

**ESTUDOS TEÓRICOS DOS EFEITOS DE
BINARIDADE NA EVOLUÇÃO ESTELAR**

Leandro Rocha Rímulo

Março 2011

LEANDRO ROCHA RÍMULO

**ESTUDOS TEÓRICOS DOS EFEITOS DE
BINARIDADE NA EVOLUÇÃO ESTELAR**

Dissertação submetida à UNIVERSIDADE FEDERAL DE
MINAS GERAIS como requisito parcial para a obtenção do
grau de MESTRE EM FÍSICA.

Área de Concentração: ASTROFÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Luiz Paulo Ribeiro Vaz (Física/UFMG)

Co-orientadora: Profa. Dra. Natália Rezende Landin (UFV-Florestal)

Co-orientador: Prof. Dr. Luiz Themýstokliz Sanctos Mendes (CPDEE/UFMG)

Departamento de Física - ICEX - UFMG

2011

Agradecimentos

Quero expressar meu profundo agradecimento às muitas pessoas que, direta e indiretamente me auxiliaram na produção deste trabalho.

Em primeiro lugar, sou grato aos meus orientadores, Luiz Paulo Vaz, Natália Landin e Luiz Themystokliz. Ao Luiz Paulo, de quem me sinto muito honrado por ter sido orientado, por sua paciência com o pesquisador iniciante que fui e por sua enorme competência como um cientista que sabe, magnificamente, ter um equilíbrio entre o cuidado com os detalhes e o senso prático. Espero ter herdado uma pequena fração dessa competência para os meus trabalhos futuros! Ao Luiz T., com quem tive encontros de discussões e com quem solucionei dúvidas fundamentais a respeito do código ATON. Nossos encontros, mesmo não tendo sido muitos, elucidaram questões essenciais para a produção deste trabalho. À Natália, que tive o prazer de conhecer na metade de minha graduação em física, por me introduzir ao código ATON, por suas imensas dedicação e competência como pesquisadora, e pelo carinho, ao me acompanhar durante todas as etapas da produção deste trabalho, mesmo, algumas vezes, à distância. Sua ajuda neste trabalho foi inestimável! Muito obrigado! Você me ensinou muito mais do que, somente, astrofísica estelar!

Sou também muito grato a todos os professores e funcionários do Departamento de Física da UFMG. Primeiramente, agradeço aos professores de nosso Grupo de Astrofísica, que me guiaram na minha formação de astrofísico. Em especial, sou grato à Silvinha, que foi minha orientadora de iniciação científica no final de minha graduação, e que me levou a me apaixonar por formação estelar e estrelas jovens; ao Waguinho, que me proporcionou minha formação básica nas astrofísicas estelar e galáctica e em técnicas de redução de dados astronômicos, e a quem todos devemos muita da alegria de nosso laboratório; e ao João Francisco, meu professor na primeira e na última das disciplinas de astrofísica que cursei na UFMG, por ter me introduzido à astrofísica e ao grupo e por tantas excelentes ajudas extraclasse. Sou grato, também, aos demais professores do departamento, guias de toda a minha formação de físico geral, por toda a competência em nos ensinar. Quero destacar minha gratidão aos professores Mário Sérgio, Ronald Dickman, Oscar, Edmar e João Plascak: excelentes professores de quem tive o privilégio de ser aluno. E agradeço, também, às nossas bibliotecárias Shirley e Clarice, por serem tão eficientes e atenciosas.

Sou profundamente grato à minha família, por toda ajuda e suporte, e por todo afeto, sem os quais, jamais teria chegado até aqui. Aos meus pais, Airton e Sueli, e aos meus irmãos, Daniel e Alexandre, por todo amor e carinho, por sempre se preocuparem comigo, por terem me dado as primeiras e mais importantes lições de vida e por tanto terem contribuído e trabalhado para que eu pudesse chegar onde já cheguei, até agora. A todos, muito obrigado! Amo vocês! Imensamente! Eu, que virei titio durante o mestrado, agradeço também à Raquelzinha, por ter trazido ainda mais alegria aos nossos corações. E tem mais gente vindo aí...

Agradeço, também aos meus amigos, de todos os cantos, por me auxiliarem neste trabalho, me preenchendo de afeto compartilhado. Aos colegas e amigos do Laboratório de Astrofísica, onde incluo aqueles que já não mais o frequentam, pela amizade, pelas ajudas com o sistema Linux, pelas discussões científicas muito edificantes e boas viagens

a congressos, e pelo café, todas as manhãs e tardes - aqui, vai um agradecimento especial ao T. Jota. Com vocês, tive verdadeira formação complementar em vários ramos da astrofísica! Aos amigos da turma de Física de 2004, onde sou conhecido como Harry. Obrigado pelo companheirismo nos estudos e pelos momentos de descontração, e por nossa união, mesmo agora, apesar das distâncias. Foi muito bom estar com vocês por esses anos! Aos amigos da Associação Espírita Célia Xavier e da COMEBH, unidos pela mesma filosofia de vida, onde sou conhecido como Leandro Rímulo. Muito obrigado pela amizade, pela confiança, pelo carinho, pela alegria e pelo gigantesco aprendizado que vocês me proporcionaram em todos esses sábados e carnavais de estudos, de trabalhos e de aventuras inesquecíveis. Vocês estão para sempre dentro do meu coração! E aos amigos da Máfia do Truco, velhos amigos dos tempos de colégio, onde sou conhecido como Zazá. Obrigado pelos nossos ótimos encontros para relembrar e rir das nossas velhas proezas. Máfia do Truco forever!

Agradeço às agências públicas financiadoras que me deram indispensável suporte financeiro para a realização deste trabalho. Ao CNPq pela concessão da bolsa de mestrado, e à FAPEMIG e à CAPES pelo auxílio em congressos.

Finalmente, agradeço a Deus pelo que já consegui ser, e pelo que desejo e posso me tornar!

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Evolução Estelar	7
2.1	Conceitos Básicos de Evolução Estelar	7
2.1.1	O Diagrama H-R	7
2.1.2	Principais Bases Observacionais da Evolução das Estrelas	9
2.1.3	Notas Históricas Sobre a Descrição Física das Estrelas	10
2.1.4	As Equações Constitutivas	11
2.1.4.1	Breve Discussão das Equações	13
2.1.4.2	Condições de Contorno	14
2.1.5	Principais Resultados da Teoria de Evolução Estelar	15
2.1.5.1	Evolução Estelar de Estrelas Semelhantes ao Sol: Pré-Sequência	16
2.1.5.2	Evolução Estelar de Estrelas Semelhantes ao Sol: Sequência Principal e Pós-Sequência	19
2.1.5.3	Evolução de Estrelas Massivas	20
2.2	Sistemas Binários de Estrelas	20
2.2.1	Importância dos Sistemas Binários	21
2.2.1.1	Elementos Orbitais	22
2.2.1.2	Movimento Apsidal	23
2.2.1.3	O Potencial de Roche e o Esquema de Classificação de Kopal	24
2.3	O Código de Evolução Estelar ATON 2.0	26
2.3.1	Visão Geral	27
2.3.2	Entradas Físicas	28
2.4	Os Códigos ATON 2.1 e ATON 2.4	30
3	Perturbações na Estrutura da Estrela	33
3.1	Modelos em Equilíbrio Hidrostático:	
	Método de Kippenhahn-Thomas	33
3.1.1	Superfícies Equipotenciais Distorcidas	34
3.1.2	Equações de Estrutura Estelar para Superfícies Gerais	36
3.1.2.1	Equação de continuidade	36
3.1.2.2	Equação de equilíbrio hidrostático	36
3.1.2.3	Equação de conservação da energia	36
3.1.2.4	Equação de transporte de energia	37
3.1.3	Resumo	38
3.2	O Potencial (Parte I)	39

3.2.1	Referenciais Inerciais e Não-Inerciais	40
3.2.1.1	Transformação Geral de Referenciais	40
3.2.2	Sistemas Binários	41
3.2.2.1	O Referencial da Primária	43
3.2.2.2	Pseudo-Potenciais de Rotação e Translação	45
3.2.3	A Componente Puntual	46
3.2.3.1	Equação de Movimento do Fluido da Primária	46
3.2.3.2	A Perturbação da Estrela Puntual	46
3.2.4	Um Caso Particular: Modelo de Roche	48
3.2.5	Sobre o Movimento Geral do Fluido da Primária	49
3.2.6	Aproximação: Escoamento Circular	50
3.2.6.1	Aproximação: Rotação “Shellular” Conservativa	53
3.2.7	Conclusão Parcial	54
3.2.7.1	A Perturbação Usada nos Trabalhos Anteriores	54
3.2.7.2	Apontamentos Referentes ao Movimento Orbital	55
3.3	O Potencial (Parte II)	56
3.3.1	Potencial em Coordenadas Esféricas	57
3.3.1.1	$F_{1m}(\mathbf{r}, t)$ são nulas	58
3.3.1.2	O Potencial Perturbador	58
3.3.1.3	Fórmula de MacCullagh	59
3.3.2	Transformação de Coordenadas	60
3.3.3	Aproximação de Primeira Ordem	62
3.3.3.1	A aproximação	63
3.3.3.2	Termos com $j > 0$	64
3.3.3.3	Outra consequência da aproximação de primeira ordem	65
3.3.3.4	Termos com $j = 0$	65
3.3.3.5	Resumo: Os Potenciais Φ e Ψ , até este ponto	66
3.3.4	A Equação de Radau	67
3.3.4.1	Equação Iterativa para $f_{jm}(\mathbf{r}_o, t)$	70
3.3.4.2	Um Breve Estudo da Equação de Radau	71
3.3.5	O Potencial Total Ψ	73
3.3.5.1	Retornando ao Método de Kippenhahn-Thomas	75
3.3.5.2	Sobre a Secundária Puntual	76
3.3.6	Resumo e Discussões	77
3.3.6.1	Resumo	77
3.3.6.2	Discussões Finais	78
4	O Ponto de Controle (“Checkpoint”)	82
4.1	Tempos de Execução	82
4.2	Parada de Controle ou “Checkpointing”	83
4.2.1	O Checkpoint no Código ATON 2.x	83
4.3	Atualização do Checkpoint	85
4.3.1	Os Resultados	87
4.4	Conclusão: Status Atual do Checkpoint	88

5	Movimento Apsidal	90
5.1	O Teste de Movimento Apsidal	91
5.1.1	Breve História do Teste	91
5.1.1.1	Marés Estáticas, Marés Dinâmicas e Evolução Orbital	92
5.1.2	Sobre a Comparação entre Observações e Teoria	93
5.1.2.1	Observações	93
5.1.2.2	Dificuldades Observacionais	94
5.1.2.3	Sobre a Teoria do Movimento Apsidal	94
5.2	Principais Resultados do Trabalho de Landin, Mendes e Vaz	97
5.3	Um Breve Estudo da Relação entre Rotação e Marés	100
5.3.0.4	Sobre o efeito de uma órbita excêntrica	106
6	Conclusão	109
	Apêndices	111
A	Harmônicos Esféricos e Harmônicos Tesserais	112
B	Deduções Intermediárias	115
B.1	Justificativa da equação (3.50)	115
B.2	Justificativa da equação (3.192)	116
B.3	Justificativa da equações (3.193) e (3.195)	118
	Referências	118

Lista de Figuras

2.1	Diagrama H-R de 23000 estrelas próximas	8
2.2	Fotografias (negativos) de NGC 2264, Pleiades, Praesepe e M 67	9
2.3	Diagramas H-R de NGC 2264 e M 67	10
2.4	Diagrama H-R esquemático de aglomerados estelares	10
2.5	Trilhas evolutivas para uma estrela de $1M_{\odot}$	17
2.6	Os elementos orbitais	22
2.7	Esboço de órbita elíptica perturbada	24
2.8	Mudanças das posições e durações relativas dos eclipses	24
2.9	O potencial de Roche e os pontos lagrangianos	25
2.10	Esboço tridimensional dos dois lobos de Roche	26
2.11	Esquema de classificação de binárias próximas de Kopal	26
2.12	Fluxograma simplificado do programa ATON 2.0	29
3.1	Transformação entre referenciais S' e S	40
3.2	Os referenciais inercial S' e não-inercial S	43
3.3	Movimento do fluido da estrela primária, com simetria axial	51
3.4	Vetores \mathbf{r} e $\mathbf{\Omega}$, no referencial S	52
3.5	Os sistemas de coordenadas esféricas e o “novo sistema de coordenadas”	62
3.6	Parábolas representando as equações de Radau	73
3.7	Fluxograma e esboço de órbita elíptica.	80
4.1	Diagrama esquemático do funcionamento do mecanismo de <i>checkpointing</i>	83
4.2	Fluxograma dando ênfase ao mecanismo de <i>checkpointing</i>	84
4.3	Os passos necessários para a atualização do <i>checkpoint</i>	86
5.1	Trilhas evolutivas para as três primeiras constantes de movimento apsidal	99
5.2	seq1: O raio da estrela primária e o período orbital do sistema	101
5.3	seq1: ω , Ω e Ω/ω	102
5.4	seq1: potenciais e distorções de maré e rotação	102
5.5	seq1: $\tau_{\text{dyn}}/\tau_{\text{tide}}$	103
5.6	seq2: Gráficos correspondentes aos das figuras 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5	105
5.7	Comparação entre as trilhas de Seq1 e Seq2, no diagrama H-R.	105
5.8	Comparação entre as evoluções da constante k_2	106

Lista de Tabelas

2.1	Tabela representativa da trilha evolutiva do Sol	18
3.1	Principais consequências da aproximação de primeira ordem	67

Resumo

O código ATON é uma conhecida ferramenta utilizada na modelagem da estrutura e da evolução de estrelas, que, na sua forma padrão, simula “estrelas padrão”: estrelas livres de quaisquer efeitos que possam retirar a simetria esférica de suas equações constitutivas. Em 1999, foi dada ao código a possibilidade de simular uma estrela em rotação, utilizando uma técnica que mantém o caráter unidimensional do código. Em 2006, efeitos de maré devidos ao potencial gerado por uma estrela companheira, considerada puntual, também foram incluídos, utilizando a mesma técnica, possibilitando ao código ATON a simulação de um sistema binário, no caso particular em que a órbita do sistema é circular e os eixos orbital e de rotação são paralelos. No presente trabalho, nós investigamos teoricamente os efeitos gravitacionais e orbitais oriundos da presença de uma estrela companheira nas proximidades da estrela cuja estrutura é modelada pelo código ATON. Deduzimos um potencial efetivo do sistema binário mais geral, Ψ , que permite a possibilidade de o sistema ter uma órbita não-circular e de os eixos de rotação de suas estrelas componentes não serem paralelos ao eixo orbital do sistema, e indicamos como esse novo potencial poderia ser incluído no código. Este trabalho confirma os trabalhos precedentes, e também sinaliza as possíveis fraquezas de suas aproximações: rotação diferencial, termos de deformação de segunda ordem desprezíveis e uma estrela companheira puntual. O novo potencial deduzido é desafiador, no sentido de que ele apresenta variações temporais em escalas de tempo muito curtas em comparação com os passos evolutivos usuais do código ATON. Apesar disso, para o caso particular de uma órbita excêntrica com eixos paralelos, a inclusão do novo potencial no código pode ser simples. Neste trabalho, nós também dissertamos sobre o movimento apsidal de sistemas binários, principal teste observacional da teoria desenvolvida. Nós utilizamos trilhas evolutivas geradas pelo código ATON, no processo. Verificamos o resultado já conhecido de que a presença de uma estrela próxima gera modelos mais centralmente concentrados, um efeito que pode alterar sensivelmente o movimento apsidal. Finalmente, em paralelo com esse trabalho, trabalhamos com a atualização do mecanismo de salvamento do código ATON: o *checkpoint*.

Abstract

The ATON code is a very known tool for modeling the stellar structure and evolution, which, in its standard form, simulates “standard stars”: stars not influenced by any effects that could remove the spherical symmetry of its constitutive equations. In 1999, it was given to the code the possibility of simulating a rotating star, by using a technique which maintains the 1-dimensional character of the code. In 2006, tidal effects due to the potential generated by a companion star, considered a point star, were also included, using the same technique, making it possible for the code to simulate a binary system in the particular case that the system’s orbit is circular and the orbital and rotation axis are parallel. In this present work, we theoretically investigated the gravitational and orbital effects originated by the presence of a companion star at the vicinity of the star which is modeled by the ATON code. We deduced a more general effective potential for the binary system, Ψ , that allows for the system the possibility of having a non-circular orbit and the rotational axis of its components non-parallel to the orbital axis of the system, and we indicated how this new potential could be included in the code. This work confirms the previous ones, and it also signs their approximations’ possible weaknesses: differential rotation, negligible second order terms of deformation and a point mass companion star. The new deduced potential is challenging in the sense that it presents time variations in a timescale much shorter than the usual evolutive time steps of the ATON code. In spite of that, for the particular case of an eccentric orbit and parallel axis, the inclusion of the new potential in the code may be simple. In this work we also discussed about the apsidal motion of binary systems, the main observational test for the developed theory. We made use of evolutionary tracks generated by the ATON code in the process. We verified the already known result that the presence of a close star generates more centrally condensed models, an effect that could alter sensitively the apsidal motion. Finally, in parallel with this work, we worked on the update of the saving mechanism of the ATON code: the *checkpoint*.

Creio que uma das razões da popularidade da astronomia, atualmente, seja o elo que ela mostra entre o ser humano e as estrelas. (...) O sentimento de “pertencer”, de que tanto necessitamos, nos é dado pela astronomia de maneira muito mais satisfatória do que pelos livros de história. Antes de sermos franceses ou canadenses, negros ou brancos, homens ou mulheres, somos terráqueos, solares, “via-lactianos”, filhos e filhas do Universo. Nossas raízes estão nas estrelas.

Hubert Reeves, no prefácio de *Pequeno Guia do Céu*, de Bernard Pellequer

(...) a beleza dos objetos astronômicos e a imensidade do Universo inspiram e promovem uma perspectiva que encoraja internacionalismo e tolerância.

International Astronomical Union,
Astronomy for the Developing World: Strategic Plan 2010 - 2020

Capítulo 1

Introdução

As estrelas são as principais componentes do Universo visível. A exemplo delas, temos o nosso Sol, que concentra 99,86% de toda a massa do Sistema Solar¹. Além de serem as principais componentes do Universo visível, as estrelas são, também, as maiores fontes de informação a respeito dele. Dessa forma, o estudo de suas estruturas internas e da forma como elas evoluem com o tempo são peça crucial em praticamente todos os ramos da astrofísica moderna.

Historicamente, o início da moderna descrição física das estrelas acompanhou a história dos fundamentos da termodinâmica. Nessa época, famosas mentes, como as de Lord Kelvin e Hermann von Helmholtz, chegaram a trabalhar com o “*problema do equilíbrio de um gás sobre ação de sua própria gravidade*”. Os primeiros fundamentos da física estelar surgiram, marcadamente, com os trabalhos de Lane, Ritter e Endem, do final do século XIX. Nas primeiras décadas do século XX, acompanhando o desenvolvimento da incipiente física quântica, ficou claro para os astrofísicos que as reações de fusão nuclear deveriam ser a fonte de energia das estrelas. A demonstração desse fato, em 1939, rendeu um prêmio Nobel de física ao físico Hans Bethe². Nesse começo e meados do século XX, são marcadamente importantes, também, os estudos teóricos de estrutura estelar de Chandrasekhar³ (notadamente, na área de objetos compactos, como as anãs brancas e estrelas de nêutrons, mais tarde compreendidas como representantes dos últimos estágios evolutivos de estrelas de baixa massa e massa intermediária), que lhe conferiram, também, um prêmio Nobel de física. No entanto, foi somente por volta da década de 50, juntamente com o surgimento dos equipamentos computacionais, que começamos a compreender, de forma satisfatória, como as estrelas evoluem - como a sua estrutura e as suas características

¹A maior parte da massa restante do Sistema Solar (os 0,14%) se encontra no planeta Júpiter, cuja massa supera a de 2 vezes e meia a massa somada de todos os outros planetas, e é maior que a massa de 300 Terras.

²Hans Albrecht Bethe (1906 - 2005): Prêmio Nobel de Física de 1967 - *por suas contribuições para a teoria das reações nucleares, especialmente as descobertas relacionadas com a produção de energia nas estrelas.*

³Subrahmanyan Chandrasekhar (1910 - 1995): Prêmio Nobel de Física de 1983 *por suas pesquisas teóricas sobre a estrutura e evolução das estrelas.*

observadas mudam com o tempo (mudanças essas que ocorrem em escalas de tempo muito maiores que o de uma vida humana). Desde então, as estrelas são estudadas através de modelos de estrutura e evolução estelares teórico-computacionais, que são construídos a partir de considerações feitas sobre as condições físicas da matéria nos interiores das estrelas. Tais condições incluem as propriedades termodinâmicas da matéria, a interação da matéria com a radiação e as reações nucleares.

A evolução das estrelas é obtida mediante uma sequência evolutiva de modelos de estrutura estelar. Seguindo as mudanças que ocorrem na estrutura de uma estrela, à medida que ela evolui, com a gradual fusão nuclear de elementos leves em elementos mais pesados, os modelos predizem como as propriedades observáveis das estrelas, em geral, devem alterar à medida que essas vão envelhecendo. Tais previsões dos modelos teóricos podem, então, ser comparadas às observações de estrelas reais.

Comparações entre as previsões dos modelos estelares e as observações nos dão estimativas das idades dos aglomerados de estrelas, que são de grande interesse no mapeamento da Via Lactea (nossa galáxia, e protótipo de várias outras galáxias do Universo) e no entendimento da sua evolução dinâmica. Considerando que os átomos mais pesados que o H e He são produzidos nos interiores das estrelas, devido às reações de fusão nuclear que lá ocorrem, e que esses novos elementos são espalhados pelo espaço através de ventos estelares, pulsações, ou explosões, os modelos estelares são, também, peça fundamental no estudo da evolução química do meio interestelar, das galáxias e do Universo como um todo. Citemos ainda que, nos últimos quinze anos, estamos todos assistindo à incessante descoberta de planetas extrasolares (planetas orbitando outras estrelas), com entusiasmo. Para a nossa surpresa, esses planetas têm se mostrado nas mais variadas “situações ambientais”. Descubram-se planetas, ora mais massivos que Júpiter, ora um pouco mais massivos que a Terra; alguns estando bastante distantes de sua estrela, outros estando exageradamente próximos dessa; há planetas orbitando estrelas como o Sol, outros, orbitando sistemas binários de estrelas, “estrelas falhas” (anãs marrons), pulsares (estrelas de nêutrons), etc. As condições climáticas, geológicas e biológicas (caso existam), desses novos planetas, e a evolução dessas condições, dependem, assim como no caso dos planetas do Sistema Solar, da forma e da evolução de suas estrelas próximas.

Naturalmente, entender as estrelas também nos ajuda a compreender melhor o nosso Sol: o que ele é, o que ele foi, e o que ele virá a ser. Nenhuma dessas questões poderia ser respondida de forma satisfatória, se não olhássemos para as outras estrelas e tentássemos achar o lugar do Sol no conjunto delas. Foi por volta da década de 70, que os astrônomos (e toda a humanidade) compreenderam que o Sol ainda se manterá muito parecido com a estrela que conhecemos hoje por mais algumas centenas de milhões de anos. No entanto, devido ao lento aumento da luminosidade solar, como consequência de sua evolução química, daqui a cerca de poucos bilhões de anos, a Terra já será, certamente, um ambiente terrivelmente hostil à vida que conhecemos. Daqui a cerca de 5 bilhões de anos, o Sol começará a sofrer alterações muito mais drásticas, vindo a se tornar uma “estrela gigante vermelha”. A partir daí, a sua evolução voltará a ser relativamente rápida, como ela já foi, nas primeiras fases de sua vida. Hoje, podemos afirmar, com certa certeza, que compreendemos a evolução do Sol, de uma forma geral, razoavelmente bem. Mas, ainda existem muitas incertezas no que concerne aos detalhes da física solar, apesar da proximidade do Sol de nós. As outras estrelas, que por serem diferentes em idade, massa, composição química, etc., podem nos mostrar, de forma muito mais aparente, fenômenos

que se conservam mais ocultos no Sol, representam, portanto, valiosos fragmentos de informação para um entendimento mais amplo da física solar, e uma compreensão mais exata de sua evolução e da evolução do Sistema Solar.

Um terceiro aspecto importante da astrofísica das estrelas é, finalmente, a utilização dessas como “laboratórios de física”, pois as condições impostas à matéria, nos interiores estelares são, em geral, muito mais extremas, em termos de temperatura, pressão e densidade, que quaisquer situações reproduzíveis, de forma controlada, nos nossos laboratórios terrestres. Dessa forma, a modelagem da estrutura das estrelas, e a confirmação de suas predições pelas observações, são, ainda hoje, a única forma de se testar as propriedades da matéria conhecida nessas condições mais extremas.

Neste trabalho, que é, em parte, teórico, e, em parte, teórico-computacional, foi utilizado o “código” (ou o “programa”) de estrutura e evolução estelar ATON (inicialmente desenvolvido pelos astrônomos italianos Italo Mazzitelli e Francesca D’Antona, no final da década de 70, e descrito em Ventura et al. (1998); Mendes (1999); Mendes et al. (1999), e focamos no problema da evolução de estrelas binárias. Especificamente, fizemos uma investigação teórica e teórico-computacional dos efeitos gravitacionais e orbitais oriundos da presença de uma estrela companheira nas proximidades da estrela em análise, cuja estrutura é modelada pelo código ATON ⁴.

Quando se olha para uma estrela no céu, é muito provável que se esteja olhando para um sistema binário de estrelas. Segundo Larson (2003), cerca de dois terços de todas as estrelas de nossa galáxia são sistemas binários ou sistemas múltiplos de estrelas. Além disso, os sistemas binários de estrelas são de extrema importância na astrofísica estelar, já que, para algumas subclasses desses sistemas, devido à geometria e à física de seu movimento orbital, podemos “medir” as massas das estrelas componentes com extrema precisão (e, ressaltando, de forma independente de modelos). No caso de “binárias eclipsantes” (binárias cuja órbita é vista de perfil), podemos, ainda, “medir” os raios relativos das estrelas componentes e a diferença de temperaturas superficiais das mesmas, também com precisão. Com isso, os sistemas binários de estrelas se tornam indispensáveis ferramentas no teste de qualidade dos modelos de estrutura e evolução estelares. Há, no entanto, reverses que necessitam ser estudados: os sistemas binários cujas componentes tem massas e raios (e temperaturas efetivas) medidos, são sistemas de estrelas com período orbital curto, o que significa que as estrelas são muito próximas, a ponto delas se influenciarem mutuamente. Isso significa que as estrelas componentes de um sistema binário não devem ser tratadas como simples estrelas isoladas (Giménez, 2007). Faz-se, portanto, necessário estudar os efeitos da binaridade sobre as estrelas cuja estrutura é modelada. Essa é a motivação principal deste trabalho.

Há pouco mais de dez anos, alguns pesquisadores da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) têm trabalhado em conjunto com o grupo italiano que desenvolveu e trabalha com o código ATON. No final da década de 1990, Luiz Mendes, então aluno de doutorado, atacou o problema da evolução rotacional das estrelas e de seus momentos angulares, utilizando o código ATON (Mendes, 1999; Mendes et al., 1999). Para isso, ele modificou o código, aplicando uma técnica idealizada por Kippenhahn & Thomas (1970), e, para a redistribuição de momento angular, utilizou-se a equação difusivo-advectiva de

⁴Italo Mazzitelli batizou o código com o nome da entidade egípcia Aton, que, tradicionalmente, representava o disco solar. Aton seria uma das facetas do deus Sol Ra: a faceta que ele nos mostra, quando desfila pelo céu, todos os dias. (fonte: *Encyclopædia Britannica Online*)

Chaboyer & Zahn (1992).

No final da década de 2000, considerando a citada questão de que as binárias próximas fornecem valiosos testes para os modelos, mas com o revés indesejado de que suas mútuas interações produzem efeitos potencialmente não-desprezíveis em suas estruturas, a aluna de doutorado Natália Landin expandiu o trabalho de Luiz, atacando o problema da evolução de sistemas binários rotacionais de estrelas (Landin, 2006; Landin et al., 2009). Para isso, ela acrescentou o potencial de maré de uma estrela secundária puntual ao já presente pseudo-potencial de rotação, utilizando o mesmo método de Kippenhahn & Thomas (1970) utilizado por Mendes et al. (1999). Isso possibilitou ao código ATON a simulação de um sistema binário, para o caso particular em que os eixos orbital e de rotação das estrelas são paralelos (Landin et al., 2009).

Este trabalho também foi motivado por discussões internas entre os pesquisadores Luiz Paulo Vaz, Natália Landin e Luiz Mendes, a respeito de se foi ou não foi levado em consideração o movimento orbital sistema binário no pseudopotencial implementado no código ATON, no trabalho que resultou no artigo de Landin et al. (2009). A principal fonte teórica a esse respeito, o livro de Kopal (1959), não é muito clara a esse respeito.

Também fez parte do trabalho de doutorado de Natália Landin, a implementação do mecanismo de “ponto de controle” (*checkpoint*) no código ATON (Landin, 2006). Esse mecanismo permitia que o código criasse a sequência evolutiva de uma estrela, salvasse um dos modelos estruturais dessa sequência num arquivo binário, e, numa segunda execução, utilizar esse modelo estrutural (ler o arquivo binário) como ponto de partida para uma nova sequência evolutiva. Assim, o *checkpoint* permitia uma grande economia de tempo, por exemplo, na fase de testes que é necessária após a implementação de novas rotinas (nova física) no código, e deverá ser uma excelente ferramenta na futura unificação das várias versões existentes do código ATON. Esse mecanismo, no entanto, foi implementado antes das modificações que deram corpo ao trabalho de Landin (2006), e, portanto, ficou desatualizado. Considerando que a formulação de um algoritmo de *checkpoint* não é muito complicada e que a sua atualização se mostra uma forma adequada de se tomar os primeiros contatos com um programa da complexidade do código ATON, surgiu a motivação para atualizar o mecanismo.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: O capítulo 2, introduz conceitos básicos de estrutura e evolução estelar e de sistemas binários de estrelas, e descreve o funcionamento de códigos evolutivos, e, em particular, o funcionamento do código ATON. Esse capítulo dá suporte introdutório a todos os outros. O capítulo 3 é um capítulo teórico, onde é feita uma revisão completa das equações do pseudopotencial gravitacional da matéria que compõe a estrela de um sistema binário, visando a discussão e a posterior generalização do potencial implementado no código ATON. O capítulo 4 descreve o processo de atualização do *checkpoint* feito neste trabalho, e suas conclusões. O capítulo 5 contém uma revisão da literatura a respeito do “movimento apsidal” de sistemas binários e discussões a respeito do mesmo, acompanhadas de um estudo usando o código ATON. Finalmente, o capítulo 6 contém as conclusões deste trabalho.

- (...) *As fosforescências do mar e todos os outros organismos compõe-se dos mesmos elementos que foram fundidos um dia para formar uma estrela.*
- *Nós também?*
- *Sim, nós também somos poeira estelar.*

Jostein Gaarder, em *O Mundo de Sofia*

Capítulo 2

Evolução Estelar

2.1 Conceitos Básicos de Evolução Estelar

2.1.1 O Diagrama H-R

Simple considerações teóricas indicam que a situação nos interiores estelares deve ser muito próxima da de um equilíbrio térmico e, portanto, a radiação nessas regiões deve ser muito próxima à de um corpo negro (Kippenhahn & Weigert, 1990). Assim, a potência irradiada pela “superfície” da estrela pode ser aproximada pela potência irradiada pela superfície de um corpo negro¹. A potência (ou luminosidade) por unidade de área emissora de um corpo negro é dada pela lei de Stefan-Boltzmann: $L/A_{\text{emissora}} = \sigma T_{\text{ef}}^4$.

Dessa forma, a luminosidade de uma estrela de superfície esférica é

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4 \quad (2.1)$$

onde R é o raio da estrela, e T_{ef} é a temperatura efetiva: a temperatura do corpo negro emissor equivalente², e σ é a constante de Stefan-Boltzmann, cujo valor é $5.67 \times 10^{-8} \text{W/m}^2\text{K}^4$. Para estrelas com uma superfície bastante isotrópica, T_{ef} é uma boa aproximação para a temperatura local nessa superfície.

A principal ferramenta usada para se estudar a evolução das estrelas é o “Diagrama de Hertzsprung-Russell”, ou simplesmente **Diagrama H-R**. O Diagrama H-R, idealizado por Ejnar Hertzsprung em 1911 e, independentemente, por Henry Norris Russell em 1913, representa as estrelas de acordo com duas características facilmente observáveis: é um diagrama de **brilho absoluto versus tipo espectral** das mesmas. O brilho absoluto depende do brilho aparente e da distância que o objeto se encontra de nós. O tipo espectral está intimamente relacionado com a temperatura efetiva da estrela e com,

¹A superfície da estrela é definida pela região onde a citada aproximação de corpo negro deixa de valer. Ela, portanto, é definida pela região onde o livre caminho médio dos fótons se torna grande o suficiente para que boa parte dos mesmos escape da estrela sem mais interagir com o meio. Dessa forma, a superfície da estrela é a esfera de luz, a partir da qual não podemos mais ver o interior.

²O corpo negro equivalente é aquele que, estando a uma certa temperatura, T_{ef} , produz a mesma luminosidade por unidade de área que a estrela.

consequentemente, a distribuição espectral de sua luminosidade. Então, se pudermos medir a magnitude aparente de uma estrela em dois filtros diferentes, e se conhecermos sua distância, já podemos representá-la em um diagrama H-R, e a posição dessa estrela, nesse diagrama, dirá muito a respeito da mesma, como veremos logo.

Um diagrama H-R de uma distribuição aleatória de 23000 estrelas próximas está ilustrado na figura 2.1. Todas essas estrelas têm suas distâncias medidas diretamente a partir de simples paralaxe trigonométrica.

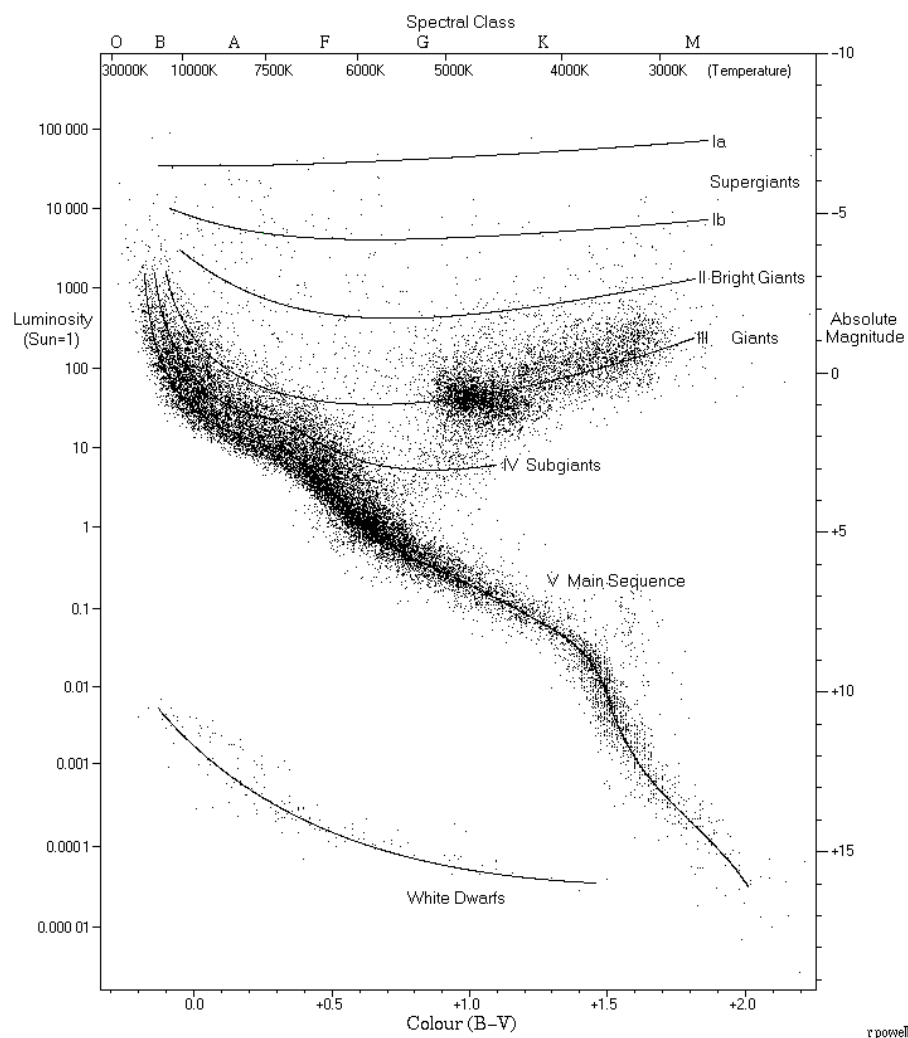


Figura 2.1: Diagrama H-R de 23000 estrelas próximas: 22000 são do catálogo Hipparcos e 1000 são do catálogo Gliese de estrelas próximas. (Esta figura foi retirada do site ilustrativo de Richard Powell: *An ATLAS of the Universe*, <http://www.atlasoftheuniverse.com>, seção *The Hertzsprung Russell Diagram*, <http://www.atlasoftheuniverse.com/hr.html>.)

O índice de cor (uma diferença entre a magnitude da estrela medida em dois comprimentos de onda diferentes) pode ser convertido em temperatura efetiva da estrela (após calibração e correção de absorção interestelar e outros efeitos). Se soubermos, ainda, a distância da estrela (e a correção bolométrica), podemos converter a magnitude aparente em luminosidade. Dessa forma, o diagrama H-R das estrelas, para os teóricos, é um dia-

grama de **luminosidade versus temperatura efetiva**. O diagrama H-R da figura 2.1 é, duplamente, um diagrama H-R observacional (magnitude absoluta versus índice de cor B-V) e teórico (luminosidade versus temperatura efetiva).

Da figura 2.1 é interessante ver que as estrelas não se distribuem aleatoriamente no diagrama H-R, mas em vários ramos ou **classes de luminosidade**. A grande maioria das estrelas cai numa faixa diagonal, denominada **Sequência Principal** (classe de luminosidade V). Frações consideráveis de estrelas caem também nos Ramos das Gigantes (Ia, Ib, II, III e IV) e no Ramo das Anãs (ainda chamadas, classicamente, de “anãs brancas”)³.

2.1.2 Principais Bases Observacionais da Evolução das Estrelas

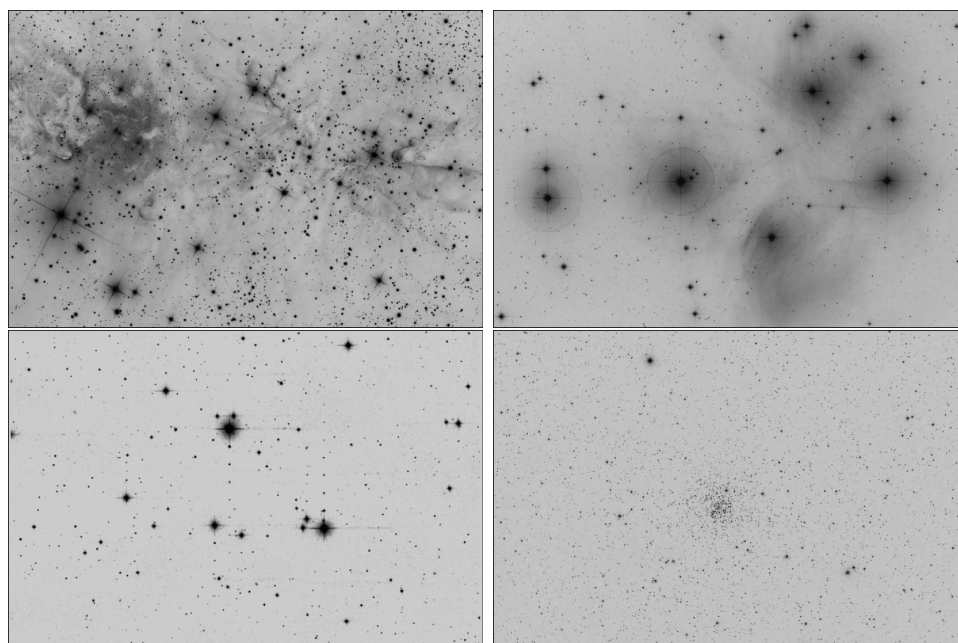


Figura 2.2: Fotografias (negativos) de 4 aglomerados abertos conhecidos. Da esquerda para a direita, e de cima para baixo, temos: NGC 2264, Pleiades, Praesepe e M 67. Os dois primeiros, notadamente mostram bastante nebulosidade. (Créditos das fotografias: na mesma sequência: R. Jay Gabany; NASA, ESA & AURA/Caltech; 2MASS; Greg Parker & Noel Carboni.)

Aglomerados de estrelas (figura 2.2) são associações de estrelas com características dinâmicas bastante correlacionadas. A unidade dinâmica representada por um aglomerado sugere fortemente que suas estrelas constituintes tiveram uma origem comum. Assim, nós podemos concluir que todas as estrelas de um aglomerado devem ter tido composições químicas iniciais semelhantes e devem ter idades muito próximas, e que essas estrelas diferem uma da outra, essencialmente, em relação a apenas uma característica fundamental: suas massas.

Observemos os diagramas H-R de dois aglomerados abertos de estrelas: NGC 2264

³Da luminosidade de um corpo negro esférico, Eq.(2.1), se verifica que o raio das estrelas cresce, do canto inferior esquerdo para o canto superior direito, no diagrama H-R. Por isso as estrelas de Ia, Ib, II, III e IV são corretamente denominadas “gigantes” e as estrelas de VI são ditas “anãs”.

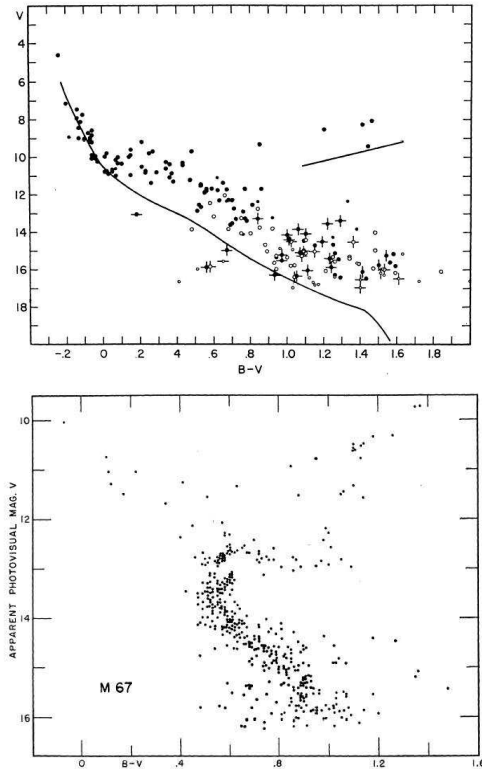


Figura 2.3: Diagramas H-R de NGC 2264 e M 67, respectivamente (Walker, 1956; Johnson & Sandage, 1955). As propriedades do aglomerado NGC 2264 indicam que ele é mais jovem que M 67.

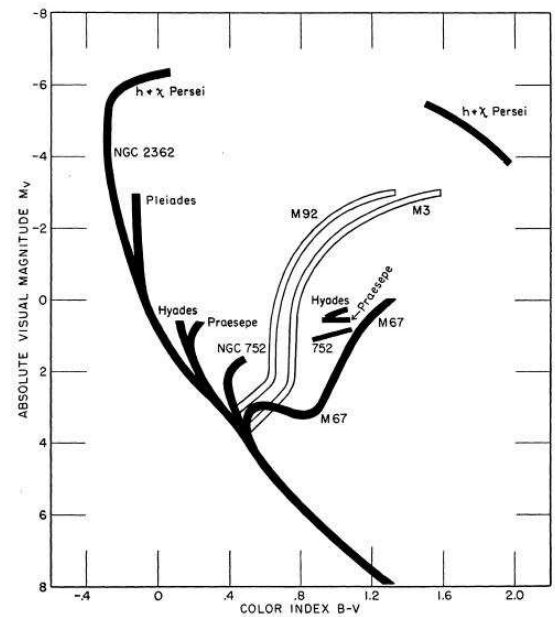


Figura 2.4: Diagrama H-R esquemático de 7 aglomerados abertos e 2 aglomerados globulares (Johnson & Sandage, 1955). Como a distribuição de estrelas de NGC 2264, no diagrama H-R, é muito semelhante às de h Persei e χ Persei, nós temos que a observação desta figura revela que os aglomerados da figura 2.2 foram organizados em sequência de idades.

(Walker, 1956) e M 67 (Johnson & Sandage, 1955), reproduzidos na figura 2.3. O aglomerado NGC 2264 tem suas estrelas mais brilhantes bem assentadas na sequência principal padrão de Johnson & Morgan (1953), e as menos brilhantes (com $B-V > 0$) à direita e um pouco acima da mesma. Já as estrelas mais brilhantes de M 67 apresentam uma guinada (“turnoff”) para a direita da sequência principal, indo para os ramos das gigantes.

Foi verificado que, para qualquer aglomerado, cada estrela cai, aproximadamente, ao longo de uma única faixa, num diagrama H-R. O “turnoff para a direita” das estrelas mais brilhantes, visto bem claramente no diagrama H-R de M 67, é um fenômeno comum a quase todos os aglomerados de estrelas, apenas com a peculiaridade de que a localização do ponto de turnoff, no diagrama HR, varia de aglomerado para aglomerado.

Veremos mais à frente, na seção (2.1.3), que, por volta da década de 1950, os astrônomos constataram que a ordenação dos aglomerados numa sequência de pontos de turnoff e índices de cor (ver figura 2.4, retirada de Johnson & Sandage (1955)) representa uma organização desses sistemas de estrelas em sequência de idades (Schwarzschild, 1958).

2.1.3 Notas Históricas Sobre a Descrição Física das Estrelas

Segundo Chandrasekhar (1939), o problema da estrutura interna de uma estrela foi considerado, pela primeira vez, por J. Homer Lane, na segunda metade do século XIX.

A noção de equilíbrio convectivo, que abriu o caminho para estudos subsequentes de estrutura estelar, é devida a Lord Kelvin, num artigo publicado em 1862. Lane, em 1869,

num artigo intitulado “*On the Theoretical Temperature of the Sun under the Hypothesis of a Gaseous Mass Maintaining Its Volume by Its Internal Heat and Depending on the Laws of Gases Known to Terrestrial Experiment*”, considerou, pela primeira vez, o problema do equilíbrio de uma configuração estelar⁴.

Em seguida, merecem grande destaque os trabalhos de A. Ritter do período de 1878 a 1889: uma série de 18 comunicações apresentadas no *Wiedermann Annalen*⁵, onde foram obtidos quase todos os fundamentos para uma teoria matemática da estrutura das estrelas. Finalmente, temos a publicação do livro de V.R. Endem: *Gaskugeln*, de 1907, que marca o fim dessa primeira época do estudo das configurações estelares. O livro de Endem não somente sistematiza os trabalhos anteriores, mas contém, também, resultados novos e várias tabelas de soluções numéricas acuradas das principais equações.

No entanto, discussões a respeito do problema da fonte de energia das estrelas ainda permaneciam. Era necessária uma fonte de energia que pudesse explicar a idade bilionária do Sol, apontada por datações geológicas de rochas da Terra (Miller & Hartmann, 1993).

Em 1920, A.S. Eddington (Eddington, 1920) sugeriu a transmutação dos elementos como a fonte de energia das estrelas. Em 1938, Bethe & Critchfield (1938) mostraram que a reação ${}^1_1H + {}^1_1H \rightarrow {}^2_1D + e^+$ pode ocorrer a taxas bastante moderadas nas condições dos interiores estelares. Em particular, a reação citada, nas condições do interior do Sol, pode mantê-lo queimando hidrogênio, numa cadeia de reações que terão núcleos de hlio como produtos finais. de maneira estável, por bilhões de anos.

A fusão nuclear abriu novo caminho ao entendimento da evolução das estrelas. Ela é responsável pela mudança da composição química inicial da estrela, que, por sua vez, altera o gás estelar, ao longo do tempo de vida da estrela. A fusão nuclear no interior das estrelas também é responsável pela síntese dos elementos mais pesados, que virão a enriquecer o meio interestelar, depois da morte das estrelas.

2.1.4 As Equações Constitutivas

O problema da evolução das estrelas é, essencialmente, um “problema de valor inicial”. A estrutura de uma estrela pode ser descrita por um conjunto de equações diferenciais (não-lineares), denominadas **equações constitutivas**, que, em equilíbrio hidrostático e sem rotação, pulsações não-radiais, ou a presença de estrelas perturbadoras ou campos magnéticos, podem ser assim escritas⁶ (Kippenhahn & Weigert, 1990) - de agora em diante, KW90:

$$\frac{\partial r}{\partial m}(m, t) = \frac{1}{4\pi r^2(m, t)\rho(P, T, \mu)}, \quad (2.2)$$

⁴Lane não tinha conhecimento da Eq.(2.1): Stefan publicou sua lei apenas em 1879. O interesse principal de Lane era o de calcular a temperatura superficial do Sol, que, no artigo, estimou em 30.000 K: um resultado bastante impressionante, considerando a imensa falta de dados e a precariedade da teoria naquela época (Chandrasekhar, 1939).

⁵Ao contrário de Lane, Ritter estava, de fato, preocupado com o problema do “equilíbrio de um gás sobre ação de sua própria gravidade”. As referências se encontram nas anotações bibliográficas de Chandrasekhar (1939), p. 176.

