



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**MODELOS DE CONCEPÇÃO PARA ESTRUTURAS EM CONCRETO  
ARMADO COM COMPORTAMENTO NÃO LINEAR OBTIDOS PELO  
MÉTODO DE BIELAS E TIRANTES E OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA**

**Marcela Bruna Braga França Guerra**

Orientador: Prof. Marcelo Greco

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito para a obtenção do título de doutora em Engenharia de Estruturas.

Belo Horizonte

2017

G934m	<p data-bbox="639 1379 1043 1408">Guerra, Marcela Bruna Braga França.</p> <p data-bbox="639 1408 1445 1514">Modelos de concepção para estruturas em concreto armado com comportamento não linear obtidos pelo método de bielas e tirantes e otimização topológica [manuscrito] / Marcela Bruna Braga França Guerra. - 2017.</p> <p data-bbox="676 1518 871 1547">xxi, 183 f., enc.: il.</p> <p data-bbox="676 1574 967 1603">Orientador: Marcelo Greco.</p> <p data-bbox="644 1630 1286 1686">Tese (doutorado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.</p> <p data-bbox="676 1713 927 1742">Bibliografia: f. 176-183.</p> <p data-bbox="639 1769 1445 1874">1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Concreto armado - Teses. 3. Método dos elementos finitos - Teses. I. Greco, Marcelo. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.</p> <p data-bbox="1251 1901 1414 1930">CDU: 624(043)</p>
-------	--

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**MODELOS DE CONCEPÇÃO PARA ESTRUTURAS EM CONCRETO  
ARMADO COM COMPORTAMENTO NÃO LINEAR OBTIDOS PELO  
MÉTODO DE BIELAS E TIRANTES E OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA**

Marcela Bruna Braga França Guerra

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia de Estruturas da  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS  
GERAIS, como requisito para a obtenção do  
título de doutora em Engenharia de Estruturas.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Doutor Marcelo Greco  
DEES – UFMG

---

Prof. Doutor Armando Cesar Campos Lavall  
DEES - UFMG

---

Prof. Doutor Américo Almeida Magalhães Junior  
PUC - MG

---

Prof. Doutor Afonso Celso de Castro Lemonge  
UFJF

---

Prof. Doutor Valério da Silva Almeida  
POLI - USP

Belo Horizonte, 06 de fevereiro de 2017

*A Deus, por me permitir chegar até aqui.  
Ao meu marido pelo incansável incentivo e  
amor. Aos meus pais e minhas irmãs pelo  
apoio e paciência nas horas difíceis.*

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por me guiar, me iluminar, me dar forças e tranquilidade para seguir em frente e não desanimar diante das dificuldades e imprevistos ao longo dessa jornada.

Ao professor Marcelo Greco, a quem me espelho, pelo brilhante profissional que é, excelente professor, por toda dedicação, amizade, por me fazer ver a arte de ensinar com outros olhos e por me apoiar em todos os momentos. Sem sua orientação, experiência, conhecimento, disponibilidade e competência jamais teria chegado até aqui.

Ao meu marido Roger, amor da minha vida, por todo incentivo, amor, apoio, força e ajuda em todos os momentos em que precisei, sem os quais não seria possível chegar até aqui.

Ao meu filho Bernardo, simplesmente por existir, por todo seu amor e por me fazer ter forças, e por que não dizer motivos, para prosseguir e atingir meus objetivos.

Aos meus pais, razões da minha vida.

Ao meu amado pai Bernardo, pela educação, incentivo e amor, que me permitiram chegar até aqui.

A minha amada mãe Sônia, por sempre me incentivar aos estudos, por todo amor, ajuda, paciência e aconchego.

As minhas irmãs, Daniela e Graziela, meus amores, por todo incentivo, ajuda e paciência em todos os momentos.

A todos os professores do DEES aos quais tive o prazer de ter das aulas, por todo conhecimento adquirido.

A todos meus colegas de turma pelo companheirismo, amizade e apoio durante o curso.

A todos que me ajudaram de alguma forma, recebam o meu agradecimento.

*“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas  
lutei para que o melhor fosse feito.  
Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus,  
não sou o que era antes”.*  
*Marthin Luther King*

## RESUMO

A atual tendência de projetos estruturais mais ousados leva a uma sequência complexa de análises capazes de modificar os parâmetros da estrutura, suas condições iniciais e de contorno. Tais modificações podem tornar o projeto adequado, tanto em relação às restrições econômicas quanto para as restrições técnicas. Portanto, a busca por novos sistemas estruturais e construtivos, capazes de conciliar desempenho e segurança, torna necessário o conhecimento aprofundado do comportamento mecânico das estruturas sujeitas a diferentes condições de carregamento. O modelo de bielas e tirantes tem sido adotado para o dimensionamento de alguns tipos de elementos estruturais em concreto armado e regiões onde há alterações geométricas e concentrações de tensões, chamadas regiões “D”. Esse método permite obter uma melhor representação do comportamento estrutural e mecanismos resistentes nas estruturas de concreto. No entanto, a escolha do modelo topológico depende basicamente da experiência do projetista em compatibilizar a geometria dos fluxos internos de cargas e os pontos de apoios. Com isso, há certa dificuldade em suas aplicações, já que a concepção do modelo pode apresentar alguma incerteza. Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo a aplicação do modelo de bielas e tirantes para elementos estruturais não lineares juntamente com um método de otimização topológica avançado. A técnica de otimização topológica adotada considera a diminuição progressiva da contribuição da rigidez dos elementos finitos com baixos valores de tensões. As análises realizadas poderão proporcionar ao projetista estrutural melhor entendimento de processos de concepções estruturais, garantindo a segurança e a confiabilidade na resolução de problemas complexos envolvendo o concreto estrutural.

**Palavras Chave:** *concreto armado; biela-tirante; ABAQUS; MEF; otimização topológica.*

## ABSTRACT

The actual tendency of more daring designs applied for structures leads to a complex sequel of analyses capable to modify structural parameters, initial conditions and boundary conditions. These modifications can make able the structural design suitable both for economical restrictions and for technical restrictions. Thus, the search for new structural systems capable to join performance and safety makes necessary a deeper knowledge regarding the mechanical behavior of structures subject to different loading conditions. The strut-and-tie model is used to the structural design for some reinforced concrete elements and to the regions where geometrical modifications and stress concentrations are observed, called regions “D”. This method allows a better structural behavior representation for strength mechanisms in the concrete structures. Nonetheless, the topological model choice depends on the designer experience regarding compatibility between internal flux of loads geometry and boundary/initial conditions. Thus, there is some difficulty on its applications, once the model conception presents some uncertainty. In this context, the present work aims the application of the strut-and-tie model to nonlinear structural elements together with an advanced topological optimization method. The topological optimization method adopted considers the progressive stiffness reduction of finite elements with low stress values. The performed analyses could help the structural designer to better understand structural conceptions, guaranteeing the safety and the reliability in the solution of complex problems involving structural concrete.

**Keywords:** *reinforced concrete; strut-and-tie; ABAQUS; FEM; topological optimization*

## LISTA DE FIGURAS

Fig. 2.1 – (a) Comportamento elástico linear, (b) Comportamento elástico não linear (Adaptado de Filho, 2003).....	6
Fig. 2.2 – Representação reológica uniaxial elástica (Adaptado de Mesquita, 2002).....	7
Fig. 2.3 – (a) Plástico perfeito, (b) Plástico com endurecimento, ou seja, resiste a tensões maiores que a tensão de escoamento (Adaptado de Filho, 2003).....	8
Fig. 2.4 - Representação reológica uniaxial plástico (Adaptado de Mesquita, 2002).....	8
Fig. 2.5 – (a) Relação Tensão x Tempo para o comportamento viscoso, (b) Relação Deformação x Tempo para o comportamento viscoso (Adaptado de Filho, 2003).....	9
Fig. 2.6 - Representação reológica uniaxial do comportamento viscoso (Adaptado de Mesquita, 2002).....	9
Fig. 2.7 – Modelo representativo uniaxial do comportamento viscoelástico de Kelvin-Voigt (Adaptado de Mesquita, 2002). ....	10
Fig. 2.8 - Modelo representativo uniaxial do comportamento viscoelástico de Boltzmann (Adaptado de Mesquita, 2002). ....	11
Fig. 2.9 – Curva tensão-deformação típica para compressão axial (Adaptado de Kupfer <i>et al.</i> , 1969).....	14
Fig. 2.10 – Tração uniaxial do concreto (Peterson, 1981).....	15
Fig. 2.11 – Curva tensão-deformação nos regimes pré e pós-falha (Chen 1982).....	15
Fig. 2.12 – Coeficiente de Poisson (Proença, 1988).....	17
Fig. 2.13 – Curva tensão x deformação para o concreto submetido á compressão uniaxial com solicitações cíclicas (Adaptado de Sinha <i>et al.</i> , 1964). ....	17
Fig. 2.14 – Resultados de experimentos em relação ao concreto submetido à compressão biaxial (Adaptado de Kupfer <i>et al.</i> ,1969).....	18
Fig. 2.15 – (a) Tensão x Deformação do concreto submetido ao esforço de tração-compressão biaxial (b) Tensão x Deformação do concreto submetido ao esforço de tração biaxial (Adaptado de Kupfer <i>et al.</i> ,1969).....	18
Fig. 2.16 – (a) Tensão x Deformação do concreto submetido ao esforço de compressão biaxial (b) compressão-tração (c) tração biaxial (Adaptado de Proença, 1988).....	19
Fig. 2.17 – Deformação volumétrica do concreto submetido à compressão biaxial (Adaptado de Kupfer <i>et al.</i> ,1969).....	20
Fig. 2.18 – Curva Tensão x Deformação do concreto submetido à compressão triaxial (Adaptado de Palaniswamy e Shah, 1974). ....	21
Fig. 2.19 – Curva Tensão x Deformação do concreto submetido à compressão triaxial .....	22
Fig. 2.20 – Comportamento do concreto quando descarregado (Adaptado de Proença, 1988). ....	22
Fig. 2.21 – Curvas tensão-deformação típicas do aço (a) com laminação a quente (b) encruado a frio.....	23
Fig. 2.22 – (a) Modelo Elasto-Plástico Perfeito (b) Modelo Elasto-Plástico com Endurecimento Linear (c) Modelo Trilinear (Adaptado de Stramandinoli, 2007).....	24
Fig. 2.23 – Modelo constitutivo do aço idealizado – Elastoplástico perfeito.....	24
Fig. 2.24 – Decomposição das tensões no espaço de tensões principais.....	36
Fig. 2.25 – Meridianos da superfície de falha (Chen e Han, 1988).....	39
Fig. 2.26 – Seção da superfície básica de ruptura do concreto no plano anti-esférico (Chen e Han, 1988). ....	40
Fig. 2.27 – Modelos de falha (Chen e Han, 1988). ....	41
Fig. 2.28 – (a) Plano Meridiano do critério de Rankine e (b) Seção transversal no plano de Nadai ( $\pi$ ) (Adaptado de Chen e Han, 1988).....	44

Fig. 2.29 – Superfície de ruptura de acordo com o critério de Tresca (a) para o caso plano (b) para o caso tridimensional. ....	45
Fig. 2.30 – Superfície de ruptura de von Mises (a) para o caso plano (b) superfície de von Mises circunscrevendo a de Tresca para o caso plano (Adaptado de Hibbeler, 2004). ....	47
Fig. 2.31 - Superfície de ruptura de von Mises para o caso tridimensional. ....	47
Fig. 2.32 – Critérios de Tresca e von Mises no plano anti-esférico (Chen e Han, 1988).....	47
Fig. 2.33 – Critério de Mohr-Coulomb – Superfície de ruptura com as retas formando uma envoltória (Chen e Han, 1988). ....	48
Fig. 2.34 – Meridianos no plano meridiano e seção transversal no plano de Nadai ( $\pi$ ) (Chen e Han, 1988). ....	50
Fig. 2.35 – Critério de Mohr-Coulomb – Superfície de ruptura para o caso tridimensional....	51
Fig. 2.36 – Meridianos do Critério de Drucker-Prager e seção transversal no plano de Nadai ( $\pi$ ) (Chen e Han, 1988). ....	52
Fig. 2.37 – Drucker-Prager e Mohr-Coulomb ao longo do meridiano de compressão no espaço de tensões.....	53
Fig. 2.38 – Seção da superfície de ruptura do critério de Willam- Warnke no plano anti-esférico (Chen e Han, 1988). ....	55
Fig. 2.39 – Critério de Willam- Warnke (Chen, 1982). ....	57
Fig. 2.40 – Respostas do concreto submetido à carga uniaxial (a) de tração (b) de compressão (Tutorial Abaqus®, 2010). ....	63
Fig. 2.41 – Regra de escoamento plástico (a) associativa (b) não associativa (Adaptado de Sarturi, 2014).....	68
Fig. 2.42 – Curvas tensão-deformação plástica (a) na compressão e (b) na tração (Adaptado de Sarturi, 2014).....	73
Fig. 2.43 – Função potencial plástica linear e hiperbólica de Drucker-Prager (Adaptado de Sarturi, 2014).....	75
Fig. 2.44 – Valores correspondentes para o parâmetro $K_c$ (Tutorial Abaqus®, 2010) ....	76
Fig. 2.45 – Superfície de ruptura no plano de tensões (Lee & Fenves, 1998).....	77
Fig. 3.1 - Analogia de treliça para esforços internos na região de cisalhamento de uma viga de concreto armado com força cortante constante. ....	80
Fig. 3.2 – Seção se uma viga – Hipótese de Bernoulli-Euler (Adaptado de Narciso, 2009)....	82
Fig. 3.3 – “Regiões D” (Wight e Macgregor, 2012) ....	83
Fig. 3.4 – “Regiões D” devido a descontinuidade geométrica do elemento (Schlaich <i>et al.</i> ,1987).....	83
Fig. 3.5 - – “Regiões D” devido a descontinuidade geométrica do elemento e cargas concentradas (Schlaich <i>et al.</i> ,1987).....	84
Fig. 3.6 – Trajetórias de tensões e identificação das Regiões B e D (Schlaich <i>et al.</i> ,1987)....	84
Fig. 3.7 – Modelo de Bielas e Tirantes de acordo com Silva e Giongo (2000) ....	85
Fig. 3.8 – Modelo de bielas e tirantes de uma viga (Adaptado de Wight e Macgregor, 2012 e ACI-318, 2005).....	86
Fig. 3.9 – Elementos básicos para o modelo de bielas e tirantes (Marti, 1991 <i>apud</i> CEB-FIB Model Code, 2010).....	87
Fig. 3.10 - Modelo de Bielas e tirantes a partir do “Load Path Approach” (Adaptado de Schäfer e Schlaich ,1991). ....	88
Fig. 3.11 – Diagrama de cargas não completamente balanceado. (Adaptado de Schäfer e Schlaich ,1991). ....	89
Fig. 3.12 – Modelo de bielas e tirantes (a) Modelo correto (b) Modelo errado ( Schäfer e Schlaich ,1991).....	90
Fig. 3.13 – Superposição de dois modelos de bielas e tirantes (Schäfer e Schlaich ,1991) ....	90
Fig. 3.14 – Trajetórias das tensões elásticas e o modelo de bielas e tirantes correspondente (Adaptado de Schlaich e Schäfer,1991). ....	91

Fig. 3.15 - Modelo de Bielas e tirantes pela trajetória das tensões principais de tração e compressão (Adaptado de Schlaich,1987 <i>apud</i> Wight e Macgregor, 2012) .....	91
Fig. 3.16 - Análise da fissuração e modelo de bielas e tirantes correspondente (Adaptado de Wight e Macgregor, 2012) .....	92
Fig. 3.17 – Exemplo para a topologia ótima utilizando-se a distribuição de materiais - .....	94
Fig. 3.18 – Configurações dos campos de tensões de compressão no concreto (a) distribuição de tensões radial ou em leque (b) distribuição de tensões em linhas curvilíneas com afunilamento ou em forma de garrafa (c) distribuição de tensões paralelas ou prismáticas (Adaptado de Schlaich e Schäfer,1991). .....	96
Fig. 3.19 – (a) diagrama para o fornecimento de taxas de armadura necessárias (b) modelo de bielas e tirantes e armadura transversal correspondente (Adaptado de Schlaich <i>et al.</i> ,1987)..	97
Fig. 3.20 – Classificação dos nós (a) Modelo de bielas de tirantes sendo que a indicação 1 aponta um nó contínuo e 2 um nó singular em uma região D (b) e (c) campos de tensões e regiões nodais. (Adaptado de Schäfer e Schlaich, 1991) .....	105
Fig. 4.1 – Exemplo apresentado em Maxwell (1870) referente à aplicação do princípio proposto no estudo em pontes (Maxwell, 1870).....	121
Fig. 4.2 – (a) e (b) Exemplos da solução da topologia ótima da estrutura proposta por Michell (Michell, 1904 <i>apud</i> Bendsøe e Sigmund, 2003) .....	121
Fig. 4.3 – Otimização topológica a partir de uma estrutura discreta (Adaptado de Lima, 2002). .....	123
Fig. 4.4 – Categorias para a otimização estrutural (a) Otimização Paramétrica (b) Otimização de Forma (c) Otimização Topológica (Bendsøe e Sigmund, 2003). .....	124
Fig. 4.5 – Modelo de material com microestrutura (Bendsøe e Kikuchi, 1988) .....	127
Fig. 4.6 – Exemplo de automatização da obtenção do modelo de bielas e tirantes por meio da otimização topológica. (Adaptado de Oliveira, 1998).....	130
Fig. 4.7 – Exemplo de automatização da obtenção do modelo de bielas e tirantes por meio da otimização topológica. (Adaptado de Kwak e Noh, 2006).....	131
Fig. 4.8 – Remoção do elemento da malha pelo método de otimização evolucionária (Adaptado de Simonetti <i>et al.</i> , 2010).....	132
Fig. 4.9 – Exemplo de checkerboard – Representação qualitativa da ocorrência da instabilidade numérica (Sigmund e Perterson,1998).....	136
Fig. 5.1 – Janelas para a definição do critério de ruptura a ser adotado.....	142
Fig. 5.2 – Algoritmo ESO (Adaptado de Lanes, 2013) .....	143
Fig. 5.3 – Dados de entrada solicitados pelo script (Lanes, 2013). .....	144
Fig. 6.1 –Viga biapoiada com abertura (Adaptado de Schlaich <i>et al.</i> ,1987).....	146
Fig. 6.2 – Topologias ótimas obtidas pela técnica ESO de otimização a ser adotada (a) comportamento linear e (b) comportamento não linear.....	147
Fig. 6.3 – Distribuição de tensões obtidas para o elemento, conforme MEF (a) considerando o comportamento linear (b) para o comportamento não linear. ....	147
Fig. 6.4 – Modelo de bielas e tirantes (a) considerando o comportamento linear (b) para o comportamento não linear, sendo as linhas pontilhadas as bielas e as contínuas os tirantes. ....	148
Fig. 6.5 – Resultados apresentados na literatura (a) em Schlaich <i>et al.</i> (1987) pelo processo do caminho da carga (b) e (c) em Liang <i>et al.</i> (2000) pelo método ESO (d) e (e) em Almeida <i>et al.</i> (2013b) pelo método SESO de otimização topológica.....	149
Fig. 6.6 – (a) Modelo de bielas e tirantes comportamento não linear do material (b) disposição da armadura para o comportamento não linear (c) disposição da armadura para o comportamento linear obtido em Almeida <i>et al</i> (2013b) .....	151
Fig. 6.7 -Viga parede biapoiada L/D=2 (Adaptado de Liang <i>et al.</i> (2000)).....	153
Fig. 6.8-Topologias ótimas obtidas (a) Solução considerando o comportamento linear do material (b) Solução considerando o comportamento não linear do material. ....	154

Fig. 6.9-Distribuição de tensões (a) solução considerando o comportamento linear do material (b) solução considerando o comportamento não linear do material.....	154
Fig. 6.10 – Modelo de bielas e tirantes (a) considerando o comportamento linear (b) para o comportamento não linear, sendo as linhas pontilhadas as bielas e as contínuas os tirantes. ....	154
Fig. 6.11– (a) Solução apresentada em Almeida <i>et al.</i> (2013a) – adotando a técnica SESO (b) Solução apresentada em Kwar and Noh (2006) – adotando a técnica ESO, ambos para análise linear.....	155
Fig. 6.12 –Pilar de ponte (Adaptado de Liang <i>et al.</i> ,2002) .....	157
Fig. 6.13-Topologias ótimas obtidas (a) Solução considerando o comportamento linear do material (b) Solução considerando o comportamento não linear do material. ....	158
Fig. 6.14– Distribuições de tensões compressão / tração (a) Solução considerando o comportamento linear do material (b) Solução considerando o comportamento não linear do material. ....	158
Fig. 6.15 – Modelo de bielas e tirantes (a) considerando o comportamento linear (b) para o comportamento não linear, sendo as linhas pontilhadas as bielas e as contínuas os tirantes. ....	159
Fig. 6.16-(a) Topologia ótima e modelo de bielas e tirantes, respectivamente, apresentados em Liang <i>et al.</i> (2002) – adotando a técnica ESO (b) Topologia ótima com regiões de tração e compressão apresentada em Almeida <i>et al.</i> (2013b) – adotando a técnica SESO.....	159
Fig. 6.17 – (a) Modelo de bielas e tirantes comportamento linear do material (b) comportamento não linear do material (c) disposição da armadura para o comportamento linear (d) disposição da armadura para o comportamento não linear.....	161
Fig. 6.18 – Viga parede com dois furos (Adaptado de Liang <i>et al.</i> ,1999) .....	163
Fig. 6.19 - Topologias ótimas obtidas (a) Solução considerando o comportamento linear do material (b) Solução considerando o comportamento não linear do material. ....	164
Fig. 6.20– Distribuições de tensões compressão / tração (a) Solução considerando o comportamento linear do material (b) Solução considerando o comportamento não linear do material. ....	164
Fig. 6.21 – Modelo de bielas e tirantes (a) considerando o comportamento linear (b) para o comportamento não linear, sendo as linhas pontilhadas as bielas e as contínuas os tirantes. ....	165
Fig. 6.22– Solução apresentada em Liang <i>et al.</i> (2000) – adotando a técnica ESO (a) topologia ótima (b) modelo de bielas e tirantes.....	165
Fig. 6.23 - Mísula com uma coluna (Adaptado de Liang <i>et al.</i> ,2000).....	167
Fig. 6.24 - Topologias ótimas obtidas (a) Solução considerando o comportamento linear do material (b) Solução considerando o comportamento não linear do material .....	168
Fig. 6.25– Distribuições de tensões compressão / tração (a) Solução considerando o comportamento linear do material (b) Solução considerando o comportamento não linear do material. ....	168
Fig. 6.26 – Modelo de bielas e tirantes (a) considerando o comportamento linear (b) para o comportamento não linear, sendo as linhas pontilhadas as bielas e as contínuas os tirantes. ....	169
Fig. 6.27 - Solução apresentada em (a) Liang <i>et al.</i> (2000), para 20 iterações, a topologia ótima e o modelo de bielas e tirantes, respectivamente (b) Almeida <i>et al.</i> (2013a), para 71 iterações e iteração 144, respectivamente.....	169

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 6.1 – Índice de Performance x Iterações (a) comportamento linear do material (b) comportamento não linear do material .....	152
Gráfico 6.2 – Índice de Performance x Iterações (a) comportamento linear do material (b) comportamento não linear do material .....	156
Gráfico 6.3 – Índice de Performance x Iterações (a) comportamento linear do material (b) comportamento não linear do material .....	162
Gráfico 6.4 – Índice de Performance x Iterações (a) comportamento linear do material (b) comportamento não linear do material .....	166
Gráfico 6.5 – Índice de Performance x Iterações (a) comportamento linear do material (b) comportamento não linear do material .....	171

**LISTA DE TABELAS**

Tab. 2.1 - Componentes principais para o critério de Bresler-Pister.....	54
Tab. 2.2 - Componentes principais para o critério de Willam-Warnke.....	57
Tab. 2.3 – Parâmetros do critério de ruptura de Ottosen.....	59
Tab. 2.4 - Componentes principais para o critério de Willam-Warnke de cinco parâmetros ..	61

## LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área total da seção transversal (item 2.7)
$A_s$	Seção da armadura (item 3.7.1 e 3.7.6)
$A_{d=}$	Área da seção transversal com defeitos (item 2.7)
$A_{cs}$	Área da seção transversal efetiva das bielas de concreto (item 3.5.2)
$A_{ss}$	Área da armadura da biela (item 3.5.5)
$A_p$	Seção da armadura ativa (item 3.7.1)
$A_{ts}$	Área de aço não protendido em um tirante (item 3.7.2)
$A_{st}$	Área da armadura do tirante (item 3.7.4)
$a_0, a_1, a_2,$	Constantes do material no critério de Willam-Warnke (item 2.6.5-a)
A, B, C e D	Quatro novas constantes para o critério de Hsieh-Ting-Chen (item 2.6.4-b)
a	Largura da região de aplicação da carga do tirante analisada (item 3.7.4)
a, b, c	Parâmetros de falha do material, critério de Bresler e Pister (item 2.6.3-a)
a, b	Constantes do material (item 2.6.4-a-b)
$\tilde{A}$	Área efetiva (item 2.7)
b	Largura total de uma seção transversal da região do tirante analisada (item 3.7.4)
$b_0, b_1, b_2$	Constantes do material no critério de Willam-Warnke (item 2.6.5-a)
$b_s$	Largura da biela (item 3.7.2)
c	Fator de coesão, constante determinada experimentalmente (item 2.6.2-a)
c	Fator de coesão determinada em função do endurecimento plástico (item 2.7)
$\dot{c}$	Taxa de coesão (item 2.7)
C	Força de compressão (item 3.5.5)
$C_{ij}^{lm}$	Matriz constitutiva elástica
d	Variável de dano (item 2.7)
$d_p$	Variável de dano plástico (item 2.7)
$\dot{d}_p$	Taxa de dano plástico (item 2.7)
D(j)	Matriz constitutiva do ponto $j \in \Omega$ (item 4.3)
$D_0$	Matriz constitutiva inicial do projeto (item 4.3)
$e_1, e_2, e_3$	Componentes do vetor direção
E	módulo de elasticidade intacto (item 2.7)
$E_d$	módulo de elasticidade degradado (item 2.7)
F	Ação no tirante (item 3.7.4)
$f_c$	Resistência à compressão uniaxial do concreto
$f_{bc}$	Resistência à compressão biaxial do concreto
$F_b$	Resistência à compressão das bielas
$f_{bc0}$	Tensão de escoamento inicial do concreto no estado biaxial de tensões (item 2.7)
$f_{c0}$	Tensão de escoamento inicial do concreto no estado uniaxial de tensões (item 2.7)
$f_{ce}$	Efetiva resistência à compressão do concreto
$f_{cd}$	Resistência de cálculo à compressão uniaxial do concreto
$f_{ck}$	Resistência característica do concreto à compressão (item 3.6)
$f_{2cd}$	Resistência do concreto nas regiões nodais para o estado biaxial de compressão (item 3.6)
$f_{crit}$	tensão crítica na compressão uniaxial (item 2.7)
$f_{cu}$	Limitação da tensão de compressão nas bielas (item 3.5.3)
$F_i$	Força no elemento (biela ou tirante)
$F_{nt}$	Resistência nominal de um tirante (item 3.7.2)
$f_{pd}$	Resistência de cálculo da armadura ativa (3.7.1)
$F_{zd}$	Resistência à compressão média nos contornos da região nodal (item 3.6)

$F_{cd}$	Limite de compressão na região nodal e bielas (3.6.6)
$F_{sd}$	Força de tração determinada no tirante (item 3.7.6)
$f_t$	Resistência à tração uniaxial do concreto
$f_y$	Resistência ao escoamento do aço
$f_{yd}$	Resistência ao escoamento de cálculo
$f_{yk}$	Valor característico da tensão de escoamento das armaduras (item 3.7.3)
$f_{2cd}$	Resistência do concreto nas regiões nodais para o estado biaxial de compressão
$f_{3cd}$	Resistência do concreto nas regiões nodais para o estado triaxial de compressão
$G(\bar{\sigma}, \psi)$	Função potencial plástica clássica de Mohr-Coulomb (item 2.7)
$H$	Altura da região do tirante, analisada (item 3.7.4)
$I_1, I_2, I_3$	Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor de tensão $\sigma_{ij}$ (parte esférica)
$J_1, J_2, J_3$	Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor de tensão $S_{ij}$ (parte anti-esférica)
$k$	Valor crítico da máxima tensão cisalhante (item 2.6.1-b)
$k$	Valor crítico da tensão de cisalhamento octaédrica (item 2.6.1- c)
$k$	Constante do material para o critério de Drucker-Prager (item 2.6.2- b)
$k_1$ e $k_2$	constantes do material (item 2.6.4)
$k_1, k_2, k_3$	Coefficientes de redução para o cálculo da máxima tensão nas regiões nodais (item 3.6.4)
$k_c$	Fator de redução (item 3.5.3) e (item 3.6.3)
$K_c$	Parâmetro que governa a superfície de ruptura do modelo CPD do Abaqus® (item 2.7.1)
$l_i$	Comprimento do elemento (biela ou tirante)
$m$	Parâmetro adimensional, relação entre $f_c$ e $f_t$ (item 2.6.2-a)
$n$	Vetor de direção principal de uma tensão no plano
$\overline{NP}$	Componente cisalhante da tensão octaédrica
$\overline{OP}$	Vetor que representa o estado de tensão nesse espaço de tensões
$\overline{ON}$	Eixo hidrostático
$R_{st}$	Força no tirante
$RR_i$	Razão de rejeição, adotada para retardar o processo de remoção (item 4.3.3)
$S_{ij}$	Parte anti-esférica ou desviadora do tensor de tensões
$T$	Força de tração (item 3.7.4)
$t_e$	Espessura do enésimo elemento (item 4.3)
$T_i$	Vetor de tensões [ $T_x, T_y, T_z$ ]
$V_0$	Volume inicial
$V_i$	Volume da i-ésima iteração
$w_e$	Peso do enésimo elemento (item 4.3)
$w_t$	largura efetiva do tirante (item 3.7.2)
$w_{t,max}$	limite superior da largura do tirante (item 3.7.2)
$\alpha$	Constante do material para o critério de Drucker-Prager (item 2.6.2)
$\alpha$	Constantes adimensionais do material (item 2.7)
$\alpha_{v2}$	Coefficiente para o cálculo da efetiva resistência à compressão do concreto nas bielas e zonas nodais (item 3.6.6)
$\beta_s$	Coefficiente para o cálculo da efetiva resistência à compressão do concreto em bielas (item 3.5.2)
$\beta_n$	Coefficiente para o cálculo da efetiva resistência à compressão do concreto nas zonas nodais (item 0)
$\beta$	Constantes adimensionais do material (item 2.7)

$\gamma_c$	Coefficiente de segurança parcial para as propriedades do concreto (item 3.6.3)
$\gamma_f$	Coefficiente de ponderação das cargas
$\gamma_s$	Coefficiente de segurança parcial para as propriedades das barras de aço (item 3.7.3)
$\gamma$	Constantes adimensionais do material (item 2.7)
$\bar{\Gamma}$	conjunto dos elementos que serão removidos da estrutura (item 4.3)
$\delta_{ij} = \delta_{ji}$	Delta de Kronecker
$\varepsilon$	Deformação
$\varepsilon_l$	Deformação de tração na direção perpendicular a biela (item 3.5.5)
$\varepsilon_e$	Deformação elástica reversível
$\varepsilon_p$	Deformação plástica permanente
$\varepsilon^{pl}$	Taxa de deformação plástica (item 2.7)
$\varepsilon_s$	Deformação média na barra da armadura que atravessa a biela (item 3.5.5)
$\varepsilon_u$	Deformação normal última
$\varepsilon_{lm}$	Deformações
$\varepsilon_{mi}$	Deformação específica média do elemento (biela ou tirante)
$\varepsilon_{ij}^e$	Deformações elásticas
$\varepsilon_{ij}^{ve}$	Deformações viscoelásticas
$\tilde{\varepsilon}_c^{pl}$	Danificação devido à perda de resistência à compressão (item 2.7)
$\tilde{\varepsilon}_t^{pl}$	Danificação devido à perda de resistência à tração (item 2.7)
$\eta_{ij}^{lm}$	Matriz constitutiva viscosa
$\theta$	Ângulo de similaridade
$\theta_s$	Menor ângulo entre a biela e a barra da armadura que a atravessa (3.5.5)
$\lambda$	Coefficiente para o critério de Ottosen obtido em função de $3\theta$
$\lambda$	Coefficiente para o calculo de $\beta_s = 0,6\lambda$ - para bielas do tipo garrafa (item 3.5.2)
$\mu$	Parâmetro de Viscosidade do modelo CPD do Abaqus®
$\xi$	Vetor que representa a direção do eixo hidrostático
$\pi$	Plano de Nadai, plano anti-esférico passa pela origem do sistema de coordenadas
$\rho$	Vetor que representa a direção perpendicular ao eixo hidrostático ou na direção desviadora (item 2.5)
$\rho_i$	densidade inicial
$\rho_0$	densidade da i-ésima iteração
$\rho_t$	Meridiano de tração
$\rho_c$	Meridiano de compressão
$\rho_s$	Meridiano de cisalhamento do material
$\sigma$	Tensão aparente (item 2.7)
$\sigma$	Tensão principal;
$\sigma_{ij}$	Tensor de tensões
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões normais
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensões normais (notação de von Karman)
$\sigma_{oct}$	Tensão normal octaédrica
$\sigma_m$	Tensão média de um estado puramente hidrostático
$\sigma_{ij}^e$	Tensor de tensões elásticas
$\sigma_{ij}^v$	Tensor de tensões viscosas
$\sigma_{ij}^{ve}$	Tensor de tensões viscoelásticas
$\sigma_0 = \sigma_{esc}$	Tensão de escoamento na tração simples
$\sigma_{m\acute{a}x}$	Valor algébrico máximo das tensões principais (item 2.7)
$\sigma_{pd}$	Tensão de cálculo nas armaduras passivas (item 3.7.1)
$\sigma_{sd}$	Tensão de cálculo nas armaduras passivas (item 3.7.1)

$\sigma_e^{vM}$	Tensão de von Mises do elemento analisado (item 4.3.3)
$\sigma_{MAX}^{vM}$	Máxima tensão de von Mises da iteração (item 4.3.3)
$\sigma_{Rd,máx}$	máxima tensão que pode ser aplicada nas bordas de um nó (item 3.6.4)
$\sigma^*$	Tensão limite prescrita (item 4.3)
$\tau$	Tensões cisalhantes
$\tau_{esc}$	Tensão de escoamento em cisalhamento puro
$\tau_{oct}$	Tensão cisalhante octaédrica
$u$	Coefficiente de redução da resistência do concreto (item 3.5.3) e (item 3.6.4)
$\phi$	Ângulo de atrito interno do material
$\phi_c$	Fator de resistência para o concreto (item 3.5.5) e (item 3.6.5)
$\phi_s$	Fator de resistência para a armadura igual a 0,85 (item 3.5.5) e (item 3.7.4)
$\psi$	Ângulo de Dilatação do modelo CPD do Abaqus®
$\Omega$	domínio inicial (item 4.3.2)
$\Omega_e$	domínio é redefinido para (item 4.3.2)
$e$	Excentricidade Potencial Plástica (item 2.7.1)

**LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

AESO	Additive Evolutionary Structural Optimization
BESO	Bi-directional Evolutionary Structural Optimization
Eq.	Equação
ESO	Evolutionary Structural Optimization
Fig.	Figura
IP	Índice de Performance
MEF	Método dos Elementos Finitos
SESO	Smoothing Evolutionary Structural Optimization
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization
TSA	Topological Sensitivity Analysis
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais

# SUMÁRIO

1	.....	1
	INTRODUÇÃO .....	1
	1.1 Considerações Gerais .....	1
	1.2 Objetivos .....	2
	1.3 Relevância do Tema e Justificativa .....	3
	1.4 Organização do Texto .....	4
2	.....	5
	MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS .....	5
	2.1 Modelos Constitutivos .....	5
	2.1.1 Modelo Elástico .....	6
	2.1.2 Modelo Plástico .....	7
	2.1.3 Modelo Viscoso .....	8
	2.1.4 Modelo Viscoelástico de Kelvin-Voigt .....	10
	2.1.5 Modelo Viscoelástico de Boltzmann .....	11
	2.2 Comportamento do Concreto .....	12
	2.2.1 Comportamento do Concreto – Estado Uniaxial .....	13
	2.2.2 Comportamento do Concreto – Estado Biaxial .....	17
	2.2.3 Comportamento do Concreto – Estados Triaxiais .....	21
	2.3 Comportamento do Aço .....	23
	2.4 Modelos para a Análise Não Linear do Concreto .....	25
	2.5 Formulação para os Modelos de Ruptura do Concreto .....	27
	2.5.1 Invariantes de Tensão: Interpretação física e geométrica .....	27
	2.6 Modelos de Ruptura do Concreto .....	39
	2.6.1 Modelos de Ruptura com Um Parâmetro .....	43
	2.6.2 Modelos de Ruptura com Dois Parâmetros .....	48
	2.6.3 Modelos de Ruptura com Três Parâmetros .....	53
	2.6.4 Modelos de Ruptura com Quatro Parâmetros .....	58
	2.6.5 Modelos de Ruptura com Cinco Parâmetros .....	61
	2.7 Modelo de Dano Plástico .....	62
	2.7.1 Modelo Constitutivo de Dano Plástico (CDP) - Abaqus® .....	75
3	.....	79
	BIELAS E TIRANTES .....	79
	3.1 Breve Histórico .....	79
	3.2 Regiões B e D .....	81
	3.3 Definição do Modelo: Princípios Básicos .....	85
	3.3.1 Prescritos em Códigos Normativos .....	87
	3.3.2 Pelo Processo do Caminho de Cargas .....	88
	3.3.3 Por meio de Análises Elásticas .....	90
	3.3.4 Por meio de Análises Não Lineares .....	92
	3.3.5 Pela Automatização da Escolha do Modelo .....	93
	3.4 Teorema do Limite Inferior .....	95

3.5	Bielas.....	96
3.5.1	EHE (2008).....	98
3.5.2	ACI-318 (2005).....	99
3.5.3	CEB FIB Model Code (2010).....	100
3.5.4	EUROCODE 2 (2002).....	101
3.5.5	CSA-A23.3-04.....	102
3.5.6	ABNT NBR 6118/2014.....	104
3.6	Regiões Nodais.....	105
3.6.1	EHE (2008).....	106
3.6.2	ACI-318 (2005).....	108
3.6.3	CEB FIB Model Code (2010).....	109
3.6.4	EUROCODE 2 (2002).....	110
3.6.5	CSA-A23.3-04.....	111
3.6.6	ABNT NBR 6118/2014.....	112
3.7	Tirantes.....	113
3.7.1	EHE (2008).....	114
3.7.2	ACI-318 (2005).....	115
3.7.3	CEB FIB Model Code (2010).....	116
3.7.4	EUROCODE 2 (2002).....	116
3.7.5	CSA-A23.3-04.....	117
3.7.6	ABNT NBR 6118/2014.....	118
3.8	Modelos de Bielas e Tirantes: Sequência usual de Passos.....	119
4	.....	120
	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	120
4.1	Breve Histórico.....	120
4.2	Tipos de Otimização Estrutural.....	124
4.3	Técnicas de Otimização Topológica.....	125
4.3.1	SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization).....	126
4.3.2	TSA (Topological Sensitivity Analysis).....	128
4.3.3	ESO (Evolutionary Structural Optimization).....	129
4.4	Possíveis Problemas Numéricos na Otimização Topológica.....	136
4.4.1	Tabuleiro de Xadrez (checkerboard).....	136
4.4.2	Dependência da Malha.....	137
4.4.3	Ótimos Locais.....	138
4.4.4	Controle de instabilidade aplicado ao ESO.....	138
4.5	Índice de Performance.....	140
5	.....	141
	METODOLOGIA EMPREGADA.....	141
5.1	Modelagem de Elementos em Concreto pelo MEF a partir do Software comercial Abaqus®.....	141
5.2	Processo de Automatização da concepção de Modelos de Bielas e Tirantes aplicando-se a técnica ESO de Otimização Topológica - Abaqus® Scripting.....	142

5.3	Análises dos resultados a partir de comparações de exemplos disponíveis na literatura para validação da aplicação do método.....	145
6	.....	146
	EXEMPLOS ANALISADOS E COMENTÁRIOS DOS RESULTADOS .....	146
6.1	Viga Parede Biapoiada com uma Abertura.....	146
6.2	Viga Parede Biapoiada ( $L/D=2$ ).....	153
6.3	Pilar de Ponte .....	157
6.4	Viga Parede com Dois Furos.....	163
6.5	Mísula com uma coluna .....	167
7	.....	172
	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	172
7.1	Conclusão .....	172
7.2	Propostas para trabalhos futuros .....	175
	BIBLIOGRAFIA .....	176



# 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Considerações Gerais

A necessidade de se projetar estruturas de geometrias cada vez mais ousadas, muitas vezes bastante arrojados, leva a realização de uma sequência de análises para que seja possível modificar suas características alcançando uma solução satisfatória, tanto em termos econômicos, como também de projeto. Portanto, a busca por novos sistemas estruturais e construtivos capazes de conciliar desempenho e segurança torna necessário o conhecimento aprofundado do comportamento mecânico das estruturas frente às solicitações.

No campo da Engenharia de Estruturas o Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma boa ferramenta computacional adotada para determinar o estado de tensões e de deformações de uma estrutura sujeita a ações externas. A modelagem fornece ao projetista certa liberdade de escolha para se obter estruturas mais seguras e econômicas.

Atualmente, a engenharia de estruturas dimensiona a maior parte dos elementos lineares de concreto de modo simplificado, adotando-se a Hipótese de Bernoulli-Euler. É importante ressaltar, entretanto, que essa hipótese é válida para trechos onde a influência das deformações devido ao esforço cortante é desprezível, em relação às deformações normais, e que a aplicação dessa hipótese para todo o elemento estrutural poderia levar ao super ou ao sub dimensionamento de certas regiões da estrutura. Tais regiões são denominadas na literatura de “Regiões D” de descontinuidade. Nelas as tensões de cisalhamento são significativas e a distribuição das deformações na seção transversal não é linear. Admite-se

que para vigas com relação altura/comprimento inferiores a 10% a hipótese cinemática de Bernoulli-Euler seja válida.

O modelo de Bielas e Tirantes é um método simples adotado para realizar análises mais realistas em relação ao comportamento físico das regiões de descontinuidades. Entretanto, exige do projetista bastante experiência em relação à escolha e distribuição dos elementos do modelo para melhor representar o fluxo de tensões e o comportamento real da região descontínua. A garantia da realização dessa escolha, de forma confiável, torna necessária a utilização de ferramentas que automatizem e simplifiquem tal processo, definindo melhor a configuração a ser adotada para a análise.

Sendo assim, busca-se com o presente trabalho colaborar para o estudo e a investigação de metodologias para a obtenção de modelos de bielas e tirantes aplicáveis a estruturas de concreto com comportamento não linear por meio de técnicas de otimização topológica.

## **1.2 Objetivos**

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar métodos de dimensionamento para estruturas em concreto armado, com comportamento não linear do material, com a finalidade de estabelecer recomendações de forma coerente e simplificada para projetos estruturais.

Para tanto, propõe-se:

- Realizar análises relacionadas com a concepção dos modelos de bielas, para elementos estruturais não lineares, juntamente com o processo de otimização topológica evolucionária, por meio de algoritmos a serem empregados de modo a realizar a identificação “automática” dos modelos. Para consideração do método com comportamento não linear modelos de danificação do material serão aplicados na realização das análises;
- Realizar análises comparativas considerando o comportamento linear e o comportamento não linear;

- Incorporar teorias que descrevem o comportamento material concreto o mais próximo da realidade, ao invés das teorias de modelos de bielas e tirantes comumente utilizadas para o projeto estrutural.

### **1.3 Relevância do Tema e Justificativa**

O modelo de bielas e tirantes é adotado para se realizar uma melhor representação do comportamento estrutural e mecanismos resistentes de alguns tipos de elementos estruturais em concreto armado e regiões onde há alterações geométricas e concentrações de tensões, chamadas regiões “D”. O método consiste, resumidamente, em estabelecer uma treliça idealizada, definida a partir do fluxo de tensões de tração (os tirantes) e de compressão (as bielas) no interior da região descontínua ou do elemento cuja hipótese de que as seções planas permanecem planas não é válida e, a partir disso, é realizado o dimensionamento estrutural.

No entanto, como a escolha do modelo topológico a partir dessa metodologia depende basicamente da experiência do projetista em compatibilizar a geometria dos fluxos internos de cargas e os pontos de apoios, e sabendo-se que a modelagem apresenta certa imprecisão, existe certa dificuldade em se aplicar o método de dimensionamento pelo modelo de bielas e tirantes.

Nesse contexto, considera-se relevante o estudo e a investigação de metodologias para a concepção do modelo de bielas e tirantes com a utilização técnicas avançadas de otimização topológica, já que essas análises poderão proporcionar ao projetista estrutural melhor entendimento do funcionamento do modelo e simplificação do processo de concepção, garantindo a segurança e a confiabilidade na resolução de problemas complexos envolvendo o concreto estrutural.

## 1.4 Organização do Texto

A tese é organizada em 7 capítulos, conforme descritos nos itens a seguir:

- O segundo capítulo apresenta uma breve revisão em relação aos modelos constitutivos dos materiais, em relação aos principais critérios de ruptura do concreto explanados na literatura e, ainda em relação ao modelo constitutivo do material adotado.
- No terceiro capítulo é abordado o tema “Bielas e Tirantes” com a realização de um breve histórico e algumas considerações em relação à aplicação do método, além da exposição da história da arte no contexto estudado. As prescrições normativas, relacionadas ao método, também é um tema abordado apenas com o objetivo de se ter uma visão geral das normas adotadas.
- No quarto capítulo é realizada uma revisão de literatura envolvendo o assunto de otimização topológica de estruturas, os Métodos de Otimização existentes com ênfase para o Método de Otimização Evolucionária (ESO).
- No quinto capítulo é apresentada a metodologia adotada para se alcançar os objetivos propostos.
- No sexto capítulo são realizadas as análises e discussões dos problemas analisados.
- No sétimo e último capítulo são apresentadas as considerações e conclusões finais e realizadas sugestões para futuros estudos a serem desenvolvidos.

# 2

## MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

### 2.1 Modelos Constitutivos

Os modelos constitutivos dos materiais são obtidos levando-se em conta a forma com que o material se comporta frente às solicitações internas. Esses comportamentos podem ser descritos resumidamente como elástico, plástico ou viscoso. O estudo do comportamento de uma estrutura está vinculado, principalmente, as equações constitutivas dos materiais que fazem parte da sua composição. Tais equações relacionam as tensões, deformações e o tempo.

Em relação às variáveis transientes, pode-se ter problemas com significativa influência das ações inerciais (problemas dinâmicos) ou com comportamento governado essencialmente por ações estáticas (problemas estáticos ou cíclicos quase-estáticos). Em relação ao segundo tipo de problema, a variável tempo é importante na medida em que descreve a evolução das ações aplicadas, mesmo que essa evolução não implique necessariamente em efeitos inerciais relevantes.

A associação de diversos modelos se torna comum na análise de um material real, considerando a complexidade de seu comportamento em algumas situações sendo, com isso, possível descrevê-lo de maneira mais fidedigna.

Nos itens seguintes estão descritos, de forma sucinta, alguns dos modelos considerados para analisar o comportamento dos materiais.

### 2.1.1 Modelo Elástico

De acordo com a teoria da elasticidade, todos os sólidos se deformam quando são submetidos a esforços externos e existem limites de cargas para o corpo recuperar suas dimensões originais após a retirada da carga. O fenômeno de recuperação ou reversibilidade do material é denominado comportamento elástico e a carga limite é chamada de limite elástico.

A característica principal desse comportamento é o aparecimento de deformações imediatas e reversíveis, ou seja, surgem simultaneamente com as tensões e desaparecem com o descarregamento. Sendo assim, pode-se dizer que o material possui a propriedade da elasticidade linear quando há a proporcionalidade entre as tensões e deformações.

O comportamento linear ocorre quando o diagrama tensão-deformação, que representa um material elástico, se caracteriza por deformações que não variam com o tempo no momento em que a tensão permanece constante. Com isso, a curva de descarga coincide com a curva de carga, conforme apresentado na Fig. 2.1.

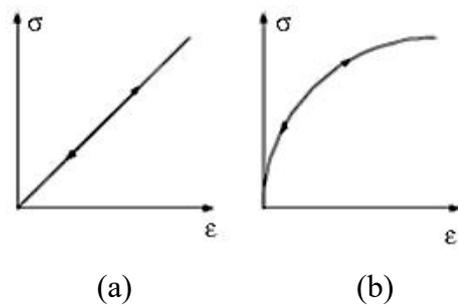


Fig. 2.1 – (a) Comportamento elástico linear, (b) Comportamento elástico não linear (Adaptado de Filho, 2003).

Em outras palavras, a derivada das tensões em relação às deformações não varia no caso elástico linear, mas no caso elástico não linear varia conforme o nível de deformações aumenta. A representação reológica uniaxial para o modelo elástico é realizada por uma mola, conforme mostra a Fig. 2.2.

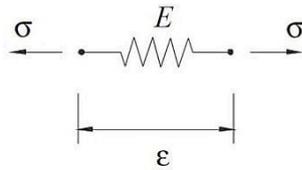


Fig. 2.2 – Representação reológica uniaxial elástica (Adaptado de Mesquita, 2002)

A relação constitutiva para o comportamento elástico linear é expressa pela lei de Hooke a partir da Eq.(2.1).

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \epsilon_{lm} \quad (2.1)$$

Onde:

$\sigma_{ij}$ =São as tensões;

$\epsilon_{lm}$ =São as deformações;

$C_{ij}^{lm}$ =Matriz constitutiva elástica;

### 2.1.2 Modelo Plástico

Este segundo tipo de comportamento do material é caracterizado, principalmente, pela não reversibilidade de deformações após a retirada da carga. Ao se ultrapassar o limite elástico do material, iniciaria o surgimento das chamadas deformações plásticas.

O corpo ficaria, portanto, permanentemente deformado após a descarga apresentando um comportamento plástico.

A Fig. 2.3 ilustra o comportamento plástico. Esse comportamento ocorre mais acentuadamente em materiais dúcteis e é provocado por um rearranjo na estrutura cristalina do material.

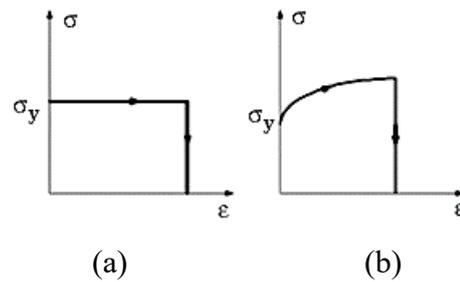


Fig. 2.3 – (a) Plástico perfeito, (b) Plástico com endurecimento, ou seja, resiste a tensões maiores que a tensão de escoamento (Adaptado de Filho, 2003).

A representação reológica uniaxial para o modelo plástico é realizada por um sólido, conforme mostra a Fig. 2.4. O sólido deslizaria se a tensão aplicada ultrapassar a tensão de plastificação ( $\sigma_0$ ).

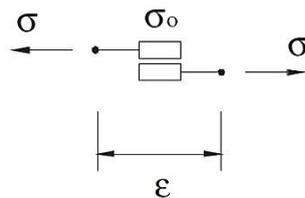


Fig. 2.4 - Representação reológica uniaxial plástico (Adaptado de Mesquita, 2002)

### 2.1.3 Modelo Viscoso

O terceiro tipo básico de comportamento do material é o viscoso que tem como característica o aparecimento de deformações de forma simultânea a aplicação de carga, porém estas não se conservam constantes ao longo do tempo. Ocorre o surgimento de uma velocidade de deformação.

