

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia de Estruturas

FORMULAÇÕES NÃO-SINGULARES DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADAS A
PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS DE POTENCIAL

AUTORA: JULIANA PASSAGLI DA CRUZ
ORIENTADOR: Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro

Belo Horizonte
Setembro 2001

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia de Estruturas

FORMULAÇÕES NÃO-SINGULARES DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADAS A
PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS DE POTENCIAL

JULIANA PASSAGLI DA CRUZ

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
da Universidade Federal de Minas Gerais, como
requisito parcial para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia de Estruturas

ORIENTADOR: Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro

Belo Horizonte
Setembro 2001

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

***“FORMULAÇÕES NÃO-SINGULARES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
DE CONTORNO APLICADAS A PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS DE
POTENCIAL”***

Juliana Passagli da Cruz

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro
DEES - UFMG - (Orientador)

Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula
DEES - UFMG

Prof. Dr. José Cláudio Faria Telles
COPPE - UFRJ

Prof. Dr. Ney Amorim Silva
DEES - UFMG

Belo Horizonte, 21 de Setembro de 2001

A Deus, que sempre escreve certo por linhas tortas.

A meus pais e ao Weber, que me apoiaram e estiveram comigo o tempo todo.

Agradecimentos

Ao professor Gabriel de Oliveira Ribeiro, que foi um orientador dedicado e sempre disponível para solucionar minhas dúvidas.

Aos professores e funcionários do Departamento de Estruturas que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas que tornaram minha caminhada mais amena.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro oferecido ao longo do último ano.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE TABELAS	iii
LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS	iv
RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
1 – INTRODUÇÃO	1
2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1 – Conceitos de Teoria de Potencial	4
2.2 – Revisão literária.....	5
3 – FORMULAÇÕES NÃO-SINGULARES DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS DE POTENCIAL	9
3.1 – Introdução.....	9
3.2 – Equação Integral de Contorno	10
3.2.1 – Formulação auto-regularizada do potencial.....	14
3.2.2 – Formulação auto-regularizada do fluxo.....	16
4 – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	19
4.1 – Introdução.....	19
4.2 – Discretização	19
4.2.1 – Formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio	25
4.2.2 – Formulação auto-regularizada do potencial.....	28
4.2.3 – Formulação auto-regularizada do fluxo	29
4.3 – Ponto Interno	33

4.4 – Descrição do programa.....	33
5 – RESULTADOS NUMÉRICOS.....	36
6 – CONCLUSÃO.....	73
7 – REFERÊNCIAS.....	78
8 – APÊNDICES.....	A-1

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Definições básicas I.....	10
Figura 3.2 – Definições do domínio do problema	11
Figura 3.3 – Definições básicas II.....	13
Figura 4.1 – Coordenadas parametrizadas dos elementos de contorno	20
Figura 4.2 – Descontinuidade da normal ao contorno	21
Figura 4.3 – Descontinuidade de fluxo	21
Figura 4.4 – Exemplo de discretização com elementos quadráticos.....	22
Figura 4.5 – Pontos de colocação fora do domínio.....	26
Figura 4.6 – Processo de subelementação.....	27
Figura 5.1- Exemplo 1 - geometria.....	36
Figura 5.2- Exemplo 1 - Erro potencial – variação de α	44
Figura 5.3- Exemplo 1 - Erro fluxo – variação de α	44
Figura 5.4- Exemplo 1- potencial nos pontos internos	46
Figura 5.5- Exemplo 1- componente do gradiente na direção x nos pontos internos	47
Figura 5.6- Exemplo 1- componente do gradiente na direção y nos pontos internos	47
Figura 5.7- Exemplo 2 - geometria	48
Figura 5.8- Primeira malha do contorno discretizado - 6 elementos quadráticos	49
Figura 5.9- Formulação padrão com ponto de colocação fora do contorno	51
Figura 5.10- Formulação auto-regularizada do potencial	52
Figura 5.11- Formulação auto-regularizada do potencial com integração logarítmica ...	52
Figura 5.12- Formulação auto-regularizada do fluxo	54
Figura 5.13- Potencial e fluxo para pontos internos	56

Figura 5.14- Exemplo 3 - geometria	57
Figura 5.15- Exemplo 3 – malha com 26 elementos	57
Figura 5.16- Exemplo 3 – Potencial e fluxo na borda inferior	58
Figura 5.17- Exemplo 3 – Fluxo na borda inferior próximo ao ponto singular	59
Figura 5.18- Exemplo 3 – Potencial no trecho OB por meio da formulação auto-regularizada do fluxo para elementos quadráticos – malhas 1 a 5	61
Figura 5.19- Exemplo 3 – Potencial no trecho OB por meio da formulação auto-regularizada do fluxo para elementos quadráticos – malhas 5 a 7	61
Figura 5.20- Derivada tangencial - refinamento elementos quadráticos – formulação auto-regularizada do fluxo - malhas 1 a 5	62
Figura 5.21- Derivada tangencial - refinamento elementos quadráticos – formulação auto-regularizada do fluxo - malhas 5 a 7	63
Figura 5.22- Fluxo – refinamento elementos quadráticos – formulação auto-regularizada do fluxo	64
Figura 5.23- Exemplo 4 - geometria	66
Figura 5.24- Malha para as bordas AB e BC	67
Figura 5.25- Fluxo nas bordas DC e BA, para a primeira malha.....	68
Figura 5.26- Potencial nas bordas BC, ED, EF e FA, para a primeira malha.....	68
Figura 5.27- Legenda	69
Figura 5.28- Refinamento geral das malhas.....	70
Figura 5.29- Malha 3 para as bordas AB e BC – com elementos quadráticos.....	70
Figura 5.30- Refinamento das bordas BA e BC.....	71
Figura 5.31- Refinamento geral 2	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1- Exemplo 1 – Elementos quadráticos	38
Tabela 5.2- Exemplo 1 – Elementos cúbicos	38
Tabela 5.3- Exemplo 1 – Elementos quárticos	39
Tabela 5.4- Formulação padrão – obtida com o programa de Brebbia e Domingues.....	40
Tabela 5.5- Formulação auto-regularizada do potencial com integração logarítmica	40
Tabela 5.6- Formulação auto-regularizada do potencial - transformação de Telles	41
Tabela 5.7- Formulação auto-regularizada do potencial - transformação de Telles	41
Tabela 5.8- Formulação auto-regularizada do potencial - transformação de Telles	42
Tabela 5.9- Formulação auto-regularizada do fluxo	42
Tabela 5.10- Formulação padrão com ponto fora – com subelementação.....	43
Tabela 5.11- Influência da variação de α na formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio com elementos quadráticos.....	43
Tabela 5.12- Exemplo 1 – Elementos quadráticos - pontos internos	45
Tabela 5.13- Exemplo 2 – Formulação padrão com ponto de colocação fora do contorno	50
Tabela 5.14- Exemplo 2 – Formulação auto-regularizada do potencial	51
Tabela 5.15- Exemplo 2 – Formulação auto-regularizada do potencial com integração logarítmica	53
Tabela 5.16 - Exemplo 2 – Formulação auto-regularizada do fluxo	54
Tabela 5.17- Exemplo 3 - Resultados numéricos do potencial no trecho OB	59
Tabela 5.18- Resultados pontos internos	64
Tabela 5.19- Pontos internos próximos ao contorno	65
Tabela 5.20- Detalhe das malhas	67

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

$\bar{\nabla}u$	- gradiente do potencial
\bar{A} e \bar{B}	- colunas da matriz XF
EIC	- Equações Integrais de Contorno
J	- Jacobiano de transformação
m	- número de pontos nodais do elemento
MEC	- Método dos Elementos de Contorno
n	- vetor normal
N	- número de elementos de contorno
N_i	- funções de interpolação ou funções de forma
n_i	- normal local
P	- ponto de colocação no contorno
p	- ponto genérico no interior do domínio
p'	- ponto de colocação fora do domínio
P^I	- ponto de colocação no contorno para formulações do fluxo (gradiente)
q	- fluxo
Q	- ponto de integração do contorno em coordenadas cartesianas
q^*	- derivada da solução fundamental
q^i	-valor nodal de fluxo no contorno
$r(P1,P2)$	- distância entre os pontos P1 e P2
R	- domínio
\bar{R}	- região fora do domínio
S	- contorno que delimita o domínio

T	- ponto auxiliar no contorno
u	- potencial
u^*	- solução fundamental
u^i	- valor nodal de potencial no contorno
VPC	- Valor Principal de Cauchy
$[R]$	- matriz de transformação do sistema local para o sistema global
x^i, y^i	- coordenadas dos nós dos elementos
Δ	- delta de Dirac
η	- coordenadas intrínsecas adimensionais para integração logarítmica de Gauss
ξ	- coordenadas intrínsecas adimensionais para integração de Gauss

RESUMO

Neste trabalho são apresentadas e implementadas três formulações não-singulares do Método dos Elementos de Contorno (MEC) aplicadas a problemas bidimensionais de potencial. Nessas formulações são utilizados elementos isoparamétricos quadráticos, cúbicos e quárticos. A primeira implementação do MEC se baseia na Equação Integral de Contorno (EIC) padrão utilizando pontos de colocação fora do domínio, associada a uma técnica de subelementos. A segunda implementação utiliza a EIC auto-regularizada do potencial, que permanece com uma integral fracamente singular, a qual é avaliada utilizando-se um esquema de quadratura logarítmica ou quadratura gaussiana juntamente com a transformação proposta por Telles. A terceira utiliza a EIC auto-regularizada do fluxo que é uma formulação totalmente regular, mas que exige uma continuidade $C^{1,\alpha}$ das funções densidade. Como essa exigência não é atendida para elementos isoparamétricos utiliza-se o conceito de continuidade relaxada. Três problemas de transmissão de calor e um problema de fluxo de água através do solo foram analisados para avaliar o desempenho dessas formulações, comparando-se os resultados com as soluções analíticas dos problemas ou com os resultados obtidos através da formulação padrão do MEC baseada no valor principal de Cauchy. Com base nos resultados obtidos neste trabalho, pode-se observar que a utilização da formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio fornece valores muito precisos para todos os exemplos analisados. O mesmo ocorre com a formulação auto-regularizada do potencial, onde foram obtidos valores equivalentes àqueles encontrados através da formulação baseada no valor principal de Cauchy. Pode-se observar ainda que é necessária a utilização da formulação auto-regularizada do fluxo com elementos quárticos de forma a se conseguir a mesma precisão obtida ao se utilizar a formulação auto-regularizada do potencial com elementos quadráticos. Dessa forma as formulações não-singulares utilizadas neste trabalho podem ser consideradas como uma alternativa robusta às formulações fortemente singulares para a solução de problemas bidimensionais de potencial.

Palavras Chave: Elementos de Contorno, Formulações auto-regularizadas do MEC, Formulação com ponto de colocação fora do domínio, Subelementação, Teoria de Potencial

ABSTRACT

In this work three non-singular formulations applied to two-dimensional potential problems are presented and implemented. In these formulations quadratic, cubic and quartic isoparametric boundary elements were used. The first formulation is based on the standard BEM with the collocation point outside the domain, associated with a sub-element technique. The second one is the self-regularized potential-BIE that remains with a weakly singular integral, that can be evaluated by means of a logarithmic quadrature or a standard gaussian quadrature together with a particular transformation proposed by Telles. The third formulation is the self-regularized flux-BIE which is fully regular but requires the $C^{1,\alpha}$ continuity of the density functions. This requirement is not satisfied by the isoparametric boundary elements, but it is remedied by adopting the relaxed continuity strategy. Three heat problems and one ground water flow problem have been analyzed and the results were compared with exact solutions or with the results obtained by means of the standard CPV-formulation. The standard formulation with the collocation points outside the domain have presented highly accurate results for all problems analyzed. The same can be seen when using the BEM-potential, that is fully equivalent to the standard CPV-formulation. The flux-BIE required quartic elements to show the same level of accuracy obtained when the BEM-potential with quadratic elements were used. In this way the non-singular BIE formulations used in this work may be considered as robust alternatives to strongly singular BIE formulations for 2-D potential problems.

Keywords: boundary elements, self-regular BEM, formulation with the source point outside the boundary, subelementation, potential theory

1- INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um método numérico que pode ser utilizado para a resolução de diversos problemas de engenharia, tais como, problemas de potencial, acústica, mecânica dos sólidos, mecânica da fratura, geotecnia. Ele se baseia na Equação Integral de Contorno (EIC) do problema onde as incógnitas, no domínio ou no contorno, são descritas apenas em termos dos valores de contorno. Este método possui algumas vantagens sobre os métodos numéricos que discretizam o domínio, como o método dos elementos finitos, pois é necessária a discretização apenas da superfície que delimita o volume do corpo, reduzindo a ordem do problema de uma unidade, e conseqüentemente a quantidade de dados de entrada. Com isso fica mais simples a geração dos dados requeridos para modelar um determinado problema. O MEC foi originalmente desenvolvido para solução da equação de Laplace sendo sua aplicação posteriormente ampliada para problemas de elasticidade e outros.