⁶Essas são as equações de uma estrutura estelar unidimensional (esfericamente simétrica) padrão. Os efeitos de rotação, pulsações não-radiais, presença de estrelas perturbadoras e campos magnéticos, encontrados, com diferentes “intensidades”, em quase todas as estrelas, são perturbações que retiram a simetria esférica das equações constitutivas, e são, atualmente, alvos de intensa pesquisa.

$$\frac{\partial P}{\partial m}(m, t) = -\frac{Gm}{4\pi r^4(m, t)}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial l}{\partial m}(m, t) = \epsilon(P, T, \mu) - T \frac{\partial S}{\partial t}(m, t), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m}(m, t) = -\frac{GmT(m, t)}{4\pi r^4(m, t)P(m, t)} \nabla(m, t). \quad (2.5)$$

Acima, m é a massa interior à superfície esférica de raio r , que varia no domínio $0 \leq m \leq M_*$; S é a entropia por unidade de massa (ver Eq. 2.9); ϵ é a “função fonte” (potência produzida por cada elemento de fluido da estrela); $\nabla(m, t) = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP}$ é o gradiente logarítmico de temperatura (os gradientes logarítmicos serão denominados no texto simplesmente como “gradientes”); e μ é o peso molecular médio, que, aqui, representa a dependência em relação à abundância local de todos os elementos. A solução simultânea das quatro equações constitutivas nos permite achar o valor das quatro “funções principais”, r (raio em função da massa interna), P (pressão), l (luminosidade) e T (temperatura), e de outras grandezas físicas associadas a elas, em todos os pontos do interior das estrelas e em todas as épocas da vida dessas.

Na equação (2.5), $\nabla(m, t)$ é obtido, usualmente, a partir do **critério de instabilidade de Schwarzschild** (KW90, Cap. 6):

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{\text{rad}} & , & \nabla_{\text{rad}} \leq \nabla_{\text{ad}} \\ \nabla_{\text{conv}} & , & \nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}} \end{pmatrix} \quad \text{onde} \quad (2.6)$$

$$\nabla_{\text{ad}} = \left(\frac{\partial \log T}{\partial \log P} \right)_{S=\text{cte}} = \frac{P\delta}{Tc_P\rho} \quad \text{e} \quad (2.7)$$

$$\nabla_{\text{rad}} = \left(\frac{\partial \log T}{\partial \log P} \right)_{\text{rad}} = \frac{3\kappa l P}{16\pi a c G m T^4} \quad (2.8)$$

são os gradientes adiabático e radiativo de temperatura, respectivamente, ∇_{conv} é o gradiente convectivo, que depende da teoria de convecção utilizada (KW90, Cap. 6)⁷, κ é a “opacidade”, e c_P e $\frac{\delta}{T}$ são, respectivamente, o “calor específico a pressão constante” e o “coeficiente de expansão térmica a pressão constante”. (Essas duas últimas grandezas termodinâmicas são definidas pelas seguintes derivadas: $c_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P$ e $\delta = \left(\frac{\partial \ln v}{\partial \ln T} \right)_P$, onde $v = 1/\rho$ é o volume por unidade de massa.)

Assim, para resolver o problema proposto, são necessárias, também, uma equação de estado do fluido da estrela, a qual nos permitirá obter $\rho(P, T, \mu)$ e outras grandezas termodinâmicas de interesse, como $c_P(P, T, \mu)$ e $\delta(P, T, \mu)$; uma lei de opacidade para $\kappa(P, T, \mu)$; e equações de geração de energia (para as regiões onde ocorrem reações nucleares e/ou colapso gravitacional), que nos fornecerão a função fonte $\epsilon(P, T, \mu)$ e a evolução da composição química $\mu(t)$. Por fim, condições de contorno iniciais apropriadas devem ser definidas para que seja efetuada a solução simultânea de todas as equações (ver Seção 2.1.4.2).

⁷O critério de instabilidade de Schwarzschild não é o critério de instabilidade mais geral. Ele não leva em consideração, o “gradiente de composição química”, por exemplo, nem a eventual presença de campos magnéticos (KW90, Cap. 6).

2.1.4.1 Breve Discussão das Equações

Com a ausência de rotação, campos magnéticos e perturbações externas, e, em boa aproximação, em equilíbrio hidrostático, as equações constitutivas são esfericamente simétricas.

A Eq. (2.2) é uma consequência direta do princípio da conservação da massa. Estando em repouso, temos que o elemento de massa de uma casca esférica da estrela é $dm = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr$. Se, porém, houvesse criação ou aniquilação de massa, teríamos que incluir um novo termo: $dm = \rho 4\pi r^2 dr + \frac{\partial m}{\partial t} dt$, e a Eq. (2.2) não valeria de forma geral. Assim, a Eq. (2.2), primeira das equações constitutivas, é chamada **Equação de Continuidade de Massa**.

A segunda equação constitutiva, Eq. (2.3), é chamada **Equação de Equilíbrio Hidrostático**. Veremos mais à frente (Seção 3.1) que o equilíbrio hidrostático de um fluido, sujeito a um campo gravitacional, é caracterizado por $\nabla P = \rho \mathbf{g}$, onde \mathbf{g} é o campo gravitacional. Assim, utilizando a simetria esférica, temos $\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho g$, onde $g = -|\mathbf{g}|$. Então, usando (2.2), chegamos a $\partial P / \partial m = -g / 4\pi r^2$. Como o módulo do campo \mathbf{g} de uma distribuição de massa com simetria esférica é $g = Gm/r^2$, segue a equação (2.3).

Se a Eq. (2.2) é a equação da continuidade da massa, a Eq. (2.4) poderia ser chamada de “equação da continuidade da energia”, pois ela representa esse princípio. Nessa equação, ϵ é a fonte de potência por unidade de massa. Além disso, por definição, $TdS = \mathring{d}Q$ (onde o símbolo \mathring{d} indica diferencial inexata). Assim, a equação (2.4) é, na verdade, $\epsilon = \mathring{d}Q/dt + dl/dm$, que parafraseamos da seguinte forma: “a potência total produzida por um elemento de massa é a potência que ele retém, sob forma de calor, mais a potência que ele irradia (a qual chamamos de luminosidade)”. Dessa forma, a Eq. (2.4) é conhecida como **Equação de Conservação da Energia**.

Ainda com relação a essa última equação, se pode demonstrar, utilizando as conhecidas relações canônicas da termodinâmica, que $\mathring{d}Q = c_P dT - \frac{\delta}{\rho} dP$. Dessa forma, a Eq. (2.4) fica reescrita na forma mais interessante:

$$\frac{\partial l}{\partial m}(m, t) = \epsilon(P, T, \mu) - c_P \frac{\partial T}{\partial t}(m, t) + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t}(m, t), \quad (2.9)$$

onde fica clara a sua relação com as quatro funções principais: r , P , l e T .

Enfim, temos a equação (2.5), que obteremos por simples regra da cadeia. Fazamos $\partial T / \partial m = (\partial T / \partial P)(\partial P / \partial m)$. Através da Eq. (2.3), obtemos $\partial P / \partial m$, de onde resulta a equação (2.5). Essa equação parece ser apenas uma equação que determina o gradiente de temperatura. Mais à frente, na Seção 3.1.2.4, ficará mais claro que o gradiente ∇ conterà a informação sobre a maneira pela qual a energia é transportada: se por radiação, somente, ou se haverá, também, convecção (transporte de energia com transporte de matéria, em conjunto). Por isso, (2.5) recebe o nome de **Equação do Transporte de Energia**.

O critério de instabilidade de Schwarzschild, Eq. (2.6), vai dizer se haverá radiação, somente, ou se haverá, também, convecção. Fazamos, aqui, uma explicação qualitativa desse critério de instabilidade (baseada na dedução rigorosa feita por KW90, Cap. 6).

Imaginemos que um elemento de fluido da estrela, que estava na distância r do centro da mesma, passou para a distância $r + \delta r$. A pressão interna desse elemento de fluido sempre iguala a pressão externa. Assim, por se mover para uma região de pressão um pouco menor, esse elemento de fluido expandiu um pouco. Se essa expansão for rápida,

então ela será próxima de uma expansão adiabática, e suas densidade e temperatura, necessariamente, diminuirão um pouco.

Se, a densidade desse elemento oriundo de r , em $r + \delta r$, for maior que a densidade do fluido original de $r + \delta r$, então, esse elemento estará rodeado por um meio menos denso, e o empuxo sobre esse elemento não será capaz de sustentá-lo nessa posição. Ele, portanto, cairá novamente em r e teremos estabilidade. Não haverá convecção, portanto, e todo o transporte de energia na região de r será por radiação. Se, no entanto, o elemento de fluido for menos denso que o fluido das redondezas, então ele tenderá a subir cada vez mais. Assim, teremos instabilidade e, por consequência, o processo de convecção.

Então, a condição de estabilidade pode ser enunciada pela desigualdade entre as taxas de variações das densidades, do elemento e das redondezas, em relação a r : $\frac{\partial \rho_{\text{el}}}{\partial r} - \frac{\partial \rho_{\text{red}}}{\partial r} \geq 0$, ou, em módulos: $-\left| \frac{\partial \rho_{\text{el}}}{\partial r} \right| + \left| \frac{\partial \rho_{\text{red}}}{\partial r} \right| \geq 0$.

Mas, considerando que, de r para $r + \delta r$ não há variação de composição química nas redondezas⁸, e que as pressões do elemento e das redondezas se igualam sempre, é intuitivamente fácil ver que, se ρ_{el} diminuir mais que ρ_{red} , quando passamos de r para $r + \delta r$, então T_{el} terá diminuído menos que T_{red} , nessa mesma passagem⁹. Em termos das desigualdades, temos que $\frac{\partial \rho_{\text{el}}}{\partial r} - \frac{\partial \rho_{\text{red}}}{\partial r} \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial T_{\text{el}}}{\partial r} - \frac{\partial T_{\text{red}}}{\partial r} \leq 0$. Multiplicando ambos os lados por $\frac{\partial r}{\partial P}$ (quantidade negativa), temos $\frac{\partial T_{\text{el}}}{\partial P} - \frac{\partial T_{\text{red}}}{\partial P} \geq 0$, ou $\nabla_{\text{el}} \geq \nabla_{\text{red}}$.

A condição de estabilidade, portanto, é dada por $\nabla_{\text{el}} \geq \nabla_{\text{red}}$, a qual, se torna $\nabla_{\text{ad}} \geq \nabla_{\text{rad}}$ (o critério de instabilidade de Schwarzschild), usando o fato de que o elemento “el” sofre uma transformação (quase-)adiabática e as redondezas “red” tem um gradiente de temperatura radiativo.

2.1.4.2 Condições de Contorno

Nas proximidades da superfície da estrela, as aproximações contidas nas quatro equações constitutivas (Seção 2.1.4), e em especial, na equação de transporte de energia, Eq. (2.5), deixam de valer (KW90, capítulo 11). Essas equações devem ser substituídas por equações atmosféricas. De forma geral, os modelos de estrutura e evolução estelar funcionam em conjunto com modelos de atmosfera estelar. Modelos de atmosfera estelar são tabelas que dependem da gravidade na superfície $g(M_*, R_*)$, da temperatura efetiva $T_{\text{ef}}(M_*, R_*, L_*)$ e das abundâncias de elementos químicos μ . Eles funcionam como fontes de condições de contorno externas para os modelos de estrutura (KW90, capítulo 11).

Mencionamos que a resolução das quatro equações constitutivas requer o uso de condições de contorno apropriadas. Nisso, temos o problema de que não sabemos o valor de todas as quatro funções, r , P , l e T , no centro ou na superfície da estrela. No centro da estrela, temos que $r(0, t)=0$, $P(0, t)=P_c$, $l(0, t)=0$ e $T(0, t)=T_c$, onde P_c e T_c são desconhecidas. Na superfície da estrela, onde as equações constitutivas devem se tornar “equações atmosféricas”, temos que $r(M_*, t)=R_*$, $P(M_*, t)=P_{\text{surf}}$, $l(M_*, t)=L_*$ e $T(M_*, t)=T_{\text{ef}}$, onde

⁸Aqui está a diferença entre o critério de Schwarzschild e o “critério de Ledoux”. Esse último, mais geral, leva em conta a variação da composição química entre r e $r + \delta r$, o que é importante, por exemplo, nas regiões centrais, onde há produção de energia por reações nucleares.

⁹Como exemplo disso, pensemos num gás ideal ($P = k\rho T/m_u\mu$) sujeito a dois processos: AB e AC . No processo AB , o gás sai do estado A e vai para um estado B , onde sua pressão diminui e sua densidade aumenta. Então, sua temperatura terá, necessariamente, diminuído. No processo AC , o gás sai do estado A e vai para um estado C , onde, sua pressão diminui para o mesmo valor da pressão em B e sua densidade aumenta para um valor não tão grande quanto o da densidade do mesmo gás em B . Então, no processo AC a temperatura do gás, necessariamente diminuiu, mas não tanto quanto no processo AB .

$P_{\text{surf}}=P_{\text{surf}}(M_*, R_*, L_*)$ depende do modelo de atmosfera estelar, e L_* , R_* e T_{ef} estão sujeitas ao vínculo dado por $L_*=4\pi R_*^2\sigma T_{\text{ef}}^4$. Assim, na superfície da estrela, também temos duas quantidades desconhecidas: R_* e T_{ef} .

Temos, então, dois parâmetros desconhecidos no centro da estrela: P_c e T_c , e dois parâmetros desconhecidos na base da atmosfera: R_* e T_{ef} . Esses quatro parâmetros são, em princípio, determinados, escolhendo-se uma massa m_F (“*fitting mass*”), muito próxima de M_* , a partir da qual tem-se início a atmosfera estelar, e impondo o vínculo físico de que as quatro funções principais, r , P , l e T , devem ser contínuas nesse ponto.

Assim, na massa m_F , impomos os seguintes quatro limites laterais:

$$\begin{aligned}\lim_{m\rightarrow m_F^-} r(P_c, T_c) &= \lim_{m\rightarrow m_F^+} r(R_*, T_{\text{ef}}) \\ \lim_{m\rightarrow m_F^-} P(P_c, T_c) &= \lim_{m\rightarrow m_F^+} P(R_*, T_{\text{ef}}) \\ \lim_{m\rightarrow m_F^-} l(P_c, T_c) &= \lim_{m\rightarrow m_F^+} l(R_*, T_{\text{ef}}) \\ \lim_{m\rightarrow m_F^-} T(P_c, T_c) &= \lim_{m\rightarrow m_F^+} T(R_*, T_{\text{ef}})\end{aligned}\tag{2.10}$$

que dizem que, aproximando de m_F por valores menores ($m \rightarrow m_F^-$) ou por valores maiores ($m \rightarrow m_F^+$), as quatro funções convergem para um mesmo valor.

As Eqs. (2.10), resolvidos simultaneamente, junto com as quatro equações constitutivas, nos permitem encontrar as quantidades P_c , T_c , R_* e T_{ef} e as funções principais r , P , l e T , no dado tempo t .

A solução numérica das Eqs. (2.2), (2.3) (2.4) e (2.5), desde o centro da estrela ($r=0$) até a base da atmosfera estelar, em todas as idades, sujeitas ao critério dado pelas Eqs. (2.10), acima, é feita pelo método de relaxamento de Henyey (Henyey et al., 1964; Press, et al., 1992; Kippenhahn & Weigert, 1990). Nesse método, a solução determinada (convergida) das quatro equações constitutivas no tempo $t - \Delta t$ é usada como valor inicial para a solução das mesmas equações no tempo t (com a estrela tendo condições químicas um pouco diferentes), e, mediante aproximações lineares sucessivas das correções que devem ser aplicadas às funções e às condições de contorno (P_c , T_c , R_* e T_{ef}), que geram equações matriciais¹⁰, as diferenças finitas tendem às derivadas verdadeiras, e, simultaneamente, as condições de contorno necessárias para a satisfação dos limites (2.10) são encontradas.

2.1.5 Principais Resultados da Teoria de Evolução Estelar

A escala de tempo das reações nucleares (τ_{nuc}) é, em geral, muito maior que as escalas de tempo hidrodinâmica (τ_{hidro}) ou de Kelvin-Helmholtz (τ_{KH}). Dessa forma, as equações de geração de energia, responsáveis por ϵ , podem ser desacopladas das quatro equações constitutivas (KW90, Cap. 9).

Assim, a evolução das estrelas é, de forma padrão, obtida a partir de uma sequência de modelos estáticos de estrutura estelar, obtidos através da integração do sistema de quatro equações constitutivas, descrito na seção anterior. Tal sistema, no entanto, mesmo para as suposições mais simples (e irrealis) de equações de estado ou leis de opacidade, só pode ser resolvido numericamente. Até meados do século XX, esforços apreciáveis eram gastos na tentativa de se evitar as integrações numéricas, pois elas eram feitas à mão. No

¹⁰Em geral, a inversão de equações matriciais são computacionalmente muito onerosas. Felizmente, as matrizes de Henyey tem muitos elementos nulos e um certo caráter diagonal que tornam o método bastante eficiente (Press, et al., 1992).

entanto, as observações e a necessidade de explicar a evolução das estrelas, já na década de 1950 (Seção 2.1.2), exigia que extensas sequências evolutivas de modelos estelares fossem computadas. Felizmente, a segunda metade do século XX foi também a época do advento dos equipamentos computacionais.

Em 1961, Hayashi (1961) demonstrou que as posições ocupadas por configurações totalmente convectivas no diagrama H-R, durante sua evolução, descrevem trajetórias características nesse diagrama, mais tarde conhecidas como **linhas ou trilhas de Hayashi**. Pode-se interpretar essas trilhas como fronteiras entre regiões permitidas e proibidas (KW90, Cap. 24)¹¹. Em 1964, foi proposto o, agora universalmente adotado, “método de relaxamento de Henyey” (Henyey et al., 1964) para a solução numérica das quatro equações constitutivas. Além disso, o maior entendimento da nucleossíntese dos elementos (Clayton, 1968) e tabelas de opacidade mais realistas (Cox & Stewart, 1970) foram importantes na condução dos modelos a uma interpretação da evolução das estrelas, sem precedentes.

2.1.5.1 Evolução Estelar de Estrelas Semelhantes ao Sol: Pré-Sequência

Desde a descoberta das estrelas T Tauri¹², na década de 1940, observações no visível e no infravermelho tem mostrado que as estrelas nascem em complexos gigantes de nuvens moleculares (Shu, 1982) (ver, também, a foto de NGC 2264, na figura 2.2).

As T Tauri são estrelas em formação. Elas estão gradualmente se contraindo, por efeito de sua autogravidade, e, nesse processo, metade da taxa de perda da energia potencial gravitacional é utilizada no aquecimento de suas estruturas internas. A outra metade dessa potência é liberada sob a forma de luminosidade, o que nos permite detectá-las (KW90, Cap. 28).

Nas fases primordiais da vida da estrela, a radiação emitida pelo núcleo mais denso é absorvida e reprocessada pelos invólucros (opacos) que, gradualmente, vão caindo no núcleo. Então, a matéria cadente se aquece e reemite do infravermelho.

No diagrama H-R (no infravermelho), a estrela começa extremamente à direita, antes mesmo da linha de Hayashi. Isso, no entanto, não representa qualquer violação do resultado de que a região da direita dessa linha é uma região proibida, já que o invólucro colapsante (incluindo a fotosfera) ainda está longe de estar em equilíbrio hidrostático.

Na figura 2.5, temos o esboço da evolução de uma estrela como o Sol. Acima, à

¹¹A linha de Hayashi de uma dada estrela está bastante à direita da sequência principal, no diagrama H-R, e tem uma inclinação bastante acentuada nesse diagrama. Se, por algum motivo, uma estrela se posicionar à direita de sua linha de Hayashi correspondente, no diagrama H-R, então isso significa que essa estrela possui uma superfície muito fria e uma luminosidade razoável. Então, necessariamente há regiões no interior dessa estrela em que ∇ é muito maior que ∇_{ad} . Nessas regiões, o fluxo convectivo será muito grande, pois $F_{\text{conv}} \sim (\nabla - \nabla_{\text{ad}})^{\frac{3}{2}}$ (KW90, Cap. 7), e logo haverá um resfriamento das regiões interiores e um aquecimento das regiões superiores, o que acaba diminuindo o valor de ∇ para $\nabla \approx \nabla_{\text{ad}}$, e isso, finalmente, leva a estrela para a esquerda, de volta para a linha de Hayashi. Esse fenômeno ocorrerá dentro da curta escala de tempo convectiva, e, portanto, a linha de Hayashi, de fato, delimita uma “região proibida” (KW90, Cap. 24).

¹²As estrelas T Tauri são estrelas jovens e de massas não superiores a cerca de 2 massas solares. Geralmente, são estrelas variáveis (de variação irregular), que quase sempre se apresentam associadas a nuvens de gás e poeira e que, em geral, possuem o espectro dominado por linhas de emissão. No diagrama H-R, essas estrelas estão situadas acima e um pouco à direita da sequência principal. Além disso, essas estrelas usualmente mostram evidência espectroscópica de fortes ventos estelares e de discos de acreção (perfis P Cygni), e apresentam presença de lítio em suas atmosferas (Shu, 1982).

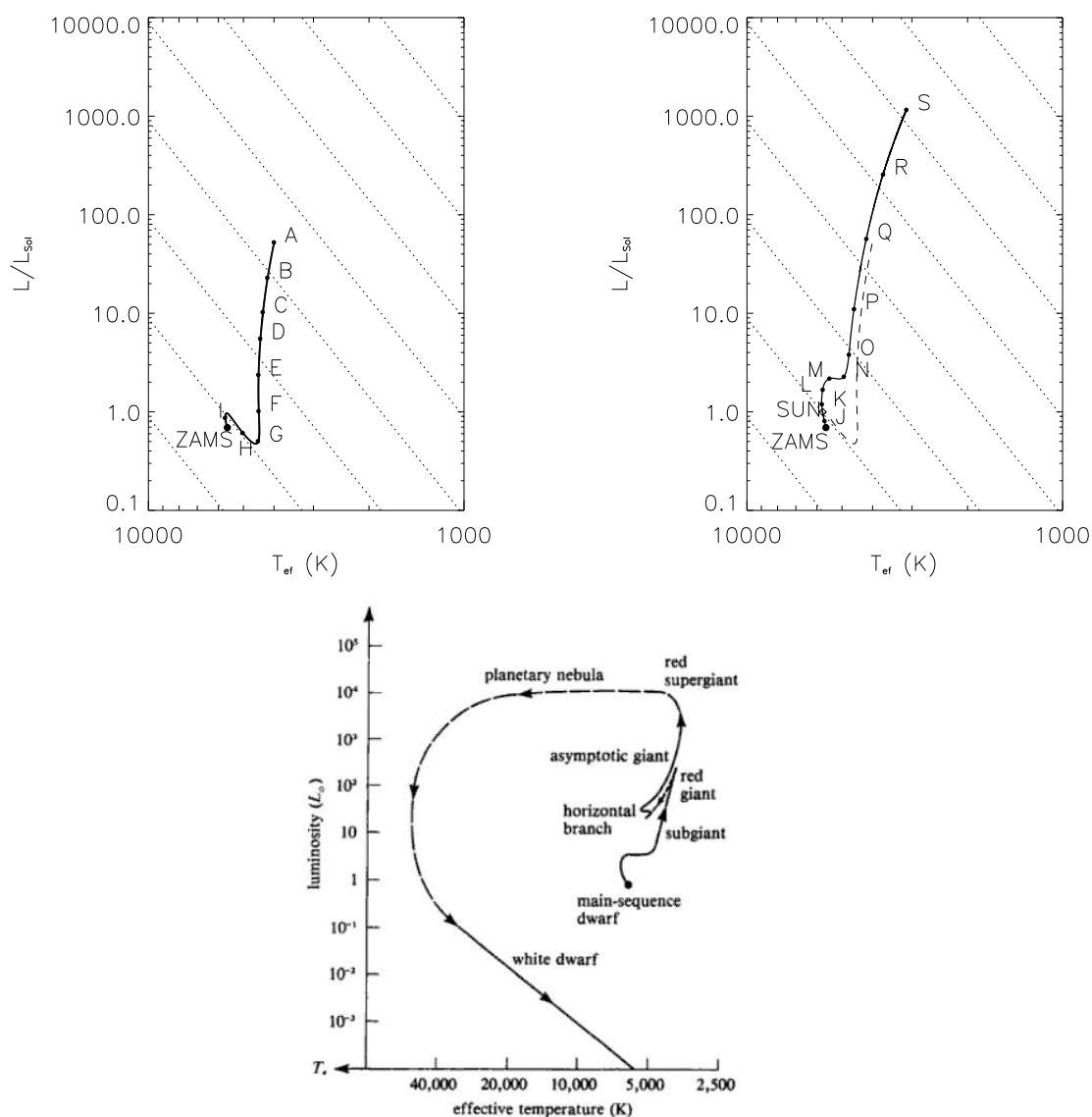


Figura 2.5: Acima, à esquerda e à direita, temos trilhas evolutivas padrão (sem rotação ou marés), geradas pelo ATON 2.0, para uma estrela de $1M_{\odot}$, com composição química inicial “solar” ($Y=0.27$ e $Z=0.0175$), com $\alpha=1.5$ (parâmetro da teoria de convecção do *mixing length*) e sem *overshooting*. A figura da esquerda representa a evolução do Sol, desde a ignição do deutério até a ZAMS. A figura da direita representa a evolução do Sol, desde a ZAMS até as proximidades do “flash do hélio”. A pré-sequência anterior está representada, nessa figura, pela linha tracejada. As linhas diagonais nessas duas figuras são linhas de igual raio. Passando de uma linha para a que está acima, multiplica-se o raio da estrela por $\sqrt{10} \approx 3.16$. A figura de baixo representa um esboço evolução do Sol, desde a ZAMS até bilhões de anos depois da formação da anã branca. As regiões tracejadas representam regiões cujo trajeto teórico é mais incerto (Shu, 1982).

esquerda e à direita, temos trilhas evolutivas padrão (sem rotação ou marés), geradas pelo código de evolução estelar ATON 2.0 (Seção 2.3). A figura da esquerda representa a evolução do Sol, desde o começo da queima de deutério (que é, aproximadamente, quando a estrela chega ao equilíbrio hidrostático (D’Antona & Mazzitelli, 1997)) até o momento em que cerca de 90% de sua energia vem das reações de queima de hidrogênio em hélio, denominada “Sequência Principal de Idade Zero”, cuja sigla, em inglês, é ZAMS (Iben,

1965). A figura da direita representa a evolução do Sol, desde a ZAMS até as proximidades do “flash do hélio” (pontos Q, R e S). O ponto “SUN” é a previsão do ATON para o Sol atual. A figura de baixo, retirada do livro de Shu (1982), representa a evolução do Sol, desde a ZAMS até a fase de “anã branca”. A tabela 2.1 contém alguns valores de saída do ATON, referentes aos pontos, de A a S.

Tabela 2.1: Tabela (representativa da trilha evolutiva do Sol) gerada pelo código de evolução estelar ATON 2.0, complementar à figura 2.5. As colunas, da segunda à sexta, representam, para cada ponto do diagrama (coluna 1), a idade da estrela (desde a ignição de deutério), a diferença de idade entre o estágio atual e o anterior (apenas para permitir uma avaliação da duração das fases de evolução da estrela), o raio, a luminosidade e a temperatura efetiva da estrela.

ponto	idade (anos), desde a ignição do deutério	diferença de idades (anos)	raio (R_{\odot})	luminosidade (L_{\odot})	T_{ef} (K)
A	779	-	14.9	50.7	4013
B	18.0×10^3	17.2×10^3	9.11	22.9	4200
C	137×10^3	118×10^3	5.70	10.3	4346
D	287×10^3	151×10^3	4.03	5.52	4426
E	832×10^3	545×10^3	2.57	2.37	4486
F	2.67×10^6	1.84×10^6	1.69	1.02	4480
G	8.74×10^6	6.07×10^6	1.18	0.5	4498
H	19.7×10^6	11.0×10^6	1.04	0.61	5030
I	32.1×10^6	12.4×10^6	0.96	0.87	5719
ZAMS	44.3×10^6	12.2×10^6	0.89	0.69	5621
J	1.86×10^9	1.82×10^9	0.94	0.81	5681
SUN	4.71×10^9	2.84×10^9	1.01	1.00	5758
K	7.27×10^9	2.57×10^9	1.12	1.26	5799
L	9.70×10^9	2.43×10^9	1.31	1.67	5759
M	11.3×10^9	1.61×10^9	1.65	2.17	5482
N	11.8×10^9	538×10^6	2.08	2.27	4935
O	12.1×10^9	302×10^6	2.90	3.79	4754
P	12.4×10^9	292×10^6	5.31	11.0	4581
Q	12.6×10^9	176×10^6	14.5	57.0	4187
R	12.7×10^9	35.8×10^6	39.1	256	3706
S	12.7×10^9	11.4×10^6	117	1.16×10^3	3127

O ponto que representa a configuração colapsante que vai gerar a estrela (não mostrado no diagrama H-R), rapidamente se dirige para cima e para a esquerda, até atingir um topo de luminosidade. Durante essa fase, praticamente toda a luminosidade vem da energia liberada pela acreção. Depois disso, a acreção diminui, a futura estrela passa a aparecer no visível e a ser representada no diagrama H-R (neste momento, a estrela está na *birthline*, ponto A (Stahler, 1983)), sua superfície resfria e um gradiente de temperatura aparece. Então, uma zona de convecção se inicia (inicialmente nas camadas superiores, mas gradualmente se estendendo às camadas mais centrais), e, à medida que a protoestrela se contrai (produzindo luminosidade e esquentando o seu núcleo), o ponto no diagrama H-R passa a descer quase que verticalmente, seguindo, aproximadamente, a linha de Hayashi¹³, em direção à sequência principal (pontos de A a G).

Na contração, o momento de inércia da protoestrela diminui, e, em decorrência disso, a sua velocidade angular aumenta. Nessas primeiras fases da vida da estrela, os campos magnéticos têm um importante papel no transporte interno e externo de momento angular

¹³Na verdade, em geral, o ponto segue um pouco à direita da linha de Hayashi, já que ainda não há total equilíbrio hidrostático nas camadas mais externas.

da estrela (Shu, 1982). O campo magnético, gerado pela protoestrela, sobre o disco de acreção, tende a fazer esse último entrar em co-rotação com a primeira, e, dessa forma, essa perde momento angular para o disco (Shu, 1982). Os ventos gerados, muito mais intensos nessas primeiras fases da vida das estrelas (Bouvier et al., 1997), podem ser, também, responsáveis por grande parte da enorme perda do momento angular observada nessas estrelas jovens (Bouvier et al., 1997).

A partir de um momento, o núcleo da protoestrela (suas camadas mais internas) passa a se tornar radiativo. Quando isso acontece, o ponto correspondente no diagrama H-R passa a se mover para a esquerda, e não mais de cima para baixo (esse caminho é próximo ao conhecido como “trilha de Henyey”: a trilha evolutiva da contração de uma estrela totalmente radiativa (Kaufmann, 1978)) (pontos de G a I).

Finalmente, a temperatura no núcleo chega a aproximadamente $3 \times 10^6 \text{K}$, e tem-se início as reações termonucleares de queima do hidrogênio em hélio. Com essa nova fonte de energia, o ponto no diagrama H-R cai um pouco, em decorrência de um ajuste estrutural da estrela (I-ZAMS), e chega na região conhecida como “Sequência Principal de Idade Zero” (ZAMS) (Kaufmann, 1978) - a qual é, em geral, definida como a região ocupada pelas estrelas que tem 90% de suas luminosidades oriundas da queima de H (Iben, 1965).

2.1.5.2 Evolução Estelar de Estrelas Semelhantes ao Sol: Sequência Principal e Pós-Sequência

A sequência principal (MS) é a fase mais estável da vida da estrela. Durante a MS, a estrela vai queimando o H de suas camadas mais interiores, por milhões ou bilhões de anos (quanto menor a massa, maior o tempo), até que o seu núcleo esteja bastante “deficiente” de H. Durante essa fase, também, em decorrência das reações nucleares e dos processos de mistura, a estrela evolui quimicamente, alterando a sua constituição original (pontos de ZAMS a L).

À medida que o combustível do núcleo vai acabando, ao final da longa MS, um novo núcleo de He vai surgindo e aumentando em tamanho. Na MS, não há temperatura central suficiente para que se inicie a fusão de He, e, portanto, esse núcleo de He é inerte e contrai. Com o colapso gravitacional, esse núcleo esquenta. Acima desse núcleo de He, o H continua queimando em uma casca esférica.

Com o colapso do núcleo e o aumento de temperatura, ocorre o aumento da pressão, responsável pela sustentação do peso das camadas superiores da estrela. Assim, a densidade e a temperatura na camada de queima de H (logo acima do núcleo) aumentam, aumentando, também, a produção de energia nessa região. A diferença entre a luminosidade gerada no interior da estrela e a luminosidade que escapa pela superfície da estrela provoca o aquecimento e a expansão das camadas mais externas, fazendo com que a superfície da estrela cresça em raio, mas variando pouco a sua luminosidade (pontos de L a N). Assim, no diagrama H-R, a estrela sai da MS num caminho aproximadamente horizontal, e para a direita. Nesse ponto, a estrela passa para o ramo das subgigantes (ramo IV da figura 2.1).

A temperatura superficial da estrela não cai indefinidamente, e, novamente, é imposta a condição de que a estrela fique à esquerda da linha de Hayashi. Quando a estrela (de pouca massa) já está bastante próxima dessa linha, o núcleo de He já quase se transformou numa anã branca: uma fração significativa de seus elétrons já está degenerada. Assim, a camada de H logo acima queima furiosamente, e verifica-se que a estrela evolui, rapida-

mente, seguindo próxima à sua linha de Hayashi, em direção ao ramo das gigantes (pontos de N a S)¹⁴.

A ignição do He no núcleo de uma estrela de pouca massa (mas, com massa suficiente para tal fenômeno) ocorre em condições de degenerescência (ele é essencialmente isotérmico) e, portanto, a fusão do He se inicia de forma violenta (o *flash* do He). O núcleo de He volta a expandir. A expansão do núcleo de He quebra a degenerescência e reduz a temperatura da camada de queima de H, o que acaba por reduzir a luminosidade da estrela e o seu raio. Com o novo núcleo ativo, queimando He, a estrela inicia uma segunda fase relativamente duradoura e estável (guardando certa semelhança com a MS). O *locus* das estrelas que estão nessa fase é chamado “ramo horizontal”, no diagrama H-R.

Quando o He no núcleo acaba, a estrela inicia nova ascensão, tornando-se uma gigante vermelha e passando a ocupar o chamado “ramo assintótico”. A estrela possui um núcleo de C/O inerte, rodeado por uma camada de queima de He (e esta última, rodeada por uma camada de queima de H). Na fase do ramo assintótico, as estrelas tem uma intensa perda de massa, o que as leva a percorrer, aproximadamente, o caminho tracejado da figura 2.5 (abaixo).

No final, seus núcleos de C/O inertes (o que restou da estrela) estarão visíveis. Esses núcleos representam as estrelas conhecidas como “anãs brancas”: estrelas pequenas, densas e inertes, compostas por C/O, fadadas a resfriar muito lentamente, por bilhões de anos.

Estrelas de muito baixa massa (massa inferior a cerca de $0.25M_{\odot}$), em princípio, têm um fim semelhante, apesar de não serem capazes de queimar He. Essas estrelas não teriam a fase de “ramo horizontal” e, no fim, devem se tornar anãs brancas de He (Landin, 2006). As anãs brancas de He observadas, no entanto, são oriundas de processos de transferência de massa em sistemas binários de componentes próximas, já que o tempo necessário para a formação de anãs brancas pelo processo de evolução estelar é superior à idade estimada do Universo (Postnov & Yungelson, 2006).

2.1.5.3 Evolução de Estrelas Massivas

As estrelas mais massivas evoluem muito mais rapidamente que as estrelas de massa solar, e são capazes de queimar carbono e outros elementos mais pesados (não cobertos pelo código ATON (Ventura et al., 1998)), e assim, na pós-sequência, essas estrelas desenvolvem várias camadas de fusão nuclear. Eventualmente, as estrelas massivas adquirem um núcleo de Fe (o mais ligado de todos os núcleos). Então o núcleo sofre um colapso catastrófico, que dá origem a uma “supernova do tipo II” e a um núcleo remanescente (uma estrela de nêutrons ou um buraco negro) (Kaufmann, 1978).

Neste trabalho, não nos ocuparemos com a evolução de estrelas massivas.

2.2 Sistemas Binários de Estrelas

O termo “estrela binária” foi criado por Sir William Herschel, em 1802 (Kopal, 1978), para designar o que seria “uma estrela dupla real”: “*a união de duas estrelas (...) em*

¹⁴É importante ressaltar que os três últimos pontos: Q, R e S, estão na figura 2.5 e na tabela 2.1 apenas por completeza. Eles representam uma fase crítica da evolução da estrela, onde as aproximações de equilíbrio hidrostático começam a falhar.

um sistema, pelas leis de atração”. O termo “estrela dupla”, por outro lado, é muito mais antigo, e era usado para designar estrelas visualmente bastante próximas, na esfera celeste.

Por cerca de um terço de século, Herschel observou várias dessas estrelas duplas, e verificou que algumas delas não poderiam ser simples uniões aparentes de estrelas na esfera celeste. Algumas “estrelas duplas” demonstravam ter um movimento orbital entre suas componentes. Dessa forma, elas, de fato, deveriam compor um sistema físico interagente. Herschel verificou ainda que o movimento relativo da estrela menos brilhante, em relação à mais brilhante representava uma órbita elíptica (em projeção), na esfera celeste, com a mais brilhante num dos focos (Kopal, 1978). Tal geometria orbital é compatível com uma lei de força variante com o inverso do quadrado da distância, como a lei de Newton para a atração das massas¹⁵.

2.2.1 Importância dos Sistemas Binários

Hoje, os sistemas binários de estrelas são de extrema importância, na astrofísica, principalmente pelo fato de se poder deduzir, de um certo subconjunto das mesmas, as massas de suas estrelas componentes a partir, somente, das características de seus movimentos orbitais. Além disso, segundo Larson (2003), cerca de dois terços de todas as estrelas da galáxia são sistemas binários (ou sistemas múltiplos).

As massas das componentes de uma binária podem ser medidas, se tivermos um dos três casos distintos (Shu, 1982):

- **binária visual** com a forma da órbita analisada, para o caso em que a distância ao sistema é conhecida (situação comum para sistemas binários próximos de nós);
- **binária eclipsante**, com curvas de luz e de velocidade radiais de qualidade (neste caso, os raios estelares também podem ser medidos diretamente, e se pode observar “movimento apsidal” (subseção 5.1.2.1));
- binária visual com a forma da órbita analisada, e com velocidades radiais das duas componentes conhecidas (caso mais raro que os dois primeiros, mas cada vez mais frequente, por causa da evolução da técnica de interferometria nos telescópios modernos com óptica adaptativa).

Em todos esses casos, fazemos uso da terceira lei de Kepler (que relaciona o período orbital P com o semieixo maior a da órbita elíptica):

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} a^3 \quad (2.11)$$

a qual nos dá a soma das massas das componentes; e da conservação do momento linear, que nos dá a razão dessas massas (pela razão das velocidades ou das distâncias de cada componente ao centro de massa do sistema):

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2}{R_1} \quad (2.12)$$

¹⁵Essa descoberta de Herschel foi de grande importância cosmológica em seu tempo. Ela demonstrava, observacionalmente, que a lei de gravitação de Newton também tinha validade fora dos domínios do Sistema Solar.

Medições de massas de componentes de sistemas binários possibilitaram, ainda no começo do século XX, a obtenção de uma relação empírica entre a massa e a luminosidade das estrelas na sequência principal.¹⁶

2.2.1.1 Elementos Orbitais

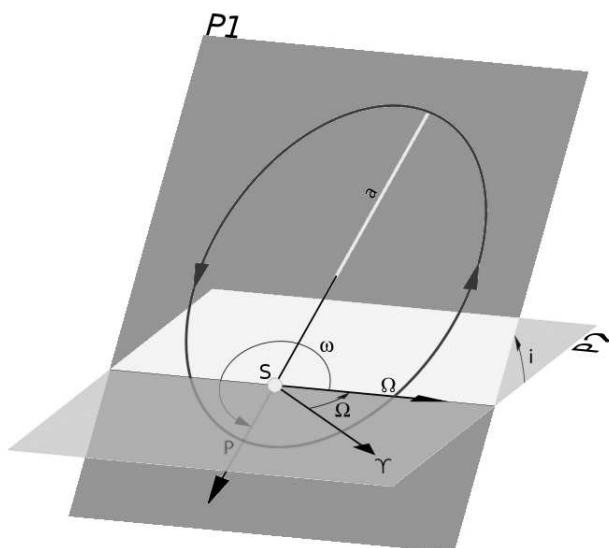


Figura 2.6: Os elementos orbitais: O ângulo i é a inclinação do plano orbital ($P1$) em relação ao plano do céu ($P2$), Ω é a longitude do nodo ascendente. Esses dois primeiros ângulos definem o plano orbital em relação ao plano do céu. O semieixo maior a e a excentricidade e definem o tamanho e a forma da elipse. Finalmente, a orientação da elipse no plano orbital é dada pelo ângulo ω , da passagem pelo pericentro (ou periastro), em relação ao nodo ascendente. (Créditos da figura: http://www.thefullwiki.org/Orbital_Elements.)

O movimento de duas partículas, sob influência mútua, no espaço, fica definido se forem fornecidas 12 constantes de valor inicial, 6 para cada partícula (3 coordenadas no espaço e 3 componentes de velocidade). Subtraindo o movimento do centro de massa, que não nos interessa, retiramos 6 constantes do nosso problema. Sabendo, ainda, que o movimento de duas massas pontuais sujeitas à lei de gravitação de Newton (ou a qualquer força central) se opera num plano, podemos prescindir de mais uma constante, bastando, para isso, redefinir as outras 5 restantes. Assim, o movimento orbital das componentes será completamente descrito pelas seguintes 5 constantes restantes, cuja explicação está na figura (2.6): i (inclinação do plano orbital), Ω (longitude do nodo ascendente), a (semieixo maior da elipse), e (excentricidade da elipse) e ω (ângulo de passagem pelo periastro).

¹⁶Na década de 30, a relação M–L demonstrou a importância dos dois elementos mais leves (H e He) na estrutura estelar. Antes dessa década, dizia-se que esses elementos teriam uma abundância tão pequena, nos interiores estelares, que poderiam ser completamente ignorados, nos modelos teóricos. Foram as discrepâncias entre as relações M–L computada e empírica que mostraram, nessa época, que a maior parte da massa das estrelas deveria constituir de hidrogênio (Schwarzschild, 1958).

Além dessas cinco constantes, devemos adicionar uma sexta, que definirá o zero do tempo (uma constante análoga ao tempo inicial t_0 , comum nos problemas de mecânica). A sexta constante é T , o “tempo de passagem pelo periastro”. Ela diz que, quando $t=T$, a secundária estará no periastro.

2.2.1.2 Movimento Apsidal

Na verdade, o movimento orbital de dois corpos sob a atração mútua só será descrito por uma elipse, estática no tempo e com a primária em um de seus focos, se

1. a lei for força for a do inverso do quadrado da distância entre eles (gravitação de Newton),
2. cada um dos corpos agir como se a força resultante que exerce puder ser considerada como se feita por um único ponto (força central);
3. se não houver nenhuma outra massa perturbadora (sistema isolado).

Essas condições são satisfeitas com muito boa aproximação no caso de sistemas de duas estrelas com separações muito maiores que seus raios (como as binárias visuais observadas por Herschel), pois, nesses casos, os efeitos de maré¹⁷ são desprezíveis.

O mesmo não se dá para sistemas binários com componentes próximas o suficiente para que essas se deformem a ponto de o campo gerado não poder mais ser considerado como sendo central. Ou, ainda, com componentes em órbitas excêntricas e massivas o suficiente para que a descrição dinâmica da órbita necessite de levar a relatividade em consideração, e a força não puder ser aproximada pela lei simples do inverso do quadrado da distância. O efeito disso é fazer com que a órbita não mais se feche, ou, alternativamente, que a “linha de ápsides” (o eixo maior da elipse) gire lentamente, no plano orbital, com um período muito maior que o período orbital (figura 2.7). Essa perturbação é conhecida como movimento apsidal. As figuras 2.7 e 2.8 ilustram o fenômeno, mostrando seus efeitos na órbita e na curva de luz de um sistema binário eclipsante, respectivamente.

Substituindo numericamente os valores das constantes na terceira de Kepler (equação 2.11), obtemos

$$P = 2.78 \left(\frac{M_1}{M_\odot} + \frac{M_2}{M_\odot} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{R_\odot} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ horas} \quad (2.13)$$

Assim, por exemplo, um sistema binário composto por componentes de massas iguais à do nosso Sol ($M_1=M_2=1 M_\odot$) e com centros de massa separados de dez vezes os seus raios ($a=10 R_\odot$), orbitam, um ao redor do outro, com período de 2.6 dias. Se a distância entre os centros de massa cair pela metade, esse período cai para 22 horas.

Tais sistemas binários, cujos períodos orbitais são da ordem de dias ou horas são conhecidos como **binárias próximas**, embora, mais rigorosamente falando, binárias próximas sejam definidas como “sistemas binários em que a evolução de cada uma de suas componentes é afetada pela presença da outra” (Batten, 1973). A maioria dos sistemas binários cujas componentes tem massas medidas diretamente (e que, portanto, são usadas para testar modelos de estrutura e evolução estelar) pertencem a essa classe.

¹⁷“Efeitos de maré” são os efeitos decorrentes de um campo de força que varia bastante numa curta variação de espaço. Um exemplo de efeito de maré, e que deu nome ao efeito, é o fato de que a região da superfície da Terra voltada para a Lua sente a Lua com mais intensidade que a região oposta. A massa fluida do nosso planeta se deforma, em decorrência disso, e, por isso, verificamos variações nas marés, em correlação com o movimento diário da Lua.

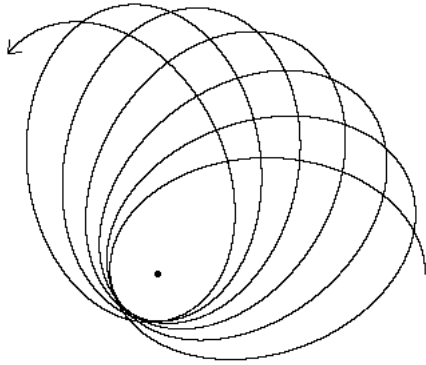


Figura 2.7: Órbita elíptica (exageradamente) perturbada. A linha de ápsides (não esboçada) gira de maneira uniforme no sentido anti-horário (dizemos, nesse caso, que “a linha avança”).

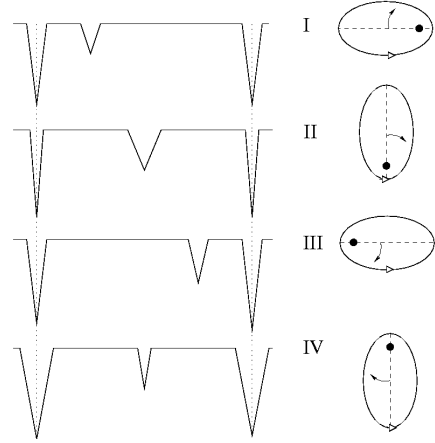


Figura 2.8: O movimento apsidal se revela nas curvas de luz de binárias eclipsantes através de mudanças das posições e durações relativas dos eclipses. (Nessa figura, o observador está posicionado abaixo das órbitas desenhadas.) Nesse caso, a linha de ápsides faz um movimento retrógrado.

Assim, é de extrema importância o estudo da estrutura e evolução de uma estrela, sob influência de uma estrela companheira.

No capítulo 5, voltaremos à questão do movimento apsidal.

2.2.1.3 O Potencial de Roche e o Esquema de Classificação de Kopal

O pseudo potencial gravitacional de um sistema binário de duas massas pontuais, em movimento circular, num sistema de referência em co-rotação com as duas massas (ver Seção 3.2.4, mais à frente), é denominado **Potencial de Roche**, e é dado por

$$\Phi_R(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\omega_K^2 \left(\left(x - \frac{M_2 R}{M_1 + M_2} \right)^2 + y^2 \right) - G \frac{M_1}{r} - G \frac{M_2}{r_2} \quad (2.14)$$

onde fixamos a origem na massa M_1 e mantivemos a massa M_2 na posição R do eixo x .

Nessa equação, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ é a distância do ponto $\mathbf{r} = (x, y, z)$ à massa M_1 e $r_2 = ((x - R)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ é a distância do mesmo ponto à massa M_2 . Além disso, a velocidade angular de rotação dos eixos, que corresponde à velocidade angular de rotação do sistema binário, é $\omega_K^2 = G(M_1 + M_2)R^{-3}$.

Apesar de o potencial de Roche tratar as duas estrelas apenas como duas massas pontuais (em movimento circular), o seu estudo é de grande importância didática para tratamentos mais avançados do problema do potencial e do movimento de um sistema binário.

É interessante verificar que o efeito da rotação do sistema está contido no termo que possui ω_K^2 (os outros dois termos do potencial Φ_R são os potenciais naturalmente criados por duas massas pontuais). Esse termo é um potencial repulsivo (centrífugo) cujas superfícies equipotenciais são cilindros coaxiais, cujo eixo é paralelo ao eixo z e corta o plano orbital na posição do centro de massa do sistema (que, evidentemente, está

no ponto $x = \frac{M_2 R}{M_1 + M_2}$, $y = z = 0$). Assim, o potencial Φ_R , descrito pela Eq. (2.14), é a soma desse termo com simetria cilíndrica com os outros dois termos de simetria radial.

