

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 354

**PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES DE BASE
RADIAIS APLICADAS À IDENTIFICAÇÃO DE
SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES**

Gladstone Barbosa Alves

DATA DA DEFESA: 05/02/2004

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**PROPRIEDADES DA FUNÇÕES DE BASE
RADIAIS APLICADAS À IDENTIFICAÇÃO
DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO – LINEARES**

Gladstone Barbosa Alves

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica

Orientador: Luis Antonio Aguirre

Belo Horizonte – MG

Fevereiro de 2004

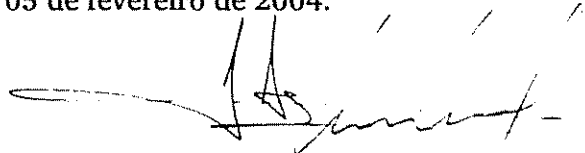
"PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES DE
BASE RADIAIS APLICADAS À
IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS
DINÂMICOS NÃO-LINEARES"

GLADSTONE BARBOSA ALVES

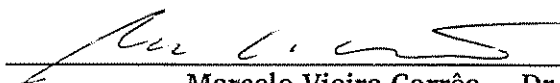
Dissertação de Mestrado submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de *Mestre em Engenharia Elétrica*.

Aprovada em 05 de fevereiro de 2004.

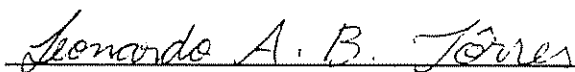
Por:



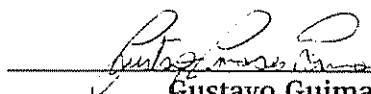
Luis Antonio Aguirre – Dr.
Prof. DELT/EEUFMG – orientador



Marcelo Vieira Corrêa – Dr.
Prof. UNILESTE/MG – co-orientador



Leonardo Antônio Borges Torres – Dr.
Prof. DELT/EEUFMG



Gustavo Guimarães Parma – Dr.
Prof. DELT/EEUFMG



Roselito de Albuquerque Teixeira – Dr.
Prof. UNILESTE/MG

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, pela crença inabalável a me impor responsabilidades

A Deus, por permitir-me alcançar a hora do para si

AGRADECIMENTOS

Ao professor Luis Antonio Aguirre, pela paciência, confiança e estilo de imprimir resolução e resiliência.

Ao professor Marcelo Vieira Corrêa, pelo impulso, pela formação, pelo respeito

Aos colegas do CPDEE, pela companhia e incentivo mútuo no primeiro semestre do programa.

Aos colegas do CPH, pela recepção sem restrições e pela consideração muitas vezes acima do mérito: Viviane, pela preocupação exibida mesmo nos momentos de distanciamento; Edgar, pela referência que nunca imaginei precisar; Hudson e Dair, por suas serenidades de espírito, raras e contagiantes; Mara, por crer-me divertido; aos colegas de antanho, pela difícil tarefa de fundamentar o grupo; companheiros da iniciação científica, pelos meses de companhia na estufa; ao eterno visitante David Alonso, por ofertar-nos o inusitado; aos não-macsinianos, pela diversão; aos vigilantes que por mim passaram, pela companhia em incontáveis e frias noites, muitas vezes de profunda improdutividade.

Ao CNPq, pelo longo financiamento.

A todos aqueles cujas faces recordei por intervalo de tempo curto demais para que meus dedos reagissem, mas que algures ajudaram a aquecer o corpo febril na derradeira noite.

EPÍGRAFE

*Se podes manter tua cabeça quando todos em volta
Estão a perder a deles e a culpar-te por isto;
Se podes confiar em ti quando todos duvidarem,
Mas reconhecer franca também a dívida deles;
Se podes esperar e não te cansares da espera,
Ou, ouvindo mentiras, às mentiras não ceder,
Ou, sendo odiado, ao ódio não te submeter,
E conquanto não ser indiscreto, nem arrogante;*

*Se podes conversar com multidões e manter tua virtude,
Ou andar com reis – e tampouco perder a mundaneidade;
Se nem inimigos nem queridos amigos podem machucar-te;
Se todos homens contam contigo, mas nenhum em excesso;
Se podes preencher o mais implacável minuto
Com sessenta segundos de distância em carreira,
Tua há de ser a Terra e tudo que nela se encontra.
E – o que mais – tu serás um Homem, meu filho.*

Rudyard Kipling – tradução do amigo Calebe Lee

CONTEÚDO

Resumo	xv
Abstract	xvii
Lista de Tabelas	xix
Lista de Figuras	xxiii
Lista de Símbolos	xxv
Lista de Abreviações	xxix
1 Introdução	1
1.1 Histórico	1
1.2 Contribuições	5
1.3 Apresentação do trabalho	5

I	Revisão Bibliográfica	7
2	Sistemas Dinâmicos Não-Lineares e Modelagem Matemática	9
2.1	Introdução	9
2.2	Sistemas dinâmicos não-lineares: elementos	10
2.3	Caos em sistemas dinâmicos	12
2.4	Técnicas para reconstrução da dinâmica	15
2.5	Conclusões do capítulo	22
3	Identificação de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares	25
3.1	Introdução	25
3.2	Testes dinâmicos e coletas de dados	26
3.2.1	Execução do teste	26
3.2.2	Sinais de excitação	26
3.2.3	Tempo de amostragem	27
3.2.4	Detecção de não-linearidades	28
3.3	Representações não-lineares	28
3.3.1	Modelos racionais e polinomiais	30
3.3.2	Redes neurais	32
3.3.3	Funções de Base Radiais	35
3.4	Seleção de estrutura	36

	xi
3.4.1	Determinação de estrutura utilizando ERR 36
3.4.2	Critério de informação de Akaike 37
3.5	Estimação de parâmetros 38
3.6	Validação 39
3.7	Classificação da identificação 40
3.7.1	Identificação caixa-cinza com RBFs 43
3.8	Conclusões do capítulo 46
II	Propriedades das Funções de Base Radiais 47
4	Representação de Informação de Estado Estacionário 49
4.1	Introdução 49
4.2	Influência do polinômio linear: um estudo de caso 50
4.2.1	Descrição do sistema e dados 51
4.2.2	Resultados experimentais 55
4.2.3	Discussão 56
4.3	Estados estacionários de funções de base radiais 58
4.3.1	Localização 59
4.3.2	Estabilidade 62
4.3.3	Desenvolvimento: Modelos de primeira ordem 66

4.4	Incorporação de informação auxiliar	66
4.4.1	Comportamento dos autovalores	70
4.4.2	Localização	70
4.4.3	Simetria	75
4.5	Conclusões do capítulo	78
5	Uso de Informação de Estado Estacionário	79
5.1	Introdução	79
5.2	Localização de pontos fixos	79
5.2.1	Regulador chaveado Buck	80
5.2.2	Mapa senoidal	85
5.2.3	Aquecedor elétrico	91
5.3	Comportamento dos autovalores	97
5.4	Conclusões do capítulo	100
6	Discussão, Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	103
	Bibliografia	115
A	Descrição dos sistemas reais utilizados nos estudos de caso	117
A.1	Aquecedor elétrico	117
A.1.1	Descrição do sistema	117

A.1.2	Teste dinâmico	118
A.1.3	Teste estático	121

RESUMO

Um estudo das propriedades dos modelos RBF é apresentado, sob o ponto de vista da aplicação dessa representação na identificação de sistemas dinâmicos não-lineares. Graças a esse estudo foi possível desenvolver mecanismos simples para incorporar *informação auxiliar* sobre o sistema investigado no processo de identificação. Os modelos caixa-cinza obtidos são, em relação aos caixa-preta, em geral, mais robustos e apresentam uma faixa de validade mais ampla, com menos parâmetros e melhor desempenho na descrição dos comportamentos dinâmicos e estáticos observados no sistema real.

Também é apresentado um estudo de caso sobre o uso de termos lineares ARX em modelos RBF, tendo sido observadas algumas vantagens para seu emprego, tais como bom desempenho com massas de dados de poucas amostras e maior validade do comportamento em estado estacionário.

O uso de termos ARX nos modelos RBF facilitou o estudo sobre o mapeamento de não-linearidades estáticas (estados estacionários e função autovalores) nessa representação. São derivadas expressões matemáticas apresentando as não-linearidades estáticas em função dos parâmetros livres dos modelos. A partir dessas expressões matemáticas são derivadas restrições para a estrutura e os parâmetros, impondo as seguintes características: localização de pontos fixos e não-variação dos autovalores do modelo com o ponto de operação. A aplicação das RBFs sob essa visão caixa-cinza é ilustrada por meio de estudos de caso com dados de sistemas reais e simulados.

ABSTRACT

This work presents an investigation on the nonlinear dynamics modelling-relevant properties of the *radial basis function* model representation. This enables the development of mechanisms to incorporate *auxiliary information* regarding the underlying system in the identification process. Models obtained from this grey-box approach are, in general, more robust and globally valid, with low-dimensional parameter spaces and better performance describing the behavior observed in the real system.

Along with the main objective a case study of the use of augmented basis functions in RBF models is also presented. Some advantages were reported with the use of linear ARX terms in the set of model terms, such as a better capacity to perform well even with a (extremely) short data set and a more global steady-state behavior.

The use of augmented basis functions contributed for the study of how static nonlinearities (stationary states and eigenvalue function) are mapped in RBF models. Mathematical expressions showing such nonlinearities as a function of the coefficients of the RBF terms were used to derive structure and parameter constraints that mathematically impose known fixed points of the underlying system. Moreover, a simple structure constraint that guarantees constant eigenvalues was proposed. The application of the RBF representation in grey-box modelling problems was illustrated by means of some experimental and simulated data.

LISTA DE TABELAS

4.1	Resultados da validação dinâmica dos modelos do forno elétrico	59
5.1	Comparação de parâmetros e propriedades de modelos do mapa do regulador <i>buck</i>	84
5.2	Comparação de parâmetros e propriedades de modelos do mapa senoidal	88
5.3	Comparação de parâmetros e propriedades de modelos do mapa senoidal – variação da dispersão	92
5.4	Resultados da validação dinâmica e em estado estacionário dos modelos do aquecedor elétrico	97
5.5	Resultados da validação dinâmica e em estado estacionário dos modelos do sistema de Hammerstein	99

LISTA DE FIGURAS

2.1	Representação esquemática do circuito de Chua	13
2.2	Atrator dupla-volta - circuito de Chua	13
2.3	Função gaussiana, com $\sigma = 1$	21
2.4	Função multiquadrática inversa, com $\sigma = 2$	21
2.5	Função cúbica	21
2.6	Função multiquadrática, com $\sigma = 5$	21
2.7	Função logarítmica, com $\sigma = 1$	22
2.8	Função <i>thin-plate spline</i> , com $\sigma = 0,5$	22
3.1	Esquema ilustrativo dos tipos de identificação	41
4.1	Resposta ao ruído quantizado do forno elétrico	53
4.2	Resposta ao degrau do forno elétrico	54
4.3	Simulação livre dos modelos do forno elétrico na massa de dados <code>rbfntp1</code>	56
4.4	Simulação livre dos modelos do forno elétrico na massa de dados <code>fd1</code>	57
4.5	Características de estado estacionário dos modelos do forno elétrico	58

4.6	Autovalores e variação da constante de tempo do modelo <i>cbfttp1</i>	68
4.7	Espaço de entrada das funções de base de um modelo RBF	72
4.8	Imposição de simetria em um modelo RBF	76
5.1	Mapa de primeiro retorno para modelo de regulador <i>buck</i>	82
5.2	Mapa de primeiro retorno de modelos RBF do regulador <i>buck</i>	83
5.3	Mapa de primeiro retorno - mapa senoidal	86
5.4	Mapa de primeiro retorno de modelos do mapa senoidal	89
5.5	Mapa de primeiro retorno de modelos do mapa senoidal - variando a dispersão das RBFs	90
5.6	Diagrama de bifurcação de modelo do mapa senoidal	93
5.7	Variação do maior expoente de Lyapunov de modelo do mapa senoidal	93
5.8	Seleção de centros no Modelo 1 do aquecedor elétrico	95
5.9	Seleção de centros no Modelo 2 do aquecedor elétrico	95
5.10	Validação dinâmica do Modelo 1 do aquecedor elétrico	96
5.11	Validação dinâmica do Modelo 2 do aquecedor elétrico	96
5.12	Validação estática do Modelo 1 do aquecedor elétrico	96
5.13	Validação estática do Modelo 2 do aquecedor elétrico	96
5.14	Curva estática de modelos RBF do sistema de Hammerstein	99
A.1	Diagrama em blocos funcionais do aquecedor elétrico	118

A.2	Dados de identificação - aquecedor elétrico	120
A.3	Dados de validação - aquecedor elétrico	120
A.4	Dados estáticos - aquecedor elétrico	121

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Omega_{y^p u^{m-p}}$	Agrupamento de termos;
τ_m	Atraso da função de autocorrelação;
τ_d	Atraso puro de tempo;
$r_y(\tau)$	Autocorrelação linear;
$r_{y^2}(\tau)$	Autocorrelação não-linear;
c_i	Centro da i -ésima função de base;
$\Sigma_{y^p u^{m-p}}$	Coefficiente de agrupamento e termos;
Δ	Coefficientes da matriz Jacobiana;
Σ_{MQ}	Conjunto de coeficientes de agrupamento estimados por MQ;
Σ	Conjunto genérico de coeficientes de agrupamento;
\dot{x}	Derivada primeira de x ;
$\det[\cdot]$	Determinante;
z	Domínio da frequência complexo;
s	Domínio da frequência contínuo;
$\xi(k)$	Erro de modelagem;

\mathbb{Z}	Espaço dos números inteiros:
\mathbb{N}	Espaço dos números naturais:
\mathbb{R}	Espaço dos números reais:
\square	Fim de definição, lema e exemplo:
$b(\cdot)$	Função polinomial qualquer:
$a(\cdot)$	Função polinomial qualquer:
J_{MQ}	Função custo de erro quadrático de predição:
J	Função custo genérica:
$H(s)$	Função de saída dos estados:
F^l	Função genérica com grau de não-linearidade l :
$f(\cdot)$	Função matemática:
$e(k)$	Erro no instante k , pode ou não ser branco:
\sim	Indica valores estáticos:
τ_y	Instante de primeiro mínimo da autocorrelação linear:
τ_{y^2}	Instante de primeiro mínimo da autocorrelação não-linear:
S	Mapeamento linear:

\mathbf{B}	Matriz de entradas no espaço de estados discreto:
Ψ	Matriz de regressores:
\mathbf{D}_f	Matriz Jacobiana:
n_u	Máximo atraso do regressor de entrada:
n_e	Máximo atraso do regressor de ruído:
n_y	Máximo atraso do regressor de saída:
$\ \cdot \ $	Norma euclidiana:
n_p	Número de termos de processo:
n_ξ	Número de termos de ruído:
$E[\cdot]$	Operador esperança matemática:
c_i	Parâmetro de ruído em um modelo NARMAX:
θ_{di}	Parâmetro do denominador do modelo NARMAX racional:
θ_i	Parâmetro do modelo NARMAX polinomial:
θ_{nj}	Parâmetro do numerador do modelo NARMAX racional:
g_i	Parâmetros ortogonais:
T_i	Passo de integração:
w_i	Parâmetros das funções de base e termo constante:
$u(k-j)$	Regressor de entrada:
$\nu(k-i)$	Regressor de ruído em um modelo NARMAX:
$y(k-i)$	Regressor de saída:

ν	Ruído branco:
$g(k)$	Sinal de trabalho:
T_s	Tempo de amostragem:
k	Tempo discreto:
$\hat{\cdot}$	Indica o valor estimado:
$\text{var}[\cdot]$	Variância:
e	Vetor de erro, pode ou não ser branco:
g	Vetor de parâmetros ortogonais:
θ	Vetor de parâmetros a estimar:
θ^*	Vetor de parâmetros estendido:
$\hat{\theta}$	Vetor de parâmetros estimado:
$\hat{\theta}_{\text{MQ}}$	Vetor de parâmetros estimados por MQ:
$v(k-1)$	Vetor de regressores do NARMAX.
0	Vetor de zeros.

LISTA DE ABREVIACOES

AIC	Crterio de informação de Akaike;
ERR	Taxa de redução de erro;
ICB	Identificação caixa-branca;
ICC	Identificação caixa-cinza;
ICP	Identificação caixa-preta;
IM	Identificação multiobjetivo;
MIMO	Múltiplas entradas e múltiplas saidas (<i>Multiple-Input and Multiple-Output</i>);
MA	Média móvel;
MEL	Maior expoente de Lyapunov;
MQ	Mínimos quadrados convencionais;
MQE	Mínimos quadrados estendidos;
MQR	Mínimos quadrados restritos;

NARMAX	Modelos não-lineares auto-regressivos com média móvel e entrada exógena (<i>nonlinear autoregressive moving average model with exogenous input</i>);
NARMA	Modelos não-lineares auto-regressivos com média móvel (<i>nonlinear autoregressive moving average model</i>);
NARX	Modelos não-lineares auto-regressivos com entradas exógenas (<i>nonlinear autoregressive model with exogenous input</i>);
NAR	Modelos não-lineares auto-regressivos (<i>nonlinear autoregressive model</i>);
p.u.	Valor por unidade;
PCA	Análise em componentes principais;
RBF	Função de base radial
SQEP	Somatório do quadrado dos erros de predição;
SQLPF	Somatório do quadrado dos erros da localização dos pontos fixos;
SVD	Decomposição em valores singulares;

Introdução

1.1 Histórico

A busca pela compreensão de sistemas e fenômenos físicos observados está entre os objetivos científicos máximos do ser humano. Para atingir esses objetivos o homem tem seguido, desde os primórdios do desenvolvimento científico e tecnológico, diversos procedimentos. Uma das primeiras tentativas de estabelecer relações de causa e efeito entre variáveis de um sistema deu-se através da execução repetitiva de experimentos durante os quais fatores importantes eram mantidos continuamente controlados (Aguirre, 2000a). Aliada à observação cuidadosa e à análise crítica dos dados coletados, a experimentação pura possibilitou o desenvolvimento de teorias que ajudaram o homem a entender o comportamento do mundo à sua volta, e a resolver problemas do seu cotidiano.

Outro procedimento utilizado para analisar sistemas físicos é a modelagem matemática. Uma das características desse procedimento é que, a partir de uma única massa de dados, pode-se tentar ajustar diversos modelos, de classes e estruturas diferentes, sem a necessidade de manter alguns fatores sob controle.

Entretanto, a primeira abordagem em modelagem matemática de sistemas dinâmicos baseou-se no uso exclusivo de equações descritivas da física dos processos. Nesse caso, todos os termos dos modelos, e seus parâmetros, possuem significado físico. Na prática, a estrutura é resultado da aplicação de leis físicas, como balanço de massa e balanço de energia. Em contrapartida, os parâmetros da estrutura selecionada são determinados *a priori* ou estimados através de testes estáticos realizados no processo. Dados de entrada e saída do sistema, quando disponíveis, são usados apenas para validar os modelos. Esse tipo de procedimento é conhecido como *modelagem caixa-branca*, ou simplesmente modelagem física. Uma dificuldade inerente a essa abordagem é que nem sempre todos os princípios físicos que atuam em um dado sistema são conhecidos. Além disso, mesmo que se conheça os princípios físicos é comum serem demasiadamente complexos para definir uma estrutura

viável e uma determinação simples dos parâmetros envolvidos.

O aporte de sistemas confiáveis de aquisição de dados na indústria, especialmente na última década, fez crescer a necessidade de desenvolver formas de obter modelos matemáticos a partir de dados observados. Aliado à dificuldade encontrada para modelar processos, cada vez mais complexos, por seus princípios físicos essa tendência motivou o desenvolvimento de procedimentos que não envolvessem o uso exclusivo de conhecimento prévio. Partindo de uma massa de dados de entrada e saída do sistema investigado, e de uma *representação matemática*¹ escolhida fundamentalmente pela familiaridade do usuário com a mesma, a relação entre as variáveis é estabelecida através de técnicas que buscam ajustar uma certa *estrutura*² aos dados. Essa abordagem é conhecida como *modelagem caixa-preta*.

Os modelos lineares desempenharam um importante papel no desenvolvimento de técnicas de identificação de sistemas. Para essa classe de modelos existe uma teoria e prática bem estabelecidas e de caráter unificado (Eykhoff, 1974; Söderstrom e Stoica, 1989). Entretanto, a aplicação de modelos lineares deve considerar regiões restritas de operação, para as quais oferece uma representação adequada da dinâmica do processo. Para essas faixas de operação os modelos lineares podem ser usados, por exemplo, no desenvolvimento de controladores (Hernández e Arkun, 1992).

A necessidade de representar os comportamentos não-lineares normalmente exibidos por sistemas reais levou à busca por representações e técnicas não-lineares. Algumas tentativas de apresentar métodos de identificação de sistemas não-lineares de maneira unificada têm sido sistematicamente publicadas nas últimas duas décadas (Billings, 1980; Haber e Unbehauen, 1990; Sjöberg et al., 1995; Pearson e Ogunaike, 1997). Entretanto, a identificação de sistemas não-lineares, sob muitos aspectos, ainda é uma “arte”, ou seja, ainda deve ser vista mais como uma coleção de ferramentas e técnicas do que como uma teoria unificada e bem articulada (Billings e Coca, 1999).

Historicamente, as séries de Volterra tiveram um importante papel entre as representações não-lineares propostas até a década de setenta (Aguirre, 2000a). Outras duas representações clássicas muito populares até duas ou três décadas atrás são os modelos de

¹Ao longo deste trabalho este termo será utilizado para denotar uma classe de modelos, como redes neurais MLP (*MultiLayer Perceptron*) e modelos NARMAX (*Nonlinear AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs*) polinomiais.

²Por sua vez, o termo *estrutura* será utilizado para descrever um certo tipo de configuração de um modelo. Por exemplo, a estrutura de um modelo RBF (*Radial Basis Functions*) é dada pelo número e localização dos centros, tipo de função de base utilizada e valor do parâmetro de largura (caso se utilize uma função que possua tal parâmetro).

Hammerstein e de Wiener. De maneira mais geral, podem ser consideradas representações baseadas na combinação em cascata de blocos dinâmicos lineares e estáticos não-lineares (Haber e Unbehauen, 1990). Segundo Billings (1980), essa separação em subsistemas pode ser bastante atrativa no desenvolvimento de controladores.

O grande número de parâmetros envolvidos na aproximação de um sistema dinâmico não-linear por uma série de Volterra motivou o desenvolvimento de representações que explicassem os dados observados não apenas em termos do sinal de entrada, mas também através da saída (Billings, 1980; Aguirre, 2000a). Como resultado dessa necessidade foram propostos, na década de oitenta, novos métodos e representações para sistemas não-lineares. Destacam-se as representações NARMAX polinomial (Leoutritis e Billings, 1985) e racional (Billings et al., 1989). Outro conjunto de representações hoje muito populares são as baseadas em redes neurais, tendo o seu uso em identificação de sistemas proposto por (Narendra e Parthasarathy, 1990). Outra representação muito empregada desde o final da década de oitenta são as RBFs (Broomhead e Lowe, 1988; Casdagli, 1989; Adomaitis et al., 1990; Mees et al., 1992; Pottmann e Seborg, 1992; Carlin, 1992; Sze, 1995; Okuda, 2000; Walker et al., 2001; Alves et al., 2001).

A década de noventa caracterizou-se pelo surgimento de um grande número de aplicações em sistemas reais na literatura dentre as quais algumas podem ser destacadas. Dentre as aplicações de modelos NARMAX polinomiais e racionais citam-se a modelagem do controle neural do sistema cardiovascular (Vallverdu et al., 1992) e do sistema de controle da emissão de PCO_2 (Noshiro et al., 1993). Entre os trabalhos que aplicam redes neurais perceptron multicamadas (*MultiLayer Perceptron*, MLP) podem ser mencionados a modelagem de um Reator Tanque Agitado Contínuo (*Continuous Stirred Tank Reactor*, CSTR) (Henrique et al., 1998) e de um processo biológico de digestão anaeróbia (Carvalho et al., 1998). Já as aplicações de RBFs incluem a análise de oscilações de período um e dois em um sistema eletroquímico (Adomaitis et al., 1990), a modelagem de um transistor bipolar de junção (Mees et al., 1992) e identificação das características dinâmicas de um robô hidráulico (Carlin, 1992). Um conjunto de representações que passou a ser utilizado em identificação de sistemas na década de noventa é baseado na transformada *wavelet* (Daubechies, 1988), tendo sido desde então aplicado, entre outros casos, na obtenção de derivadas de séries temporais para modelos contínuos (Coca e Billings, 1996).

Característica comum aos trabalhos citados acima, e a muitos outros publicados no mesmo período, é a percepção da dificuldade inerente à etapa de seleção de estrutura. Na modelagem caixa-preta de sistemas não-lineares a questão da flexibilidade se apresenta ainda mais problemática que no procedimento caixa-branca, pois para cada representação

existe uma infinidade de estruturas possíveis. Atualmente, reconhece-se que o principal problema de modelos com estruturas incorretamente especificadas não é um número excessivo de parâmetros e sim os regimes dinâmicos espúrios que o modelo estará sujeito a alcançar. Outra desvantagem inerente ao caráter caixa-preta é a dificuldade de extrair conhecimento útil a partir dos modelos obtidos, que passam a ter uso quase que restrito a simulação.

Vários procedimentos para seleção de estrutura de modelos não-lineares foram propostos na literatura (Haber e Unbehauen, 1990; Mees, 1993; Judd e Mees, 1995; Aguirre e Mendes, 1996). Um procedimento utilizado de forma generalizada é a Taxa de Redução de Erro (*Error Reduction Ratio*, ERR) (Korenberg et al., 1988), já aplicado em séries de Volterra (Floriani et al., 2000), modelos NARMAX polinomiais e racionais (Billings et al., 1989), RBFs (Zheng e Billings, 1995), modelos contínuos (Aguirre et al., 2001) e *wavelets* (Billings e Coca, 1999). Outras abordagens partem do estudo aprofundado da estrutura das representações, como os agrupamentos de termos em modelos NARMAX polinomiais (Aguirre e Billings, 1995). Essa última abordagem é exemplo do uso de informação auxiliar, além dos dados dinâmicos, na seleção de estrutura.

O procedimento geral de aproveitamento de informação auxiliar, não incorporada diretamente no critério de estimação de parâmetros, no processo de identificação, recebe o nome de *modelagem caixa-cinza*. A princípio, parece natural imaginar que modelos obtidos a partir de informações previamente conhecidas e de dados tendem a ter desempenho superior aos modelos obtidos por procedimentos puramente caixa-preta. Entretanto, a incorporação dessas informações em estruturas sem significado físico explícito não é uma tarefa trivial. Uma possibilidade parece ser a investigação aprofundada de propriedades de uma dada representação matemática que possam ter aplicação em identificação caixa-cinza (Corrêa, 2001). O grande desafio nesse caso é determinar quais são as informações úteis e de que modo elas podem ser incorporadas no processo de identificação.

Algumas abordagens ao problema da incorporação de informação auxiliar no processo de identificação foram propostas na literatura, envolvendo, por exemplo, o uso de modelos híbridos (Cubillos et al., 1996; Cubillos e Lima, 1997; Forssel e Lindskog, 1997) e a formulação de restrições nos parâmetros dos modelos (Tulleken, 1993).

Algumas vantagens têm sido atribuídas à modelagem caixa-cinza em relação às demais. Tulleken (1993) afirma que os modelos caixa-cinza podem fornecer benefícios consideráveis no projeto de controladores avançados. Johansen (1996) advoga que o uso de procedimentos caixa-cinza reduz o número de parâmetros a serem estimados e torna o problema de identificação mais bem formulado, além de gerar modelos mais globais e robustos,

mesmo a partir de dados escassos. Recentemente, Aguirre (2000b) sugeriu que a facilidade de incorporação de informação auxiliar pode vir a se tornar um meio de escolha de representações de sistemas não-lineares.

O principal objetivo do presente trabalho é o estudo da possibilidade de aplicar informação auxiliar no processo de identificação de sistemas dinâmicos não-lineares por meio de funções de base radiais. A abordagem adotada é a de estudo das propriedades da representação relevantes à identificação, especialmente características de estado estacionário, tendo sido inspirada no trabalho de Corrêa (2001).

1.2 Contribuições

As contribuições deste trabalho podem ser definidas como:

- abordagem das funções de base radiais no contexto de identificação de sistemas, apresentando-as como uma representação NARMAX com possibilidade de ser manipulada analiticamente;
- um estudo das propriedades dos modelos RBF aplicadas à identificação de sistemas dinâmicos não-lineares, envolvendo o mapeamento de características de estado estacionário, como pontos fixos, curva estática e função de autovalores;
- desenvolvimento de procedimentos para incorporação em modelos RBF de informação auxiliar sobre localização de estados estacionários e independência dos autovalores com o ponto de operação.

1.3 Apresentação do trabalho

A presente dissertação está dividida da seguinte forma.

- **Capítulo 2:** Apresentação de elementos de sistemas dinâmicos não-lineares, caos e modelagem matemática.
- **Capítulo 3:** As funções de base radiais são abordadas como solução do problema de reconstrução de dinâmica e modelagem matemática.
- **Capítulo 4:** Revisão bibliográfica sobre as etapas da identificação de sistemas, com enfoque nas representações matemáticas não-lineares e suas aplicações relatadas na

literatura. Adicionalmente, é definida uma classificação dos tipos de identificação de sistemas, segundo a discussão presente em (Nepomuceno, 2002). Por fim, são revisados os trabalhos em que informação auxiliar foi empregada em alguma etapa da obtenção de modelos RBF.

- **Capítulo 5:** Estudo da forma como características de estado estacionário são mapeadas em modelos RBF. São avaliados: localização de pontos fixos e estados estacionários, suas propriedades (estabilidade e simetria) e a variação dos autovalores ao longo da faixa de operação do modelo. Segue-se o desenvolvimento de estratégias para uso de informação auxiliar do tipo mencionado nas etapas de seleção de estrutura e estimação de parâmetros de RBFs.
- **Capítulo 6:** Estudos de caso para avaliação das estratégias elaboradas no Capítulo 5.
- **Capítulo 7:** Síntese de conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Parte I

Revisão Bibliográfica

Sistemas Dinâmicos Não-Lineares e Modelagem Matemática

2.1 Introdução

A busca pela compreensão de sistemas e fenômenos físicos observados está entre os objetivos científicos máximos do ser humano. Para atingir esses objetivos o homem tem seguido, desde os primórdios do desenvolvimento científico e tecnológico, diversos procedimentos. Uma das primeiras tentativas de estabelecer relações de causa e efeito entre variáveis de um sistema deu-se através da execução repetitiva de experimentos durante os quais fatores importantes eram mantidos continuamente controlados. Aliada à observação cuidadosa e à análise crítica dos dados coletados, a experimentação pura possibilitou o desenvolvimento de teorias que ajudaram o homem a entender o comportamento do mundo à sua volta, e a resolver problemas do seu cotidiano.

A interpretação de observações realizadas em sistemas físicos depende do conjunto de ferramentas matemáticas empregadas na análise. Neste capítulo serão apresentados alguns elementos básicos da teoria de sistemas dinâmicos não-lineares, e ferramentas para caracterização dos mesmos, muitas vezes a partir de uma única variável observada.

Outro procedimento utilizado para analisar sistemas físicos é a modelagem matemática. Uma das características desse procedimento é que, a partir de uma única massa de dados, pode-se tentar ajustar diversos modelos, de classes e estruturas diferentes, sem a necessidade de manter alguns fatores sob controle. Assim sendo, os fundamentos da reconstrução de dinâmica e de modelagem matemática de sistemas dinâmicos não-lineares também serão tratados.

2.2 Sistemas dinâmicos não-lineares: elementos

Uma abordagem analítica da natureza normalmente parte do pressuposto de que o comportamento da maioria dos sistemas reais pode ser, ao menos *aproximadamente*, descrito por um sistema dinâmico determinístico de ordem finita, podendo, portanto, ser caracterizado por um número finito n de *estados*¹, ou seja:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(\mathbf{x}(0), t), \quad (2.1)$$

sendo $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados do sistema, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(t_0)$ a condição inicial das variáveis de estado e $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um mapeamento (que na maioria dos casos não poderá ser expresso analiticamente) que atribui a cada instante de tempo t um valor univocamente determinado para o vetor de estados. Em geral, o mapeamento na Equação (2.1) é amplo o suficiente para permitir que dois estados iniciais diferentes conduzam a um mesmo estado futuro, condição não contemplada por uma classe relativamente ampla de sistemas dinâmicos contínuos encontrados na prática, para os quais vale o *teorema de unicidade de soluções* (Fieldler-Ferrara e Prado, 1994). Ou seja, diz-se que para um conjunto considerável de sistemas dinâmicos a cada condição inicial corresponde uma única *trajetória*.²

Geralmente, as trajetórias descritas pelas variáveis de estado de um sistema podem ser representadas em um espaço euclidiano \mathbb{R}^n , conhecido como *espaço de estados*, ou de fases. A descrição de um sistema dinâmico por meio de uma equação diferencial pressupõe continuidade das trajetórias, e pode ser representada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (2.2)$$

sendo $\mathbf{F}(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função vetorial genérica, conhecida como *campo vetorial* e $\dot{\mathbf{x}} \equiv d\mathbf{x}/dt$ a derivada temporal do vetor de estados. Para o caso de uma trajetória descontínua, ou seja, quando a variável t assume valores discretos $k \in \mathbb{N}$, diz-se que o sistema é discreto, e a representação do sistema passa a ser feita por meio de uma equação de diferenças, como

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(k), k), \quad (2.3)$$

¹Conjunto mínimo de variáveis cujos valores podem ser determinados, a cada instante, unicamente a partir de seus valores anteriores e de possíveis forças independentes que atuam sobre o sistema. O número de variáveis que compõem esse conjunto corresponde à ordem do sistema dinâmico.

²Conjunto de valores das variáveis correspondentes à evolução temporal do sistema dinâmico, a partir das condições iniciais. No espaço de fases recebe o nome de *órbita*. Ao conjunto de todas as trajetórias, determinadas pelo mapeamento Φ , dá-se o nome de *fluxo*.

sendo $\mathbf{G}(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um mapeamento genérico. De modo geral, os mapeamentos $\mathbf{F}(\cdot)$ e $\mathbf{G}(\cdot)$ são, em maior ou menor grau, não-lineares, o que trás uma série de implicações importantes. Apesar da existência de um extenso, eficiente e elegante conjunto de ferramentas matemáticas para análise de sistemas lineares, sua restrita aplicabilidade a sistemas não-lineares tornou fundamental o desenvolvimento de técnicas que buscassem se ajustar da forma mais ampla possível a essa classe generalizada de sistemas dinâmicos.