A formulação tradicional do MEC, possui uma integral fracamente singular e uma integral singular, definida no sentido do valor principal de Cauchy. Nessa formulação usualmente adota-se um algoritmo de regularização local, quando o ponto de colocação situa-se sobre o elemento a ser integrado, obtendo-se dessa forma resultados satisfatórios. No caso das formulações auto-regularizadas, a regularização é feita globalmente na equação integral, ou seja, antes da mesma ser discretizada. Através da utilização da formulação auto-regularizada consegue-se retirar ou diminuir as singularidades, que foram introduzidas artificialmente pela utilização de soluções fundamentais. Isto é possível quando esta singularidade de fato não existe no problema físico.

Neste trabalho, tem-se como objetivo principal trabalhar com as formulações não-singulares do MEC. Apresentam-se os resultados obtidos por meio da aplicação das formulações auto-regularizadas, assim como aqueles obtidos utilizando-se a formulação padrão com o ponto de colocação localizado fora do domínio. A formulação auto-regularizada do potencial permanece com uma integral fracamente singular que pode ser calculada através da utilização da quadratura logarítmica de Gauss ou através da quadratura de Gauss padrão associada à transformação proposta por TELLES (1987). A implementação da formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio permite o cálculo associado à técnica de subelementação ou sem a utilização da mesma. A formulação auto-regularizada do fluxo exige continuidade de Hölder $C^{1,\alpha}$, condição que não é obedecida ao se utilizar elementos isoparamétricos. Foi então utilizado o conceito de “continuidade relaxada”, onde a função densidade possui continuidade de Hölder $C^{1,\alpha}$ apenas na vizinhança do ponto de colocação. A partir dos valores de potencial e fluxo no contorno pode-se calcular, em uma fase de pós-processamento, os valores de potencial e gradiente do potencial para pontos internos através da utilização de formulações padrão e regularizadas.

No capítulo II apresenta-se uma revisão literária sobre o Método dos Elementos de Contorno enfatizando-se o estudo das formulações auto-regularizadas para problemas de potencial. O capítulo III contém a descrição da metodologia utilizada para o estudo das formulações das Equações Integrais de Contorno para problemas bidimensionais de potencial.

No capítulo IV trata-se do Método dos Elementos de Contorno, com a descrição dos diversos aspectos da implementação computacional dos algoritmos utilizados, destacando-se a formulação auto-regularizada do potencial com a implementação da quadratura logarítmica ou da transformação de Telles para o cálculo da integral fracamente singular remanescente, a formulação auto-regularizada do fluxo, que utiliza o conceito de “continuidade relaxada” de forma a possibilitar a utilização de elementos de contorno isoparamétricos que não possuem continuidade $C^{1,\alpha}$, e a rotina da formulação padrão como ponto de colocação fora do domínio que pode ser utilizada com ou sem o auxílio da técnica de subelementação.

No capítulo V são apresentados os exemplos numéricos utilizados para testar as formulações apresentadas e no capítulo VI as conclusões obtidas ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Os resultados obtidos ao longo deste trabalho confirmam a validação das formulações não-singulares para o cálculo dos valores de potencial e fluxo nos pontos do contorno assim como para o cálculo das incógnitas nos pontos internos. A formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio utilizando a técnica de subelementação apresentou resultados muito confiáveis, algumas vezes utilizados como valores de referência para os problemas. Todos os resultados obtidos através da utilização da formulação auto-regularizada do potencial convergiram monotonicamente para a solução exata, mostrando-se equivalentes aos valores obtidos através da formulação padrão baseada no valor principal de Cauchy.

2- REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Conceitos de Teoria de Potencial

Este trabalho se baseia no estudo de formulações não singulares para o cálculo das Equações Integrais de Contorno aplicadas a problemas bidimensionais de potencial. A teoria do potencial estuda o movimento de uma partícula de massa unitária, sujeita a um campo de força \mathbf{F} , que se move de um ponto ξ a um ponto x no espaço; resultando em trabalho do campo de força sobre esta partícula. O trabalho depende do caminho da partícula, porém se o campo for tal que este trabalho seja independente do caminho tem-se um campo conservativo. Quando o campo é gravitacional o potencial é chamado Newtoniano.

KELLOG (1967) estudou a teoria do potencial que é relacionada à equação diferencial de Laplace. Esta equação diferencial governa diversos problemas, tais como, problemas de fluxo de calor em regime permanente num meio homogêneo, problemas de percolação de água e problemas eletromagnéticos.

Por fluxo de calor entende-se o processo pelo qual a energia é transportada. KREITH (1973) estudou os princípios da transmissão de calor e como pode ser visto em seu trabalho a energia é transmitida sempre que existir um gradiente de temperatura no interior de um sistema ou quando dois sistemas com diferentes temperaturas forem colocadas em contato. A primeira lei da termodinâmica diz que a energia não pode ser criada nem destruída, apenas modificada, enquanto pela segunda lei da termodinâmica o calor fluirá dos pontos de temperatura mais alta para os de temperatura mais baixa. Já os problemas de percolação seguem a lei de Darcy e necessitam o estudo dos fluidos. Esse estudo pode ser feito através da utilização da equação de Euler, que recebe a forma da equação de Laplace quando aplicada a fluxo irrotacional de um fluido incompressível.

2.2. Revisão literária

Vários estudos vêm sendo desenvolvidos a respeito do Método dos Elementos de Contorno (MEC). O sucesso do MEC como método numérico desenvolvido a partir das Equações Integrais de Contorno (EIC) se deve às propriedades especiais das soluções fundamentais utilizadas. Em 1963 JASWON (1963) e SYMM (1963) fizeram um estudo das equações integrais de Fredholm, que serviram de base para estudos mais profundos a respeito do método. Jawson lidou com a parte teórica da equação para problemas de potencial, enquanto Symm trabalhou com os procedimentos numéricos e com a solução de problemas de potencial bidimensionais triviais obtendo resultados que convergiram para a solução exata com o aumento do número de elementos utilizados para aproximar o contorno. Segundo ele o valor do número de elementos a serem utilizados é limitado e específico para cada contorno, pois, a partir de um certo valor aparece erro por mal condicionamento. De acordo com suas experiências, um condicionamento ótimo para um dado número de elementos poderia ser melhor obtido mantendo-se constante o intervalo entre os elementos do contorno. RIZZO (1967) fez uma extensão do método das equações integrais de contorno para problemas bidimensionais de elasticidade aproveitando-se da analogia existente entre a teoria do potencial e a elasticidade clássica, tendo também utilizado elementos igualmente espaçados na maioria de seus exemplos, seguindo o que foi observado por SYMM (1963) para os problemas de potencial, porém sugeriu que intervalos desiguais deveriam ser estudados. O número de elementos para aproximar o contorno, a partir do qual a equação fica mal condicionada ainda é desconhecido. Foi Rizzo quem primeiro reconheceu a necessidade de uma avaliação cuidadosa das integrais singulares substituindo a dependência singular por identidades não singulares.

CRUSE (1969) trabalhou com problemas tridimensionais de elasticidade através da utilização de equações integrais singulares. Nesse caso, Cruse adotou uma abordagem analítica dos núcleos singulares, substituindo o contorno real por elementos planos que puderam ser calculados através de integração analítica. Nesse trabalho Cruse observou que refinando apenas um elemento próximo à área de concentração de tensões a solução obtida para os outros elementos não era

seriamente afetada, ou seja, o analista poderia refinar apenas os elementos próximos às áreas onde ocorre esta concentração de tensões sem prejuízo dos resultados. CRUSE (1972) demonstrou detalhadamente o método das Equações Integrais de Contorno (EIC) para as equações de Laplace e de Navier e apresentou, através de resultados numéricos, a habilidade deste método ao se trabalhar com condições de contorno mistas para problemas de potencial. CRUSE (1974) fez uma melhoria do método das EIC para problemas de elasticidade 3-D através do desenvolvimento de um modelo com variação linear dos valores de contorno por meio de uma abordagem analítica correta. A aplicação de elementos de ordem superior utilizou o conceito de movimento de corpo rígido para calcular o termo livre na EIC do problema. LACHAT e WATSON (1976) apresentaram a representação isoparamétrica, que é utilizada até hoje na maioria das implementações das EIC. CRUSE (1977) publicou um trabalho reunindo os pontos mais importantes do método das equações integrais de contorno no qual ele discute duas formas de se obter as soluções das equações integrais bi e tridimensionais para a equação de Laplace; neste trabalho Cruse também apresenta o método das equações integrais para problemas de elasticidade bi e tridimensionais.

BREBBIA et al. (1984), BREBBIA e DOMINGUES (1992) bem como diversos outros autores, utilizaram o método dos resíduos ponderados para obter as equações integrais necessárias à formulação do MEC, o que permitiu relacionar este método às outras técnicas numéricas, facilitando a compreensão do mesmo por quem já fosse familiarizado com as outras técnicas.

HUANG e CRUSE (1993) apresentaram um texto constituído por uma revisão de algumas técnicas numéricas normalmente adotadas para o cálculo das integrais singulares ou quase singulares; este texto é importante devido ao fato da técnica utilizada ser crítica para a obtenção de uma análise eficiente dos elementos de contorno.

As preocupações com a precisão dos esquemas de integração gaussiana continuam até os dias atuais, e muitos pesquisadores tem procurado técnicas para melhorar a precisão e a confiabilidade desses esquemas de integração. O primeiro procedimento de regularização para soluções numéricas foi a expansão de Taylor dos deslocamentos de contorno utilizada por CRUSE e VAN BUREN (1971). A

expansão de Taylor para o operador singular é derivada de uma abordagem de regularização amplamente utilizada no tratamento analítico das soluções de equações integrais. LEAN e WEXLER (1985) sugeriram uma combinação de integração gaussiana ponderada e uma transformação de variáveis para eliminar a singularidade existente em problemas bidimensionais. TELLES (1987) propôs uma alternativa altamente eficiente para a melhoria da precisão da quadratura de Gauss, utilizada na avaliação da integral quase singular, que consiste na utilização de transformações polinomiais de coordenadas, de forma a proporcionar uma distribuição mais uniforme dos pontos de integração para os núcleos singulares. HAYAMI e BREBBIA (1988) utilizaram o método da expansão de Taylor para casos de Valor Principal de Cauchy (VPC) e para casos de quase singularidade. PRADO e TELLES (1991) demonstraram a viabilidade da utilização de uma EIC hipersingular de fluxo para problemas bidimensionais de potencial, trabalhando com nós duplos nos pontos de canto e prescrevendo condições de contorno adicionais relativas a esses nós.

Vários estudos tem sido feitos com a finalidade de se retirar a natureza singular introduzida na formulação das EIC. CRUSE e AITHAL (1993) utilizaram a expansão de Taylor para reduzir as integrais singulares ou quase singulares a funções regulares. CRUSE e SUWITO (1993) desenvolveram uma forma fracamente singular da identidade Somigliana de tensão através de regularização, ou seja, a equação não precisava mais conter os termos fortemente singulares ou hipersingulares. Em 1994, continuando o trabalho de CRUSE e SUWITO (1993), HUANG e CRUSE (1994) desenvolveram uma formulação da EIC de forças de superfície que envolve apenas integrais fracamente singulares para problemas tridimensionais e integrais totalmente regulares para problemas bidimensionais. Segundo eles a interpretação segundo o Valor Principal de Cauchy (VPC) é desnecessária quando se utiliza a formulação regularizada. PRADO e TELLES (1995) fizeram um estudo sobre o efeito da continuidade da derivada do potencial na formulação hipersingular do MEC para problemas bidimensionais de potencial, onde foi verificada que a continuidade dessa derivada é condição necessária para a existência do Valor Principal de Cauchy. MARTIN e RIZZO (1996) concordaram que, apesar de elementos de contorno não obedecerem a condição de continuidade de Hölder $C^{1,\alpha}$ das funções densidade no ponto de colocação, condição suficiente para a existência de integrais

hipersingulares, os conceitos de VPC e Parte Finita de Hadamard poderiam ser evitados; porém salientaram que, se os requisitos de suavidade fossem ignorados, através da utilização de continuidade relaxada, seria difícil prever o que aconteceria com os resultados. CRUSE e RICHARDSON (1996) mostraram a necessidade de se utilizar elementos não conformes para equações hipersingulares através da utilização da tensão média nos nós de canto. A natureza singular foi removida naturalmente por meio de uma formulação analítica apropriada do problema de elasticidade. RICHARDSON et al. (1997) e LUI e CHEN (1998) utilizaram o conceito de continuidade relaxada, no qual a função densidade poderia ser contínua por partes. A classe de algoritmos com regularização relaxada mantém numericamente a relação entre as incógnitas no ponto de colocação e seu estado de regularização de tal forma que a densidade regularizada é $C^{1,\alpha}$ na vizinhança do ponto de colocação. Foi verificado que a regularização relaxada é totalmente consistente com a integração padrão da parte finita de Hadamard para a teoria de elasticidade bidimensional e que a aproximação numérica mantém um comportamento fracamente singular. Em 1999 Cruse e Richardson apresentaram dois trabalhos sobre as formulações regularizadas. O primeiro, CRUSE e RICHARDSON (1999), apresenta resultados sobre problemas bidimensionais de elasticidade, nesse trabalho eles observaram que as formulações regularizadas para forças de superfície necessitam uma ordem de interpolação maior para se obter a mesma precisão da formulação tradicional com ordem inferior, para um mesmo número de graus de liberdade. O segundo, RICHARDSON e CRUSE (1999), apresenta os resultados para problemas tridimensionais de potencial, utilizando o conceito de continuidade relaxada. RIBEIRO e JORGE (2000) apresentaram um trabalho sobre as formulações auto-regularizadas do potencial e do gradiente do potencial para problemas bidimensionais de potencial, apresentando os principais passos para obtenção das mesmas, assim como resultados numéricos para dois exemplos de transmissão de calor. RIBEIRO et al.(2000) calcularam a integral fracamente singular que permanece na formulação auto-regularizada do potencial utilizando quadratura logarítmica e verificaram que esta formulação apresenta resultados totalmente equivalentes aos resultados obtidos através da utilização da formulação padrão do MEC.

