de dificuldades numéricas. Os estimadores são avaliados para o *enriquecimento polinomial*. Em ambos os casos analisa-se, também, a influência do espaço de funções em que o erro é projetado.

4.5.1 Viga parede

O problema a seguir, Figura 46, corresponde a uma viga parede de concreto com 1,0 cm de espessura, sendo as solicitações impostas a ela descritas pelas seguintes equações:

$$q_1 = q_3 = 24y - 120$$

$$q_2 = 3y - 30y^2$$

A análise numérica foi realizada sob a hipótese de estado plano de tensão, fazendo uso de controle de força, mediante aplicação de passos variados (o primeiro correspondente à proporção de 50%, com relação às solicitações impostas, e os demais a 2,5%), resultando um total de 25 passos. Os parâmetros do modelo de Mazars, relacionados ao tipo de concreto considerado, são: $A_c=0.655$, $B_c=1250$, $A_t=0.7$, $B_t=2000$, $\varepsilon_{d0}=7,0E-05$, $E=29200$ MPa, $\nu = 0,3$. A tolerância para convergência em energia das iterações de cada passo foi adotada igual a $5,0E-3$. Nesse caso, foi utilizada a abordagem local ($R_{nl}=0,0$) e as dimensões da peça são dadas em cm.

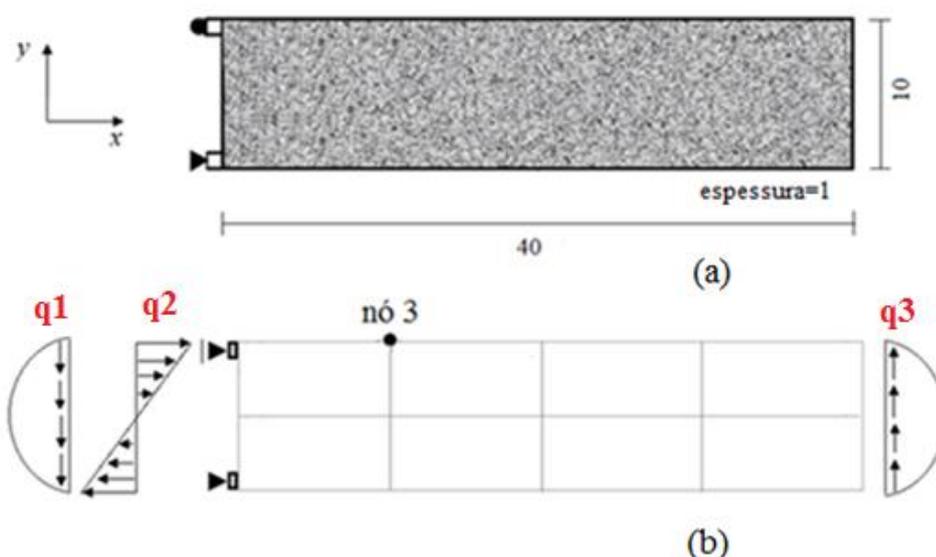


Figura 46 – Geometria, condições de contorno (de força e deslocamento) e malha inicial.

Os estimadores EERM e SRM foram avaliados segundo as medidas globais e locais, considerando três níveis de discretização distintos para a estrutura da Figura 46(a). As outras duas malhas utilizadas, 4×8 e 8×16 , foram obtidas a partir de dois refinamentos sucessivos na malha 2×4 , Figura 46(b). As três malhas têm em comum o fato de serem compostas por elementos quadrilaterais com aproximações lineares ($p=1$). A estratégia de enriquecimento foi utilizada somente para a construção dos indicadores de erro.

A Figura 47 apresenta as curvas força *versus* deslocamento para as três malhas avaliadas e para a solução de referência.

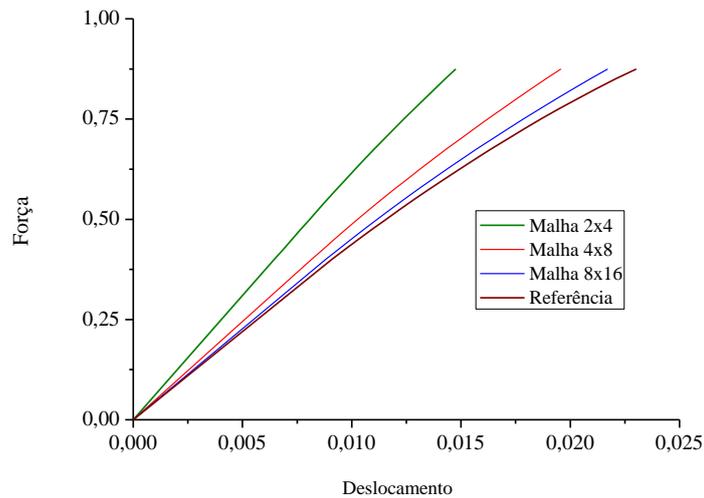


Figura 47 – Gráfico Força x Deslocamento para o nó 3.

Para a integração numérica, os pontos de Gauss foram distribuídos da seguinte forma: (a) na malha 2x4 foram utilizados elementos com 8x8 pontos; (b) na malha 4x8 foram utilizados elementos com 4x4 pontos; e (c) na malha 8x16 foram utilizados elementos com 2x2 pontos. O número de pontos de Gauss por elementos foi estabelecido de tal maneira que a mesma quantidade fosse utilizada em cada malha, no caso, 512 pontos. Como a variável escalar dano é associada aos pontos de integração, não haveria desequilíbrio em sua descrição entre as três malhas.

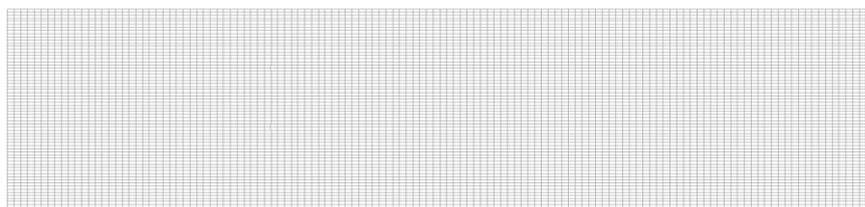


Figura 48 – Malha refinada utilizada na obtenção da solução de referência.



Figura 49 – Distribuição do dano na malha refinada.

A malha de referência, Figura 48, possui 8385 nós e 8192 elementos de aproximação linear. A Figura 49 mostra a distribuição do dano obtida para esse nível de refinamento. Nesse caso, o valor máximo da variável dano chegou a aproximadamente 0,63, concentrado no vértice inferior esquerdo do domínio, sem que isso acarretasse qualquer tipo de instabilidade numérica na análise. Aqui, como

no caso linear, serão avaliados os índices de efetividade globais dos dois estimadores (EERM e SRM), índices de efetividade locais (nuvens e elementos), limites superiores e inferiores (esses últimos no caso do Subdomínio), índices de robustez e, finalmente, erros relativos globais para as malhas 2x4, 4x8 e 8x16.

Tabela 12 – Índices globais.

Grau polinomial da solução do erro			p+1			ρ	p+2			ρ	η (%)
Estimador de erro			EERM ξ^1	SRM ξ^2			EERM ξ^2	SRM ξ^2			
Malha	NGL	Passo	$\tilde{\theta}$	$\tilde{\theta}^s$	$\tilde{\theta}^l$		$\tilde{\theta}$	$\tilde{\theta}^s$	$\tilde{\theta}^l$		
(2x4)	27	P-4	0,869	0,937	0,811	1,16	0,925	1,010	0,792	1,28	54,42
		P-12	0,838	0,903	0,771	1,17	0,890	0,976	0,752	1,30	54,99
		P-20	0,793	0,859	0,717	1,20	0,847	0,930	0,697	1,33	56,22
(4x8)	87	P-4	0,935	0,994	0,876	1,13	1,015	1,064	0,860	1,24	31,35
		P-12	0,917	0,977	0,844	1,16	1,000	1,046	0,826	1,27	32,01
		P-20	0,877	0,938	0,782	1,20	0,967	1,007	0,764	1,32	33,47
(8x16)	303	P-4	0,952	1,013	0,898	1,13	1,044	1,076	0,886	1,21	16,58
		P-12	0,943	1,001	0,866	1,16	1,038	1,068	0,852	1,25	17,06
		P-20	0,910	0,962	0,786	1,22	0,986	1,041	0,788	1,32	18,16

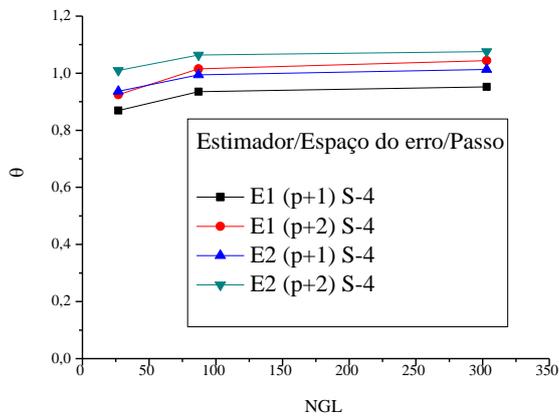


Figura 50 – Índices de efetividade – Limite Superior (Passo 4).

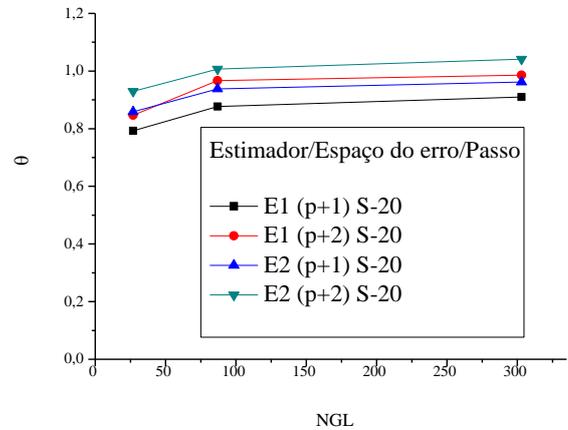


Figura 51 – Índices de efetividade – Limite Superior (Passo 20) .

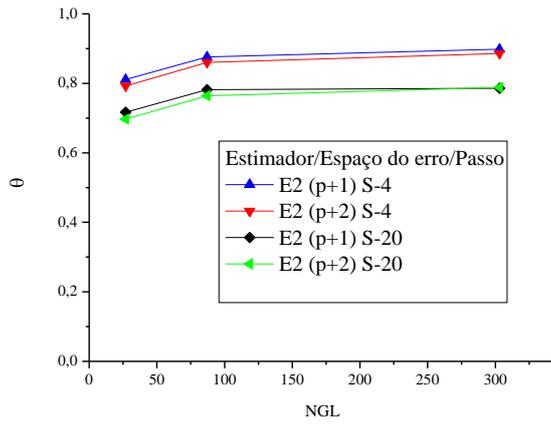


Figura 52 – Índices de efetividade – Limite Inferior

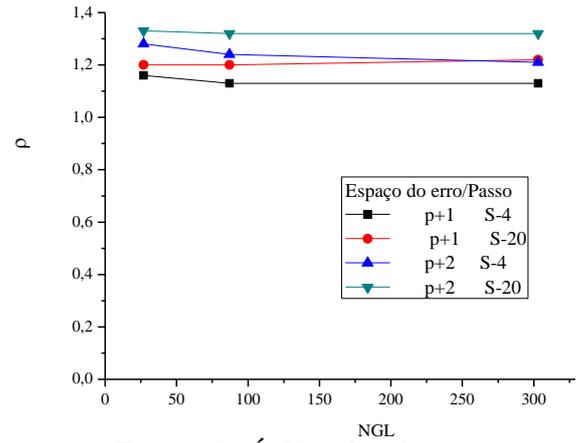


Figura 53 – Índices de robustez

Resultados Malha (2x4)

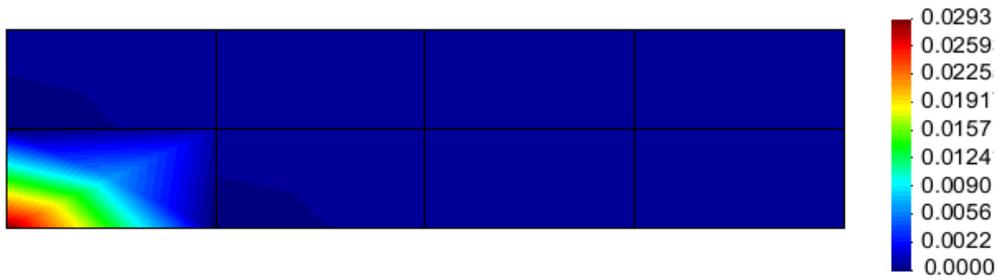


Figura 54 – Distribuição do dano (Passo 4).

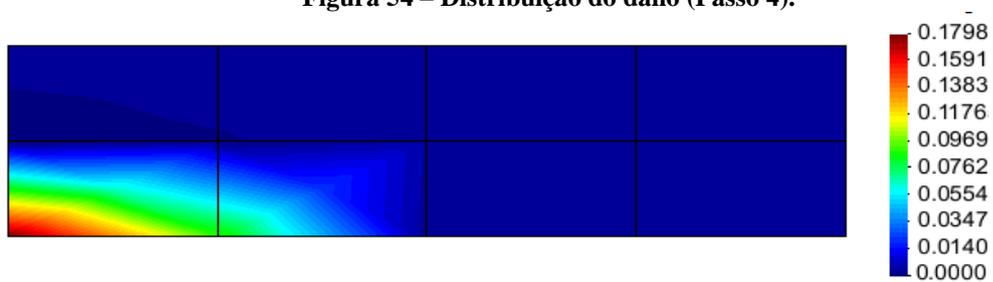


Figura 55 – Distribuição do dano (Passo 12).

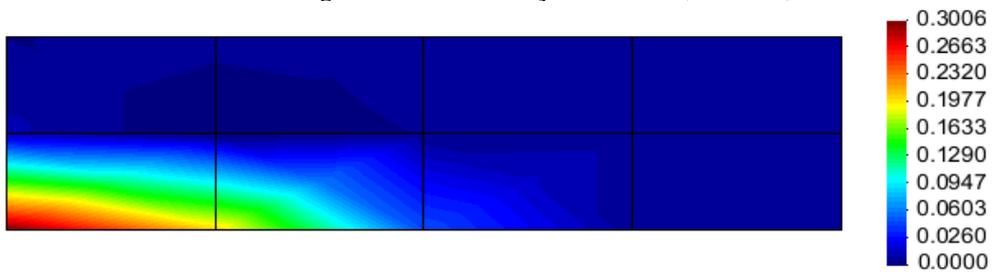


Figura 56 – Distribuição do dano (Passo 20).



Figura 57 – Regiões de interesse na análise da malha (2x4): (a) elementos e (b) nuvens.

Para avaliação dos indicadores de erro, foram selecionados elementos e nuvens em posições estratégicas (situados, respectivamente, na região de localização do dano e também mais afastados dessa região crítica), o que permite uma melhor percepção do impacto provocado pelo surgimento e evolução do dano no desempenho das estimativas locais que, por sua vez, são responsáveis pela construção das estimativas globais. Para a escolha destas regiões, foram empregados os mapas de distribuição de dano referente a cada malha (Figuras 54-56, 62-64 e 70-72). As nuvens e elementos escolhidos são mostradas nas Figuras 57, 65 e 73. Em cada malha foram selecionados três elementos aninhados aos elementos da malha menos refinada. Já as nuvens foram escolhidas aquelas coincidentes com os vértices do elemento mais danificado e mantidas, adicionalmente às posições inicialmente definidas para a malha 2x4.

Tabela 13 – Índices de efetividade vinculados aos elementos.

Malha (2x4)								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Elemento 3		Elemento 5		Elemento 6		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	
p+1	P-4	0,864	0,931	0,862	0,937	0,862	0,899	54,42
	P-12	0,862	0,930	0,796	0,868	0,834	0,871	54,99
	P-20	0,859	0,927	0,710	0,787	0,797	0,845	56,22
p+2	P-4	0,911	1,008	0,924	1,009	0,912	0,970	54,42
	P-12	0,910	1,006	0,848	0,943	0,885	0,940	54,99
	P-20	0,906	1,003	0,770	0,859	0,842	0,914	56,22

Tabela 14 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (2x4)								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 1		Nuvem 2		Nuvem 7		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,676	0,997	0,478	0,926	0,487	0,917	54,42
	P-12	0,647	0,968	0,470	0,927	0,487	0,917	54,99
	P-20	0,610	0,918	0,459	0,945	0,487	0,916	56,22
p+2	P-4	0,723	1,052	0,509	0,982	0,513	0,975	54,42
	P-12	0,690	1,046	0,500	0,997	0,513	0,975	54,99
	P-20	0,657	1,003	0,491	1,023	0,513	0,974	56,22

Tabela 15 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (2x4)						
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 11		Nuvem 12		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,721	0,963	0,582	0,860	54,42
	P-12	0,628	0,839	0,553	0,817	54,99
	P-20	0,521	0,706	0,524	0,794	56,22
p+2	P-4	0,773	1,064	0,621	0,935	54,42
	P-12	0,669	0,924	0,588	0,881	54,99
	P-20	0,565	0,782	0,564	0,843	56,22

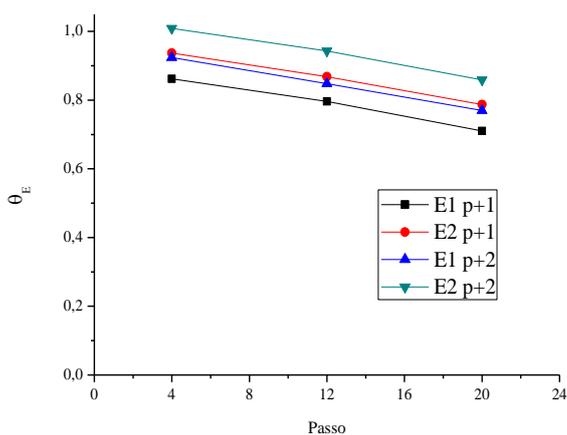


Figura 58 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 5 (Passo 20).

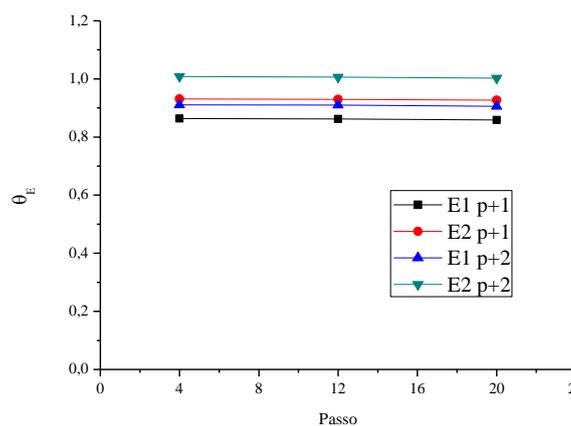


Figura 59 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 3 (Passo 20).

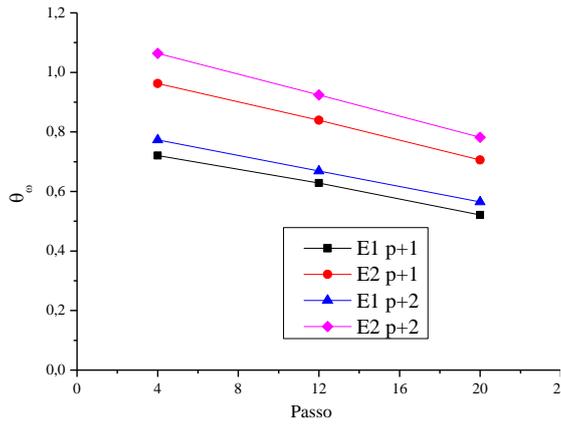


Figura 60 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem 11 (Passo 20).