Em muitas situações práticas não existe acesso direto aos estados de um sistema dinâmico, sendo possível apenas observar uma função

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{W}(t), \quad (2.4)$$

sendo $\mathbf{H}(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ uma função de saída dos estados, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ o vetor de saídas do sistema (propriedades observáveis como posição ou temperatura), usualmente com $q < n$, e $\mathbf{W}(t)$ um termo que representa as imprecisões na observação do sistema (por exemplo, ruído aditivo).

Na prática as variáveis de estado de um sistema só podem ser consideradas por meio de observação (através das saídas) em instantes (intervalos) discretos de tempo³. Assumindo-se, por simplicidade, que tais intervalos sejam fixos, a evolução do vetor $\mathbf{y}(k)$ será dado o nome *série temporal* (ou séries temporais, denotando o conjunto formado pelos elementos do vetor).

Da forma como foram tratados até agora, os sistemas dinâmicos aqui descritos podem ser considerados *autônomos*, de modo que suas evoluções temporais não são influenciadas por forças independentes. De forma mais rigorosa, diz-se que é necessário eliminar a dependência explícita do campo vetorial $\mathbf{F}(\cdot)$ do tempo t , para que esta não seja tratada como presença de uma força independente das variáveis de estado. Entretanto, em muitas aplicações, encontram-se sistemas que são perturbados por algum agente externo, usualmente representado por um “segundo” mapeamento $\mathbf{L}(\cdot)$, ou seja, trata-se da ação externa de um outro sistema determinístico. De longe, o caso mais conhecido de perturbação externa determinística é o de natureza periódica, encontrado em diversas situações experimentais, nas quais faz-se necessário o uso de alguma ação direta para desvendar comportamentos dinâmicos não-triviais (Stark, 1999). Entretanto, é possível trabalhar com uma classe mais ampla de perturbações, que englobe processos estocásticos e sistemas de entrada-saída, como os considerados em (Casdagli, 1992). Nesse caso, conhecido como *não-autônomo*, assume-se que sobre o sistema dinâmico age um número finito p de

³Um processo conhecido como *discretização* de sistemas dinâmicos.

forças independentes, o que significa reescrever a equação (2.1) na forma

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t), t), \quad (2.5)$$

sendo $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ o vetor de forças independentes, e o mapeamento agora da forma $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nessa nova abordagem as saídas do sistema passam a ser vistas como resultado da interação da evolução natural do sistema, representada pelas variáveis de estado $\mathbf{x}(t)$, e aquela imposta pelas forças independentes $\mathbf{u}(t)$, agora chamadas de *sinais de entrada*. Além disso, as séries temporais $\mathbf{y}(t)$ passam a ser chamadas de *respostas do sistema*. Os próprios sinais de entrada também podem ser vistos como séries temporais envolvidas no sistema.

2.3 Caos em sistemas dinâmicos

Uma importante classe de sistemas dinâmicos, definidos como *caóticos*, apresenta como característica principal uma extrema sensibilidade às condições iniciais. Isto significa dizer que qualquer predição do comportamento dinâmico por período arbitrário de tempo deve pressupor a disposição de valores iniciais das variáveis de estado com precisão arbitrariamente grande. Os sistemas caóticos oscilam confinados a uma região limitada do espaço de estados, sem, entretanto, apresentar qualquer periodicidade (Fieldler-Ferrara e Prado, 1994).

Um exemplo clássico de sistema caótico é o circuito de Chua, Figura 2.1 (Chua e Hasler, 1993). Esse sistema é conhecido como um dos mais utilizados na atualidade como plataforma padrão para o estudo de dinâmica não-linear e caos, dada a sua robustez, relativa facilidade de implementação e grande variedade de regimes dinâmicos apresentados (a variação de um parâmetro do oscilador – usualmente o resistor variável – resulta na exibição de uma série de oscilações periódicas ou caóticas), sendo a derivação do sistema de equações diferenciais (2.6) representativas do sistema facilmente obtida através da aplicação das leis de Kirchoff. A integração dessas equações, por tempo suficientemente longo produziria trajetória semelhante à da Figura (2.2) (Tôrres e Aguirre, 1996).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p[y - x - f(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -qy + bz, \end{aligned} \quad (2.6)$$

sendo $p = C_2/C_1$, $q = R^2C_2/L$ e $b = -r_L/(RL)$. r_L corresponde à resistência do indutor.

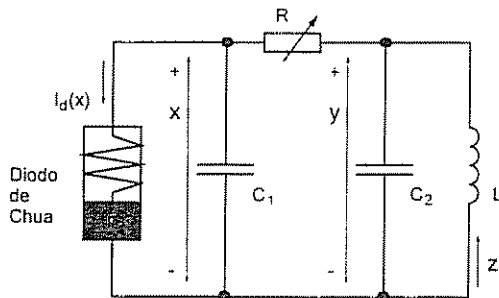


Figura 2.1: Representação esquemática do circuito de Chua.

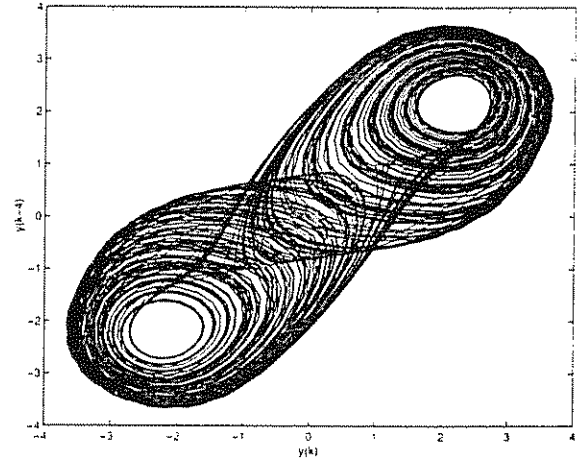


Figura 2.2: Atrator dupla-volta – circuito de Chua.

A função $f(x) = Ri_d$ está relacionada à não-linearidade correspondente ao chamado *diodo de Chua*, o único componente ativo do circuito.

É interessante notar, pela Figura (2.2), que uma vez iniciada a evolução do sistema, sua trajetória é atraída para um sub-conjunto de pontos do espaço de estados, conhecido como *atrator estranho* (Fieldler-Ferrara e Prado, 1994), que no caso da figura em questão recebe o nome de *dupla-volta* (outros tipos de atratores surgem em sistemas lineares, periódicos, etc.). Uma vantagem desse tipo de representação gráfica é o número de características geométricas e topológicas passíveis de estudo.

Uma técnica de análise de sistemas caóticos especialmente interessante é a chamada *seção de Poincaré*. Considere o seguinte sistema dinâmico autônomo não-linear:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (2.7)$$

e $\vartheta \subset \mathbb{R}^n$, uma hipersuperfície de dimensão $n - 1$ transversal ao fluxo $\Phi(\mathbf{x}, t)$ gerado por (2.7). x'_0 é o ponto no qual a órbita x_0 intercepta a hipersuperfície ϑ e $U \subseteq \vartheta$ é uma vizinhança de x'_0 . O mapa de Poincaré, ou mapa de retorno, $M : U \rightarrow \vartheta$ é definido em um ponto $x_1 \in U$ como:

$$M(x_1) = \Phi(x_1, \tau(x_1)), \quad (2.8)$$

em que τ é o tempo necessário para a órbita que saiu de x_1 retorne à hipersuperfície ϑ , a seção de Poincaré. Esta hipersuperfície contém a seqüência de pontos na qual uma órbita do sistema intercepta a seção. Uma trajetória periódica do sistema corresponde a um

ponto fixo do mapa de Poincaré M . A seção de Poincaré tem o benefício de reduzir em um grau a dimensão do sistema original.

Outro procedimento extremamente útil na análise de fluxos complexos é o chamado *diagrama de bifurcação*, que permite avaliar uma grande variedade de comportamentos exibidos pelo sistema à medida que um determinado parâmetro é gradualmente variado. Um ponto ξ no diagrama pode ser obtido por simulação definindo-se:

$$\xi = \{(\theta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n | x = \Phi_\theta(x_0, t); t \in S_t\}, \quad (2.9)$$

sendo θ um parâmetro a ser variado, que determina a estrutura das trajetórias obtidas através da aplicação de Φ_θ . $S_t = \{t_1; t_2; t_3; \dots\}$ é uma sequência crescente não limitada de instantes de tempo, tal que t_1 é suficientemente grande para que seja representado somente o comportamento em regime permanente do sistema, para cada valor de θ . Na prática, o sistema é simulado até atingir regime permanente então, toma-se um conjunto de pontos deste regime e plota-se estes pontos pelo valor de parâmetro de bifurcação. O diagrama de bifurcação irá revelar em qual valor de parâmetro $A \in I$ a solução do sistema muda qualitativamente e como isto ocorre.

É importante notar que a sensibilidade do diagrama de bifurcação a pequenos ajustes nos parâmetros o credencia como importante método qualitativo de validação (Aguirre e Billings, 1994). Adicionalmente, vale notar que existem métodos para gerar diagramas de bifurcação a partir de dados reais (Bagarinao et al., 1999).

Para finalizar, duas outras técnicas de análise de atratores gerados por sistemas dinâmicos não-lineares serão brevemente descritas: expoentes de Lyapunov e dimensão de correlação, propriedades chamadas de *invariantes dinâmicos*.

Os expoentes de Lyapunov são usados para medir a taxa de divergência média de trajetórias próximas ao longo de uma certa direção no espaço de estados. Tais expoentes podem ser determinados a partir de uma série temporal, utilizando o procedimento representado pela seguinte equação (Wolf, 1986)

$$l_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \log_e \lambda_i(N), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.10)$$

sendo $\lambda_i(N)$, $i = 1, 2, \dots, n$ valores absolutos dos autovalores de

$$[D_f(y(k))][D_f(y(k-1))]\dots[D_f(y(1))], \quad (2.11)$$

sendo $D_f(y(i)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz Jacobiana da equação diferencial de dimensão n , calcu-

lada em $y(i)$, e $y(i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, é a trajetória no espaço de estados. Deve-se ressaltar que o simples cálculo do *maior expoente de Lyapunov* (MEL) mostra-se comumente uma tarefa nada trivial. A estimativa do espectro completo de expoentes em si é um problema tipicamente mal-condicionado e normalmente pressupõe a disponibilidade de séries temporais longas. A despeito disso, o maior expoente de Lyapunov, para o qual é possível obter medidas relativamente confiáveis, assume alguma importância ao representar uma indicação do horizonte de predição viável do sistema (Abarbanel et al., 1993). Convém ressaltar também que um sistema caótico apresentará ao menos um expoente positivo.

A dimensão de correlação é outra medida utilizada para caracterizar modelos caóticos, pois para estes sistemas esta medida é um número não inteiro. Trata-se de uma quantidade relacionada ao quanto de informação é necessário para se caracterizar uma certa trajetória. Assim, se a dimensão de correlação de um atrator é $D = d + \delta$, em que $0 < \delta < 1$, então o menor número de equações diferenciais de primeira ordem necessárias para descrever os dados é $d + 1$.

Grassberger e Procaccia (1983) desenvolveram um algoritmo para a estimação da dimensão de correlação muito utilizado devido à sua facilidade de implementação. Primeiramente se reconstrói a série no espaço de estados por meio de uma seqüência de pontos de dimensão m , ou seja, $y(j) = [y(j) \ y(j-1) \ \dots \ y(j-(m+1))]$. Supondo que a distância entre dois pontos é $S_{ij} = |y(i) - y(j)|$, então a dimensão de correlação pode ser calculada como:

$$D_c = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log_e C(\epsilon)}{\log_e \epsilon}, \quad (2.12)$$

em que $C(\epsilon)$ denota a função de correlação, definida como:

$$C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\text{número de pares } (i, j) \text{ com } S_{ij} < \epsilon). \quad (2.13)$$

2.4 Técnicas para reconstrução da dinâmica

Tomando-se as $q = n$ séries temporais que compõem o vetor de observações $\mathbf{y}(t)$ na Equação (2.4) é possível *recuperar* as soluções (trajetórias) das n equações diferenciais do sistema original (Equação (2.2)) atribuindo a cada variável de estado uma coordenada no *espaço de reconstrução* e, posteriormente, representando cada série temporal nesse espaço. Entretanto, ainda que a ordem de um sistema seja conhecida com razoável precisão, o número de variáveis observadas dificilmente deixará de ser menor do que n . De fato, uma grande possibilidade é que, ainda que a função de saída $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ opere ao longo de todo o

espaço de fases original apenas uma série temporal esteja disponível (ou seja, $q = 1$).

A despeito da noção intuitiva de que uma única variável de observação contém relativamente pouca informação a respeito do comportamento dos estados $\mathbf{x}(t)$ foi provado que, satisfeitas algumas condições relativas ao campo vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ e à função de saída $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$, é possível reconstruir o primeiro através de uma transformação de coordenadas (imersão) (Packard et al., 1980; Takens, 1981).⁴ O espaço de reconstrução resultante é conhecido como *espaço de imersão*.

A representação das trajetórias em um espaço de imersão (também chamado de reconstrução do atrator) torna possível a utilização de ferramentas da geometria diferencial e da topologia para análise da dinâmica subjacente. Além disso, se uma imersão satisfatória tiver sido realizada, os atratores original e reconstruído compartilharão as mesmas propriedades, do ponto de vista topológico (*difeomorfismo*). Como resultado, será possível aplicar diretamente ao atrator reconstruído algoritmos para estimação de invariantes dinâmicos, como expoentes de Lyapunov e dimensão de correlação.

Uma forma muito comum e eficiente de reconstrução do espaço de fases (embora decerto não seja a única alternativa) é o *método das coordenadas de atraso* (Packard et al., 1980), que considera um vetor

$$\mathbf{y}(k) = [y(k), y(k - \tau), \dots, y(k - (d_e - 1)\tau)]^T, \quad (2.14)$$

sendo d_e a dimensão de imersão (de modo que $\mathbf{y}(k)$ possa ser representado em um espaço de dimensão d_e) e τ um atraso ou intervalo de amostragem. Coube a Takens (1981) demonstrar, para o caso de $\mathbf{W}(t) = 0$ na Equação (2.4) (uma demonstração de caráter mais geral foi estabelecida em (Sauer et al., 1991)), que uma imersão com $d_e \geq 2n + 1$ é uma condição suficiente (mas não necessária) para que exista um mapeamento *suave* $f_T : \mathbb{R}^{d_e} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$y(k + T) = f_T(\mathbf{y}(k)), \quad (2.15)$$

para qualquer k inteiro, sendo T o horizonte de predição (este também considerado inteiro, bem como o atraso τ). Para o caso em que forças externas independentes (entradas) fazem-se presentes o vetor de imersão passaria a ser descrito como (considerando uma

⁴Importante notar a não-equivalência entre as variáveis na observação da dinâmica subjacente (Letellier et al., 1998).

única entrada e uma única saída) (Walker et al., 2001)

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y(k - \tau), y(k - 2\tau), \dots, y(k - l\tau) \\ u(k), u(k - \tau), \dots, u(k - (m - 1)\tau) \end{bmatrix}^T, \quad (2.16)$$

sendo l e m dimensões de imersão da saída e da entrada, respectivamente. Uma extensão do teorema de Takens para o caso em que forças independentes dos estados se fazem presentes foi apresentada em (Stark, 1999), e de uma forma mais generalizada em (Stark et al., 2002). Convém lembrar que o uso desse tipo de variáveis atrasadas é similar à abordagem comum em identificação de sistemas (Leontaritis e Billings, 1985) e que essa “equivalência” tem sido vantajosamente explorada (Casdagli, 1992). Outro fato a ressaltar é que o mapeamento da Equação (2.15) normalmente é apresentado na literatura com $T = 1$, ou seja, trata-se de um preditor de um passo à frente. Por conseguinte, é importante notar que no caso em que o objetivo é reconstruir a dinâmica original subjacente à série temporal disponível tanto o comportamento à curto-prazo (predição de 1 até alguns passos à frente⁵) como o de longo-prazo, resultante da simulação (iteração) do modelo por tempo suficientemente longo (para tornar possível a extração de medidas como os invariantes dinâmicos) devem ser analisados na hora de avaliar a qualidade de uma reconstrução (Haykin e Principe, 1998).

A escolha dos parâmetros da reconstrução, como seria de se esperar, é de grande importância para o sucesso da abordagem. Um procedimento recomendado para a seleção da dimensão de imersão d_e é a estimação, diretamente dos dados, via o método dos falsos vizinhos mais próximos (Abarbanel et al., 1993). Já para o atraso τ uma direção comum é selecioná-lo de modo que seja grande o suficiente para que as variáveis $y(k)$ e $y(k + \tau)$ sejam essencialmente independentes (requisito para que possam ser utilizadas como coordenadas na reconstrução), mas não tão independentes a ponto de não guardar qualquer correlação entre si. Este procedimento pode ser sintetizado escolhendo um valor de τ para o qual a informação mútua entre $y(k)$ e $y(k + \tau)$ atinge seu primeiro mínimo (Fraser, 1986).

Deve ser ressaltado que o teorema de Takens não estabelece critérios para a estimação do mapeamento f_T na Equação (2.15), também chamada de *preditor de um passo à frente*, que definirá, em última instância, a evolução $\mathbf{x}(k) \rightarrow \mathbf{x}(k + 1)$. De fato, não existe teoria rigorosa que auxilie na seleção de um preditor não-linear que aproxime o mapeamento f_T . A minimização do valor médio quadrático do erro de predição, suficiente para gerar aproximações lineares satisfatórias, no caso de sistemas de comportamento complexo (caos, por exemplo) se traduz apenas como condição necessária, mas não suficiente para uma

⁵Até o horizonte de predição usualmente limitado pelo maior expoente de Lyapunov.

boa representação (Haykin e Príncipe, 1998). Apesar disso, diversos métodos foram (e ainda têm sido) sugeridos na literatura, entre os quais identifica-se dois grandes grupos: aproximadores *locais* (Farmer e Sidorowich, 1987) e aproximadores *globais* (Crutchfield e McNamara, 1987; Mees, 1993; Aguirre e Mendes, 1996). Enquanto nos primeiros busca-se representar a dinâmica em vizinhanças restritas do espaço de imersão por meio de mapeamentos lineares, nos últimos geralmente parte-se de uma única estrutura inerentemente não-linear com o intuito de aproximar o comportamento do sistema em todas as regiões de interesse (Aguirre, 1996).

Como normalmente não se conhece *a priori* a forma do mapeamento f_T (que em última instância é uma representação discreta do campo vetorial original) uma alternativa é aproximá-lo por meio de uma expansão em alguma base de interesse

$$\hat{f}_T(\mathbf{y}(k)) = \sum_{i=1}^{N_e} \phi_i(\mathbf{y}(k)) w_i, \quad (2.17)$$

sendo $\phi_i(\mathbf{y}(k))$ uma base de funções e w_i parâmetros cujos valores devem ser determinados de acordo com algum critério de ajuste aos dados.

Uma forma conveniente de analisar a reconstrução da dinâmica é tratá-la como um *problema inverso mal-formulado* (Haykin e Príncipe, 1998). Por definição, dois problemas são considerados inversos entre si se a formulação de um deles requer conhecimento parcial ou total do outro. Ainda que teoricamente não haja vantagem explícita em se classificar um deles como direto e o outro, conseqüentemente, como inverso, na prática uma atitude costumeira é adotar um critério cronológico para essa definição. Sendo assim, é natural imaginar que o sistema dinâmico em si deve ser visto como o problema direto, enquanto a reconstrução por meio de informação proveniente dele (séries temporais) seria o problema inverso. Uma característica importante compartilhada pela maioria dos problemas inversos é o caráter de problema mal-formulado. No contexto da reconstrução de dinâmica, esse caráter resulta principalmente da quantidade insuficiente de informação proporcionada por uma série temporal (muitas vezes de curta duração) e da incerteza devida a inevitável presença de ruído aditivo ou alguma outra forma de imprecisão agindo sobre a variável observada (Haykin e Príncipe, 1998).

Uma solução conveniente para esse tipo de questão requer sua transformação em um problema bem-colocado, o que usualmente passa pela inclusão de alguma forma de *conhecimento a priori*, sobre o mapeamento f_T em (2.15), na própria solução. De outra forma, diz-se que é necessário impor algum tipo de restrição ao aproximador que se deseja

construir. Uma forma clássica e efetiva de satisfazer esse requisito é usar conceitos da teoria da regularização (Haykin, 1999). Nesse contexto, uma representação para f_T que, ao mesmo tempo, garanta uma aproximação do problema inverso com razoável precisão e forneça uma solução regularizada é desejável.

Uma das possíveis soluções regularizadas é encontrada considerando, como conhecimento *a priori*, a suavidade subjacente ao problema inverso aqui considerado. Partindo dessa escolha, Poggio e Girosi (1990) propuseram formulações para a aproximação (2.17), dentre as quais a fundamentada em funções radiais, de particular interesse nesta dissertação, será brevemente descrita a seguir.

A escolha pelo emprego de uma base de funções radiais reflete a suposição de que todos os eixos do espaço de reconstrução definido por (2.16) são igualmente relevantes, não havendo direções privilegiadas. A forma geral para a classe de aproximadores resultante – as *funções de base radiais* (RBFs) – é a seguinte (fazendo $T = 1$ em (2.17) e, por simplicidade, reescrevendo simplesmente como f) (Sze, 1995)⁶:

$$\hat{f}(\mathbf{y}) = w_0 + \sum_{i=1}^N w_i \phi(\|\mathbf{y} - \mathbf{c}_i\|) + p(\mathbf{y}). \quad (2.18)$$

sendo w_0 um termo constante, N o número de elementos da série temporal empregada na obtenção do modelo, \mathbf{c}_i os centros das funções radiais e $p(\mathbf{y})$ um polinômio linear.

A formulação (2.18) conta com um número de centros igual ao tamanho da massa de dados (na realidade todos os pontos da série temporal utilizados como centros), resultando em uma interpolação no sentido estrito. Em (Casdagli, 1989) foi esta a formulação (sem o termo constante) utilizada no contexto de predição de séries temporais. Para este caso em especial a matriz formada pela base de funções (também conhecida como matriz de regressores) é quadrada de ordem N , com diagonal nula. Entretanto, duas desvantagens desta formulação praticamente tornam inviável a sua aplicação: a duração da série temporal (impõe restrições computacionais) e presença de ruído nos dados. Desse modo, é desejável que o número de centros seja menor que o número de pontos da massa de dados, o que significa fazer (Broomhead e Lowe, 1988)

$$\hat{f}(\mathbf{y}) = w_0 + \sum_{i=1}^{N_c} w_i \phi(\|\mathbf{y} - \mathbf{c}_i\|) + p(\mathbf{y}) \quad N_c < N. \quad (2.19)$$

⁶O leitor interessado na formulação matemática completa é referido a (Haykin, 1999).

É importante notar que agora as posições dos centros não precisam necessariamente coincidir com pontos da massa de dados.

As RBFs são aproximadores universais de funções contínuas com precisão arbitrária (Poggio e Girosi, 1990). Uma importante classificação das funções radiais para RBFs utiliza como critério propriedades de localização. Nesse caso, uma função poderá ser classificada como local ou global, dependendo do limite (fazendo $x = \| \mathbf{y} - \mathbf{c}_i \|$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x), \quad (2.20)$$

sendo zero para uma função local, e um valor diferente de zero para uma função global. As funções radiais discutidas nesta dissertação, dispostas conforme a classificação discutida acima, são listadas abaixo (Sze, 1995). Parte delas pode ser observada nas figuras 2.3 - 2.8, para o caso bidimensional ($\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^2$ em (2.16)).

Funções locais:

- Gaussiana: $\phi(x) = e^{-x^2/\sigma^2}$,
- Multiquadrática inversa: $\phi(x) = (x^2 + \sigma^2)^{-\frac{1}{2}}$,

Funções globais:

- Cúbica: $\phi(x) = x^3$,
- Multiquadrática: $\phi(x) = (x^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}$,
- *Thin-plate spline*: $\phi(x) = x^2 \log(x)$,
- Logarítmicas: $\phi(x) = \log(x^2 + \sigma^2)$,
- Pseudo-potenciais: $\phi(x) = (1 - e^{-x^2/\sigma^2}) \log(x)$,

sendo σ uma constante. Os centros \mathbf{c}_i definirão a referência para o cálculo da distância euclidiana que serve de argumento para as funções, em última instância ajudando a definir o campo de atuação das mesmas (juntamente com o parâmetro σ^2 , que corresponde à “largura” da função radial). Nas figuras 2.3 - 2.8 os centros coincidem com os pontos de máximo, nas funções locais, ou de mínimo, nas funções globais.

A modelagem da dinâmica subjacente a um sistema a partir de suas séries temporais é feita fixando os termos da expansão (2.17) e ajustando-se os parâmetros de modo a melhor

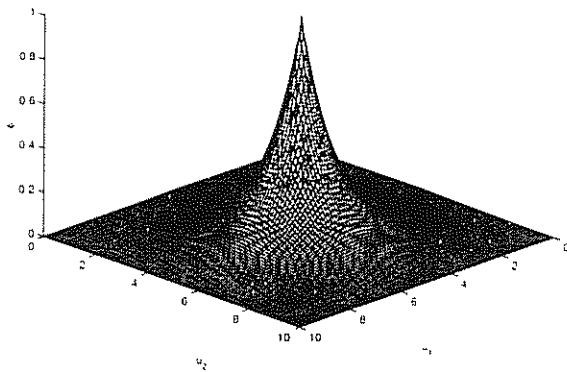
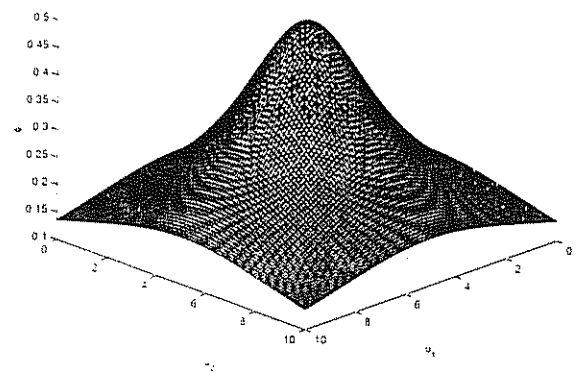
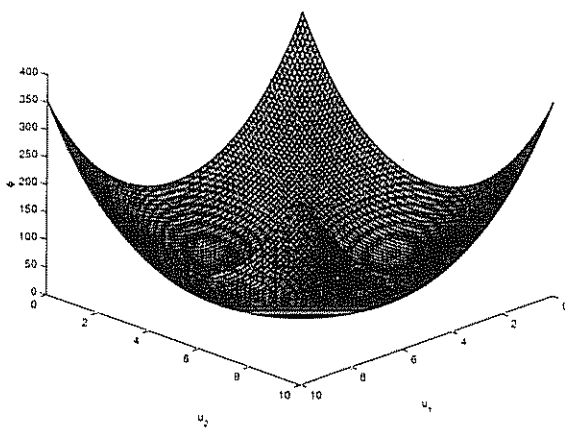
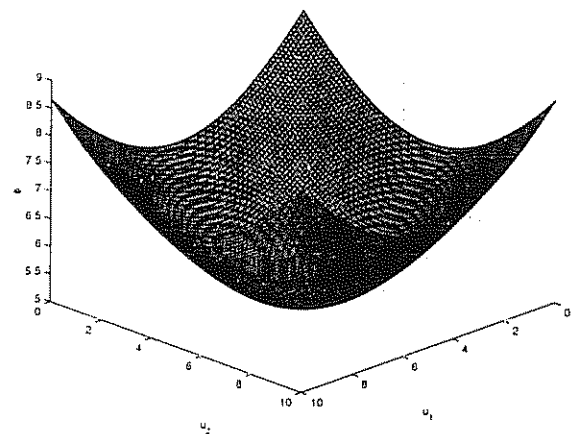
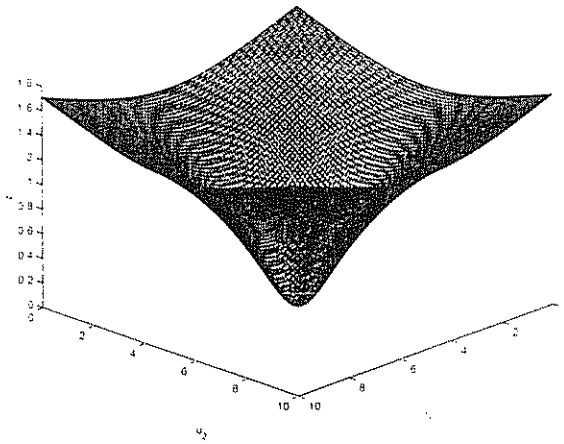
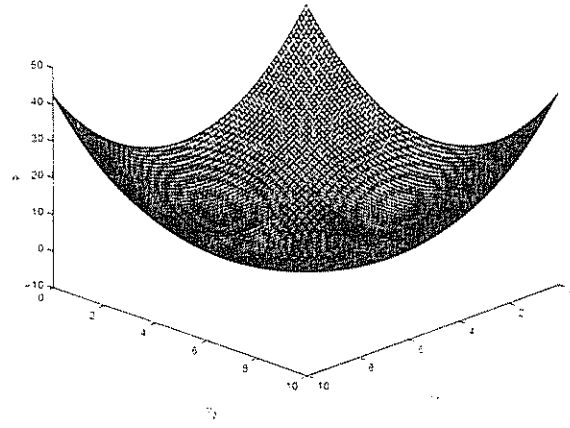
Figura 2.3: Função gaussiana, com $\sigma = 1$.Figura 2.4: Função multiquadrática inversa, com $\sigma = 2$.

Figura 2.5: Função cúbica.

Figura 2.6: Função multiquadrática, com $\sigma = 5$.

Figura 2.7: Função logarítmica, com $\sigma = 1$.Figura 2.8: Função *thin-plate spline*, com $\sigma = 0.5$

reproduzir os dados. A estimação desses parâmetros é geralmente sutil, conseqüência das não-linearidades presentes nas funções ϕ_i . Ao processo de definição das funções de base a compor um modelo dá-se o nome de *seleção de estrutura*. Geralmente, a estimação dos parâmetros é executada utilizando os dados disponíveis, que apresentados à uma expansão pré-configurada resulta em uma predição. O erro de predição pode ser utilizado para ajustar os parâmetros e características das funções de base. Métodos para seleção de estrutura e estimação de parâmetros de RBFs e de outras aproximações não-lineares serão apresentados no capítulo 3.

2.5 Conclusões do capítulo

Neste capítulo foram apresentados, de forma sucinta, alguns dos principais elementos da teoria de sistemas dinâmicos não-lineares. Outros conceitos abordados, que serão relevantes para o restante do material, foram algumas ferramentas cujo emprego em observações realizadas nos sistemas permite inferir propriedades da dinâmica subjacente, com destaque para invariantes dinâmicos como maior expoente de Lyapunov e dimensão de correlação.

Por fim, foram introduzidos alguns fundamentos de modelagem matemática. O conjunto de métodos vem se transformando em poderosa ferramenta para analisar e quantificar fenômenos observados, permitindo descobrir relações de causa e efeito. As técnicas de modelagem de interesse nesta dissertação fundamentam-se no emprego de séries tem-

porais originárias dos sistemas, a partir das quais constrói-se um modelo que a elas se ajuste adequadamente, ou, preferencialmente, que consiga reproduzir parte considerável da dinâmica subjacente. A essa definição geral dá-se o nome de *identificação de sistemas*, assunto abordado a partir do capítulo 3. A classe de aproximadores a que este trabalho dedicou-se em especial, as RBFs, foi sucintamente apresentada neste capítulo.

Identificação de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares

3.1 Introdução

A obtenção de modelos matemáticos de sistemas físicos não-lineares vem, ao longo das últimas décadas, adquirindo importância vital para a ciência e a engenharia. Os modelos matemáticos vêm sendo utilizados em diversas áreas do conhecimento humano.

As equações diferenciais formam uma das primeiras soluções aplicadas para reproduzir comportamentos dinâmicos de sistemas físicos, fundamentando-se, em geral, no conhecimento das leis físicas atuantes. Um método para obtenção de modelos matemáticos que passou a se destacar, principalmente com o aumento da capacidade de observação, armazenamento e processamento de dados, é a identificação de sistemas. Por meio desta técnica os modelos são obtidos a partir de dados medidos. As equações obtidas são fundamentalmente baseadas em diferenças, com a dinâmica subjacente reproduzida pela representação do valor atual da saída em função de seus valores passados.

A identificação de sistemas envolve, em linhas gerais, as seguintes etapas (Ljung, 1987; Aguirre, 2000a):

1. Testes dinâmicos e coleta de dados;
2. Escolha da representação matemática a ser usada;
3. Determinação da estrutura do modelo;
4. Estimação de parâmetros;
5. Validação do modelo.

Essas etapas são comuns tanto para sistemas que apresentam comportamento aproximadamente linear quanto para sistemas não-lineares. Nas situações em que só se utilizam os dados de entrada e saída a identificação é normalmente chamada de *identificação caixa-preta*.

As seções seguintes comentam brevemente as etapas gerais. Por fim, é tratada a classificação dos tipos de identificação, e apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre o uso de informação auxiliar nas RBFs.

3.2 Testes dinâmicos e coletas de dados

Uma vez que em identificação de sistemas é proposta a obtenção de modelos a partir de dados, é necessário coletar tais dados. Em muitos casos, os dados disponíveis são obtidos do sistema em *operação normal*. Em outras situações, entretanto, será possível e desejável efetuar testes de forma a extrair informação dinâmica do sistema. Costuma-se chamar *dados de identificação* o conjunto de dados destinados às etapas de escolha da representação matemática, determinação de estrutura e estimação de parâmetros; como *dados de validação*, o conjunto de dados destinados a validação do modelo. Problemas importantes relacionados a esta etapa são a execução de testes, escolha dos sinais de excitação, a escolha do tempo de amostragem e a detecção de não-linearidades.

3.2.1 Execução do teste

A *execução do teste* envolve desde aspectos de medição e instrumentação até a escolha das variáveis que serão usadas como entrada e saída. A medição deve procurar minimizar os efeitos de ruído nos sinais coletados. Em muitas situações, a escolha das variáveis é simples de ser feita. Contudo, para sistemas em que as malhas de realimentação não são aparentes, como sistemas biológicos e econômicos, não é uma tarefa óbvia escolher quais e quantas variáveis devem ser usadas para compor o modelo. Nesses casos, procedimentos como decomposição em valores singulares (SVD) (Chen, 1999) ou a análise em componentes principais (PCA) (Jolliffe, 1986) podem ser adotadas.