O comportamento viscoso é comum em fluidos, mas alguns sólidos também apresentam esse comportamento. A Fig. 2.5 ilustra o comportamento do material viscoso demonstrando que a tensão seria diretamente proporcional à velocidade de deformação do material.

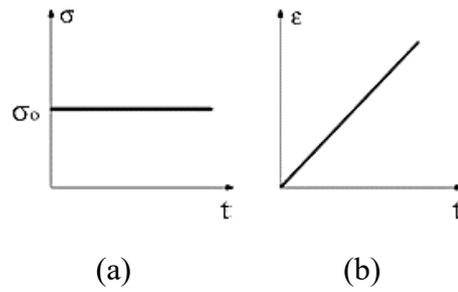


Fig. 2.5 – (a) Relação Tensão x Tempo para o comportamento viscoso, (b) Relação Deformação x Tempo para o comportamento viscoso (Adaptado de Filho, 2003).

A Fig. 2.6 ilustra a representação reológica uniaxial para o modelo viscoso caracterizado por um amortecedor.

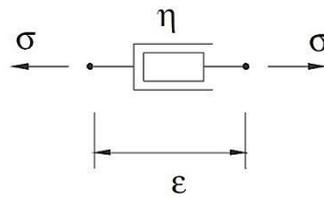


Fig. 2.6 - Representação reológica uniaxial do comportamento viscoso (Adaptado de Mesquita, 2002).

A relação constitutiva para o comportamento viscoso é descrita pela Eq. (2.2).

$$\sigma_{ij} = \eta_{ij}^{lm} \epsilon_{lm} \quad (2.2)$$

Onde:

$\sigma_{ij}$  = São as tensões;

$\epsilon_{lm}$  = São as deformações;

$\eta_{ij}^{lm}$  = Matriz viscosa.

Mesquita (2002) aponta que a matriz viscosa é obtida em função de parâmetros representativos da viscosidade do material que são determinados experimentalmente.

Os itens seguintes apresentam dois modelos desenvolvidos a partir da associação dos modelos básicos.

### 2.1.4 Modelo Viscoelástico de Kelvin-Voigt

O modelo desenvolvido por Kelvin-Voigt, como aborda Mesquita (2002), é representado pelo arranjo em paralelo de uma mola e um amortecedor, conforme pode ser visto na Fig. 2.7. Trata-se da combinação dos modelos elástico e viscoso.

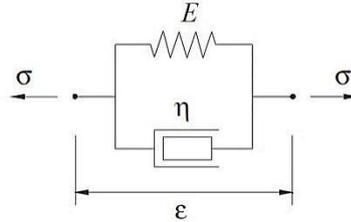


Fig. 2.7 – Modelo representativo uniaxial do comportamento viscoelástico de Kelvin-Voigt (Adaptado de Mesquita, 2002).

Nesse modelo ocorre a igualdade de deformações nos dois elementos, mola e amortecedor, e, portanto, a deformação total corresponde a deformações elásticas ou viscosas, conforme Eq.(2.3).

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^v \quad (2.3)$$

Onde:

$\varepsilon_{ij}^e$ =Deformações elásticas;

$\varepsilon_{ij}^v$ =Deformações viscosas.

E a tensão total é obtida pela soma das tensões elásticas e viscosas, na mola e no amortecedor, respectivamente, conforme Eq. (2.4),

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^v \quad (2.4)$$

Onde:

$\sigma_{ij}^e$ =Tensões elásticas;

$\sigma_{ij}^v$ =Tensões viscosas.

### 2.1.5 Modelo Viscoelástico de Boltzmann

O modelo de Boltzmann, conforme explica Mesquita (2002), corresponde ao modelo desenvolvido por Kelvin-Voigt, porém com o acréscimo de uma mola, como pode ser visto na Fig. 2.8.

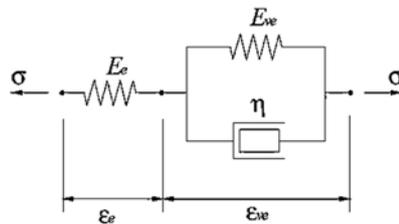


Fig. 2.8 - Modelo representativo uniaxial do comportamento viscoelástico de Boltzmann (Adaptado de Mesquita, 2002).

Para esse caso, a tensão total é dada pela igualdade de tensões nos dois trechos, elástico, representado na Fig. 2.8 por  $\epsilon_e$ , e viscoelástico, representado por  $\epsilon_{ve}$ , como pode ser visto na Eq. (2.5).

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^{ve} \quad (2.5)$$

Onde:

$\sigma_{ij}^e$ =Tensões elásticas;

$\sigma_{ij}^{ve}$ =Tensões viscoelásticas.

E a deformação total obtida pela soma das deformações elásticas, geradas na mola do trecho elástico, e as deformações viscoelásticas, geradas no conjunto mola-amortecedor no segundo trecho viscoelástico.

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^{ve} \quad (2.6)$$

Onde:

$\epsilon_{ij}^e$ =Deformações elásticas;

$\epsilon_{ij}^{ve}$ =Deformações viscoelásticas.

Existem outros modelos desenvolvidos a partir da associação dos modelos básicos como os modelos elastoplástico e viscoplástico, que seguem basicamente o mesmo raciocínio dos modelos brevemente abordados nos dois itens anteriores.

## **2.2 Comportamento do Concreto**

De acordo com Chen e Han (1988), o concreto é um material compósito formado por agregados e uma matriz de argamassa composta de uma mistura de uma pasta de cimento e partículas de agregados. O comportamento físico desse material é bastante complexo e depende de diversos fatores como o fator água/cimento, a taxa de agregado em relação ao cimento assim como o tamanho do agregado e o tipo de cimento. Estes fatores influenciam no comportamento mecânico do material. Considerando um concreto comumente utilizado, para efeito de normatização, a estrutura do material é ignorada e as normas são desenvolvidas considerando um material idealizado, ou seja, homogêneo e inicialmente isotrópico.

Proença (1988) aponta que o concreto convencional apresenta comportamento não linear quando submetido a ações externas devido à microfissuração inicial gerada pelo fenômeno de retração no início da cura, já que essas fissuras se propagariam mesmo em baixos níveis de tensão. Explica, ainda que essa propagação é dependente das características de resistência entre os agregados graúdos e a argamassa que são responsáveis pela baixa resistência à tração do concreto.

Chen e Han (1988) e MacGregor (1997) também comentam que o concreto convencional é um material que apresenta certa fragilidade principalmente na interface da pasta de cimento e dos agregados onde ocorre o surgimento de microfissuras causadas por diversos fatores dentre eles a expansão térmica da pasta de cimento e o fenômeno de retração, que ocorrem geralmente na fase inicial da cura.

Com o intuito de melhorar certas propriedades do material e conseqüentemente seu desempenho, diversos tipos de adições no concreto têm sido estudados. Souza (2003) cita os materiais de origem vulcânica como sendo os primeiros a serem adotados como aditivos na

matriz de cimento do concreto e posteriormente as argilas calcinadas. Estudos recentes envolvendo adições minerais no concreto têm como principal foco os fatores ecológicos, econômicos e técnicos como a sílica ativa da indústria siderúrgica, cinzas volante das usinas termoelétricas, que são pozolanas provenientes de resíduos industriais, e as cascas de arroz que são resíduos agrícolas.

Outra adição mineral pozolânica que têm sido foco de pesquisas é o metacaulim. Essa pozolana aluminossilicosa é derivada normalmente da calcinação de alguns tipos de argilas, como os caulins. Segundo Mehta e Monteiro (1994) a adição de pozolanas no concreto melhora a qualidade da zona de transição agregado-matriz devido à redução da porosidade e do teor de hidróxido de cálcio na matriz de cimento provocada pelas reações. Além disso, podem-se citar, também, as fibras metálicas adicionadas com o objetivo de melhorar a ductilidade do material e, ainda as fibras plásticas de polipropileno utilizadas, por exemplo, para melhorar as características mecânicas, de ductilidade, o comportamento pós-fissuração, dentre outros.

### **2.2.1 Comportamento do Concreto – Estado Uniaxial**

As propriedades mecânicas do concreto são abordadas neste e nos próximos itens com o auxílio de alguns resultados experimentais de outros estudos disponíveis na literatura pesquisada.

De acordo com Chen e Han (1988), a curva tensão-deformação típica para o concreto, comprimido uniaxialmente, apresentaria um comportamento linear elástico num primeiro estágio, até cerca de 30% da tensão máxima de compressão ( $f_c$ ), conforme mostra a Fig. 2.9, que são resultados do estudo de Kupfer *et al.* (1969). Esse ponto seria o limite de elasticidade.

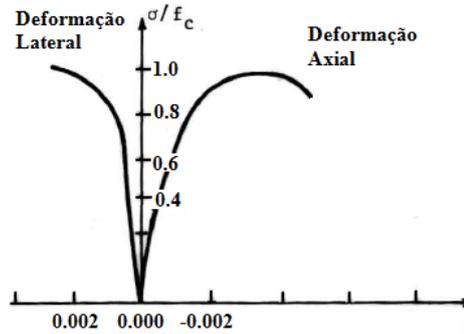


Fig. 2.9 – Curva tensão-deformação típica para compressão axial (Adaptado de Kupfer *et al.*, 1969).

Em um segundo estágio, entre 30% e 75% as fissuras começariam a aumentar em quantidade, comprimento e abertura. A fratura do concreto se iniciaria devido, primeiramente, à formação de fissuras junto aos agregados. Com o significativo crescimento das fissuras a não linearidade do material ficaria mais evidente, porém ainda seriam consideradas estáveis. Segundo Chen e Han (1988), a tensão igual a  $0,75 f_c$  seria o início da propagação da fratura instável.

No terceiro estágio, ao ultrapassar esse limite, mesmo se a carga fosse mantida constante, nesse instante com mais energia disponível, as fissuras continuariam a se propagar iniciando a microfissuração da matriz. Essas fissuras seriam ligadas às outras fissuras junto aos agregados formando zonas internas microfissuradas.

Posteriormente, ocorreria o aumento da inclinação, até atingir o ponto máximo  $f_c$ . Nesse momento, a curva passaria a ter uma inclinação descendente até a ocorrência da deformação normal última ( $\epsilon_u$ ) e o conseqüente esmagamento causado por fissuras macroscópicas localizadas, formadas paralelamente à direção de aplicação da carga.

Já para a tração uniaxial do concreto, a Fig. 2.10 apresenta como seria a curva Tensão x Alongamento. Para esse caso, de acordo com Chen e Han (1988), geralmente o limite de elasticidade observado ficaria em torno de 60% a 80% da tensão resistente última. Após esse limite, as fissuras geradas nas ligações internas da matriz começariam a crescer. Mas como no estado de tração uniaxial o engrenamento mecânico das fissuras com a argamassa tende a ocorrer com muito menos frequência do que no estado de compressão uniaxial, o intervalo de

propagação estável das fissuras pode ser muito curto e a propagação instável que começaria de forma imediata. Isso ocorre porque o concreto se comporta de maneira frágil quando submetido a um esforço de tração.

Além disso, na interface dos agregados com a argamassa haveria uma resistência à tração significativamente menor quando comparado à resistência da argamassa. Esta é a principal razão para a baixa resistência do concreto à tração.

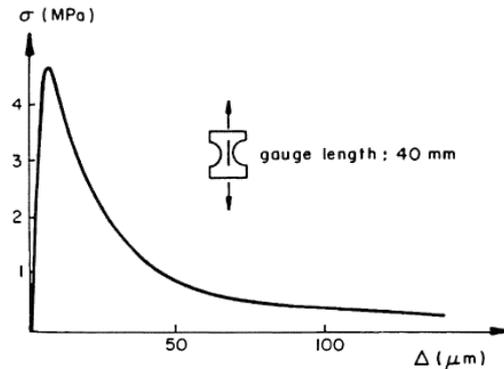


Fig. 2.10 – Tração uniaxial do concreto (Peterson, 1981).

Na Fig. 2.11, Chen (1982) apresenta a típica curva tensão-deformação uniaxial para a falha do concreto simples submetido à tração e à compressão.

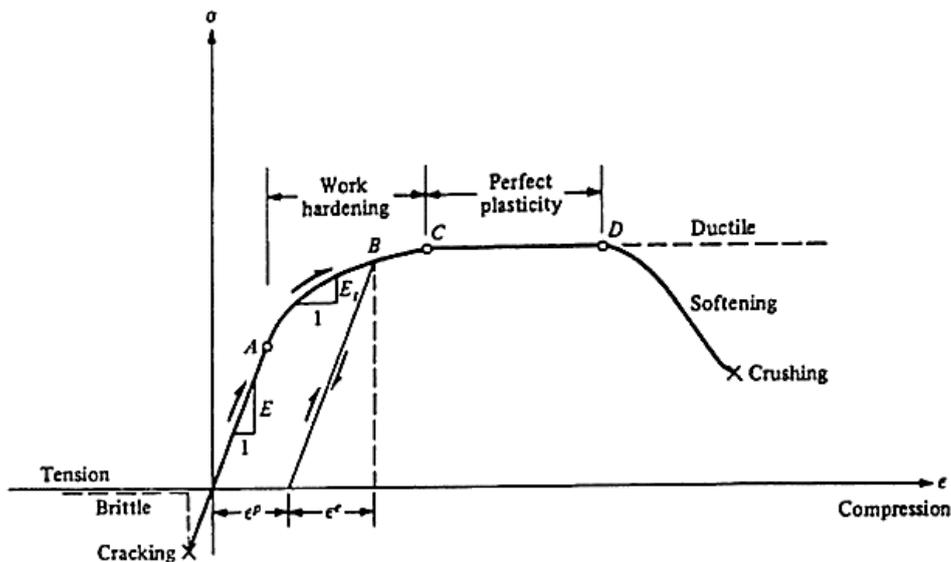


Fig. 2.11 – Curva tensão-deformação nos regimes pré e pós-falha (Chen 1982)

Para a falha à tração o comportamento do concreto seria basicamente linear elástico até a carga de ruptura. A máxima tensão coincidiria com a máxima deformação e não ocorreria deformação plástica até o momento da falha.

Já para a análise da ruptura devido à compressão, inicialmente o material exibiria um comportamento quase linear até o limite de proporcionalidade no ponto “A”. Posteriormente ocorreria o enfraquecimento progressivo pela microfissuração interna até o fim da região perfeitamente plástica “CD”, no ponto “D”. As deformações não lineares seriam, portanto, basicamente plásticas, já que ao se retirar a carga ocorreria reversibilidade da deformação total “ $\epsilon$ ” apenas para as regiões até o limite da porção “ $\epsilon_e$ ”. De acordo com Chen (1982), as regiões “AC” e “CD” correspondem exatamente aos fenômenos relacionados com o comportamento de endurecimento plástico e elástico perfeitamente plástico do material, respectivamente. Sendo assim, a deformação total do material “ $\epsilon$ ” poderia ser considerada como a soma entre a deformação elástica reversível “ $\epsilon_e$ ” e a deformação plástica permanente “ $\epsilon_p$ ”.

Pode-se dizer, portanto, que a resposta em deformação do concreto pode ser separada em uma componente recuperável elástica e uma componente permanente plástica.

Ainda segundo Chen (1982), a prática assume que o concreto possui o comportamento elastoplástico quando submetido ao esforço de compressão e elástico frágil quando submetido ao esforço de tração.

Proença (1988) aponta que o módulo de elasticidade do concreto depende de sua resistência à compressão uniaxial e o coeficiente de Poisson tem um valor representativo aproximadamente igual a 0,2, conforme apontado na Fig. 2.12.

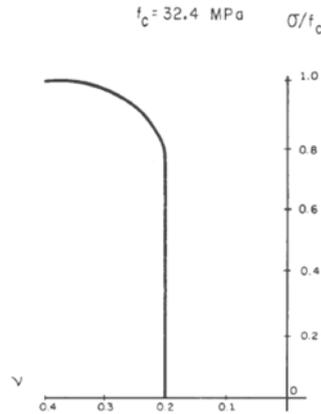


Fig. 2.12 – Coeficiente de Poisson (Proença, 1988).

Para o concreto submetido à compressão uniaxial com solicitações cíclicas, Chen e Han (1988) mostram na Fig. 2.13 que nas curvas de descarga ocorreria uma acentuada degradação da rigidez e conseqüentemente da resistência com o aumento das deformações.

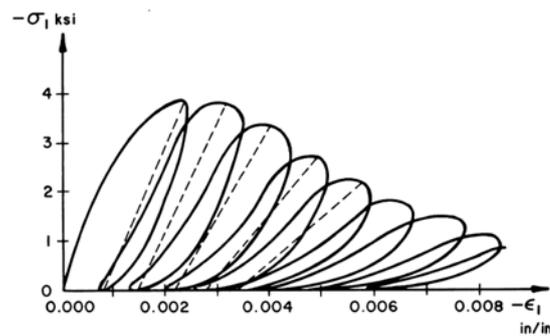


Fig. 2.13 – Curva tensão x deformação para o concreto submetido á compressão uniaxial com solicitações cíclicas (Adaptado de Sinha *et al.*, 1964).

### 2.2.2 Comportamento do Concreto – Estado Biaxial

Na Fig. 2.14, Chen e Han (1988) apresentam a comparação de alguns resultados experimentais obtidos por Kupfer *et al* (1969) e por Han e Chen (1985) em relação à tensão e deformação do concreto submetido a tensões biaxiais de compressão.

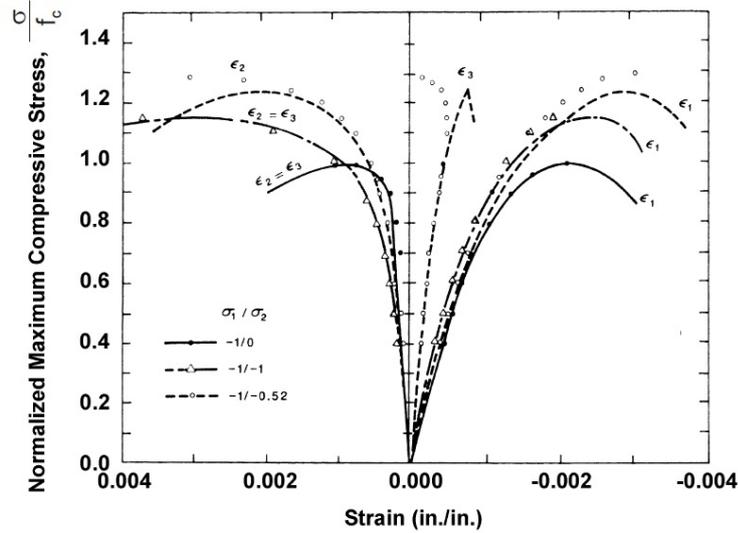


Fig. 2.14 – Resultados de experimentos em relação ao concreto submetido à compressão biaxial (Adaptado de Kupfer *et al*,1969).

A partir dos resultados apresentados na Fig. 2.14 pode-se dizer que o comportamento do concreto no estado biaxial depende da razão entre as tensões principais ( $\sigma_2/\sigma_1$ ) e, ainda, que a resistência do concreto à compressão biaxial é maior que a obtida para a compressão uniaxial.

Pode-se perceber também que para compressão uniaxial ou biaxial, o encurtamento máximo ocorre em torno de 0,003 e o alongamento máximo varia de aproximadamente 0,002 a 0,004.

Sendo assim, considerando esses resultados, pode-se dizer que a ductilidade do concreto é maior quando submetido à compressão biaxial do que à compressão uniaxial.

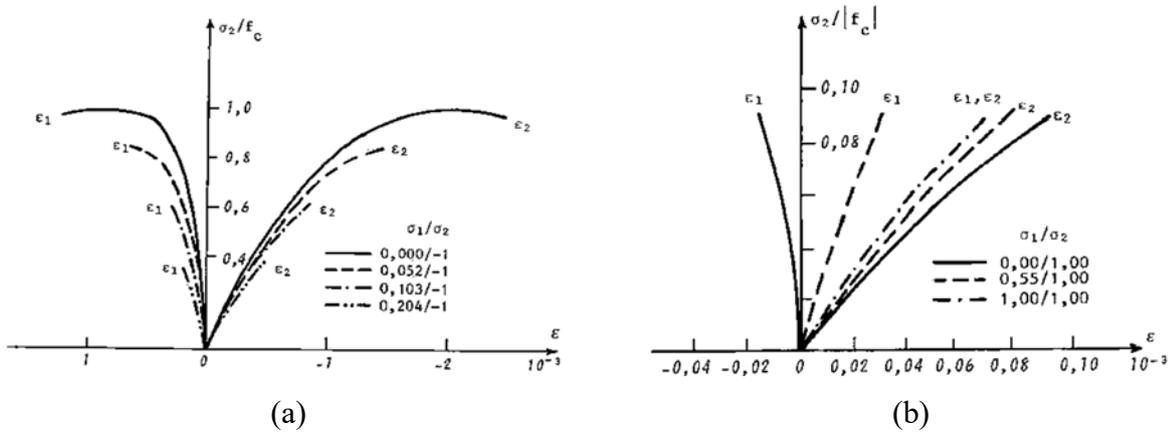


Fig. 2.15 – (a) Tensão x Deformação do concreto submetido ao esforço de tração-compressão biaxial (b) Tensão x Deformação do concreto submetido ao esforço de tração biaxial (Adaptado de Kupfer *et al*,1969).

Na Fig. 2.15-a pode-se observar, a partir dos resultados obtidos por Kupfer *et al.* (1969), que a resistência à compressão biaxial seria reduzida de forma aproximadamente linear com o aumento da tensão de tração e os valores de rupturas para as deformações principais de tração e compressão diminuiriam.

Em relação à resistência do concreto à tração biaxial na Fig. 2.15-b, pode-se perceber que essa seria praticamente igual à obtida para tração uniaxial.

Além disso, ambas as deformações principais máximas ocorreriam em torno de  $0,08 \times 10^{-3}$ .

Proença (1988) e Buchaim (2001) também apresentam alguns resultados experimentais semelhantes para explicar o comportamento do concreto.

Proença (1988) afirma, a partir de resultados mostrados na Fig. 2.16, que a resistência à compressão do concreto submetido a tensões de compressão biaxiais é maior do que a resistência obtida quando é submetido à compressão uniaxial.

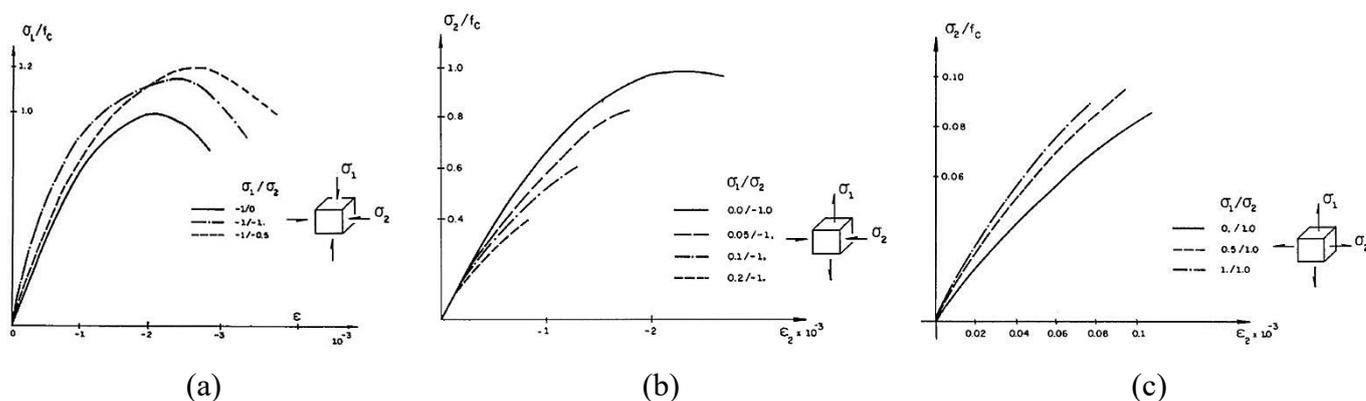


Fig. 2.16 – (a) Tensão x Deformação do concreto submetido ao esforço de compressão biaxial (b) compressão-tração (c) tração biaxial (Adaptado de Proença, 1988).

Ainda de acordo com Proença (1988), na Fig. 2.16-a, pode ser visto que o concreto quando submetido à compressão biaxial ocorreria o aumento da sua ductilidade e quando submetido à tração biaxial, na Fig. 2.16-c, ocorreria a redução. E na Fig. 2.16-b, submetido ao esforço de

tração-compressão, ocorreria o decréscimo da resistência à compressão de forma aproximadamente linear com o acréscimo da tensão de tração.

Proença (1988) aponta também que, para o estado de compressão biaxial próximo ao ponto de resistência máxima ocorreria o acréscimo do volume com o acréscimo de tensões, fenômeno esse chamado de dilatância. E que a ruptura do concreto para o estado de tração biaxial ocorreria pela separação ortogonal à direção de tração máxima ou de deformação máxima. Sendo essa, de fundamental importância para o estabelecimento de critérios de ruptura e mecanismos de ruptura do concreto.

A Fig. 2.17 apresenta resultados obtidos por Kupfer *et al.* (1969) em relação também a deformação volumétrica do concreto submetido à compressão biaxial. Os resultados mostraram que inicialmente haveria uma redução da deformação em torno de 75% a 90% da tensão última e, podendo apresentar uma possível reversibilidade com o crescimento da tensão. Chen e Han (1988) afirmam, porém, que apesar de outros estudos apontarem que a pasta de cimento não expande quando submetida a um esforço de compressão, essa expansão volumétrica seria percebida quando misturada aos agregados. No entanto, esse aumento do volume estaria relacionado com o aumento de microfissuras através da argamassa.

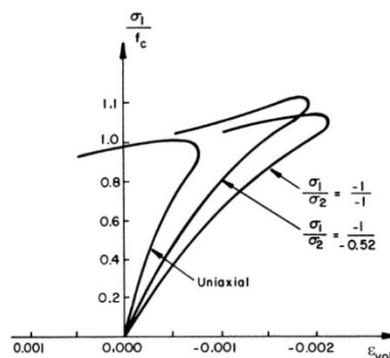


Fig. 2.17 – Deformação volumétrica do concreto submetido à compressão biaxial (Adaptado de Kupfer *et al.*, 1969).

Proença (1988) também afirma que, devido aos vazios existentes na composição granular do concreto, seria provável que houvesse uma expansão volumétrica nos estágios próximos à ruptura.

### 2.2.3 Comportamento do Concreto – Estados Triaxiais

A Fig. 2.18 apresenta resultados para um ensaio realizado em corpos-de-prova de formato cilíndrico em concreto submetidos a tensões de compressão triaxiais.

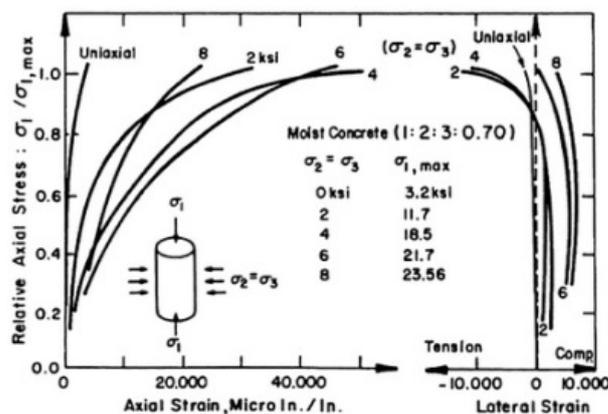


Fig. 2.18 – Curva Tensão x Deformação do concreto submetido à compressão triaxial (Adaptado de Palaniswamy e Shah, 1974).

Um aspecto a ser apontado em relação aos resultados obtidos seria em relação à realização da aplicação de tensões de compressão laterais constantes ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) e o aumento da tensão axial de compressão ( $\sigma_1$ ) até a ruptura do material. De acordo com Chen e Han (1988), para os diferentes valores de tensão de confinamento (laterais) considerados, as deformações axiais e laterais cresceriam até a ruptura num primeiro momento. No entanto, após os valores das tensões laterais atingirem, aproximadamente, 4 ksi ou 27,6 MPa, as deformações axiais reduziriam com o acréscimo de tensões até a ruptura.

Além disso, Chen e Han (1988) comentam que ocorreram maiores deformações de ruptura para corpos-de-prova submetidos a tensões de compressão triaxiais do que para corpos-de-prova submetidos a tensões uniaxiais. Tal fato é constatado observando que o concreto submetido às tensões de confinamento laterais apresentou um considerável nível de ductilidade antes da ruptura.

Chen e Han (1988) apontam, ainda, que apesar das diferenças entre o comportamento do concreto submetido a tensões uniaxiais de compressão e triaxiais de confinamento, três estágios de deformações são tidos como equivalentes de forma qualitativa para ambas as situações, ou seja, linear elástico, inelástico e localizado.

Proença (1988) apresenta resultados semelhantes para o ensaio do concreto confinado, conforme pode ser visto na Fig. 2.19.

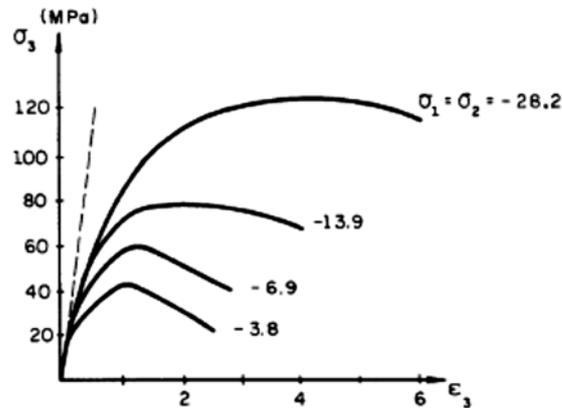


Fig. 2.19 – Curva Tensão x Deformação do concreto submetido à compressão triaxial (Adaptado de Proença, 1988).

Segundo Proença (1988) o concreto pode apresentar diferentes comportamentos frágeis dependendo da tensão de confinamento, ou seja, pode-se comportar de maneira plástica com amolecimento ou plástica com endurecimento. Porém seus resultados apontariam um acréscimo da resistência axial com o aumento da tensão de confinamento.

Na Fig. 2.20 Proença (1988) apresenta resultados de ensaios considerando a pressão hidrostática. Pode ser visto que a descarga ocorreria numa inclinação muito próxima a inclinação do crescimento de carga. Isso eliminaria uma região de baixos valores de carregamento e a ruptura se daria pelo esmagamento do concreto.

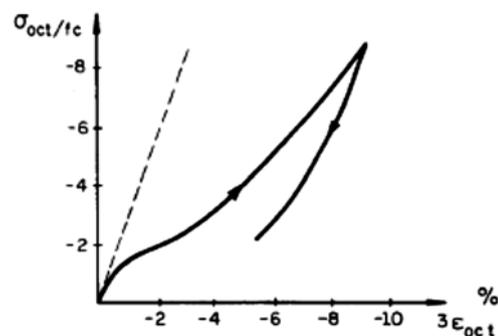


Fig. 2.20 – Comportamento do concreto quando descarregado (Adaptado de Proença, 1988).

Segundo Kang e Bittencourt (1998), podem ser apontados dois tipos comuns de fratura em corpos de prova de concreto submetidos à compressão triaxial. No primeiro modo a fissuração

ocorreria em duas direções, no segundo modo numa única direção, dependendo da tensão de confinamento.

## 2.3 Comportamento do Aço

Para a análise do comportamento do aço utilizados em elementos de concreto armado, pode-se levar em consideração apenas sua resistência a esforços axiais, uma vez que se trata de um material isotrópico com comportamento à tração praticamente idêntico à compressão. Há dois tipos de aços mais comumente adotados na engenharia civil, os laminados a quente e os encruados a frio. O que diferencia o comportamento desses dois tipos de aço é exatamente a forma como são fabricados.

No diagrama tensão-deformação de um ensaio de tração uniaxial, para o primeiro tipo de aço obtido pela laminação a quente, conforme mostra Fig. 2.21-a, é possível perceber que o mesmo apresentaria uma fase elástica linear na qual as deformações crescem de maneira proporcional à medida que as tensões aumentam. Ou seja, nesse trecho o aço apresenta um comportamento perfeitamente elástico. Em seguida ocorreriam grandes deformações para pequenos acréscimos em relação à tensão do limite de escoamento. Esse trecho é denominado patamar de escoamento. Posteriormente ocorrem grandes deformações e finalmente a estrição da seção com a consequente ruptura do material.

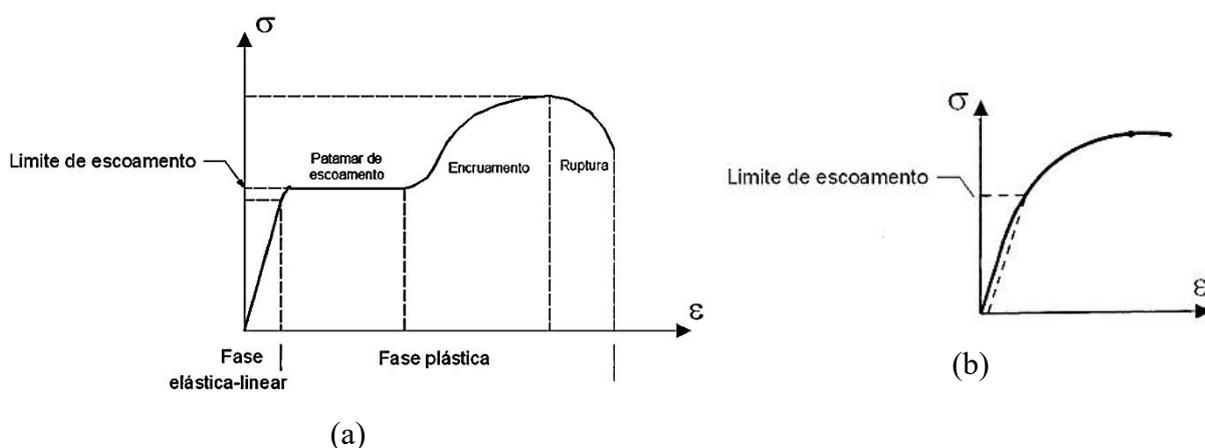


Fig. 2.21 – Curvas tensão-deformação típicas do aço (a) com laminação a quente (b) encruado a frio

No segundo tipo de aço, encruados a frio, o comportamento é semelhante se diferenciando apenas pela ausência de patamar de escoamento, como pode ser visto na Fig. 2.21-b. Após o limite de escoamento o diagrama se torna curvilíneo com deformações crescentes até a ruptura do material. É um comportamento semelhante a outros materiais metálicos, como o alumínio por exemplo.

Stramandinoli (2007) aponta que, geralmente, os modelos adotados para representar o comportamento do aço são considerados iguais para a tração e compressão, apesar de serem observadas algumas diferenças, e que apresentam menor complexidade quando comparados aos modelos utilizados para o concreto. Três modelos mais comumente adotados podem ser citados. O modelo elasto-plástico perfeito, o modelo elasto-plástico com endurecimento linear e os modelos trilineares, conforme apresentado na Fig. 2.22.

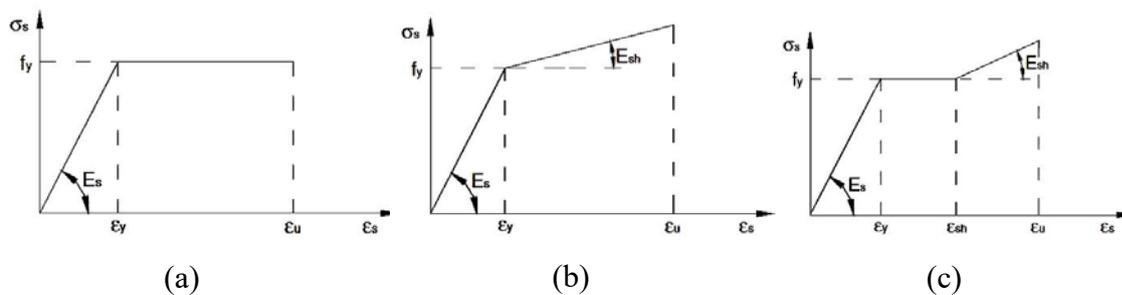


Fig. 2.22 – (a) Modelo Elasto-Plástico Perfeito (b) Modelo Elasto-Plástico com Endurecimento Linear (c) Modelo Trilinear (Adaptado de Stramandinoli, 2007).

Chen (1982) explica que o aço se comporta aproximadamente como um material perfeitamente plástico. E que, considerando a sua grande importância na composição do concreto armado em estruturas, a maior parte dos estudos que tratam do comportamento inelástico do concreto armado admite um comportamento elástico perfeitamente plástico do aço quando submetido a esforços de tração e compressão, conforme representado na Fig. 2.23.

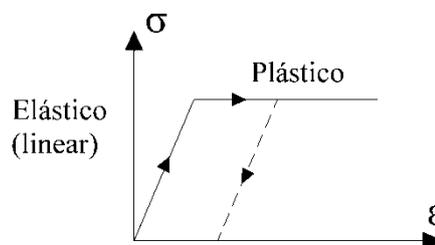


Fig. 2.23 – Modelo constitutivo do aço idealizado – Elastoplástico perfeito.

Bono (2008) também aponta que a representação elasto-plástica perfeita é a mais adotada para o aço e em segundo o modelo elasto-plástico com endurecimento linear.

As armaduras em peças de concreto armado modeladas pelo MEF, conforme aponta Stramandinoli (2007), podem ser inseridas considerando-se três maneiras diferentes. Pelo chamando modelo distribuído, indicado quando a armadura está uniformemente distribuída no concreto nas duas direções e por isso o elemento de armadura é considerado sobreposto ao elemento de concreto e suas espessuras são consideradas equivalentes, assim como suas propriedades como o módulo de elasticidade nas duas direções ortogonais. Há também o modelo discreto no qual a armadura é modelada a partir de elementos de barra unidimensionais coincidindo seus nós com os nós do elemento de concreto. E por último o modelo incorporado, em que a armadura é representada de uma maneira discreta dentro do elemento, situando-se em qualquer posição.

Com isso, os deslocamentos seriam determinados nas extremidades da armadura a partir dos deslocamentos nodais e sua rigidez transferida para os nós do elemento pela transformação de coordenadas.

## **2.4 Modelos para a Análise Não Linear do Concreto**

Bono (2008) explica que a maior parte dos modelos constitutivos leva em consideração o comportamento macroscópico do material a partir da relação tensão-deformação, porém negligenciam o mecanismo microscópico do comportamento. E, considerando a nível macroscópico, os modelos podem ser classificados em três tipos.

O primeiro tipo é baseado na teoria da elasticidade, no qual as tensões e deformações são reversíveis, sendo esse o primeiro, historicamente, a ser utilizado para análises de estruturas de concreto armado. O segundo tipo baseado na teoria da plasticidade, que consideram as tensões imediatas e irreversíveis, geralmente adotado para descrever o comportamento inelástico dos materiais, inicialmente utilizados para metais e materiais geotécnicos. E por

último, os modelos baseados na mecânica da fratura e do dano, adotados para materiais frágeis, como o concreto, partindo do princípio físico do crescimento gradual de fissuras.

O comportamento não linear global do concreto é observado devido ao fenômeno de fissuração e às demais características do material quando se considera uma análise mais realista dessas estruturas submetidas a carregamentos crescentes. A fissuração progressiva provoca a perda de rigidez do concreto, que deve ser considerada nos modelos teórico-matemáticos desenvolvidos para representar a não linearidade do comportamento do material. Modelos baseados na Teoria da Plasticidade têm sido empregados.

A Teoria clássica da Plasticidade, originalmente desenvolvidos para os metais, é alternativa adotada para representação do comportamento do concreto a nível macroscópico, devido às similaridades apresentadas em relação ao comportamento de ambos os materiais nesse sentido. No entanto, o mesmo não ocorre em relação ao comportamento a nível microscópico devido às diferenças apresentadas em suas estruturas internas. As deformações plásticas geradas pela microfissuração no concreto podem ser representadas adotando-se a teoria da plasticidade, porém a mesma não é capaz de simular a degradação da rigidez no carregamento, assim como sua recuperação nos descarregamentos. Nesse caso, modelos baseados na Mecânica do Dano são mais apropriados para simular o comportamento do concreto, já que se baseiam na teoria de que tal comportamento é afetado diretamente pelo nível de fissuração do material.

De acordo com Lemaitre (1992), a Mecânica do Dano Contínuo considera que a resposta não linear dos sólidos, de modo macroscópico, ocorre devido a processos irreversíveis em sua microestrutura. Esses processos podem ser, por exemplo, o escorregamento relativo entre cristais, as perdas de coesão, alterações da porosidade, etc., que são originados a partir de microdefeitos ou vazios já existentes e considerados o dano inicial do material. Assim, considera-se que o comportamento do material é afetado por uma variável que mede o nível de fissuração interna do material que depende apenas do estado atual da microestrutura, caracterizado por um conjunto de parâmetros internos do modelo de dano.

Já os modelos que se baseiam na Mecânica da Fratura para representar o concreto, consideram a previsão da evolução das fissuras macroscópicas no concreto. No entanto, a introdução de

um critério de resistência deve ser adotada como complemento, já que no concreto uma grande zona de fissuras distribuídas cresce e dissipa energia antes que uma trinca maior possa se formar e propagar.

Nos próximos itens são apresentadas, com mais detalhes, as formulações para modelos de ruptura baseados na Teoria da Plasticidade.

## **2.5 Formulação para os Modelos de Ruptura do Concreto**

Para melhor compreensão da superfície de ruptura do concreto, diversos critérios têm sido propostos. Em Chen e Han (1988) e Chen (1982) é apresentado alguns critérios classificados de acordo com o número de constantes do material, podendo chegar a até cinco parâmetros existentes em suas respectivas equações. O entendimento desses critérios depende de alguns conceitos que serão brevemente comentados nos itens a seguir.

### **2.5.1 Invariantes de Tensão: Interpretação física e geométrica**

Considerando a complexidade do comportamento estrutural do concreto, muitos estudos foram realizados ao longo dos anos com o objetivo de estabelecer algumas equações constitutivas para o material que melhor representassem as características específicas do seu comportamento.

A maior parte dos modelos estabelecidos para o concreto se fundamenta nas características da sua superfície de ruptura. Partindo-se da hipótese simplificadora de que o concreto é um material isótropo, é possível estabelecer um critério de ruptura a partir de uma função do estado de tensões, independente do sistema de coordenadas adotado. Sendo assim, o critério pode ser representado considerando as tensões principais, conforme apresentado na Eq.(2.7), adotando-se a notação de von Karman.

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = 0 \quad (2.7)$$

A representação do estado de tensão de um ponto qualquer do material é realizada a partir das tensões principais e cisalhantes, que são componentes do tensor de tensões. As tensões cisalhantes são, por definição, nulas sobre um plano principal. O estado de tensões é representado pela Eq. (2.8).

$$T_i = \sigma n_i \quad \therefore \quad \sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \quad \therefore \quad \sigma_{ij} n_j = \sigma n_j \delta_{ij} \quad \therefore \quad \boxed{(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0} \quad (2.8)$$

Onde:

$T_i$  = Vetor de tensões [ $T_x, T_y, T_z$ ] está relacionado com a fórmula de Cauchy ( $\sigma_{ij} n_j$ );

$\sigma$  = Tensão principal;

$n$  = Direção principal de uma tensão no plano;

$\sigma_{ij}$  = Tensor de tensões;

$\delta_{ij} = \delta_{ji}$  = Delta de Kronecker ou tensor identidade de 2ª ordem (Seu valor é igual a 1 (um), se  $i=j$  e 0 (zero), se  $i \neq j$ ).

A Eq. (2.8) pode ser também representada a partir de um sistema de equações, conforme apresentado na Eq. (2.9).

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Para que esse sistema de equações lineares e homogêneas apresente uma solução não trivial, é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes se anule, conforme Eq. (2.10).

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

A partir desse determinante é possível obter o seguinte polinômio cúbico mostrado na Eq. (2.11).

$$\boxed{\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0} \quad (2.11)$$

Onde:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2.12)$$

$$I_2 = (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xy}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \det \sigma_{ij} \quad (2.14)$$

Esses coeficientes do polinômio são chamados de invariantes de tensão, uma vez que seus valores permanecem os mesmos, independentemente do referencial do tensor considerado, ou seja, de uma possível redefinição do sistema de coordenadas.

Um tensor de tensões simétrico pode ser decomposto em duas parcelas, a chamada parcela esférica ou hidrostática e a parcela denominada anti-esférica ou desviadora, conforme representado na Eq. (2.15).

$$\boxed{\sigma_{ij} = S_{ij} + \sigma_m \delta_{ij}} \quad (2.15)$$

Onde:

$S_{ij}$  = Parte anti-esférica ou desviadora do tensor de tensões, representa o estado de cisalhamento puro;

$\sigma_m \delta_{ij}$  = Parte esférica ou hidrostática, sendo que  $\sigma_m$  representa a tensão média de um estado puramente hidrostático;

$\delta_{ij}$  = Tensor identidade (Delta de Kronecker).

A parte desviadora e a hidrostática podem ser obtidas a partir das Eqs. (2.16) e (2.17), respectivamente.

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_m) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_m) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_m) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\sigma_m \delta_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Onde:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma_{ii} = \frac{1}{3} I_1 \quad (2.18)$$

Os invariantes de tensão da parcela anti-esférica podem ser obtidos de forma similar ao apresentado para o tensor de tensões, conforme mostra Eqs. (2.19) e (2.20):

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \Rightarrow \left| S_{ij} - \overbrace{(\sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij})}^s \right| = 0 \Rightarrow \boxed{|S_{ij} - s \delta_{ij}| = 0} \quad (2.19)$$

A partir desse determinante é possível obter o seguinte polinômio cúbico mostrado na Eq. (2.20).

$$\boxed{s^3 - J_1 s^2 + J_2 s - J_3 = 0} \quad (2.20)$$

Onde:

$$J_1 = s_{ii} = s_x + s_y + s_z = 0 \quad (2.21)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (2.22)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \begin{vmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & s_z \end{vmatrix} \quad (2.23)$$

As Eqs. (2.21), (2.22) e (2.23) são os invariantes de tensão da parte anti-esférica do tensor de tensões.

Como a única diferença entre o tensor de tensão  $\sigma_{ij}$  e o tensor correspondente à parte anti-esférica  $S_{ij}$  é a parcela esférica  $\sigma_m \delta_{ij}$ , pode-se concluir que suas direções principais são as mesmas.

Portanto, quando os eixos do plano coincidem com as direções principais, os invariantes de tensão são determinados por meio das Eqs. (2.24), (2.25) e (2.26).

$$J_1 = s_{ii} = s_x + s_y + s_z = 0 \quad (2.24)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] \quad (2.25)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}(s_x^3 + s_y^3 + s_z^3) = s_x s_y s_z \quad (2.26)$$

De acordo com Chen e Han (1988) os invariantes de tensão da parte anti-esférica do tensor de tensões podem também ser representados em função dos invariantes de tensão  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , conforme mostrado nas Eqs. (2.27), (2.28) e (2.29).

$$J_1 = 0 \quad (2.27)$$

$$J_2 = \frac{1}{3}(I_1^2 - 3I_2) \quad (2.28)$$

$$J_3 = \frac{1}{27}(2I_1^3 - 9I_1 I_2 + 27I_3) \quad (2.29)$$

Para a determinação das raízes do polinômio apresentado na Eq. (2.11), a seguinte decomposição da tensão principal mostrada na Eq. (2.30) deve ser levada em consideração.

$$\sigma = \sigma_m + \bar{\sigma} \quad (2.30)$$

Se  $\sigma_m$  é igual a  $I_1/3$ , conforme já apontado na Eq. (2.18), substituindo-se na Eq. (2.11) tem-se:

$$\left(I_1/3 + \bar{\sigma}\right)^3 - I_1 \left(I_1/3 + \bar{\sigma}\right)^2 + I_2 \left(I_1/3 + \bar{\sigma}\right) - I_3 = 0 \quad (2.31)$$

Tal polinômio resulta na Eq. (2.32).

$$\bar{\sigma}^3 + \left(I_2 - I_1^2/3\right)\bar{\sigma} + \left(I_2 I_1/3 - 2I_1^3/27 - I_3\right) \Rightarrow \bar{\sigma}^3 - J_2 \bar{\sigma} - J_3 = 0 \quad (2.32)$$

Fazendo-se  $\bar{\sigma} = r \cos \theta$  tem-se:

$$(r \cos \theta)^3 - J_2 (r \cos \theta) - J_3 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\cos^3 \theta - \frac{J_2}{r^2} (\cos \theta) - \frac{J_3}{r^3} = 0} \quad (2.33)$$

A Eq.(2.33) apresenta semelhança com a expressão trigonométrica apresentada na Eq. (2.34).

$$\cos^3 \theta - \frac{3}{4} (\cos \theta) - \frac{1}{4} (\cos 3\theta) = 0 \quad (2.34)$$

A partir disso é possível obter os valores correspondentes para cada termo da Eq. (2.33).

$$\frac{J_2}{r^2} = \frac{3}{4} \rightarrow r^2 = \frac{4}{3} J_2 \rightarrow r = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \quad (2.35)$$

$$r^3 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \frac{4}{3} J_2 = \frac{8J_2^{3/2}}{3\sqrt{3}} \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{4} \cos 3\theta = \frac{J_3}{r^3} \rightarrow \cos 3\theta = \frac{4J_3}{r^3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (2.37)$$

Considerando que  $r$  e  $\cos 3\theta$  são também invariantes e que o cosseno se limita entre  $[-1,1]$ , tem-se:

$$-1 \leq \cos 3\theta \leq 1 \quad (2.38)$$

$$0 \leq 3\theta \leq \pi \quad (2.39)$$

$$0 \leq \theta_0 \leq \pi/3 \quad (2.40)$$

Sabendo-se que o cosseno apresenta uma natureza cíclica de  $\cos(3\theta \pm 2n\pi)$  e considerando  $n=1$ , três valores para “ $\theta$ ” podem ser obtidos a partir das Eqs. (2.41) e (2.42) a seguir.

$$\theta = \theta_0 \quad (2.41)$$

$$\theta = \theta_0 \pm (2\pi/3) \quad (2.42)$$

Finalmente, a partir dessas considerações torna-se possível obter as raízes do polinômio apresentado na Eq. (2.11), conforme apresentado na Eq. (2.43).

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{bmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \begin{bmatrix} \cos\theta_0 \\ \cos(\theta_0 - 2\pi/3) \\ \cos(\theta_0 + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

As raízes são então obtidas considerando  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  e outra condição, apresentada na Eq. (2.44), é acrescentada para a resolução do sistema homogêneo e determinação das direções principais. Essa condição corresponde à relação fundamental da trigonometria para o caso 3D, expressa em função dos cossenos diretores.

$$\boxed{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1} \quad (2.44)$$

De acordo com Chen e Han (1988), a utilização dos invariantes de tensão pode ser a forma mais apropriada para representar um critério de ruptura, conforme mostra Eq. (2.45), visto que em análises contendo tensões multiaxiais, essa representação torna-se bem complexa.

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (2.45)$$

Onde:

$I_1$  = Primeiro invariante do tensor de tensão  $\sigma_{ij}$

$J_2$  = Segundo invariante do tensor de tensão anti-esférico  $s_{ij}$ .

$J_3$  = Terceiro invariante do tensor de tensão anti-esférico  $s_{ij}$ .

Essa formulação permite obter uma interpretação simplificada, independente das propriedades do material, por isso é considerada uma forma geral de representação, de acordo com Chen e Han (1988).

Para realizar-se uma interpretação física das tensões principais é necessário abordar o conceito de tensões octaédricas. Um plano octaédrico de tensão, segundo Chen e Han (1988), é um plano cujas direções normais possuem o mesmo ângulo de inclinação com cada um dos eixos principais de tensões. Sendo assim tem-se:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \rightarrow n_1 = n_2 = n_3 = n \rightarrow 3n^2 = 1 \rightarrow \boxed{n = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}} \quad (2.46)$$

Pela fórmula de Cauchy, Eq. (2.47), é possível obter a tensão octaédrica conforme apresentado na Eq. (2.48).

$$\boxed{\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j} \rightarrow \sigma_n = \sigma_1 n_1 n_1 + \sigma_2 n_2 n_2 + \sigma_3 n_3 n_3 \quad (2.47)$$

$$\sigma_{\text{oct}} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \boxed{\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3} I_1 = \sigma_m} \quad (2.48)$$

A tensão normal octaédrica é, portanto, igual à tensão média normal ou tensão hidrostática.