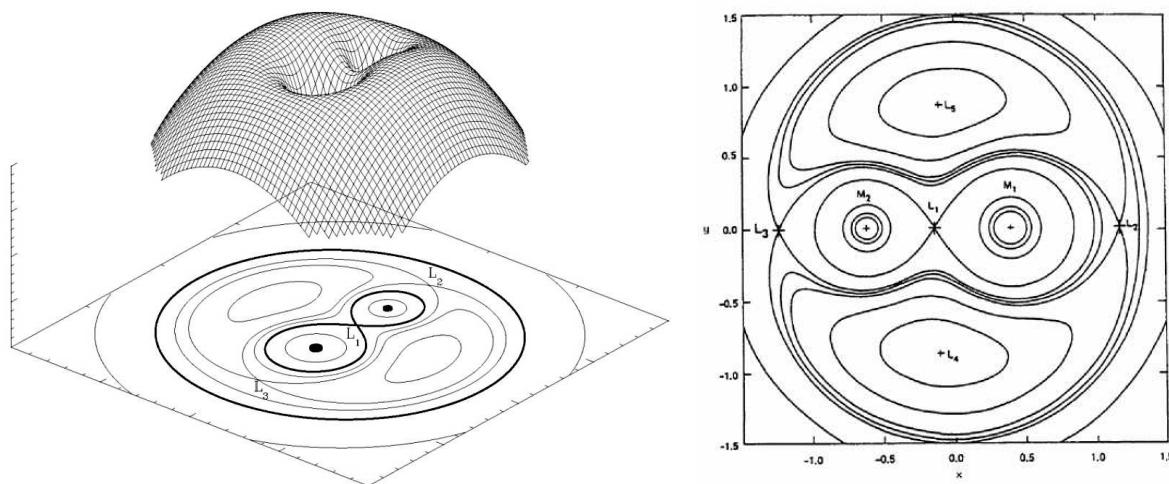


Figura 2.9: À esquerda, temos um esboço do potencial de Roche (Eq. 2.14) no plano orbital das duas massas ($z=0$). À direita, temos as (mais conhecidas) curvas de nível dessa função, mostrando, também, os cinco pontos lagrangianos. (Crédito: <http://kemel.waarnemen.com/Informatie/sterren/hoofdstuk6.html#mtr.>)

As características principais do potencial de Roche, no plano orbital das duas massas ($z=0$) estão ilustradas na figura 2.9.

À esquerda, temos o esboço da função potencial, no plano orbital das duas massas, $\Phi_R(x, y, 0)$. Essa função é a soma do termo da Eq. (2.14) que contém ω_K^2 (um parabolóide) com os outros dois termos atrativos. Perto das massas, o potencial se torna bastante atrativo. Mas, longe dessas, a repulsão devida à rotação vence. À direita, temos as curvas de nível dessa função, que evidenciam cinco pontos interessantes, denominados **pontos lagrangianos**: L_1 , L_2 , L_3 , L_4 e L_5 . Esses são os cinco pontos onde uma massa de prova ficaria em repouso e em equilíbrio instável, ou seja, *os pontos lagrangianos são pontos de máximo local*¹⁸.

Os pontos L_1 , L_2 e L_3 estão na reta que passa pelas as duas massas. Além disso, o potencial em L_1 é sempre menor que o potencial em L_2 ou L_3 (Kopal, 1959). Assim, se fôssemos enchendo um dos poços do potencial com um fluido (de massa desprezível), em algum momento, ele atingiria um volume crítico e transbordaria para o poço da outra estrela, passando por L_1 (e não para fora do sistema, passando por L_2 ou L_3). As superfícies críticas, que englobam o citado volume crítico são denominadas “os dois lobos de Roche” (ver figura 2.10).

É fácil provar que, em coordenadas esféricas, o potencial de Roche é dado por (Kopal, 1978)

$$\Phi_R = \frac{G(M_1 + M_2)}{2R} C, \quad (2.15)$$

¹⁸Se não houvesse rotação, mas apenas as duas massas, então só existiria um único ponto de máximo local, localizado num ponto entre as duas massas puntuais.

na qual C satisfaz a equação

$$-(1+q)C = 2u^{-1} + 2q \left((u^2 - 2u\lambda + 1)^{-\frac{1}{2}} - u\lambda \right) + (1+q)u^2(1-\nu^2) + q^2(1+q)^{-1}, \quad (2.16)$$

onde $q=M_2/M_1$ é a razão de massas, e $u=r/R$, $\lambda=\cos\phi\sin\theta$ e $\nu=\cos\theta$ são as novas coordenadas.

Em coordenadas esféricas, fica evidente que o potencial de Roche fica completamente definido pela distância entre as massas R e pela razão de massas q . Podemos ver, também, que as formas das superfícies equipotenciais de Roche dependem apenas da razão q (a distância R só tem o efeito de mudar as escalas dessas superfícies).

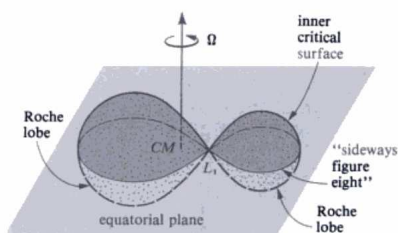


Figura 2.10: Esboço tridimensional dos dois lobos de Roche. Figura de Shu (1982).

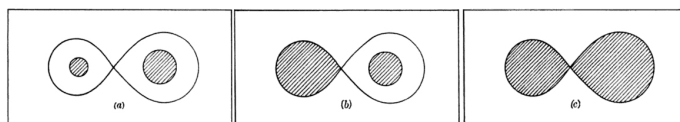


Figura 2.11: Esboço do esquema de classificação de sistemas de binárias próximas de Kopal: **a.** *Detached Systems*, como β Aurigae ou U Ophiuchi; **b.** *Semi-Detached Systems*, como Algol; **c.** *Contact Systems*, como W Ursae Majoris. Figura de Kopal (1978).

As considerações anteriores formam a base para o “esquema de classificação de Kopal para sistemas de binárias próximas”, que foi idealizado visando especificar a forma geométrica do sistema binário usando um mínimo de parâmetros (Batten, 1973). Considerando que as superfícies das estrelas coincidem com as superfícies equipotenciais de Roche, podemos ter 3 tipos distintos de binárias (figura 2.11): **a.** *Detached Systems*, em que as duas estrelas estão totalmente dentro de seus lobos de Roche (protótipos: β Aurigae ou U Ophiuchi); **b.** *Semi-Detached Systems*, em que uma das estrelas preenche o seu lobo de Roche e sua matéria eventualmente transborda para a outra estrela (protótipo: Algol); **c.** *Contact Systems*, em que ambas as estrelas preenchem e possivelmente ultrapassam os seus lobos de Roche (protótipo: W Ursae Majoris).

Para se determinar se o sistema binário pertence às classes “a”, “b” ou “c”, é necessário que se determine seus parâmetros, como a razão das massas das componentes, q , e suas dimensões relativas.

2.3 O Código de Evolução Estelar ATON 2.0

O código de estrutura e evolução estelar ATON é um dos códigos evolutivos mais respeitados da literatura. Sua história data dos anos 70. A primeira versão desse código foi implementada por Italo Mazzitelli, que o descreveu, pela primeira vez, em 1979 (Mazzitelli, 1979). Descrições detalhadas do código ATON 2.0 podem ser encontradas, principalmente em (Ventura et al., 1998; Mendes, 1999). Nesta seção, vamos mencionar as suas características fundamentais.

Outros códigos, da mesma espécie, famosos na literatura, são, por exemplo, o código YREC, do grupo da universidade de Yale (Pinsonneault, 1988) (um código muito semelhante ao ATON, otimizado, há muito, para o uso no estudo da rotação das estrelas), o código de Claret & Giménez (1989) (que tem sido usado no estudo de sistemas de estrelas binárias, e é otimizado para esse fim), o código CESAM, de Morel (1997) (um código francês público, que pode ser obtido no *site* <http://www.obs-nice.fr/cesam/>, atualmente otimizado para o uso intensivo na teoria de pulsações estelares, ou “astrossismologia”), o código LYON, de Baraffe et al. (1997) (um código atualmente otimizado para o estudo de estrelas de muito baixa massa e anãs marrons, devido, principalmente, ao excelente modelo de atmosfera estelar a ele integrado), e os códigos de Siess et al. (2000) e de Girardi et al. (2000), do grupo de Padova, que são famosas fontes de isócronas. Destaquemos, também, o código de Espinosa Lara & Rieutord (2007), que é um código de estrutura estelar rotacional bidimensional (suas equações constitutivas dependem das variáveis independentes r e θ). Nesse código, a estrela é totalmente radiativa, possui equação de estado, lei de opacidade e taxa de reações nucleares extremamente simplificadas e está sujeita a severas condições não físicas em sua superfície. Os códigos de estrutura e evolução estelar multidimensionais ainda estão muito na infância.

Nesta seção, vamos mencionar as características fundamentais do código ATON 2.0.

2.3.1 Visão Geral

Em sua presente versão, o código ATON 2.0 pode ser usado para seguir a evolução de estrelas, desde as primeiras fases de equilíbrio hidrostático da pré-sequência, até a fase de resfriamento das anãs brancas, no final da vida das estrelas de baixa massa. As fases mais avançadas da vida de estrelas mais massivas, tais como a da ignição do processo $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ e as fases “pré-supernova” subsequentes, não são, ainda, levadas em conta pelo código (Mendes, 1999).

A evolução nuclear das espécies químicas (abundâncias) segue o esquema linearizado implícito de Arnett & Truran (1969). Os passos temporais são computados de modo que as derivadas temporais logarítmicas de várias quantidades estruturais não excedam certos valores máximos permitidos.

A estrutura interna, desde o centro da estrela ($r=0$) até a base da atmosfera estelar, em todas as idades, é obtida através do usual método de relaxamento de Henyey (Henyey et al., 1964; Press, et al., 1992; Kippenhahn & Weigert, 1990).

Seguindo D’Antona & Mazzitelli (1997), atribuímos o tempo inicial $t = 0$ à configuração em equilíbrio hidrostático cuja temperatura central é $\log T_c = 5.7$ (ou seja, a temperatura de ignição da queima do deutério (D’Antona & Mazzitelli, 1997))¹⁹.

Um fluxograma simplificado do código ATON 2.0 encontra-se na figura 2.12. Inicialmente, o programa lê os parâmetros de entrada e cria o primeiro modelo, mediante a integração (via método de Runge-Kutta) das quatro equações constitutivas para

¹⁹A questão do tempo inicial para os modelos de evolução estelar é um tema de debate. No diagrama H-R, a estrela aparece depois que termina a sua fase de intensa acreção, quando a poeira dispersa e o núcleo aparece no visível. Assim, o tempo verdadeiro de uma estrela seria o tempo desde esse *birth point* até agora, mais o tempo de acreção do glóbulo (anterior ao *birth point*). Para o caso do ATON, o tempo verdadeiro da estrela seria o “tempo do ATON” (contado desde que a estrela inicia a queima do deutério), mais o tempo que foi necessário para que a estrela atingisse a temperatura central $\log T_c = 5.7$, de ignição da queima do deutério. E, em geral, o “tempo para o *birth point*” e o “tempo para a ignição da queima do deutério” não são idênticos (ver discussão em D’Antona & Mazzitelli (1997)).

esses parâmetros iniciais (onde inclui-se o citado parâmetro inicial da temperatura inicial: $\log T_c=5.7$, P_c , R_* , T_{ef} , o número de modelos que se deseja computar, massa, composição química, etc.). Então, um relaxamento é feito para esse primeiro modelo, para satisfazer as condições atmosféricas.

Após a convergência do primeiro modelo, os seus resultados são impressos e entra-se no grande *loop* ilustrado na figura 2.12. Calcula-se o incremento de tempo entre o modelo anterior e o modelo atual (de tal forma que as derivadas logarítmicas de certas quantidades estruturais sejam pequenas). Depois, calcula-se a evolução química usando o esquema linearizado implícito. Então, relaxa-se a estrutura estelar, para que as condições de interior e as condições atmosféricas sejam simultaneamente satisfeitas. Em seguida, faz-se mais cálculos de interesse físico, e, por fim, os resultados do modelo presente são impressos. Esse *loop* é repetido até o último modelo escolhido.

2.3.2 Entradas Físicas

Tabelas de equações de estado (para $P = P(\rho, T, \mu)$) são tiradas, principalmente de Magni & Mazzitelli (1979). Essas são combinadas com as tabelas de Mihalas et al. (1988) e as tabelas do código OPAL (Rogers et al., 1996), de forma a maximizar a cobertura do plano $\rho - T$, para diversas composições químicas, e, também, minimizar os vieses indevidos de cada uma das tabelas. Dessa forma, as melhores características de cada equação de estado são mantidas (Mendes, 1999; Ventura et al., 1998). As várias grandezas termodinâmicas de interesse são, então, obtidas a partir de interpolações feitas sobre essas tabelas. Para maiores detalhes desse esquema, ver Ventura et al. (1998).

Para as opacidades $\kappa = \kappa(\rho, T, \mu)$, um esquema semelhante é usado. Para cada Z (soma das abundâncias de metais) as opacidades do OPAL (Iglesias & Rogers, 1993) são combinadas com as opacidades de condução de Itoh & Kohyama (1993), e, depois, completadas com as opacidades moleculares de Alexander & Ferguson (1994), para temperaturas inferiores a $6000K$. A opacidade final é obtida por interpolações.

São consideradas 22 reações nucleares diferentes em que os seguintes 14 elementos participam: ^1H , ^2H , ^3He , ^4He , ^7Li , ^7Be , ^{12}C , ^{13}C , ^{14}N , ^{15}N , ^{16}O , ^{17}O , ^{18}O e ^{22}Ne (Ventura et al., 1998). As seções de choque de todas as reações são tiradas de Caughlan & Fowler (1988). Coeficientes de *screening* (blindagem eletromagnética dos núcleos atômicos pelos elétrons) são de Graboske et al. (1973). Neutrinos provenientes dos processos físicos mais relevantes vem de Itoh et al. (1992). A evolução nuclear das espécies químicas (abundâncias) segue o esquema linearizado implícito de Arnett & Truran (1969).

O código ATON 2.0 pode usar 2 diferentes modelos de convecção: o clássico modelo *Mixing Length Theory* (“comprimento de mistura”, MLT), de Böhm-Vitense (1958), ou o modelo *Full Spectrum of Turbulence* (FST), de Canuto & Mazzitelli (1991, 1992); Canuto et al. (1996).

O código ATON 2.0 também lida com a mistura dos elementos de 2 formas diferentes: “mistura instantânea”, em que, nas regiões convectivas, as abundâncias são tidas como constantes (instantaneamente misturadas) em sua extensão, ou com uma aproximação difusiva onde a equação de difusão de Cloutman & Eoll (1976) é resolvida de forma implícita. Para maiores detalhes sobre a mistura dos elementos no código ATON 2.0, ver Ventura et al. (1998).

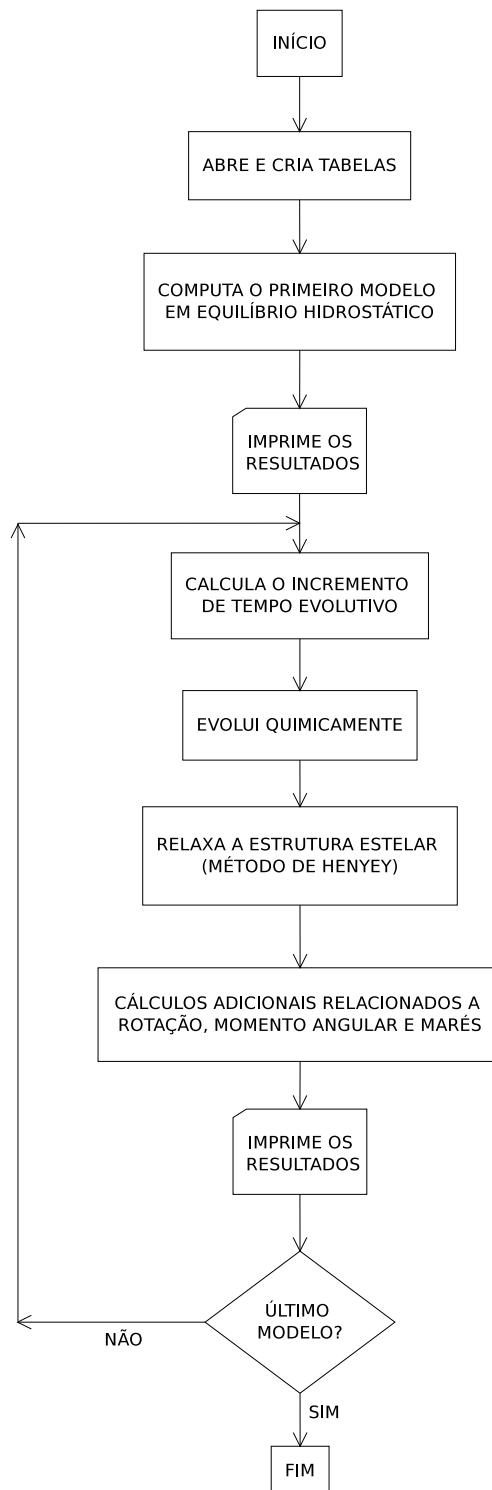


Figura 2.12: Fluxograma simplificado, mostrando os passos principais do código ATON 2.0.

2.4 Os Códigos ATON 2.1 e ATON 2.4

Devido à aparente simplicidade dos processos físicos ocorridos na pré-sequência, em comparação com os que ocorrem na pós-sequência, a maioria dos cientistas, ao menos até o final da década de 1990, tem dado muito maior importância ao estudo das fases posteriores à sequência principal.

No entanto, recentemente se tem verificado que fenômenos físicos pouco compreendidos, que tem pouco efeito na MS, possuem, por outro lado, efeito dominante na PMS, o que, atualmente, nos faz duvidar da aparente simplicidade dessas primeiras fases da vida da estrela. Como exemplos, nós podemos citar a convecção superadiabática (Mendes, 1999), a questão da equação de estado e da lei de opacidade, o *overshooting* convectivo (Mazzitelli, 1989; Massaguer et al., 1984), a rotação das estrelas e os campos magnéticos e a formação e evolução de sistemas binários (Larson, 2003).

Do lado observacional, os dados de estrelas na PMS são muito mais escassos que os dados de estrelas na MS. Isso, se deve principalmente à dificuldade de se fazer medidas com esses objetos. As estrelas PMS, geralmente, localizam-se em grandes concentrações de gás e poeira, que absorvem e reprocessam a sua radiação. Além disso, diz-se que “pode-se contar nos dedos” o número de binárias eclipsantes na pré-sequência. Assim, há pouquíssimas medidas diretas de massas e raios estelares, para estrelas nessa fase.

Essas novas evidências da complexidade da fase de pré-sequência tem levado a um renovado interesse nessas estrelas, e, certamente, sequências evolutivas de modelos de estrutura estelar, em constante melhoramento, serão importantíssimas ferramentas para o entendimento dessas estrelas jovens.

No final da década de 1990, Mendes atacou o problema da evolução rotacional das estrelas (de massas não muito altas) e de seus momentos angulares, utilizando o código ATON, desde a PMS até o final da MS (Mendes, 1999; Mendes et al., 1999). Para isso, modificou-se o código 2.0, aplicando a técnica de superfícies equipotenciais de Kippenhahn & Thomas (1970) (Seção 3.1), e a redistribuição de momento angular foi modelada por intermédio de uma equação difusivo-advectiva de Chaboyer & Zahn (1992). Assim, o código evoluiu para a versão 2.1 (Mendes, 1999).

No final da década de 2000, considerando que as binárias próximas fornecem valiosos testes para os modelos, mas com o revés indesejado de que suas mútuas interações produzem efeitos potencialmente não desprezíveis em suas estruturas, Landin expandiu o trabalho de Mendes, ao atacar o problema da evolução de sistemas binários de estrelas, também, desde a PMS até o final da MS (Landin, 2006; Landin et al., 2009). Para isso, acrescentou-se o potencial de maré de uma estrela secundária puntual ao já presente pseudo-potencial de rotação, utilizando o mesmo método de Kippenhahn & Thomas (1970) utilizado por Mendes (1999). Isso possibilitou ao código ATON a simulação de um sistema binário, para o caso particular em que os eixos orbital e de rotação da estrela primária são paralelos (Landin et al., 2009). Além disso, Landin também incluiu, no código ATON, a possibilidade de se utilizar modelos de atmosfera não-cinza, com o objetivo de seguir a evolução estelar de estrelas de muito baixa massa, que são mais frias e possuem uma atmosfera mais complexa (Landin, 2006; Landin et al., 2006). Assim, segundo Ventura et al. (2008), o código ATON evoluiu para a versão 2.4.

Além disso, com o objetivo de economizar tempo computacional, Landin (2006) introduziu o mecanismo de ponto de controle (*checkpoint*) (capítulo 4), que permite iniciar uma execução do programa ATON num estágio evolutivo intermediário da estrela, partindo

de uma execução anterior. O *checkpoint*, no entanto, foi implementado antes das modificações que deram corpo ao trabalho presente em Landin (2006), e, atualmente, está desatualizado (Seção 4.2.1).

Atualmente, há várias versões do código ATON, capazes de simular diferentes fenômenos físicos das estrelas, mas que são incompatíveis entre si. Isso é um grande problema, pois pode levar o código a perder a sua identidade. Há várias diferenças entre as versões do código de posse de nosso grupo brasileiro e entre as versões do código de posse do grupo italiano, e os próprios autores dos códigos são confusos ao especificar as várias versões do código. Mesmo em nosso grupo, há diferenças entre as versões. Atualmente, o código ATON 2.4 inclui 3 formas possíveis de se considerar rotação: a saber, (1) rotação de corpo rígido, (2) rotação diferencial ao longo de toda a estrela, com conservação de momento angular e (3) rotação diferencial conservativa nas regiões radiativas e rotação de corpo rígido nas regiões convectivas (Mendes, 1999). O código também possibilita a inclusão de uma estrela companheira perturbadora (Landin, 2006), mas, nesse caso, verificou-se que o código apresenta problemas quando as rotações dos tipos (2) e (3) são incluídas.

A correção desses problemas pode se tornar mais simples com a utilização do mecanismo de *checkpoint*. Daí, também, o interesse na atualização desse mecanismo.

*A Natureza e Suas Leis escondiam-se na escuridão:
E Deus disse: “Faça-se Newton!”, e tudo se iluminou.*
Alexander Pope

Capítulo 3

Perturbações na Estrutura da Estrela

Neste capítulo, faremos um estudo teórico bastante detalhado das perturbações sobre uma estrela pertencente a um sistema binário, devidas à sua rotação própria e à sua interação gravitacional com sua estrela companheira. Mostraremos como essas perturbações deformam a estrutura estelar, alterando as superfícies equipotenciais, e como elas vão modificar as quatro equações constitutivas citadas no capítulo anterior, e que são as equações implementadas no código ATON (e também em outros códigos semelhantes).

O objetivo deste capítulo é a verificação das equações do pseudopotencial recentemente implementado no código ATON, no trabalho de Landin et al. (2009), verificando se foi ou não foi incluído o movimento orbital das estrelas do sistema binário, e quais tipos de rotações são permitidas ao modelo. O trabalho deste capítulo também visou o estudo das possíveis generalizações que podem ser feitas ao trabalho de Landin et al. (2009).

Este capítulo é dividido em três grandes seções. Na seção 3.1, descreveremos o “método de Kippenhahn-Thomas”, o qual mostrará que é possível, de forma geral, inserir um potencial efetivo qualquer, Ψ , nas equações constitutivas, sem que elas percam o seu caráter unidimensional, bastando, para isso, que algumas de suas variáveis sejam reinterpretadas (ou generalizadas) e que se faça uso de alguns termos multiplicativos que estarão associados às deformações da estrutura estelar. Nas duas seções seguintes: seções 3.2 e 3.3, encontraremos esse potencial Ψ . Estudaremos o problema das perturbações sobre a estrela companheira, e generalizaremos, na medida do possível, o potencial descrito em Landin et al. (2009). Enfatizaremos todas as aproximações envolvidas no processo.

3.1 Modelos em Equilíbrio Hidrostático: Método de Kippenhahn-Thomas

A equação de movimento de um fluido com viscosidade constante, também conhecida como **Equação de Navier-Stokes** (Faber, 1995) é dada por

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \frac{1}{\rho}\eta\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (3.1)$$

onde \mathbf{v} é o campo de velocidade do fluido, ρ é a sua densidade, P é a pressão, η é a viscosidade e \mathbf{f}_{ext} é a força externa por unidade de massa.¹

Se o fluido está em repouso, dizemos que o mesmo está em **equilíbrio hidrostático**. Neste caso, fazendo $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ e $\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{0}$, na equação de Navier-Stokes, temos

$$\nabla P = \rho \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (3.2)$$

Será interessante para nós o caso em que a força externa é conservativa (como na atração gravitacional entre as massas). Nesse caso, existe uma função potencial Ψ , tal que $\mathbf{f}_{\text{ext}} = -\nabla\Psi$, e a equação acima fica reescrita como

$$\nabla P = -\rho \nabla\Psi \quad (3.3)$$

ou, ainda,

$$dP = -\rho d\Psi \quad (3.4)$$

Essa última equação fornece, ainda, mais um resultado interessante: Na situação de equilíbrio hidrostático, com campo de força externo conservativo, a densidade do fluido, que é, em geral, função da posição e do tempo, pode ser escrita como função do potencial, naquele ponto e naquele tempo: $\rho(\mathbf{r}, t) \Leftrightarrow \rho(\Psi)$, com $\rho(\Psi) = -\frac{dP}{d\Psi}(\Psi)$.

3.1.1 Superfícies Equipotenciais Distorcidas

O **Método de Kippenhahn-Thomas** (Kippenhahn & Thomas, 1970), que será abreviado, de agora em diante, por KT70, é uma estratégia para se introduzir potenciais perturbadores em modelos de evolução estelar de uma forma adequada para o cálculo computacional. Nessa técnica, as superfícies equipotenciais fechadas e esfericamente simétricas, presentes nos modelos estelares padrões, são substituídas por superfícies equipotenciais fechadas, mas distorcidas das formas esfericamente simétricas. Para que se possa apreciar o método, ele será rerepresentado nesta seção.

As superfícies equipotenciais são os conjuntos de pontos, no espaço, onde $\Psi=\text{constante}$. O símbolo S_Ψ vai designar esse conjunto. Essas superfícies são fechadas, e, portanto, englobam um volume que vamos especificar por V_Ψ .

A massa englobada pela superfície fechada será representada por M_Ψ . Ela é dada pela integral dos elementos de massa sobre o volume V_Ψ :

$$M_\Psi = \int_{V_\Psi} dm. \quad (3.5)$$

Suponhamos f uma função da posição e do tempo: $f=f(\mathbf{r}, t)$. O valor médio de f sobre a superfície S_Ψ , no tempo t , representado por $\langle f \rangle_{S_\Psi}(t)$, é

$$\langle f \rangle_{S_\Psi} = \frac{1}{A_\Psi} \oint_{S_\Psi} f(\mathbf{r}, t) da, \quad (3.6)$$

¹A interpretação física da equação de Navier-Stokes fica mais clara se multiplicarmos os dois lados da mesma pela massa de um elemento de fluido infinitesimal: $d\mathbf{m}\mathbf{a} = -(\nabla P)dV - \eta(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}))dV + \mathbf{F}_{\text{ext}}$. Assim, a força sobre um elemento de massa é a força devida às diferenças de pressão sobre o elemento de fluido, mais a força de atrito devida à fricção do elemento de fluido com os elementos de fluido adjacentes (proporcional à velocidade e sempre contrária ao cisalhamento), mais o somatório de todas as forças externas que atuam sobre o elemento de fluido.

onde

$$A_\Psi = \oint_{S_\Psi} da \quad (3.7)$$

é a área da superfície S_Ψ .

O raio da “esfera topologicamente equivalente” à superfície S_Ψ é definido como *o raio da esfera cujo volume interno é igual ao volume interno à superfície S_Ψ* . Ele é representado por r_Ψ . Sendo assim, r_Ψ é definido pela relação:

$$V_\Psi = \frac{4\pi}{3} r_\Psi^3 \quad (3.8)$$

A “gravidade efetiva local” é definida por

$$\mathbf{g} = -\nabla\Psi. \quad (3.9)$$

Se “desligarmos” as perturbações, Ψ volta a ser o potencial gravitacional gerado unicamente pelos elementos de massa da estrela, Φ , e, assim, a gravidade efetiva volta a ser a gravidade que conhecemos. O módulo da gravidade efetiva é $g = |\nabla\Psi|$. Como o gradiente de Ψ é normal à superfície onde Ψ =constante, temos que $g = |\nabla\Psi| = \nabla\Psi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\Psi}{\partial n}$, onde \mathbf{n} é o vetor unitário normal à superfície S_Ψ .

Seja δV_Ψ o volume entre as superfícies equipotenciais consecutivas S_Ψ e $S_{\Psi+\delta\Psi}$,

$$\delta V_\Psi = V_{\Psi+\delta\Psi} - V_\Psi \approx \oint_{S_\Psi} (\delta n) da, \quad (3.10)$$

onde δn é a distância entre as duas superfícies equipotenciais, e o sinal de aproximação se deve ao fato de que estamos lidando com quantidades finitas (a aproximação se tornará exata quando as quantidades finitas se tornarem quantidades infinitesimais).

Multipliquemos e dividamos por $\delta\Psi$:

$$\delta V_\Psi \approx \oint_{S_\Psi} (\delta n) da = \delta\Psi \oint_{S_\Psi} \frac{\delta n}{\delta\Psi} da \approx \delta\Psi \oint_{S_\Psi} \frac{\partial n}{\partial\Psi} da = \delta\Psi \oint_{S_\Psi} g^{-1} da. \quad (3.11)$$

No limite em que as variações se tornam infinitesimais, o elemento de volume entre duas equipotenciais consecutivas é

$$dV_\Psi = A_\Psi \langle g^{-1} \rangle d\Psi. \quad (3.12)$$

Da definição de densidade, temos

$$\rho = \frac{dM_\Psi}{dV_\Psi}, \quad (3.13)$$

e, usando (3.12), segue-se que a massa entre duas equipotenciais consecutivas é

$$dM_\Psi = \rho A_\Psi \langle g^{-1} \rangle d\Psi. \quad (3.14)$$

Como estamos supondo equilíbrio hidrostático ($dP = -\rho d\Psi$), temos

$$\rho(\Psi) = -\frac{dP}{d\Psi}. \quad (3.15)$$

Além disso, de (3.8), é evidente que

$$dV_\Psi = 4\pi r_\Psi^2 dr_\Psi \quad (3.16)$$

3.1.2 Equações de Estrutura Estelar para Superfícies Gerais

Vamos, agora, obter as quatro equações de estrutura estelar, modificadas para superfícies equipotenciais distorcidas.

3.1.2.1 Equação de continuidade

Calculemos dr_Ψ/dM_Ψ :

$$\frac{dr_\Psi}{dM_\Psi} = \frac{1}{\rho} \frac{dr_\Psi}{dV_\Psi} \quad (3.17)$$

ou, usando, (3.16), chegamos à primeira equação modificada:

$$\frac{dr_\Psi}{dM_\Psi} = \frac{1}{\rho 4\pi r_\Psi^2}. \quad (3.18)$$

3.1.2.2 Equação de equilíbrio hidrostático

Calculemos dP/dM_Ψ :

$$\frac{dP}{dM_\Psi} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dV_\Psi} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{A_\Psi \langle g^{-1} \rangle} \right) \frac{dP}{d\Psi} \quad (3.19)$$

onde usamos (3.12). Usando, então, (3.15), temos

$$\frac{dP}{dM_\Psi} = -\frac{1}{A_\Psi \langle g^{-1} \rangle} \quad (3.20)$$

ou

$$\frac{dP}{dM_\Psi} = -\frac{GM_\Psi}{4\pi r_\Psi^4} f_P \quad (3.21)$$

onde definimos a função auxiliar f_P :

$$f_P = \frac{4\pi r_\Psi^4}{GM_\Psi} \frac{1}{A_\Psi \langle g^{-1} \rangle} \quad (3.22)$$

3.1.2.3 Equação de conservação da energia

A luminosidade de uma superfície é a potência (energia por tempo) irradiada pela mesma (KW90, Cap. 4). Seja, então, $\mathbf{j} = \rho_E \mathbf{v}$ o fluxo de energia (ρ_E é a energia por unidade de volume). Então, a luminosidade de S_Ψ é

$$l_\Psi = \oint_{S_\Psi} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} = \int_{V_\Psi} \nabla \cdot \mathbf{j} dV_\Psi \quad (3.23)$$

e, a luminosidade de uma superfície esférica “ S_r ” é

$$l = \oint_{S_r} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} = \int_{V_r} \nabla \cdot \mathbf{j} dV \quad (3.24)$$

de onde concluímos que, simplesmente,

$$\frac{dl_\Psi}{dV_\Psi} = \frac{dl}{dV} \quad (3.25)$$

Substituindo (3.25) em (2.4), chegamos a

$$\frac{\partial l_\Psi}{\partial M_\Psi} = \epsilon - T \frac{\partial S}{\partial t} \quad (3.26)$$

3.1.2.4 Equação de transporte de energia

Calculemos dT/dM_Ψ :

$$\frac{\partial T}{\partial M_\Psi} = \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial M_\Psi} = \frac{T}{P} \frac{\partial P}{\partial M_\Psi} \nabla \quad (3.27)$$

onde, $\nabla = \frac{P}{T} \frac{\partial T}{\partial P}$. Substituindo (3.21) em (3.27), concluímos que

$$\frac{\partial T}{\partial M_\Psi} = -\frac{GM_\Psi T}{4\pi r_\Psi^4 P} f_P \nabla. \quad (3.28)$$

Como na Eq. (2.6), aqui também ∇ é determinado pelo critério de Schwarzschild,

$$\nabla = \left(\begin{array}{cc} \nabla_{\text{rad}} & , \quad \nabla_{\text{rad}} \leq \nabla_{\text{ad}} \\ \nabla_{\text{conv}} & , \quad \nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}} \end{array} \right), \quad (3.29)$$

pois a instabilidade dinâmica é um efeito local, ou seja, é um efeito que não depende da forma das equipotenciais da estrela (KW90, Cap. 6).

O gradiente adiabático depende apenas das condições locais do gás estelar (KW90, Cap. 4). Portanto, ele também continua sendo dado pela Eq. (2.7). O gradiente radiativo, porém, não depende apenas das condições locais do gás. De (2.8), podemos ver que o gradiente radiativo depende da luminosidade e da massa interna, sendo que ambas vão depender da forma das superfícies equipotenciais da estrela.

No interior estelar, o livre caminho médio dos fótons é pequeno. Assim, esses se propagam por difusão (obedecendo, portanto, a equação de difusão), e, em muito boa aproximação, a densidade de energia desse gás de fótons é dada pela expressão do corpo negro de Plank: $U/V = aT^4$. Assim, o fluxo de energia radiativa (fluxo de fótons) é dado por (KW90, Cap. 5)

$$\mathbf{F} = -\frac{4}{3} ac \frac{1}{\kappa \rho} T^3 \nabla T. \quad (3.30)$$

A luminosidade da superfície S_Ψ (luminosidade radiativa) é

$$l_\Psi = \oint_{S_\Psi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{S_\Psi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da, \quad (3.31)$$

onde

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{4}{3} ac \frac{1}{\kappa \rho} T^3 \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (3.32)$$

Mas,

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial n} = g \frac{\partial T}{\partial \Psi} \quad (3.33)$$

que, usando (3.14), se torna

$$\frac{\partial T}{\partial n} = g \rho A_\Psi \langle g^{-1} \rangle \frac{\partial T}{\partial M_\Psi}. \quad (3.34)$$

Assim, substituindo (3.32) e (3.34) em (3.31), chega-se a

$$l_\Psi = -\frac{4}{3} ac \frac{1}{\kappa} A_\Psi^2 \langle g^{-1} \rangle \langle g \rangle T^3 \frac{\partial T}{\partial M_\Psi}. \quad (3.35)$$

Operemos sobre a definição de gradiente radiativo,

$$\nabla_{\text{rad}} = \left(\frac{\partial \log T}{\partial \log P} \right)_{\text{rad}} = \frac{P}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_{\text{rad}} = \frac{P}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial M_{\Psi}} \frac{\partial M_{\Psi}}{\partial P} \right)_{\text{rad}}. \quad (3.36)$$

Substituindo (3.21) e (3.35) em (3.36), após alguma álgebra, chega-se, finalmente, a

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa}{16\pi acG} \frac{P}{T^4} \frac{l_{\Psi}}{M_{\Psi}} \frac{f_T}{f_P}, \quad (3.37)$$

onde a segunda função auxiliar f_T é definida por

$$f_T = \left(\frac{4\pi r_{\Psi}^2}{A_{\Psi}} \right)^2 \frac{1}{\langle g \rangle \langle g^{-1} \rangle}. \quad (3.38)$$

Para manter coerência com o trabalho de Endal & Sofia (1976) e com outros trabalhos subsequentes, vamos passar a chamar de “gradiente radiativo” somente à quantidade que multiplica o fator f_T/f_P no segundo membro de (3.37),

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa}{16\pi acG} \frac{P}{T^4} \frac{l_{\Psi}}{M_{\Psi}}. \quad (3.39)$$

3.1.3 Resumo

O método de KT70 basicamente consiste na troca das equações de estrutura estelar esfericamente simétricas, dadas na seção 2.1.4, pelas equações de estrutura estelar gerais:

$$\frac{\partial r_{\Psi}}{\partial M_{\Psi}} = \frac{1}{\rho 4\pi r_{\Psi}^2}, \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial P}{\partial M_{\Psi}} = -\frac{GM_{\Psi}}{4\pi r_{\Psi}^4} f_P, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial l_{\Psi}}{\partial M_{\Psi}} = \epsilon_{\Psi} - T \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial T}{\partial M_{\Psi}} = -\frac{GM_{\Psi}T}{4\pi r_{\Psi}^4 P} f_P \nabla, \quad (3.43)$$

sujeitas ao critério de instabilidade de Schwarzschild:

$$\nabla = \left(\begin{array}{cc} \nabla_{\text{rad}} \frac{f_T}{f_P} & , \quad \nabla_{\text{rad}} \frac{f_T}{f_P} \leq \nabla_{\text{ad}} \\ \nabla_{\text{conv}} & , \quad \nabla_{\text{rad}} \frac{f_T}{f_P} > \nabla_{\text{ad}} \end{array} \right), \quad (3.44)$$

onde

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{P\delta}{T c_P \rho} \quad \text{e} \quad (3.45)$$

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa}{16\pi acG} \frac{P}{T^4} \frac{l_{\Psi}}{M_{\Psi}} \quad (3.46)$$

são os gradientes adiabático e radiativo de temperatura, respectivamente, ∇_{conv} é o gradiente convectivo, que depende da teoria de convecção utilizada, e f_P e f_T são dados pelas Eqs. (3.22) e (3.38), respectivamente.

Podemos ver que o método de KT70 efetivamente modifica as equações de estrutura estelar, aplicando os termos multiplicativos f_P e f_T nas mesmas e no critério de Schwarzschild. É fácil ver que, quando não há perturbação e as superfícies tornam-se esféricas novamente, teremos $f_P \rightarrow 1$ e $f_T \rightarrow 1$, e voltamos ao modelo padrão. Então, nosso problema consiste em achar as funções f_P e f_T , e isso é possível, se soubermos o potencial Ψ .

Se conhecermos o potencial Ψ , podemos encontrar o módulo da gravidade efetiva: $g = \nabla\Psi \cdot \mathbf{n} = \partial\Psi/\partial n$, e o seu inverso g^{-1} . Uma vez que sabemos essas quantidades, podemos calcular $A_\Psi\langle g \rangle$ e $A_\Psi\langle g^{-1} \rangle$, que são necessárias no cálculo de f_P e f_T . Então, enfim, o problema da evolução estelar pode ser resolvido, através da integração numérica das quatro equações de estrutura estelar modificadas.

3.2 O Potencial (Parte I)

Nosso sistema de interesse é um par binário de estrelas, e o nosso objetivo é encontrar o pseudo-potencial gravitacional efetivo em cada ponto desse sistema. Em particular, queremos achar o potencial sentido por uma partícula pertencente a uma das estrelas do sistema, e, portanto, teremos de nos transportar para o referencial dessa estrela, pois, é nele que as equações de estrutura estelar estão descritas.

Veremos na subseção 3.2.1 que, quando nos colocamos no ponto de vista de um dos corpos do sistema, estamos nos transportando para um referencial não-inercial, e isso acarreta em “forças fictícias”. Na subseção 3.2.2, veremos, explicitamente, que a rotação intrínseca do referencial da estrela e o seu movimento orbital gerarão *potenciais perturbadores* no espaço que será ocupado pela distribuição de massa ρ . Na subseção 3.2.3, faremos a estrela companheira ser tratada como uma massa puntual, e então, daí para frente, ρ será, para nós, somente a densidade da estrela em análise, e não mais a densidade do sistema binário como um todo (a estrela companheira passará também a ser responsável por produzir um potencial perturbador no espaço).

Nas subseções 3.2.5 e 3.2.6, discutiremos os efeitos do escoamento do fluido que compõe a estrela. Mediante algumas suposições chegaremos numa forma aproximada de escoamento permanente do fluido, com simetria axial, que tornará possível a separação de mais um elemento perturbador.

Assim, concluiremos dessa seção que podemos escrever o potencial geral da seguinte forma

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \quad (3.47)$$

onde V é o potencial perturbador, e

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -G \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}', t) dV' \quad (3.48)$$

é o potencial gravitacional (onde dV' é o elemento de volume na posição \mathbf{r}').

A maneira como a massa vai se distribuir (ou seja, a forma de ρ) vai depender das forças perturbadoras às quais a estrela está submetida. Assim, Φ também dependerá dessas forças, e, portanto, devemos estabelecer, primeiro, a forma de V , para, então, atacarmos o problema de encontrar Φ .

Nesta seção, portanto, vamos, em suma, nos restringir ao estudo das perturbações, V . Na seção posterior (seção 3.3), trataremos do problema de encontrar o potencial gerado pela distribuição de massa da estrela Φ .

3.2.1 Referenciais Inerciais e Não-Inerciais

O **referencial inercial** é aquele, ideal, no qual se aplicam as leis de Newton. Nesse referencial, todas as forças de ação possuem seus pares de reação, ou seja, possuem um agente físico, e a ação resultante (linear e/ou angular), soma de todas as ações sobre um determinado corpo nesse referencial, será igual à variação da quantidade de movimento correspondente (linear e/ou angular) do mesmo. Num referencial que não é inercial, os corpos adquirem movimentos que não são explicáveis pelas suas interações conhecidas, causadas por agentes físicos, criando a necessidade de forças para as quais não existe o par de reação correspondente (motivo pelo qual são chamadas de “forças fictícias”), e, nesse caso, não há, necessariamente, conservação de momento linear ou angular (Marion & Thornton, 1995).

3.2.1.1 Transformação Geral de Referenciais

Sejam dois referenciais S' e S , e um ponto P , visto simultaneamente pelos dois referenciais. O vetor \mathbf{s} é o vetor posição, da origem do referencial S ao ponto arbitrário P , e o vetor \mathbf{r} é o vetor posição, da origem do referencial S ao ponto arbitrário P . O vetor \mathbf{R}_1 dá a posição da origem de S , O , em relação à de S' , O' . Veja a figura 3.1.

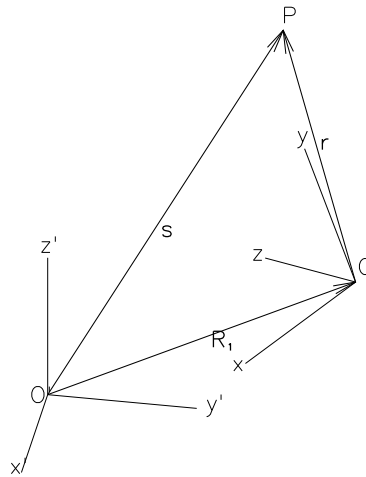


Figura 3.1: Esboço da transformação de referenciais. No referencial S' , o ponto P está localizado pelo vetor \mathbf{s} , e no referencial S pelo vetor \mathbf{r} . A origem O é localizada por \mathbf{R}_1 no referencial S' . Em relação a S' , tanto S e P estão em movimento.

Então,

$$\mathbf{s} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{r} \quad (3.49)$$

e, da mecânica clássica, temos que a relação que conecta as velocidades do ponto P , nos referenciais inercial e não-inercial é (Marion & Thornton (1995) e Apêndice B.1):

$$\dot{\mathbf{s}}_f = \dot{\mathbf{R}}_{1f} + \dot{\mathbf{r}}_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.50)$$

Nesta equação, os índices “f” e “m”, abreviações de “fixo” e “móvel” indicam, respectivamente, os referenciais inercial e não-inercial. Assim, por exemplo, \mathbf{A}_m significa *vetor \mathbf{A} escrito como combinação linear da base do referencial não-inercial (móvel) S* e \mathbf{A}_f significa *vetor \mathbf{A} escrito como combinação linear da base do referencial inercial (fixo) S'* . Dessa forma, é claro que $\mathbf{A} = \mathbf{A}_f = \mathbf{A}_m$, pois o vetor \mathbf{A} não varia, se escolhermos representá-lo na base S' ou S . O mesmo não pode ser dito para a velocidade do vetor \mathbf{A} , representada, de forma geral, por $\dot{\mathbf{A}}$. Em geral, $\dot{\mathbf{A}}_f \neq \dot{\mathbf{A}}_m$, pois a base de S (a base móvel ou não-inercial) pode estar em movimento, em relação à base de S' (a base fixa ou inercial). Assim, *para o referencial S' , a velocidade de um dado ponto, cujo vetor posição é \mathbf{A} , é a velocidade desse ponto, vista pelo referencial S , mais a velocidade do referencial S* (Apêndice B.1).²

Na equação (3.50), $\boldsymbol{\omega}$ é a **velocidade angular da base do referencial não-inercial S** , em relação à base do referencial inercial S' (Apêndice B.1).

A relação geral que descreve a aceleração de um ponto, nos referenciais inercial e não-inercial é (Marion & Thornton, 1995):

$$\ddot{\mathbf{s}}_f = \ddot{\mathbf{R}}_{1f} + \ddot{\mathbf{r}}_m + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_m \quad (3.51)$$

obtida através da simples derivação de (3.50) em relação ao tempo.³

3.2.2 Sistemas Binários

Nosso sistema é um par de estrelas fisicamente ligadas. Na nossa análise, é mais conveniente nos transportarmos para um referencial com origem no centro de massa (CM) de uma das estrelas, pois é nesse referencial que as equações de estrutura estelar estão escritas. Assim, devemos fazer a conversão entre o referencial inercial, fixo no centro de massa do sistema, para um referencial não-inercial móvel, que está fixo no centro de massa de uma das estrelas do sistema, e que roda com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ em torno do centro de massa (velocidade angular orbital). Antes, porém, verifiquemos algumas características preliminares das órbitas das estrelas binárias.

Neste trabalho, a estrela de interesse, que será analisada em detalhe, será sempre denominada “primária”, enquanto que a outra componente, que perturba a configuração da estrela de interesse, será denominada “secundária”, sem que isso tenha a ver com a sua massa ou sua temperatura efetiva.⁴ Nesse contexto, as massas da primária e da secundária

²Dessas considerações, vemos que o último termo da equação (3.50) poderia ter sido escrito de diversas maneiras, sendo que todas seriam equivalentes: $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_m = \boldsymbol{\omega}_m \times \mathbf{s}_f = \boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{s} = \dots$

³Considerando que, de forma geral, pela equação (3.50), $\dot{\mathbf{A}}_f = \dot{\mathbf{A}}_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$, é claro que, para o vetor $\boldsymbol{\omega}$, teremos $\dot{\boldsymbol{\omega}}_f = \dot{\boldsymbol{\omega}}_m$, e, portanto, para esse vetor particular, podemos abandonar os índices e representar a sua derivada temporal, nos dois referenciais, por $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, como foi feito na equação (3.51).

⁴No sistema binário, as massas e temperaturas efetivas das componentes são, em geral, diferentes. Se há dados espectroscópicos suficientes para determinar qual possui a maior massa, essa estrela é denominada “primária”. Quando o sistema é eclipsante (devido à sua alta inclinação do plano orbital em relação à linha de visada), o eclipse mais profundo (quando a componente de maior temperatura efetiva é eclipsada) é denominado, também, como sendo “primário”. Para o caso de as componentes estarem na sequência

são, respectivamente, M_1 e M_2 , e a posição do seu centro de massa, \mathbf{R}_{CM} , é definida por:

$$\mathbf{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{M_1 + M_2} \sum_{i=1}^2 M_i \mathbf{R}_i \quad (3.52)$$

onde \mathbf{R}_i é a posição do CM da i -ésima estrela. Como a origem, O' , do referencial S' , está no centro de massa do sistema, temos que $\mathbf{R}_{\text{CM}} = \mathbf{0}$, e

$$\mathbf{0} = M_1 \mathbf{R}_1 + M_2 \mathbf{R}_2, \quad \text{ou} \quad \mathbf{R}_2 = -\frac{M_1}{M_2} \mathbf{R}_1. \quad (3.53)$$

Definamos, também, o vetor $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$, que dá a posição da secundária em relação à primária. É fácil verificar que $\mathbf{R} = -\frac{M_1+M_2}{M_2} \mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R} = \frac{M_1+M_2}{M_1} \mathbf{R}_2$.

Como as forças entre as duas estrelas estão orientadas na direção de \mathbf{R} (forças centrais), segue-se que os momentos angulares de cada uma das estrelas se conservam: $\dot{\mathbf{L}}_i = \mathbf{R}_i \times M_i \ddot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{0} \Rightarrow$ “ \mathbf{L}_i é constante” ($i = 1, 2$), e, assim, as órbitas das estrelas estão necessariamente contidas no plano normal aos vetores momento angular \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_2 e $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$.