3.2.2 Sinais de excitação

É desejável que os *sinais de excitação* do sistema tenham espectros de frequência que lhes permitam excitar persistentemente a dinâmica de interesse do sistema. No caso

de sistemas não-lineares, isso requer que os efeitos não-lineares sejam excitados por esses sinais e assim estejam presentes nos dados de identificação (Aguirre, 2000a).

Intuitivamente, um sinal persistentemente excitante de ordem n é um sinal que tem potência espectral em n ou mais frequências distintas. Uma condição para estimar n parâmetros é que o sinal de excitação deve ser persistentemente excitante de pelo menos ordem n . Um sinal geralmente usado é o sinal binário pseudo-aleatório (PRBS, do inglês *Pseudo Random Binary Signal*).

3.2.3 Tempo de amostragem

Grande parte dos sistemas reais são processos contínuos. Em várias aplicações científicas e tecnológicas é necessário, entretanto, amostrar o sinal de interesse. O período entre amostras é chamado de período ou tempo de amostragem, T_s . Para que o sinal amostrado possua as características fundamentais do sinal original, é necessário que o tempo de amostragem seja suficientemente curto. De acordo com o Teorema de Nyquist-Shannon (Shannon, 1949), o sinal deve ser amostrado em pelo menos duas vezes o valor da maior componente de frequência desejada.

Nas situações práticas aqui consideradas, costuma-se amostrar em 5 a 10 vezes tal frequência, ou seja, quando se deseja utilizar um sinal para identificação, costuma-se superamostrar o sinal, ou seja, amostrá-lo com T_s bastante reduzido. A questão passa a ser a definição de uma taxa pela qual o sinal observado $y^*(k)$ será decimado de forma a gerar o sinal de trabalho $y(k)$, devidamente amostrado. Um procedimento prático é a análise da autocorrelação linear $r_y(\tau)$ (3.1) e não-linear $r_{y^2}(\tau)$ (3.2) do sinal de trabalho (Aguirre, 1995)

$$r_y(\tau) = E[(y(k) - \overline{y(k)})(y(k - \tau) - \overline{y(k)})], \quad (3.1)$$

$$r_{y^2}(\tau) = E[(y^2(k) - \overline{y^2(k)})(y^2(k - \tau) - \overline{y^2(k)})], \quad (3.2)$$

sendo que $E[\cdot]$ indica a esperança matemática. Se o sinal $y(k)$ é considerado ergódico, pode-se substituir a esperança matemática pela média temporal. Com base nas funções de autocorrelação descritas acima pode-se chegar à seguinte constante:

$$\tau_m = \min\{\tau_y, \tau_{y^2}\}, \quad (3.3)$$

em que τ_y é o instante do primeiro mínimo de $r_y(\tau)$ e τ_{y^2} é o instante do primeiro mínimo de $r_{y^2}(\tau)$. Finalmente, escolhe-se o fator de decimação, Δ , de forma que as funções (3.1)

e (3.2) do sinal decimado $y^*(k) = y^l(\Delta k)$ satisfaçam

$$10 \leq \tau_m \leq 20. \quad (3.4)$$

sendo que os limites inferior e superior de (3.4) podem ser relaxados para 5 e 25, respectivamente (Aguirre, 2000a), a critério do modelador.

3.2.4 Detecção de não-linearidades

Por fim, os dados de identificação devem passar por testes de *detecção de não-linearidades*. Esses testes verificam, dentro de um limite de confiança pré-determinado, se o sistema possui algumas características próprias dos sistemas lineares. Caso não sejam verificadas essas propriedades, é necessária a utilização de modelos não-lineares para aproximar as características do mesmo.

Em (Haber, 1985) podem-se encontrar alguns algoritmos simples para verificação se há ou não indícios de não-linearidades nos dados. Dentre tais algoritmos, o mais simples consiste em realizar dois testes independentes no sistema a ser modelado operando em condições diferentes. Em seguida, verifica-se se o princípio da superposição é aplicável.

Um outro procedimento consiste em calcular

$$r_{y'y'}(\tau) = E[y'(k+\tau)y'^2(k)], \quad (3.5)$$

sendo $y'^2 = (y(k) - E[y(k)])^2$ e o sinal de apóstrofe significa que a média foi removida do sinal. Portanto, $r_{y'y'}(\tau) = 0, \forall \tau$ se o sistema for linear (Billings e Voon, 1983).

3.3 Representações não-lineares

A escolha de uma representação matemática para identificar um sistema dinâmico não-linear é um fator importante para o sucesso da modelagem. Entretanto, pouco valor tem sido dado a essa etapa na literatura, o que pode ser traduzido pelo número relativamente pequeno de trabalhos publicados em que se busca estudar as propriedades das representações. Certas características específicas de uma representação, como simetria de pontos fixos, podem ser cruciais para o sucesso da aplicação daquela representação a um dado sistema (Aguirre, 2000b). Independentemente da representação utilizada, algumas etapas são comuns a qualquer uma delas, tais como as etapas de seleção de estrutura e

estimação de parâmetros.

Uma das primeiras representações não-lineares utilizadas foram as séries de Volterra. Tal representação pode ser vista como o equivalente à resposta ao impulso para sistemas não-lineares. Como consequência, é afirmado que as séries de Volterra apresentam como desvantagem a necessidade de utilizar um grande número de parâmetros para reproduzir as características desejadas (Aguirre, 2000a). A aplicação de séries de Volterra torna-se praticamente inviável no caso de sistemas com ordem superior a dois (Billings, 1980).

Também encontram-se entre os esforços para o desenvolvimento de técnicas não-lineares aplicáveis à identificação de sistemas as chamadas representações híbridas, envolvendo características dinâmicas lineares e não-linearidades estáticas. Essas representações híbridas recebem o nome de modelos orientados a blocos, e têm como principais representantes os modelos de Hammerstein e de Wiener (Wiener, 1958).

Representações mais complexas têm sido regularmente desenvolvidas. Entretanto, um fenômeno recente é a renovação do interesse por essas representações clássicas, como pode ser observado nos trabalhos de Pottmann e Pearson (Pottmann e Pearson, 1998; Pearson e Pottmann, 2000), com modelos orientados a blocos.

Uma forma geral de representação de sistemas dinâmicos não-lineares é por meio da chamada *abordagem NARMAX*. A representação matemática NARMAX (*Nonlinear autoRegressive Moving Average with eXogenous inputs*) (Leontaritis e Billings, 1985; Chen e Billings, 1989) que, traduzindo, seria modelo não-linear auto-regressivo de média móvel com entradas exógenas, vem sendo largamente empregada nas últimas duas décadas.

Modelos NARMAX podem ser descritos pela equação:

$$y(k) = F^{\ell} \begin{bmatrix} y(k-1), \dots, y(k-n_y), \\ u(k-d), \dots, u(k-d-n_u+1), \\ e(k), \dots, e(k-n_e) \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

sendo $k = 1, \dots, N$. F^{ℓ} é uma função não-linear qualquer. $y(k)$ e $u(k)$ são, respectivamente, saída e entrada do sistema, que têm seus atrasos representados por n_y , n_u respectivamente. d representa o tempo de retardo do sistema. $e(k)$ representa incertezas e n_e , o atraso de $e(k)$.

Nesta seção serão apresentadas, de forma sucinta, algumas das principais representações NARMAX, que implementam o mapeamento não-linear F^{ℓ} em (3.6). Serão abordados os modelos polinomiais e racionais, as redes neurais do tipo perceptron multicamadas

(MLP) e as RBFs. Convém ressaltar que a profundidade com que as descrições serão feitas depende, em grande parte, do interesse pela representação. Tal interesse é manifesto através de semelhanças com as RBFs e da importância que a representação vem adquirindo em identificação de sistemas.

3.3.1 Modelos racionais e polinomiais

Em um modelo racional discreto F^l é representado por uma razão de polinômios do tipo (Billings e Chen, 1989)

$$y(k) = \frac{a \left(\begin{array}{c} y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-1), \dots \\ u(k-n_u), e(k-1), \dots, e(k-n_e) \end{array} \right)}{b \left(\begin{array}{c} y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-1), \dots \\ u(k-n_u), e(k-1), \dots, e(k-n_e) \end{array} \right)} + e(k), \quad (3.7)$$

sendo que $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ são funções polinomiais não-lineares quaisquer.

A fim de simplificar, os polinômios do numerador e denominador da Equação (3.7) são definidos, respectivamente, como

$$a(k) = \sum_{j=1}^{\text{num}} p_{nj}(k) \theta_{nj}, \quad (3.8)$$

$$b(k) = \sum_{j=1}^{\text{den}} p_{dj}(k) \theta_{dj}, \quad (3.9)$$

sendo p_{nj} e p_{dj} os regressores dados por $y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-1), \dots, u(k-n_u), e(k-1), \dots, e(k-n_e)$ ou combinações lineares dos mesmos; θ_{nj} e θ_{dj} os parâmetros, todos se referindo, respectivamente, ao numerador e denominador. num é o número de termos no numerador e den o número de termos no denominador. Assim, o número de termos a ser estimado é dado por num + den.

Modelos racionais podem descrever eficientemente várias classes de não-linearidades, sendo capazes de representar com exatidão certos tipos de singularidades (Corrêa, 2001). Essa característica deve-se ao fato de que, para valores do denominador próximos a zero a saída do modelo varia rapidamente, tornando possível a representação de sinais com saltos abruptos. Além disso, os modelos racionais possuem boa propriedade de extrapolação, são fáceis de avaliar e incluem modelos polinomiais como caso especial.

A aplicação de modelos racionais na identificação de sistemas não-lineares reais é relativamente recente e pouco frequente na literatura. Em (Corrêa, 2001) podem ser vistos vários exemplos de aplicação, tais como modelagem do circuito de Chua e de um pequeno aquecedor elétrico.

Os modelos polinomiais, casos particulares da formulação racional, são definidos para $b(k) = 1$ na Equação (3.7). Todas as variáveis são similares às do modelo racional e $F^\ell[\cdot]$ representa uma função polinomial qualquer, de grau de não-linearidade ℓ . As funções não-lineares polinomiais, diferentemente das racionais, são lineares nos parâmetros, permitindo a utilização de algoritmos de estimação de parâmetros para sistemas lineares (Billings e Voon, 1984).

Algumas variações de modelos NARMAX polinomiais têm sido sistematicamente abordadas na literatura, incluindo os modelos bilineares e lineares por partes (Billings, 1980; Haber e Unbehauen, 1990). Em modelos polinomiais bilineares todos os termos não-lineares são do tipo $y(k-i)u(k-j)$, $\forall i, j$, ou seja, tratam-se de modelos polinomiais com grau de não-linearidade igual a 2. Já os modelos lineares por partes consistem em modelos lineares válidos em faixas de operação específicas, previamente selecionadas.

Outro tipo de modelo polinomial é aquele descrito através de equações diferenciais, sendo, portanto, contínuos. Modelos polinomiais contínuos construídos com base em um sinal contínuo no tempo $y(t)$ são obtidos a partir das derivadas do sinal. No caso de ordem três por exemplo, tomaria-se $\dot{X} = Y = \dot{y}(t)$, $\dot{Y} = Z$ e $Z = F(X, Y, Z)$, com os três regressores (X, Y, Z) formados pelo sinal $y(t)$ e suas derivadas, \dot{y} e \ddot{y} . O modelo polinomial contínuo poderia, então, ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \dot{y}(t), \\ \dot{Y} &= \ddot{y}(t), \\ \dot{Z} &= \sum_{\ell=1}^{n_\theta} \theta_\ell \psi^\ell,\end{aligned}\tag{3.10}$$

sendo $\psi^\ell = X^i Y^j Z^k$ e $i, j, k \in \mathbb{N}$. Para essa classe de modelos uma dificuldade adicional é a necessidade de estimar as derivadas do sinal $y(t)$.

Aplicações de modelos polinomiais em identificação de sistemas não-lineares são mais frequentes na literatura (Vallverdu et al., 1992; Noshiro et al., 1993; Pröll e Karim, 1994). Em (Corrêa, 2001), o autor aplica modelos polinomiais em diversos sistemas reais e simulados. Já o uso de modelos contínuos foi sistematizado por Gouesbet (Gouesbet e Letellier, 1994).

3.3.2 Redes neurais

Representações matemáticas de sistemas dinâmicos não-lineares baseadas em redes neurais artificiais (RNAs) foram inicialmente propostas por (Narendra e Parthasarathy, 1990). Desde então, o surgimento de novos tipos de redes, e o aprimoramento de algoritmos de treinamento e criação de novos, muitos deles voltados especificamente para identificação de sistemas, tem feito elevar o número de aplicações reportadas na literatura. Uma parte dessas aplicações já encontra uso industrial (Mavrouniotis e Chang, 1992; Häck e Köhne, 1996; Ohba e Ishida, 1998).

De uma maneira geral, as RNAs são classificadas quanto a sua topologia, características computacionais de seus nodos e algoritmo de treinamento (Henrique et al., 1998). Outra classificação importante, e que será abordada nesta seção, é quanto a direção do fluxo de informação internamente à rede. RNAs em que os sinais internos fluem na direção da entrada para a saída são chamadas de redes *feedforward*, enquanto aquelas que apresentam realimentação são denominadas redes recorrentes.

3.3.2.1 Feedforward

A principal característica das redes *feedforward* é que nestas o fluxo de informação ocorre sempre da entrada para a saída. As redes *feedforward* foram originalmente concebidas para mapear funções estáticas, não possuindo capacidade de reproduzir internamente, por si só, comportamentos dinâmicos.

Em redes *feedforward*, como a *perceptron multicamadas*, (MLP, do inglês *MultiLayer Perceptron*), a camada de entrada não realiza nenhuma transformação, apenas passa os sinais de entrada para os neurônios da camada seguinte. Sabe-se que redes MLP com uma única camada escondida que realize uma transformação não-linear dos sinais de entrada são capazes de aproximar, com uma dada precisão, qualquer função contínua, desde que não se faça restrições quanto ao número de nodos ou quanto a ordem de grandeza dos pesos (Cybenko, 1989). Considere uma rede MLP com uma camada escondida, contendo n nodos, com r entradas e m saídas. A saída do j -ésimo nodo da camada escondida, no instante k é:

$$y_j(k) = f_j \left(\sum_{i=1}^{N_r} w_{ji}^h(k) x_i(k) + b_j^h(k) \right), \quad (3.11)$$

sendo x_i a i -ésima entrada do nodo, w_{ji}^h os pesos entre os nodos da camada de entrada e um nodo da camada escondida, b_j^h os termos de polarização, y_j a saída do neurônio j , N_r o número de entradas aplicadas ao nodo e f_j uma função de ativação não-linear. Alguns

tipos de funções de ativação de uso muito comum são as funções sigmoidais, entre as quais a tangente hiperbólica, bastante usada, é representada por:

$$f(x_i) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \forall i. \quad (3.12)$$

No caso considerado, a saída do i -ésimo nodo da camada de saída é:

$$y_i(k) = f_i \left(\sum_{j=1}^n w_j^o(k) f \left(\sum_{i=1}^{N_r} w_{ji}^h(k) x_i(k) + b_j^h(k) \right) + b_i^o(k) \right), \quad (3.13)$$

sendo w_j^o pesos da camada de saída, b_j^o termos de polarização do i -ésimo neurônio de saída e n o número de neurônios da camada escondida.

3.3.2.2 Recorrência

Para que uma RNA seja empregada em identificação de sistemas é necessário provê-las de algum tipo de recorrência. Uma forma de fazer isso é com recorrência externa: valores atrasados dos neurônios de saída são realimentados na entrada da rede. Neste caso, é mais comum o uso do termo *Time-Delay Neural Network* (TDNN). Assim, em identificação de sistemas, o número de neurônios na camada de saída depende do número de variáveis de saída do sistema. Por sua vez, o número de neurônios na camada de entrada é determinado pelo número de variáveis de entrada e saída do sistema, e por seus atrasos máximos. O número de neurônios nas camadas intermediárias normalmente depende da complexidade do problema. É comum utilizar nodos com funções de ativação lineares na camada de saída. Sob um ponto de vista generalizado, uma rede TDNN também pode ser interpretada em termos da equação geral NARMAX, levando em consideração que a rede produz uma transformação não-linear do conjunto de regressores correspondentes às suas entradas.

A saída de uma rede de recorrência interna pode ser definida como (Elman, 1990):

$$y_i(k) = F_i \left(\sum_{j=1}^n w_j^o(k) f \left(\sum_{i=1}^{N_r} w_{ji}^h(k) x_i(k) + b_j^h(k) + \sum_{j=1}^m w_{jN_r+i} h_\ell \right) + b_i^o \right), \quad (3.14)$$

sendo h_ℓ o valor anterior na saída do neurônio ℓ da camada escondida. A presença da realimentação interna dá as redes recorrentes a capacidade de reproduzir, internamente, comportamentos dinâmicos, sem necessidade de atrasar externamente os sinais. Por isso,

as redes recorrentes são consideradas melhores aproximações do comportamento de redes neurais biológicas.

Uma vantagem atribuída às redes de recorrência interna é a capacidade de filtragem de ruído uma vez que a cada etapa do treinamento o vetor de entrada apresenta componentes de ruído da amostra atual e de amostras passadas (Gençay e Liu, 1997). Tal fato possibilita uma maior rejeição ao ruído. No caso de redes sem recorrência interna seria necessário acrescentar à RNA estruturas para tratamento do ruído para alcançar um efeito semelhante (Sze, 1995)

Uma desvantagem das redes de recorrência interna é a existência de um grau de liberdade estrutural ainda maior que o das demais RNAs. Seria necessário definir ainda as recorrências e outras variações estruturais, como unidades de inércia na camada escondida. Essas unidades de inércia são formadas por auto-conexões, úteis para evitar oscilações e instabilidades durante o processo de treinamento. Tal estrutura costuma receber o nome de rede parcialmente recorrente de Elman modificada (Coelho et al., 2000).

3.3.2.3 Aplicações

Aplicações de RNAs em identificação de sistemas não-lineares têm aparecido com relativa frequência na literatura. Em (Henrique et al., 1998), os autores utilizaram redes neurais para identificar um processo de neutralização de pH, com dados obtidos através da simulação de um modelo físico, bem como utilizando dados experimentais reais.

Gençay e Liu (1997) compararam o desempenho de redes com recorrência interna e TDNNs em modelagem e predição. Os autores obtiveram modelos para diversas séries temporais: mapas logístico e de Hénon e equação de Mackey-Glass. A principal conclusão apresentada no trabalho consiste na maior capacidade das redes com recorrência interna em filtrar ruído.

Coelho e colegas (2000) compararam o desempenho dinâmico e estático de redes TDNN e parcialmente recorrente de Elman modificada com modelos NARMAX polinomiais e racionais, além de RBFs. Para tal, utilizaram um estudo de caso a partir de dados reais coletados de um pequeno aquecedor elétrico.

Wavelets também vêm sendo progressivamente utilizadas como função de ativação em RNAs. Exemplos de aplicação em identificação de sistemas dinâmicos não-lineares são, entre outros: predição de uma série temporal caótica gerada pelo mapa logístico (Bakshi e Stephanopoulos, 1993) e identificação de uma turbina a gás e do atuador hidráulico de um braço robótico (Juditsky et al., 1994).

3.3.3 Funções de Base Radiais

Considere um modelo RBF não-autônomo, com recorrência externa¹

$$y(k) = w_0 + \sum_{i=1}^{N_c} w_i \phi(\| \mathbf{y}(k-1) - \mathbf{c}_i \|). \quad (3.15)$$

Na formulação geral, ou seja, acrescido o polinômio linear, agora composto por termos autoregressivos e de entrada exógena, tem-se²

$$y(k) = w_0 + \sum_{i=1}^{N_c} w_i \phi(\| \mathbf{y}(k-1) - \mathbf{c}_i \|) + \sum_{i=1}^{n_{ul}} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_{ul}} b_i u(k-i) + e(k), \quad (3.16)$$

sendo $\mathbf{y}(k-1) = [y(k-1) \dots y(k-n_y) \ u(k-1) \dots u(k-n_u)]^T$ o vetor que define o espaço de entrada das funções de base, e os centros \mathbf{c}_i (de dimensão $(n_u + n_y)$), $i = 1, 2, \dots, N_c$,

$$\mathbf{c}_i = [c_{i,1} \ c_{i,2} \ \dots \ c_{i,n_y} \ c_{i,(n_y+1)} \ \dots \ c_{i,(n_y+n_u)}]^T. \quad (3.17)$$

Uma importante característica das RBFs é que, uma vez selecionados os centros a estimação dos parâmetros converte-se em um problema essencialmente linear. Talvez por isso, a aplicação de RBFs em identificação de sistemas tem sido sistematicamente relatada na literatura. Adomaitis e colegas (1990) empregaram RBFs na análise e estudo de oscilações de período um e dois de um sistema eletroquímico. Em (Carlin, 1992), o autor utilizou RBFs para identificar as características dinâmicas de um robô hidráulico industrial.

Yu e Williams (2000) , por sua vez, aplicaram RBFs em dados obtidos através da simulação de um modelo de um reator tanque agitado contínuo (CSTR), enfatizando a avaliação do desempenho dos modelos obtidos. Para tanto, os autores propuseram um algoritmo para determinação das ordens dos regressores de modelos que podem ser representados pela equação geral NARMAX (3.6). Com propósito semelhante, Bomberger e Seborg (1998) aplicaram RBFs na identificação de um processo simulado de polimerização

¹A estrutura de um aproximador RBF remete a uma rede com uma camada escondida de funções não-lineares.

²Essa estrutura é comumente referida na literatura como *Affine plus Radial Basis Function*.

e de um processo real de neutralização de pH.

Os trabalhos de Alistair Mees, sobre reprodução de comportamentos dinâmicos não-lineares por meio de modelos parcimoniosos, encontraram boa aplicação nas RBFs. Em (Mees, 1993), o autor aplica RBFs na reprodução de certas características do mapa de Ikeda. Outras aplicações apresentadas incluem: investigação de padrões de respiração em crianças e classificação de risco de morte súbita infantil (Judd e Stick, 1993); análise de uma série temporal composta pela quantidade de manchas solares e da variação mensal de epidemia de sarampo na Austrália (Mees, 1993).

3.4 Seleção de estrutura

No caso de modelos lineares, a escolha da sua estrutura se restringe, basicamente, à escolha do número de pólos e de zeros, bem como à determinação do atraso puro de tempo. Em representações não-lineares há inúmeras técnicas para cada tipo de representação. Neste trabalho as considerações a respeito da determinação de estrutura limitar-se-ão às representações lineares nos parâmetros, como os modelos polinomiais e RBF.

É desejável a obtenção de uma representação parcimoniosa, garantindo que os termos importantes sejam levados em conta e descartando só os termos que não contribuem para a dinâmica do sistema. O procedimento para a escolha dos termos a serem incluídos no modelo é chamado de determinação de estrutura. Várias técnicas podem ser usadas para fazer a determinação de estrutura como por exemplo algoritmos genéticos (Fonseca et al., 1993) e *zeroing-and-refitting* (Kadtke et al., 1993).

3.4.1 Determinação de estrutura utilizando ERR

A taxa de redução de erro (*error reduction ratio*) ou ERR (Billings et al., 1989) é usada para associar a cada termo candidato um índice correspondente à contribuição deste na explicação da variância dos resíduos.

Para ver isso de forma matemática, primeiro define-se a variância do erro de modelagem $\xi(k)$ como sendo:

$$\text{var}\{\xi(k)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \sum_{i=1}^N g_i^2 w_i^T w_i \right]. \quad (3.18)$$

em que g_i indica os elementos do vetor de parâmetros \mathbf{g} e w_i indica regressores ortogonais

e \mathbf{y} é o vetor contendo os dados de saída.³

Supondo que nenhum termo fosse acrescentado ao modelo, a variância de $\xi(k)$ seria igual ao erro quadrático da saída $y(k)$. A cada termo acrescentado, a variância de $\xi(k)$ decresce de um fator igual a $\frac{1}{N}(g_i^2 w_i^T w_i)$, em que w_i indica o termo incluído e g_i o seu respectivo parâmetro. A redução no valor da variância pode ser normalizada com relação ao erro quadrático médio do sinal de saída. Assim, o ERR de cada termo é definido como sendo:

$$[ERR] = \frac{(g_i^2 w_i^T w_i)}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \quad (3.19)$$

O ERR pode ser utilizado na determinação de estrutura, por exemplo, de modelos polinomiais e RBFs. Escolhe-se o número de termos desejado por meio de ferramentas auxiliares, como por exemplo o critério de informação de Akaike, considerando-se para compor a estrutura final aqueles que possuem os maiores valores de ERR.

3.4.2 Critério de informação de Akaike

Um procedimento para a determinação do número de termos de um modelo é o critério de informação. Um método utilizado para estimar o número de termos que devem ser incluídos no modelo é o critério de informação de Akaike (AIC). De acordo com este critério, o número de termos de um modelo deve minimizar a função custo J , que se apresenta da seguinte maneira

$$J = N \log(\text{var}\{\xi(k)\}) + 2n_p, \quad (3.20)$$

sendo N o comprimento do registro de dados e n_p o número de termos de processo no modelo. Esse critério estabelece um compromisso entre a qualidade dos ajustes de identificação, contida no primeiro termo da Equação (3.20) e a procura por representações parcimoniosas, revelada pelo segundo termo.

Ao número de termos determinado a partir do AIC corresponde um modelo cuja estimação de parâmetros minimiza a variância dos resíduos de identificação – partindo de uma estrutura previamente ajustada por um critério de seleção de estrutura. Contudo, não se pode afirmar que o número de termos selecionados torne o modelo capaz de reproduzir as propriedades dinâmicas do sistema original (Aguirre e Billings, 1994). O resultado obtido através do AIC pode ser visto como um indicativo na procura do número *ideal* de

³Em (Aguirre, 2000a), o autor descreve um algoritmo baseado na transformação de Householder para a ortogonalização dos regressores (Chen e Billings, 1989)

termos do modelo.

3.5 Estimação de parâmetros

Essa etapa começa com a escolha do algoritmo a ser utilizado. Será descrito um procedimento para estimação de parâmetros apenas para representações lineares nos parâmetros.

Uma vez escolhida a estrutura de um modelo NARMAX, deve-se estimar seus parâmetros para que o modelo possa se aproximar do comportamento dinâmico do sistema original. Isso é normalmente feito em modelos lineares nos parâmetros aplicando-se técnicas de mínimos quadrados (MQ) aos dados de identificação.

Para estimar os parâmetros de um mapa $F[\cdot]$, a Equação (3.6) tem de ser expressa na forma de regressão linear

$$y(k) = v^T(k-1)\hat{\theta} + \xi(k), \quad (3.21)$$

em que $v(k-1)$ é o vetor de regressores que contém todas as combinações lineares e não-lineares, dos termos de entrada, saída e ruído até o instante $k-1$ inclusive. Os parâmetros correspondentes a cada termo nessas matrizes são os elementos do vetor $\hat{\theta}$. $\xi(k)$ são os resíduos ou erros de predição que são definidos como a diferença entre os dados medidos $y(k)$ e a predição um passo à frente $v^T(k-1)\hat{\theta}$.

O modelo dinâmico (3.21), tomado sobre uma massa de dados, gera restrições que podem se representadas pela Equação matricial:

$$\mathbf{y} = \Psi\hat{\theta} + \boldsymbol{\xi}, \quad (3.22)$$

em que Ψ é chamada de *matriz de regressores*. O vetor de parâmetros θ pode ser estimado por técnicas de mínimos quadrados, ou seja, por meio da minimização da função custo

$$J_{\text{MQ}}(\hat{\theta}) = (\mathbf{y} - \Psi\hat{\theta})^T (\mathbf{y} - \Psi\hat{\theta}). \quad (3.23)$$

A solução do problema de minimização do erro quadrático (MQ) expresso em (3.23) é dada pela seguinte expressão:

$$\hat{\theta}_{\text{MQ}} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T \mathbf{y}, \quad (3.24)$$

em que $[\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T$ é chamado de matriz *pseudo inversa* e $\Psi^T \Psi$ de matriz de *informação*.

A estimativa $\hat{\theta}_{\text{MQ}}$ é dita não-polarizada se

$$E[\hat{\theta}_{\text{MQ}}] = \theta. \quad (3.25)$$

sendo θ o vetor de parâmetros “reais”. Isso não acontecendo, os parâmetros são polarizados e os resíduos apresentam alguma dinâmica que não foi devidamente explicada pelo modelo. Uma alternativa para se evitar a polarização é a inclusão ou troca dos regressores do modelo, na tentativa de melhor explicar a dinâmica não modelada anteriormente.

Existem métodos de estimação de parâmetros que garantem a obtenção de estimativas não-polarizadas mesmo quando o ruído $e(k)$ não for branco ou quando o sistema apresentar ruído branco aditivo na saída do sistema. Um exemplo são os mínimos quadrados estendidos (Aguirre, 2000a).

3.6 Validação

Tendo obtido uma família de modelos, é necessário verificar se eles incorporam ou não as características de interesse do sistema original. Além disso, é interessante poder comparar os modelos entre si e decidir se há algum candidato significativamente melhor que os demais. Essa etapa é certamente subjetiva, sendo que o resultado da validação dependerá da aplicação pretendida para o modelo e da quantidade de informação disponível sobre o sistema original.

A ausência de algum termo importante no modelo pode provocar polarização dos parâmetros e o aparecimento de dinâmicas espúrias na simulação do modelo. Por essa razão, faz-se necessária a utilização de um critério para determinar se o modelo incorpora as características que lhe são exigidas. Neste trabalho foram considerados os seguintes aspectos:

1. predição infinitos passos à frente (simulação livre);
2. capacidade de representar o comportamento estático do sistema;
3. erro quadrático;
4. reconstrução do espaço de estados;

5. funções de correlação de resíduo.

Para casos de sistemas caóticos podem-se também citar:

6. expoentes de Lyapunov;

7. mapas de primeiro retorno;

8. diagramas de bifurcação.

3.7 Classificação da identificação

A utilização de *informação auxiliar*, ou seja, adicional aos dados dinâmicos, originou uma “nova” classificação dos métodos de identificação. De acordo com o nível de informação incorporada, os métodos de modelagem podem ser classificados como (Herbert e Tulleken, 1993; Sjöberg et al., 1995):

- *Modelagem caixa-branca*: consiste em procedimentos de modelagem em que a estrutura do modelo é totalmente conhecida, geralmente determinada pelas equações físicas ou químicas que regem o comportamento estático e dinâmico do sistema (Garcia, 1997);
- *Modelagem caixa-preta*: não se tem nenhuma informação *a priori* do sistema. Os parâmetros do modelo, geralmente, não possuem nenhum significado físico. O processo de modelagem, chamado de identificação, se baseia única e exclusivamente em dados de entrada e saída medidos do sistema;
- *Modelagem caixa-cinza*: é a construção de modelos que incorporam informação *a priori* do sistema, com um certo grau de incerteza na seleção da estrutura da representação (Jorgensen e Hangos, 1995). Sjöberg e outros (1995), subdividem a modelagem caixa-cinza em dois subgrupos:
 - a) *Modelagem física*: toda a estrutura é determinada por conhecimentos físicos do sistema, e apenas os parâmetros, ou um certo número desses são estimados a partir dos dados;
 - b) *Modelagem semifísica*: informações do sistema são usadas para sugerir combinações não-lineares entre os sinais medidos, utilizando tais informações na seleção da estrutura do modelo.

Em (Nepomuceno, 2002) adotou-se a seguinte nomenclatura. Se a informação adicional for relativa a algum conhecimento físico do sistema esse procedimento deverá ser chamado de identificação caixa-cinza. De um modo mais genérico, a identificação que utilizar um ou mais tipos de informação auxiliar de qualquer procedência, associada a técnicas de estimação de parâmetros, MQ ou outras, na minimização de custos que considerem múltiplos objetivos, será chamada *Identificação Multiobjetivo* (IM). A Figura 3.1 ilustra o posicionamento dos tipos de identificação. Note que a IM pode situar-se dentro das três faixas de identificação.

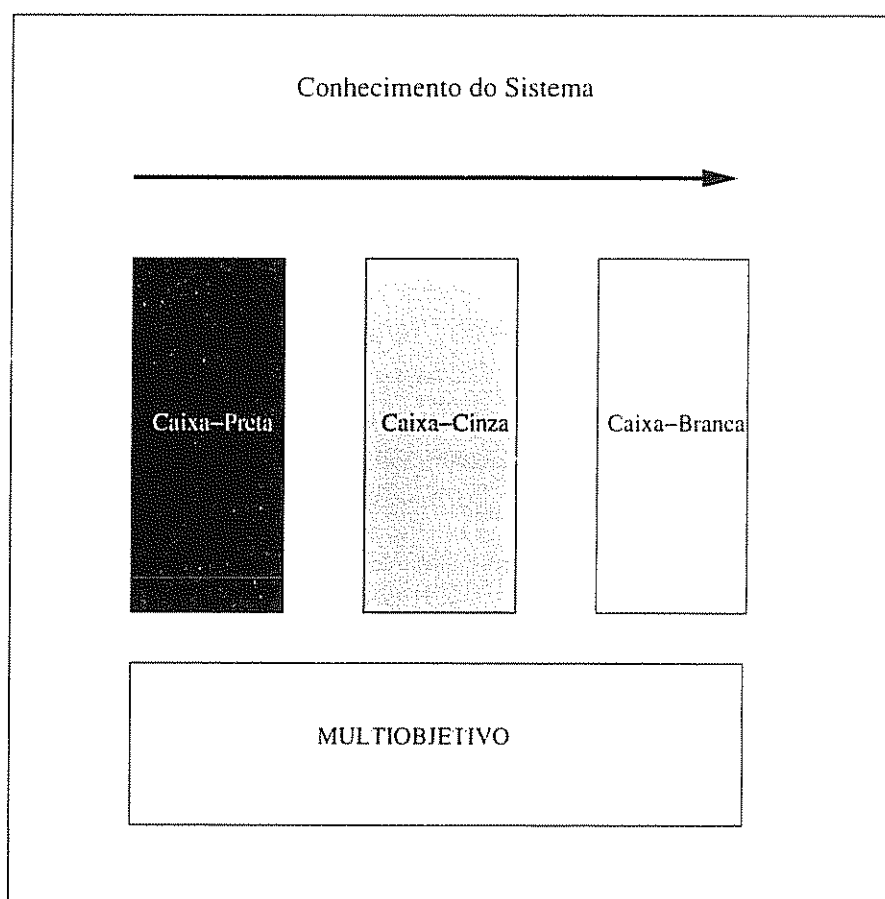


Figura 3 1: Esquema ilustrativo dos tipos de identificação

Esquema ilustrativo dos tipos de identificação. Note que a Identificação Multiobjetivo pode situar-se dentro das três faixas de identificação (Nepomuceno, 2002).

