

# Estudo de Propriedades de Mapas Quânticos no Modelo de Colisões

Dissertação de Mestrado

Davi de Freitas Barros

Orientador: Marcelo Paleólogo de França Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Julho de 2014

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Marcelo França pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho.

Agradeço também a todos os professores do departamento que construíram boa parte do meu aprendizado durante o mestrado, principalmente àqueles que levaram o papel de ensinar além da sala de aula.

Dedico um agradecimento especial à Shirley e ao pessoal da biblioteca, não apenas aos serviços prestados, mas à competência e na forma como representam um exemplo de educação a se seguir.

Agradeço também à coordenação do curso e à secretaria pelo auxílio e disposição em ajudar.

Agradeço profundamente aos Sr. Dijalma dos Santos Barros e à Sra. Martha Maria de Freitas Barros, que fizeram de mim quem eu sou e que foram minha fortaleza durante esses anos de aprendizagem longe de casa. E a meus irmãos Bruno de Freitas Barros e Hugo de Freitas Barros que acompanharam esse processo e me deram o apoio que eu precisava. E também aos meus tios Sr. Messias e Sra. Nadja, que me deram muita confiança nesses tempos.

Em particular, dedico um agradecimento extra aos grandes amigos Mr. Tassius, Mr. Érico Luiz e em especial ao Mr. André Tanus que tiveram uma participação direta na escrita deste documento.

Um agradecimento aos amigos mais próximos, que são muitos aqui, que ajudaram a fazer desta estadia algo muito mais prazeroso. Alguns em especial, que me ajudaram a não estudar nas horas que eu precisava, e nas que eu não precisava também, como o Alisson, Hakob, Ingrid, Murilão, Eliel, Welyson, Diegão, Camarada Job, Guilhermito, Chulia, Bárbara, Barbara, Campô, Saurão, Pumba, Dom Pedro, Chabláu, Erik, Lídia, Ligia, Mangos (Parcerooooo), Anis, Alana, Emilson, Tutu, Medeirão, Diego, Gláucia, Hobbit, Mário (noventa e um é a melhor turma), Matheus, Tchê, Debarba, Fernando, Jojô da Bahia, Jean, Ana Paula, Lucas, Carlos, Andreij, Marco, Safadão, Denise e todo mundo, que se eu esqueci aqui eu vou dar um abraço mesmo assim, merecem um bocado da minha gratidão.

Agradeço à UFMG e ao CNPq.

E por último e não menos importante eu agradeço a Deus.

# Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iv
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Formalismo</b>	<b>3</b>
2.1 Sistemas Quânticos Isolados . . . . .	3
2.1.1 Estados Mistos . . . . .	6
2.2 Emaranhamento e Correlações: Clássico vs. Quântico . . . . .	8
2.2.1 Sistemas Compostos . . . . .	8
2.2.2 Correlações em Mecânica Quântica . . . . .	11
2.3 Dinâmica em Sistemas Abertos . . . . .	12
2.3.1 Operações Quânticas . . . . .	14
2.4 Mapas Estocásticos e Monitoramento . . . . .	17
2.4.1 Representação Ambiental . . . . .	17
2.4.2 Evoluções Monitoradas . . . . .	19
2.5 Memória em Sistemas Quânticos . . . . .	21
2.5.1 Divisibilidade de Canais Quânticos . . . . .	22
2.5.2 Markovianidade e Distinguibilidade de Estados . . . . .	23
2.6 Distinguibilidade de Dois Estados num Mapa CEA . . . . .	25
2.6.1 Evolução da Distância em Mapas CEA . . . . .	26
<b>3 Aplicação</b>	<b>29</b>
3.1 Modelo de Colisões . . . . .	29
3.1.1 Evolução Unitária no Modelo de Colisões . . . . .	31
3.2 Modelo de Colisões com Reservatório Monitorado . . . . .	33
3.3 Evolução Para Diferentes Graus de Pureza . . . . .	36
3.3.1 Evolução Monitorada para um Estado de Reservatório Qual- quer . . . . .	38
3.3.2 Estatística das Trajetórias . . . . .	40

3.4	Relação Entre Correlações e Markovianidade . . . . .	41
4	<b>Considerações Finais</b>	<b>44</b>

# Resumo

O modelo de colisões trata de uma maneira de simular processos em sistemas quânticos abertos através de uma série de interações controladas de um sistema principal com partículas de um reservatório. Neste trabalho, esse modelo é utilizado como uma ferramenta que permite uma análise simplificada das propriedades de dinâmicas abertas em geral. Através de um formalismo de mapas quânticos, procura-se encontrar a relação entre as correlações das partículas do reservatório e a não-markovianidade da evolução do sistema, além do possível efeito do monitoramento das partículas do reservatório sobre a evolução da dinâmica do sistema principal. Para desenvolver o estudo, é feita uma introdução dos conceitos fundamentais que culminam no formalismo de operações quânticas e como as propriedades de markovianidade e as trajetórias quânticas são expressas nesta descrição. Alguns resultados da análise propõem como o estado do sistema pode afetar as medições nas partículas do reservatório e como essas medições também podem inferir sobre as propriedades da evolução do sistema.

# Capítulo 1

## Introdução

O presente trabalho busca discursar sobre sistemas quânticos abertos através de um modelo que permite uma implementação natural de medições do reservatório, com o objetivo de monitorar o sistema de interesse. Também busca-se analisar o papel das correlações clássicas e quânticas em dinâmicas de sistemas abertos.

De maneira geral, nesta dissertação, introduz-se o formalismo da mecânica quântica de sistemas abertos sob a perspectiva das evoluções monitoradas e troca de informação com o ambiente. O objetivo é destacar formalmente a relação entre a observação de resultados de medição com as propriedades dinâmicas do sistema, em um contexto específico de modelos de colisões.

O formalismo padrão da mecânica quântica descreve o sistema em um regime que só interage com o mundo externo através das medições realizadas. Como consequência, a evolução entre a preparação e as medidas é unitária, preservando o conteúdo informacional da descrição. Em outras palavras, existem medições realizadas sobre o sistema após a evolução, que revelam estatísticas semelhantes às presentes no momento de preparação, em particular, caso um teste quântico seja bem sucedido com uma certa probabilidade, após uma evolução unitária existirá outro teste equivalente que possui a mesma chance de sucesso. A evolução temporal entre as fases de preparação e de medição é associada a uma sequência temporal contínua de operações unitárias realizadas sobre o estado.

Quando a aproximação de sistema isolado é abandonada e passa-se a incluir interações não controladas com outros graus de liberdade, o sistema físico passa a se correlacionar com estes graus de liberdade e a descrição apenas em termos do sistema se torna incompleta. Tais sistemas são denominados *abertos* e interpreta-se tal degradação como um fluxo de informação que *vaza* para o ambiente (reservatório). É interessante entender a dinâmica nesse cenário mais realístico, seja para controlar situações que exibem um caráter irreversível indesejado ou criar modelos que exponham as características relevantes nesse contexto.

Existindo algum grau de controle sobre o reservatório, é possível realizar medi-

ções para desvendar características da evolução do sistema analisado. Enquanto houver correlações entre as duas partes, a informação contida nos registros de medições do reservatório permite inferir sobre a dinâmica compatível com os resultados de medição. O modelo de colisões que é analisado neste trabalho fornece um esquema para as interações com os graus de liberdade do ambiente e uma maneira natural de realizar medições nas partículas interagentes.

As evoluções de sistemas abertos podem ser Markovianas (sem efeito de memória) ou não Markovianas (com efeito de memória). Uma das maneiras de produzir efeitos de memória na evolução do sistema é considerar que as partículas do reservatório estão correlacionadas antes de interagirem com o próprio. Tais efeitos podem ser analisados a partir da capacidade (ou não) de descrever a evolução do sistema como uma sequência de operações disjuntas sobre seu estado quântico e também pela troca de informação existente entre sistema e ambiente.

O texto divide-se em duas partes: a primeira introduz de maneira breve a teoria de sistemas quânticos abertos, com foco na descrição da dinâmica através de mapas estocásticos. A segunda introduz o modelo de colisões simples e relata a análise deste modelo segundo o formalismo desenvolvido no capítulo anterior.

O capítulo dois parte de uma revisão de sistemas quânticos isolados e introduz os conceitos fundamentais de estado quântico, evolução e medição. Estados mistos são apresentados e é feita a ligação entre correlações entre sistemas e a perda de informação parcial. A distinção entre correlações clássicas e quânticas é brevemente apresentada e é conectada à ideia de evolução monitorada. Em seguida, mostra-se de maneira rápida como o formalismo de sistemas quânticos abertos é construído sobre esta base, incluindo a possibilidade de descrever processos estocásticos. Por fim, o capítulo termina com a discussão sobre a divisibilidade de canais quânticos e a abordagem da markovianidade através do fluxo de informação entre sistema e ambiente. O papel da distância entre estados quânticos é analisado neste contexto e é feito um cálculo para encontrar o valor da distância de Hilbert-Schmidt em mapas unitais de dimensão finita.

A parte de aplicação apresenta os modelos de colisão e sua utilidade no estudo de sistemas quânticos abertos. E em seguida são apresentadas as características do modelo específico estudado no trabalho. Como as partículas interagem em sequência e apenas uma única vez, o monitoramento é baseado nas medidas dos estados das partículas recém interagidas. Para diferentes configurações iniciais, e poucas interações, analisa-se a estatística das medições e a trajetória correspondente. Por fim, a divisibilidade para estados iniciais descorrelacionados é verificada, e é levantada a questão de como o monitoramento pode afetar o caráter markoviano da dinâmica quando há correlação inicial entre as partículas do reservatório.

# Capítulo 2

## Formalismo

### 2.1 Sistemas Quânticos Isolados

Um dos conceitos fundamentais da mecânica quântica é o do estado quântico. Considerando inicialmente estados puros, sua representação matemática é dada por vetores normalizados no espaço de Hilbert que, para sistemas de dimensão finita  $N$ , nada mais é que um espaço vetorial complexo dotado de um produto interno que será discutido mais adiante. O significado do estado puro surge de um experimento que possua  $N$  possíveis resultados distinguíveis. Estes resultados são os valores que um conjunto completo e compatível de variáveis dinâmicas (observáveis) do sistema podem assumir, e.g. a energia e/ou polarização de um feixe óptico. Definido o procedimento experimental que forneça tais resultados, o estado produzido pela preparação é puro quando existe, em princípio, um arranjo que tenha como resultado um valor definido para os observáveis. É importante notar que a definição de um estado puro está associada à estatística dos resultados de medida, através das probabilidades de obter os diferentes valores do conjunto de variáveis dinâmicas. Uma maneira de construir o estado quântico de uma preparação experimental, é realizando uma sequência de experimentos, a fim de estimar o limite aos quais tendem as frequências dos resultados e obter uma probabilidade para cada evento possível [13]. Felizmente, a dimensão do espaço de estados é capaz de indicar um número razoável de testes que são suficientes para a reconstrução do estado quântico.

Cada observável possui um conjunto de estados distintos que correspondem a uma medida certa de um determinado valor da grandeza. A representação matemática dos observáveis é obtida ao associar cada estado puro, e os valores correspondentes das variáveis dinâmicas, a um dos pares de autovalores reais e autovetores que compõe um operador hermitiano do espaço de Hilbert.

Sendo um estado puro do sistema descrito pela notação de Dirac por  $|\psi\rangle$  e



as variáveis dinâmicas descritas por operadores hermitianos  $A = A^\dagger$ , o produto interno fica definido de tal forma que

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle, \quad (2.1)$$

$\langle A \rangle$  é o valor esperado da variável dinâmica para este estado puro [10]. Expandindo dois vetores numa base ortogonal  $|\psi\rangle = \sum \psi_i |i\rangle$  e  $|\phi\rangle = \sum \phi_i |i\rangle$  o produto interno que fornece a estatística correta é definido por  $\langle \phi | \psi \rangle = \sum \phi_i^* \psi_i$ . A média do operador, assumindo que seus autovetores sejam  $|\phi_i\rangle$  e autovalores  $A_i$ , pode ser escrito na forma

$$\langle A \rangle = \sum_i a_i |\langle \phi_i | \psi \rangle|^2. \quad (2.2)$$

Em teoria de probabilidade o valor esperado de uma variável estocástica é dada por  $\bar{X} = \sum_i x_i p_i$ , logo, comparando o processo de encontrar o valor esperado utilizando o formalismo da mecânica quântica com o análogo clássico, tem-se a regra de Born para as probabilidades de encontrar um estado puro  $|\phi\rangle$  num experimento preparado para ser bem sucedido no estado puro  $|\psi\rangle$  como [13]

$$P(\psi, \phi) = P(\phi, \psi) = |\langle \phi | \psi \rangle|^2. \quad (2.3)$$

Para  $A = \mathbb{I}$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_i |\langle \phi_i | \psi \rangle|^2 = \sum_i p_i = 1 \quad (2.4)$$

exibe-se a necessidade de tomar vetores normalizados no espaço de Hilbert para representar as médias e probabilidades de forma sucinta. Também nota-se que todas as quantidades mensuráveis de um sistema são dependentes do estado  $|\psi\rangle$  através de probabilidades de transições da forma  $|\langle \phi | \psi \rangle|^2$ . Isto implica que uma mudança de fase global do tipo

$$|\psi\rangle \rightarrow e^{i\theta} |\psi\rangle \quad (2.5)$$

não tem consequência física. Ou seja, os estados puros correspondem à toda uma classe de equivalência de vetores no espaço complexo tratado [3].

O princípio da superposição afirma que qualquer elemento do espaço vetorial, exceto o vetor nulo, representa um estado puro que pode, em princípio, ser realizado experimentalmente<sup>1</sup>. Assim, justifica-se a utilização de um espaço vetorial para descrever os estados quânticos puros.

A evolução temporal de um sistema quântico fechado deve ser tal que qualquer estado puro é transformado em outro estado puro [10]. Em outras palavras, se em um experimento perfeitamente reproduzível houver um teste com resultado

---

<sup>1</sup>Porém um exemplo de limitação fundamental do princípio da superposição é encontrada quando se trata de partículas indistinguíveis [13].

previsível num dado tempo  $t_1$ , também haverá em um tempo posterior  $t_2$  um teste, em geral diferente, que terá um resultado determinístico. Isto é expresso matematicamente através de  $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle$ , em que  $|\psi\rangle$  representa o estado do sistema em  $t = t_1$  e  $|\psi'\rangle$  em  $t = t_2$ .

No formalismo quântico, assume-se que a correspondência entre os estados seja realizada através de uma evolução unitária. Ou seja, para quaisquer  $|\psi\rangle$ ,  $|\phi\rangle$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  estes satisfazem  $\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$  e  $|\omega\rangle = \alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle$  evolui para  $|\omega'\rangle = \alpha|\psi'\rangle + \beta|\phi'\rangle$ . A segunda condição garante que a transformação seja realizada por um operador linear dependente somente dos tempos  $U(t_2, t_1)$  e a primeira requer que este operador satisfaça  $U^\dagger(t_2, t_1)U(t_2, t_1) = \mathbb{I}$ . Por consistência, para  $t_2 = t_1$ ,  $|\psi'\rangle = |\psi\rangle$ , e conseqüentemente,  $U(t, t) = \mathbb{I}$ , para todo  $t$  [13].