A tensão de cisalhamento octaédrica, também chamada de tensão transversal em um plano octaédrico pode, então, ser deduzida a partir da Eq. (2.49).

$$\boxed{\sigma_{ij}^2 = \sigma_{\text{oct}}^2 + \tau_{\text{oct}}^2} \quad (2.49)$$

Onde:

$$\sigma_{ij}^2 = (\sigma_1 n_1 n_1 + \sigma_2 n_2 n_2 + \sigma_3 n_3 n_3)^2 = \boxed{\frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} \quad (2.50)$$

$$\sigma_{oct}^2 = \left( \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right)^2 = \boxed{\frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} \quad (2.51)$$

Substituindo-se (2.50) e (2.51) na Eq. (2.49) obtêm-se:

$$\begin{aligned} \tau_{oct}^2 &= \sigma_{ij}^2 - \sigma_{oct}^2 \therefore \boxed{\tau_{oct}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} = \\ &= \boxed{|\tau_{oct}| = \sqrt{\frac{2J_2}{3}}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Elevando-se a tensão de transversal octaédrica ao cubo obtêm-se a relação apresentada na Eq. (2.53).

$$\tau_{oct}^2 = \frac{2J_2}{3} \rightarrow \tau_{oct}^3 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} J_2^{3/2} \quad (2.53)$$

Substituindo-se o termo  $J_2^{3/2}$  da Eq. (2.53) na correspondência apresentada entre o invariante  $J_3$  de tensão da parte anti-esférica e a relação trigonométrica da Eq. (2.37), pode-se definir a tensão octaédrica cisalhante considerando o ângulo de Lode ( $\theta$ ), que é o ângulo de similaridade entre as tensões num plano tridimensional, conforme mostra a Eq. (2.54).

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \rightarrow \boxed{\cos 3\theta = \frac{\sqrt{2}J_3}{\tau_{oct}^3}} \quad (2.54)$$

A interpretação física permite concluir que a tensão octaédrica ( $\sigma_{oct}$ ), a tensão cisalhante octaédrica ( $\tau_{oct}$ ) e o ângulo de Lode ( $\theta$ ), podem também ser adotados alternativamente no lugar dos invariantes de tensão  $I_1$  e  $J_2$  para representar uma superfície de ruptura.

O estudo dos critérios de falha pode também ser facilitado considerando a representação geométrica tridimensional do estado de tensões em um dado ponto “P”, tendo como eixos as respectivas tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , e  $\sigma_3$ , como pode ser visto na Fig. 2.24.

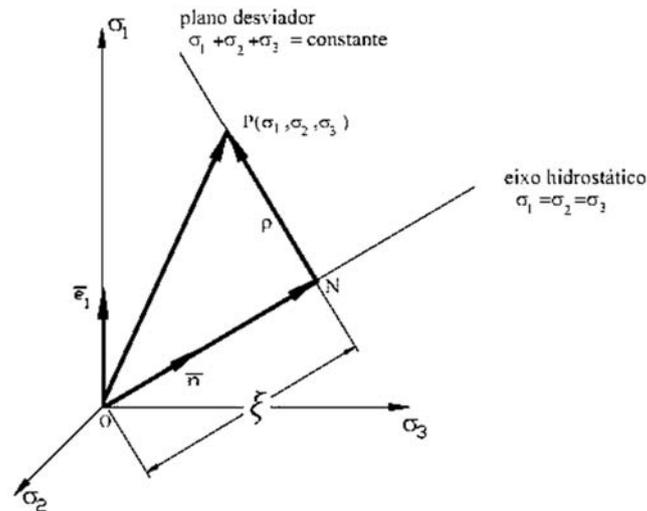


Fig. 2.24 – Decomposição das tensões no espaço de tensões principais (Adaptado de Da Silva, 2003).

Esse espaço de tensões, adotado para materiais considerados isotrópicos, é chamado de Haigh-Westergaard e suas coordenadas são funções da tensão hidrostática, das tensões desviadoras e do ângulo de similaridade.

O vetor  $\overline{OP}$  representa, portanto, um estado de tensão nesse espaço. E o eixo representado pela diagonal  $\overline{ON}$  é chamado de eixo hidrostático com ângulos equivalentes em relação aos três eixos ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ). Com isso, pode-se dizer que os pontos sobre essa diagonal representam um estado de tensão puramente hidrostático, o que significa que as tensões anti-esféricas ou desviadoras são nulas. Todos os planos perpendiculares à diagonal  $\overline{ON}$  são chamados planos desviadores ou anti-esféricos. Quando um plano anti-esférico passa pela origem do sistema de coordenadas, ou seja,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , é chamado plano  $\pi$  ou plano de Nadai. Todos os pontos pertencentes ao plano de Nadai correspondem a um estado de cisalhamento puro.

O estado de tensão, representado pelo vetor  $\overline{OP}$  pode, assim, ser decomposto na direção do eixo hidrostático ( $\overline{ON}$ ), nomeado vetor "xi", e na direção perpendicular a esse eixo ( $\overline{NP}$ ) ou direção desviadora, chamada de "rho", como apresentado na Eq. (2.55).

$$\overline{OP} = \overline{NP} + \overline{ON} \quad (2.55)$$

O vetor  $\bar{n}$  que direciona o eixo hidrostático pode ser dado pela Eq. (2.56).

$$\bar{n} = \frac{\sqrt{3}}{3} [1 \quad 1 \quad 1] \quad (2.56)$$

Então  $\overline{ON}$  que é a parcela hidrostática do estado de tensão, pode ser definida pela Eq. (2.57).

$$\begin{aligned} \overline{ON} = \xi = \overline{OP} \cdot \bar{n} &= (\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3) \left( \frac{\sqrt{3}}{3} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} e_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} e_3 \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{\sqrt{3}}{3} (I_1) \rightarrow \boxed{|\overline{ON}| = \sqrt{3} \sigma_m = \sqrt{3} \sigma_{oct}} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Com isso o vetor  $\overline{NP}$ , que é a parcela desviatória do estado de tensão, pode ser expresso pelo vetor do estado de tensão  $\overline{OP}$  considerando a retirada da parcela hidrostática, conforme mostrado na Eq. (2.58).

$$\overline{NP} = \overline{OP} - \overline{ON} = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3] - \frac{I_1}{3} [1 \quad 1 \quad 1] = \boxed{\overline{NP} = [s_1 \quad s_2 \quad s_3]} \quad (2.58)$$

O quadrado do módulo da projeção  $\overline{NP}$  está relacionado com a componente cisalhante da tensão octaédrica, como mostra a Eq. (2.59).

$$(\overline{NP})^2 = r^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2J_2 = 3\tau_{oct}^2 \quad (2.59)$$

O ângulo de similaridade ou ângulo de Lode ( $\theta$ ) pode ser também analisado geometricamente considerando a visualização do sistema de referência sobre o plano de Nadai, ou seja, o ponto “N” coincidindo com a origem “O” do sistema de referência. O vetor  $\overline{NP}$  poderia ser obtido considerando a Eq. (2.60).

$$\overline{NP} \cdot i = r \cos\theta \quad (2.60)$$

Onde:

$$i = \frac{\sqrt{6}}{6} (2e_1 - e_2 - e_3) \quad (2.61)$$

Substituindo a Eq. (2.61) na Eq. (2.60), tem-se:

$$[s_1 + s_2 + s_3] \frac{\sqrt{6}}{6} (2e_1 - e_2 - e_3) = r \cos\theta = \sqrt{2}\sqrt{J_2} \cos\theta \quad (2.62)$$

Logo:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{J_2}} (2s_1 - s_2 - s_3)} \quad (2.63)$$

Considerando que no plano de Nadai  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$ , o ângulo de Lode ( $\theta$ ) pode ser definido pela Eq. (2.64).

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{J_2}} s_1} \quad (2.64)$$

Substituindo a Eq. (2.64) na identidade trigonométrica Eq. (2.65) chega-se a uma última relação para o ângulo Lode apresentada na Eq. (2.66).

$$\cos 3\theta = 4\cos^2\theta - 3\cos\theta \quad (2.65)$$

$$\cos 3\theta = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{J_2}} s_1\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{J_2}} s_1\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{\sqrt{2}J_3}{\tau_{\text{oct}}^3}} \quad (2.66)$$

A partir dessas interpretações geométricas, é possível dizer que o estado de tensão, representado pelo ponto P ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ), pode também ser caracterizado pelas coordenadas "ξ", "ρ" e "θ".

## 2.6 Modelos de Ruptura do Concreto

Diversos estudos experimentais foram realizados com o objetivo de se definir as características da superfície de ruptura do concreto e, a partir disso, foram propostos alguns modelos sendo alguns abordados no presente item.

De acordo com Chen e Han (1988), considerando a dependência do concreto em relação à pressão hidrostática, a forma da sua superfície de ruptura, em um espaço de tensões tridimensional (espaço de tensões de Haigh-Westergaard), pode ser representada através das seções transversais dessas superfícies nos planos anti-esféricos, a partir dos chamados meridianos curvos. Os planos anti-esféricos ou desviadores que contêm o eixo hidrostático são chamados de planos meridianos.

A partir do plano meridiano, representado na Fig. 2.25, é possível perceber que os meridianos se iniciariam a partir de um ponto de falha para uma dada tensão hidrostática positiva e cresceriam com o acréscimo de tensão hidrostática na direção negativa do eixo, já que a tensão hidrostática pura não pode causar a falha do material.

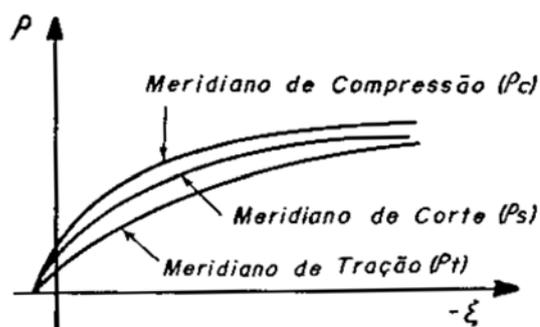


Fig. 2.25 – Meridianos da superfície de falha (Chen e Han, 1988).

Onde, conforme já mencionado:

" $\xi$ "=vetor na direção do eixo hidrostático;

" $\rho$ "=vetor na direção perpendicular ao eixo hidrostático ou na direção desviadora.

A Fig. 2.26 apresenta as características básicas da superfície de falha do concreto, na qual " $\rho_t$ " remeteria ao meridiano de tração, " $\rho_c$ " ao meridiano de compressão e " $\rho_s$ " ao de cisalhamento do material. Essa seria a seção da superfície de falha no plano anti-esférico e os

ângulos de similaridade dos meridianos satisfazem a condição  $\rho_t < \rho_s < \rho_c$ , sendo iguais a  $\theta=0^\circ$ ,  $\theta=30^\circ$  e  $\theta=60^\circ$ , respectivamente.

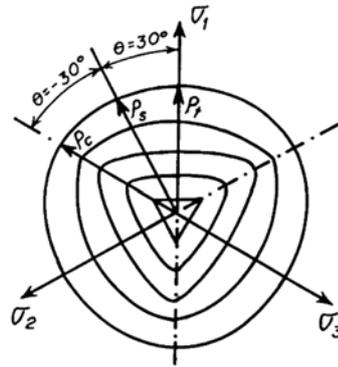


Fig. 2.26 – Seção da superfície básica de ruptura do concreto no plano anti-esférico (Chen e Han, 1988).

Para um material isótropo, devido a existência de uma tripla simetria, a escolha dos eixos ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ) será arbitrária, tornando possível considerar somente um setor  $0^\circ < \theta < 60^\circ$  num plano anti-esférico, já que os outros trechos poderão ser determinados simetricamente.

De acordo com Chen e Han (1988), ainda, as seções das curvas de ruptura do concreto no plano anti-esférico apresentam alterações na forma de seus traços, sendo quase triangulares para a região de tração e pequenas tensões de compressão e apresentando uma forma abaulada, próxima a circular, para valores de tensões de compressão mais elevadas com o acréscimo de  $\xi$ , ou seja, para altas pressões hidrostáticas.

Além disso, as seções são convexas, dependentes do ângulo  $\theta$  e apresentam razão  $\rho_t/\rho_c$  crescente com o aumento das pressões hidrostáticas, estando cerca de 0,5 próximo ao plano de Nadai ( $\pi$ ) e atingindo um máximo de 0,8 próximo da pressão hidrostática igual a  $\xi = -7 f'$ .

Conforme já comentado no item anterior, segundo Chen e Han (1988) e Chen (1982) os modelos podem ser classificados de acordo com o número de constantes do material que aparecem nas expressões dos critérios de ruptura e podem chegar a até cinco. A Fig. 2.27 mostra alguns dos principais modelos existentes.

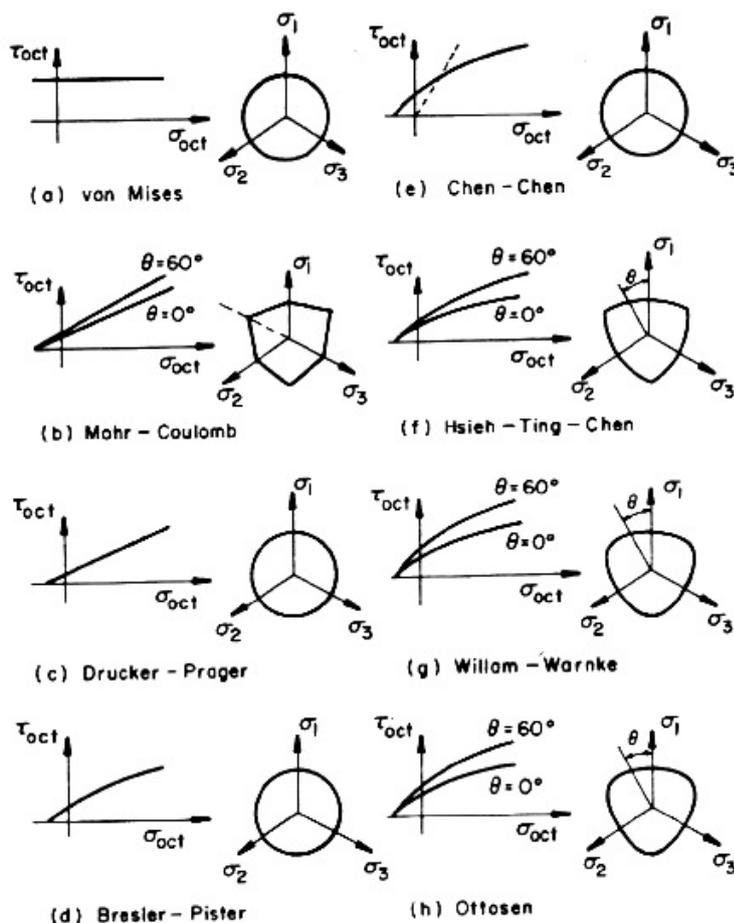


Fig. 2.27 – Modelos de falha (Chen e Han, 1988).

Para os modelos com um parâmetro, de acordo com Chen e Han (1988) e Chen (1982), pode-se apontar os critérios de Tresca e o de von Mises que foram concebidos inicialmente como critério de ruptura para metais, e foram também utilizados nas primeiras análises para o concreto submetido a tensões de compressão pelo MEF. Esse tipo de superfície de ruptura é independente da pressão hidrostática.

Portanto, para considerar a baixa resistência à tração do concreto seria necessário unir esses critérios com a superfície de tensão máxima principal.

Já para os critérios de dois parâmetros os modelos de Mohr-Coulomb e o de Drucker-Prager são apontados e, de acordo com Chen e Han (1988), apresentam superfícies mais simples de ruptura e dependentes da pressão hidrostática sendo a superfície de Mohr-Coulomb adotada com mais frequência para analisar o comportamento do concreto, e a superfície de Drucker-Prager usualmente adotada para solos.

Explicam, ainda, que a superfície de Drucker-Prager apresenta dois problemas básicos relacionados com modelagem do concreto. A relação linear entre a tensão octaédrica ( $\sigma_{oct}$ ) e a tensão cisalhante octaédrica ( $\tau_{oct}$ ), como pode ser visto na Fig. 2.27, e a independência em relação ao ângulo de similaridade ( $\theta$ ).

Portanto, para o concreto, principalmente quando submetido a altas tensões de compressão, esses modelos, por apresentarem linhas retas como meridianos, não são considerados adequados para descrever sua ruptura de modo preciso.

Para os modelos de três parâmetros as superfícies de Bresler-Pister e Willam-Warnke são apresentadas. O primeiro modelo é uma generalização da superfície de Drucker-Prager e apresenta uma relação parabólica entre a tensão octaédrica ( $\sigma_{oct}$ ) e a tensão cisalhante octaédrica ( $\tau_{oct}$ ), porém as seções transversais no plano anti-esférico são independentes ângulo de similaridade ( $\theta$ ).

A primeira versão da superfície de três parâmetros, desenvolvida por Willam-Warnke, apresentava uma relação linear entre tensão octaédrica ( $\sigma_{oct}$ ) e a tensão cisalhante octaédrica ( $\tau_{oct}$ ), porém as seções transversais no plano anti-esférico eram dependentes do ângulo de similaridade ( $\theta$ ), de acordo com Chen e Han (1988).

Finalmente os modelos de quatro parâmetros de Ottosen e Hsieh-Ting-Chen e o modelo de cinco parâmetros de Willam-Warnke que, segundo Chen e Han (1988), apresentam relação parabólica entre a tensão octaédrica ( $\sigma_{oct}$ ) e a tensão cisalhante octaédrica ( $\tau_{oct}$ ) e também dependência com o ângulo de similaridade ( $\theta$ ). São considerados os modelos mais refinados, pois reproduzem todas as mais importantes características da superfície triaxial de ruptura do concreto.

### 2.6.1 Modelos de Ruptura com Um Parâmetro

Nesse item são discutidos com mais detalhes as características de cada modelo de ruptura com um parâmetro.

#### a) Critério da tensão normal máxima de tração (Rankine)

O critério de Rankine, desenvolvido em 1876, considera que uma ruptura local ocorreria no momento em que a maior tensão principal atingisse o valor da resistência à tração simples ( $\sigma_0$ ) do material. Com isso o critério poderia ser expresso a partir as relações apresentadas na Eq. (2.67).

$$\sigma_1 \leq \sigma_0 \quad \sigma_2 \leq \sigma_0 \quad \sigma_3 \leq \sigma_0 \quad (2.67)$$

Adotando-se as variáveis  $(\xi, \rho, \theta)$  ou  $(I_1, J_2, \theta)$  a superfície de falha pode ser completamente descrita, a partir da variação do ângulo de similaridade  $0^\circ < \theta < 60^\circ$ , e das Eqs. (2.68) ou (2.69).

$$f(\xi, \rho, \theta) = \sqrt{2}\rho \cos\theta + \xi - \sqrt{3}\sigma_0 = 0 \quad (2.68)$$

$$f(I_1, J_2, \theta) = 2\sqrt{3}J_2 \cos\theta + I_1 - 3\sigma_0 = 0 \quad (2.69)$$

Onde:

$\sigma_0$  = Resistência à tração simples

Na Fig. 2.28 pode-se visualizar o plano meridiano para o critério de Rankine, onde para  $\theta=0^\circ$  tem-se o meridiano de tração e para  $\theta=60^\circ$  o de compressão, e a forma da seção transversal da superfície de ruptura no plano de Nadai ( $\pi$ ), ou seja,  $\xi = 0$ .

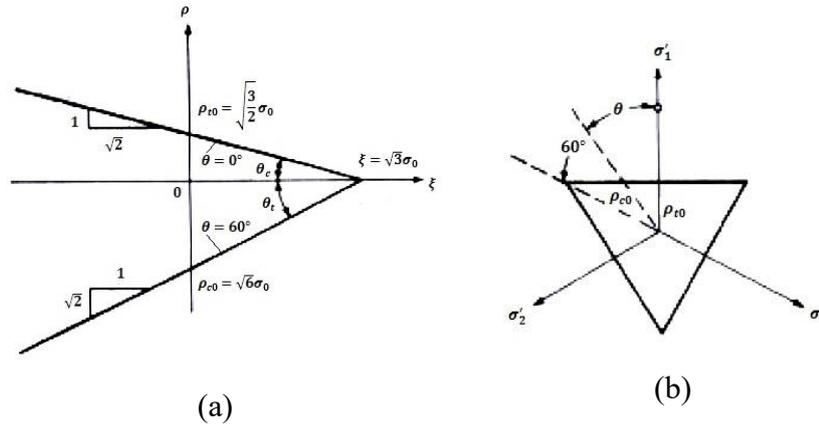


Fig. 2.28 – (a) Plano Meridiano do critério de Rankine e (b) Seção transversal no plano de Nadai ( $\pi$ ) (Adaptado de Chen e Han, 1988).

### b) Critério de Tresca

O critério proposto por Tresca, em 1864, é também um dos modelos com um parâmetro e independente da pressão hidrostática. Esse é o primeiro critério de escoamento proposto, na história, para os metais considerando um estado combinado de tensões.

De acordo com Chen e Han (1988), o critério sugere que a superfície de ruptura para metais e para o concreto submetido a altas pressões hidrostáticas seria definida a partir da máxima tensão cisalhante. O valor crítico ( $k$ ) seria definido pela metade do maior valor absoluto entre as diferenças das tensões principais em pares, conforme apresentado na Eq. (2.70).

$$\text{Máx} \left( \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \quad \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|, \quad \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| \right) = k \quad (2.70)$$

Considerando os invariantes de tensão ( $I_1, J_2, \theta$ ) ou ( $\xi, \rho, \theta$ ) a superfície de falha de Tresca pode ser escrita a partir das Eqs. (2.71) e (2.72).

$$f(J_2, \theta) = \sqrt{J_2} \sin \left( \theta + \frac{1}{3} \pi \right) - k = 0 \quad (2.71)$$

$$f(\rho, \theta) = \rho \sin \left( \theta + \frac{1}{3} \pi \right) - \sqrt{2}k = 0 \quad (2.72)$$

Como a superfície de ruptura é independente da pressão hidrostática, independem, portanto, das variáveis  $I_1$  e  $\xi$ , dando origem a uma superfície cilíndrica cuja geração é paralela ao eixo hidrostático e no plano anti-esférico possui a forma de um hexágono.

A Fig. 2.29 ilustra a forma hexagonal da superfície de ruptura proposta pelo critério de Tresca.

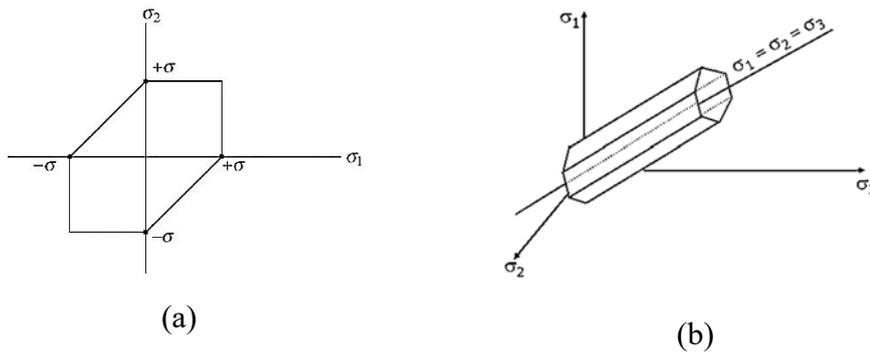


Fig. 2.29 – Superfície de ruptura de acordo com o critério de Tresca (a) para o caso plano (b) para o caso tridimensional.

### c) Critério de von Mises

De acordo Valliappan (1981), em 1913, von Mises desenvolveu a formulação desse critério de escoamento com base na teoria da energia de distorção, ou seja, a partir da tensão de cisalhamento octaédrica. Adotar essa variável chave foi a conveniente alternativa encontrada para descrever o escoamento de materiais que são independentes da pressão hidrostática.

O escoamento ocorreria, de acordo com Chen e Han (1988), no momento em que a tensão de cisalhamento octaédrica atingisse um valor crítico  $k$ , conforme apresentado na Eq. (2.73).

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}k} \rightarrow \boxed{f(J_2) = J_2 - k^2 = 0} \quad (2.73)$$

Como:

$$J_2 = \frac{1}{6}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \quad (2.74)$$

A Eq. (2.73) pode ser escrita em termos de tensão principal, como pode ser visto na Eq. (2.75).

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6\tau_{esc}^2 \quad (2.75)$$

Onde:

$\tau_{esc}$  = Tensão de escoamento em cisalhamento puro.

Para um caso uniaxial, com  $\sigma_1 = \sigma_0 = \sigma_{esc}$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , o valor de  $\tau_{esc}$  pode ser determinado considerando a Eq. (2.76).

$$\tau_{esc} = \frac{\sqrt{3}\sigma_{esc}}{3} \quad (2.76)$$

Onde:

$\sigma_{esc}$  = Tensão de escoamento na tração simples.

A Eq. (2.73) pode ser relacionada com a forma mais apropriada para representar um critério de ruptura, conforme apontado na Eq. (2.45), e representa um cilindro circular ou uma elipse, no qual sua interseção com o plano anti-esférico é um círculo de raio  $\rho = \sqrt{2}\tau_{esc}$ .

Graficamente a elipse de von Mises circunscreve o hexágono do critério de Tresca se a relação entre a tensão de escoamento no estado cisalhante ( $\tau_{esc}$ ) de ambos ficar em torno de  $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15$ . E se ambos obtiverem o mesmo valor de “ $\tau_{esc}$ ” a elipse ficará inscrita ao hexágono.

A Fig. 2.30-a ilustra a elipse do critério de von Mises e a Fig. 2.30-b corresponde a uma representação da elipse de von Mises circunscrevendo o hexágono de Tresca. Ambos estão representados pela interseção da forma cilíndrica com a coordenada do plano  $\sigma_3 = 0$ .

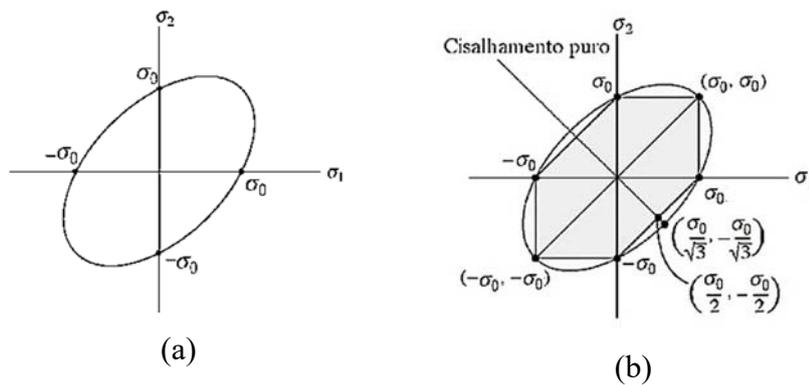


Fig. 2.30 – Superfície de ruptura de von Mises (a) para o caso plano (b) superfície de von Mises circunscrevendo a de Tresca para o caso plano (Adaptado de Hibbeler, 2004).

Na Fig. 2.31 a visualização tridimensional e, no plano anti-esférico, a superfície ruptura de von Mises se aproxima a forma de uma circunferência.

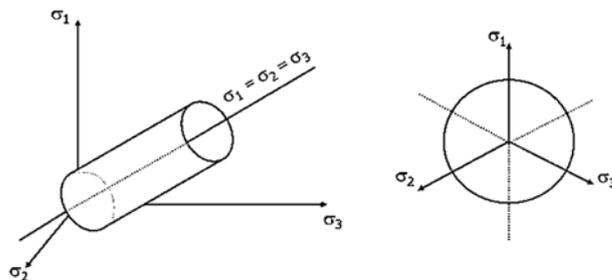


Fig. 2.31 - Superfície de ruptura de von Mises para o caso tridimensional.

Na Fig. 2.32 Chen e Han (1988) apresentam a combinação dos critérios de Tresca e von Mises num plano anti-esférico.

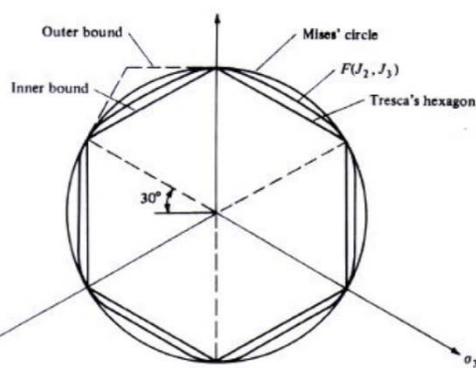


Fig. 2.32 – Critérios de Tresca e von Mises no plano anti-esférico (Chen e Han, 1988).

## 2.6.2 Modelos de Ruptura com Dois Parâmetros

Serão abordados nesse item um pouco de cada critério de critério com dois parâmetros.

### a) Critério de Mohr-Coulomb

Esse critério foi desenvolvido em 1900 e devido à semelhança com o critério de Tresca, pode ser considerado como sendo uma generalização do mesmo, pois também admite a tensão cisalhante como sendo o limite de tensão para que ocorra a falha do material. No entanto, enquanto o critério de Tresca considera que a tensão cisalhante limite é constante, o de Mohr-Coulomb aponta que essa é função da tensão normal para um ponto num plano, conforme apresentado na Eq. (2.77).

$$|\tau| = f(\sigma) \quad (2.77)$$

Onde:

$f(\sigma)$  = Função determinada experimentalmente.

Considerando um estado de tensões representado pelo círculo de Mohr, o critério sugere que a ruptura ocorrerá quando o raio do maior círculo principal tangenciar a função  $f(\sigma)$ , sendo que sua forma mais simples é uma linha reta. O conjunto formaria uma envoltória, ilustrada na Fig. 2.33.

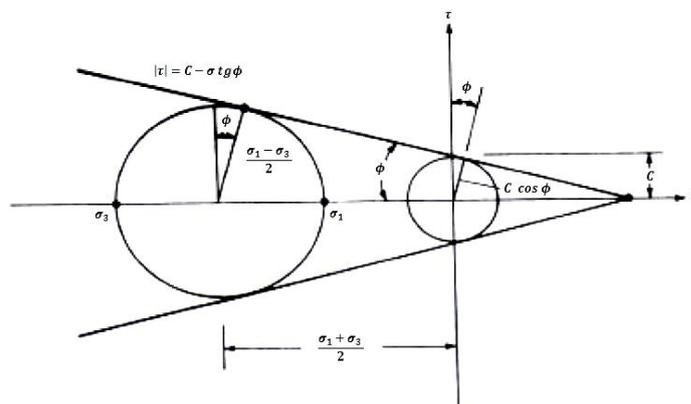


Fig. 2.33 – Critério de Mohr-Coulomb – Superfície de ruptura com as retas formando uma envoltória (Chen e Han, 1988).

A Eq. (2.78) é conhecida como Equação de Coulomb, desenvolvida em 1773.

$$|\tau| = c - \sigma \operatorname{tg} \phi \quad (2.78)$$

Onde:

$c$  = fator de coesão, constante determinada experimentalmente;

$\phi$  = ângulo de atrito interno do material, também é uma constante determinada a partir de experimentos.

Se o ângulo de fricção interno do material  $\phi$  for inexistente, ou seja,  $\phi=0$  a Eq. (2.78) se reduzirá ao critério de Tresca com  $\tau = c$ . Com isso, a coesão “ $c$ ” se tornaria idêntica à tensão de escoamento em cisalhamento puro  $c = \tau_{esc}$ .

Em termos de tensões principais com  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , a Eq. (2.78) pode ser escrita a partir da Eq. (2.79).

$$\sigma_1 \underbrace{\left( \frac{1 + \operatorname{sen} \phi}{2c \operatorname{cos} \phi} \right)}_{\frac{1}{f_c}} - \sigma_3 \underbrace{\left( \frac{1 - \operatorname{sen} \phi}{2c \operatorname{cos} \phi} \right)}_{\frac{1}{f_t}} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma_1}{f_c} - \frac{\sigma_3}{f_t} = 1 \quad (2.79)$$

Onde:

$f_c$  = resistência à compressão simples;

$f_t$  = resistência à tração simples.

A partir disso, um parâmetro “ $m$ ” adimensional poderia ser considerado como a relação entre  $f_c$  e  $f_t$ , como pode ser visto na Eq. (2.80).

$$m = \frac{f_c}{f_t} = \frac{1 + \operatorname{sen} \phi}{1 - \operatorname{sen} \phi} \quad (2.80)$$

A Eq. (2.78) pode então ser escrita na forma:

$$m\sigma_1 - \sigma_3 = f_c \quad (2.81)$$

Sendo que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Para os invariantes de tensão  $(I_1, J_2, \theta)$  ou  $(\xi, \rho, \theta)$ , a Equação de Coulomb é dada pelas Eqs. (2.82) e (2.83).

$$f(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (2.82)$$

$$f(\xi, \rho, \theta) = \sqrt{2} \xi \sin \phi + \sqrt{3} \rho \sin \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) + \rho \cos \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi - \sqrt{6} c \cos \phi = 0 \quad (2.83)$$

Sendo que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ .

Na Fig. 2.34 é realizada a representação gráfica da superfície de falha do critério de Mohr-Coulomb no espaço de tensões principais e possui a forma de um hexágono irregular no plano de Nadai ( $\pi$ ).

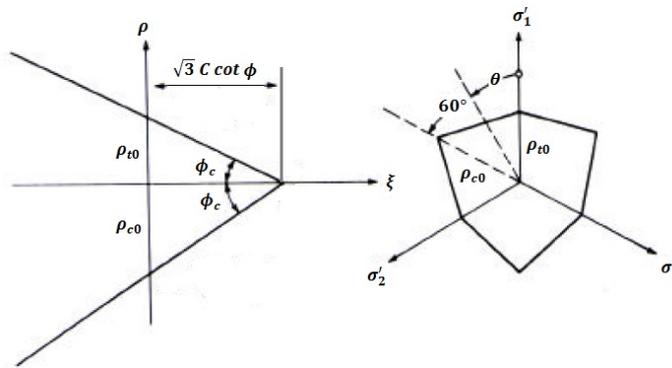


Fig. 2.34 – Meridianos no plano meridiano e seção transversal no plano de Nadai ( $\pi$ ) (Chen e Han, 1988).

Os valores para os pontos  $\rho_{c0}$  e  $\rho_{t0}$  são obtidos a partir da Eq. (2.80), sendo que:

- Para  $\xi = 0$ ,  $\theta = 0^\circ$ ,  $\rho = \rho_{t0}$ ;
- Para  $\xi = 0$ ,  $\theta = 60^\circ$ ,  $\rho = \rho_{c0}$ .

Portanto,  $\rho_{c0}$  e  $\rho_{t0}$  no plano de Nadai ( $\pi$ ) podem ser obtidos pelas Eqs. (2.84) e (2.85).

$$\rho_{t0} = \frac{2\sqrt{6} c \cos\phi}{3 + \sin\phi} = \frac{6 f_c(1 - \sin\phi)}{3 + \sin\phi} \quad (2.84)$$

$$\rho_{c0} = \frac{2\sqrt{6} c \cos\phi}{3 - \sin\phi} = \frac{6 f_c(1 - \sin\phi)}{3 - \sin\phi} \quad (2.85)$$

A Fig. 2.35 ilustra a superfície de ruptura para o caso tridimensional.

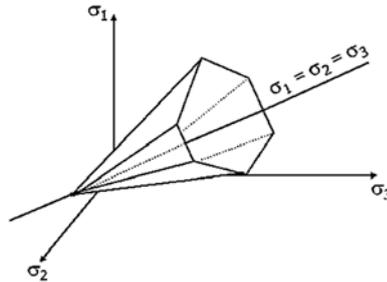


Fig. 2.35 – Critério de Mohr-Coulomb – Superfície de ruptura para o caso tridimensional.

### b) Critério de Drucker-Prager

O critério de Drucker-Prager, estabelecido em 1952, é considerado uma modificação do critério de von Mises com a introdução de uma componente de tensão hidrostática na fratura.

As equações de von Mises em função dos invariantes de tensão  $(I_1, J_2)$  ou  $(\xi, \rho)$ , com a inclusão do termo proposto no critério de Drucker-Prager são dadas pelas Eq. (2.86) e Eq. (2.87).

$$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (2.86)$$

$$f(\xi, \rho) = \sqrt{6}\alpha\xi + \rho - \sqrt{2}k = 0 \quad (2.87)$$

Onde:

$k$  e  $\alpha$  = são constantes do material.

Para  $\alpha = 0$ , o critério de Drucker-Prager se reduz ao critério de von Mises.

A partir da Eq.(2.85) a superfície de falha no espaço é definida com a forma de um cone circular. Os meridianos e a seção transversal no plano de Nadai ( $\pi$ ) são apresentados na Fig. 2.36.

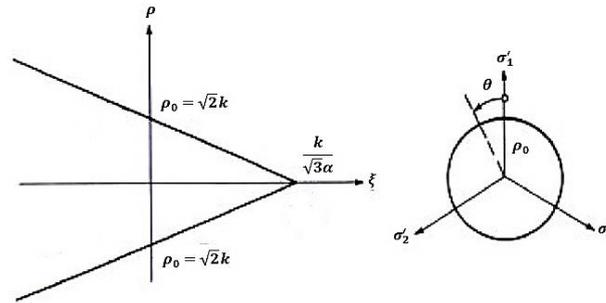


Fig. 2.36 – Meridianos do Critério de Drucker-Prager e seção transversal no plano de Nadai ( $\pi$ ) (Chen e Han, 1988).

Segundo Chen e Han (1988) como a superfície de falha de Mohr-Coulomb pode gerar certas dificuldades para a obtenção da solução numérica de alguns problemas devido a sua forma hexagonal. Por isso, o critério de Drucker-Prager pode ser adotado como uma aproximação para o critério de Mohr-Coulomb. Um exemplo dessa aplicação seria se as superfícies de ambos os critérios tivessem seus meridianos de compressão ( $\rho_c$ ) coincidentes.

As constantes  $\alpha$  e  $k$  poderiam ser obtidas em função das constantes  $c$  e  $\phi$  do material, para  $\theta = 60^\circ$  ou  $\theta = 0^\circ$  a partir das Eqs. (2.88) e (2.89), respectivamente.

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)}, \quad k = \frac{6c \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (2.88)$$

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 + \operatorname{sen} \phi)}, \quad k = \frac{6c \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 + \operatorname{sen} \phi)} \quad (2.89)$$

Dessa forma, seria possível obter um cone equivalente circunscrevendo a pirâmide hexagonal de Mohr- Coulomb, conforme mostra a Fig. 2.37.

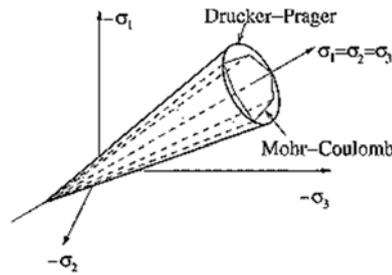


Fig. 2.37 – Drucker-Prager e Mohr-Coulomb ao longo do meridiano de compressão no espaço de tensões.

Considerando um estado biaxial de tensões, o critério de Drucker-Prager pode ser descrito pela Eq. (2.90) que representa a interseção do cone circular com a coordenada do plano para  $\sigma_3 = 0$ .

$$\alpha(\sigma_1 + \sigma_2) + \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} = k \quad (2.90)$$

Kmiecik e Kaminski (2011), ao contrário do que afirmam Chen e Han (1988), apontam o critério de Drucker-Prager como sendo uma das hipóteses que na maior parte das vezes é aplicada ao concreto. Afirmam que, a partir desse critério a falha é determinada por meio de uma superfície limitada num espaço de tensões na forma de um cone. E apontam, ainda, que a vantagem da utilização deste critério seria a redução das complicações nas aplicações numéricas, já que a superfície do limite se apresenta mais regular. E a desvantagem seria a falta de consistência em relação ao comportamento real do concreto.

### 2.6.3 Modelos de Ruptura com Três Parâmetros

#### a) Critério de Bresler-Pister

Bresler e Pister propuseram, em 1958, uma generalização da superfície de ruptura de Drucker-Prager para o concreto, considerando uma parábola dependente da tensão octaédrica cisalhante  $\tau_{oct}$  e da tensão normal octaédrica  $\sigma_{oct}$ . Suas seções no plano anti-esférico são independentes do ângulo de similaridade ( $\theta$ ).

A superfície de ruptura de Bresler-Pister pode ser descrita pela Eq. (2.91) a seguir.

$$\frac{\tau_{\text{oct}}}{f_c} = a - b \frac{\sigma_{\text{oct}}}{f_c} + c \left( \frac{\sigma_{\text{oct}}}{f_c} \right)^2 \quad (2.91)$$

Onde:

a, b e c = são parâmetros de falha do material obtidos por meio de ensaios experimentais.

Para as componentes principais, de acordo com Souza (2001), o critério de Bresler-Pister, leva em consideração as três resistências mais importantes quando se trata de ensaios realizados para o concreto, a resistência à tração uniaxial ( $f_t$ ), resistência à compressão uniaxial ( $f_c$ ) e a compressão biaxial ( $f_{bc}$ ) e propõe, com a obtenção das taxas de resistências do concreto normalizadas, as relações correspondentes considerando a tensão octaédrica cisalhante  $\tau_{\text{oct}}$  e tensão octaédrica  $\sigma_{\text{oct}}$  também normalizadas para a resistência a compressão do concreto, como pode ser visto na Tab. 2.1.

Tab. 2.1 - Componentes principais para o critério de Bresler-Pister

Dados de Ensaio Experimentais	$\frac{\sigma_{\text{oct}}}{f_c}$	$\frac{\tau_{\text{oct}}}{f_c}$
$\sigma_1 = f_t$	$\frac{1}{3} \bar{f}_t$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \bar{f}_t$
$\sigma_3 = -f_c$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\sigma_2 = \sigma_3 = -f_{bc}$	$-\frac{2}{3} \bar{f}_{bc}$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \bar{f}_{bc}$

Onde:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{f}_t = \frac{f_t}{f_c} \\ \bar{f}_{cb} = \frac{f_{bc}}{f_c} \end{array} \right\} = \text{taxas normalizadas de resistências do concreto} \quad (2.92)$$

Souza (2001) explica também que qualquer que seja a relação assumida para a tensão octaédrica cisalhante  $\tau_{oct}$  e tensão normal octaédrica  $\sigma_{oct}$ , a seção da superfície de ruptura no plano anti-esférico ocorrerá de forma circular.

Porém, essa característica contradiz os resultados experimentais obtidos em relação ao concreto em vários estudos, conforme exposto por Chen e Han (1988), que apontam que as seções das curvas de ruptura do concreto no plano anti-esférico se apresentariam quase triangulares para a região de tração e pequenas tensões de compressão e na forma abaulada, próxima a circular, para valores de tensões de compressão mais elevadas, para altas pressões hidrostáticas (acrécimo de  $\xi$ ).

### b) Critério de Willam-Warnke com Três Parâmetros

O critério de três parâmetros proposto por Willam e Warnke, em 1975, possui também uma relação entre tensão normal octaédrica ( $\sigma_{oct}$ ) e a tensão cisalhante octaédrica ( $\tau_{oct}$ ).

Porém essa relação é linear e, portanto, as seções transversais no plano anti-esférico não apresentam uma forma circular e são dependentes do ângulo de similaridade ( $\theta$ ), conforme ilustra a Fig. 2.38.

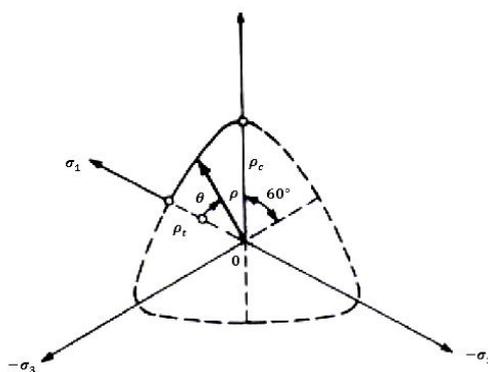


Fig. 2.38 – Seção da superfície de ruptura do critério de Willam- Warnke no plano anti-esférico (Chen e Han, 1988).

A partir de uma aproximação elíptica, obtêm-se uma superfície de ruptura na forma de um cone considerando o eixo hidrostático de referência.

E a partir da Eq. (2.93) é possível obter as distâncias  $\rho_c$  e  $\rho_t$  em função do ângulo de similaridade ( $\theta$ ), sendo que, quando  $\theta = 60^\circ$ ,  $\rho(60^\circ) = \rho_t$  e quando  $\theta = 0^\circ$ ,  $\rho(0^\circ) = \rho_c$ . Caso ambos se igualem, ou seja,  $\rho_t = \rho_c$  a seção de ruptura adquire uma forma circular e, com isso, pode-se dizer que o critério se reduz ao critério de Drucker-Prager.

$$\rho(\theta) = \frac{2 \rho_c (\rho_c^2 - \rho_t^2) \cos \theta + \rho_c (2\rho_t - \rho_c) [4(\rho_c^2 - \rho_t^2) \cos^2 \theta + 5\rho_t^2 - 4\rho_t \rho_c]^{\frac{1}{2}}}{4(\rho_c^2 - \rho_t^2) \cos^2 \theta + (\rho_c - 2\rho_t)^2} \quad (2.93)$$

Onde:

$$\cos \theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.94)$$

A superfície de ruptura de Willam- Warnke com três parâmetros pode ser também descrita em função da tensão normal média ( $\sigma_m$ ), da tensão média cisalhante ( $\tau_m$ ) e do ângulo de similaridade ( $\theta$ ), conforme apresentado na Eq. (2.95).

$$f(\sigma_m, \tau_m, \theta) = \frac{1}{\rho} \frac{\sigma_m}{f_c} + \frac{1}{\rho(\theta)} \frac{\tau_m}{f_c} - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\tau_m}{f_c} = \rho(\theta) \left( 1 - \frac{1}{\rho} \frac{\sigma_m}{f_c} \right) \quad (2.95)$$

Onde:

$$\sigma_m = \sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \xi \quad (2.96)$$

$$\tau_m^2 = \frac{3}{5} \tau_{\text{oct}}^2 = \frac{2}{5} J_2 = \frac{1}{5} \rho^2 \quad (2.97)$$

Ou pode ser escrito em função das tensões principais:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2.98)$$

$$\tau_m = \frac{1}{\sqrt{15}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.99)$$

Para o critério de Willam-Warnke é possível também levar em consideração as três resistências do concreto, a resistência à tração uniaxial ( $f_t$ ), resistência à compressão uniaxial ( $f_c$ ) e a compressão biaxial ( $f_{bc}$ ).

E obter, pelas componentes principais, as correspondentes relações para as taxas normalizadas pela resistência à compressão uniaxial do concreto, da tensão octaédrica cisalhante  $\tau_{oct}$  e tensão octaédrica  $\sigma_{oct}$ , conforme apresentado na Tab. 2.2.

Tab. 2.2 - Componentes principais para o critério de Willam-Warnke

Dados de Ensaios Experimentais	$\frac{\sigma_{oct}}{f_c}$	$\frac{\tau_{oct}}{f_c}$	$\theta$	$\rho(\theta)$
$\sigma_1 = f_t$	$\frac{1}{3} \bar{f}_t$	$\sqrt{\frac{2}{15}} \bar{f}_t$	$0^\circ$	$\rho_t$
$\sigma_3 = -f_c$	$-\frac{1}{3}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$60^\circ$	$\rho_c$
$\sigma_2 = \sigma_3 = -f_{bc}$	$-\frac{2}{3} \bar{f}_{bc}$	$\sqrt{\frac{2}{15}} \bar{f}_{bc}$	$0^\circ$	$\rho_t$

Os três parâmetros do critério são  $\rho$ ,  $\rho_t$  e  $\rho_c$ . e podem ser obtidos a partir dessas considerações. A Fig. 2.39 apresenta um esboço do critério de Willam-Warnke para um concreto de resistência característica.

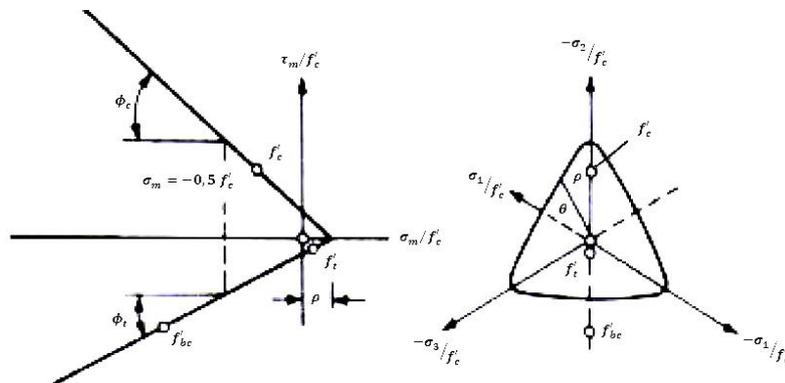


Fig. 2.39 – Critério de Willam- Warnke (Chen, 1982).

## 2.6.4 Modelos de Ruptura com Quatro Parâmetros

### a) Critério de Ottosen

O critério proposto por Ottosen, em 1977, considera uma superfície de ruptura com meridianos curvos e a seção transversal no plano anti-esférico não circular, a partir dos invariantes de tensão  $I_1$ ,  $J_1$  e  $\theta$  conforme apresentado Eq.(2.100).

$$f(I_1, J_1, \theta) = \alpha J_2 + \lambda \sqrt{J_2} + b I_1 - 1 = 0 \quad (2.100)$$

Onde:

$\lambda$  = é obtido em função de  $3\theta$ , conforme mostra Eq. (2.101);

$a, b$  = constantes do material.

$$\lambda = \begin{cases} k_1 \cos \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1}(k_2 \cos 3\theta) \right] & \text{para } \cos 3\theta \geq 0 \\ k_1 \cos \left[ \frac{\pi}{3} \cos^{-1}(-k_2 \cos 3\theta) \right] & \text{para } \cos 3\theta \leq 0 \end{cases} \quad (2.101)$$

Onde:

$k_1$  e  $k_2$  = constantes do material.

De acordo com Chen e Han (1988), os meridianos formam parábolas quadráticas que são convexas se  $a > 0$  e  $b > 0$ . A seção transversal da superfície de ruptura no plano anti-esférico possui propriedade simétrica e convexa e sua forma se apresenta próxima a triangular, se aproximando, porém, a uma forma circular na medida em que se aumenta a pressão hidrostática. Para  $a=b=0$  e  $\lambda$ =constante o critério de ruptura de Ottosen se reduziria ao critério de von Mises, e para  $a=0$  e  $\lambda$ =constante, se reduziria ao critério de Drucker-Prager.

Para determinar os quatro parâmetros do critério de ruptura de Ottosen, segundo Chen e Han (1988), seria necessário considerar alguns ensaios que são geralmente realizados para o concreto:

- Uniaxial de compressão com  $f_c(\theta = 60^\circ)$ ;

- Uniaxial de tração com  $f_t(\theta = 0^\circ)$ ;
- Biaxial de compressão  $f_{bc}(\theta = 0^\circ)$ , mais especificamente para  $\sigma_1 = \sigma_2 = -1,16f_c$  e  $\sigma_3 = 0$ , que corresponde a  $f_{bc} = 1,16f_c$  obtido por Kupfer (1969) apud Chen e Han (1988);
- E o estado de tensão triaxial, considerando  $(\xi/f_c; \rho/f_c) = (-5; 4)$  no meridiano de compressão ( $\theta = 60^\circ$ ) a partir dos melhores resultados obtidos em Balmer (1949)<sup>1</sup> e Richart et al. (1928)<sup>2</sup> apud Chen e Han (1988).