Além da inexistência de significado físico, os modelos não-lineares caixa-preta sofrem também do problema da seleção de estrutura e, na maior parte das vezes, fazem uso de

um número excessivo de parâmetros. Nesse contexto, surgem as técnicas de identificação caixa-cinza, como uma alternativa viável aos procedimentos puramente caixa-preta. Busca-se a utilização de informações disponíveis, sem prescindir das massas de dados coletadas do processo.

O reconhecimento da necessidade de desenvolver ferramentas para incorporação de informação auxiliar no processo de identificação remonta ao trabalho clássico de Billings (1980). Neste, o autor menciona a dificuldade de incorporar informação auxiliar e de interpretar características físicas de processos a partir de modelos baseados em séries funcionais como desvantagens dessa classe de representações. Mais recentemente, características como as mencionadas voltaram a ser definidas como justificativa para uma alegada pouca aceitação de certas representações, como séries de Volterra e redes MLP (Aguirre, 2000a). Em outro artigo de caráter revisional, Haber e Unbehauen (1990) também mencionaram a importância de desenvolver mecanismos para utilização de informação auxiliar na seleção de estruturas e estimação de parâmetros de modelos não-lineares.

Em um trabalho em que buscava compilar aspectos práticos da identificação de sistemas Godfrey (1986) destacou que, no processo de obtenção de modelos não-lineares, a preocupação com o nível de excitação presente nos dados é essencial. Excitar um sistema em toda a sua não-linearidade nem sempre é possível, muitas vezes por restrições de segurança e/ou qualidade impostas aos processos industriais. Desse modo, o uso de informação auxiliar tem sido justificado para a obtenção de modelos mais globais, ou seja, para estender a faixa de validade dos modelos (Johansen, 1996; Cubillos e Lima, 1997; Aguirre, 2000a).

A partir de meados da década de oitenta alguns trabalhos voltados para a incorporação de informação auxiliar começaram a surgir. Uma das primeiras abordagens aplicava-se à estimação de parâmetros de modelos lineares (Bai e Sastry, 1986). Nesse trabalho os autores mencionam como benefícios da metodologia proposta uma rápida convergência na estimação de parâmetros e um menor erro de identificação.

Alguns autores ressaltaram os benefícios dos métodos caixa-cinza no projeto de controladores (Tulleken, 1993). No contexto do controle de processos químicos, Wright e colegas (1998) citaram que "... ao representar a não-linearidade de processos químicos é desejável refletir de forma precisa todo o conhecimento auxiliar sobre a química envolvida". Em (Bohlin e Graebe, 1995) é interessante notar a afirmação dos autores de que as técnicas de incorporação de informação auxiliar devem ser utilizadas como complemento aos métodos convencionais de identificação. Outro aspecto importante, destacado por Jorgensen e Hangos (1995), é o potencial da modelagem caixa-cinza como meio de garan-

tir consistência entre modelos de um mesmo processo usado para diferentes propósitos, e para permitir manutenção e desenvolvimento contínuo de modelos.

No contexto das redes neurais o uso de informação *a priori* tem sido sugerido como forma de obter modelos mais parcimoniosos e globais (Cubillos e Lima, 1997). Por sua vez, Gan (2000) afirma que "... o empiricismo e a falta de transparência na construção de modelos neurais devem ser reduzidos, de modo a diminuir a demanda computacional durante o treinamento e extrair conhecimento útil dos modelos". A necessidade de tornar as redes neurais mais transparentes também é citada pelo autor como meio de tentar explicar o "funcionamento" interno da representação. Gan (2000) também menciona que, embora algumas formas de utilizar informação auxiliar em redes neurais já tenham sido sugeridas, estas se baseiam fundamentalmente na formulação de estruturas modularizadas ou na formalização do conhecimento de forma heurística ou como lógica proposicional. Por sua vez, Hernández e Arkun (1992) mencionam a importância do desenvolvimento de procedimentos para extração de informação útil de modelos neurais como uma forma de compreender estratégias de controle baseado em modelo sugeridas na literatura, e como benefício no projeto de novas estratégias.

Em (Walker et al., 2001) os autores citam que a imposição de propriedades locais e globais do sistema original nos modelos representa uma promissora linha de investigação no sentido de obter representações mais precisas e estáveis de sistemas não-lineares.

3.7.1 Identificação caixa-cinza com RBFs

Ainda são poucos os trabalhos que tratam de técnicas de identificação caixa-cinza aplicadas a modelos baseados em RBFs. Na prática, alguns deles nem mesmo são voltados à identificação de sistemas dinâmicos (Röscheisen et al., 1991).

Uma das abordagens apresentadas na literatura é a utilização de modelos híbridos em série, nos quais RBFs são utilizadas apenas para aproximar a característica estática não-linear dos sistemas e a parte dinâmica é representada por modelos lineares, como ARX (Knohl e Unbehauen, 1998; Okuda, 2000). Para se obter esse tipo de modelo híbrido é necessário definir algumas restrições nos parâmetros do modelo ARX, de modo a garantir que, sob condições estacionárias, a saída do modelo seja igual à das RBFs (Okuda, 2000). Neste trabalho, o autor afirma que uma vantagem desse tipo de estrutura híbrida está na capacidade de identificar o processo com menos testes e a partir de menos excitações dinâmicas. Os processos industriais modernos normalmente armazenam uma grande quantidade de dados operacionais que podem ser utilizados para gerar modelos

desse tipo, ou seja, apenas a partir de dados históricos. A metodologia empregada em (Okuda, 2000) obteve bons resultados quanto à capacidade de generalização dos modelos frente à curva de estado estacionário e o comportamento em malha aberta. Apesar disso, o foco do trabalho é o comportamento em malha fechada dos modelos híbridos, visando um propósito de controle.

Um outro resultado interessante do trabalho de Okuda (2000) foi a demonstração da importância de ter informação sobre ganho em estado estacionário no modelo global do processo quando o propósito é de controle. Dessa forma, o autor justifica o uso da estrutura híbrida para modelagem com propósito de controle. Entretanto, tal procedimento não pode ser considerado, de maneira geral, caixa-cinza.

Tentativas de incorporar informação proveniente de modelos analíticos já foram feitas também por Röscheisen e colegas (1991). Nesse trabalho os autores aplicam um modelo analítico de um processo metalúrgico para selecionar a estrutura de modelos RBF e escolher um certo regime de treinamento. O propósito de modelagem é o aperfeiçoamento do sistema de controle. Entre as vantagens da abordagem os autores citam: (i) combate ao problema da deficiência dos dados e (ii) melhoria da generalização dos modelos obtidos. O problema abordado é caracterizado por completa escassez de dados, motivada pelas dificuldades operacionais impostas pelo processo, um laminador de tiras à quente.

Muitos processos químicos e metalúrgicos contam com modelos analíticos relativamente precisos, que incorporam muitos anos de experiência com a planta. Apesar disso, seu caráter aproximado não permite grande confiabilidade, dependendo do propósito. Nesses casos, Röscheisen e colegas (1991) advogam que esses modelos devem ser utilizados para gerar um conjunto de pseudo-dados que auxiliem o desenvolvimento de um modelo caixa-preta juntamente com dados reais. Os procedimentos sugeridos para se combinar os dados reais aos dados gerados pelo modelo analítico seguem uma abordagem estatística.

Os seguintes resultados foram reportados em (Röscheisen et al., 1991): (i) em regiões em que não há dados disponíveis o modelo apresentou resultados próximos aos do modelo analítico; (ii) se os dados estavam disponíveis e sugeriam uma resultado diferente da predita pelo modelo analítico as RBFs modificavam suas saídas em direção aos dados; (iii) quanto maior o volume de informação *a priori* empregada maior a melhoria na generalização.

Outros trabalhos buscam impor restrições conhecidas do processo a ser modelado. Em (Walker et al., 2001) os autores propuseram um novo tipo de função radial para garantir que, na ausência de entradas, os nodos escondidos possam convergir para valores constantes. A motivação baseou-se no desejo de modelar certos dispositivos eletrônicos

que possuem esse comportamento. A função proposta tem a forma

$$o(\| \mathbf{y} - \mathbf{c} \|) = e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\|\mathbf{y}_y - \mathbf{c}_y\|^2} \times \left[e^{-\left(\frac{1}{2\rho^2}\right)\|\mathbf{c}_u\|^2} - e^{-\left(\frac{1}{2\rho^2}\right)\|\mathbf{y}_u - \mathbf{c}_u\|^2} \right]. \quad (3.26)$$

sendo \mathbf{y}_y os regressores de saída, \mathbf{y}_u os regressores de entrada, \mathbf{c}_y os centros determinados a partir das saídas, \mathbf{c}_u os centros determinados a partir das entradas, e (σ, ρ) a largura da função considerando as entradas e saídas, respectivamente. Note que fazendo $\mathbf{y}_u = 0$ a contribuição da função de base é nula. Considerando um modelo RBF acrescido de termos polinomiais lineares, nessas situações o comportamento do modelo dependerá apenas desses termos. Uma vez garantida a estabilidade da parte ARX, o comportamento do modelo convergirá ao exibido pelo dispositivo real ao ter a excitação externa anulada.

Walker e colegas (2001) aplicaram esse tipo de função para modelar dispositivos eletrônicos simples, como transistores e amplificadores. Os autores afirmam que a incorporação de propriedades locais (singularidades) às RBFs oferecem um bom caminho para o desenvolvimento de modelos mais precisos e estáveis de sistemas.

Em (Walker et al., 1999), os autores buscam elevar a generalização de representações de dispositivos eletrônicos através de modelos RBF transportáveis, ou seja, modelos que podem ser ajustados para “funcionarem” em diferentes pontos de operação. Para isso, desenvolveram relações polinomiais entre os parâmetros do modelo e os pontos de operação do dispositivo. Os modelos são gerados a partir de dados coletados em alguns pontos de operação e as relações são construídas para diferentes pontos. Os autores argumentam que a realização de testes em alguns dispositivos eletrônicos pode ser caro, ou mesmo impraticável em certos pontos de operação. A disponibilidade de dados em apenas alguns pontos deve então ser suficiente para obter modelos globais. A partir dos modelos obtidos para cada ponto operacional os parâmetros do modelo são apenas interpolados ou extrapolados para pontos não presentes nos dados. Para isso, os modelos obtidos devem ter a mesma estrutura e terem sido gerados sob as mesmas condições (não a rigor).

Walker e colegas (1999) sugerem que a partir dos centros determinados para um dado ponto operacional sejam estimados os parâmetros do modelo sobre os outros pontos com dados disponíveis. Posteriormente, os pesos de cada modelo obtido, juntamente com os pontos operacionais correspondentes deve ser ajustado um polinômio qualquer, a partir do qual os parâmetros poderão ser interpolados ou extrapolados.

Os desenvolvimentos realizados neste trabalho, apresentados no Capítulo 5, partem da análise das características das RBFs aplicadas à identificação de sistemas não-lineares.

Parte-se do mesmo ponto que (Conrêa, 2001), e sugere-se restrições na estrutura e parâmetros que impõem determinadas características de estado estacionário.

3.8 Conclusões do capítulo

O presente capítulo teve como objetivo familiarizar o leitor com a identificação caixa-preta. As cinco principais etapas da identificação foram brevemente abordadas e algumas representações foram ilustradas.

Essas técnicas são a base de todo um conjunto de novas técnicas que estão sendo desenvolvidas para tornarem os modelos cada vez mais representativos dos sistemas reais.

Outro objetivo do capítulo foi classificar os tipos de identificação, à luz das novas técnicas que têm como ponto de partida as etapas aqui descritas e a perspectiva de incorporação de informação auxiliar.

Parte II

Propriedades das Funções de Base Radiais

Representação de Informação de Estado Estacionário

4.1 Introdução

No processo de identificação de sistemas dinâmicos não-lineares é por vezes desejável que o modelo final aproxime não apenas as características dinâmicas originais (aquelas definidas como relevantes de acordo com o objetivo da modelagem), mas também o comportamento em estado estacionário. Um caso comum, citado na literatura, em especial em relação a processos químicos, é a construção de modelos para futura aplicação em controle, para o qual relata-se a relevância da representação do ganho estático original (Fruzzetti et al., 1997).

Recentemente, a capacidade de aproximação de características de pontos de equilíbrio, ou estados estacionários, como número, localização, multiplicidade e simetria, passou a receber alguma atenção na literatura. Em modelos não-autônomos, uma extensão natural dessa investigação é avaliar a variação dos autovalores com o ponto de operação (definido por um par entrada estacionária e seu respectivo valor estacionário da saída). Para as representações NARMAX polinomial e racional, por exemplo, foi possível estabelecer relações simples entre estrutura (e parâmetros) e características de estado estacionário (Aguirre e Mendes, 1996; Aguirre et al., 2000). Nesses casos, adicionalmente foram estabelecidos procedimentos viáveis para utilizar informação sobre estados estacionários na construção dos modelos (Aguirre et al., 2004a).

Um dos casos em que a incorporação de informação auxiliar de estado estacionário é mais claramente indicada é quando os dados dinâmicos não excursionam toda a região relevante à modelagem. Aqui, informação sobre localização – ou mesmo o número, a presença ou não de simetria e a multiplicidade – e características da variação dos autovalores, não-observáveis nos dados dinâmicos, pode ser empregada para auxiliar na seleção

de estrutura e estimação de parâmetros de modelos não-lineares (Corrêa, 2001; Barroso, 2001; Nepomuceno et al., 2002; Aguirre et al., 2004b). O cenário é de extensão da região de validade dos modelos. Mas mesmo quando os dados de identificação incorporam as informações desejáveis estas podem não ser suficientes para garantir a construção de modelos que as representem inequivocamente (Haykin e Principe, 1998). Assim, o uso de informação auxiliar pode reduzir de forma considerável o espaço de busca de modelos. O procedimento de identificação fica então menos dependente da eficiência dos métodos de seleção (automática) de estrutura e de estimação de parâmetros. A informação auxiliar pode proporcionar as restrições necessárias para que esses métodos gerem uma maior quantidade de modelos válidos entre os quais escolher.

O capítulo é organizado como se segue. Primeiramente, é apresentado um estudo de caso sobre a possível influência da presença de termos polinomiais lineares do tipo ARX acrescidos às RBFs na representação de características de estado estacionário. Posteriormente, o capítulo é dedicado ao estudo do mapeamento (na estrutura e parâmetros) de informações sobre estados estacionários e variação dos autovalores. Posteriormente, são propostos procedimentos para incorporar nos modelos RBF informação sobre localização de pontos de equilíbrio e variação dos autovalores. Os desenvolvimentos do capítulo se definem para funções de base gaussianas. As exceções serão mencionadas, quando existentes.

4.2 Influência do polinômio linear: um estudo de caso¹

Uma prática comum em algumas aplicações de RBFs é adicionar termos lineares polinomiais à estrutura original, a fim de “melhorar o desempenho da aproximação e elevar a taxa de convergência do processo de treinamento” (Poggio e Girosi, 1990). Outras justificativas para a inclusão de termos lineares em RBFs têm sido reportadas na literatura. Knohl e Unbehauen (1998) afirmam que, com o uso de termos polinomiais lineares pode-se “evitar o surgimento de oscilações indesejadas entre as funções” (problemas numéricos), o que seria uma vantagem em controle adaptativo. Por sua vez, Mees (1993) sugeriu que modelos formados por RBFs globais podem ter seu comportamento melhorado na presença de termos polinomiais lineares. Entretanto, aparentemente não existia um estudo comparativo a respeito dos efeitos independentes dos termos lineares em identificação de sistemas. Sendo assim, esta seção é dedicada ao estudo do desempenho comparativo de

¹Os principais resultados apresentados nesta seção estão em (Alves et al., 2001)

modelos baseados em RBFs acrescidas desses termos, à luz de dados reais coletados em um forno elétrico simples. Sistema e massas de dados são sucintamente descritos na próxima seção.

Os tipos de estrutura investigados neste estudo de caso correspondem às formas apresentadas nas equações (3.15) e (3.16), representativas, respectivamente, de estruturas sem termos lineares e com esses termos. Pretende-se comparar o desempenho dos modelos de cada tipo na representação dinâmica e, principalmente, avaliar a possível influência dos termos lineares (autoregressivos e de entrada exógena) na capacidade de reprodução de características de estado estacionário. Sendo um problema cuja massa de dados de identificação não excursiona toda a faixa de operação relevante do sistema (Rodrigues, 1996), destaca-se a oportunidade de observar o efeito da inclusão dos termos lineares no aumento da faixa de validade dos modelos.

Neste estudo de caso os centros são selecionados por meio do algoritmo de k -médias (Spath, 1980).

4.2.1 Descrição do sistema e dados

O forno elétrico cujos dados são utilizados na seção 4.2 foi desenvolvido no Laboratório de Controle de Processos Industriais (LCPI) do Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica (CPDEE) (Abreu, 1993). Trata-se de uma caixa metálica com dimensões 15 x 10 x 31 cm, construído a partir de uma chapa de alumínio com espessura igual a 2 mm. O elemento de aquecimento interno é uma lâmpada elétrica de 200 W. O forno não é isolado termicamente, de modo que variações na temperatura ambiente afetam o seu comportamento dinâmico.

O sensor utilizado na medição de temperatura é um resistor com coeficiente de temperatura negativo (NTC) ligado em ponte de Wheatstone, a qual encontra-se equilibrada à temperatura ambiente. O sinal de tensão resultante do desbalanceamento da ponte é processado por um conversor A/D de 12 bits e por um microcomputador, onde são implementados os algoritmos de controle.

O sensor de temperatura é apoiado sobre a superfície externa do forno elétrico, sem ser afixado à sua estrutura metálica. Essa configuração de medição torna o sistema sensível a distúrbios externos, tais como flutuações da temperatura ambiente e existência de correntes de ar.

O objetivo de controle é ajustar a temperatura de um ponto na superfície externa

do forno a um perfil de referência previamente estabelecido. O controlador determina o tempo em que a lâmpada permanece acesa entre duas amostragens, gerando um sinal de controle normalizado entre 0 e 1. A lâmpada permanece acesa por um tempo uT_s , u sendo o sinal de controle e T_s o período de amostragem. O elemento atuador é um *triac* operando como chave.

Abreu (1993) desenvolveu um modelo baseado na física do processo. A troca de calor entre a lâmpada e a superfície externa do forno é processada por meio de dois fenômenos: convecção e radiação. A taxa de transferência de calor por radiação depende da quarta potência da temperatura absoluta do meio emissor, o que torna o processo não-linear e dependente da condição de operação (ganhos e parâmetros variantes com o ponto de operação). A transferência de calor por convecção depende diretamente da diferença de temperatura absoluta entre os meios envolvidos.

A transferência de calor por radiação irá predominar durante o período de aquecimento do forno, dadas as suas dimensões reduzidas, que impedem a circulação das ondas de convecção. Por outro lado, durante o resfriamento predomina a transferência por convecção. Esse mecanismo faz com que o forno apresente diferentes constantes de tempo para o aquecimento e resfriamento (Abreu, 1993).

Os dados usados para gerar e validar os modelos analisados neste estudo de caso são apresentados nas figuras 4.1 e 4.2, respectivamente, resposta ao “ruído quantizado” e resposta ao degrau. O sinal de saída é a temperatura da superfície externa do forno, normalizada em relação à temperatura máxima possível, e a entrada é o sinal aplicado ao modulador PWM, que controla a potência média fornecida à lâmpada. O intervalo de amostragem utilizado foi de $T_s = 210$ s. Nas figuras, o eixo- x indica número de amostras.

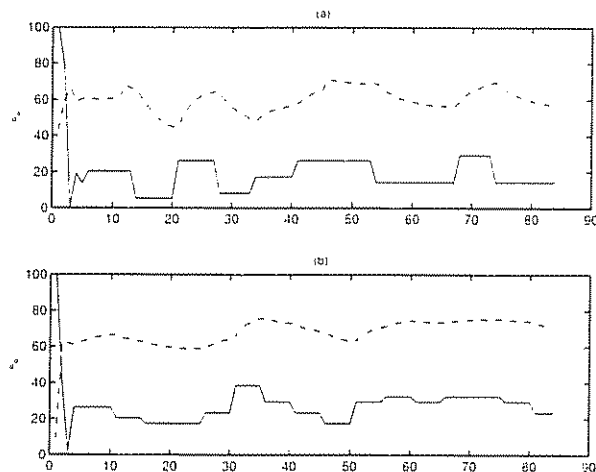


Figura 4.1: Resposta ao ruído quantizado do forno elétrico.

Eixo- x indica o número da observação. A linha contínua é a entrada e a tracejada é a temperatura de saída, ambas normalizadas entre 0 e 100%. (a) Massa de dados frq1 e (b) Massa de dados frq2.

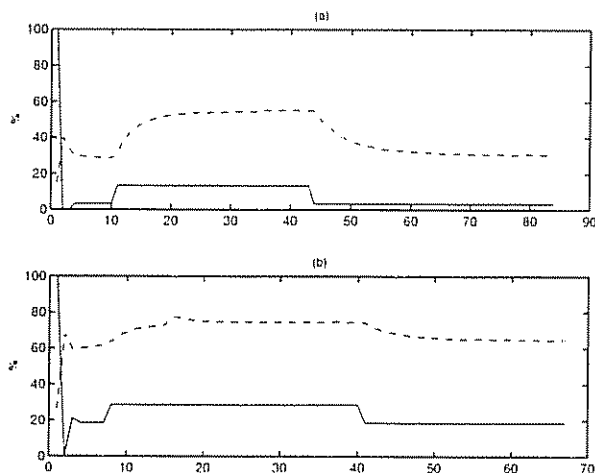


Figura 4.2: Resposta ao degrau do forno elétrico.

Eixo- x indica o número da observação. A linha contínua é a entrada e a tracejada é a temperatura de saída, ambas normalizadas entre 0 e 100%. (a) Massa de dados fd1 e (b) Massa de dados fd2.

A Figura 4.2 revela que o forno possui constantes de tempo distintas para aquecimento

e resfriamento. Uma característica observada nas massas de dados `fd1` e `fd2`, relatada em (Rodrigues, 1996), é o lento e contínuo aumento da temperatura da saída do sistema enquanto o sinal de controle é mantido constante, no intervalo entre as amostras 25 e 40.

Esse fato mostra que o sistema possui duas constantes de tempo de aquecimento, uma rápida e outra lenta. Outra observação relevante diz respeito à região excitada em cada massa de dados. Na massa `frq1` a temperatura do sistema oscila entre 50 e 70% do valor normalizado, em `fd1` entre 30 e 50%, em `fd2` entre 70 e 80%, e em `frq2`, massa utilizada na identificação, entre 60 e 70%. Assim, principalmente no caso das respostas ao degrau, os modelos são validados em regiões de operação diferentes da correspondente aos dados de identificação.

No caso considerado estão "disponíveis" apenas 4 pontos de estado estacionário, inferidos a partir das excitações em degrau. Por esse motivo, o desempenho em estado estacionário dos modelos obtidos são comparados ao de um modelo NARMAX racional, dinamicamente válido, apresentado em (Corrêa, 2001), cuja curva estática é dada por:

$$\bar{y} = \frac{0,618\bar{u}}{0,0878 + 5,5353 \times 10^{-3}\bar{u}} \quad (4.1)$$

4.2.2 Resultados experimentais

Dois modelos RBF de funções gaussianas são comparados nesta seção:

- `rbfntp1`, representante da estrutura da Equação (3.15), com $n_u = 3$ e $n_y = 1$, e $N_c = 12$ (13 parâmetros).
- `rbfltp1`, com termos lineares, representante da estrutura da Equação (3.16), com $n_u = n_{u\ell} = 3$, $n_y = n_{y\ell} = 1$ e $N_c = 1$ (6 parâmetros).

A ordem do modelo foi escolhida conforme sugerido em (Corrêa, 2001). Esse tipo de informação pode ser muito útil em identificação de sistemas, uma vez que, para uma dada estrutura fixa, o desempenho das RBFs piora claramente na presença de regressores de entrada mal especificados (Sze, 1995). De outra forma, a determinação de valores adequados para n_u e n_y precisará ser feita por meio de um longo (e muitas vezes ineficiente) procedimento de tentativa-e-erro, ou com a aplicação de um algoritmo que procura estimar esses valores diretamente a partir dos dados.

A função estática não-linear de cada modelo foi obtida simulando-os para valores constantes de entrada.

Os desempenhos dos modelos `rbf1tp1` e `rbfntp1` na simulação livre nas massas de dados de validação podem ser vistos nas figuras 4.3 e 4.4, composta apenas por `frq1` e `fd1`. Os desempenhos dos modelos nas outras massas de dados foram resumidos na Tabela 4.1. A Figura 4.5 mostra a relação de estado estacionário das RBF, bem como a relação equivalente de um modelo racional, proposto em (Corrêa, 2001), Equação (4.1).

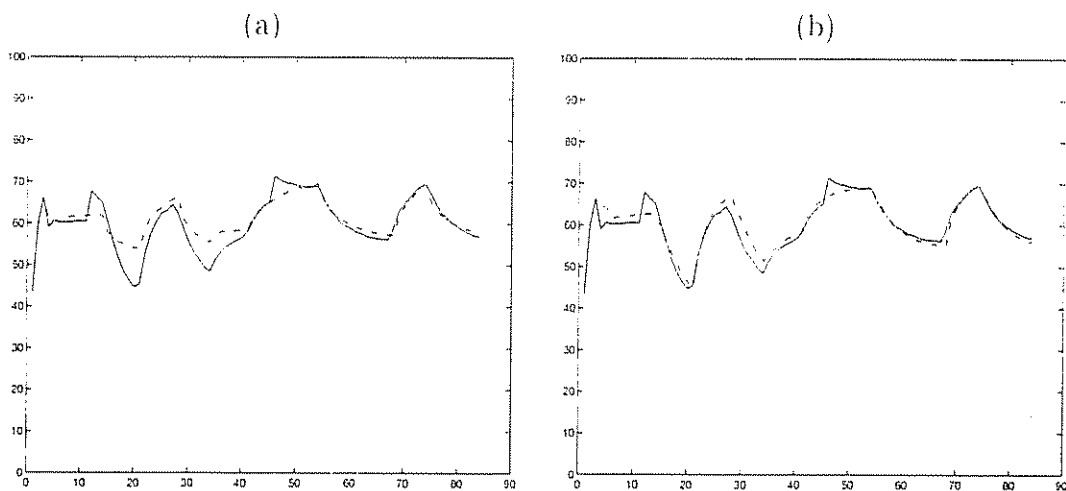


Figura 4.3: Simulação livre dos modelos do forno elétrico na massa de dados `frq1`

(a) Modelo `rbfntp1`. (b) Modelo `rbf1tp1`. (•••) Entrada. (—) saída do forno, (---) saída dos modelos. O eixo- x indica o número da observação, e o eixo- y as saídas, em ambos os casos.

Analisando as figuras 4.3 e 4.4, e a Tabela 4.1, observa-se que o comportamento dinâmico do modelo `rbf1tp1` está competitivamente próxima à do processo original em todas as massas de dados, inclusive em faixas de operação não presentes no conjunto de dados de identificação. Além disso, as curvas de estado estacionário, mostradas na Figura 4.5, revelam que, para certas faixas da entrada, o modelo `rbf1tp1` aparenta ser mais adequado do que o modelo racional descrito em (Corrêa, 2001), cuja curva estática é dada pela Equação (4.1), especialmente em relação às amplitudes dos degraus da massa de dados `fd1` (ver Figura 4.4). Na Figura 4.5(b), pode-se notar que para valores de entrada abaixo da faixa presente na massa de dados de identificação (que estende-se aproximadamente em $20 \leq \bar{u} \leq 40$, ver Figura 4.1), as curvas estáticas da RBF e do modelo racional divergem uma da outra. Entretanto, pode-se dizer que o desempenho

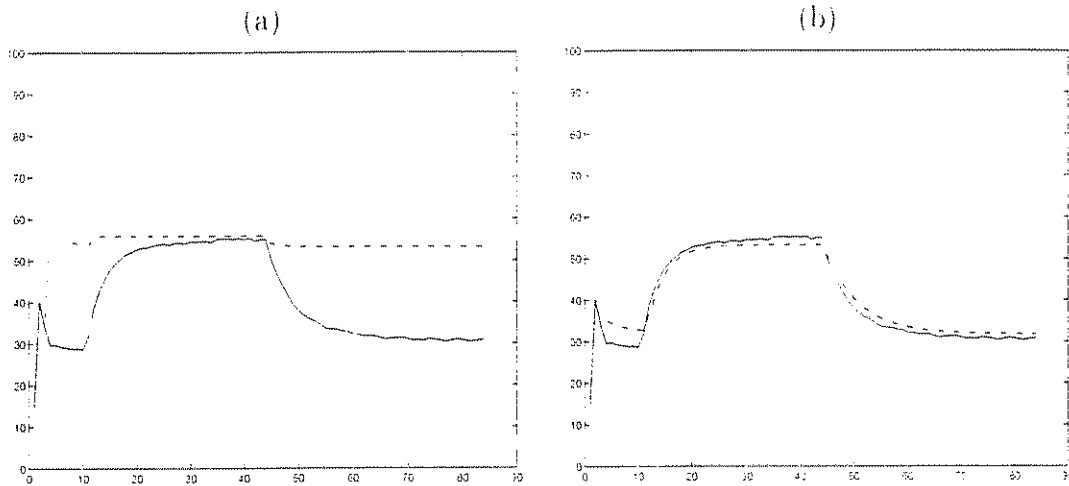


Figura 4.4: Simulação livre dos modelos do forno elétrico na massa de dados *fd1*.

(a) Modelo *rbfntp1* (b) Modelo *rbfltp1* (•••) Entrada. (—) saída do forno. (— —) saída dos modelos. O eixo-*x* indica o número da observação, e o eixo-*y* as saídas, em ambos os casos.

do modelo *rbfltp1* é mais representativo da característica estática na região $3 \leq \bar{u} \leq 15$ (ver as amplitudes das respostas ao degrau, Figura 4.2). O desempenho do modelo *rbfntp1* é significativamente pior para entradas externas à faixa presente na massa de dados de identificação, não conseguindo representar as distinções nas constantes de tempo de aquecimento e resfriamento. Por fim, nota-se que o modelo sem termos lineares *rbfntp1* só alcançou desempenho comparável a *rbfltp1* nas massas correspondentes às entradas em ruído quantizado, sendo superior em *frq1*.

4.2.3 Discussão

Os resultados apresentados nesta seção mostraram que o desempenho dinâmico e em estado estacionário de RBFs acrescidas de termos polinomiais lineares do tipo ARX foi significativamente melhor, pelo menos no caso considerado. A melhora do desempenho dinâmico pode ser compreendida, considerando que termos lineares ARX formam uma base bem-conhecida, e bem-estabelecida, para identificação de sistemas dinâmicos. Por outro lado, ainda não é claro o motivo da melhoria no desempenho em estado estacionário, ou seja, na recuperação da curva estática não-linear do sistema original, uma vez que essa característica teoricamente depende apenas da parte não-linear dos modelos. Conjectura-se que a melhora no desempenho estático deve-se ao fato de que, uma vez incluídos

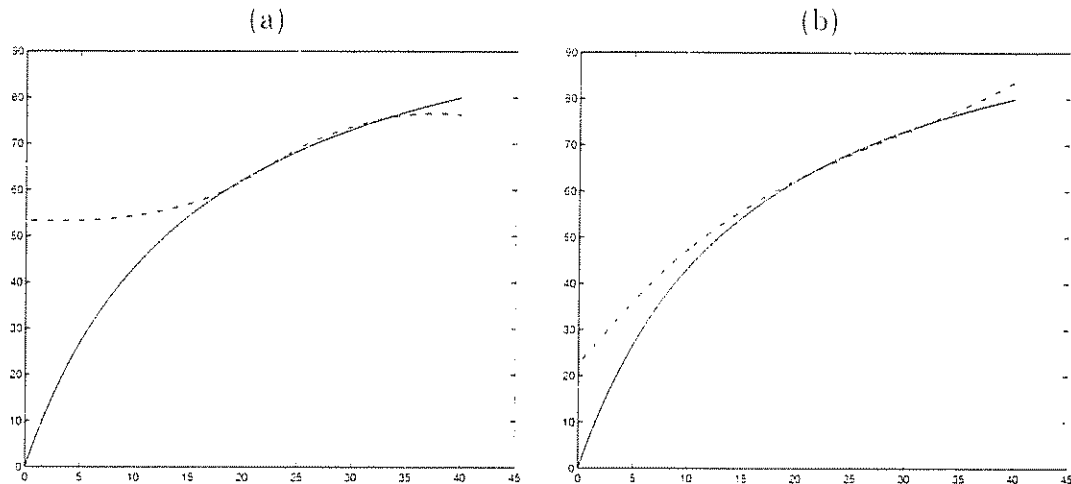


Figura 4.5: Características de estado estacionário dos modelos do forno elétrico.

(a) Modelo `rbfntp1`. (b) Modelo `rbf1tp1`. (—) Modelos. (—) representa a característica estática do modelo NARMAX racional (Equação (4.1)). O eixo- x é \bar{u} (potência elétrica em estado estacionário, em %) e o eixo- y é \bar{y} (temperatura em estado estacionário, em %).

os termos ARX, estes deixam a parte não-linear da RBF “livre” para se ajustar à não-linearidade estática do sistema (Alves et al., 2001). Aparentemente, esse fato é, de certa forma, análogo ao problema da polarização dos parâmetros (em modelos ARX), induzida pela presença de ruído colorido na equação de regressão. A polarização é evitada adicionando termos de média móvel ao modelo, que expliquem a correlação presente no ruído (Aguirre, 2000a). De maneira similar, a ausência de termos ARX aparentemente resulta em “polarização” (revelada por um ajuste ruim ao comportamento em estado estacionário do sistema), induzida pela dinâmica linear presente nos dados.

Esta seção apresentou um exemplo em que modelos RBF com termos polinomiais lineares foram utilizados para identificar um sistema dinâmico não-linear, com algumas vantagens em comparação com a estrutura sem parte linear.