Quando se trata o caso de valores contínuos para a variável  $t$  pode-se definir o hamiltoniano do sistema como um operador hermitiano:

$$H(t) = i\hbar \frac{dU(t, t_0)}{dt} U^\dagger(t, t_0). \quad (2.6)$$

Seja  $|\psi'\rangle = U(t, t_0)|\psi\rangle$ , a aplicação do hamiltoniano resulta na equação de Schrödinger

$$H(t)|\psi'\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi'\rangle. \quad (2.7)$$

Em um sistema estritamente fechado, onde a evolução do sistema não contenha nenhum parâmetro externo dependente do tempo,  $H$  independe do tempo também e a solução da equação de Schrödinger fica

$$|\psi'\rangle = e^{-iH(t-t_0)/\hbar} |\psi\rangle. \quad (2.8)$$

E conseqüentemente, a evolução unitária do sistema isolado é

$$U(t_2, t_1) = e^{-iH(t_2-t_1)/\hbar}. \quad (2.9)$$

O processo de medição é necessariamente dado por uma interação do sistema com o mundo externo. Para uma definição satisfatória deste processo, é comum tomar o limite em que o estado imediatamente após a medição do observável  $A$  deve ser representado pelo autovetor associado ao autovalor obtido. Como descrito pela regra de Born, este evento ocorre com probabilidade  $p_i = |\langle\phi_i|\psi\rangle|^2$ . A operação é chamada de medição seletiva e é um processo estocástico que pode ser resumido como

$$|\psi\rangle = \sum_i \psi_i |\phi_i\rangle \rightarrow |\phi_i\rangle, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Essa definição permite uma correspondência coerente entre a propriedade quântica, o estado  $|\phi_i\rangle$ , e a informação que pode ser armazenada classicamente, o autovalor  $a_i$  [10].

### 2.1.1 Estados Mistos

Uma outra forma de descrever a operação de medição é através dos projetores, que são um conjunto de operadores hermitianos  $P_i$  cujos autovalores são 0 ou 1, ou seja,  $P_i^2 = P_i$ , e onde o subespaço associado ao autovalor 1 seja unidimensional [13]. Este conjunto de operadores é capaz de representar o processo de medição e pode ser obtido a partir de uma base ortogonal  $|\phi_i\rangle$  desde que satisfaçam

$$P_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij}|\phi_i\rangle, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Na notação de Dirac este operador é simplesmente escrito como  $P_i = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ . Seja um estado preparado  $|\psi\rangle$ , a probabilidade de testá-lo e obter  $|\phi_i\rangle$  como resultado de uma medida na base acima é dado por  $p_i = \langle\psi|P_i|\psi\rangle$  e o estado normalizado resultante é dado por [10]

$$|\psi\rangle \rightarrow P_i|\psi\rangle/\sqrt{p_i}. \quad (2.12)$$

Esses operadores também são úteis por proverem uma representação da identidade na base  $\{|\phi_i\rangle\}$ . Seja  $\sum_i P_i = \mathbb{I}$ , diz-se que este conjunto expande o espaço de Hilbert de interesse e para todo  $|\psi\rangle$

$$\sum_i P_i|\psi\rangle = \sum_i \psi_i|\phi_i\rangle = |\psi\rangle, \quad (2.13)$$

consequentemente, qualquer operador diagonal numa determinada base pode ser expandido usando os projetores associados a ela:  $A = \sum_i a_i P_i$ .

Qualquer estado puro  $|\phi\rangle$  é sempre descritível através de um projetor  $\rho_\phi = P$ , tal que um teste feito sobre um estado quântico  $|\phi\rangle$ , através de uma medida dada por  $P$ , seja bem sucedido com probabilidade  $\langle\phi|P|\phi\rangle = 1$ . O estado quântico puro pode ser descrito através de um projetor, utilizando-se a notação  $\rho_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$ , e como os projetores são operadores hermitianos, o operador de estado neste formalismo também é um observável do sistema. Este observável representa uma variável dinâmica que fornece a probabilidade que um dado estado puro  $|\psi\rangle$  responda positivamente a uma montagem preparada para satisfazer  $|\phi\rangle$  com certeza [13]. Ou seja, existe uma correspondência direta entre  $\rho_\phi$  e a classe de elementos do espaço de Hilbert  $e^{i\theta}|\phi\rangle$  que representam um estado quântico. Usando a operação traço, que satisfaz para quaisquer  $\rho_\psi$  e  $A$

$$\text{Tr}[\rho_\psi A] = \langle\psi|A|\psi\rangle, \quad (2.14)$$

é possível reescrever as equações da mecânica quântica através de um formalismo de operadores.

Pode haver a situação em que o estado quântico não seja bem definido, de forma que a preparação produza um *ensemble* de estados puros  $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ . Para cada um destes estados puros, o valor médio de um observável  $A$  é

$$\langle A \rangle_i = \text{Tr}[\rho_i A], \quad (2.15)$$

consequentemente, o valor médio para a variável dinâmica do ensemble de estados puros é dado por

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i \text{Tr} [\rho_i A] = \text{Tr} \left[ \sum_i p_i \rho_i A \right], \quad (2.16)$$

que pode ser escrito como

$$\langle A \rangle = \text{Tr} [\rho A] \quad (2.17)$$

onde define-se a matriz densidade  $\rho = \sum_i p_i \rho_i$  do sistema quântico. Mais uma vez, lembrando que  $\langle \mathbb{I} \rangle = 1$ , chega-se na condição de normalização dos estados

$$\text{Tr} \rho = 1, \quad (2.18)$$

enquanto que ao tomar um vetor qualquer  $|\phi\rangle$

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_i p_i |\langle \phi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0, \quad (2.19)$$

o que significa que o operador  $\rho$  é positivo semi-definido. Por outro lado, dada uma matriz qualquer que satisfaça as duas condições acima, a positividade garante que este possuirá uma representação da forma

$$\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i| \quad (2.20)$$

para  $\lambda_i$  positivos, enquanto que a normalização de  $\rho$  implica que

$$\sum_i \lambda_i = 1. \quad (2.21)$$

Ou seja, qualquer matriz positiva semi-definida de traço unitário representa um ensemble de estados puros  $\{\lambda_i, |i\rangle\}$ , e consequentemente, estes formam a representação mais geral de estados quânticos [13].

Na verdade, uma matriz densidade não é definida de forma unívoca por um determinado ensemble de estados puros. O *teorema da mistura de Schrödinger* afirma que: seja uma matriz densidade definida por  $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ , haverá outro ensemble  $\{q_j, |\phi_j\rangle\}$  ligado ao primeiro através de

$$\sqrt{p_i} |\psi_i\rangle = \sum_j u_{ij} \sqrt{q_j} |\phi_j\rangle, \quad (2.22)$$

se existir uma isometria  $U$  entre os ensembles que satisfaz  $\sum_i u_{ki}^\dagger u_{ij} = \delta_{jk}$  [3]. Dessa forma a representação da matriz densidade de ambas são equivalentes

$$\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_{jk} \sqrt{q_j q_k} \sum_i u_{ki}^\dagger u_{ij} |\phi_j\rangle\langle\phi_k| = \sum_j q_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|. \quad (2.23)$$

A partir disso, nota-se que a descrição de um estado quântico através de um determinado ensemble de estados puros é arbitrária, equivalente à uma escolha de base num espaço vetorial.

O conjunto das matrizes densidade formam um conjunto convexo, no sentido em que qualquer elemento do conjunto pode ser escrito como

$$\rho = p\rho' + (1 - p)\rho'', \quad 0 \leq p \leq 1, \quad (2.24)$$

sendo  $\rho'$  e  $\rho''$  também pertencentes ao conjunto. Os estados puros são representados pelos elementos do conjunto convexo das matrizes densidade nas quais a relação acima é satisfeita apenas para  $\rho' = \rho''$ , já que

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \Rightarrow \rho' = \rho'' = \rho. \quad (2.25)$$

Para ver isso, basta considerar qualquer estado  $|\phi\rangle$  ortogonal a  $|\psi\rangle$ , logo

$$p\langle\phi|\rho'|\phi\rangle + (1 - p)\langle\phi|\rho''|\phi\rangle = 0, \quad (2.26)$$

implica que  $\langle\phi|\rho'|\phi\rangle = \langle\phi|\rho''|\phi\rangle = 0$ , pois  $p$  e  $(1 - p)$  são positivos. Se todos os vetores que formam uma base que diagonaliza  $\rho$ , exceto  $|\psi\rangle$ , satisfazem  $\langle\phi|\rho'|\phi\rangle = 0$ , então  $\rho'|\psi\rangle = |\psi\rangle$ , com autovetor um, já que  $\rho'$  possui traço um e consequentemente não é o operador nulo. O operador que possui autovalor um para apenas um dos seus autovetores e autovalor zero para todos os outros é um projetor, e repetindo a análise para  $\rho''$  conclui-se que  $\rho' = \rho'' = |\psi\rangle\langle\psi|$ . Em resumo, o conjunto de todos os estados quânticos é formado por todas as misturas estatísticas possíveis entre os estados quânticos puros [13].

A partir desta descrição, os processos básicos para a descrição de um sistema quântico isolado podem ser listados em função da matriz densidade

$$\begin{aligned} \rho \rightarrow \rho' &= U(t_2, t_1)\rho U^\dagger(t_2, t_1) && \text{(Evolução Unitária)} \\ \rho \rightarrow \rho_j &= P_j\rho P_j / \text{Tr}[P_j\rho] && \text{(Medição Seletiva)} \\ \langle A \rangle &= \text{Tr}[A\rho] && \text{(Valor Médio de um Observável)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

## 2.2 Emaranhamento e Correlações: Clássico vs. Quântico

### 2.2.1 Sistemas Compostos

Em mecânica quântica um sistema composto  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$  por dois estados puros  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A$  e  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_B$  é escrito na notação de Dirac como

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle|\phi\rangle. \quad (2.28)$$

Nessa descrição, para cada um dos sistemas evoluindo através das respectivas unitárias locais  $U(t_2, t_1)$  e  $V(t_2, t_1)$  que atuam nos espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$  respectivamente, a evolução do estado  $|\Psi\rangle$  é definida como [3]

$$|\Psi'\rangle = |\psi'\rangle|\phi'\rangle = [U(t_2, t_1) \otimes V(t_2, t_1)] |\psi\rangle|\phi\rangle. \quad (2.29)$$

Seja um ensemble formado por  $\{|\Psi_i\rangle, p_i\}_{i=1,2}$ . A matriz densidade que caracteriza esta mistura é dada por

$$\omega = p_1|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + p_2|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| = p_1\rho_1 \otimes \sigma_1 + p_2\rho_2 \otimes \sigma_2 \quad (2.30)$$

no qual  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  e  $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$ . De maneira um pouco mais geral, um ensemble de um sistema bipartido separável pode tomar a seguinte forma

$$\omega = \sum_i w_i \rho_i \otimes \sigma_i. \quad (2.31)$$

Estados que possuam essa forma podem ser produzidos através de comunicação clássica entre duas partes. Por exemplo, dois laboratórios que possuam aparelhos de emissão de partículas em diferentes estados, porém que compartilham uma sequência aleatória em comum, produz esse tipo de estado conjunto para os operadores das máquinas, caso não seja possível acessar a informação contida na sequência aleatória [3].

Porém, a mecânica quântica garante que superposições de estados quânticos também formam estados quânticos. Assim, a forma mais geral possível de um sistema composto puro é dada por

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij} \Psi_{ij} |i\rangle|j\rangle. \quad (2.32)$$

Este estado pode tomar uma forma mais simples. Seja  $\Psi$  uma matriz cujos elementos são  $\Psi_{ij}$ , pode-se encontrar duas matrizes positivas  $\Psi^\dagger\Psi$  e  $\Psi\Psi^\dagger$  que são diagonalizáveis através das unitárias  $U$  e  $V$  respectivamente:

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger\Psi &= UA^\dagger AU^\dagger = (UA^\dagger V^\dagger) (VAU^\dagger) \\ \Psi\Psi^\dagger &= VAA^\dagger V^\dagger = (VAU^\dagger) (UA^\dagger V^\dagger). \end{aligned}$$

Comparando os lados esquerdo e direito das equações, nota-se que  $\Psi = VAU^\dagger$ , e  $A$  uma matriz diagonal<sup>2</sup>. O vetor de onda do sistema composto fica expresso na forma de Schmidt [3]

$$|\Psi\rangle = \sum_k \alpha_k |\psi_k\rangle|\phi_k\rangle \quad (2.33)$$

---

<sup>2</sup>A existência da matriz  $A$  é garantida, pois se trata da matriz diagonal na decomposição em valores singulares da matriz  $\Psi$

para  $|\psi_k\rangle = \sum_i v_{ki}|i\rangle$  e  $|\phi_k\rangle = \sum_j u_{kj}^*|j\rangle$ .

O estado composto puro na forma matricial é

$$\omega = \sum_{kl} \alpha_k \alpha_l^* |\psi_k\rangle\langle\psi_l| \otimes |\phi_k\rangle\langle\phi_l| \quad (2.34)$$

e seja o número de coeficientes  $\alpha_k$  não nulos maior que um, esse estado não pode ser reescrito como um ensemble de estados separados

$$\omega \neq \sum_{ij} w_{ij} \rho_i \otimes \sigma_j.$$

Estados que não podem ser escritos como na eq. (2.31) são chamados de *emaranhados* [3].

Escrevendo a matriz  $\Psi$  como

$$\Psi = \sum_k \alpha_k |\psi_k\rangle\langle\phi_k| \quad (2.35)$$

as matrizes  $\Psi^\dagger\Psi$  e  $\Psi\Psi^\dagger$  formam

$$\Psi^\dagger\Psi = \sum_k |\alpha_k|^2 |\phi_k\rangle\langle\phi_k| \quad (2.36)$$

$$\Psi\Psi^\dagger = \sum_k |\alpha_k|^2 |\psi_k\rangle\langle\psi_k|. \quad (2.37)$$

Pode-se perceber que cada uma delas representa uma matriz densidade pertencente a cada um dos espaços de Hilbert que formam estado  $|\Psi\rangle$ . As matrizes  $\rho = \Psi\Psi^\dagger$  e  $\sigma = \Psi^\dagger\Psi$  possuem o mesmo espectro e representam os estados reduzidos em  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ , respectivamente [3]. Ambos os estados possuem os mesmos autovalores indica que possuem o mesmo grau de pureza e, também, que para um estado composto puro, suas partições são simétricas. Se o estado composto de dois estados mistos é puro, então existe emaranhamento entre os sistemas [2]. Esta situação em que a descrição conjunta é mais completa que a particionada é a característica que de maneira geral define os estados *correlacionados*.

O significado das matrizes reduzidas surge quando se leva em consideração medições incompletas das variáveis dinâmicas [13]. Um teste local é um procedimento realizado em apenas uma das partes de um sistema composto e é descrito por  $P_j \otimes \mathbb{I}$  ou  $\mathbb{I} \otimes P_j$ . A realização desta medição sobre um estado composto puro resulta em

$$\langle(A \otimes \mathbb{I})\rangle = \sum_{kk'} \alpha_k'^* \alpha_k \langle\psi_{k'}|A|\psi_k\rangle \langle\phi_{k'}|\phi_k\rangle = \sum_k |\alpha_k|^2 \langle\psi_k|A|\psi_k\rangle,$$

utilizando  $\rho$ , observa-se que  $\langle(A \otimes \mathbb{I})\rangle = \text{Tr}[\rho A]$ , e analogamente,  $\langle(\mathbb{I} \otimes B)\rangle = \text{Tr}[\sigma B]$ . Mesmo para estados compostos mistos é interessante definir as matrizes

$\rho$  e  $\sigma$  tais que  $\text{Tr}[\omega(A \otimes \mathbb{I})] = \text{Tr}[\rho A]$  e  $\text{Tr}[\omega(\mathbb{I} \otimes B)] = \text{Tr}[\sigma B]$ . A forma mais geral de se escrever o sistema composto é  $\omega = \sum_i w_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$  e a operação de obter os estados reduzidos induz a

$$\rho = \sum_i w_i \Psi_i \Psi_i^\dagger = \text{Tr}_B \omega \quad \text{e} \quad \sigma = \sum_i w_i \Psi_i^\dagger \Psi_i = \text{Tr}_A \omega,$$

onde, por analogia, o traço parcial  $\text{Tr}_X$  é uma operação linear definida da seguinte forma [10]

$$\text{Tr}_A [A \otimes B] = (\text{Tr} A) B \quad \text{ou} \quad \text{Tr}_B [A \otimes B] = (\text{Tr} B) A. \quad (2.38)$$

## 2.2.2 Correlações em Mecânica Quântica

Seja uma base ortonormal  $\{|\varphi_k\rangle\}$  em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , um estado que sofra uma medição definida por essa base passa a ser representado por  $\{|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|\}$  e cada resultado ocorre com probabilidade  $p_k = \langle\varphi_k|\rho|\varphi_k\rangle$ . Suponha que o registro que contém os resultados de medidas seja perdido. A matriz densidade que descreve o estado após a medida  $\rho'$  deve ser coerente com a medida realizada previamente, i.e. se o procedimento de medida for refeito, os resultados devem ser os mesmos ( $\rho'_k = \rho_k$  e  $p'_k = p_k$ ). Uma medição projetiva não seletiva é consistentemente definida como uma operação linear,  $\Phi[\rho] = \rho'$ , tal que  $\Phi[\rho'] = \rho'$  (repetibilidade). Sob essas condições, a transformação deve ser da seguinte forma

$$\Phi[\rho] = \sum_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|\rho|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|, \quad (2.39)$$

e um operador qualquer  $A$  satisfaz  $\Phi[A] = A$ , se e somente se for diagonal na base  $\{|\varphi_k\rangle\}$ [9].