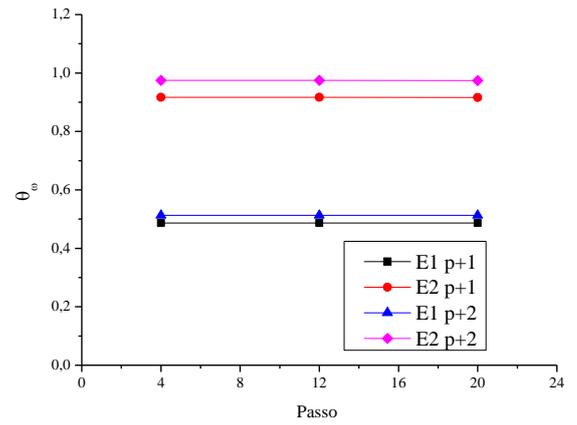


Figura 61 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem 7 (Passo 20).

Resultados Malha (4x8)

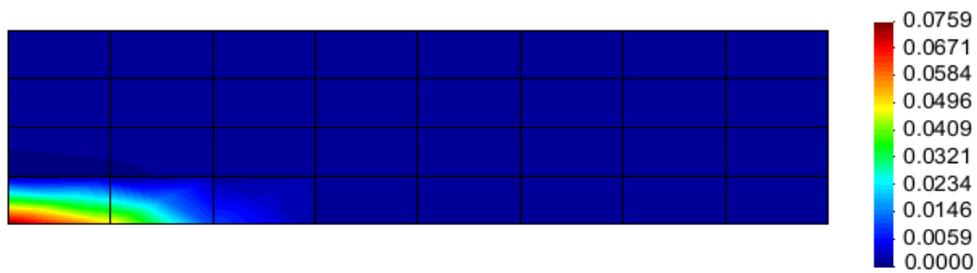


Figura 62 – Distribuição do dano (Passo 4).

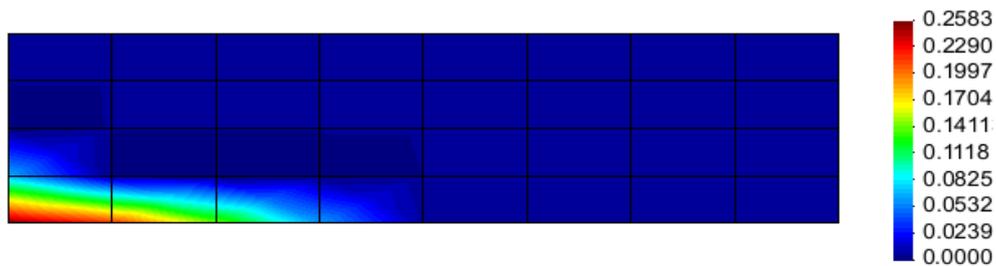


Figura 63 – Distribuição do dano (Passo 12).

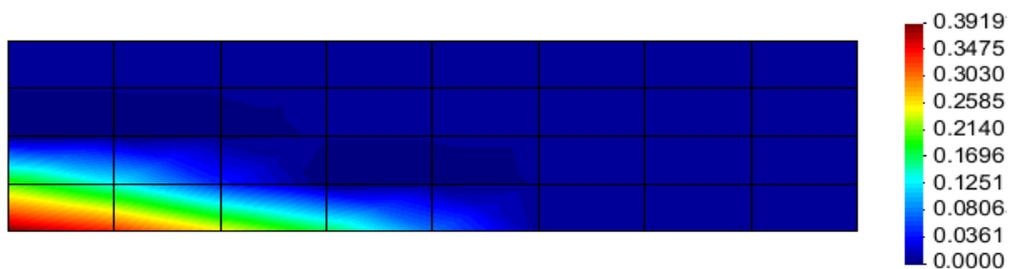


Figura 64 – Distribuição do dano (Passo 20).



Figura 65 – Mapa da posição dos elementos e nuvens de interesse na malha (4x8).

Tabela 16 – Índices de efetividade vinculados aos elementos.

Malha (4x8)								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Elemento 14		Elemento 25		Elemento 26		η (%)
		ERM	SRM	ERM	SRM	ERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	
p+1	P-4	0,959	1,024	0,813	0,923	0,934	0,980	31,35
	P-12	0,960	1,025	0,767	0,870	0,885	0,958	32,01
	P-20	0,960	1,026	0,645	0,735	0,833	0,925	33,47
p+2	P-4	1,063	1,089	0,870	1,000	0,990	1,057	31,35
	P-12	1,064	1,090	0,825	0,953	0,937	1,044	32,01
	P-20	1,064	1,091	0,696	0,808	0,898	1,008	33,47

Tabela 17 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (4x8)								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 20		Nuvem 21		Nuvem 25		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,672	0,983	0,481	0,983	0,481	0,979	31,35
	P-12	0,661	0,959	0,481	0,983	0,481	0,979	32,01
	P-20	0,634	0,964	0,483	1,000	0,480	0,978	33,47
p+2	P-4	0,752	1,044	0,534	1,043	0,532	1,038	31,35
	P-12	0,754	1,028	0,534	1,043	0,532	1,038	32,01
	P-20	0,751	1,061	0,539	1,069	0,532	1,038	33,47

Tabela 18 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (4x8)								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 28		Nuvem 29		Nuvem 37		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,471	0,974	0,643	0,982	0,595	0,925	31,35
	P-12	0,465	0,975	0,625	0,951	0,584	0,886	32,01
	P-20	0,461	0,977	0,575	0,900	0,544	0,810	33,47
p+2	P-4	0,515	1,042	0,706	1,059	0,634	1,016	31,35
	P-12	0,514	1,061	0,700	1,037	0,624	0,959	32,01
	P-20	0,526	1,061	0,665	0,995	0,587	0,870	33,47

Tabela 19 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (4x8)						
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 38		Nuvem 39		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,692	0,887	0,652	0,997	31,35
	P-12	0,603	0,847	0,628	0,997	32,01
	P-20	0,451	0,668	0,605	0,947	33,47
p+2	P-4	0,741	0,982	0,691	1,083	31,35
	P-12	0,648	0,935	0,665	1,061	32,01
	P-20	0,487	0,737	0,648	1,023	33,47

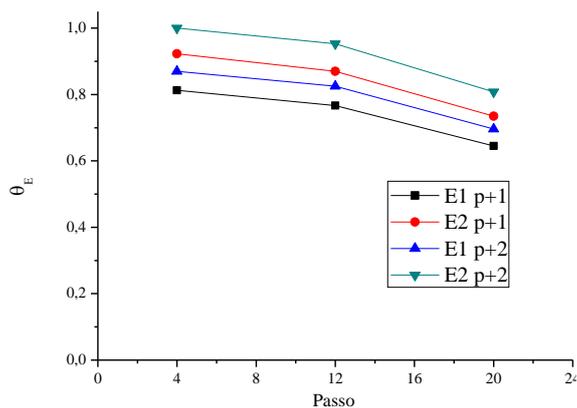


Figura 66 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 25 (Passo 20).

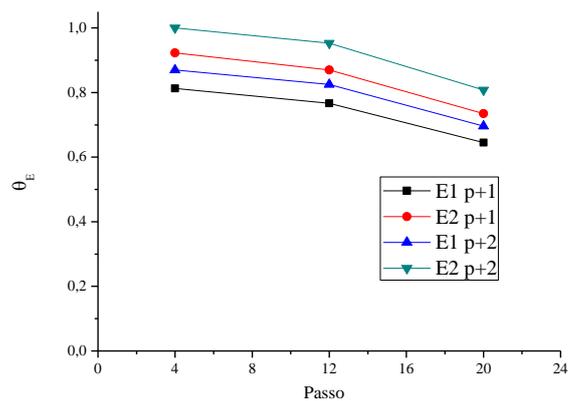


Figura 67 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 14 (Passo 20).

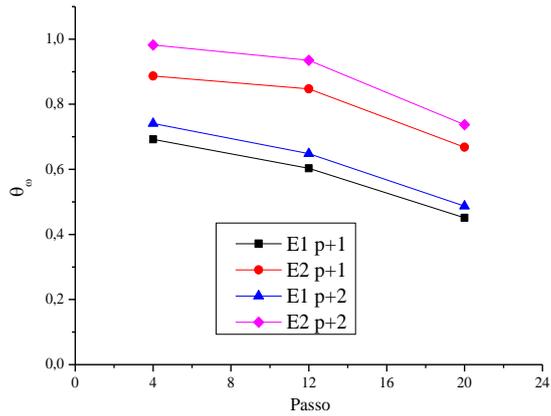


Figura 68 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem 38 (Passo 20).

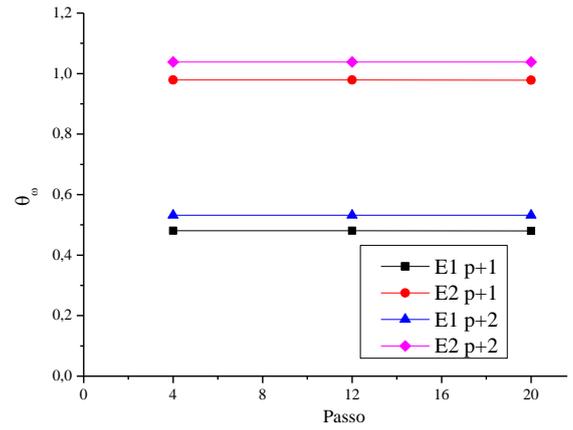


Figura 69 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem25 (Passo 20).

Resultados Malha (8x16)

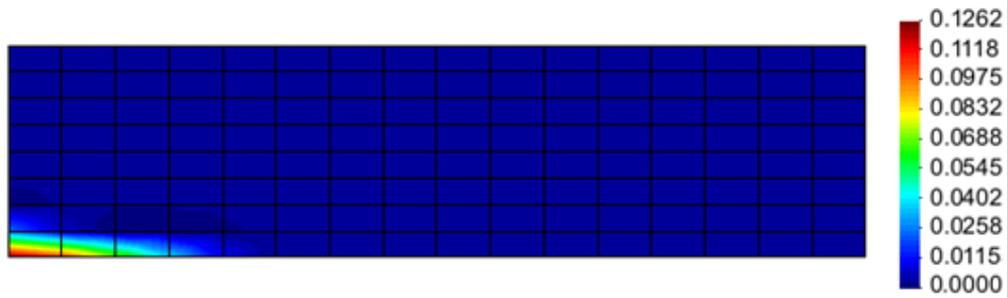


Figura 70 – Distribuição do dano (Passo 4).

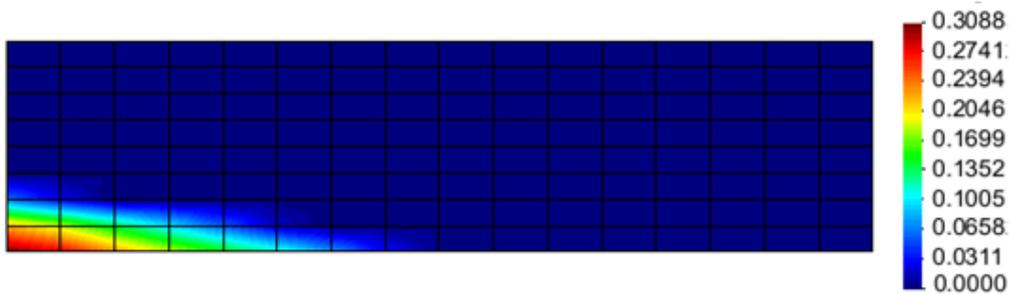


Figura 71 – Distribuição do dano (Passo 12).

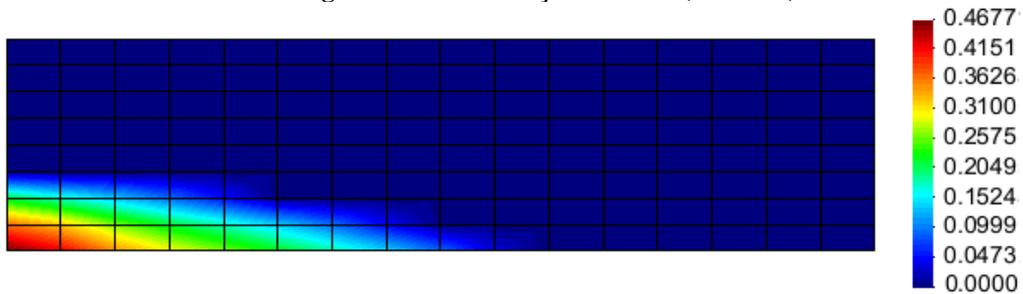


Figura 72 – Distribuição do dano (Passo 20).

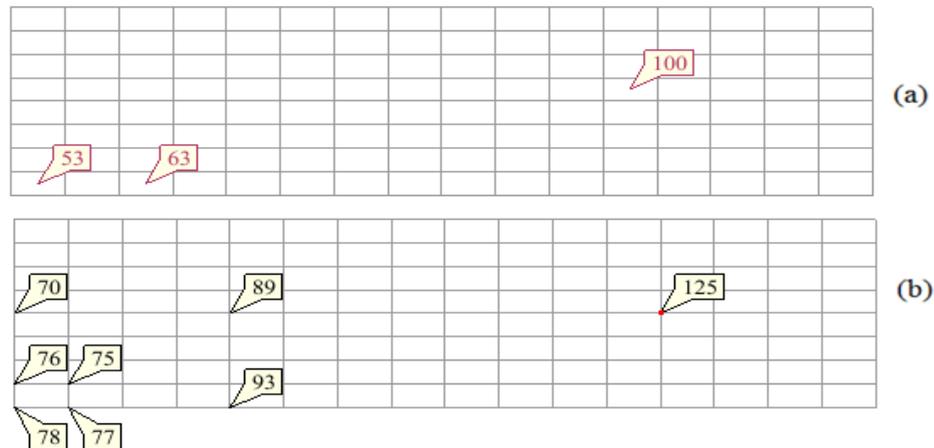


Figura 73 – Mapa da posição dos elementos e nuvens de interesse na malha (8x16).

Tabela 20 – Índices de efetividade vinculados aos elementos.

Malha (8x16)								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Elemento 53		Elemento 63		Elemento 100		η (%)
		ERM	SRM	ERM	SRM	ERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	
p+1	P-4	0,805	0,921	0,950	1,021	0,962	0,998	16,58
	P-12	0,747	0,884	0,925	1,008	0,962	0,998	17,06
	P-20	0,557	0,682	0,891	0,997	0,963	0,998	18,16
p+2	P-4	0,872	1,010	0,977	1,117	1,068	1,059	16,58
	P-12	0,808	0,970	0,992	1,109	1,069	1,059	17,06
	P-20	0,611	0,762	0,958	1,102	1,069	1,059	18,16

Tabela 21 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (8x16)								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 70		Nuvem 75		Nuvem 76		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,679	0,977	0,464	0,974	0,633	0,990	16,58
	P-12	0,675	0,951	0,467	0,980	0,605	1,004	17,06
	P-20	0,663	0,918	0,464	0,961	0,526	0,858	18,16
p+2	P-4	0,759	1,035	0,511	1,055	0,706	1,069	16,58
	P-12	0,755	1,003	0,520	1,062	0,676	1,094	17,06
	P-20	0,741	0,966	0,509	1,061	0,576	0,957	18,16

Tabela 22 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (8x16)								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 77		Nuvem 78		Nuvem 89		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,615	0,943	0,677	0,952	0,481	0,985	16,58
	P-12	0,587	0,919	0,594	0,883	0,481	0,985	17,06
	P-20	0,501	0,789	0,390	0,630	0,481	0,985	18,16
p+2	P-4	0,660	1,049	0,733	1,058	0,535	1,043	16,58
	P-12	0,632	1,013	0,642	0,979	0,535	1,043	17,06
	P-20	0,549	0,866	0,428	0,698	0,534	1,044	18,16

Tabela 23 – Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (8x16)						
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 93		Nuvem 125		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,679	1,042	0,480	0,982	16,58
	P-12	0,670	1,047	0,480	0,982	17,06
	P-20	0,659	1,040	0,480	0,981	18,16
p+2	P-4	0,718	1,135	0,533	1,040	16,58
	P-12	0,717	1,161	0,533	1,040	17,06
	P-20	0,707	1,155	0,533	1,040	18,16

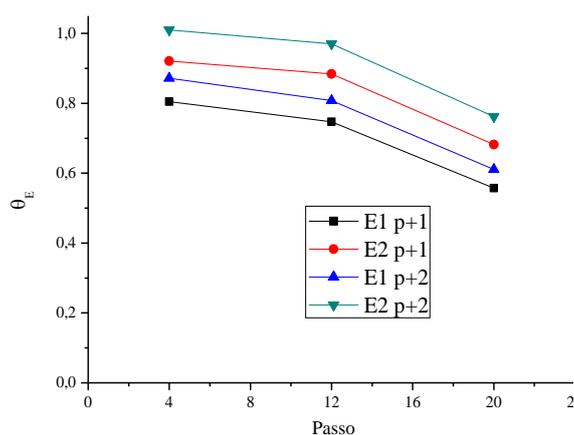


Figura 74 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 53 (Passo 20).

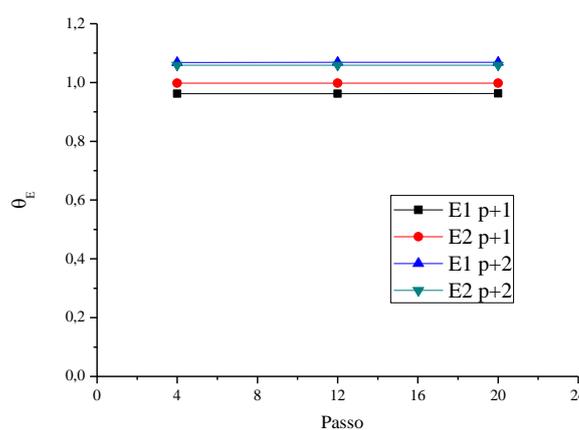


Figura 75 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 100 (Passo 20).

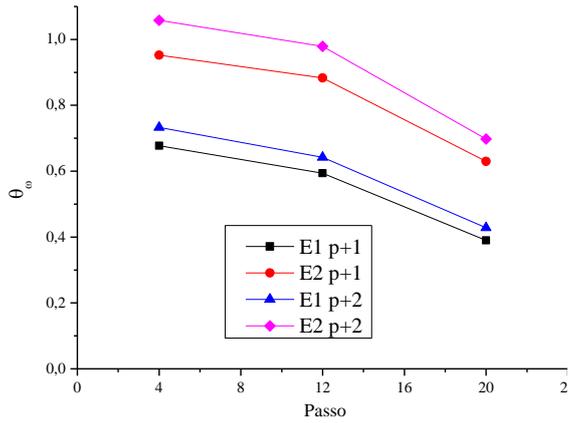


Figura 76 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem 78 (Passo 20).

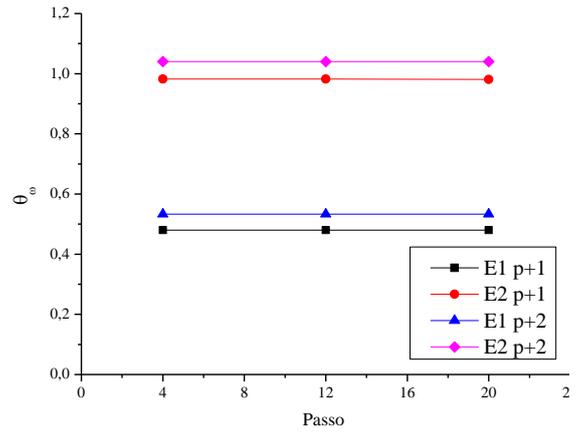


Figura 77 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem 125 (Passo 20).