A partir dos dados obtidos nesses ensaios, segundo Chen e Han (1988), obtêm-se os parâmetros dependentes de  $\bar{f}_t = \frac{f_t}{f_c}$ , conforme disposto na Tab. 2.3.

Tab. 2.3 – Parâmetros do critério de ruptura de Ottosen

$\bar{f}_t = \frac{f_t}{f_c}$	a	b	$k_1$	$k_2$
0,8	1,8076	4,0962	14,4863	0,9914
0,10	1,2759	3,1962	11,7365	0,9801
0,12	0,9218	2,5969	9,9110	0,9647

### b) Critério de Hsieh-Ting-Chen

O critério de ruptura para o concreto proposto por Hsieh *et al.* considera uma função simples conforme disposto na Eq. (2.102).

$$\boxed{\lambda(\theta) = b \cos\theta + c} \quad \text{Para } |\theta| \leq 60^\circ \quad (2.102)$$

Onde:

$b, c$  = constantes do material.

<sup>1</sup> BALMER, G.G. Shearing Strength of Concrete Under High Triaxial Stress – Computation of Mohr’s Envelope as a Curve. Structural Research Laboratory Report. Denver, Colorado, October, 1949.

<sup>2</sup> RICHART, F.E., A. Brandtzaeg e R., L. Brown. A Study of the Failure of Concrete Under Combined Compressive Stress. University of Illinois Engineering Experimental Station Bulletin 185, 1928.

No entanto, para o espaço de tensões de Haigh-Westergaard, a Eq. (2.95) pode ser escrita em função de  $\xi$ ,  $\rho$  e  $\theta$ , como mostrado na Eq. (2.103).

$$f(\xi, \rho, \theta) = a\rho^2 + (b \cos \theta + c)\rho + d\xi - 1 = 0 \quad (2.103)$$

Onde:

$a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  = constantes do material.

Em termos dos invariantes de tensão tem-se a Eq. (2.104).

$$f(I_1, J_2, \sigma_1) = AJ_2 + B\sqrt{J_2} + C\sigma_1 + DI_1 - 1 = 0 \quad (2.104)$$

Onde:

$A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  = são quatro novas constantes.

Normalizando a Eq. (2.104) para a resistência à compressão uniaxial  $f_c$  tem-se:

$$f(I_1, J_2, \sigma_1) = A\frac{J_2}{f_c} + B\frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + C\frac{\sigma_1}{f_c} + D\frac{I_1}{f_c} - 1 = 0 \quad (2.105)$$

Da mesma forma que no critério de Ottosen, para obter os quatro parâmetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , de acordo com Chen e Han (1988), o critério de ruptura de Hsieh-Ting-Chen teria que considerar alguns ensaios biaxiais e triaxiais que são geralmente realizados para o concreto. Portanto, os seguintes ensaios seriam necessários:

- Uniaxial de compressão com  $f_c$ ;
- Uniaxial de tração com  $f_t = 0,1f_c$ ;
- Biaxial de compressão  $f_{bc} = 1,15f_c$

- E o estado de tensão triaxial, considerando  $(\sigma_{otc}/f_c; \tau_{otc}/f_c) = (-1,95; 1,6)$  no meridiano de compressão ( $\theta = 60^\circ$ ) a partir dos melhores resultados obtidos em Mills e Zimmerman (1970)<sup>3</sup> apud Chen e Han (1988).

Os valores para as novas constantes A, B, C e D poderiam, então, ser obtidos.

## 2.6.5 Modelos de Ruptura com Cinco Parâmetros

### a) Critério de Willam-Warnke com Cinco Parâmetros

O critério de ruptura de Willam-Warnke com cinco parâmetros para o concreto é um modelo com meridianos de compressão e tração curvos na forma de parábolas quadráticas. As Eq. (2.106) e (2.107) descrevem esses meridianos.

$$\sigma_m = a_0 + a_1\rho_t + a_2\rho_t^2 \quad (\theta = 0^\circ) \quad (2.106)$$

$$\sigma_m = b_0 + b_1\rho_c + b_2\rho_c^2 \quad (\theta = 60^\circ) \quad (2.107)$$

Onde:

$\sigma_m = I_1/3 =$  tensão média;

$\rho_t$  e  $\rho_c =$  componentes de tensão perpendiculares ao eixo hidrostático;

$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1$  e  $b_2 =$  constantes do material.

Considerando que os meridianos se interceptam no mesmo ponto ( $a_0=b_0$ ) do eixo hidrostático o número de parâmetros se reduz a cinco que podem ser determinados também a partir de alguns resultados de ensaios, conforme disposto na Tab. 2.4.

Tab. 2.4 - Componentes principais para o critério de Willam-Warnke de cinco parâmetros

---

<sup>3</sup> MILLS, L.L.,R.M. Zimmerman. Compressive Strength of Plain Concrete Under Multiaxial Loading Conditions. ACI Journal 67, p. 802-807, 1970.

Dados de Ensaios Experimentais	Falha no ponto		
	$\sigma_m$	$\rho$	$\theta$
$\sigma_1 = f_t$	$\frac{1}{3} f_t$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} f_t$	$0^\circ$
$\sigma_3 = -f_c$	$\frac{1}{3} f_c$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} f_c$	$60^\circ$
$\sigma_2 = \sigma_3 = -f_{bc}$	$-\frac{2}{3} f_{bc}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} f_{bc}$	$0^\circ$
$-f_{bc}$ confinada com ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ )	$\sigma_{mt}$	$\rho_t$	$0^\circ$
$-f_{bc}$ confinada com ( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ )	$\sigma_{mc}$	$\rho_c$	$60^\circ$

A Eq. (2.93) descreve a superfície de ruptura do critério de Willam-Warnke.

Chen e Han (1988) citam alguns casos especiais como para  $\rho_t/\rho_c = 1$ , ou seja,  $a=b$  a seção da superfície de ruptura em forma de elipse apresentado na Fig. 2.38 se transformaria em um círculo semelhante à seção do critério de von Mises. E para  $\rho_t/\rho_c = 1/2$ , ou  $a/b$  se aproximando do infinito a seção da superfície de ruptura no plano anti-esférico apresentaria uma forma triangular similar ao critério de Rankine.

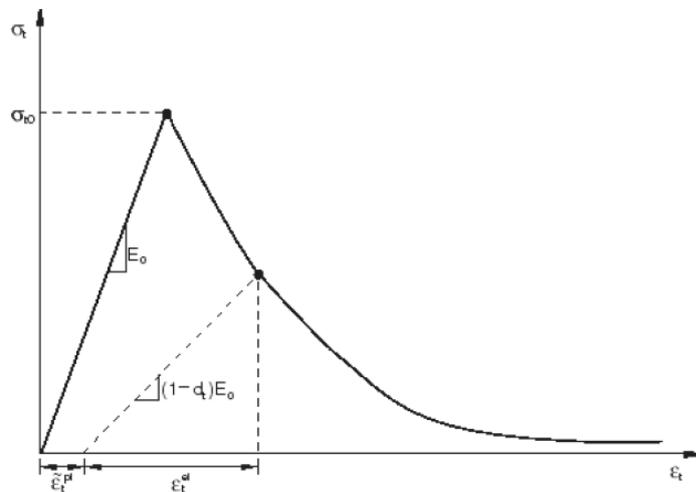
## 2.7 Modelo de Dano Plástico

O modelo constitutivo a ser adotado, no presente estudo, para a análise de alguns elementos em concreto armado pelo MEF, disponível no software Abaqus, é denominado CDP (Concrete Damage Plasticity). Esse modelo foi proposto por Lubliner *et al.* (1989) baseado na Teoria da Plasticidade e também na Mecânica do Dano Contínuo e modificado por Lee & Fenves (1998). Os conceitos de tensões efetivas da Mecânica do Dano são incorporados num modelo plástico para representar da perda da rigidez.

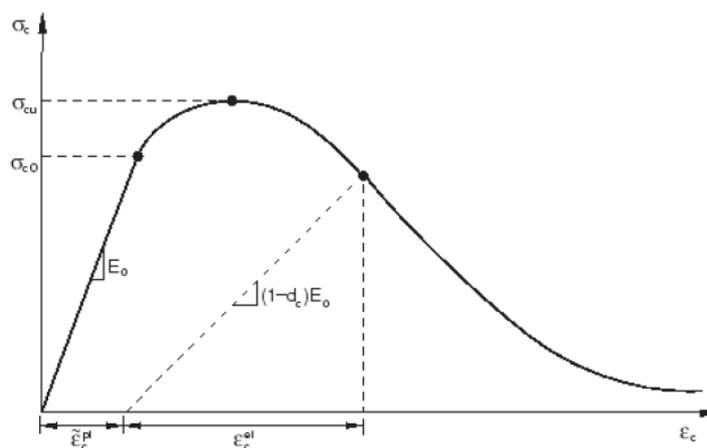
Os conceitos relacionados com o comportamento do concreto danificado e as relações constitutivas para o estado uniaxial de tensões são abordados a seguir com o objetivo de compreender melhor o modelo constitutivo adotado no estudo.

A danificação do concreto, conforme aponta Souza (2001), pode geralmente ser dividida em dois tipos. O primeiro, em relação à perda de resistência à tração na direção normal a formação das fissuras. E o segundo, em relação a perda de resistência à compressão, devido a formação de várias fissuras de pequenos tamanhos, paralelas ao esforço de compressão, provocando o esmagamento do material.

A danificação do concreto em relação à perda de resistência à tração, e em relação a perda de resistência à compressão, é caracterizada independentemente, conforme mostra a Fig. 2.40.



(a)



(b)

Fig. 2.40 – Respostas do concreto submetido à carga uniaxial (a) de tração (b) de compressão (Tutorial Abaqus<sup>®</sup>, 2010).

Como se pode ver na Fig. 2.40, a evolução da superfície de ruptura é controlada por duas variáveis,  $\tilde{\epsilon}_t^{pl}$  e  $\tilde{\epsilon}_c^{pl}$ , correspondente aos mecanismos de danificação devido à perda de resistência à tração e devido à perda de resistência à compressão, respectivamente.

Esse modelo assume que, tanto a resposta do concreto quando submetido à carga de tração quanto de compressão, é caracterizada pelo dano plástico. Ou seja, para a tração o comportamento do material é elástico linear até a tensão de falha na tração  $\sigma_{t0}$ . Após esse ponto, ocorre o surgimento de microfissuras, representado pelo declive, também chamado de amolecimento da curva tensão-deformação, que indica a perda de resistência. Para a compressão também ocorre uma resposta linear até a tensão de escoamento  $\sigma_{c0}$  e, posteriormente, o comportamento plástico é tipicamente caracterizado pelo endurecimento até a tensão última  $\sigma_{cu}$ , seguida do amolecimento representado na curva tensão-deformação.

Os conceitos da Mecânica do Dano devem considerados para melhor compreensão das respostas do concreto para tensão uniaxial de tração e de compressão.

Esses conceitos, adotados no modelo de dano isotrópico, propõe que o comportamento mecânico para as falhas é o mesmo, independentemente da direção, governado por uma variável escalar, denominada variável de dano “d”.

A variável de dano pertence ao intervalo  $0 \leq d \leq 1$ , sendo 0 (zero) para estado integro e 1 (um) para degradação completa. Com isso, para uma seção transversal de um elemento danificado, a variável de dano é definida conforme Eq. (2.108)

$$d = \frac{A_d}{A} \quad (2.108)$$

Onde:

$A_d$  = Área da seção transversal com defeitos;

$A$  = Área total da seção transversal.

Sendo assim, a área efetiva pode ser obtida pela Eq. (2.109).

$$\boxed{\tilde{A} = A - A_d} \rightarrow \boxed{A_d = A - \tilde{A}} \quad (2.109)$$

E os valores de tensão aparente, considerando a área total e tensão efetiva e levando-se em conta a área efetiva, podem ser definidos para um elemento unidimensional com carregamento axial F conforme Eqs. (2.110) e (2.111), respectivamente:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.110)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{A}} \quad (2.111)$$

Substituindo-se a Eq.(2.109) na Eq.(2.108) tem-se:

$$d = \frac{A - \tilde{A}}{A} \Rightarrow d = \frac{A}{A} - \frac{\tilde{A}}{A} = 1 - \frac{\tilde{A}}{A} \Rightarrow \boxed{\frac{\tilde{A}}{A} = 1 - d} \quad (2.112)$$

A partir da relação entre a tensão aparente e tensão efetiva é possível expressar a tensão aparente ( $\sigma$ ) a partir da variável de dano, conforme apresentado na Eq.(2.113).

$$\frac{\sigma}{\tilde{\sigma}} = \frac{\tilde{A}}{A} \Rightarrow \frac{\tilde{A}}{A} = 1 - d \Rightarrow \boxed{\sigma = (1 - d) \cdot \tilde{\sigma}} \quad (2.113)$$

Conforme proposto por Lemaitre e Chaboche (1978), o conceito de tensão efetiva pode ser aplicado. Tal conceito no qual se considera que a deformação num estado danificado quando submetido à tensão aparente ( $\sigma$ ), é equivalente a deformação quando submetido à tensão efetiva ( $\tilde{\sigma}$ ) e. Fazendo-se essa igualdade, obtêm-se o módulo de elasticidade degradado, como pode ser visto na Eq. (2.114).

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E_d}} \cong \boxed{\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E}} \Rightarrow E_d = (1 - d) \cdot E \quad (2.114)$$

Onde:

$E$ = módulo de elasticidade intacto;

$E_d$ =módulo de elasticidade degradado.

Retomando às curvas tensão-deformação, pode-se dizer que após atingir a deformação plástica, no momento em que ocorre perda da rigidez, ou seja, redução do módulo de elasticidade inicial  $E_0$ , houve danificação do material. Portanto, tem-se:

$$E_d = (1 - d) \cdot E_0 \quad (2.115)$$

Já a deformação, pode ser decomposta em elástica e plástica, conforme Eq. (2.116).

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \tilde{\varepsilon}^{pl} \quad (2.116)$$

Onde:

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}$$

A partir disso, obtém-se a relação tensão-deformação apresentada da Eq. (2.117) a seguir.

$$\sigma = (1 - d) \cdot E_0(\varepsilon^e + \tilde{\varepsilon}^{pl}) \quad (2.117)$$

Considerando a relação existente entre tensão aparente e efetiva apresentada na Eq. (2.113), pode-se reescrever a Eq. (2.117) separando-se, ainda, nas parcelas de tração e compressão, como pode ser visto a seguir.

$$\tilde{\sigma}_t = \frac{\sigma_t}{(1-d_t)} = E_0(\varepsilon_t^{el} + \tilde{\varepsilon}_t^{pl}) \quad (2.118)$$

$$\tilde{\sigma}_c = \frac{\sigma_c}{(1-d_c)} = E_0(\varepsilon_c^{el} + \tilde{\varepsilon}_c^{pl}) \quad (2.119)$$

Para o estado multiaxial de tensões, ou seja, para o concreto submetido a tensões de confinamento laterais, conforme apontado no item 2.1.1, ocorre um considerável nível de

ductilidade antes da ruptura. Para tais estados mais complexos de tensões, as formulações apresentadas no item 2.3 são importantes para prever o comportamento do material.

De acordo com Oller *et al.* (1988), resultados experimentais que confirmam o comportamento não linear do concreto se deve fundamentalmente a um fenômeno de microfissuração a baixos níveis de tensão, que leva a perda de coesão entre partículas, no qual somente se pode recuperar pequena parte da deformação total desenvolvida.

Podendo-se, assim, fracionar deformação em uma parte recuperável e outra não recuperável. Essa situação indica, conforme demonstrado acima a partir das curvas tensão deformação, que a teoria da plasticidade pode descrever o comportamento de uma estrutura de concreto.

Para um melhor entendimento do modelo constitutivo de dano plástico proposto em Lubliner *et al.* (1989), é importante também abordar conceitos em relação a regra do escoamento plástico que são apresentados a seguir.

A regra do escoamento plástico permite determinar a evolução das deformações na estrutura a partir de incrementos de deformação plástica, à medida que o carregamento é aplicado, e são obtidos por meio da derivada de uma função potencial (G).

A função potencial G é uma função escalar do tensor de tensões e, por meio dessa, os incrementos de deformação plástica podem ser determinados por derivadas parciais em relação aos componentes do tensor de tensões, conforme mostrado na Eq. (2.120) a seguir.

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\gamma \frac{dG}{d\sigma_{ij}} \quad (2.120)$$

Onde:

$d\gamma$ =constante de proporcionalidade maior que zero, denominado multiplicador plástico.

A regra de escoamento, conforme exposto em Sarturi (2014), pode ser classificada em associativa ou não associativa. A primeira, geralmente ocorre para materiais dúcteis, ocorre quando o potencial plástico coincide com a função de escoamento, ou seja,  $G=F$ . A segunda,

para materiais granulares, quando o potencial plástico não coincide com a função de escoamento, ou seja,  $G \neq F$ . A Fig. 2.41 ilustra os dois tipos.

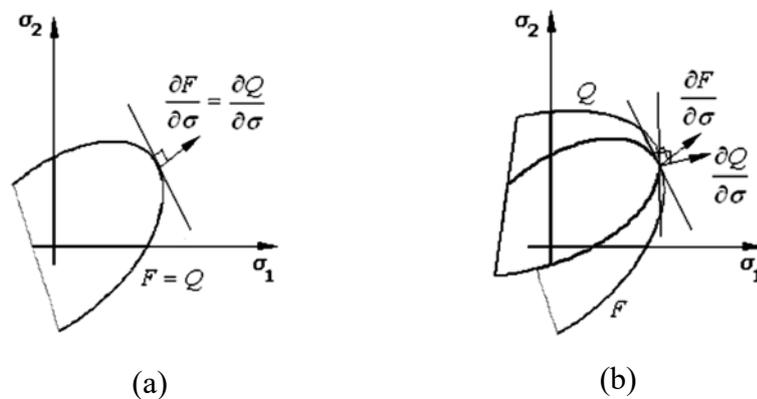


Fig. 2.41 – Regra de escoamento plástico (a) associativa (b) não associativa (Adaptado de Sarturi, 2014)

O modelo proposto por Lubliner *et al.* (1989) de dano plástico para simular o comportamento multiaxial de tensões do concreto considera que a deformação plástica representa todas as deformações irreversíveis, até mesmo as causadas pela fissuração. Esse modelo é também conhecido como modelo de Barcelona.

Considerando-se que é possível estabelecer um critério de falha a partir de uma função do estado de tensões, nesse modelo, a coesão deve ser estabelecida através dessa função que pode ser escrita na forma geral como:

$$F(\sigma, c) = f(\sigma) - c = 0 \quad (2.121)$$

Onde:

$c$  = Coesão

$f(\sigma)$  – Também chamada de função de escoamento, é uma função escalar homogênea de primeira ordem em relação às componentes do tensor de tensões de Cauchy, que permite definir a coesão “ $c$ ”, como uma função de endurecimento plástico.

Esse mesmo, critério se aplica para os modelos de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager que também levam em conta a coesão do material em suas equações, conforme já mencionado item 2.4. Porém, como já apontado no item citado, os mesmos não descrevem bem o comportamento do concreto.

O modelo proposto por Lubliner *et al.* (1989) de dano plástico define o valor inicial da coesão  $c$ , como sendo a tensão de escoamento em um ensaio de compressão uniaxial ( $\sigma_{c0}$ ) e a regra de encruamento da Teoria Clássica da Plasticidade é substituída por uma variável de dano-plástico, chamada no presente trabalho de  $d_p$ . Essa variável é escalar e baseada nos conceitos de energia da fratura. É similar a variável de dano no caso uniaxial e é crescente conforme ocorre a deformação plástica. Sendo assim, nesse modelo, todos os estados de danificação são representados pela variável  $d_p$ , sejam eles deformações permanentes ou fissuras no material.

Com isso, pode-se dizer que quando a coesão ( $c$ ) for igual a tensão de escoamento em um ensaio de compressão uniaxial ( $\sigma_{c0}$ ), significa que não haverá dano, ou seja, a variável de dano-plástico ( $d_p$ ) será igual a zero. A coesão é dependente do processo de carregamento, assumida como uma variável interna que, diferente dos modelos clássicos da teoria da plasticidade com encruamento isotrópico, não é uma função simples do dano  $d_p$ . É governada por uma taxa  $\dot{c}$  que é proporcional a taxa de dano  $\dot{d}_p$ , representada pela Eq. (2.122) a seguir.

$$\dot{d}_p = h^T(\sigma, c, d)\varepsilon^{\dot{p}l} \quad (2.122)$$

Onde:

$\varepsilon^{\dot{p}l}$  = Taxa de deformação plástica obtida a partir de um fator de carregamento  $\dot{\lambda}$  e do gradiente de deformação plástica  $\frac{\partial G}{\partial \sigma}$ , conforme mostra a Eq. (2.123).

$$\varepsilon^{\dot{p}l} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (2.123)$$

Já a taxa de coesão é representada a partir da Eq.(2.124).

$$\dot{c} = d_p(\sigma, c, d)\dot{d}_p \quad (2.124)$$

O critério de Drucker Prager, abordado no item 2.6.2, é um dos modelos clássicos da teoria da plasticidade, sendo que sua superfície de falha apresenta a forma de um cone circular

tendendo a um cilindro quando o eixo hidrostático tende ao infinito. A Eq. (2.86) corresponde à representação dessa superfície.

$$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k \quad (2.86)$$

Onde:

$k$  e  $\alpha$  = são constantes do material.

$I_1$ =Primeiro invariante do tensor de tensões.

$J_2$ =Segundo invariante do tensor desviador de tensões.

Considerando a exclusão das regiões de alta pressão, a equação pode ser reescrita na seguinte forma, conforme proposto em Lubliner *et al.* (1989).

$$f(\sigma) = \frac{1}{1 - \alpha} [\alpha I_1 + \sqrt{3} J_2 + \beta(\sigma_{\text{máx}}) - \gamma(-\sigma_{\text{máx}})] \quad (2.125)$$

Onde:

$\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ =Constantes adimensionais do material.

$I_1$  = Primeiro invariante de tensões.

$J_1$ = Segundo invariante de tensões no plano desviador.

$\sigma_{\text{máx}}$ =Valor algébrico máximo das tensões principais (se  $\sigma_{\text{máx}}=0$ , para o caso de compressão biaxial, por exemplo, a Eq.(2.125) se reduz ao critério de Drucker Prager).

A constante adimensional  $\alpha$  pode ser obtida a partir a Eq. (2.126).

$$\alpha = \frac{\left(\frac{f_{bc0}}{f_{c0}}\right) - 1}{2\left(\frac{f_{bc0}}{f_{c0}}\right) - 1} \quad (2.126)$$

Onde:

$f_{bc0}$ =Tensão de escoamento inicial do concreto no estado biaxial de tensões.

$f_{c0}$ = Tensão de escoamento inicial do concreto no estado uniaxial de tensões.

Resultados confiáveis em relação ao estado biaxial e uniaxial de tensões do concreto são os obtidos por Kupfer (1969) que apresentou uma aproximação com uma equação elíptica para a resistência à compressão uniforme biaxial  $f_{bc}$  igual a  $1,16248 f_c$ . De acordo com Lubliner *et al.* (1989), valores experimentais indicam uma variação entre 1.10 e 1.16 para a relação  $f_{bc} / f_c$ . Sendo assim,  $\alpha$  apresentará valores entre 0,08 e 0,12.

Uma vez que  $\alpha$  é conhecido é possível obter também a constante  $\beta$  conforme mostra a Eq.(2.127).

$$\beta = (1 - \alpha)(f_{c0}/f_{t0}) - (1 + \alpha) \quad (2.127)$$

Já a constante adimensional  $\gamma$ , conforme apontado em Lubliner *et al.* (1989), aparece apenas para o caso de compressão triaxial, no estado de tensão com  $\sigma_{m\acute{a}x} < 0$ .

Denotando-se TM para os meridianos de tração na superfície de escoamento, no qual ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ), e CM para os meridianos de compressão na superfície de escoamento, no qual ( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ), os mesmos podem ser representados, respectivamente, a partir das equações seguintes.

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{1}{3}(I_1 + 2\sqrt{3J_2}) \quad (\text{TM}) \quad (2.128)$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{1}{3}(I_1 + \sqrt{3J_2}) \quad (\text{CM}) \quad (2.129)$$

Para  $\sigma_{m\acute{a}x} < 0$  as equações para cada meridiano são dadas conforme mostrado a seguir.

$$(2\gamma + 3)\sqrt{3J_2} + (\gamma + 3\alpha)I_1 = (1 - \alpha)f_{crit} \quad (\text{TM}) \quad (2.130)$$

$$(\gamma + 3)\sqrt{3J_2} + (\gamma + 3\alpha)I_1 = (1 - \alpha)f_{crit} \quad (\text{CM}) \quad (2.131)$$

Onde:

$f_{crit}$  = tensão crítica na compressão uniaxial, sendo a tensão de escoamento para a superfície de escoamento e tensão de ruptura para a superfície de falha.

Considerando a razão entre o segundo invariante do tensor desviador para os meridianos de tração e o segundo invariante do tensor desviador para os meridianos de compressão, tem-se:

$$K_c = \frac{(\sqrt{J_2})_{TM}}{(\sqrt{J_2})_{CM}} \quad \text{para um dado } I_1 \quad (2.132)$$

Substituindo as Eqs. (2.130) e (2.131) na Eq.(2.132) tem-se:

$$K_c = \frac{\gamma+3}{2\gamma+3} \quad (2.133)$$

A razão entre a distância do eixo hidrostático ao meridiano de tração e de compressão no plano desviador corresponde à interpretação física para  $K_c$ , que é uma constante.

No modelo constitutivo do Abaqus® (CDP), baseado no modelo proposto em Lubliner *et al.* (1989), essa constante varia entre 0,5 e 1. Quando assume o valor igual a 1, a seção transversal da superfície de falha no plano anti-esférico passa a ter a forma de um círculo, como no critério clássico de Drucker-Prager.

A partir da Eq.(2.133) é possível obter o parâmetro  $\gamma$ , conforme apresentado a seguir.

$$\gamma = \frac{3(1-K_c)}{2K_c-1} \quad (2.134)$$

As severas deformações plásticas que geralmente ocorre em materiais granulares como o concreto, no modelo constitutivo proposto por Lubliner *et al.* (1989) são reproduzidas pela função potencial plástica clássica de Mohr-Coulumb. Tal função, que é determinada na definição da regra do escoamento, é do tipo associativa e é dada pela Eq.(2.135).

$$G(\bar{\sigma}, \psi) = \frac{I_1}{3} \text{sen}\psi + \sqrt{J_2} \left( \cos\theta - \frac{\text{sen}\theta \text{sen}\psi}{\sqrt{3}} \right) \quad (2.135)$$

Onde:

$\psi$ =ângulo de dilatação (o ângulo de atrito  $\phi$  foi substituído pelo ângulo de dilatação).

A variável de dano plástico ( $d_p$ ) é definida a partir de resultados obtidos para ensaios de tração-compressão uniaxial por meio da área das curvas tensão-deformação plástica, conforme mostrado na Fig. 2.42, a e b, e Eqs. (2.136) e (2.137) a seguir.

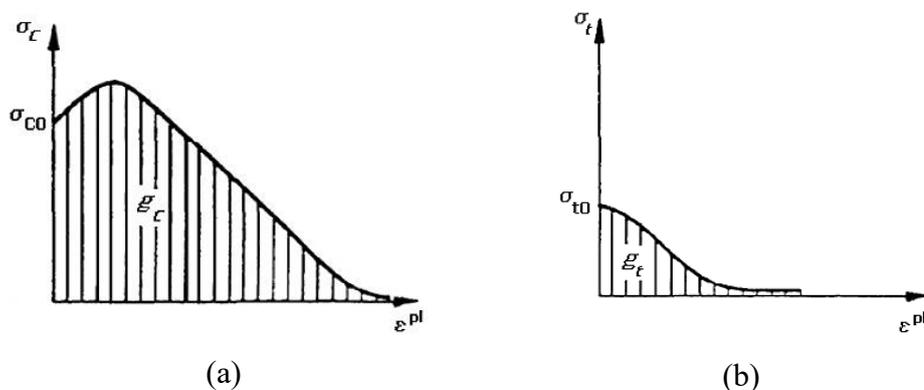


Fig. 2.42 – Curvas tensão-deformação plástica (a) na compressão e (b) na tração (Adaptado de Sarturi, 2014)

$$d_p = \frac{1}{g_c} \int_0^{\varepsilon^{pl}} \sigma d\varepsilon^p \quad (2.136)$$

$$d_p = \frac{1}{g_t} \int_0^{\varepsilon^{pl}} \sigma d\varepsilon^p \quad (2.137)$$

Sendo assim, pode-se dizer que  $d_p$  é uma variável independente do dano.

Lee & Fenves (1998), no entanto, propõem algumas modificações no modelo de Barcelona proposto em Lubliner *et al.* (1989). Essas modificações foram propostas com o intuito de adaptar o modelo para o comportamento do concreto submetido a cargas cíclicas, considerando que o anterior não se apresentava adequado para a realização de tais análises.

Uma das causas está relacionada com a utilização da variável de dano para representar tanto a tração quanto a compressão. Como para cargas cíclicas o concreto tende a ser submetido a diversos tipos de danificações, a utilização de uma variável apenas para representar o dano se torna inapropriada.

Afim de eliminar as dificuldades apresentadas no modelo proposto em Lubliner *et al.* (1989), chamado modelo de Barcelona, Lee & Fenves (1998) propõe a utilização de duas variáveis de

dano plástico, sendo uma para tração e outra para compressão, representada pelo vetor a seguir.

$$\bar{d}_p = \begin{cases} d_{pt} \\ d_{pc} \end{cases} \quad (2.138)$$

De acordo com Lee & Fenves (1998), a superfície de ruptura definida originalmente em Lubliner *et al.* (1989) representa o encruamento isotrópico da teoria clássica da plasticidade, apresentando bons resultados para cargas monotônicas. Porém, para o comportamento cíclico do concreto não é apropriado devido a evolução da resistência de endurecimento afetadas por outras resistências. Melhor dizendo, a resistência de tração e compressão possuem influências entre si. Com isso, é necessário considerar também duas variáveis de coesão, uma para tração e outra para compressão, conforme equações a seguir.

$$c_t = \sigma_t(d_{pt}) \quad (2.139)$$

$$c_c = -\sigma_c(d_{pc}) \quad (2.140)$$

A superfície de falha passa a ser então representada pela equação a seguir, em função não somente da tensão como também da variável de dano plástico.

$$f(\sigma, \bar{d}_p) = \frac{1}{1 - \alpha} [\alpha I_1 + \sqrt{3} J_2 + \beta(\bar{d}_p)(\sigma_{m\acute{a}x}) - c_c(\bar{d}_p)] \quad (2.141)$$

A função potencial plástica hiperbólica de Drucker-Prager passa a definir a regra de escoamento e é dada pela Eq.(2.135).

$$G = \sqrt{(\sigma_{c0} - \epsilon \sigma_{t0} \cdot \text{tg}\psi)^2 + \rho^2} - \xi \cdot \text{tg}\psi - \sigma \quad (2.142)$$

Onde:

$\sigma_{t0}$  e  $\sigma_{c0}$ =tensões resistentes de tração e compressão do concreto, respectivamente;

$\psi$ =ângulo de dilatação medido no plano meridional  $\xi - \rho$  em altas pressões confinantes;

$\epsilon$ =excentricidade da superfície potencial plástica, que não coincide com a superfície de escoamento, ou seja, é não associativa.

A figura a seguir ilustra a função potencial plástica linear e hiperbólica de Drucker-Prager.

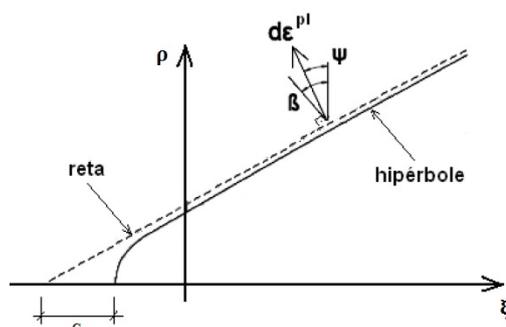


Fig. 2.43 – Função potencial plástica linear e hiperbólica de Drucker-Prager (Adaptado de Sarturi, 2014)

O ângulo de dilatação  $\psi$  corresponde a inclinação entre a direção do incremento de deformação plástica e a direção vertical, fisicamente interpretado como ângulo de atrito interno do concreto. A superfície potencial plástica no plano meridional ( $\xi - \rho$ ), que assume a forma de uma hipérbole, é ajustada através de um fator denominado “Excentricidade Potencial Plástica ( $\epsilon$ )”, que é um valor pequeno e positivo e representa a taxa de aproximação da hipérbole potencial plástica em relação a sua assíntota.

### 2.7.1 Modelo Constitutivo de Dano Plástico (CDP) - Abaqus®

O modelo CDP (Concrete Damage Plasticity), de acordo com o tutorial do software Abaqus®, baseia-se na suposição escalar de danos (isotrópico) e é indicado para aplicações nas quais o elemento em concreto é submetido a condições de carga arbitrárias, incluindo cargas cíclicas. O modelo leva em consideração a degradação da rigidez elástica induzida por deformação plástica, tanto para tensões de tração quanto para tensões de compressão. Além disso, descreve o comportamento do concreto em relação aos efeitos de rigidez após a recuperação sob carregamento cíclico.

De acordo com Kmiecik e Kamiński (2011), e conforme já abordado e também disponível no tutorial do software Abaqus®, a razão entre a distância do eixo hidrostático ao meridiano de tração e de compressão no plano desviador corresponde ao parâmetro denominado  $K_c$ . No modelo constitutivo do Abaqus® CDP essa constante varia entre 0,5 e 1. Quando assume o valor igual a 1 (um), a seção transversal da superfície de falha no plano anti-esférico passa a

ter a forma de um círculo, como no critério clássico de Drucker-Prager, conforme apresentado na Fig. 2.44.

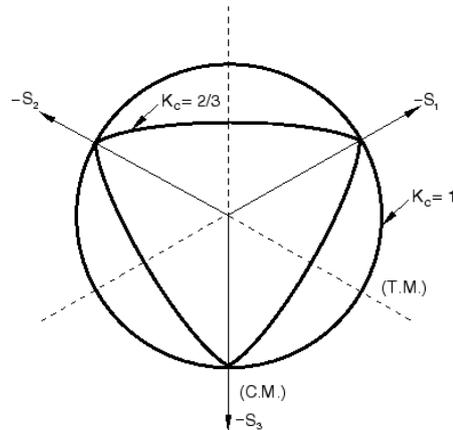


Fig. 2.44 – Valores correspondentes para o parâmetro  $K_c$  (Tutorial Abaqus<sup>®</sup>, 2010)

O modelo constitutivo do Abaqus<sup>®</sup>, CDP, recomenda a assumir  $K_c = 2/3$ , baseando-se em resultados obtidos experimentalmente em outros estudos na área. Esta forma, segundo Kmiecik e Kamiński (2011), é semelhante ao critério de ruptura formulado por William e Warnke, em 1975, com três parâmetros.

A superfície potencial plástica no plano meridional, assumindo a forma de uma hipérbole, é ajustada através de um fator denominado “Excentricidade Potencial Plástica ( $\epsilon$ )”. Esse valor está compreendido entre  $0 \leq \epsilon \leq 1$ . Quando assume o valor igual a zero, a superfície no plano meridional se torna uma linha reta, ou seja, o critério clássico de Drucker-Prager.

De acordo com Kmiecik e Kamiński (2011), excentricidade potencial plástica é a distância medida ao longo do eixo hidrostático entre o vértice de uma hipérbole e o ponto de intersecção das assíntotas dessa hipérbole (o centro da hipérbole). Tal parâmetro pode ser obtido pela relação força de tração e força de compressão. O valor recomendado pelo modelo CDP é igual  $\epsilon = 0,1$ , sendo que quando esse parâmetro se iguala a zero ( $\epsilon = 0$ ), a superfície no plano meridional torna-se semelhante à superfície do critério de ruptura clássico de Drucker-Prager clássico.

O modelo CPD considera também outro parâmetro adotado para descrever o estado do material no ponto em que o concreto sofre falha devido à compressão biaxial. Esse fator é

indicado ( $f_{bc} / f_c$ ) e representa a relação entre a resistência no estado biaxial e no estado uniaxial de tensões do concreto.

Segundo Kmiecik e Kamiński (2011) os resultados mais confiáveis em relação ao estado biaxial e uniaxial de tensões do concreto são os obtidos por Kupfer (1969) que apresentou uma aproximação com uma equação elíptica para a resistência à compressão uniforme biaxial  $f_{bc}$  igual a  $1,16248 f_c$ . O tutorial do software Abaqus® recomenda adotar  $f_{bc} / f_c = 1,16$  para o modelo CPD. A Fig. 2.45 apresenta a superfície de ruptura no plano de tensões.

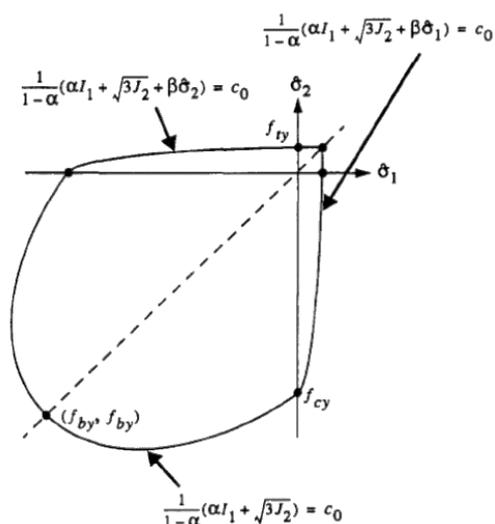


Fig. 2.45 – Superfície de ruptura no plano de tensões (Lee & Fenves, 1998)

Para a análise e caracterização do desempenho do concreto submetido à tensão composta é necessário definir o chamado “Ângulo de Dilatação ( $\psi$ )”. O ângulo que descreverá inclinação da superfície de ruptura em relação ao eixo hidrostático, medida no plano meridional é o chamado “Ângulo de Dilatação ( $\psi$ )”. Segundo Kmiecik e Kamiński (2011) o ângulo de dilatação, que pode ser interpretado fisicamente como um ângulo de atrito interno do concreto, é geralmente adotado sendo igual a  $36^\circ$  ou  $40^\circ$ .

O tutorial do software Abaqus® aponta que devido à característica de alguns materiais em apresentarem comportamento de amolecimento e degradação da rigidez, geralmente ocorrem problemas de convergência. Para evitar esse tipo de problema o modelo de CDP utiliza um parâmetro denominado “Parâmetro de Viscosidade ( $\mu$ )” para regularizar as equações constitutivas. Esse parâmetro permite que as tensões excedam ligeiramente a área da

superfície de ruptura provocando uma rigidez tangente consistente e positiva por incrementos de tempo suficientemente pequenos para o material no amolecimento.

De acordo com Kmiecik e Kamiński (2011), o ajuste viscoplástico do Abaqus® consiste na escolha de “ $\mu$ ” maiores do que zero, sendo necessário, algumas vezes, tentar ajustar esse valor de modo a descobrir qual a influência do parâmetro sobre o resultado e qual o valor mínimo adequado para o problema.

No próximo item serão abordados conceitos relacionados ao tema bielas e tirantes.

# 3

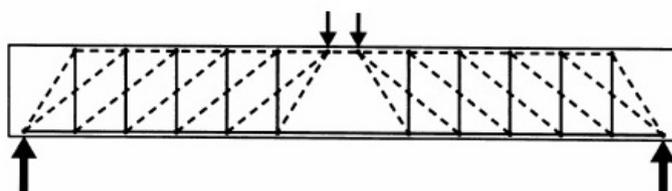
## BIELAS E TIRANTES

O presente item apresenta uma breve revisão bibliográfica em relação ao modelo de bielas e tirantes abordando aspectos relacionados com a concepção, formulação do método e sua aplicabilidade na engenharia de estruturas.

### 3.1 Breve Histórico

Estudos que deram origem ao modelo chamado de “Método das Bielas e Tirantes” de dimensionamento foram inicialmente realizados por Ritter e Morsch no início do século XX, com a realização de uma analogia do modelo de treliça para vigas.

Essa analogia associa a distribuição de tensões em uma viga de concreto armado a uma estrutura treliçada equivalente, sendo que os elementos discretos (barras) representavam os campos de tensões de tração (denominados tirantes) e de compressão (denominados bielas comprimidas) que são ligados entre si por nós. A Fig. 3.1 ilustra o modelo desenvolvido por Ritter e Morsch denominado “Analogia de Treliça”.



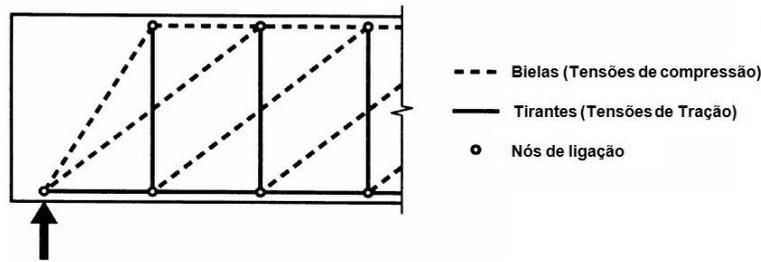


Fig. 3.1 - Analogia de treliça para esforços internos na região de cisalhamento de uma viga de concreto armado com força cortante constante.

Posteriormente foram realizados diversos outros estudos de modo a refinar e aperfeiçoar o método, porém ainda hoje a teoria inicial ou a ideia básica se mantêm.

Narciso (2009) comenta que foram nas escolas de Zurique e Stuttgart que ocorreu a difusão e generalização do método de bielas e tirantes, sendo a escola de Zurique responsável pela criação das bases científicas para a aplicação racional do método apoiada na teoria da plasticidade.

Dentre os estudos de maior relevância no assunto, de acordo com Wight e MacGregor (2012), pode-se citar o de Schlaich *et al.* (1987), pesquisadores de Stuttgart, que propuseram adotar modelos de bielas e tirantes em outros tipos de elementos estruturais, além das vigas inicialmente estudadas, como em consolos, vigas-parede, sapatas, blocos sobre estacas, apoios em dentes, vigas com aberturas, dentre outros. Propuseram, também, análises do comportamento dos elementos a partir da modelagem desses levando em consideração os campos de tensões, tanto seu estado elástico quanto plástico, para determinar a geometria do modelo de bielas e tirantes.

Outros estudos são considerados importantes na literatura pesquisada como a proposta da aplicação de modelos de bielas e tirantes adotando a teoria da plasticidade realizada por Marti (1985), além de outros pesquisadores como Chen (1982) e Nielsen (1984) que também colaboraram com estudos nesse sentido. A adequação do modelo por meio de resultados obtidos experimentalmente realizada por Cook & Mitchell (1988), que confirmaram sua aplicação para elementos com descontinuidades geométricas. Schlaich, Schäfer (1988 e 1991) que propuseram várias regras mais simplificadas para a aplicação do método, principalmente para elementos contendo regiões com descontinuidades geométricas. MacGregor (1997)

também demonstrou a aplicabilidade do método em diversos elementos contendo regiões descontínuas como em vigas-parede, ligações viga-pilar e outros.

No decorrer dos anos, com a consagração da aplicação de modelos de bielas e tirantes na engenharia de estruturas, foram estabelecidas algumas recomendações normativas em relação aos parâmetros de resistências das bielas como o Código Modelo CEB-FIB (2010), a norma canadense CSA-A23.3 (2004), EUROCODE 2 (2002), ACI 318-05 (2005) e a norma espanhola EHE (2008).

Para os trabalhos nacionais, dentre os que tiveram maior destaque nos últimos anos, envolvendo o estudo da aplicação dos modelos de bielas e tirantes no Brasil, pode-se citar o de Oliveira (1995), Silva (1998), Alves *et al.* (1998), Silva e Giongo (2000), Vieira *et al.* (2000), Souza (2004), Santos (2006) e Delalibera (2006). Esses estudos descrevem o empenho da comunidade científica em investigar, entender e aplicar os princípios básicos do modelo de bielas e tirantes no contexto da engenharia nacional.

### **3.2 Regiões B e D**

Na engenharia de estruturas, os elementos lineares em concreto, em sua maioria, são dimensionados de maneira simplificada considerando-se a Hipótese de Bernoulli-Euler. Isso facilita o dimensionamento, já que em todos os estágios de carregamento considera-se que a distribuição de deformação ao longo da seção transversal segue uma relação linear, conforme mostra Fig. 3.2. Nas regiões da peça onde não ocorrem interferências de regiões mais rígidas, como trechos próximos a colunas, ou próximos a regiões com cavidades ou outros onde a influência das deformações devido ao esforço cortante é desprezível, essa hipótese é levada em consideração. Essas são denominadas “Regiões B”.

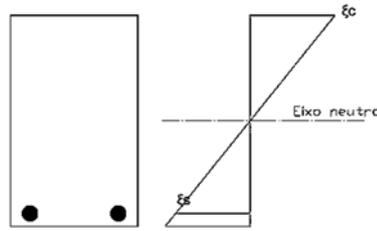


Fig. 3.2 – Seção se uma viga – Hipótese de Bernoulli-Euler (Adaptado de Narciso, 2009).

Em elementos estruturais contendo regiões especiais como aberturas em vigas, ligações entre viga-coluna, em elementos do tipo sapatas, consolos, blocos de fundação dentre outros e descontinuidades geométricas, as Hipóteses de Bernoulli-Euler de flexão podem não representar de maneira apropriada a distribuições de tensões, ou o comportamento estrutural da peça.

A aplicação da hipótese simplificadora para todo o elemento estrutural pode levar ao super ou subdimensionamento de certas partes da estrutura. Estas regiões são chamadas de “Regiões D” de descontinuidade. Nas “Regiões D” as tensões de cisalhamento são significativas e a distribuição das deformações na seção transversal não é linear. Existe, no entanto, uma dependência dessas regiões em relação aos seus distanciamentos dos apoios e dos pontos de aplicação de cargas concentradas no elemento. Tal dependência pode ser explicada pelo “Princípio de Saint Venant”, conforme abordado em Wight e Macgregor (2012).

O “Princípio de Saint Venant”, segundo Wight e Macgregor (2012), estabelece que em pontos suficientemente afastados das regiões de aplicação dos esforços no elemento estrutural, os efeitos internos se manifestariam de forma independente da configuração a que se encontra a distribuição daqueles esforços. Ou seja, quanto mais próximo do ponto de aplicação da ação está o campo de tensões a ser analisado no elemento, menos uniforme tende a ser sua distribuição numa determinada seção transversal onde são esperadas grandes perturbações de tensão, principalmente se a carga for pontual. Com isso, é possível identificar quais são as prováveis regiões descontínuas ou “Regiões D” no elemento. A Fig. 3.3 mostra alguns exemplos de elementos com a identificação de suas respectivas “Regiões B” e “Regiões D”.

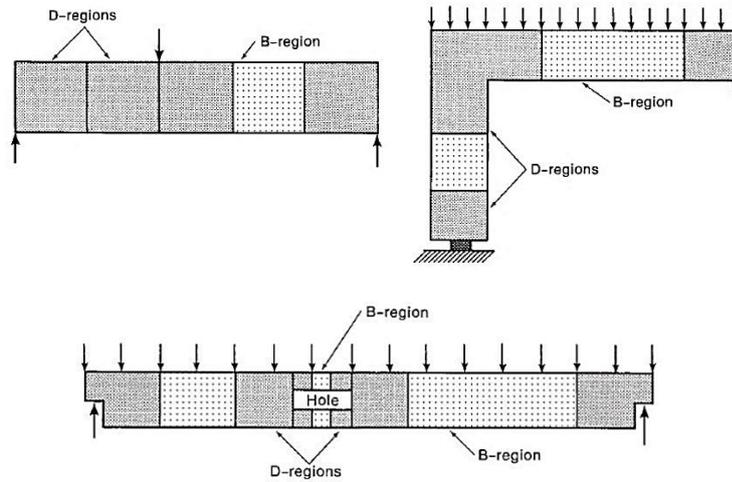


Fig. 3.3 – “Regiões D” (Wight e Macgregor, 2012)

Em regiões onde ocorrem mudanças bruscas na geometria levando na irregularidade dessas, também se aplica o “Princípio de Saint Venant”, uma vez que, devido a essa irregularidade ocorre o rompimento na linearidade das deformações ao longo da altura do elemento estrutural. A Fig. 3.4 ilustra essa irregularidade da geometria, vigas com aberturas, nó de pórtico e fundações, sendo as áreas destacadas as regiões descontínuas de cada elemento.

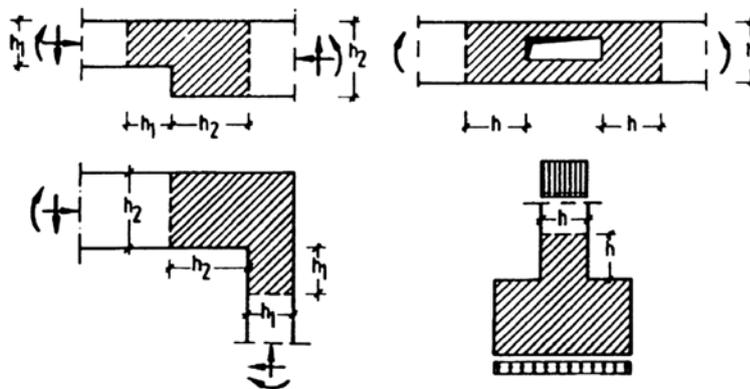


Fig. 3.4 – “Regiões D” devido a descontinuidade geométrica do elemento (Schlaich *et al.*, 1987)

A Fig. 3.5 também apresenta alguns exemplos de regiões descontínuas, apontadas nas áreas destacadas, devido à irregularidade da geometria e / ou cargas concentradas devido aos apoios, em vigas, consolos, e vigas parede.

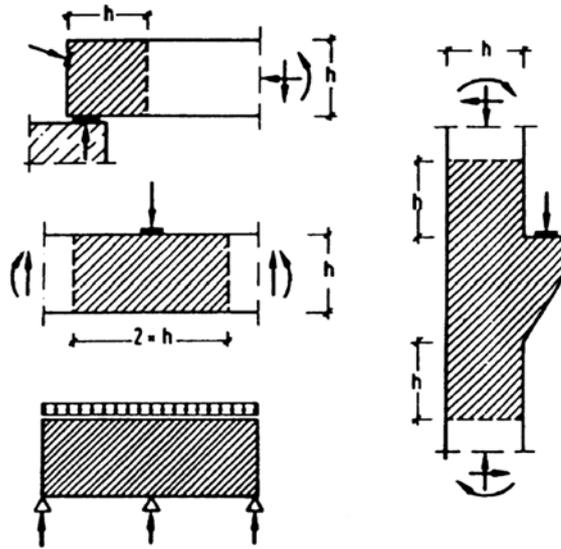


Fig. 3.5 - – “Regiões D” devido a descontinuidade geométrica do elemento e cargas concentradas (Schlaich *et al.*,1987)

De acordo com Schlaich *et al.* (1987), a partir da trajetória das tensões é, também possível identificar a diferença entre as “Regiões B”, nas quais a Lei de Hooke é aplicável, e as “Regiões D” de descontinuidades, ou seja, próximo as cargas concentradas haveria distribuições mais complexas dos campos de tensão, conforme mostra Fig. 3.6.

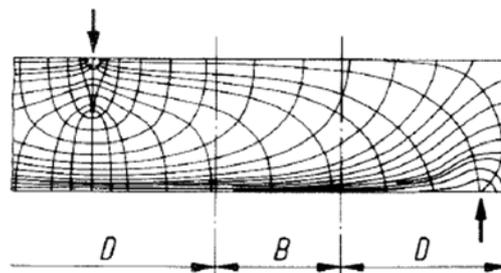


Fig. 3.6 – Trajetórias de tensões e identificação das Regiões B e D (Schlaich *et al.*,1987).