Assim, sabendo que \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 estão num mesmo plano, podemos, sem perda de generalidade, considerar o problema orbital como sendo bidimensional o que nos permite utilizar coordenadas polares. Façamos, então a expansão dos vetores \mathbf{R}_i em coordenadas polares, no plano xy ⁵:

$$\mathbf{R}_i = R_i \mathbf{e}_{R_i} \quad (3.54)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_i = \dot{R}_i \mathbf{e}_{R_i} + R_i \dot{\omega} \mathbf{e}_{\theta_i} \quad (3.55)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = (\ddot{R}_i - R_i \omega^2) \mathbf{e}_{R_i} + (2\dot{R}_i \dot{\omega} + R_i \ddot{\omega}) \mathbf{e}_{\theta_i} \quad (3.56)$$

Então, calculando o momento angular, temos

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{R}_i \times M_i \dot{\mathbf{R}}_i = M_i R_i^2 \dot{\omega} (\mathbf{e}_{R_i} \times \mathbf{e}_{\theta_i}) = l_i \mathbf{e}_z, \quad (3.57)$$

onde $l_i = M_i R_i^2 \dot{\omega}$ é o módulo do momento angular da i -ésima estrela (constante) e $\omega(t)$ é a **velocidade angular orbital** das estrelas.

Derivando l_i no tempo, temos $\dot{l}_i = M_i R_i (2\dot{R}_i \dot{\omega} + R_i \ddot{\omega})$, onde reconhecemos, no termo entre parêntesis, a componente tangencial da aceleração da i -ésima estrela (coeficiente de \mathbf{e}_{θ_i} na Eq. 3.56). Como as forças entre as estrelas são centrais, a aceleração de cada estrela é central, e, portanto, esse termo (a componente tangencial da aceleração) deve ser nulo. Assim, em (3.56), temos

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = (\ddot{R}_i - R_i \omega^2) \mathbf{e}_{R_i}, \quad (3.58)$$

que confirma nossa conclusão de que o momento angular orbital de cada uma das estrelas se conserva: $l_i = M_i R_i^2 \dot{\omega} = \text{constante}$.

principal, a estrela eclipsada no eclipse primário (de temperatura superficial mais alta) é, também, a de maior massa. Mas, no caso em que uma delas (a mais massiva) já se tornou uma gigante vermelha, enquanto a outra ainda está na sequência principal, teremos que o eclipse primário corresponderá ao eclipse da menos massiva.

⁵Neste trabalho, sempre adotaremos a notação de \mathbf{e}_A é o vetor unitário na direção do vetor \mathbf{A} , tal que $\mathbf{A} = A \mathbf{e}_A$.

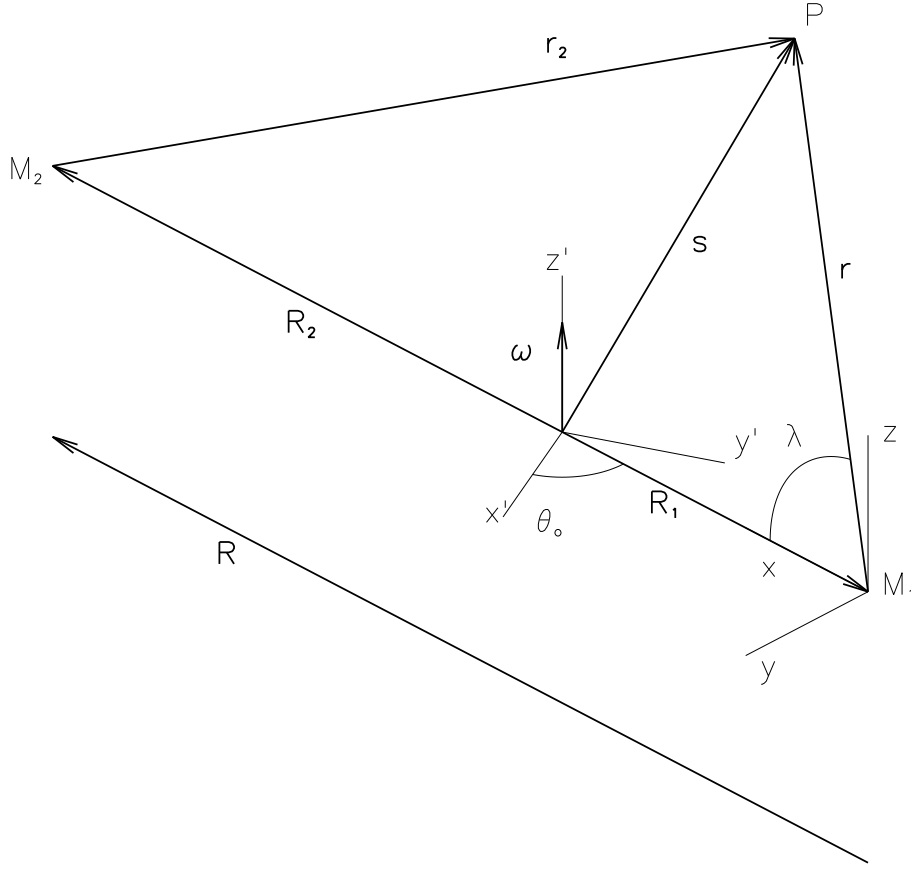


Figura 3.2: O referencial inercial S' (eixos ortogonais x' , y' e z') tem o referencial não-inercial S (eixos ortogonais x , y e z) na posição \mathbf{R}_1 . O vetor \mathbf{R}_1 (contido no plano $x'y'$), localiza o CM da estrela 1 (massa M_1). O vetor \mathbf{R}_2 (também contido no plano $x'y'$), localiza o CM da estrela 2 (massa M_2). O ponto arbitrário P é localizado no referencial S' por \mathbf{s} , no referencial S por \mathbf{r} , e no referencial ligado a M_2 por \mathbf{r}_2 . Paralelo a \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 , temos o vetor \mathbf{R} . O ângulo orbital é representado por θ_o . O ângulo entre os vetores \mathbf{r} e \mathbf{R} é λ . As origens dos referenciais S' e S são O' e O , respectivamente (não representadas nessa figura).

3.2.2.1 O Referencial da Primária

Transportemo-nos, agora, para a “estrela primária”. Nisso, faremos a passagem do referencial inercial S' , com origem O' no CM do sistema binário, para o referencial não-inercial S , com origem O no CM da estrela 1. Suponhamos que o referencial S gire com **velocidade angular** ω em torno de seu eixo z .

Aplicando as Eqs. (3.49), (3.50) e (3.51), a posição, a velocidade e a aceleração do

ponto arbitrário P , vistas pelo referencial S , são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} - \mathbf{R}_1, \quad (3.59)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_m = \dot{\mathbf{s}}_f - \dot{\mathbf{R}}_{1f} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (3.60)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = \ddot{\mathbf{s}}_f - \ddot{\mathbf{R}}_{1f} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_m, \quad (3.61)$$

onde $\ddot{\mathbf{R}}_{1f} = (\ddot{R}_1 - R_1\omega^2)\mathbf{e}_{R1}$, pela Eq. (3.58), e $(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}))$ e $(2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_m)$ são, respectivamente, a **aceleração centrífuga** e a **aceleração de Coriolis**.

A origem O (de S) tem, dessa forma, um movimento orbital num plano, ao redor da origem O' (de S'), onde está o centro de massa do sistema binário. Essa órbita é o conjunto de todos os pontos varridos pelo vetor \mathbf{R}_1 .

Vamos encontrar as equações de transformação entre os vetores unitários dos referenciais S' e S , tal como mostrado na figura 3.2. Primeiramente, para manter a coerência com os trabalhos anteriores (Landin, 2006; Landin et al., 2009), sobre os quais este foi feito, façamos uma primeira rotação de 180° em torno do eixo z' . Esta operação é representada pela seguinte matriz:

$$R_{z'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

que gera o “referencial auxiliar” S'' . Essa primeira rotação coloca a estrela 2 no eixo x' positivo do referencial não-inercial, como foi feito em Landin et al. (2009). Enfim, temos a rotação intrínseca do referencial não-inercial, que é obtida com uma segunda rotação ao redor do eixo z'' de um ângulo θ_o (que varia com o tempo),

$$R_{z''} = \begin{pmatrix} \cos \theta_o & \sin \theta_o & 0 \\ -\sin \theta_o & \cos \theta_o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

O ângulo $\theta_o(t)$ é o **ângulo orbital** (figura 3.2). Sua derivada temporal é a velocidade angular intrínseca do referencial S : $\dot{\theta}_o(t) = \omega(t)$.

Geramos, assim, a matriz de transformação para o referencial S :

$$R_{\text{trans}} = R_{z''}R_{z'} = \begin{pmatrix} -\cos \theta_o & -\sin \theta_o & 0 \\ \sin \theta_o & -\cos \theta_o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

Da matriz R_{trans} é fácil ver que equações de transformação entre os vetores unitários da figura 3.2 são

$$\mathbf{e}_x = -\cos \theta_o \mathbf{e}_{x'} - \sin \theta_o \mathbf{e}_{y'} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \theta_o \mathbf{e}_{x'} - \cos \theta_o \mathbf{e}_{y'} \quad (3.66)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_{z'} \quad (3.67)$$

e as equações inversas são

$$\mathbf{e}_{x'} = -\cos \theta_o \mathbf{e}_x + \sin \theta_o \mathbf{e}_y \quad (3.68)$$

$$\mathbf{e}_{y'} = -\sin \theta_o \mathbf{e}_x - \cos \theta_o \mathbf{e}_y \quad (3.69)$$

$$\mathbf{e}_{z'} = \mathbf{e}_z \quad (3.70)$$

3.2.2.2 Pseudo-Potenciais de Rotação e Translação

O vetor \mathbf{R}_1 , que localiza a estrela 1, é

$$\mathbf{R}_1 = R_1 \mathbf{e}_{R1} = R_1(t) [\cos \theta_o(t) \mathbf{e}_{x'} + \sin \theta_o(t) \mathbf{e}_{y'}] \quad (3.71)$$

onde $\theta_o(t)$ é o ângulo orbital, sujeito a $l_1 = M_1 R_1^2 \omega$, sendo $\omega(t) = \dot{\theta}_o(t)$.

Como $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}$, reescrevemos (3.61):

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = \ddot{\mathbf{s}}_f - (\ddot{R}_1 - R_1 \omega^2) \mathbf{e}_{R1} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} + \omega^2 \mathbf{r} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_m - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}, \quad (3.72)$$

onde

$$\mathbf{e}_{R1} = -\mathbf{e}_x \quad (3.73)$$

é o unitário na direção de \mathbf{R}_1 .

Considerando o termo de rotação, temos:

$$-(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} + \omega^2 \mathbf{r} = \omega^2 (\mathbf{r} - (\mathbf{e}_\omega \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e}_\omega) \quad (3.74)$$

Geometricamente, reconhecemos $\mathbf{r} - (\mathbf{e}_\omega \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e}_\omega$ como a componente do vetor \mathbf{r} que é ortogonal à velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. Então, percebemos que esse termo de rotação gera uma força fictícia repulsiva (força centrífuga), constante ao longo de cilindros coaxiais, cujo eixo de simetria é definido pelo vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$.

Como o vetor $\boldsymbol{\omega}$ define os eixos z' e z , $\mathbf{e}_\omega = \mathbf{e}_{z'} = \mathbf{e}_z$, segue-se que

$$-(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} + \omega^2 \mathbf{r} = \omega^2 r (\sin^2 \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (3.75)$$

onde (r, θ, ϕ) são as **coordenadas esféricas do ponto arbitrário, no referencial S** . Nenhum dos dois conjuntos de coordenadas (r, θ, ϕ) e (s, θ', ϕ') está representado na figura 3.2, por questão de simplicidade.

É fácil verificar que

$$-(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} + \omega^2 \mathbf{r} = -\nabla V_1, \quad (3.76)$$

onde

$$V_1 = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (3.77)$$

é o potencial devido à rotação do referencial S em torno de seu eixo z .

De maneira semelhante, é fácil mostrar, para o segundo termo do segundo membro de (3.72), que

$$(\ddot{R}_1 - R_1 \omega^2) \mathbf{e}_{R1} = -\nabla V_2, \quad (3.78)$$

onde

$$V_2 = (\ddot{R}_1 - R_1 \omega^2) \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{R1} \quad (3.79)$$

é o potencial devido à rotação da estrela, em torno do centro de massa do sistema.

Assim, finalmente, reescrevemos (3.61) como

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = \ddot{\mathbf{s}}_f - \nabla V_1 - \nabla V_2 - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_m - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}. \quad (3.80)$$

A equação (3.80), acima, fornece a aceleração de um ponto arbitrário no referencial não-inercial, S , fixo no CM da estrela 1 (representada por $\ddot{\mathbf{r}}_m$), em termos da aceleração do mesmo ponto, no referencial inercial, S' , fixo no CM do sistema (representada por $\ddot{\mathbf{s}}_f$), onde as leis de Newton se aplicam, de maneira usual.

3.2.3 A Componente Puntual

No nosso trabalho, a estrela perturbadora será denominada “estrela 2” e será tratada como uma massa puntual (ver discussão sobre isso na seção 3.3.5.2). A estrela de interesse, denominada 1, no entanto, terá uma distribuição espacial de massa ρ . Dessa forma, o ponto arbitrário de interesse, citado anteriormente, será localizado pelo vetor posição de um elemento de massa da estrela 1.

No referencial inercial, onde não existem as forças fictícias, a aceleração de um elemento de massa é devida ao campo gravitacional gerado pelas massas vizinhas e, também, devida às interações com as massas vizinhas, o que se poderia traduzir, macroscopicamente, como “pressão” e “viscosidade”.

3.2.3.1 Equação de Movimento do Fluido da Primária

A equação de movimento de um fluido com viscosidade constante, também conhecida como Equação de Navier-Stokes (Faber, 1995) é dada por

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\eta}{\rho} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (3.81)$$

onde \mathbf{v} é o campo de velocidade do fluido, ρ é a sua densidade, P é a pressão, η é a viscosidade e \mathbf{f}_{ext} é a força externa por unidade de massa.

Usando as nossas notações, essa equação fica reescrita como

$$\ddot{\mathbf{s}}_f = -\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\eta}{\rho} \nabla \times (\nabla \times \dot{\mathbf{s}}_f) + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2, \quad (3.82)$$

onde \mathbf{g}_1 e \mathbf{g}_2 são os campos gravitacionais devidos às estrelas 1 e 2, respectivamente. O campo gravitacional total, $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2$, é a força externa por unidade de massa \mathbf{f}_{ext} .

Usando a Eq. (3.50) e algumas identidades vetoriais conhecidas, chegamos no resultado $\nabla \times (\nabla \times \dot{\mathbf{s}}_f) = \nabla \times (\nabla \times \dot{\mathbf{r}}_m)$. Assim, reescrevemos (3.82) como

$$\ddot{\mathbf{s}}_f = -\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\eta}{\rho} \nabla \times (\nabla \times \dot{\mathbf{r}}_m) + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2. \quad (3.83)$$

Podemos definir os potenciais gravitacionais devido a cada uma das estrelas como Φ e Φ_2 , tais que $\mathbf{g}_1 = -\nabla\Phi$ e $\mathbf{g}_2 = -\nabla\Phi_2$. Então, substituindo a Eq. (3.83), com esses gradientes, na Eq. (3.80), temos

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = -\nabla(V_1 + V_2 + \Phi + \Phi_2) - \frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\eta}{\rho} \nabla \times (\nabla \times \dot{\mathbf{r}}_m) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_m - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \quad (3.84)$$

3.2.3.2 A Perturbação da Estrela Puntual

Centremos, agora, a nossa atenção no campo gravitacional gerado pela massa puntual M_2 (localizada pelo vetor \mathbf{R}_2) sobre o ponto arbitrário. O vetor \mathbf{r}_2 é o que localiza o ponto arbitrário em relação a M_2 (figura 3.2). No referencial S , o ponto arbitrário P está localizado por \mathbf{r} e a massa M_2 está localizada por \mathbf{R} , já definido acima, e temos

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{R}. \quad (3.85)$$

O potencial gravitacional gerado pela massa puntual, no ponto P , é simplesmente

$$\Phi_2 = -\frac{GM_2}{r_2}. \quad (3.86)$$

Façamos a expansão do potencial (Kopal, 1959; Jackson, 1999), em termos do módulo dos vetores \mathbf{R} e \mathbf{r} e do ângulo λ (figura 3.2) entre eles:

$$\Phi_2 = -\frac{GM_2}{r_2} = -\frac{GM_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} = -\frac{GM_2}{R} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^j P_j(\cos \lambda), \quad (3.87)$$

onde $\cos \lambda = \mathbf{e}_{\mathbf{R}_1} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{r}}$ e P_j é o j -ésimo polinômio de Legendre. Tal expressão é válida para $R > r$ (Jackson, 1999). Dessa forma, temos Φ_2 escrito em termos de quantidades conhecidas.

Há um cancelamento importante na soma dos potenciais Φ_2 e V_2 . Vamos considerar os dois primeiros termos de Φ_2 ,

$$\Phi_2 = -\frac{GM_2}{R} \left[1 + \frac{r}{R} \cos \lambda + \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^j P_j(\cos \lambda) \right]. \quad (3.88)$$

O primeiro termo, Φ_2^0 , não contribui para a força sobre o elemento de massa, pois ele é uma função apenas de t , através de $R(t)$, e não das coordenadas (r, θ, ϕ) . Assim, $\nabla \Phi_2^0 = \mathbf{0}$, e Φ_2^0 , portanto, pode ser descartado.

Somemos o segundo termo, Φ_2^1 , ao potencial V_2 (Eq. 3.79),

$$\Phi_2^1 + V_2 = \left(\frac{GM_2}{R^2} + \ddot{R}_1 - R_1 \omega^2 \right) \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{R}_1} \quad (3.89)$$

A aceleração do CM da estrela 1 é provocada pela atração gravitacional da estrela 2,

$$M_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 = -G \frac{M_1 M_2}{R^2} \mathbf{e}_{\mathbf{R}_1}. \quad (3.90)$$

Substituindo $\ddot{\mathbf{R}}_1 = (\ddot{R}_1 - R_1 \omega^2) \mathbf{e}_{\mathbf{R}_1}$ (Eq. 3.58) na expressão acima, temos

$$\ddot{R}_1 - R_1 \omega^2 = -\frac{GM_2}{R^2}, \quad (3.91)$$

de onde concluímos que

$$\Phi_2^1 + V_2 = 0. \quad (3.92)$$

Assim, o primeiro termo da expansão do potencial atrativo da massa puntual cancela o potencial (repulsivo) devido à rotação da estrela em torno do centro de massa do sistema.

Dessa forma, temos a igualdade

$$\nabla(V_1 + V_2 + \Phi + \Phi_2) = \nabla(V_1 + \Phi + \Phi'_2), \quad (3.93)$$

com $\Phi'_2 = \Phi_2 - (\Phi_2^0 + \Phi_2^1)$, a qual nos permite, finalmente, reescrever a equação (3.84) como

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = -\nabla(V_1 + \Phi + \Phi'_2) - \frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\eta}{\rho} \nabla \times (\nabla \times \dot{\mathbf{r}}_m) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_m - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}, \quad (3.94)$$

onde

$$\Phi'_2 = -\frac{GM_2}{R} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^j P_j(\cos \lambda) \quad (3.95)$$

e

$$V_1 = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.96)$$

A equação (3.94) é a equação de movimento geral de um elemento de massa, imerso no fluido da estrela 1 e no referencial dessa estrela, sujeito aos potenciais gravitacionais dessa mesma estrela 1 e de uma estrela 2 puntual. Nenhuma aproximação foi feita até aqui, além da de que a estrela companheira fosse puntual.

3.2.4 Um Caso Particular: Modelo de Roche

Se não houver fluido, a equação de Navier-Stokes (3.81) reduz-se a

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (3.97)$$

e a aceleração de uma partícula de prova é igual à força externa dividida pela massa dessa partícula. Não haverão mais forças devidas ao gradiente de pressão ou à viscosidade, e esse será o caso no espaço entre as binárias, externamente às superfícies de ambas as estrelas. Esse, também, será o caso na idealização de que as estrelas são massas puntuais.

O **Modelo de Roche** consiste num sistema binário de duas estrelas puntuais, descrevendo uma órbita circular, sendo que o referencial que descreve o sistema está fixo em uma das massas puntuais e gira em total sincronismo com a outra massa, em geral colocada no eixo x' positivo. Assim, o modelo de Roche é um caso especial de toda a teoria que desenvolvemos até aqui.

Obteremos o modelo de Roche, fazendo $\Phi = -GM_1/r$ (o potencial gerado por uma primária puntual) e eliminando os “termos de fluido” no ponto P (localizado por \mathbf{r}), fazendo $-\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\eta}{\rho} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$. A Eq. (3.94) fica

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = -\nabla(V_1 + V_2 + \Phi + \Phi_2) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_m - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}, \quad (3.98)$$

onde fizemos uso de (3.93).

Para as duas estrelas girarem numa órbita circular teremos que $\omega = \text{constante}$, implicando que $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$. Dessa forma, a Eq. (3.93) fica

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = -\nabla(V_1 + V_2 + \Phi + \Phi_2) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_m, \quad (3.99)$$

onde $V_1 = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$, $V_2 = R_1 \omega^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{x'} = R_1 \omega^2 x$ e, onde é fisicamente necessário, pela terceira lei de Kepler (Eq. 2.11), termos $\omega^2 = G(M_1 + M_2)R^{-3}$.

Para partículas de teste em repouso no referencial móvel, ($\dot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{0}$), a aceleração de Coriolis ($-2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_m$) é nula, e podemos escrever a força total por unidade de massa como o gradiente de um potencial, $\ddot{\mathbf{r}}_m = -\nabla \Phi_R$, onde Φ_R é o **potencial de Roche**. Temos

$$\begin{aligned} \Phi_R &= V_1 + V_2 + \Phi + \Phi_2 + \text{constante}, \\ &= -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + R_1 \omega^2 x - G\frac{M_1}{r} - G\frac{M_2}{r_2} + \text{constante}, \\ &= -\frac{1}{2}\omega^2((x - R_1)^2 + y^2) - G\frac{M_1}{r} - G\frac{M_2}{r_2}, \end{aligned} \quad (3.100)$$

onde, na última equação, completamos quadrados e fizemos a constante remanescente igual a zero.

Considerando a distância R , entre os centros de massa das duas estrelas (que é mais usual), e não mais a distância $R_1 = M_2 R / (M_1 + M_2)$, entre o CM da primária e o CM do sistema, temos finalmente o potencial de Roche, dado pela Eq. (2.14), já tratada na Seção 2.2.1.3:

$$\Phi_R = -\frac{1}{2}\omega^2 \left(\left(x - \frac{M_2 R}{M_1 + M_2} \right)^2 + y^2 \right) - G\frac{M_1}{r} - G\frac{M_2}{r_2} \quad (3.101)$$

onde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ e $r_2 = ((x - R)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$, e $\omega^2 = G(M_1 + M_2)R^{-3}$.⁶

3.2.5 Sobre o Movimento Geral do Fluido da Primária

A equação geral (3.94) pode ser resolvida para a pressão P :

$$\nabla P = -\rho \nabla (V_1 + \Phi + \Phi'_2) + [-\rho \ddot{\mathbf{r}}_m - 2\rho \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_m - \rho \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - \eta \nabla \times (\nabla \times \dot{\mathbf{r}}_m)] \quad (3.102)$$

Para as regiões radiativas da estrela, a escala de tempo do termo de viscosidade é da ordem de dezenas de giga-anos (KW90, Cap. 43). Então, para essas regiões radiativas, em escalas de tempo menores (menores que τ_{nuclear} , por exemplo), podemos considerar o movimento do fluido como completamente sem fricção, ou $\eta \approx 0$. Dessa forma, (3.102) fica reescrita como

$$\nabla P = -\rho \nabla (V_1 + \Phi + \Phi'_2) + \rho \mathbf{T}, \quad (3.103)$$

onde o termo \mathbf{T} é

$$\mathbf{T} = -\ddot{\mathbf{r}}_m - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_m - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}. \quad (3.104)$$

Esse termo depende da forma do escoamento do fluido da estrela (ou, mais rigorosamente, do campo de velocidade $\dot{\mathbf{r}}_m(\mathbf{r}, t)$ do fluido da estrela), o qual, por sua vez, obedece à equação de movimento (3.94), agora, sem o termo dissipativo.

O vetor posição, no referencial S , é $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$. A forma geral da velocidade do fluido, no ponto \mathbf{r} e no tempo t , é

$$\dot{\mathbf{r}}_m = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r + \boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r} \quad (3.105)$$

onde $\boldsymbol{\omega}_f(\mathbf{r}, t)$ é a **velocidade angular local do fluido, no referencial S** .

Derivando no tempo (em relação ao referencial móvel) e reutilizando a Eq. (3.105), temos

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_m &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}(\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{e}_r) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{f,m} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_f \times \dot{\mathbf{r}}_m \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + 2\dot{r}\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega}_f \times (\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{f,m} \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.106)$$

Na equação acima, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{f,m}$ é a derivada temporal da velocidade angular do fluido em relação ao referencial móvel. Novamente, para sabermos a derivada temporal dessa velocidade angular, em relação ao referencial fixo, devemos fazer uso da Eq. (3.50). Assim,

⁶É digno de nota que a equação de movimento de uma massa de prova, nesse sistema é, como mostra a Eq. (3.99), $\ddot{\mathbf{r}}_m = -\nabla \Phi_R - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_m$. Assim, no momento que a massa de prova adquirir velocidade (no referencial em rotação), sobre ela também atuará a força de Coriolis, a qual não tem um potencial por ser dependente da velocidade da massa de prova.

temos $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{fl},f} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{fl},m} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_{\text{fl}}$, que, substituindo na equação acima, nos dá a forma geral da aceleração do fluido, no ponto \mathbf{r} :

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = \ddot{r}\mathbf{e}_r + 2\dot{r}\boldsymbol{\omega}_{\text{fl}} \times \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega}_{\text{fl}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{fl}} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{fl},f} \times \mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_{\text{fl}}) \times \mathbf{r} \quad (3.107)$$

Substituindo $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ e suas derivadas (Eqs. 3.105 e 3.107) no termo \mathbf{T} , obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & -\ddot{r}\mathbf{e}_r - 2\dot{r}(\boldsymbol{\omega}_{\text{fl}} \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega}_{\text{fl}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{fl}} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{fl},f} \times \mathbf{r} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_{\text{fl}}) \times \mathbf{r} \\ & - 2\dot{r}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_r - 2\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{fl}} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.108)$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & -\ddot{r}\mathbf{e}_r - 2\dot{r}(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{\text{fl}}) \times \mathbf{e}_r - [(2\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{\text{fl}}) \cdot \mathbf{r}]\boldsymbol{\omega}_{\text{fl}} + [(2\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{\text{fl}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{fl}}]\mathbf{r} \\ & - (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{fl}}) \times \mathbf{r} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_{\text{fl}}) \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Será mais interessante para nós, lidar com a *velocidade angular do fluido, no referencial S'* , e não com a mesma no referencial S .

A soma da velocidade angular do fluido, no referencial S , com a velocidade angular intrínseca do referencial S é a **velocidade angular local do fluido, no referencial S'** . Seguindo a notação usual da literatura, denotaremos essa velocidade por $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{\omega}_{\text{fl}}(\mathbf{r}, t)$ ⁷, que, substituindo no termo \mathbf{T} , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & -\ddot{r}\mathbf{e}_r - 2\dot{r}\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_r - [(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{r}](\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) + [(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})]\mathbf{r} \\ & - \dot{\boldsymbol{\Omega}}_f \times \mathbf{r} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{r} \\ = & -\ddot{r}\mathbf{e}_r - 2\dot{r}\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_r + \Omega^2(\mathbf{r} - (\mathbf{e}_{\Omega} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_{\Omega}) - \omega^2(\mathbf{r} - (\mathbf{e}_{\omega} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_{\omega}) - \dot{\boldsymbol{\Omega}}_f \times \mathbf{r} \\ & + [(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\Omega} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{r}] \end{aligned} \quad (3.110)$$

que, com o cancelamento do termo entre colchetes, nos dá, finalmente, a forma geral (e exata) do termo \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = -\ddot{r}\mathbf{e}_r - 2\dot{r}\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_r - \dot{\boldsymbol{\Omega}}_f \times \mathbf{r} + \Omega^2(\mathbf{r} - (\mathbf{e}_{\Omega} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_{\Omega}) - \omega^2(\mathbf{r} - (\mathbf{e}_{\omega} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_{\omega}) \quad (3.111)$$

Recordemos que nenhuma aproximação foi feita nesta subseção, a não ser a de que a viscosidade é desprezível nas escalas de tempo menores que as escalas evolutivas da estrela ($\eta \approx 0$).

3.2.6 Aproximação: Escoamento Circular

Suponhamos que o movimento do fluido da estrela primária tem simetria axial, e que o eixo de simetria passa pelo CM dessa estrela (que, por sua vez, é a origem O). Em outras palavras, suponhamos que todas as linhas de corrente do fluido são círculos, cujos centros estão num eixo de simetria. As velocidades angulares de todos os elementos do fluido estarão, necessariamente, orientadas na direção do eixo de simetria: $\boldsymbol{\omega}_{\text{fl}} = [\omega_{\text{fl}}(\mathbf{r}, t)]\mathbf{e}_{\omega_{\text{fl}}}$. E, pelo fato de termos linhas de corrente circulares com simetria axial, também temos que $\dot{r}(\mathbf{r}, t) = 0$, para todo \mathbf{r} e para todo t (os vetores \mathbf{r} de cada elemento de fluido descreverão cones em torno do eixo de simetria). Essa suposição está ilustrada na figura 3.3.

⁷É fácil verificar que essa equação é verdadeira. A velocidade do fluido no referencial S (móvel) é $\dot{\mathbf{r}}_m = \dot{r}\mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega}_{\text{fl}} \times \mathbf{r}$ e a velocidade do fluido no referencial S' (fixo) é $\dot{\mathbf{r}}_f = \dot{r}\mathbf{e}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$. Além disso, da Eq. (3.50), temos $\dot{\mathbf{r}}_f = \dot{\mathbf{r}}_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\dot{r}\mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega}_{\text{fl}} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \dot{r}\mathbf{e}_r + (\boldsymbol{\omega}_{\text{fl}} + \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} = \dot{r}\mathbf{e}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$. Assim, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_{\text{fl}} + \boldsymbol{\omega}$.

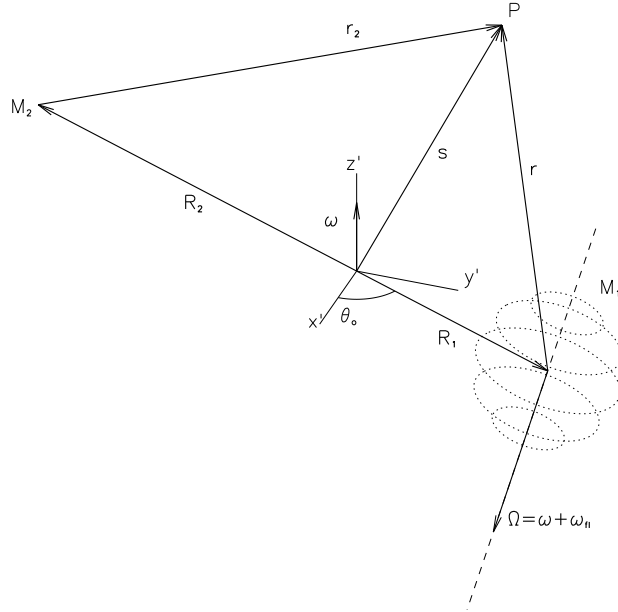


Figura 3.3: Mesma situação da figura 3.2, mas, agora, enfatizando a presença do fluido estelar da primária, com simetria axial e com eixo de simetria inclinado em relação ao eixo orbital, definido por ω . A inclinação de Ω em relação a ω é definida pelos ângulos $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$, descritos no texto.

Vamos supor, ainda, que a rotação do fluido da estrela seja completamente independente do seu movimento orbital. Isso é bastante razoável, já que nas escalas de tempo consideravelmente menores que o tempo de vida da estrela, a viscosidade do fluido, responsável pelo acoplamento rotação-órbita, é desprezível. Dessa forma, nessas curtas escalas de tempo, o momento angular orbital e o momento angular intrínseco da estrela se conservam independentemente, e Ω é, portanto, independente do tempo: $\dot{\Omega}_f = \mathbf{0} \Leftrightarrow \Omega(\mathbf{r}, t) = \Omega(\mathbf{r})$.

Geometricamente, a equação “ $\dot{\Omega}_f = \mathbf{0}$ ” está dizendo que o fluido da estrela, no referencial inercial (S'), gira em torno de um eixo de simetria, o qual translada, em um movimento orbital em torno do centro de massa do sistema binário, mas mantém a sua orientação sempre constante, no espaço.⁸ Definamos, então, os ângulos constantes $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$, tais que

$$\Omega_f(\mathbf{r}) = \Omega(\mathbf{r}) (\sin \bar{\beta} \cos \bar{\alpha} \mathbf{e}_{x'} + \sin \bar{\beta} \sin \bar{\alpha} \mathbf{e}_{y'} + \cos \bar{\beta} \mathbf{e}_{z'}) \quad (3.112)$$

Mediante a transformação de referenciais dada pelas equações (3.68), (3.69) e (3.70), nós concluímos que o vetor Ω , visto pelo referencial S (ou seja, o vetor Ω_m) é dado por

$$\Omega_m = \Omega (\sin \beta \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \beta \sin \alpha \mathbf{e}_y + \cos \beta \mathbf{e}_z) \quad (3.113)$$

⁸O movimento de rotação da Terra em torno do Sol (ou, precisamente, em torno do CM do Sistema Solar) também é assim, aproximadamente. Desprezando as perturbações devidas à atração dos outros corpos do Sistema Solar e os efeitos de maré que fazem com que o eixo da Terra precesse, nós temos que esse último realiza uma translação, junto com a Terra, em torno do Sol, mantendo a sua orientação constante no espaço. O ciclo das estações do ano, na Terra, é consequência desse fenômeno.

onde

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \bar{\alpha} + \pi - \theta_o(t) \\ \beta(t) &= \bar{\beta} = \text{constante}\end{aligned}\quad (3.114)$$

Assim, como mostra a figura 3.4, no referencial S , o vetor $\boldsymbol{\Omega}$ precessa em torno do eixo z , no sentido oposto ao movimento orbital. Nessa figura, também temos o ângulo $\Theta(t)$ entre os vetores $\boldsymbol{\Omega}_m$ e \mathbf{r} . Ele é tal que $\cos \Theta = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\Omega = \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta \cos(\phi - \alpha)$.

A vantagem dessa suposição de escoamento circular, é que os termos com derivada temporal no termo \mathbf{T} geral são nulos. Então,

$$\mathbf{T} = \Omega^2(\mathbf{r} - (\mathbf{e}_\Omega \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_\Omega) - \omega^2(\mathbf{r} - (\mathbf{e}_\omega \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_\omega) \quad (3.115)$$

Esse escoamento circular, no entanto, certamente não é o escoamento real da estrela. Não pode existir simetria axial no escoamento, quando há uma perturbação exercendo uma força de maré no fluido da estrela. Portanto, o \mathbf{T} , calculado sob suposição de escoamento circular, não satisfaz a equação de movimento (3.94) para os potenciais do nosso problema.

Se, no entanto, a perturbação não existisse, esse escoamento seria bastante razoável, e corresponderia à rotação da estrela em torno de seu eixo. Portanto, esse escoamento seria completamente verdadeiro para estrelas solitárias (não-binárias), se essas últimas fossem livres de instabilidades que acabam gerando velocidades meridionais e radiais, que destroem o padrão circular (Mendes, 1999).

Como uma primeira aproximação, vamos substituir \mathbf{T} , dado pela Eq. (3.115), na Eq. (3.103),

$$\nabla P = -\rho \nabla(V_1 + \Phi + \Phi'_2) + \rho (\Omega^2(\mathbf{r} - (\mathbf{e}_\Omega \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_\Omega) - \omega^2(\mathbf{r} - (\mathbf{e}_\omega \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_\omega)). \quad (3.116)$$

Da Eq. (3.76) vemos que $-\nabla V_1 = \omega^2(\mathbf{r} - (\mathbf{e}_\omega \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_\omega)$, e, simplificando, o gradiente de pressão se torna

$$\nabla P = -\rho \nabla(\Phi + \Phi'_2) + \rho \Omega^2 \mathbf{u}. \quad (3.117)$$

onde usamos $\mathbf{u} = \mathbf{r} - (\mathbf{e}_\Omega \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_\Omega$, para simplificar.

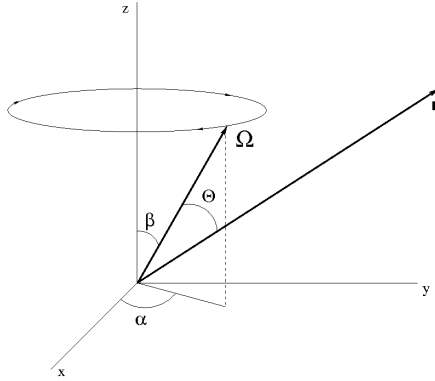


Figura 3.4: Vetores \mathbf{r} e $\boldsymbol{\Omega}$, no referencial da estrela primária, S .

A condição para que a função $\Omega^2(\mathbf{r})\mathbf{u}$, obtida acima, seja igual ao gradiente de alguma função “ Ψ_r ”, é que $\nabla \times \Omega^2(\mathbf{r})\mathbf{u} = \mathbf{0}$. É fácil verificar que esse será o caso, apenas quando $\Omega(\mathbf{r}) = \Omega(u)$, ou seja, *se o fluido se mover com velocidade angular constante ao longo de cilindros coaxiais*. Se este for o caso, teremos

$$\nabla P = -\rho \nabla \Psi, \quad \text{ou} \quad (3.118)$$

$$dP = -\rho d\Psi, \quad \text{onde} \quad (3.119)$$

$$\Psi = \Psi_r + \Psi_t + \Phi \quad , \quad (3.120)$$

e onde potenciais Ψ_r (índice r , de “rotação”) e Ψ_t (índice t , de maré, “*tidal*”) serão dados por

$$\Psi_r = - \int \Omega^2(u) u du \quad \text{e} \quad (3.121)$$

$$\Psi_t = \Phi'_2 = -GM_2 \frac{1}{R} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^j P_j(\cos \lambda) \quad . \quad (3.122)$$

O potencial Φ depende da distribuição de massa ρ da estrela 1. Deixaremos a sua dedução para a próxima seção.

No caso particular de escoamento de corpo rígido, o potencial de rotação será simplesmente

$$\Psi_r = -\frac{1}{2}\Omega^2 u^2 = -\frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2 \Theta. \quad (3.123)$$

A aproximação de escoamento circular foi implementada no código de evolução estelar ATON, em trabalhos anteriores (Mendes et al., 1999).

3.2.6.1 Aproximação: Rotação “Shellular” Conservativa

A equação (3.121) ainda não está numa forma adequada para o código de evolução estelar ATON, pois, como visto na descrição do método de KT70, o código trata o problema da estrutura estelar através de *shells* (casca) equipotenciais, e a Eq. (3.121) descreve o potencial de rotação de um fluido que se move em cilindros.

A aproximação de escoamento circular, implementada no código de evolução estelar ATON nos trabalhos anteriores (Mendes et al., 1999; Landin et al., 2009), foi feita, ainda, sob a aproximação adicional de que a rotação diferencial ocorre com velocidade angular constante nas cascas equipotenciais, e, para cada uma, o potencial de rotação é dado pela expressão de corpo rígido (3.123), sendo que a velocidade angular Ω varia para cada casca.

A rotação em cascas, ou “rotação shellular” não é conservativa. No entanto, Endal & Sofia (1978) e Mendes et al. (1999) apontaram que, mesmo para essa lei de rotação, a baroclínia⁹ será pequena, desde que as velocidades angulares não se tornem muito grandes. Assim, essas últimas podem ser aproximadas como constantes ao longo das superfícies equipotenciais.

⁹Baroclínia é desvio entre as superfícies isobáricas e as superfícies equipotenciais, gerando violação da condição de equilíbrio hidrostático, dada pela relação $dP = -\rho d\Psi$ (Lubow, 1979).

3.2.7 Conclusão Parcial

Deduzimos o potencial perturbador sobre a distribuição de massa de uma das componentes de um sistema binário, denominada estrela 1. Ele é dado por

$$V = -\frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2 \Theta - GM_2 \frac{1}{R} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^j P_j(\cos \lambda), \quad (3.124)$$

oriundo do movimento orbital do centro de massa dessa estrela e do escoamento aproximadamente circular de sua massa, ao longo de suas superfícies equipotenciais.

Na Eq. (3.124), Ω é a velocidade angular de rotação do fluido da estrela. Ω é constante ao longo das equipotenciais da estrela, mas pode variar, de uma equipotencial para outra (rotação diferencial), ou seja, $\Omega = \Omega(\Psi)$. A separação entre os centros de massa das componentes é R . Como a órbita não precisa ser, necessariamente circular, nós temos que essa separação é função do tempo: $R = R(t)$. O ângulo $\theta_o(t)$ se relaciona com $R(t)$ pela relação de conservação do momento angular (segunda Lei de Kepler), $l_1/M_1 = R_1^2(t)\omega(t) = cte$, onde $\omega(t) = \dot{\theta}_o(t)$ e $R(t) = \frac{M_1+M_2}{M_2} R_1(t)$. Dessas relações, podemos ver que quando R diminui, por exemplo, θ_o aumenta mais rapidamente. De fato, $R(t)$ e $\theta_o(t)$ devem satisfazer as equações (3.130) e (3.131), associadas a uma órbita elíptica, de excentricidade e , como veremos na subseção 3.2.7.2, mais à frente.

Os ângulos λ e Θ , na Eq. (3.124), são dados, respectivamente, por

$$\cos \lambda = \sin \theta \cos \phi, \text{ e} \quad (3.125)$$

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta \cos(\phi - \alpha) \quad (3.126)$$

onde, nesta última, $\alpha = \bar{\alpha} + \pi - \theta_o(t)$. Os ângulos $\bar{\alpha}$ e β são constantes que definem a orientação de $\mathbf{\Omega}$ em relação ao plano orbital (definido por $\boldsymbol{\omega}$).

Esses resultados são a generalização dos potenciais perturbadores usados nos trabalhos de Mendes et al. (1999) e Landin et al. (2009)

3.2.7.1 A Perturbação Usada nos Trabalhos Anteriores

Em 1999, Mendes et al. (1999) introduziram a perturbação de rotação no código de evolução estelar ATON. Por estarem simulando uma estrela solitária, o potencial perturbador desses autores não tinha qualquer influência de uma componente perturbadora e potenciais oriundos de uma passagem para um referencial não-inercial. A perturbação de rotação foi introduzida com as mesmas aproximações que citamos na seção 3.2.6. Assim, esses autores introduziram apenas o primeiro termo do lado direito da Eq. (3.124), com $\Theta = \theta$ ($\beta = 0$).

Landin et al. (2009), buscando estudar a evolução de sistemas binários, ampliaram o trabalho precedente, introduzindo a perturbação de uma componente puntual e um movimento orbital, preservando o esquema de rotação adotado. Assim, introduziu-se o segundo termo da equação do lado direito da Eq. (3.124). Esses autores, no entanto, consideraram que a órbita do sistema era circular e que os eixos de rotação e orbital das estrelas eram paralelos. Assim, na equação acima, utilizaram $R = \text{constante}$ e $\Theta = \theta$ ($\beta = 0$).

3.2.7.2 Apontamentos Referentes ao Movimento Orbital

Uma das motivações do trabalho desenvolvido nessa seção 3.2 era a de verificar se faltava algo no potencial perturbador utilizado no trabalho de Landin et al. (2009), recentemente publicado por nosso grupo da UFMG, referente ao movimento orbital das estrelas. E, caso houvesse algum termo não incluído, que sua forma fosse descoberta, para que esse termo fosse futuramente incluído. Após o estudo feito nessa seção, nós podemos afirmar que não falta qualquer parcela (referente ao movimento orbital do sistema binário) no potencial incluído no citado trabalho.

Podemos verificar que a dedução feita nesta seção prevê o potencial perturbador de Landin et al. (2009) como caso particular. Isso é verificado, fazendo $R=\text{constante}$ e $\beta=0$ na Eq. (3.124) - ou seja, respectivamente, fazendo “órbita circular” e “eixos paralelos”. Nós obtemos

$$V = -\frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta - GM_2 \frac{1}{R} \sum_{j=2}^4 \left(\frac{r}{R}\right)^j P_j(\sin \theta \cos \phi), \quad (3.127)$$

onde trocamos a soma infinita por uma soma até 4 (isso será justificado na subseção 3.3.5.2). Essa equação é idêntica à soma do segundo com o terceiro termos da equação “52” de Landin et al. (2009), a menos do termo $\frac{GM_2}{R}$, que é uma constante no potencial e, portanto, não tem qualquer efeito nas forças que atuam sobre a estrela. Esses segundo e terceiro termos da equação “52” são os termos do potencial total Ψ associados somente às perturbações de rotação e de maré (devido à secundária puntual). Os outros termos da equação “52” são a contribuição do potencial gravitacional da estrela 1, que deixaremos para deduzir na seção 3.3.

Além disso, mostramos, na subseção 3.2.4, que a nossa dedução também prevê o potencial de Roche como caso particular (e sabemos que não falta qualquer termo orbital no potencial de Roche).

Se faltasse um potencial devido à translação, esse potencial deveria ser um potencial centrífugo, simétrico em relação ao eixo orbital do sistema (que corta o plano orbital, passando pelo CM do sistema), pois, do ponto de vista da estrela 1, o movimento orbital gera um pseudo-potencial que tenta expulsá-la, radialmente, das proximidades do centro de massa do sistema. De fato, esse termo existe em nossas deduções. Mas ele é cancelado pelo termo linear da expansão do potencial perturbador da secundária (Eq. 3.92), que é um termo centrípeto. Assim, o movimento orbital, do ponto de vista da estrela 1, tem o efeito de cancelar a força gravitacional produzida pela estrela 2, no seu centro de massa, e o de atenuar essa força nas demais partes da estrela 1 (fazendo ela ficar um pouco centrípeta na região da estrela 1 mais próxima da estrela 2, e um pouco centrífuga na região da estrela 1 mais distante da estrela 2).

Existem duas velocidades angulares na geometria de nosso problema: a velocidade angular de rotação da estrela 1, em torno de seu próprio eixo, Ω , e a velocidade angular orbital do sistema binário, ω , que é a derivada temporal do ângulo orbital $\theta_o(t)$. Apesar disso, é, aparentemente, curioso que somente a primeira dessas velocidades aparece na Eq. (3.124), e se poderia perguntar onde está ω .

Na verdade, não há qualquer problema aqui. Sabemos da mecânica clássica que a resolução do problema

$$\ddot{R}_1 - R_1 \omega^2 = -\frac{GM_2}{R^2}, \quad (3.128)$$

dado pela Eq. (3.91), nos fornece a terceira lei de Kepler, dada por

$$\omega_K = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}} \quad (3.129)$$

onde ω_K é a velocidade angular orbital média do sistema (simples variação da Eq. (2.11)).

No trabalho de Landin et al. (2009), como a órbita é circular, nós temos que $\omega = \omega_K$, que já está automaticamente definida ao definirmos as massas das estrelas, M_1 e M_2 , e a separação de seus centros de massa, R (ou “ a ”, no caso da Eq. (3.129)).

No caso mais geral, em que a órbita não precisa ser circular (mas a energia mecânica orbital total do sistema é negativa, pois não nos importam sistemas de estrelas que não são gravitacionalmente ligadas), a resolução do problema (3.128) nos diz que a órbita das estrelas é elíptica, com excentricidade e , e com velocidade angular orbital dada por

$$\omega(t) = \frac{\omega_K}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} (1 + e \cos \theta_o(t))^2, \quad (3.130)$$

e a distância entre os centros de massa das estrelas é dada por

$$R(t) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta_o(t)} \quad (3.131)$$

Assim, no caso mais geral deduzido nesta seção, para sabermos ω , devemos fornecer os parâmetros M_1 , M_2 , a (o semieixo maior da elipse), e (a excentricidade) e o tempo t . Os cálculos desenvolvidos nesta seção não colocam qualquer vínculo à excentricidade. Ela é um parâmetro livre que podemos escolher.

3.3 O Potencial (Parte II)

Nosso sistema de interesse é um par de estrelas fisicamente ligadas, e o nosso objetivo é encontrar o potencial desse sistema. No referencial da estrela de interesse, o potencial é dado, de forma geral, por

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = -G \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}', t) dV' + V(\mathbf{r}, t) \quad (3.132)$$

onde as perturbações e o potencial devido à estrela companheira foram levados em conta no termo $V(\mathbf{r}, t)$.

Nesta seção, descreveremos o método de encontrar o potencial gerado pela distribuição de massa da estrela: $\Phi(\mathbf{r}, t)$, que corresponde ao primeiro termo do lado direito da Eq. (3.132). De acordo com Kopal (1978), o método foi idealizado por Alexis Claude Clairaut (1713-1765), mas a sua versão geral se deve a Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Apesar disso, essa técnica recebeu o nome de **Teoria de Laplace**, já que Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), no quinto volume de seu *Mécanique Céleste*, apresenta uma revisão abrangente do tema.

Uma boa descrição da Teoria de Laplace pode ser encontrada em Tisserand (1891) ou, em inglês, e de forma mais completa, em Kopal (1959). Esses dois livros, em conjunto, serviram como fontes das principais bases da teoria que será desenvolvida nesta seção.

O livro de Kopal, no entanto, apesar de sua completeza, é um livro denso e faz uso de notações ligeiramente diferentes, por exemplo, das do livro de Jackson (1999) na parte de tratar da teoria citada. Por isso, esperamos que, além de ser o complemento do estudo que fizemos nas seções anteriores desse capítulo, essa seção também possa ser um bom guia na compreensão da Teoria de Laplace.