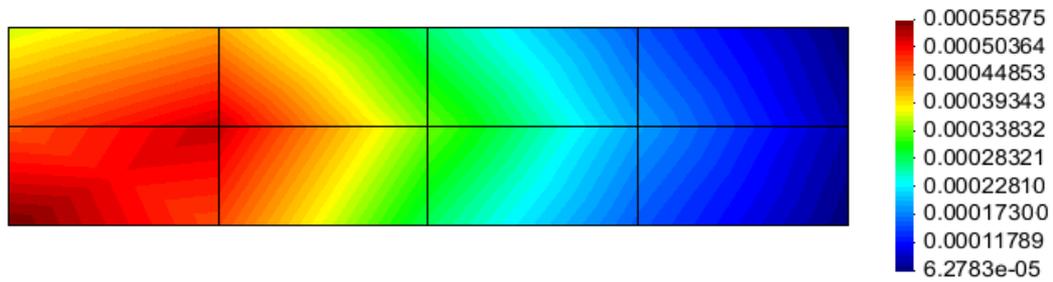


Figura 78 – Distribuição do erro na malha na 2x4.

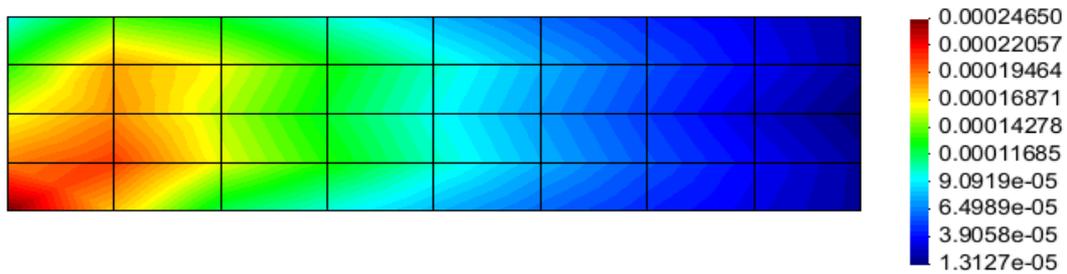


Figura 79 – Distribuição do erro malha na 4x8.

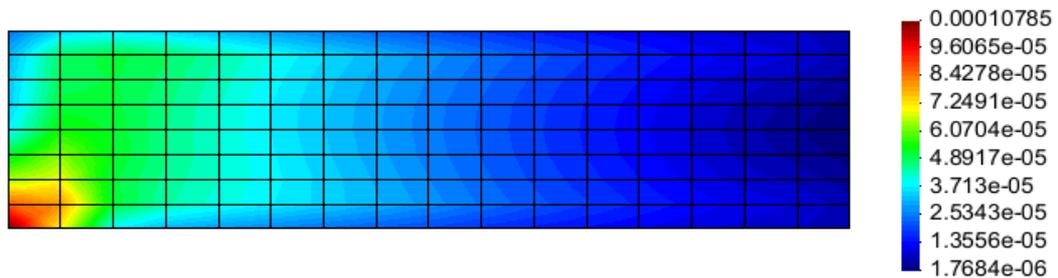


Figura 80 – Distribuição do erro na malha 8x16.

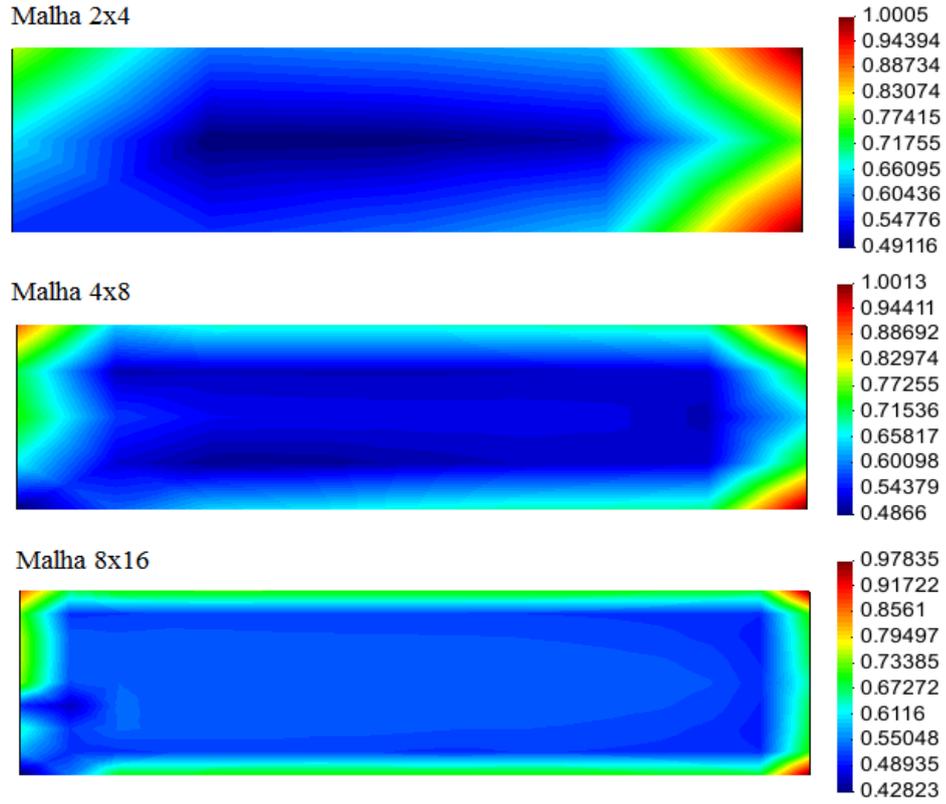


Figura 81 – Índices de efetividade EERM erro projetado em $p+2$.

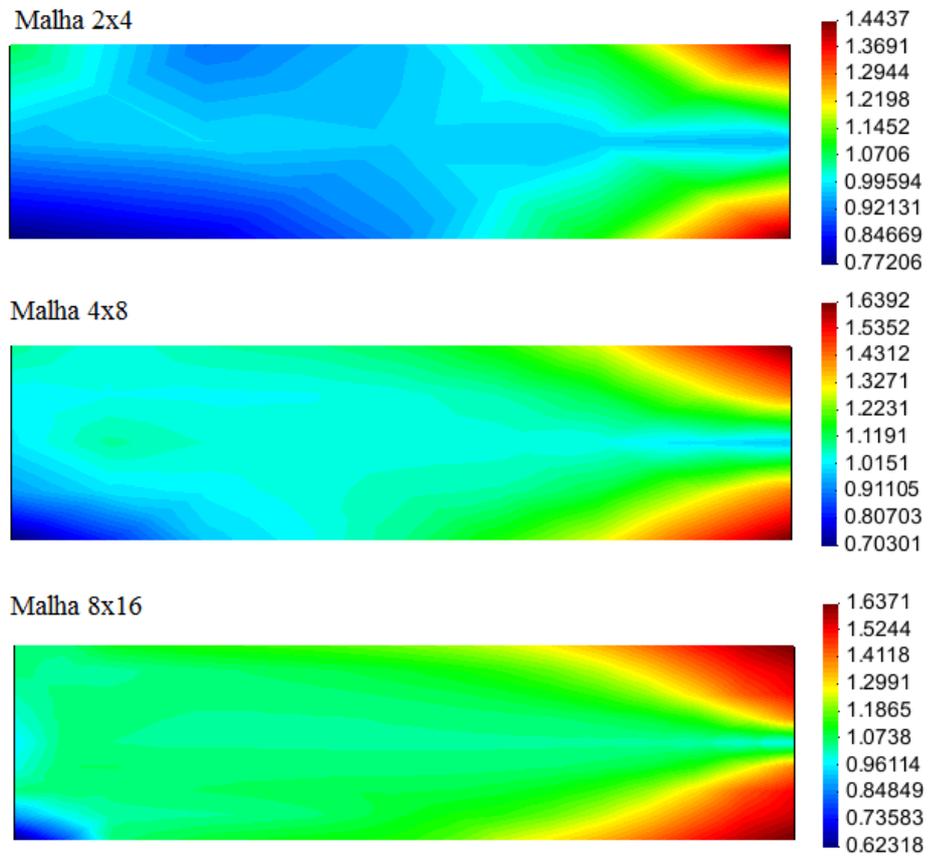


Figura 82 – Índices de efetividade para o SRM com erro projetado em $p+2$.

Nesse exemplo numérico optou-se por uma combinação de MEFG e refinamento- h para demonstrar que, em problemas dessa natureza, é imprescindível que a discretização seja capaz de capturar as escalas de interesse: a geometria (macro) e a zona de dano (micro). Partindo-se de uma malha inicial grosseira, a discretização é modificada, para que o erro resultante permaneça dentro de limites aceitáveis.

A Figura 47 evidencia a sensibilidade do diagrama força-deslocamento com relação à densidade de malha: as soluções exibem comportamentos semelhantes, diferindo apenas pelo aumento das respectivas inclinações à medida que o espaço (no qual a solução é procurada) é ampliado. Obviamente, a solução dada pela malha 8x16 é muito mais precisa do que a da malha 2x4. Isso se deve ao fato de que, quando elementos suficientemente pequenos são introduzidos, é possível capturar melhor o mecanismo de concentração do dano no canto inferior esquerdo. Esse fato é evidenciado pela redução considerável do erro global de 56,22%, passando por 33,47% e chegando a 18,16%, ao final da análise, Tabela 12.

Ainda em termos globais, para o erro projetado em $p+1$, apenas o estimador SRM tende ao limite superior quando o erro relativo diminui. Já para o erro em $p+2$, ambos estimadores tendem ao limite superior. De modo geral, os dois estimadores apresentaram um bom desempenho, com índices de efetividade variando no intervalo entre 0,8 e 1,0 (que é o recomendado) e, especificamente para o SRM, os índices de robustez apresentam valores próximos à unidade, Tabela 12 e Figuras 50 a 53.

Em termos locais, Tabelas 13 a 15 e Figuras 58 a 61 para a malha 2x4, Tabelas 16 a 19 e Figuras 66 a 69 para a malha 4x8, Tabelas 20 a 23 e Figuras 74 a 77 para malha 8x16, é possível observar que os desempenhos dos índices de efetividade vinculados aos elementos e às nuvens, situados na região de localização do dano, são mais afetados no decorrer da análise. O mesmo não ocorre quando esses índices são avaliados em regiões mais afastadas de onde se evidencia a deterioração do material. Esse fenômeno se repete sistematicamente nos dois estimadores, com o erro projetado tanto em $p+1$ quanto em $p+2$. A penalização do EERM é, contudo, maior especialmente para as medidas associadas às nuvens. Este fato já havia sido observado na seção 2.4, para o problema de comportamento linear e deve-se à aproximação grosseira obtida com a utilização da Eq. (79). Outro aspecto importante a ser observado é o fato de que, à medida que se realiza o refinamento h , ambos os estimadores têm seus índices de efetividade deteriorados na região de dano, seja para

as medidas em nuvem ou em elemento. Isso ocorre pois, com o refinamento h da malha, as regiões locais passam a ter, proporcionalmente a seu tamanho, uma maior zona danificada, o que impacta o desempenho das medidas de erro.

As Figuras 78 a 80 mostram a diminuição sistemática da distribuição do erro, ao longo do domínio e sua concentração, como esperado, na região onde o dano é maior. As Figuras 81 e 82 mostram a distribuição dos índices de efetividade em decorrência desse fato, para ambos os estimadores com erro projetado em $p+2$.

4.5.2 Chapa com entalhe

O problema a seguir corresponde a uma chapa de concreto com 12 cm de espessura, Figura 83, solicitada por duas forças horizontais de sentidos contrários provocando a abertura do entalhe.

A análise numérica foi realizada sob a hipótese de estado de deformação plana, considerando carregamento monotônico e limitado ao início e crescimento do estágio de dano até a capacidade de carga máxima da estrutura. A força concentrada foi substituída por uma força distribuída equivalente q .

As dimensões da peça e do entalhe são dadas em mm. Os vínculos nodais foram introduzidos com a finalidade de eliminar os movimentos de corpo rígido, uma vez que o carregamento é alto equilibrado. Os parâmetros do modelo de Mazars relacionados ao tipo de concreto considerado são: $A_c=1,4$, $B_c=1850$, $A_t=0,8$, $B_t=20000$, $\epsilon_{d0}=1.23E-04$, $E=30000$ MPa, $\nu=0,2$.

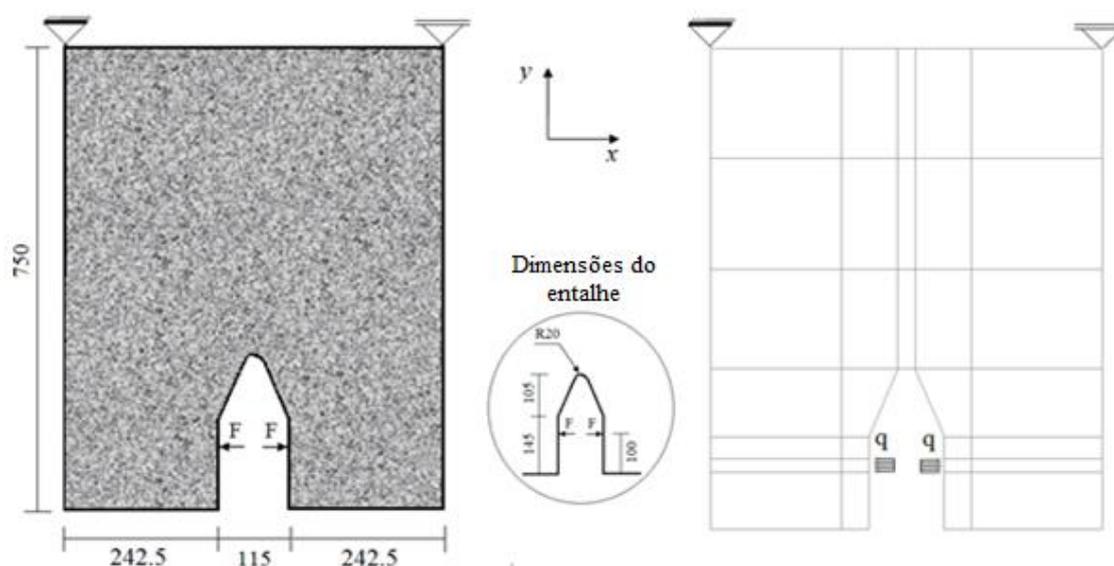


Figura 83 - Geometria, condições de contorno (de força e deslocamento) e malha inicial.

A força aplicada de 20,0 kN foi dividida em 51 passos, sendo o primeiro de 10,0 kN e os outros 50 passos de 0,20 kN. A tolerância para convergência em energia das iterações de cada passo foi adotada igual a $5,0E-3$.

Para resolução desse exemplo numérico, optou-se pela combinação do MEFG e refinamento- p . Para a integração numérica da malha grosseira (nos três casos avaliados), foram utilizados 15x15 pontos de Gauss nos elementos 19 e 24, Figura 85(b); 9x9 pontos de Gauss nos seis elementos vizinhos (lado esquerdo e direito) aos elementos 19 e 24; e 5x5 pontos de Gauss nos demais elementos. Para a malha de referência foram utilizados 3x3 pontos de Gauss em todos os elementos.

Dois recursos são, em geral, muito utilizados para tentar impedir os inconvenientes numéricos e estabilizar análises desse tipo. O primeiro é a limitação do dano a um valor um pouco menor do que 1,0 (geralmente utiliza-se 0,80 ou 0,87) para o cálculo da matriz de rigidez durante a solução do problema não linear. O segundo é a adoção de alguma técnica de regularização, que pode ser não local ou gradiente. Esse exemplo fará uso da abordagem não local como descrito em Barros (2002) e comentado na seção 3.3.

Ao todo, foram testadas três malhas de referência para esse problema, Figuras 84 (a) e (b) e Figura 86. Esses testes foram motivados pela presença de instabilidades numéricas (também referidas como oscilações espúrias), que comprometiam a qualidades dos resultados obtidos com essas outras discretizações e comprometiam a análise do erro. Esse fato evidencia que a dependência da malha, para resolução de problemas desse tipo, ainda persiste mesmo com o uso da técnica de regularização.

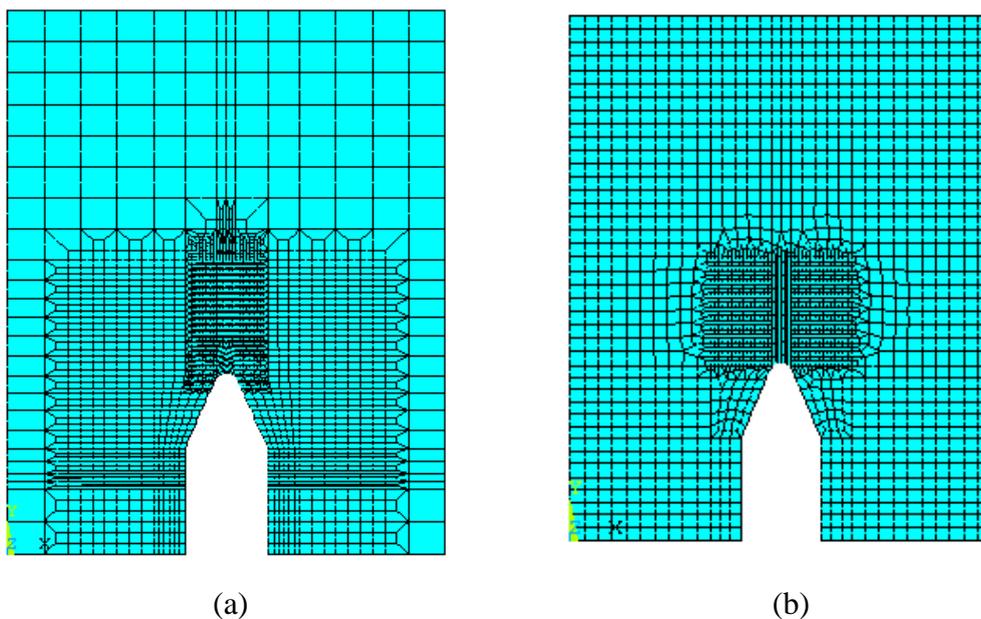


Figura 84 – Topologia de outras malhas de referência testadas.

Os estimadores de erro, para as duas técnicas EERM e SRM, foram avaliados ao longo do enriquecimento p e da história de carregamento da estrutura, empregando-se a malha mostrada na Figura 86. Nesse problema, especificamente, é sabido de antemão que a região danificada irá se concentrar acima do entalhe e, por essa razão, os elementos e nuvens, de interesse para a análise, foram selecionados nestas posições. Adicionalmente, foram também escolhidos o elemento 22 e a nuvem 32 presentes em locais em que não se espera a propagação do dano para fins de comparação dos desempenhos.