3- FORMULAÇÕES NÃO-SINGULARES DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS DE POTENCIAL

3.1- Introdução

Neste capítulo são abordados os pontos principais da teoria das equações integrais de contorno (EIC) para as formulações não-singulares utilizadas neste trabalho. Apresenta-se a equação integral para pontos de colocação fora do domínio, bem como as formulações auto-regularizada do potencial e auto-regularizada do fluxo, visando sua implementação através do MEC.

Para formular as EIC torna-se necessário o emprego das chamadas soluções fundamentais. A solução fundamental utilizada neste trabalho, Eq.3.1, é uma solução bem conhecida, disponível em literatura, que satisfaz a equação de Laplace para domínio infinito. Seu desenvolvimento pode ser visto detalhadamente em CRUSE (1977). Para problemas bidimensionais tem-se

$$u^*(p, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r(p, Q)}\right) \quad (3.1)$$

onde $u^*(p, Q)$ é a solução fundamental e r corresponde à distância entre o ponto de colocação (p) e o ponto onde se busca o valor da solução fundamental (Q) e de sua derivada. A derivada da solução fundamental em relação à normal à superfície que passa através do ponto Q , é expressa por $q^*(p, Q)$.

3.2- Equação Integral de Contorno

A formulação das equações integrais para problemas de potencial se baseia em aspectos tais como a existência de uma solução fundamental para a equação de Laplace e a existência de uma relação recíproca entre duas funções que sejam contínuas e possuam derivada primeira contínua.

A solução fundamental utilizada é a Eq.3.1 e a relação de reciprocidade entre duas funções é obtida através da utilização do teorema da divergência de Gauss tomando-se como operador diferencial a equação de Laplace, que é uma equação diferencial parcial elíptica de segunda ordem, tal como descrito em CRUSE (1977).

O contorno do problema possui condições de contorno essenciais ou naturais especificadas. Para problemas de potencial as condições de contorno essenciais são aquelas correspondentes aos valores de potencial e as condições de contorno naturais correspondem aos valores das derivadas do potencial. Quando o problema possui apenas condições de contorno essenciais prescritas, tem-se um problema de Dirichlet, enquanto que problemas com condições de contorno naturais prescritas, são conhecidos como problemas de Neumann. Os problemas que envolvem condições de contorno essencial e natural são conhecidos como problemas mistos.

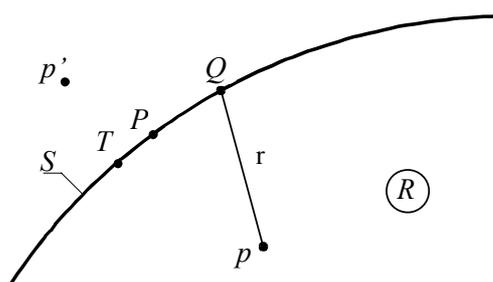


Figura 3.1- Definições básicas I

Neste trabalho S corresponde a um somatório de superfícies suaves, ou seja, superfícies cuja função é contínua para todos os pontos de um contorno fechado, Q representa um ponto de integração no contorno e T é um ponto auxiliar nesse contorno. O ponto de colocação é representado por p quando o mesmo é um ponto

qualquer do domínio, por P quando é um ponto do contorno e por p' quando é ponto fora do domínio, conforme Fig.3.1. A curva fechada S delimita a região bidimensional R , cujo vetor unitário normal n é dirigido para fora de R como pode ser visto na Fig.3.2; onde \bar{R} é a região fora do domínio.

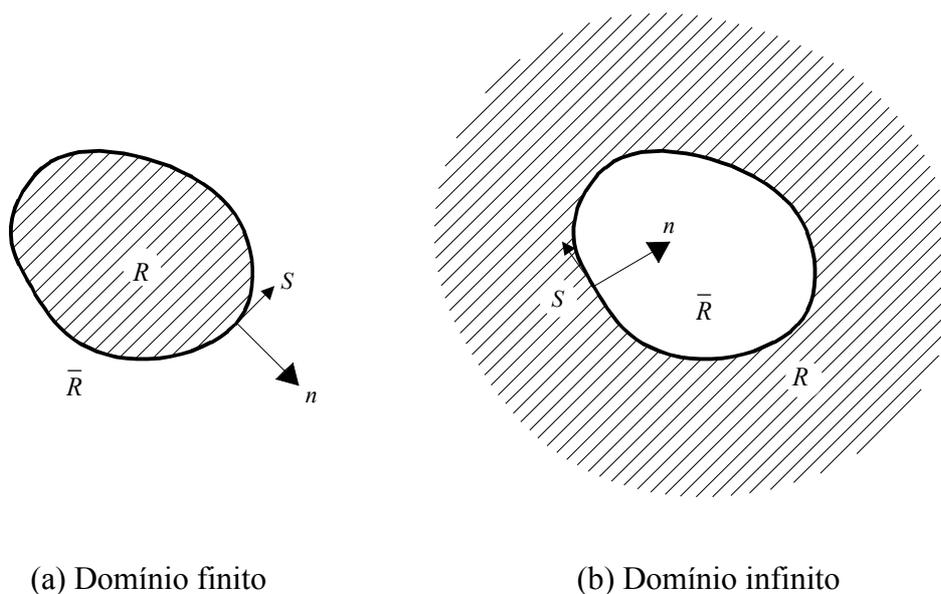


Figura 3.2 – Definições do domínio do problema

Sendo \mathbf{F} uma função contínua com derivada primeira contínua, pode-se aplicar o teorema da divergência de Gauss, que transforma um problema de volume em um problema de superfície e vice-versa. Aplicando-se esse teorema a problemas de potencial com $\mathbf{F} = u\bar{\nabla}u^*$, onde u é correspondente ao potencial e u^* é a solução fundamental, obtém-se a primeira identidade de Green. Aplicando-se novamente o teorema da divergência, agora com $\mathbf{F} = u^*\bar{\nabla}u$, obtém-se uma equação que, subtraída da primeira identidade de Green leva à segunda identidade de Green:

$$\int_R (u\bar{\nabla}^2 u^* - u^*\bar{\nabla}^2 u) dV = \int_s \left(u \frac{du^*}{dn} - u^* \frac{du}{dn} \right) dS \quad (3.2)$$

Como a solução fundamental satisfaz a equação de Laplace, tem-se que

$$\bar{\nabla}^2 u^* + \Delta(p, Q) = 0$$

onde $\Delta(p, Q)$ é a função delta de Dirac.

$$\bar{\nabla}^2 u^* = -\Delta(p, Q) \quad (3.3)$$

Multiplicando a Eq.3.3 por u e integrando-a no domínio tem-se

$$\int_R [u \bar{\nabla}^2 u^*] dV = \int_R [u [-\Delta(p, Q)]] dV = -u(p) \quad (3.4)$$

Aplicando-se a Eq.3.4 juntamente com a equação de Laplace, $\bar{\nabla}^2 u = 0$ na segunda identidade de Green, Eq.3.2, e considerando que a derivada do potencial em relação à normal pode ser expressa por

$$\frac{du}{dn} = q = \bar{\nabla} u \cdot \bar{n}$$

tem-se

$$-u(p) = \int_S [u(Q)q^*(p, Q)] dS - \int_S [u^*(p, Q)q(Q)] dS$$

ou

$$u(p) + \int_S [u(Q)q^*(p, Q)] dS = \int_S [u^*(p, Q)q(Q)] dS \quad (3.5)$$

no domínio R .

Quando a derivada do potencial em relação à normal é multiplicada por uma constante, tem-se o que se chama fluxo.

Por um processo de limites o ponto p é levado ao contorno, alterando-se o contorno original conforme Fig.3.3-a e fazendo o limite do raio (ϵ) dessa nova superfície tender a zero. Esse desenvolvimento é apresentado por CRUSE (1977), e a Eq. 3.5 fica na forma:

$$cu(P) + \int_S [u(Q)q^*(P,Q)]dS = \int_S [u^*(P,Q)q(Q)]dS \quad (3.6)$$

É sabido que o coeficiente c vale

$$c = \frac{\theta}{2\pi}$$

sendo θ o ângulo interno em radianos, num ponto de colocação, conforme Fig.3.3-b.

Para superfície suave tem-se $\theta = \pi$ e $c = 1/2$, para pontos internos $c = 1$ e para pontos externos $c = 0$.

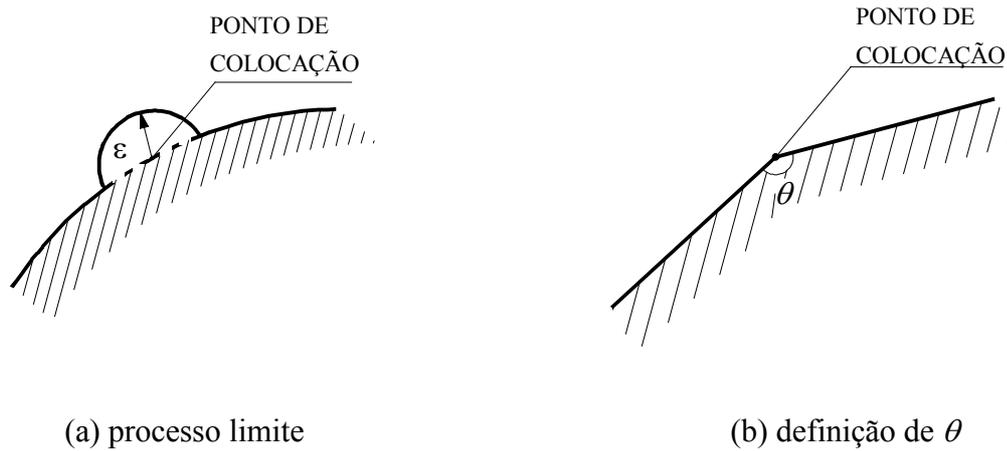


Figura 3.3 – Definições básicas II

Estendendo a Eq.3.6 para um ponto p' fora do domínio, ou seja, em \bar{R} , e lembrando que neste caso $c = 0$, obtém-se a equação a ser implementada ao se utilizar a formulação da EIC com ponto de colocação fora do domínio

$$\int_S [u(Q)q^*(p',Q)]dS = \int_S [u^*(p',Q)q(Q)]dS \quad \forall p' \in \bar{R} \quad (3.7)$$

3.2.1- Formulação auto-regularizada do potencial

As formulações auto-regularizadas para problemas bidimensionais de potencial apresentadas aqui foram deduzidas por RIBEIRO e JORGE (2000), seguindo um procedimento análogo ao adotado por CRUSE e RICHARDSON (2000) para regularizar as EIC para problemas tridimensionais de potencial. A formulação auto-regularizada do potencial é uma formulação parcialmente regular, pois permanece com uma integral fracamente singular de natureza logarítmica. O processo de regularização exige que a variável de campo (potencial) atenda à condição de continuidade de Hölder $u(p) \in C^{0,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, o que normalmente ocorre nos problemas práticos.

Neste trabalho são apresentadas apenas as etapas fundamentais para o entendimento do processo de regularização da equação integral do contorno para problemas de potencial.

Partindo-se da equação integral de contorno apresentada na Eq.3.5, reescrevendo-se q por $\vec{\nabla} u \cdot \vec{n}$ e substituindo-se u^* pelo valor da solução fundamental bidimensional, Eq.3.1, obtém-se a seguinte equação que representa o potencial num ponto genérico p no interior do domínio R :

$$2\pi u(p) = - \int_S u(Q) \vec{\nabla} \ln \left(\frac{1}{r(p,Q)} \right) \cdot \vec{n}(Q) dS + \int_S \vec{\nabla} u(Q) \cdot \vec{n}(Q) \ln \left(\frac{1}{r(p,Q)} \right) dS \quad \forall p \in R \quad (3.8)$$

Esta é a representação integral padrão para pontos internos. A formulação do gradiente do potencial pode ser representada pela seguinte equação:

$$2\pi \vec{\nabla}_p u(p) = - \int_S [u(Q) \left[\frac{d}{dn} \nabla_p \ln \left(\frac{1}{r(p,Q)} \right) \right]] dS + \int_S \vec{\nabla} u(Q) \cdot \vec{n}(Q) \vec{\nabla}_p \ln \left(\frac{1}{r(p,Q)} \right) dS \quad (3.9)$$

onde $\vec{\nabla}_p$ é o operador gradiente para o campo que, quando aplicado a um potencial $r(p, Q)$, tem a seguinte propriedade:

$$\vec{\nabla}_p r(p, Q) = -\vec{\nabla}_Q r(p, Q) = -\vec{\nabla} r(p, Q) \quad (3.10)$$

na Eq.3.10, quando o operador não possui índice significa gradiente em relação a Q .