3.3.1 Potencial em Coordenadas Esféricas

O potencial gerado pela distribuição de massa da estrela é dado pela equação

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -G \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}', t) dV'. \quad (3.133)$$

Um importante teorema (Jackson, 1999) estabelece a seguinte expansão

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j}{r'^{j+1}} P_j(\cos \gamma), & \text{se } r < r', \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r'^j}{r^{j+1}} P_j(\cos \gamma), & \text{se } r > r', \end{cases} \quad (3.134)$$

onde P_j é o j -ésimo polinômio de Legendre (apêndice A) e $\cos \gamma$ é o cosseno do ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{r}' ,

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \quad (3.135)$$

onde (θ, ϕ) e (θ', ϕ') são, respectivamente, os ângulos de coordenadas esféricas associados aos vetores \mathbf{r} e \mathbf{r}' .

Na seção 3.2, os ângulos θ' e ϕ' eram os ângulos associados às coordenadas esféricas no referencial inercial S' . Como, no entanto, nos transportamos completamente do referencial S' para o referencial S , da estrela 1, não faremos mais uso das variáveis antes definidas para o referencial S' . Assim, não há como confundir entre as variáveis auxiliares θ' e ϕ' desta seção 3.3, e as variáveis do referencial S' da seção 3.2.

Na notação simplificada de (Jackson, 1999), as expansões se tornam

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{<}^j}{r_{>}^{j+1}} P_j(\cos \gamma) \quad (3.136)$$

onde $r_{<}$ e $r_{>}$ são, respectivamente, o menor e o maior valor do par $\{r, r'\}$.

Do *Teorema de Adição dos Harmônicos* (apêndice A), temos que

$$P_j(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2j+1} \sum_{m=-j}^j Y_{jm}(\theta', \phi') Y_{jm}(\theta, \phi). \quad (3.137)$$

Combinando as Eqs. (3.136) e (3.137), chegamos à expansão

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{1}{2j+1} \frac{r_{<}^j}{r_{>}^{j+1}} Y_{jm}(\theta', \phi') Y_{jm}(\theta, \phi). \quad (3.138)$$

Substituindo a Eq. (3.138) em (3.133), encontramos a forma geral do potencial Φ , no sistema de coordenadas esféricas: uma expansão em harmônicos tesserais,

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j A_{jm}(r, t) Y_{jm}(\theta, \phi), \quad (3.139)$$

onde os coeficientes dos harmônicos são dados por

$$A_{jm}(r, t) = -\frac{4\pi G}{2j+1} (r^j E_{jm}(r, t) + r^{-(j+1)} F_{jm}(r, t)), \quad (3.140)$$

com as funções $E_{jm}(r, t)$ e $F_{jm}(r, t)$ definidas, respectivamente, por

$$E_{jm}(r, t) = \int_{r'>r} (r')^{-(j+1)} Y_{jm}(\theta', \phi') \rho(\mathbf{r}', t) dV' \quad \text{e} \quad (3.141)$$

$$F_{jm}(r, t) = \int_{r'<r} (r')^j Y_{jm}(\theta', \phi') \rho(\mathbf{r}', t) dV'. \quad (3.142)$$

As funções $E_{jm}(r, t)$ e $F_{jm}(r, t)$ são integrais para fora e para dentro de uma esfera de raio r , respectivamente. Elas definem, respectivamente, as contribuições das massas externa e interna à esfera de raio r , ao potencial gravitacional no ponto \mathbf{r} .

3.3.1.1 $F_{1m}(\mathbf{r}, t)$ são nulas

Vamos, aqui, mostrar que as funções $F_{1m}(r, t)$ são sempre iguais a zero.

Da Eq. (3.142), temos que

$$F_{1m}(r, t) = \int_{r'<r} r' Y_{1m}(\theta', \phi') \rho(\mathbf{r}', t) dV' \quad (3.143)$$

Mas, de (A.16), temos que $r' Y_{11} = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} x'$, $r' Y_{1-1} = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} y'$ e $r' Y_{10} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} z'$, ou seja, $r' Y_{1m}$, $m=1, -1, 0$, são proporcionais, respectivamente a x' , y' e z' . Então, substituindo na Eq. (3.143), temos que $F_{11}(r, t) = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{r'<r} x' \rho dV'$, $F_{10}(r, t) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{r'<r} z' \rho dV'$ e $F_{1-1}(r, t) = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{r'<r} y' \rho dV'$, e, portanto, F_{11} , F_{1-1} e F_{10} são proporcionais, respectivamente, às posições “ x_{CM} ”, “ y_{CM} ” e “ z_{CM} ” do centro de massa da estrela.

Mas, como a origem de nosso sistema de coordenadas é o centro de massa da estrela, segue-se que essas quantidades são nulas:

$$F_{1m}(r, t) = 0, \quad m = -1, 0, 1 \quad (3.144)$$

3.3.1.2 O Potencial Perturbador

O potencial perturbador geral, dado pela Eq. (3.124) também é uma expansão em termos de harmônicos tesserais. Podemos ver isso, utilizando, novamente, o teorema de adição dos harmônicos sobre os polinômios de Legendre da referida equação: $P_j(\cos \lambda)$ e $\sin^2 \Theta = \frac{2}{3}(1 - P_2(\cos \Theta))$. Temos

$$P_j(\cos \lambda) = \frac{4\pi}{2j+1} \sum_{m=-j}^j Y_{jm}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) Y_{jm}(\theta, \phi) \quad (3.145)$$

e

$$P_2(\cos \Theta) = \frac{4\pi}{5} \sum_{m=-2}^2 Y_{2m}(\beta, \alpha) Y_{2m}(\theta, \phi) \quad (3.146)$$

Assim, o potencial perturbador geral (Eq. 3.124) pode ser reescrito como

$$V(\mathbf{r}, t) = - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j c_{jm} r^j Y_{jm}(\theta, \phi) \quad (3.147)$$

onde

$$\begin{aligned} c_{00} &= \frac{\sqrt{4\pi}}{3} \Omega^2(\Psi) r^2 \\ c_{1m} &= 0, \quad m = -1, 0, 1 \\ c_{2m} &= GM_2 R^{-3} \frac{4\pi}{5} Y_{2m}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \frac{4\pi}{15} \Omega^2(\Psi) Y_{2m}(\beta, \alpha) \\ c_{jm} &= GM_2 R^{-(j+1)} \frac{4\pi}{2j+1} Y_{jm}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad j > 2 \end{aligned}$$

Até aqui, estamos considerando a possibilidade de rotação diferencial: $\Omega = \Omega(\Psi)$, nos coeficientes c_{00} e c_{2m} , acima. Veremos, no entanto, na seção 3.3.4, que a teoria de Laplace, ao menos na sua forma clássica, descrita em Tisserand (1891); Kopal (1959), não foi desenvolvida para levar em conta esse efeito¹⁰.

3.3.1.3 Fórmula de MacCullagh

A conhecida “fórmula de MacCullagh”, muito útil na teoria do movimento de satélites (Goldstein et al., 2001), terá utilidade na seção 3.3.5.2, na discussão deste trabalho.

Suponhamos uma distribuição de massa definida por $\rho(\mathbf{r}, t)$.

Desejamos encontrar o potencial num ponto \mathbf{r} distante dessa distribuição. Assim, em \mathbf{r} , teremos que $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$, e, conseqüentemente, $E_{jm}(r, t) = 0$ (pois ρ sempre será nula na integral da Eq. (3.141)).

Assim, o potencial em \mathbf{r} será

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -G \sum_{j=0}^{\infty} r^{-(j+1)} \int r'^j P_j(\cos \gamma) \rho(\mathbf{r}', t) dV' . \quad (3.148)$$

O termo com $j=1$,

$$\Phi_1(\mathbf{r}, t) = -Gr^{-2} \int r' \cos \gamma \rho(\mathbf{r}', t) dV' , \quad (3.149)$$

anula-se pelo fato de a origem estar no centro de massa da distribuição de massa (ver subseção 3.3.1.1).

¹⁰Historicamente, a teoria de Laplace foi desenvolvida para explicar a forma da figura dos planetas do Sistema Solar, considerados corpos rígidos.

Assim, a Eq. (3.148) fica reescrita da seguinte forma

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -G\frac{M}{r} - G\frac{1}{r^3} \int r'^2 P_2(\cos \gamma) \rho(\mathbf{r}', t) dV' + \sum_{j=3}^{\infty} \Phi_j \quad (3.150)$$

onde, mediante certa álgebra sobre o segundo termo, temos

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -G\frac{M}{r} + G\frac{1}{2r^3} \int (3I_{r'} - (I_{11} + I_{22} + I_{33})) dV' + \sum_{j=3}^{\infty} \Phi_j \quad (3.151)$$

No segundo termo da direita da equação acima, $I_{11}=\rho(x_2'^2 + x_3'^2)$, $I_{22}=\rho(x_3'^2 + x_1'^2)$ e $I_{33}=\rho(x_1'^2 + x_2'^2)$, são as “componentes principais” do tensor de inércia da distribuição de massa, e $I_{r'}=\rho r'^2 \sin^2 \gamma$ é o “tensor de inércia em relação a \mathbf{r} ”.

Esse segundo termo é conhecido como a “fórmula de MacCullagh”, e ele representa a primeira correção que deveria ser feita ao potencial perturbador da estrela secundária, para levar em conta o seu desvio da forma esférica. No caso em que a secundária tem uma distribuição de massa esfericamente simétrica, nós temos que a fórmula de MacCullagh é nula (pois $I_{r'}=I_{11}=I_{22}=I_{33}$). A rotação e a presença perturbadora da primária, porém, fazem com que, em geral, a secundária, assim como a primária, também não seja esfericamente simétrica.

3.3.2 Transformação de Coordenadas

Vamos designar por S_Ψ a superfície equipotencial fechada do sistema binário em análise (ver subseção 3.1.1). O potencial, é, na sua forma mais geral, função da posição e do tempo. Em coordenadas esféricas,

$$\Psi = \Psi(r, \theta, \phi, t). \quad (3.152)$$

Vamos considerar, aqui, que seja possível isolar o r , da equação (3.152). De certa forma, isso corresponde a supor que a superfície S_Ψ não é complicada, a ponto de ter mais de um r possível para um mesmo par de θ e ϕ , e que ela é interior a um dos lobos de Roche do sistema¹¹. Assim, a superfície S_Ψ deve apenas apresentar algumas distorções em relação à forma esférica. Dessa forma, teremos r , a distância de todos os pontos da superfície S_Ψ à origem, em função de Ψ , θ , ϕ e t ,

$$r = r(\Psi, \theta, \phi, t). \quad (3.153)$$

Definamos, agora, o parâmetro r_o , que é uma função crescente do potencial Ψ , e que também pode ser uma função do tempo $r_o(\Psi, t)$, com $\partial r_o/\partial \Psi > 0$. Uma boa escolha para esse parâmetro é a de que ele seja o **raio médio** da superfície equipotencial S_Ψ ¹²,

$$r_o(\Psi, t) = \frac{1}{A_{S_\Psi}} \oint_{S_\Psi} r(\Psi, \theta, \phi, t) d\Omega, \quad (3.154)$$

pois, enquanto estivermos dentro do lobo de Roche, o raio médio aumentará com o aumento do potencial, satisfazendo a condição de que $\partial r_o/\partial \Psi > 0$.

¹¹Não é muito exato falar em “lobos de Roche”, nesse caso onde uma das componente não é puntual.

¹²O raio médio r_o não deve ser confundido com o “raio da esfera topologicamente equivalente” a S_Ψ , representado por r_Ψ e definido por $V_\Psi = (4/3)\pi r_\Psi^3$.

Isolando o potencial Ψ da Eq. (3.154), teremos

$$\Psi = \Psi(r_o, t) \quad (3.155)$$

E, substituindo na Eq. (3.153), obtemos

$$r = r(r_o, \theta, \phi, t), \quad (3.156)$$

que diz que a distância entre a origem e um ponto de S_Ψ , depende do valor de Ψ , ou, de forma equivalente, do raio médio de S_Ψ , e também, dos ângulos θ e ϕ e, eventualmente, do tempo (já que o potencial pode ser variável no tempo).

Na subseção 3.1.2, utilizamos o método de KT70 para rededuzir as equações de estrutura estelar, para modelos em equilíbrio hidrostático, sujeitos a algum potencial perturbador, o qual remove a simetria esférica das equações constitutivas padrões (subseção 2.1.4). Nisso, incluímos dois fatores multiplicativos nas equações, que dão conta das deformações da superfície S_Ψ , e mudamos a variável independente, de m para M_Ψ (mudamos da massa interna à superfície esférica para a massa interna à superfície equipotencial efetiva). Nesse processo, foi suposto equilíbrio hidrostático, e assim, passamos de $\rho(\mathbf{r}, t)$ para $\rho(\Psi)$, o que significa que a densidade é constante ao longo da superfície equipotencial S_Ψ .

Seja P um ponto qualquer da superfície S_Ψ . No tempo t , a posição de P é (r, θ, ϕ) . Movendo esse ponto P , ao longo dessa superfície S_Ψ (ainda no tempo t), alteramos todas as variáveis r , θ e ϕ , mas mantemos constantes o valor do potencial $\Psi(r, \theta, \phi, t)$ e, conseqüentemente, o do raio médio $r_o(\Psi, t)$.

Assim, pode-se imaginar que uma maneira mais interessante de representar o ponto P , seja a partir da especificação de θ e ϕ , e do raio médio r_o da superfície equipotencial à qual esse ponto pertence (pois o raio médio especifica essa superfície de forma única). Essa segunda representação será, de fato, o **novo sistema de coordenadas** que introduziremos nessa subseção. Ela está ilustrada na figura 3.5, à direita. Essa nova representação apresenta a vantagem de variar apenas dois parâmetros (θ e ϕ), e não mais três (θ , ϕ e r), quando tratamos pontos ao longo de S_Ψ .

Assim, no tempo t , definamos a transformação de coordenadas $(r, \theta, \phi) \rightarrow (r_o, \theta, \phi)$. Nessa transformação, teremos que r será dado pela Eq. (3.156), e a densidade passa a ser função de r_o e t : $\rho(\Psi) = \rho(r_o, t)$.

Nessa nova representação, os domínios de integração das Eqs. (3.141) e (3.142) devem ser reescritos em termos das novas variáveis, preservando o fato de que um é a região interna de uma esfera e, o outro, a região externa da mesma: $\int_{r' < r} \rightarrow \int_{r'_o < r_o}$ e $\int_{r' > r} \rightarrow \int_{r'_o > r_o}$. Além disso, os elementos de volume dV passam a ser dados por $dV = \det(J)d\tau$, onde $d\tau$ é o elemento de volume usual das novas variáveis e $\det(J)$ é o determinante da matriz jacobiana J dessa transformação de variáveis (Kopal, 1978).

Calculemos o determinante da matriz jacobiana,

$$\det(J) = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_o} & \frac{\partial r}{\partial \theta} & \frac{\partial r}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial r_o} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta} & \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial r_o} & \frac{\partial \phi}{\partial \theta} & \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_o} & \frac{\partial r}{\partial \theta} & \frac{\partial r}{\partial \phi} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial r}{\partial r_o}. \quad (3.157)$$

Dessa forma, $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ se torna $dV = r^2 \sin \theta (\partial r / \partial r_o) dr_o d\theta d\phi$. Substituindo tudo isso nas Eqs. (3.141) e (3.142), obtemos

$$E_{jm}(r_o, \theta, \phi, t) = \frac{1}{2-j} \int_{r'_o > r_o} Y_{jm}(\theta', \phi') \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r'^{2-j}) \sin \theta' dr'_o d\theta' d\phi' \quad (3.158)$$

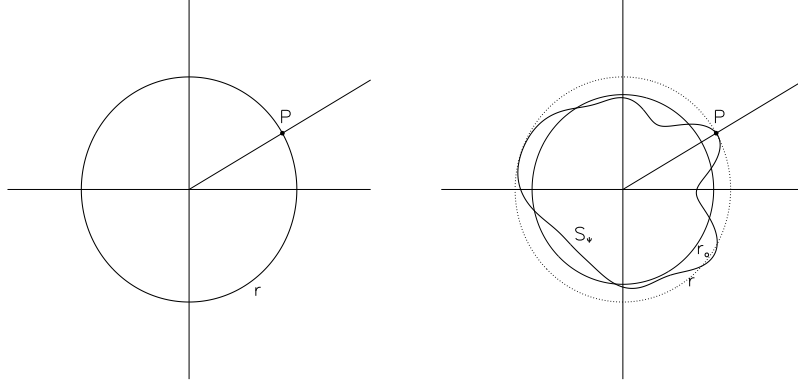


Figura 3.5: Figura esquemática representando os dois sistemas de coordenadas. Na figura da esquerda, temos o sistema de coordenadas esféricas, e, na figura da direita, temos o novo sistema de coordenadas que estamos introduzindo nessa seção. No sistema de coordenadas esféricas, variando θ e ϕ (e mantendo r constante), fazemos o ponto P se mover na superfície esférica da figura da esquerda. Nas novas coordenadas, variando θ e ϕ (e mantendo r_o constante), fazemos o ponto P se mover na superfície equipotencial, S_Ψ , da figura da direita. Conseqüentemente, fazemos a superfície esférica associada a r variar de tamanho.

e

$$F_{jm}(r_o, \theta, \phi, t) = \frac{1}{3+j} \int_{r'_o < r_o} Y_{jm}(\theta', \phi') \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r'^{3+j}) \sin \theta' dr'_o d\theta' d\phi', \quad (3.159)$$

e, para o caso especial em que $j = 2$ em E_{jm} , obteremos

$$E_{2m}(r_o, \theta, \phi, t) = \int_{r'_o > r_o} Y_{2m}(\theta', \phi') \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} \log r' \sin \theta' dr'_o d\theta' d\phi' \quad (3.160)$$

onde r' , presente nos argumentos das derivadas parciais, depende da forma de S_Ψ e é dado pela equação $r' = r'(r'_o, \theta', \Psi', t)$, ainda indeterminada.

Para futuras referências, vamos deixar, aqui, um resumo da transformação de coordenadas que definimos:

$$\begin{aligned} (r, \theta, \phi) &\rightarrow (r_o, \theta, \phi) \\ r &\rightarrow r(r_o, \theta, \phi, t) \\ \Psi(r, \theta, \phi, t) &\rightarrow \Psi(r_o, t) \\ \rho(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \rho(r_o, t) \\ \int_{r' < r} &\rightarrow \int_{r'_o < r_o} \\ \int_{r' > r} &\rightarrow \int_{r'_o > r_o} \\ dr &\rightarrow \frac{\partial r}{\partial r_o} dr_o \end{aligned} \quad (3.161)$$

3.3.3 Aproximação de Primeira Ordem

Como a superfície S_Ψ não deve ser muito complicada, sendo ligeiramente distorcida da forma esférica, podemos, sem perda de generalidade (Tisserand, 1891), escrever a função $r = r(r_o, \theta, \phi, t)$ como

$$r = r_o \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j f_{jm}(r_o, t) Y_{jm}(\theta, \phi) \right), \quad (3.162)$$

onde toda a distorção está contida nos fatores $f_{jm}(r_o, t)$, cujos módulos, em geral, são inferiores a 1.

Quando todos os fatores $f_{jm}(r_o, t)$ são nulos, voltamos à superfície esférica ($r = r_o$), que corresponde à equipotencial de uma estrela que não sobre nenhuma influência perturbadora. Dessa forma, as funções $f_{jm}(r_o, t)$ devem estar intimamente ligadas ao tipo de perturbação que estamos submetendo à estrela, e às condições do interior estelar, as quais ditam a maneira como a estrela responde à tal perturbação.

Observemos que a primeira soma da Eq. (3.162) inicia em $j=1$, pois o harmônico tesseral de $j=0$, $Y_{00}=(4\pi)^{-\frac{1}{2}}$, é constante e, portanto, sua inclusão não forneceria nenhuma distorção em relação à forma esférica. Observemos, também, que, calculando a média de (3.162) ao longo da superfície S_Ψ , obteremos r_o , em concordância com a definição de que essa variável, de fato, representa o raio médio de S_Ψ .

3.3.3.1 A aproximação

A **aproximação de primeira ordem** consiste em supor que as funções f_{jm} são muito menores do que 1. Assim, estamos supondo que a forma da estrela se afasta muito sutilmente da forma esférica. Então, como $|f_{jm}| \ll 1$, teremos que qualquer produto entre as tais funções (ou seja, qualquer termo de ordem maior que 1) será aproximadamente nulo: $f_{jm}f_{kl} \approx 0$.

Intuitivamente, podemos imaginar que essa aproximação de primeira ordem deve valer, enquanto a estrela em rotação não girar com velocidade angular próxima à sua velocidade de ruptura, ou, no caso de sistemas binários, enquanto as duas estrelas não estiverem próximas o suficiente, a ponto de quase se tocarem! Estamos, portanto, considerando um sistema binário do tipo *detached*, composto por duas estrelas com rotação moderada.

Na aproximação de primeira ordem, temos que apenas os termos de ordem não superior a 1, na expansão de r^n , serão apreciáveis:

$$r^n = r_o^n (1 + \sum)^n = r_o^n \left(1 + n \sum + \frac{n(n-1)}{2!} (\sum)^2 + \dots \right) \approx r_o^n (1 + n \sum) \quad (3.163)$$

onde “ \sum ” foi usado para simplificar o termo em somatório duplo, da Eq. (3.162). Portanto, a derivada de r^n em relação a r_o é

$$\frac{\partial}{\partial r_o}(r^n) \approx \frac{\partial}{\partial r_o}(r_o^n) + n \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^n \sum). \quad (3.164)$$

Para o caso especial de E_{2m} , em que temos o logaritmo de r , a aproximação de primeira ordem diz que

$$\ln r = \ln (r_o(1 + \sum)) = \ln r_o + \sum - \frac{1}{2} (\sum)^2 + \frac{1}{3} (\sum)^3 + \dots \approx \ln r_o + \sum \quad (3.165)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial r_o} \ln r \approx \frac{1}{r_o} + \frac{\partial}{\partial r_o} (\sum) \quad (3.166)$$

Vamos, agora, simplificar as expressões (3.158), (3.159) e (3.160), utilizando a aproximação de primeira ordem. Um resumo dos principais teoremas decorrentes dessa aproximação se encontra na tabela 3.1, mais à frente.

3.3.3.2 Termos com $j > 0$

Substituindo (3.164) em (3.158), e transformando a integral de volume em integral tripla, encontramos

$$E_{jm} = \frac{1}{2-j} \int_{r_o}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{jm}(\theta', \phi') \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r_o'^{2-j}) \sin \theta' dr'_o d\theta' d\phi' \quad (3.167)$$

$$+ \sum_{j'=1}^{\infty} \sum_{m'=-j'}^{j'} \int_{r_o}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{jm}(\theta', \phi') \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r_o'^{2-j} f_{j'm'}) Y_{j'm'}(\theta', \phi') \sin \theta' dr'_o d\theta' d\phi'.$$

Isolando os termos dependentes de r'_o , dos dependentes de θ e ϕ ¹³, temos

$$E_{jm} = \frac{1}{2-j} \left(\int_{r_o}^{\infty} \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r_o'^{2-j}) dr'_o \right) \left[\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{jm}(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \right] \quad (3.168)$$

$$+ \left(\int_{r_o}^{\infty} \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r_o'^{2-j} f_{j'm'}) dr'_o \right) \left[\sum_{j'=1}^{\infty} \sum_{m'=-j'}^{j'} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{jm}(\theta', \phi') Y_{j'm'}(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \right].$$

Como temos que $j > 0$, concluímos que a quantidade entre colchetes do primeiro termo do lado direito da equação acima é sempre zero, pois a média de todo harmônico tesseral, com exceção de Y_{00} , sobre a esfera unitária, é nula. Assim, esse primeiro termo também é nulo. Além disso, como os harmônicos tesserais são ortonormais, temos que $\oint Y_{jm} Y_{j'm'} d\Omega = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$. Consequentemente, toda a quantidade entre colchetes do segundo termo do lado direito é igual a 1, e E_{jm} se reduz, simplesmente, a

$$E_{jm}(r_o, t) = \int_{r_o}^{\infty} \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r_o'^{2-j} f_{jm}) dr'_o. \quad (3.169)$$

Substituindo (3.164) em (3.159), e fazendo cálculos semelhantes aos que acabamos de acompanhar, agora para as funções F_{jm} , concluímos que

$$F_{jm}(r_o, t) = \int_0^{r_o} \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r_o'^{3+j} f_{jm}) dr'_o. \quad (3.170)$$

Precisamos, ainda, cuidar do caso especial E_{2m} . Substituindo (3.166) em (3.160), e, novamente, fazendo cálculos semelhantes aos feitos logo acima, concluímos que

$$E_{2m}(r_o, t) = \int_{r_o}^{\infty} \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (f_{2m}) dr'_o, \quad (3.171)$$

ou seja, na aproximação de primeira ordem, o caso E_{2m} é simplesmente o caso em $j = 2$, na Eq. (3.169), e não será necessário dar tratamento especial para o caso particular E_{2m} .

¹³A possibilidade de fazermos isso ilustra, na prática, a imensa vantagem da transformação de coordenadas introduzida na seção 3.3.2.

3.3.3.3 Outra consequência da aproximação de primeira ordem

Nessa aproximação, temos que $r^k \approx r_o^k (1 + k \sum)$. Então, ao se multiplicar E_{jm} (ou F_{jm}) pela quantidade r^k , temos

$$r^k E_{jm}(r_o, t) = r_o^k E_{jm}(r_o, t) + k r_o^k \sum_{j'=1}^{\infty} \sum_{m'=-j'}^{j'} f_{j'm'} Y_{j'm'} E_{jm}(r_o, t), \quad (3.172)$$

onde é fácil ver que teremos produtos do tipo $f_{jm} f_{j'm'}$ no segundo termo do lado direito da equação acima. Assim, esse termo se anula, e

$$r^k E_{jm}(r_o, t) = r_o^k E_{jm}(r_o, t) \quad (3.173)$$

na aproximação de primeira ordem. Similarmente, para as funções F_{jm} , temos

$$r^k F_{jm}(r_o, t) = r_o^k F_{jm}(r_o, t). \quad (3.174)$$

3.3.3.4 Termos com $j = 0$

Voltando às definições (3.158) e (3.159), quando $j = 0$, temos

$$E_{00}(r_o, t) = \frac{1}{2} (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{r'_o > r_o} \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r'^2) \sin \theta' dr'_o d\theta' d\phi' \quad (3.175)$$

e

$$F_{00}(r_o, t) = \frac{1}{3} (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{r'_o < r_o} \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r'^3) \sin \theta' dr'_o d\theta' d\phi'. \quad (3.176)$$

Voltando à primeira definição, (3.142), temos

$$F_{00}(r_o, t) = (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{r'_o < r_o} \rho(r'_o, t) dV' \quad (3.177)$$

Como o potencial Φ , segundo a equação (3.139), é da forma $\Phi = \sum_{j,m} \Phi_{jm}$, o caso $j = 0$ corresponde ao potencial Φ_{00} : o primeiro termo dessa soma. Substituindo (3.175) e (3.176) em (3.140), temos que esse termo do potencial é dado por

$$\Phi_{00} = -G \left(r^{-1} \int_{r'_o > r_o} \rho(r'_o, t) dV' + \frac{1}{2} (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{r'_o > r_o} \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r'^2) \sin \theta' dr'_o d\theta' d\phi' \right) \quad (3.178)$$

A primeira integral, de F_{00} , corresponde à massa interna à superfície equipotencial S_Ψ , $M_\Psi(r_o, t)$, e temos

$$\Phi_{00} = -G \left(r^{-1} M_\Psi(r_o, t) + \frac{1}{2} (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{r'_o > r_o} \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r'^2) \sin \theta' dr'_o d\theta' d\phi' \right) \quad (3.179)$$

Utilizando a aproximação de primeira ordem, vamos substituir (3.163) no primeiro termo do lado direito da Eq. (3.179), e (3.164) no segundo termo, obtendo

$$\begin{aligned} \Phi_{00} = & -Gr_o^{-1} \left(1 - \sum_{j'=1}^{\infty} \sum_{m'=-j'}^{j'} f_{j'm'}(r_o, t) Y_{j'm'}(\theta, \phi) \right) M_{\Psi}(r_o, t) - \\ & \frac{G}{2\sqrt{4\pi}} \left(\int_{r_o}^{\infty} \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r_o'^2) dr'_o \right) \left[\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{00} \sin \theta' d\theta' d\phi' \right] - \\ & \frac{G}{2\sqrt{4\pi}} \left(\int_{r_o}^{\infty} \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r_o'^2 f_{j'm'}) dr'_o \right) \left[\sum_{j'=1}^{\infty} \sum_{m'=-j'}^{j'} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{00} Y_{j'm'}(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \right]. \end{aligned} \quad (3.180)$$

Como $Y_{00} = (4\pi)^{-\frac{1}{2}}$, temos que a quantidade entre colchetes do segundo termo do lado direito será igual a $(4\pi)^{\frac{1}{2}}$. Esse número cancelará com o $(4\pi)^{-\frac{1}{2}}$ logo no começo do segundo termo. Além disso, da ortonormalidade dos harmônicos tesserais temos que a quantidade entre colchetes do terceiro termo será sempre zero, anulando todo esse termo. Portanto, o termo Φ_{00} do potencial fica dado por

$$\Phi_{00} = -\frac{GM_{\Psi}(r_o, t)}{r_o} \left(1 - \sum_{j'=1}^{\infty} \sum_{m'=-j'}^{j'} f_{j'm'}(r_o, t) Y_{j'm'}(\theta, \phi) \right) - 4\pi G \int_{r_o}^{\infty} \rho(r'_o, t) r'_o dr'_o \quad (3.181)$$

3.3.3.5 Resumo: Os Potenciais Φ e Ψ , até este ponto

O potencial Φ , na aproximação de primeira ordem, será dado por

$$\Phi = \Phi_{00}(r_o, t) - G \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{4\pi}{2j+1} (r_o^j E_{jm}(r_o, t) + r_o^{-(j+1)} F_{jm}(r_o, t)) Y_{jm}(\theta, \phi), \quad (3.182)$$

onde $E_{jm}(r_o, t)$ e $F_{jm}(r_o, t)$ são dadas, respectivamente, pelas Eq. (3.169) e (3.170), e $\Phi_{00}(r_o, t)$ é dado pela Eq. (3.181) (e ver tabela 3.1).

Então, aqui, podemos escrever o potencial total Ψ como

$$\Psi = \Phi + V = \Psi_s + \Psi_d + V \quad (3.183)$$

onde

$$\Psi_s = -G \frac{1}{r} M_{\Psi}(r_o, t) \quad e \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} \Psi_d = & \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \left(-\frac{4\pi G}{2j+1} \right) r_o^{-(j+1)} F_{jm}(r_o, t) Y_{jm}(\theta, \phi) \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \left(-\frac{4\pi G}{2j+1} \right) r_o^j E_{jm}(r_o, t) Y_{jm}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (3.185)$$

são, respectivamente, a parte esfericamente simétrica do potencial gravitacional, e a sua distorção da simetria esférica; e V é dado pela Eq. (3.147).

Tabela 3.1: Principais consequências da aproximação de primeira ordem ($f_{jm}f_{kl} \approx 0$).

	quantidade exata	quantidade na aproximação de primeira ordem
1.	$f_{jm}f_{kl}$	0
2.	r^n	$r_o^n (1 + n \Sigma)$
3.	$\ln r$	$\ln r_o + \Sigma$
4.	$\frac{\partial}{\partial r_o} r^n$	$nr_o^{n-1} + n \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^n \Sigma)$
5.	$\frac{\partial}{\partial r_o} \ln r$	$\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r_o} (\Sigma)$
6.	$r^n \{E_{jm}, F_{jm}\}$	$r_o^n \{E_{jm}, F_{jm}\}$
7.	$E_{jm}(r, t) = \int_{r' > r} (r')^{-(j+1)} Y_{jm}(\theta', \phi') \rho(\mathbf{r}', t) dV'$	$E_{jm}(r_o, t) = \int_{r_o}^{\infty} \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r'^{2-j} f_{jm}) dr'_o$
8.	$F_{jm}(r, t) = \int_{r' < r} (r')^j Y_{jm}(\theta', \phi') \rho(\mathbf{r}', t) dV'$	$F_{jm}(r_o, t) = \int_0^{r_o} \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r'^{3+j} f_{jm}) dr'_o$
9.	$M_{\Psi}(r, t) = \int_{r' < r} \rho(\mathbf{r}', t) dV'$	$M_{\Psi}(r_o, t) = 4\pi \int_0^{r_o} \rho(r'_o, t) r_o'^2 dr'_o$

3.3.4 A Equação de Radau

O potencial total é a soma do potencial gerado pela distribuição de massa da estrela com o potencial perturbador (Eq. 3.132). Assim,

$$\Psi(r_o, t) = \Phi(r_o, \theta, \phi, t) + V(r_o, \theta, \phi, t) \quad (3.186)$$

onde fizemos uso da Eq. (3.156), que diz que o potencial total, no nosso novo sistema de coordenadas, depende apenas do raio médio de sua superfície equipotencial e, eventualmente, do tempo.

Das equações (3.184), (3.185), nós vemos que Φ é uma expansão em série de harmônicos tesseractais, com coeficientes que dependem de r_o e t . Da equação 3.147, vemos que V também é uma expansão em série desse mesmo tipo. Assim, o potencial total Ψ , soma desses dois potenciais, também será uma expansão em série de harmônicos, com coeficientes que dependem de r_o e t .

Como, no entanto, o potencial total é função apenas de r_o e t (pela Eq. 3.155, que é consequência da transformação de coordenadas que definimos na seção 3.3.2), nós temos que *os coeficientes de todos os harmônicos da série de Ψ , com $j > 0$, são nulos*. Essa condição vai impor que as somas dos coeficientes de Φ e V associados aos harmônicos tesseractais com $j > 0$, que são os harmônicos tesseractais que dependem de θ e ϕ , se anulem, para que não haja dependência de θ e ϕ no potencial total Ψ .

Veremos, agora, que isso nos permitirá encontrar as funções f_{jm} e o potencial total Ψ .

Vamos seguir Kopal (1959) e Tisserand (1891) e escrever o potencial perturbador numa “aproximação de ordem zero”. Numa aproximação de ordem zero, até mesmo as funções f_{jm} são consideradas desprezíveis, e, portanto, teremos que $r^n \approx r_o^n$.¹⁴ Assim, temos que o potencial perturbador é dado por

$$V(r_o, \theta, \phi, t) \approx - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j c_{jm} r_o^j Y_{jm}(\theta, \phi) \quad (3.187)$$

onde

$$\begin{aligned} c_{00}(r_o, t) &= \frac{\sqrt{4\pi}}{3} \Omega^2 r_o^2 \\ c_{1m}(t) &= 0, \quad m = -1, 0, 1 \\ c_{2m}(r_o, t) &= GM_2 R^{-3} \frac{4\pi}{5} Y_{2m}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \frac{4\pi}{15} \Omega^2(r_o, t) Y_{2m}(\beta, \alpha) \\ c_{jm}(t) &= GM_2 R^{-(j+1)} \frac{4\pi}{2j+1} Y_{jm}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad j > 2 \end{aligned}$$

Somando os potenciais das equações (3.184), (3.185) e (3.187), e impondo que o potencial total não dependa de θ ou ϕ , como dita a Eq. (3.156), nós teremos que

$$-\frac{4\pi}{2j+1} (r_o^j E_{jm}(r_o, t) + r_o^{-(j+1)} F_{jm}(r_o, t)) + r_o^{-1} M_{\Psi}(r_o, t) f_{jm}(r_o, t) - c_{jm} r_o^j = 0 \quad (3.188)$$

para todo $j > 0$.

Mediante cálculos, explicitados no Apêndice B.2, a equação acima conduz à equação diferencial (não-linear) conhecida como **Equação de Clairaut**, que se segue:

$$r_o^2 \frac{\partial^2 f_{jm}}{\partial r_o^2} + 6D(r_o \frac{\partial f_{jm}}{\partial r_o} + f_{jm}) - j(j+1) f_{jm} = 0, \quad (3.189)$$

onde $D = \rho/\bar{\rho}$, e $\bar{\rho}(r_o, t)$ é a densidade média no ponto r_o (e no tempo t), definida por

$$\bar{\rho} = \frac{M_{\Psi}}{V_{\Psi}} = \frac{3}{r_o^3} \int_0^{r_o} r_o'^2 \rho dr_o', \quad (3.190)$$

e onde foi feita a imposição de que a velocidade angular Ω fosse independente de r_o , ou seja, que a rotação

É muito importante pontuar aqui que, na passagem da equação 3.188 para a equação 3.189, *foi feita a consideração de que a velocidade angular Ω fosse independente de r_o , ou seja, considerou-se que a rotação interna da estrela fosse de corpo rígido.*

¹⁴Aparentemente, os referidos autores utilizam essa aproximação para o potencial perturbador, porque ela gera resultados mais simples e tratáveis com um número muito menor de cálculos. Devemos lembrar, que essa teoria é anterior ao advento dos equipamentos computacionais, e, portanto, ela pertence a uma época em que era valioso (muito mais do que hoje) evitar modelos que exigissem cálculos extensos. Além disso, veremos a seguir que a aproximação de ordem zero para o potencial perturbador nos conduzirá à equação diferencial de Radau, que já foi extensamente estudada pelos matemáticos (Kopal, 1959; Tisserand, 1891).

É justamente aqui que entrou a condição de corpo rígido, mencionada no último parágrafo da seção 3.3.1.2, para que desenvolvamos a teoria de Laplace, na sua forma clássica, como apresentada em Tisserand (1891); Kopal (1959), e, em particular, para que possamos chegar nas conhecidas equações de Clairaut e Radau.¹⁵

A Equação de Clairaut é uma equação diferencial de segunda ordem na função f_{jm} , o que significa que f_{jm} pode ser obtida, de forma única, mediante duas constantes iniciais.

Definindo a função η_j como a derivada logarítmica da função f_{jm} , temos

$$\eta_j(r_o, t) = \frac{r_o}{f_{jm}} \frac{\partial f_{jm}}{\partial r_o}(r_o, t) \quad (3.191)$$

e substituindo-a na equação de Clairaut, nós obtemos a **Equação de Radau**,

$$r_o \frac{\partial}{\partial r_o} \eta_j + 6D(\eta_j + 1) + \eta_j(\eta_j - 1) = j(j + 1) \quad (3.192)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem na função η_j . Logo abaixo, ficará claro o motivo de termos suprimido o índice “ m ” das duas últimas equações.

As duas equações diferenciais de primeira ordem (3.191) e (3.192) são equivalentes à equação de Clairaut (de segunda ordem). Torna-se, portanto, necessário definir uma constante inicial para f_{jm} , e uma outra para η_j .

Quando nos aproximamos do centro da estrela ($r_o=0$), a densidade local e a densidade média se tornam iguais. Assim, quando $r_o \rightarrow 0$, temos que $D \rightarrow 1$.

A equação de Clairaut pode ser facilmente resolvida quando $D=\text{constante}$, usando o método de Frobenius. Em particular, quando $D=1$, há duas soluções possíveis para a equação de Clairaut, que devem representar o comportamento assintótico da função f_{jm} , nas proximidades de $r_o=0$: elas são $f_{jm} \propto r_o^{-j-3}$ e $f_{jm} \propto r_o^{j-2}$.

Somente a solução $f_{jm} \propto r_o^{j-2}$, com $j \geq 2$, vai satisfazer a condição física de que f_{jm} seja sempre limitada, e essa solução corresponde (pela Eq. 3.191) a $\eta_j=j-2$. Assim, fica demonstrado, de forma não rigorosa (mas, ver referências em Kopal (1959)), que as condições iniciais das equações (3.189) e (3.192), no centro da estrela, $r_o=0$, são, respectivamente:

- $f_{jm}(0, t) = 0$, e
- $\eta_j(0, t) = j - 2$.

Podemos ver, acima, que a condição inicial da equação de Radau é independente do índice m . Além disso, a forma da equação de Radau também é independente de m . Assim, as soluções da equação de Radau, as funções η_{jm} , serão, também, independentes de m : η_j . Por isso, os índices m na Eq. (3.192) já foram abandonados de antemão.

Partindo, novamente, da Eq. (3.188), podemos demonstrar que, na superfície da estrela, as funções f_{jm} serão dadas (Apêndice B.3) por

$$f_{jm}(r_1, t) = \frac{c_{jm}}{GM} r_1^{j+1} (2k_j(r_1, t) + 1) \quad (3.193)$$

¹⁵A análise do Apêndice B.2 mostra que se Ω dependesse de r_o , a derivada de c_{2m} , na passagem entre as equações B.7 e B.8, não seria nula, o que terminaria por nos conduzir a equações diferentes das de Clairaut e Radau, para $j=2$.

onde r_1 é o raio médio da superfície externa da estrela (o raio médio a partir do qual a densidade será sempre nula: $\rho(r_1, t)=0$), e

$$2k_j + 1 = \frac{2j + 1}{j + \eta_j} \quad (3.194)$$

A função k_j é dada por

$$k_j = \frac{j + 1 - \eta_j}{2(j + \eta_j)} \quad (3.195)$$

e é denominada a j -ésima **constante de movimento apsidal** associada à estrela 1.

Veremos no capítulo 5 que o valor dessa constante, no raio médio da superfície da estrela, é uma quantidade que se pode estimar a partir das perturbações orbitais provocadas pela deformação das estrelas que compõem o sistema binário.

3.3.4.1 Equação Iterativa para $f_{jm}(\mathbf{r}_o, t)$

Novamente, voltemos aos apêndices B.2 e B.3. Resolvendo a Eq. (B.13) para F_{jm} , temos

$$F_{jm} = \frac{f_{jm}}{4\pi} (j + 1 - \eta_j) r_o^j M_\Psi \quad (3.196)$$

e, resolvendo a Eq. (B.23) para E_{jm} , temos

$$E_{jm} = \frac{f_{jm}}{4\pi} (j + \eta_j) r_o^{-(j+1)} M_\Psi - \frac{2j + 1}{4\pi G} c_{jm} \quad (3.197)$$

As equações acima possuem f_{jm} em ambos os membros, pois, lembremos que E_{jm} e F_{jm} são funções integrais de f_{jm} (ver tabela 3.1).

Um método iterativo pode ser usado para obtermos f_{jm} . Kopal (1978) demonstra que esse método converge para o valor exato de f_{jm} , quando o número de iterações tende a infinito.

Vamos substituir (3.169) na Eq. (3.197), e isolar f_{jm} da seguinte forma

$$f_{jm} = \frac{c_{jm}}{GM_\Psi} r_o^{j+1} \frac{2j + 1}{j + \eta_j} + \frac{4\pi}{M_\Psi} \frac{r_o^{j+1}}{j + \eta_j} \int_{r_o}^{\infty} \rho \frac{\partial}{\partial r'_o} (r_o'^{2-j} f_{jm}) dr'_o \quad (3.198)$$

O método iterativo consiste na seguinte equação iterativa

$$f_{jm}^{(n)} = f_{jm}^{(0)} + J \left[f_{jm}^{(n-1)} \right] \quad n \geq 1 \quad (3.199)$$

onde a primeira função dessa iteração, $f_{jm}^{(0)}$, é a dada pelo primeiro termo da direita da Eq. (3.198):

$$f_{jm}^{(0)} = \frac{c_{jm}}{GM_\Psi} r_o^{j+1} \frac{2j + 1}{j + \eta_j} \quad (3.200)$$

e o funcional $J \left[f_{jm}^{(n-1)} \right]$, $n \geq 1$, é dado por

$$J \left[f_{jm}^{(n-1)} \right] = \frac{4\pi}{M_\Psi} \frac{r_o^{j+1}}{j + \eta_j} \int_{r_o}^{\infty} \rho \frac{\partial}{\partial r'_o} \left(r_o'^{2-j} f_{jm}^{(n-1)} \right) dr'_o \quad (3.201)$$

O primeiro termo desse método iterativo, $f_{jm}^{(0)}$, corresponde à aproximação de que E_{jm} é sempre nula, ou, em outras palavras, à aproximação de que as distorções das camadas externas da estrela não alteram o potencial das camadas internas de forma significativa.

Intuitivamente, podemos visualizar que a aproximação dada por essa primeira função ($f_{jm} \leftarrow f_{jm}^{(0)}$) deve ser muito próxima da realidade no caso em que a maior parte da massa da estrela esteja próxima de seu centro. Nesse caso, as camadas mais externas da estrela tem uma massa tão pequena, que seus potenciais gravitacionais, pequenos, são incapazes de provocar distorções apreciáveis na massa central.

Mais à frente, adotaremos essa aproximação, pois as estrelas são, de fato, bastante centralmente concentradas.

3.3.4.2 Um Breve Estudo da Equação de Radau

A equação de Radau é dada pela Eq. (3.192). No limite em que r_o é pequeno (nas proximidades do centro da estrela), a densidade média $\bar{\rho}$ tende à densidade ρ no ponto r_o . Assim, é fisicamente necessário que $D \rightarrow 1$, quando $r_o \rightarrow 0$. É também fisicamente necessário que $D \geq 0$, pois não há densidade negativa. Além disso, os modelos de estrutura estelar não prevêem distribuições de densidade que crescem com r . Então, nós podemos dizer que $\frac{\partial \rho}{\partial r_o} \leq 0$, sempre, e isso significa que a densidade média $\bar{\rho}$ é, em geral, sempre maior que a densidade local ρ , e, portanto, $D \leq 1$.

Assim, na equação de Radau, a função D está restrita às seguintes condições:

- $0 \leq D(r_o, t) \leq 1$, e
- $D \rightarrow 1$, quando $r_o \rightarrow 0$

onde o extremo $D=0$ (para todo $r_o \neq 0$), representa o caso em que toda a massa está concentrada no centro da estrela (modelo puntual), e o extremo $D=1$ representa o caso em a massa se distribui uniformemente pela estrela (modelo homogêneo).

A equação de Clairaut (3.189) pode ser facilmente resolvida analiticamente no caso em que $D=\text{constante}$, mediante expansão em série de Frobenius. Quando $D=0$, teremos $f_{jm} \propto r_o^{j+1}$ (correspondente a $\eta_j = j + 1$), e, quando $D=1$, teremos $f_{jm} = \propto r_o^{j-2}$ (correspondente a $\eta_j = j - 2$)¹⁶.

Definamos a função $\kappa_1 = 3 \left(D - \frac{1}{2} \right)$. Substituindo-a na função D da equação de Radau (3.192) e, mediante um pouco de álgebra, nós chegamos à seguinte forma da equação de Radau:

$$r_o \frac{\partial \eta_j}{\partial r_o} - \kappa_1^2 = -(\eta_j + 1 + \kappa_1)^2 + (j - 1)(j + 2), \quad \kappa_1 = 3 \left(D - \frac{1}{2} \right) \quad (3.202)$$

Já, das equações (3.170) e (3.196), temos a seguinte igualdade:

$$\int_0^{r_o} \rho(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r_o'^{3+j} f_{jm}) dr'_o = \frac{f_{jm}}{4\pi} (j + 1 - \eta_j) r_o^j M_\Psi \quad (3.203)$$

de onde podemos concluir, mediante certa álgebra (Kopal, 1959), que

$$\eta_j = j + 1 - 3D - 3 \frac{1}{f_{jm} r_o \bar{\rho}} \int_0^{r_o} r_o'^{3+j} f_{jm} \left(-\frac{\partial \rho}{\partial r_o} \right) dr'_o \quad (3.204)$$

¹⁶Essas são as soluções da equação de Clairaut que satisfazem a condição de que $f_{jm}(r_o = 0, t) = 0$.

ou

$$\eta_j = j + 1 - 3D - \chi \quad (3.205)$$

onde, χ é dada pelo último termo da Eq. (3.204), e, necessariamente, $\chi \geq 0$ ¹⁷.

Assim, definamos a função $\kappa_2 = \chi - (j + \frac{1}{2})$. Substituindo-a na função D da equação de Radau (3.192) e, novamente, mediante um pouco de álgebra, nós chegamos à outra forma interessante da equação de Radau:

$$r_o \frac{\partial \eta_j}{\partial r_o} + \kappa_2^2 = (\eta_j + 1 + \kappa_2)^2 + (j - 1)(j + 2), \quad \kappa_2 = \chi - \left(j + \frac{1}{2}\right) \quad (3.206)$$

As equações (3.202) e (3.206) mostram que, para valores constantes de D ou de χ , a equação de Radau é representada por parábolas no plano $r_o \eta_j \times \eta_j$. As parábolas associadas às equações de Radau com D constantes tem a concavidade voltada para baixo, e as parábolas associadas às equações de Radau com χ constantes tem a concavidade voltada para cima.

Representações da equação de Radau no plano $r_o \frac{\partial \eta_j}{\partial r_o} \times \eta_j$ estão ilustradas na figura 3.6. No diagrama da esquerda, podemos ver duas equações de Radau representadas por linhas contínuas: uma para D constante e outra para χ constante. Os pontos de inclinação nula dessas parábolas (usualmente chamados, respectivamente, de “pico” e “vale”) estão contidos, cada um, em outras duas parábolas, representadas por linhas pontilhadas. As parábolas em linhas pontilhadas são, também, duas equações de Radau, nos respectivos casos em que $\kappa_1=0$ ($D=1/2$) e $\kappa_2=0$ ($\chi=j+1/2$). Das equações (3.202) e (3.206), vemos que, aumentando o valor da constante D , translada-se a parábola contínua com a concavidade para baixo, da direita para a esquerda, sempre mantendo o seu pico na parábola pontilhada com a concavidade para cima. De forma idêntica, aumentando o valor da constante χ , translada-se a parábola contínua com a concavidade para cima, da direita para a esquerda, sempre mantendo o seu vale na parábola pontilhada com a concavidade para baixo.