Três diferentes casos de enriquecimento p foram considerados:

CASOS AVALIADOS

Caso 1 - Todas as nuvens são enriquecidas com $p=1$

Caso 2 - As nuvens 27, 29, 33, 34, 39 e 40 são enriquecidas com $p=3$ e as demais nuvens com $p=1$

Caso 3 - Todas as nuvens são enriquecidas com $p=2$

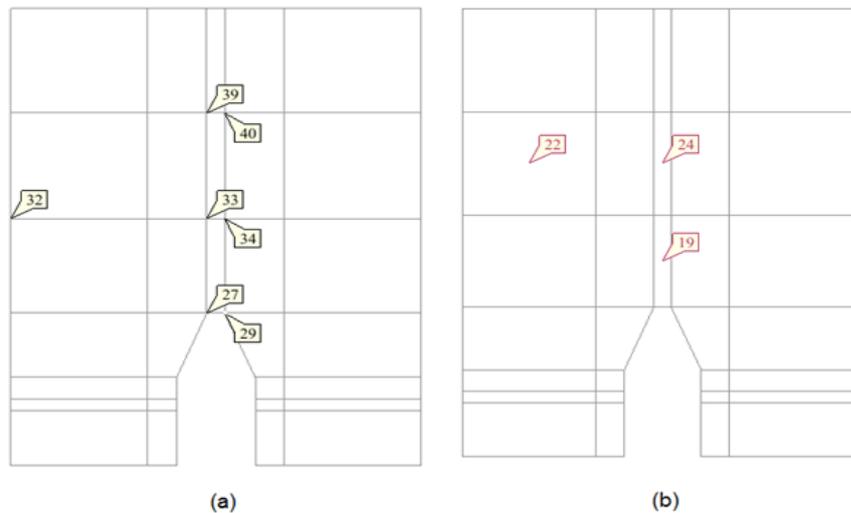


Figura 85 – Regiões de interesse nas análises: (a) nuvens e (b) elementos;

A malha de referência, Figura 86, possui 4521 nós e 4410 elementos quadriláteros com aproximação quadrática (enriquecimento $p=1$). A fim de melhor capturar o comportamento de microescala, foi utilizada uma maior quantidade de elementos na região acima do entalhe, que estará submetida a uma elevada concentração de tensões.

Primeiramente foi feita a análise com um raio igual a 1,5 cm, Figura 92. Como o mesmo se mostrou incapaz de estabilizar a análise (principalmente no caso 3), o valor foi aumentado para 3,0 cm. Graças à formulação não local foi possível estender um pouco mais a análise (porque o aumento do valor do raio foi acompanhado por um aumento da capacidade portante), o que viabilizou a avaliação do desempenho dos estimadores.

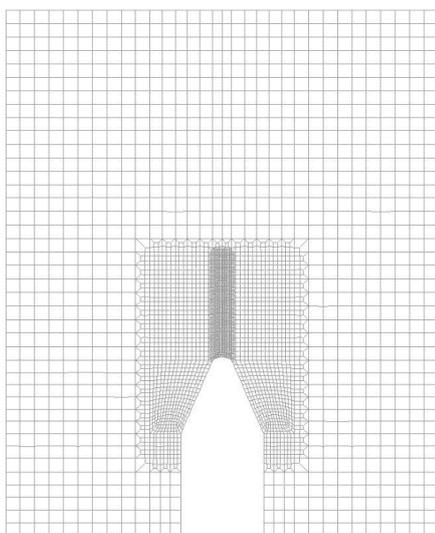


Figura 86 – Malha de referência

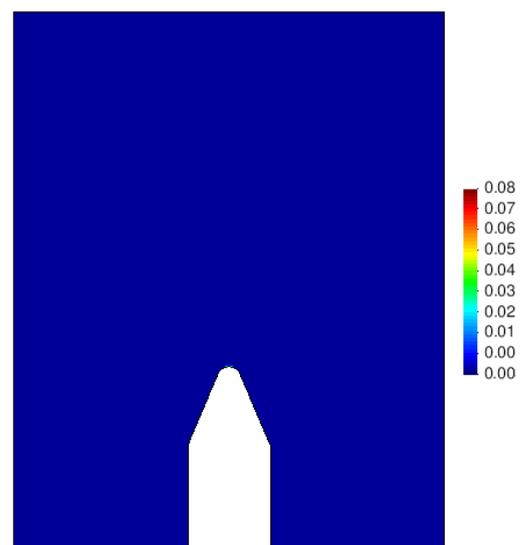


Figura 87 – Evolução do dano – Passo 20

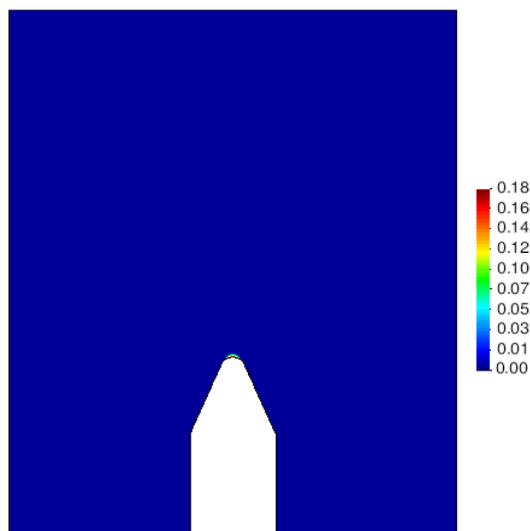


Figura 88 – Evolução do dano – Passo 23

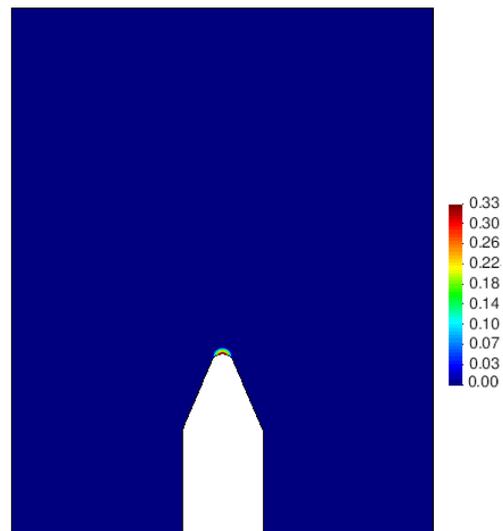


Figura 89 – Evolução do dano – Passo 26

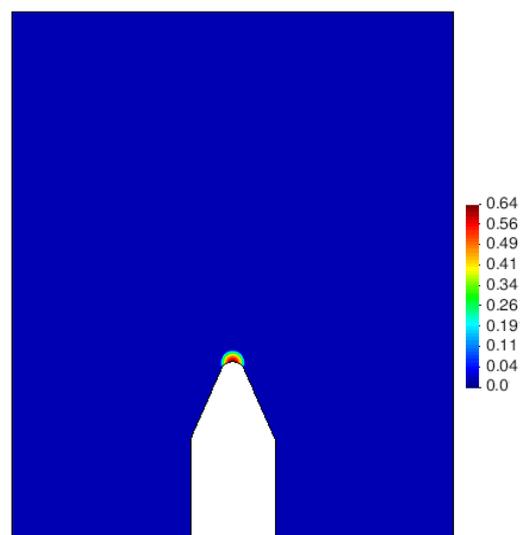


Figura 90 – Evolução do dano – Passo 29

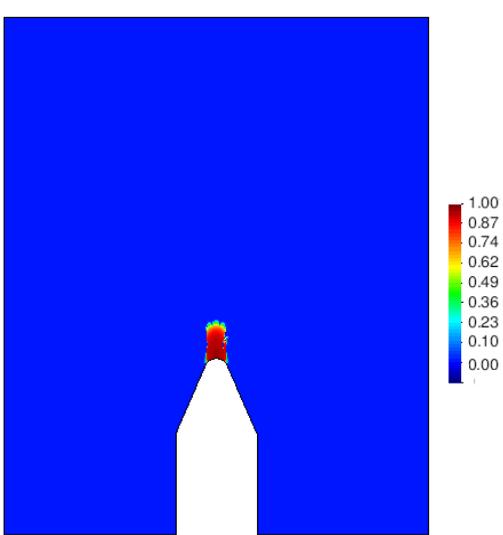


Figura 91 – Evolução do dano – Passo 30

As Figuras 87 a 91 mostram a evolução da variável dano e sua distribuição na malha de referência ao longo de toda a análise. Apesar da adoção da abordagem não local (com um raio de 3,0 cm), houve um crescimento desordenado do dano, com sua localização em uma região muito pequena da peça. Perceba que a variável dano assume o valor máximo $D=1,0$ ao final do passo 30 (o que significa a representação de uma trinca no contexto da mecânica do dano contínuo). As equações de equilíbrio discretas tornam-se singulares, nessa região totalmente danificada, e, por esse motivo, esse passo não foi considerado nas análises.

Os resultados finais para as malhas MEF e de referência, utilizados na avaliação do erro, são apresentados na Figura 93. Ao final do passo 29, a solução do Caso 1, por ser a mais rígida, manteve-se linear até o final da análise; a solução do Caso 2

exibiu uma diminuição do valor da capacidade portante o que, juntamente com o enriquecimento local na zona crítica, possibilitou capturar um valor de dano máximo igual a 0,14, sem, no entanto, impactar consideravelmente a rigidez da estrutura; a solução do Caso 3, embora exiba uma flexibilidade consideravelmente maior se comparada às outras duas, foi capaz de capturar um valor de dano máximo de apenas 0,09.

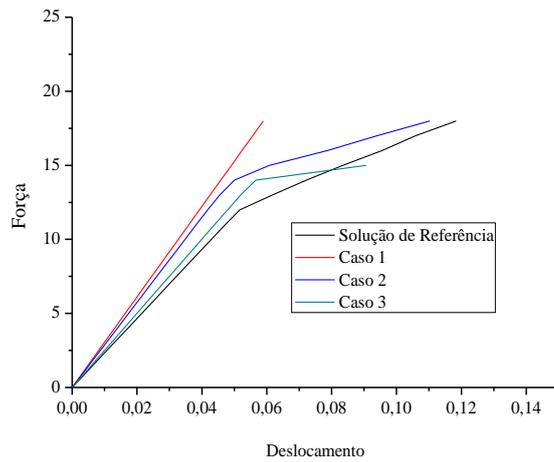


Figura 92 – Força x Deslocamento (Raio 1,5 cm) no ponto de aplicação da força.

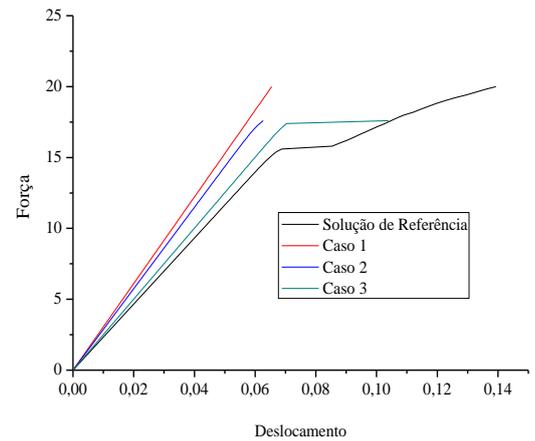


Figura 93 – Força x Deslocamento (Raio 3,0 cm) no ponto de aplicação da força.

Tabela 24 – Valores globais para os casos C1, C2 e C3.

CASOS	Grau polinomial da solução do erro			p+1			ρ	p+2			ρ	η (%)
	Estimador de erro			EERM ξ^1		SRM ξ^2		EERM ξ^1		SRM ξ^2		
	p	p _{dano}	Passo	$\tilde{\theta}$	$\tilde{\theta}^s$	$\tilde{\theta}^I$		$\tilde{\theta}$	$\tilde{\theta}^s$	$\tilde{\theta}^I$		
1	1	0	1-20	0,959	1,205	0,555	2,17	1,072	1,387	0,560	2,48	51,71
			23	0,957	1,202	0,553	2,17	1,069	1,384	0,558	2,48	51,78
			26	0,949	1,193	0,548	2,17	1,060	1,372	0,554	2,48	52,01
			29	0,907	1,140	0,524	2,17	1,013	1,311	0,529	2,48	53,26
2	1	3	1-20	0,903	1,121	0,704	1,59	0,987	1,295	0,683	1,90	47,86
			23	0,902	1,119	0,704	1,59	0,986	1,294	0,682	1,90	47,87
			26	0,898	1,115	0,701	1,59	0,982	1,289	0,680	1,90	47,87
			29	0,873	1,086	0,680	1,59	0,956	1,254	0,660	1,90	48,17
3	2	0	1-20	1,020	1,187	0,589	2,00	0,987	1,464	0,659	2,22	29,14
			23	1,016	1,182	0,586	2,00	1,094	1,458	0,657	2,22	29,23
			26	1,002	1,167	0,578	2,00	1,079	1,439	0,648	2,22	29,50
			29	0,927	1,081	0,534	2,00	0,999	1,332	0,598	2,22	31,25

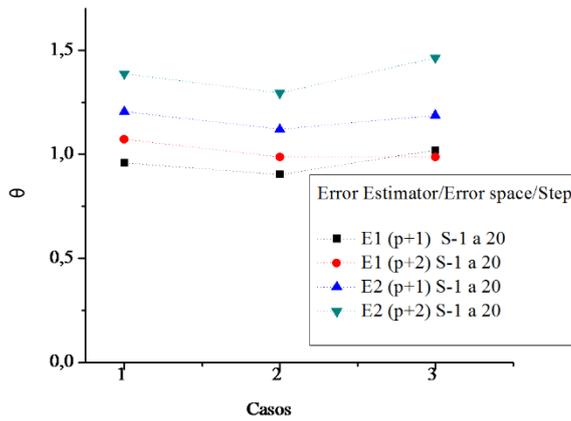


Figura 94 – Limite Superior (passo 1 ao 20)

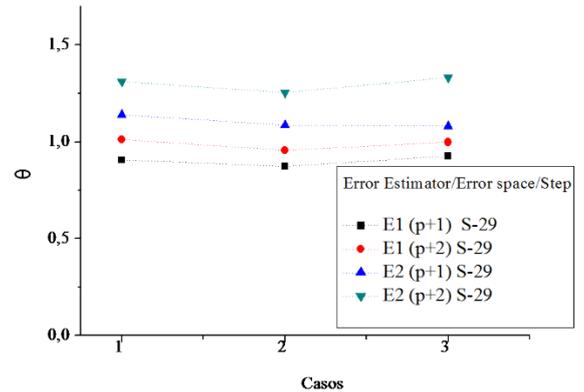


Figura 95 – Limite Superior (passo 29)

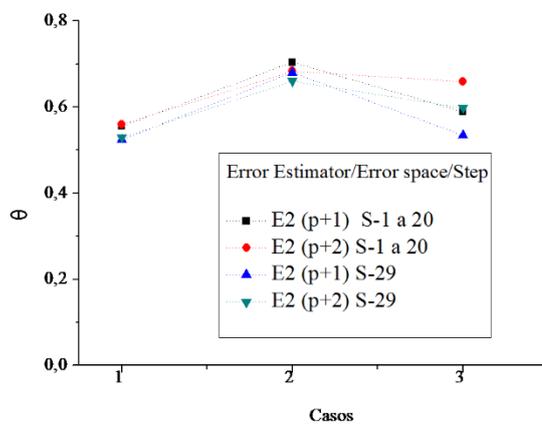


Figura 96 – Limite Inferior

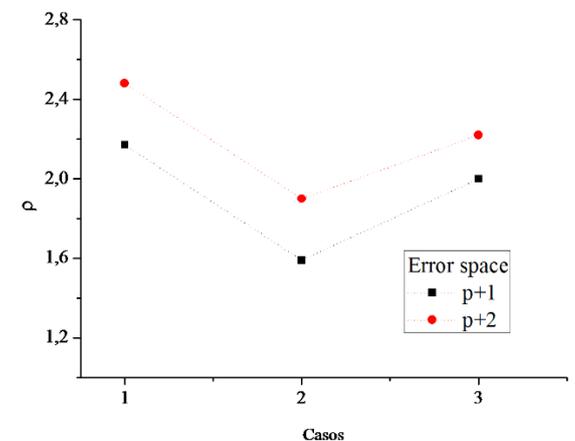


Figura 97 – Índice de Robustez

Tabela 25 – Índices de efetividade vinculados às nuvens θ_ω para os casos C1.

CASO 1								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 27		Nuvem 33		Nuvem 32		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	1-20	0,498	1,341	0,881	1,659	0,622	1,038	51,71
	23	0,495	1,332	0,876	1,650	0,621	1,036	51,78
	26	0,483	1,301	0,862	1,624	0,618	1,031	52,01
	29	0,426	1,147	0,796	1,501	0,604	1,007	53,26
p+2	1-20	0,569	1,700	0,995	1,884	0,645	1,101	51,71
	23	0,565	1,688	0,990	1,873	0,644	1,099	51,78
	26	0,522	1,649	0,974	1,844	0,641	1,094	52,01
	29	0,487	1,454	0,900	1,704	0,626	1,068	53,26

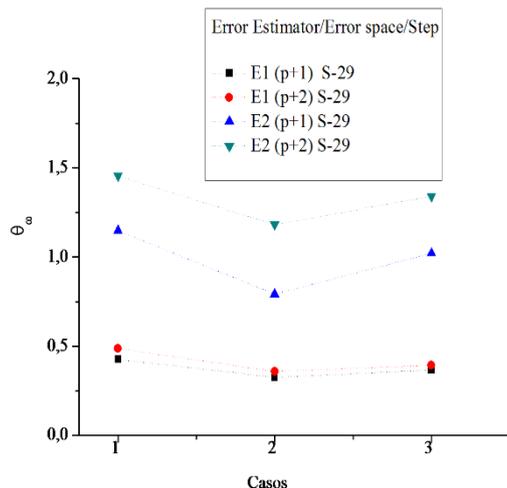


Figura 98 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem 27 (Passo 29).

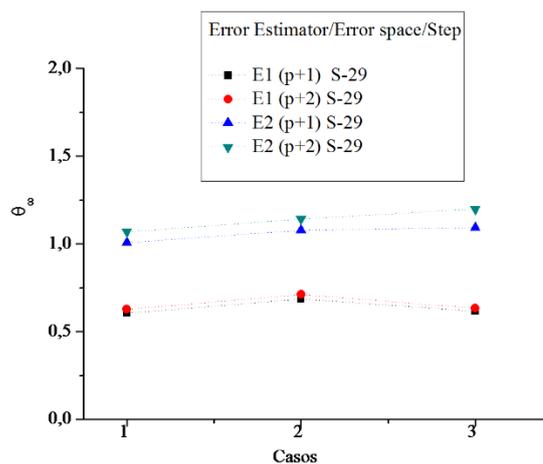


Figura 99 – Índices de efetividade vinculados à Nuvem 32 (Passo 29).

Tabela 26 – Índices de efetividade vinculados às nuvens θ_ω para os casos C2.

CASO 2								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 27		Nuvem 33		Nuvem 32		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	1-20	0,487	0,868	0,615	0,890	0,701	1,102	47,86
	23	0,363	0,865	0,612	0,866	0,700	1,101	47,87
	26	0,359	0,859	0,605	0,877	0,698	1,097	47,87
	29	0,325	0,792	0,564	0,824	0,685	1,077	48,17
p+2	1-20	0,399	1,286	0,668	1,224	0,727	1,169	47,86
	23	0,398	1,282	0,665	1,219	0,726	1,168	47,87
	26	0,393	1,273	0,656	1,207	0,724	1,163	47,87
	29	0,358	1,181	0,615	1,166	0,711	1,142	48,17

Tabela 27 – Índices de efetividade vinculados às nuvens θ_ω para os casos C3.