A Eq.3.8 pode ser estendida para um ponto p' fora do domínio, obtendo-se

$$0 = -\int_s u(Q) \vec{\nabla} \ln\left(\frac{1}{r(p', Q)}\right) \cdot \vec{n}(Q) dS + \int_s \vec{\nabla} u(Q) \cdot \vec{n}(Q) \ln\left(\frac{1}{r(p', Q)}\right) dS \quad (3.11)$$

A identidade de Green é diferente para pontos no interior do domínio e pontos no contorno, sendo portanto descontínua. Sendo a função campo $u(p)$, contínua no sentido de Hölder, tal como apresentado anteriormente ($u(p) \in C^{0,\alpha}$ para $0 < \alpha \leq 1$) a mesma pode ser regularizada, eliminando-se a descontinuidade na representação do potencial. A regularização é feita através da soma e subtração da integral singular $u(T) \int_s \vec{\nabla} \left(\ln \frac{1}{r(p, Q)} \right) \cdot \vec{n}(Q) dS$, calculada num ponto de colocação no contorno (T), Fig.3.1, de forma a remover a descontinuidade na equação integral do potencial, antes da mesma ser discretizada, sendo obtida dessa forma a seguinte equação:

$$2\pi u(p) = -u(T) \int_s \vec{\nabla} \ln\left(\frac{1}{r(p, Q)}\right) \cdot \vec{n}(Q) dS - \int_s [u(Q) - u(T)] \vec{\nabla} \ln\left(\frac{1}{r(p, Q)}\right) \cdot \vec{n}(Q) dS + \int_s \vec{\nabla} u(Q) \cdot \vec{n}(Q) \ln\left(\frac{1}{r(p, Q)}\right) dS \quad (3.12)$$

onde $\ln \frac{1}{r(p, Q)}$ é o potencial Newtoniano que é descontínuo quando $p \rightarrow T$. A primeira integral da Eq.3.12 é então expressa em termos do ângulo de varredura que vale 2π para qualquer ponto $p \in R$, em um contorno fechado.

Após a substituição do ângulo de varredura, a identidade de Green auto-regularizada é dada pela seguinte equação:

$$2\pi u(p) = 2\pi u(T) - \int_s [u(Q) - u(T)] \bar{\nabla} \ln\left(\frac{1}{r(p, Q)}\right) \cdot \bar{n}(Q) dS + \int_s \bar{\nabla} u(Q) \cdot \bar{n}(Q) \ln\left(\frac{1}{r(p, Q)}\right) dS \quad (3.13)$$

Nessa equação todos os termos singulares foram cancelados naturalmente. A primeira integral da Eq.3.13 é totalmente regular, enquanto a segunda integral é fracamente singular. Mesmo assim, essa equação é considerada auto-regularizada. Quando $p \rightarrow T$, obtém-se a seguinte equação:

$$0 = - \int_s [u(Q) - u(T)] \frac{d}{dn} \ln\left(\frac{1}{r(T, Q)}\right) dS + \int_s \frac{du}{dn} \Big|_s \ln\left(\frac{1}{r(T, Q)}\right) dS \quad (3.14)$$

Essa equação é contínua para qualquer $T \in S$ incluindo pontos angulosos. Segundo Ribeiro e Jorge (2000), o processo de limite para a obtenção da equação integral de contorno para pontos externos leva a uma equação idêntica à equação acima, mostrando que a representação do potencial é contínua para todos os pontos de contorno nos quais a variável do campo $u(p) \in C^{0, \alpha}$ sendo $0 < \alpha \leq 1$.

3.2.2- Formulação auto-regularizada do fluxo

O gradiente do potencial no ponto interno p , é calculado a partir Eq.3.13

$$2\pi \bar{\nabla}_p u(p) = - \int_s [u(Q) - u(T)] \left[\frac{d}{dn} \bar{\nabla}_p \ln\left(\frac{1}{r(p, Q)}\right) \right] dS + \int_s \bar{\nabla} u(Q) \cdot \bar{n}(Q) \bar{\nabla}_p \ln\left(\frac{1}{r(p, Q)}\right) dS \quad (3.15)$$

sendo $\vec{\nabla}_p$ o operador gradiente para o campo, que possui a propriedade apresentada pela Eq.3.10. A equação a seguir representa a forma indicial da Eq.3.15, onde as derivadas dos potenciais envolvidas são todas em termos do ponto Q , tendo sido efetuadas as trocas convenientes de sinais.

$$2\pi u(p)_{,i} = \int_S [u(Q) - u(T)] \ln\left(\frac{1}{r(p,Q)}\right)_{,ij} n_j(Q) dS - \int_S \vec{\nabla}u(Q) \cdot \vec{n}(Q) \ln\left(\frac{1}{r(p,Q)}\right)_{,i} dS \quad (3.16)$$

Nessa equação as duas integrais contêm singularidade forte resultando numa representação descontínua do gradiente do potencial $u(p)$. O primeiro integrando é hipersingular e contém derivadas normal e tangencial do potencial Newtoniano. A formulação auto-regularizada é obtida através da soma e subtração de um gradiente constante, que corresponde à subtração de um campo potencial linear dado por:

$$u^L(Q) = u(T) + u_{,i}|_T [x_i(Q) - x_i(T)]$$

O gradiente desse campo linear é dado por

$$\vec{\nabla}u^L(Q) = \vec{\nabla}u(T)$$

Seguindo os procedimentos apresentados por Jorge et al. (2001) e Cruse e Richardson (2000), obtém-se a seguinte equação

$$2\pi u(p)_{,i} = 2\pi u(T)_{,i} + \int_S [u(Q) - u^L(Q)] \ln\left(\frac{1}{r(p,Q)}\right)_{,ij} n_j(Q) dS - \int_S [\vec{\nabla}u(Q) - \vec{\nabla}u(T)] \cdot \vec{n}(Q) \ln\left(\frac{1}{r(p,Q)}\right)_{,i} dS \quad (3.17)$$

Essa equação é também chamada identidade de Green auto-regularizada do gradiente do potencial para um ponto interno. Ela é regular para todos os pontos

internos próximos ao contorno, inclusive em regiões de canto onde a condição de continuidade $u(p) \in C^{l,\alpha}$, é satisfeita. A equação a seguir é a equação integral de contorno auto-regularizada, obtida quando $p \rightarrow Q$:

$$0 = \int_S [u(Q) - u^L(Q)] \ln \left(\frac{1}{r(T, Q)} \right)_{,ij} n_j(Q) dS - \int_S [\vec{\nabla}u(Q) - \vec{\nabla}u(T)] \cdot \vec{n}(Q) \ln \left(\frac{1}{r(T, Q)} \right)_{,i} dS \quad (3.18)$$

Essa equação é válida para todo ponto de contorno que satisfaz a condição $u(p) \in C^{l,\alpha}$, em qualquer ponto $Q \equiv T$. Ela é uma equação vetorial, e representa duas equações para problemas bidimensionais, uma para cada direção dos eixos coordenados de referência, sendo dessa forma super-especificada. É necessário portanto escolher uma das equações. A formulação normalmente escolhida é obtida através da projeção do vetor gradiente do potencial na direção da normal operando-se sobre o sistema de equações com a normal local $n_i(T)$; essa é a equação que usualmente produz melhores resultados numéricos conforme enfatizado por RICHARDSON e CRUSE (1999). Operando-se com a normal no ponto obtém-se a identidade de fluxo de Green para a teoria de potencial:

$$0 = n_i(T) \int_S [u(Q) - u^L(Q)] \ln \left(\frac{1}{r(T, Q)} \right)_{,ij} n_j(Q) dS - n_i(T) \int_S [\vec{\nabla}u(Q) - \vec{\nabla}u(T)] \cdot \vec{n}(Q) \ln \left(\frac{1}{r(T, Q)} \right)_{,i} dS \quad (3.19)$$

4- IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1- Introdução

No capítulo anterior, foi apresentada a formulação básica do Método dos Elementos de Contorno, assim como as formulações integrais de contorno auto-regularizadas para problemas bidimensionais de potencial. Neste capítulo será apresentada a aproximação numérica para as mesmas, utilizando elementos isoparamétricos quadráticos, cúbicos e quárticos. A implementação é realizada para problemas com domínio finito representados pela Fig.3.2-a.

4.2- Discretização

O contorno S , que delimita o domínio sobre o qual o problema é formulado, é dividido em segmentos finitos denominados elementos de contorno, que são aproximados por um esquema de interpolação previamente definido, com base nas coordenadas de pontos nodais situados sobre o contorno real. Analogamente, os valores de potencial e fluxo são aproximados por funções de interpolação apropriadas definidas em termos dos respectivos valores nodais de contorno. As funções de interpolação são também chamadas funções de forma. No caso de elementos de contorno isoparamétricos, tais como os adotados neste trabalho, as funções para aproximar a geometria são as mesmas utilizadas para aproximar os valores de contorno. Podem ser aplicados diferentes tipos de elementos; neste trabalho utilizam-se elementos quadráticos, cúbicos e quárticos, Fig. 4.1.

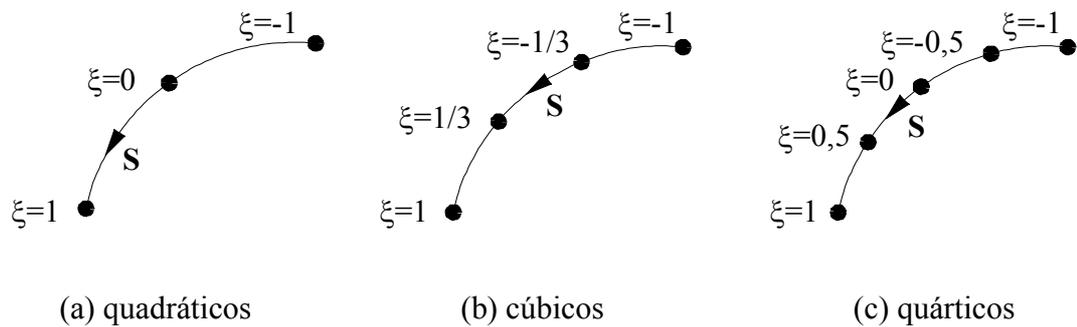


Figura 4.1 – Coordenadas parametrizadas dos elementos de contorno

Todos os elementos acima possuem geometria curva. Os elementos quadráticos possuem três nós, sendo um em cada extremidade do elemento e o terceiro no meio do elemento; nesse caso portanto o potencial e o fluxo possuem uma variação quadrática ao longo do elemento. Nos elementos cúbicos existem quatro nós, sendo dois nas extremidades e os outros dois situados a cada terço do elemento; nesses elementos os valores de potencial e fluxo possuem uma variação cúbica. Os elementos quárticos possuem cinco nós, sendo dois de extremidade e os outros três localizados de forma a se ter um nó no meio do elemento e os outros dois a um quarto das extremidades. Nesse caso os valores de potencial e fluxo possuem variação quártica ao longo do elemento. Geralmente, ao se aumentar o grau do polinômio utilizado, a precisão dos resultados melhora, isto é, costuma-se obter resultados melhores com elementos quárticos do que com elementos quadráticos ou cúbicos.

A interseção entre dois elementos deve receber uma atenção especial, pois o potencial é contínuo na maioria dos casos práticos de interesse, ao passo que o fluxo geralmente não o é. Ocorre descontinuidade do fluxo quando se possui descontinuidade da normal ao contorno, ou seja, as normais possuem direções diferentes para os elementos que concorrem no nó, como pode ser verificado nos nós de pontos angulosos, Fig.4.2. A descontinuidade do fluxo também ocorre quando se tem descontinuidade da condição de contorno, ou seja, quando o fluxo, mesmo prescrito em contorno suave, apresenta descontinuidade, Fig.4.3. O algoritmo que está sendo utilizado neste trabalho admite descontinuidades da normal ao contorno e ou das condições de contorno, utilizando um único nó nos cantos, permitindo

prescrever valores de fluxo diferentes nos elementos anterior e posterior ao nó compartilhado. Pode-se prescrever também o fluxo na extremidade de um desses elementos e o potencial, que é contínuo, na extremidade do outro elemento.