Assim, no diagrama da direita da figura 3.6, temos representados os casos extremos da equação de Radau, discutidos no começo dessa subseção. As três parábolas com a concavidade voltada para baixo, $AHBLC$, $IHJG$ e $DEHF$, representam, respectivamente, as equações de Radau nos casos $D=0$, $D=1/2$ e $D=1$. As duas parábolas com a concavidade voltada para cima, FGC e EHB , representam, respectivamente, as equações de Radau nos casos $\chi=0$ e $\chi=j+1/2$ ¹⁸. Merecem destaque os pontos $F=(j-2, 0)$ e $C=(j+1, 0)$. Também temos representada a reta $\eta_j=j-2$, que corresponde à condição inicial $\eta_j(0, t)=j-2$.

As restrições $0 \leq D \leq 1$, $\chi \geq 0$ e $\eta_j(r_o = 0, t)=j-2$ impõem que quaisquer soluções gerais da equação de Radau, no diagrama $r_o \frac{\partial \eta_j}{\partial r_o} \times \eta_j$, estejam dentro da região hachurada da figura (região $LFGCL$). Então, necessariamente, as funções η_j estão contidas no intervalo $j-2 \leq \eta_j \leq j+1$, e, em decorrência disso, as constantes de movimento apsidal (Eq. 3.195) também estão restritas ao intervalo $0 \leq k_j \leq \frac{3}{4(j-1)}$. Os dois extremos

¹⁷É fácil ver isso no caso particular em que $f_{jm} \approx f_{jm}^{(0)}$, correspondente à situação de alta concentração central de massa.

¹⁸Por completeza, deixemos registradas aqui as coordenadas dos pontos de A a L : $A=(-j, 0)$, $B=(\frac{1}{2}, (j-1)(j+2) + \frac{9}{4})$, $C=(j+1, 0)$, $D=(-j-3, 0)$, $E=(-\frac{5}{2}, (j-1)(j+2) + \frac{9}{4})$, $F=(j-2, 0)$, $G=(j-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$, $H=(-1, (j-1)(j+2))$, $I=(-\frac{5}{2}, (j-1)(j+2) - \frac{9}{4})$, $J=(\frac{1}{2}, (j-1)(j+2) - \frac{9}{4})$, $L=(j-2, 6(j-1))$.

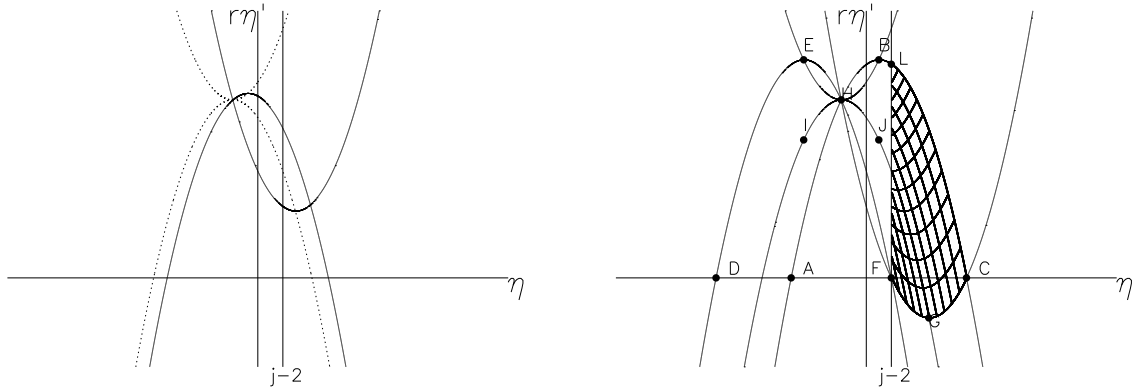


Figura 3.6: Parábolas representando as equações de Radau, no plano $r_o \frac{\partial \eta_j}{\partial r_o} \times \eta_j$. À direita, a região hachurada corresponde à região permitida para as soluções físicas da equação de Radau.

desses intervalos são, respectivamente, os modelos puntual e homogêneo. No diagrama $r_o \frac{\partial \eta_j}{\partial r_o} \times \eta_j$, o ponto C corresponde ao “modelo puntual” ($D=0$, $\eta_j=j+1$ e $k_j=0$) e o ponto F corresponde ao “modelo homogêneo” ($D=1$, $\eta_j=j-2$ e $k_j=\frac{3}{4(j-1)}$).

É particularmente interessante notar que as constantes de movimento apsidal, k_j , são sempre positivas e são (juntamente com as funções η_j) um indicador de concentração da massa do interior estelar. Quanto mais centralmente distribuída for massa da estrela, mais próximas de zero serão as suas constantes de movimento apsidal, e, ao contrário, quanto mais próxima a distribuição estiver da homogeneidade, mais próximas serão as suas constantes de movimento apsidal de $\frac{3}{4(j-1)}$.

Essas são as principais conclusões que retiramos desse estudo.

3.3.5 O Potencial Total Ψ

Vamos supor que a distribuição de massa da estrela seja centralmente concentrada o suficiente para que $f_{jm}^{(0)}$ seja, em boa aproximação, bastante próxima de f_{jm} (subseção 3.3.4.1). Essa aproximação foi usada por vários autores na literatura, como Endal & Sofia (1976) e Pinsonneault et al. (1989), do grupo da Universidade Yale; Landin et al. (2009) e Mendes et al. (1999), no código ATON; entre outros autores. Além disso, os resultados observacionais do movimento apsidal em sistemas binários parece corroborar essa suposição (Giménez, 2007).

Essa aproximação também é imensamente vantajosa do ponto de vista prático, pois ela nos poupa de introduzir um método iterativo complicado e computacionalmente oneroso nos códigos de estrutura e evolução estelar (ver Eqs. 3.199 e 3.200).

Substituindo (3.200) em (3.196) e (3.197), nós temos que

$$F_{jm} = \frac{2j+1}{4\pi G} r_o^{2j+1} c_{jm}(t) (2k_j(r_o, t)) \quad (3.207)$$

e

$$E_{jm} = 0 \quad (3.208)$$

Assim, substituindo (3.207) e (3.208), acima, e os parâmetros c_{jm} , explicitados na Seção 3.3.1.2, no potencial total Ψ (3.183), e fazendo, ainda, uso das Eqs. (3.145) e (3.146),

nós temos que o potencial total, na aproximação de primeira ordem, é dado por

$$\Psi = \Psi_s + \Psi_d + \Psi_r + \Psi_t \quad (3.209)$$

onde as primeiras duas funções,

$$\Psi_s = -G\frac{1}{r}M_\Psi(r_o, t) \quad (3.210)$$

e

$$\Psi_d = \frac{1}{3}\Omega^2 r_o^2 2k_2(r_o, t)P_2(\cos \Theta) - GM_2 \frac{1}{R} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{r_o}{R}\right)^j 2k_j(r_o, t)P_j(\cos \lambda) \quad (3.211)$$

representam o potencial criado pela distribuição de massa da estrela, Φ (são, respectivamente, a parte esfericamente simétrica do potencial gravitacional, e a parte de distorção da simetria esférica), e as duas últimas funções,

$$\Psi_r = -\frac{1}{3}\Omega^2 r^2 (1 - P_2(\cos \Theta)) \quad (3.212)$$

e

$$\Psi_t = -GM_2 \frac{1}{R} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^j P_j(\cos \lambda) \quad (3.213)$$

representam o potencial perturbador, V , devido à rotação (*shellular*) da estrela primária, Ψ_r , e à influência de maré causada pela estrela secundária puntual, Ψ_t .

Além disso, substituindo (3.200) em (3.162) e fazendo, novamente, uso das Eqs. (3.145) e (3.146), nós temos que as superfícies equipotenciais fechadas, S_Ψ , do potencial total Ψ , são dadas por

$$r = r_o \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\Omega^2 r_o^3}{GM_\Psi} (2k_2(r_o, t) + 1) P_2(\cos \Theta) + \frac{M_2}{M_\Psi} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{r_o}{R}\right)^{j+1} (2k_j(r_o, t) + 1) P_j(\cos \lambda) \right) \quad (3.214)$$

Nas equações (3.211) e (3.214), as funções $k_j(r_o, t)$ são dadas por (3.195), onde as funções $\eta_j(r_o, t)$ são obtidas, mediante a resolução da equação de Radau (Eq. 3.192), com a condição inicial $\eta_j(0, t) = j - 2$.

Essas últimas cinco equações são as principais conclusões de todo este capítulo.

As últimas cinco equações representam a generalização dos potenciais adotados nos trabalhos anteriores de Mendes et al. (1999); Landin et al. (2009), permitindo que a distância entre as estrelas companheiras do sistema binário varie livremente com o tempo: $R=R(t)$ (respeitando a relação de conservação do momento angular: $\omega(t) \propto R^{-2}$ - Seção 3.2), e que o eixo de rotação intrínseco da primária (ou “estrela 1”), Ω , tenha qualquer orientação (especificada pelos ângulos livres $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ - Eq. 3.114), em relação ao eixo de rotação orbital do sistema, ω .

A Eq. (3.213), porém, ainda não está na forma encontrada em Landin (2006); Landin et al. (2009). Para encontrá-la naquela forma, devemos, ao invés dos passos especificados no parágrafo anterior à Eq. (3.209), substituir a Eq. (3.170) no potencial total Ψ (3.183) e efetuar a derivada, levando em conta que, pela Eq. (3.191), $\frac{\partial f_{jm}}{\partial r_o} = \frac{1}{r_o} f_{jm} \eta_j$.

Assim, reescrevemos as equações generalizadas:

$$\Psi_s = -G\frac{1}{r}M_\Psi(r_o, t) , \quad (3.215)$$

$$\begin{aligned}\Psi_d &= \frac{4\pi}{3} r_o^{-3} P_2(\cos \Theta) \int_0^{r_o} \rho(r'_o, t) \frac{r_o'^7}{M_\Psi} \Omega^2 \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} dr'_o \\ &- 4\pi G M_2 \sum_{j=2}^4 \frac{P_j(\cos \lambda)}{(r_o R)^{j+1}} \int_0^{r_o} \rho(r'_o, t) \frac{r_o'^{3+2j}}{M_\Psi} \frac{3 + j + \eta_j}{j + \eta_j} dr'_o\end{aligned}\quad (3.216)$$

$$\Psi_r = -\frac{1}{3} \Omega^2 r^2 (1 - P_2(\cos \Theta)) \quad e \quad (3.217)$$

$$\Psi_t = -G M_2 \frac{1}{R} \sum_{j=2}^4 \left(\frac{r}{R}\right)^j P_j(\cos \lambda) \quad (3.218)$$

onde substituímos as somas infinitas por somas até 4. Justificaremos isso na subseção 3.3.5.2.

3.3.5.1 Retornando ao Método de Kippenhahn-Thomas

De posse dessas equações, podemos, finalmente, resolver o problema da estrutura e evolução de uma estrela, aproximadamente em equilíbrio hidrostático, sujeita a potenciais perturbadores que retiram a simetria esférica de suas equações constitutivas. Temos o necessário para a utilização do método de KT70 (Seção 3.1.1).

A gravidade efetiva local é obtida pelo módulo do gradiente do potencial total,

$$g = |\nabla \Psi| = (\nabla \Psi \cdot \nabla \Psi)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.219)$$

onde $r=r(r_o, \theta, \phi, t)$ é dado pela Eq. (3.214).

O elemento de área da superfície equipotencial S_Ψ , é $d\mathbf{a} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\right) d\theta d\phi$. Então, o módulo desse elemento de área é

$$da = (d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a})^{\frac{1}{2}} = \left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \phi}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} r \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.220)$$

Assim, as quantidades $A_\Psi \langle g \rangle$ e $A_\Psi \langle g^{-1} \rangle$, Seção 3.1.1, são obtidas através das integrações

$$A_\Psi \langle g \rangle (r_o, t) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(r_o, \theta, \phi, t) da \quad (3.221)$$

e

$$A_\Psi \langle g^{-1} \rangle (r_o, t) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g^{-1}(r_o, \theta, \phi, t) da \quad (3.222)$$

O raio da esfera topologicamente equivalente, r_Ψ , é obtido através do volume interno à superfície equipotencial S_Ψ :

$$r_\Psi(r_o, t) = \left[\frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_o} \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r'_o} (r^3) \sin \theta dr'_o d\theta d\phi \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.223)$$

Assim, obtemos os fatores $f_P(r_o, t)$, $f_T(r_o, t)$, e a quantidade $r_\Psi(r_o, t)$, que transformam as quatro equações constitutivas esfericamente simétricas: (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5), nas quatro equações constitutivas distorcidas: (3.40), (3.41), (3.42) e (3.43).

3.3.5.2 Sobre a Secundária Puntual

Nós obtivemos o potencial perturbador devido à presença da estrela companheira, considerando apenas o primeiro termo da expansão de seu potencial. Em outras palavras, consideramos que a companheira é uma massa puntual. Nesta subseção, vamos estimar a ordem de grandeza da primeira correção que deve ser feita ao potencial perturbador, para levar em consideração a distribuição de massa mais real da estrela companheira.

O potencial de maré gerado pela estrela companheira, considerada puntual, é a soma dada pela Eq. (3.213), onde cada elemento da soma é menor do que o seu precedente por um fator $(\frac{r_o}{R})$, ou seja,

$$\Psi_d^j \sim \left(\frac{r_o}{R}\right) \Psi_d^{j-1} \quad (3.224)$$

A primeira correção que dever ser aplicada a esse potencial é dada pela fórmula de MacCullagh (Eq. 3.150), que reescreveremos aqui,

$$\Phi_2(\mathbf{r}, t) = -G \frac{1}{r_2^3} \int r'^2 P_2(\cos \gamma) \rho_2(r'_o, t) dV' \quad (3.225)$$

onde, novamente, usamos a convenção de que \mathbf{r}_2 é o vetor que vai do centro de massa da estrela secundária a um ponto arbitrário, P , do fluido da primária, e γ é o ângulo entre os vetores \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}' .

Vamos, agora, aplicar para a distribuição de massa da secundária, ρ_2 , a mesma transformação de coordenadas que aplicamos à distribuição de massa da primária (Eq. 3.161). Assim, a equação acima fica reescrita assim

$$\Phi_2(\mathbf{r}, t) = -G \frac{1}{r_2^3} \int P_2(\cos \gamma) \rho_2(r'_o, t) \frac{1}{5} \frac{\partial}{\partial r'_o} (r'^5) dr'_o d\Omega \quad (3.226)$$

onde a integral é, ainda, sobre todo o espaço.

Seguindo a mesma linha de nosso trabalho, vamos, agora, aplicar a aproximação de primeira ordem na equação acima. Usando a tabela 3.1, nós vamos ter que, nessa aproximação, a fórmula de MacCullagh é dada por

$$\Phi_2(\mathbf{r}, t) \approx -G \frac{1}{r_2^3} \frac{4\pi}{5} \sum_{j=-2}^2 \int_0^\infty \rho_2(r'_o, t) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r'^5 f_{2m}(r'_o, t)) dr'_o Y_{2m}(\theta, \phi) \quad (3.227)$$

que, mediante alguns cálculos, se reduz a

$$\Phi_2(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{2}{r_2^3} r_1^5 k_2^{(2)}(r_1, t) \sum_{j=-2}^2 c_{2m} Y_{2m}(\theta, \phi) \quad (3.228)$$

Então, considerando que o primeiro termo da expansão de r_2^3 é R^3 e que o termo de maré do coeficiente c_{2m} é da ordem de $GM_1 R^{-3}$, nós temos que a primeira correção ao potencial perturbador é da ordem de

$$\Phi_2 \sim -GM_1 \frac{1}{R} \left(\frac{r_1}{R}\right)^5, \quad (3.229)$$

que é da mesma ordem de grandeza do termo de $j=5$ da expansão do potencial de maré da massa puntual (Eq. 3.213).

Dessa forma, a aproximação de que a componente secundária é uma massa puntual corresponde à aproximação de que $-GM_1 \frac{1}{R} \left(\frac{r_1}{R}\right)^5 \approx 0$. Então, para sermos consistentes com essa aproximação, devemos estender as somas das Eqs. (3.211), (3.213) e (3.214) somente até $j=4$ (Chandrasekhar, 1933). Os termos com $j > 4$, em princípio, carregam informações não desprezíveis a respeito da distribuição de massa da secundária, ρ_2 , que sofre deformações devido à presença da primária, e isso, não é previsto pela teoria que desenvolvemos aqui, pois já consideramos, *a priori*, que a secundária é puntual.

3.3.6 Resumo e Discussões

Neste capítulo, deduzimos o potencial efetivo total de sistema binário, Ψ , no referencial de uma das estrelas, que denominamos “estrela 1”, e mostramos como esse potencial deve ser levado em conta nas equações estelares constitutivas, que estão implementadas no código ATON e em códigos semelhantes. A estrela companheira, denominada “estrela 2”, é uma massa puntual. Resumiremos, aqui, os principais resultados. Para facilitar futuras referências, algumas equações espalhadas por este capítulo serão reescritas aqui.

3.3.6.1 Resumo

A estrela 1 tem rotação intrínseca diferencial *shellular* dada pela velocidade angular $\Omega(\Psi)$, que é constante ao longo das cascas equipotenciais da estrela, mas que pode variar, mudando-se de casca. Essa estrela, também, gira em torno do centro de massa do sistema binário, localizado num ponto do segmento que liga os centros de massa das duas estrelas, com velocidade angular orbital $\omega(t)=\dot{\theta}_o(t)$, e a extensão dessa separação é $R(t)$.

A separação entre os centros de massa das estrelas, $R(t)$, e a velocidade angular orbital, $\omega(t)=\dot{\theta}_o(t)$, se relacionam pelas equações (3.130) e (3.131), que em si, sintetizam as três leis de Kepler.

Os vetores velocidade angular rotacional da estrela e velocidade angular orbital, Ω e ω , não precisam ser paralelos. Permitimos a Ω ter uma inclinação geral em relação a ω , mediante a definição de dois ângulos constantes (parâmetros livres, que podemos escolher), β e $\bar{\alpha}$. Temos, então, as duas velocidades angulares, de orientação constante¹⁹, $\omega=\omega(t)\mathbf{e}_z$ e $\Omega=\Omega(\Psi) (\sin \bar{\beta} \cos \bar{\alpha} \mathbf{e}_x + \sin \bar{\beta} \sin \bar{\alpha} \mathbf{e}_y + \cos \bar{\beta} \mathbf{e}_z)$, como mostra a figura 3.3.

No referencial da estrela 1, S , a orientação do vetor Ω não é constante. Devido ao movimento orbital, esse vetor descreve um cone em torno do vetor ω . Definimos por Θ o ângulo entre o vetor Ω e um vetor posição qualquer, \mathbf{r} , contido no interior da estrela 1. Assim, sendo θ e ϕ as coordenadas angulares desse vetor \mathbf{r} , nós temos que Θ obedece a relação dada por, (Eq. 3.126),

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta \cos(\phi - \alpha) \quad (3.230)$$

onde $\beta=\bar{\beta}$ (ou seja, β é constante) e $\alpha(t)=\bar{\alpha} + \pi - \theta_o(t)$ (ou seja, α varia no tempo, opostamente à variação de θ_o). Quando Ω e ω são paralelos, $\beta=0$, e teremos $\Theta=\theta$.

O potencial efetivo, Ψ , do sistema binário, no referencial da estrela 1, onde as equações constitutivas estão escritas, é dado pela soma $\Psi=\Psi_s + \Psi_d + \Psi_r + \Psi_t$, onde as primeiras

¹⁹Mas, não nos esqueçamos que esse vetores tem magnitude variável. O primeiro varia sua magnitude ao mudarmos de *shell* ao longo da estrutura estelar (pois $\Omega=\Omega(\Psi)$), e o segundo varia sua magnitude com o tempo (pois $\omega=\omega(t)$).

duas funções,

$$\Psi_s = -G \frac{1}{r} M_\Psi(r_o, t) , \text{ e} \quad (3.231)$$

$$\Psi_d = \frac{4\pi}{3} r_o^{-3} P_2(\cos \Theta) \int_0^{r_o} \rho(r'_o, t) \frac{r_o'^7}{M_\Psi} \Omega^2 \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} dr'_o \quad (3.232)$$

$$- 4\pi G M_2 \sum_{j=2}^4 \frac{P_j(\cos \lambda)}{(r_o R)^{j+1}} \int_0^{r_o} \rho(r'_o, t) \frac{r_o'^{3+2j}}{M_\Psi} \frac{3 + j + \eta_j}{j + \eta_j} dr'_o , \quad (3.233)$$

correspondem ao potencial criado pela distribuição de massa da estrela ($\Psi_s(r_o, \theta, \phi, t)$ é a parte esfericamente simétrica do potencial gravitacional e $\Psi_d(r_o, \theta, \phi, t)$ é a distorção da simetria esférica); as duas últimas funções,

$$\Psi_r = -\frac{1}{3} \Omega^2 r^2 (1 - P_2(\cos \Theta)) , \text{ e} \quad (3.234)$$

$$\Psi_t = -G M_2 \frac{1}{R} \sum_{j=2}^4 \left(\frac{r}{R} \right)^j P_j(\cos \lambda) , \quad (3.235)$$

são o potencial perturbador ($\Psi_r(r_o, \theta, \phi, t)$ é a parte correspondente à rotação *shellular*, e $\Psi_t(r_o, \theta, \phi, t)$ é a parte correspondente à influência de maré causada pela estrela companheira puntual).

A forma da superfície equipotencial $\Psi=\text{constante}$, cujo raio médio é r_o , é

$$r = r_o \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\Omega^2 r_o^3}{G M_\Psi} (2k_2(r_o, t) + 1) P_2(\cos \Theta) + \frac{M_2}{M_\Psi} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{r_o}{R} \right)^{j+1} (2k_j(r_o, t) + 1) P_j(\cos \lambda) \right) , \quad (3.236)$$

que deve ser devidamente substituída nas equações (3.231), (3.234) e (3.235).

As funções $\eta_j(r_o, t)$ e $k_j(r_o, t)$ ($2k_j = \frac{j+1-\eta_j}{j+\eta_j}$) devem ser obtidas mediante a resolução numérica das equações de Radau (Eq. 3.192), com a condição de contorno dada por $\eta_j(0, t) = j - 2$.

Finalmente, para se levar em conta os efeitos desse potencial nas equações de estrutura estelar, devemos voltar ao método de Kippenhahn-Thomas, como explicitado na subseção 3.3.5.1. Essa, no entanto, é uma tarefa para um trabalho posterior, pois já podemos antever que ela será bastante árdua. Além disso, nessas equações generalizadas, encontramos um problema relacionado às escalas de tempo: o período orbital de um sistema binário é, em geral, várias ordens de grandeza menor que um passo temporal evolutivo do código ATON! Ainda precisamos estudar maneiras interessantes de se lidar com esse problema. Finalmente, após a implementação, completa ou modificada, do novo potencial no código, naturalmente vários testes devem ser efetuados no programa. Concluimos, então, que a implementação desse potencial generalizado Ψ , sob qualquer forma, está além do escopo deste trabalho.

3.3.6.2 Discussões Finais

A soma das equações (3.231), (3.233), (3.234) e (3.235), com $\Theta = \theta$ e $R(t)$ constante, corresponde à equação de número “52” de Landin et al. (2009). Assim, essas equações representam a generalização das equações utilizadas naquele trabalho. Elas permitem

uma órbita não-circular e eixos de rotação e orbital não paralelos. A dedução dessas equações provou que o potencial centrífugo de translação orbital foi, de fato, incluído.

Assim, no código ATON, presentemente temos implementados os potenciais de rotação e de maré, sendo que este último está restrito ao de uma órbita circular e com eixos paralelos. Também temos que não há qualquer vínculo entre as velocidades angulares ω e Ω . Elas não precisam ser iguais (ou, de alguma forma, calibradas uma em relação à outra), como uma simples análise das equações poderia levar a acreditar, pelo fato de que ω não aparece nelas. Na verdade, poderíamos trocar um dos três parâmetros: M_1 , M_2 e R , por ω . Ao especificarmos M_1 , M_2 e R , parâmetros necessários ao funcionamento do código, ω fica automaticamente dada por $\omega = \sqrt{G(M_1 + M_2)/R^3}$. Aliás, recordemos ainda que o código já permite rotação diferencial da estrela, $\Omega = \Omega(\Psi)$, desde o trabalho de Mendes et al. (1999). Assim, reiteramos que não há qualquer vínculo entre ω e Ω no código ATON atual.

Como vimos na seção 3.3.4, a utilização de rotação diferencial nos trabalhos anteriores é problemática, no sentido de que a teoria sobre a qual esses trabalhos se apoiam considera restritamente estrelas em rotação de corpo rígido (Kopal, 1959, 1978). Isso pode vir a ser um problema no caso em que a estrela em análise desenvolver uma rotação altamente diferencial.

Como mencionamos mais acima, há o grave problema de que o período de translação orbital do sistema é, em geral, várias ordens de grandeza menor que um passo temporal evolutivo do código ATON. O potencial Ψ , no caso de eixos inclinados ($\beta \neq 0$) e/ou órbita elíptica ($R = R(t)$), possui termos periódicos que variam muito rapidamente, do ponto de vista da evolução da estrela. É possível ajustar os intervalos de tempo do código ATON para valores assim tão pequenos. Mas, provavelmente, o que se deveria fazer para uma futura análise evolutiva é uma espécie de média temporal sobre o potencial Ψ . Ou, o que pode ser mais interessante, poder-se-ia fazer um estudo de como a estrutura da estrela é modificada, ao longo do movimento orbital, em idades específicas dessa estrela. Essas idades poderiam ser as obtidas no ajuste do modelo às massas, raios e temperaturas efetivas de estrelas reais (supondo que as estrelas do sistema binário têm a mesma idade). Isso significa que estaríamos utilizando o código evolutivo ATON para atingir a idade do sistema binário, e, depois de atingida essa idade, o código deixaria de ser um código de evolução. Ele passaria a ser um código “estrutural dinâmico”, onde a estrutura da estrela se ajustaria a mudanças que ocorrem numa escala de tempo muito menor que a escala de tempo evolutiva.

A implementação de Ψ no código ATON é particularmente trabalhosa no caso em que os eixos não são paralelos ($\beta \neq 0$). No entanto, no caso em que esses são paralelos, $\Theta = \theta$, e a órbita é elíptica ($R = R(t)$), as equações (3.231), (3.233), (3.234) e (3.235) são formalmente idênticas à equação “52” de Landin et al. (2009). Somente temos, neste caso, que R varia de maneira periódica na curta escala de tempo do período orbital. Isso significa que o código ATON já está praticamente pronto para simular os efeitos sobre a estrutura de uma estrela, decorrentes de esta pertencer a um sistema binário com uma órbita não circular, em várias idades dessa estrela! Como mencionado no parágrafo anterior, bastaria para isso, escolher a idade (ou número associado ao modelo estrutural) e variar R , ao longo de uma elipse de excentricidade “ e ” dada pelas Eqs. (3.130) e (3.131), nesse modelo. A estrela se ajustará instantaneamente ao novo valor do potencial nessas novas porções da órbita. A figura 3.7 descreve como isso poderia ser feito no código. Seria, por exemplo, interessante verificar se haveriam alterações significativas nas funções η_j e nas constantes

de movimento apsidal k_j , que dependem da estrutura interna da estrela (ver discussões no capítulo 5).

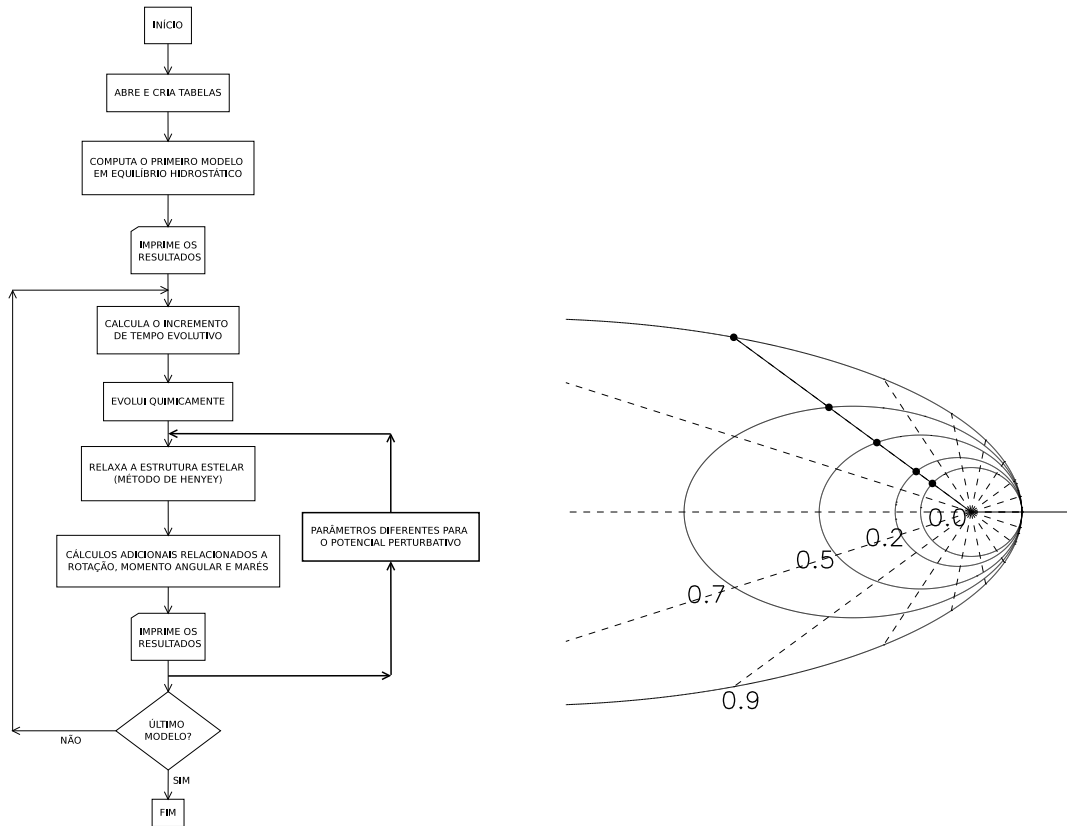


Figura 3.7: Simulando efeitos estruturais dinâmicos com o código ATON: Como mostra a figura da esquerda, após atingida certa idade, entrariamos no *loop* menor esboçado à direita do fluxograma. O parâmetro R , a distância entre as estrelas, seria variado seguindo uma órbita elíptica de excentricidade e , como uma das esboçadas na figura da direita. O novo R alterará o potencial Ψ e, portanto, a estrutura da estrela. Então, a nova estrutura será relaxada, e, após a convergência, várias quantidades físicas de interesse serão calculadas e impressas. A estrela não evoluirá quimicamente.

Finalmente, citemos que, apesar de não haver extensões da teoria de Laplace para abarcar rotação diferencial *shellular*, existem extensões dessa teoria que consideram aproximações de ordem superior à primeira (descrita neste trabalho). Uma teoria de segunda ordem pode ser encontrada em Kopal (1978) e em referências lá contidas. Sua dedução é bastante semelhante à feita nesta seção 3.3. Mas, obviamente, ela é bem mais trabalhosa e leva a uma equação diferencial mais complicada que a equação de Radau (Kopal, 1978).

Nunca deixe o computador saber que você está com pressa!
autor desconhecido

Capítulo 4

O Ponto de Controle (“Checkpoint”)

4.1 Tempos de Execução

Em geral, a implementação de novos fenômenos físicos em códigos de evolução estelar (que são códigos complexos e muito grandes) é um trabalho demorado, pelo fato de que essa nova física deve ser testada várias vezes, em diversas situações, além de ter que ser integrada com a física já existente, que certamente será influenciada pelas novas adições. À medida que mais fenômenos físicos vão sendo incorporados e, em decorrência disso, as previsões do código vão ficando mais realistas (se a física foi incorporada corretamente), maiores, também, vão se tornando os tempos de execução do programa (em decorrência do aumento no número de cálculos).

A versão 2.0 do código ATON, anterior ao trabalho de Mendes (1999), não possui rotação ou distorções de maré. Foi verificado que a simulação da evolução de uma estrela de 1 massa solar, com composição química inicial solar, da PMS até o final da MS (cerca de 9 bilhões de anos), usando esse código, numa máquina com processador XEON de 1.8 GHz, requer cerca de 3 minutos de processamento. Esse tempo, no entanto, aumenta de um fator de 7, se deixarmos a estrela evoluir até a fase de gigante vermelha (cerca de 13 bilhões de anos), pois, na fase posterior à MS, as escalas de tempo dos processos físicos se tornam pequenas, relativamente, e, em decorrência disso, o avanço temporal da simulação passa a requerer um número maior de passos do programa (Landin, 2006).

A versão 2.3 (mais realista) do código ATON (Mendes et al., 1999) inclui 3 formas possíveis de se considerar rotação: a saber, (1) rotação de corpo rígido, (2) rotação diferencial ao longo de toda a estrela, com conservação local de momento angular e (3) rotação diferencial com conservação local de momento angular nas regiões radiativas e rotação de corpo rígido nas regiões convectivas¹. Nos casos 1 e 2, a simulação, da PMS até a MS requer cerca de 13 minutos de processamento, ao passo que, no caso 3 esse tempo aumenta para cerca de 25 minutos.

¹Nos casos 2 e 3, a redistribuição interna de momento angular pode ser ativada (Mendes, 1999).

4.2 Parada de Controle ou “Checkpointing”

O mecanismo de *checkpointing* (ou, o **checkpoint**) consiste em se poder interromper o programa em um determinado estágio de execução e, posteriormente, poder continuar a execução partindo-se do ponto de interrupção e chegando-se ao mesmo resultado que se chegaria, caso o programa não tivesse sua execução interrompida. A figura 4.1, adaptada de Landin (2006), ilustra a ideia do mecanismo, de forma esquemática.

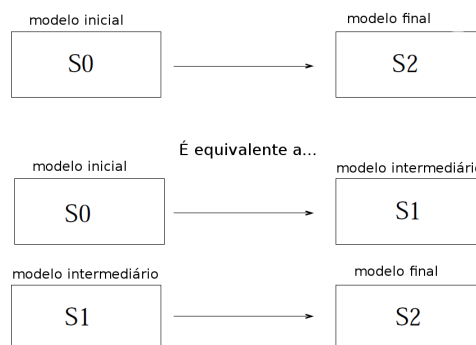


Figura 4.1: Diagrama esquemático mostrando o funcionamento do mecanismo de *checkpointing*. Com esse último em funcionamento, nós temos que a execução do programa, desde o modelo (ou “estado”) inicial S_0 até o modelo final S_2 , é totalmente equivalente à execução do programa, desde o modelo inicial S_0 , até um modelo intermediário S_1 , onde o programa é interrompido, sucedida de uma segunda execução, desde o modelo intermediário S_1 , até o modelo final S_2 (totalmente idêntico ao modelo S_2 obtido na execução sem *checkpoint*).

Dessa forma, é preciso salvar todas as variáveis necessárias, do código, numa dada idade (ou, o que é equivalente, num dado modelo), de tal forma que essas variáveis possam ser recuperadas (lidas novamente) e usadas como ponto de partida numa segunda vez que o programa for executado. A memória deve ser armazenada em configuração de máquina (ou seja, em representação binária), e o programa precisa ter um mecanismo que tanto salve quanto recupere essa memória quando necessário.

A vantagem do *checkpoint* é que este permite uma grande economia de tempo, por exemplo, na necessária fase de testes, após a implementação de novas rotinas no código.

A formulação e a atualização desse tipo de algoritmo não é muito complicada, e são uma forma adequada de se tomar contato com o código e suas particularidades.

4.2.1 O Checkpoint no Código ATON 2.x

As primeiras versões do código ATON, criadas pelos astrônomos italianos, já possuíam um mecanismo de salvamento simples, que imprimia os valores das principais variáveis do código em arquivos de texto, na forma de tabelas, e que podia, também, ler esses valores. Esse era um *checkpoint* antigo, que não tinha o rigor de salvar os valores das variáveis a nível binário, e que já estava desatualizado desde antes do trabalho de doutorado de Luiz Mendes, no final da década de 1990.

A primeira versão de um mecanismo de *checkpointing*, tal como descrevemos no começo desta seção, foi implementada no código ATON por Natália Landin (Landin, 2006), no

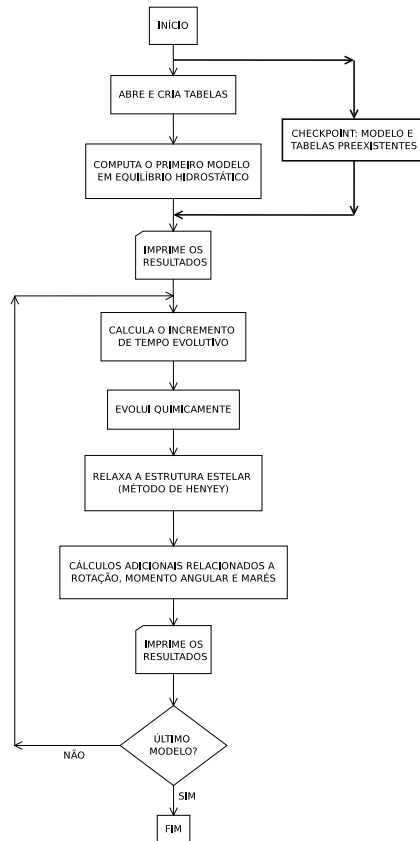


Figura 4.2: Diagrama dando ênfase ao funcionamento do mecanismo de *checkpointing*.

começo de seu doutorado², em conjunto com Luiz Mendes, que já tinha experiência com o mesmo código (Mendes, 1999; Mendes et al., 1999). A forma como o *checkpoint* age no programa principal está ilustrada no fluxograma da figura 4.2.

A versão do código ATON utilizada para a implementação do *checkpoint* foi a versão 2.1, desenvolvida por Mendes (1999); Mendes et al. (1999). No estágio sanduíche de seu doutorado, na Itália, Landin implementou novas modificações no modelo (Seção 2.4) e, devido à premência dos prazos, o *checkpoint* não foi reatualizado para levar em conta essa nova física. As implementações posteriores, inclusive as de maré, não puderam aproveitar as vantagens do processo.

O código ATON 2.1, anterior às modificações implementadas por Landin, é composto por 155 subrotinas escritas em linguagem FORTRAN. Dentre elas, o programa de nome *codice.f* (“código”, em italiano) é o módulo principal do programa, e é ele o programa descrito pelo fluxograma da figura 2.12. Esse programa chama todas as outras 154 subrotinas, nos momentos devidos, para que computações determinadas da física estelar sejam feitas. As subrotinas do código ATON comunicam-se umas com as outras através de blocos de memória comum da linguagem FORTRAN: os “blocos COMMON”. As variáveis de uma subrotina podem ser separadas em dois grupos: o das “variáveis locais”, que, como o nome indica, são as variáveis definidas e usadas apenas no escopo local da própria subrotina, e o das “variáveis compartilhadas” (ou “variáveis em COMMON”), que são

²Assim, o mecanismo foi implementado antes de todas as implementações físicas que deram corpo ao seu trabalho de doutorado (Landin, 2006): os “efeitos de binaridade” e a inclusão de atmosfera não-cinza (Seção 2.4)

variáveis armazenadas em locais especiais da memória do computador, e que podem ser usadas e modificadas por diversas subrotinas. Como as subrotinas são “unidades de programa” separadas, não há conflito se nomes de variáveis e/ou números de comandos internos a elas forem os mesmos em outras subrotinas ³.

Na criação do *checkpoint*, Natália Landin e Luiz Mendes estudaram o modelo e criaram diversos blocos COMMON adicionais aos já existentes, fazendo com que muitas das variáveis das subrotinas do código pertencessem a algum bloco COMMON. O procedimento está ilustrado de forma esquemática na figura 4.3.

Praticamente todas as 155 subrotinas do código receberam novos COMMONS cujos nomes eram da forma “CKP-(iniciais da subrotina)” (procedimento 1 – 2 da figura 4.3). Assim, por exemplo, a subrotina `atmosf.f` ganhou um COMMON de nome “CKPATM”, que continha todas as suas variáveis locais.

Em seguida, Landin (2006) criou as subrotinas “`checkw.f`” e “`checkr.f`”, que possuem a declaração de todos os blocos COMMON do programa. A subrotina `checkw.f` é encarregada de criar (ou “escrever”) o arquivo binário (arquivo no formato *unformatted* da linguagem FORTRAN) que contém todas as variáveis necessárias para reiniciar o programa num ponto qualquer, e a subrotina `checkr.f` é encarregada de recuperar (ou “ler”) os dados, colocando o programa em condições de continuar os cálculos (figura 4.1). Além disso, ela modificou algumas subrotinas já preexistentes, adaptando-as às novas condições. O procedimento foi testado sob várias condições e utilizado nos testes das implementações efetivadas naquela ocasião.

Finalmente, após o sucesso da implementação do mecanismo de *checkpointing*, Landin iniciou o processo de reduzir o tamanho do arquivo binário gerado. Primeiramente, passou-se, com cuidado, as variáveis verdadeiramente úteis para o mecanismo para os COMMONS já preexistentes (ou para os criados após o sucesso do mecanismo), e, depois, todas as linhas onde haviam declarações de COMMONS de iniciais “CKP”, agora contendo, apenas, variáveis cujo salvamento é desnecessário para o funcionamento do mecanismo (procedimento 2 – 3 da figura 4.3), foram comentadas.

4.3 Atualização do Checkpoint

Para o *checkpoint* ser reatualizado, após a implementação de novas físicas no modelo, o mesmo procedimento feito por Landin e ilustrado na figura 4.3 deve ser repetido. Já será adiantado, aqui, que *o checkpoint não foi atualizado com sucesso, neste trabalho*, pois verificamos, tardiamente, que a versão do código que acreditávamos possuir o mecanismo funcional, de fato não o possuía.

Vamos chamar de “V1” a versão antiga do código ATON 2.1, que, (em princípio) possuía o *checkpoint* funcional, mas não possui as implementações de maré e atmosfera não-cinza de Landin (2006), e de “V2”, a versão recente do código (ATON2.4), com as

³Isso pode ser particularmente inconveniente para o caso de variáveis declaradas em blocos COMMON. Imaginemos duas subrotinas que trabalham juntas e dividem as mesmas variáveis, de tipo “REAL”, contidas num mesmo bloco COMMON de nome “GREGO”. Se, em uma rotina, a declaração de COMMON dessas variáveis for “COMMON /GREGO/ ALFA,BETA”, e na outra for, digamos, “COMMON /GREGO/ BETA123,ALFA123”, o compilador não acusará nenhum erro e considerará “ALFA” equivalente a “BETA123” e “BETA” equivalente a “ALFA123”, o que, provavelmente, não será o que esperamos!

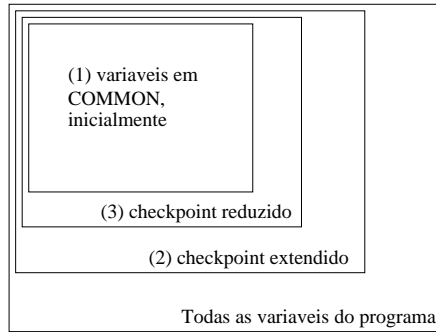


Figura 4.3: Diagrama ilustrativo dos passos necessários para a criação e a atualização do *checkpoint*. Parte-se, (1), das variáveis em COMMON já existentes (e incluídas nas subrotinas *checkr.f* e *checkw.f*). Cria-se novos blocos COMMON de variáveis e inclui-se esses novos blocos nas subrotinas *checkr.f* e *checkw.f*, (2), até que o mecanismo funcione perfeitamente, como ilustra a figura 4.1. Finalmente, para reduzir a complexidade computacional, retira-se das subrotinas *checkr.f* e *checkw.f* as variáveis desnecessárias ao funcionamento do *checkpoint*, (3).

implementações de maré, mas com o *checkpoint* desatualizado. Nosso objetivo é atualizar o *checkpoint* da versão V2, partindo do *checkpoint* da versão V1.

A versão V2 do código é composta por 177 subrotinas, sendo que o módulo principal é, como já dito, o de nome *codice.f*.

Dessas 177 subrotinas de V2, verificamos, usando o comando Unix “diff”, que 88 são idênticas às suas correspondentes, de mesmo nome, de V1.

Outras 50 subrotinas de V2 possuíam COMMONS com as iniciais “CKP” comentados. Esses, são os COMMONS remanescentes do processo de criação do primeiro *checkpoint*. Quando descomentamos as linhas desses COMMONS, verificamos que eles possuíam todas as variáveis locais de suas subrotinas, como esperado. Reutilizamos, então o comando “diff” e verificamos que todas essas 50 subrotinas também se tornaram idênticas às suas correspondentes de V1.

Os resultados dos parágrafos anteriores sugerem que essas 138 (=88+50) subrotinas podem não ter sido alteradas nos processos subsequentes à versão V1, que culminaram na versão V2. Assim, o processo de atualização do *checkpoint* pode não precisar passar por elas. No entanto, não se pode ter certeza disso, ainda.

Das 39 (=177–138) subrotinas de V2 remanescentes, 22 são totalmente novas. Elas não possuem correspondentes na versão V1. Para elas, é claro que o *checkpoint* deve ser estendido.

As 17 (=39–22) remanescentes tem correspondentes na versão V1, mas verificou-se que elas sofreram muitas alterações em relação às suas correspondentes de V1 (ao contrário das 50 citadas anteriormente, que se tornaram iguais às correspondentes de V1 quando suas linhas foram descomentadas). Assim, temos que, para elas, *checkpoint* também deve ser estendido, com cuidado.

Seguindo os passos de Mendes e Landin, foram criados 39 novos COMMONS “CKP- (iniciais da subrotina)” para essas 39 subrotinas mais problemáticas citadas nos dois últimos parágrafos. Com sorte, se ao refazer o “processo 1 – 2” da figura 4.3, o mecanismo voltasse a funcionar, não precisaríamos nos preocupar mais com as 138 subrotinas remanescentes.

As declarações de variáveis das 39 subrotinas foram copiadas num arquivo de texto.

Todas as variáveis que eram declaradas nas suas subrotinas e também em blocos COMMON eram, necessariamente, variáveis compartilhadas, e foram excluídas. As variáveis que permaneceram foram as variáveis locais. Para elas, os novos COMMONS “CKP” foram criados, em suas subrotinas e nas subrotinas `checkr.f` e `checkw.f`, encarregadas de ler e escrever, respectivamente, o arquivo binário do *checkpoint*. Assim, estendeu-se o *checkpoint* a todas as variáveis (incluindo as locais) dessas 39 subrotinas.

Então, o novo *checkpoint* foi testado. O teste consistiu, sempre, em executar o programa 3 vezes ⁴. Primeiramente, executava-se o programa, desde o modelo S_0 (na notação da figura 4.1), até um modelo posterior S_2 . Todas as saídas do programa eram armazenadas. Depois, o programa era executado, desde o mesmo modelo S_0 , até um modelo intermediário S_1 , e o arquivo binário para esse modelo era criado e armazenado. Finalmente, o programa era novamente executado, agora lendo o arquivo binário (ou equivalentemente, em princípio, partindo do modelo intermediário S_1), como indica a figura 4.1, até o modelo final S_2' . O *checkpoint* estaria atualizado, se verificássemos que os modelos S_2 e S_2' fossem totalmente idênticos.

4.3.1 Os Resultados

O processo descrito no penúltimo parágrafo foi feito e refeito. Além disso, tomou-se o cuidado de manter todos os blocos COMMON alinhados, ou seja, com variáveis dos tipos “inteira”, “real” ou “caractere” não se misturando dentro dos blocos.

Verificamos que o *checkpoint* aparentemente funcionava, quando os modelos S_2 e S_2' eram próximos do modelo S_1 . Quando, no entanto, deixávamos a estrela evoluir bastante, e verificávamos S_2 e S_2' em idades mais avançadas, as diferenças começaram a surgir. Isso significa que diferenças já existiam a nível binário, logo no modelo posterior a S_1 , mas eram tão pequenas nesses primeiros modelos após S_1 , que, nas saídas, os resultados (arredondados) eram idênticos.

Primeiro, estávamos testando uma estrela de $0.7M_{\odot}$. Estabelecemos o modelo de número 50 como o ponto de controle, e verificamos que as diferenças começavam a surgir por volta do modelo 350. Quando, no entanto, passamos a testar uma estrela de $1M_{\odot}$, com ponto de controle no modelo 50, as diferenças já apareciam no modelo 54!

O próximo passo seria atacar, então, as 138 subrotinas remanescentes. Antes, porém, decidimos verificar, novamente, se a versão V1 tinha, de fato, o *checkpoint* funcional, e para a nossa surpresa, verificamos que não: o *checkpoint* da versão V1 também não funcionava! O *checkpoint* da versão V1 também apresentava o mesmo comportamento do do *checkpoint* da versão V2 atualizado neste trabalho: para massas baixas, o desvio era difícil de se detectar, mas para massas mais altas, o erro era mais aparente.

Acreditamos que o não funcionamento do *checkpoint* da versão V1, a qual comprovadamente funcionava na época da primeira implementação do *checkpoint*, esteja associado a uma mudança no compilador que utilizamos (o gfortran, desenvolvido pelo GNU Project). Os compiladores, que são um conjunto de programas que transformam um código escrito numa linguagem de programação de alto nível (como a linguagem FORTRAN) num arquivo executável (um arquivo binário, escrito em linguagem de máquina), são constan-

⁴Na verdade, esse seria apenas o primeiro teste. Caso ele fosse bem sucedido, seria necessário, mais futuramente, mas talvez ainda neste trabalho, fazer um segundo teste mais rigoroso em que os valores de todas as variáveis de S_2 e S_2' seriam comparados, *bit* por *bit*. Esse segundo teste diria se, de fato os modelos S_2 e S_2' são totalmente iguais

temente modificados e melhorados por seus produtores. Acreditamos que uma variação recente no compilador que utilizamos tenha tido, como efeito, uma reinterpretação na forma como a máquina vê o mecanismo, fazendo com que ele não funcione corretamente. Assim, como não sabemos, exatamente, como lidar com esse problema, e por premência de tempo, decidimos abandonar por aqui o processo de atualização do *checkpoint*.