CASO 3								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 27		Nuvem 33		Nuvem 32		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	1-20	0,422	1,170	0,883	1,931	0,677	1,199	29,14
	23	0,419	1,163	0,877	1,919	0,674	1,193	29,23
	26	0,411	1,141	0,862	1,885	0,664	1,177	29,50
	29	0,365	1,021	0,781	1,711	0,616	1,092	31,25
p+2	1-20	0,454	1,544	0,946	2,204	0,693	1,315	29,14
	23	0,451	1,534	0,940	2,190	0,690	1,309	29,23
	26	0,442	1,505	0,923	2,151	0,681	1,291	29,50
	29	0,393	1,341	0,837	1,953	0,632	1,198	31,25

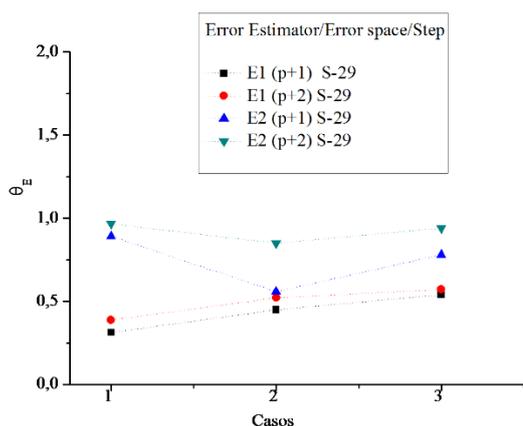


Figura 100 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 19 (Passo 29).

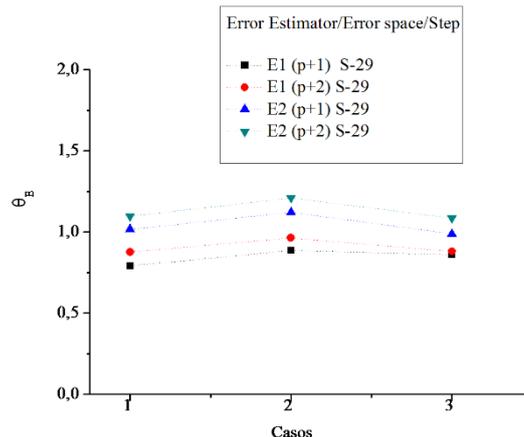


Figura 101 – Índices de efetividade vinculados ao Elemento 22 (Passo 29).

Tabela 28 – Índices de efetividade vinculados aos elementos θ_E para os casos C1

CASO 1								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Elemento 19		Elemento 24		Elemento 22		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	
p+1	1-20	0,434	1,237	0,360	1,203	0,824	1,057	51,71
	23	0,427	1,217	0,360	1,200	0,822	1,054	51,78
	26	0,403	1,148	0,358	1,193	0,817	1,048	52,01
	29	0,313	0,891	0,348	1,161	0,791	1,016	53,26
p+2	1-20	0,539	1,341	0,364	1,408	0,913	1,142	51,71
	23	0,530	1,319	0,363	1,405	0,911	1,139	51,78
	26	0,500	1,245	0,361	1,397	0,905	1,132	52,01
	29	0,388	0,966	0,351	1,359	0,877	1,097	53,26

Tabela 29 – Índices de efetividade vinculados aos elementos θ_E para os casos C2

CASO 2								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Elemento 19		Elemento 24		Elemento 22		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	
p+1	1-20	0,543	0,641	0,574	1,566	0,891	1,153	47,86
	23	0,539	0,636	0,572	1,561	0,890	1,152	47,87
	26	0,529	0,627	0,568	1,549	0,886	1,147	47,87
	29	0,449	0,557	0,544	1,489	0,886	1,122	48,17
p+2	1-20	0,608	0,925	0,718	1,501	0,992	1,246	47,86
	23	0,603	0,918	0,715	1,497	0,991	1,244	47,87
	26	0,579	0,903	0,710	1,486	0,986	1,238	47,87
	29	0,521	0,849	0,682	1,430	0,964	1,211	48,17

Tabela 30 – Índices de efetividade vinculados aos elementos θ_E para os casos C3

CASO 3								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Elemento 19		Elemento 24		Elemento 22		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	$\tilde{\theta}_E$	
p+1	1-20	0,644	0,931	0,287	1,132	0,949	1,092	29,14
	23	0,639	0,924	0,286	1,131	0,944	1,086	29,23
	26	0,624	0,902	0,286	1,129	0,930	1,069	29,50
	29	0,540	0,780	0,282	1,113	0,859	0,988	31,25
p+2	1-20	0,678	1,126	0,372	1,209	0,974	1,199	29,14
	23	0,673	1,118	0,371	1,208	0,968	1,193	29,23
	26	0,654	1,090	0,371	1,206	0,953	1,174	29,50
	29	0,570	0,940	0,366	1,190	0,881	1,085	31,25

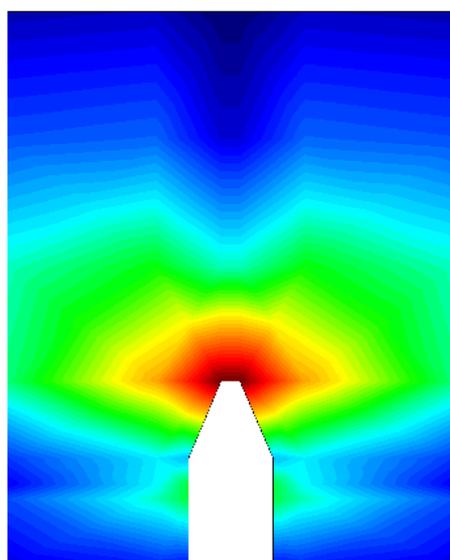


Figura 102 – Distribuição do erro no Caso 1

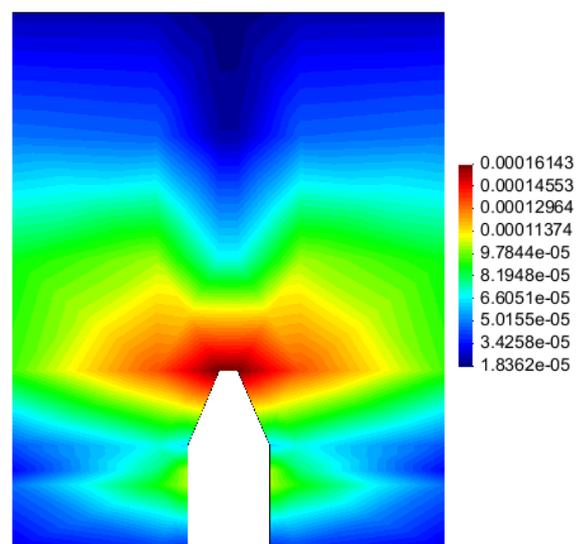


Figura 103 – Distribuição do erro no Caso 2

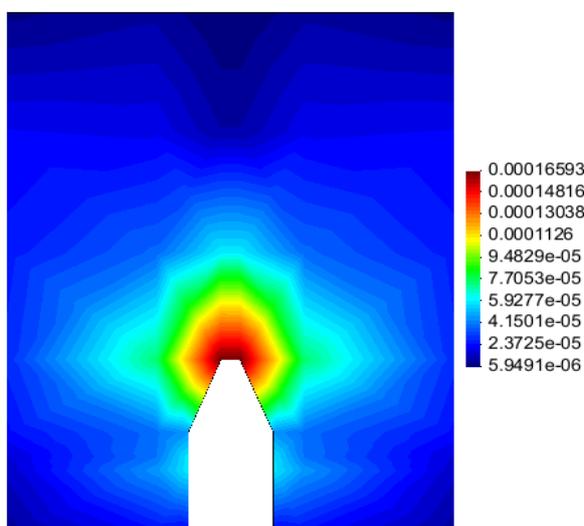


Figura 104 – Distribuição do erro no Caso 3.

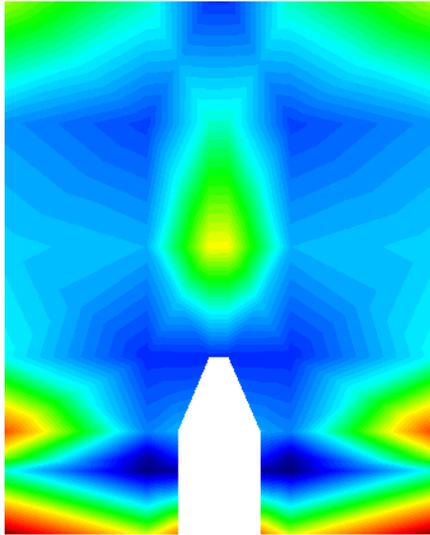


Figura 105 – EERM – Caso 1 – p+1

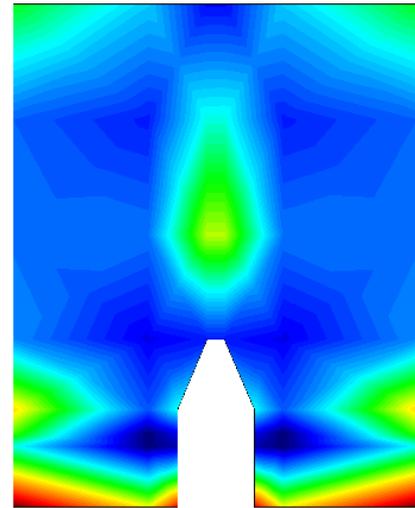


Figura 106 – EERM – Caso 1 – p+2

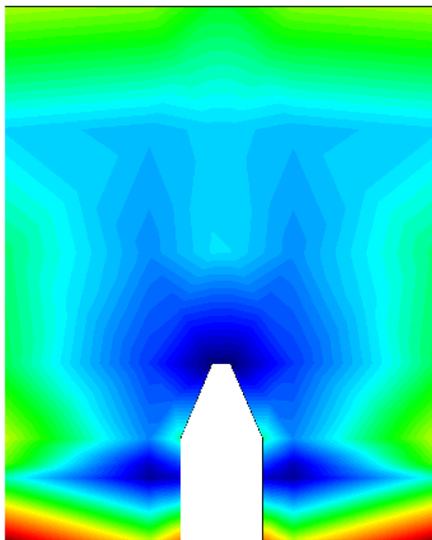


Figura 107 – EERM – Caso 2 – p+1

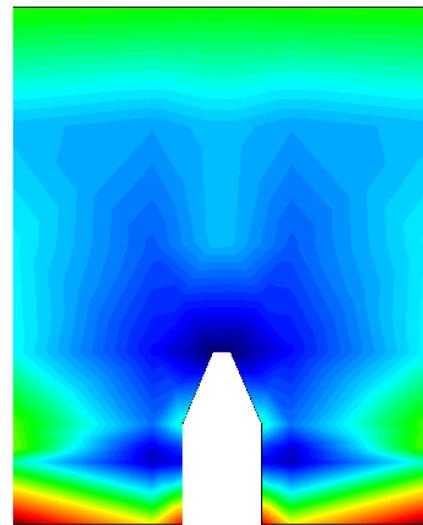


Figura 108 – EERM – Caso 2 – p+2

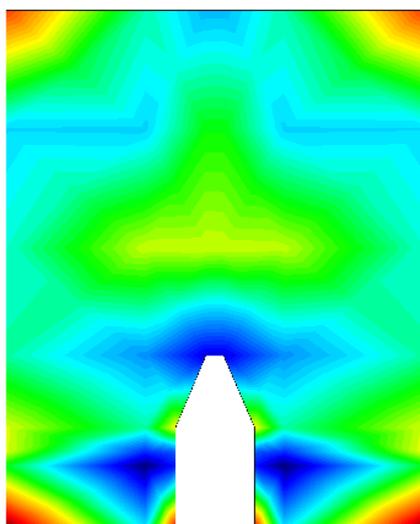


Figura 109 – EERM – Caso 3 – p+1

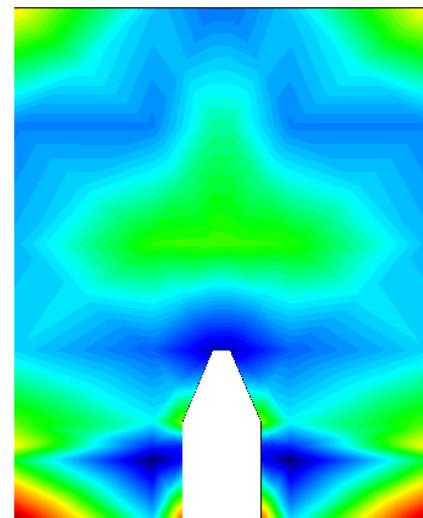


Figura 110 – EERM – Caso 3 – p+2

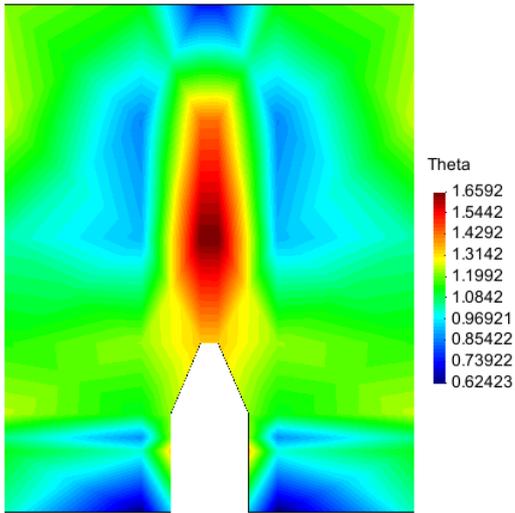


Figura 111 – SRM – Caso 1 – p+1

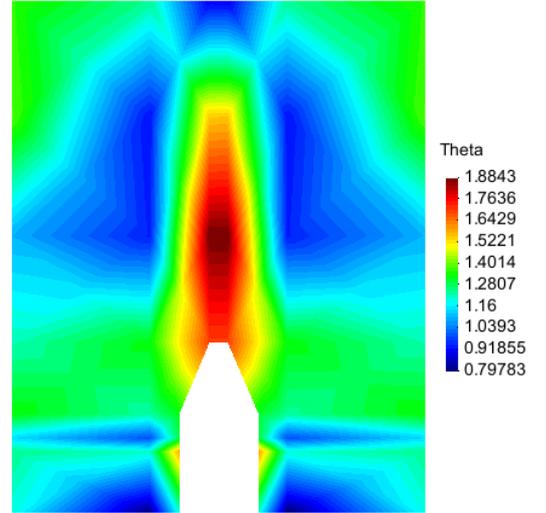


Figura 112 – SRM – Caso 1 – p+2

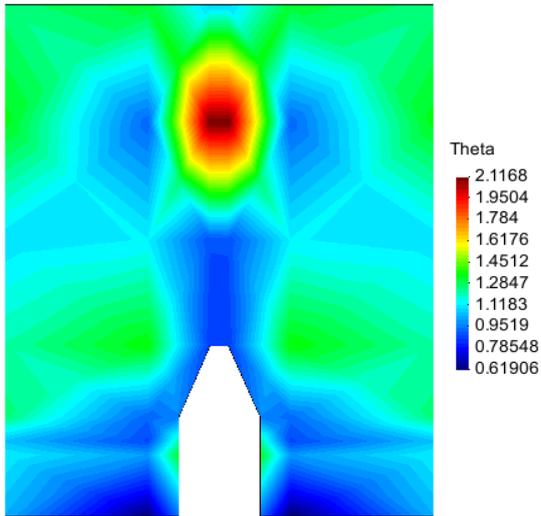


Figura 113 – SRM – Caso 2 – p+1

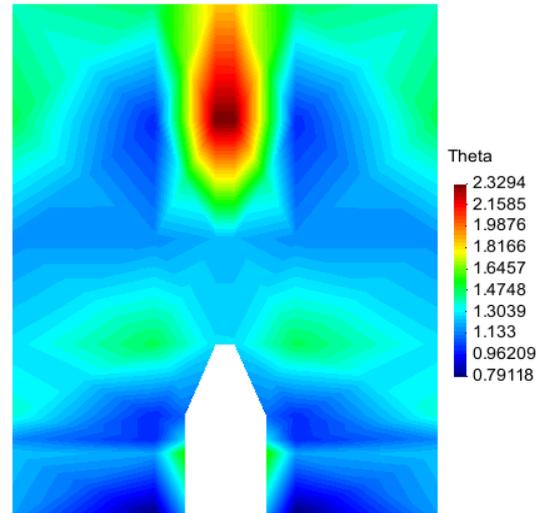


Figura 114 – SRM – Caso 2 – p+2

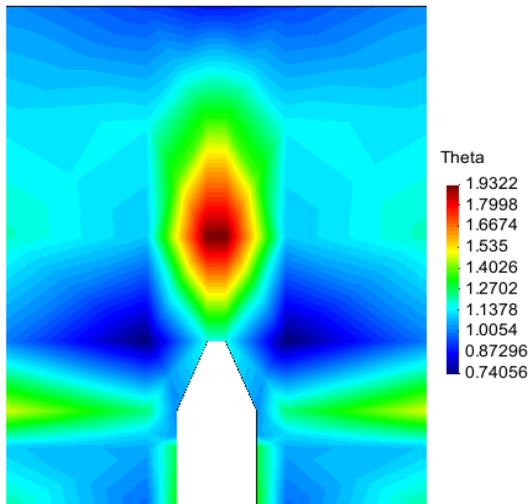


Figura 115 – SRM – Caso 3 – p+1

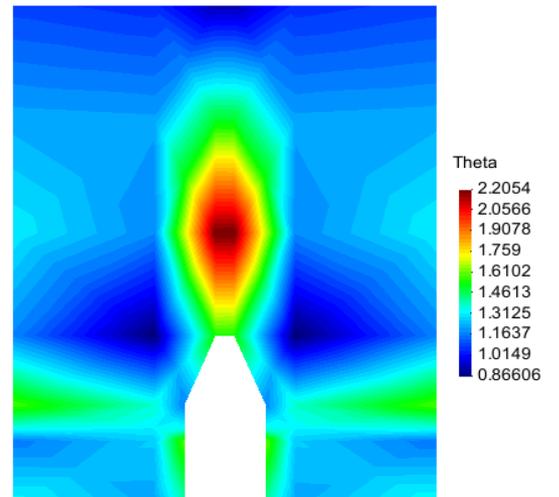


Figura 116 – SRM – Caso 3 – p+2

A análise dos erros foi realizada para os passos 1 ao 20 (fase linear para todas as análises), 23, 26 e 29. Este último é o limite em que se tem resultado para todas as análises (casos C1, C2, C3 e malha de referência). Os desempenhos das medidas de erro globais podem ser observados na Tabela 24 e nos gráficos das Figuras 94 a 97. Observa-se uma diminuição do erro relativo global, à medida que a discretização inicial, relativamente grosseira, é modificada pela estratégia de enriquecimento polinomial. Considerando apenas os valores ao final das análises (passo 29), o erro relativo que inicialmente era de 53,26% para enriquecimento uniforme ($p=1$ em todo domínio - caso C1), passou para 48,17%, com o enriquecimento não uniforme ($p=3$ na região do dano e $p=1$ no restante do domínio - caso C2) e, por fim, chegou a 31,25%, ao se enriquecer todas as nuvens novamente ($p=2$ em todo o domínio – caso C3). Obviamente, essa diminuição não foi muito expressiva, em decorrência do fenômeno de localização patológica do dano e do surgimento prematuro da trinca, o que comprometeu a qualidade da solução de referência e impediu que os testes prosseguissem.

Durante o crescimento desordenado do dano (até o passo 26), os índices de efetividade, de ambos os estimadores, EERM e SRM, exibem pouca variação. No entanto, no passo 29, quando o fenômeno de localização se instala, essa variação se torna mais significativa. Esse fato ocorre com os limites superiores e inferiores e é observado, também, em nível local. Sem dúvida, o uso da abordagem não local, com um raio de valor expressivo, está influenciando nessa resposta.

Os índices de efetividade do EERM apresentam valores próximos da unidade enquanto o SRM tende a ser um limite superior nos três casos avaliados, com erro projetado em $p+1$ e em $p+2$, Figuras 94 e 95.