Considerando  $|\varphi_k\rangle = |\psi_i\rangle|\phi_j\rangle$  e  $p_k = w_{ij}$ , um estado da forma

$$\omega = \sum_{ij} w_{ij} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \otimes |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

não é perturbado por medições locais nas bases  $\{|\psi_i\rangle\}$  e  $\{|\phi_j\rangle\}$ , e além do mais, as matrizes reduzidas são  $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$  e  $\sigma = \sum_j q_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$  com  $p_i = \sum_j w_{ij}$  e  $q_j = \sum_i w_{ij}$  respectivamente. Em resumo, existe uma medição em que o estado composto é definido através da distribuição de probabilidade conjunta  $w_{ij}$  e as distribuições de probabilidade marginais  $p_i$  e  $q_j$  definem os estados reduzidos. Devido a estas propriedades, uma matriz densidade do tipo descrito acima é chamada de *estado clássico*.

Quando o sistema encontra-se num estado, por exemplo, do tipo

$$\omega = \sum_{ij} w_{ij} \rho_i \otimes |\phi_j\rangle\langle\phi_j|, \quad (2.40)$$



onde  $\{\rho_i\}$  não forma um conjunto ortogonal, não existe medição local neste subespaço que não perturbe o estado reduzido  $\rho$ . Devido à indistinguibilidade inerentemente quântica dos estados, a correlação entre os dois sistemas não possui análogo clássico. Um estado definido de tal forma recebe o nome de *estado quântico-clássico* [9]. Semelhantemente o estado definido por

$$\omega = \sum_{ij} w_{ij} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \otimes \sigma_j, \quad (2.41)$$

em que os  $\sigma_j$  não são ortogonais, é denominado *estado clássico-quântico*. Estados que não possuem elementos do ensemble que formam um conjunto ortogonal em nenhuma das partes, são *estados quânticos*, e assim como os anteriores, apresentam correlações quânticas apesar de não possuírem emaranhamento [5, 17].

Uma propriedade útil dos sistemas correlacionados é a capacidade de inferir o estado de uma parte a partir de medições locais sobre a outra. Tendo como exemplo um estado do tipo (2.41), uma medição seletiva local resultando no estado  $|\psi_i\rangle$ , por exemplo, projeta o conjunto em

$$p_i^{-1}(|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \otimes \mathbb{I})\omega(|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \otimes \mathbb{I}) = \sum_j p_i^{-1} w_{ij} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \otimes \sigma_j. \quad (2.42)$$

Neste caso, o estado  $\sigma^i$  depende da probabilidade condicional  $q_{j|i}$  tal que  $\sigma^i = \sum_j q_{j|i} \sigma_j$ , em contraposição ao estado reduzido  $\sigma = \sum_j q_j \sigma_j$ . Medições locais na mesma base em que uma partição ‘clássica’ está definida preservam a propriedade dos estados clássicos de não alterarem o sistema composto. Assim, os estados clássico-quânticos — equivalentemente os quântico-clássicos — permitem uma maneira coerente de se obter informação sobre um estado quântico.

O formalismo permite a descrição de estados independentes ao assumir que  $w_{ij} = p_i q_j$ . Logo

$$\omega = \left( \sum_i p_i \rho_i \right) \otimes \left( \sum_j q_j \sigma_j \right) = \rho \otimes \sigma \quad (2.43)$$

não apresenta correlação, à medida que as matrizes densidade reduzidas fornecem a descrição completa do sistema.

## 2.3 Dinâmica em Sistemas Abertos

As operações lineares discutidas até agora são adequadas para descrever a evolução de estados quânticos puros através de transformações realizadas sobre os vetores do espaço de Hilbert. Ambas a evolução unitária e a medição seletiva mapeiam de forma linear os vetores, apesar dela ser também estocástica no segundo caso, e preservam-nos no mesmo espaço de Hilbert. Utilizando o formalismo das matrizes

densidade, o processo de medição passa a ser descrito através de uma mistura estatística como na eq. (2.39), e por sua vez, pode alterar a pureza do estado quântico. Em outras palavras, um estado anterior à medição puro, porém que não pertence à base em que a medição projetiva está definida, é transformado em um estado que deixa de ser descrito por um projetor e toma a forma da eq. (2.39)

Uma operação quântica é um mapa que preserva as propriedades das matrizes densidade. Ela atua em um estado quântico, transformando-o em outro estado

$$\rho' = \mathcal{E}[\rho]. \quad (2.44)$$

A princípio, as propriedades que se espera de um mapa que transforma matrizes densidade em matrizes densidade são [10]:

- A operação deve ser linear e o conjunto de estados após a transformação deve ser convexo;
- As probabilidades devem somar para 1, ou seja, o traço da matriz deve ser preservado  $\text{Tr}[\rho'] = \text{Tr}[\rho]$ ;
- As probabilidades não podem assumir valores negativos, ou seja, a matriz densidade resultante deve ser positiva<sup>3</sup>.

A primeira exigência garante que a operação pode ser interpretada como a mistura estatística de um mapeamento sobre os estados puros que constituem a matriz densidade. Seja um estado descrito pelo ensemble  $\{p_i, \rho_i\}$ , o mapa deve atuar de tal forma que o estado resultante deva ser descrito por  $\{p_i, \rho'_i\}$

$$\mathcal{E} \left[ \sum_i p_i \rho_i \right] = \sum_i p_i \mathcal{E}[\rho_i]. \quad (2.45)$$

Em conexão com os outros axiomas para as operações quânticas, a estrutura convexa dos estados é preservada desde que as operações sejam lineares.

O segundo requisito pode ser relaxado para descrever operações de medição seletiva. Uma matriz não normalizada  $\tilde{\rho}$ , com traço  $0 \leq \text{Tr}[\tilde{\rho}] \leq 1$ , pode representar um estado pós medição em que o traço passa a fornecer a probabilidade do estado ter evoluído conforme  $\mathcal{E}$ . Sob esta convenção, a matriz densidade normalizada para o estado quântico selecionado é dada por

$$\rho' = \frac{\tilde{\rho}}{\text{Tr}[\tilde{\rho}]}. \quad (2.46)$$

Uma operação não seletiva precisa satisfazer  $\text{Tr}[\mathcal{E}[\rho]] = \text{Tr}[\rho]$  para toda matriz densidade  $\rho$  e dessa forma diz-se que a operação preserva o traço.

---

<sup>3</sup>Neste trabalho uma matriz é chamada de positiva quando satisfaz  $\langle \psi | A | \psi \rangle \geq 0, \forall |\psi\rangle$ .

A positividade ( $\rho \geq 0$ ) da matriz densidade resultante não é suficiente do ponto de vista físico para garantir que a evolução dos estados seja realizável, dada a possibilidade deste ser parte de um sistema composto. A positividade completa garante que a operação do mapa sobre uma parte de um estado composto mantenha preservada a positividade do sistema conjunto, seja qual for o tamanho do sistema adjacente. Ou seja, para qualquer estado quântico  $\rho$ , o mapa  $\mathcal{E}$  é completamente positivo se a atuação de  $\mathbb{I} \otimes \mathcal{E}$  sobre um estado composto  $\omega$  qualquer que satisfaça  $\text{Tr}_B[\omega] = \rho$ , é uma matriz densidade válida [3]. Aqui o símbolo  $\mathbb{I} \otimes \mathcal{E}$  implica um mapa que se comporta da seguinte maneira

$$\mathbb{I} \otimes \mathcal{E}[|i\rangle\langle j| \otimes \rho] = |i\rangle\langle j| \otimes \mathcal{E}[\rho]$$

qualquer que seja a dimensão do sistema adjacente a  $\rho$ .

### 2.3.1 Operações Quânticas

Os axiomas para uma operação quântica válida  $\mathcal{E}$  podem ser reescritos como

- $\mathcal{E}[\sum_i a_i \rho_i] = \sum_i a_i \mathcal{E}[\rho_i]$ ;
- $0 \leq \text{Tr}[\mathcal{E}[\rho]] \leq \text{Tr}[\rho]$ ;
- $(\mathbb{I} \otimes \mathcal{E})[\Omega] \geq 0$  para todo  $\Omega \geq 0$ .

O espaço dos operadores que atuam sobre o espaço de Hilbert de dimensão  $N$  ( $\mathcal{H}_N$ ) e que possuem um produto interno construído através do traço  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}[A^\dagger B]$ , comporta-se também como um espaço de Hilbert, porém, de dimensão superior  $\mathcal{HS} \equiv \mathcal{H}_{N^2}$ , conhecido como *espaço de Hilbert-Schmidt* [3]. Seja uma base de matrizes nesse espaço  $\{E_i\}$ , tal que  $\text{Tr}[E_j^\dagger E_i] = \delta_{ij}$ , os estados quânticos são decompostos nesta base como  $\rho = \sum_m \rho_m E_m$  e a evolução devida a um mapa linear é definida por

$$\rho' = \sum_m \rho_m \mathcal{E}[E_m]. \quad (2.47)$$

Para descrever o mapa, considera-se o espaço das matrizes pertencentes à imagem de  $\mathcal{E}$ , com uma base correspondente  $\{E'_i\}$ . Com a evolução do estado quântico descrito nessa base, o mapa é composto pelos elementos

$$\mathcal{E}_{mn} = \text{Tr}[E'_n{}^\dagger \mathcal{E}[E_m]] \quad (2.48)$$

tal que  $\rho'_n = \text{Tr}[E'_n{}^\dagger \rho'] = \sum_m \rho_m \mathcal{E}_{mn}$  e aplicando a relação de completeza na equação acima tem-se

$$\mathcal{E}[E_m] = \sum_n \mathcal{E}_{mn} E'_n.$$

A matriz dinâmica é uma alternativa para a descrição do mapa, tal que  $\mathcal{D} \in \mathcal{HS} \otimes \mathcal{HS}$  é uma matriz que retorna os elementos do mapa

$$\mathcal{E}_{mn} = \text{Tr}[(E_m \otimes E'_n)^\dagger \mathcal{D}]. \quad (2.49)$$

Usando novamente a relação de completeza, a matriz dinâmica toma uma forma explícita

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \sum_{mn} \mathcal{E}_{mn} E_m \otimes E'_n \\ &= \sum_m E_m \otimes \mathcal{E}[E_m] \\ &= (\mathbb{I} \otimes \mathcal{E}) \left[ \sum_m E_m \otimes E_m \right]. \end{aligned}$$

Através da notação de Dirac e uma base apropriada, tal que  $E_m = |r\rangle\langle s|$  e  $m = (r-1)N + s$ , a matriz dinâmica pode ser reescrita como

$$\mathcal{D} = (\mathbb{I} \otimes \mathcal{E})[|\Phi\rangle\langle\Phi|], \quad (2.50)$$

onde  $|\Phi\rangle = \sum_r |r\rangle|r\rangle$ , é um estado *maximamente emaranhado* não normalizado [10]. Reciprocamente, o mapa pode ser recuperado a partir da matriz dinâmica

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\rho] &= \sum_{mn} \rho_m \text{Tr}[(E_m \otimes E'_n)^\dagger \mathcal{D}] E'_n \\ &= \sum_n \text{Tr}[(\rho^* \otimes E'_n)^\dagger \mathcal{D}] E'_n \\ &= \sum_n \text{Tr}[(\mathbb{I} \otimes E'_n) (\rho^T \otimes \mathbb{I}) \mathcal{D}] E'_n, \end{aligned}$$

aliado ao traço parcial, eq. (2.38), fornece:

$$\mathcal{E}[\rho] = \text{Tr}_A[(\rho^T \otimes \mathbb{I}) \mathcal{D}]. \quad (2.51)$$

Com essa representação, a preservação do traço é estabelecida como

$$\text{Tr}[\rho'] = \text{Tr}[\rho^T \mathcal{D}_B].$$

Para que a operação preserve o traço,  $\text{Tr}[\rho^T \mathcal{D}_B] = \text{Tr}[\rho^T]$  para qualquer  $\rho$ , ou seja

$$\text{Tr}_A[\mathcal{D}] = \mathbb{I}. \quad (2.52)$$

O conjunto de canais quânticos que apresentam esta propriedade é denominado de mapas Completamente Positivos que Preservam o Traço (CPPT).

Seja o mapa  $\mathcal{E}$  completamente positivo, então a matriz dinâmica  $\mathcal{D} = \mathbb{I} \otimes \mathcal{E}[|\Phi\rangle\langle\Phi|]$  é positiva, dado que  $|\Phi\rangle\langle\Phi|$  é equivalente a um estado não normalizado. Logo,  $\mathcal{D}$  possui uma forma diagonal formada pelos autovalores não negativos,  $d_i \geq 0$ , e autovetores da matriz dinâmica. Utilizando uma representação vetorial para os autoestados  $|D_i\rangle \in \mathcal{HS}$ , e seja  $r$  o rank dessa matriz, tem-se

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^r d_i |D_i\rangle\langle D_i|. \quad (2.53)$$

O elemento  $|D_i\rangle\langle D_i|$  tem como função projetar um estado na direção de  $|D_i\rangle$ , ou quando  $d_i$  é degenerado, no subespaço associado à este autovalor. Na notação matricial lê-se como:

$$|D_i\rangle\langle D_i|\Omega \equiv \text{Tr}[D_i^\dagger \Omega] D_i.$$

Combinando as equações (2.51) e (2.53) o mapa quântico associado à forma diagonal da matriz dinâmica é

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\rho] &= \sum_{i=1}^r d_i \text{Tr}_A[(\rho^T \otimes \mathbb{I}) |D_i\rangle\langle D_i|] \\ &= \sum_{i=1}^r d_i \text{Tr}[(\rho^T \otimes \mathbb{I}) D_i] \text{Tr}_A[D_i^\dagger], \end{aligned}$$

nota-se que  $\text{Tr}[D_i(\rho^T \otimes \mathbb{I})] = \text{Tr}[D_i(\mathbb{I} \otimes \rho)] = \text{Tr}[\text{Tr}_A[D_i] \rho]$ . Ao definir as matrizes  $A_i = \sqrt{d_i} \text{Tr}_A[D_i]$ , chega-se à representação canônica de Kraus para um canal quântico:

$$\mathcal{E}[\rho] = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger. \quad (2.54)$$

O mapa na forma de Kraus preserva o traço caso satisfaça  $\text{Tr}[\sum A_i \rho A_i^\dagger] = \text{Tr}[\sum A_i A_i^\dagger \rho] = \text{Tr}[\rho]$ , para todo  $\rho$ , ou seja

$$\sum_{i=1}^r A_i^\dagger A_i = \mathbb{I}. \quad (2.55)$$

O teorema da mistura de Schrödinger garante que existem infinitas maneiras da qual um elemento interno de um conjunto convexo pode ser expresso através de misturas de elementos puro do conjunto. No presente caso, as várias maneiras de escrever a matriz  $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^r d_i |D_i\rangle\langle D_i| = \sum_i d'_i |D'_i\rangle\langle D'_i|$$

resulta em diferentes representações para o mapa  $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}[\rho] = \sum_{i=1}^r A_i \rho A_i^\dagger = \sum_i A'_i \rho A'^{\dagger}_i.$$

No caso especial em que as matrizes  $A_i$  são obtidas através da diagonalização de  $\mathcal{D}$ , e conseqüentemente são ortogonais, a representação do canal por meio dessas matrizes é denominada de forma canônica de Kraus [3].