Pode-se dizer, portanto, que a identificação e definição dos pontos na estrutura, onde se aplicam ou não a Hipótese de Bernoulli-Euler, depende basicamente da experiência do projetista, já que as normas existentes que tratam do assunto ainda não estão bem difundidas. Desta forma, o que vêm sendo realizado é o seguimento de práticas de dimensionamento que adotam soluções nem sempre confiáveis e seguras, e que, por consequência, não representam com exatidão o comportamento real da estrutura.

### 3.3 Definição do Modelo: Princípios Básicos

Os principais aspectos a serem considerados para a definição da geometria do modelo de bielas e tirantes, segundo Silva e Giongo (2000), se referem aos tipos de ações atuantes no elemento, ao ângulo existente entre as bielas e os tirantes, às condições de contorno, ou seja, área de aplicação dos esforços. Também ao número de camadas da armadura e ao cobrimento da mesma.

Silva e Giongo (2000) explicam, ainda, que ao definir o modelo é importante prever um espaço satisfatório para as bielas e os tirantes de tal forma que os ângulos  $\theta$  entre esses elementos não fiquem muito pequenos. Diversos pesquisadores e alguns códigos normativos estabelecem limites para os valores desses ângulos. A Fig. 3.7 ilustra o modelo de acordo com Silva e Giongo (2000).

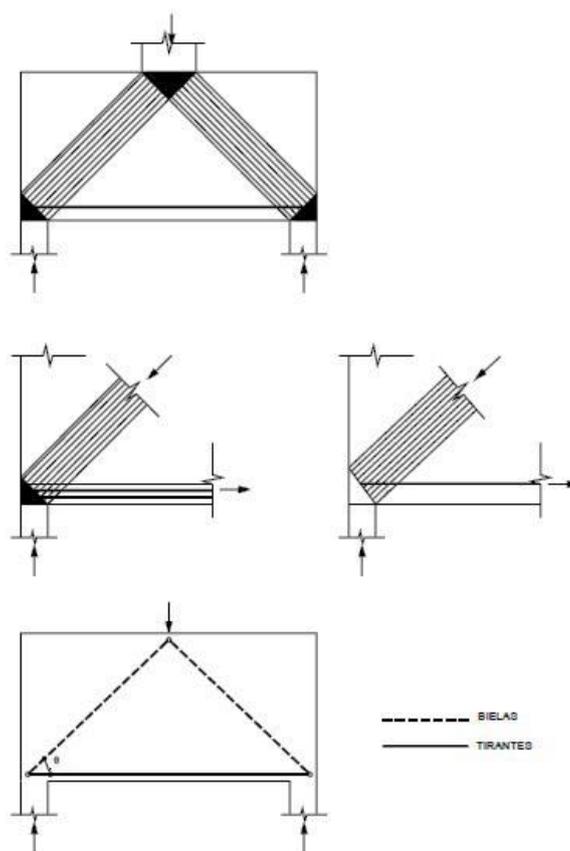


Fig. 3.7 – Modelo de Bielas e Tirantes de acordo com Silva e Giongo (2000)

MacGregor (1997) aponta que as bielas e os tirantes devem ser arrançados de tal forma que haja uma coincidência entre os centros de gravidade de cada elemento e as linhas de ação das forças externas atuantes em cada nó. A figura Fig. 3.8 esboça uma viga com a sua respectiva disposição dos elementos do modelo, as bielas, os tirantes e as zonas nodais onde ocorrerá a transferência de esforços.

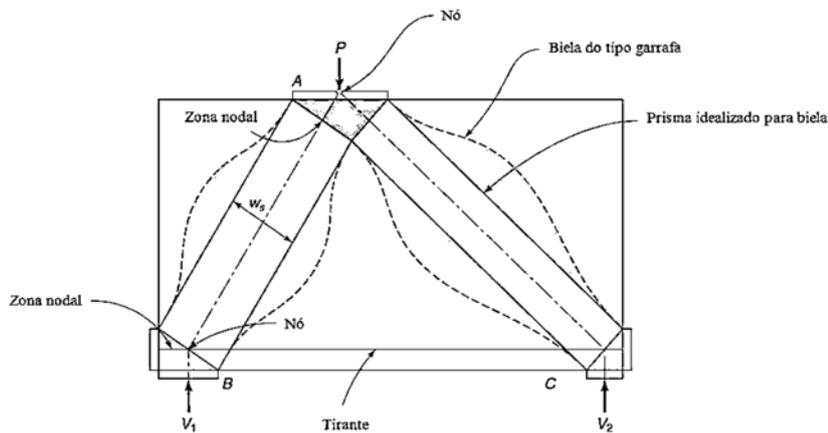


Fig. 3.8 – Modelo de bielas e tirantes de uma viga (Adaptado de Wight e Macgregor, 2012 e ACI-318, 2005)

Wight e Macgregor (2012) apontam que um modelo de bielas e tirantes deve satisfazer a alguns critérios dentre os quais o equilíbrio de esforços internos, considerando um dado conjunto de cargas, que não devem exceder limites em relação à resistência real da estrutura. Essa teoria corresponde ao Teorema do Limite Inferior da Plasticidade.

Schäfer e Schlaich (1988; 1991) também indicam tais análises do comportamento do elemento considerando o limite último no estado elástico, para definir a topologia do modelo de bielas e tirantes, e o estado plástico, para dimensionar a estrutura.

Na literatura, em geral, são apontados alguns critérios comumente adotados para a escolha do modelo de bielas e tirantes, dentre eles pode-se citar os prescritos em códigos normativos, o critério adotado pelo processo do caminho das cargas (“Load Path Approach”), a partir de análises elásticas pelo MEF, a partir de análises não lineares com a consideração da fissuração do concreto, por meio de ensaios experimentais e por meio da automatização da escolha do modelo.

Esses critérios são brevemente abordados nos itens a seguir.

### 3.3.1 Prescritos em Códigos Normativos

Existem atualmente algumas normas que propõem modelos padronizados de bielas e tirantes para alguns elementos específicos. Porém, devido à clara dependência de tais modelos com alguns parâmetros ligados à geometria, suas aplicações tornam-se bastante limitadas nos projetos estruturais.

Exemplos desses tipos de modelos padronizados para vigas parede com diferentes carregamentos, regiões de ancoragens e regiões nodais em pórticos são apresentados na Fig. 3.9, retirada do Código Modelo CEB-FIB (2010).

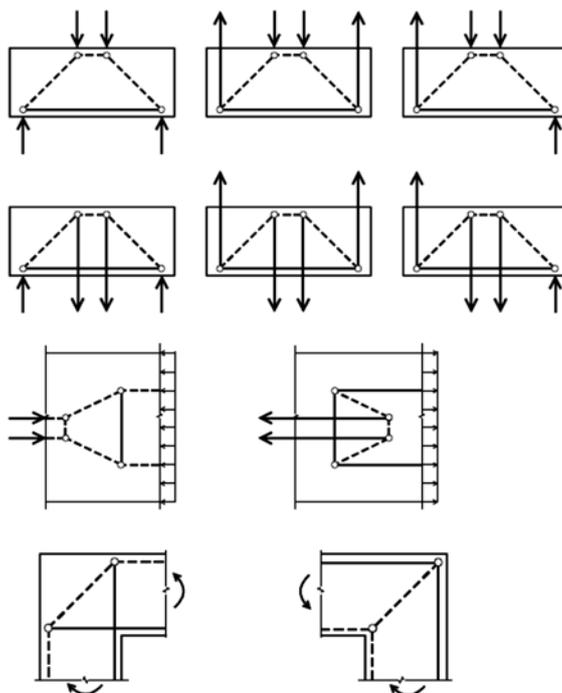


Fig. 3.9 – Elementos básicos para o modelo de bielas e tirantes (Marti, 1991 *apud* CEB-FIB Model Code, 2010)

As principais recomendações existentes para a utilização do Método de Bielas e Tirantes, em elementos contendo Regiões D, são as prescrições do CEB-FIP Model Code (2010), CSA-A23.3-04 (2004), EHE (2008), ACI-318 (1995, 2005), EUROCODE 2 (2002) e ABNT NBR 6118 (2014). Outras normas brasileiras, voltadas para a indústria de pré-moldados, também

apresentam recomendações para a utilização do Método de Bielas e Tirantes em elementos específicos, como é o caso da ABNT NBR 9062 (2006) para o dimensionamento de consolos.

### 3.3.2 Pelo Processo do Caminho de Cargas

Esse critério é adotado considerando o fluxo de tensões no elemento estrutural pelo chamado “Processo do caminho de cargas”. De acordo com Schäfer e Schlaich (1991) o processo ocorre após a divisão da estrutura em regiões B e D, seguida da determinação dos esforços no contorno considerando o equilíbrio entre as forças externas aplicadas e as reações de apoio.

Quando as cargas estão uniformemente distribuídas no elemento, são substituídas por forças concentradas equivalentes e as tensões resultantes são ligadas a outras opostas de igual magnitude obtidas pelo equilíbrio. O caminho das cargas no interior da estrutura corresponde à trajetória das tensões elásticas de tração e de compressão que são, posteriormente, substituídas por linhas de um polígono representando caminhos simplificados das bielas e dos tirantes, que não se cruzam. Outros elementos poderiam ser adicionados no traçado, caso fossem necessários, para garantir o equilíbrio dos nós. A Fig. 3.10, que esboça um típico exemplo da aplicação desse critério em uma viga-parede.

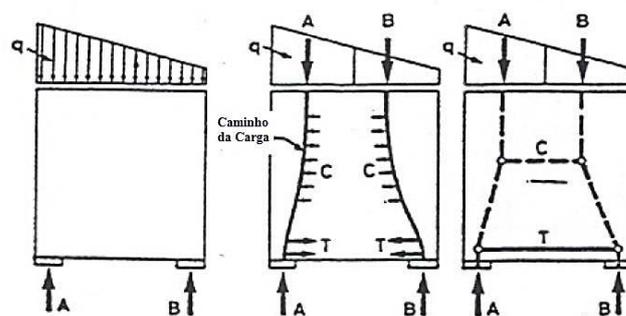


Fig. 3.10 - Modelo de Bielas e tirantes a partir do “Load Path Approach” (Adaptado de Schäfer e Schlaich, 1991).

Schäfer e Schlaich (1991) apontam também que nem sempre é possível se ter um diagrama completamente balanceado, pois dependendo da configuração das cargas, para garantir que as tensões de todas as forças aplicadas no contorno encontrarão tensões resultantes nos lados

opostos de igual magnitude, o caminho de cargas pode apresentar uma inversão do sentido ao final, como é o caso do exemplo apresentado na Fig. 3.11.

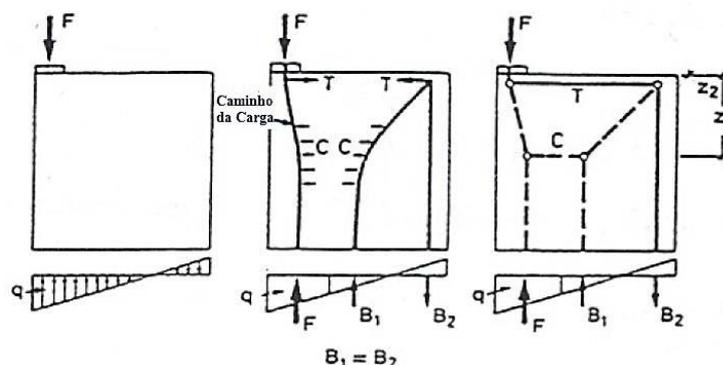


Fig. 3.11 – Diagrama de cargas não completamente balanceado. (Adaptado de Schäfer e Schlaich ,1991).

A otimização do processo do caminho de carga foi proposta em Schlaich *et al* (1987). O estudo propõe a escolha do modelo considerando os caminhos mais curtos e com menores deformações.

Sendo assim, como os tirantes são mais deformáveis que as bielas, o modelo com tirantes mais curtos e em menor quantidade seria mais indicado segundo Schlaich *et al* (1987). A Eq. (3.1) apresenta tal critério em termos matemáticos.

$$\sum F_i l_i \varepsilon_{mi} = \text{mínimo} \quad (3.1)$$

Onde:

$F_i$ =força no elemento (biela ou tirante);

$l_i$ =comprimento do elemento (biela ou tirante);

$\varepsilon_{mi}$ =deformação específica média do elemento (biela ou tirante).

A Fig. 3.12 mostra dois modelos de bielas e tirantes obtidos pelo processo do caminho da carga, sendo que na Fig. 3.12-a o modelo é considerado o mais adequado, de acordo com as considerações realizadas por Schlaich *et al* (1987), já que apresenta tirantes mais curtos.

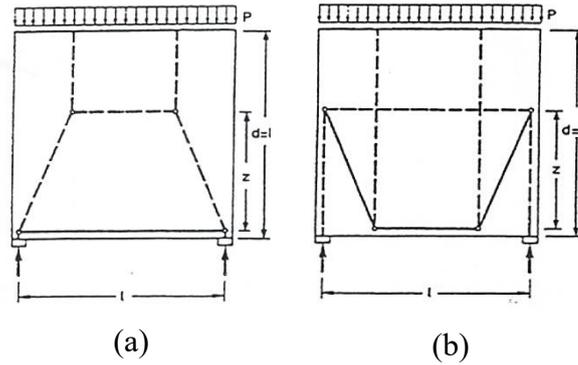


Fig. 3.12 – Modelo de bielas e tirantes (a) Modelo correto (b) Modelo errado ( Schäfer e Schlaich ,1991)

De acordo com Silva e Giongo (2000) para modelos complicados é possível realizar-se a superposição de dois modelos desde que esses satisfaçam requisitos mínimos em relação aos valores dos ângulos entre bielas e tirantes. A Fig. 3.13 ilustra essa superposição apresentada em Schäfer e Schlaich (1991).

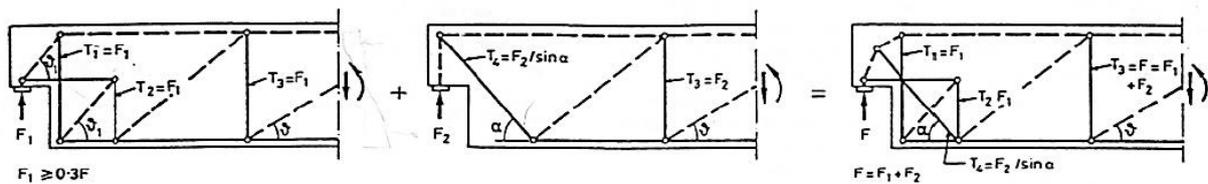


Fig. 3.13 – Superposição de dois modelos de bielas e tirantes (Schäfer e Schlaich ,1991)

### 3.3.3 Por meio de Análises Elásticas

Outro critério, adotado para a escolha do modelo de bielas e tirantes, seria a simplificação da obtenção do caminho de carga, a partir da distribuição das tensões principais, obtida realizando-se análises lineares elásticas a partir do MEF.

Assim, de acordo com Schäfer e Schlaich (1991), a direção das bielas poderia ser determinada considerando da direção média das tensões principais de compressão, ou então as bielas e os tirantes poderiam ser determinados a partir do centro de gravidade do diagrama de tensões das seções típicas do elemento estrutural. A Fig. 3.14 apresenta um exemplo de aplicação desse critério em uma viga-parede.

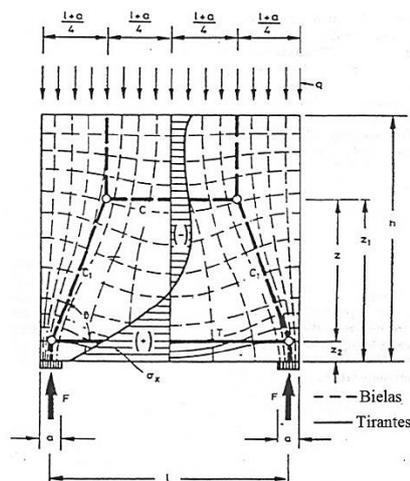


Fig. 3.14 – Trajetórias das tensões elásticas e o modelo de bielas e tirantes correspondente (Adaptado de Schlaich e Schäfer, 1991).

Wight e Macgregor (2012) também apresentam um exemplo semelhante, como pode ser visto na Fig. 3.15, porém para carga concentrada e a obtenção de outro modelo de bielas e tirantes pela trajetória das tensões principais de tração e compressão.

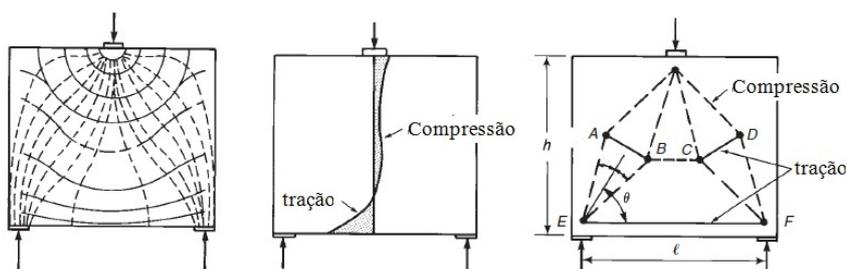


Fig. 3.15 - Modelo de Bielas e tirantes pela trajetória das tensões principais de tração e compressão (Adaptado de Schlaich, 1987 *apud* Wight e Macgregor, 2012)

Da mesma forma, essa trajetória seria obtida a partir de análises elásticas utilizando-se o MEF sendo as tensões principais de compressão representadas pelas linhas tracejadas e as de tração pelas linhas contínuas.

### 3.3.4 Por meio de Análises Não Lineares

A geração dos modelos de bielas e tirantes pode ocorrer também a partir de análises não lineares, ou seja, considerando a fissuração do concreto no elemento estrutural. Como a direção das falhas, geralmente, se apresenta perpendicular ao fluxo de tensões de tração e paralela ao fluxo de tensões de compressão, haveria a possibilidade de se definir as trajetórias das bielas e dos tirantes do modelo.

A Fig. 3.16 corresponde ao mesmo exemplo comentado no item anterior, porém com o acréscimo da análise da fissuração no elemento estrutural em concreto e o modelo de bielas e tirantes correspondente.

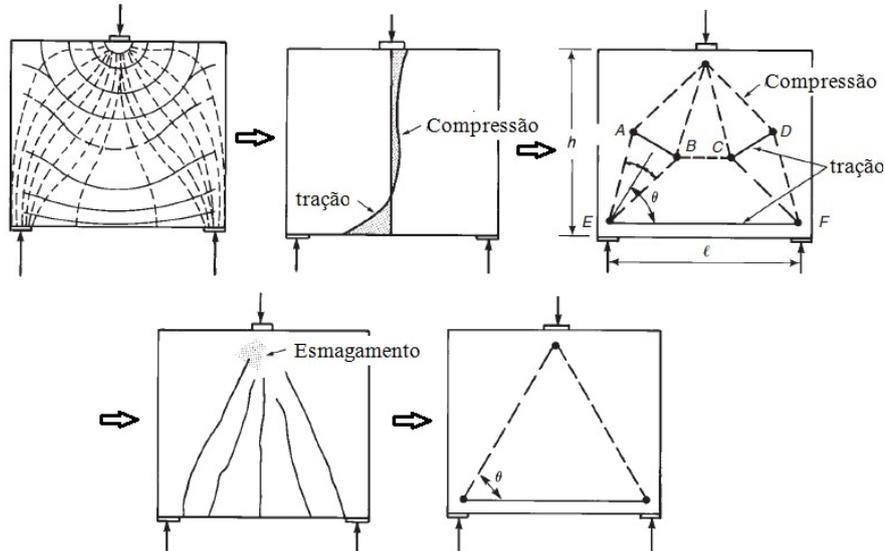


Fig. 3.16 - Análise da fissuração e modelo de bielas e tirantes correspondente (Adaptado de Wight e Macgregor, 2012)

Souza (2004) aponta que tal análise pode ser realizada a partir de resultados experimentais em relação aos panoramas de fissuração ou, ainda, por meio de programas computacionais. Porém afirma que, apesar de alguns pesquisadores concluírem que a análise não linear realizada, utilizando ferramentas computacionais, são bastante realistas, tais recursos ainda são restritos devido ao alto custo dos programas computacionais. E também devido à necessária experiência do profissional para garantir a obtenção de bons resultados.

Wight e Macgregor (2012) apontam que geralmente assume-se que a estrutura terá uma capacidade de deformação plástica suficiente para que haja uma adaptação das direções das

bielas e tirantes escolhidas no projeto, quando se considera apenas as trajetórias de tensões elásticas na análise.

Em outras palavras, conforme explica Souza (2004), a análise linear do fluxo de tensões elásticas por meio do MEF, ou seja, a análise considerando a carga de serviço é considerada um controle aceitável das fissuras. No entanto, o controle de fissuração por meio da análise não linear é importante para permitir que ocorra uma adequação dos ângulos entre bielas e tirantes após a redistribuição de tensões.

### **3.3.5 Pela Automatização da Escolha do Modelo**

Devido à falta de uma padronização do método ideal para escolha da disposição adequada das bielas e dos tirantes em peças estruturais de concreto, diversos estudos têm sido realizados no sentido de automatizar a concepção do modelo de bielas e tirantes. Essa automatização tem o objetivo de auxiliar na escolha do modelo, proporcionando maior segurança e simplificando a realização do dimensionamento estrutural para elementos especiais.

Souza (2004) cita com detalhes alguns processos de otimização existentes na literatura para a definição automática dos modelos de bielas e tirantes. Dentre eles, o modelo envolvendo programação linear que tem o objetivo de encontrar, a partir do lançamento de diversos possíveis elementos reticulados, levando em consideração as posições prováveis das armaduras, a solução ótima ou a combinação das soluções. Para o desenvolvimento desse modelo levam-se em consideração algumas condições como o equilíbrio dos nós, número de armaduras máximas e mínimas e esforços máximos e mínimos nas bielas.

Bendsøe e Sigmund (2003) apresentam, em detalhes, técnicas de otimização topológica. O trabalho corresponde ao desenvolvimento dos estudos realizados pelos pesquisadores no assunto em relação à topologia ótima do contínuo em projetos de estruturas, com várias aplicações dos métodos. A Fig. 3.17 ilustra um dos exemplos apresentado pelos pesquisadores.

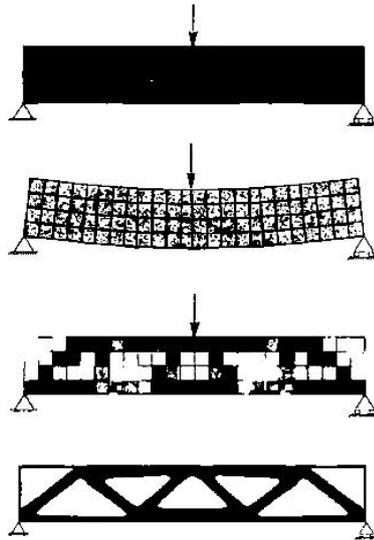


Fig. 3.17 – Exemplo para a topologia ótima utilizando-se a distribuição de materiais - (Bendsøe e Sigmund, 2003).

As técnicas de otimização topológica, quando usadas em combinação com análises de elementos finitos, são também adotadas para refinar os projetos de elementos estruturais possibilitando obter estruturas leves, econômicas e seguras, além de garantir o seu desempenho.

Essas técnicas podem ser adotadas como estratégia avançada na obtenção das topologias do modelo de bielas e tirantes como uma forma de geração automática dos modelos.

As análises realizadas no presente trabalho levarão em consideração a técnica ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) de otimização topológica para realizar a automatização da escolha do modelo de bielas e tirantes. Essa técnica e outras serão discutidas com detalhes no próximo capítulo.

### 3.4 Teorema do Limite Inferior

A Análise Limite da estrutura tem como objetivo principal definir a carga que a levará ao colapso. As formulações existentes para esse tipo de análise são baseadas nos Teoremas Limites da Teoria da Plasticidade, inferior ou superior. Esses teoremas foram inicialmente introduzidos por Gvozdev(1938) e empregados por Drucker e Prager (1952) no estudo de materiais que possuem comportamento elasto-plástico perfeitos em relação à ruptura.

O Teorema do Limite Inferior da Teoria da Plasticidade está relacionado com a estática, ou seja, deve atender a condições de um campo de tensões estaticamente admissível. Já o Teorema do Limite Superior da Teoria da Plasticidade está relacionado com a cinemática, devendo atender a condições de campos de velocidade dinamicamente admissíveis.

Em termos de engenharia estrutural, os teoremas dizem respeito aos limites inferiores e superiores para a carga de colapso da estrutura.

A concepção do modelo de bielas e tirantes foi baseada no Teorema do Limite Inferior da Plasticidade, pois leva em consideração que os tirantes irão escoar antes do concreto entrar em ruptura e, com isso, o campo de tensões seria considerado seguro e a favor da segurança.

Significa dizer que, a distribuição de esforços na estrutura deve satisfazer a condições de equilíbrio e de contorno, ou seja, ser estaticamente admissível em qualquer ponto do corpo, e deve atender ao critério de escoamento. O que garantirá que a carga atuante tenha valores sempre menores ou no máximo iguais à carga de ruptura real da estrutura.

### 3.5 Bielas

Schlaich *et al* (1987) e Schäfer e Schlaich (1991) apontam três tipos de configurações dos campos de tensões de compressão típicas para as bielas: distribuição de tensões radiais, distribuição de tensões em linhas curvilíneas e distribuição de tensões paralelas.

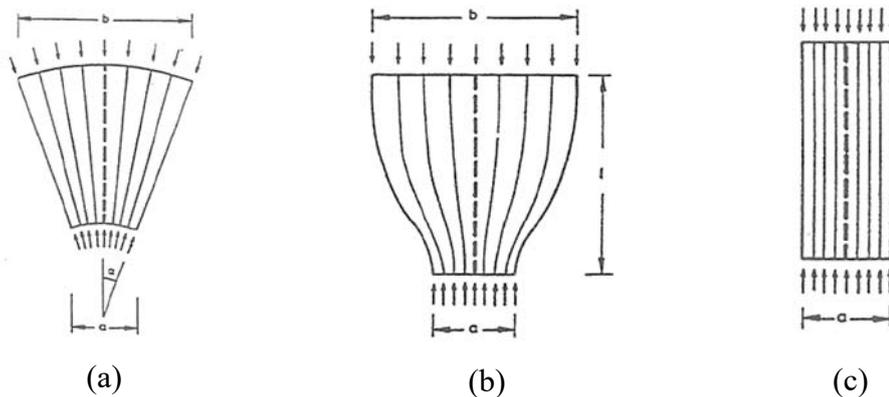


Fig. 3.18 – Configurações dos campos de tensões de compressão no concreto (a) distribuição de tensões radial ou em leque (b) distribuição de tensões em linhas curvilíneas com afinamento ou em forma de garrafa (c) distribuição de tensões paralelas ou prismáticas (Adaptado de Schlaich e Schäfer, 1991).

Na Fig. 3.18-a, tem-se o campo de tensões radiais que seria uma idealização de um campo de tensões com curvatura desprezível. Geralmente encontra-se esse tipo de distribuição nas proximidades de regiões descontínuas que possuem concentração de esforços com propagação suave e não se desenvolvem tensões transversais, segundo Schäfer e Schlaich (1991).

O segundo tipo, campo de tensões de compressão em forma de garrafa, é ilustrado na Fig. 3.18-b. Nesse tipo, ocorre o desenvolvimento de tensões transversais de tração quando as cargas concentradas se propagam por meio de curvas acentuadas. Essas tensões transversais combinadas com as longitudinais de compressão podem levar ao desenvolvimento de fissuras longitudinais antecipando a ruptura do concreto. De acordo com Silva e Giongo (2000), essas tensões de tração transversais e as fissuras geradas seriam muito prejudiciais à estrutura, já que a ruptura do concreto se daria com tensões inferiores à sua resistência à compressão.

Uma solução para o controle de fissuração indicada em Schäfer e Schlaich (1991) nesse caso seria dimensionar uma armadura transversal por meio da determinação de um modelo

específico de bielas e tirantes para esse campo de tensões com o auxílio de diagramas simplificados para determinar as taxas de armadura necessária, ambos ilustrados na Fig. 3.19. De acordo com Silva e Giongo (2000), esses diagramas seriam construídos a partir de resultados experimentais.

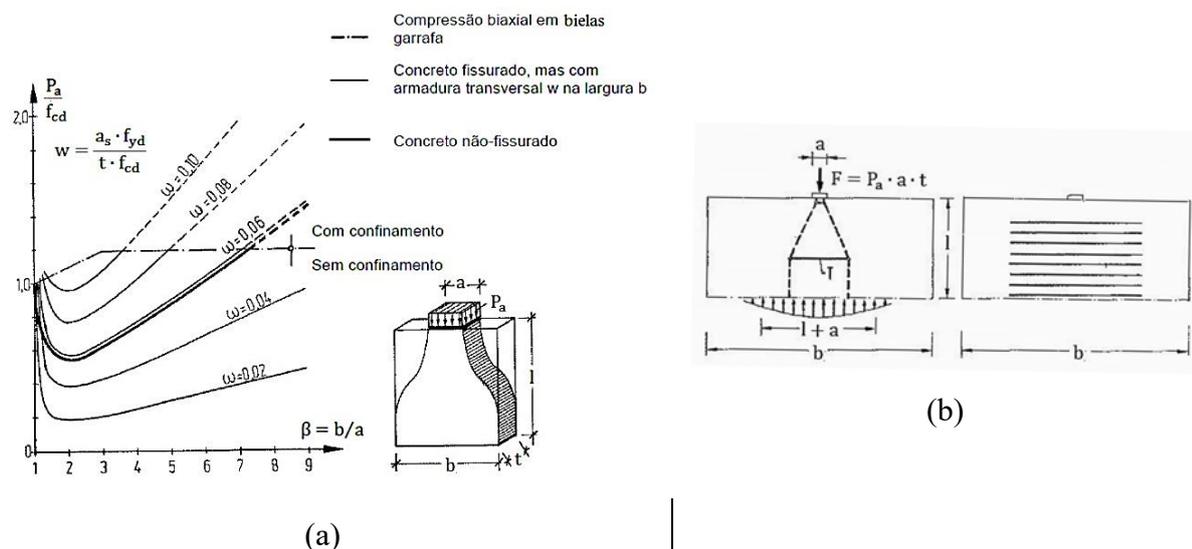


Fig. 3.19 – (a) diagrama para o fornecimento de taxas de armadura necessárias (b) modelo de bielas e tirantes e armadura transversal correspondente (Adaptado de Schlaich *et al.*, 1987)

O último tipo de configuração dos campos de tensões de compressão seria a distribuição paralela ou prismática, ilustrada na Fig. 3.18-c, que ocorreria de maneira uniforme e sem perturbações.

De acordo com Schäfer e Schlaich (1991) os parâmetros de resistência das bielas irão depender do estado multiaxial de tensões e das perturbações causadas pela fissuração e armaduras. Sendo assim propõem alguns critérios para o cálculo da resistência das bielas, citados a seguir:

⇒ Para um estado de tensão uniaxial e sem perturbações a resistência é dada pela Eq.(3.2):

$$F_b = 1,0 f_{cd} \quad (3.2)$$

⇒ Para campos de tensões de compressão com fissuras paralelas às tensões de compressão, de acordo com a Eq. (3.3):

$$F_b = 0,8 f_{cd} \quad (3.3)$$

⇒ Para campos de tensões com fissuras inclinadas, conforme Eq.(3.4):

$$F_b = 0,6 f_{cd} \quad (3.4)$$

Onde:

$F_b$  = Resistência à compressão das bielas.

$f_{cd}$  = Resistência de cálculo à compressão uniaxial do concreto de acordo com a norma adotada.

A seguir são apresentados, resumidamente, os parâmetros de resistência das bielas adotados por algumas normas e recomendações vigentes.

### 3.5.1 EHE (2008)

A norma espanhola EHE (2008) aponta que a capacidade resistente de uma biela comprimida é intensamente influenciada pelo estado de tensões e deformações transversais, pelo campo de tensões compressão assim como pela fissuração existente. Desta forma, aponta os seguintes parâmetros de resistência para as bielas:

⇒ Para bielas em zonas com estados de compressão uniaxial a tensão máxima na biela comprimida se limita ao valor apontado na Eq. (3.5):

$$F_b = f_{cd} \quad (3.5)$$

⇒ Para bielas com fissuração oblíquas ou paralelas às tensões de compressão em três situações. Quando existem fissuras paralelas às bielas e a armadura transversal está ancorada a capacidade resistente é definida pela Eq. (3.6):

$$F_b = 0,7 f_{cd} \quad (3.6)$$

Quando as bielas transmitem os esforços de compressão por meio da abertura de fissuras controladas por uma armadura transversal suficientemente ancorada (é o caso de almas de vigas submetidas a esforço cortante):

$$F_b = 0,6 f_{cd} \quad (3.7)$$

Quando as bielas transmitem os esforços de compressão por meio de grandes aberturas de fissuras (é o caso de elementos submetidos à tração em vigas de seções do tipo T):

$$F_b = 0,4 f_{cd} \quad (3.8)$$

Outros casos são apontados na norma para bielas com armaduras comprimidas, considerando o concreto confinado e também com interferências de armaduras ativas.

### 3.5.2 ACI-318 (2005)

A norma ACI-318 (2005) aponta que a resistência à compressão nominal das bielas sem armadura longitudinal é obtida pela Eq. (3.9).

$$F_b = F_{ns} = f_{ce} A_{cs} \quad (3.9)$$

Onde:

$A_{cs}$  = Área da seção transversal da extremidade de uma biela;

$f_{ce}$  = A efetiva resistência à compressão do concreto em uma biela é dada pela Eq.(3.10):

$$f_{ce} = 0,85 \beta_s f_{cd} \quad (3.10)$$

Onde:

$f_{cd}$  = Resistência de cálculo à compressão do concreto;

$\beta_s = 1,0$  - para bielas uniformes e com seção constante;

$\beta_s = 0,75$  - para bielas do tipo garrafa e armadura atendendo ao item 3.3 do Appendix A - ACI-318 (2005);

$\beta_s = 0,6\lambda$  - para bielas do tipo garrafa e armadura não atendendo ao item 3.3 do Appendix A - ACI-318 (2005). (Sendo que  $\lambda = 1,0$  é indicado pela norma para concreto de peso normal, 0,85 para concreto leve de areia e 0,75 para todas os tipos de concretos leves).

A norma recomenda, ainda, que o valor obtido na Eq.(3.10) seja comparado com o valor da resistência efetiva à compressão do concreto na zona nodal e que o menor valor seja considerado para o cálculo da resistência à compressão das bielas. Essa resistência à compressão do concreto na zona nodal será abordada no próximo item.

### 3.5.3 CEB FIB Model Code (2010)

De acordo com o código as bielas devem ser dimensionadas considerando um fator de redução na resistência do concreto, dada conforme Eq. (3.11).

$$F_b = k_c \frac{f_{cd}}{\gamma_c} \quad (3.11)$$

O fator de redução  $k_c$  deve ser obtido considerando as seguintes situações:

- ⇒ Para um estado uniaxial de tensões de compressão, sem perturbações, e para regiões com compressão transversal, sendo que o maior valor de resistência pode ser assumido em regiões onde existem tensões multiaxiais de compressão, o fator  $k_c$  é dado conforme Eq. (3.12).

$$k_c = 1,00 \left( \frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} \leq 1,00 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}) \quad (3.12)$$

⇒ Para bielas e faces comprimidas com fissuras paralelas a essas tensões de compressão e trações das armaduras perpendiculares a essa direção, o fator  $k_c$  é dado conforme Eq. (3.13).

$$k_c = 0,75 \left( \frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} \leq 0,80 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}) \quad (3.13)$$

⇒ Para faces comprimidas com fissuras paralelas a essas tensões de compressão e trações das armaduras oblíquas a essa direção, o fator  $k_c$  é dado conforme Eq. (3.14).

$$k_c = 0,55 \left( \frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} \leq 0,55 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}) \quad (3.14)$$

### 3.5.4 EUROCODE 2 (2002)

De acordo com a norma de projetos europeia, a resistência efetiva das bielas em regiões com ou sem tensões de compressão transversais pode ser obtida a partir da Eq.(3.15).

$$F_b = \sigma_{Rd,m\acute{a}x} = f_{cd} \quad (3.15)$$

Onde:

$f_{cd}$ =Resistência de cálculo à compressão do concreto.

Assume-se, portanto, uma alta resistência das bielas para o estado de tensões multiaxiais de compressão, ou seja, para o concreto confinado.

Já as resistências das bielas, considerando um concreto comum com zonas de compressão fissuradas, devem ser reduzidas. Caso não se tenha uma abordagem mais rigorosa, de acordo

com a norma, a resistência à compressão das bielas, nesse caso, pode ser obtida a partir da Eq. (3.16).

$$F_b = \sigma_{Rd,m\acute{a}x} = 0,6 v f_{cd} \quad (3.16)$$

Onde:

$v$  = Coeficiente de redução da resistência do concreto, devido à existência de tensões de tração transversais, obtido conforme Eq.(3.17) recomendada pela norma.

$$v = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (3.17)$$

Sendo que:

$f_{ck}$  = Valor característico da resistência à compressão do concreto aos 28 dias.

Algumas alternativas de cálculos são abordadas separadamente na norma. Como é o caso de vigas parede e consolos.

### 3.5.5 CSA-A23.3-04

De acordo com o código canadense CSA-A23.3 (2004), as dimensões das bielas devem ser suficientemente grandes para garantir que a força de compressão calculada para as mesmas não exceda valores conforme apresentado na Eq. (3.18):

$$C < \phi_c f_{cu} A_{cs} \quad (3.18)$$

Onde:

$C$  = Força de compressão;

$\phi_c$  = Fator de resistência para o concreto igual a 0,65, conforme item 8.4.2 do código;

$f_{cu}$  = Limitação da tensão de compressão nas bielas;

$A_{cs}$  = Área da seção transversal efetiva das bielas de concreto, submetida à compressão.

(Calculada considerando a área de concreto disponível e as condições de ancoragem nas extremidades da biela).

Para o caso de existir armadura com barras paralelas às bielas (estribos) a força calculada não deve exceder o valor apontado na Eq. (3.19).

$$C < (\phi_c f_{cu} A_{cs} + \phi_s f_y A_{ss}) \quad (3.19)$$

Onde:

$\phi_s$ =Fator de resistência para a armadura igual a 0,85, conforme item 8.4.3 do código;

$F_y$ =Resistência ao escoamento do aço;

$A_{ss}$ =Área da armadura da biela.

As resistências das bielas podem ser obtidas, segundo prescrições do código CSA-A23.3 (2004), a partir da Eq. (3.20).

$$F_b = f_{cu} = \frac{f_c}{0,8 + 170 \varepsilon_1} \leq 0,85 f_c \quad (3.20)$$

Onde:

$f_c$ =Resistência à compressão do concreto;

$\varepsilon_1$ =Deformação de tração na direção perpendicular a biela, obtida conforme Eq. (3.21).

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + 0,002) \cotg^2 \theta_s \quad (3.21)$$

Onde:

$\theta_s$ =Menor ângulo entre a biela e a barra da armadura que a atravessa;

$\varepsilon_s$ =Deformação média na barra da armadura que atravessa a biela.

### 3.5.6 ABNT NBR 6118/2014

A norma de projeto brasileira NBR 6118 (2014) determina valores limites para as tensões de compressão nas bielas. Essas tensões não devem exceder os valores obtidos a partir das Eqs. (3.22), (3.23) e (3.24) a seguir.

⇒ Para bielas prismáticas:

$$F_{cd1} = 0,85 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (3.22)$$

⇒ Para bielas atravessadas por mais de um tirante:

$$F_{cd2} = 0,60 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (3.23)$$

⇒ Para bielas atravessadas por tirante único:

$$F_{cd3} = 0,72 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (3.24)$$

Onde:

$\alpha_{v2} = 1 - f_{ck} / 250$ , com  $f_{ck}$ , expresso em megapascal (MPa);

$f_{cd}$  = resistência a compressão do concreto igual a  $f_{ck} / \gamma_c$ , sendo  $\gamma_c$  o coeficiente de ponderação da resistência do concreto.

### 3.6 Regiões Nodais

De acordo com Schäfer e Schlaich (1988, 1991) os nós são uma maneira idealizada e simples de representar a interseção entre bielas e tirantes em regiões onde ocorre mudança brusca na direção das forças. Os nós podem ser classificados em singulares ou contínuos conforme ilustra a Fig. 3.20.

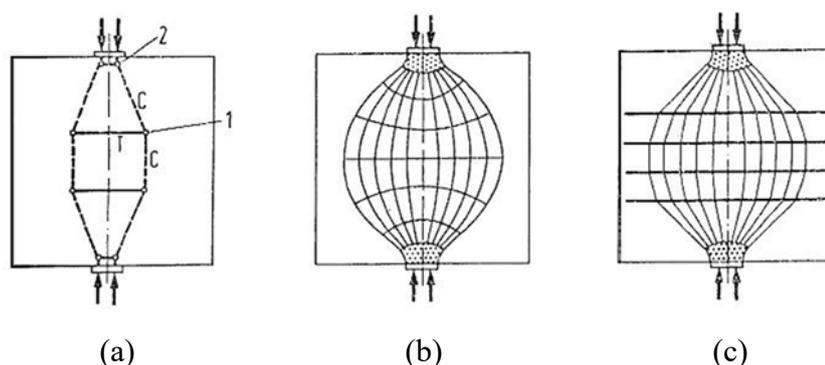


Fig. 3.20 – Classificação dos nós (a) Modelo de bielas de tirantes sendo que a indicação 1 aponta um nó contínuo e 2 um nó singular em uma região D (b) e (c) campos de tensões e regiões nodais. (Adaptado de Schäfer e Schlaich, 1991)

Os nós singulares, ou nós concentrados, são assim chamados devido à existência de campos concentrados de tensões em suas proximidades. De acordo com Schäfer e Schlaich (1991), essas regiões são críticas, pois nos locais em que as forças concentradas são aplicadas, o desvio de esforços são localmente concentrados nos nós. Portanto, torna-se importante verificar as tensões de modo a equilibrar as forças nas bielas e nos tirantes evitando o excesso de deformações e a formação de possíveis fissuras.

Já os nós contínuos, ou distribuídos, são aqueles dispostos em locais onde existem tensões mais distribuídas no concreto tendo um espaço suficiente para o desvio de forças e para realizar a ancoragem das barras distribuídas.

Portanto, segundo Schäfer e Schlaich (1991), os nós singulares devem ser verificados considerando que as tensões médias de compressão nos contornos da região nodal não devem ultrapassar os valores apresentados a seguir.

⇒ Para nós onde apenas tensões de compressão se encontram, criando um estado de tensões bi ou tridimensional na região nodal.

$$F_{zd} = 1,1f_{cd} \quad (3.25)$$

⇒ Para nós onde as barras tracionadas são ancoradas e uma parcela da resistência é reservada para a aderência.

$$F_{zd} = 0,8f_{cd} \quad (3.26)$$

Onde:

$f_{cd}$  = Resistência média de cálculo à compressão uniaxial do concreto;

$f_{zd}$  = Resistência à compressão média no contorno da região nodal.

Os parâmetros resistentes das regiões nodais adotados por normas e recomendações atuais são brevemente abordados nos itens a seguir.

### 3.6.1 EHE (2008)

De acordo com a norma espanhola, os nós devem ser concebidos, dimensionados e armados de tal forma que todos os esforços atuantes estejam em equilíbrio e os tirantes convenientemente ancorados. O concreto nas regiões nodais pode estar submetido a estados multiaxiais de tensões e essa particularidade deve ser levada em consideração, já que, com isso, ocorrerá um aumento ou redução de sua capacidade resistente.

A norma recomenda, assim, que a devida ancoragem dos tirantes seja garantida (conforme artigos 69° e 70° da norma) e que se realize um controle para que a tensão máxima no concreto não ultrapasse a capacidade resistente máxima dos tirantes.

Para os nós que unem apenas bielas, esses apresentam um estado tensional de compressão múltipla e, com isso, ocorre o aumento da capacidade resistente à compressão do concreto.

⇒ Para o estado de tensão biaxial de compressão, tem-se o seguinte critério para a capacidade resistente da região nodal à compressão:

$$F_{zd} = f_{2cd} = f_{cd} \quad (3.27)$$

Onde:

$f_{2cd}$ =Resistência do concreto nas regiões nodais para o estado biaxial de compressão.

$f_{cd}$ =Resistência do concreto à compressão.

⇒ E para o estado triaxial de compressão, tem-se o critério conforme Eq. (3.28):

$$F_{zd} = f_{3cd} = 3,30f_{cd} \quad (3.28)$$

Onde:

$f_{3cd}$ =Resistência do concreto nas regiões nodais para o estado triaxial de compressão.

$f_{cd}$ =Resistência do concreto à compressão.

Quando esses valores de capacidade resistente à compressão do concreto são considerados nas regiões nodais, devem-se levar em consideração as tensões transversais inclusas na análise, já que essas requerem uma armadura específica.

Para regiões nodais contendo tirantes, ou armaduras ancoradas, a capacidade resistente à compressão é dada pela Eq. (3.29).

$$F_{zd} = f_{2cd} = 0,70f_{cd} \quad (3.29)$$

### 3.6.2 ACI-318 (2005)

Os nós são classificados por diversos autores e também pela norma ACI-318 (2005) de acordo com os esforços a que estão envolvidos. A ACI-318 (2005) realiza a classificação de quatro tipos de nós: CCC, CCT, CTT, TTT.

Para zonas nodais que estejam submetidas a apenas tensões de compressão (bielas) por todos os lados são classificadas como CCC. Da mesma forma caso estejam envolvidas por apenas uma tensão de tração (tirante), e as demais tensões de compressão (bielas), a região é classificada como sendo uma CCT.

Já para a situação oposta são denominadas CTT, ou seja, circundas por apenas uma biela e as demais direções por tirantes, ou ainda por tirantes em todas as direções, para esse caso são classificadas em zonas nodais do tipo TTT.

As regiões nodais nas quais bielas e tirantes se interceptam e as tensões correspondentes apresentam valores iguais em todas as direções são chamadas de regiões nodais hidrostáticas.

Em um modelo de bielas e tirantes, de acordo com ACI-318 (2005), a zona nodal pode ser estendida devido à ligação entre o tirante e a porção da biela. Com isso, a zona nodal apresentaria lados que correspondem à largura efetiva da biela ( $w_s$ ) e a largura efetiva do tirante ( $w_t$ ).

De acordo com a ACI-318 (2005), a resistência à compressão das zonas nodais pode ser obtida a partir da Eq. (3.30).

$$F_{zd} = F_{nn} = f_{ce}A_{nz} \quad (3.30)$$

Onde:

$A_{nz}$ —será a menor área entre a área da face da zona nodal com a ação de uma força  $F_u$  perpendicular à sua linha de ação ou a área de uma seção da zona nodal, perpendicular à linha de ação da força resultante na mesma seção ou efetiva resistência à compressão. (Sendo  $F_u$  a

maior força atuando em uma biela ou tirante em uma dada área ou zona nodal de um modelo de bielas e tirantes)

$f_{ce}$ = Efetiva resistência à compressão do concreto na zona nodal, que não deve exceder valores conforme Eq. (3.31).

$$f_{ce} = 0.85 \beta_n f_c \quad (3.31)$$

Onde:

$\beta_n=1,0$  - para zonas nodais delimitadas por bielas (CCC), áreas de apoio, ou ambos;

$\beta_n=0,8$  - para zonas nodais ancorando tirantes (CCT);

$\beta_n=0,6$  - para zonas nodais ancorando dois ou mais tirantes (CTT e TTT);

O ângulo de inclinação entre as bielas e os tirantes nas regiões nodais, de acordo com a norma ACI-318 (2005), não devem ser inferiores a 25° (graus). Esse ângulo entre os eixos das bielas e tirantes que atuam em um nó deve ser grande o suficiente para suavizar a formação de fissuras e para evitar incompatibilidades, devido ao encurtamento das bielas e alongamento dos tirantes ocorrendo quase na mesma direção.

### 3.6.3 CEB FIB Model Code (2010)

De acordo com o Código Modelo CEB-FIB (2010), para o dimensionamento dos nós deve ser considerado um fator de redução na resistência à compressão do concreto nas zonas nodais, obtida conforme Eq. (3.32).

$$F_{zd} = k_c \frac{f_{cd}}{\gamma_c} \quad (3.32)$$

Onde:

$f_{cd}$ =Resistência à compressão de cálculo do concreto;

$\gamma_c$ = Coeficiente de segurança parcial para as propriedades do concreto (1,5 ou 1,2 conforme capítulo 4 da norma);

$k_c$ =fator de redução obtido considerando as seguintes situações:

⇒ Para a compressão dos nós onde não existem tirantes ancorados o fator  $k_c$  é dado conforme Eq. (3.33).

$$k_c = 1,00 \left( \frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} \leq 1,00 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}) \quad (3.33)$$

⇒ Para a compressão-tração dos nós com tirantes ancorados em uma ou duas direções o fator  $k_c$  é dado conforme Eq. (3.34).

$$k_c = 0,75 \left( \frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} \leq 1,00 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}) \quad (3.34)$$

Onde:

$f_{ck}$  = Resistência característica do concreto à compressão.

### 3.6.4 EUROCODE 2 (2002)

O EUROCODE 2 (2002) apresenta os valores de cálculo para as tensões de compressões nos nós de modelos de bielas e tirantes determinados considerando as situações apresentadas a seguir.

⇒ Em nós submetidos a tensões de compressão (bielas) onde não existem tirantes ancorados nos mesmos.

$$F_{zd} = \sigma_{Rd,m\acute{a}x} = k_1 \nu f_{cd} \quad (3.35)$$

Onde:

$\sigma_{Rd,m\acute{a}x}$  = máxima tensão que pode ser aplicada nas bordas de um nó;

$k_1 = 1,0$  (valor recomendado pela norma);

$\nu$  = Coeficiente de redução da resistência do concreto, obtido conforme Eq.(3.17) recomendada pela norma.

⇒ Em nós submetidos a tensões de compressão (bielas) com tirantes ancorados em uma direção.

$$F_{zd} = \sigma_{Rd,m\acute{a}x} = k_2 \nu f_{cd} \quad (3.36)$$

Onde:

$\sigma_{Rd,m\acute{a}x}$  = máxima tensão entre  $\sigma_{Rd,1}$  e  $\sigma_{Rd,2}$  aplicada nas bordas de um nó;

$k_2 = 0,85$  (valor recomendado pela norma);

⇒ Em nós submetidos a tensões de compressão (bielas) com tirantes ancorados em mais de uma direção.

$$F_{zd} = \sigma_{Rd,m\acute{a}x} = k_3 \nu f_{cd} \quad (3.37)$$

Onde:

$\sigma_{Rd,m\acute{a}x}$  = máxima tensão aplicada nas bordas de um nó;

$k_3 = 0,75$  (valor recomendado pela norma).

### 3.6.5 CSA-A23.3-04

A norma canadense CSA-A23 (2004) determina valores limites para as tensões de compressão nas regiões nodais. Essas tensões não devem exceder os valores obtidos a partir das Eqs. (3.38), (3.39) e (3.40) a seguir.

⇒ Para regiões nodais submetidas a tensões de compressão (bielas):

$$F_{zd} < 0,85 \phi_c f_c \quad (3.38)$$

⇒ Para regiões nodais com tirantes ancorados em uma direção:

$$F_{zd} < 0,75 \phi_c f_c \quad (3.39)$$

⇒ Para regiões nodais com tirantes ancorados em mais de uma direção:

$$F_{zd} < 0,65 \phi_c f_c \quad (3.40)$$

Onde:

$\phi_c = 0,65$  (Valor do fator de resistência do concreto recomendado pela norma);

$f_c$  = resistência à compressão do concreto.

### 3.6.6 ABNT NBR 6118/2014

A norma de projeto brasileira NBR 6118 (2014) determina valores limites para as tensões de compressão nas regiões nodais. Essas tensões não devem exceder os valores obtidos a partir das Eqs. (3.44), (3.45) e (3.46) a seguir.