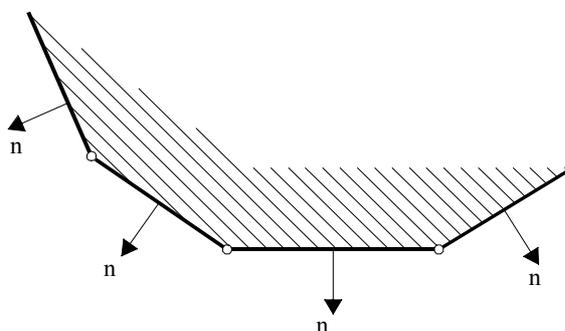


Figura 4.2 – Descontinuidade da normal ao contorno

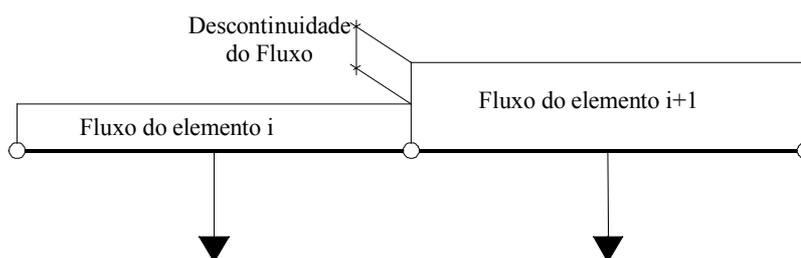


Figura 4.3 – Descontinuidade de fluxo

Quando se tem um nó de canto, podem ocorrer quatro casos diferentes, dependendo das condições de contorno do problema. A primeira possibilidade é quando o fluxo é prescrito antes e depois do canto, tendo-se como incógnita o potencial. A segunda possibilidade é potencial e fluxo do elemento anterior prescritos; nesse caso a incógnita será o fluxo do elemento seguinte. Se o potencial e o fluxo do elemento seguinte forem prescritos, a incógnita será o fluxo do elemento anterior. Caso o único valor prescrito seja o potencial, tem-se duas incógnitas que serão os fluxos do elemento anterior e posterior; nesse caso pode-se calcular uma normal média unitária e obter o fluxo para ela, ou utilizar o conceito de ponto fora, Fig.4.5, no qual os pontos são afastados da posição real para se obter os valores a partir deles.

As implementações feitas neste trabalho foram realizadas em Fortran 77 partindo de um programa desenvolvido por RIBEIRO, JORGE e CRUSE para

problemas bidimensionais da teoria de potencial baseado nas formulações auto-regularizadas do potencial e do fluxo. As implementações foram feitas de modo que através do programa final, o usuário é capaz de resolver problemas bidimensionais de potencial utilizando formulação das EIC padrão com ponto de colocação fora do domínio com base na Eq.3.7, formulação auto-regularizada do potencial, Eq.3.14, ou formulação auto-regularizada do fluxo, Eq.3.19.

A formulação com ponto de colocação fora do domínio pode ou não ser associada à técnica de subelementação, que está apresentada na seção 4.2.1. A formulação auto-regularizada do potencial permanece com uma integral fracamente singular que pode ser calculada através da utilização da transformação proposta por TELLES (1987) ou por meio de um esquema de quadratura logarítmica. Para a formulação auto-regularizada do fluxo é feito um estudo da influência da derivada tangencial do potencial sobre os valores obtidos.

Como resultado obtêm-se os valores de potencial e fluxo para todos os nós do contorno. A partir desses valores, são obtidos, em uma etapa de pós-processamento, os valores do potencial e do seu gradiente para pontos internos com a utilização de formulações clássicas, Eq.3.8 e Eq.3.9, ou formulações regularizadas, Eq.3.13 e 3.17.

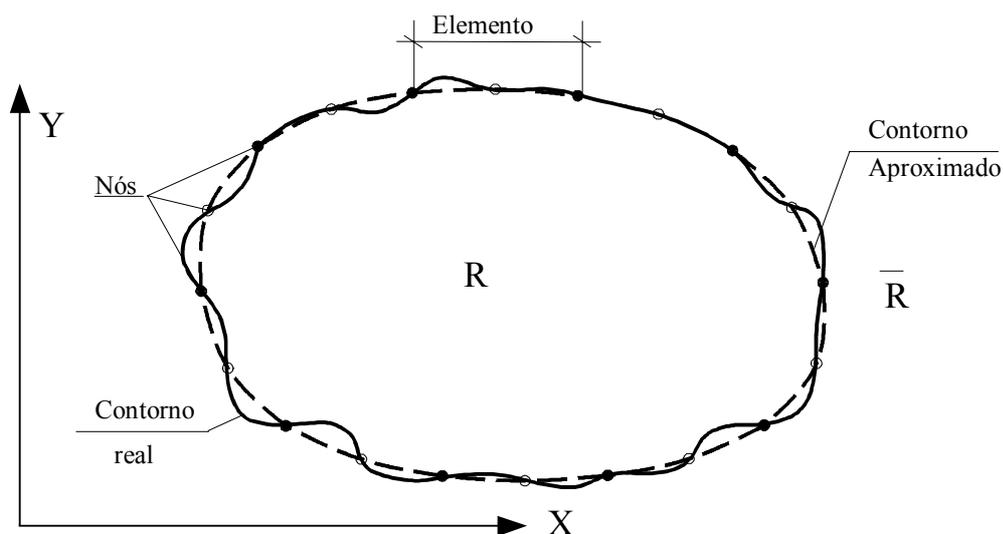


Figura 4.4 – Exemplo de discretização com elementos quadráticos

A Fig.4.4 apresenta um domínio discretizado com elementos quadráticos, que são aqueles elementos constituídos por três nós, sendo dois de extremidade, que pertencem a dois elementos e um nó interno, localizado no meio do elemento. O contorno aproximado é composto por elementos calculados utilizando função quadrática.

A geometria é aproximada pela seguinte relação

$$\begin{aligned} x(Q) &\approx x(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi)x^i \\ y(Q) &\approx y(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi)y^i \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde x^i e y^i representam as coordenadas dos nós do elemento, m corresponde ao número de pontos nodais do elemento que vale três, quatro ou cinco para elementos quadráticos, cúbicos ou quárticos, respectivamente, e $N_i(\xi)$ são as funções de interpolação.

Os valores de potencial e fluxo no contorno são aproximados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} u(Q) &\approx u(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi)u^i \\ q(Q) &\approx q(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi)q^i \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde u^i e q^i representam respectivamente os valores nodais de potencial e fluxo no contorno.

As coordenadas curvilíneas de um ponto genérico do elemento de contorno são parametrizadas em função das coordenadas dos nós de extremidade, através de coordenadas locais homogêneas ξ , apresentadas na Fig.4.1, que variam de -1 a 1 . Essas coordenadas parametrizadas são necessárias quando se utiliza quadratura de Gauss padrão para o cálculo das integrais envolvidas, sendo J o Jacobiano de

transformação que relaciona a coordenada adimensional ξ com a coordenada curvilínea S de forma que o comprimento dS corresponda a aproximadamente $|J| d\xi$.

Para os elementos utilizados, as funções de forma ficam expressas respectivamente por:

Elementos quadráticos:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\ N_2 &= (1 - \xi)(1 + \xi) \\ N_3 &= \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Elementos Cúbicos:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(\xi - 1)(1 - 9\xi^2)}{16} \\ N_2 &= \frac{9(1 - 3\xi)(1 - \xi^2)}{16} \\ N_3 &= \frac{9(1 + 3\xi)(1 - \xi^2)}{16} \\ N_4 &= \frac{(\xi + 1)(9\xi^2 - 1)}{16} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Elementos quárticos:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(\xi + 0,5)\xi(\xi - 0,5)(\xi - 1)}{1,5} \\ N_2 &= \frac{(\xi + 1)\xi(\xi - 0,5)(\xi - 1)}{-0,375} \\ N_3 &= \frac{(\xi + 1)(\xi + 0,5)(\xi - 0,5)(\xi - 1)}{0,25} \\ N_4 &= \frac{(\xi + 1)\xi(\xi + 0,5)(\xi - 1)}{-0,375} \\ N_5 &= \frac{(\xi + 0,5)\xi(\xi - 0,5)(\xi + 1)}{1,5} \end{aligned} \quad (4.5)$$

A partir das considerações anteriores a equação integral de contorno, Eq.3.6 discretizada é expressa como:

$$\begin{aligned}
c u(P) + \sum_{k=1}^N \int_{\Delta S_k} u(Q) \vec{\nabla} \ln \left(\frac{1}{r(P, Q)} \right) \cdot \vec{n}(Q) dS(Q) \\
= \sum_{k=1}^N \int_{\Delta S_k} \vec{\nabla} u(Q) \cdot \vec{n}(Q) \ln \left(\frac{1}{r(P, Q)} \right) dS(Q)
\end{aligned} \quad (4.6)$$

onde $Q = f(\xi)$ e N é o número de elementos do contorno

Quando o ponto de colocação se localiza sobre o elemento que está sendo integrado, a primeira integral possui termos singulares envolvendo a derivada da solução fundamental e a integral do segundo termo da equação possui termos fracamente singulares. Existem inúmeras técnicas para resolver essa equação. Tradicionalmente utiliza-se uma regularização local através de movimento de corpo rígido para o cálculo da primeira integral; a segunda integral pode ser calculada através de integração logarítmica ou através da transformação proposta por TELLES (1987).

Uma alternativa para eliminar o problema da singularidade é a utilização de pontos de colocação fora do domínio. Nesse processo são criados pontos de colocação correspondentes a cada ponto do contorno afastados da posição real na direção da normal ao elemento a que ele pertence, de forma que o valor de r seja sempre diferente de zero. Outra forma de se evitar o problema da singularidade é a regularização das equações integrais de contorno, antes da discretização das mesmas, conforme apresentado nas seções 3.2.1 e 3.2.2.

4.2.1- Formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio

Discretizando a Eq.3.11, para pontos de colocação fora do domínio, de forma análoga à Eq.4.6, obtém-se

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{k=1}^N \left(- \int_{\Delta S_k} u(Q) \vec{\nabla} \ln \left(\frac{1}{r(p', Q)} \right) \cdot \vec{n}(Q) dS(Q) \right) \\
+ \sum_{k=1}^N \left(\int_{\Delta S_k} \vec{\nabla} u(Q) \cdot \vec{n}(Q) \ln \left(\frac{1}{r(p', Q)} \right) dS(Q) \right)
\end{aligned} \quad (4.7)$$

Nessa equação, p' é o ponto de colocação fora do domínio, conforme Fig.4.5. Esse ponto se situa a uma distância $d = \alpha L$, onde α é uma constante a ser definida pelo usuário de forma a posicionar o ponto de colocação mais próximo, quando seu valor for muito pequeno, ou mais distante do contorno, e L é o comprimento do elemento. O ponto p' está localizado na direção da normal ao elemento no ponto considerado, quando o ponto de colocação pertence a um só elemento. Quando dois elementos concorrem no nó, ou seja, quando o ponto considerado coincide com nó de extremidade, o ponto de colocação passa a se localizar na direção da normal média dos elementos que concorrem no nó e L passa a valer Lm que corresponde ao comprimento médio desses elementos. Os pontos de colocação são correspondentes aos pontos de contorno, existindo tantos pontos de colocação quanto forem os pontos do contorno.

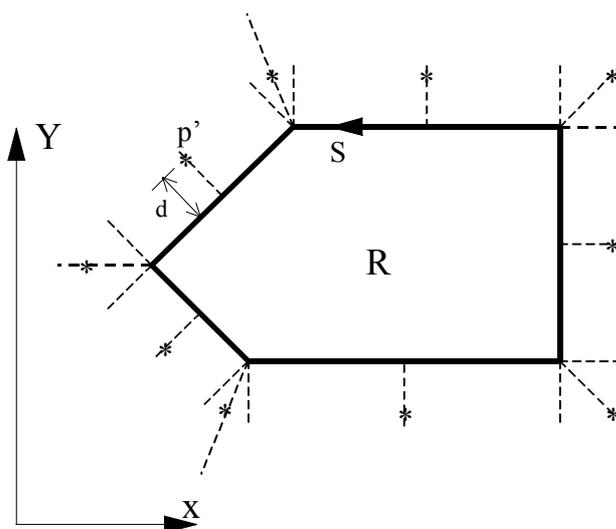


Figura 4.5 – Pontos de colocação fora do domínio

A implementação é feita aplicando-se diretamente a Eq.3.11, sem preocupação com singularidades. Porém, quando o valor de α é muito pequeno, o ponto de colocação se aproxima do contorno, ocorrendo uma tendência de quase singularidade, gerando imprecisões na integração dos elementos adjacentes ao ponto.

Essas imprecisões numéricas podem ser evitadas por meio de uma técnica de subelementação, tal como adotado em SILVA (1996).

A técnica de subelementação consiste na subdivisão do ou dos elementos que contêm o ponto do contorno correspondente ao ponto de colocação considerado, quando o ponto de integração se localiza sobre um desses elementos. Essa subdivisão é feita de forma que o comprimento do primeiro subelemento seja igual a d , isto é, igual à distância do ponto de colocação ao contorno. Os demais subelementos terão comprimento igual à distância entre o ponto de colocação e a extremidade do último subelemento calculado, conforme pode ser visto na Fig.4.6. Esse cálculo é feito até obter-se o último subelemento, onde é feita a seguinte verificação: caso o comprimento desse último elemento seja maior ou igual a 40% do comprimento do penúltimo elemento, ele é mantido; caso contrário, o último subelemento desaparece e seu comprimento é dividido proporcionalmente entre os subelementos anteriores. Cada subelemento é então integrado normalmente através da quadratura de Gauss padrão. A subelementação permite a utilização de pontos fora muito próximos ao contorno com resultados confiáveis.

O cálculo do comprimento infinitesimal de elementos curvos é dado por $ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$, que em coordenadas intrínsecas corresponde a $ds = |J| d\xi$. O

comprimento dos subelementos pode então ser calculado como $s = \int_{-1}^1 |J| d\xi$.