4.3 Estados estacionários de funções de base radiais

A questão da recuperação de informação a partir de modelos não-lineares adquiriu relevância nos últimos anos (Knohl e Unbehauen, 1998). Para as representações NARMAX polinomial e racional já se encontram disponíveis alguns procedimentos eficientes para

Tabela 4.1: Resultados da validação dinâmica dos modelos do forno elétrico

Em negrito, os melhores resultados dentro de cada critério, todos baseados no erro quadrático na simulação livre. Desvio: Desvio-padrão; SEQ: Soma dos erros quadráticos.

Ruído quantizado - massa de dados frq1				
Modelo	Máx.	Média	Desvio	SEQ
rbfltp1	$2,84 \times 10$	3,91	6,98	$3,28 \times 10^2$
rbfntp1	$7,88 \times 10$	8,52	$1,55 \times 10$	$7,16 \times 10^2$
Dados de identificação - massa de dados frq2				
Modelo	Máx.	Média	Desvio	SEQ
rbfltp1	4,45	1,13	1,24	$9,54 \times 10$
rbfntp1	5,57	1,03	1,55	$8,62 \times 10$
Degrau - massa de dados fd1				
Modelo	Máx.	Média	Desvio	SEQ
rbfltp1	$3,17 \times 10$	3,62	5,69	$3,04 \times 10^2$
rbfntp1	$9,61 \times 10^2$	$2,51 \times 10^2$	$2,43 \times 10^2$	$2,11 \times 10^4$
Degrau - massa de dados fd2				
Modelo	Máx.	Média	Desvio	SEQ
rbfltp1	$5,34 \times 10$	$1,14 \times 10$	7,80	$7,62 \times 10^2$
rbfntp1	$4,29 \times 10$	8,64	6,96	$5,79 \times 10^2$

extração de informação relevante à validação, e à análise dos sistemas identificados. As informações extraídas incluem número e localização de pontos fixos (Aguirre e Mendes, 1996), curva estática (Jácome e Aguirre, 1996) e função de autovalores (Corrêa, 2001). Por outro lado, aparentemente qualquer tentativa de recuperar informação (relevante à identificação de sistemas) analiticamente a partir de redes neurais parece ser complexa, conseqüência da não-linearidade nos parâmetros que lhes é característica (Mees, 1993).

No caso das RBFs, no entanto, a natureza linear nos parâmetros (uma vez fixados os parâmetros não-lineares) tem motivado a busca por propriedades importantes para a identificação de sistemas, bem como o desenvolvimento de procedimentos para extração de informação (Walker et al., 1999). Nesta seção é apresentado um procedimento simples, inspirado em (Hernández e Arkun, 1992), para recuperação dos estados estacionários, ou dos pontos fixos, no caso de modelos autônomos. A estabilidade dos estados estacionários também é analisada, por meio da avaliação dos autovalores, obtidos a partir de modelos RBF, em torno de cada condição de equilíbrio.

4.3.1 Localização

Considere um modelo RBF não-autônomo, na formulação geral para modelos RBF (acrescido o polinômio linear com termos autoregressivos e de entrada exógena). Equação (3.16), aqui repetida por conveniência.

$$y(k) = w_0 + \sum_{i=1}^{N_c} w_i \phi(\| \mathbf{y}(k-1) - \mathbf{c}_i \|) + \sum_{i=1}^{n_{ul}} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_{ul}} b_i u(k-i) + e(k), \quad (4.2)$$

sendo $\mathbf{y}(k-1) = [y(k-1) \dots y(k-n_y) \ u(k-1) \dots u(k-n_u)]^T$ os centros \mathbf{c}_i (de dimensão $(n_u + n_y)$), $i = 1, 2, \dots, N_c$.

$$\mathbf{c}_i = [c_{i,1} \ c_{i,2} \ \dots \ c_{i,n_y} \ c_{i,(n_y+1)} \ \dots \ c_{i,(n_y+n_u)}]^T, \quad (4.3)$$

e $e(k)$ o erro de predição de um passo a frente. Também por conveniência, nos desenvolvimentos seguintes do capítulo será considerado que $n_u \geq n_{ul}$, e $n_y \geq n_{yl}$.

Definição 4.3.1 *Pontos fixos de um sistema discreto autônomo são os pontos de operação que apresentam a seguinte característica:*

$$y(k) = y(k+i) = \bar{y}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^+. \quad (4.4)$$

Para o caso de sistemas não-autônomos, os pontos de equilíbrio são determinados fazendo $u(k-i) = \bar{u}$, $\forall i \in \mathbb{Z}^+$, e buscando a condição (4.4). Ao par (\bar{u}, \bar{y}) é dado o nome de estado estacionário.

□

Tomando o sistema em estado estacionário, tanto na entrada quanto na saída, ou seja, $y(k) = y(k-1) = \dots = y(k-n_y) = \bar{y}$ e $u(k-1) = u(k-2) = \dots = u(k-n_u) = \bar{u}$ a Equação (4.2) pode ser reescrita como

$$\bar{y} \left(1 - \sum_{i=1}^{n_{yl}} a_i \right) - \bar{u} \left(\sum_{i=1}^{n_{ul}} b_i \right) - w_0 = \sum_{i=1}^{N_c} w_i \phi(\| \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{c}_i \|), \quad (4.5)$$

sendo $\bar{y} = [\bar{y} \quad \bar{y} \quad \bar{u} \quad \bar{u}]^T$. A partir de agora, por uma questão de simplicidade, será adotada para a parte linear dos modelos RBF a definição de agrupamento de termos, ou seja

$$\begin{aligned}\Sigma_u &= \sum_{i=1}^{n_{ul}} b_i, \\ \Sigma_y &= \sum_{j=1}^{n_{yl}} a_j.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Para cada valor estacionário da entrada, \bar{u} , os pontos fixos do modelo podem ser determinados resolvendo (4.5) para \bar{y} , encontrando as soluções de uma equação do tipo

$$\bar{y} = F(\bar{u}, \bar{y}),\tag{4.7}$$

sendo $F(\cdot)$ uma função não-linear (com parte linear para entrada exógena e w_0), o que significa que pode existir mais de uma saída em estado estacionário para cada patamar da entrada.² Evidentemente, para o caso autônomo considera-se $u(k-i) = 0$, $i = 0, 1, \dots$ em (4.2), e os pontos fixos são dados pela solução de uma equação $\bar{y} = F(\bar{y})$. Aparentemente não é possível inferir o número de pontos fixos de (4.7) a partir de conhecimento estrutural (a não ser numericamente).

Uma solução analítica para (4.7) existe, por exemplo, para os casos em que $n_y = 0$, situação na qual os termos em \bar{y} e \bar{u} podem ser separados, a determinação dos pontos fixos passando a ser dada por $\bar{y} = F(\bar{u})$. Adicionalmente, existirá apenas uma saída estacionária por patamar de entrada. Modelos com não-linearidade apenas nos termos de entrada correspondem a uma das arquiteturas de redes neurais originalmente propostas por Narendra e Parthasarathy (1990).

Para o caso mais geral (Equação (4.7)), porém, a extração dos estados estacionários precisará ser feita, por exemplo, por simulação livre do modelo ou com o auxílio de algum método de solução numérica de equações não-lineares. A simulação numérica consiste em fixar um patamar de entrada, \bar{u} , atribuir as condições iniciais, e observar a saída do modelo, aguardando até que a sua variação seja inferior a uma tolerância $0 < \epsilon \ll 1$. De outro modo, métodos numéricos podem ser utilizados para determinar as raízes da equação $\bar{y} - F(\bar{u}, \bar{y}) = 0$ para cada valor fixo da entrada. A solução numérica da Equação

²Quando se diz haver multiplicidade de estados estacionários na saída, é possível também que dois ou mais valores de entrada estacionária correspondam a uma mesma saída estacionária (Pearson e Pottmann, 2000).

(4.7) tem a vantagem de proporcionar a variedade dos estados instáveis, que escapam às simulações livres dos modelos, assim como nos casos em que há multiplicidade de estados estacionários.³

4.3.2 Estabilidade

Em sistemas contínuos, um estado estacionário (\bar{u}, \bar{y}) é estável no sentido de Lyapunov se os autovalores da matriz Jacobiana, avaliada em $\mathbf{D}_f(\bar{u}, \bar{y})$, ou seja, definida pelas raízes da *equação característica*:

$$\det[\mathbf{D}_f(\bar{u}, \bar{y}) - \lambda \mathbf{I}] = 0. \quad (4.8)$$

apresentam parte real $\text{Re}[\lambda_i] \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ (Anishchenko, 1990). A solução é assintoticamente estável se todo λ_i satisfaz a inequação estrita $\text{Re}[\lambda_i] < 0$. Isso significa que uma pequena perturbação arbitrária do estado (\bar{u}, \bar{y}) faz com que essa tenda para zero quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, o sistema retorna ao equilíbrio (Anishchenko, 1990).

Para sistemas discretos, um estado estacionário é considerado estável se os autovalores da matriz Jacobiana, definidos como as raízes da Equação (4.8), são caracterizados por $|\lambda_i| \leq 1$, ou seja, se estão localizados dentro de um círculo de raio unitário.⁴ Vale notar que para um mesmo sistema a matriz Jacobiana obtida a partir de modelos contínuos e discretos será diferente.

Baseado na definição acima, para verificar a estabilidade local de um estado estacionário basta calcular os autovalores da matriz Jacobiana (matriz de linearização) do sistema no ponto de operação determinado.⁵

Considere a seguinte representação em espaço de estados de (4.2)

$$\begin{bmatrix} y(k - n_y + 1) \\ y(k - n_y + 2) \\ \vdots \\ y(k - 1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \mathbf{D}_f \begin{bmatrix} y(k - n_y) \\ y(k - n_y + 1) \\ \vdots \\ y(k - 2) \\ y(k - 1) \end{bmatrix} + \mathbf{B}\mathbf{U}(k). \quad (4.9)$$

³Em alguns casos, no entanto, mais de um valor estacionário pode ser obtido simulando os modelos com patamares de entrada em diferentes “direções” – degrau positivo e degrau negativo, na mesma amplitude, por exemplo.

⁴Autovalores nos planos s e z estão relacionados por: $z = e^{sT_s}$, sendo s a variável associada à transformada de Laplace e T_s é o tempo de amostragem.

⁵Sendo esses os pólos do modelo linearizado em torno do equilíbrio considerado.

sendo \mathbf{D}_f a matriz Jacobiana da Equação (4.2), avaliada em cada estado estacionário, ou seja,

$$\mathbf{D}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \Delta_{n_y}|\bar{u}, \bar{y} & \Delta_{n_y-1}|\bar{u}, \bar{y} & \Delta_{n_y-2}|\bar{u}, \bar{y} & \dots & \Delta_1|\bar{u}, \bar{y} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta_d &= \frac{\partial F}{\partial y(k-d)} = a_d - \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N_c} w_i (y(k-d) - c_{i,d}) \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y}(k-d) - \mathbf{c}_i\|^2}{\sigma^2}\right), \\ \Delta_d(\bar{u}, \bar{y}) &= a_d - \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N_c} w_i (\bar{y} - c_{i,d}) \exp\left(-\frac{\|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{c}_i\|^2}{\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

sendo $F(\cdot)$ uma função não-linear representativa do modelo RBF.

A solução geral da equação característica (4.8) resultará em uma equação de n_y -ésima ordem, ou seja, para cada estado estacionário existirão n_y autovalores definidos como as raízes da seguinte equação:

$$\lambda^{n_y} - \Delta_1(\bar{u}, \bar{y})\lambda^{n_y-1} - \dots - \Delta_{n_y-1}(\bar{u}, \bar{y})\lambda - \Delta_{n_y}(\bar{u}, \bar{y}) = 0. \quad (4.12)$$

O desenvolvimento da matriz Jacobiana associada a um modelo RBF será útil também no cálculo de expoentes de Lyapunov, avaliando a matriz ao longo de uma trajetória do atrator (Equação (2.10)), procedimento adotado no Capítulo 6.

Por fim, vale notar que, em conjunto, as técnicas para avaliação dos estados estacionários de modelos identificados podem se empregadas como ferramenta de validação por faixas de operação, uma vez confrontados com as características conhecidas do sistema original (Corrêa, 2001).

Com base nos desenvolvimentos até aqui apresentados é possível enunciar os seguintes Lemas.

Lema 4.3.1 *Os regressores em u , no espaço de entrada das funções de base ($n_u \geq 1$) e como termos lineares de entrada exógena ($n_{ul} \geq 1$), não influenciam os autovalores dos modelos RBF, e, conseqüentemente, não afetam o comportamento das constantes de tempo do modelo.*

DEMONSTRAÇÃO: Se um modelo RBF é tomado na forma $y(k) = F(\mathbf{u}(k-1))$, sem termos polinomiais lineares autoregressivos, ou seja, fazendo $n_y = 0$ e $n_{yt} = 0$, ou seja, tem-se toda a dinâmica subjacente representada unicamente em função da entrada, é possível escrever

$$y(k) = w_0 + \sum_i^{N_c} w_i \phi(\|\mathbf{u}(k-1) - \mathbf{c}_i\|) + \sum_{i=1}^{n_{ut}} b_i u(k-i). \quad (4.13)$$

sendo $\mathbf{u}(k-1) = [u(k-1) \ u(k-2) \ \dots \ u(k-n_u)]^T$, as derivadas parciais do tipo (4.11), que aparecem na matriz Jacobiana (4.10). Conseqüentemente, para qualquer estado (\bar{u}, \bar{y}) os autovalores serão nulos

□

Lema 4.3.2 Os regressores em y , no espaço de entrada das funções de base ($n_y \geq 1$), e como termos lineares autoregressivos ($n_{yt} \geq 1$), influenciam os autovalores dos modelos RBF, e, conseqüentemente, afetam o comportamento das constantes de tempo do modelo.

DEMONSTRAÇÃO: Se um modelo RBF é tomado na forma $y(k) = F(\mathbf{y}(k-1))$, sem termos polinomiais lineares de entrada exógena, ou seja, fazendo $n_u = 0$ e $n_{ut} = 0$ (modelo autônomo),

$$y(k) = w_0 + \sum_i^{N_c} w_i \phi(\|\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{c}_i\|) + \sum_{i=1}^{n_{yt}} a_i y(k-i). \quad (4.14)$$

sendo $\mathbf{y}(k-1) = [y(k-1) \ y(k-2) \ \dots \ y(k-n_y)]^T$, as derivadas parciais do tipo (4.11), que aparecem na matriz Jacobiana (4.10), dependerão dos parâmetros a_i e w_j , $i = 1, 2, \dots, n_{yt}$ e $j = 1, 2, \dots, N_c$, e das coordenadas dos centros n_y -dimensionais \mathbf{c}_j :

$$\Delta_d(\bar{u}, \bar{y}) = a_d - \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N_c} w_i (\bar{y} - c_{i,d}) \exp\left(\frac{-\|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{c}_i\|^2}{\sigma^2}\right). \quad (4.15)$$

com $\bar{\mathbf{y}} = [\bar{y} \ \bar{y} \ \dots \ \bar{y}]^T$. Tomando $n_{yt} \geq 1$ e $n_y = 0$ em (4.14)

$$\Delta_d(\bar{u}, \bar{y}) = a_d, \quad (4.16)$$

ou, tomando $n_{yl} = 0$ e $n_y \geq 1$

$$\Delta_d(\bar{u}, \bar{y}) = -\frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N_c} w_i (\bar{y} - c_{i,d}) \exp\left(-\frac{\|\bar{y} - \mathbf{c}_i\|^2}{\sigma^2}\right). \quad (4.17)$$

para o qual os autovalores dependerão do estado (\bar{u}, \bar{y}) .

□

Lema 4.3.3 A presença de regressores em y no espaço de entrada das funções de base ($n_y \geq 1$) indica que os autovalores dos modelos RBF irão variar com o estado estacionário (\bar{u}, \bar{y})

DEMONSTRAÇÃO: Se um modelo RBF é tomado na forma $y(k) = F(\mathbf{y}(k-1))$, sem termos polinomiais lineares autoregressivos e de entrada exógena, ou seja, fazendo $n_u = 0$, $n_{ul} = 0$ (modelo autônomo) e $n_{yl} = 0$.

$$y(k) = w_0 + \sum_i^{N_c} w_i \phi(\|\mathbf{y}(k-1)\|), \quad (4.18)$$

sendo $\mathbf{y}(k-1) = [y(k-1) \ y(k-2) \ \dots \ y(k-n_y)]^T$, as derivadas parciais do tipo (4.11), que aparecem na matriz Jacobiana (4.10), dependerão dos parâmetros w_i , $i = 1, 2, \dots, N_c$, das coordenadas dos centros n_y -dimensionais $\mathbf{c}_i = [c_{i,1} \ c_{i,2} \ \dots \ c_{i,n_y}]$, e do estado (\bar{u}, \bar{y}) , conforme Equação (4.17).

□

O procedimento para avaliação da constante de tempo de modelos RBF ao longo de uma determinada faixa de operação é resumido a seguir.

Roteiro 4.3.2: Determinação da variação da constante de tempo de modelos RBF

Início

1 → Calcular as derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial y(k-d)}$, $d = 1, 2, \dots, n_y$, sendo F o mapeamento não-linear quantificado pela Equação (4.2), conforme (4.11).

2 → Para cada estado estacionário (\bar{u}_k, \bar{y}_k) da faixa de interesse:

- avaliar as derivadas parciais no ponto estacionário (\bar{u}_k, \bar{y}_k) ;
- montar a equação característica do modelo para o estado (\bar{u}_k, \bar{y}_k) , conforme a Equação (4.8);
- calcular as raízes da equação característica (4.12), autovalores do modelo para o estado estacionário (\bar{u}_k, \bar{y}_k) , representando-os na forma $\lambda_i = r_i e^{\pm j\theta_i}$, $i = 1, 2, \dots, n_y$, sendo r_i o módulo e θ_i o ângulo;
- determinar, a partir da Equação (??), a constante de tempo associada a (\bar{u}_k, \bar{y}_k) , considerando a soma dos valores associados a cada autovalor, e desprezando aqueles que eventualmente se posicionem no semi-plano esquerdo do plano z .

Fim

4.3.3 Desenvolvimento: Modelos de primeira ordem

Seja um modelo RBF de primeira ordem (n_y e n_{yl} não maiores do que 1), com um único termo não-linear (centro), termo constante e atrasos em u iguais a n_u e n_{ul} , ou seja⁶

$$y(k) = w_0 + w_1 \phi(\|\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{c}\|) + a_1 y(k-1) + \sum_{i=1}^{n_{ul}} b_i u(k-i), \quad (4.19)$$

sendo $\mathbf{y}(k-1) = [y(k-1) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-n_u)]$ e $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n_u+1}]$, o centro de dimensão $(n_u + 1)$. Como $n_y = n_{yl} = 1$, a matriz Jacobiana do modelo linearizado, Equação (4.10), contará com um único elemento, cujo valor será dado pela seguinte derivada parcial

$$\left. \frac{\partial y(k)}{\partial y(k-1)} \right|_{\bar{u}, \bar{y}} = a_1 + w_1 \left. \frac{\partial \phi(\|\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{c}\|)}{\partial y(k-1)} \right|_{\bar{u}, \bar{y}}, \quad (4.20)$$

sendo que, tomando como exemplo a função gaussiana, $\phi(r) = e^{-r^2/\sigma^2}$, a derivada do último termo em (4.20) será dada por

$$\frac{\partial \phi(\|\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{c}\|)}{\partial y(k-1)} = -\frac{2}{\sigma^2} (y(k-1) - c_1) \exp\left(\frac{-\|\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{c}\|^2}{\sigma^2}\right), \quad (4.21)$$

com $\bar{\mathbf{y}} = [\bar{y} \ \bar{u} \ \dots \ \bar{u}]^T$.

⁶Os principais resultados apresentados nesta seção estão em (Alves e Corrêa, 2002).

Considerando o sistema em estado estacionário será possível escrever (4.19) da seguinte maneira

$$\frac{\bar{y}(1 - a_1) - \Sigma_u \bar{u} - w_0}{w_1} = \exp\left(\frac{-\|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{c}\|^2}{\sigma^2}\right) \quad (4.22)$$

Assim, substituindo o exponencial na Equação (4.21) pelo primeiro membro da Equação (4.22), e, posteriormente, resolvendo a equação característica do modelo (4.19), conforme a Equação (4.8), chega-se à seguinte expressão para a variação dos autovalores com o estado estacionário

$$\lambda(\bar{u}, \bar{y}) = \theta_1 \bar{y}^2 + \theta_2 \bar{y} \bar{u} + \theta_3 \bar{y} + \theta_4 \bar{u} + \theta_5, \quad (4.23)$$

sendo

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{2}{\sigma^2} a_1, \\ \theta_2 &= \frac{2}{\sigma^2} \Sigma_u, \\ \theta_3 &= \frac{2}{\sigma^2} [c_1(1 - a_1) + w_0], \\ \theta_4 &= -\frac{2}{\sigma^2} c_1 \Sigma_u, \\ \theta_5 &= -\frac{2}{\sigma^2} (c_1 w_0 + a_1) \end{aligned} \quad (4.24)$$

A Equação (4.23) define a *função autovalor* do modelo (4.19). Este é o único caso (primeira ordem) em que é possível escrever uma equação em forma fechada.

Por sua vez, (??) poderá ser escrita como

$$\tau(\lambda) = -\frac{T_s}{\ln[\lambda(\bar{u}, \bar{y})]}, \quad (4.25)$$

ou

$$\tau(\bar{u}, \bar{y}) = -\frac{T_s}{\ln(\theta_1 \bar{y}^2 + \theta_2 \bar{y} \bar{u} + \theta_3 \bar{y} + \theta_4 \bar{u} + \theta_5)}, \quad (4.26)$$

definindo uma *função constante de tempo* do modelo (4.19).

Exemplo 4.3.1 Considere o modelo RBF de primeira ordem *rbftp1*, com termos lineares, obtido no estudo de caso da seção (4.2) para o forno elétrico descrito no apêndice ???. A rede *rbftp1* é dada por:

$$\begin{aligned} y(k) &= 1,9736 + 0,8857y(k-1) + 0,1474u(k-1) + 0,0049u(k-2) \\ &\quad + 0,00334u(k-3) + 87,3777\phi(\|y(k-1) - \mathbf{c}\|). \end{aligned} \quad (4.27)$$

sendo $c_1 = 61.2033$ e $\sigma = 30$. A função autovalor correspondente à esse modelo, de acordo com as equações (4.23) e (4.24), será então dada por

$$\lambda(\bar{u}, \bar{y}) = -2.5404 \times 10^{-4} \bar{y}^2 + 4.1274 \times 10^{-4} \bar{y} \bar{u} + 0.0199 \bar{y} - 0.0253 \bar{u} + 0.6171. \quad (4.28)$$

A Figura 4.6(a) mostra os autovalores de *rbfltp1* correspondentes aos estados estacionários determinados por simulação (portanto, todos estáveis), exibidos na Figura 4.5(b). A variação da constante de tempo do modelo ao longo da faixa de operação de interesse, considerando $T_s = 210s$, é exibida na Figura 4.6(b). Nota-se que o modelo responde mais rapidamente a entradas próximas a $\bar{u} = 19$.

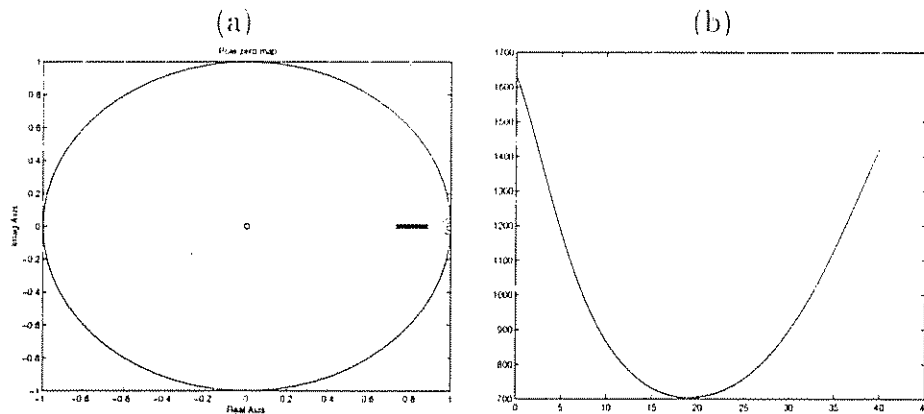


Figura 4.6: Autovalores e variação da constante de tempo do modelo *rbfltp1*.

(a) Autovalores do modelo *rbfltp1*, avaliados nos estados estacionários determinados por simulação e exibidos na Figura 4.5(b). Como esperado, os autovalores são reais (*rbfltp1* é de primeira ordem) e estáveis. (b) Variação da constante de tempo do modelo *rbfltp1* com o ponto de operação. O eixo- x é a entrada \bar{u} e o eixo- y a constante de tempo em segundos.

□

4.4 Incorporação de informação auxiliar

Uma característica comum a praticamente todos os métodos de reconstrução e modelagem com RBFs, mencionados no Capítulo 4, é a capacidade de obter modelos utilizando

apenas os dados de entrada e/ou saída, das etapas comuns à modelagem NARX (definição dos regressores de entrada e saída a compor os modelos) até as particularidades da representação (escolha da função de base e de seus parâmetros – se houver – e distribuição de um dado número de centros, por exemplo). Ou seja, nenhuma informação auxiliar é utilizada. Supondo agora que algum conhecimento sobre o sistema esteja disponível antes da modelagem, seria possível usar eficientemente tal informação durante a construção do modelo? Como isso pode ser feito? Que tipo de informação pode ser usada? Tais perguntas abriram novas áreas de pesquisa em modelagem de dinâmica não-linear e as primeiras respostas têm sido específicas para determinados tipos de representações matemáticas, ou possuem extensão restrita às etapas comuns à abordagem NARX.

Boa parte dos problemas ainda em aberto na literatura, particulares à representação RBF, estão relacionados aos centros: número, localização, características da não-linearidade implementada. Esforços têm sido concentrados, em geral, em métodos capazes de gerar um grande número de candidatos e combinações de características, alargando o espectro de busca na esperança de encontrar modelos que aproximem as características dinâmicas de interesse (Judd e Mees, 1995, 1998; Small, 1998). A abordagem de uso de informação auxiliar, no entanto, pretende gerar procedimentos para incorporar a maior quantidade viável de informação nas etapas de obtenção de modelos, restringindo o espaço de busca às regiões cujos candidatos sabe-se possuir determinadas características. Assim, destacam-se os seguintes pontos favoráveis (Corrêa, 2001; Barroso, 2001; Nepomuceno et al., 2002): *(i)* diminuição do número de parâmetros (parcimônia), *(ii)* capacidade de reprodução de características não-observáveis nos dados utilizados na identificação, com possível extensão da faixa de validade dinâmica do modelo, e *(iii)* maior robustez à deficiência dos dados.

Ainda que já tenham sido sugeridos alguns procedimentos simples, muitas vezes baseados em conhecimento do comportamento local do fluxo no espaço de fases (Smith, 1992), aparentemente inexitem formas para distribuir os centros utilizando informação auxiliar de natureza mais abrangente, como características de estado estacionário.

Os desenvolvimentos deste capítulo, até aqui apresentados, demonstram que, apesar das dificuldades de manipulação analítica inerentes às RBFs – por vezes comparáveis às exibidas por redes neurais e métodos locais –, estas não constituem impedimento para o estudo de formas de aproveitar informação auxiliar em etapas da identificação. Propriedades como estabilidade de pontos fixos e variação da constante de tempo puderam ser explicitadas, ainda que praticamente inexitem equações em forma fechada. Nesta seção, pretende-se analisar as condições para que modelos RBF representem algumas informa-

ções de estado estacionário, como localização e simetria de pontos fixos e comportamento dos autovalores, e a partir delas propor restrições – na estrutura e nos parâmetros – que garantam essas características.

4.4.1 Comportamento dos autovalores

Uma consequência natural dos lemas enunciados na seção anterior, é que modelos RBF com $n_y = 0$ e $n_{yl} \geq 1$ terão autovalores que não variam com o ponto de operação ponto de operação. Substituindo a Equação (4.16) em (4.12)

$$\lambda^{n_y} - a_1 \lambda^{n_y-1} - \dots - a_{n_y-1} \lambda - a_{n_y} = 0. \quad (4.29)$$

definindo n_y autovalores independentes de (\bar{u}, \bar{y}) .

Autovalores que não variam com o ponto de operação são comuns em sistemas do tipo Hammerstein. Teoricamente, é desejável que um modelo que se pretenda representar o comportamento dinâmico de um sistema de Hammerstein tenha autovalores constantes, não variando com o ponto de operação. No caso das RBFs o procedimento para garantir o comportamento global da função autovalor consiste em restringir a não-linearidade aos regressores de entrada ($n_y = 0$, não-variância com o ponto de operação), ou utilizar regressores em y no espaço de entrada das funções de base ($n_y \geq 1$, variação com o ponto de operação).

4.4.2 Localização

Considere que um estado estacionário (\bar{u}_k, \bar{y}_k) é matematicamente reproduzido por um modelo RBF da forma (4.2), ou seja, (\bar{u}_k, \bar{y}_k) satisfaz a seguinte equação

$$\bar{y}_k (1 - \Sigma_y) - \Sigma_u \bar{u}_k - w_0 = \sum_{i=1}^{N_c} w_i \phi(\|\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{c}_i\|), \quad (4.30)$$

sendo $\bar{\mathbf{y}}_k = [\bar{y}_k \dots \bar{y}_k \ \bar{u}_k \dots \bar{u}_k]^T$. Um modo de alcançar condições de manipulação analítica de (4.30) com o objetivo de definir as condições para que a igualdade seja confirmada é garantir que as saídas das N_c funções de base, avaliadas em (\bar{u}_k, \bar{y}_k) , sejam idênticas.

Nessas condições a Equação (4.30) poderá ser reescrita como

$$\frac{\bar{u}_k(1 - \Sigma_y) - \Sigma_u \bar{u}_k - w_0}{\bar{\Phi}} = \sum_{r=1}^{N_r} a_r, \quad (4.31)$$

sendo $\bar{\Phi} = o(\|\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{c}_i\|)$, $i = 1, 2, \dots, N_c$. Para que essa igualdade prevaleça para todas as funções de base é necessário que seus argumentos, dependentes dos centros \mathbf{c}_i e eventualmente de um parâmetro de dispersão σ , tenham valores idênticos. No caso mais simples, pode-se dizer que bastaria tomar centros equidistantes do estado estacionário considerado, ou seja, fazer com que $\|\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{c}_i\| = \|\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{c}_j\|$, para $i, j = 1, 2, \dots, N_c$.

Exemplo 4.4.1 *Considere o aquecedor elétrico descrito no Apêndice A.1, e um modelo RBF cujo espaço de entrada das funções de base seja tridimensional, definido por $n_u = 2$ e $n_y = 1$. Nesse espaço, os pontos de estado estacionário seriam mapeados como mostrado na Figura 4.7. Note que boa parte dos dados dinâmicos, definidos por pontos, concentra-se no plano definido pelas variáveis \bar{u} e \bar{y} , o que se explica pela frequência com que a entrada permanecia constante no experimento (ver Figura A.2 (a), no Apêndice A.1). Para o caso mais simples, um ponto estacionário que se deseje impor deverá servir de centro ao gerar as funções candidatas, tomadas em qualquer esfera de raio r . Do mesmo modo, um espaço de entrada bidimensional definirá centros candidatos tomados em circunferências centradas no ponto estacionário, e espaços unidimensionais geram dois centros, simétricos em relação ao ponto a impor.*

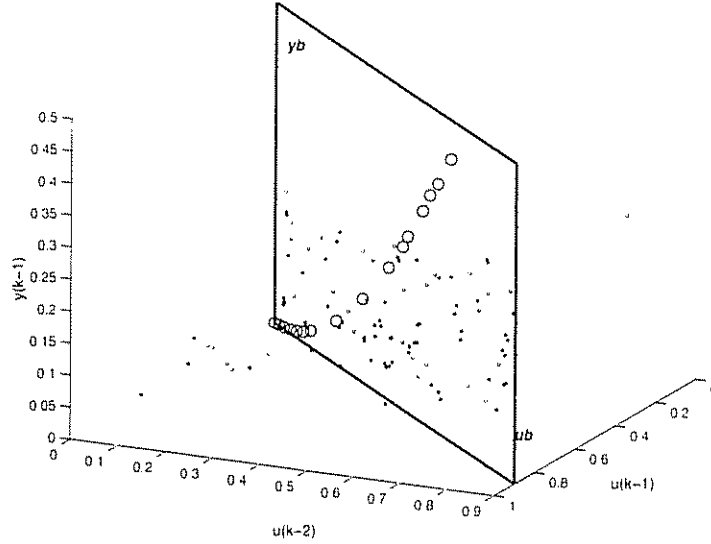


Figura 4.7: Espaço de entrada das funções de base de um modelo RBF

Considerando um modelo hipotético para o aquecedor elétrico descrito no Apêndice A.1, com $n_u = 2$ e $n_y = 1$. Dados dinâmicos são representados por pontos. Os estados estacionários (\bar{u}, \bar{y}) (\circ) estão definidos no plano gerado pelos eixos ub e yb . Centros candidatos devem ser tomados ao longo de uma esfera centrada no ponto que se deseja impor.