⇒ Para regiões com tensões de compressão transversal ou sem tensões de tração transversal e em nós onde confluem somente bielas de compressão (nós CCC):

$$F_{cd1} = 0,85 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (3.41)$$

⇒ Para regiões com tensões de tração transversal e em nós onde confluem dois ou mais tirantes tracionados (nós CTT ou TTT):

$$F_{cd2} = 0,60 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (3.42)$$

⇒ Para regiões nodais onde conflui um tirante tracionado (nós CCT):

$$F_{cd3} = 0,72 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (3.43)$$

Onde:

$\alpha_{v2} = 1 - f_{ck} / 250$ , com  $f_{ck}$ , expresso em megapascal (MPa);

$f_{cd}$  = resistência a compressão do concreto igual a  $f_{ck} / \gamma_c$ , sendo  $\gamma_c$  o coeficiente de ponderação da resistência do concreto.

### 3.7 Tirantes

De acordo com Schäfer e Schlaich (1991), a armadura deve resistir aos esforços de tração em um elemento estrutural de concreto.

Silva e Giongo (2000) apontam que, deve-se considerar a força no tirante a resistência ao escoamento de cálculo do aço considerando o Estado Limite Último para dimensionar a área de armadura necessária, conforme Eq. (3.44). Além disso, o eixo das barras deve ser coincidente com o eixo do tirante do modelo.

$$A_s = \frac{\gamma_f R_{st}}{f_{yd}} \quad (3.44)$$

Onde:

$R_{st}$  = Força no tirante;

$f_{yd}$  = Resistência ao escoamento de cálculo;

$\gamma_f$  = Coeficiente de ponderação das cargas.

Schäfer e Schlaich (1991) explicam também que a resistência à tração do concreto deve ser utilizada apenas para o equilíbrio das forças, considerando que não haja nenhuma falha gerada por forças progressivas, apenas zonas de rupturas locais.

Nos próximos itens o assunto é abordado de forma resumida, apenas com o intuito de conhecer os critérios que vêm sendo adotados para os tirantes nas recomendações e normas atuais.

### 3.7.1 EHE (2008)

De acordo com a norma espanhola EHE (2008), a capacidade resistente dos tirantes, representados pelas armaduras, considerando o estado limite último, corresponderá ao alcance da tensão de cálculo, conforme Eq. (3.45) e (3.46) a seguir.

⇒ Para armaduras passivas:

$$F_t = \sigma_{sd} = f_{yd} \quad (3.45)$$

Onde:

$\sigma_{sd}$  = Tensão de cálculo nas armaduras passivas;

$f_{yd}$  = Resistência de cálculo da armadura passiva igual a ( $f_{yd}=f_{yk}/\gamma_s$ ). Sendo  $f_{yk}$  a tensão de escoamento do aço e  $\gamma_s$  o coeficiente de segurança do aço igual a 1,15 ou 1,00 conforme capítulo 15 da norma.

⇒ Para armaduras ativas:

$$F_t = \sigma_{pd} = f_{pd} \quad (3.46)$$

Onde:

$\sigma_{pd}$  = Tensão de cálculo nas armaduras ativas;

$f_{pd}$  = Resistência de cálculo da armadura ativa igual a ( $f_{pd}=f_{pk}/\gamma_s$ ). Sendo  $f_{pk}$  a tensão de escoamento do aço e  $\gamma_s$  o coeficiente de segurança do aço igual a 1,15 ou 1,00 conforme capítulo 15 da norma.

Quando não se estuda as condições de compatibilidade de uma forma explícita, segundo a norma, é necessário limitar a máxima deformação dos tirantes no estado limite último.

Com isso, a tensão da armadura no estado limite de serviço também seria limitada. Assim, a capacidade resistente de um tirante constituído por armadura é dada conforme Eq. (3.47).

$$F_t < (A_s f_{yd} + A_p f_{pd}) \quad (3.47)$$

Onde:

$A_s$  = Seção da armadura passiva;

$A_p$  = Seção da armadura ativa.

### 3.7.2 ACI-318 (2005)

A resistência nominal de um tirante, de acordo com ACI-318 (2005) é obtida a partir da Eq. (3.48).

$$F_t = F_{nt} = A_{ts} f_y \quad (3.48)$$

Onde:

$F_{nt}$  = Resistência nominal de um tirante;

$A_{ts}$  = Área de aço não protendido em um tirante;

$f_y$  = tensão de escoamento do aço;

Caso a distribuição de barras da armadura seja realizada em uma única camada a largura efetiva do tirante ( $w_t$ ) é considerada como sendo igual ao diâmetro da barra mais duas vezes o cobrimento necessário.

Caso contrário, se a largura do tirante exceder esse valor, as barras da armadura devem ser distribuídas uniformemente em toda largura ( $w_t$ ) e espessura do tirante.

O eixo da armadura deve coincidir com o eixo do tirante no modelo de bielas e tirantes e um limite superior da largura do tirante ( $w_{t,max}$ ) pode ser calculado considerando-se a Eq. (3.49).

$$w_{t,max} = \frac{F_{nt}}{(f_{ce} b_s)} \quad (3.49)$$

Onde:

$f_{ce}$  = Efetiva resistência à compressão do concreto na zona nodal hidrostática obtida a partir da Eq. (3.31);

$b_s$  = Largura da biela.

O comprimento de ancoragem das barras é apontado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.** com o nome de  $l_{anc}$ . De acordo com a norma ACI-318 (2005), a ancoragem das barras do tirante deve ocorrer antes que os baricentros das barras saiam do contorno da zona nodal estendida.

### 3.7.3 CEB FIB Model Code (2010)

De acordo com o Código Modelo CEB-FIB (2010), a resistência dos tirantes pode ser assumida como sendo igual a:

$$F_t = f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (3.50)$$

Onde:

$f_{yd}$  = Valor de cálculo da tensão limite de escoamento;

$f_{yk}$  = Valor característico da tensão de escoamento das armaduras;

$\gamma_s$  = Coeficiente de segurança parcial para as propriedades das barras de aço adotadas em elementos estruturais de concreto armado (igual a 1,15 ou 1,0, conforme capítulo 4 da norma)

### 3.7.4 EUROCODE 2 (2002)

De acordo com EUROCODE 2 (2002) a força de tração nos tirantes pode ser obtida considerando-se o comprimento das regiões contínuas e descontínuas. A força de tração T pode então ser obtida considerando:

⇒ Regiões parcialmente descontínuas onde:

$$b \leq \frac{H}{2} \quad (3.51)$$

Onde:

b=Largura total de uma seção transversal da região;

H=Altura da região analisada.

A força de tração é então obtida pela Eq. (3.52).

$$T = \frac{1}{4} \frac{b - a}{b} F \quad (3.52)$$

Onde:

F=Ação.

⇒ E para regiões totalmente descontínuas onde:

$$b > \frac{H}{2} \quad (3.53)$$

A força de tração é então obtida pela Eq. (3.54).

$$T = \frac{1}{4} \left( 1 - 0,7 \frac{a}{h} F \right) \quad (3.54)$$

Nos locais onde os nós distribuídos se estendem por um trecho considerável, a armadura deve se distribuir ao longo do comprimento onde as trajetórias das tensões de compressão são curvas.

### 3.7.5 CSA-A23.3-04

De acordo com o código canadense CSA-A23.3 (2004) a área de armadura deve ser suficientemente grande para garantir que a força de tração calculada não exceda o valor apontado na Eq. (3.55).

$$T < \phi_s f_y A_{st} \quad (3.55)$$

Onde:

T=Força de tração;

$\phi_s$ =Fator de resistência para a armadura igual a 0,85, conforme item 8.4.3 do código;

$f_y$ =Resistência ao escoamento do aço;

$A_{st}$ =Área da armadura do tirante.

### 3.7.6 ABNT NBR 6118/2014

De acordo com a norma de projeto brasileira NBR 6118 (2014) a área de armadura deve ser calculada a partir da Eq. (3.56).

$$A_s = \frac{F_{sd}}{f_{yd}} \quad (3.56)$$

Onde:

$F_{sd}$ =Força de tração determinada no tirante;

$f_{yd}$ =Resistência ao escoamento do aço ( $f_{yk}/1,15$ );

$A_s$ =Área da armadura do tirante.

### 3.8 Modelos de Bielas e Tirantes: Sequência usual de Passos

Em resumo, a sequência usual de passos para se executar um projeto aplicando-se modelos de bielas e tirantes é dada conforme apresentado a seguir.

- 1) Definição das regiões de descontinuidades na estrutura, que pode ser realizada com o auxílio do princípio de Saint-Venant.
- 2) Determinação dos esforços solicitantes no contorno a partir do equilíbrio entre as forças aplicadas e os esforços internos. Para isso as forças distribuídas são substituídas por concentradas equivalentes;
- 3) Desenvolvimento do modelo de bielas e tirantes a partir de algum critério adotado para a definição desse arranjo (bielas, tirantes e nós), a princípio considerando a análise elástica da trajetória de tensões;
- 4) Verificação ou dimensionamento dos elementos do modelo (bielas, tirantes e nós) de modo que esses suportem os esforços internos;
- 5) Detalhamento dos tirantes e verificação das condições de ancoragem de forma a corresponderem a distribuições de armaduras correntes e exequíveis;
- 6) Aperfeiçoamento do modelo se necessário.

# 4

## OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

O termo “otimização” em engenharia pode ser definido como o processo de modelagem de problemas no qual se busca minimizar ou maximizar determinado critério de projeto, ou critérios de projeto em alguns problemas, visando encontrar a solução considerada ótima globalmente para o problema.

Liang (2005) aponta que a Otimização Estrutural tem como objetivo maximizar o desempenho de um elemento estrutural a fim de se obter o projeto estrutural ideal (mais eficiente). A busca de projetos que atendam às necessidades como a redução de custos, a redução de impactos ambientais gerados pela utilização de recursos naturais, a obtenção de estruturas leves, competitivas, que satisfaçam critérios de desempenho estabelecidos, têm-se tornado cada vez frequente no âmbito da Engenharia de Estruturas.

O presente trabalho irá abordar o tema Otimização Topológica, que é um campo de pesquisa da engenharia que tem como objetivo a busca por um projeto adequado, obedecendo algumas restrições impostas ao mesmo de forma a garantir seu desempenho estrutural.

Nos itens a seguir é realizada uma breve revisão bibliográfica do assunto.

### 4.1 Breve Histórico

O conceito de otimização topológica foi inicialmente introduzido por Maxwell em 1870. O cientista estudou, no final do século XIX, problemas envolvendo elementos estruturais

submetidos a carregamentos, como pontes, visando obter o menor volume possível de material de tal forma que não afetasse o desempenho da estrutura.

Utilizando-se de conceitos da elasticidade, a partir do cálculo das tensões principais no elemento estrutural num domínio finito, e, considerando também, os pontos de apoio desse domínio, Maxwell (1870) sugeriu que a estrutura ótima seria constituída de elementos de treliça alinhados a essas direções principais. A Fig. 4.1 corresponde a um dos exemplos apresentados no estudo de Maxwell (1870).

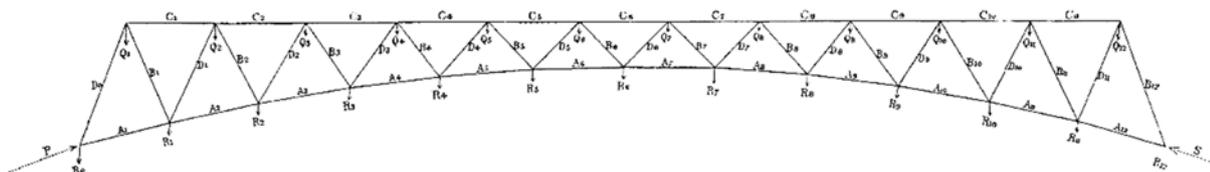


Fig. 4.1 – Exemplo apresentado em Maxwell (1870) referente à aplicação do princípio proposto no estudo em pontes (Maxwell, 1870).

Michell (1904) deu prosseguimento aos estudos nessa direção aplicando o método de treliças proposto por Maxwell (1870) em diversos tipos de estruturas a fim de obter o menor volume de material considerando as tensões nas barras.

A Fig. 4.2 ilustra dois exemplos do estudo de Michell (1904) para domínios bidimensionais, adotando-se o mesmo conceito de alinhar elementos de barras com as tensões principais no domínio para a obtenção de uma solução que corresponde à topologia ótima da estrutura.

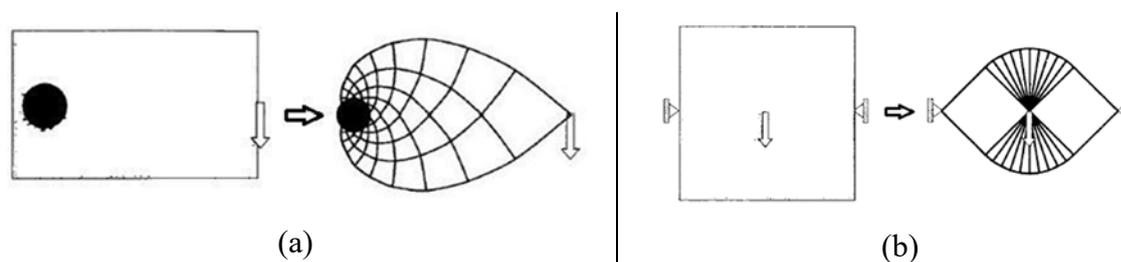


Fig. 4.2 – (a) e (b) Exemplos da solução da topologia ótima da estrutura proposta por Michell (Michell, 1904 *apud* Bendsoe e Sigmund, 2003)

Após o desenvolvimento desses estudos, realizados por Michell (1904), um dos primeiros a considerar suas soluções foi o trabalho desenvolvido em Cox (1958). Pois, apesar dos resultados de Michell (1904) serem considerados muito acadêmicos para a época, com a

evolução da tecnologia e implementação de softwares tais resultados passaram a ser reproduzidos e, até nos dias atuais, são realizados estudos envolvendo as estruturas treliçadas propostas em Michell (1904).

Segundo Rozvany (2011), nos anos posteriores estudos relacionados à otimização estrutural, como os desenvolvidos em Hegemier e Prager (1969), foram realizados estendendo-se os conceitos propostos por Michell (1904) para diferentes condições de cargas na estrutura. Hemp, em 1974, também propôs soluções para outras condições de carga, mais especificamente para cargas distribuídas entre apoios.

A partir do surgimento de softwares, foram desenvolvidos diversos estudos envolvendo a otimização estrutural com o auxílio do método dos elementos finitos podendo-se citar os trabalhos de Chen e Olhoff (1981), Rozvany *et al.* (1982) e Kohon e Strang (1986).

Iniciam-se, também, os primeiros estudos relacionados à otimização topológica devido à necessidade de resolver problemas relacionados com atualização da malha de elementos finitos, a cada iteração em que o problema físico era modificado, o que gerava grande complexidade na geração dos algoritmos.

Conceitos relacionados aos tipos de otimização existentes, podendo ser classificados em Otimização Paramétrica, Otimização de Forma e Otimização Topológica, que serão abordados em detalhes no próximo item. A vantagem da otimização topológica, em relação à otimização de forma e a paramétrica, seria a possibilidade de alterar o leiaute da estrutura.

Bendsøe e Kikuchi (1988) iniciaram estudos adotando-se o método da homogeneização para a realização da otimização topológica. Esse método foi criado com o objetivo de aprimorar o método de otimização de forma permitindo a obtenção topologias e formas ótimas das estruturas. Bendsøe e Kikuchi (1988) partiram do princípio de fixar o domínio inicial da estrutura e, desta forma, manter o modelo de elementos finitos inalterado no processo iterativo de otimização da estrutura. Esse conceito baseia-se no chamado domínio fixo estendido de projeto.

Nos anos posteriores, diversos estudos foram realizados visando unir os métodos de otimização, topológica, paramétrica e de forma, para obter melhores resultados podendo-se citar o trabalho desenvolvido por Olhoff *et al.* (1991).

Rozvany *et al.* (1995) aponta que a otimização topológica pode ser realizada considerando-se um meio discreto e um meio contínuo, sendo que em um meio discreto pode-se ter estruturas de malha contínua (“gridlike contínua”), que tem sua solução ótima obtida analiticamente, considerando um número infinito de barras rígidas separadas por um espaço infinitesimal. E estruturas discretas (“ground structural”), com soluções ótimas obtidas numericamente a partir de um domínio de projeto com vários pontos distribuídos.

A Fig. 4.2-a, que corresponde a uma estrutura analisada por Michell (1904), ilustra a otimização topológica de um meio discreto com malha contínua (“gridlike contínua”), já que a configuração otimizada da estrutura é composta por diversas barras rígidas. E a Fig. 4.3 um exemplo apontado em Lima (2002) de otimização topológica a partir de uma estrutura discreta (“ground structural”).

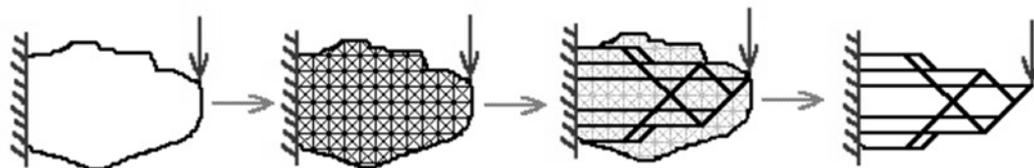


Fig. 4.3 – Otimização topológica a partir de uma estrutura discreta (Adaptado de Lima, 2002).

Diversos métodos, desenvolvidos para a criação de topologias otimizadas de estruturas, são adotados nos estudos realizados podendo-se citar os métodos baseados na teoria da homogeneização abordada em estudos como os de Bendsøe e Kikuchi (1988), Silva *et al.* (1999) e Bendsøe e Sigmund (2003). Os métodos baseados na otimização estrutural evolutiva adotado em Xie e Steven (1993), Xie e Steven (1997), Querin *et al.* (2000a), Querin *et al.* (2000b), Simonetti (2009), Lanes (2013). Técnicas de otimização desenvolvidas com base no método de densidades adotado em Bendsøe (1989), Rozvany e Zhou (1991), Lima (2002), entre outros.

Alguns desses métodos serão resumidamente comentados nos próximos itens. No presente trabalho será adotado uma técnica de otimização evolucionária denominada ESO (*Evolutionary Structural Optimization*).

## 4.2 Tipos de Otimização Estrutural

Conforme comentado no subitem anterior, a otimização estrutural é dividida em três categorias, Otimização Paramétrica, Otimização de Forma e Otimização Topológica. A Fig. 4.4 ilustra essas categorias.

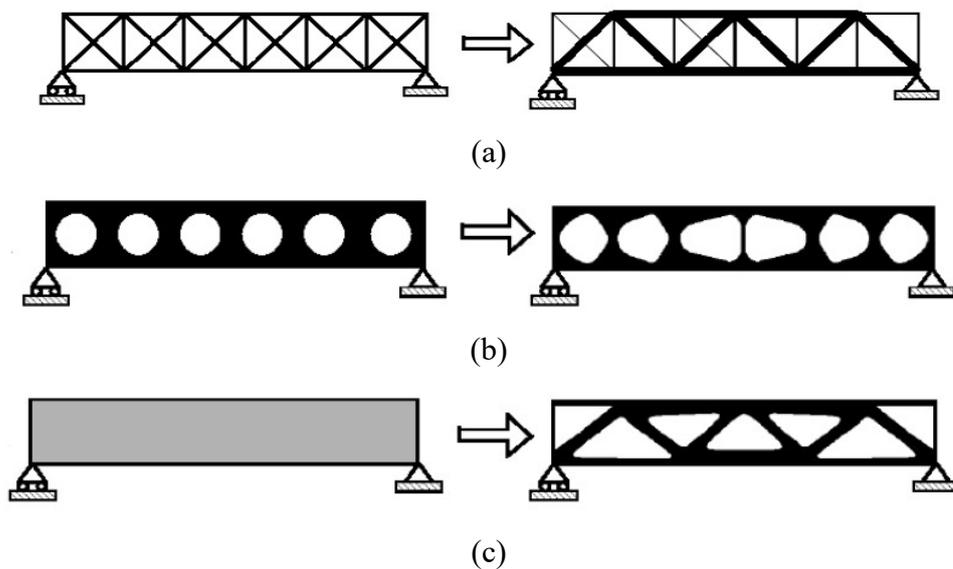


Fig. 4.4 – Categorias para a otimização estrutural (a) Otimização Paramétrica (b) Otimização de Forma (c) Otimização Topológica (Bendsøe e Sigmund, 2003).

Ao se realizar o processo de otimização, inicialmente, se estabelece algum critério de projeto e também a aparência da estrutura. Na otimização paramétrica, como mostra a Fig. 4.4-a, as dimensões ou a razão das dimensões da estrutura variam, ou seja, são otimizadas, mantendo-se a sua forma e topologias fixas.

Na otimização de forma (ou de configuração) os contornos da estrutura são alterados, ou seja, a forma da estrutura varia, mas a topologia permanece fixa, sem a inserção de vazios. Parametriza, como variável de projeto, a forma dos vazios, como pode ser visto na Fig. 4.4-b.

Ao modificar os contornos da estrutura tem como objetivo alcançar economia de peso e melhorar o desempenho estrutural.

Por último, a otimização topológica, conforme Fig. 4.4-c, na qual há a ocorrência de inserção de vazios no domínio estrutural para se chegar à forma ótima. Algum critério de projeto é estabelecido para se obter a estrutura otimizada, como a redução de peso na estrutura, menores deslocamentos ou frequências de vibração (no caso de análises dinâmicas) do projeto, a tensão máxima na estrutura, entre outros.

### 4.3 Técnicas de Otimização Topológica

Segundo Eschenauer e Olhoff (2001), existem dois grupos de métodos de otimização topológica, nos quais se buscam soluções ótimas por meio da variação do domínio da estrutura (topologia). O primeiro adota problemas através de uma aproximação por microestrutura (ou material), que estabelece uma relação entre a rigidez e a densidade associada ao domínio com valores de 0 (vazio) a 1 (material sólido). As técnicas de Material Intermediário Artificial (SIMP - *Solid Isotropic Material with Penalization*) e Material Poroso Homogeneizado são exemplos desse primeiro grupo.

O segundo grupo aborda o problema através de uma aproximação por macroestrutura (ou geométrica), nesse caso a topologia da estrutura é modificada baseada na inserção de vazios em sistemas contínuos (TSA - *Topological Sensitivity Analysis*) e inserção de vazios em sistemas discretizados (ESO – *Evolutionary Structural Optimization*).

É importante mencionar que estudos envolvendo alterações e/ou adaptações dessas técnicas vêm sendo realizados como a alteração da técnica ESO, chamada SESO (*Smoothing Evolutionary Structural Optimization*), proposta em Simonetti (2010), que consiste na diminuição progressiva da contribuição da rigidez dos elementos finitos com valores baixos de tensões de von Mises. Fernandes (2013) adotou essa mesma técnica SESO incluindo, porém, análises considerando o efeito da não-linearidade geométrica na otimização topológica.

Outro método existente, denominado AESO (*Additive Evolutionary Structural Optimization*), foi proposto em Querin *et al.* (2000a), que sugere que ocorra a inserção de elementos nos domínios da estrutura onde necessário adotando um método semelhante ao ESO.

E, ainda, o método BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) estudado em Querin *et al.* (2000b) que corresponde a uma combinação dos métodos ESO e AESO, entre outros.

A técnica probabilística de otimização, denominada GESO, que seria a modificação da técnica ESO com a inclusão dos operadores do método de Algoritmos Genéticos, proposta em Zhang *et al.* (2014). Nesse estudo, a automatização da obtenção do modelo de bielas e tirantes por meio da otimização topológica é também abordada considerando a não linearidade do material e as soluções apontaram a necessidade em se utilizar menos aço ao se dimensionar a estrutura, quando comparados com a análise linear.

Todos os métodos citados utilizam como informação primordial a sensibilidade da função objetivo. No caso particular de se trabalhar com a energia interna de deformação, os métodos SIMP, ESO e TSA fornecem expressões de sensibilidade bastante semelhantes, apesar de origens conceituais diferentes. Nos itens seguintes, algumas dessas técnicas de otimização são abordadas.

#### **4.3.1 SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization)**

A técnica de otimização topológica, denominada SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), foi baseada na Teoria da Homogeneização, primeiramente, proposta em Bendsøe e Kikuchi (1988), que propõe descrever propriedades efetivas do elemento composto utilizando-se microestruturas formadas pela mistura de materiais homogêneos, ou seja, por meio de inúmeras células unitárias agrupadas formando o elemento.

As microestruturas, originadas desse material composto, são formadas pela mistura de células que se repetem. Para descrever a técnica Bendsøe e Kikuchi (1988) exemplificam considerando uma placa perfurada extraída de um elemento composto, podendo apresentar, ou não, material com comportamento intermediário entre o sólido e o vazio.

A partir disso, seria possível considerar a existência de dois tipos de microestruturas, conforme pode ser visto na Fig. 4.5.

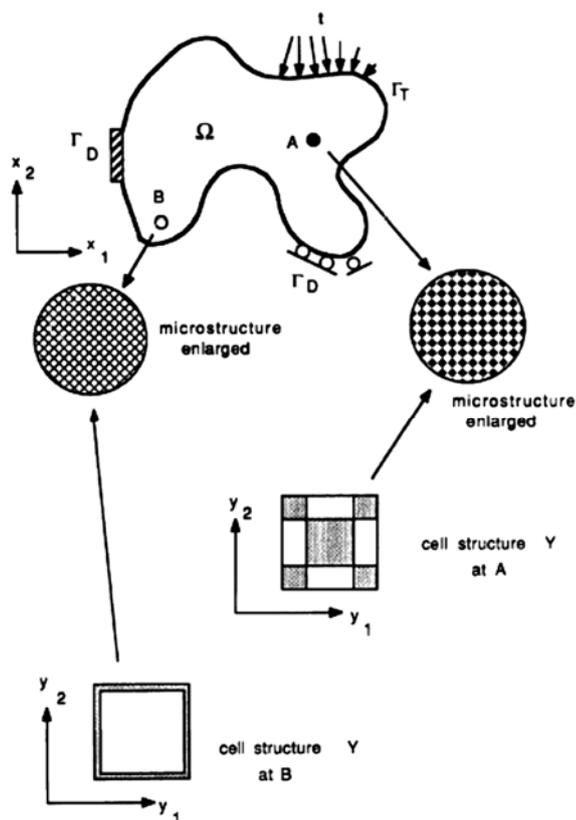


Fig. 4.5 – Modelo de material com microestrutura (Bendsøe e Kikuchi, 1988)

A primeira, apontada como “A”, seria formada por células contendo partes intercaladas entre o sólido e o vazio. E a segunda, chamada de “B”, seria composta por material sólido e um vazio interno.

Desta forma, considerando-se que o material é formado por uma repetição periódica de microestruturas com propriedades conhecidas, seria possível realizar a otimização da distribuição de material num domínio fixo estendido.

A desvantagem do Método de Homogeneização seria a alta complexidade na implementação numérica, dependendo da geometria, o acréscimo de variáveis de projeto e também devido ao alto custo computacional, com isso, o método SIMP é proposto.

O método SIMP considera o desconhecimento da microestrutura, e o conhecimento da sua rigidez, com uma única variável de projeto, a densidade, que varia de 0 (vazio) a 1 (material sólido). As soluções obtidas pelo método SIMP são semelhantes às obtidas pelo método da Homogeneização, porém sua implementação numérica é mais simples.

Pantoja (2012) adota a técnica denominada SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) para automatização do modelo de bielas e tirantes. Além disso, faz o uso de elementos chamados de indutores, que são utilizados como armaduras pré-fixadas para influenciar no encaminhamento das cargas. A técnica é adotada com o objetivo de automatizar o processo de determinação da configuração das bielas e dos tirantes.

#### **4.3.2 TSA (Topological Sensitivity Analysis)**

O método de otimização topológica TSA (*Topological Sensitivity Analysis*) utiliza uma função escalar, denominada Derivada Topológica, para fornecer sensibilidade a uma determinada função, considerando um pequeno furo criado num determinado ponto do domínio.

Conforme já comentado, no método TSA a topologia da estrutura é modificada por meio de uma aproximação por macroestrutura (ou geométrica), baseando-se na inserção de vazios em sistemas contínuos.

A função escalar é, então, definida em todo o domínio inicial ( $\Omega$ ) do sistema que é perturbado quando ocorre a inserção de furos. A cada perturbação o domínio é redefinido para ( $\Omega_\epsilon$ ). Essa modificação do domínio e seu contorno é realizada a partir do cálculo da sensibilidade da função custo.

Apesar da definição de Derivada Topológica se apresentar bastante geral, sua resolução não pode ser realizada de maneira trivial. Portanto, diversos estudos foram realizados com o objetivo de desenvolver ferramentas matemáticas que possibilitassem a realização da análise de sensibilidade considerando a mudança de forma, como o estudo apresentado em Novotny *et al.* (2003).

#### 4.3.3 ESO (Evolutionary Structural Optimization)

O método ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), que será adotado no presente trabalho, foi desenvolvido por Xie e Steven (1993) a partir de observações do processo natural de evolução de estruturas na natureza tais como ossos, árvores e conchas e a constatação de que, a topologia e forma de tais estruturas alcançam o seu ideal durante um longo período evolutivo necessário para se adaptarem a qualquer ambiente em que se encontram inseridas.

O método de otimização ESO é uma técnica de modificação da topologia estrutural considerada simples, realizada com auxílio do MEF por meio da remoção gradual de elementos finitos da malha, correspondentes a regiões que não contribuem efetivamente para a boa performance da estrutura. O objetivo é encontrar a melhor distribuição de material, num domínio de projeto fixo, satisfazendo às restrições que lhe são impostas.

A vantagem dessa técnica de otimização em relação às outras, mencionadas anteriormente, está na proposta de se retirar fisicamente o material do modelo. Já nos métodos anteriores, há uma penalização do domínio, mas não uma retirada de material propriamente dita.

A Otimização Estrutural Evolucionária é uma técnica na qual a forma e a topologia são determinadas de maneira simultânea e tem sua origem baseada no procedimento denominado “*Hard-Kill*” que consiste na remoção definitiva de elementos que não atendem a um critério de rejeição estabelecido. Ou seja, a técnica ESO de otimização é um processo heurístico de remoção de elementos realizada de maneira gradual e iterativa, considerando critérios de rejeição predefinidos.

Oliveira (1998) utiliza uma técnica de otimização topológica chamada de “Método da Flexibilização Súbita” (*hard-kill method*) e o “Método da Remoção” para a automatização da definição de modelos de bielas e tirantes. Com o auxílio do MEF e a obtenção das tensões elásticas principais, o método, num primeiro momento, reduz bruscamente os módulos de elasticidades dos elementos considerados com tensões baixas, quando comparadas com uma tensão de referência previamente definida como uma fração da maior tensão principal na malha. Esses são então considerados ineficientes e posteriormente são removidos da malha. A Fig. 4.6 ilustra a aplicação do método.

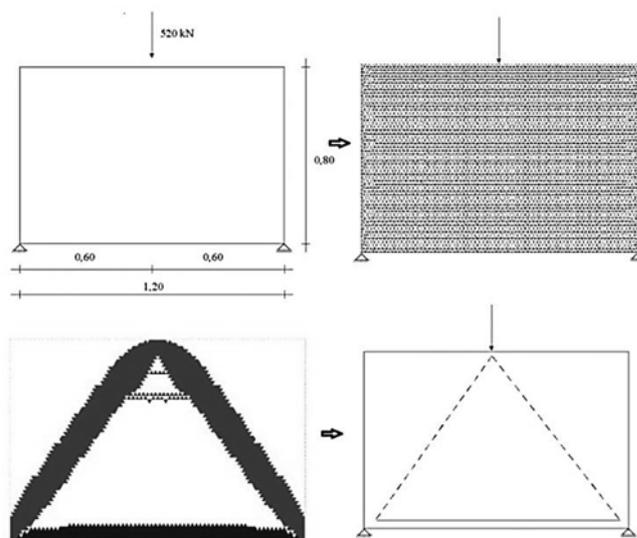


Fig. 4.6 – Exemplo de automatização da obtenção do modelo de bielas e tirantes por meio da otimização topológica. (Adaptado de Oliveira, 1998)

Os critérios de otimização adotados podem estar relacionados com diversos parâmetros como, por exemplo, com a minimização de tensão, com a rigidez, como no estudo de Chu *et al.* (1996), com a deformação, considerada em Xie e Steven (1997), entre outros.

Podem ser citados alguns estudos que adotam a técnica de otimização ESO como o de Liang *et al.* (2000), que propõem a utilização da otimização topológica evolucionária para automatização da escolha do modelo de bielas e tirantes. O método proposto considera a energia de deformação de elementos virtuais para realizar a remoção, que é monitorada por um índice de desempenho. Os elementos discretos são então removidos sistematicamente a partir de sua contribuição para a rigidez no elemento estrutural em concreto, estabelecendo uma configuração final do modelo de bielas e tirantes, com os mecanismos de transferência de cargas correspondentes. O trabalho apresenta diversos exemplos de aplicação do método.

Kwak e Noh (2006) propuseram uma modificação da otimização topológica evolucionária para realizar a automatização da escolha do modelo de bielas e tirantes. O critério adotado nesse estudo, com o auxílio do MEF, baseia-se na remoção sistemática de elementos finitos com menor energia virtual de tensão. A Fig. 4.7 ilustra a solução obtida em um dos exemplos apresentados no estudo.

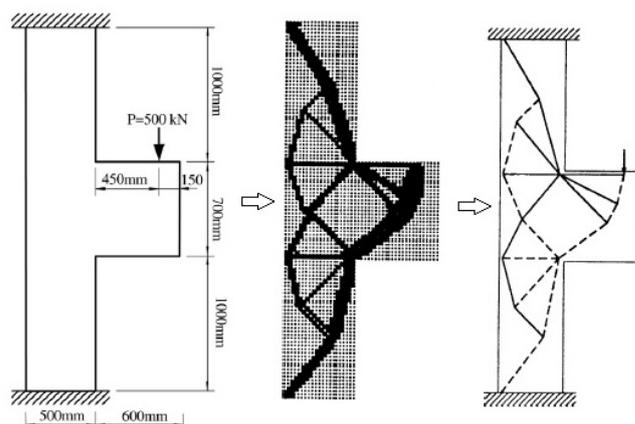


Fig. 4.7 – Exemplo de automatização da obtenção do modelo de bielas e tirantes por meio da otimização topológica. (Adaptado de Kwak e Noh, 2006)

Almeida *et al.* (2011; 2013b) também propôs a utilização de uma ferramenta eficaz para o desenvolvimento dos modelos de bielas e tirantes para elementos estruturais bidimensionais. A técnica de otimização topológica adotada, denominada SESO (Smoothing ESO), é também uma variante do método clássico chamado ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) abordada em Simonetti *et al.* (2010).

A filosofia principal do método baseia-se na observação da necessidade do elemento na estrutura. Com auxílio do MEF, todos elementos que não forem necessários à estrutura têm a contribuição de sua rigidez reduzida, naturalmente e de forma progressiva, até que não tenha mais influência. O elemento é então removido de forma suave, suavizando os valores da matriz constitutiva do elemento, como se este estivesse em processo de danificação dando origem a configuração ideal para o modelo de bielas e tirantes.

- **ESO em nível de tensão**

No presente estudo, o critério de rejeição adotado é baseado no critério de tensão, ou seja, o nível máximo de tensão da estrutura, obtido a partir das análises pelo MEF, é utilizado como um indicador de eficiência de cada elemento. Aquela elemento submetido a uma baixa tensão poderia então ser removido da estrutura (Xie e Steven, 1997).

De acordo com Liang *et al.* (1999) e abordado em França *et al.* (2016), a otimização de estruturas contínuas sujeitas a restrições de tensão pode ser expressa conforme apresentado a seguir.

$$\begin{aligned} \text{minimize} &= \sum_{e=1}^N w_e(t_e) \\ \text{restrição} &= \sigma_{\max}^{\text{VM}} \leq \sigma^* \end{aligned} \quad (4.1)$$

Onde:

$w_e$  = É o peso do  $e$ -ésimo elemento;

$t_e$  = Espessura do  $e$ -ésimo elemento;

$\sigma^*$  = Tensão limite prescrita;

Dessa forma, a redução da massa é realizada a partir do critério de tensão máxima na estrutura, no qual os elementos com menores valores de tensão em toda a estrutura são selecionados e desconsiderados na malha.

A Fig. 4.8, apresentada em Simonetti *et al.* (2010), ilustra a realização da retirada do elemento pelo critério de remoção adotado.

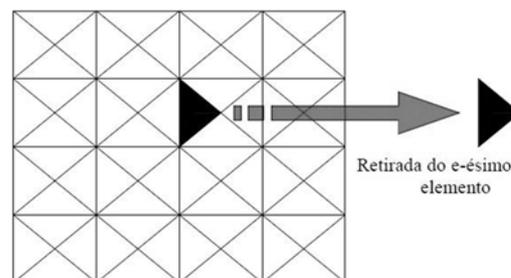


Fig. 4.8 – Remoção do elemento da malha pelo método de otimização evolucionária (Adaptado de Simonetti *et al.*, 2010)

Esse critério de remoção, inicialmente proposto por Xie e Steven, em 1992, é descrito pela Inequação (4.2) a seguir:

$$\sigma_e^{vM} < RR_i \cdot \sigma_{MAX}^{vM} \quad (4.2)$$

Onde:

$\sigma_e^{vM}$ =Tensão de von Mises do elemento analisado;

$RR_i$ =Razão de rejeição, adotada para retardar o processo de remoção com a seguinte variação

$0 < RR_i < 1,0$  ;

$\sigma_{MAX}^{vM}$ =Máxima tensão de von Mises da iteração.

A partir disso, é possível dizer que o ciclo de remoção dos elementos ocorrerá até que não se possa remover mais elementos num dado valor de  $RR_i$ . De acordo com Lanes (2013), ao se alcançar esse nível de equilíbrio, sem atingir, porém, a configuração ótima, o processo evolutivo seria redefinido adicionando-se a  $RR_i$  uma razão de evolução ER. Um novo ciclo de evolução se iniciaria até que não existam mais elementos a serem eliminados com essa nova razão de rejeição. Porém ao se atingir novamente o equilíbrio, a razão de rejeição ( $RR_i$ ) é, outra vez, atualizada. A Eq. (4.3) descreve esse processo.

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad i = 0,1,2, \dots \quad (4.3)$$

O valor inicial da razão de rejeição ( $RR_i$ ) é definido de maneira empírica conforme experiência do usuário para cada tipo de problema. A garantia da melhor convergência é dada considerando-se valores pequenos para a razão de evolução (ER) e razão de rejeição ( $RR_i$ ) em torno de 1%, de acordo com Querin (1997). Evitando que ocorra a remoção de uma região muito grande do domínio.

A RR será atualizada até a obtenção de uma configuração otimizada ou após atingir um critério de parada imposto. O critério de parada pode ser um volume final prescrito para a estrutura ou uma razão de rejeição final. Assim a razão de remoção da iteração deve sempre ser menor que uma razão de remoção máxima preestabelecida  $RR_f$ .

O processo de remoção dos elementos pela técnica ESO, pode ser matematicamente descrita da seguinte forma, conforme apresentado em Fernandes (2016):

$$D(j) = \begin{cases} D_0, & \text{se } j \in \Gamma \\ 0, & \text{se } j \in \bar{\Gamma} \end{cases} \quad (4.4)$$

Onde:

$D(j)$ = matriz constitutiva do ponto  $j \in \Omega$ ;

$D_0$ =matriz constitutiva inicial do projeto;

$\Omega$ =domínio da estrutura dado por  $\Omega = \Gamma + \bar{\Gamma}$ ;

$\Gamma$ =conjunto dos elementos que não serão removidos da estrutura (sólido), dado por  $\Gamma =$

$$\left\{ \Omega / \left( \frac{\sigma_e^{VM}}{\sigma_{MAX}^{VM}(\Omega)} \right) \geq RR \right\};$$

$\bar{\Gamma}$ =conjunto dos elementos que serão removidos da estrutura (vazio), dado por  $\bar{\Gamma} = \Omega - \Gamma =$

$$\left\{ \Omega / \left( \frac{\sigma_e^{VM}}{\sigma_{MAX}^{VM}(\Omega)} \right) < RR \right\}$$

A tensão de von Mises é obtida a partir das seguintes considerações:

- Substituindo a Eq. (2.76) na Eq. (2.75), tem-se a Eq.(4.5):

$$(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3)^2 + (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1)^2 = 2\sigma_{esc}^2 \quad (4.5)$$

- Supondo-se que o escoamento ocorra para uma dada tensão de von Mises em cada elemento “e”, ou melhor, considerando  $\sigma_{esc} = \sigma_e^{VM}$  a tensão de von Mises é obtida a partir da Eq. (4.6).

$$\sigma_e^{VM} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3)^2 + (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1)^2} \quad (4.6)$$

- Por meio das tensões normais e de cisalhamento a tensão de von Mises é então obtida pela Eq. (4.7).

$$\begin{aligned} \sigma_e^{vM} \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

- E, para o caso plano, a tensão de von Mises é calculada para cada elemento a partir da Eq.(4.8).

$$\sigma_e^{vM} = \sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\tau_{12}} \quad (4.8)$$

Onde:

$\sigma_1$  e  $\sigma_2$  = Componentes normais do tensor de tensões nas respectivas direções x e y;

$\tau_{12}$  = Componentes de tensão de cisalhamento.

Lanes (2013), em seu estudo, implementou um algoritmo considerando o método ESO de otimização topológica para a aplicação no *software* Abaqus<sup>®</sup>. Tal algoritmo possibilitou o desenvolvimento de um script, a partir de uma linguagem de programação de alto nível denominada *Python*, com o objetivo de automatizar a realização de análises de otimização topológica em elementos estruturais por meio do *software* Abaqus<sup>®</sup>.

O script desenvolvido em Lanes (2013) é utilizado no presente estudo como auxílio na realização da automatização do Método de Bielas e Tirantes pela otimização topológica proposta no trabalho.

O processo evolucionário é resumido pelos seguintes passos:

Passo 1: discretização do domínio inicial da estrutura, utilizando-se uma malha fina de elementos finitos, e aplicação das condições de contorno e ações prescritas;

Passo 2: analisar a estrutura por elementos finitos (comportamento linear e não linear);

Passo 3: remover os elementos que satisfaçam a Inequação (4.2);

Passo 4: Acréscimo da razão de rejeição de acordo com a Eq. (4.3) até que o equilíbrio seja alcançado, caso contrário, repetir os passos 2 e 3;

Passo 5: repetir os passos 2 a 4, até que o projeto ótimo seja alcançado.

Na rotina desenvolvida, a remoção dos elementos no sistema não ocorre com a retirada literal dos mesmos. Após a identificação de uma região considerada ineficiente as propriedades mecânicas dessa região são alteradas para uma seção ou um material com características estruturais desprezíveis, quando comparadas com suas características mecânicas iniciais.

Sendo assim, a rotina requer que o próprio usuário estabeleça tais características físicas (como baixos módulos de elasticidade e densidade, entre outros) para a desativação estrutural dos elementos componentes do domínio.

#### 4.4 Possíveis Problemas Numéricos na Otimização Topológica

Conforme detalhado em Lanes e Greco (2013), o processo de Otimização Topológica pode apresentar algumas instabilidades numéricas como o chamado “tabuleiro de xadrez”, dependência de malha e ótimos locais, que serão brevemente abordados nos itens a seguir.

##### 4.4.1 Tabuleiro de Xadrez (checkerboard)

O tabuleiro de xadrez, também chamado de “checkerboard”, corresponde à existência de vazios (sem material) e sólidos (com material) alternados na solução topológica ótima da estrutura. A Fig. 4.9 ilustra esse problema numérico.

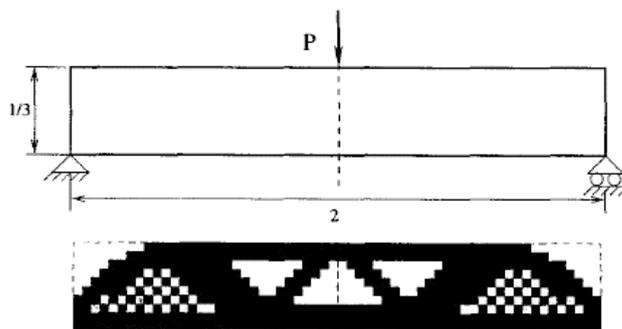


Fig. 4.9 – Exemplo de checkerboard – Representação qualitativa da ocorrência da instabilidade numérica (Sigmund e Perterson, 1998).

Autores como Díaz e Sigmund (1995) defendem que essa instabilidade ocorre devido às aproximações numéricas características do MEF, e, sendo assim, não representaria um problema relacionado com a topologia ótima do projeto. Uma técnica para realizar a eliminação do problema é sugerida em Bendsøe e Sigmund (2003), que propõem a utilização de elementos com função interpoladora de ordem superior, como, por exemplo, os elementos bilineares ou quadriláteros de 8 (oito) nós, uma vez que esses elementos poderiam simular o campo de deslocamentos de maneira mais precisa minimizando a ocorrência desse tipo de problema matemático.

#### 4.4.2 Dependência da Malha

O problema de dependência de malha está relacionado com as diversas soluções obtidas para diferentes discretizações num domínio. Diferente do que geralmente se espera, ou seja, quanto mais refinada a malha melhores serão os resultados obtidos, na Otimização Topológica o que ocorre é uma alteração da topologia ótima cada vez em que se aumenta a discretização.

O problema é abordado em diversos trabalhos como em Jog e Haber (1996) que sugerem técnicas para lidar com essas questões como o controle do perímetro das aberturas formadas nas topologias. A redução da dependência a partir do critério de remoção baseado na tensão média dos elementos finitos, quando a análise é realizada em nível de tensão, proposta em Kim *et al.* (2002). Ou, ainda, estudos como o de Sigmund (1997), que propõe adotar filtros de independência de malha, entre outros.

Simonetti (2016) utiliza da técnica Evolutionary Structural Optimization (ESO) acoplada com a formulação do Método dos Elementos de contorno (MEC) para a resolução de problemas de otimização topológica. A utilização do MEC para o cálculo das tensões dos pontos internos é adotado como estratégia para representar as regiões a serem eliminadas durante a otimização topológica. As cavidades são então criadas automaticamente em pontos internos de baixa tensão e são sub-regiões convexas. A aplicação desse método permitiu obter soluções com a ausência de instabilidades numéricas como a dependência de malha e o tabuleiro de xadrez, durante todo o processo iterativo.

#### 4.4.3 Ótimos Locais

O problema de ótimos locais está relacionado com a escolha de parâmetros a serem adotados no algoritmo, de acordo com Simonetti (2009). Mais especificamente, para o algoritmo de otimização, a adoção de diferentes parâmetros de entrada do problema, como o RR(razão de rejeição), ER(razão de evolução), entre outros, para uma mesma discretização da malha num domínio, pode causar a obtenção de diferentes soluções. Segundo Simonetti (2009), isso ocorre devido a não convexidade do problema.

Sigmund e Perterson (1998) sugerem que o controle de outras instabilidades, como as citadas no item anterior, pode minimizar a ocorrência desse tipo de problema na topologia final, pois tendem a tornar o problema convexo, já que evitam a necessidade de realizar alteração de parâmetros.

#### 4.4.4 Controle de instabilidade aplicado ao ESO

O processo de remoção dos elementos considerados ineficientes ocorre de forma natural e, independentemente da localização desses elementos no domínio, pode ocorrer o problema numérico tabuleiro de xadrez.

Para minimizar o problema numérico tabuleiro de xadrez é utilizada uma técnica denominada *Nibbling* ESO. Essa técnica, no presente trabalho, é utilizada de maneira associada ao método ESO convencional para o controle de cavidades. A partir de uma avaliação do campo de tensões a cada iteração e, após a verificação da necessidade de abertura de cavidades dentro do domínio de projeto, ocorre a eliminação apenas dos elementos que estão presentes nos contornos da estrutura. Evitando, assim, a geração de vazios desnecessários e em excesso no processo de otimização (LANES e GRECO, 2013).

Esse algoritmo é utilizado para otimizar os contornos de uma estrutura, sendo que, ao fim de cada iteração os valores de tensão são verificados para determinar a necessidade de se criar uma cavidade (vazios), caso uma região de baixa tensão for observada dentro da estrutura e o

valor de tensão estiver abaixo da tensão definida inicialmente, significa que haverá a necessidade da cavidade (Simonetti, 2009).

O processo ocorre com a aplicação da técnica ESO convencional quando conveniente e a aplicação do recurso *Nibbling* ESO, modificando a forma e o tamanho do contorno e das cavidades existentes, até haver necessidade de uma nova cavidade. Ambas as técnicas trabalhando de forma associada, conforme descrito a seguir a partir dos passos:

Passo 1: aplicação da técnica *Nibbling* ESO para verificar se existem elementos ineficientes nos contornos;

Passo 2: se verdadeiro, vá para o Passo 4, se não vá para o Passo 3

Passo 3: existe a necessidade de se criar uma nova cavidade, então, aplique a técnica ESO convencional;

Passo 4: caso a solução ótima seja alcançada, então, vá para o Passo 5, se não volte para o Passo 1;

Passo 5: o projeto ótimo foi alcançado.

Dessa forma, o elemento é removido, caso satisfaça a Eq, (4.2), somente se ao menos uma de suas arestas não esteja conectada a outros elementos na estrutura, exceto aqueles que estão adjacentes as condições de contorno aplicadas na estrutura.

Já para o problema de dependência de malha, é considerada a utilização da tensão média do elemento finito como critério de remoção, conforme proposto em Kim *et al.* (2002), citado no item anterior. Sendo que, quando se adotava a utilização da tensão máxima do elemento na análise, os resultados se apresentavam bastante dependentes da malha devido às singularidades que ocorriam próximas as condições de contorno. Esse efeito de influência da malha foi reduzido quando foi utilizada a tensão média como critério de remoção, de acordo com estudos realizados por Kim *et al.* (2002).

## 4.5 Índice de Performance

O cálculo do Índice de Performance é proposto em Liang *et al.*(2000) para medir a eficiência do desempenho estrutural, assim como auxiliar no critério de parada do processo de otimização. Por meio da Eq. (4.9) é possível calcular esse índice.

$$IP = \left( \frac{\sigma_{0,máx}^{vM}}{\sigma_{i,máx}^{vM}} \right) \frac{\rho_0 V_0}{\rho_i V_i} = \left( \frac{\sigma_{0,máx}^{vM}}{\sigma_{i,máx}^{vM}} \right) \frac{V_0}{V_i} \quad (4.9)$$

Onde:

$\sigma_{0,máx}^{vM}$  = tensões de von Mises máxima inicial;

$\sigma_{i,máx}^{vM}$  = tensões de von Mises máxima da i-ésima iteração;

$V_0$  = volume inicial;

$V_i$  = volume da i-ésima iteração;

$\rho_0$  e  $\rho_i$  = densidade inicial e da i-ésima iteração, iguais para materiais incompressíveis.

Com isso, conforme comentado em Fernandes (2016), a topologia é verificada por esse índice como um fator de monitoramento. Quando ocorre um decréscimo acentuado do índice, é uma indicação de que passou por uma configuração local ideal, não havendo, no entanto, garantia que tal topologia seja considerada uma topologia ótima ideal, mas sim uma configuração ideal para realização de estudos em um futuro projeto de engenharia.

O presente estudo, considera a análise do Índice de Performance (IP) com o objetivo de estimar um ótimo global para a solução da ótima topologia.

# 5

## **METODOLOGIA EMPREGADA**

### **5.1 Modelagem de Elementos em Concreto pelo MEF a partir do Software comercial Abaqus<sup>®</sup>**

Para a modelagem dos elementos estruturais a serem analisados, foi adotado o software comercial, Abaqus<sup>®</sup>.

O Abaqus<sup>®</sup> é um software comercial de análises de problemas multifísicos, que possui recursos apropriados para a realização de análises, lineares e não lineares, em elementos estruturais sujeitos a solicitações estáticas ou dinâmicas pelo MEF.

A Fig. 5.1 mostra o recurso disponível no software Abaqus<sup>®</sup> para a definição do critério de ruptura a ser adotado para o concreto no presente estudo.