Um exemplo de canal que é útil para descrever ruído em sistemas quânticos é formado pela soma de mapas unitários e recebe o nome de Campos Externos Aleatórios (CEA)<sup>4</sup>. Na representação de Kraus essa matriz é escrita como

$$\rho' = \sum_i a_i U_i \rho U_i^\dagger, \quad (2.56)$$

em que as matrizes  $U_i$  são unitárias e a preservação do traço é garantida se  $\sum_i a_i = 1$ .

## 2.4 Mapas Estocásticos e Monitoramento

### 2.4.1 Representação Ambiental

As operações básicas definidas em (2.27) são baseadas na dinâmica do sistema sem interação com partes externas à análise, exceto, possivelmente, pela realização de medições. No contexto de estados quânticos puros, evoluções unitárias e projeções são suficientes para esgotar qualquer dinâmica que tal sistema pode passar. Porém quando se trata de estados quânticos genéricos, uma evolução do tipo

$$\rho' = U \rho U^\dagger = \sum_i p_i U |\psi_i\rangle\langle\psi_i| U^\dagger$$

não altera os pesos da composição em estados puros do sistema e portanto nota-se que é insuficiente para descrever uma evolução arbitrária deste. Os mapas completamente positivos que preservam o traço gozam da capacidade de descrever operações fisicamente admissíveis sobre um estado, sem incluir a realização de medições.

A limitação das unitárias surge quando se considera que o espaço de estados estudado é um subconjunto de um espaço maior, ou seja,  $\rho = \text{Tr}_B[\omega]$ . As operações unitárias realizadas em um espaço composto são muito mais vastas que as operações realizadas localmente em cada subsistema.

Para ilustrar como uma unitária global pode atuar em um subsistema de uma forma que uma unitária local não realiza, toma-se como exemplo o estado  $\rho^* = N^{-1}\mathbb{I}$  que pode ser interpretado como um estado equidistante a qualquer outro estado puro do espaço de Hilbert e conseqüentemente qualquer teste associado a um estado puro possui probabilidade  $p = N^{-1}$  de ser verificado. Sejam os vetores

---

<sup>4</sup>Este termo CEA utilizado neste trabalho é uma tradução livre de uma sigla em inglês para Random External Fields

$\{|\psi_i\rangle\}$  e  $\{|\phi_i\rangle\}$  ortonormais em seus respectivos espaços, a *purificação* deste estado é dada por [3]

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i |\psi_i\rangle |\phi_i\rangle \quad (2.57)$$

que é um estado maximamente emaranhado. Este estado pode ser obtido a partir de qualquer outro estado do sistema composto através de uma unitária global apropriada. Por exemplo, dado um estado separável do sistema composto  $|\psi_0\rangle|\phi_0\rangle$ , haverá uma unitária  $U$  tal que

$$|\Phi\rangle = U|\psi_0\rangle|\phi_0\rangle.$$

Basicamente, é possível através de operações envolvendo um espaço de Hilbert de dimensão superior, obter o estado  $\rho = \text{Tr}_B |\Phi\rangle\langle\Phi|$  a partir de um estado puro  $|\psi_0\rangle$ . Como qualquer estado  $\rho$  pode ser descrito através de uma purificação

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad |\Psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle |\phi_i\rangle,$$

pertencente a um espaço de Hilbert  $\mathcal{HS}$ , o estado após a atuação do mapa é dado por uma evolução de  $|\psi_0\rangle$  acoplado a um estado do ambiente  $|\phi_0\rangle$  e uma unitária  $U$  adequados

$$\rho = \text{Tr}_B [U(|\psi_0\rangle\langle\psi_0| \otimes |\phi_0\rangle\langle\phi_0|)U^\dagger]. \quad (2.58)$$

As operações do traço e evolução unitária são lineares e considerando uma base para o espaço de Hilbert do sistema adicional  $\mathcal{H}_B$  dada por  $\{|\phi_i\rangle\}$ , a evolução de um estado  $\rho$  qualquer através desse esquema é dada por [10]

$$\rho' = \text{Tr}_B [U(\rho \otimes |\phi\rangle\langle\phi|)U^\dagger] = \sum_i \langle\phi_i|U|\phi\rangle \rho \langle\phi|U^\dagger|\phi_i\rangle. \quad (2.59)$$

Os elementos  $\langle\phi_i|U|\phi\rangle = A_i$  são operadores que atuam no espaço de  $\rho$  e satisfazem

$$\rho' = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger, \quad \sum_i A_i^\dagger A_i = \mathbb{I},$$

evidenciando que a evolução do estado quântico através do produto tensorial do espaço de estados com um outro espaço de Hilbert, no presente contexto, é representado por uma forma de Kraus e, conseqüentemente, descreve um mapa CPPT. O conjunto de todas as operações quânticas no espaço de estados é obtida através de um acoplamento do sistema com um espaço de Hilbert de mesma dimensão, como pode ser notado dado que um estado  $\rho$  qualquer pode ser reescrito como na equação (2.57). A condição de positividade completa é condizente com o caráter ‘aberto’ das operações quânticas, i.e. estados quânticos evoluem através de interações com outras partes.

Outra questão relevante trata da descrição de um canal quântico dado por uma soma de Kraus através de uma representação ambiental. Por exemplo, um conjunto de matrizes de Kraus para um mapa que preserva o traço  $\sum_k E_k^\dagger E_k = \mathbb{I}$  é obtido através de uma unitária global tal que

$$U|\psi\rangle|\phi_0\rangle = \sum_k E_k|\psi\rangle|\phi_k\rangle.$$

Então, um ambiente em um estado fundamental bem selecionado  $|\phi_0\rangle$  — aqui é utilizado um estado de reservatório puro, sem perda de generalidade<sup>5</sup> — e uma unitária adequada são capazes de realizar qualquer mapa quântico dado por  $E_k = \langle\phi_k|U|\phi_0\rangle$ . O modelo de colisões estudado neste trabalho possui como um dos objetivos encontrar uma maneira eficiente de utilizar a interação de um sistema com o ambiente para operar um canal específico.

## 2.4.2 Evoluções Monitoradas

O conjunto das medições que podem ser realizadas em um estado  $\rho$  tomando a possibilidade de considerar um espaço de Hilbert maior, pode ser analisado através da representação ambiental. Exercendo uma medição projetiva sobre o sistema físico acoplado, cujo espaço de Hilbert possui dimensão  $K$ , tem-se [10]

$$(\mathbb{I} \otimes \Pi_i)\omega(\mathbb{I} \otimes \Pi_i) = \tilde{\rho}_i \otimes \Pi_i,$$

onde  $\tilde{\rho}$  não é normalizado e o estado pós-medição não apresenta correlações, pois o monitoramento devolve um estado produto entre sistema e ambiente. Neste contexto, a medição é realizada sobre o estado adicional, porém, como a descrição local do estado analisado deve ser coerente com  $\Phi[\omega'] = \omega'$ , o estado reduzido  $\tilde{\rho}_i$  compatível com o estado selecionado  $|\phi_i\rangle$  na representação ambiental, é descrito por

$$\tilde{\rho}_i = \text{Tr}_B [(\mathbb{I} \otimes \Pi_i)U(\rho \otimes |\phi\rangle\langle\phi|)U^\dagger] = A_i\rho A_i^\dagger \quad (2.60)$$

e a probabilidade deste evento ocorrer é  $p_i = \text{Tr}[A_i\rho A_i^\dagger]$ .

Até então, no conceito de medida projetiva, assume-se que existe apenas um autovetor do operador projeção  $\Pi_i$ . De maneira mais geral, a projeção pode atuar levando a um subespaço de dimensão  $d \leq K$  qualquer, tal que  $P = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ , com a soma envolvendo  $d$  diferentes elementos da base  $|\phi_i\rangle$

$$\tilde{\rho}' = \text{Tr}_B [(\mathbb{I} \otimes P)U(\rho \otimes |\phi\rangle\langle\phi|)U^\dagger] = \sum_i A_i\rho A_i^\dagger.$$

---

<sup>5</sup>Caso o estado do reservatório seja misto, pode-se usar um procedimento de purificação em um espaço de Hilbert maior para chegar às mesmas conclusões



A medida é não seletiva quando  $P = \mathbb{I}$ , neste caso, recupera-se

$$\sum_i A_i^\dagger A_i = \mathbb{I}. \quad (2.61)$$

Para um conjunto de matrizes de Kraus que satisfazem  $\sum_i A_i^\dagger A_i < \mathbb{I}$  a operação quântica pode não preservar o traço e desta forma,  $\text{Tr}\tilde{\rho}' \leq \text{Tr}\rho$ . A descrição da evolução seletiva de um estado é descrita por

$$\rho' = p^{-1} \sum_i A_i \rho A_i^\dagger, \quad \text{com } p = \sum_i \text{Tr}[A_i^\dagger A_i \rho]. \quad (2.62)$$

Seja um observável  $\mathcal{O}$  no espaço de Hilbert do sistema auxiliar, a decomposição espectral deste operador em uma base ortonormal dada por  $\Pi_i^j$  é

$$\mathcal{O} = \sum_{ij} \lambda_i \Pi_i^j \quad \text{e} \quad \sum_{ij} \Pi_i^j = \mathbb{I}$$

fornece um particionamento do espaço em função dos autovalores deste operador

$$P_i = \sum_j \Pi_i^j \quad (2.63)$$

que no sistema principal resume-se em

$$\rho_i = p_i^{-1} \sum_j A_i^j \rho A_i^{j\dagger}, \quad p_i = \text{Tr}[E_i \rho], \quad (2.64)$$

onde  $E_i = \sum_j A_i^{j\dagger} A_i^j$  são conhecidos como POVM's<sup>6</sup> e formam uma resolução da identidade

$$\sum_i E_i = \mathbb{I}. \quad (2.65)$$

Um conjunto completo de POVM's fornece a estatística correta para as medições descritas pelo mapa CPPT. Porém, a definição deste conjunto não é suficiente para descrever todas as matrizes de Kraus necessárias na descrição do estado pós-medição [10]. Em situações experimentais é comum a medição estar associada com a impossibilidade de acessar a partícula novamente; os POVM's são suficientes nesta condição e o esquema de monitoramento permite uma interação indireta com o sistema, preservando-o contra efeitos indesejados do processo de medição.

Uma evolução monitorada associa os resultados de medição de um observável do espaço do ambiente, que interage com o sistema principal, com um mapa que descreve sua evolução. A escolha de tal observável não é única e cada conjunto de projetores que resolvem a identidade está associado a um conjunto de resultados de medições que formam um registro e fornecem informação sobre a dinâmica monitorada.

---

<sup>6</sup>Da sigla em inglês *Positive Operator-Valued Measure*

## 2.5 Memória em Sistemas Quânticos

Para obter-se a operação quântica, considerou-se que o estado do conjunto sistema+ambiente parte na forma de produto  $\rho \otimes \sigma$ . Comparando com experimentos realizados em informação e computação quântica, é natural assumir que após a etapa da preparação, o estado analisado é descorrelacionado do resto do laboratório, e a evolução então altera o sistema através do Hamiltoniano e do estado do reservatório. Entre as etapas da preparação e medição, o formalismo de mapas completamente positivos é capaz de prover as estatísticas necessárias. Porém, a descrição da evolução do estado a cada instante de tempo é comprometida, ao notar que apenas a matriz densidade parcial do sistema a cada instante não é suficiente para caracterizar a evolução.

Para instantes diferentes, a representação ambiental fornece

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{t_1, t_0}[\rho(t_0)] &= \text{Tr}_B \left[ U(t_1, t_0)(\rho(t_0) \otimes \sigma(t_0))U^\dagger(t_1, t_0) \right] \\ \mathcal{E}_{t_2, t_0}[\rho(t_0)] &= \text{Tr}_B \left[ U(t_2, t_0)(\rho(t_0) \otimes \sigma(t_0))U^\dagger(t_2, t_0) \right],\end{aligned}$$

porém, como em geral o estado conjunto deixa de ser fatorável nos espaços do sistema e do ambiente após a interação  $\omega(t) \neq \rho(t) \otimes \sigma(t)$ , não é sempre razoável assumir que haverá um canal quântico para o estado  $\rho$  entre os tempos  $t_1$  e  $t_2$

$$\rho(t_2) \neq \text{Tr}_B \left[ U(t_2, t_1)(\rho(t_1) \otimes \sigma(t_1))U^\dagger(t_2, t_1) \right], \quad (2.66)$$

devido às correlações que passam a existir entre as partes do sistema composto.

Como o sistema quântico interage com o ambiente, é natural que este último seja alterado devido à presença do primeiro. Então pode ocorrer que as propriedades do estado em um determinado instante interfiram na interação do ambiente com o próprio estado em tempos posteriores. Uma dinâmica possui efeitos de memória, quando a evolução temporal leva em consideração o estado do sistema em instantes de tempo anteriores.

Fundamentalmente, um mapa quântico é obtido ao ignorar o estado de uma das partes que interagem possivelmente através de um hamiltoniano não local. A descrição do sistema fechado completo é em princípio possível de realizar, portanto o estado da parte ignorada e as correlações são bem definidas e fazem parte da dinâmica global. Porém é muitas vezes bastante razoável admitir que esta informação é irrelevante para a dinâmica de tempos posteriores, em geral devido ao tamanho do reservatório e da intensidade da interação. A dinâmica em que a informação do estado do sistema é suficiente para determinar sua evolução a partir daquele instante é denominada *markoviana*.

### 2.5.1 Divisibilidade de Canais Quânticos

Ao tomar os estados após as evoluções nos tempos  $t_1$  e  $t_2$  assume-se a hipótese da aproximação markoviana ao admitir a existência de uma operação quântica que mapeie  $\rho(t_1)$  em  $\rho(t_2)$

$$\rho(t_2) = \mathcal{E}_{t_2, t_1}[\rho(t_1)],$$

para qualquer  $t_1$  pertencente ao intervalo  $(t_0, t_2)$ . Caso exista, o mapa pode ser decomposto como uma concatenação de operações

$$\rho(t_2) = (\mathcal{E}_{t_2, t_1} \circ \mathcal{E}_{t_1, t_0})[\rho_0]$$

e de maneira geral, para qualquer  $\rho_0$ ,  $\mathcal{E}_{t_2, t_0}$  é divisível em  $t_1$  quando existir uma mapa completamente positivo  $\mathcal{E}_{t_2, t_1}$  que satisfaça [16]

$$\mathcal{E}_{t_2, t_0} = \mathcal{E}_{t_2, t_1} \circ \mathcal{E}_{t_1, t_0}. \quad (2.67)$$

Desta forma, a divisibilidade fornece uma maneira de discutir a markovianidade da dinâmica de um sistema a partir da caracterização do mapa da evolução.

A divisibilidade não é uma propriedade relacionada diretamente a um particionamento temporal de canais. De maneira geral, o problema da divisibilidade questiona se um canal quântico qualquer pode ser dividido de maneira não-trivial em outros canais quânticos. O ‘não trivial’ exclui a divisão em um canal seguido de uma unitária e vice-versa.