Os limites inferiores foram mais impactados nos casos 1 e 3. Eles apresentam uma leve melhora na mudança do espaço de projeção do erro de $p+1$ para $p+2$. Os limites inferiores do caso C2 são os que exibem o melhor desempenho, o que pode ser atribuído à estratégia de enriquecimento adotada nesse caso, Figura 96. Os índices de robustez apresentaram um comportamento atípico (não variaram dentro da análise considerando apenas duas casas decimais) e assumiram valores na faixa de 1,59 e 2,48, Figura 97. Um pós-processamento dos limites inferiores, como sugerido em Paréz (2006), pode ser uma opção para melhorar o desempenho dessas estimativas e, conseqüentemente, o desempenho dos índices de robustez.

Considerando, agora, os valores locais nas nuvens (Tabelas 25, 26 e 27), Figuras 98 e 99, é possível perceber que os índices vinculados a Nuvem 32 (que está mais afastada da região danificada), apresentaram pouca variação nos três casos avaliados, tanto no EERM como no SRM.

Para as Nuvens 27 (que está na região danificada) e 33 (que está próxima dessa região), o SRM apresenta comportamento semelhante, com erro projetado em $p+1$ e em $p+2$, no Caso 2. O EERM é duramente penalizado na Nuvem 27, nos dois espaços de projeção do erro. Na Nuvem 33, com erro em $p+2$ ocorre uma melhora de seu desempenho.

Os valores locais nos elementos são apresentados nas Tabelas 28, 29 e 30 e nas Figuras 100 e 101. Os índices vinculados aos Elementos 19 e 24 mostram-se duramente impactados. O Caso 3 foi mais favorável ao desempenho dos índices vinculados ao Elemento 19, enquanto o Caso 2 foi mais favorável para os índices relativos ao Elemento 24. Para o Elemento 22 (mais afastado da zona crítica), os índices locais exibem comportamento semelhante em ambos os estimadores e para todos os níveis de carregamento. A mudança do espaço do erro de $p+1$ para $p+2$ melhora os desempenhos, principalmente do EERM.

Em termos globais, a estratégia de enriquecimento de todo o domínio com $p=2$, mostrou-se mais efetiva para a diminuição do erro relativo. Porém, em termos locais, os desempenhos dos estimadores e dos indicadores de erro parecem ser menos impactados com a utilização da estratégia de enriquecimento não uniforme (Caso 2). Provavelmente, em virtude da minimização dos impactos da poluição numérica.

As Figuras 102, 103 e 104 mostram a distribuição do erro para os casos avaliados. Todas exibem, como esperado, uma concentração muito forte do erro na região superior do entalhe que é, justamente, a de maior concentração do dano.

As Figuras 105 a 110 mostram a distribuição dos índices de efetividade ao longo do domínio para o EERM e as Figuras 111 a 116 mostram essa mesma distribuição para o SRM. Na região de inserção da localização de deformações as equações perderam (ou perderam aproximadamente) elipticidade o que impactou consideravelmente o desempenho dos estimadores. Em ambas as distribuições, é possível observar que os resíduos locais “poluíram” a solução incremental a grandes distâncias.

CAPÍTULO 5

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A modelagem teórica/computacional do concreto representa ainda uma tarefa desafiante, em virtude do comportamento peculiar desse material.

Apesar de todas as pesquisas desenvolvidas até agora, não existe uma resposta única, isto é, a solução exata, de como modelar os processos complexos de fratura no concreto. Três ramos da ciência têm sido aplicados a fim de alcançar isso: a Mecânica do Dano Contínuo, a Teoria da Plasticidade e a Mecânica da Fratura. Todavia, os modelos propostos possuem vários parâmetros, que são difíceis de determinar e nenhum deles se mostrou capaz de simular todos os aspectos da natureza do material. Atualmente, cada uma dessas teorias fornece apenas uma explicação parcial para os processos de fratura no concreto, isto é, para alguns aspectos individuais apenas (DJOCOVIC *et. al.*, 2013). O uso combinado das abordagens de dano e fratura tem sido evocado como uma forma de avaliação mais realística, especialmente na resolução de problemas como o da chapa com entalhe. Uma metodologia para correlacionar as teorias da mecânica do dano e da fratura pode ser vista no trabalho de Pervaiz Fhatima e Chandra Kishen (2015).

A partir da década de 90, quando foram publicados os primeiros artigos e até bem pouco tempo, acreditava-se que *o modelo de dano regularizado* seria suficiente para assegurar a convergência da análise não linear a uma solução com significado físico (HUERTA e PIJAUDIER-CABOT, 1994).

Entre as inúmeras potencialidades da adição do comprimento interno ao modelo constitutivo, as principais seriam: (a) impedir instabilidades de localização, (b) proporcionar independência da malha (isto é, do espaço de aproximação – forma e tamanho dos elementos, grau de interpolação); (c) controlar o tamanho da zona de processos e, conseqüentemente, a dissipação de energia no processo de fratura; (d) tornar o problema de valor de contorno bem-posto.

Obviamente, no início da falência é esperada uma discrepância quantitativa entre a resposta de um contínuo regularizado e um contínuo padrão, porém, a semelhança qualitativa deve ser mantida (SIMONE *et al.*, 2004).

Tendo por base essas informações e considerando que o código utilizado permite o uso do modelo constitutivo com ou sem a regularização (a critério do usuário) bem como controle de força ou deslocamento, chegou-se a conclusão de que não haveria nenhum inconveniente para obtenção da solução de referência numérica, em virtude do imperativo de se utilizar uma malha muito refinada.

Porém, como os resultados obtidos nas análises da chapa, tanto com o MEEG quanto com o MEF, não eram representativos da resposta real da estrutura, concluiu-se pela necessidade de se fazer uma última revisão bibliográfica sobre esse assunto, na tentativa de obter uma explicação para o ocorrido. Foi dessa forma, que se chegou ao artigo de Cabot e Gregórie (2014), que trata, justamente, das discrepâncias que têm sido sistematicamente observadas entre a teoria e a prática.

Segundo esses autores, recentemente, tornou-se evidente que os modelos regularizados exibem algumas inconsistências, tais como: (a) início incorreto da trinca (além da ponta da trinca); (b) propagação de frentes de dano após a falência devido à média não local, Figura 118, entre outras.

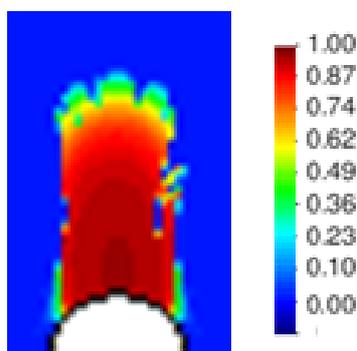


Figura 117 – Ampliação da região danificada ao final do passo 30.

Os autores argumentam que na maioria dos casos até agora, o comprimento interno foi considerado como sendo constante, porém atualmente existe um consenso entre os pesquisadores de que esse comprimento deve ser, na verdade, variável, o que modifica consideravelmente a distribuição do dano, Figura 119. Todavia, os resultados apresentados naquele artigo, embora se mostrem satisfatórios, são para problemas unidimensionais apenas. Obviamente, outros estudos serão necessários, porque algumas questões ainda não são bem compreendidas (por exemplo, a convergência).

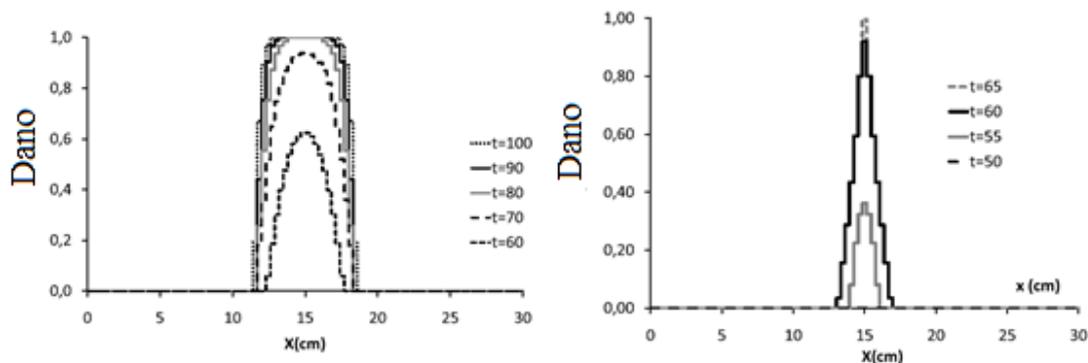


Figura 118 – Comprimento característico fixo e variável (Adaptado de Pijaudier-Cabot e Gergórie, 2014)

É inegável que essas constatações representam um significativo retrocesso para a modelagem do dano no concreto, já que a eficiência e a generalidade da adoção do comprimento característico não se verificaram na prática para resolução de estruturas mais complexas.

5.1 SÍNTESE

A fim de que um método numérico possa ser usado em simulações convencionais de estruturas de concreto (i.e. do estágio inicial de localização do dano até o estágio último por propagação da fratura devido às características do material), ele deve necessariamente estar equipado com procedimentos específicos que permitam (Comi e Perego, 2004):

- a) Gerar uma malha grosseira inicial;
- b) Evitar a dependência da malha, devido à perda de elipticidade das equações que regem o PVC e, conseqüentemente, evitar a conseqüente localização de deformações (localização numérica) no estágio inicial de propagação do dano;
- c) Adaptar a malha durante a análise, a fim de possibilitar resolver para a banda de localização de deformações (localização física) que evolui com o dano;
- d) Calcular para a separação do material no estágio último de crescimento do dano em virtude da degradação do material;

Pelo exposto no item 5.0 e também pelos exemplos numéricos não lineares apresentados, é possível concluir que a letra (b) permanece ainda sem solução.

A longo desse trabalho, os estimadores EERM (Resíduo no Elemento Equilibrado) e o SRM (Resíduo no Subdomínio) foram utilizados na resolução de problemas bidimensionais, envolvendo estruturas de concreto com comportamento linear e não linear material, respectivamente. Seguindo a classificação apresentada no Capítulo 1 (item 1.2), os problemas não lineares analisados pertencem à *Categoria C*, porque o concreto é um meio altamente heterogêneo e apresenta um comportamento de difícil descrição matemática e numérica. O exemplo *Koyna Dam* representa uma exceção, porque em virtude das dimensões da estrutura, é possível ignorar a zona de processos inelásticos e efetuar a análise pelos princípios da Mecânica da Fratura Linear Elástica. Nesse caso, apenas a geometria da peça é relevante e o problema pode, portanto, ser facilmente acomodado na *Categoria B*.

Especial interesse foi direcionado às aplicações onde, devido ao surgimento e a evolução do dano, em regiões específicas da estrutura, torna-se imprescindível modificar a discretização inicialmente adotada, com o intuito de minimizar os erros. A revisão do estado da arte sobre a estimação de erro “*a posteriori*” serviu para evidenciar que, no momento, essa é a principal ferramenta de verificação das soluções calculadas.

Durante a pesquisa, foram encontrados alguns registros na literatura como, por exemplo, em Pastor *et al.* (1991) e Pijaudier-Cabot *et al.* (1995), que mostram a adaptatividade sendo conduzida por indicadores de erro baseados em considerações meramente heurísticas (indicadores), ou seja, ainda em estágio embrionário. Atualmente, o grande avanço e o conseqüente melhoramento nas técnicas de estimação de erro “*a posteriori*” acenam com a possibilidade de minimizar as incertezas de projeto e, claro, prometem facilitar consideravelmente o trabalho dos analistas, em um futuro bem próximo.

Ambos os estimadores avaliados (EERM e SRM) são muito conceituados na literatura especializada porque possuem um forte respaldo matemático e exibem a propriedade do limite superior. Uma vantagem adicional, é o fato de possuírem uma ampla gama de aplicações, já que não dependem de constantes genéricas (que são de difícil determinação) ou de propriedades de superconvergência (que ainda não foram provadas para o caso não linear). A única restrição diz respeito à elipticidade do problema, porque a perda da mesma tem impactos severos na qualidade e, conseqüente, na confiabilidade dos resultados.

Como essa é a primeira vez que o SRM é aplicado na análise de problemas que envolvem dano no concreto, havia um grande interesse em saber como esse estimador se portaria nessa situação (em termos globais e locais), com vistas a um possível emprego dessa estratégia em um contexto essencialmente adaptativo com o MEFM. A razão para isso é que a obtenção de índices de efetividade locais diretamente vinculados às nuvens e a dispensa da necessidade de obtenção de fluxos equilibrados são grandes atrativos. A fusão dessas duas características possibilita, simultaneamente, otimizar o processo de implementação e diminuir os custos computacionais. Soma-se a isso o fato de que o estimador SRM, ao contrário do EERM, possui também um limite inferior.

A metodologia Orientada ao Objetivo representa hoje um campo de pesquisa em franco desenvolvimento e isso, claro, tem contribuído para impulsionar o melhoramento do EERM, do SRM e também das estimativas do tipo Suavização do Gradiente, para aplicações com o MEFM. Isso porque, como foi mostrado no item 2.3.5, a qualidade dos limites sobre o erro nessa abordagem é muito sensível à qualidade das estimativas de erro na norma de energia e na própria quantidade de interesse. Evidentemente, a qualidade desses limites pode ser melhorada por meio do aprimoramento dos índices de efetividade das estimativas de erro globais baseadas em energia. Espera-se que esse trabalho tenha sido uma contribuição também para esse segmento.

5.2 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Examinando, primeiramente os resultados provenientes das análises do Koyna dam, é possível perceber que, de modo geral, os valores dos índices de efetividade globais se mantiveram no intervalo entre $0,82 \leq \theta \leq 1,24$. A mudança abrupta nas condições de contorno (Dirichlet-Neuman) foi mais sentida pelos índices locais do que a existência de uma leve singularidade na geometria da peça. Todavia, bastou modificar o espaço no qual as soluções eram calculadas e, claro, o espaço da projeção do erro (de $p+1$ para $p+2$) para que os desempenhos fossem retomados, em ambas as estimativas.

No caso da viga parede, o valor do dano máximo, na malha de referência, chegou a 0,672 sem que isso provocasse qualquer tipo de instabilidade numérica, o que possibilitou dispensar o uso da técnica de regularização e efetuar as análises com

$R_{nl}=0,0$. De modo geral, os índices globais apresentaram valores muito satisfatórios perdendo um pouco do desempenho apenas nas regiões (elementos e nuvens) onde houve uma manifestação substancial do dano. A exemplo do ocorreu no caso linear, as mudanças nos espaços (para o cálculo das soluções e projeção do erro) foram suficientes para a recuperação da qualidade dos índices de efetividade, em ambas as estimativas.

Na análise da chapa com entalhe, a manifestação do fenômeno de localização patológica do dano fez com que a estrutura exibisse um comportamento perfeitamente frágil. Esse fato propiciou o surgimento do que seria uma trinca macroscópica, comprometeu a qualidade da solução de referência e inviabilizou capturar a distribuição do dano nas malhas grosseiras, porque as análises foram precocemente interrompidas. A adoção da abordagem não local ($R_{nl}= 3,0$ cm) se mostrou incapaz de regularizar o problema e de assegurar a convergência da solução, porém foi fundamental para aumentar um pouco o alcance de análise. Apesar da grande instabilidade numérica enfrentada, de modo geral, ambos os estimadores mantiveram um padrão de comportamento semelhante ao apresentado nas análises do *Koyna dam* e da *Viga parede*. É inegável, porém, que os índices (globais e locais) foram afetados, já que os valores exibidos são bastante atípicos. Em particular, as estimativas de limite inferior parecem severamente impactadas.

Em todos os exemplos avaliados, o estimador SRM exibiu índices (globais e locais) mais conservadores, isto é, um pouco acima da unidade, se comparados aos índices do estimador EERM. Sem dúvida, esse comportamento é altamente desejável por ser mais útil em aplicações práticas. Porém, não se pode perder de vista o fato de que no caso do EERM, a qualidade dos índices de efetividade é totalmente dependente da estratégia de equilíbrio utilizada. Não é possível afirmar que a estratégia adotada em Barros (2002) e utilizada aqui seja, justamente, a que é capaz de produzir os limites mais precisos para esse estimador. De fato, a escolha foi motivada por caráter técnico apenas, já que ela é a que melhor se adequa à forma hierárquica como as funções de forma do MEFG são construídas. Adicionalmente, os resultados obtidos em todos os exemplos numéricos tornaram evidente que a necessidade de pós-processar as estimativas, para obtenção de índices vinculados às nuvens, compromete a qualidade das mesmas severamente, principalmente nas regiões mais críticas (mudança abrupta de condição de contorno, geometria complexa e na presença de dano). Por esse motivo, essa estimativa não seria a mais

adequada para condução de um procedimento adaptativo com o MEF. Importa mencionar, no entanto, que, no contexto do MEF, mesmo com as dificuldades oriundas da necessidade de se obter fluxos equilibrados, ainda assim o EERM é a ferramenta preferida para avaliação do erro. Uma das queixas frequentes diz respeito ao fato de que no SRM um mesmo elemento é processado várias vezes e isso eleva os custos computacionais.

Como sugestões para trabalhos futuros, num primeiro momento, seria interessante avaliar novamente o comportamento, de ambos os estimadores, fazendo uso de outros modelos constitutivos. O modelo de Mazars foi escolhido por ser mais simples e apresentar poucos parâmetros a serem controlados. No entanto, ficou evidente, durante a resolução dos exemplos, que o mesmo tem a capacidade de potencializar, consideravelmente, a danificação do material.

De qualquer modo, sem o comprimento característico os modelos de dano são capazes de descrever, de maneira razoável, apenas as situações onde o dano tende a permanecer distribuído. Nas situações onde ele tende a localizar, a qualidade das estimativas de erro e, conseqüentemente, do procedimento adaptativo podem ser severamente comprometidos, haja vista que as questões discutidas no item 5.0 tem impacto significativo nesses casos e permanecem, até o momento, sem solução.

Para a continuidade do trabalho desenvolvido aqui, seria interessante a implementação da técnica de transferência de variáveis proposta em Barros (2002), o que possibilitaria a utilização do SRM em um contexto essencialmente adaptativo, como já mencionado. Algumas informações adicionais sobre transferência de variáveis podem ser vistas no Apêndice 3.