Para constar, vamos mencionar que o arquivo binário criado pelo *checkpoint* da versão V1 tem, de tamanho, 8.5 Mb. O arquivo binário criado pelo *checkpoint* da versão V2, antes das nossas modificações descritas nesse capítulo, tem 7.7 Mb. Devemos lembrar que o *checkpoint* da versão V1 e o *checkpoint* da versão V2, antes de nossas modificações, são o mesmo *checkpoint*, desatualizado desde as novas implementações de Landin. O segundo arquivo binário é menor que o primeiro devido ao fato de que, na versão V2, o processo 2 – 3 (figura 4.3) foi realizado: as linhas contendo as declarações de variáveis desnecessárias foram comentadas. Finalmente, o arquivo binário criado pelo *checkpoint* da versão V2, após as nossas modificações, tem 9.0 Mb. Ele contém as variáveis que estavam comentadas e as outras novas variáveis criadas por Landin.

4.4 Conclusão: Status Atual do Checkpoint

Os testes sobre os novos fenômenos físicos implementadas no código ATON e a unificação das várias versões desse código dependem, para serem práticas, da atualização do mecanismo de *checkpointing*. Este, no entanto, ainda se encontra desatualizado.

A atualização do mecanismo deve ser feita, seguindo-se os passos delineados neste capítulo, e à luz dos novos compiladores. É uma tarefa um pouco mecânica, mas não é árdua, e é uma boa forma de se introduzir o código ATON a estudantes interessados em conhecê-lo.

*Todos os modelos estão errados.
Alguns são úteis.*
George Box

Capítulo 5

Movimento Apsidal

Parafraseando Schwarzschild (1958), os astrofísicos não tem a mesma liberdade dos demais físicos de aplicar perturbações aos objetos de seus estudos, para, então, observar os resultados. A natureza, no entanto, fez o trabalho de aplicar perturbações a uma grande amostra de suas estrelas, e cabe, então, aos astrofísicos, o trabalho de observar e estudar os resultados desses experimentos naturais. Pode-se dizer que há quatro tipos principais de perturbações sobre as estrelas: “rotação”, “campos magnéticos”, “pulsações” e “estrelas companheiras”, sendo que todas elas (e suas relações entre si) representam intensas áreas de pesquisa. A primeira foi o objeto de estudo dos trabalhos de Mendes (1999); Mendes et al. (1999). A segunda é, ainda hoje, um grande desafio teórico (D’Antona et al., 2000). A terceira é o objeto de estudo da heliossismologia e da promissora astrossismologia. A quarta foi o principal objeto de estudo do trabalho de Landin et al. (2009) e deste presente trabalho.

Uma das principais formas de se testar a teoria desenvolvida no capítulo 3 é através do movimento da linha de ápsides de sistemas binários reais. O movimento apsidal é uma consequência imediata da teoria descrita naquele capítulo, e sua referência teórica mais avançada é, também, o livro de Kopal (1959).

O “teste de movimento apsidal” foi a principal motivação do trabalho de Landin et al. (2009), e tornou-se uma boa fração dos estudos que culminaram neste trabalho.

Na seção 5.1 faremos uma revisão da literatura a respeito do movimento apsidal, discutindo os pontos principais da teoria e das observações. Na seção 5.2, mencionaremos os principais resultados do trabalho de Landin et al. (2009). Na seção 5.3, finalmente, usaremos o código ATON para discutir os efeitos de uma parametrização não-física, feita pelos autores, sobre a evolução estelar e sobre as constantes de movimento apsidal.

5.1 O Teste de Movimento Apsidal

5.1.1 Breve História do Teste

Em um sistema de estrelas binárias próximas, as duas estrelas componentes irão se distorcer mutuamente. O quanto as estrelas serão distorcidas depende das suas estruturas internas, e, portanto, a medida dessas distorções torna-se um teste para os modelos de interior. Um efeito das distorções de ambas as estrelas é que elas alteram a forma de sua força de atração mútua, provocando o desvio da forma newtoniana (radial e inversamente proporcional ao quadrado da distância - Seção 2.2.1.2), o que acarreta em perturbações no movimento orbital dessas estrelas, sendo que a perturbação mais facilmente observável é o movimento da linha de ápsides (Seção 2.2.1.2).

O primeiro a propor a ideia de se medir o movimento do periastro de sistemas binários de estrelas para obter alguma informação a respeito da estrutura interna de suas componentes foi Henry Norris Russell, em 1928 (Giménez, 2007). A ideia estava correta, mas naquele tempo, as equações para o movimento apsidal ainda não haviam sido completamente desenvolvidas.

Cowling (1938) identificou o parâmetro de estrutura interna k_2 (Eq. 3.195) como relacionado à taxa de movimento apsidal através dos raios relativos das estrelas componentes, elevados à quinta potência. Dessa forma, medidas muito precisas dessas razões seriam necessárias para que fosse possível uma interpretação confiável dos movimentos apsidais observados. Um ano depois, Sterne (1939) estendeu o trabalho de Cowling, expandindo a função associada à taxa de movimento apsidal até termos proporcionais aos raios relativos das estrelas componentes elevados à nona potência. Em paralelo, Levi-Civita, em 1937, encontrou as equações de movimento relativísticas de binárias pontuais excêntricas (Giménez, 2007).

Schwarzschild (1958) revitalizou o teste de movimento apsidal, ao fazer uma comparação entre os dados observacionais daquele tempo (8 sistemas binários) e os novos modelos de estrutura e evolução estelar mais realistas, e, um ano depois, Kopal (1959) estendeu a teoria de movimento apsidal para incluir os efeitos de rotação não-sincronizada e eixos inclinados entre as estrelas e a órbita do sistema.

Batten (1973) fez uma importante revisão crítica do teste de movimento apsidal. Permanecia o problema de que as observações indicavam que as estrelas eram mais centralmente concentradas do que o que previam os modelos. Em outras palavras, as constantes de movimento apsidal observadas, $\bar{k}_{2\text{obs}}$, eram menores que as constantes k_2 previstas pelos modelos (Giménez, 2007). Stothers (1974) introduziu na discussão os efeitos das opacidades adotadas e a rotação estelar. A introdução de rotação e de mais recentes tabelas de opacidades, de fato, levava a modelos mais centralmente concentrados.

Muito mais recentemente, houve uma grande melhora nos modelos, com a publicação das novas tabelas de opacidade de Iglesias & Rogers (1993) (utilizadas pelo código ATON).

A última comparação geral entre modelos e dados observacionais foi publicada por Claret & Willems (2002). Nesse trabalho, os autores revisaram a literatura e ampliaram para 24 o número de binárias eclipsantes com os parâmetros físicos bem determinados para serem usadas no teste de movimento apsidal. Além disso, eles usaram na análise, pela primeira vez, modelos com o formalismo conhecido como “marés dinâmicas” (Smeyers & Willems, 2001). O formalismo de marés dinâmicas está além do descrito no capítulo 3 deste trabalho, que pertence ao formalismo mais clássico, conhecido como

“marés estáticas”. Claret & Willems (2003) mostraram, no entanto, que o formalismo de marés dinâmicas não produz nenhum efeito significativo e que o formalismo clássico pode ser ainda usado, no nível das incertezas observacionais. Na próxima subseção, 5.1.1.1, falaremos brevemente sobre os dois formalismos.

Finalmente, Landin et al. (2009) otimizaram o código de estrutura e evolução estelar ATON para o cálculo, não só da constante k_2 , mas também, de forma inédita, das constantes k_3 e k_4 , no formalismo de marés estáticas. Com isso, os autores fizeram o teste de movimento apsidal utilizando o sistema EK Cep, e compararam seu resultados aos de Claret (2006), obtendo razoável concordância.

5.1.1.1 Marés Estáticas, Marés Dinâmicas e Evolução Orbital

A teoria desenvolvida no capítulo 3 supõe um desacoplamento total entre o movimento orbital e o movimento do fluido da estrela ($\dot{\mathbf{\Omega}}_f = \mathbf{0}$, na seção 3.2.6). Na verdade, através das interações de maré, energia cinética e momento angular são transferidos entre os movimentos rotacionais e orbitais das duas componentes (Zahn, 2008). Devido aos efeitos de viscosidade do fluido das estrelas, que não são desprezíveis na escala evolutiva das estrelas, os sistemas binários tendem a adquirir o estado de menor energia cinética (Zahn, 2008), que corresponde ao caso em que suas órbitas são circulares, e as velocidades angulares de suas componentes são iguais à velocidade angular orbital: $\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{\Omega}_2 = \boldsymbol{\omega}$ (diz-se: “sincronização” e “alinhamento de eixos”). Nesse caso, no sistema S (o sistema em movimento orbital) os fluidos de ambas as estrelas estão em repouso. O quão rápido o sistema tende para esse estado é determinado pela distância entre as duas componentes (quanto mais próximas, mais rápida é a evolução orbital) e pela eficiência dos processos físicos de dissipação no interior das estrelas (Zahn, 2008).

Toda a teoria desenvolvida no capítulo 3 foi feita no formalismo de **marés estáticas**. Nesse formalismo, considera-se que a estrela está sempre em equilíbrio hidrostático (Eq. 3.15), e, portanto, que ela se ajusta instantaneamente às variações temporais de seus potenciais perturbadores. Na realidade, as estrelas do sistema binário só estarão completamente em equilíbrio hidrostático na situação de sincronismo, circularização e alinhamento (e rotação de corpo rígido das componentes) explicitada acima. No entanto, numa primeira análise, podemos imaginar que ela seja válida no caso em que a escala de tempo de maré, $\tau_{\text{tide}} = 2\pi/|\omega - \Omega|$, seja muito maior que a escala de tempo de queda livre, $\tau_{\text{dyn}} = (GM_1/R_*^3)^{-\frac{1}{2}}$ (Sepinsky et al., 2007).

Na teoria de **marés dinâmicas**, a estrela responde, dinamicamente, às variações temporais de suas perturbações. Nessa teoria, os modos de vibração possíveis da estrela (modos acústicos, gravitacionais ou inerciais) podem entrar em ressonância com as variações periódicas do potencial perturbador (Zahn, 2008). Quando os potenciais variam com frequências bem diferentes das frequências de ressonância, a teoria de marés dinâmicas não é muito diferente da teoria de marés estáticas (Claret & Willems, 2003).

De qualquer forma, a teoria explicitada no capítulo 3 é o ponto de partida para o estudo e implementação da teoria de marés dinâmicas (Kopal, 1978), e ela pode ser usada nas estimativas das escalas de tempo de evolução orbital dos sistemas binários (Zahn, 2008). Nesse último caso, insere-se um atraso na resposta estática da teoria de maré estática - ver a figura 1 de Zahn (2008).

5.1.2 Sobre a Comparação entre Observações e Teoria

5.1.2.1 Observações

Desconsiderando os efeitos dos termos com $j > 2$ Eq. (5.7, logo à frente), e considerando que os eixos de rotação intrínsecos das estrelas são paralelos ao eixo orbital, temos que a razão entre os períodos orbital, P , e apsidal, U , é dada por

$$\frac{P}{U} = k_{2,1} \left(\frac{r_{1,1}}{a}\right)^5 \left[\frac{M_2}{M_1} 15f_2(e) + \left(\frac{\Omega_1}{\omega_K}\right)^2 \left(1 + \frac{M_2}{M_1}\right) \frac{1}{(1-e^2)^2} \right] + k_{2,2} \left(\frac{r_{1,2}}{a}\right)^5 \left[\frac{M_1}{M_2} 15f_2(e) + \left(\frac{\Omega_2}{\omega_K}\right)^2 \left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right) \frac{1}{(1-e^2)^2} \right] + \quad (5.1)$$

onde $r_{1,i}$ é o raio médio da i -ésima estrela do sistema Eq. (3.193); $k_{2,i}$ é a constante de movimento apsidal “ k_2 ” da i -ésima estrela do sistema Eq. (3.195), calculada no raio médio $r_{1,i}$; Ω_i é a velocidade angular rotacional da i -ésima estrela; ω_K é a velocidade angular orbital média do sistema binário Eq. (5.6); a e e são, respectivamente, o semieixo maior e a excentricidade da órbita do sistema. A função $f_2(e)$ é dada pela Eq. (5.8).

A equação acima mostra que o movimento observado é devido a uma soma produzida pelas duas estrelas. Assim, as constantes de movimento apsidal, $k_{2,i}$, não podem ser determinadas separadamente. Apenas a sua média,

$$\bar{k}_2 = \frac{c_1 k_{2,1} + c_2 k_{2,2}}{c_1 + c_2} \quad (5.2)$$

onde c_1 e c_2 são, respectivamente, as grandezas que multiplicam $k_{2,1}$ e $k_{2,2}$ na Eq. (5.1), é obtida das observações.

Valores teóricos de \bar{k}_2 podem ser computados para qualquer modelo estelar cuja distribuição de densidade seja conhecida - ver equação de Radau: Eq. (3.192), e a comparação entre teoria e observação deve incluir estimativas das incertezas nos dados empíricos. É interessante ver, da Eq. (5.1), que a teoria desenvolvida no capítulo 3 prevê, somente, o avanço da linha de ápsides, pois as constantes de movimento apsidal são sempre positivas (Seção 3.3.4.2). Como já mencionado na Seção 5.1.1, a contribuição mais importante na incerteza de $\bar{k}_{2\text{obs}}$ é a incerteza na razão dos raios das duas estrelas (Batten, 1973).

Para que a determinação da constante de movimento apsidal média $\bar{k}_{2\text{obs}}$ seja independente de quaisquer modelos, é essencial que apenas binárias eclipsantes sejam usadas (Batten, 1973).

A equação (5.1) mostra que as grandezas necessárias na obtenção de $\bar{k}_{2\text{obs}}$ são: a razão das massas das componentes do sistema, M_1/M_2 , a razão de raios, $r_{1,1}/r_{1,2}$, os períodos do sistema, P , e de rotação da linha de ápsides, U , e, se possível, as velocidades angulares das componentes, Ω_1 e Ω_2 . Quando não se conhece Ω_1 e Ω_2 , é usual supor que ambas são iguais à velocidade angular kepleriana, $\omega_K = 2\pi/P$ (Landin et al., 2009).

Observações espectroscópicas, preferencialmente das duas estrelas, são necessárias para a obtenção da razão das massas e das velocidades radiais das componentes do sistema. Para obter os períodos do sistema e da rotação da linha de ápsides, os tempos entre vários mínimos fotométricos devem ser cuidadosamente medidos. Finalmente, para obter a razão dos raios das componentes do sistema, deve-se ter uma curva de luz muito boa e completa do sistema.

5.1.2.2 Dificuldades Observacionais

A Relatividade prevê um avanço na linha de ápsides de sistemas binários com órbita excêntrica, mesmo no caso em que as duas estrelas podem ser consideradas massas puntuais. Esse efeito não é previsto pelas teorias que fazem uso dos modelos de estrutura e evolução estelar, e, portanto, no teste de movimento apsidal, ele deve ser excluído da análise. O avanço relativístico da linha de ápsides é dado por (Landin et al., 2009)

$$\frac{U_{\text{rel}}}{P} = \frac{c^2 a (1 - e^2)}{3G(M_1 + M_2)} = 1.571 \times 10^5 (1 - e^2) \left(\frac{a}{R_\odot} \right) \left(\frac{M_1}{M_\odot} + \frac{M_2}{M_\odot} \right)^{-1} \quad (5.3)$$

Assim, deve-se proceder, no teste de movimento apsidal, excluindo o efeito relativístico da seguinte forma (Kopal, 1959):

$$\left(\frac{U}{P} \right)_{\text{dyn}} = \left(\frac{U}{P} \right)_{\text{obs}} - \left(\frac{U}{P} \right)_{\text{rel}} \quad (5.4)$$

onde $(U/P)_{\text{dyn}}$ é movimento apsidal clássico, devido às deformações das estrelas, previsto pela nossa teoria Eq. (5.1); $(U/P)_{\text{rel}}$ é o movimento apsidal relativístico Eq. (5.3); e $(U/P)_{\text{obs}}$ é o movimento apsidal observado.

Um problema maior é a possível presença, não detectada, de um terceiro corpo no sistema binário, pois a presença deste (estrela ou planeta massivo) perturba a órbita do sistema binário. O movimento na linha de ápsides provocado pela presença de um terceiro corpo pode ser comparável ao movimento produzido pela teoria aqui apresentada (Batten, 1973).

Um problema menor pode ser a presença de um denso meio na região ocupada pelas estrelas. O meio também pode induzir movimento apsidal. O atrito entre o meio e as estrelas não é importante, mas a atração gravitacional entre o meio e as estrelas gera uma força adicional sobre as componentes do sistema, diferente da atração newtoniana (Batten, 1973).

5.1.2.3 Sobre a Teoria do Movimento Apsidal

O movimento apsidal é a forma mais evidente da perturbação orbital provocada pela alteração na mútua atração das estrelas do sistema binário. Essa alteração é consequência das deformações dessas estrelas. Do ponto de vista prático, desenvolve-se a teoria associada a essa perturbação orbital a partir da formulação de Hamilton-Jacobi da mecânica de Newton (de Luca, 1982).

Na formulação de Hamilton-Jacobi, constroi-se a função hamiltoniana do sistema binário. Essa última se separa na seguinte soma: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_o + \Delta\mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}_o = T_o + U_o$ (energia mecânica orbital dos centros de massa das duas estrelas) e $\Delta\mathcal{H} = T_{\text{rot1}} + T_{\text{rot2}} + U_{\text{auto1}} + U_{\text{auto2}}$ (soma das energias cinéticas rotacionais e das autoenergias potenciais gravitacionais não-esféricas das duas estrelas). No caso em que as duas estrelas são puntuais ou esféricas, a perturbação $\Delta\mathcal{H}$ é nula e temos $\mathcal{H} = \mathcal{H}_o$. Então, postulamos a seguinte transformação canônica: $(q_j, p_j) \rightarrow (Q_j, P_j)$, gerada pela função geratriz $\mathcal{S}(q_j, P_j, t)$. As coordenadas canônicas q_j e p_j são a solução do problema. Elas se relacionam às novas coordenadas pelas relações $p_j = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_j}$ e $Q_j = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P_j}$, e a função geratriz vai satisfazer a equação $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -\mathcal{H}_o$. Devemos definir as constantes de movimento Q_j e P_j , e, então, resolver as três citadas

equações. Obteremos as soluções $q_j=q_j(Q_k, P_k, t)$ e $p_j=p_j(Q_j, P_j, t)$, onde as constantes de movimento variam de acordo com as equações $\dot{Q}_j=\frac{\partial\Delta\mathcal{H}}{\partial P_j}(Q_k, P_k, t)$ e $\dot{P}_j=-\frac{\partial\Delta\mathcal{H}}{\partial Q_j}(Q_k, P_k, t)$.

A formulação de Hamilton-Jacobi citada no parágrafo anterior é desenvolvida no livro de mecânica de Goldstein et al. (2001). As constantes de movimento Q_j e P_j , para o nosso problema, são os elementos orbitais definidos na seção 2.2.1.1: i, Ω, a, e, ω e T . No caso em que as estrelas são esféricas, os elementos orbitais são, de fato, constantes de movimento. No caso geral, porém, em que podem haver deformações nas estrelas, esses elementos passam a satisfazer um sistema de seis equações diferenciais (as equações equivalentes às que descrevem \dot{Q}_j e \dot{P}_j , citadas no parágrafo anterior), denominadas “equações planetárias” (ou “equações de Lagrange”).¹

Assim, a distância entre os centros de massa das componentes do sistema binário ainda será dada pela forma usual (Kopal, 1959)

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta_o} \quad (5.5)$$

onde a é o semieixo maior, e é a excentricidade e $\theta_o(t)$ é o ângulo orbital (Seção 3.2.2.1). O semieixo maior e a excentricidade são, agora, parâmetros que variam lentamente no tempo: $a(t)$ e $e(t)$, assim como todos os outros elementos orbitais. O ângulo orbital está sujeito à relação de conservação do momento angular: $\dot{\theta}_o(t)=\omega(t)=L/\mu R^2$, onde L é o módulo do momento angular orbital total do sistema binário e $\mu=M_1M_2/(M_1 + M_2)$ é a sua massa reduzida (Goldstein et al., 2001). É possível demonstrar que $\frac{L}{\mu}=(G(M_1 + M_2)a(1 - e^2))^{\frac{1}{2}}$, e, assim, a velocidade angular orbital do sistema binário é dada por

$$\omega(t) = \frac{\omega_K}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}(1 + e \cos \theta_o(t))^2 \quad (5.6)$$

onde, $\omega_K^2=G(M_1 + M_2)a^{-3}$ é a velocidade angular orbital média (ou kepleriana) do sistema binário, obtida da terceira lei de Kepler Eq. (2.11).

Nesta seção, infelizmente temos um problema com notações. É comum, na literatura, utilizarmos “ ω ” para representar o elemento ângulo da passagem pelo pericentro e, também, para representar a velocidade angular orbital. Também utilizamos “ Ω ” para representar o elemento longitude do nodo ascendente e a velocidade angular intrínseca da estrela.

Nesta seção vamos resolver o problema da seguinte forma: a velocidade angular orbital será sempre representada por “ $\omega(t)$ ” (ressaltando a sua dependência temporal), o ângulo da passagem pelo pericentro será representado pelo símbolo usual “ ω ”, a velocidade angular intrínseca será representada por “ Ω_i ” (onde o índice i dirá que esta é a velocidade angular da i -ésima estrela), e a longitude do nodo ascendente será representado pelo símbolo usual “ Ω ”.

O avanço da linha de ápsides, $\Delta\omega$, por período de revolução orbital é dado por Mar-

¹Para se aprofundar nesse assunto, o leitor é remetido ao livro de mecânica celeste de de Luca (1982), ou semelhantes livros que tratam do assunto.

tynov (1973) (usando as notações já definidas no capítulo 3 dessa dissertação)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{2\pi} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{d\theta_o} d\theta_o = k_{2,1} \left(\frac{r_{1,1}}{a}\right)^5 \left[\frac{M_2}{M_1} 15 f_2(e) + \left(\frac{\Omega_1}{\omega_K}\right)^2 \left(1 + \frac{M_2}{M_1}\right) \frac{1}{(1-e^2)^2} \right] + \\ & k_{2,2} \left(\frac{r_{1,2}}{a}\right)^5 \left[\frac{M_1}{M_2} 15 f_2(e) + \left(\frac{\Omega_2}{\omega_K}\right)^2 \left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right) \frac{1}{(1-e^2)^2} \right] + \\ & 28 f_3(e) \left[k_{3,1} \left(\frac{r_{1,1}}{a}\right)^7 \frac{M_2}{M_1} + k_{3,2} \left(\frac{r_{1,1}}{a}\right)^7 \frac{M_1}{M_2} \right] + \\ & 45 f_4(e) \left[k_{4,1} \left(\frac{r_{1,1}}{a}\right)^9 \frac{M_2}{M_1} + k_{4,2} \left(\frac{r_{1,1}}{a}\right)^9 \frac{M_1}{M_2} \right] + \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde, como já mencionado anteriormente, $r_{1,i}$ é o raio médio da i -ésima estrela do sistema; $k_{j,i}$ é a j -ésima constante de movimento apsidal da i -ésima estrela do sistema, calculada no raio médio $r_{1,i}$; Ω_i é a velocidade angular rotacional da i -ésima estrela; ω_K é a velocidade angular orbital média do sistema binário; a e e são, respectivamente, o semieixo maior e a excentricidade da órbita do sistema; e as funções $f_k(e)$ são expressas por²

$$f_2(e) = (1 - e^2)^{-5} \left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4 \right) \quad (5.8)$$

$$f_3(e) = (1 - e^2)^{-7} \left(1 + \frac{15}{4}e^2 + \frac{15}{8}e^4 + \frac{5}{64}e^6 \right) \quad (5.9)$$

$$f_4(e) = (1 - e^2)^{-9} \left(1 + 7e^2 + \frac{35}{4}e^4 + \frac{35}{16}e^6 + \frac{7}{128}e^8 \right) \quad (5.10)$$

de onde percebemos que todas elas adquirem o valor unitário quando a órbita é circular ($e=0$).

As expressões acima são uma generalização do resultado clássico de Sterne (1939) para os casos em que $\Omega_1 \neq \omega(t)$ e $\Omega_2 \neq \omega(t)$ (casos onde não há sincronização entre rotação intrínseca e rotação orbital), e elas são uma consequência direta da teoria de Laplace (explicitada na Seção 3.3).

As expressões acima podem ser obtidas utilizando os potenciais que deduzimos na Seção 3.3.5 Eqs. (3.217, 3.217, e 3.218) e a seguinte equação planetária (Kopal, 1959)

$$\frac{1}{an} \dot{\bar{\omega}} = \frac{\tan(\frac{1}{2}i)}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial S}{\partial i} + \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{e} \frac{\partial S}{\partial e} \quad (5.11)$$

onde $\bar{\omega} = \omega + \Omega$, e onde

$$n = \left(\frac{G(M_1 + M_2)}{a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

e S é uma função (que faz o *link* entre a teoria da Seção 3.3 e a teoria de movimento apsidal) associada à perturbação da energia potencial total do sistema binário, devido à rotação de suas componentes e de suas mútuas distorções de maré. A função S é definida na expressão (Kopal, 1959)

$$W = -GM_1M_2 \left(\frac{1}{R} + S \right) \quad (5.13)$$

²Em geral, as expressões para $f_k(e)$ são obtidas através da seguinte média:

$\frac{2k+1}{2} (1 - e^2)^{2k+1} f_k(e) = \frac{1}{2\pi e} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \theta_o)^{2k+1} \cos \theta_o d\theta_o$, ou seja,
 $\frac{2k+1}{2} (1 - e^2)^{2k+1} f_k(e) = \frac{2k+1}{2} \sum_{n=0}^k \frac{(2k)!(2n+2)}{(2k-2n)!} \frac{1}{(n+1)!^2} e^{2n} 2^{-(2n+1)}$, exatamente.

onde W é a energia potencial total do sistema binário: *a energia necessária para montá-lo, a partir de todos os elementos de massa que o compõem, trazidos desde o infinito até as suas respectivas posições*. Quando não há distorções, a função S é nula e não há movimento apsidal.

Na Eq. (5.7), há, no entanto, ainda a restrição de que os eixos de rotação orbital e intrínseco sejam paralelos. Dito de outra forma, é necessário que os vetores Ω_1 , Ω_2 e $\omega(t)$ sejam paralelos³. Neste estudo do movimento apsidal, vamos nos restringir a esse caso em que os eixos são paralelos. Quando os eixos não são paralelos, a teoria fica mais complexa, e o leitor é remetido ao livro de Kopal (1959).

Na dedução da Eq. (5.7), desconsiderou-se, também, ao se fazer a média sobre todos os ângulos orbitais θ_o , o fato de que os raios médios das estrelas $r_{1,i}$ e, principalmente, as constantes de movimento apsidal $k_{j,i}$ podem variar ao longo da órbita não circular da estrela (Sterne, 1939; Kopal, 1959). Lembremos que as constantes de movimento apsidal são, também, uma função do tempo: $k_j = k_j(r_1, t)$ Eq. (3.195), e o tempo, t , pode ser colocado em função do ângulo orbital θ_o (através da Eq. 5.6): $t = t(\theta_o)$. Assim, considerando que o potencial de maré muda com o ângulo orbital, em decorrência de as estrelas estarem, ora mais próximas, ora mais afastadas, é razoável supor que a estrutura interna dessas estrelas também mude ao longo de seu movimento orbital.

Assim, não é totalmente justificado o ato de se colocar r_1 , k_j para fora da integral sobre o ângulo orbital, a não ser que os efeitos de maré sejam sabidamente desprezíveis, ou se a excentricidade da órbita for muito pequena (caso em que a detecção do movimento apsidal é mais difícil). Como mencionamos na discussão da seção 3.3.6.2, a questão levantada de o quanto as “constantes” k_j mudam ao longo da órbita excêntrica dos sistemas binários é uma questão que deve ser respondida pelos modelos de estrutura e evolução estelar, como o modelo ATON, com o qual lidamos neste trabalho.

5.2 Principais Resultados do Trabalho de Landin, Mendes e Vaz

Vamos resumir, aqui, as principais conclusões do trabalho de Natália Landin, Luiz Mendes e Luiz Paulo Vaz, utilizando o formalismo estudado no capítulo 3 e publicado no artigo (Landin et al., 2009):

1. As estrelas sob ação de potenciais perturbadores de rotação e/ou maré são mais centralmente concentradas que as estrelas computadas de forma padrão (sem potenciais perturbadores), e suas temperaturas superficiais são mais baixas, principalmente nos casos em que as estrelas são de muito baixa massa: $M < 0.6M_\odot$.
2. Os efeitos gerados pelo potencial de maré, em várias circunstâncias, são semelhantes aos efeitos de gerados pela rotação, mas numa escala menor. Os efeitos de ambos se superpõem, e a dominância dos efeitos de rotação ou de maré dependem, respectivamente, do momento angular inicial das estrelas e de suas proximidades. Em geral, para um momento angular inicial típico de uma estrela de $1M_\odot$ (Mendes et al., 1999), verifica-se que os efeitos de maré são, em geral, mais importantes que

³Para ambas as estrelas, devemos ter $\bar{\beta} = 0$ na Eq. 3.114.

os efeitos de rotação, quando a separação entre as estrelas é de menos de cerca de 7 raios solares.

3. Os autores fizeram, com sucesso, dentro das incertezas observacionais, o teste de movimento apsidal com o modelo ATON, usando o sistema binário eclipsante EK Cep (ver Claret (2006) e referências lá contidas, para detalhes sobre esse sistema), que possui períodos orbital e apsidal determinados com precisão, e suas componentes tem massas, raios, velocidades rotacionais e razão entre temperaturas efetivas também bem determinadas. Foram encontradas duas faixas de idades possíveis para o sistema binário, após o ajuste de modelos com as massas das estrelas aos raios e à razão de temperaturas observadas. Então, as velocidades rotacionais e o período apsidal teóricos foram ajustados aos observados, o que possibilitou a seleção de uma das faixas de idade: a saber 15.5 – 16.7 Manos. Claret (2006) também fez com sucesso (dentro das incertezas observacionais) o teste para esse mesmo sistema binário, e obteve que a idade do sistema é de cerca de 24.2 Manos.

Na figura 5.1, geramos a trilhas evolutivas para as três primeiras constantes de movimento apsidal, k_2 , k_3 e k_4 , para uma estrela de $1M_\odot$ com rotação. As linhas verticais tracejadas marcam as idades correspondentes aos pontos de A a S da figura 2.5 e da tabela 2.1.

Vemos, nessa figura, que $\log k_2$ fica próxima de -1 por cerca de 10 Manos. Depois, mais ou menos quando a estrela começa a desenvolver um núcleo radiativo (ponto G), todas as constantes de movimento apsidal diminuem, o que significa que a estrela ficou mais centralmente concentrada. Assim, principalmente para as fases posteriores ao desenvolvimento do núcleo radiativo, a aproximação feita na seção 3.3.5 (que considera a estrela muito concentrada no centro e exclui o método iterativo) é justificada. As constantes de movimento apsidal, em geral, estão muito mais próximas do valor zero (modelo puntual) do que do valor $3/4(j-1)$ (modelo homogêneo).

Ocorre um mínimo local nas proximidades do ponto I, que corresponde à fase de ajuste estrutural, quando as reações nucleares iniciam-se, imediatamente antes da sequência principal de idade zero (ZAMS). Durante a sequência principal, as constantes k_j novamente se mantêm aproximadamente constantes, mas em valores cerca de uma ordem de grandeza menores que os anteriores. E, finalmente, quando a estrela começa a sair da MS (do ponto L em diante), as constantes k_j passam a diminuir ainda mais, e rapidamente. Essas são as fases em que o núcleo desenvolve um caroço inerte de He no centro, e contrai, provocando a expansão das camadas mais externas.

Voltemos às conclusões de Landin et al. (2009). Observemos mais detalhadamente para as conclusões secundárias, advindas das conclusões de números 1 e 2.

Primeiramente, de fato, nas simulações de estrelas com massas no intervalo $0.09M_\odot \leq M \leq 3.80M_\odot$, temos que, para idades menores que cerca de 0.3 – 30 Manos (onde a extensão depende da massa da estrela), a quantidade $\log k_2$ não varia muito, ficando, aproximadamente, próxima do valor “ -1 ” ($k_2 \approx \frac{1}{10}$). Depois disso, verifica-se que $\log k_2$ decresce, bastante, com a idade, para todas as estrelas (exceção feita para as estrelas de $0.09M_\odot$ e $0.4M_\odot$, o que provavelmente está associado ao fato de essas estrelas serem convectivas, totalmente ou essencialmente) o que implica que as estrelas passam a se tornar muito mais centralmente concentradas. Esses resultados estão na figura “3” de Landin et al. (2009).

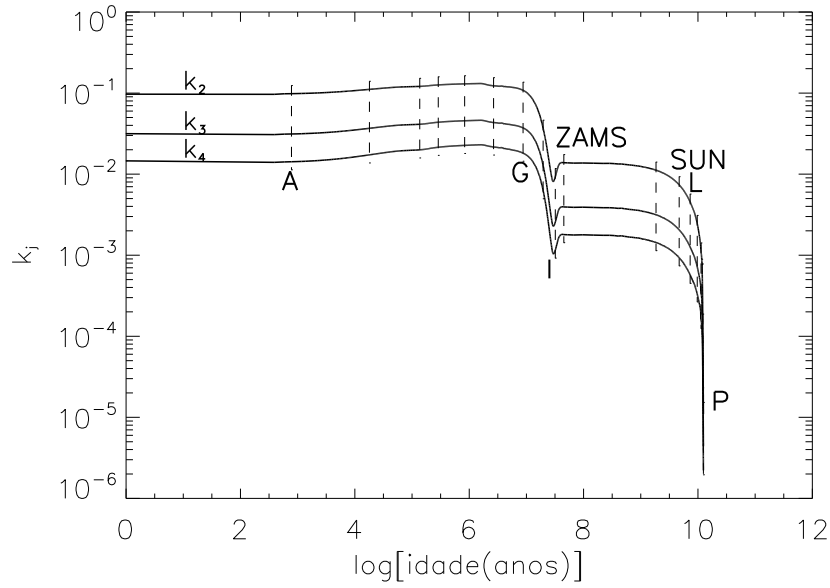


Figura 5.1: Trilhas evolutivas para as três primeiras constantes de movimento apsidal, k_2 , k_3 e k_4 , para uma estrela de $1M_{\odot}$ com rotação. Para facilitar a direta comparação com a figura 2.5 e com a tabela 2.1, do capítulo 2, esboçamos linhas verticais tracejadas correspondentes aos pontos de A a S das referidas figura e tabela.

Para idades menores que cerca de 1 Manos (ou $\log(\text{idade}) \approx 6$), para a estrela de $1M_{\odot}$, a quantidade $\log k_2$, como já apontado acima, não varia muito. Os autores verificam, também, que nessa mesma região em que $\log k_2 \approx -1$, as variações introduzidas pela presença de potenciais perturbadores de maré e/ou rotação são desprezíveis. Assim, os efeitos de rotação e maré sobre a distribuição de massa dessas estrelas só são apreciáveis após o término desse período. Após esse período, os efeitos de rotação e maré diminuem ainda mais a quantidade $\log k_2$ (fazem com que a estrela se torne ainda mais centralmente concentrada).

Os autores verificaram, também para estrelas de $1M_{\odot}$, que após esse período de 1 Manos, a composição química inicial também influencia a evolução de $\log k_2$. Em geral, estrelas menos metálicas (com Z_{inicial} menor) são mais centralmente concentradas.

Finalmente, as estrelas mais centralmente concentradas, na ZAMS, são as de $1.5M_{\odot}$, e isso, provavelmente, deve-se ao fato de que, aproximadamente por volta dessa massa, muda-se a dominância dos processos de geração de energia nuclear no núcleo das estrelas, do ciclo p-p, para o ciclo CNO (Landin et al. (2009) e referencias lá contidas).

É importante citar que, nesse trabalho, os autores parametrizam a distância entre as estrelas componentes, R , com o raio da primária, r_1 : na equação (3.218), eles fazem $(r_1/R)=1/\alpha$, onde “ α ” é o número de vezes (fixo) que a distância entre os centros de massa das duas componentes é maior que o raio da primária. Obviamente, essa é uma imposição não-física. Mas, ela encontra certa justificativa no fato de que não se é bem compreendida ainda a formação dos sistemas binários, e principalmente, a formação dos

sistemas de binárias próximas (Bate et al., 2002; Larson, 2003)⁴. Além disso, o objetivo do trabalho era o de estudar os efeitos do potencial de maré nos sistemas binários.

Na próxima seção, removeremos o dispositivo não-físico que impõe que a distância é proporcional ao raio da primária, e faremos um breve estudo dos efeitos de rotação e de maré, tanto no caso em que o dispositivo está presente, quanto no caso em que ele está ausente.

5.3 Um Breve Estudo da Relação entre Rotação e Marés

Caso Landin et al. (2009) não houvessem parametrizado a órbita com o raio da primária, os efeitos de maré logo desapareceriam, como veremos nesta seção.

No pequeno estudo desta seção, geramos duas sequências evolutivas com o código ATON 2.4: uma com a parametrização do raio orbital com o raio da primária, e a outra, sem essa parametrização. A primeira sequência evolutiva (Seq1) corresponde à evolução de uma estrela de $1M_{\odot}$, com rotação de corpo rígido, conservação de momento angular (sem redistribuição interna e perda de momento angular por vento (Mendes, 1999)), e com uma estrela companheira de $1M_{\odot}$, a uma distância parametrizada de $R=5r_1$ (5 raios da primária). A velocidade angular inicial da primária foi escolhida de acordo com a relação de momento angular inicial $J_{\text{in}} = 1.566 \times 10^{50} \left(\frac{M_*}{M_{\odot}}\right)^{0.985} \text{ g cm}^2\text{s}^{-1}$ (Mendes, 1999; Landin et al., 2009). Outros parâmetros iniciais de interesse são a composição química inicial “solar” ($Y=0.27$ e $Z=0.0175$) e parâmetro de *mixing length* $\alpha_{\text{MLT}}=1.5$, sem *overshooting*.

A segunda sequência evolutiva (Seq2) é idêntica à primeira, exceto pela ausência da parametrização de distância. É necessário que mantenhamos as aproximações explicitadas na tabela 3.1: as deformações não podem ser muito grandes. Assim, considerando que nas primeiras centenas de anos, o raio de uma estrela de $1M_{\odot}$ é da ordem de $15R_{\odot}$ (tabela 2.1), consideramos a distância entre as estrelas como igual a cinco vezes esse valor: $R \approx 5r_{1,\text{inicial}}$, ou seja, consideramos a distância fixa de $R=75R_{\odot}$. Todos os outros parâmetros iniciais remanescentes foram idênticos aos escolhidos para a sequência Seq1.

Assim, em resumo, a distância entre as componentes do sistema binário é

$$R(t_{\text{age}}) = \begin{cases} 5r_1(t_{\text{age}}), & \text{se Seq1,} \\ 75R_{\odot}, & \text{se Seq2} \end{cases} \quad (5.14)$$

Façamos uma estimativa da evolução dos potenciais perturbadores dados pelas Eqs. (3.234) e (3.235), utilizando as saídas das sequências Seq1 e Seq2. Esses potenciais, em ordem de grandeza e em módulo, são dados pelas equações

$$\Psi_r \sim \frac{1}{2}\Omega^2 r_1^2 \quad (5.15)$$

e

$$\Psi_t \sim GM_2 R^{-3} r_1^2 \quad (5.16)$$

⁴Podemos indagar sobre que mecanismo seria o responsável pela formação das binárias próximas conhecidas, cujas distâncias são iguais a poucos raios estelares. No passado, quando seus raios eram maiores, essas estrelas teriam sido binárias de contato!

onde o primeiro é o potencial perturbador devido à rotação intrínseca da estrela, e o segundo é o potencial perturbador de maré devido à presença da estrela companheira.

As distorções da estrela em relação à forma esférica são dadas pela Eq. (3.236). Em ordem de grandeza, temos que as distorções devidas, respectivamente, a rotação e a maré são

$$f_r \sim \frac{1}{3} \frac{r_1}{GM_1} \Psi_r \quad (5.17)$$

e

$$f_t \sim \frac{r_1}{GM_1} \Psi_t \quad (5.18)$$

Finalmente, como o código ATON considera que as duas estrelas estão em órbita circular, temos que a velocidade angular orbital do sistema Eq. (5.6) é igual à velocidade angular kepleriana:

$$\omega = \left(\frac{G(M_1 + M_2)}{R^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.19)$$

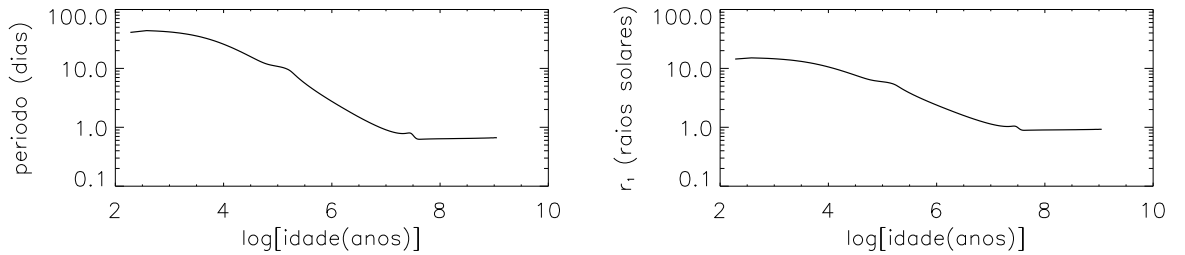


Figura 5.2: À direita, o raio da estrela primária r_1 (em raios solares). À esquerda, o período orbital do sistema binário (em dias).

Vejamos a primeira sequência evolutiva: Seq1.

Primeiramente, temos, na figura 5.2, à direita e à esquerda, respectivamente, o raio da estrela primária r_1 (em raios solares) e o período de rotação orbital do sistema (em dias), dado por $P = 2\pi/\omega$, para a Seq1. Podemos ver que o período do sistema diminui com a idade, o que é evidente, já que, pela Eq. (5.19), $P = 2\pi/\omega \propto R^{\frac{3}{2}}$, e o raio da órbita é parametrizado pelo raio da estrela, r_1 , que diminui com a contração da pré-sequência. O período diminui, desde ≈ 44 dias, nos primeiros mil anos da estrela, até cerca de ≈ 15 horas, quando a idade da estrela é de ≈ 100 Manos.

Na figura 5.3, fazemos uma comparação entre as velocidades angulares orbital, ω , e de rotação, Ω . À esquerda, temos, ω , em linha tracejada, e Ω , em linha contínua. Lembremos que esse valor de Ω se estende por todo o interior da estrela, já que usamos rotação de corpo rígido no programa. Ambas as velocidades aumentam com o tempo. A velocidade angular orbital ω varia com $R^{-\frac{3}{2}}$, e a velocidade angular intrínseca aumenta em decorrência da contração da estrela, com conservação do momento angular. A partir da ZAMS ($\log(\text{idade}) \approx 7.6$), quando cessa a contração, Ω fica aproximadamente constante.

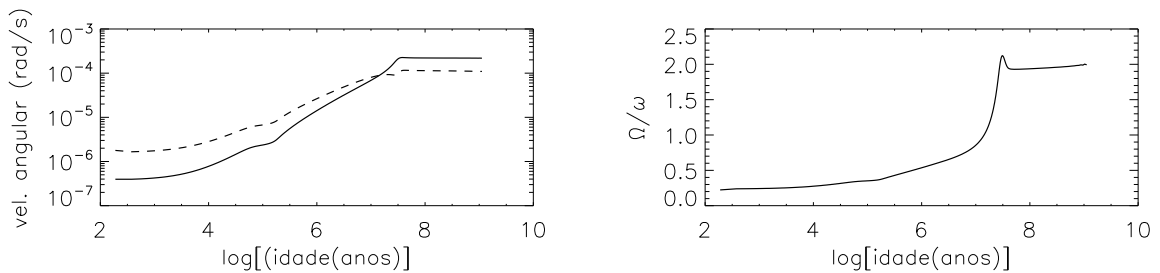


Figura 5.3: À esquerda, temos a velocidade angular orbital ω do sistema binário (linha tracejada) e a velocidade angular superficial intrínseca da estrela primária (linha contínua). À direita, temos a razão Ω/ω .

À direita da figura 5.3, temos a razão entre essas duas velocidades: Ω/ω : uma quantidade de interesse no teste de movimento apsidal (ver Eq. 5.1). Novamente, lembremos que o mecanismo que faz ω crescer, junto com a evolução da estrela, é a parametrização da distância entre as estrelas componentes do sistema binário como um múltiplo do raio médio da primária Eq. (5.14): um mecanismo não-físico.

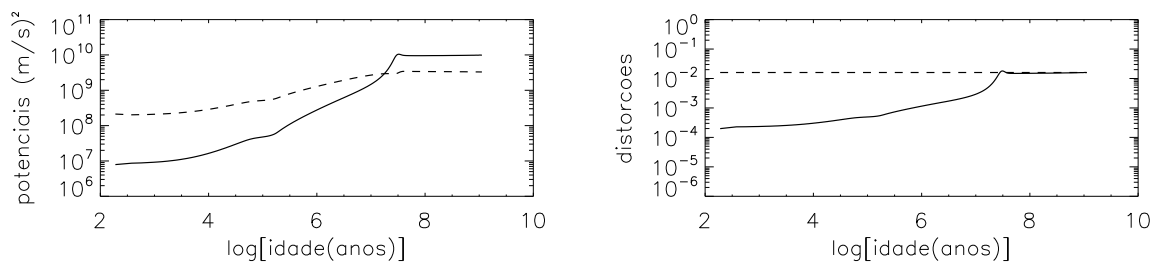


Figura 5.4: À esquerda, temos o potencial perturbador de maré (linha tracejada) e o potencial perturbador de rotação (linha contínua). À direita, temos a distorção devida à maré (linha tracejada) e a a distorção devida à rotação (linha contínua).

Já na figura 5.4, comparamos os potenciais perturbadores de maré Eq. (5.16) e de rotação Eq. (5.15). À esquerda, temos, em linha tracejada, o potencial perturbador de maré, Ψ_t , e, em linha contínua, o potencial perturbador de rotação, Ψ_r . É interessante ver que, na pré-sequência, o potencial de maré supera o potencial de rotação.

Seria, aqui, interessante nos perguntarmos sobre as forças perturbadoras, ao invés dos potenciais, já que são elas quem, efetivamente, geram as distorções. Como as forças são gradientes dos potenciais, nós temos que, pelas equações (5.15) e (5.16), as forças perturbadoras de rotação e de maré são, respectivamente, em ordens de grandeza, dadas por $\frac{2}{r_1}\Psi_r$ e $\frac{2}{r_1}\Psi_t$, e, assim, as forças perturbadoras, em ordem de grandeza, tem um comportamento qualitativamente semelhante ao de seus potenciais, mostrados na figura 5.4, à esquerda.

No gráfico da direita da figura 5.4, observemos as distorções da forma esférica oriundas

da maré Eq. (5.18) e da rotação Eq. (5.17), e as comparamos. Temos, em linha tracejada, a distorção devida à maré, f_t , e, em linha contínua, a distorção devida à rotação, f_r . A distorção devida à maré mostra-se sempre superior à devida à rotação, durante a pré-sequência. No entanto, ambas as distorções têm valores muito próximos, já na MS⁵. O gráfico da direita da figura 5.4 mostra que, em sistemas de binárias próximas muito jovens, as distorções das estrelas são, essencialmente, devidas à maré. Distorções de rotação mostram-se desprezíveis.

De qualquer forma, vemos que as distorções são muito menores que a unidade. As distorções de maré (e de rotação, nas proximidades da MS) são da ordem de 1% do raio médio da estrela. São pequenas, e isso parece justificar a aproximação de primeira ordem, feita na seção 3.3.3.

Devemos lembrar, novamente, que os resultados dessas figuras dependem fortemente do momento angular inicial escolhido e da separação entre as estrelas. Com relação ao momento angular inicial, utilizamos um valor típico, dado por $J_{\text{in}}=1.566 \times 10^{50}$, e verificamos que, nas primeiras fases da estrela, as distorções e o potencial rotacional são duas ordens de grandeza menores que as distorções e o potencial de maré. Considerando que Ψ_r e f_r são proporcionais a Ω^2 e que o momento angular de um corpo rígido é proporcional a Ω , temos que o momento angular inicial teria de ser uma ordem de grandeza superior ao escolhido para que os efeitos rotacionais fossem superiores aos de maré, desde as primeiras fases da vida da estrela. Com relação à separação, as Eqs. (5.16) e (5.18) mostram-nos que Ψ_t e f_t são proporcionais a $1/\alpha^3$, o que significa que se α for reduzido para metade de seu valor, essas grandezas ficarão 8 vezes maiores, e se α for reduzido para cerca de 22% de seu valor, essas grandezas ficarão cerca de duas ordens de grandeza maiores.

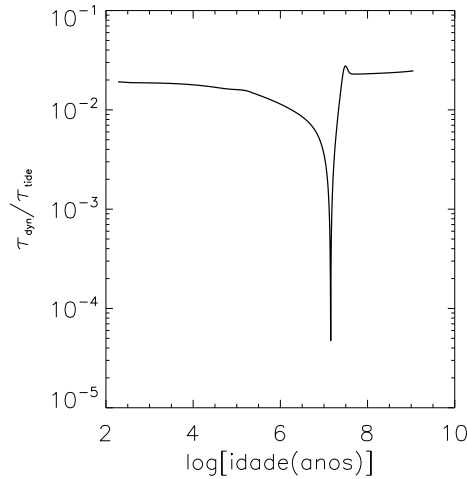


Figura 5.5: Razão das escalas de tempo de queda livre e de maré: $\tau_{\text{dyn}}/\tau_{\text{tide}}$.