Para descrever o mapa intermediário entre os tempos  $t_1$  e  $t_2$ , é natural considerar o *superoperador linear*  $\Phi_{\mathcal{E}} \equiv \Phi(t, t_0)$ , que é definido a partir da vetorização do estado  $\rho$

$$\begin{aligned} |\rho\rangle &= \sum_{mn} \rho_{mn} |m, n\rangle \\ \Phi_{\mathcal{E}}|\rho\rangle &= \sum_{\mu\nu} \rho'_{\mu\nu} |\mu, \nu\rangle \end{aligned}$$

e, operacionalmente, pode ser obtido a partir do *rearranjo* da matriz dinâmica  $\mathcal{D}$  [3]

$$\langle n, \nu | \mathcal{D} | m, \mu \rangle = \langle \mu, \nu | \Phi_{\mathcal{E}} | m, n \rangle, \quad (2.68)$$

em que os índices latinos e gregos representam uma base no espaço dos estados inicial e final respectivamente. Esta relação advém da definição da matriz dinâmica e da vetorização das matrizes  $E_m \equiv |m\rangle\langle n|$  e  $E'_{\mu} \equiv |\mu\rangle\langle \nu|$  na decomposição da operação quântica  $\mathcal{E}$ .

A composição de mapas pode ser reescrita por meio do superoperador na forma de um produto matricial  $\Phi_{\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_2} = \Phi_{\mathcal{E}_1} \Phi_{\mathcal{E}_2}$ , logo, uma evolução markoviana satisfaz

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) \quad (2.69)$$

para todo  $t_1 \in (t_0, t_2)$ . Expressando  $\rho(t_0) = \Phi^{-1}(t_1, t_0)\rho(t_1)$  — o estado inicial é mapeado a partir do estado intermediário e  $\Phi^{-1}(t_1, t_0)$  em geral não é o superoperador de uma operação positiva e pode nem sequer existir — identifica-se o mapa entre os tempos intermediários como [1]

$$\Phi(t_2, t_1)\rho(t_1) = \Phi(t_2, t_0)\Phi^{-1}(t_1, t_0)\rho(t_1).$$

Garantida a existência de  $\Phi^{-1}(t_1, t_0)$  para todo  $\rho(t_1)$ , a matriz dinâmica de  $\Phi(t_2, t_0)\Phi^{-1}(t_1, t_0)$  pode ser utilizada na investigação das propriedades de memória de um canal  $\mathcal{E}(t)$ . O procedimento para verificar a markovianidade de uma dinâmica consiste em testar se o superoperador linear para um instante intermediário possui uma matriz dinâmica positiva, representando um mapa completamente positivo. Em outras palavras, neste contexto, o mapa é não-markoviano, caso exista algum mapa da evolução intermediária que possua uma matriz dinâmica com algum autovalor negativo.

## 2.5.2 Markovianidade e Distinguibilidade de Estados

A distância do traço para dois estados quânticos é definida como

$$D(\rho, \sigma) \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}|\rho - \sigma|. \quad (2.70)$$

Esta quantidade é chamada de distância pois satisfaz:

$$D(\rho, \sigma) = 0 \Leftrightarrow \rho = \sigma \quad (2.71)$$

$$D(\rho, \sigma) = D(\sigma, \rho) \quad (2.72)$$

$$D(\rho, \sigma) \leq D(\rho, \tau) + D(\sigma, \tau). \quad (2.73)$$

O raciocínio que será utilizado foi retirado da referência [10]. A primeira propriedade é satisfeita pois um operador não negativo  $|\rho - \sigma|$  possui apenas autovalores não negativos, e conseqüentemente o traço deste será nulo se e somente se for o operador nulo. A simetria entre  $\rho$  e  $\sigma$  é evidente devido ao módulo, porém, para demonstrar a terceira propriedade é útil entender a interpretação da distância do traço através de

$$D(\rho, \sigma) = \max_{\Pi} \text{Tr} [\Pi(\rho - \sigma)], \quad (2.74)$$

onde  $\Pi$  é um projetor hermitiano sobre o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_N$ . Dados dois estados  $\rho$  e  $\sigma$ , preparados com mesma probabilidade, o projetor  $\Pi$  é interpretado como a medição ótima que identifica qual deles foi preparado, associando os resultados de medida 0 ou 1 para cada estado, respectivamente. A probabilidade máxima de

distinguir corretamente é dada por

$$\begin{aligned}
P_{\max} &= \frac{1}{2} \text{Tr}[\Pi\rho] + \frac{1}{2} \text{Tr}[(\mathbb{I} - \Pi)\sigma] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \text{Tr}[\Pi(\rho - \sigma)] \right\} \\
&= \frac{1}{2} [1 - D(\rho, \sigma)].
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Para mostrar que a eq. (2.74) é equivalente á definição da distância do traço, é útil notar que qualquer matriz hermitiana pode ser descrita como  $A = Q - S$ , onde  $Q$  e  $S$  são matrizes positivas definidas em subespaços ortogonais graças à decomposição espectral da matriz  $A$ <sup>7</sup>. Essa decomposição permite reescrever  $|A| = Q + S$ , graças à positividade e ortogonalidade de  $Q$  e  $S$ , e seja  $\text{Tr} A = 0$ , tem-se ainda  $\text{Tr} Q = \text{Tr} S$ . Com isto em mãos, aplicando  $A = \rho - \sigma$  conclui-se que  $D(\rho, \sigma) = \text{Tr} Q$ . Seja  $\Pi$  um projetor qualquer, logo,  $\text{Tr}[\Pi(\rho - \sigma)] = \text{Tr}[\Pi(Q - S)] \leq \text{Tr}[\Pi Q] \leq \text{Tr} Q = D(\rho, \sigma)$ , em que um projetor que atue no suporte de  $Q$  satisfaz  $\text{Tr}[\Pi(Q - S)] = \text{Tr} Q$ , garantindo que o max de  $\text{Tr}[\Pi(\rho - \sigma)]$  atinja a distância  $D(\rho, \sigma)$ .

A desigualdade triangular segue desta definição

$$\begin{aligned}
D(\rho, \sigma) &= \text{Tr}[\Pi(\rho - \sigma)] \\
&= \text{Tr}[\Pi(\rho - \tau) + \Pi(\tau - \sigma)] \\
&\leq D(\rho, \tau) + D(\tau, \sigma).
\end{aligned}$$

Seguindo as mesmas linhas, demonstra-se que a ação de um mapa positivo que preserva o traço é contrativo no que diz respeito a essa distância

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{E}[\rho], \mathcal{E}[\sigma]) &= \text{Tr}[\Pi(\mathcal{E}[Q] - \mathcal{E}[S])] \\
&\leq \text{Tr}[\mathcal{E}[Q]] \\
&= \text{Tr} Q
\end{aligned}$$

e finalmente

$$D(\mathcal{E}[\rho], \mathcal{E}[\sigma]) \leq D(\rho, \sigma). \tag{2.76}$$

Conclui-se que os mapas CPPT nunca atuam no sentido de aumentar a distinguibilidade de dois estados.

Seja uma operação divisível em  $t_1$ , esta desigualdade garante que

$$D(\mathcal{E}_{t_2, t_1}[\rho(t_1)], \mathcal{E}_{t_2, t_1}[\sigma(t_1)]) \leq D(\rho(t_1), \sigma(t_1)), \tag{2.77}$$

---

<sup>7</sup>Por exemplo, a matriz  $Q$  possui os autovalores não-negativos de  $A$ , enquanto a matriz  $S$  possui os autovalores negativos.

portanto, uma evolução markoviana é contrativa. Dessa forma, uma condição suficiente — porém não necessária — para desvendar uma dinâmica não-markoviana, é o surgimento de intervalos de tempo para os quais a distância entre dois estados aumente. Este resultado indica que a informação acessível sobre os estados flui para o ambiente em dinâmicas markovianas. O fluxo de informação para um par de estados iniciais  $\rho^1(0)$  e  $\rho^2(0)$  em um instante  $t$  é quantificado por [4, 8]

$$\xi(t, \rho^{1,2}(0)) = \frac{d}{dt} D(\rho^1(t), \rho^2(t)). \quad (2.78)$$

A medida para a não-markovianidade neste contexto é dada por

$$\mathcal{N}(\mathcal{E}) = \max_{\rho^{1,2}(0)} \int_{\xi>0} \xi(t, \rho^{1,2}(0)) dt, \quad (2.79)$$

o máximo para todos os estados iniciais de  $\rho^1$  e  $\rho^2$  das contribuições positivas do fluxo de informação para o sistema analisado. Uma evolução quântica markoviana satisfaz  $\mathcal{N}(\mathcal{E}) = 0$ .

## 2.6 Distinguibilidade de Dois Estados num Mapa CEA

Seja uma matriz qualquer  $A$ , a norma de Hilbert-Schmidt

$$\|A\|_{\text{HS}}^2 = \langle A, A \rangle = \text{Tr}[AA^\dagger] \quad (2.80)$$

também permite uma definição de distância  $\mathcal{D}[\rho, \sigma]$  entre dois estados quânticos  $\rho$  e  $\sigma$

$$D^2[\rho, \sigma] = \|\rho - \sigma\|_{\text{HS}}^2. \quad (2.81)$$

Esta distância não compartilha da propriedade contrativa que a distância do traço parcial goza [12]. O equivalente desta propriedade é obtida a partir de uma generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz [7]

$$\Phi(A)^2 \leq \|\Phi\| \Phi(A^2) \quad (2.82)$$

em que  $\Phi$  é um mapa positivo e  $A$  um operador hermitiano qualquer e

$$\|\Phi\| = \sup_{A \neq 0} \frac{\|\Phi(A)\|_{\text{HS}}}{\|A\|_{\text{HS}}}.$$

Para  $\Phi = \mathcal{E}$  um mapa CPPT e  $A = \rho - \sigma$  tem-se que  $(\rho' - \sigma')^2 \leq \|\mathcal{E}\| \mathcal{E}[(\rho - \sigma)^2]$  e tomando o traço em ambos os lados dessa expressão chega-se a uma desigualdade estrita para a distância de Hilbert-Schmidt

$$D_{\text{HS}}^2(\rho', \sigma') \leq \|\mathcal{E}\| D_{\text{HS}}^2(\rho, \sigma), \quad (2.83)$$

dado que  $\mathcal{E}$  preserva o traço. Para o caso em que o mapa é unital<sup>8</sup> a desigualdade de Kadison garante que  $\Phi(A)^2 \leq \Phi(A^2)$  e portanto

$$D_{\text{HS}}^2(\rho', \sigma') \leq D_{\text{HS}}^2(\rho, \sigma) \quad (2.84)$$

o mapa é sempre contrativo [14].

Em particular, pode-se mostrar que para qubits a distância do traço e a distância de Hilbert-Schmidt são equivalentes. Usando como base para os operadores as matrizes de Pauli, tem-se<sup>9</sup>

$$\rho = \frac{\mathbb{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{\mathbb{I} + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}}{2},$$

obtem-se para a distância a relação  $D(\rho, \sigma) = \text{Tr}|(\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{\sigma}|/4$  e como um operador qualquer  $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$  possui autovalores  $\pm|\vec{v}|$ , então  $\text{Tr}|(\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{\sigma}| = 2|\vec{r} - \vec{s}|$ , portanto

$$D(\rho, \sigma) = \frac{1}{2}|\vec{r} - \vec{s}|. \quad (2.85)$$

A distância de Hilbert-Schmidt é calculada usando as propriedades das matrizes de Pauli:  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{I} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$  e  $\text{Tr}[\sigma_i] = 0$ .

$$D_{\text{HS}}^2(\rho, \sigma) = \frac{1}{4}(\vec{r} - \vec{s})^2, \quad (2.86)$$

cujo resultado pode ser extrapolado para dimensão maior que 2. Assim, conclui-se que para  $N = 2$

$$D(\rho, \sigma) = D_{\text{HS}}(\rho, \sigma) \quad (2.87)$$

e mostra que no caso especial de qubits ambas as distâncias são equivalentes. Este fato não preserva sua validade para dimensões maiores pois o resultado utilizado para obter a expressão da distância do traço para qubits não é generalizado.

### 2.6.1 Evolução da Distância em Mapas CEA

Aqui, considerar-se-á a evolução da distância de Hilbert-Schmidt para um caso particular dos conjuntos de evoluções, para poder obter uma forma contrativa da distâncias para este mapa. Utilizando o traço para definir o produto interno no espaço dos operadores, segue também da linearidade do canal quântico que, usando  $\Delta = \rho - \sigma$

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{E}}^2[\rho, \sigma] &= \left\langle \sum_i A_i \Delta A_i^\dagger, \sum_j A_j \Delta A_j^\dagger \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle \Delta, A_i^\dagger A_j \Delta A_j^\dagger A_i \rangle. \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Um mapa unital é aquele que atua trivialmente sobre o estado maximamente misto, ou seja,  $\mathcal{E}[\rho_*] = \rho_*$

<sup>9</sup>É importante não confundir nesta seção a matriz densidade  $\sigma$  com o vetor-operador  $\vec{\sigma}$

Tomando a representação diagonal das matrizes  $A_i^\dagger A_j = \sum_k \lambda_{i,j}^k |k\rangle\langle k|$  encontra-se

$$\langle A_i \Delta A_i^\dagger, A_j \Delta A_j^\dagger \rangle = \sum_{k,l} \lambda_{i,j}^k \lambda_{i,j}^{l*} |\langle l | \Delta | k \rangle|^2 \quad (2.88)$$

levando em consideração que cada par  $\{i, j\}$  leva a uma base  $\{|k\rangle\}$  específica em que os  $A_i^\dagger A_j$  são diagonais.

Os mapas do tipo CEA são definidos por  $A_i = \sqrt{p_i} U_i$  e, portanto os autovalores de  $A_i^\dagger A_j$  são dados por  $\sqrt{p_i p_j} e^{i\phi_{i,j}^k}$  e  $A_i^\dagger A_i = p_i \mathbb{I}$ . Também pode-se contar com esses mapas para descrever todos os canais quânticos unitais de um sistema de dois níveis, sendo a seguinte discussão suficiente para calcular a distinguibilidade entre dois qubits. Para esta classe especial de canais quânticos tem-se que

$$\langle A_i \Delta A_i^\dagger, A_j \Delta A_j^\dagger \rangle = p_i p_j \sum_{k,l} e^{i(\phi_{i,j}^k - \phi_{i,j}^l)} |\langle l | \Delta | k \rangle|^2, \quad (2.89)$$

e como  $|\langle l | \Delta | k \rangle|^2 = |\langle k | \Delta | l \rangle|^2$

$$\langle A_i \Delta A_i^\dagger, A_j \Delta A_j^\dagger \rangle = p_i p_j \sum_{k,l} \cos(\phi_{i,j}^k - \phi_{i,j}^l) |\langle l | \Delta | k \rangle|^2. \quad (2.90)$$

Finalmente, separa-se os termos  $i = j$  da soma e usa-se que  $(\sum_i p_i)^2 = \sum_i p_i^2 + \sum_{i \neq j} p_i p_j$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \langle A_i \Delta A_i^\dagger, A_j \Delta A_j^\dagger \rangle = \\ \left( \sum_i p_i \right)^2 \sum_{k,l} |\langle l | \Delta | k \rangle|^2 + \sum_{i \neq j} p_i p_j \sum_{k,l} [\cos(\phi_{i,j}^k - \phi_{i,j}^l) - 1] |\langle l | \Delta | k \rangle|^2, \end{aligned} \quad (2.91)$$

então, definindo  $\delta_{i,j}^{k,l} = (\phi_{i,j}^k - \phi_{i,j}^l)/2$  que satisfaz  $\delta_{i,i}^{k,l} = \delta_{i,j}^{k,k} = 0$  tem-se

$$D_{\mathcal{E}}^2[\rho, \sigma] = D^2[\rho, \sigma] - 2 \sum_{i,j} p_i p_j \sum_{k,l} |\langle l | \Delta | k \rangle|^2 \sin^2 \delta_{i,j}^{k,l} \quad (2.92)$$

e pode-se perceber que a distância entre dois estados após um mapa CEA nunca cresce, como esperado.