A obtenção de quantidades locais, por meio da extensão do SRM à abordagem Orientada ao Objetivo para a resolução de problemas não lineares, representa, também, um campo de pesquisa ainda pouco explorado. Para essa situação, possivelmente seria necessário implementar o pós-processamento das estimativas de limite inferior, como apresentado em Paréz (2006), haja visto que ambas as estimativas devem ser confiáveis nesse caso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ainsworth, M.; Demkovicz, L; Kim, C-W; Analysis of the equilibrated residual method for a posteriori error estimation on meshes with hanging nodes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196: 3493–3507, 2007.
- Ainsworth, M.; Oden, J. T.; A posteriori error estimation in finite element analysis, New York, John Wiley and Sons, Inc., 2000.
- Ainsworth, M.; Oden, J. T.; A posteriori error estimation in finite element analysis. *Comput. Methods in Appl. Mech. And Engrg.* 142: 1-88, 1997.
- Almeida, J. P. M; Pereira, O.J.B. A; Upper bounds of the error in local quantities using equilibrated and compatible finite element solutions for linear elastic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195:279–296, 2006.
- Askes, H.; Rodríguez-Ferran, A. A combined rh-adaptive scheme based on domain subdivision. Formulation and linear examples. *Int. J. Numer. Meth. Engrg;* 51:253-273, 2001.
- Babuska, I., Oden, J. T.; Verification and validation in computational engineering and science: basic concepts. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 193: 4057–4066, 2004.
- Babuska, I. and Rheinboldt, W. C.; A posteriori error estimates of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 12: 1597-1615, 1978.
- Babuska, I.; Suri, M. The p- and h-p versions of the Finite Element Method, an overview. *Comput. Methods in Appl. Mech. And Engrg,* 80: 5-26, 1990.
- Babuska, I., Banerjee, U., Osborn, J. E.; Survey of meshless and generalized finite element methods: A unified approach. *Acta Numérica,* DOI: 10.1017/S096249902000090, 1-125, 2003.
- Bank, R. E.; Weiser, A.; Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation,* Vol. 44, Number 170, 283-301, 1985.
- Barros, F. B.; Proença, S. P. B., 2000, Aplicação de métodos sem malha na integração das equações da associação contínua entre paredes e pórtico, Technical report, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Estruturas. Relatório, 2000.
- Barros, F. B. Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 2002.
- Barros, F. B.; Proença, S. P. B.; Barcellos, C. S. Generalized finite element

- method in structural nonlinear analysis – a p-adaptative strategy. *Computational Mechanics*, 33: 95-107, 2004.
- Barros, J. A. O.; Modelos de Fendilhação para o Betão. 119uperconve em: repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/13037/3/3.pdf, 1996.
- Barros, F. B.; Barcellos, C. S; C.; Duarte; Torres, D. A. F.; Subdomain-based error techniques for generalized finite element approximations of problems with singular stress fields. *Comp. Mechanics*, DOI 10.1007/s00466-013-0883-2, 2013.
- Bathe, K. J. Finite Element Procedures, Prentice Hall Inc., 1^a ed. New Jersey, 1996.
- Belytschko, T.; Gracie, R; Ventura, G; A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17: 1-24, doi:10.1088/0965-0393/17/4/043001, 2009.
- Belytschko, T.; Lu, Y.Y. and Gu, L. Element-free Galerkin methods. *Int. Journal for Numerical Methods in Engrg.*, 37: 229-256, 1994.
- Beneditti, A.; Miranda, S. and Ubertini, F.; A posteriori error estimation based on the superconvergente Recovery by Compatibility in Patches. *Int. J. Numer. Meth. Engng*; 67:108–131, 2006.
- Bobinsk, J.; Tejchman, J.; Modelling of Concrete Behaviour with a Non-Local Continuum Damage Approach. *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, Vol. 52, No. 3, pp. 243–263, 2005.
- Bordas, S.P.A.; Duflo, M.; Derivative recovery and a posteriori error estimate for extended finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; 196(35-36):3381-3399, 2007.
- Borroomand, B.; Ghaffarian, M. and Zienkiewicz, O. C.; On application of two superconvergent recovery procedures to plate problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng* ; 61:1644–1673, 2004.
- Borst, R.; Pamin, J.; Geers, M. G. D.; On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis. *Eur. J. Mech. A/solids*, 18: 939-962, 1999.
- Borst, R.; Remmers, J.J.C., Needleman, A.; Abellan, M-A.; Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap. *International Journal for Numerical and Analytical methods in Geomechanics*; 28:583-607, 2004.
- Brebbia, C. A., Telles J.C.F. Wrobel, L.C.; *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag, 1984.
- Cai, Z. and Zhang, S.; Flux recovery and a posteriori error estimators: conforming elements for scalar elliptic equations. *Siam J. Numer. Anal.* Vol. 48, 2: 578–

602, 2010.

Carstensen, C.; Funken, S. A.; Fully reliable localized error control in the FEM, *SIAM J. Sci. Comput.* 21:(4) 1465–1484 (electronic), 1999/2000.

Chaillou, A. L.; Suri, M. Computable error estimators for the approximation of nonlinear problems by linearized models. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196: 210–224, 2006.

Chaouche, B. C.; Almansba, M.; Ferrah, D.; Hannachi, N. E.; Theoretical and computational aspects of nonlocal damage coupling with elastic behaviour; *U.P.B. Sci., Series D*, Vol. 75, Iss. 1, 2013.

Comi, C.; Perego, U.; Criteria for mesh refinement in nonlocal damage finite element analyses. *European Journal of Mechanics A/Solids* 23: 615–632, 2004.

Cook, R.D. *Concepts and applications of finite element analysis*. 3 ed. New York John Wiley & Sons Inc, 2001.

Daghia, F., Miranda, S.; Ubertini, F. Patch based recovery in finite element elastoplastic analysis. *Computational Mechanics*, DOI 10.1007/s00466-013-0847-6, Springer, 2013.

Díez, P.; Parés, N.; Huerta, A.; Error Estimation and Quality Control. *Encyclopedia of Aerospace Engineering*. Edited by Richard Blockley and Wei Shyy, John Wiley & Sons, Ltd., 2010.

Díez, P.; Ródenas, J. J., Zienkiewicz, O. C.; Equilibrated patch recovery error estimates: simple and accurate upper bounds of the error. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69: 2075-2098, 2007.

Díez, P.; Parés, N.; Huerta, A.; Recovery lower bounds of the error by postprocessing implicit residual a posteriori error estimates. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(10): 1465-1488, 2003.

Djokovic, J.M.; Nikolic, R. R.; Bujanak, J.; Fundamental problems of modeling the fracture process in concrete I: micromechanics and localization of damages. *Procedia Engineering* 65:186-195, 2013.

Duarte, C. A and Oden, J. T.; H-p clouds – Na h-p meshless method., *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 12: 673-705, 1996.

Duarte, C.A.; Kim, D. J. Analysis and application of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197: 487-504, 2008.

Duarte, C.A.; Babuska, I.; Oden, J.; Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers & Structures*, 77(2):215–232, 2000.

- Duflot, M.; Bordas S.; A posteriori error estimation for extended finite elements by an extended global recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 76(8):1123–1138, 2008.
- Duflot, M.; Bordas S.; A posteriori error estimation and adaptivity for XFEM in 3D linear elastic fracture mechanics: from theory to industrial applications. Disponível online in <http://www.academia.edu/> since 09/01/2014
- Fish, J. The s-version of the finite element method. *Computes & Structures*, 43, n.3: 539-547, 1992.
- Formaggia, L., Perotto, S.; Anisotropic error estimates for elliptic problems, *Numer. Math.* 94: 67–92, 2003.
- Fries, T. P., Belytschko, T.; The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. *Int. Journal for Numerical Methods in Engrg.* 84: 253-304, 2010.
- Gallimard, L.; A constitutive relation error estimator based on traction-free recovery of the equilibrated stress. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 78:460–482, 2009.
- Gerasimov, T., Rüter, M., Stein E.; An explicit residual-type error estimator for Q1-quadrilateral extended finite element method in two-dimensional linear elastic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 90:1118-1155, 2012.
- González-Estrada, O. A.; Ródenas, J.J.; Bordas, S.P.A.; Nadal, E.; Kerfriden, P.; Fuenmayor, F.J.; Locally equilibrated stress recovery for goal oriented error estimation in the extended finite element method, arXiv:1308.1941v2 [math.NA] 19, 2013.
- Grassl, P.; Jirásek, M.; Plastic model with non-local damage applied to concrete. *Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 30:71-90, 2006.
- Grätstch, T.; Bathe, K. J.; A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Computer and Structures*, 83: 235-265, 2005.
- Guello, G. A.; Simulação Computacional de Estruturas de concreto por meio da mecânica do dano. Tese de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2002.
- Gupta, V. Convergence analysis of the Generalized Finite Element Method with global-local enrichments. Master Thesis, Urbana-Champaign, University of Illinois, 2010.
- Gupta, V.; Duarte, C. A., Babuska, I.; Banerjee, U.; Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,

Vol. 289: 355-386, 2015.

Hernández, A., Pinto, Ch., Amezua E., Fernandez H.; Analysis of the components of discretization error in non-linear structural problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 39: 835-864, 2003.

Hild, P., Lleras, V., Renard, Y.; A residual error estimator for the XFEM approximation of the elasticity problem, submitted. See <http://math.univ-lyon1.fr/~renard/homepage/publis.html>, 2009a.

Hild, P., Lleras, V., Renard, Y.; A posteriori error analysis for Poisson's equation approximated by XFEM, *Esaim Proceedings*, Vol. 27:107-121, 2009b.

Holst, M., Owall, J. S., Szypowski, R.; An efficient, reliable and robust error estimator for elliptic problems in R^3 . *Applied Numerical Mathematics* 61: 675–695, 2011.

Hoover, C. G.; Bazant, Z. P.; Cohesive crack, size effect, crack band and work-of-fracture models compared to comprehensive concrete fracture tests. *Int. J. Fracture*, 187:133-143, 2014.

Huerta, A.; Rodriguez-Ferran; A. Díez; P. and Sarrate, J.; Error estimation and adaptivity for nonlinear FE analysis. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 46: 1803-1818, 1999.

Huerta, A.; A. Díez; Rodriguez-Ferran, Pijaudier-Cabot, G.; Error estimation and adaptative finite element analysis of softening solids. *Advances in Adaptative Computational Methods in Mechanics*. Elsevier Science Ltd., 1998.

Huerta, A.; Rodriguez-Ferran, A. Díez, P. Error estimation and adaptivity for nonlinear FE analysis. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 12: 59-70, 2002.

Jirásek, M.; Objective modeling of strain localization; *Revue Française de Génie Civil*. Volume 6 – n° 6, 1119 - 1132, 2002.

Jirásek, M.; Non-local damage mechanics with application to concrete; *Revue Française de Génie Civil*. Volume 6 – n° 8, 683 - 707, 2004.

Kang, W. T.; Bittencourt, T. N.; Identificação de Processos de Fraturamento no Concreto Estrutural. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, *Boletim Técnico, BT/PEF-9801, ISSN 0103-9822*, 1998.

Kim, D. J; Duarte, C.A. and Pereira, J.P.; Analysis of interacting cracks using the Generalized Finite Element Method with global-local enrichment functions, Department of Civil and Environmental Engr., University of Illinois , Urbana-Champaign, 2008.

Kim, D. J; Duarte, C.A. and Proença, S.P.; Generalized Finite Element Method with global-local enrichments for nonlinear fracture analysis, *Mechanics of Solids in Brazil*, H.S. da Costa Mattos & Marcílio Alves (Editors) Brazilian

- Society of Mechanical Sciences and Engineering, ISBN 978-85-85769-43-7, 2009.
- Kim, D. J; Pereira, J.P. and Duarte, C.A; Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized FEM meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81: 335-365, 2010.
- Lackner, R. and Mang, H. A. A posteriori error estimation in non-linear FEM analysis of shell structures. *Int. Journal for Numerical Methods in Engrg.* 53: 2329-2355, 2002.
- Ladevèze, P.; Maunder, E.A.W. A general method for recovering equilibrating element tractions. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, 137: 111-151, 1996.
- Ladevèze, P.; Constitutive relation errors for F.E. analysis considering (visco-) plasticity and damage. *Int. J. Numer. Meth. Engng*; 52:527–542, 2001.
- Ladevèze, P.; Moës, N.; A posteriori constitutive relation error estimators for nonlinear finite element analysis and adaptative control. *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*; 231-256, 1998.
- Ladevèze, P.; Rougeot, Ph.; New advances on a posteriori error on constitutive relation in f.e. analysis. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, 150:239-249, 1997.
- Lemaitre, J. Desmorat, R.; Engineering Damage Mechanics – Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures. Springer, Berlim, 2005.
- Lemaitre, J., Chaboche, J.L.; *Mechanics of solid materials* [S.1.] Cambridge University Press, 1990.
- Li, H. A note on the conditioning of a class of generalized finite element methods. *Applied Numerical Mathematics*, doi: 10.1016/j.apnum.2011.05.004, 2011.
- Lin, Z.; Zhuang, Z.; You, X. Wang, H.; Xu, D.; Enriched goal-oriented error estimation applied to fracture mechanics problems solved by XFEM**. *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 25, No. 4, 2012.
- Lins, R. M.; Estimador de erro a posteriori baseado em recuperação do gradiente para o Método dos Elementos Finitos Generalizados. Tese de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 2011.
- Lins, R. M.; Ferreria, M. D. C.; Proença, S. P. B.; Duarte, C. A.; An a posteriori error estimator for linear elastic fracture mechanics using the stable generalized/extended finite element method. *Computer Mechanics*, DOI 10.1007/s00466-015-1212-8, 2015.
- Liu, W.K., Jun, S., LI, S., Adee, J. and Belytschko, T. Reproducing Kernel

- particles methods for structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8: 1655-1679, 1995.
- Machiels, L.; Maday, Y. ; Patera, A. T. ; A “flux-free” nodal Neumann subproblem approach to output bounds for partial differential equations, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 330 (3):249–254, 2000.
- Mao, K. M.; Sun, C. T. A refined global-local finite element analysis method. *Int. Journal for Numerical Methods in Engrg.*, Vol 32, 1:29-43, 1991.
- Mazars, J.; Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure. Tese de Doutorado, Université Paris, Paris, 1984.
- Mazars, J.; Cabot, G. From damage to fracture mechanics and conversely: a combined approach. *Int. Journal Solids Structures*, 33: 3327-3342, 1996.
- Mazars, J.; Hamon, F.; A new 3D damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings. *Materials and Structures*, DOI 10.167/s11527-014-0439-8, 2014.
- Melenk, J.M, Babuska, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, 139: 289-314, 1996.
- Moës, N.; Béchet, E.; Tourbier, E.; Imposing Dirichlet boundary conditions in the Extended Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 67:1641–1669, 2006.
- Monaghan, J.J. Why particle methods work. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 3: 422-433, 1982.
- Morin, P.; Nochetto, R. H.; Siebert, K. G.; Local problems on stars: a posteriori error estimators, convergence, and performance, *Math. Comp.*, 72 (243):1067–1097, 2003.
- Mousavi, S. E.; Sukumar, N. Generalized Gaussian quadrature rules for discontinuities and crack singularities in the extended finite element method. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199: 3237-3249, 2010.
- Nguyen, V. P., Rabczuk, T., Bordas, S., Duflot, M.; Meshless methods: A review and computer implementation aspects. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79: 763-813, 2008.
- Noor, A. K.; Global-local Methodologies and their application to nonlinear analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2: 333-346, 1986.
- Oden, J. T.; Prudhomme, S.; Goal-oriented error estimation and Adaptivity for the Finite Element Method. *Computers and Mathematics with Application*, 41:735-736, 2001.

- Pamin, J.; Computational modelling of localized deformations with regularized continuum models. *Mechanics and Control*, Vol. 30 (1):27-33, 2011.
- Panadier, J., Ladevèze, P.; Strict bounds for computed stress intensity factors. *Computers and Structures*, 87 (15-16):1015-1021, 2009.
- Panadier, J., Ladevèze, P. and Chamoin L.; Strict and effective bounds in goal-oriented error estimation applied to fractures mechanics problems solved with XFEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81:671-700, 2010.
- Pannachet, T., Díez, P., Askes, H., Sluys, L. J.; Error assessment and mesh adaptivity for regularized continuous failure models. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199:961–978, 2010.
- Pastor, M. Peraire, J., Zienkiewicz, O. C., “Adaptive remeshing for shear band localization problems. *Archive of Applied Mechanics*, 61:30-39, 1992.
- Parés, N., Díez, P., Huerta, A. Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195:297–323, 2006.
- Patzák, B.; Jirásek, M.; Adaptive Resolution of Localized Damage in Quasi-brittle Materials. *Journal of Eng. Mech.* 130:720-732, 2004.
- Peerlings, R.H.J.; Borst, Brekelmans, Vree, J.H.P; Spee, I.; Some observation on localization in non-local and gradient damage models. *European Journal of Mechanics A/Solids* 15 (6):937–953, 1996.
- Peerlings, R.H.J.; Borst, Brekelmans, R. W.A.M.; Geers, M.G.D. Localisation issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. *European Journal of Mechanics A/Solids* 21:175–189, 2002.
- Pervaiz Fathima, K. M.; Chandra Kishen, J. M.; A thermodynamic correlation between damage and fracture as applied to concrete fatigue; *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 146, pp. 1-20, 2015.
- Pijaudier-Cabot, G.; Grégoire, D.; A review of nonlocal continuum damage: modeling of failure? *Networks and Heterogeneous Media. American Institute of Mathematical Sciences*, Vol. 9, Number 4, pp. 575–597, 2014. doi:10.3934/nhm.2014.9.575.
- Pijaudier-Cabot, G.; Bodé, L.; Huerta, A. Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element analysis of strain localization in transient problems” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:417-4191.
- Pituba, J.J.C; Proença, S.P.B.; Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na Mecânica do Dano Contínuo. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, 7 (23): 33-60, 2005.

- Pituba, J.J.C; Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na Mecânica do Dano Contínuo. Tese de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1998.
- Prudhome, S.; Oden, J. T.; On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, 176: 313-331, 1999.
- Prudhome, S.; Oden, J. T.; Goal-oriented error estimation and adaptivity for the Finite Element Method. *Computers and Mathematics with Applications*, 41: 735-756, 2001.
- Prudhomme, S.; Nobile, F.; Chamoin, L.; Oden, J.T.; Analysis of a subdomain-based error estimator for finite element approximations of elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 20(2):165–192, 2004.
- Repin, S. I., Valdman, J.; Functional a posteriori error estimates for a incremental models in elasto-plasticity. *Central European Journal of Mathematics*, 7(3), 506-519, 2009 DOI: 10.2478/s11533-009-0035-2.
- Ródenas J.J., Fuenmayor F. J., Roda, A., Pedrosa A. Modification of the SPR technique to ensure the fulfillment of imposed tractions in boundary nodes. *Adaptive Modeling and Simulation*, Wiberg NE, Díez P (eds). 2003.
- Ródenas, J.J., Fuenmayor, F.J. and Vercher, A.; Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: The SPR-C technique. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*; 70: 705–727, 2007.
- Ródenas J. J., Gonzalez-Estrada O. A. , Tarancon J. E., Fuenmayor F. J. A recovery type error estimator for the extended finite element method based on singular+smooth stress field splitting. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 76(4): 545-571, doi:10.1002/nme.2313, 2008.
- Ródenas, J.J., Gonzáles-Estrada, O. A., Díez, P., Fuenmayor, F.J.; Accurate recovery-based upper error bounds for the extended finite element framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, 2607-2621, 2010.
- Ródenas, J.J., Gonzáles-Estrada, O. A., Díez, P., Fuenmayor, F.J.; Enhanced error estimator based on a nearly equilibrated moving least squares recovery technique for FEM and XFEM, *Computational Mechanics*, DOI 10.1007/s00466-012-0814-7, Springer, 2012.
- Rodríguez-Ferran, A.; Morata, I.; Huerta, A.; Efficient and reliable nonlocal damage models. *Advanced Mathematical and Computational Geomechanics*, 13: 239-268, 2003.
- Rüter M, Stein E. Goal oriented a posteriori error estimates in linear elastic fracture mechanics. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg*; 195:251–78, 2006.