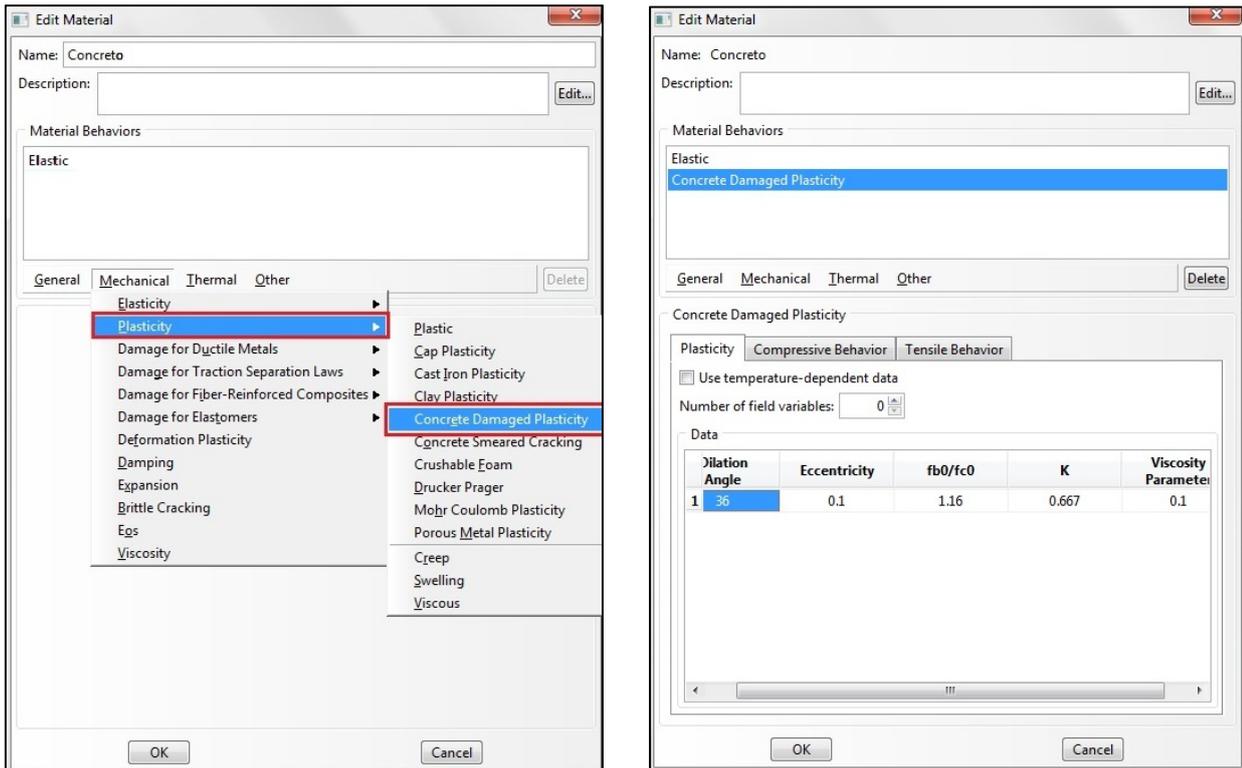


Fig. 5.1 – Janelas para a definição do critério de ruptura a ser adotado

A discretização das peças estruturais analisadas foi realizada de modo a ficar com características similares a dos exemplos disponíveis na literatura, para efeito comparativo e de validação do método proposto. Porém, na ocorrência de algum tipo de instabilidade numérica foram realizadas análises de convergência mais apuradas.

## 5.2 Processo de Automatização da concepção de Modelos de Bielas e Tirantes aplicando-se a técnica ESO de Otimização Topológica - Abaqus® Scripting

O software Abaqus® oferece uma plataforma com ambiente de programação orientada a objetos que viabiliza o desenvolvimento de rotinas para a automatização de operações específicas ou intervenções no banco de saída de dados, de acordo com a necessidade do usuário.

Esse recurso é chamado de *Abaqus Scripting* e tem como principal vantagem a possibilidade de desenvolver scripts por meio de uma linguagem que possui o código fonte aberto, denominada *Python*. A linguagem *Python* é abordada em detalhes em Downey (2012), Newman (2012), Borges (2010), Lutz (2011) ou ainda no site oficial (*Python Community*). O software Abaqus® fornece, em sua interface de linha de comando, um interpretador *Python* possibilitando a execução de tarefas experimentais.

A partir desse recurso, Lanes (2013) implementou o algoritmo ESO que foi utilizado para a realização da automatização em relação à definição do modelo de bielas e tirantes dos exemplos estudados. O fluxograma da Fig. 5.2, apresentado em Lanes (2013), ilustra a sequência de comandos da rotina implementada para avaliação topológica em análises estáticas pelo método de otimização evolucionária ESO.

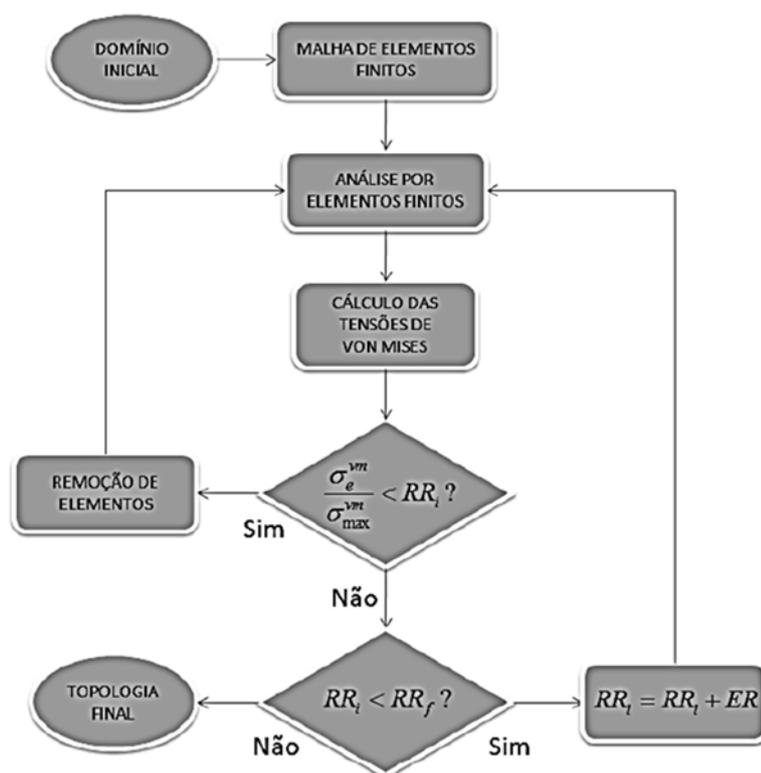


Fig. 5.2 – Algoritmo ESO (Adaptado de Lanes, 2013)

A Fig. 5.3 apresenta a janela para a introdução dos dados necessários para a análise.

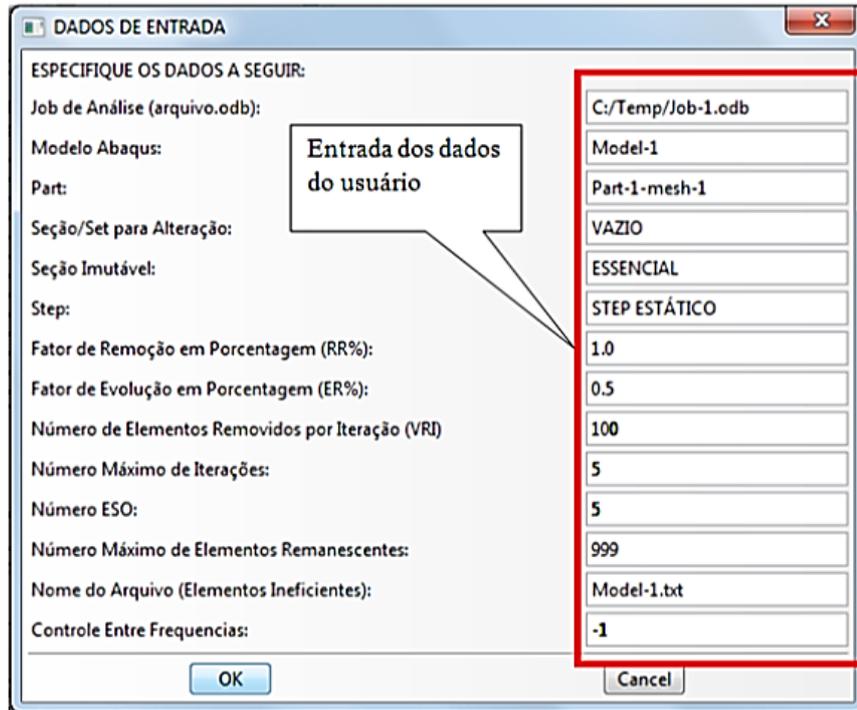


Fig. 5.3 – Dados de entrada solicitados pelo script (Lanes, 2013).

Os dados de entrada correspondem às informações necessárias para a execução do algoritmo, conforme descrito a seguir:

- ⇒ Indicações do caminho onde serão salvos os arquivos de saída.
- ⇒ O nome do modelo, as seções onde estão ocorrendo a otimização topológica e onde não ocorre remoção de elementos, definidas previamente.
- ⇒ Os parâmetros numéricos como a razão de remoção, adotada para retardar o processo de remoção dos elementos e o fator de evolução, utilizado para dar continuidade ao ciclo de remoção dos elementos para garantia de uma melhor convergência.
- ⇒ O número de elementos a serem removidos na iteração.
- ⇒ O número de iterações a serem realizadas na análise, após a conclusão da inserção dos dados de entrada.
- ⇒ O número ESO, que corresponde a quantidade de cavidades máxima a cada iteração. Esse dado é muito importante, já que é introduzido como forma de controle para o possível problema numérico denominado efeito tabuleiro de xadrez.
- ⇒ O número máximo de elementos remanescentes desejado, sendo possível a partir desse dado, realizar a introdução de um critério de parada a partir da restrição do volume final.

- ⇒ O nome do arquivo contendo os dados de saída.
- ⇒ O número de controle que permite a realização de análises envolvendo problemas estáticos e também dinâmicos.

Um tutorial é disponibilizado em Lanes (2013) para auxiliar a utilização do script.

A remoção dos elementos no sistema, que nesse estudo foi realizada para a obtenção do modelo final de bielas e tirantes de forma automática, não ocorre com a retirada literal dos mesmos. Após a identificação de uma região considerada ineficiente as propriedades mecânicas dessa região são alteradas para uma seção ou um material com características estruturais desprezíveis, quando comparadas com suas características mecânicas iniciais. Esse procedimento é adotado com o objetivo de se evitar a necessidade da realização de um remalhamento.

O script requer que o próprio usuário estabeleça tais características físicas (como baixos módulos de elasticidade e densidade, entre outros) para a desativação estrutural dos elementos componentes do domínio.

### **5.3 Análises dos resultados a partir de comparações de exemplos disponíveis na literatura para validação da aplicação do método**

Com a finalidade de validar o método proposto de automatização da escolha da topologia do modelo de bielas e tirantes a partir da aplicação do método ESO de otimização topológica, foram realizadas análises comparativas por meio de exemplos clássicos, já disponíveis na literatura. E, também, análises considerando o concreto danificado em comparação com os resultados obtidos na literatura.

# 6

## EXEMPLOS ANALISADOS E COMENTÁRIOS DOS RESULTADOS

### 6.1 Viga Parede Biapoiada com uma Abertura

O primeiro exemplo de aplicação corresponde a um elemento estrutural extraído de Schlaich *et al.* (1987). Esse exemplo é estudado em França *et al.* (2016).

O elemento é uma viga biapoiada com uma abertura. Sua geometria, carga aplicada e condições de contorno estão apresentadas na Fig. 6.1.

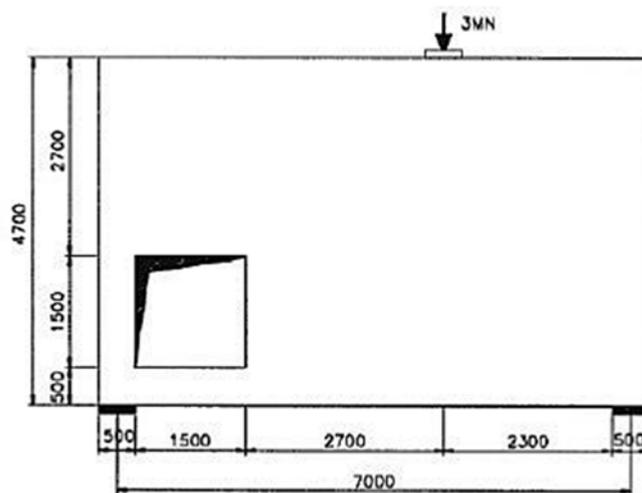


Fig. 6.1 –Viga biapoiada com abertura (Adaptado de Schlaich *et al.*,1987).

As propriedades adotadas do material foram as mesmas apresentadas em Almeida *et al.* (2013b), sendo o módulo de elasticidade igual a  $E = 20820$  MPa e coeficiente de Poisson igual a  $\nu=0,15$ .

Para a modelagem do elemento no software Abaqus® foi considerada uma malha de elementos finitos triangulares simples do tipo CPS3 (*Continuum / Plane-Stress / 3 Node Element*), a estrutura foi representada por 6693 elementos e 3499 nós.

Os parâmetros utilizados para a otimização via ESO foram: Fator de Remoção ( $RR_0$ ) =4,0% e o Fator de Evolução (ER) =2,0%. As topologias ótimas obtidas considerando-se o comportamento linear e não linear, para um volume de aproximadamente 50% do volume inicial são apresentadas na Fig. 6.2(a) seguir.

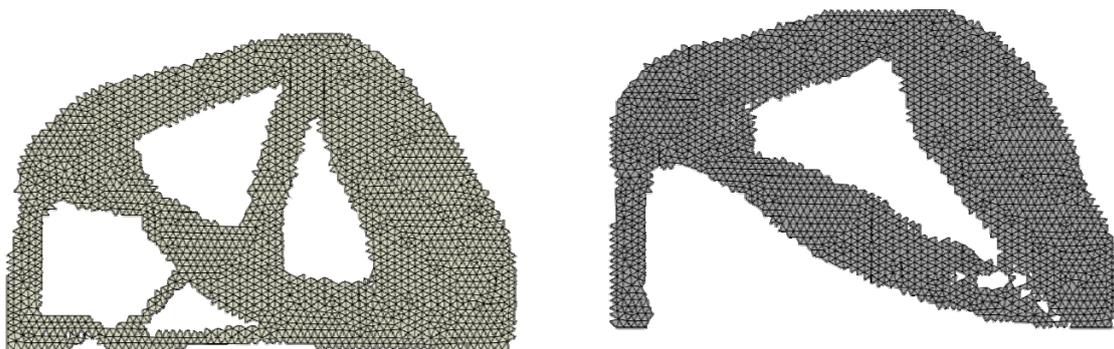


Fig. 6.2 – Topologias ótimas obtidas pela técnica ESO de otimização a ser adotada (a) comportamento linear e (b) comportamento não linear

Na Fig. 6.3(a)-(b) são apresentadas as distribuições de tensões, nas topologias ótimas, obtidas por meio do MEF. Os fluxos de tensões na cor azul são as regiões de compressão e na cor vermelha as de tração.

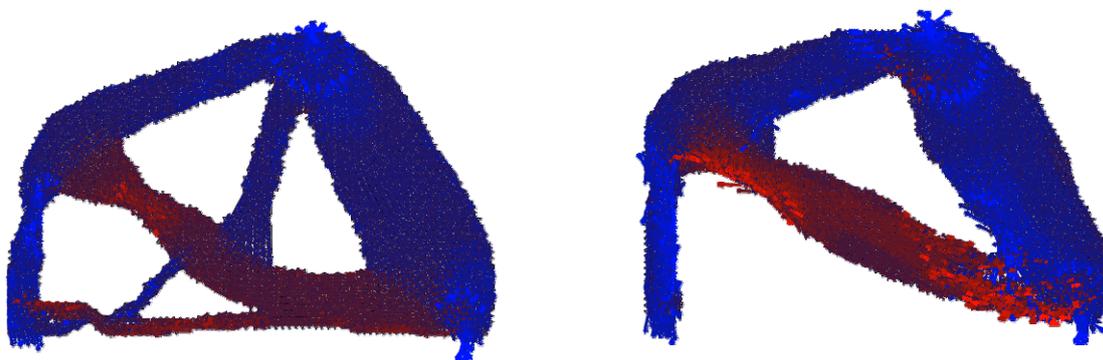


Fig. 6.3 – Distribuição de tensões obtidas para o elemento, conforme MEF (a) considerando o comportamento linear (b) para o comportamento não linear.

Os respectivos modelos de bielas e tirantes obtidos são mostrados na Fig. 6.4 a seguir.

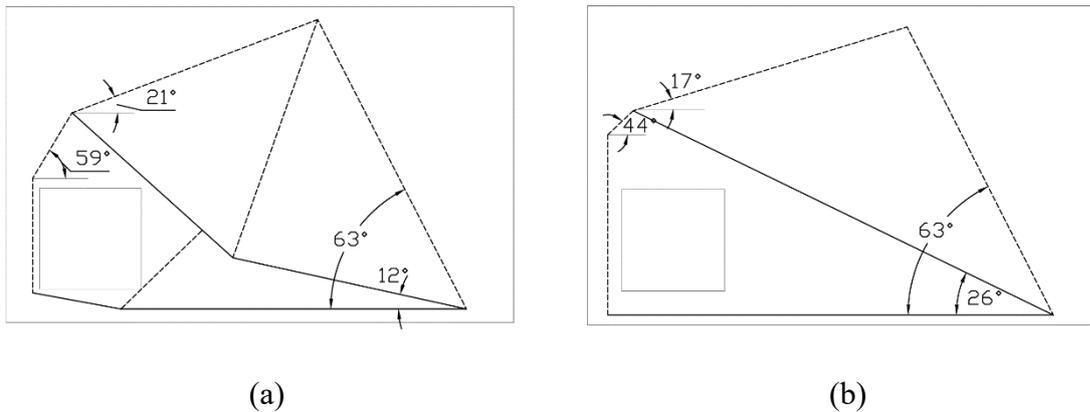
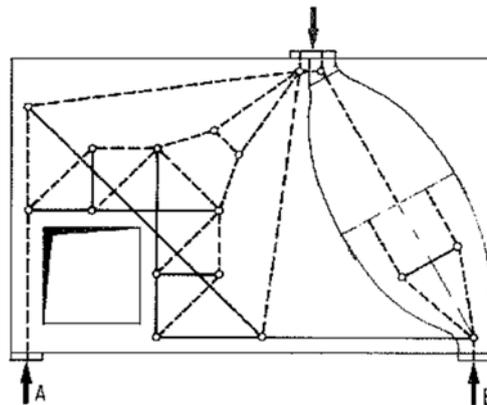


Fig. 6.4 – Modelo de bielas e tirantes (a) considerando o comportamento linear (b) para o comportamento não linear, sendo as linhas pontilhadas as bielas e as contínuas os tirantes.

Como forma de validar a aplicação do algoritmo implementado em Lanes (2013) para a finalidade proposta no presente trabalho, apresenta-se a seguir o resultado obtido para a mesma estrutura no trabalho de origem, Schlaich *et al.* (1987), que adotou o critério do caminho da carga para a concepção do modelo de bielas e tirantes.

Topologias ótimas obtidas em outros trabalhos, que foram desenvolvidos com mesma finalidade de automatizar a concepção do modelo de bielas e tirantes por meio de diferentes métodos de otimização topológica, são também apresentados na Fig. 6.5.



(a)

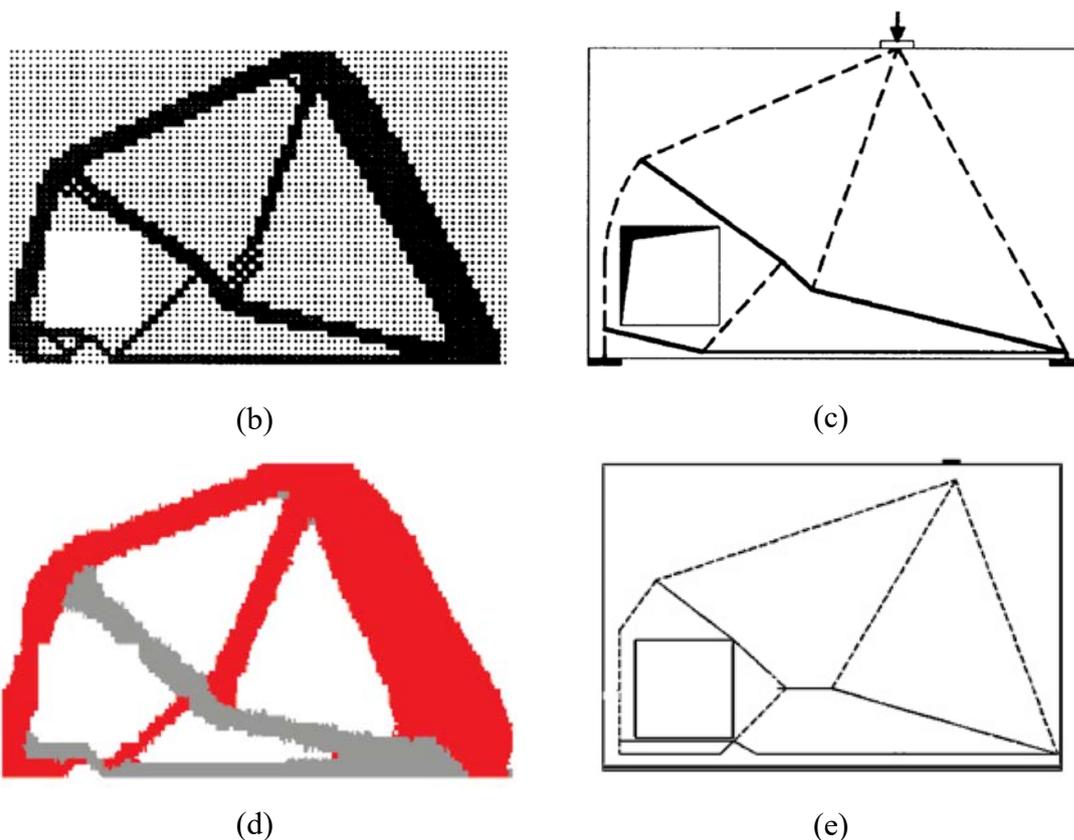


Fig. 6.5 – Resultados apresentados na literatura (a) em Schlaich *et al.*(1987) pelo processo do caminho da carga (b) e (c) em Liang *et al.*(2000) pelo método ESO (d) e (e) em Almeida *et al.* (2013b) pelo método SESO de otimização topológica.

A Fig. 6.5-(a) mostra o modelo de bielas e tirantes obtido em Schlaich *et al.*(1987) pelo processo do caminho da carga. As linhas pontilhadas correspondem as regiões de compressão e as contínuas representam as regiões de tração.

Já a Fig. 6.5(b) apresenta a topologia ótima encontrada por Liang *et al.* (2000) via ESO, e da mesma forma na Fig. 6.5(c) o modelo de bielas e tirantes no qual as linhas pontilhadas correspondem as regiões de compressão e as contínuas representam as regiões de tração.

Por último a Fig. 6.5(d) apresenta a topologia ótima obtida em Almeida *et al.* (2013b) pelo método SESO de otimização topológica, e o correspondente modelo de bielas e tirantes na Fig. 6.5(e), no qual as regiões de compressão são apresentadas na cor vermelha e as de tração na cor cinza.

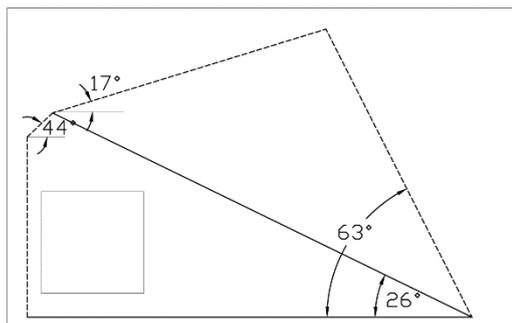
Comparando-se as topologias ótimas apresentadas nas Fig. 6.5 e Fig. 6.2(a) é possível observar que o resultado obtido pela aplicação da rotina, via ESO, apresentou-se coerente com os obtidos na literatura. Assim como o modelo de bielas e tirantes apresentado na Fig. 6.4(a), também se mostrou coerente com as soluções apresentadas na literatura.

Já para o comportamento não linear do material na Fig. 6.2(b), a topologia ótima apresentou visível alteração quando comparada com o comportamento linear. Essa diferença pode ser constatada no modelo de bielas e tirantes obtido para o elemento estrutural, de acordo com a Fig. 6.4(a) e Fig. 6.4(b). É possível perceber também que a topologia ótima, na Fig. 6.2(b), apresentou alguma instabilidade numérica gerando o chamado tabuleiro de xadrez, que corresponde a existência de vazios alternados presentes na solução ótima.

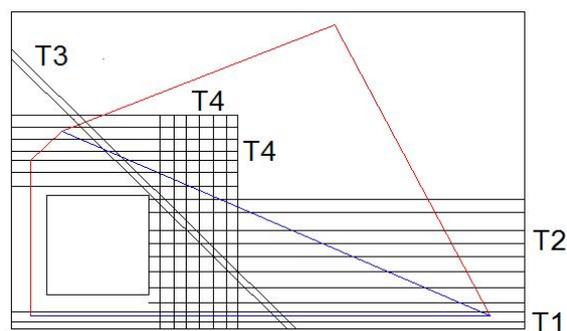
Realizando-se a comparação em relação aos ângulos de inclinação das bielas e dos tirantes para os modelos considerando o comportamento linear e o não linear têm-se valores distintos. Ângulos iguais a  $63^\circ$ ,  $26^\circ$ ,  $44^\circ$  e  $17^\circ$  para a análise não linear. Já para o caso linear os respectivos ângulos são iguais a  $63^\circ$ ,  $12^\circ$ ,  $59^\circ$  e  $21^\circ$ .

Sendo assim, para a Viga Biapoiada com uma Abertura, pode-se afirmar que a solução considerando o comportamento não linear do material apresentou certa diferença quando comparada com o método usual considerando-se o comportamento linear do material, utilizando-se como ferramenta técnicas de otimização evolucionária para automatizar o processo de concepção da estrutura.

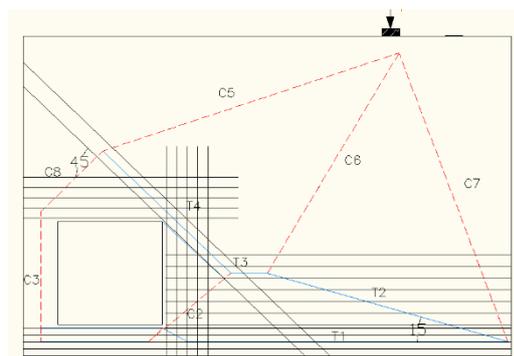
Além disso, a disposição da armadura, obtida a partir do modelo de bielas e tirantes, comparando-se o comportamento não linear do presente estudo com o linear obtido em Almeida *et al* (2013b), apresentou certa diferença, como mostra a Fig. 6.6.



(a)



(b)



(c)

Fig. 6.6 – (a) Modelo de bielas e tirantes comportamento não linear do material (b) disposição da armadura para o comportamento não linear (c) disposição da armadura para o comportamento linear obtido em Almeida *et al* (2013b)

A armadura obtida para o modelo considerando a análise não linear foram as seguintes:

- 2 x 2  $\phi$  20 mm (T1),
- 2 x 7  $\phi$  20 mm (T2),
- 2 x 2  $\phi$  20 mm (T3),
- 2 x 7  $\phi$  20 mm (T4).

Já para o caso linear as armaduras proposta foram as seguintes:

- 2 x 5  $\phi$  20 mm (T1),
- 2 x 7  $\phi$  20 mm (T2),
- 2 x 2  $\phi$  20 mm (T3),
- 2 x 5  $\phi$  20 mm (T4).

Comparando a solução para o comportamento não linear e linear do material pode-se perceber que a quantidade de armadura apresentou certa diferença para as posições T1, sendo 2 x 2  $\phi$  20 mm, para o modelo considerando o comportamento não linear do material, e 2 x 5  $\phi$  20

mm, para o modelo considerando o comportamento linear do material. E a posição T4, sendo 2 x 7  $\phi$  20 mm, para o modelo considerando o comportamento não linear do material, e 2 x 5  $\phi$  20 mm, para o modelo considerando o comportamento linear do material.

A consideração da não linearidade do material corresponde a melhor opção para descrever o real comportamento do mesmo. Sendo assim, a solução obtida também deve ser mais apropriada.

O índice de performance (IP) por iteração foi calculado com o objetivo de estimar um ótimo global para a solução da topologia ótima obtida para a análise não linear, conforme apresentado nos gráficos a seguir.

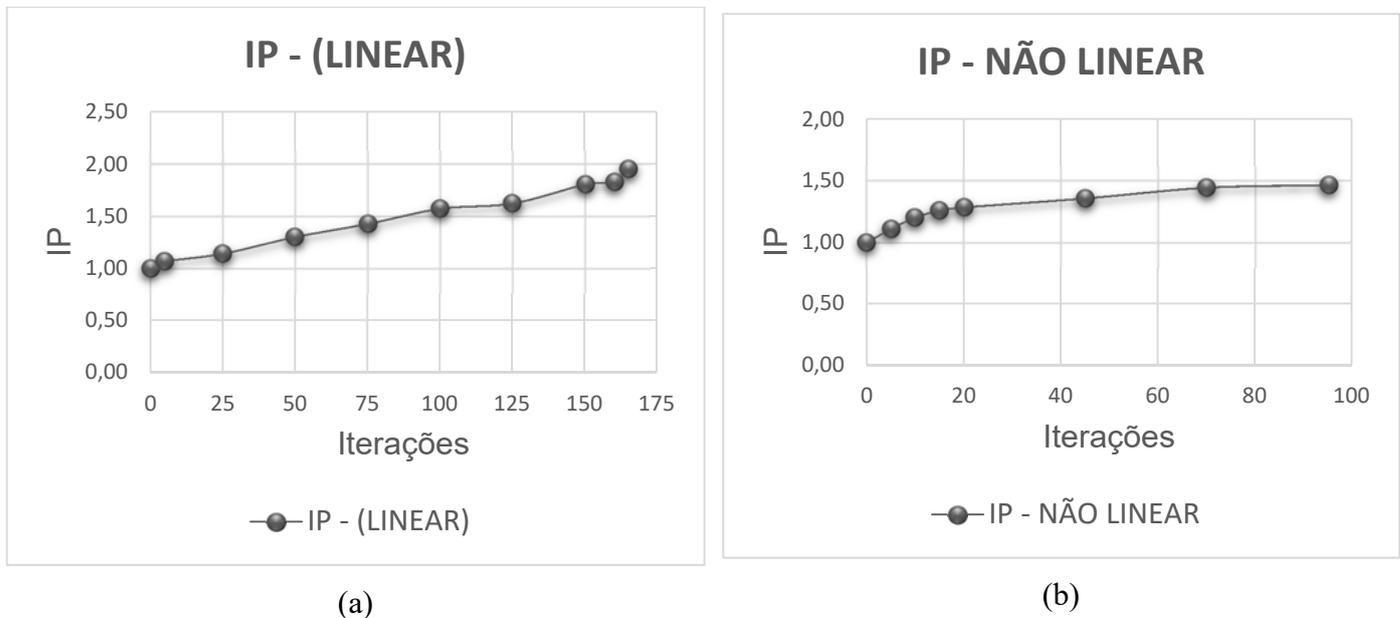


Gráfico 6.1 – Índice de Performance x Iterações (a) comportamento linear do material (b) comportamento não linear do material

Foi possível observar que o IP, para esse exemplo estudado, cresceu de forma assintótica ao longo do processo iterativo, mantendo poucas variações, tanto para o caso linear quanto para o caso não linear.

## 6.2 Viga Parede Biapoiada ( $L/D=2$ )

O segundo exemplo trata-se de uma viga parede biapoiada, extraído de Liang *et al.* (2000), cuja geometria está apresentada na Fig. 6.7 a seguir.

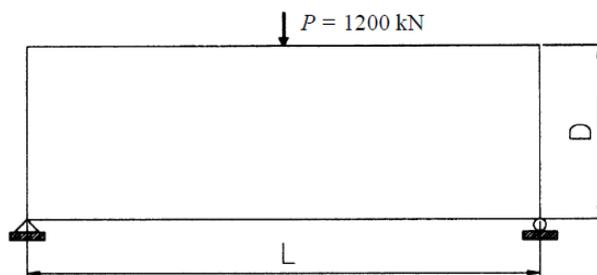


Fig. 6.7 -Viga parede biapoiada  $L/D=2$  (Adaptado de Liang *et al.* (2000))

As propriedades adotadas do material foram as mesmas apresentadas em Liang *et al.* (2000), sendo o módulo de elasticidade igual a  $E = 28567$  MPa e coeficiente de Poisson igual a  $\nu=0,15$ .

Para a modelagem do elemento no software Abaqus<sup>®</sup> foi considerada uma malha de elementos finitos quadráticos quadrilaterais do tipo CPS8R (Continuum / Plane-Stress / Shell elements / 8 Node Element). A estrutura foi representada por 1250 elementos e 3901 nós.

Os parâmetros utilizados para a otimização via ESO foram: Fator de Remoção (RR)=4,0% e o Fator de Evolução (ER)=2,0%. A topologia ótima é obtida, após a análise do problema por meio da rotina desenvolvida em Lanes (2013), para um volume de aproximadamente 25% do volume inicial.

As soluções, considerando o comportamento elástico e não linear do material, são apresentadas na Fig. 6.8(a)-(b) a seguir.

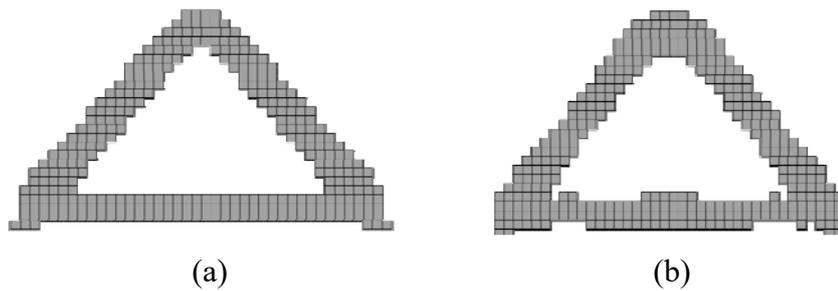


Fig. 6.8-Topologias ótimas obtidas (a) Solução considerando o comportamento linear do material (b) Solução considerando o comportamento não linear do material.

A Fig. 6.9(a)-(b) apresenta distribuições de tensões nas topologias ótimas, obtidas por meio do MEF, sendo as regiões de compressão em azul e as tração em vermelho.

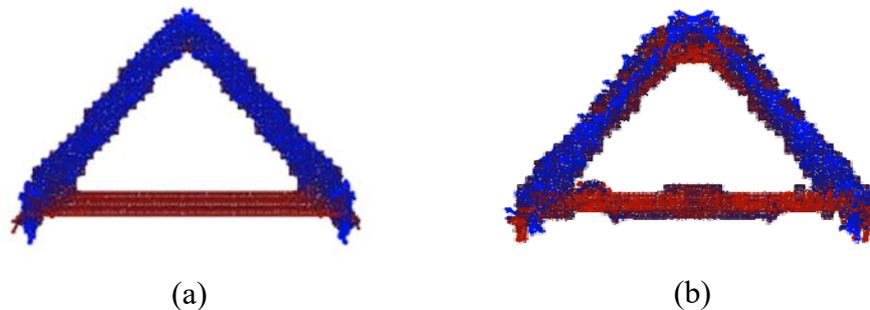


Fig. 6.9-Distribuição de tensões (a) solução considerando o comportamento linear do material (b) solução considerando o comportamento não linear do material.

Os respectivos modelos de bielas e tirantes obtidos são mostrados na Fig. 6.10 a seguir.

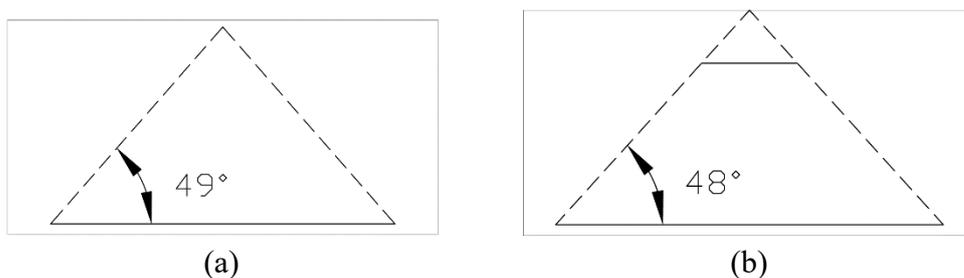


Fig. 6.10 – Modelo de bielas e tirantes (a) considerando o comportamento linear (b) para o comportamento não linear, sendo as linhas pontilhadas as bielas e as contínuas os tirantes.

As topologias ótimas apresentadas na Fig. 6.11(a)-(b) foram obtidas em outros estudos desenvolvidos com mesma a finalidade de automatizar a concepção do modelo de bielas e tirantes.

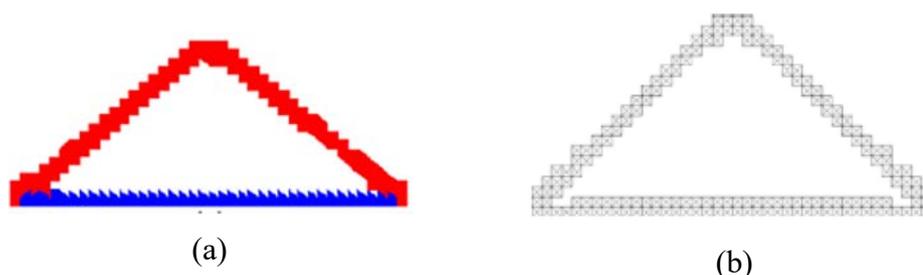


Fig. 6.11– (a) Solução apresentada em Almeida *et al.* (2013a) – adotando a técnica SESO (b) Solução apresentada em Kwar and Noh (2006) – adotando a técnica ESO, ambos para análise linear

Sendo que, em Almeida *et al.* (2013a), foi utilizada a técnica de otimização denominada SESO, que corresponde a uma modificação da técnica ESO. Para esse, convencionaram-se a cor vermelha para regiões com tensões de compressão e azul para as regiões de tração.

Comparando-se as soluções lineares apresentadas nas Fig. 6.8(a) e Fig. 6.9(a) com as soluções da literatura, Fig. 6.11(a)-(b), é possível observar que os resultados obtidos pela aplicação da rotina via ESO, apresentaram-se coerentes com os obtidos nos estudos citados.

Comparando-se o resultado obtido considerando o comportamento linear com o não linear do material pode-se dizer que ambos apresentaram semelhança em suas topologias ótimas e certas diferenças em relação à distribuição de tensões.

Os ângulos de inclinação das bielas e dos tirantes para os modelos considerando o comportamento linear e o não linear apresentaram valores próximos  $49^\circ$  para a análise não linear e  $48^\circ$  para a não linear. Porém, pode-se perceber a existência de uma região contendo tensões de tração para o comportamento não linear e que não se apresenta na solução considerando o comportamento linear.

Sendo assim, para a Viga Parede Biapoiada ( $L/H=2$ ), pode-se afirmar que a solução considerando o comportamento não linear do material, adotando-se como ferramenta técnicas de otimização evolucionária para automatizar o processo de concepção da estrutura, apresentou pequena diferença quando comparada com o método usual que considera o comportamento linear do material.

Para esse caso também é possível dizer que a solução considerando a não linearidade do material corresponde a melhor opção para descrever o real comportamento do mesmo. A solução para a armadura calculada irá apresentar certa diferença quando comparada à solução considerando o comportamento linear.

O índice de performance (IP) por iteração foi calculado com o objetivo de estimar um ótimo global para a solução da ótima topologia obtida em ambas as análises, linear e não linear, conforme apresentado nos gráficos a seguir.

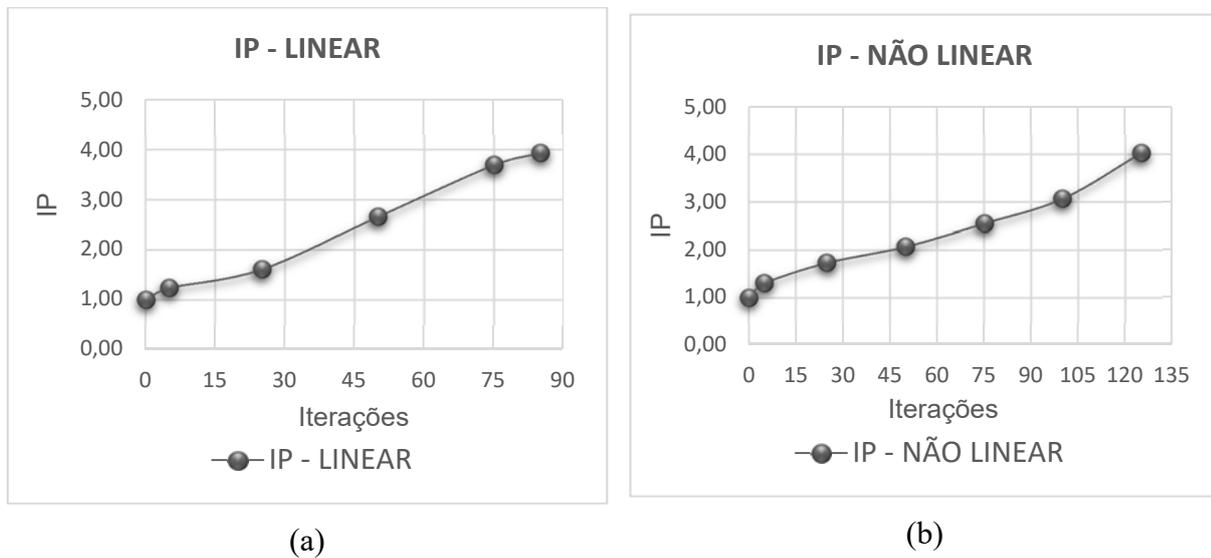


Gráfico 6.2 – Índice de Performance x Iterações (a) comportamento linear do material (b) comportamento não linear do material

Foi possível observar que o IP, para esse exemplo estudado, cresceu ao longo do processo iterativo, mantendo poucas variações, tanto para o caso linear quanto para o caso não linear.

### 6.3 Pilar de Ponte

O terceiro elemento estrutural analisado trata-se de um pilar de ponte. Sua geometria, carga aplicada e condições de contorno estão apresentadas na Fig. 6.12.

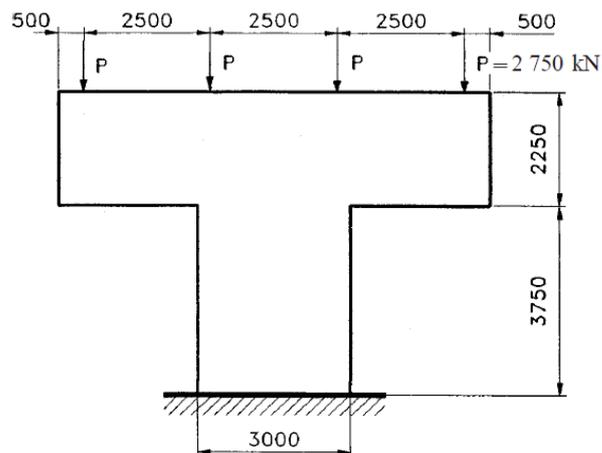


Fig. 6.12 –Pilar de ponte (Adaptado de Liang *et al.*,2002)

As propriedades adotadas do material foram as mesmas apresentadas em Liang *et al.* (2002), sendo o módulo de elasticidade igual a  $E = 28600$  MPa e coeficiente de Poisson igual a  $\nu=0,15$ .

Para a modelagem do elemento no software Abaqus<sup>®</sup> foi considerada uma malha de elementos finitos lineares triangulares do tipo CPS4R (Continuum / Plane-Stress / Shell elements / 4 Node Element). A estrutura foi representada por 1944 elementos e 2061 nós. Para esse caso, foi considerada simetria na geração da malha de elementos finitos.

Os parâmetros utilizados para a otimização via ESO foram: Fator de Remoção (RR)=4,0% e o Fator de Evolução (ER)=2,0%. A topologia ótima é obtida para um volume de aproximadamente 50% do volume inicial.

As soluções, considerando o comportamento elástico e não linear do material, são apresentadas na Fig. 6.13(a)-(b) a seguir.

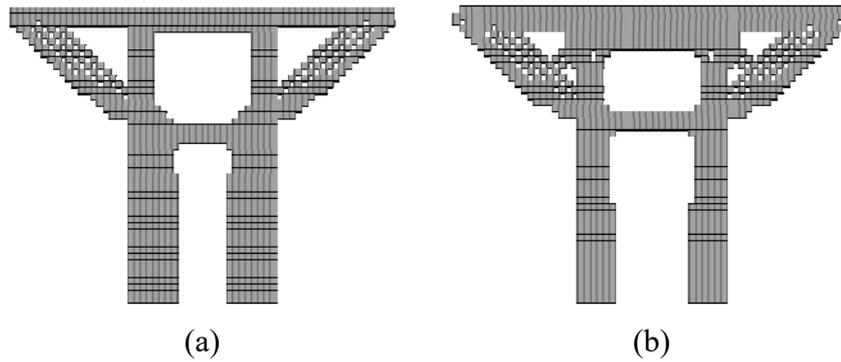


Fig. 6.13-Topologias ótimas obtidas (a) Solução considerando o comportamento linear do material (b) Solução considerando o comportamento não linear do material.

A Fig. 6.14(a)-(b) apresenta respostas para a distribuição de tensões de compressão (em azul) e tração (em vermelho).

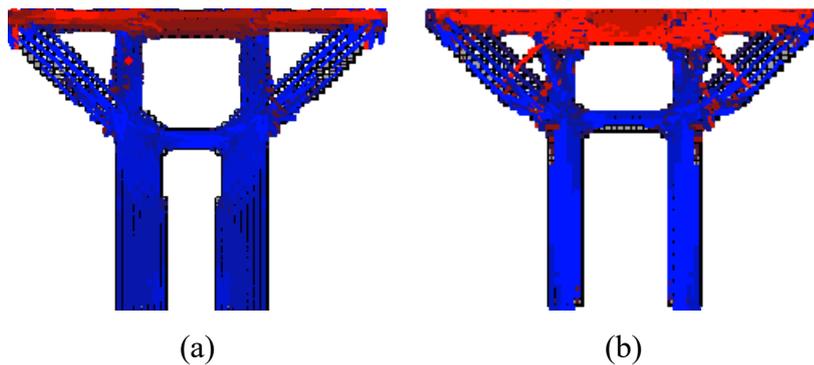


Fig. 6.14– Distribuições de tensões compressão / tração (a) Solução considerando o comportamento linear do material (b) Solução considerando o comportamento não linear do material.

E a Fig. 6.15 mostra os respectivos modelos de bielas e tirantes obtidos.

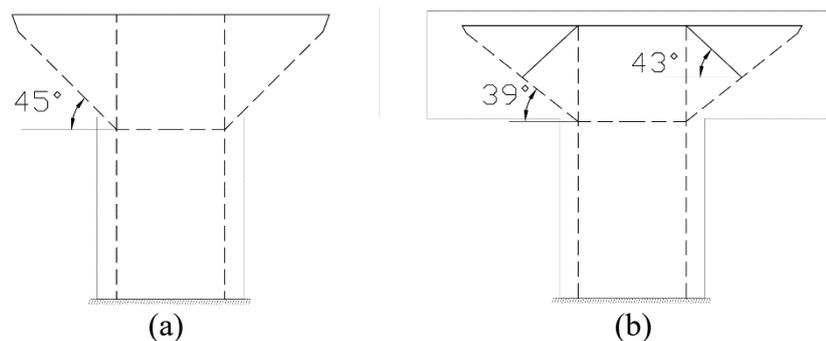


Fig. 6.15 – Modelo de bielas e tirantes (a) considerando o comportamento linear (b) para o comportamento não linear, sendo as linhas pontilhadas as bielas e as contínuas os tirantes.

As topologias ótimas, obtidas em outros estudos são apresentadas na Fig. 6.16(a)-(b).

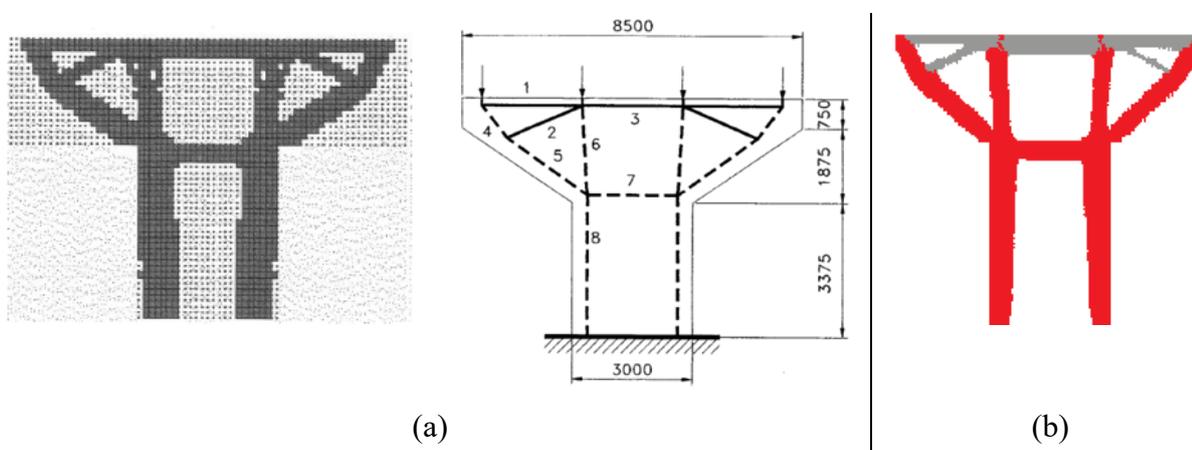


Fig. 6.16-(a) Topologia ótima e modelo de bielas e tirantes, respectivamente, apresentados em Liang *et al.* (2002) – adotando a técnica ESO (b) Topologia ótima com regiões de tração e compressão apresentada em Almeida *et al.* (2013b) – adotando a técnica SESO

Sendo que na resposta apresentada na Fig. 6.16(b), foi adotada a cor vermelha para representar as regiões com tensões de compressão e cinza para as regiões de tração. Nesse também foi utilizada a técnica de otimização denominada SESO, que corresponde a uma modificação da técnica ESO.

Para esse exemplo, comparando-se as soluções apresentadas na Fig. 6.13(a) e Fig. 6.14(a) com as soluções da literatura, Fig. 6.16(a)-(b), é possível observar que os resultados obtidos pela aplicação da rotina, via ESO, apresentaram-se coerentes com os obtidos nos estudos citados.

E em relação aos resultados obtidos considerando o comportamento elástico e não linear do material é possível observar alguma diferença em suas topologias ótimas.

E, também, observam-se certas diferenças em relação à distribuição de tensões de compressão e tração. O que altera as quantidades e o posicionamento da armadura na estrutura na qual se considerou o comportamento não linear do material, quando comparado com o comportamento linear.

Realizando-se a comparação em relação aos ângulos de inclinação das bielas e dos tirantes para os modelos considerando o comportamento linear e o não linear, na Fig. 6.15(a)-(b) tem-se os seguintes valores. Ângulo igual a  $39^\circ$  para a análise não linear. Já para o caso linear o respectivo ângulo é igual a  $45^\circ$ .

Pôde-se perceber, ainda, a existência de uma região contendo tensões de tração para o comportamento não linear, que é o caso do tirante com inclinação de  $43^\circ$  mostrado na Fig. 6.15(b), e que não se apresenta na solução considerando o comportamento linear.