□

Note que, dado o estado estacionário (\bar{u}_k, \bar{y}_k) e a distância $\|\bar{y}_k - c_i\|$, $i = 1, \dots, N_c$ para localização dos centros, a Equação (4.31) define uma relação entre os parâmetros, que precisa ser satisfeita para que a igualdade (4.30) se confirme, e para que, em última instância, o modelo consiga reproduzir de modo matematicamente exato o estado estacionário. Assim, é necessário definir um conjunto de restrições para os valores estimados dos parâmetros do modelo, podendo ser escrito da seguinte forma

$$c = S\hat{\theta}. \quad (4.32)$$

Os elementos da equação matricial (4.32), considerando $n_{yt} \geq 1$, $n_{ut} \geq 1$ e termo constante w_0 presente, são definidos como

$$c = [w_0 \ b \ \Sigma_y \ \Sigma_u]^T, \quad (4.33)$$

com

$$b = \frac{\bar{y}_k(1 - \Sigma_y) - \Sigma_u \bar{u}_k - w_0}{\bar{\Phi}} \quad (4.34)$$

c é um vetor de coeficientes das restrições, com valores arbitrados para os parâmetros w_0 , a_i , $i = 1, 2, \dots, n_{yt}$, e b_j , $j = 1, 2, \dots, n_{ut}$ em (4.33) e (4.34). S é uma matriz de restrições, de dimensões $4 \times (N_c + n_{yt} + n_{ut} + 1)$, com elementos 0 ou 1, mapeando os parâmetros estimados $\hat{\theta}$ aos valores de restrições definidos em c . Por exemplo, considerando um modelo com $n_{yt} = 2$, $n_{ut} = 1$ e $N_c = 4$ centros a Equação (4.32) terá a forma

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ b \\ a_1 + a_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_0 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{w}_3 \\ \hat{w}_4 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Os parâmetros $\hat{\theta}$ devem ser estimados minimizando alguma função objetivo. Em identificação de sistemas é comum usar como função objetivo a soma dos quadrados dos resíduos de identificação, $\xi^T \xi$. O problema passa a ser, então, encontrar os parâmetros do modelo (4.2), minimizando $\xi^T \xi$, e ao mesmo tempo satisfazendo o conjunto de restrições $c = S\hat{\theta}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arg(\min \xi^T \xi) \\ &\text{Sujeito a: } c = S\hat{\theta}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$\hat{\theta}$ podendo ser uma solução por mínimos quadrados restritos (Pearson e Pottmann, 2000)

$$\hat{\theta}_{\text{MQR}} = \underbrace{(\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \mathbf{y}}_{\text{solução irrestrita}} - (\Psi^T \Psi)^{-1} S^T [S(\Psi^T \Psi)^{-1} S^T]^{-1} (S\hat{\theta}_{\text{MQ}} - c), \quad (4.37)$$

sendo $\Psi \in \mathbb{R}^{N_c + n_{yt} + n_{ut} + 1}$ a matriz de regressores do modelo e \mathbf{y} o vetor de saída. $\hat{\theta}_{\text{MQ}}$ na Equação (4.37) corresponde à solução de mínimos quadrados irrestritos dada pelo termo em destaque. Os valores de Σ_y e Σ_u no vetor c , Equação (4.33), podem ser tomados como as estimativas irrestritas de MQ para os parâmetros de (4.2).

No Roteiro 4.4.2A foi resumido o procedimento proposto para imposição de localização de pontos estacionários, generalizado para qualquer tipo de função de base. Foi

considerado, adicionalmente, o caso de se desejar aproximar mais de um estado, no Roteiro 4.4.2B

Roteiro 4.4.2 A: Rotina auxiliar para imposição de um estado estacionário

Início

- 1 → Definir características estruturais: $N_c, n_u, n_{ul}, n_y, n_{yl}$;
- 2 → Gerar um conjunto de M funções de base candidatas, locais (variando a localização dos centros e os parâmetros de dispersão, σ apenas a localização dos centros, ou ambos) ou globais (variando a localização dos centros⁷), cujas avaliações em (\bar{u}, \bar{y}) sejam idênticas, $(\phi(\|\bar{y}_k - \mathbf{c}_i\|) = \phi(\|\bar{y}_k - \mathbf{c}_j\|))$, ou $\phi(\|\bar{y}_k - \mathbf{c}_i\|, \sigma_i) = \phi(\|\bar{y}_k - \mathbf{c}_j\|, \sigma_j)$ $i, j = 1, 2, \dots, M$;
- 3 → Selecionar funções de base entre as candidatas geradas;
- 4 → Escrever a equação de restrição da forma (4.31);
- 5 → Montar a equação matricial (4.32) com base na restrição (4.31) e em (4.33), definindo valores para Σ_y e Σ_u , por exemplo, por meio de estimativas de mínimos quadrados irrestritos aplicado ao modelo (4.2);
- 6 → Resolver o problema de otimização (4.36), por exemplo, por mínimos quadrados restritos (Equação (4.37)).

Fim

Roteiro 4.4.2 B: Rotina auxiliar para imposição de mais de um estado estacionário

Início

- 1 → Tomar um conjunto de estados estacionários (\bar{u}_k, \bar{y}_k) , $k = 1, 2, \dots, p$.

⁷Caso não possuam um parâmetro de forma.

- 2 → Para cada estado estacionário (\bar{u}_k, \bar{y}_k) de interesse gerar um conjunto de funções de base locais candidatas (variando os centros e parâmetros de dispersão, σ) cujas avaliações em (\bar{u}_k, \bar{y}_k) sejam idênticas, garantido que avaliadas nos demais pontos de equilíbrio resultem em valores inferiores a uma tolerância $0 < \epsilon \ll 1$, $o(\|\bar{y}_k - \mathbf{c}\| \cdot \sigma) < \epsilon$;
- 3 → Selecionar funções de base entre as candidatas geradas para cada ponto estacionário;
- 4 → Escrever p equações de restrições da forma (4.31), uma para cada ponto estacionário, reunindo em cada uma as funções de base correspondentes ao par (\bar{u}_k, \bar{y}_k) e descartando as demais, de contribuição inexpressiva (menor do que ϵ);
- 5 → Montar a equação matricial (4.32) com base nas restrições (4.31) escolhendo valores para Σ_y e Σ_u , por exemplo, por meio de estimativas de mínimos quadrados irrestritos;
- 6 → resolver o problema de otimização (4.36), por exemplo, por mínimos quadrados restritos (Equação (4.37))

Fim

4.4.3 Simetria

A análise constante desta seção foi originalmente apresentada em (Aguirre et al., 2004b). A seção foi incluída por uma questão de completude de resultados relativos a pontos fixos, assim como pelas semelhanças com o procedimento descrito na seção 4.4.2.

Considere um modelo RBF autônomo, cujo mapeamento em estado estacionário pode ser escrito como $\bar{y} = F(\bar{y})$. A condição para que o modelo apresente pontos fixos simétricos em relação à origem, ou seja, \bar{y} e $-\bar{y}$, é a satisfação das seguintes relações (Aguirre et al., 2004b)

$$\begin{aligned} \bar{y} - F(\bar{y}) &= 0 \\ -\bar{y} - F(-\bar{y}) &= 0. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Para que (4.38) seja satisfeita o mapeamento global não-linear F deve implementar uma função ímpar. Empregar apenas centros simétricos em relação à origem não é garantia de simetria matemática, como pode ser observado na Figura 4.8(b), sendo necessário garantir que os parâmetros dos pares simétricos permitam que as funções de base se cancelem

estaticamente, Figura 4.8(c). Evidentemente, o termo constante deve ser eliminado do conjunto de variáveis regressoras candidatas a compor o modelo.

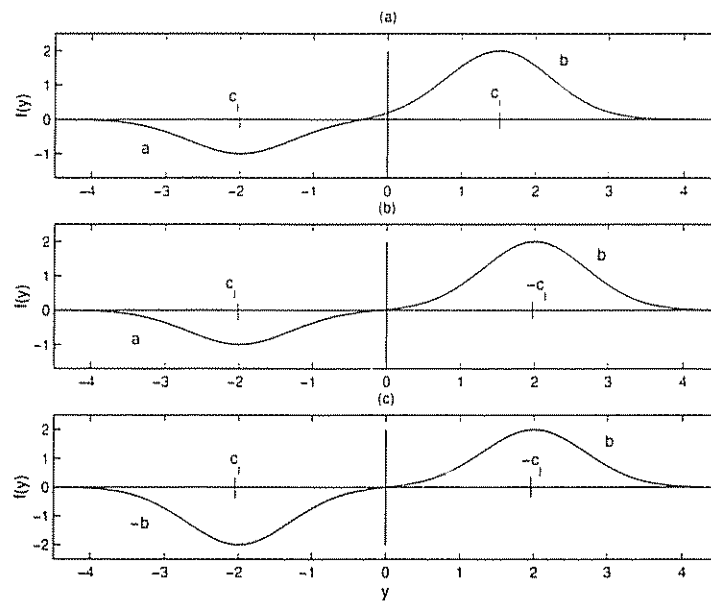


Figura 4.8: Imposição de simetria em um modelo RBF

Considerando um modelo hipotético com 2 centros, termos polinomiais lineares autoregressivos e de entrada exógena e termo constante ausentes, e espaço de entrada das funções de base unidimensional. As curvas definem o mapeamento não-linear global $\bar{y} = F(\bar{y})$. (a) Modelo sem nenhuma restrição; (b) Modelo apenas com centros simétricos em relação à origem; (c) Modelo com centros simétricos e pesos simétricos. Claramente, apenas em (c) F é ímpar. (Adaptado de (Aguirre et al., 2004b)).

A restrição necessária para os parâmetros do modelo pode ser facilmente escrita na forma (4.32), fazendo $\mathbf{0} = S\hat{\theta}$, $\mathbf{0}$ um vetor de coeficientes de restrições, todos nulos, e S a matriz de mapeamento das restrições. Para um modelo como o utilizado para gerar as restrições na Equação (4.35), excluindo o termo constante w_0 , os parâmetros devem ser

estimados considerando

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{b} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

o que implica que $w_1 = -w_2$ e $w_3 = -w_4$. Nota-se que não é necessário gerar restrições na parte linear do modelo. A solução para o problema de encontrar o vetor de parâmetros $\hat{\theta}$ que minimiza uma função objetivo, a soma dos quadrados dos resíduos, por exemplo, e satisfaz as restrições $\mathbf{0} = S\hat{\theta}$ é dada por (4.36), podendo ser gerada por mínimos quadrados restritos. Equação (4.37).

O problema de imposição de simetria em modelos RBF pode então ser organizado como no Roteiro 4.4.3.

Roteiro 4.4.3: Rotina auxiliar para imposição de simetria de pontos fixos em modelos RBF

Início

- 1 → Cancelar o termo constante w_0 do conjunto de candidatos a compor o modelo.
- 2 → Tomar $N_c/2$ centros, selecionados de alguma forma, e gerar seus pares simétricos em relação à origem.
- 3 → Estimar os $(N_c + n_{yl} + n_{ul})$ parâmetros de modo que aqueles correspondentes aos pares de centros sejam simétricos (não aplicar restrições aos parâmetros da parte linear). Os parâmetros podem ser estimados, por exemplo, por meio dos mínimos quadrados restritos. Equação (4.37).

Fim

Deve ser ressaltado que as condições estabelecidas para a simetria *não são matematicamente necessárias*, a considerar a propriedade de aproximação universal das RBFs.

Por fim, vale notar que, ao contrário do que ocorre com as redes neurais MLP (Aguirre et al., 2004b), a simples retirada do termo constante w_0 de modelos RBF não garante reprodução matematicamente exata do ponto fixo trivial, bastando observar que $\phi(\|\mathbf{0} - \mathbf{c}\|)$ não será 0 em qualquer caso, ou seja, independente do tipo de função de base, localização do centro ou parâmetro de dispersão.⁸ De fato, esse problema já foi citado na literatura, e proposta uma função de base que atribui contribuição zero na ausência de excitação (ver Equação (3.26)) (Walker et al., 2001). Uma forma de atribuir simetria de pontos fixos em relação a um ponto fixo trivial também reproduzido de forma matematicamente exata é utilizar o procedimento sugerido na seção 4.4.2. Garante-se que os centros sejam selecionados entre candidatos igualmente distantes da origem (ou ao menos cujas funções de base contribuam igualmente ao serem avaliadas em 0), tomando, posteriormente, seus pares simétricos para também fazer parte do modelo. O Roteiro 4.4.2A pode ser seguido.

4.5 Conclusões do capítulo

Este capítulo apresentou um estudo sobre características das RBFs relevantes à identificação de sistemas. Foram deduzidas equações que mostram como os termos e coeficientes dos modelos influenciam características de estado estacionário, como localização dos pontos de equilíbrio e comportamento dos autovalores ao longo de uma faixa de operação.

A partir das equações desenvolvidas, relacionando funções de estado estacionário e características estruturais de RBFs, foram apresentados procedimentos simples para incorporação de informação auxiliar nessa representação. As propostas garantem a imposição de localização de pontos fixos, simetria e comportamento global da função autovalor. A aplicação dos procedimentos em sistemas reais e simulados será apresentada e discutida no capítulo 5.

⁸Nas redes neurais o ponto fixo trivial é garantido retirando os termos constantes (*bias*), uma vez usadas funções de ativação que satisfazem a condição $f(0) = 0$ e sejam ímpares (Aguirre et al., 2004b).

Uso de Informação de Estado Estacionário

5.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo aplicar a metodologia proposta no Capítulo 4, sendo utilizado como informação auxiliar os seguintes itens:

- a localização de pontos fixos e pontos na curva estática;
- o comportamento global dos autovalores.

Diversos estudos de caso são utilizados, com dois mapas caóticos, um aquecedor elétrico real e um sistema de Hammerstein simulado, através dos quais são discutidos os resultados e implicações do uso de informação auxiliar na forma proposta.

5.2 Localização de pontos fixos

Nesta seção será utilizada informação sobre localização de pontos fixos. Os dois primeiros exemplos são de reconstrução de mapas de primeiro retorno, e no segundo tentar-se-á avaliar as implicações da aproximação de mais de um ponto fixo de acordo com a proposta do capítulo anterior. No último estudo de caso, envolvendo um sistema real, aquecedor elétrico com dissipação variável, será empregado informação sobre pontos da curva estática.

Os objetivos podem ser condensados da seguinte forma

- observar os efeitos da imposição matemática de localização de pontos fixos no comportamento dinâmico de modelos RBF;

- avaliar a viabilidade de emprego do procedimento proposto no Capítulo 4, especialmente em situações em que as informações estão disponíveis nos dados dinâmicos. Ou seja, procurar-se-á lançar alguma luz em perguntas do tipo: “que vantagens podem existir na imposição matemática de pontos fixos, frente a disponibilidade de ferramentas automáticas (para seleção de centros e estimação de parâmetros) fundamentadas unicamente nos dados dinâmicos?” Deve ser considerada a capacidade de aproximação universal das RBFs.

Por fim, vale ressaltar que em todos os exemplos foram empregadas funções de base gaussianas de mesma dispersão (em todos os modelos apresentados em cada caso), e, quando necessário, os centros candidatos foram gerados, por simplicidade, equidistantes do ponto fixo selecionado. As exceções serão apresentadas, quando existentes.

5.2.1 Regulador chaveado Buck

Tem sido observado que mesmo os mais simples modelos - os mapas unidimensionais¹ são capazes de explicar o comportamento de sistemas físicos relevantes (Weibert e Main, 2001). Além disso, são modelos de fácil manipulação, comparados a sistemas de equações diferenciais, colaborando para o estudo de sistemas dinâmicos não-lineares².

Nesta seção serão obtidos modelos RBF com o objetivo de reproduzir o mapa de primeiro retorno do modelo proposto por (Tse, 1994) de um regulador chaveado *buck*

$$y(k) = \alpha y(k-1) + \frac{h(d(k-1))^2 \beta E[E - y(k-1)]}{y(k-1)} \quad (5.1)$$

Os dados empregados neste exemplo foram gerados para $\alpha = 0,8872$ e $\beta = 1,2$, constantes dependentes dos componentes do circuito. $d(k-1)$ é a saída do controlador, um sinal de

¹Um mapa unidimensional é definido como $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y(k) = F(y(k-1))$, sendo que o índice $k \in \mathbb{Z}$ indica o instante de tempo considerado.

²Outros mapas unidimensionais, comumente encontrados na literatura, que geram séries temporais caóticas, são:

- Mapa logístico:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \text{ para } 0 \leq a \leq 4$$

- *Tent map*:

$$x_{n+1} = \begin{cases} ax & x < 0,5 \\ a(1-x) & x > 0,5 \end{cases}$$

tensão definido por

$$d(k-1) = \sqrt{\frac{(1-\alpha)(X-E)X}{3E^2}} - h(y(k-1) - X), \quad (5.2)$$

sendo X a tensão de referência, e $E = 33$ V a tensão na alimentação. A saturação $h(d(k-1))$ é dada por

$$h(d(k-1)) = \begin{cases} 0 & d(k-1) < 0 \\ 1 & d(k-1) > 1 \\ d(k-1) & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (5.3)$$

O mapa do regulador *buck* tem sido utilizado em estudos sobre estrutura de modelos não-lineares, principalmente pelo formato da não-linearidade estática $y(k) = F(y(k-1))$ (Aguirre, 1997; Corrêa et al., 2000)

A massa de dados (500 observações) utilizada na obtenção dos modelos foi gerada para uma referência $X = 25$ V, exibindo as seguintes características: ponto fixo em 25.0018 e máximo expoente de Lyapunov (MEL) estimado em $\lambda = 0.4617 \pm 0.0145$ bits/s. A Figura 5.1 mostra o mapa (5.1), também uma descrição de seu atrator.

O exemplo é estudado da forma que será descrita. Três modelos RBF da estrutura abaixo são obtidos

$$y(k) = w_0 + \sum_{i=1}^2 w_i \phi(\|y(k-1) - c_i\|) + a_1 y(k-1), \quad (5.4)$$

portanto, com 2 centros, termo constante e monômio linear autoregressivo, considerando as seguintes características: (a) modelo com centros simétricos em relação ao ponto fixo conhecido, mas sem restrições nos parâmetros; (b) modelo com centros simétricos e parâmetros restringidos conforme o proposto na seção 4.3.1; (c) modelo obtido sem qualquer uso de informação auxiliar.

Entre os modelos a e b a única diferença estará nos parâmetros, estimados pelos mínimos quadrados “convencional” no primeiro, e restritos (Equação (4.37)), no segundo. Os centros do modelo c serão selecionados entre 200 candidatos igualmente espaçados no tempo, pelo critério da taxa de redução de erro (ERR), apresentada na seção 4.4.2, e os parâmetros posteriormente estimados por mínimos quadrados. Adicionalmente, será mantido o mesmo valor do parâmetro de dispersão, σ , para todos os modelos. Em seguida,

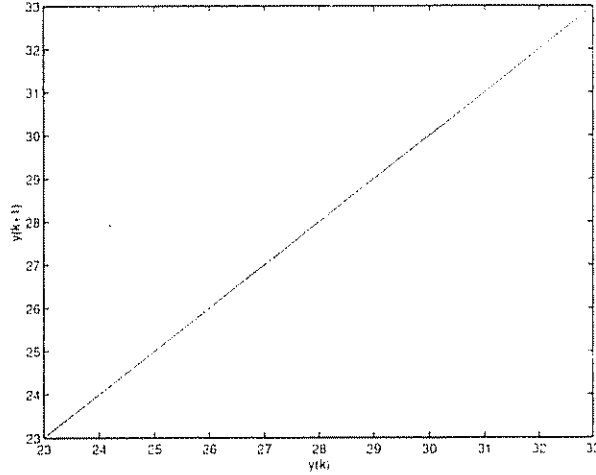


Figura 5.1: Mapa de primeiro retorno para modelo de regulador *buck*

Mapa de primeiro retorno para o modelo do regulador *buck*, com $\alpha = 0,8872$, $\beta = 1,2$ e $E = 33V$. Equação (5.1), e $X = 25V$. Equação (5.2) Pontos em negrito são os dados utilizados na obtenção dos modelos. A interseção do mapa com a reta $y(k) = y(k+1)$ marca o ponto fixo

o procedimento será repetido considerando os dados corrompidos com ruído aditivo de média 0 e variância 0,07. Modelos resultantes serão chamados d. e e f. correspondentes aos do caso sem ruído.

Para a estrutura da Equação (5.4) o conjunto de restrições considerado na estimação de parâmetros do modelo b é escrito como

$$\begin{bmatrix} w_{0MQ} \\ b \\ a_{1MQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_0 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

sendo

$$b = \frac{\bar{y}(1 - a_{1MQ}) - w_{0MQ}}{\exp\left(\frac{-\|\bar{y} - c_i\|^2}{\sigma^2}\right)}, \quad (5.6)$$

e $\bar{y} = 25,0018$. a_{1MQ} e w_{0MQ} são estimativas de mínimos quadrados irrestritos, com os parâmetros finais obtidos pela solução (4.37).

A Tabela 5.1 mostra características estruturais e propriedades dos seis modelos obti-

dos: (i) centros; (ii) parâmetros; (iii) localização do ponto fixo; (iv) e o maior expoente de Lyapunov (MEL). A Figura 5.2 mostra os mapas de primeiro retorno e as não-linearidades estáticas para os modelos obtidos nos casos sem ruído. (a-c), e com ruído. (d-f).

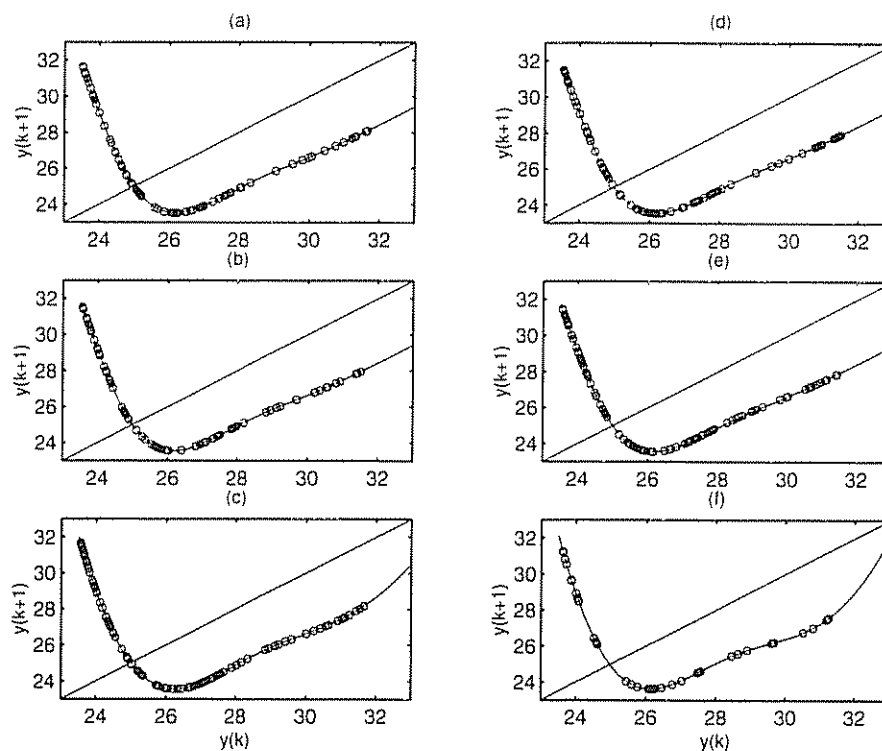


Figura 5.2: Mapa de primeiro retorno de modelos RBF do regulador *buck*

Mapa de primeiro retorno (\circ) e não-linearidades estáticas ($—$) de seis modelos RBF para o regulador *buck*: sem ruído — (a-c) —, com ruído — (d-f) (ver Tabela 5.1). Os pontos fixos estão localizados nos cruzamentos entre os mapas de primeiro retorno e a linha $y(k) = y(k + 1)$.

A análise dos resultados revela que o procedimento pouco influenciou a capacidade de aproximação do ponto fixo original. Uma vez que a informação está bem representada nos dados dinâmicos, em todos os casos os modelos obtidos aproximaram bem a localização do ponto fixo — mesmo com ruído aditivo. Note-se que o principal efeito foi na reprodução da não-linearidade estática e das características dinâmicas (aqui representadas pelo maior expoente de Lyapunov e a reconstrução do atrator). Já em (Aguirre, 1997) conjecturava-se que um bom ajuste da não-linearidade estática de mapas, alcançado por meio de uma seleção de estrutura cuidadosa, tinha como consequência uma adequada reprodução de características dinâmicas. Os modelos obtidos pelo procedimento automático

Tabela 5.1: Comparação de parâmetros e propriedades de modelos do mapa do regulador *buck*. Caso sem ruído, (*a-c*), caso com ruído, (*d-f*). Na primeira coluna estão as denominações dos termos e características dinâmicas e de estado estacionário, a partir da segunda as estimativas dos parâmetros retirados da Equação (5.4), e os valores das propriedades. As propriedades listadas são localização do ponto fixo (LPF) e maior expoente de Lyapunov (MLE).

Caract. \ Modelo	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
μ_0	-5,2603	-5,2603	135,2158	-4,8844	-4,8844	140,1515
$\phi_1 (c) \mu_1$	(22,0018)18,1197	(22,0018)18,2580	(31,3823)-25,6665	(22,0018)17,9208	(22,0018)17,9681	(31,4723)-35,9012
$\phi_2 (c_2) \mu_2$	(28,0018)0,6681	(28,0018)0,7068	(24,3374)-45,8829	(28,0018)0,6164	(28,0018)0,6296	(24,2510)-54,4739
$q(l-1)$	1,0514	1,0514	-2,4031	1,0394	1,0394	-2,2107
LPF	24,9919	25,0018	25,0059	24,9984	25,0018	24,9712
MLE	$0,4626 \pm 0,0171$	$0,4683 \pm 0,0155$	$0,5185 \pm 0,0113$	$0,4288 \pm 0,0144$	$0,4027 \pm 0,0115$	$-0,0068 \pm 0,0282$

(ERR) apresentaram não-linearidades estáticas com algumas deformações, especialmente fora da região original dos dados do atrator da Figura 5.1. Para o caso com ruído, o modelo f , apesar de possuir ponto fixo próximo ao original, apresentou um MEL ligeiramente negativo, o atrator revelando dinâmica periódica.

Em geral, o uso de centros simétricos em relação ao ponto fixo original (para escrever a restrição (5.6)) foi suficiente para garantir o ajuste global à não-linearidade estática. A observação dos parâmetros das funções de base (w_1 e w_2) permite notar que a variação entre as estimativas para os dois casos, pequena quando foram usados centros simétricos, foi considerável sob o emprego de centros selecionados pelo ERR (a considerar que também foram selecionados centros muito próximos para os modelos c e f , apesar do ruído no segundo caso).

Para este exemplo conjectura-se que a simetria de centros em relação ao ponto fixo conhecido corresponde a uma boa escolha estrutural, que por consequência produz um ajuste satisfatório à não-linearidade estática (principalmente na extrapolação), com características dinâmicas próximas às originais. As restrições nos parâmetros produziram pequeno ganho adicional.

5.2.2 Mapa senoidal

Para este exemplo foi escolhido o mapa senoidal que apresenta não-linearidades cúbicas:

$$x(k) = \alpha \text{sen}(x(k-1)), \quad (5.7)$$

sendo $\alpha = 1, 2\pi$. Para a condição inicial $x(0) \in [-\pi, \pi]$, a Equação 5.7 mapeia o intervalo $[-\pi, \pi]$ nele mesmo. Os pontos fixos são aproximadamente $\bar{y} = (0; \pm 2, 4383)$ e o mapa tem o maior expoente de Lyapunov estimado em $1, 155 \pm 0, 009$ bits/s. A Figura 5.3 mostra o mapa de primeiro retorno que também é uma descrição de seu atrator.

Este exemplo será analisado em duas situações: (i) imposição do ponto fixo trivial; (ii) aproximação dos pontos fixos não-triviais (simétricos). Assim como com o mapa do regulador *buck*, serão obtidos modelos RBF com: (a) apenas os centros simétricos em relação aos pontos fixos; (b) com centros simétricos e parâmetros restringidos; (c) sem qualquer informação auxiliar.

Vale ressaltar que há informação sobre localização de pontos fixos disponível nos dados dinâmicos. Serão avaliados, entretanto, os efeitos da imposição ou da aproximação de alguns dos pontos fixos originais nas características dinâmicas e de estado estacionário

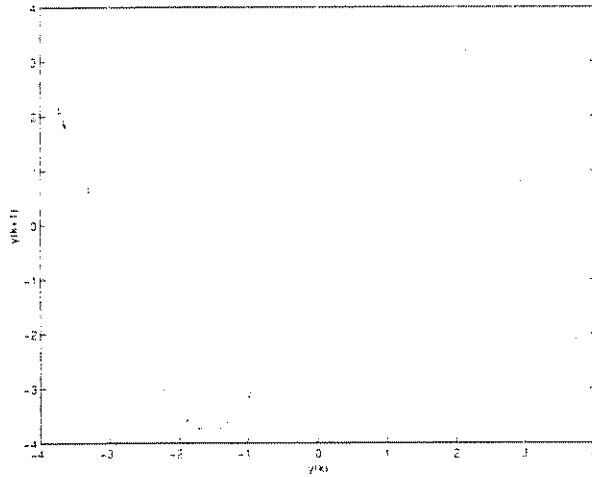


Figura 5.3: Mapa de primeiro retorno - mapa senoidal

Mapa de primeiro retorno para o mapa senoidal. Equação (5.7) com $\alpha = 1.2\pi$.

dos modelos.

Para avaliação dos efeitos da imposição do ponto fixo trivial, caso 1, foi utilizada a seguinte estrutura

$$y(k) = \sum_{i=1}^2 w_i \phi(\|y(k-1) - c_i\|) + a_1 y(k-1), \quad (5.8)$$

ou seja, com um monômio linear autoregressivo e 2 centros. Estes foram tomados simetricamente em relação à origem nos modelos a e b, e em c selecionados pelo ERR a partir de um conjunto de 200 candidatos uniformemente espaçados no tempo.

A estrutura relativa ao caso 2 é dada a seguir

$$y(k) = \sum_{i=1}^4 w_i \phi(\|y(k-1) - c_i\|) + a_1 y(k-1), \quad (5.9)$$

com pares de centros tomados simetricamente em relação aos 2 pontos fixos não-triviais $(\pm 2, 4383)$ nos modelos d e e, e automaticamente selecionados pelo ERR em f. As restri-

ções do modelo e podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} b_a \\ b_b \\ a_{1MQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ w_1 \\ \hat{u}_1 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

com

$$\begin{aligned} b_a &= \frac{\bar{y}(1 - a_{1MQ})}{\exp\left(\frac{-\|\bar{y} - c_i\|^2}{\sigma^2}\right)}, \quad i = 1, 2. \\ b_b &= \frac{\bar{y}(1 - a_{1MQ})}{\exp\left(\frac{-\|\bar{y} - c_j\|^2}{\sigma^2}\right)}, \quad j = 3, 4. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Para reduzir a superposição entre os pares de funções de base relativas a cada ponto fixo, e aproximar a condição para escrever a restrição (4.31), foi utilizada uma dispersão $\sigma = 1,8$, significando que o par de centros relativos a um ponto fixo, avaliado no outro contribui em 0,66% do valor do par original.

Parâmetros e características dinâmicas e de estado estacionário dos 6 modelos resultantes podem ser avaliados por meio da Tabela 5.2 e da Figura 5.4.

Nota-se que o emprego de centros simétricos em relação à origem foi suficiente para gerar modelos que aproximam bem os pontos fixos originais, modelos a e b, também dinamicamente competitivos. A imposição de restrição nos parâmetros praticamente não gerou ganho em relação a simples simetria de centros. De fato, a aplicação dos mínimos quadrados tradicionais (modelo a) resultou em estimativas muito próximas de atender as condições para simetria, apresentadas na seção 4.4.3. Vale observar que o modelo b reproduz tanto o ponto fixo trivial quanto a simetria, de forma matematicamente exata, o que não seria possível com restrições do tipo (4.39), que só garantiria a simetria em relação à origem. Já o modelo c, gerado “automaticamente” pelo ERR, mostrou-se inferior, dinamicamente e na aproximação dos pontos fixos originais. Os centros foram selecionados próximos a simetria em relação à origem, mas mais distantes em relação àqueles escolhidos para os modelos a e b. Uma possível explicação está nas características do sistema, e na forma de gerar os centros candidatos a apresentar ao ERR. Como a dinâmica é mais rápida próximo ao ponto fixo trivial é natural que a distribuição de candidatos uniformemente no tempo resulte em poucos centros a selecionar naquela região. Adicionalmente, as

Tabela 5.2: Comparação de parâmetros e propriedades de modelos do mapa senoidal. Imposição do ponto fixo trivial, (*a-c*), aproximação dos pontos fixos não-triviais (simétricos), (*d-f*). Na primeira coluna estão as denominações dos termos e características dinâmicas e de estado estacionário, a partir da segunda as estimativas dos parâmetros retirados das equações (5.8) e (5.9), e os valores das propriedades. As propriedades listadas são soma dos erros quadráticos na localização dos pontos fixos (SEQLPF) e maior expoente de Lyapunov (MEL).

Modelo	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
$\phi_1 (c_1) m_1$	(-2)-6,1371	(-2)-6,1369	(3,7697)35,2822	(-3,4383)-3,4899	(-3,4383)-3,4985	(1,1915)5,8880
$\phi_2 (c_2) m_2$	(2)6,1366	(2)6,1369	(-3,7696)-35,3106	(-1,4383)-5,7582	(-1,4383)-5,7786	(-1,5452)-6,9640
$\phi_3 (c_3) m_3$				(1,4383)5,7731	(1,4383)5,7995	(-3,6013)-1,1540
$\phi_4 (c_4) m_4$				(3,4383)3,4603	(3,4383)3,4775	(3,5756)2,5879
$g(l; -1)$	-1,2657	-1,2657	-9,2018	-1,7943	-1,7943	-1,5534
SEQLPF	0,0079	0,0079	0,0397	0,0010	0,0004	0,0212
MEL	1,184 ± 0,018	1,182 ± 0,018	1,116 ± 0,018	1,181 ± 0,021	1,169 ± 0,025	1,169 ± 0,021

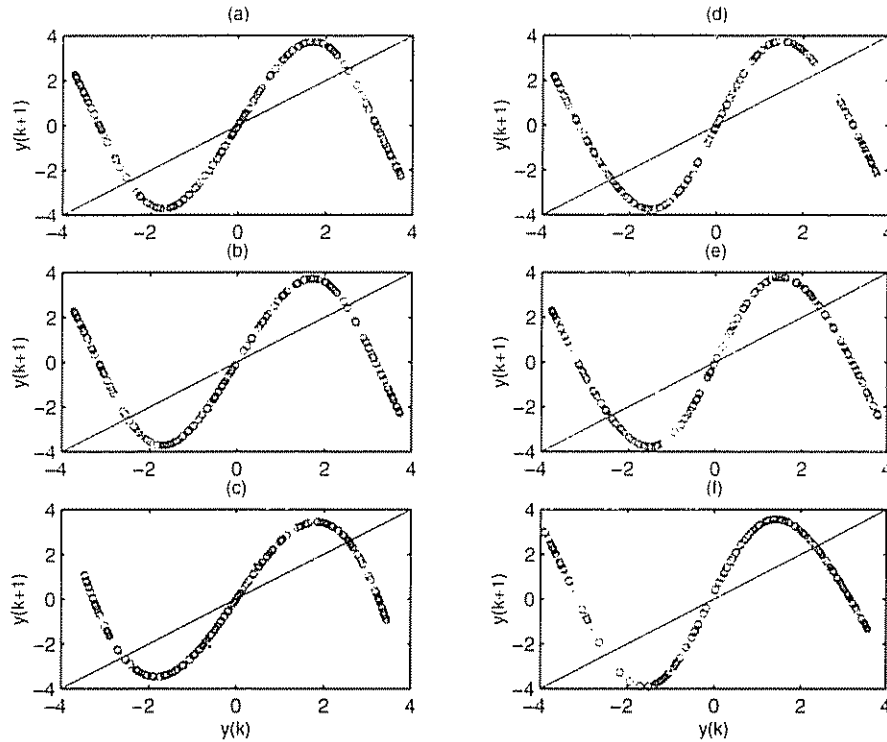


Figura 5.4: Mapa de primeiro retorno de modelos do mapa senoidal

Mapa de primeiro retorno (\circ) de seis modelos RBF para o mapa senoidal com não-linearidades cúbicas: imposição do ponto fixo trivial – (a-c) –, aproximação dos 2 pontos fixos não-triviais (simétricos) – (d-f) (ver Tabela 5.2). (· · ·) sistema original. (—) $y(k) = y(k + 1)$. Os pontos fixos estão localizados nos cruzamentos entre os mapas de primeiro retorno e a linha $y(k) = y(k + 1)$

chances de candidatos nas vizinhanças do ponto fixo trivial virem a ser selecionados não são grandes, a considerar o uso de um critério baseado nos resíduos de identificação.