- Shah, S. P.; Swartz, S. E., Oyang, C.; Fracture Mechanics of Concrete: Applications of fracture Mechanics to concrete, rock, and other quasi-brittle materials. *John Wiley and Sons, Inc.*, 1995.
- Simone, A.; Askes, H.; Sluys, L. J.; Incorrect initiation and propagation of failure in non-local and gradient-enhanced media. *International Journal of Solids and Structures*, 41:351-363, 2004.
- Stein, E.; Gerasimov, T. and Rüter, M.; Explicit and implicit residual-type goal-oriented error estimators for XFEM in LEFM. V International Conference on Adaptive Modeling and Simulation, ADMOS, 2011.
- Stewart, J.; Hughes, T. J. R. Explicit residual-based a posteriori error estimation for finite element discretizations of the Helmholtz equation: Computation of the constant and new measures of error estimator quality. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 131: 335-363, 1996.
- Strouboulis, T., Babuska, I., Copps, K. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 181:43-69, 2000a.
- Strouboulis, T.; Coops, K. and Babuska, I. The generalized finite element method: na example of its implementation and illustration of its performance. *Int. Journal for Numerical Methods in Engrg.*, 47:1401-1417, 2000b.
- Strouboulis, T.; Zhang, L., Babuska, I.; A posteriori error estimation for generalized finite element methods. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195: 852-879, 2006.
- Szabó, B; Babuska, I. Finite Element Method [S.1]; John Wiley and Sons, Inc., 1991.
- Szabó, B.; Düster, A. and RANK, E. Encyclopedia of Computational Mechanics, Vol. 1, chapter 5, New York, John Wiley and Sons Inc., 2004.
- Tadano, Y. Three-dimensional generalized element with quadratic deformation mode geometrically nonlinear analysis. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 10, doi:10.1088/1757-899X/10/1/0122246, 2010.
- Tadano, Y. and Noguchi, H. Geometrically Nonlinear Analysis using 2-dimensional Generalized Finite Element Enriched by the quadratic deformation mode, *Journal of Computational Science and Technology*, Vol.4, 1: 11-23, 2010.
- Tetambe, R. P.; Yunus, S. M.; Rajakumar, C.; Saigal, S.; Examination of flux projection-type error estimators in nonlinear finite element analysis. *Computers and Structures*, 54(4), 641-653, 1995.
- Torres, I. F. R.; Desenvolvimento e aplicação do Método dos Elementos Finitos

- Generalizados em análise tridimensional não linear de sólidos. *Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos-USP*, 2003.
- Torres, D. A. F.; Barcellos, C.; Comparative Analysis of Ck- and C0-GFEM applied to two-dimensional problems of confined plasticity. *Latin American Journal of Solids and Structures*, DOI: 10.1590/1679-78251262, 2015.
- Ubertini, F. Patch recovery based on complementary energy. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* ; 59:1501–1538, 2004.
- Verfürth, R. A review of a posteriori error estimation and adaptative mesh-refinement techniques. Technical Report, Fakultät für Mathematic, Ruhr-Universität Bochum, Germany, 1997.
- Volock, K. Y.; Characteristic length of damage localization (Letter) – *Mechanics Research Communications*; 51: 29-31, 2013.
- You, W., Liang, H. and Xing-Hua, W.; Large deformation analysis of pile foundation using meshless method. The 14th World Conference on Earthquake Engineering, October 12-17, Beijing, China, 2008.
- Wang, T.K.; Bittencourt, T.N.; “Identificação de Processos de Fraturamento no Concreto Estrutural”, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Boletim Técnico, BT/PEF-9801, ISSN 0103-9822, 1998.
- Wells, G. N., Sluys, L. J. and Borst, R.; Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularized strain-softening medium. *Int. Journal for Numerical Meth. Engng.*, 53: 1235-1256, 2002.
- Wiberg, N. E. and Abdulwahab, F.; Error estimation with postprocessed finite element solution, *Computers and Structures*, Vol. 64, nº 1-4, 113-137, 1997.
- Zhang, Z. and Naga, A.; Validation of the a posteriori error estimator based on polynomial preserving recovery for linear elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng*; 61:1860–1893, 2004.
- Zienkiewicz OC, Zhu JZ. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 24:337–357, 1987.
- Zienkiewicz OC, Zhu JZ. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates, Part: 1. The recovery technique *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 33: 1331–1364, 1992.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu, J. Z. *The Finite Element Method – Its Basis & Fundamentals*. Elsevier, 2010.
- Zhu, J. Z.; Posteriori error estimation - the relation between different procedures. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 150, 411-422, 1997.

APÊNDICE 1

A1. ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

É sabido que em condições ideais de discretização, a solução de elemento finito deve convergir à solução analítica (exata) das equações diferenciais que estabelecem a resposta do modelo matemático.

A estimação e o controle dos erros são baseados em extensões, ou seja, em mudanças sistemáticas de discretização para que o número de graus de liberdade seja aumentado em cada mudança (Cook, 2001).

Atenção especial deve ser dada ao desempenho dessas extensões porque existem muitas diferenças substanciais entre as mesmas (Szabó e Babuska, 1991).

A energia de deformação do erro é uma medida lógica da qualidade global da solução de elemento finito porque a última minimiza a primeira, o que pode ser definido como (Szabó e Babuska, 1991):

$$\|\mathbf{u}_{EX} - \mathbf{u}_{EF}\|_U = \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{S}} \|\mathbf{u}_{EX} - \mathbf{u}\|_U \quad (\text{A1.1})$$

O erro na norma de energia, Eq. (A1.1), depende da escolha do espaço \mathcal{S} de soluções aproximadas, que por sua vez depende da suavidade da solução \mathbf{u}_{EX} , dos objetivos do cálculo e do nível de precisão desejado (Szabó e Babuska, 1991).

Quanto menos suave for a solução exata, maiores serão os benefícios obtidos com o uso dos procedimentos adaptativos porque a convergência se torna independente do parâmetro de suavidade. Sem dúvida, eles aumentam o volume de cálculo, mas os benefícios obtidos, por uma taxa de convergência mais rápida, são decisivos.

Estimativas *a priori*:

Uma estimativa *a priori* para aproximações partição da unidade e, em particular para o Método dos Elementos Finitos Generalizados foi provada por Melenk e

Babuska (1996). A estimativa diz que se a partição da unidade $\{N_j\}_{j=1}^N$ satisfizer alguns requisitos leves e se o erro das aproximações locais $\tilde{\mathbf{u}}_j$ estiver limitado por:

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_j\|_{U(\omega_j)} < \varepsilon(j, \mathbf{u}) \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{A1.2})$$

onde $\tilde{\mathbf{u}}_j$ denota a **aproximação local**, como apresentado na Eq. (6), então, o erro da aproximação partição da unidade fica limitado por:

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{U(\Omega)} < C \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon^2(j, \mathbf{u}) \right)^{1/2} \quad (\text{A1.3})$$

onde $\|\cdot\|_U$ denota a norma de energia e C é uma constante. Para mais detalhes e provas podem ser encontrados no referido artigo.

Se as funções de enriquecimento puderem aproximar localmente bem a função \mathbf{u} sobre a nuvem ω_j , $j = 1, \dots, N$, a estimativa da Eq. (A1.3) mostra que a **aproximação global** $\tilde{\mathbf{u}}$ é capaz de aproximar bem a função \mathbf{u} sobre o domínio global (Ω) . A taxa de convergência de $\tilde{\mathbf{u}}$ será controlada pela taxa de convergência das aproximações locais $\tilde{\mathbf{u}}_j$ (Duarte e Kim, 2008).

APÊNDICE 2

A2. PROCEDIMENTO NUMÉRICO PARA OBTENÇÃO DO ERRO DE REFERÊNCIA

Em vista da inexistência de soluções analíticas para os problemas abordados nesse trabalho, foram adotadas, em substituição, soluções numéricas (“*Over Kill*”) obtidas com o auxílio do *software* comercial ANSYS®, na validação dos estimadores.

O procedimento de validação, em questão, é implementado em etapas, que envolvem uma permuta de informações entre arquivos dos programas em linguagem Fortran 95, GiD® e ANSYS®, como será descrito de forma sucinta, a seguir.

1ª Etapa

Optou-se aqui pela utilização do *software* GiD® para a discretização do modelo matemático e criação de uma malha com poucos elementos, que será utilizada na análise do MEFM e no cálculo dos índices de efetividade dos estimadores com o auxílio de programa em Fortran 95.

A malha 2x4 (do exemplo numérico 4.6.1) com 15 nós, 8 elementos e 16x16 pontos de Gauss, Figura 1, será utilizada aqui para ilustrar o procedimento completo.



Figura 1 – (a) Malha inicial que origina

2ª Etapa

As coordenadas dos nós e a incidência dos elementos da malha, na Figura 1, são transportados para o *software* ANSYS®. Antes do refinamento, é utilizado um comando que atribui o *status* de área a cada um dos elementos na malha grosseira, Figura 2. A quantidade de áreas que será criada é, portanto, função da quantidade de

elementos presentes na malha inicial e, obviamente, varia conforme o grau de complexidade do problema.

A1	A2	A3	A4
A4	A5	A6	A7

Figura 2 – Criação de áreas a partir da malha MEFG.

Na sequência a malha grosseira é refinada para dar origem à malha que será utilizada no cálculo do erro de referência. A malha resultante, para esse caso, possui 8385 nós, 8192 elementos e faz uso de 2x2 pontos de Gauss, Figura 3.



Figura 3 – Malha de referência

Ao final dessa etapa e com o auxílio de um script escrito em linguagem APDL (*Ansys Parametric Design Language*), cujas instruções determinam a geração de um novo arquivo to formato ASCII, é possível saber a quantidade exata de elementos que foram criados (em cada uma das áreas) e a identificação dos elementos vinculados a essas entidades geométricas.

A1	A2	A3	A4
A5	A6	A7	A8

Elem.: 1024 1 ao 1024	Elem.: 1024 1025 ao 2048	Elem.: 1024 2049 ao 3072	Elem.: 1024 3073 ao 4096
Elem.:1024 4097 ao 5020	Elem.: 1024 5021 ao 6144	Elem.: 1024 6145 ao 7168	Elem.: 1024 7169 ao 8192

Figura 4 – Sobreposição da malha grosseira e refinada: quantidade de elementos distribuídos nas áreas e sua identificação.

3ª Etapa

Nessa etapa, é utilizado um código em linguagem Fortran 95 responsável por efetuar o mapeamento inverso dos pontos de Gauss, por meio do cruzamento dos dados provenientes dos arquivos contendo informações das malhas grosseira e refinada com o arquivo ASCII obtido na etapa anterior, Figura 5.

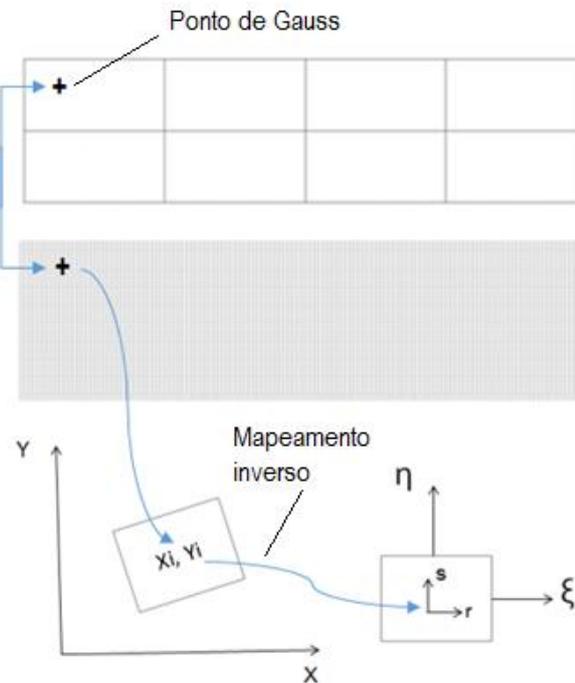


Figura 5 – Mapeamento das posições de cada um dos pontos de Gauss utilizados na malha grosseira e parametrização das coordenadas.

Chega-se, dessa forma, às tensões e deformações em cada um dos pontos. Para o caso não linear, são utilizadas as tensões e deformações presentes no final de cada passo.

4ª Etapa

Os resultados encontrados na etapa anterior são utilizados na Eq. (A2.1), para obtenção de uma medida de erro energia para a solução calculada.

$$U(\mathbf{e}) \int_{\Omega} [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_r) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{MEFG})] \mathbf{C} (1 - D) [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_r) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{MEFG})] d\Omega \quad (\text{A2.1})$$

APÊNDICE 3

A.3 O MODELO DE DANO ISOTRÓPICO DE MAZARS (1984)

Esse modelo apresenta como vantagem sua simplicidade e um número relativamente pequeno de parâmetros a identificar quando comparado aos demais modelos empregados para o concreto (Barros, 2002). Vale para situações de carregamento aplicado continuamente crescente e tem por hipóteses fundamentais (Pituba e Proença, 2005):

1. Localmente, o dano decorre de deformações de alongamento evidenciadas por sinais positivos, ao menos um deles, das componentes de deformação principal ($\varepsilon_i > 0$);
2. O dano é representado por uma variável escalar D , sendo $0 \leq D \leq 1$, cuja evolução ocorre quando um valor de referência para o 'alongamento equivalente' é superado;
3. O concreto com dano comporta-se como meio elástico. Portanto, deformações permanentes, evidenciadas experimentalmente, são desprezadas.

A deformação equivalente é dada por:

$$\tilde{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \varepsilon_i \rangle_+)^2} \quad (A3.1)$$

com $\langle x \rangle_+ = \frac{|x| + x}{2}$, sendo $\varepsilon_{(i)}$ as deformações principais, dadas por:

$$\varepsilon_{(i)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{(3)} \end{bmatrix} \quad (A3.2)$$

A degradação do meio é obtida por uma combinação de duas variáveis de dano: D_t para dano por tração e D_c para dano por compressão. Logo, tem-se:

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c \quad (A3.3)$$

sendo α_t e α_c funções de peso usadas para contabilizar o comportamento do material ao dano por tração e compressão, respectivamente. Para o estado de tração pura $\alpha_t = 1$, enquanto que para o estado de compressão pura $\alpha_c = 1$, de tal forma que a soma $\alpha_t + \alpha_c = 1$.

é sempre igual a 1. O valor do dano por tração, D_t , e por compressão, D_c , são calculados por:

$$D_{t,c}(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{(1 - A_{t,c})\varepsilon_{d0}}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_{t,c}}{e^{B_{t,c}(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}} \quad (\text{A3.4})$$

onde ε_{d0} é o valor que delimita o limite elástico. Os parâmetros $A_{t,c}$ e $B_{t,c}$, da lei de evolução, são identificados separadamente em ensaios de compressão, em corpos de prova cilíndricos, e de flexão de três pontos.

Mazars propôs as seguintes faixas de variação para os parâmetros do modelo:

$$\begin{aligned} 0,7 \leq A_T \leq 1,2 \quad & \text{e} \quad 10^4 \leq B_T \leq 5.10^4 \\ 1 \leq A_C \leq 1,5 \quad & \text{e} \quad 10^3 \leq B_C \leq 2.10^3 \\ 10^{-5} \leq \varepsilon_{d_0} \leq 10^{-4} \end{aligned} \quad (\text{A3.5})$$

Após desenvolvimento matemático, que pode ser visto em Penna (2010), chega-se ao operador tangente para a matriz de propriedades constitutivas, dado por:

$$\mathbf{C}_{ijkl}^t = (1 - D)\mathbf{C}_{ijkl}^0 - \left[\frac{\partial D(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} \right] \sigma_{ij}^0 \left[\frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \varepsilon_{(i)}}{\partial \varepsilon_{kl}} \langle \varepsilon_{(i)} \rangle \right] \quad (\text{A3.6})$$

onde \mathbf{C}_{ijkl}^0 é o tensor de quarta ordem do material íntegro e σ_{ij}^0 são as componentes do tensor de tensão obtido pela rigidez elástica.

Mais detalhes sobre esse modelo de dano e a influência de cada um dos parâmetros na Eq. (A3.5) podem ser encontrados em Mazars *et al.* (1984) e Pituba (1998).

APÊNDICE 4

A.4 TRANSFERÊNCIA DE VARIÁVEIS

Para problemas envolvendo comportamento não linear, questões relacionadas à transferência (de deslocamentos e de variáveis internas) da malha anterior para a atual (após o procedimento adaptativo) são indispensáveis para a preservação da precisão, da robustez e das propriedades de convergência da solução aproximada. Essa importância torna-se ainda mais evidente quando os problemas envolvem grandes deformações, já que nesses casos o procedimento deve lidar com mudanças frequentes e substanciais da geometria durante todo o processo.

Uma transferência bem-sucedida deve obrigatoriamente respeitar as seguintes condições: (1) Equilíbrio global; (2) Minimização da difusão numérica das variáveis de estado transferidas (por exemplo, a difusão numérica da variável dano que causaria uma expansão da zona danificada após o mapeamento); (3) Preservação das propriedades materiais tempo dependentes como, por exemplo, resistência do material (endurecimento, amolecimento). Ademais, as quantidades transferidas devem satisfazer: (4) Equações constitutivas; (5) Condições de escoamento (para o caso de resposta material do tipo plástica);

Não é necessário nenhum recurso especial para efetuar a transferência de parâmetros nodais no contexto do MEEG. A estratégia de enriquecimento utilizada pelo método introduz novos graus de liberdade ao sistema enquanto mantém os já existiam antes do refinamento polinomial. Portanto, cada nova aproximação necessariamente conterá a anterior (BARROS, 2002).

O mesmo não ocorre com as variáveis associadas aos pontos de integração, pois estes podem ser alterados para manter a qualidade da aproximação durante o processo de refinamento-*e*. Neste caso, diferentes abordagens foram propostas e podem ser divididas em dois grupos (PATZÁK e JIRÁSEK, 2004):

Transferência direta: de ponto de integração para ponto de integração – o valor exigido no ponto de integração da nova malha é obtido por interpolação ou por extrapolação dos valores nos pontos de integração da antiga malha.

Transferência indireta: os valores nos pontos de integração são projetados,

primeiramente para os nós da antiga malha e, em seguida, o valor no novo ponto de integração é obtido a partir da interpolação das quantidades nodais da antiga malha.

Os tipos de variáveis internas a serem transferidas dependem do modelo em questão. Para o modelo de dano isotrópico de Mazars, por exemplo, é suficiente transferir a variável de dano ‘ D ’ ou, alternativamente, a deformação equivalente máxima.

Patzák e Jirásek (2004) testaram três tipos distintos de técnicas para a transferência da variável dano e chegaram à conclusão que nem todas são capazes de preservar as características básicas da zona de processo. Algumas por não fornecerem resultados satisfatórios e outras se mostram computacionalmente caras.

Em um contexto essencialmente adaptativo, as técnicas de transferência permitem que o número de pontos de Gauss aumente, conforme seja necessário, no decorrer da análise. Na ausência delas, o número de pontos de Gauss se manterá constante (desde o início até o fim da análise não linear). Dessa forma, as posições, em que as variáveis relacionadas com o dano são calculadas, permanecem as mesmas ao longo de todo o processo da solução incremental. O preço a se pagar, nessa situação, é de se ter desde o primeiro passo de carga um número maior de pontos de quadratura numérica que é determinado pelo provável grau polinomial que a aproximação deve reproduzir ao final do carregamento.

Uma estratégia de transferência de variáveis para o MEFM foi proposta por Barros (2002). Ela mantém estreita relação com o procedimento empregado para recuperar um campo de tensões “suavizado” apresentado em Zienkiewicz e Zhu (1992) e comentado na seção 2.3.3. O método dos mínimos quadrados é empregado para ajustar uma função a um conjunto de variáveis associadas aos pontos de Gauss. Tal ajuste é realizado, individualmente, para cada nuvem. Consequente, serão geradas em cada elemento tantas funções quanto forem o número de sobreposições das nuvens que contém o referido elemento. Na sequência, a PU é empregada para “costurar” as diversas funções de cada nuvem obtendo-se, em contrapartida, uma descrição única em todo o domínio.

Não foi necessário fazer uso da técnica de transferência sugerida por Barros (2002) porque não se utilizou um procedimento adaptativo. As medidas de erro provenientes dos estimadores EERM e SRM foram utilizadas apenas para fins de comparação de desempenho das duas modalidades e, também, para avaliação da qualidade das soluções numéricas de forma isolada.