Finalmente, na figura 5.5, temos a razão das escalas de tempo de queda livre e de

⁵A distorção devida à maré é constante, pois, pela Eq. (5.18), $f_t \propto R^{-3}r_1^3$, com $R \propto r_1$, pela Eq. (5.14).

maré (ver discussão na seção 5.1.1.1)

$$\frac{\tau_{\text{dyn}}}{\tau_{\text{tide}}} = \left(\frac{r_1^3}{GM_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{|\omega - \Omega|}{2\pi} \quad (5.20)$$

onde percebemos que a escala de tempo de queda livre é sempre muito menor que a escala de tempo de maré, mesmo quando Ω é muito diferente de ω , o que, numa primeira análise, como sugerem Sepinsky et al. (2007), parece dar razão a Sterne (1939) e à suposição de equilíbrio hidrostático da teoria de marés estáticas. Nessa figura, entre 10Manos e 100Manos, Ω e ω são próximas e a razão $\tau_{\text{dyn}}/\tau_{\text{tide}}$ tende a zero.

Os gráficos correspondentes aos das figuras 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5, para a sequência Seq2, estão na figura 5.6.

No primeiro gráfico, vemos que o período orbital do sistema permanece constante, em ≈ 44 dias, ao longo da evolução da primária, pois, na Seq2, a distância entre as estrelas é constante. No segundo gráfico, temos a contração do raio da primária. No terceiro gráfico, temos as velocidades angulares intrínseca (linha contínua) e orbital (linha tracejada). No quarto gráfico, temos os potenciais de distorção de rotação (linha contínua) e maré (linha tracejada). Com a contração da primária, o potencial perturbador de maré diminui (em decorrência de a razão entre o raio médio da primária e a distância entre as estrelas ficar cada vez menor). O potencial perturbador de rotação, no entanto, em decorrência da contração, aumenta com o aumento da velocidade angular intrínseca. No quinto gráfico, vemos que, com a contração e a não-parametrização da órbita, os efeitos de maré se tornam desprezíveis, dentro de poucas dezenas de milhares de anos de evolução. No sexto gráfico, enfim, vemos que, na Seq2, a suposição de equilíbrio hidrostático também parece boa.

A figura 5.6, referente à Seq2, mostra-nos que, na evolução de um sistema binário, acompanhada desde as primeiras fases da pré-sequência, devemos parametrizar a distância entre as estrelas pelo raio médio de uma delas Eq. (5.14), ou, do contrário, em cerca de um milhão de anos de contração de ambas as estrelas, os efeitos associados à maré já terão se tornado desprezíveis, e os efeitos de rotação serão muito mais importantes.

Já mencionamos que o fato de a parametrização ser um mecanismo não-físico não exclui, de imediato, a sua validade, já que a formação de sistemas de binárias próximas não é muito bem compreendida (Larson, 2003). A parametrização serve, portanto, para assegurar que as binárias serão, de fato, binárias próximas.

Podemos, então, nos perguntar como a presença ou não dessa parametrização afeta outras grandezas facilmente mensuráveis da estrela. Na figura 5.7, temos três trilhas evolutivas em diagramas H-R. À esquerda, temos a trilha evolutiva da primária com a parametrização (Seq1). No centro, temos a trilha evolutiva da primária sem a parametrização (Seq2). À direita, plotamos as duas trilhas, e, dificilmente, vemos alguma diferença. A presença ou não da parametrização não parece alterar significativamente o raio médio, a temperatura efetiva ou a luminosidade da estrela de $1M_{\odot}$. No entanto, para estrelas de massa menor, podem haver alterações mais significativas - ver figura 2 de Landin et al. (2009).

Comparemos, finalmente, a evolução da constante k_2 prevista pelas sequências Seq1 e Seq2. Na figura 5.8, a linha contínua refere-se à sequência Seq1 e a linha tracejada refere-se à sequência Seq2. Podemos ver que, a partir da ZAMS, a sequência Seq1 passa

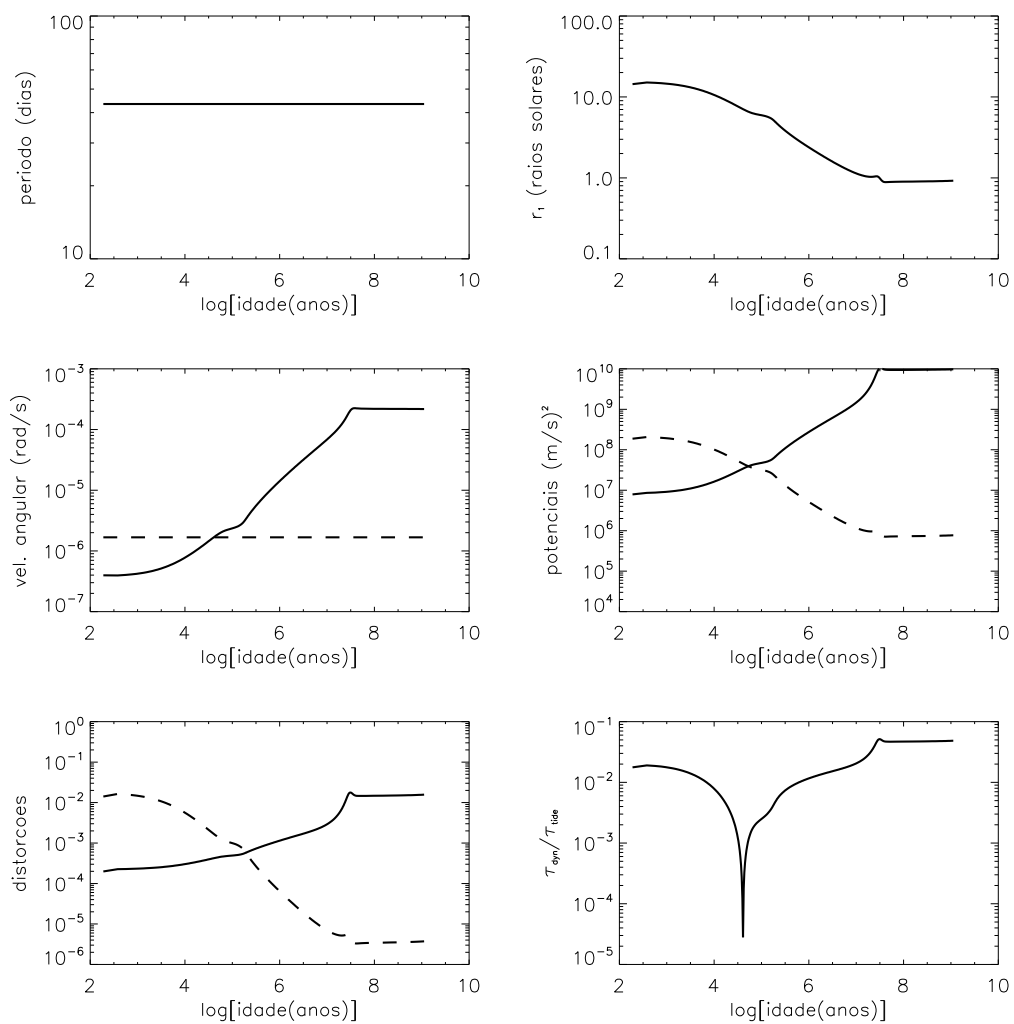


Figura 5.6: Gráficos correspondentes aos das figuras 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5, para a sequência Seq2.

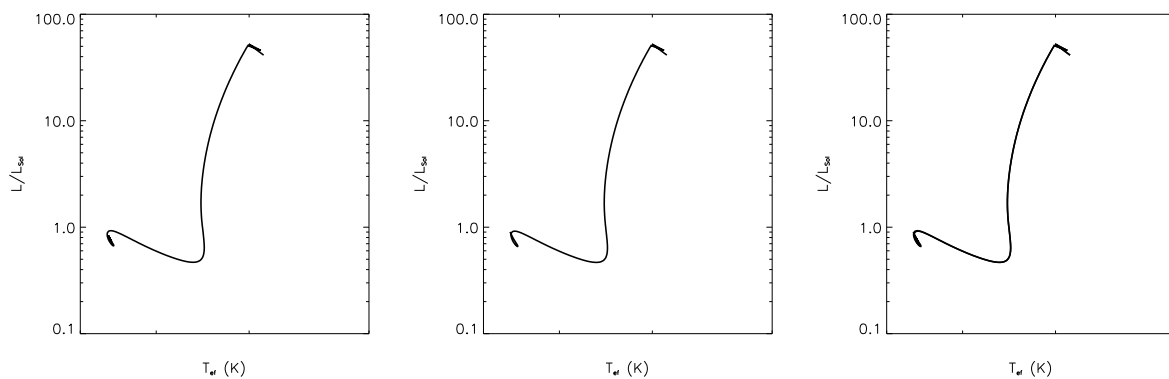


Figura 5.7: À esquerda, temos a trilha evolutiva da Seq1. No centro, temos a trilha evolutiva da Seq2. À direita, plotamos as duas trilhas, juntas.

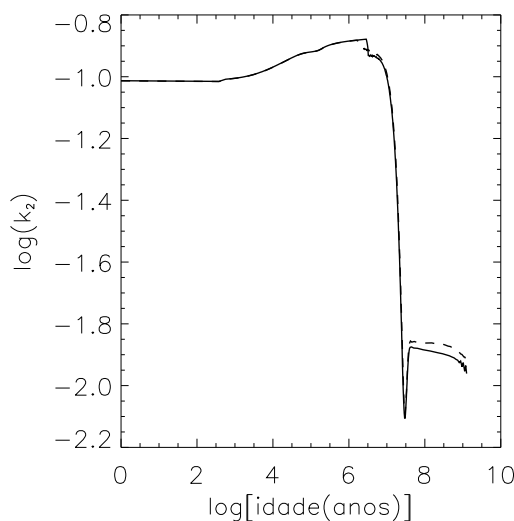


Figura 5.8: Comparação entre as evoluções da constante k_2 . A linha contínua refere-se à sequência Seq1 e a linha tracejada refere-se à sequência Seq2.

a prever modelos mais centralmente concentrados que a sequência Seq2. Isso parece dar suporte à conclusão de Landin et al. (2009) de que os efeitos de maré são semelhantes e, de certa forma, complementares aos efeitos de rotação, pois podemos imaginar que, a partir de cerca de um milhão de anos, os modelos da Seq2 são, essencialmente, modelos rotacionais (sem maré), como concluímos da análise da figura 5.6. Como mostra a figura 1 de Landin et al. (2009), a rotação gera modelos mais centralmente concentrados, e a maré aumenta esse efeito. A figura 5.8 pode ser vista como uma figura intermediária na figura 1 de Landin et al. (2009) - painéis da esquerda e do meio.

5.3.0.4 Sobre o efeito de uma órbita excêntrica

Observando a figura 3.7, vemos que o efeito de uma órbita excêntrica ($e > 0$) é o de aumentar e diminuir o valor de R , fazendo com que este oscile, periodicamente, entre os valores R (periastro) e $\left(\frac{1+e}{1-e}\right) R$ (apastro). Assim, com a estrutura da estrela se ajustando instantaneamente a essas rápidas variações no potencial Ψ_t , talvez vejamos a constante de movimento apsidal k_2 oscilar entre as duas curvas esboçadas na figura 5.8, numa dada idade escolhida, em decorrência de a estrela estar, ora sujeita a maior maré, ora sujeita a menor maré. Se for assim, devemos esperar que o efeito de uma órbita excêntrica sobre o movimento apsidal seja grande apenas para estrelas componentes de sistemas de binárias próximas que estejam na sequência principal.

Binárias próximas excêntricas com separação no periastro de 5 raios da primária ainda gerariam variações pequenas, como sugere a figura 5.8. No entanto, se essa distância for reduzida para, por exemplo, 3 raios da primária, as variações podem ser significativas (ver figura 1 de Landin et al. (2009)).

A isso, no entanto, contrapomos o fato de que não são esperadas binárias próximas excêntricas com cerca de 40 Manos, em decorrência do fenômeno de circularização das órbitas (subseção 5.1.1.1). Quanto mais próximas as binárias, menor será o seu tempo

de circularização, e menores são as chances de encontrarmos candidatas ao teste aqui proposto.

Reiteramos, no entanto, que o código ATON está praticamente pronto para fazer esse teste (como mencionamos na seção 3.3.6.2). Além disso, seria interessante verificar esses efeitos em sistemas de estrelas mais massivas (respeitando as possibilidades do código), já que essas evoluem mais rapidamente, possivelmente não dando tempo para que suas órbitas estejam circularizadas antes de atingida a sequência principal.

Finalmente, um outro ponto que não devemos esquecer é o de que a teoria dos capítulos 3 e 5 não é bem adaptada para estrelas que possuem rotação diferencial.

*Duas coisas me deixam maravilhado:
o céu estrelado acima de mim e a lei moral dentro de mim.*
Immanuel Kant, em *Crítica da Razão Prática*

Capítulo 6

Conclusão

Nesta dissertação, lidamos com o problema das perturbações gravitacionais e pseudo-gravitacionais induzidas na estrutura das estrelas, em decorrência da rotação e da presença de estrelas companheiras próximas, em sistemas binários, e, em paralelo, trabalhamos com o mecanismo de ponto de controle (ou *checkpoint*) do código de estrutura e evolução estelar ATON.

No que concerne à parte teórica deste trabalho, redesenvolvemos, minuciosamente, o tratamento perturbativo utilizado nos trabalhos anteriores de Mendes (1999); Mendes et al. (1999); Landin (2006); Landin et al. (2009). Transportamo-nos para o referencial de uma das estrelas do sistema binário e estudamos os efeitos da rotação conservativa do fluido da estrela e da presença gravitacional de uma estrela puntual próxima, compondo o sistema. Em seguida, trabalhamos com as equações obtidas para o pseudopotencial perturbador, utilizando o formalismo conhecido como Teoria de Laplace. Buscamos manter o maior grau possível de generalidade das equações, discutimos as aproximações feitas e apontamos os domínios de validade dessa teoria. Discutimos, também, o movimento apsidal de sistemas binários: principal teste observacional da teoria com a qual trabalhamos.

A parte computacional deste trabalho consistiu no estudo do código ATON, no trabalho de atualização do seu *checkpoint* e na sua breve utilização, utilizando diferentes entradas físicas, para discutir os aspectos teóricos deste trabalho.

Grande parte dos resultados centrais apresentados nesta dissertação não são novos, mas encontram-se dispersos pela literatura. Fomos capazes, no entanto, de tirar algumas novas conclusões interessantes, que serão resumidas a seguir.

Deduzimos o potencial efetivo total de um sistema binário, Ψ , no referencial de uma das estrelas, e mostramos como esse potencial deve ser levado em conta nas equações estelares constitutivas, que estão implementadas no código ATON. Essas equações representam a generalização das equações utilizadas nos trabalhos anteriores. Elas permitem uma órbita não-circular do sistema e eixos de rotação das estrelas e orbital do sistema não paralelos. A estrela companheira foi tratada como uma massa puntual. Como o período orbital de um sistema binário é várias ordens de grandeza menor que um passo temporal evolutivo do código ATON, a implementação de Ψ , na sua forma geral, no código ATON, deverá ser feita respeitando essas escalas de tempo ou mediante aproximações que levem

em conta seus comportamentos médios. A dedução dessas equações também provou que a contribuição do movimento orbital do sistema ao potencial perturbador foi, de fato, incluída no trabalho de Landin et al. (2009). Assim, no código ATON, temos presentemente implementados os potenciais de rotação e de maré, sendo que este último está restrito ao de uma órbita circular e com eixos paralelos. Também temos que não há qualquer vínculo entre as velocidades angulares ω (orbital) e Ω (rotacional). A primeira é determinada pelos parâmetros (necessários ao funcionamento do programa) M_1 , M_2 e R , e a segunda é determinada pelo momento angular inicial, leis de rotação e de redistribuição de momento angular e pela evolução estelar, e pode assumir um caráter diferencial *shellular*. Devemos lembrar, porém, que as deduções teóricas também revelaram que a teoria utilizada não leva em conta rotação diferencial de forma totalmente apropriada. Os termos rotacionais presentes nos potenciais são termos de corpo rígido.

No que se refere às diferenças nas escalas de tempo do potencial perturbador geral e da evolução das estrelas, poder-se-ia fazer um estudo de como a estrutura da estrela é modificada, ao longo do movimento orbital, em idades específicas dessa estrela. Isso significaria, em determinadas idades, transformar o código evolutivo num código “estrutural dinâmico”, onde a estrutura da estrela se ajustaria às mudanças que ocorrem numa escala de tempo muito menor que a escala de tempo evolutiva. O código ATON já está praticamente pronto para simular esses efeitos, no caso de uma órbita não-circular, mas com os eixos rotacionais das estrelas e o eixo orbital paralelos.

Uma das principais formas de se testar a teoria desenvolvida no capítulo 3 é através do movimento da linha de ápsides de sistemas binários reais. O movimento apsidal é uma consequência imediata da teoria descrita naquele capítulo. No trabalho de Landin et al. (2009), os autores parametrizaram a distância entre as estrelas pelo raio da estrela em análise (geralmente, chamada de “primária”). Esse é um dispositivo não-físico que encontra justificativa no fato de existirem binárias próximas em idade avançada, sendo o seu mecanismo de formação ainda um mistério.

Neste trabalho, estudamos brevemente os efeitos da remoção desse mecanismo, e verificamos, para a estrela de $1M_{\odot}$, que não parece fazer grande diferença, em termos da evolução da estrela no diagrama H-R, ou em termos de complexidade, para o programa ATON, se o utilizamos ou não. Isso sugere que a parametrização não altera significativamente a evolução da estrela, até, pelo menos, o final da sequência principal. A remoção do mecanismo, no entanto, foi capaz de alterar sensivelmente o valor da constante de movimento apsidal k_2 , deixando a estrela um pouco menos centralmente concentrada, quando esta já estava na sequência principal. A constante k_2 pode ser obtida com bastante precisão da análise de curvas de luz de binárias eclipsantes de boa qualidade. Esse resultado nos encoraja a verificar os efeitos de uma órbita elíptica sobre a estrutura da estrela, em idades específicas dessa.

Finalmente, no que se refere ao *checkpoint*, verificamos tardiamente que a versão antiga que tem o *checkpoint* funcional não estava funcionando corretamente, muito provavelmente em decorrência de uma mudança de compiladores. A atualização do *checkpoint* deve ser feita, seguindo-se os passos delineados no capítulo 4. Essa é uma tarefa um pouco mecânica, mas não árdua, e é uma boa forma de se introduzir o código ATON a estudantes interessados em conhecê-lo. O trabalho de reatualização do *checkpoint* foi feito, mas ainda não foi devidamente verificado. E a questão de readaptá-lo aos novos compiladores é um trabalho para o futuro.

Apêndices

Apêndice A

Harmônicos Esféricos e Harmônicos Tesserais

Os **harmônicos esféricos** são funções definidas por (Jackson, 1999)

$$Y_j^m(\theta, \phi) = \left(\frac{2j+1}{4\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} \right)^{1/2} P_j^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (\text{A.1})$$

com $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$.

As funções $P_j^m(\cos \theta)$ são as *funções associadas de Legendre*. Essas são definidas por

$$P_j^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_j(x) \quad (\text{A.2})$$

onde $x = \cos \theta$, e $P_j(x)$ é o j -ésimo polinômio de Legendre, dado pela formula de Rodrigues:

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j \quad (\text{A.3})$$

O conjunto dos harmônicos esféricos representa uma base ortonormal do espaço das funções $f(\theta, \phi)$, onde θ e ϕ são as duas coordenadas angulares do sistema de coordenadas esféricas. Isso significa que qualquer função bem comportada $f(\theta, \phi)$, definida nos intervalos $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$ (e periódica nesse último), pode ser escrita como uma combinação linear dos harmônicos esféricos:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \alpha_{jm} Y_j^m(\theta, \phi) \quad (\text{A.4})$$

A constante α_{jm} é a projeção de f na direção de Y_j^m , ou seja,

$$\alpha_{jm} = \oint Y_j^{m*}(\theta, \phi) f(\theta, \phi) d\Omega \quad (\text{A.5})$$

onde a integral de superfície é feita sobre a esfera unitária.

A ortonormalidade dos harmônicos esféricos é expressada pela relação de ortonormalidade:

$$\oint Y_j^{m*}(\theta, \phi) Y_{j'}^{m'}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (\text{A.6})$$

Além disso, o importante *Teorema de Adição dos Harmônicos Esféricos*, nos diz que: *Sejam dois vetores \mathbf{r} e \mathbf{r}' , com coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) e (r', θ', ϕ') , respectivamente, e seja γ o ângulo entre esses dois vetores¹.*

Então,

$$P_j(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2j+1} \sum_{m=-j}^j Y_j^{m*}(\theta', \phi') Y_j^m(\theta, \phi) \quad (\text{A.7})$$

onde P_j é o j -ésimo polinômio de Legendre.

Os **harmônicos tesserais** são combinações lineares específicas dos harmônicos esféricos. Eles são definidos por (Detrio, 1972; Poole, 2007)

$$C_j^m(\theta, \phi) = (-1)^m 2^{\frac{1}{2}} \text{Re}\{Y_l^m\} = (-1)^m \left(\frac{2j+1}{2\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} \right)^{1/2} P_j^m(\cos \theta) \cos(m\phi) \quad (\text{A.8})$$

e

$$S_j^m(\theta, \phi) = (-1)^{m+1} 2^{\frac{1}{2}} \text{Im}\{Y_l^m\} = (-1)^m \left(\frac{2j+1}{2\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} \right)^{1/2} P_j^m(\cos \theta) \sin(m\phi) \quad (\text{A.9})$$

Podemos ver que os harmônicos tesserais apresentam a vantagem de serem reais. Além disso, eles tem a propriedade de que $C_j^{-m} = (-1)^m C_j^m$ e $S_j^{-m} = (-1)^{m+1} S_j^m$.

Em geral, no entanto, costuma-se chamar de “harmônicos tesserais” às funções Y_{jm} , definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Y_{jm} &= Y_j^0 &= & \left(\frac{2j+1}{4\pi} \right)^{1/2} P_j(\cos \theta) & m = 0 \\ &= C_j^m &= & (-1)^m \left(\frac{2j+1}{2\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} \right)^{1/2} P_j^m(\cos \theta) \cos(m\phi) & m > 0 \\ &= S_j^{-m} &= & (-1)^m \left(\frac{2j+1}{2\pi} \frac{(j-|m|)!}{(j+|m|)!} \right)^{1/2} P_j^{|m|}(\cos \theta) \sin(|m|\phi) & m < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Essas versões dos harmônicos tesserais também são sempre reais.

Dessa forma, mediante álgebra trivial, se demonstra as seguintes relações entre harmônicos esféricos e harmônicos tesserais:

$$\begin{aligned} Y_{jm} &= & Y_j^0 & & m = 0 \\ &= & 2^{-\frac{1}{2}} \left((-1)^m Y_j^m + Y_j^{-m} \right) & & m > 0 \\ &= & i 2^{-\frac{1}{2}} \left(Y_j^m + (-1)^{m+1} Y_j^{-m} \right) & & m < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

e

$$\begin{aligned} Y_j^m &= & Y_{j0} & & m = 0 \\ &= & 2^{-\frac{1}{2}} (-1)^m (Y_{jm} + i Y_{j-m}) & & m > 0 \\ &= & 2^{-\frac{1}{2}} (Y_{j-m} - i Y_{jm}) & & m < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Também, mediante álgebra trivial, se demonstra que todos os teoremas importantes dos harmônicos esféricos, enunciados acima, valem também para os harmônicos tesserais:

¹Então, teremos que: $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$.

- Base do espaço das funções $f(\theta, \phi)$:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \alpha_{jm} Y_j^m(\theta, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \beta_{jm} Y_{jm}(\theta, \phi) \quad (\text{A.13})$$

- Ortonormalidade:

$$\oint Y_j^{m*}(\theta, \phi) Y_{j'}^{m'}(\theta, \phi) d\Omega = \oint Y_{jm}(\theta, \phi) Y_{j'm'}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (\text{A.14})$$

- Teorema de Adição dos Harmônicos:

$$P_j(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2j+1} \sum_{m=-j}^j Y_j^{m*}(\theta', \phi') Y_j^m(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{2j+1} \sum_{m=-j}^j Y_{jm}(\theta', \phi') Y_{jm}(\theta, \phi) \quad (\text{A.15})$$

Deixemos, também, para referências, as projeções de um vetor unitário nos eixos x , y e z , e seus produtos. Algumas dessas quantidades são úteis nos cálculos efetuados nos capítulos 3 e 5.

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \sin \theta \cos \phi &= & \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{11} \\ \frac{y}{r} &= \sin \theta \sin \phi &= & \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{1-1} \\ \frac{z}{r} &= \cos \theta &= & \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{10} \\ \left(\frac{x}{r}\right)^2 &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos 2\phi &= & \pi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} Y_{00} - \frac{2}{3\sqrt{5}} Y_{20} + \left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{22} \right) \\ \left(\frac{y}{r}\right)^2 &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos 2\phi &= & \pi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} Y_{00} - \frac{2}{3\sqrt{5}} Y_{20} - \left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{22} \right) \\ \left(\frac{z}{r}\right)^2 &= \cos^2 \theta &= & \pi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} Y_{00} + \frac{4}{3\sqrt{5}} Y_{20} \right) \\ \left(\frac{x}{r}\right) \left(\frac{y}{r}\right) &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin 2\phi &= & \left(\frac{4\pi}{15}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{2-2} \\ \left(\frac{x}{r}\right) \left(\frac{z}{r}\right) &= \sin \theta \cos \theta \cos \phi &= & \left(\frac{4\pi}{15}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{21} \\ \left(\frac{y}{r}\right) \left(\frac{z}{r}\right) &= \sin \theta \cos \theta \sin \phi &= & \left(\frac{4\pi}{15}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{2-1} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Apêndice B

Deduções Intermediárias

B.1 Justificativa da equação (3.50)

Sejam os dois referenciais S' e S da figura 3.1. O ponto P , é visto simultaneamente pelos dois referenciais. O vetor \mathbf{s} localiza o ponto P , em relação à origem O' , e o vetor \mathbf{r} localiza o ponto P , em relação à origem O . As duas origens são ligadas pelo vetor \mathbf{R}_1 . Então, no espaço, temos

$$\mathbf{s} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{r}. \quad (\text{B.1})$$

Os índices “f” e “m”, abreviações de “fixo” e “móvel”, vão indicar que os vetores correspondentes a eles foram escritos, respectivamente, em termos dos referenciais inercial e não-inercial. Assim, no referencial S' , os três vetores serão combinações lineares da base de S' : $\mathbf{r}_f = r'_1 \mathbf{e}_{x'} + r'_2 \mathbf{e}_{y'} + r'_3 \mathbf{e}_{z'}$, $\mathbf{R}_{1f} = R'_{11} \mathbf{e}_{x'} + R'_{12} \mathbf{e}_{y'} + R'_{13} \mathbf{e}_{z'}$ e $\mathbf{s}_f = s'_1 \mathbf{e}_{x'} + s'_2 \mathbf{e}_{y'} + s'_3 \mathbf{e}_{z'}$, e, no referencial S , os mesmos três vetores serão combinações lineares da base de S : $\mathbf{r}_m = r_1 \mathbf{e}_x + r_2 \mathbf{e}_y + r_3 \mathbf{e}_z$, $\mathbf{R}_{1m} = R_{11} \mathbf{e}_x + R_{12} \mathbf{e}_y + R_{13} \mathbf{e}_z$ e $\mathbf{s}_m = s_1 \mathbf{e}_x + s_2 \mathbf{e}_y + s_3 \mathbf{e}_z$.

Dessa forma, é óbvio que temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_f &= r'_1 \mathbf{e}_{x'} + r'_2 \mathbf{e}_{y'} + r'_3 \mathbf{e}_{z'} &= \mathbf{r}_m &= r_1 \mathbf{e}_x + r_2 \mathbf{e}_y + r_3 \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{R}_{1f} &= R'_{11} \mathbf{e}_{x'} + R'_{12} \mathbf{e}_{y'} + R'_{13} \mathbf{e}_{z'} &= \mathbf{R}_{1m} &= R_{11} \mathbf{e}_x + R_{12} \mathbf{e}_y + R_{13} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{s}_f &= s'_1 \mathbf{e}_{x'} + s'_2 \mathbf{e}_{y'} + s'_3 \mathbf{e}_{z'} &= \mathbf{s}_m &= s_1 \mathbf{e}_x + s_2 \mathbf{e}_y + s_3 \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

pois um vetor não varia se escolhermos representá-lo na base de S' ou de S .

Assim, vamos escrever a Eq. (B.1) como $\mathbf{s}_f = \mathbf{R}_{1f} + \mathbf{r}_m$, e temos que

$$(s'_1 \mathbf{e}_{x'} + s'_2 \mathbf{e}_{y'} + s'_3 \mathbf{e}_{z'}) = (R'_{11} \mathbf{e}_{x'} + R'_{12} \mathbf{e}_{y'} + R'_{13} \mathbf{e}_{z'}) + (r_1 \mathbf{e}_x + r_2 \mathbf{e}_y + r_3 \mathbf{e}_z). \quad (\text{B.2})$$

Derivando no tempo, obtemos

$$\begin{aligned} (\dot{s}'_1 \mathbf{e}_{x'} + \dot{s}'_2 \mathbf{e}_{y'} + \dot{s}'_3 \mathbf{e}_{z'}) &= (\dot{R}'_{11} \mathbf{e}_{x'} + \dot{R}'_{12} \mathbf{e}_{y'} + \dot{R}'_{13} \mathbf{e}_{z'}) + \\ &(\dot{r}_1 \mathbf{e}_x + \dot{r}_2 \mathbf{e}_y + \dot{r}_3 \mathbf{e}_z + r_1 \dot{\mathbf{e}}_x + r_2 \dot{\mathbf{e}}_y + r_3 \dot{\mathbf{e}}_z), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde os três últimos termos do lado direito se referem ao fato de que S está em movimento em relação a S' . Portanto,

$$\dot{\mathbf{s}}_f = \dot{\mathbf{R}}_{1f} + \dot{\mathbf{r}}_m + (r_1 \dot{\mathbf{e}}_x + r_2 \dot{\mathbf{e}}_y + r_3 \dot{\mathbf{e}}_z) \quad (\text{B.4})$$

onde $\dot{\mathbf{r}}_m$ é a velocidade do ponto P , em relação a O . A velocidade do ponto P , em relação a O' é $\dot{\mathbf{s}}_f$.

Como os vetores \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z são unitários, é necessário que suas velocidades sejam sempre normais às suas direções, pois, se, em algum momento, a velocidade de algum desses vetores unitários tivesse uma componente paralela a si próprio, teríamos que, no instante “ δt ” posterior, a norma desse vetor seria diferente de 1.

Assim, esses vetores estão fadados a descrever trajetórias na superfície esférica unitária. Além disso, como as suas velocidades estão sempre em planos normais a eles mesmos, podemos, de forma geral, representá-las como um produto vetorial entre os vetores unitários e vetores velocidade angular. Dessa forma, temos que $\dot{\mathbf{e}}_x = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_x$, $\dot{\mathbf{e}}_y = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_y$ e $\dot{\mathbf{e}}_z = \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{e}_z$.

Finalmente, \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z não são somente unitários, mas são também ortogonais. Essa segunda característica impõe que as três velocidades angulares sejam iguais: $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}$, pois, se alguma delas, em algum momento, fosse diferente, o vetor que a possui, no instante “ δt ” posterior, deixaria de ser ortogonal aos outros dois vetores.

Assim,

$$(r_1 \dot{\mathbf{e}}_x + r_2 \dot{\mathbf{e}}_y + r_3 \dot{\mathbf{e}}_z) = \boldsymbol{\omega} \times (r_1 \mathbf{e}_x + r_2 \mathbf{e}_y + r_3 \mathbf{e}_z), \quad (\text{B.5})$$

que, substituindo na equação (B.4), nos dá a equação (3.50):

$$\dot{\mathbf{s}}_f = \dot{\mathbf{R}}_{1f} + \dot{\mathbf{r}}_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (\text{B.6})$$

B.2 Justificativa da equação (3.192)

Vamos, aqui, obter as equações de Clairaut e de Radau, seguindo a dedução de Tisserand (1891). Como essa é uma parte puramente algébrica da Teoria de Laplace, ela foi colocada aqui, como apêndice.

Vamos partir da equação (3.188), válida para $j > 0$.

$$-\frac{4\pi}{2j+1} (r_o^j E_{jm}(r_o, t) + r_o^{-(j+1)} F_{jm}(r_o, t)) + r_o^{-1} M_{\Psi}(r_o, t) f_{jm}(r_o, t) - c_{jm}(t) r_o^j = 0 \quad (\text{B.7})$$

Para facilitar a visualização das operações a serem realizadas, vamos parar de explicitar, aqui, os domínios das funções (representados por (r_o, t)). Vamos, também, usar o símbolo “ \bullet ”, ao invés de “ $\frac{\partial}{\partial r_o}$ ”, para designar a derivada parcial em relação a r_o . Isso nos poupará de um acúmulo excessivo de símbolos. Aliás, essa notação é muito parecida com a notação de Newton para derivadas (onde usa-se o símbolo ‘ para designar “derivada total”).

Assim, vamos reescrever a Eq. (B.7) sem os domínios:

$$-\frac{4\pi}{2j+1} (r_o^j E_{jm} + r_o^{-(j+1)} F_{jm}) + r_o^{-1} M_{\Psi} f_{jm} - c_{jm} r_o^j = 0 \quad (\text{B.8})$$

Vamos, então, dividir a equação acima por r_o^j , e, em seguida, derivar em relação a r_o . Assim, nós chegamos a

$$-\frac{4\pi}{2j+1} (E_{jm}^{\bullet} - (2j+1)r_o^{-2j-2} F_{jm} + r_o^{-2j-1} F_{jm}^{\bullet}) + G(M_{\Psi}^{\bullet} f_{jm} + M_{\Psi} f_{jm}^{\bullet}) r_o^{-(j+1)} - G(j+1)r_o^{-j-2} M_{\Psi} f_{jm} = 0 \quad (\text{B.9})$$

Isolemos a quantidade Q_1 , definida pela soma entre o primeiro, o terceiro e o quarto termos da equação acima:

$$Q_1 = -\frac{4\pi}{2j+1} (E_{jm}^\bullet r_o^{-2j-1} F_{jm}^\bullet) + G f_{jm} M_\Psi^\bullet r_o^{-j-1} \quad (\text{B.10})$$

Das três últimas equações da tabela 3.1, que resume os principais resultados da aproximação de primeira ordem, nós temos que $E_{jm}^\bullet = \rho \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^{2-j} f_{jm})$, $F_{jm}^\bullet = \rho \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^{3+j} f_{jm})$ e $M_\Psi^\bullet = 4\pi \rho r_o^2$. Substituindo no termo Q_1 , acima, temos

$$Q_1 = -\frac{4\pi}{2j+1} \left(-\rho \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^{2-j} f_{jm}) + r_o^{-2j-1} \rho \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^{3+j} f_{jm}) \right) + 4\pi G \rho r_o^{-j+1} f_{jm} \quad (\text{B.11})$$

Efetuada as duas derivadas parciais da equação acima, e, depois, somando todos os termos, nós concluímos que a quantidade Q_1 é nula:

$$Q_1 = 0 \quad (\text{B.12})$$

e, assim, a Eq. (B.9) se reduz a

$$-4\pi F_{jm} - M_\Psi f_{jm}^\bullet r_o^{-j-1} + M_\Psi (j+1) r_o^j f_{jm} = 0 \quad (\text{B.13})$$

Derivando, mais uma vez, em relação a r_o , temos

$$-F_{jm}^\bullet - M_\Psi^\bullet f_{jm}^\bullet r_o^{1+j} - M_\Psi f_{jm}^{\bullet\bullet} r_o^{1+j} + (1+j) M_\Psi^\bullet f_{jm} r_o^j + j(j+1) M_\Psi f_{jm} r_o^{j-1} = 0 \quad (\text{B.14})$$

Substituindo $F_{jm}^\bullet = \rho \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^{3+j} f_{jm})$ na equação acima, e, após alguns cancelamentos, chegamos a

$$f_{jm}^{\bullet\bullet} + 8\pi \rho \frac{1}{M_\Psi} (r_o^2 f_{jm}^\bullet + r_o f_{jm}) - j(j+1) f_{jm} r_o^{-2} = 0 \quad (\text{B.15})$$

A massa em r_o e no tempo t é $M_\Psi = 4\pi \int_0^{r_o} \rho(r_o', t) r_o'^2 dr_o'$. A densidade média em r_o e no tempo t é $\bar{\rho} = M_\Psi(r_o, t) / (\frac{4\pi}{3} r_o^3) = \frac{3}{r_o^3} \int_0^{r_o} \rho(r_o', t) r_o'^2 dr_o'$. Então, substituindo essas quantidades no termo $8\pi \rho \frac{1}{M_\Psi}$ da equação acima, nós obtemos a conhecida **Equação de Clairaut**,

$$r_o^2 f_{jm}^{\bullet\bullet} + 6 \frac{\rho}{\bar{\rho}} (r_o f_{jm}^\bullet + f_{jm}) - j(j+1) f_{jm} = 0 \quad (\text{B.16})$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem na função f_{jm} .

Definindo a função η_j como a derivada logarítmica de f_{jm} :

$$\eta_j = \frac{r_o}{f_{jm}} \frac{\partial f_{jm}}{\partial r_o} \quad (\text{B.17})$$

e substituindo-a na equação de Clairaut, nós obtemos a **Equação de Radau**,

$$r_o \frac{\partial}{\partial r_o} \eta_{jm} + 6 \frac{\rho}{\bar{\rho}} (\eta_{jm} + 1) + \eta_{jm} (\eta_{jm} - 1) = j(j+1) \quad (\text{B.18})$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem na função η_{jm} .

B.3 Justificativa da equações (3.193) e (3.195)

Vamos obter, aqui, a condição de contorno para as funções f_{jm} , na superfície da estrela. Novamente, para nos poupar de um acúmulo excessivo de símbolos, vamos usar o símbolo “•”, ao invés de “ $\frac{\partial}{\partial r_o}$ ”, para designar a derivada parcial em relação a r_o (ver Apêndice B.2).

Vamos, novamente, partir da equação (3.188), válida para $j > 0$,

$$-\frac{4\pi G}{2j+1} (r_o^j E_{jm} + r_o^{-(j+1)} F_{jm}) + r_o^{-1} M_{\Psi} f_{jm} - c_{jm} r_o^j = 0 \quad (\text{B.19})$$

Derivando em relação a r_o e, em seguida, multiplicando por r_o^{-2j} , nós obtemos

$$-\frac{4\pi G}{2j+1} ((2j+1)E_{jm} + r_o E_{jm}^{\bullet} + r_o^{-2j} F_{jm}^{\bullet}) + G j r_o^{-j-1} M_{\Psi} f_{jm} + Gr_o^{-j} f_{jm} M_{\Psi}^{\bullet} + Gr_o^{-j} M_{\Psi} f_{jm}^{\bullet} - c_{jm}(2j+1) = 0 \quad (\text{B.20})$$

Isolemos a quantidade Q_2 , definida pela soma entre o segundo, o terceiro e o quinto termos da equação acima:

$$Q_2 = -\frac{4\pi}{2j+1} (r_o E_{jm}^{\bullet} + r_o^{-2j} F_{jm}^{\bullet}) + Gr_o^{-j} f_{jm} M_{\Psi}^{\bullet} \quad (\text{B.21})$$

Novamente, como fizemos no Apêndice B.2, substituindo as equações $E_{jm}^{\bullet} = \rho \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^{2-j} f_{jm})$, $F_{jm}^{\bullet} = \rho \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^{3+j} f_{jm})$ e $M_{\Psi}^{\bullet} = 4\pi \rho r_o^2$, no termo Q_1 , acima, nós obtemos que esse último se anula:

$$Q_2 = 0 \quad (\text{B.22})$$

e, assim, a Eq. (B.20) se reduz a

$$-4\pi G E_{jm} + G j r_o^{-j-1} M_{\Psi} f_{jm} + Gr_o^{-j} M_{\Psi} f_{jm}^{\bullet} - c_{jm}(2j+1) = 0 \quad (\text{B.23})$$

onde, pela tabela 3.1, $E_{jm} = \int_{r_o}^{\infty} \rho \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^{2-j} f_{jm}) dr_o'$.

A partir da superfície externa da estrela, a densidade ρ passa a ser nula. Assim, a função E_{jm} também se anula, a partir dessa superfície. Vamos definir r_1 como o raio médio dessa superfície externa da estrela (o raio médio a partir do qual a densidade será sempre nula: $\rho(r_1, t) = 0$). Então, na equação acima, temos

$$G j r_o^{-j-1} M_{\Psi} f_{jm} + Gr_o^{-j} M_{\Psi} f_{jm}^{\bullet} = c_{jm}(2j+1) \quad (\text{B.24})$$

que, fazendo uso da Eq. (3.191) e resolvendo para f_{jm} , temos

$$f_{jm}(r_1, t) = \frac{c_{jm}}{GM} r_1^{j+1} (2k_j(r_1, t) + 1) \quad (\text{B.25})$$

onde

$$k_j = \frac{j+1-\eta_j}{2(j+\eta_j)} \quad (\text{B.26})$$

Referências

- Alexander, D. R., Ferguson, J. W., 1994, ApJ, 437, 879
- Arnett, W. D., Truran, J. W., 1969, ApJ, 157, 359
- Baraffe, I., Chabrier, G., Allard, F., Hauschildt, P. H., 1997, A&A, 327, 1054
- Bate, M. R., Bonnell, I. A., Bromm, V., 2002, MNRAS, 336, 705
- Batten, A. H., 1973, in *Binary and Multiple Systems of Stars*, Pergamon Press, Oxford
- Bethe, H. A., Critchfield, C. L., 1938, Physical Review, 54, 248
- Böhm-Vitense, E., 1958, Zeitschrift für Astrophysik, 46, 108
- Bouvier, J., Forestini, M. Allain, S., 1997, A&A, 272, 176
- Canuto, V. M., Mazzitelli, I., 1991, ApJ, 370, 295
- Canuto, V. M., Mazzitelli, I., 1992, ApJ, 389, 724
- Canuto, V. M., Goldman, I., Mazzitelli, I., 1996, ApJ, 473, 550
- Caughlan, G. R., Fowler, W. A., 1988, Atomic Data and Nuclear Data Tables, 40, 283
- Chaboyer, B., Zahn, J. -P., 1992, A&A, 253, 173
- Chandrasekhar, S., 1933, MNRAS, 93, 449
- Chandrasekhar, S., 1939, in *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, University of Chicago Press
- Claret, A., Giménez, A., 1989, A&AS, 81, 1
- Claret, A., Willems, B., 2002, A&A, 388, 518
- Claret, A., Willems, B., 2003, A&A, 410, 289
- Claret, A., 2006, A&A, 445, 1061
- Clayton, D. B., 1968, in *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*, McGraw-Hill, New York
- Cloutman, L. D., Eoll, J. G., 1976, ApJ, 206, 548
- Cowling, T. G., 1938, MNRAS, 98, 734
- Cox, A. N., Stewart, J. N., 1970, ApJS, 19, 243
- D'Antona, F., Mazzitelli, I., 1997, Memorie della Società Astronomica Italiana, 68, 807
- D'Antona, F., Ventura, P., Mazzitelli, I., 2000, ApJ, 543, 77
- de Luca, N. 1982, in *Mecânica Celeste*, Editora da Universidade Federal do Paraná
- Detrio, J. A., 1972, J. Chem. Phys., 57, 5012
- Eddington, A. S., 1920, The Observatory, 43, 341-358
- Endal, A. S., Sofia, S., 1976, ApJ, 210, 184
- Endal, A. S., Sofia, S., 1978, ApJ, 220, 279

- Espinosa Lara, F., Rieutord, M., 2007, *A&A*, 470, 1013
- Faber, T. E. 1995, in *Fluid Dynamics for Physicists*, Cambridge University Press
- Giménez, A. 2007, in *Binary Stars as Critical Tools & Tests in Contemporary Astrophysics, Proceedings of IAU Symposium 240*, Cambridge University Press, pp.290-298
- Girardi, L., Bressan, A., Bertelli, G., Chiosi, C., 2000, *A&AS*, 141, 371
- Goldstein, H., Poole, C. P., Safko, J. L. 2001, in *Classical Mechanics*, 3 edition, Addison Wesley
- Graboske, H. C., De Witt, H. E., Grossman, A. S., Cooper, M. S., 1973, *ApJ*, 181, 457
- Hayashi, C., 1961, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 13, 450
- Heney, L. G., Forbes, J. E., Gould, N. L., *ApJ*, 139, 306
- Iben, I., 1965, *ApJ*, 141, 993
- Iglesias, C. A., Rogers, F. J., 1993, *ApJ*, 412, 752
- Itoh, N., Mutoh, H., Hikita, A., Kohyama, Y., 1992, *ApJ*, 385, 622
- Itoh, N., Kohyama, Y., 1993, *ApJ*, 404, 268
- Jackson, J. D. 1999, in *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, Wiley
- Johnson, H. L., Morgan, W. W., 1953, *ApJ*, 117, 313
- Johnson, H. L., Sandage, A. R., 1955, *ApJ*, 121, 616
- Kaufmann, W. J. 1978, in *Stars and Nebulas*, W. H. Freeman and Company
- Kim, Y. C., Demarque, P., Yi, S. K., Alexander, D. R., 2002, *ApJS*, 143, 499
- Kippenhahn, R., Thomas, H. C. 1970, in *Stellar Rotation*, Sletterback, A. & Reidel, D., eds. (KT70)
- Kippenhahn, R., Weigert, A. 1990, in *Stellar Structure and Evolution*, Springer-Verlag, Berlin (KW90)
- Kopal, Z. 1959, in *Close Binary Systems*, (New York: Wiley)
- Kopal, Z. 1978, in *Dynamics of Close Binary Systems*, Reidel, Dordrecht
- Kuiper, G. P., 1938, *ApJ*, 88, 472
- Lada, C. J., 2006, *ApJ*, 640, 63
- Landin, N. R., 2006, Ph.D. Thesis, Federal University of Minas Gerais
- Landin, N. R., Ventura, P., D'Antona, F., Mendes, L. T. S., Vaz, L. P. R., 2006, *A&A*, 456, 269
- Landin, N. R., Mendes, L. T. S., Vaz, L. P. R., 2009, *A&A*, 494, 209
- Larson, R. B., 2003, *Reports on Progress in Physics*, 66, 1651
- Lubow, S. H., 1979, *ApJ*, 229, 1008
- Magni, G., Mazzitelli, I., 1979, *A&A*, 72, 134
- Marion, J. B., Thornton, S. T. 1995, in *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 4th ed., Harcourt Brace & Company
- Martynov, D. Ya., 1973, in *Eclipsing Variable Stars*, V. P. Tsevevich (ed.), IPST Astrophys. Lybrary, Jerusalem, p. 291
- Massaguer, J. M., Latour, J., Toomre, J., Zahn, J. -P., 1984, *A&A*, 140, 1
- Mazzitelli, I., 1979, *A&A*, 79, 251
- Mazzitelli, I., 1989, *ApJ*, 340, 249

- Mendes, L. T. S., D'Antona, F., Mazzitelli, I., 1999a, A&A, 341, 174
- Mendes, L. T. S., 1999, Ph.D. Thesis, Federal University of Minas Gerais
- Mihalas, D., Dappen, W., Hummer, D. G., 1988, ApJ, 331, 815
- Miller, R., Hartmann, W. K. 1993, in *The Grand Tour: A Traveler's Guide to the Solar System*, Revised Edition, Workman Publishing Company
- Morel, P., 1997, A&AS, 124, 597
- Pinsonneault, M. H., 1988, Ph.D. Thesis, Yale University
- Pinsonneault, M. H., Kawaler, S. D., Sofia, S., Demarque, P., 1989, ApJ, 338, 424
- Poole, C. P., 2007, in *The Physics Handbook*, Wiley-VCH, 2 ed., pp. 155
- Postnov, K. A., Yungelson, L. R., 2006, Living Reviews in Relativity, 9, 6
- Press, E. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. 1992, in *Numerical Recipes in Fortran 77: The art of Scientific Computing*, Cambridge University Press
- Rogers, F. J., Swenson, F. J., Iglesias, C. A., 1996, ApJ, 456, 902
- Schwarzschild, M. 1958, in *Structure and Evolution of the Stars*, Princeton University Press
- Sepinsky, J.F., Willems, B., Kalogera, V., 2007, ApJ, 660, 1624
- Shu, F. H. 1982, in *The Physical Universe*, Oxford University Press
- Siess, L., Dufour, E., Forestini, M., 2000, A&A, 358, 593
- Smeyers, P., Willems, B., 2001, A&A, 373, 173
- Stahler, S. W., 1983, ApJ, 274, 822
- Sterne, T. E., 1939, MNRAS, 99, 451
- Stothers, R., 1974, ApJ, 194, 651
- Tisserand, F., in *Mécanique Céleste, v.2*, Paris
- Ventura, P., Zeppieri, A., Mazzitelli, I., D'Antona, F., 1998, A&A, 334, 953
- Ventura, P., D'Antona, F., Mazzitelli, I., 2008, Ap&SS, 316, 93
- Walker, M. F., 1956, ApJS, 2, 365
- Zahn, J. -P., 2008, EAS Publications Series, Volume 29, pp.67-90