Os modelos d. e e f apresentaram, em geral, melhor desempenho que os anteriores. Nos dois primeiros, nota-se que, ao contrário dos modelos a e b, as restrições nos parâmetros resultaram em estimativas capazes de melhorar a aproximação dos pontos fixos e do maior expoente de Lyapunov. O ERR mais um vez selecionou centros aproximadamente simétricos em relação aos pontos fixos. Como esperado, com mais centros a compor a estrutura, o procedimento automático identificou um modelo com melhor desempenho que o de c, mas ainda assim bem inferior aos modelos com centros perfeitamente simétricos. Nessas condições, o ERR foi capaz de selecionar estrutura adequada ao ajuste da

não-linearidade estática original

Por fim, serão avaliados os efeitos da variação da superposição entre os pares de funções de base com centros simétricos em relação aos pontos fixos não-triviais, que em última instância definirá o quão matematicamente efetivas são as restrições em (5.11). Assim, a dispersão, σ , das funções de base será variada a fim de ajustar o perfil de superposição, e a cada valor os parâmetros serão reestimados, sob as restrições (5.10). Os resultados do exercício foram reunidos na Tabela 5.3 e na Figura 5.5.

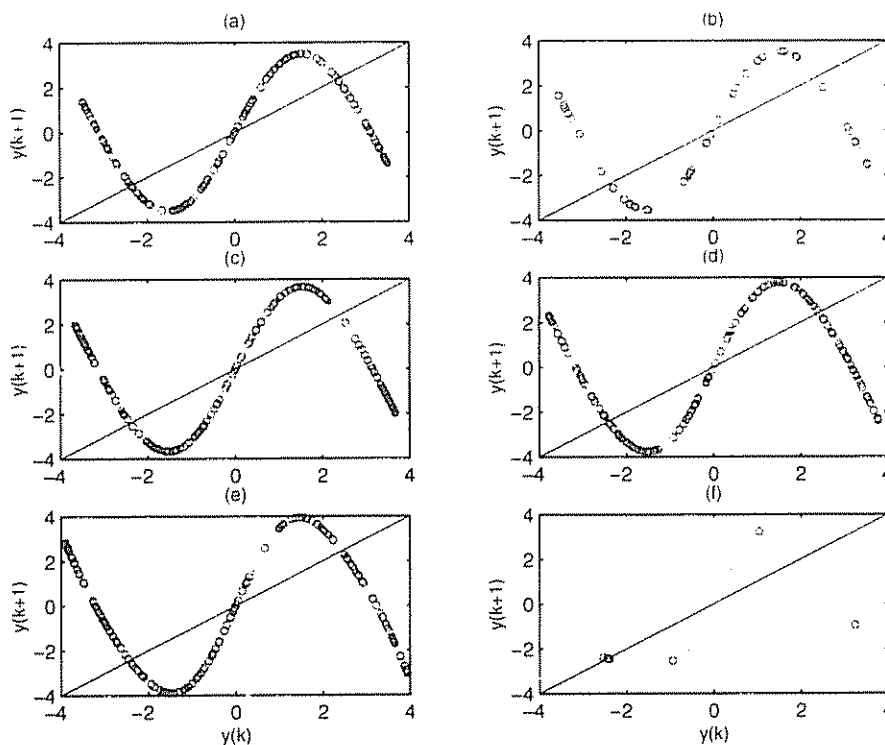


Figura 5.5: Mapa de primeiro retorno de modelos do mapa senoidal – variando a dispersão das RBFs

Mapa de primeiro retorno (\circ) de seis modelos RBF para o mapa senoidal com não-linearidades cúbicas, na aproximação dos 2 pontos fixos não-triviais (simétricos) (ver Tabela 5.3; o modelo *c* corresponde ao *d* na Tabela 5.2). Modelos foram produzidos mediante variações nas dispersões das 4 funções de base. (---) sistema original, (—) $y(k) = y(k+1)$. Os pontos fixos estão localizados nos cruzamentos entre os mapas de primeiro retorno e a linha $y(k) = y(k+1)$.

Em geral, a redução da superposição entre os pares de funções de base, ajustada por meio da dispersão σ , garante, continuamente, uma melhoria na aproximação da locali-

zação dos pontos fixos. Quanto ao desempenho dinâmico, os melhores resultados foram alcançados para níveis intermediários. Na Tabela 5.3, o nível de superposição passa de 2,80%, para $\sigma = 2,2$, para 0,20%, com $\sigma = 1,6$. A garantia matemática da localização dos pontos fixos não-triviais, significando superposição nula, foi alcançada para $\sigma = 0,5$. O modelo resultante, f , no entanto, apresenta dinâmica periódica. Nota-se que o somatório do erro quadrático de localização dos pontos fixos já era de 4×10^{-4} para $\sigma = 1,8$, que corresponde a uma superposição de 0,66%, com bom desempenho dinâmico. O modelo d , portanto, parece compor o melhor compromisso entre comportamento dinâmico e representação de características de estado estacionário.

Por fim, vale notar o comportamento diferenciado exibido pelo modelo b . Este modelo apresenta dinâmica provavelmente periódica, apesar de sua dispersão pertencer a uma faixa com a qual modelos competitivos são gerados. Avaliando valores próximos da dispersão $\sigma = 2,16$, considerando-a como parâmetro de bifurcação, verifica-se a suposta mudança de comportamento, Figura 5.6. A variação do maior expoente de Lyapunov na mesma vizinhança é mostrado na Figura 5.7.

Considera-se que o procedimento aqui adotado, de variar a precisão com que as restrições (5.11) são definidas, pode representar uma forma de controlar o nível de informação auxiliar que será usada no processo, servindo como uma maneira sistemática de buscar soluções no espaço de modelos.

5.2.3 Aquecedor elétrico

Para concluir os estudos de caso sobre a incorporação de informação auxiliar sobre localização de estados estacionários serão utilizados dados coletados de um sistema piloto, um aquecedor elétrico. O processo, os experimentos realizados e as massas de dados são descritos no Apêndice A.1.

O objetivo do exemplo é avaliar a viabilidade de utilizar informação sobre pontos conhecidos da curva estática do sistema para gerar centros candidatos e impor restrições nos parâmetros do modelo RBF. Para isso, serão aproximados dois pontos do teste estático da Figura A.4. Um modelo obtido segundo o procedimento descrito na seção 4.4.2 será comparado com outro cujos centros são selecionados automaticamente segundo o ERR, e sem retrições nos parâmetros. Os modelos podem ser descritos como a seguir

Tabela 5.3: Comparação de parâmetros e propriedades de modelos do mapa senoidal, variando os parâmetros de dispersão. Em todos os modelos buscou-se aproximar os pontos fixos não-triviais (simétricos). Na primeira coluna estão os termos e características dinâmicas e de estado estacionário, a partir da segunda a estimativas dos parâmetros retirados da Eqnação (5.9), e os valores das propriedades. As propriedades listadas são soma dos erros quadráticos na localização dos pontos fixos (SEQJ,PF) e maior expoente de Lyapunov (MEL).

Modelo	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Dispersão	2,2	2,16	2,0	1,8	1,6	0,5
$\phi_1 (c_1) n_1$	(-3,4383)-1,2144	(-3,4383)-1,1134	(-3,4383)-2,3412	(-3,4383)-3,4985	(-3,4383)-4,8464	(-3,4383)4,9798
$\phi_2 (c_2) n_2$	(-1,4383)-6,2264	(-1,4383)-6,1416	(-1,4383)-5,8804	(-1,4383)-5,7786	(-1,4383)-6,0252	(-1,4383)-4,0913
$\phi_3 (c_3) n_3$	(1,4383)6,2133	(1,4383)6,1332	(1,4383)5,8866	(1,4383)5,7995	(1,4383)6,0661	(1,4383)4,0327
$\phi_4 (c_4) n_4$	(3,4383)1,2275	(3,4383)1,1518	(3,4383)2,3350	(3,4383)3,4775	(3,4383)4,8055	(3,4383)-4,9212
$g(k-1)$	-1,4820	-1,5106	-1,6260	-1,7943	-2,0169	1,0066
SEQJ,PF	0,0118	0,0090	0,0027	0,0004	0,0004	0
MEL	$1,082 \pm 0,020$	$-0,939 \pm 0,188$	$1,067 \pm 0,030$	$1,169 \pm 0,025$	$1,169 \pm 0,025$	$-1,622 \pm 0,076$

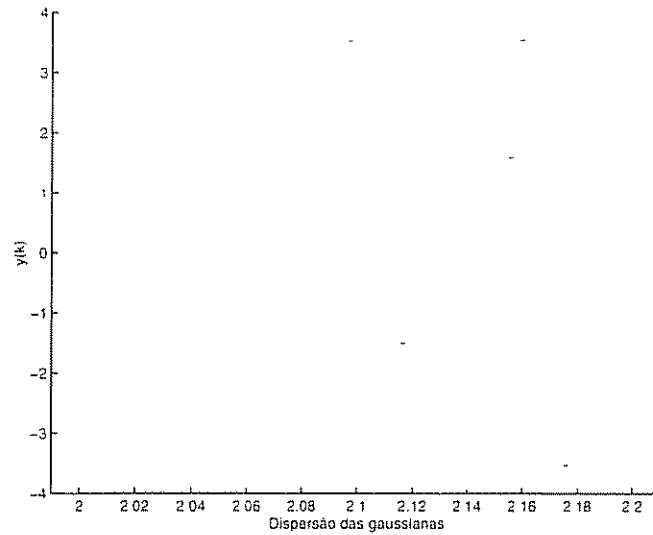


Figura 5.6: Diagrama de bifurcação de modelo do mapa senoidal

Diagrama de bifurcação na vizinhança da dispersão $\sigma = 2,16$, usado como parâmetro de bifurcação.

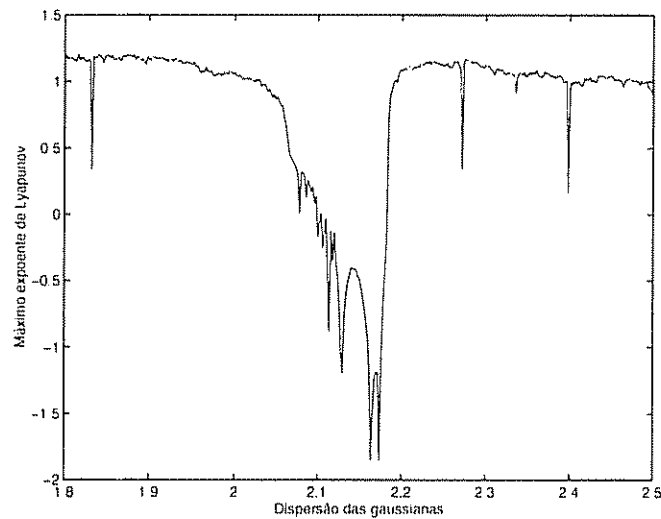


Figura 5.7: Variação do maior expoente de Lyapunov de modelo do mapa senoidal

Variação do maior expoente de Lyapunov (MEL) na vizinhança da dispersão $\sigma = 2,16$.

- Modelo 1

$$y(k) = \sum_{i=1}^{10} w_i \phi(\|y(k-1) - c_i\|) + a_1 y(k-1),$$

- Modelo 2

$$y(k) = u_0 + \sum_{i=1}^q w_i \sigma(\| \mathbf{y}(k-1) - \mathbf{c}_i \|) + a_1 y(k-1)$$

sendo $\mathbf{y}(k-1) = [u(k-1) \ u(k-2) \ \dots \ u(k-n_u)]^T$, $\mathbf{c}_i = [c_{i,1} \ c_{i,2} \ \dots \ c_{i,n_u}]^T$ e $n_u = 2$.

Ambos modelos tiveram os seus 11 termos selecionados de acordo com o ERR, para conjuntos de centros candidatos diferentes. No Modelo 1, foram considerados 200 candidatos uniformemente distribuídos no tempo. Note-se que o ERR não selecionou o termo constante, por isso foi incluída uma função de base a mais em relação ao Modelo 2. O fato pode ser explicado pelo maior número de centros candidatos disponível para o ERR no primeiro modelo. Para gerar os candidatos ao segundo modelo foi utilizada informação auxiliar, da seguinte maneira.

Como o espaço de entrada das funções de base é bidimensional e possui apenas regressores de entrada, os centros candidatos serão tomados equidistantes das projeções dos pontos da curva estática selecionados. Várias tentativas foram realizadas quanto a quais pontos empregar, e quanto ao raio da circunferência na qual gerar os candidatos. Ao fim do processo, optou-se pelo quarto e décimo segundo ponto obtido no teste estático. Os dois grupos de candidatos gerados foram indicados com \square na Figura 5.9. Posteriormente um subconjunto de centros foi selecionado por meio do ERR (asteriscos na Figura 5.9), foram e obtidas estimativas de mínimos quadrados para os parâmetros. A utilização de informação auxiliar será completada escrevendo as restrições a seguir

$$\begin{bmatrix} w_{0MQ} \\ b_a \\ b_b \\ a_{1MQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_0 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{w}_3 \\ \hat{w}_4 \\ \hat{w}_5 \\ \hat{w}_6 \\ \hat{w}_7 \\ \hat{w}_8 \\ \hat{w}_9 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

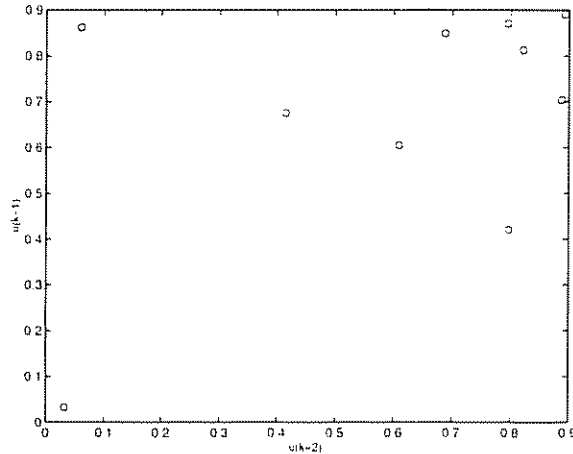


Figura 5.8: Seleção de centros no Modelo 1 do aquecedor elétrico

Sendo: () dados reais no espaço de entrada das funções de base e (o) os centros selecionados pelo ERR entre candidatos uniformemente espaçados no tempo.

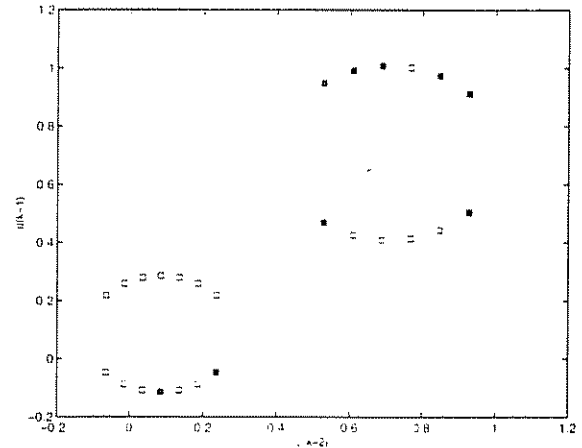


Figura 5.9: Seleção de centros no Modelo 2 do aquecedor elétrico

Sendo: () dados reais no espaço de entrada das funções de base, □ os centros candidatos, equidistantes em relação aos estados estacionários a aproximar, e (*) são as seleções feitas pelo ERR.

sendo

$$b_a = \frac{\bar{y}_1(1 - a_{1MQ}) - w_{0MQ}}{\exp\left(\frac{-\|\bar{y}_1 - c_1\|^2}{\sigma^2}\right)}, \quad i = 1, 2.$$

$$b_b = \frac{\bar{y}_2(1 - a_{1MQ}) - w_{0MQ}}{\exp\left(\frac{-\|\bar{y}_2 - c_j\|^2}{\sigma^2}\right)}, \quad j = 3, 4, \dots, 9 \quad (5.13)$$

com $\bar{y}_1 = [\bar{u}(4) \ \bar{u}(4)]^T$ e $\bar{y}_2 = [\bar{u}(12) \ \bar{u}(12)]^T$

Os resultados alcançados pelos modelos na validação dinâmica e na recuperação da curva estática (obtidas analiticamente, uma vez que toda a não-linearidade é função apenas dos regressores de entrada) podem ser avaliados pelas figuras 5.10 – 5.13, e na Tabela 5.4. Note-se que, enquanto o desempenho dinâmico dos modelos não apresentou diferenças significativas (com ligeira vantagem para o Modelo 1), em estado estacionário houve melhoria de 62, 28% no erro médio quadrático, uma vez utilizada informação auxiliar para gerar os centros candidatos e impor restrições aos parâmetros.

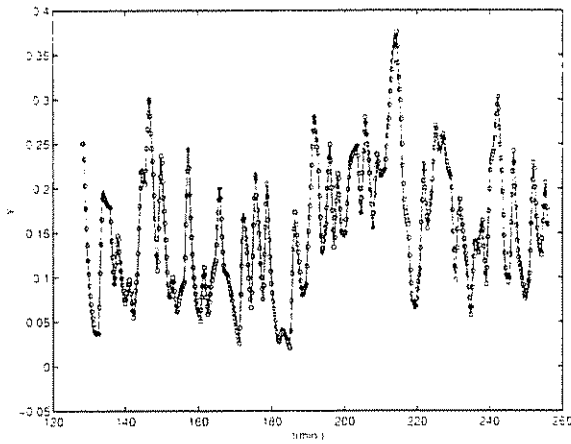


Figura 5.10: Validação dinâmica do Modelo 1 do aquecedor elétrico

Sendo: (-) dados reais, (o) a resposta do modelo e (*) sinal de erro.

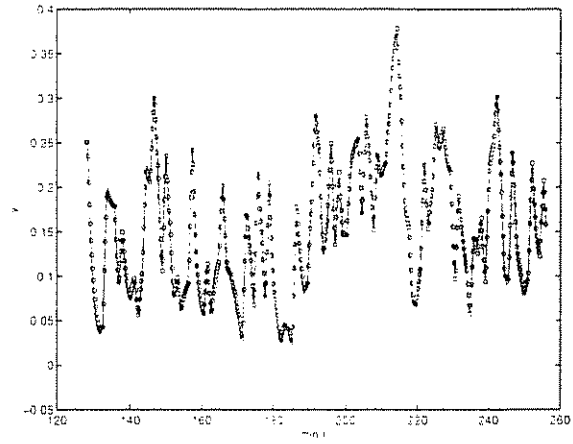


Figura 5.11: Validação dinâmica do Modelo 2 do aquecedor elétrico

Sendo: (-) dados reais, (o) a resposta do modelo e (*) sinal de erro

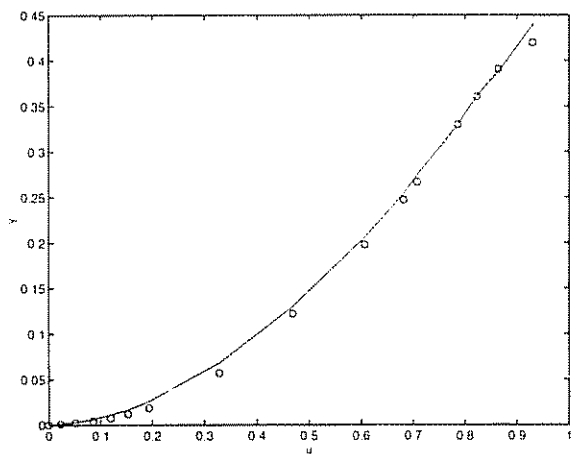


Figura 5.12: Validação estática do Modelo 1 do aquecedor elétrico

Sendo: (---) dados reais e (·o·) curva estática do modelo.

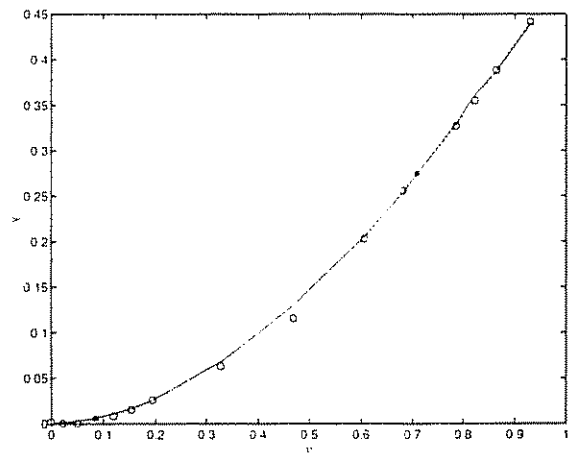


Figura 5.13: Validação estática do Modelo 2 do aquecedor elétrico

Sendo: (---) dados reais, (·o·) curva estática do modelo, e (*) são os pontos estacionários que serviram de referência na geração de centros candidatos.

Tabela 5.4: Resultados da validação dinâmica e em estado estacionário dos modelos do aquecedor elétrico

Em negrito, os melhores resultados dentro de cada critério todos baseados no erro quadrático. Desvio: Desvio-padrão; SEQ: Soma dos erros quadráticos.

Validação dinâmica				
Modelo	Máx.	Média	Desvio	SEQ
Modelo 1	4,25 $\times 10^{-4}$	3,81 $\times 10^{-5}$	6,43 $\times 10^{-5}$	2,28 $\times 10^{-2}$
Modelo 2	6.20 $\times 10^{-4}$	4.02 $\times 10^{-5}$	6.63 $\times 10^{-5}$	2.41 $\times 10^{-2}$
Validação em estado estacionário				
Modelo	Máx.	Média	Desvio	SEQ
Modelo 1	3.77 $\times 10^{-1}$	5.25 $\times 10^{-5}$	9.34 $\times 10^{-1}$	8.40 $\times 10^{-1}$
Modelo 2	2,00 $\times 10^{-1}$	1,98 $\times 10^{-5}$	4,93 $\times 10^{-5}$	3,17 $\times 10^{-1}$

5.3 Comportamento dos autovalores

Neste estudo de caso o objetivo é verificar se o emprego de um modelo RBF com comportamento global dos autovalores semelhante ao exibido pelo sistema original promove o incremento na sua faixa de validade. Para isso será utilizado um sistema de Hammerstein cuja componente dinâmica linear é dada por $G(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)}$. A característica estática não-linear, por sua vez, é dada por

$$q(\bar{u}) = \left[1 + \left(\frac{1}{R^{2(\bar{u}-1)}} - 1 \right) p \right]^{-0.5} \quad (5.14)$$

sendo $R = 124$ e $p = 0,066$. O sistema possui autovalores que não variam com o ponto de operação e ganho em estado estacionário variável. A não-linearidade estática (5.14) é uma função de uso comum para representar válvulas de controle, e os parâmetros R e p dependem das características da válvula (Shinsky, 1988). O sistema de Hammerstein completo é então dado por $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{q(\bar{u})}{(\tau s + 1)}$. Os dados de identificação foram gerados através da simulação de $H(s)$, para excitação aleatória, pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. Para obter os dados de identificação, a entrada foi mantida no intervalo $0 \leq u \leq 0,4$, e em $0 \leq u \leq 0,7$ na simulação que resultou nos dados de validação.

Dois modelos RBF foram gerados, com as seguintes características

- Modelo 1

$$\begin{aligned}
 y(k) &= w_0 + \sum_{i=1}^5 w_i \phi(\| \mathbf{y}_1(k-1) - \mathbf{c}_i \|) + \sum_{i=1}^{n_{yl}} a_i y(k-i) + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n_{ul}} b_i u(k-i). \\
 \mathbf{y}_1(k-1) &= [y(k-1) \dots y(k-n_y) \ u(k-1) \dots u(k-n_u)]^T, \\
 \mathbf{c}_i &= [c_{i,1} \ c_{i,2} \dots \ c_{i,n_y} \ c_{i,(n_y+1)} \dots \ c_{i,(n_y+n_u)}]^T.
 \end{aligned}$$

- Modelo 2

$$\begin{aligned}
 y(k) &= w_0 + \sum_{i=1}^2 w_i \phi(\| \mathbf{y}_2(k-1) - \mathbf{c}_i \|) + \sum_{i=1}^{n_{yl}} a_i y(k-i) + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n_{ul}} b_i u(k-i). \\
 \mathbf{y}_2(k-1) &= [u(k-1) \ u(k-2) \dots \ u(k-n_u)]^T, \\
 \mathbf{c}_i &= [c_{i,1} \ c_{i,2} \dots \ c_{i,n_u}]^T.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

sendo $n_u = n_{ul} = 1$ e $n_y = n_{yl} = 1$. Os centros foram selecionados pelo algoritmo de *k-médias*, e os parâmetros estimados pelos mínimos quadrados irrestritos.

A definição de $\mathbf{y}_2(k-1)$, no Modelo 2, pressupõe ausência de não-linearidade no regressor da saída. Por conseqüência, este modelo apresenta, além de unicidade de estados estacionários, autovalores que não variam com o ponto de operação. O desempenho dos dois modelos na validação dinâmica pode ser verificado na Tabela 5.5, e na Figura 5.14, avalia-se as não-linearidades estáticas. As curvas dos modelos na Figura 5.14 foram recuperadas analiticamente, e comparadas com a função não-linear (5.14). Note-se que a validação em estado estacionário é realizada para uma faixa ainda mais extensa que a correspondente aos dados dinâmicos de validação, de $0 \leq \bar{u} \leq 1$.

O Modelo 2, para o qual os autovalores não variam com o ponto de operação, apresentou índices bem superiores nas validações dinâmica e de estado estacionário. É notável a capacidade de extrapolação desse modelo, verificada na Figura 5.14. Enquanto o Modelo 1 começou a divergir para aproximadamente $\bar{u} = 0,5$, o Modelo 2 manteve-se válido até $\bar{u} = 0,7$, extrapolando bem na parte linear da função (5.14).

Os resultados levam a destacar uma consideração: de posse da informação de que

Tabela 5.5: Resultados da validação dinâmica e em estado estacionário dos modelos do sistema de Hammerstein

Em negrito, os melhores resultados dentro de cada critério, todos baseados no erro quadrático. Desvio: Desvio-padrão; SEQ: Soma dos erros quadráticos

Validação dinâmica				
Modelo	Máx.	Média	Desvio	SEQ
Modelo 1	8.20×10^{-3}	1.01×10^{-4}	4.55×10^{-4}	1.01×10^{-1}
Modelo 2	$2,38 \times 10^{-4}$	$2,70 \times 10^{-5}$	$4,36 \times 10^{-5}$	$2,70 \times 10^{-2}$
Validação em estado estacionário				
Modelo	Máx.	Média	Desvio	SQE
Modelo 1	6.49	9.82×10^{-1}	1.81	9.92×10^1
Modelo 2	$4,04 \times 10^{-1}$	$2,87 \times 10^{-2}$	$7,81 \times 10^{-2}$	2,90

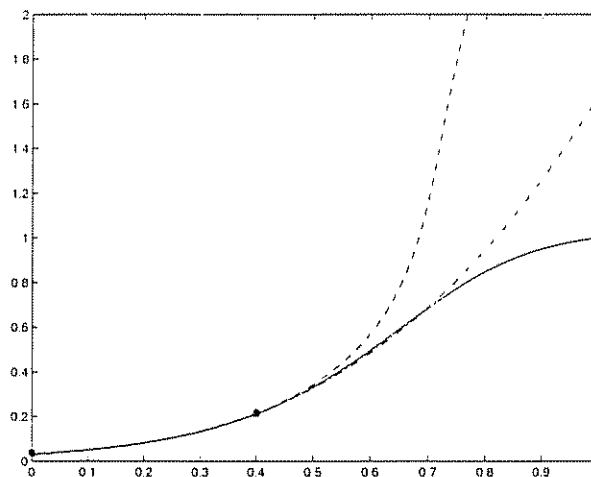


Figura 5.14: Curva estática de modelos RBF do sistema de Hammerstein

Curva estática dos modelos obtidos para o sistema de Hammerstein. (---) Modelo 1, (—) modelo 2, (---) função não-linear original, Equação (5.14). O eixo x é \tilde{u} e o eixo y é \tilde{y} . Os asteriscos indicam os limites da região de operação correspondente aos dados utilizados para gerar os modelos. A curva do Modelo 2 foi gerada a partir de sua função estática analiticamente obtida. Por outro lado, a curva do Modelo 1 foi gerada por simulação.

os autovalores de um sistema não variam com o ponto operacional, é aparentemente viável impor essa característica no modelo RBF. É interessante notar que, ao utilizar o modelo RBF com autovalores independentes do ponto de operação estamos identificando

um sistema em cascata por um modelo em paralelo. Está claro que esse tipo de resultado pode encontrar aplicações em controle, para as quais uma boa aproximação da curva estática do sistema original costuma ser necessária (Henrique et al. 2000).

5.4 Conclusões do capítulo

Este capítulo discutiu o uso de informação auxiliar sobre pontos fixos e comportamento dos autovalores em etapas da identificação de modelos RBF.

As restrições propostas na seção 4.4.2, para imposição matemática de pontos fixos, foram avaliadas em dois mapas caóticos. No primeiro, o mapa de primeiro retorno de um modelo de um regulador *buck*, o uso de centros equidistantes – e, no caso simétricos – do ponto fixo original bastou para que a capacidade de representar a não-linearidade estática original fosse mantida, mesmo sob influência de ruído aditivo. As restrições nos parâmetros, para garantir matematicamente a localização, resultou em uma melhora muito modesta no desempenho, uma vez que a informação aparentemente está bem representada nos dados de identificação, e as RBFs possuem flexibilidade suficiente para se ajustar a tais dados.

Um segundo mapa unidimensional foi utilizado, o mapa senoidal com não-linearidades cúbicas. Duas situações foram avaliadas: (i) imposição do ponto fixo trivial; (ii) aproximação dos pontos fixos não-triviais (simétricos). Mais uma vez, quando o objetivo era impor um único ponto fixo, pouco se ganhou com as restrições nos parâmetros, bastando tomar centros simétricos. Distinções foram observadas, porém, ao tentar aproximar os pontos fixos simétricos: as restrições nos parâmetros garantiram melhor representação dos pontos fixos originais e do maior expoente de Lyapunov. Por fim, foi observado que a variação do parâmetro de dispersão das gaussianas, que em última análise determina o nível de sobreposição entre os grupos de funções de base usadas para aproximar cada ponto fixo, parece controlar a “quantidade” de informação auxiliar embutida nos modelos.

No exemplo do aquecedor elétrico, foi possível obter um modelo com melhor desempenho na reprodução de características de estado estacionário seguindo-se o seguinte procedimento: (i) selecionar pontos conhecidos da curva estática; (ii) gerar conjuntos de centros candidatos para cada ponto, tomando-os equidistantes a cada um, e selecionando dispersões pequenas; (iii) selecionar a estrutura por meio do ERR; (iv) restringir os parâmetros do modelo por meio da metodologia proposta no Capítulo 4.

Por fim, foi mostrado, por meio de um exemplo com um sistema de Hammerstein

simulado, que a adoção de uma estrutura que garanta um determinado comportamento dos autovalores – não variação com o ponto de operação, conhecida do sistema original – em modelos RBF resultou em melhoria no desempenho dinâmico e de estado estacionário.

No entanto, algumas perguntas devem ser feitas: (i) de que modo a metodologia pode ser utilizada para impor pontos fixos localizados fora da faixa de operação correspondente aos dados dinâmicos? (ii) de que modo escolher, entre um conjunto de pontos fixos disponíveis, quantos e quais aproximar? (iii) como gerar os centros candidatos (a que distância do ponto fixo selecionado, por exemplo)?

Acredita-se que um mérito dos desenvolvimentos aqui avaliados é oferecer uma alternativa para distribuição de centros considerando informação auxiliar sobre localização de pontos fixos, algo possivelmente inédito.

Discussão, Conclusões e Trabalhos Futuros

O campo da identificação de sistemas dinâmicos não-lineares conta atualmente com uma série de questões de solução desafiadora. Um grande número de representações matemáticas está disponível, cada uma delas com diferentes propriedades. Resultados mais recentes tendem a explicitar o chamado princípio da parcimônia na representação de sistemas altamente não-lineares (Aguirre, 2000a). Ou seja, a questão principal aparentemente se encontra focada no problema de escolha da estrutura adequada para a representação de certos regimes dinâmicos, e, posteriormente, na estimação de parâmetros condizentes com informações conhecidas do sistema original.

Uma maneira para alcançar modelos fisicamente mais significativos é o uso de técnicas caixa-cinza, que permitem a incorporação de informações qualitativas e quantitativas disponíveis do sistema, além dos dados coletados em testes dinâmicos. Uma questão importante parece ser a de que quantidade de informação auxiliar deve ser utilizada, e de que forma podem ser combinadas. Outra grande vantagem das técnicas caixa-cinza é a possibilidade de obter modelos a partir dos quais pode-se extrair algum tipo de informação útil do sistema identificado.

A identificação de sistemas por meio de RBFs oferece uma oportunidade para aproveitar a relativa simplicidade natural às representações lineares nos parâmetros e, ao mesmo tempo, a capacidade de ajuste inerente aos aproximadores universais. Desse modo, técnicas de origens fundamentalmente diferentes podem ser combinadas de forma eficiente. Neste trabalho, a capacidade das RBFs para identificar sistemas não-lineares é demonstrada ao longo dos exemplos apresentados.