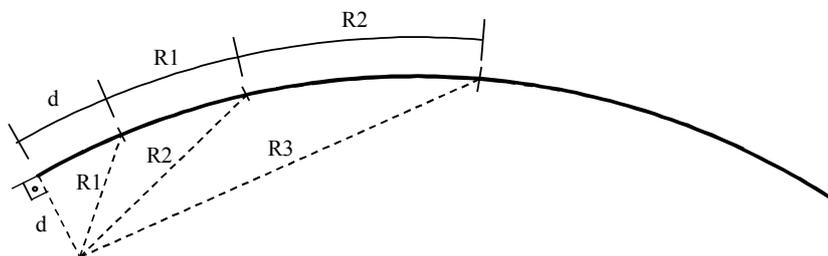


Figura 4.6 – Processo de subelementação

4.2.2- Formulação auto-regularizada do potencial

A forma discretizada da equação integral auto-regularizada do potencial, é obtida com base no processo de aproximação anteriormente descrito, utilizando-se esquemas de interpolação quadráticos, cúbicos e quárticos.

$$0 = -\sum_{k=1}^N \int_{\Delta S_k} [u(Q) - u(P)] \ln\left(\frac{1}{r(p, Q)}\right)_{,j} n_j(Q) dS(Q) + \sum_{k=1}^N \int_{\Delta S_k} \vec{\nabla}u(Q) \cdot \vec{n}(Q) \ln\left(\frac{1}{r(P, Q)}\right) dS(Q) \quad (4.8)$$

Essa equação é parcialmente regularizada, pois a regularização é feita somente sobre a primeira integral, que era originalmente singular. A primeira integral da equação é totalmente regular e é avaliada por meio de quadratura gaussiana padrão, enquanto a segunda integral permanece fracamente singular e não necessita nenhuma regularização para ser calculada, porém sua correta avaliação numérica depende da forma como ela está sendo calculada devido à natureza logarítmica da solução fundamental do problema bidimensional.

Nesse trabalho foi feita a implementação da quadratura logarítmica para avaliação da integral fracamente singular utilizando elementos quadráticos, cúbicos e quárticos, seguindo procedimentos análogos aos apresentados por BREBBIA et al. (1984).

Ao se utilizar quadratura logarítmica para resolver a integral fracamente singular, é necessário fazer outra transformação obtendo uma coordenada intrínseca η , que varia de 0 a 1, que são os limites de integração desse esquema, isto é:

$$\int_0^1 f(\eta) \ln \frac{1}{\eta} d\eta = \sum_{i=1}^n f(\eta_i) w_i \quad (4.9)$$

onde n é igual ao número de pontos de integração, η_i é a coordenada adimensional do i -ésimo ponto de integração e w_i é o fator ponderador.

O processo de transformação é apresentado detalhadamente no Apêndice 1. Esse processo gera uma integral fracamente singular avaliada por meio de quadratura

logarítmica e integrais não singulares avaliadas por um esquema de quadratura de Gauss padrão. Situações distintas ocorrem quando o ponto de colocação coincide com as extremidades do elemento ou com os pontos internos, para cada tipo de interpolação considerada.

Uma alternativa altamente eficiente, que permite utilizar apenas quadratura de Gauss na avaliação numérica das integrais da Eq.4.8 é a utilização da transformação proposta por TELLES (1987). Essa transformação melhora a precisão da quadratura de Gauss para a avaliação da integral quase singular relocando os pontos de integração próximos ao ponto singular. Essa alternativa também foi implementada neste trabalho para os três elementos considerados.

4.2.3- Formulação auto-regularizada do fluxo

A formulação auto-regularizada do fluxo, descrita pela Eq.3.19, é discretizada seguindo a mesma metodologia adotada anteriormente

$$0 = \sum_{k=1}^N n(P) \int_{\Delta S_k} [u(Q) - u^L(Q)] \ln\left(\frac{1}{r(P, Q)}\right)_{,ij} n_j(Q) dS(Q) - \sum_{k=1}^N n(P) \int_{\Delta S_k} [\vec{\nabla}u(Q) - \vec{\nabla}u^L(Q)] \cdot \vec{n}(Q) \ln\left(\frac{1}{r(P, Q)}\right)_{,i} dS(Q) \quad (4.10)$$

A implementação dessa equação se baseia no conceito de “continuidade relaxada”, ou seja, a densidade regularizada possui continuidade de Hölder $C^{1,\alpha}$ apenas na vizinhança do ponto de colocação, não estando garantida a continuidade no ponto. Esse conceito é adotado devido ao fato dos elementos utilizados neste trabalho serem isoparamétricos conformes, não preservando a continuidade de Hölder $C^{1,\alpha}$, que é requerida para a validade da formulação auto-regularizada do fluxo. Segundo MARTIN e RIZZO (1996), se os requisitos de suavidade forem ignorados é difícil prever matematicamente o que irá acontecer, pois apesar da regularização permitir evitar os conceitos de Valor Principal de Cauchy (VPC) ou da Parte Finita de Hadamard (PFH), a suavidade requerida é exatamente a mesma da equação original; por outro lado, RICHARDSON et al.(1997) utilizaram o conceito de “continuidade relaxada” para a teoria de elasticidade bidimensional concluindo

que a regularização relaxada é totalmente consistente com a interpretação padrão da parte finita de Hadamard e que a aproximação numérica mantém um comportamento fracamente singular, obtendo resultados convergentes sob refinamento das malhas. Em 1999, Cruse e Richardson obtiveram excelentes resultados ao aplicar a formulação regularizada com “continuidade relaxada” a problemas bidimensionais da elasticidade, inclusive para pontos no domínio quando estes se aproximam do contorno.

A formulação auto-regularizada do fluxo requer uma representação explícita do gradiente para pontos no contorno. Esse gradiente é obtido através de uma combinação vetorial da derivada tangencial local do potencial no contorno e do fluxo em cada nó do elemento, como será explicado a seguir. Neste trabalho o cálculo da componente tangencial do gradiente está sendo realizado localmente com base na interpolação do potencial sobre o elemento do contorno de forma a evitar que as derivadas tangenciais sejam incluídas como novas variáveis do problema. Essa aproximação é feita com base no esquema de interpolação sobre o elemento, Eq.4.2

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \approx \frac{1}{J} \sum_{i=1}^m N'_i(\xi) u^i \quad (4.11)$$

sendo $N'_i = \frac{dN}{d\xi}$ e u^i o vetor de valores nodais do potencial no elemento.

Conseqüentemente a derivada tangencial tem ordem um grau inferior ao do esquema de interpolação no elemento.

As derivadas normal e tangencial do potencial, conhecidas ou incógnitas, são referidas ao sistema local do elemento, sendo portanto necessário fazer um mapeamento, de forma a se obter essas derivadas no sistema global, que serão necessárias para exprimir o gradiente do potencial no sistema global, ou seja

$$\vec{\nabla} u = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \right]^T \quad (4.12)$$

Como pode ser visto no Apêndice 2, as componentes do gradiente no sistema global correspondem a

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} q \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} \end{Bmatrix}$$

Onde

$$[R] = \begin{pmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad [R] = \begin{bmatrix} \bar{B}(\xi) & \bar{A}(\xi) \end{bmatrix}$$

Sendo

$$\bar{A}(\xi) = \begin{Bmatrix} -\frac{n_2}{J} \\ \frac{n_1}{J} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{B}(\xi) = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Dessa forma, o gradiente do potencial pode ser escrito como

$$\bar{\nabla}u(Q) \approx \bar{\nabla}u(\xi_Q) = \bar{A}(\xi_Q) \sum_{i=1}^m N'_i(Q) u^i + \bar{B}(\xi_Q) \sum_{i=1}^m N_i F^i \quad (4.14)$$

Quando o elemento I , que compartilha o ponto de colocação P^I , está sendo integrado, os termos para a auto-regularização da equação integral, Eq.4.10, são dados pela expansão de Taylor para o potencial da seguinte forma

$$\begin{aligned} u^L(Q) &= u(P^I) + \bar{\nabla}u(P^I) \cdot (\bar{Q} - P^I) \\ \bar{\nabla}u^L(Q) &= \bar{\nabla}u(P^I) \end{aligned} \quad (4.15)$$

sendo $\bar{\nabla}u(P^I)$ calculado sobre o elemento ΔS_I .

Quando o elemento que está sendo integrado não compartilha o ponto de colocação P^I , os termos para a auto-regularização da equação integral, Eq.4.10, são dados por

$$\begin{aligned}
u^L(Q) &= \frac{1}{2}[u(P^I) + \bar{\nabla}u(P^I) \cdot (\bar{Q} - P^I) + u(P^J) + \bar{\nabla}u(P^J) \cdot (\bar{Q} - P^J)] \\
\bar{\nabla}u^L(Q) &= \frac{1}{2}[\bar{\nabla}u(P^I) + \bar{\nabla}u(P^J)]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

sendo portanto o gradiente regularizador, a média de $\nabla u(P^I)$ e $\nabla u(P^J)$. Caso o ponto de colocação esteja no interior do elemento o valor de $\nabla u(P^I)$ é único. Dessa forma o gradiente para o I -ésimo elemento é calculado usando a Eq.4.14 e a expansão de coordenadas naquele elemento. O potencial é contínuo no ponto de colocação e as funções densidade

$$\begin{aligned}
u(Q) - u^L(Q) \\
\bar{\nabla}u(Q) - \bar{\nabla}u^L(Q)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

são de ordem $r^2(P, Q)$ e $r(P, Q)$, respectivamente. Conforme Richardson et al. (1996), o algoritmo do MEC proporciona a condição de regularidade requerida para que a EIC seja limitada, embora a condição de continuidade $C^{l, \alpha}$ do potencial não seja atendida.

Os gradientes regularizadores na Eq.4.10, calculados da forma descrita anteriormente, são univocamente definidos no ponto de colocação P^I , no modelo analítico, porém não são únicos no algoritmo do MEC baseado na condição de “continuidade relaxada”. Valores calculados com base nos valores nodais e na interpolação sobre o elemento são usados localmente para avaliação das integrais sobre os elementos que compartilham o ponto de colocação P . O valor médio nodal em P é adotado para a regularização das integrais dos demais elementos de contorno que não compartilham esse ponto de colocação.

O algoritmo que está sendo utilizado neste trabalho admite descontinuidades da normal ao contorno Fig.4.2, e ou das condições de contorno Fig.4.3, utilizando um único nó nos cantos, permitindo prescrever valores de fluxo diferentes nos elementos anterior e posterior ao nó compartilhado. Pode-se prescrever o fluxo na extremidade de um desses elementos e o potencial, que é contínuo, na extremidade do outro elemento.

4.3- Ponto Interno

O cálculo do potencial e do respectivo gradiente para os pontos internos é feito em uma etapa de pós-processamento utilizando os valores obtidos para o contorno. Neste trabalho esse cálculo está sendo feito através da utilização de formulações padrão e regularizada. As formulações padrão para cálculo dos valores de potencial e gradiente do potencial para pontos internos correspondem às Eq.3.8 e 3.9 do capítulo anterior, enquanto as formulações regularizadas correspondem às Eq.3.13 e 3.17. O cálculo de todas as integrais é feito através de quadratura de Gauss padrão. Espera-se obter melhores resultados ao se utilizar a formulação regularizada, principalmente quando os pontos internos se aproximam dos pontos do contorno, pois neste caso ocorre uma tendência de quase singularidade na formulação padrão, gerando imprecisões na integração dos elementos, o que não ocorre na formulação regularizada.

4.4- Descrição do programa

O programa final é composto pela rotina principal e por 46 sub-rotinas, que são utilizadas para calcular problemas bidimensionais de potencial com domínio finito, Fig. 3.2-a. Como resultado obtêm-se os valores incógnitos de potencial e fluxo para os pontos do contorno, e potencial e gradiente do potencial para pontos internos. O tipo de formulação a ser utilizado é escolhido pelo usuário, sendo oferecidas as seguintes opções:

a- Formulação auto-regularizada do potencial com transformação de Telles, para tratar a integral fracamente singular remanescente, Eq.4.8;

b- Formulação auto-regularizada do potencial com integração logarítmica, para tratar a integral fracamente singular, Eq.4.8;

c- Formulação auto-regularizada do fluxo, Eq.4.10;

d- Formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio sem subelementação, Eq.4.7;

e- Formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio com subelementação, Eq.4.7.

Neste programa é utilizado o esquema de quadratura de Gauss padrão para o cálculo de todas as integrais, exceto a integral fracamente singular quando for escolhida a opção com quadratura logarítmica.

As sub-rotinas principais do programa são descritas resumidamente a seguir, enquanto a forma de utilização do programa e a descrição do arquivo de dados são apresentados no Apêndice 3.