Com isso, pode-se afirmar que a solução considerando o comportamento não linear do material, adotando-se como ferramenta técnicas de otimização evolucionária para automatizar o processo de concepção da estrutura, apresentou certa diferença quando comparada com o método usual considerando-se o comportamento linear do material.

Fazendo-se uma análise da disposição da armadura, obtida a partir do modelo de bielas e tirantes, comparando o comportamento linear e não linear do presente estudo, tem-se a seguinte solução apresentada na Fig. 6.17(a) a (d).



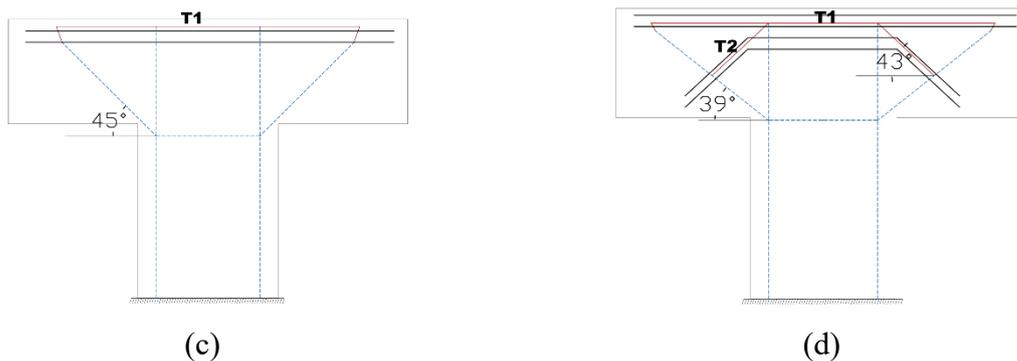


Fig. 6.17 – (a) Modelo de bielas e tirantes comportamento linear do material (b) comportamento não linear do material (c) disposição da armadura para o comportamento linear (d) disposição da armadura para o comportamento não linear

A armadura obtida para o modelo considerando a análise não linear foram as seguintes:

- 10  $\phi$  32 mm (T1),

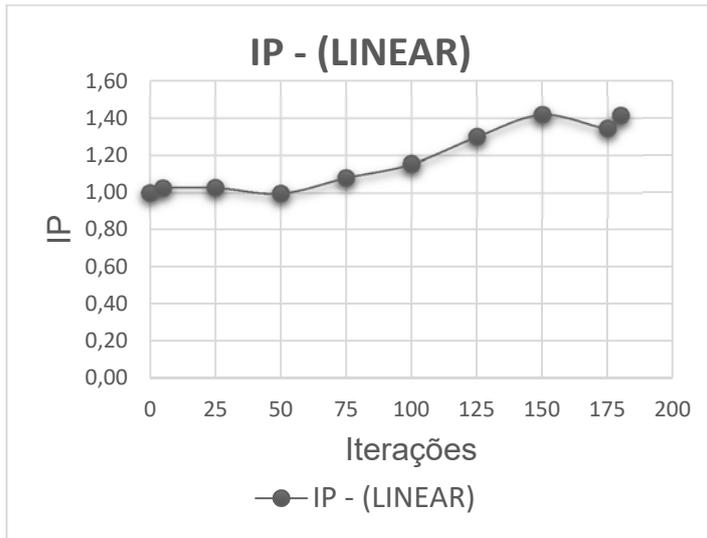
Já para o caso linear as armaduras proposta foram as seguintes:

- 10  $\phi$  32 mm (T1),
- 9  $\phi$  20 mm (T2),

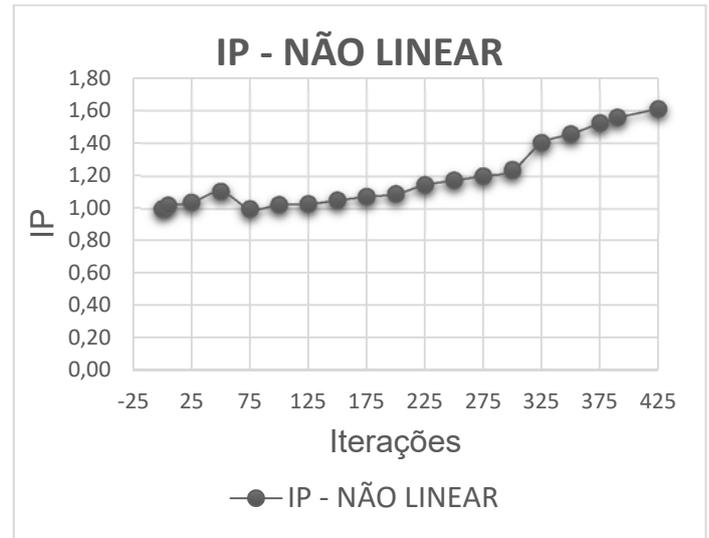
Comparando a solução para o comportamento não linear e linear do material pode-se perceber que a quantidade de armadura se apresentou a mesma para as posições T1, igual a 10  $\phi$  32 mm, tanto para o modelo considerando o comportamento não linear do material, quanto para o modelo considerando o comportamento linear do material. E a posição T2, para o modelo considerando o comportamento não linear do material, igual a 9  $\phi$  20 mm, sendo que para o modelo considerando o comportamento linear do material não haveria necessidade dessas barras de reforço.

A consideração da não linearidade do material corresponde a melhor opção para descrever o real comportamento do mesmo. Sendo assim, a solução obtida também deve ser mais apropriada.

O índice de performance (IP) por iteração calculado para de estimar um ótimo global para a solução da ótima topologia obtida em ambas as análises, linear e não linear, é apresentado nos gráficos a seguir.



(a)



(b)

Gráfico 6.3 – Índice de Performance x Iterações (a) comportamento linear do material (b) comportamento não linear do material

O IP, para a análise considerando o comportamento linear, cresceu ao longo do processo iterativo, mantendo poucas variações, tanto para o caso linear quanto para o caso não linear.

## 6.4 Viga Parede com Dois Furos

O quarto elemento estrutural analisado trata-se de uma viga com dois furos. Sua geometria, carga aplicada e condições de contorno estão apresentadas na Fig. 6.18.

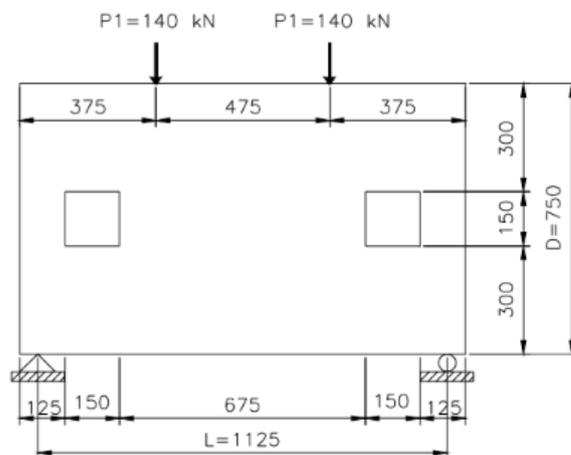


Fig. 6.18 – Viga parede com dois furos (Adaptado de Liang *et al.*,1999)

As propriedades adotadas do material foram as mesmas apresentadas em Liang *et al.* (1999), sendo o módulo de elasticidade igual a  $E = 30088$  MPa e coeficiente de Poisson igual a  $\nu=0,15$ .

Para a modelagem do elemento no software Abaqus<sup>®</sup> foi considerada uma malha de elementos finitos lineares quadrilaterais do tipo CPS4R (Continuum / Plane-Stress / Shell elements / 4 Node Element). A estrutura foi representada por 1478 elementos e 1582 nós.

Os parâmetros utilizados para a otimização via ESO foram: Fator de Remoção (RR)=4,0% e o Fator de Evolução (ER)=2,0%. A topologia ótima é obtida, para um volume de aproximadamente 40% do volume inicial.

As soluções, considerando o comportamento elástico e não linear do material, são apresentadas na Fig. 6.19(a)-(b) a seguir.

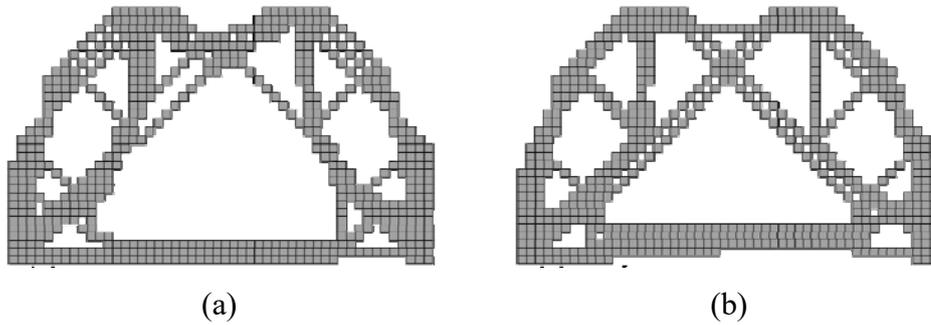


Fig. 6.19 - Topologias ótimas obtidas (a) Solução considerando o comportamento linear do material (b) Solução considerando o comportamento não linear do material.

A Fig. 6.20(a)-(b) apresenta respostas para a distribuição de tensões de compressão (em azul) e tração (em vermelho).

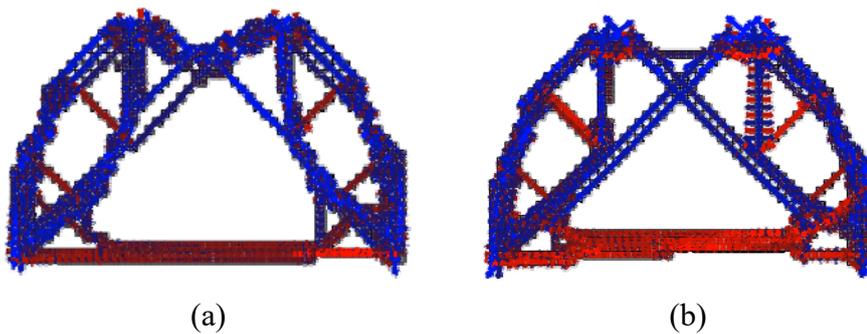


Fig. 6.20– Distribuições de tensões compressão / tração (a) Solução considerando o comportamento linear do material (b) Solução considerando o comportamento não linear do material.

A Fig. 6.15 mostra os respectivos modelos de bielas e tirantes obtidos.

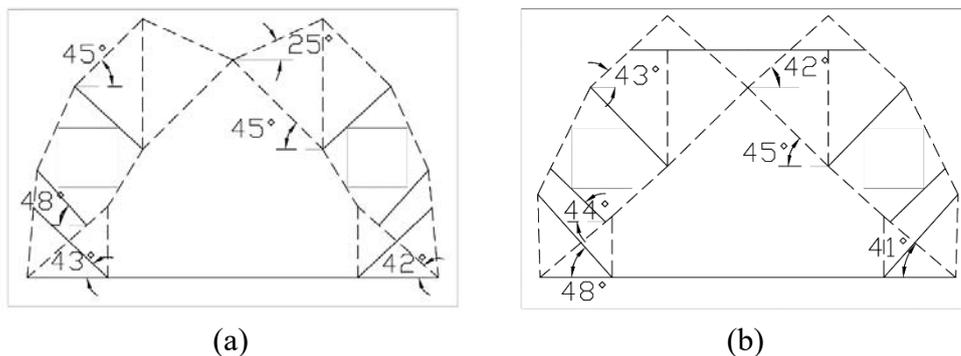


Fig. 6.21 – Modelo de bielas e tirantes (a) considerando o comportamento linear (b) para o comportamento não linear, sendo as linhas pontilhadas as bielas e as contínuas os tirantes.

A topologia ótima e modelo de bielas e tirantes obtidos em Liang *et al.* (2000) são apresentados na Fig. 6.22.

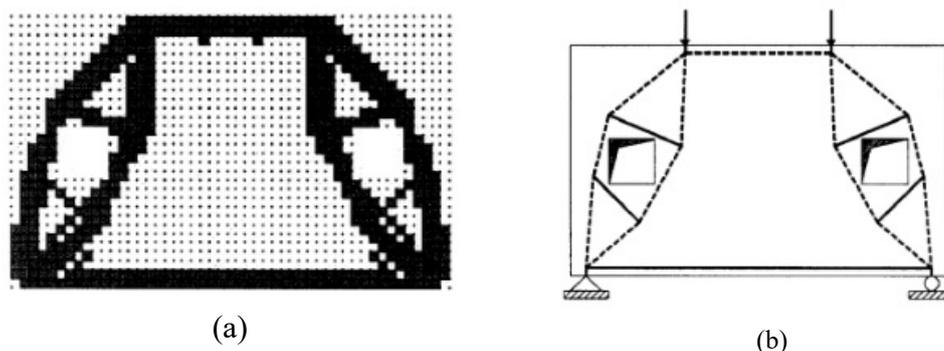


Fig. 6.22– Solução apresentada em Liang *et al.* (2000) – adotando a técnica ESO (a) topologia ótima (b) modelo de bielas e tirantes.

Para esse exemplo estudado, comparando-se as soluções apresentadas na Fig. 6.19(a) e Fig. 6.21(a) com a solução da literatura, Fig. 6.22(a), também é possível observar que os resultados obtidos pela aplicação da rotina, via ESO, apesar de apresentarem certas diferenças, são coerentes com os obtidos nos estudos citados.

Comparando-se os resultados obtidos considerando o comportamento linear e não linear do material pode-se dizer que apresentaram algumas diferenças em suas topologias ótimas e em relação à distribuição de tensões.

Realizando-se a comparação em relação aos ângulos de inclinação das bielas e dos tirantes para os modelos considerando o comportamento linear e o não linear tem-se os seguintes

valores. Ângulos iguais a  $42^\circ$ ,  $43^\circ$ ,  $48^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $25^\circ$  e  $45^\circ$  para a análise não linear. Já para o caso linear os respectivos ângulos são iguais a  $41^\circ$ ,  $48^\circ$ ,  $44^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $42^\circ$  e  $43^\circ$ .

Portanto, para a Viga Parede com dois furos, pode-se afirmar que a solução considerando o comportamento não linear do material apresentou certa diferença quando comparada com o método usual considerando-se o comportamento linear do material.

E sabendo-se que a consideração da não linearidade do material corresponde a melhor opção para descrever o real comportamento do mesmo, essa solução também deve ser mais apropriada. A solução para a armadura calculada apresentará diferenças, tanto em relação a quantidades, quanto em relação a posicionamento, quando comparada à solução considerando o comportamento linear.

Os gráficos, a seguir, apresentam o índice de performance (IP) por iteração calculado para de estimar um ótimo global para a solução da ótima topologia obtida para as análises linear e não linear.

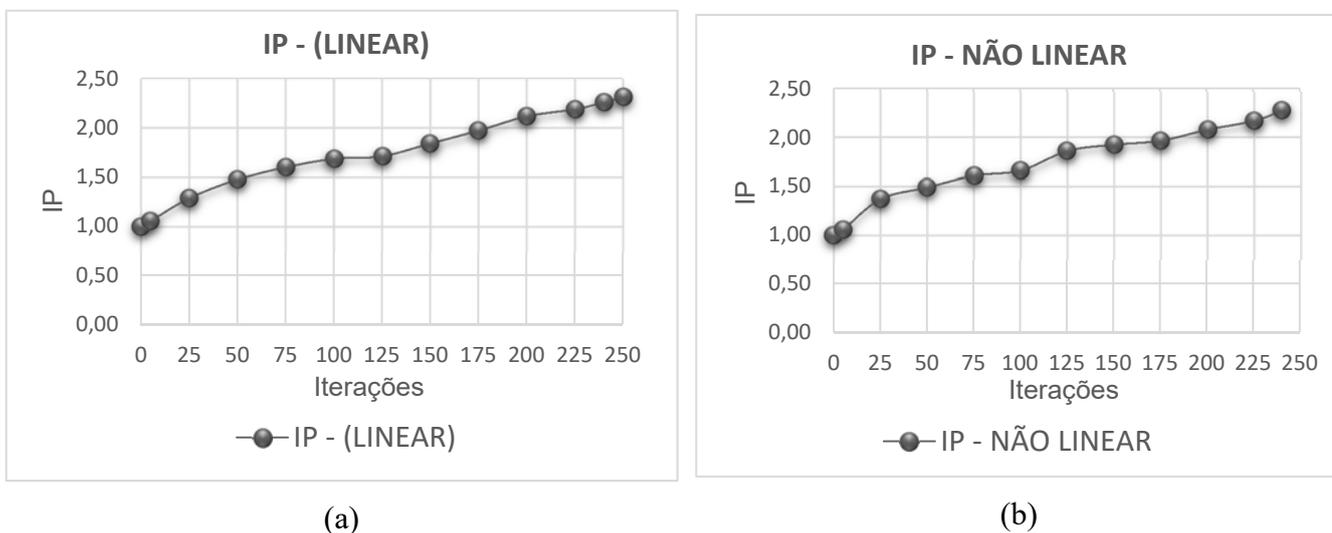


Gráfico 6.4 – Índice de Performance x Iterações (a) comportamento linear do material (b) comportamento não linear do material

Foi possível observar que o IP cresceu ao longo do processo iterativo, mantendo poucas variações, tanto para o caso linear quanto para o caso não linear.

## 6.5 Mísula com uma coluna

O quinto elemento estrutural analisado trata-se de uma mísula com uma coluna considerados como um todo na estrutura. Sua geometria, carga aplicada e condições de contorno estão apresentadas na Fig. 6.23.

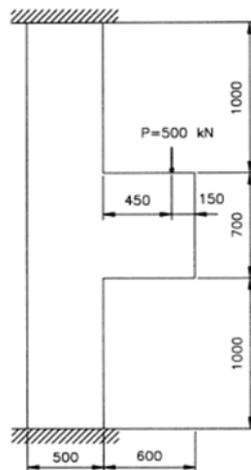


Fig. 6.23 - Mísula com uma coluna (Adaptado de Liang *et al.*,2000)

As propriedades adotadas do material foram as mesmas apresentadas em Liang *et al.* (2000), sendo o módulo de elasticidade igual a  $E = 28567$  MPa e coeficiente de Poisson igual a  $\nu=0,15$ .

Para a modelagem do elemento no software Abaqus<sup>®</sup> foi considerada uma malha de elementos finitos lineares quadrilaterais do tipo CPS4R (Continuum / Plane-Stress / Shell elements / 4 Node Element). A estrutura foi representada por 3317 elementos e 3470 nós.

Os parâmetros utilizados para a otimização via ESO foram: Fator de Remoção (RR)=4,0% e o Fator de Evolução (ER)=2,0%. A topologia ótima é obtida para um volume de aproximadamente 50% do volume inicial.

As soluções, considerando o comportamento elástico e não linear do material, são apresentadas na Fig. 6.24(a)-(b) a seguir.

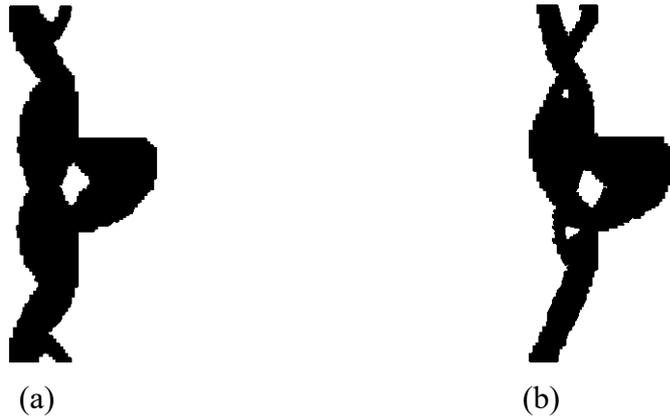


Fig. 6.24 - Topologias ótimas obtidas (a) Solução considerando o comportamento linear do material (b) Solução considerando o comportamento não linear do material

A Fig. 6.25(a)-(b) apresenta respostas para a distribuição de tensões de compressão (em azul) e tração (em vermelho).

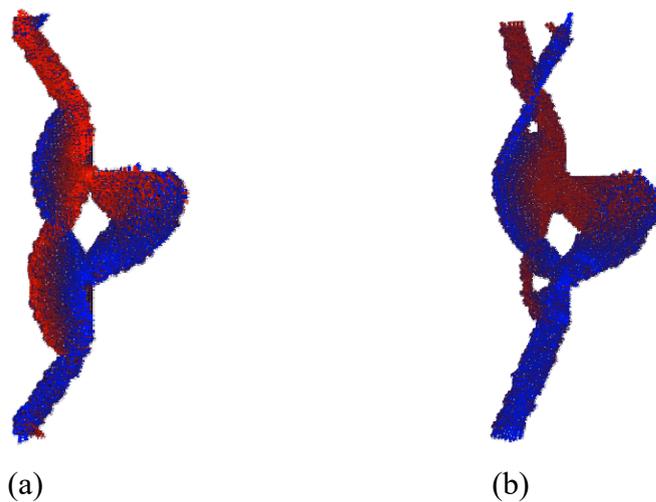


Fig. 6.25– Distribuições de tensões compressão / tração (a) Solução considerando o comportamento linear do material (b) Solução considerando o comportamento não linear do material.

Os respectivos modelos de bielas e tirantes obtidos são apresentados na Fig. 6.26(a)-(b).

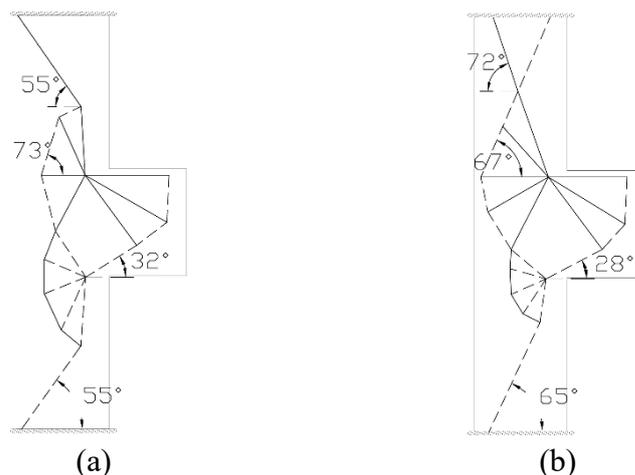


Fig. 6.26 – Modelo de bielas e tirantes (a) considerando o comportamento linear (b) para o comportamento não linear, sendo as linhas pontilhadas as bielas e as contínuas os tirantes.

A topologia ótima é apresentada na Fig. 6.27 obtida em outro estudo desenvolvido com mesma a finalidade de automatizar a concepção do modelo de bielas e tirantes, também por um método evolucionário de otimização topológica.

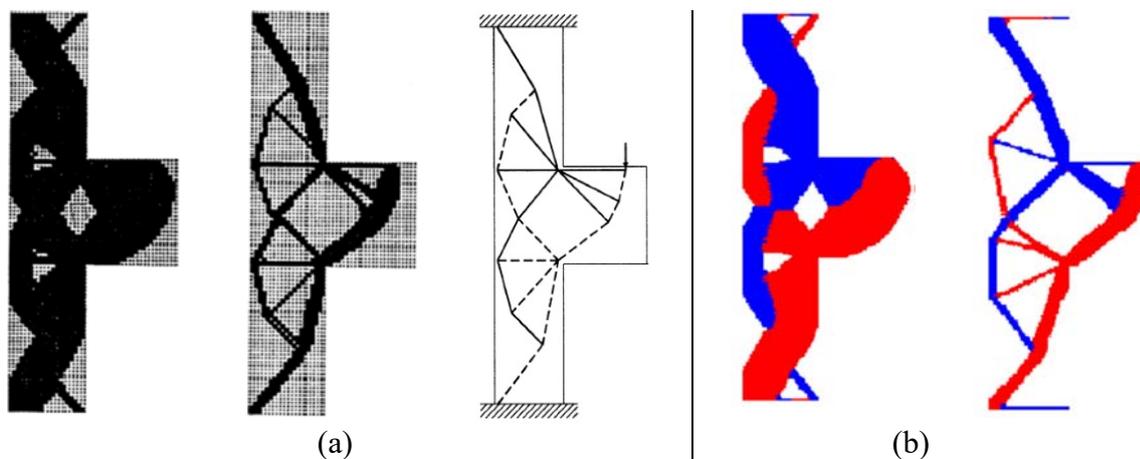


Fig. 6.27 - Solução apresentada em (a) Liang *et al.* (2000), para 20 iterações, a topologia ótima e o modelo de bielas e tirantes, respectivamente (b) Almeida *et al.* (2013a), para 71 iterações e iteração 144, respectivamente.

Para esse exemplo, comparando-se as soluções apresentadas nas Fig. 6.24(a) e Fig. 6.25(a) com a Fig. 6.27(a)-(b), sendo a Fig. 6.27-a com soluções adotando a técnica ESO e a Fig. 6.27(b) adotando-se o método SESO, é possível observar que os resultados obtidos pela aplicação da rotina, via ESO, do presente estudo, apesar de apresentarem certas diferenças, são coerentes com os obtidos nos estudos citados.

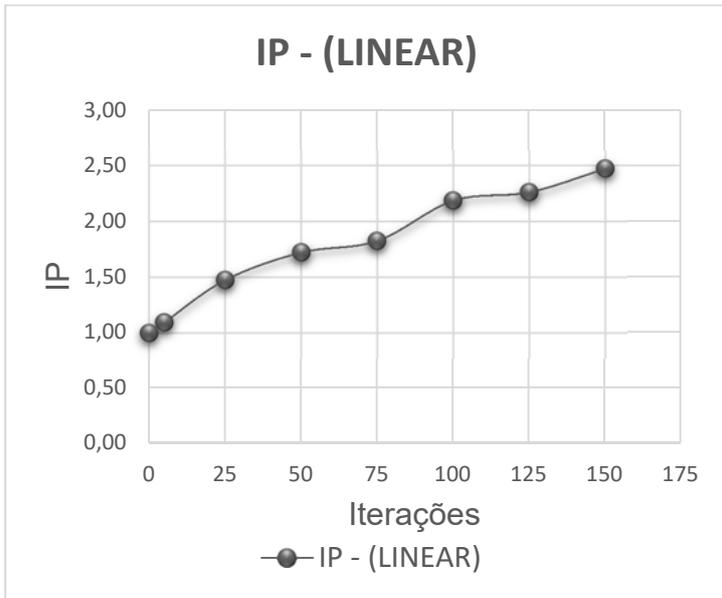
Os resultados obtidos considerando o comportamento linear e não linear do material, apresentaram consideráveis diferenças em suas topologias ótimas e em relação à distribuição de tensões.

Realizando-se a comparação em relação aos ângulos de inclinação das bielas e dos tirantes para os modelos considerando o comportamento linear e o não linear tem-se os seguintes valores. Ângulos iguais a  $55^\circ$ ,  $73^\circ$ ,  $55^\circ$  e  $32^\circ$  para a análise linear. Já para o caso não linear os respectivos ângulos são iguais a  $72^\circ$ ,  $67^\circ$ ,  $65^\circ$  e  $28^\circ$ .

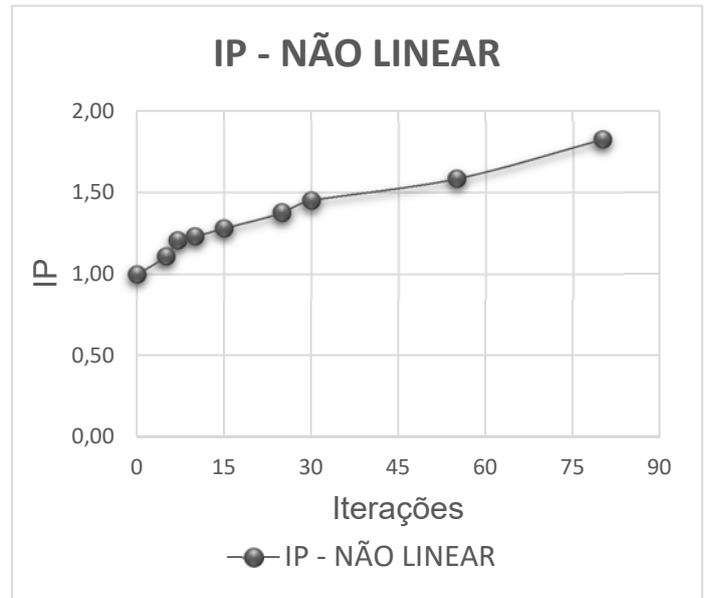
Para a Mísula com uma Coluna, pode-se afirmar que a solução considerando o comportamento não linear do material apresentou diferenças quando comparada com o método usual considerando-se o comportamento linear do material.

Para esse caso, também, a solução para a armadura calculada considerando o comportamento não linear, que descreve melhor o comportamento do material, irá apresentar certa diferença em relação a solução para o comportamento linear, tanto em relação as quantidades quanto em relação ao posicionamento.

O índice de performance (IP) por iteração foi calculado com o objetivo de estimar um ótimo global para a solução da ótima topologia obtida para a análise não linear, conforme apresentado nos gráficos a seguir.



(a)



(b)

Gráfico 6.5 – Índice de Performance x Iterações (a) comportamento linear do material (b) comportamento não linear do material

Foi possível observar que o IP, para esse exemplo estudado, cresceu ao longo do processo iterativo, mantendo poucas variações, tanto para o caso linear quanto para o caso não linear.

# 7

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 7.1 Conclusão

Considerando as simulações numéricas realizadas, pode-se dizer que as soluções obtidas, para a proposta do presente trabalho, são relevantes para a engenharia de estruturas, já que poderão proporcionar aos projetistas estruturais melhor entendimento do funcionamento do método de bielas e tirantes, simplificando o processo de concepção do modelo e facilitando a resolução de problemas complexos envolvendo estruturas especiais com comportamento não linear.

Em relação à análise comparativa entre os resultados para o comportamento linear e não linear do material, é possível dizer que as soluções apresentaram diferenças consideráveis na topologia ótima em alguns exemplos discutidos. Portanto, pode-se concluir que a quantidade e posição das barras de reforço (armadura) podem ser diferentes para o caso não linear. Para os exemplos 6.1 e 6.3 essa diferença foi analisada e comprovada.

O objetivo de incorporar teorias que descrevem o comportamento material concreto o mais próximo da realidade, ao invés das teorias de modelos de bielas e tirantes comumente utilizadas para o projeto estrutural foi atingido. Conclui-se, portanto que o modelo constitutivo de Dano Plástico adotado, que descreve de maneira mais adequada o comportamento concreto, é capaz de gerar soluções mais apropriadas para os modelos de bielas e tirantes.

Foi realizado o estudo do Índice de Performance (IP) para as soluções ótimas das topologias obtidas na tentativa de se obter uma estimativa para o ótimo global, porém, é importante ressaltar que o objetivo do estudo não é otimizar a topologia de estruturas. O objetivo

principal do estudo é identificar o modelo de bielas e tirantes, considerando o concreto com comportamento não linear. Fazendo uso da técnica de otimização evolucionária (ESO) implementada no software Abaqus<sup>®</sup> por meio de uma rotina computacional. Tornando possível obter uma concepção mais adequada para as barras de reforço (armadura) a ser dimensionada. A partir dessa ferramenta, que automatizou o processo, foi possível garantir a realização da escolha de modelos de bielas e tirantes de forma mais confiável e definir melhor a configuração do modelo a ser adotado.

A principal vantagem observada para a utilização da técnica automatizada para concepção do modelo de bielas e tirantes por meio da otimização topológica, considerando o comportamento não linear do material, seria a garantia da obtenção de soluções mais confiáveis, já que está sendo adotado no processo um modelo constitutivo que melhor representa o comportamento do material, o mais próximo da realidade. Além disso, a utilização de um script que utiliza uma linguagem de programação com o código fonte aberto, que permite o monitoramento e controle do processo quase que total.

O estudo realizado contribui, também, para aplicações do método na indústria de pré-moldados, viabilizando a utilização de métodos de concepção de estruturas pré-moldadas, considerando a não linearidade do material, a partir da automatização da escolha do modelo pelo método de bielas e tirantes e otimização topológica.

A desvantagem seria a utilização de um método de otimização topológica realizado através da implementação de um algoritmo em um software comercial, que apesar de proporcionar sua utilização no âmbito da engenharia estrutural, ou seja, em escritórios de cálculos estruturais, restringe um pouco sua utilização no meio acadêmico. Pôde-se observar também que o script apresentou tempo execução longo em alguns casos, principalmente quando se refina muito a malha de elementos finitos. E, ainda, comparando o tempo de execução para as análises considerando o comportamento linear e não linear do material, foi possível perceber que para as análises considerando o comportamento não linear o tempo de execução apresentou-se relativamente maior do que para as análises considerando o comportamento linear.

Por fim, destaca-se que apesar de existirem diversos algoritmos disponíveis em alguns softwares comerciais, a otimização topológica é muito dependente dos parâmetros adotados e

a pesquisa sobre o tema possibilita aplicações e escolha de parâmetros de otimização mais bem fundamentada. O que permitiu a aplicação específica para o objetivo do trabalho de automatizar a concepção de estruturas pelo método de bielas e tirantes em elementos de concreto.

## 7.2 Propostas para trabalhos futuros

Como sugestões de pesquisas futuras, indica-se a obtenção de soluções melhoradas para os modelos de bielas e tirantes considerando o cenário real de propagação de fissuras obtido a partir de testes experimentais.

Além disso, a realização de estudos mais apurados em relação aos parâmetros de otimização adotados.

A realização de estudos mais aprofundados em relação à dependência de malha e de outros problemas numéricos relacionados com obtenção da topologia ótima do projeto. Com o objetivo de garantir a obtenção de soluções confiáveis das topologias ótimas na resolução de problemas complexos envolvendo o concreto estrutural.

Sugere-se, ainda, a realização de estudos envolvendo a obtenção da armadura final para ambos os casos, em outros exemplos considerando o comportamento linear e o não linear, para se chegar ao real impacto das alterações das armaduras em relação à segurança.

## BIBLIOGRAFIA

ABAQUS. *Abaqus analysis user's manual*, Version 6.10, Dassault Systèmes, 2010.

ALMEIDA, V. S.; SIMONETTI, H. L. AND NETO, L. O. Comparative analysis of strut-and-tie models using Smooth Evolutionary Structural Optimization. *Engineering Structures*, 56, 1665–1675, 2013a.

ALMEIDA, V. S.; SIMONETTI, H. L.; NETO, L. O. Análise de modelos de bielas e tirantes para estruturas de concreto armado via uma técnica numérica. *Revista Ibracon de Estruturas e Materiais*, Volume 6, nº1, p. 139-157, ISSN 1983-4195, fevereiro, 2013b.

ALMEIDA, V. S.; SIMONETTI, H. L.; NETO, L. O. *Análise de modelos de bielas e tirantes para estruturas de concreto armado via uma técnica numérica*. 53º Congresso Brasileiro do Concreto - IBRACON, Novembro, 2011.

ALVES, E. C.; VAZ, L. E., VELASCO, M. S. L. *Um Sistema para Determinação de Modelos de Bielas e Tirantes*. In: Anais: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO 40º, Rio de Janeiro, Agosto, 1998.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 318/95 - *Building Code Requirements for Structural Concrete*. Detroit, Michigan, 1995.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 318/05 - *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*, APPENDIX A: Strut-And-Tie Models”. Detroit, 2005.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118. *Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimentos*. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 9062. *Projeto e Execução de Estruturas de Concreto Pré-moldado*. Rio de Janeiro, 2006.

BENDSØE, M. P. *Optimal shape design as a material distribution problem, structural optimization*. v.1, p. 193-202, 1989.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 71, n. 2, p. 197-224, 1988.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. 2º ed. New York: Springer, 370 p., 2003.

BONO, G. F. F. *Modelos Constitutivos para Análise Tridimensional de Estruturas de Concreto Armado através do Método dos Elementos Finitos*. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008.

BORGES, L.E. *Python para desenvolvedores*. 2 ed. Edição do autor, Rio de Janeiro, 2010.

BUCHAIM, Roberto. *A Influência da Não Linearidade Física do Concreto Armado na Rigidez à Flexão e na Capacidade de Rotação Plástica*. Tese de doutorado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001.

CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION. *CSA Standard-A23.3-04 – Design of Concrete Structures*. Ontario: Rexdale, 2004.

CHEN, Wai-Fah. *Plasticity in Reinforced Concrete*. New York: McGraw-Hill, 1982.

CHEN, W. F.; HAN, D.J. *Plasticity for Structural Engineers*. New York: Springer-Verlag, 1988.

CHENG, T. K.; OLHOFF, N. Regularized Formulation for Optimal Design of Axisymmetric Plates. *International Journal of Solids Structures*, 18-2, p. 153-169, 1982.

CHU, D. N.; XIE, Y. M.; HIRA, A.; STEVEN, G. P. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 21, p. 239-251, 1996.

COX, H. L. *The theory of design*. Aeronaut. Res Council Rep, nº 19791, 1958

COOK, W.; MITCHELL, D. Studies of Disturbed Regions Near Discontinuities in Reinforced Concrete Members. *ACI Structural Journal*, p.206-216, 1988.

DA SILVA, Sidney, J. H. *Análise de estruturas de Concreto Armado Sujeitas à Corrosão de Armadura por Cloretos através do Método dos Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2003.

DELALIBERA, Rodrigo G. *Análise Numérica e Experimental de Blocos de Concreto Armado sobre duas Estacas Submetidos à ação de Força Centrada e Excêntrica*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2006.

DÍAZ, A.; SIGMUND, O. *Checkerboard Patterns in Layout Optimization*. *Structural Optimization*, v. 10, p. 40-45, 1995.

DOWNEY, A. *Think Python: How to think like a computer scientist*. Green Tea Press, Massachusetts, 2012.

DRUCKER, D. C.; GREENBERG, H. J.; PRAGER, W. *Extended limit design theorems for continuous media*, 9 v., 1952.

DRUCKER, D. C. *A more Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations*. A.S.M.E. (1952). Proceedings of the First U.S. NATIONAL CONGRESS OF APPLIED MECHANICS, p. 487, 1951.

EUROCODE 2: *Design of Concrete Structures*. General Rules and Rules for Buildings, 2002.

EHE. *Instrucción de Hormigón Estructural*. Ministerio de la Presidencia, 2008.

ESCHENAUER, H. A.; OLHOFF, N. *Topology optimization of continuum structures*. Applied Mechanics Review, v.54, n.4, p. 331-390, 2001.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON. *Fib Model Code 2010* – Final draft. V. 2, Fib n°. 56, p. 53, 2010.

FERNANDES, Walliston dos Santos. *Estudo de otimização topológica em estruturas 2D considerando a não linearidade geométrica*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2013.

FERNANDES, Walliston dos Santos. *Método das somas ponderadas aplicado à otimização multiobjetivo de estruturas lineares e não lineares usando computação evolucionária*. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2016.

FILHO, Américo Campos. *Fundamentos da Análise de Estruturas de Concreto pelo Método dos Elementos Finitos*. Apostila do Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Rio Grande do Sul, 2003.

FRANÇA, Marcela Bruna Braga; GRECO, Marcelo; LANES, Ricardo Morais; ALMEIDA, Valério Silva. Topological optimization procedure considering nonlinear material behavior for reinforced concrete designs. *Computers and Concrete*. Volume 17, Issue 1, pp.141-156, 2016.

GVOZDEV, A. A. The determination of the value of the collapse load for statically indeterminate systems undergoing plastic deformation. Tradução do original de 1938 - *International Journal of Mechanical of Sciences*, 1v., 1960.

HAN, D. J.; CHEN, W. F. A Nonuniform Hardening Plasticity Model for Concretes Materials. *Journal of Mechanics of Materials*, 4, p. 283-302, 1985.

HEGEMIER G. A.; PRAGER W. *On Michell trusses*. Int J. Mech. Sci., 11, p. 209-215, 1969.

HEMP, W. S. Michell frameworks for uniform load between fixed supports. *Eng Optim*. 1, p. 61-69, 1974.

HIBBELER, Russell C. *Resistência dos Materiais*. Tradução de Mechanics of materials. Editora: Prentice Hall, 5º Ed. São Paulo, 2004.

JOG, C. S.; HABER, R. B. Stability of finite element model for distributed parameter optimization and topology design. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering*, v. 130, p. 203-226, 1996.

KANG, W.T.; BITTENCOURT, T.N. *Identificação de Processo de Fraturamento no Concreto Estrutural*. Caderno de Engenharia da Escola de Engenharia de São Carlos, São Paulo, 1999.

KIM, H.; QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. Determination of an optimal topology with a predefined number of cavities. *AIAA Journal*, v. 40, n. 4, p. 739-744, 2002.

KMIECIK, P.; KAMIŃSKI, M. Modelling of reinforced concrete structures and composite structures with concrete strength degradation taken into consideration. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. Vol. XI, n°3, p.623-636, 2011.

KOHN, R. V.; STRANG, G. Optimal-design and relaxation of variational problems. *Communications on pure and applied mathematics*, v.39, n°1, p.112-137, 1986.

KUPFER, H. B.; HILSDORF, H. K.; RUSCH, H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *ACI Journal*, v. 66, n. 8, p.656-666, 1969.

KWAK, H. G.; NOH, S. H. Determination of strut-and-tie models using evolutionary structural optimization. *Eng Structural*. v. 28, Issue 10, p. 1440–1449, march, 2006

KWON, M. *Three dimensional finite element analysis for reinforced concrete members*. PhD dissertation. Department of Civil, Environmental, and Architectural Engineering, University of Colorado. Boulder, 2000.

LANES, Ricardo Morais. *Investigação de um método de otimização topológica evolucionária desenvolvido em script*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2013.

LANES, R.M.; GRECO, M. Aplicação de um método de otimização topológica evolucionária desenvolvido em script Python. *Ciência & Engenharia (Science & Engineering Journal)*, v. 22, p. 1-11, 2013.

LEE, J.; FENVES, G. L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 124, No. 8, p. 892–900, 1998.

LEMAITRE, J. AND CHABOCHE, J. L. Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement. *J. Méc. appl.* 2, 317-365, 1978.

LEMAITRE J., *A course on damage mechanics*. Springer-Verlag, 1992.

LI, Q.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. *A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization*. Struct. Multidisc. Optim., v. 22, p. 230-239, 2001.

LIANG, Q. Q. *Performance-based optimization of structures: theory and applications*. 1°Ed. London and New York, Spoon press Group Taylor & Francis e-Library, 2005.

LIANG, Q. Q.; XIE Y. M.; STEVEN, G.P. Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure. *ACI Struct. J.* 97(2):322–330, 2000.

LIANG, Q. Q.; XIE Y. M.; STEVEN, G.P.; SCHMIDT L.C. Topology Optimization of Strut-and-Tie Models in Non-Flexural Reinforced Concrete Members. *International Conference on Mechanics of Structures, Materials and Systems*. p.309-315, February, Wollongong, Australia, 1999.

- LIMA, Cicero Ribeiro de. *Projeto de mecanismos flexíveis usando o método de otimização topológica*. Dissertação de Mestrado. Escola politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002
- LUBLINER J.; OLIVER J.; OLLER, S.; OÑATE, E. A plastic-damage model for concrete, *International Journal of Solids and Structures*, v. 25, p. 299–329, 1989.
- LUTZ, M. *Programming Python*. O’Reilly Media, Sebastopol, 2011.
- MACGREGOR, J.G. *Reinforced concrete mechanics and desing*. New Jersey. Prentice Hall, 1997.
- MARQUES, G.C.S.C. *Estudo e Desenvolvimento de Código computacional baseado no Método dos Elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais*. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- MARTI, P. Basic Tools of Reinforced Concrete Beam Design. *ACI Journal*. v.82, ed.nº01, January-February, p. 45-56, 1985.
- MESQUITA, Arthur Dias. *Novas Metodologias e Formulações para o Tratamento de Problemas Inelásticos com Acoplamento MEC/MEF Progressivo*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2002.
- MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. *Concreto: estrutura, propriedades e materiais*. São Paulo: Pini, 1994.
- MAXWELL, J. Clerk. On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, v. 26, ed.nº01, January, p. 1-40, 1870.
- MICHELL, A. G. M. The limits of economy of material in frame-structures. *Philosophy Magazine*, 8, p.589–597, 1904.
- NARCISO, Susana P. dos Santos. *Determinação de Modelos de Escoras e Tirantes para Análise em Estruturas de Betão Armado*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Porto, 2009.
- NEWMAN, M. *Computational Physics*. CreateSpace Independent Publishing Platform, Michigan, 2012.
- NIELSEN, M. P. *Limit Analysis and Concrete Plasticity*. New Jersey: Prentice-Hall Series in Civil Engineering, Englewood Clifs, 1984.
- NOVOTNY, A. A.; FEIJÓO, R. A.; TAROCO, E. Análise de sensibilidade contínua. LNCC/MCT. Petrópolis, 2003.
- OLLER, S.; OLIVER J.; LUBLINER J.; OÑATE, E. *Um modelo Constitutivo de Dano Plastico pata Materiales Friccionales. Parte – I: Variables Fundamentales, Funciones de Fluencia y Potencial*. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Indeniería. Vol.4, 4, 397-431, 1988.

OLHOFF, Niels; BENDSØE, Martin P., RASMUSSEN, John. On CAD-integrated structural topology and design optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 89, Issues 1–3, p. 259-279, 1991.

OLIVEIRA, L. D. *Projeto de Estruturas de Concreto Armado pelo Modelo Biela-Tirante via Mínima Norma Euclidiana*. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Brasília-UNB, Brasília, 108p, 1995

OLIVEIRA, R. *Determinação de Modelos de Bielas e Tirantes com Utilização de Técnicas de Otimização Topológica*. Dissertação de Mestrado. PUC-RJ, Rio de Janeiro, 1998.

PALANISWAMY, R.; S.P. Shah. Fracture and Stress-Strain Relationship of Concrete Under Triaxial Compression. *Journal of Structural Division, ASCE*, p. 901-916, 1974.

PANTOJA, João da Costa. *Geração Automática via Otimização Topológica e Avaliação de Segurança de Modelos de Bielas e Tirantes*. Tese de Doutorado. PUC-RJ, Rio de Janeiro, 2012.

PETERSON, P. E. *Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and Similar Materials*. Division of Building Materials. University of Lund. Lund, Sweden, 1981.

PROENÇA, Sergio Persival Baroncini. *Sobre Modelos Matemáticos do Comportamento Não-Linear do Concreto Análise Crítica e Contribuições*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos, 1988.

PYTHON COMMUNITY. *Python Programming Language – Official Website*. Disponível em: <<http://www.python.org>> acesso em: 10/08/2013.

QUERIN, O.M., *Evolutionary Structural Optimization stress based formulation and implementation*. PhD dissertation, University of Sydney, 1997.

QUERIN, O. M.; STEVEN, G.P.; XIE, Y. M. Evolutionary structural optimisation using an additive algorithm. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 34, Issues 3–4, p. 291-308, 2000(a).

QUERIN, O. M.; YOUNG, V.; STEVEN, G.P.; XIE, Y. M. Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 189, Issue 2, p. 559-573, 2000(b).

ROZVANY, G. I. N. *A review of new fundamental principles in exact topology optimization*. 19th International Conference on Computer Methods in Mechanics CMM-2011. Warsaw, 2011.

ROZVANY, G. I. N.; BENDSOE, M. P.; KIRSCH, U. Layout optimization of structures. *Appl. Mech. Rev.* 48, p. 41-119, 1995.

ROZVANY, G. I. N.; OLHOFF, N.; CHENG, K.; TAYLOR, J. E. On the Solid Plate Paradox in Structural Optimization. *Journal of Structural Mechanics*. 10-1, p. 1-32, 1982.

ROZVANY, G.I.N.; ZHOU, M. The COC algorithm, part I: Cross-section optimization or sizing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. v. 89, Issues 1–3, p. 281-308, 1991.

SANTOS, D. *Análise de vigas de concreto armado utilizando modelos de bielas e tirantes*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2006.

SARTURI, FRANCIS DIEGO MORETTO. *Simulação computacional de estruturas de concreto reforçadas com aço e compósitos de fibra de carbono*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

SCHÄFER, K.; SCHLAICH, J. *Consistent Design of Structural Concrete using Strut and Tie Models*. Colóquio sobre comportamento e projeto de Estruturas, Rio de Janeiro, 1988

SCHÄFER, K.; SCHLAICH, J. Design and Detailing of Structural Concrete Using Strut-and-Tie Models. *The Structural Engineer*, v.69, n.06, p.113-125, 1991

SIGMUND, O. On the design compliant mechanisms using topology optimization. *Mechanics of Structures and Machines*, v. 25, n. 4, p. 493-524, abril, 1997.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. *Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh dependencies and local minima*. Structural Optimization, Springer-Verlag, v. 16, p. 68-75, 1998.

SCHLAICH, J; SCHAFFER, K; JENNEWEIN, M. Toward a consistent design of structural concrete. *PCI-Journal*, vol. 32, nr.3, p. 74–150, May/June, 1987.

SILVA, E. C. N.; NISHIWAKI, Shinji; FONSECA, Jun S. Ono; KIKUCHI, Noboru. Optimization de métodos aplicados ao projeto de atuador flexionais materiais e usando a homogeneização de métodos. *Computer Methods em Mecânica Aplicada e Engenharia*, v. 172, Edições 1-4, p. 241-271, abril, 1999.

SILVA, R. J. C. *Modelos de Bielas e Tirantes Através de Modelagem Apertada*. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Brasília-UNB, Brasília, 1998.

SILVA, R. C.; GIONGO, J.S. *Modelo de Bielas e Tirantes Aplicados a Estruturas de Concreto Armado*. São Carlos: EESC-USP, 2000.

SINHA, B.P.; K. H. Gerstle, and L.G. Tulian. Stress-Strain Relations for Concrete Under Cyclic Loading. *ACI Journal*, 61, p. 195-211, 1964.

SIMONETTI, H. L.; NEVES, F. de A. das; ALMEIDA, V. S. Otimização topológica via uma suavização do ESO em problemas de elasticidade plana. *Revista CIATEC – UPF*, vol.2 (1), p.28-44, 2010.

SIMONETTI, H. L. *Otimização topológica de estruturas bidimensionais*. Dissertação de Mestrado. UFOP – Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2009.

SIMONETTI, H. L. *Otimização topológica de estruturas elásticas 2d via mec baseada em uma nova abordagem evolucionária*. Tese de Doutorado. UFOP – Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2016.

SOUZA, Paulo, S. L. *Verificação da Influência do Uso do Metacalim de Alta Reatividade nas Propriedades Mecânicas do Concreto de Alta Resistência*. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2003.

SOUZA, R. A. *Análise de Fraturamento em Estruturas de Concreto Armado Utilizando Programas de Análise Estrutural*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2001.

SOUZA, R. A. *Concreto Estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades*. Tese de doutorado. USP – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia e Fundações. São Paulo, 2004.

STRAMANDINOLI, R. S. B. *Modelos de Elementos Finitos para Análise não linear Física e Geométrica de Vigas e Pórticos Planos De Concreto Armado*. Tese de doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2007.

VALLIAPPAN, S. *Continuum mechanics fundamentals*. A.A. Balkema, Rotterdam, Netherlands, 1981.

VIEIRA, P. C. S.; MELLO, E. L.; BEZERRA, L. M. *Síntese Estrutural e Análise Modal de Pórticos Espaciais com Diferentes Graus de Redistribuição de Esforços Solicitantes*. Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenharia - CILAMCE, p. 1-21, 2000.

WIGHT, J.K.; MACGREGOR, J.G. *Reinforced Concrete Mechanics and Design*. Ed. Prentice-Hall International (UK) Limited, 3rd. ed., p. 879-972, London, 2012.

XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & Structures*, v. 49, Issue 5, p. 885-896, 1993.

XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. Evolutionary structural optimization for dynamic problems. *Computers & Structures*, v.58, Issue 6, p.1067-1073, 1996.

XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. *Evolutionary Structural Optimization*. Springer-Verlag, Berlim, 1997.

ZHANG, H.Z., LIU, X. AND YI, W.J. Reinforcement Layout Optimization of RC D-regions. *Advances in Structural Engineering*, v.17, n. 7, p. 979-992, 2014.