O procedimento para incorporação de informação auxiliar na seleção de estruturas e estimação de parâmetros de modelos RBF abordou aqui informação qualitativa e quantitativa sobre características de comportamento em estado estacionário. Foi mostrado que,

uma vez conhecido o comportamento geral dos autovalores do sistema original, ou seja, se há ou não variação com o ponto operacional, pode ser tomada uma decisão simples quanto a inclusão ou não de regressores da saída no espaço de entrada das funções de base. Por sua vez, o estudo do mapeamento dos estados estacionários na estrutura e parâmetros dos modelos RBF permitiu o desenvolvimento de um procedimento para imposição matematicamente exata da localização de pontos fixos e estados estacionários conhecidos do sistema original. Uma importante implicação do método proposto é o fato de oferecer uma alternativa para o relevante problema de seleção de centros de modelos RBF, uma vez disponível informação auxiliar, procedimento possivelmente inédito.

No estudo de caso da seção 5.2.2, na tentativa de aproximação dos pontos fixos não-triviais simétricos do mapa senoidal com não-linearidades cúbicas, identificou-se evidências de que o ajuste das dispersões das funções de base afetava o balanço entre as reproduções de características dinâmicas e de estado estacionário. Aparentemente, trata-se de um problema multiobjetivo, cuja solução pode levar à possibilidade de um ajuste sistemático dos parâmetros de dispersão de funções radiais, outro problema ainda em aberto na literatura.

Como propostas para continuidade do trabalho são colocadas as seguintes questões:

- Uma vez disponíveis alguns pontos estáticos de um sistema, como selecionar os estados a aproximar pelo método proposto?
- Uma vez selecionados os pontos a aproximar, como distribuir os centros candidatos que atendam as restrições necessárias? A que distância do ponto fixo, e com qual dispersão?
- Como expandir os modelos em bases mais complexas, com funções com diferentes dispersões e distâncias dos pontos a impor, elevando as possibilidades de aproximação simultânea de vários pontos estacionários sob pena de perda no desempenho dinâmico?

BIBLIOGRAFIA

- Abarbanel, H. D. I., Brown, R., Sidorowich, J. J., e Tsimring, L. S. (1993). The analysis of observed chaotic data in physical systems. *Reviews of Modern Physics*, 65(4):1331–1392.
- Abreu, S. D. G. (1993). *Avaliação de desempenho de controladores auto-ajustáveis*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, MG.
- Adomaitis, R. A., Farber, R. M., Hudson, J. L., Kevrekidis, I. G., Kube, M., e Lapedes, A. S. (1990). Application of neural nets to system identification and bifurcation analysis of real world experimental data. In *Neural Networks: Biological computers or electronic brains*, páginas 87–97. Springer Verlag, Paris.
- Aguirre, L., Barroso, M.F.S., S. R., e Mendes, E. (2004a). Imposing steady-state performance on identified polynomial models by means of constrained parameter estimation. *IEE Proc.-Control Theory Appl.* Aceito para publicação.
- Aguirre, L., Corrêa, M., e Cassisi, C. (2000). Nonlinearities in NARX polynomial models: representation and estimation. *IEE Proc. - Control Theory Appl.*, 149(4):343–348.
- Aguirre, L., Lopes, R., Amaral, G., e Letellier, C. (2004b). Constraining the topology of neural networks to ensure dynamics with symmetry properties. *Physical Review E*. Em impressão.
- Aguirre, L. A. (1995). A nonlinear correlation function for selecting the delay time in dynamical reconstructions. *Physics Letters A*, 203(2):88–94.
- Aguirre, L. A. (1996). A tutorial introduction to nonlinear dynamics and chaos, part II: Tools and benchmarks. *Controle & Automação*, 7(1):50–66.
- Aguirre, L. A. (1997). Recovering map static nonlinearities from chaotic data using dynamical models. *Physica D*, 100:41–57.

- Aguirre, L. A. (2000a) *Introdução à Identificação de Sistemas*. Editora da UFMG.
- Aguirre, L. A. (2000b) A nonlinear dynamical approach to system identification. *IEEE Circuits & Systems Newsletter Society*, 11(2):10–23, 47.
- Aguirre, L. A. e Billings, S. A. (1994). Validating identified nonlinear models with chaotic dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4:109–125
- Aguirre, L. A. e Billings, S. A. (1995). Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering. *International Journal of Control*, 62(3):569–587
- Aguirre, L. A., Freitas, U., Letellier, C., e Maquet, J. (2001). Structure selection techniques applied to continuous-time nonlinear models. *Physica D*, 158(1):1–18.
- Aguirre, L. A. e Mendes, E. M. A. M. (1996). Global nonlinear polynomial models: structure, term cluster and fixed points. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 6:279–294
- Alves, G., Corrêa, M., e Aguirre, L. (2001). Using linear ARX terms in RBF network models: a case study employing a thermal process. Canela, RS. Artigo n. 1063.
- Alves, G. e Corrêa, M. (2002). Using a priori information in the structure selection of RBF network models. In *Anais do XIV CBA*, Natal, RN.
- Amaral, G. F. V. (2001). *Uso de Redes Neurais e Conhecimento a priori na Identificação de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Anishchenko, V. (1990). *Complicated Oscillations in Simple Systems: Appearance Routes, Structure and Properties of Dynamical Chaos in Radiophysical Systems*. Nauka Publishers, Moscow.
- Bagarinao, E., Pakdaman, K., Nomvra, T., e Sato, S. (1999). Reconstructing bifurcation diagrams from noisy time series using nonlinear autoregressive models. *Physical Review E*, 60(1):1073–1076.
- Bai, E. W. e Sastry, S. S. (1986). Parameter identification using prior information. *Int. J. Control*, 44:455–473.
- Bakshi, B. R. e Stephanopoulos, G. (1993). Wave-net: a multiresolution, hierarchical neural network with localized learning. *AIChE Journal*, 39(1):57–81.

- Barroso, M. F. S. (2001) *Métodos de Otimização Mono-Objetivo Aplicados à Identificação Caixa-Cinza de Sistemas Não-Lineares*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Billings, S. e Coca, D. (1999) Discrete wavelet models for identification and qualitative analysis of chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 9(7):1263–1284
- Billings, S. A. (1980). Identification of nonlinear systems — a survey. *IEE Proc. D*, 127:272–285.
- Billings, S. A. e Chen, S. (1989). Identification of non-linear rational systems using prediction-error estimation algorithm. *Int. J. Sys. Sci.*, 20(3):467–494.
- Billings, S. A., Chen, S., e Korenberg, M. J. (1989) Identification of MIMO nonlinear systems using a forward-regression orthogonal estimator. *Int. J. Control*, 49:2157–2189.
- Billings, S. A. e Voon, W. S. F. (1983). Structure detection and model validity tests in the identification of nonlinear systems. *IEE Proc. Control Theory and Appl.*, 130:193–199.
- Billings, S. A. e Voon, W. S. F. (1984). Least squares parameter estimation algorithms for non-linear systems. *Int. J. Sys. Sci.*, 15:601–615
- Bohlin, T. e Graebe, S. T. (1995). Issues in nonlinear stochastic grey box identification. *Int. J. Adaptive Control and Signal Proc.*, 9:465.
- Bomberger, J. e Seborg, D. (1998). Determination of model order for NARX models directly from input-output data. *J. Proc. Contr.*, 8(5):459–468.
- Broomhead, D. S. e Lowe, D. (1988). Multivariable functional interpolation and adaptive networks. *Complex Systems*, 2:321–355.
- Carlin, M. (1992). Radial basis function networks and nonlinear data modelling. In *Proceedings of Neuro-Nimes'92. Neural Networks and their Applications*, volume EC2, páginas 623–633, França.
- Carvalho, A., Braga, A., e Pena, R. (1998). Modelo neural com estrutura ARX aplicado a um processo não-estacionário. *Anais do V Simpósio Brasileiro de Redes Neurais*, páginas 265–268.
- Casdagli, M. (1989). Nonlinear prediction of chaotic time series. *Physica D*, (35):335–356.

- Casdagli, M. (1992). A dynamical systems approach to modeling input-output systems. In Casdagli, M. e Eubank, S., editors. *Nonlinear modeling and forecasting*. páginas 265–281. Addison-Wesley, New York.
- Cassini, C. C. S. (1999). *Estimação Recursiva de Características Estáticas Não Lineares Utilizando Modelos Polinomiais NARMAX*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Chen, G. (1999). *Chaos, bifurcation and their control*. capítulo Article W 1007 in Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering. John Wiley and Sons.
- Chen, S. e Billings, S. A. (1989). Representations of nonlinear systems: the NARMAX model. *Int J Control*, 49:1013–1032.
- Chua, L. O. e Hasler, M. (1993). Special issue on chaos in nonlinear electronic circuits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 40(10).
- Coca, D. e Billings, S. A. (1996). Continuous-time system identification for linear and nonlinear systems using wavelet decompositions. Technical report, University of Sheffield, Sheffield, UK.
- Coelho, L., Corrêa, M., Cassini, C., e Aguirre, L. (2000). A comparison of representations for nonlinear system identification: a case study. In *Anais do XII CBA*, Florianópolis/SC.
- Coelho, M. C. S. (2002). *Modelos de Hammerstein e Wiener: conexões com modelos NARX e sua aplicação em identificação de sistemas não-lineares*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Corrêa, M. (2001). *Identificação Caixa-Cinza de Sistemas Não-Lineares Utilizando Representações NARMAX racionais e polinomiais*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFMG, Belo Horizonte/MG.
- Corrêa, M., Aguirre, L., e Mendes, E. (2000). Modeling chaotic dynamics with discrete nonlinear rational models. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10:1019–1032.
- Crutchfield, J. P. e McNamara, B. S. (1987). Equations of motion from a data series. *Complex Systems*, 1:417–452.

- Cubillos, F. A., Alvarez, P. I., Pinto, J. C., e Lima, E. L. (1996). Hybrid-neural modeling for particulate solid diving processes. *Power Technology*, (87):153–160.
- Cubillos, F. A. e Lima, E. L. (1997). Identification and optimizing control of a rougher flotation circuit using an adaptable hybrid-neural model. *Minerals Engineering*, 10(7):707–721.
- Cybenko, G. (1989). Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control Signals and Systems*, 2:303–314.
- Daubechies, I. (1988). Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, (41):909–996.
- Elman, J. L. (1990). Finding structure in time. *Cognitive Science*, (14):179–211.
- Eykhoff, P. (1974). *System Identification*. Wiley, New York.
- Farmer, J. D. e Sidorowich, J. J. (1987). Predicting chaotic time series. *Phys. Rev. Lett.*, 59(8):845–848.
- Fieldler-Ferrara, N. e Prado, C. P. C. (1994). *Caos, uma introdução*. Edgari Blücher Ltda, São Paulo, Brasil.
- Floriani, E., Dudok de Wit, T., e Le Gal, P. (2000). Nonlinear interactions in a rotating disk flow: from a Volterra model to the Ginzbur-Landau equation. *CHAOS*, 10(4):834–847.
- Fonseca, C. M., Mendes, E. M. A. M., Fleming, P. J., e Billings, S. A. (1993). Nonlinear model term selection with genetic algorithms. In *IEE/IEEE Workshop on Natural Algorithms in Signal Processing*, páginas 27/1–27/8, Chelmsford, Essex.
- Forssel, U. e Lindskog, P. (1997). Combining semi-physical and neural network modeling: an example of its usefulness. Technical Report LiTH-ISY-R-1943, Linköping University, Division of Automatic Control, S-581 83 Linköping, Sweden.
- Fraser, A. M. (1986). Using mutual information to estimate metric entropy. In Mayer-Kress, G., editor, *Dimensions and entropies in chaotic systems: quantification of complex behavior*, páginas 82–91. Springer-Verlag, Berlin.
- Fruzzetti, K., Palazoglu, A., e McDonald, K. (1997). Nonlinear model predictive control using Hammerstein models. *J. Process Control*, 7:81–91.

- Gan, C. (2000). *Embedded radial basis function networks to compensate for modeling uncertainty of nonlinear dynamic systems*. Tese de Doutorado Univ. of Massachussets Amherst. Dept. Mechanical and Industrial Eng.
- Garcia, C. (1997). *Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos*. EDUSP. São Paulo.
- Gençay, R. e Liu, T. (1997). Nonlinear modelling and prediction with feedforward and recurrent networks. *Physica D*, (108):119–134.
- Godfrey, K. R. (1986). Practical problems in identification. In Godfrey, K. e Jones, P., editors. *Signal Processing for Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences*. páginas 358–386. Springer-Verlag.
- Gouesbet, G. e Lerellier, C. (1994). Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial l_2 approximation on nets. *Physical Review E*, 49:4955–4972.
- Grassberger, P. e Procaccia, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, 9:189–208.
- Haber, R. (1985). Nonlinearity tests for dynamic processes. In *IFAC identification and system parameter estimation*, páginas 409–413. York, UK.
- Haber, R. e Unbehauen, H. (1990). Structure identification of nonlinear dynamics-systems - a survey on input output approaches. *Automatica*, 26(4):651–677.
- Häck, M. e Köhne, M. (1996). Estimation of wastewater process parameters using neural networks. *Wat. Sci. Tech.*, 33(1):101–115.
- Haykin, S. (1999). *Neural Networks. A Comprehensive Foundation*. Prentice-Hall. New Jersey.
- Haykin, S. e Principe, J. (1998). Making sense of a complex world. *IEEE Signal Processing Mag.*, 15(3):66–81.
- Henrique, H. M., Lima, E. L., e Pinto, J. C. (1998). A bifurcation study on neural network models for nonlinear dynamics systems. *Latin American Applied Research*, 28:187–200.
- Henrique, H. M., Lima, E. L., e Seborg, D. E. (2000). Model structure determination in neural network models. *Chemical Engineering Science*, 55:5457–5469.
- Herbert, J. A. e Tulleken, A. F. (1993). Grey-box modeling and identification using physical knowledge and Bayesian techniques. *Automatica*, 29(2):285–308.

- Hernández, E. e Arkun, Y. (1992). Study of the control-relevant properties of backpropagation neural network models of nonlinear dynamical systems. *Computers Chemical Engineering* 16(4):227-240.
- Jácome, C. R. F. e Aguirre, L. A. (1996). Uso de técnicas de identificação não-linear na modelagem de válvulas para controle de processos. In *Anais do I Congresso Mineiro de Automação*, number 37-45. Belo Horizonte.
- Johansen, T. (1996). Identification of non-linear systems using empirical data and prior knowledge - an optimization approach. *Automatica*, 32(3):337-356.
- Jolliffe, I. T. (1986) *Principal Component Analysis*. New York: Springer.
- Jorgensen, S. B. e Hangos, K. M. (1995). Grey box modelling for control: Qualitative models as a unifying framework. *Int. J. Adaptive Control and Signal Proc.*, 9:547-562.
- Judd, K. e Mees, A. (1995). On selecting models for nonlinear time series. *Physica D*, 82:426-444.
- Judd, K. e Mees, A. (1998). Embedding as a modelling problem. *Physica D*, 120:273-286.
- Judd, K. e Stick, S. (1993). Dynamical models for infant breathing patterns. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*.
- Juditsky, A., Zhang, Q., Delyon, B., Glorennec, P.-Y., e Benveniste, A. (1994). Wavelets in identification. wavelets, splines, neurons, fuzzies: how good for identification. Technical report. Institute de Recherche en Systemes Aleatoires (IRISA)
- Kadtke, J. B., Brush, J., e Holzfuss, J. (1993). Global dynamical equations and Lyapunov exponents from noisy chaotic time series. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3:607-616.
- Knohl, T. e Unbehauen, H. (1998). Adaptive control of linear systems with unknown memoryless input nonlinearities using ANN. In *The IFAC Workshop on Adaptive Systems in Control & Signal Processing*, páginas 466-471, Glasgow, Scotland.
- Korenberg, M., Billings, S., Liu, Y., e McIlroy, P. (1988). Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear stochastic systems. *Int. J. Control*, 48:193-210.
- Leontaritis, I. J. e Billings, S. A. (1985). Input-output parametric models for non-linear systems - part i: stochastic non-linear systems. *Int. J. Control*, 41(2):329-344.

- Letellier, C., Maquet, J., Le Sceller, L., e Aguirre, L. A. (1998). On the non-equivalence of observables in phase-space reconstructions from recorded time series. *J. Phys. A.* 31:7913–7927
- Ljung, L. (1987). *System Identification: Theory for the User*. Prentice-Hall, London
- Mavrovouniotis, M. L. e Chang, S. (1992). Hierarchical neural networks for process monitoring. *Comp. Chem. Eng.*, 4(16):347
- Mees, A. (1993). Parsimonious dynamical reconstruction. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3(3):669–675
- Mees, A., Jackson, M., e Chua, L. (1992). Device modeling by radial basis functions. *IEEE Trans. Circuits Sys.*, 39(1):19–26
- Narendra, K. S. e Parthasarathy, K. (1990). Identification and control of dynamical systems using neural networks. *IEEE Trans. Neural Net.* 1:4–27
- Nepomuceno, E. (2002). *Identificação Multiobjetivo de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares*. Dissertação de Mestrado, PPGEE UFMG, Belo Horizonte.
- Nepomuceno, E. G., Takahashi, R. H. C., Amaral, G. F. V., e Aguirre, L. A. (2002). Non-linear identification using prior knowledge of fixed points: a multiobjective approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Em impressão.
- Noshiro, M., M., F., Linkens, D., e Goode, K. (1993). Nonlinear identification of the Pco₂ control system in man. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 40:189–202.
- Ohba, T. e Ishida, M. (1998). Application of a neural network to evaluation of interactions in a MIMO process. *AIChE Journal*, 44(9):2018–2024
- Okuda, G. (2000). *Identificação de Sistemas Não-Lineares para Propósito de Controle*. Dissertação de Mestrado, UFU, PPGEQ, Uberlândia/MG.
- Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., e Shaw, R. S. (1980). Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.*, 49(9):712–716.
- Pearson, R. e Ogunaiké, B. (1997). *Nonlinear process identification*, capítulo 2. Henson, M.A. and Seborg, D.E., Englewood Cliffs
- Pearson, R. e Pottmann, M. (2000). Gray-box identification of block-oriented nonlinear models. *J. Process Control*, 10:301–315.

- Poggio, T. e Girosi, F. (1990). Networks for approximation and learning. In *Proc IEEE*, number 78, páginas 1481-1496.
- Pottmann, M. e Pearson, R. K. (1998). Block-oriented NARMAX models with output multiplicities. *AIChE Journal*, 44(1):131-140.
- Pottmann, M. e Seborg, D. (1992). Identification of nonlinear processes using reciprocal multiquadric functions. *J. of Process Control*, (2):189-203.
- Pröll, T. e Karim, M. N. (1994). Model-predictive pH control using real-time NARX approach. *AIChE Journal*, 40(2):269-282.
- Rodrigues, G. G. (1996). *Identificação de Sistemas Dinâmicos Não Lineares Utilizando Modelos NARMAX Polinomiais - Aplicação a Sistemas Reais*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Röscheisen, M., Hofmann, R., e Tresp, V. (1991). Neural control for rolling mills: incorporating domain theories to overcome data deficiency. *Advances in Neural Information Processing Systems—Proc. of the 1991 Conf.*
- Sauer, T., Yorke, J., e Casdagli, M. (1991). Embedology. *J. Stat. Phys.*, 65:579-616.
- Shannon, C. E. (1949). Communication in the presence of noise. *Proc. of Inst. RadioC Eng.*, 37:10-21.
- Shinskey, F. (1988). *Process Control Systems*. McGraw-Hill International Editions, London.
- Sjöberg, J., Zhang, Q., Ljung, L., Benveniste, A., Delyon, B., Glorennec, P., Hjalmarsson, H., e Juditsky, A. (1995). Nonlinear black-box modeling in system identification: A unified overview. *Automatica*, 31:1691.
- Small, M. (1998). *Deterministic nonlinear dynamics in infant respiration*. Tese de Doutorado, Department of Mathematics, University of Western Australia.
- Smith, L. A. (1992). Identification and prediction of low dimensional dynamics. *Physica D*, 58:50-76.
- Söderstrom, T. e Stoica, P. (1989). *System Identification*. Prentice Hall International, London.

- Sparth, H. (1986) *Cluster analysis algorithms for data reduction and classification of objects*. Ellis Horwood, New York.
- Stark, J. (1999) Delay embeddings for forced systems. I Deterministic forcing. *J Nonlinear Science*, 9:255–332.
- Stark, J., Broomhead, D., Davies, M., e Huke, J. (2002) Delay embeddings for forced systems: II. Stochastic forcing. *J Nonlinear Science* Submitted
- Sze, T. L. (1995) *System Identification Using Radial Basis Function Networks*. PhD Thesis, University of Sheffield, Sheffield, UK.
- Takens, F. (1981). Detecting strange attractors in turbulence. In Rand, D. e Young, L. S., editors, *Dynamical systems and turbulence. Lecture Notes in Mathematics*, volume 898, páginas 366–381. Springer Verlag.
- Tórres, L. A. B. e Aguirre, L. A. (1996). Um protótipo para o estudo de sistemas dinâmicos não-lineares - montagem e sintonia. In *In Anais do XI Congresso Brasileiro de Automática*, volume 2, páginas 881–886, São Paulo - SP.
- Tse, C. K. (1994) Flip bifurcation and chaos in three-state boost switching regulators. *1*, 41(1):16–23.
- Tulleken, H. J. A. F. (1993). Grey-box modelling and identification using physical knowledge and Bayesian techniques. *Automatica*, 29(2):285–308.
- Vallverdu, M., Korenberg, M. J., e Caminal, P. (1992). Model identification of the neural control of the cardiovascular system using NARMAX models. *IEEE Conference*.
- Walker, D., Brown, R., e Tuffillaro, N. (1999). Constructing transportable behavioral models for nonlinear electronic devices. *Phys. Letts. A.*, 255(4):236–242.
- Walker, D., Tuffillaro, N., e Gross, P. (2001). Radial-basis models for feedback systems with fading memory. *IEEE Trans on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 48(9):1147–1151.
- Weibert, K. e Main, J. (2001). Deterministic diffusion in one-dimensional maps—calculation of diffusion constants by harmonic inversion of periodic orbit sums. *Physics Letters A*, 292(1):120–124.
- Wiener, N. (1958). *Nonlinear Problems in Random Theory*. John Wiley and Sons.

-
- Wolf, A. (1986). Quantifying chaos with Lyapunov exponents. In Holden, A., editor, *Chaos*, páginas 273–290. Manchester University Press, Manchester
- Wright, R., Smith, B., e Kravaris, C. (1998). Online identification and nonlinear control of pH processes. *Ind. eng. Chem. Res.*, (37):2446–2461.
- Yu, D., Gomm, J., e Williams, D. (2000). Neural model input selection for a MIMO chemical process. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 13:15–23.
- Zheng, G., e Billings, S. (1995). Radial basis function network configuration using mutual information and the orthogonal least squares algorithm. Technical report, University of Sheffield, Dept. Automatic Control

Descrição dos sistemas reais utilizados nos estudos de caso

Este apêndice tem como objetivo apresentar descrições dos sistemas utilizados nos estudos de caso ao longo da dissertação. O procedimento justifica-se pelo número relativamente alto de sistemas empregados, por vezes em um único capítulo. A frequência com que alguns sistemas aparecem em capítulos diferentes também é relevante

A.1 Aquecedor elétrico

A.1.1 Descrição do sistema

O aquecedor elétrico em estudo nessa seção foi montado em conjunto com ventiladores que podem estar ligados ou desligados. Dessa forma, pode-se variar a dissipação desse aquecedor através dos ventiladores. A temperatura do aquecedor é medida por um termopar e a relação em estado estacionário entre potência elétrica na entrada e temperatura final depende do estado dos ventiladores (Cassini, 1999). A Figura A.1 apresenta um diagrama em blocos funcionais do aquecedor com dissipação variável (Cassini, 1999).

A entrada e saída do sistema são a tensão elétrica no divisor de tensão e a tensão de saída do circuito amplificador, respectivamente. O divisor de tensão é construído de maneira que uma variação na faixa (0 a 127 V) corresponda a uma variação de (0 a 5 V) na entrada do sistema. Os dados de entrada e saída foram coletados através de uma placa de aquisição de dados (PCL 711s).

A placa de aquisição de dados utilizada tem como limites de tensão, para coleta, as faixas (0 a 5V) e (0 a 10V). O conjunto funcional transformador-retificador-divisor de tensão, tem como função garantir a manutenção dos limites de (0 a 5V).

O *varivolt* é utilizado para tornar possível a variação da tensão de entrada na faixa

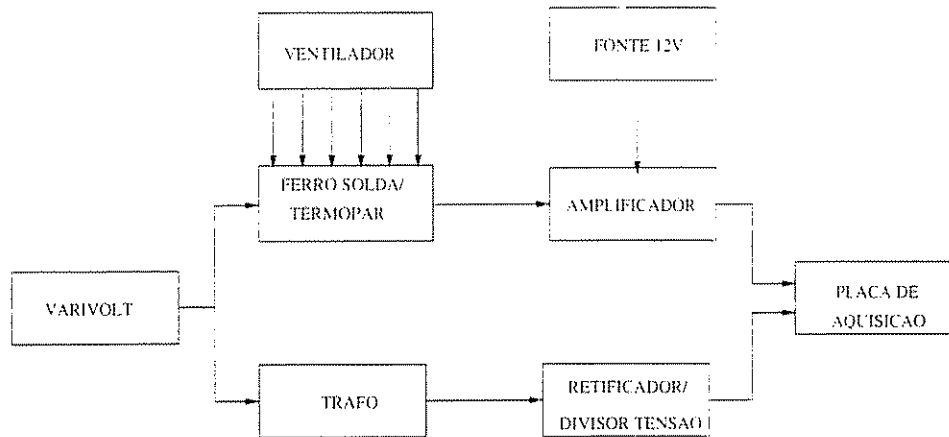


Figura A 1: Diagrama em blocos funcionais do aquecedor elétrico

Diagrama em blocos funcionais do aquecedor com dissipação variável. O aquecedor com dissipação variável consiste em um pequeno aquecedor elétrico e um conjunto de ventiladores que podem estar ligados ou desligados.

de (0 a 136V) da planta (ferro de solda). Esse sinal passa pelo transformador, passando para a faixa de (0 a 18V), e o sinal de saída é retificado.

As variações na temperatura do ferro de solda provocadas pela variação no *varivolt* são medidas por meio de um termopar acoplado ao mesmo. A tensão nos terminais do termopar são ampliadas por um amplificador de instrumentação para uma faixa de (0 a 4V) e coletadas pela placa de aquisição de dados. Essa planta piloto foi utilizada recentemente em estudos de Identificação de Sistemas (Corrêa, 2001; Barroso, 2001; Amaral, 2001; Coelho, 2002).

A.1.2 Teste dinâmico

Durante os testes que serão aqui considerados, o ventilador encontrava-se ligado em uma fonte de 127 V.

Esses testes foram realizados em uma temperatura ambiente de 24°C por um período de 2 h. Os dados foram coletados com uma taxa de amostragem de 6s, resultando num total de 2520 pontos para o teste com ventilador ligado. Cada patamar do sinal de

excitação do sistema foi mantido por 1 min. gerando aproximadamente 10 amostras por patamar.

A massa de dados foi dividida em duas, sendo a primeira metade utilizada para a identificação do sistema e a segunda metade para a validação do mesmo. Os dados utilizados na identificação podem ser vistos na Figura A.2 e os dados utilizados na validação na Figura A.3.

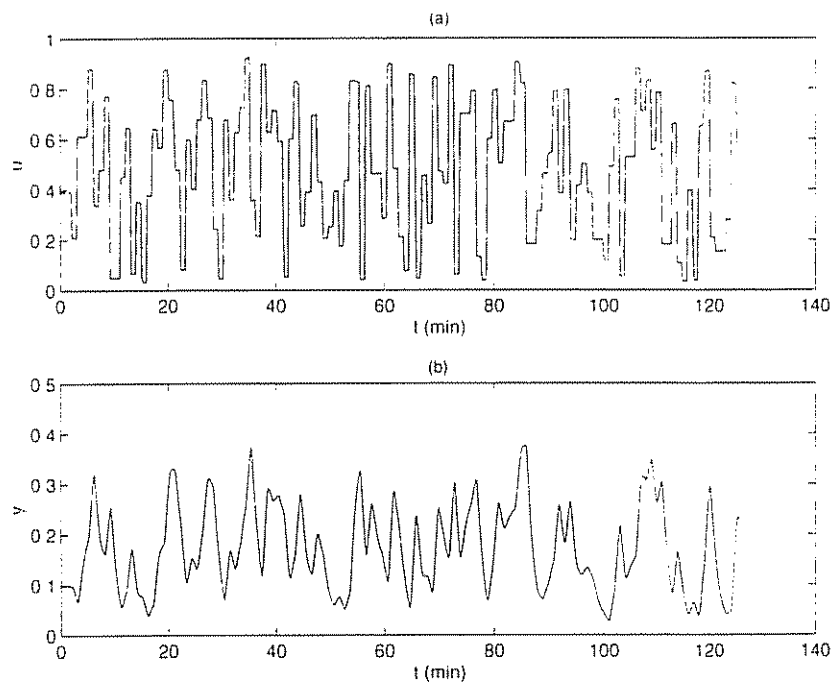


Figura A.2: Dados de identificação - aquecedor elétrico

Dados de identificação do aquecedor elétrico (primeira metade), sendo: (a) sinal de entrada do sistema em p.u. (b) sinal de saída do sistema em p.u.

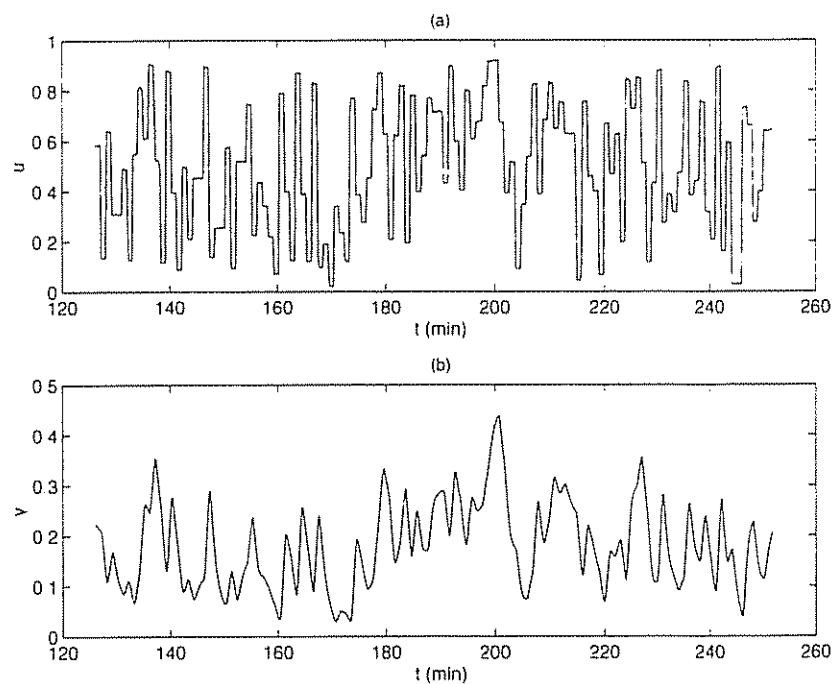


Figura A.3: Dados de validação - aquecedor elétrico

Dados de validação do aquecedor elétrico (segunda metade), sendo: (a) sinal de entrada do sistema em p.u. (b) sinal de saída do sistema em p.u.

A.1.3 Teste estático

Os testes estáticos tem como finalidade o levantamento da curva estática do sistema. O teste utilizado nesse trabalho teve a duração de 3 h.

A Figura A.4 mostra a curva estática do modelo. As grandezas estão indicadas em p.u., cuja base é 5V do sinal de entrada, visto pelo ferro de solda e 998.51°C na temperatura do ferro de solda.

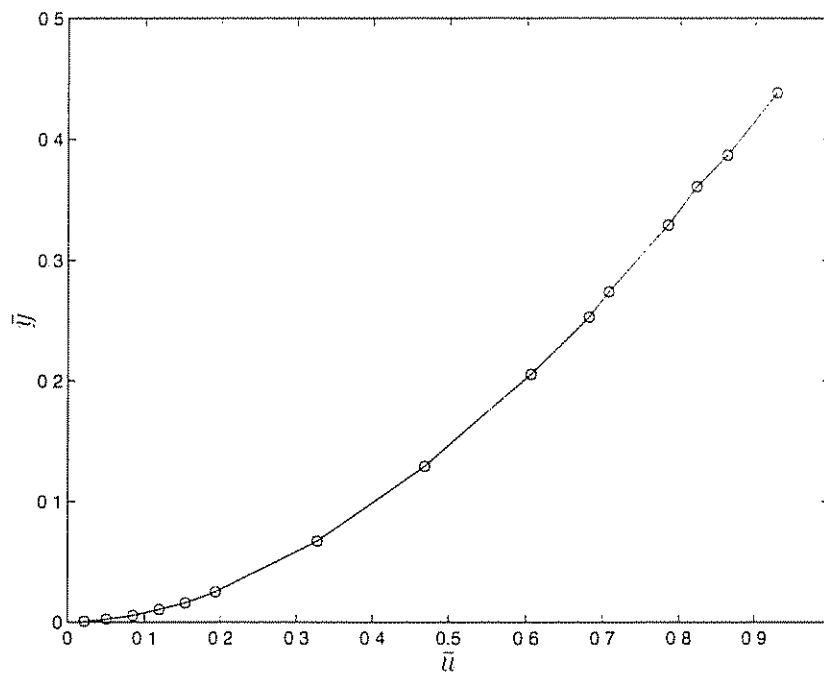


Figura A.4: Dados estáticos - aquecedor elétrico

Curva estática do aquecedor elétrico, sendo: (\bar{u}) e (\bar{y}) em p.u. Os círculos determinam as medições realizadas. A linha foi traçada para facilitar a visualização do comportamento da curva estática.

simulado, que a adoção de uma estrutura que garanta um determinado comportamento dos autovalores – não variação com o ponto de operação, conhecida do sistema original – em modelos RBF resultou em melhoria no desempenho dinâmico e de estado estacionário.

No entanto, algumas perguntas devem ser feitas: (i) de que modo a metodologia pode ser utilizada para impor pontos fixos localizados fora da faixa de operação correspondente aos dados dinâmicos? (ii) de que modo escolher, entre um conjunto de pontos fixos disponíveis, quantos e quais aproximar? (iii) como gerar os centros candidatos (a que distância do ponto fixo selecionado, por exemplo)?

Acredita-se que um mérito dos desenvolvimentos aqui avaliados é oferecer uma alternativa para distribuição de centros considerando informação auxiliar sobre localização de pontos fixos, algo possivelmente inédito.