PMAIN é a rotina principal para problemas de potencial através da utilização das formulações auto-regularizada do potencial, auto-regularizada do fluxo ou formulação padrão com ponto de colocação localizado fora do domínio. Nessa rotina são definidos os números-limites do programa, como dimensões das matrizes e vetores utilizados no mesmo. A escolha da formulação é feita através da tela, quando o tipo da formulação é armazenado na variável IKIND. Caso seja escolhida formulação auto-regularizada do potencial ($IKIND = 0$), o usuário poderá optar pelo cálculo da integral fracamente singular, remanescente na formulação, através de transformação de Telles ($IKIND0 = 0$) ou através de integração logarítmica ($IKIND0 = 1$). Caso seja escolhida a formulação padrão com o ponto de colocação fora do domínio ($IKIND = 2$), o usuário poderá optar por utilizar a técnica de subelementação ($IKIND2 = 1$) ou por não utilizá-la ($IKIND2 = 0$). Após essa escolha o usuário deverá fornecer o valor de ALFA que, ao ser multiplicado pelo comprimento do elemento, corresponderá à distância do ponto de colocação em relação ao contorno, na direção normal ao elemento. A formulação auto-regularizada do fluxo possui apenas uma forma de cálculo e portanto não é fornecida nenhuma opção para o usuário. Após a escolha da formulação e da entrada das particularidades de cada uma, o programa requer o nome dos arquivos de dados e de saída.

O arquivo de dados é o mesmo para qualquer formulação escolhida pelo usuário, uma vez que os dados específicos para cada formulação em particular já foram fornecidos através da tela. A organização dos arquivos de dados e a forma de se utilizar o programa são fornecidos no Apêndice 3.

A rotina principal chama a subrotina POTBEM que é uma rotina específica para o programa de potencial. Ela é a principal rotina do programa após a PMAIN. A POTBEM chama a POTREAD, que obtém os dados necessários para a execução do programa. Depois chama a POTCOL, que seleciona as rotinas específicas para fazer

a integração numérica para cada formulação e também fornece as coordenadas do ponto de colocação, sendo ele no contorno ou fora do mesmo, de acordo com a formulação a ser utilizada. Na POTBEM também são chamadas as rotinas relacionadas com a solução do sistema de equações e é feito um reposicionamento dos resultados para a impressão correta dos resultados. Se o problema possuir pontos internos é aqui também que as rotinas para o cálculo de potencial e gradiente do potencial serão chamadas, em uma fase de pós-processamento. Nessa rotina ainda é questionado ao usuário se o mesmo deseja calcular a derivada tangencial isoladamente.

As subrotinas ADISPOT2, ADISPOT3, ADISPOT40, ADISPOT41, PALOCINT e PDISTINT calculam numericamente as integrais de contorno e todos os coeficientes da matriz do sistema, sendo específicas para problemas de potencial e são chamadas pela POTCOL de acordo com a forma de integração escolhida pelo usuário. A ADISPOT2 é utilizada quando o usuário opta pelo cálculo via formulação auto-regularizada do potencial com a integral fracamente singular calculada através de transformação de Telles. A ADISPOT3 é utilizada para a mesma formulação anterior, porém com utilização de quadratura logarítmica. Caso o usuário opte pela utilização da formulação padrão com ponto de colocação localizado fora do domínio, existem duas opções: cálculo sem subelementação, que é feito a partir da subrotina ADISPOT40 e cálculo com subelementação através da ADISPOT41. As subrotinas PALOCINT e PDISTINT são específicas para o cálculo via formulação auto-regularizada do fluxo, sendo a primeira utilizada quando o ponto de colocação compartilha o elemento que está sendo integrado e a segunda quando o ponto de colocação não compartilha o elemento que está sendo integrado.

O coeficiente de condutividade térmica k é assumido como 1. Este problema possui solução analítica exata conhecida, onde o potencial varia linearmente em uma direção quando y é mantido constante. Os valores de potencial e fluxo são dados respectivamente por

$$u(x) = -50x + 300$$

e

$$q = -k \frac{du}{dn} = \pm 50$$

O contorno do problema foi discretizado com malhas de quatro elementos quadráticos, cúbicos e quárticos respectivamente, as mais simples possíveis para cada tipo de elemento. As malhas são compostas por um elemento em cada lado do quadrado, onde foram obtidos os valores de potencial e fluxo para todos os pontos do contorno. Foram obtidos também os valores de potencial e gradiente do potencial para cinco pontos internos. As Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 apresentam o erro máximo observado dos valores do potencial e do fluxo no contorno em relação à solução exata para cada formulação utilizada, sendo 10^{-14} um valor próximo à solução exata, considerando-se o cálculo via computador, com precisão dupla. O valor de α usado para o cálculo da posição do ponto de colocação quando se utiliza a formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio foi adotado igual a 0,25.

Nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3, tem-se que:

FPPFSS - Formulação Padrão com Ponto Fora - sem subelementação

FPPFCS - Formulação Padrão com Ponto Fora - com subelementação

FARP12 - Formulação Auto-regularizada do Potencial - com Transformação de Telles e 12ptos de Gauss para o cálculo da integral fracamente singular

FARP20 - Formulação Auto-regularizada do Potencial - com Transformação de Telles e 20 pto de Gauss para o cálculo da integral fracamente singular

FARP40 - Formulação Auto-regularizada do Potencial - com Transformação de Telles e 40 pto de Gauss para o cálculo da integral fracamente singular

FARPIL - Formulação Auto-regularizada do Potencial - com Integração Logarítmica

FARFLU- Formulação Auto-regularizada do Fluxo

Tabela 5.1: Exemplo 1 – Elementos quadráticos

Formulação	Pontos integração	Erro do potencial (%)	Erro do fluxo (%)
FPPFSS	12	0,002308	-0,015400
FPPFCS	12	1,27E-11	1,45E-10
FARP12	12	$<10^{-14}$	0,474241
FARP20	20	$<10^{-14}$	0,107162
FARP40	40	$<10^{-14}$	0,004670
FARPIL	12	$<10^{-14}$	-2,18E-09
FARFLU	12	6,66E-13	1,18E-11

A Tabela 5.1 apresenta os erros de potencial e fluxo para cada formulação, com elementos quadráticos. O número de graus de liberdade neste caso foi igual a oito, enquanto a ordem de integração foi igual a 12. Para a formulação auto-regularizada do potencial com transformação de Telles, foi estudada uma variação do número de pontos de integração local, podendo-se observar um aumento da precisão dos resultados de fluxo com o aumento do número de pontos de integração. O melhor resultado de potencial foi obtido utilizando-se a formulação auto-regularizada do potencial, tanto com a transformação proposta por Telles, como com integração logarítmica.

Tabela 5.2: Exemplo 1– Elementos cúbicos

Formulação	Pontos integração	Erro do potencial (%)	Erro do fluxo (%)
FPPFSS	12	0,002285	0,004043
FPPFCS	12	1,35E-11	9,72E-10
FARP12	12	-0,032974	-0,672037
FARP20	20	0,000734	0,014895
FARP40	40	-0,00148	-0,030746
FARPIL	12	4,47E-08	-2,18E-09
FARFLU	12	5,00E-13	-5,80E-12

Na Tabela 5.2 são apresentados os resultados obtidos com elementos cúbicos e 12 graus de liberdade. Foram utilizados 12 pontos de integração. No caso da transformação proposta por Telles, foi feita uma variação desse número adotando-se 12, 20 e 40 pontos de integração sendo constatada uma melhora dos resultados ao se utilizar 20 pontos. É possível observar também que a formulação auto-

regularizada do fluxo foi a que apresentou os melhores resultados ao se utilizar elementos cúbicos.

Tabela 5.3: Exemplo 1– Elementos quárticos

Formulação	Pontos integração	Erro do potencial (%)	Erro do fluxo (%)
FPPFSS	12	0,006052	-0,145883
FPPFCS	12	1,67E-09	8,45E-08
FARP12	12	-0,008376	-0,724053
FARP20	20	0,006852	-0,098076
FARP40	40	-0,002021	-0,054517
FARPIL	12	-2,25E-06	-2,31E-06
FARFLU	12	4,00E-13	1,08E-11

A Tabela 5.3 contém os resultados obtidos ao se utilizar elementos quárticos para aproximar a geometria e os valores de contorno. A formulação auto-regularizada do fluxo foi a que apresentou melhores resultados, tanto para potencial quanto para fluxo.

Nesse problema não ocorrem erros de interpolação da geometria do contorno; a aproximação da geometria é feita de forma exata. A aproximação dos valores de contorno também é feita de forma exata, a menos de erros de integração. Pode-se observar que as formulações auto-regularizada do potencial com integração logarítmica, auto-regularizada do fluxo e formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio com subelementação foram as que apresentaram os melhores resultados para os três elementos analisados. A formulação padrão com ponto de colocação fora do contorno mostrou-se muito efetiva, apresentando uma melhora significativa quando associada à técnica de subelementação descrita na seção 4.2.1. Para a formulação auto-regularizada do potencial com transformação de Telles, o estudo da influência do aumento do número de pontos de integração para o cálculo da integral fracamente singular mostra um aumento da precisão dos resultados quando o número de pontos de integração utilizado para a avaliação dessa integral é maior ou igual a 20 em relação aos resultados obtidos com 12 pontos. Percebe-se ainda que, todos os erros encontrados nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 foram inferiores a 1%.

A seguir são apresentados alguns resultados obtidos para a malha de elementos quadráticos com os diversos algoritmos implementados, onde foi feita uma variação do número de pontos de integração de 4 a 12.

Para as Tabelas 5.4 e 5.5 o número de pontos de integração logarítmica foi mantido constante igual a 12, ao passo que o número de pontos de Gauss padrão variou de 4 a 12. Fez-se essa distinção devido ao fato de ter sido observado ao longo dos estudos, que a variação do número de pontos de integração logarítmica, no intervalo de 4 a 12 pontos, não alterava o resultado.

Na Tabela 5.4 estão apresentados os resultados para a formulação padrão baseada no Valor Principal de Cauchy, obtidos com o programa de BREBBIA e DOMINGUES (1992).

Tabela 5.4: Formulação padrão – obtida com o programa de Brebbia e Domingues

Pontos Integração Padrão	Erro no Potencial (%)	Erro no Fluxo (%)
4	$<10^{-14}$	0,011344903
8	$<10^{-14}$	1,21629E-05
10	$<10^{-14}$	-1,84017E-07
12	$<10^{-14}$	2,17700E-09

Na Tabela 5.5 são apresentados os valores de erro percentual do potencial e do fluxo para a formulação auto-regularizada do potencial com a integral fracamente singular calculada com integração logarítmica.

Tabela 5.5: Formulação auto-regularizada do potencial com integração logarítmica

Pontos Integração Padrão	Erro no Potencial (%)	Erro no Fluxo (%)
4	$<10^{-14}$	0,011344903
8	$<10^{-14}$	1,21629E-05
10	$<10^{-14}$	-1,84017E-07
12	$<10^{-14}$	2,17700E-09

É possível perceber que a formulação auto-regularizada do potencial com integração logarítmica é totalmente equivalente à formulação padrão do MEC. Ao se

variar o número de pontos de integração logarítmica de 4 a 12, o resultado não se altera, tendo sido obtidos os mesmos resultados apresentados nas Tabelas 5.4 e 5.5

A Tabela 5.6 contém os resultados obtidos ao se utilizar transformação de Telles para o cálculo da integral fracamente singular remanescente na formulação auto-regularizada do potencial. Nesse caso fez-se uma variação tanto do número de pontos de integração local quanto do número de pontos da integração geral. Por integração local considera-se a integração dos elementos que possuem o ponto de colocação, ao passo que integração geral se refere ao cálculo dos elementos que não possuem o ponto de colocação.

Tabela 5.6: Formulação auto-regularizada do potencial - transformação de Telles

Pontos Integração Padrão – local e geral	Erro no Potencial (%)	Erro no Fluxo (%)
4	$<10^{-14}$	-11,89777918
8	$<10^{-14}$	-1,531600332
10	$<10^{-14}$	-0,807252755
12	$<10^{-14}$	-0,47650113

Para a obtenção da Tabela 5.7, manteve-se o número de pontos de integração local igual a 12 e variou-se o número de pontos de integração geral de 4 a 12, verificando-se que o resultado não se altera.

Tabela 5.7: Formulação auto-regularizada do potencial - transformação de Telles

Pontos Integração Padrão geral	Erro no Potencial (%)	Erro no Fluxo (%)
4	$<10^{-14}$	-0,46518
8	$<10^{-14}$	-0,47678
10	$<10^{-14}$	-0,47650
12	$<10^{-14}$	-0,47650

A Tabela 5.8 é composta pelos valores de erro obtidos mantendo-se o número de pontos de integração geral igual a 12 e variando-se o número de pontos de integração local. Nesse caso o número de pontos de integração local influenciou de forma significativa os resultados, havendo uma redução dos erros à medida que o número de pontos de integração local aumentou de 4 a 12, sendo da mesma ordem

dos valores obtidos na Tabela 5.6. O erro do fluxo, que era de -11,91% com 4 pontos de integração, caiu para -0,48 ao se utilizar 12 pontos.

Tabela 5.8: Formulação auto-regularizada do potencial - transformação de Telles

Pontos Integração Padrão local	Erro no Potencial (%)	Erro no Fluxo (%)
4	$<10^{-14}$	-11,9102
8	$<10^{-14}$	-1,5316
10	$<10^{-14}$	-0,8073
12	$<10^{-14}$	-0,4765

A utilização da formulação auto-regularizada do potencial com transformação de Telles apresentou resultados praticamente iguais ao manter-se o número de pontos de integração local fixo e variar-se o número de pontos de integração geral; entretanto, os resultados foram muito sensíveis à variação do número de pontos de integração local.