Para a dinâmica de um qubit, a diferença entre as distâncias — interpretado como um vazamento de informação do sistema para o ambiente — depende de apenas um termo

$$D^2[\rho, \sigma] - D_{\mathcal{E}}^2[\rho, \sigma] = 8p_1 p_2 |\langle k | \Delta | k' \rangle|^2 \sin^2 \delta, \quad k \neq k'. \quad (2.93)$$

Visualizando na esfera de Bloch, o termo  $|\langle k | \Delta | k' \rangle|^2$  representa o comprimento ao quadrado da componente perpendicular ao eixo de rotação na esfera em relação à unitária  $U_1^\dagger U_2$ , e  $\delta$  é o ângulo de rotação.



Para o caso geral, o componente  $k, l$  que acompanha  $|\langle k|\Delta|l\rangle|^2$  no vazamento de informação, é, reinterpretado em termos dos autovalores de  $A_i^\dagger A_j$ ,

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i,j} p_i p_j \sin^2 \delta_{i,j}^{k,l} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} p_i p_j \left( e^{i\phi_{i,j}^k} - e^{i\phi_{i,j}^l} \right) \left( e^{-i\phi_{i,j}^k} - e^{-i\phi_{i,j}^l} \right) \\ &= \frac{1}{2} z \sum_{i,j} |\lambda_{i,j}^k - \lambda_{i,j}^l|^2. \end{aligned} \quad (2.94)$$

A taxa de perda de distinguibilidade pode ser calculada em diferentes etapas da evolução, e comparadas na procura de intervalos de crescimento. Qualquer instante que exiba uma recuperação de distinguibilidade, denuncia um comportamento não-markoviano da dinâmica.

# Capítulo 3

## Aplicação

A proposta deste capítulo é estudar a dinâmica de sistemas abertos, como descrita pelo formalismo apresentado anteriormente, em um modelo que permite naturalmente a execução de medições sobre as partículas do reservatório. Além disso, o modelo de colisões [18] possui características que facilitam o estudo da relação entre correlações e markovianidade que serão abordadas neste capítulo. Em especial, será avaliada a ação do processo de monitoramento nessa relação.

### 3.1 Modelo de Colisões

O modelo de colisões trata da dinâmica de sistemas abertos usando uma sequência de interações entre o sistema analisado, e os graus de liberdade do ambiente. Cada interação é entendida como uma colisão de uma das partículas do ambiente, e no modelo estudado no presente trabalho, cada partícula interage com o sistema apenas uma vez, e não possui uma dinâmica com relação às outras partículas. A dinâmica de sistemas abertos é estabelecida definindo qual o estado inicial do conjunto de graus de liberdade do reservatório ( $\sigma$ ) e a unitária que promove a interação bipartida das colisões.

Inicialmente, o modelo de colisões foi apresentado como uma forma de realizar evoluções quânticas de maneira aproximada, como mapas de decoerência e processos de termalização [19]. A simulação *estroboscópica* dos mapas de decoerência é realizada através de um conjunto de partículas do reservatório que são descorrelacionadas, e interagem através do mesmo hamiltoniano com o sistema principal, garantindo que  $\mathcal{E}[\rho] = \mathcal{E}_1^n[\rho]$ , em que  $\mathcal{E}_1$  é o canal associado à interação do sistema com uma partícula do reservatório. Para simular essa classe de mapas, esta interação tem que ser tal que cada operação quântica preserve os elementos diagonais da matriz densidade do sistema, em alguma base específica. Desta forma, ela deve

satisfazer as relações

$$\begin{aligned}
|00\rangle &\rightarrow |0\psi\rangle, \\
|01\rangle &\rightarrow |0\psi^\perp\rangle, \\
|10\rangle &\rightarrow |1\phi^\perp\rangle, \\
|11\rangle &\rightarrow |1\phi\rangle,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

que pode ser reescrito na forma de um operador

$$U = |0\rangle\langle 0| \otimes V_0 + |1\rangle\langle 1| \otimes V_1, \tag{3.2}$$

onde  $V_0 = |\psi\rangle\langle 0| + |\psi^\perp\rangle\langle 1|$  e  $V_1 = |\phi^\perp\rangle\langle 0| + |\phi\rangle\langle 1|$  podem ser quaisquer unitárias de um qubit. Os operadores definidos nesta forma são chamados de *unitárias controladas* no sentido em que a operação que é realizada sobre o segundo qubit depende diretamente do estado do primeiro qubit. A partir deste estado do reservatório e desta interação, o mapa obtido é uma aproximação para o canal de decoerência de um qubit na base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , em que no limite de infinitas partículas do reservatório  $n \rightarrow \infty$  tem-se  $\rho' = \text{diag}[\rho]$ , ou seja, sobram apenas os termos diagonais da matriz densidade do sistema [18].

O mapa de decoerência é markoviano, como sugere a propriedade derivada da independência entre as partículas do reservatório  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n \cdots \mathcal{E}_1$ . Foi então investigada a possibilidade de simular operações não-markovianas através de um modelo que levasse em consideração um reservatório inicialmente correlacionado [15]. No caso de qubits, uma operação da forma

$$\mathcal{E}[\rho] = q_x \sigma_x \rho \sigma_x + q_y \sigma_y \rho \sigma_y + q_z \sigma_z \rho \sigma_z \tag{3.3}$$

é indivisível [16], e portanto não pode ser realizada através do modelo de partículas independentes. Porém tal mapa é simulado através de um reservatório em um estado  $\omega_n$  formado por  $n$  sistemas de 3 níveis tal que  $\langle k^{\otimes n} | \omega_n | k^{\otimes n} \rangle = q_k$ , com  $k = x, y, z$ , distinguindo os 3 vetores da base do espaço de Hilbert de cada partícula, e uma interação de colisão dada por unitárias de controle na forma  $U = \sigma_x \otimes |x\rangle\langle x| + \sigma_y \otimes |y\rangle\langle y| + \sigma_z \otimes |z\rangle\langle z|$ . Então, neste modelo, a simulação estroboscópica do mapa indivisível é dada por

$$\mathcal{E}_n[\rho] = \sum_k q_k \exp[in\eta\sigma_k] \rho \exp[-in\eta\sigma_k], \tag{3.4}$$

em que  $\eta$  é o parâmetro que regula a intensidade de cada colisão e  $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}$  para  $n = \pi/(2\eta)$  [15].

As próximas sessões distutirão como a markovianidade depende das correlações entre as partículas do reservatório e em especial, em um caso simplificado em que considera-se apenas a evolução devido às duas primeiras colisões com as partículas do reservatório.

### 3.1.1 Evolução Unitária no Modelo de Colisões

Será considerado a princípio, reservatório e sistema partindo de estados puros. O estado inicial do sistema é representado por  $|\psi\rangle|\phi\rangle$ . O sistema conjunto tem a evolução seguindo este modelo de colisões, com um hamiltoniano da forma

$$H(t) = \delta(t - t_1) (\sigma_0 \otimes |0\rangle\langle 0|_1 + \sigma_1 \otimes |1\rangle\langle 1|_1) + \delta(t - t_2) (\sigma_0 \otimes |0\rangle\langle 0|_2 + \sigma_1 \otimes |1\rangle\langle 1|_2), \quad (3.5)$$

onde  $|i\rangle\langle i|_1 = \mathbb{I} \otimes |i\rangle\langle i|$ ,  $|i\rangle\langle i|_2 = |i\rangle\langle i| \otimes \mathbb{I}$  indicam projetores que atuam no espaço de Hilbert da primeira e da segunda partículas do reservatório, respectivamente, e os  $\sigma_i$  são matrizes hermitianas que representam a ação do hamiltoniano no sistema de interesse. As distribuições delta  $\delta(t)$  representam o caráter instantâneo das interações no modelo de colisões. Este comportamento busca associar um hamiltoniano que é o gerador de dinâmica unitária contínua, com um processo de evolução discreto.

A equação de Schrödinger para este hamiltoniano fornece

$$|\Psi(t + dt)\rangle - |\Psi(t)\rangle = -iH(t)|\Psi(t)\rangle dt$$

e em resumo, para  $t \neq t_1, t_2$

$$|\Psi(t + dt)\rangle = |\Psi(t)\rangle$$

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{cases} |\Psi(t_0)\rangle & 0 \leq t < t_1, \\ |\Psi(t_1)\rangle & t_1 < t < t_2, \\ |\Psi(t_2)\rangle & t_2 < t \end{cases}$$

em que cada um desses estados é dado por ( $\hbar = 1$ )

$$\begin{aligned} |\Psi(t_1)\rangle &= \exp \left[ -i \int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta} H(t) dt \right] |\Psi(t_0)\rangle \\ &= \exp (-i\sigma_0 \otimes |0\rangle\langle 0|_1 - i\sigma_1 \otimes |1\rangle\langle 1|_1) |\Psi(t_0)\rangle \\ &= (e^{-i\sigma_0} \otimes |0\rangle\langle 0|_1 + e^{-i\sigma_1} \otimes |1\rangle\langle 1|_1) |\Psi(t_0)\rangle \end{aligned}$$

e de forma semelhante:

$$|\Psi(t_2)\rangle = (e^{-i\sigma_0} \otimes |0\rangle\langle 0|_2 + e^{-i\sigma_1} \otimes |1\rangle\langle 1|_2) |\Psi(t_1)\rangle.$$

A evolução é descrita pela ação de unitárias nos instantes de colisão. Utilizando  $\Pi_{ij} = |i\rangle\langle i| \otimes |j\rangle\langle j|$  representando os projetores:

$$\begin{aligned} U(t_1) &= (e^{-i\sigma_0} \otimes |0\rangle\langle 0|_1 + e^{-i\sigma_1} \otimes |1\rangle\langle 1|_1) \\ &= e^{-i\sigma_0} \otimes (\Pi_{00} + \Pi_{10}) + e^{-i\sigma_1} \otimes (\Pi_{01} + \Pi_{11}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

e

$$\begin{aligned} U(t_2) &= \left( e^{-i\sigma_0} \otimes |0\rangle\langle 0|_2 + e^{-i\sigma_1} \otimes |1\rangle\langle 1|_2 \right) \left( e^{-i\sigma_0} \otimes |0\rangle\langle 0|_1 + e^{-i\sigma_1} \otimes |1\rangle\langle 1|_1 \right) \\ &= e^{-2i\sigma_0} \otimes \Pi_{00} + e^{-i\sigma_1} e^{-i\sigma_0} \otimes \Pi_{10} + e^{-i\sigma_0} e^{-i\sigma_1} \otimes \Pi_{01} + e^{-2i\sigma_1} \otimes \Pi_{11}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Exemplificando uma evolução deste tipo, usando para o estado do reservatório um estado inicial maximamente emaranhado  $|\phi\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} |\Psi(t_0)\rangle &= |\psi\rangle \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\Psi(t_1)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\sigma_1} |\psi\rangle |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\sigma_0} |\psi\rangle |10\rangle \\ |\Psi(t_2)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\sigma_0} e^{-i\sigma_1} |\psi\rangle |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\sigma_1} e^{-i\sigma_0} |\psi\rangle |10\rangle. \end{aligned}$$

Em resumo, para este estado inicial e usando a base decimal representando os estados dos qubits

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} U_1(t) |\psi\rangle |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} U_2(t) |\psi\rangle |2\rangle. \quad (3.8)$$

O estado reduzido do sistema  $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  após o tempo  $t$  é descrito pelo canal

$$\mathcal{E}_t[\rho] = \frac{1}{2} U_1(t) \rho U_1^\dagger(t) + \frac{1}{2} U_2(t) \rho U_2^\dagger(t) \quad (3.9)$$

e é do tipo CEA.

Um hamiltoniano para a interação do sistema com  $n$  partículas é

$$H(t) = \sum_i \delta(t - t_i) \sum_j \sigma_j \otimes |j\rangle\langle j|_i, \quad (3.10)$$

$|j\rangle\langle j|_i = \mathbb{I}_{\bar{j}} \otimes |j\rangle\langle j|$  é um operador de Von Neumann atuando no subespaço da partícula  $i$ , em que  $\mathbb{I}_{\bar{j}}$  representa a atuação da identidade sobre todos os espaços de Hilbert exceto o da partícula  $j$ . Generalizando a conta com 2 qubits de controle, após a interação com a  $m$ -ésima partícula, tem-se

$$\exp\left(\int_{t_m-\delta}^{t_m+\delta} H(t) dt\right) = \sum_j e^{i\sigma_j} \otimes |j\rangle\langle j|_m. \quad (3.11)$$

Portanto, seja  $i$  uma representação decimal para o conjunto de elementos de base  $|i\rangle = |j_n\rangle \otimes |j_{n-1}\rangle \cdots |j_1\rangle$ , com cada  $j = 0, 1$ , a unitária da evolução após a  $m$ -ésima partícula é dada por

$$\sum_i U_i(t_m) \otimes |i\rangle\langle i| \quad (3.12)$$

em que cada unitária  $U_i(t_m)$  é o produto das  $m$  operações controladas pelas  $m$  partículas que colidiram:

$$U_i(t_m) = e^{i\sigma_{jm}} \dots e^{i\sigma_{j1}}.$$

Como  $M = 2^{n-m}$  dos operadores  $U_i(t_m)$  são idênticos, os operadores de Kraus do canal que representa a evolução do sistema são dados por esta unitária e pelos  $a_k^2 = \sum_i |\langle i|\phi\rangle|^2$ , cuja soma é realizada sobre todos os elementos da base  $\{|i\rangle\}$  que compartilham da mesma sequência  $(\dots|j_m\rangle\dots|j_1\rangle)$ . As  $2^m$  matrizes de Kraus restantes são dadas por

$$A_k(t_m) = a_k U_k(t_m), \quad (3.13)$$

definindo a operação realizada sobre o sistema, ignorando o reservatório.

Uma proposta do estudo de modelos de colisões é verificar quais operações quânticas podem ser geradas por esse esquema.

## 3.2 Modelo de Colisões com Reservatório Monitorado

Para qualquer resolução do operador identidade é possível particionar o canal quântico

$$\mathbb{I}^{\otimes 2}|\Psi\rangle(t) = (\Pi_{++} + \Pi_{+-} + \Pi_{-+} + \Pi_{--})|\Psi\rangle(t),$$

onde  $\Pi_i$  são os projetores associados a algum observável local agindo no reservatório. Neste contexto o tipo de particionamento utilizado inclui somente a possível ação de operações locais, na forma de um produto tensorial das operações em cada espaço.

Os estados compostos do sistema+reservatório, quando um processo de medição seletiva é realizado no último, após a evolução unitária, são

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{++}(t) &= \sum_i \langle ++|i\rangle \langle i|\phi\rangle U_i(t)|\psi\rangle \otimes |++\rangle \\ |\Psi\rangle_{+-}(t) &= \sum_i \langle +-|i\rangle \langle i|\phi\rangle U_i(t)|\psi\rangle \otimes |+-\rangle \\ |\Psi\rangle_{-+}(t) &= \sum_i \langle -+|i\rangle \langle i|\phi\rangle U_i(t)|\psi\rangle \otimes |-+\rangle \\ |\Psi\rangle_{--}(t) &= \sum_i \langle --|i\rangle \langle i|\phi\rangle U_i(t)|\psi\rangle \otimes |--\rangle. \end{aligned}$$

Neste cenário cada trajetória é caracterizada pelos operadores  $V_J = \sum_i \langle J|i\rangle \langle i|\phi\rangle U_i(t)$  atuando sobre o estado do sistema  $|\psi\rangle$  relativo a cada resultado da medição sobre o reservatório  $J$ . Tomando a soma convexa de cada uma das trajetórias, representado fisicamente ao ignorar os resultados da medição dos qubits de controle, a

evolução do estado  $|\psi\rangle$  fica definida como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_i(|\psi\rangle\langle\psi|) &= V_{++}(t)|\psi\rangle\langle\psi|V_{++}^\dagger(t) + V_{+-}(t)|\psi\rangle\langle\psi|V_{+-}^\dagger(t) \\
&\quad + V_{-+}(t)|\psi\rangle\langle\psi|V_{-+}^\dagger(t) + V_{--}(t)|\psi\rangle\langle\psi|V_{--}^\dagger(t) \\
&= \sum_{ij} (\langle j|\Pi_{++}|i\rangle + \langle j|\Pi_{+-}|i\rangle + \langle j|\Pi_{-+}|i\rangle + \langle j|\Pi_{--}|i\rangle) \\
&\quad \times \langle\phi|j\rangle\langle i|\phi\rangle U_i(t)|\psi\rangle\langle\psi|U_j(t)^\dagger \\
&= \sum_{ij} \langle j|\mathbb{I}|i\rangle\langle\phi|j\rangle\langle i|\phi\rangle U_i(t)|\psi\rangle\langle\psi|U_j(t)^\dagger \\
&= \sum_i |\langle i|\phi\rangle|^2 U_i(t)|\psi\rangle\langle\psi|U_i(t)^\dagger \\
&= \text{Tr}_E [|\Psi\rangle\langle\Psi|](t).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Mesmo para uma escolha de bases não-local quanto às partículas do modelo de colisões, a evolução não monitorada do estado recai no cálculo do traço parcial sobre o ambiente do sistema global. Reiterando que tomar o traço parcial é equivalente a ignorar o destino que o estado acoplado tomou.

*Exemplo 1.* Medindo  $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  e ignorando o resultado do segundo qubit

$$\begin{aligned}
|0\rangle|+\rangle &= \frac{|00\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}} \\
|1\rangle|+\rangle &= \frac{|10\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

e ao calcular  $\langle 0|\langle +|01\rangle = 1/\sqrt{2}$ ,  $\langle 0|\langle +|10\rangle = 0$ ,  $\langle 1|\langle +|01\rangle = 0$  e  $\langle 1|\langle +|10\rangle = 1/\sqrt{2}$  obtém-se

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{0+} &= \frac{1}{2}U_1|\psi\rangle \\
|\psi\rangle_{1+} &= \frac{1}{2}U_2|\psi\rangle
\end{aligned}$$

e fornece a trajetória

$$|\psi\rangle\langle\psi|_{0+} + |\psi\rangle\langle\psi|_{1+} = \frac{1}{4}U_1|\psi\rangle\langle\psi|U_1^\dagger + \frac{1}{4}U_2|\psi\rangle\langle\psi|U_2^\dagger. \tag{3.15}$$

Nota-se que esta trajetória específica reproduz a evolução sem monitoramento do sistema com metade da probabilidade.

*Exemplo 2.* Tomando uma direção arbitrária na esfera de Bloch para um estado qualquer  $|+\rangle = \cos \frac{\alpha}{2}|0\rangle + e^{i\beta} \sin \frac{\alpha}{2}|1\rangle$ , as trajetórias são descritas por

$$\begin{aligned} |0\rangle|+\rangle &= \cos \frac{\alpha}{2}|00\rangle + e^{i\beta} \sin \frac{\alpha}{2}|01\rangle \\ |1\rangle|+\rangle &= \cos \frac{\alpha}{2}|10\rangle + e^{i\beta} \sin \frac{\alpha}{2}|11\rangle, \end{aligned}$$

os cálculos  $\langle 0|\langle +|01\rangle = e^{-i\beta} \sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\langle 0|\langle +|10\rangle = 0$ ,  $\langle 1|\langle +|01\rangle = 0$  e  $\langle 1|\langle +|10\rangle = \cos \frac{\alpha}{2}$  e fornecem a trajetória

$$|\psi\rangle\langle\psi|_{0+} + |\psi\rangle\langle\psi|_{1+} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} U_1 |\psi\rangle\langle\psi| U_1^\dagger + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} U_2 |\psi\rangle\langle\psi| U_2^\dagger. \quad (3.16)$$

Esta expressão recupera o limite de um canal determinístico em  $\alpha = 0, \pi$  e o canal do exemplo anterior para  $\alpha = \pi/2$ .

Devido à invariância do traço sob atuação de unitárias:  $\text{Tr}[UAU^\dagger] = \text{Tr}[A]$ , aplicada ao espaço de Hilbert do qubit ignorado, uma mudança de base utilizada para obter as trajetórias deste subsistema não altera a representação da trajetória. Isso garante que esta base utilizada para representar o espaço do qubit ignorado gera os canais quânticos corretos para o sistema.

Ignorar um dos qubits de controle resulta numa trajetória que se comporta como um mapa completamente positivo que preserva o traço — um canal quântico. Preservar o traço assegura que a probabilidade de tal trajetória ocorrer não depende do estado da partícula que representa o sistema estudado. Em outras palavras, a estatística dos cliques no aparato de medição independe da etapa do processo:  $p_+ = p_- = 1/2$ .

O último exemplo também revela uma semelhança entre as evoluções parcialmente e não monitoradas. Ambas geram canais CEA que diferem somente pelos pesos que acompanham cada termo do mapa.

*Exemplo 3.* Escolhendo  $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/2$  para ambos os qubits, as trajetórias se tornam:

$$\begin{aligned} |\pm\pm\rangle &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{2} \pm \frac{|01\rangle + |10\rangle}{2} \rightarrow |\psi\rangle_{\pm\pm} = \pm \frac{U_1 + U_2}{2\sqrt{2}} |\psi\rangle \\ |\mp\pm\rangle &= \frac{|00\rangle - |11\rangle}{2} \pm \frac{|01\rangle - |10\rangle}{2} \rightarrow |\psi\rangle_{\mp\pm} = \pm \frac{U_1 - U_2}{2\sqrt{2}} |\psi\rangle. \end{aligned}$$

Definindo  $V_\pm = (U_1 \pm U_2)/2\sqrt{2}$ , as possíveis evoluções para o estado são então

$$\begin{aligned} |\psi\rangle\langle\psi|_{\pm\pm} &= V_+ |\psi\rangle\langle\psi| V_+^\dagger \\ |\psi\rangle\langle\psi|_{\mp\pm} &= V_- |\psi\rangle\langle\psi| V_-^\dagger. \end{aligned}$$



Enquanto as unitárias forem linearmente independentes, os operadores  $V_{\pm}^{\dagger}V_{\pm}$  não são proporcionais à identidade. Neste caso o mapa nesta evolução monitorada não preserva o traço dos estados do sistema, tornando as estatísticas dependentes dos mesmos:  $p_{\pm} = \langle \psi | V_{\pm}^{\dagger} V_{\pm} | \psi \rangle$ .

*Exemplo 4.* O caso geral de evolução completamente monitorada localmente com medições projetando sobre os estados  $|\pm\rangle_1 = \cos(\alpha/2)|0\rangle \pm e^{i\beta} \sin(\alpha/2)|1\rangle$  e  $|\pm\rangle_2 = \cos(\alpha'/2)|0\rangle \pm e^{i\beta'} \sin(\alpha'/2)|1\rangle$ , revelam os estados monitorados

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\pm\pm} &= \pm \frac{e^{i\beta} \cos \frac{\alpha'}{2} \sin \frac{\alpha}{2} U_1 + e^{i\beta'} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha'}{2} U_2}{\sqrt{2}} |\psi\rangle \\ |\psi\rangle_{\mp\pm} &= \mp \frac{e^{i\beta} \cos \frac{\alpha'}{2} \sin \frac{\alpha}{2} U_1 - e^{i\beta'} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha'}{2} U_2}{\sqrt{2}} |\psi\rangle. \end{aligned}$$

Os dois operadores para as evoluções são

$$V_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\beta} \cos \frac{\alpha'}{2} \sin \frac{\alpha}{2} U_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\beta'} \sin \frac{\alpha'}{2} \cos \frac{\alpha}{2} U_2. \quad (3.17)$$

Para garantir que sem monitoramento não existe dependência quanto à base, nota-se que os termos mistos que aparecem na soma convexa cancelam-se, recuperando o canal referente.

É interessante notar como o monitoramento afeta a dinâmica do modelo. Inicialmente, com o monitoramento parcial, percebe-se que os estados do sistema após cada interação, para cada resultado de medição, são diferentes, enquanto que as probabilidades de se obter cada trajetória é fixa. Em outras palavras, o resultado das medições alteram a descrição do sistema, porém o estado do sistema não altera a estatística das medições. Já no caso do monitoramento completo, a própria estatística das medições do reservatório é afetada pelo estado do sistema. Isso provém do fato que a dinâmica monitorada deixa de ser descrita por um mapa que preserva o traço e portanto, as probabilidades de se obter as correlações entre os resultados de medições das duas partículas depende do próprio estado do sistema. O sistema age como um intermediário na interação entre as duas partículas do reservatório. O mapa que descreve a evolução do sistema possui detalhes de como o próprio sistema funciona como intermediário da interação entre as partículas do reservatório.

### 3.3 Evolução Para Diferentes Graus de Pureza

Sejam o reservatório e o sistema descritos por estados puros, a representação da dinâmica do sistema conjunto é dada por

$$|\Psi\rangle(t) = \sum_i \langle i | \phi \rangle U_i(t) |\psi\rangle |i\rangle$$

sendo  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  os estados iniciais para o ambiente e sistema respectivamente.

O próximo passo a levar em conta é manter o sistema puro, mas generalizando o reservatório para levar em conta misturas

$$\sigma(0) = \sum_j p_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|.$$

Essa escolha para a base do espaço de Hilbert do ambiente  $|\phi_j\rangle$  não é única — como previsto no teorema da mistura de Schrödinger. Enfim, o estado fica representado de maneira natural na base definida pelo hamiltoniano de interação que é ligado ao mapa do qubit do sistema, resolvendo a ambiguidade.

O estado inicial global é formado pelo produto tensorial deste reservatório com o do estado-sistema correspondente  $|\psi\rangle$ ,

$$\rho(0) = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

A princípio considerar-se-á este estado inicial puro, devido ao caráter linear das operações aplicadas. A generalização para misturas desse estado segue por analogia ao realizado em seguida.

O estado inicial usando matrizes densidade é da forma

$$\omega(0) = \sum_j p_j |\psi\rangle\langle\psi| \otimes |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

e pela linearidade do operador evolução,

$$\omega(t) = \sum_j p_j U(t) (|\psi\rangle\langle\psi| \otimes |\phi_j\rangle\langle\phi_j|) U^\dagger(t).$$

Considerando a evolução no contexto das unitárias controladas, e reescrevendo a expressão em função do cálculo no caso puro, pode-se definir o vetor

$$|\Psi_j\rangle(t) = \sum_i \langle i|\phi_j\rangle U_i(t) |\psi\rangle \otimes |i\rangle.$$

Daí o estado global pode ser escrito sem perda de generalidade como

$$\omega(t) = \sum_j p_j |\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|(t).$$

Para evoluções sem monitoramento tem-se

$$\text{Tr}_{\text{env}} [|\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|(t)] = \sum_i |\langle i|\phi_j\rangle|^2 U_i(t) |\psi\rangle\langle\psi| U_i^\dagger(t)$$

a linearidade do traço resulta em

$$\rho(t) = \sum_i \left( \sum_j p_j |\langle i|\phi_j\rangle|^2 \right) U_i(t) |\psi\rangle\langle\psi| U_i^\dagger(t).$$

Retomando a definição do estado inicial do reservatório a expressão para a evolução enfim toma a seguinte forma:

$$\rho(t) = \sum_i \langle i | \rho_{\text{env}} | i \rangle U_i(t) |\psi\rangle\langle\psi| U_i^\dagger(t). \quad (3.18)$$

No contexto do traço parcial essa expressão recupera o formato geral para este tipo de evolução

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \text{Tr}_{\text{env}} \left[ \left( \sum_i U_i(t) \otimes |i\rangle\langle i| \right) (|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \rho_{\text{env}}) \left( \sum_{i'} U_{i'}(t) \otimes |i'\rangle\langle i'| \right)^\dagger \right] \\ &= \text{Tr}_{\text{env}} \left[ U(t) (|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \rho_{\text{env}}) U^\dagger(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Em resumo, independentemente da pureza do estado do ambiente, o mapa para o sistema de interesse, ignorando medições sobre o reservatório, simplesmente toma os elementos diagonais da matriz densidade dos qubits de controle na base definida pelo hamiltoniano de interação no esquema de colisões.

Como prometido, a generalização para sistemas mistos

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|,$$

é realizada novamente aplicando a linearidade do traço e da evolução unitária:

$$\rho(t) = \text{Tr}_{\text{env}} \left[ U(t) (\rho \otimes \rho_{\text{env}}) U^\dagger(t) \right].$$

### 3.3.1 Evolução Monitorada para um Estado de Reservatório Qualquer

Considerando as possíveis trajetórias, através da projeção dos estados globais no regime de medições locais do reservatório, obtém-se

$$|\Psi_j\rangle_{++}(t) = \sum_i \langle ++ | i \rangle \langle i | \phi_j \rangle U_i(t) |\psi\rangle \otimes |++\rangle$$

a matriz densidade então se torna

$$\omega_{++}(t) = \sum_{i,i'} \langle ++ | i \rangle \langle i | \rho_{\text{env}} | i' \rangle \langle i' | ++ \rangle U_i(t) |\psi\rangle\langle\psi| U_{i'}^\dagger(t) \otimes |++\rangle\langle ++|.$$

Representando projeção no estado  $|++\rangle$  através de  $P_{++}$ , a evolução para o operador densidade do sistema é dada por

$$\rho_{++}(t) = \sum_{i,i'} \langle i' | P_{++} | i \rangle \langle i | \rho_{\text{env}} | i' \rangle U_i(t) |\psi\rangle\langle\psi| U_{i'}^\dagger(t), \quad (3.20)$$

e usando as propriedades das medições projetivas e do traço parcial,

$$\rho_{++}(t) = \text{Tr}_{\text{env}} \left[ P_{++} U(t) (|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \rho_{\text{env}}) U^\dagger(t) P_{++}^\dagger \right]. \quad (3.21)$$

Como esperado, a soma convexa sobre todas as trajetórias retorna a evolução aberta para o sistema, aplicando a soma dos projetores como uma resolução da identidade.

Existe uma forma de encontrar o mapa para a evolução do sistema pondo a projeção da trajetória e o estado inicial do sistema no mesmo nível. Para tal, toma-se cada componente da soma como descrito acima na forma de um produto de Hadamard entre os operadores [10]

$$\langle i' | P_{++} | i \rangle \langle i | \rho_{\text{env}} | i' \rangle = \langle i | P_{++} \circ \rho_{\text{env}}^* | i' \rangle.$$

Analisando a matriz resultante, é possível verificar quais trajetórias levam a mapas que preservam o traço — cuja estatística não dependa do estado do sistema — simplesmente verificando se possui uma forma diagonal na base definida pelo hamiltoniano de interação.

*Exemplo 5.* Suponha um estado de ambiente classicamente correlacionado

$$\rho_{\text{env}} = \frac{1}{2} |01\rangle\langle 01| + \frac{1}{2} |10\rangle\langle 10|$$

Por já apresentar uma forma matricial diagonal, garante que os mapas preservem o traço. Realizando medições locais sobre ambos os qubits do reservatório na direção  $x$

$$P_{++} = |+\rangle\langle +| \otimes |+\rangle\langle +|.$$

e utilizando o fato que  $(A \otimes B) \circ (C \otimes D) = (A \circ C) \otimes (B \circ D)$ , então

$$\begin{aligned} P_{++} \circ \rho_{\text{env}}^* &= \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| \otimes |+\rangle\langle +|) \otimes (|1\rangle\langle 1| \otimes |+\rangle\langle +|) + \frac{1}{2} (|1\rangle\langle 1| \otimes |+\rangle\langle +|) \otimes (|0\rangle\langle 0| \otimes |+\rangle\langle +|) \\ &\quad + \frac{1}{2} (|1\rangle\langle 1| \otimes |+\rangle\langle +|) \otimes (|0\rangle\langle 0| \otimes |+\rangle\langle +|) + \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| \otimes |+\rangle\langle +|) \otimes (|1\rangle\langle 1| \otimes |+\rangle\langle +|) \end{aligned}$$

que resulta em

$$P_{++} \circ \rho_{\text{env}}^* = \frac{1}{4} (|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$$

e por vez está ligado ao canal

$$\mathcal{E}_t^{++}[\rho] = \frac{1}{4} U_1(t) \rho U_1^\dagger(t) + \frac{1}{4} U_2(t) \rho U_2^\dagger(t). \quad (3.22)$$

A forma deste mapa difere do caso com correlações quânticas — resta saber qual o papel da discórdia<sup>1</sup> neste contexto — por garantir sempre a preservação do

<sup>1</sup>A discórdia é uma quantidade definida em mecânica quântica que quantifica as correlações entre duas partes de um sistema que não podem ser descritas de maneira clássica [11, 6].

traço, enquanto que com o reservatório puro surge uma relação mais forte entre o monitoramento e o sistema.

*Exemplo 6.* Aplicando um monitoramento local geral sobre o mesmo estado de reservatório onde  $|+\rangle_1 = \cos(\alpha/2)|0\rangle + e^{i\beta} \sin(\alpha/2)|1\rangle$  e  $|+\rangle_2 = \cos(\alpha'/2)|0\rangle + e^{i\beta'} \sin(\alpha'/2)|1\rangle$ , resulta em

$$P_{++} \circ \rho_{\text{env}}^* = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\alpha'}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} |01\rangle\langle 01| + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha'}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} |10\rangle\langle 10|,$$

que novamente gera um canal quântico para o sistema com probabilidade  $(1 - \cos \alpha' \cos \alpha)/4$ .

### 3.3.2 Estatística das Trajetórias

As probabilidades associadas a cada trajetória nesse contexto de medições locais são dadas por

$$p_l(t) = \text{Tr} \left[ P_l U(t) (\rho_0 \otimes \sigma) U^\dagger(t) \right],$$

em que  $l$  é o índice referente ao estado do reservatório medido,  $\rho_0 = \rho(0)$  e  $\sigma = \rho_{\text{env}}(0)$ . Para analisar apropriadamente esta estatística, será útil verificar a forma do operador  $U^\dagger(t) P_l U(t)$  nos casos:

- sem monitoramento tal que  $P_l = \mathbb{I}$ ;
- realizando uma medida somente sobre um dos qubits de controle ( $P_l = \mathbb{I} \otimes P_1$  ou  $P_l = P_2 \otimes \mathbb{I}$ );
- monitoramento completo dos qubits ( $P_l = P_2 \otimes P_1$ ).

O primeiro caso é trivial

$$U^\dagger(t) P_l U(t) = \mathbb{I}$$

a evolução associada, como visto, é dada pelo traço parcial sobre o ambiente e é a única evolução realizável.

Tomando os resultado de medidas de um ou dos dois qubits, passam a existir possíveis evoluções distintas. Tomando uma delas como exemplo,

$$U^\dagger(t) P_{++} U(t) = \sum_{i,j} \langle i|++\rangle \langle ++|j\rangle U_i^\dagger(t) U_j(t) \otimes |i\rangle\langle j|.$$

Separando os termos com  $i = j$  em um somatório à parte

$$\begin{aligned} U^\dagger(t) P_{++} U(t) = \sum_i |\langle i|++\rangle|^2 \mathbb{I} \otimes |i\rangle\langle i| + \sum_{i < j} \langle i|++\rangle \langle ++|j\rangle U_i^\dagger(t) U_j(t) \otimes |i\rangle\langle j| \\ + \langle j|++\rangle \langle ++|i\rangle U_j^\dagger(t) U_i(t) \otimes |j\rangle\langle i| \quad (3.23) \end{aligned}$$

que corresponde à probabilidade

$$p_{++} = \sum_i |\langle i|++\rangle|^2 \langle i|\sigma|i\rangle + \sum_{i<j} \langle i|++\rangle \langle ++|j\rangle \text{Tr} [U_i^\dagger(t)U_j(t)\rho_0] \langle j|\sigma|i\rangle \\ + \langle j|++\rangle \langle ++|i\rangle \text{Tr} [U_j^\dagger(t)U_i(t)\rho_0] \langle i|\sigma|j\rangle \quad (3.24)$$

cuja expressão pode ser simplificada considerando o caráter hermitiano das matrizes densidade e a propriedade cíclica do traço

$$p_{++} = \sum_i |\langle i|++\rangle|^2 \langle i|\sigma|i\rangle + \sum_{i\neq j} \text{Re} \left\{ \langle i|++\rangle \langle ++|j\rangle \text{Tr} [U_i^\dagger(t)U_j(t)\rho_0] \langle j|\sigma|i\rangle \right\}. \quad (3.25)$$

Este esquema demonstra que as interações do modelo podem modificar a estatística das medições. A dependência surge na forma de interferência com uma fase ligada ao estado inicial da partícula sistema definida por

$$e^{i\theta(t)} = \text{Tr} [U_i^\dagger(t)U_j(t)\rho_0]. \quad (3.26)$$

E nota-se também que estados possuindo correlação clássica na base definida pelo hamiltoniano não apresentam termos diagonais, e conseqüentemente não possuem o efeito de interferência.

Por último, a análise para o monitoramento de apenas um qubit é levado em conta pela soma das probabilidades que estão relacionadas a ignorar o resultado da medida, por exemplo

$$p_+^1 = p_{++} + p_{-+}. \quad (3.27)$$

### 3.4 Relação Entre Correlações e Markovianidade

Levando em consideração a pós-seleção do sistema de interesse após a colisão com o reservatório, a trajetória associada é

$$\tilde{\rho}_k(t) = \text{Tr}_{\text{env}} [A_k U(t)(\rho_0 \otimes \sigma)U^\dagger(t)A_k^\dagger], \quad (3.28)$$

Os  $A_k$  são os operadores de Kraus do mapa decoerente associado à medida do reservatório.

A probabilidade para cada uma das possíveis trajetórias é dada por

$$p_k = \text{Tr} [A_k U(t)(\rho_0 \otimes \sigma)U^\dagger(t)A_k^\dagger] \\ = \text{Tr} [A_k^\dagger A_k U(t)(\rho_0 \otimes \sigma)U^\dagger(t)].$$

Definindo  $M_k = A_k^\dagger A_k$ , este é então o POVM que fornece a estatística de monitoramento

$$p_k = \text{Tr} [M_k \omega(t)], \quad (3.29)$$

em que  $\omega(t) = U(t)(\rho_0 \otimes \sigma)U^\dagger(t)$ . Os operadores de medição agem sobre o reservatório somente. Utilizando a propriedade cíclica do traço parcial para os operadores do espaço de Hilbert contraído, a expressão para as trajetórias se torna

$$\tilde{\rho}_k(t) = \text{Tr}_{\text{env}} \left[ M_k U(t)(\rho_0 \otimes \sigma)U^\dagger(t) \right]. \quad (3.30)$$

Utilizando o produto de Hadamard

$$\tilde{\rho}_k(t) = \sum_{i,j} \langle i | M_k^T \circ \sigma | j \rangle U_i(t) \rho_0 U_j^\dagger(t). \quad (3.31)$$

Resta descrever a relação entre o estado do reservatório e o caráter markoviano na evolução do sistema. Para um reservatório em um estado fatorável  $\sigma = \sigma_2 \otimes \sigma_1$ , o modelo de colisões fornece, no caso sem monitoramento,

$$\sum_i U_i(t) \otimes |i\rangle\langle i| = \sum_{m,n} U_n(t) U_m(t) \otimes (|n\rangle\langle n| \otimes |m\rangle\langle m|), \quad i = 2n + m \quad (3.32)$$

então

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_{i,i'} \text{Tr}_{\text{env}} \left[ U_i(t) \rho_0 U_{i'}^\dagger(t) \otimes |i\rangle\langle i| \sigma_2 \otimes \sigma_1 |i'\rangle\langle i'| \right] \\ &= \sum_n \langle n | \sigma_2 | n \rangle U_n(t) \left[ \sum_m \langle m | \sigma_1 | m \rangle U_m(t) \rho_0 U_m^\dagger(t) \right] U_n^\dagger(t), \end{aligned}$$

que pode ser expresso numa sequência de canais quânticos

$$\mathcal{E}(t)[\rho_0] = \mathcal{E}_2(t) [\mathcal{E}_1(t)[\rho_0]] \quad (3.33)$$

Esta divisão em canais no tempo é baseada na propriedade das unitárias do modelo. Em geral, se um mapa pode ser dividido no tempo na forma

$$\mathcal{E}(0, t + \epsilon)[\rho] = \mathcal{E}(t, t + \epsilon) [\mathcal{E}(0, t)[\rho]] \quad (3.34)$$

para quaisquer  $t$  e  $\epsilon$ , ele é markoviano. Para a discussão presente a evolução é discreta, logo é necessário somente avaliar a formação dos mapas nos tempos de interação.

No caso monitorado, cada um dos canais são expressos como

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(t)[\rho] = \sum_{n,n'} \langle n | M_k^T \circ \sigma | n' \rangle U_n(t) \rho U_{n'}^\dagger(t) \quad (3.35)$$

e são aplicados subsequentemente seguindo o reservatório no estado produto. Para um estado separável geral  $\sigma = \sum_i p_i \sigma_2^i \otimes \sigma_1^i$  a estrutura convexa é preservada nos canais na forma

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(t)[\rho_0] = \sum_i p_i \tilde{\mathcal{E}}_{k,2}^i(t) \left[ \tilde{\mathcal{E}}_{k,1}^i(t)[\rho_0] \right] \quad (3.36)$$

que não é conclusiva em verificar a divisibilidade da operação.

Através da ação das medições realizadas sobre o estado do reservatório, poderia-se obter a pós-seleção da dinâmica markoviana, escolhendo um esquema de monitoramento que denuncia um reservatório numa forma fatorável. No caso de reservatórios com emaranhamento, deixa de ser possível a separação temporal do canal em partes, mas novamente, medições locais podem desfazer o emaranhamento e as trajetórias selecionam dinâmicas markovianas. Nesta situação, o resultado das medições dita precisamente qual a sequência das operações quânticas que foram realizadas sobre o sistema devido às interações.



# Capítulo 4

## Considerações Finais

O modelo de colisões simples é capaz de representar um conjunto grande de dinâmicas de sistemas abertos. É interessante avaliar quais condições para o estado inicial do reservatório  $\omega$  e do hamiltoniano de interação  $H$  são responsáveis por gerar esses diversos mapas.

Em um reservatório com partículas independentes, nota-se que a sequência de interações é equivalente a uma concatenação de canais quânticos que levam a uma perda de informação intermitente. Outros hamiltonianos de interação possuem diferentes efeitos sobre o sistema, porém, a colisão com o grau de liberdade do reservatório agindo como um qubit de controle, fornece um esquema natural para aplicar estratégias de monitoramento. Cada base utilizada para medir a partícula do ambiente, após a aplicação da unitária controlada, gera um conjunto de trajetórias diferentes e podem ser utilizadas com diferentes propósitos no controle da evolução. Dois casos extremos são: a medição na mesma base que se define a unitária controlada fornece informação sobre qual unitária foi aplicada e o mapa se torna uma evolução cujo efeito final pode ser revertida, a partir do registro de medições de cada partícula do reservatório; uma medição em uma base ortogonal preserva inalterada a evolução do sistema. Em um contexto onde o meio causa o processo de decoerência do sistema, ao realizar medições de maneira incontrollável, esta dinâmica sugere que existem operações que preservam as propriedades da dinâmica apesar dessa ação do meio.

Na discussão sobre a diferença entre correlações clássicas e quânticas, os elementos fora da diagonal da matriz densidade do reservatório torna o registro de medições do monitoramento sensível ao estado do sistema. Como visto nos exemplos, os casos extremos para o estado do reservatório puro ou em uma soma convexa de estados ortogonais (estado classicamente correlacionado), revelam regimes onde os mapas são, ou não, proporcionais à identidade, para estados puros ou clássicos respectivamente. A origem deste efeito, devido à discordia ou ao emaranhamento, fica em aberto.

A existência de correlações no reservatório, anterior às interações com o sistema, impede uma associação imediata com uma sequência de canais. Uma forma de verificar se o mapa da dinâmica pode ser dividido em cada tempo de colisão, é verificar se há um refluxo de informação devido aos efeitos de memória. Esta condição é suficiente para avaliar a não-markovianidade e a medição da distância de Hilbert-Schmidt, para analisar a distância entre dois estados após uma sequência de unitárias controladas, pode ser uma ferramenta importante nesta tarefa. A princípio, o conjunto de estados iniciais que maximiza a medida de não-markovianidade pode ser encontrado através desse esquema. É interessante, e uma proposta para trabalhos futuros, a verificação numérica dessa abordagem.

Outra situação que merece estudos é o caso em que o número de colisões cresce, enquanto o intervalo entre elas diminui para atingir o limite do contínuo. Neste limite o esquema de monitoramento deixa de ser representado por um processo de saltos, passando a ser descrito por um processo difusivo, e seria interessante avaliar como a evolução depende das correlações e das estratégias de monitoramento neste contexto.

Em resumo, o objetivo do trabalho foi estabelecer formalmente alguns quesitos em dinâmica de sistemas abertos através de um modelo simples que contenha os elementos básicos da interação de um sistema com um ambiente. Nesta abordagem há possibilidade de uma estudo analítico e numérico dos efeitos de correlações e memória.

# Referências Bibliográficas

- [1] S. Shenoy A. Devi, A. Rajagopal and R. Rendell. Interplay of quantum stochastic and dynamical maps to discern markovian and non-markovian transitions. *Journal of Quantum Information Science*, 2(3):47–54, 2012.
- [2] Leslie E Ballentine. *Quantum mechanics: a modern development*. World Scientific, 1998.
- [3] Ingemar Bengtsson and Karol Życzkowski. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge University Press, 2006.
- [4] Heinz-Peter Breuer, Elsi-Mari Laine, and Jyrki Piilo. Measure for the degree of non-markovian behavior of quantum processes in open systems. *Phys. Rev. Lett.*, 103:210401, Nov 2009.
- [5] Zihua Guo, Huaixin Cao, and Zhengli Chen. Distinguishing classical correlations from quantum correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(14):145301, 2012.
- [6] L Henderson and V Vedral. Classical, quantum and total correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(35):6899, 2001.
- [7] Richard V Kadison. A generalized schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras. *Annals of Mathematics*, pages 494–503, 1952.
- [8] Elsi-Mari Laine, Jyrki Piilo, and Heinz-Peter Breuer. Measure for the non-markovianity of quantum processes. *Phys. Rev. A*, 81:062115, Jun 2010.
- [9] Shunlong Luo. Using measurement-induced disturbance to characterize correlations as classical or quantum. *Phys. Rev. A*, 77:022301, Feb 2008.
- [10] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.
- [11] Harold Ollivier and Wojciech H. Zurek. Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 88:017901, Dec 2001.

- [12] Masanao Ozawa. Entanglement measures and the hilbert–schmidt distance. *Physics Letters A*, 268(3):158 – 160, 2000.
- [13] Asher Peres. *Quantum theory: concepts and methods*, volume 57. Springer, 1995.
- [14] David Pérez-García, Michael M. Wolf, Denes Petz, and Mary Beth Ruskai. Contractivity of positive and trace-preserving maps under lp norms. *Journal of Mathematical Physics*, 47(8), 2006.
- [15] Tomás Rybár, Sergey N Filippov, Mário Ziman, and Vladimír Buzek. Simulation of indivisible qubit channels in collision models. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 45(15):154006, 2012.
- [16] Michael M. Wolf and J. Ignacio Cirac. Dividing quantum channels. *Communications in Mathematical Physics*, 279(1):147–168, 2008.
- [17] Zhengjun Xi and Yongming Li. Quantum and classical correlations in quantum measurement. *Foundations of Physics*, 43(3):285–293, 2013.
- [18] Mário Ziman and Vladimír Buzek. All (qubit) decoherences: Complete characterization and physical implementation. *Phys. Rev. A*, 72:022110, Aug 2005.
- [19] Mário Ziman, Peter Stelmachovic, and Vladimír Buzek. Description of quantum dynamics of open systems based on collision-like models. *Open Systems & Information Dynamics*, 12(01):81–91, 2005.