Na Tabela 5.9 são apresentados os erros de potencial e fluxo para a formulação auto-regularizada do fluxo. Todos os resultados apresentados são praticamente exatos, dentro do limite de precisão do computador; apresentando um comportamento comparável ao de polinômio.

Tabela 5.9: Formulação auto-regularizada do fluxo

Pontos Integração Padrão	Erro no Potencial (%)	Erro no Fluxo (%)
4	$<10^{-14}$	-1,39888E-12
8	$<10^{-14}$	-3,9968E-13
10	$<10^{-14}$	1,40998E-12
12	-6,66134E-13	-1,17906E-11

A Tabela 5.10 contém os erros percentuais calculados através dos resultados fornecidos pela formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio, associada à técnica de subelementação, onde percebe-se que, com 12 pontos de integração, os valores de fluxo e de potencial foram praticamente exatos.

Tabela 5.10: Formulação padrão com ponto fora – com subelementação

Pontos Integração Padrão	Erro no Potencial (%)	Erro no Fluxo (%)
4	0,002516784	0,037755317
8	3,58171E-07	-2,41082E-07
10	-2,39201E-09	5,95939E-09
12	1,26787E-11	-6,5592E-11

Para a formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio foi estudada a variação do valor de α . Os resultados são apresentados na Tabela 5.11.

Tabela 5.11: Influência da variação de α na formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio com elementos quadráticos

α	Com subelementação		Sem subelementação	
	Erro no Potencial (%)	Erro no Fluxo (%)	Erro no Potencial (%)	Erro no Fluxo (%)
1,00E-15	0,3922736	0,53383	-164,9180033	524,59766
1,00E-07	-0,0133714	4,42597	-	-
1,00E-04	-0,4569736	19,67965	-	-
1,00E-03	-3,5667E-10	3,54E-09	-	-
0,00150	-2,14230269	31,59631	-214,27837317	547,09650
0,02000	-3,06644E-11	2,34660E-09	-	-
0,02040	-2,46692E-11	2,31760E-09	-	-
0,02050	-13,5298260	29,93228	-71,9589842	193,41057
0,02500	-20,2075073	360,61087	-	-
0,03000	-25,7628894	310,79534	-	-
0,04000	-12,4072071	171,54789	-	-
0,05000	64,1323749	503,78525	-14,6928771	48,62307
0,06000	58,5164822	2526,55038	-9,0954159	30,99125
0,06030	-171,6026604	2495,53291	-	-
0,06034	-171,1242153	2492,91004	-	-
0,060345	2,85338E-10	-3,85003E-10	-	-
0,06100	2,85993E-10	-3,66596E-10	-8,67602672	29,63092142
0,06500	2,85338E-10	-2,96208E-10	-	-
0,07000	2,78666E-10	-4,48797E-10	-	-
0,08000	2,51343E-10	-6,65201E-10	-3,598444006	12,68464631
0,09000	2,09999E-10	-7,71383E-10	-	-
0,10000	1,65334E-10	-8,00404E-10	-1,455688848	5,2383667
0,25000	-1,26787E-11	6,5592E-11	-0,002308166	0,009510101
0,5000	<10-14	-9,99201E-13	-2,59827E-07	1,31083E-06
1,0000	<10-14	-4,996E-12	-6,66134E-13	5,9952E-13

A variação de α foi feita de 10^{-15} a 1. Essa variação significa que a nova posição do ponto de colocação está a uma distância perpendicular ao contorno variando de $10^{-15}C$ a $1C$, onde C corresponde ao comprimento médio dos elementos que contêm o ponto correspondente ao ponto de colocação. Para esse estudo foi utilizada a mesma malha de elementos quadráticos adotada anteriormente e 12 pontos de integração. Os erros percentuais do potencial e do fluxo em relação ao valor de α são apresentados graficamente nas Fig.5.2 e Fig.5.3, respectivamente.

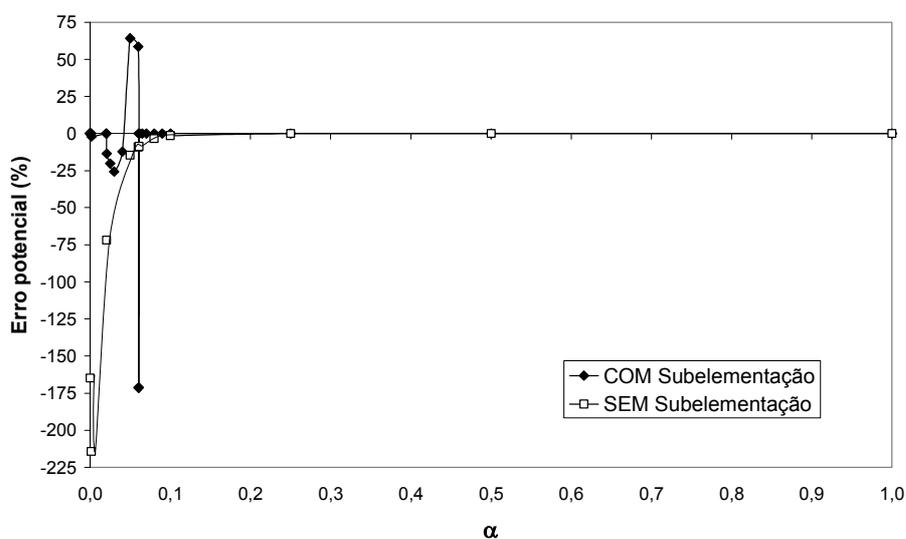


Figura 5.2 – Exemplo 1 – Erro potencial – variação de α

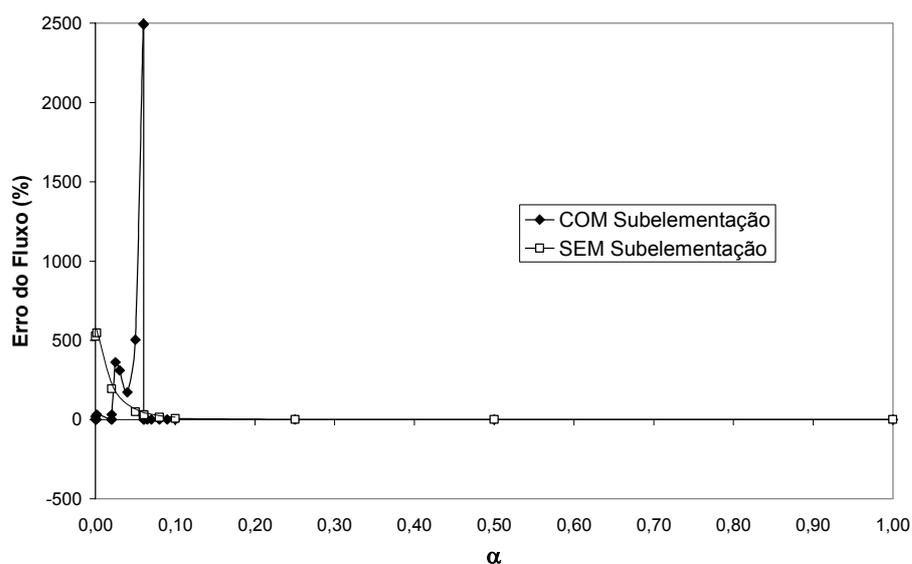


Figura 5.3 – Exemplo 1 – Erro fluxo – variação de α

Analisando a Tabela 5.11 e as Fig.5.2 e 5.3 pode-se concluir que a formulação com ponto fora apresenta resultados muito mais precisos quando associada à técnica de subelementação. Pode-se perceber resultados muito precisos para valores de α na faixa de 6 a 100 % do comprimento do elemento, entretanto nota-se a ocorrência de um mal comportamento para valores de α na faixa de 2,05 a 6,034 %, gerando resultados com precisão muito ruim.

O programa calcula também os valores de potencial e gradiente do potencial para os pontos internos a partir das formulações padrão (Eq.3.8 e 3.9) e regularizada (Eq.3.13 e 3.17), sendo as incógnitas do contorno calculadas através das formulações auto-regularizadas do potencial e do fluxo. Na Tabela 5.12 são apresentados os valores de erro em relação à solução exata para pontos internos utilizando elementos quadráticos. Foram calculados os erros para os pontos internos apresentados na Fig.5.1, de coordenadas (2;2), (3;3), (4;2), (2;4) e (4;4). O maior erro encontrado é apresentado na Tabela 5.12.

Tabela 5.12: Exemplo 1 – Elementos quadráticos – pontos internos

Formulação	Pontos integração	erro do potencial (%)	Erro do gradiente direção x (%)
FARPIL-PIP	12	-1,59E-05	-2,10E-05
FARPIL-PIR	12	-1,25E-05	3,15E-10
FARFLU-PIP	12	-1,59E-05	-2,10E-05
FARFLU-PIR	12	-1,25E-05	7,99E-13

Onde

FARPIL - Formulação Auto-regularizada do Potencial - com Integração Logarítmica

FARFLU - Formulação Auto-regularizada do Fluxo

PIP - Ponto Interno calculado através da formulação Padrão

PIR - Ponto Interno calculado através da formulação Regularizada.

A formulação regularizada (Eq.3.13 e 3.17) mostrou-se altamente eficaz para o cálculo dos valores dos pontos internos, como pode ser visto na Tabela 5.12, ao se comparar resultados de um mesmo algoritmo de solução do contorno. O valor do gradiente foi mais sensível ao tipo da formulação utilizada.

A Fig.5.4 apresenta os resultados de potencial para pontos internos obtidos por meio da equação padrão (Eq.3.8) e da equação regularizada (Eq.3.13), enquanto os resultados para o gradiente nesses pontos, obtidos através das Eq.3.9 e Eq.3.15, são apresentados nas figuras Fig.5.5 e Fig.5.6.

Foram calculados valores ao longo de linhas paralelas ao eixo horizontal, nas posições $y = 0,3$; $y = 1$ e $y = 3$, aproximando-se os pontos internos do contorno de forma a se verificar o comportamento quase singular, que ocorre na formulação padrão.

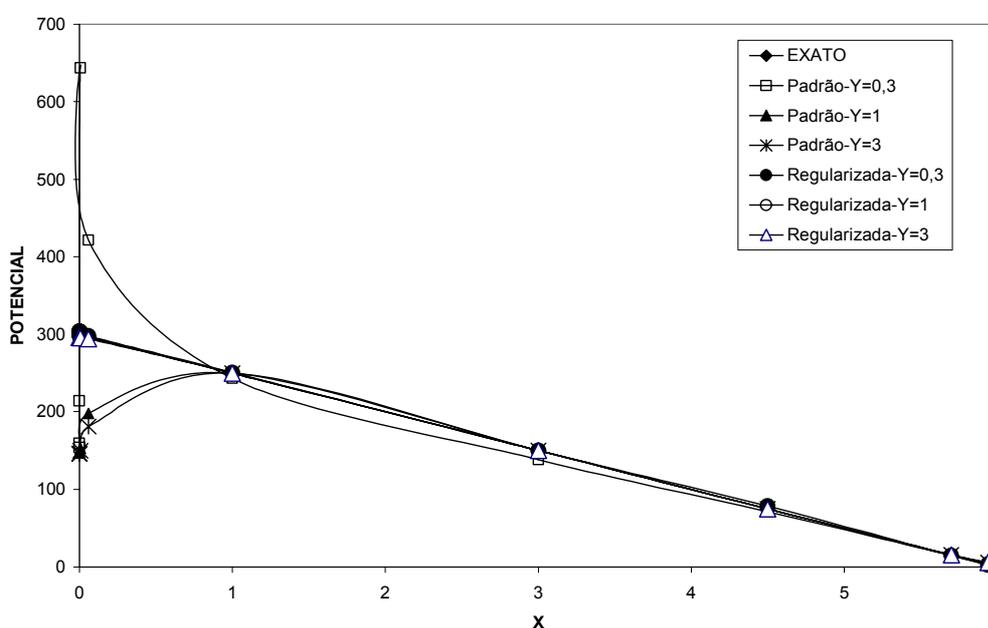


Figura 5.4 – Exemplo 1 - potencial nos pontos internos

Na Fig. 5.4 pode-se observar que as duas formulações apresentaram resultados precisos ao longo de todo o trecho analisado. Pontos muito próximos ao contorno, entretanto, apresentaram distorção dos resultados, para o cálculo através da formulação padrão o que não aconteceu quando se utilizou a formulação regularizada.

A Fig.5.5 apresenta o gráfico da componente do gradiente na direção x para pontos internos, onde pode-se observar o comportamento da solução ao se aproximar os pontos do contorno. Percebe-se que a formulação auto-regularizada apresentou resultados muito precisos, mesmo para pontos muito próximos do contorno, ao passo que houve uma perturbação nos resultados obtidos através da formulação padrão

devido ao problema de quase singularidade existente nessa última. Essa perturbação é mais evidente quando a coordenada y vale 0,3, ou seja, quando o ponto interno se aproxima de duas bordas do contorno.

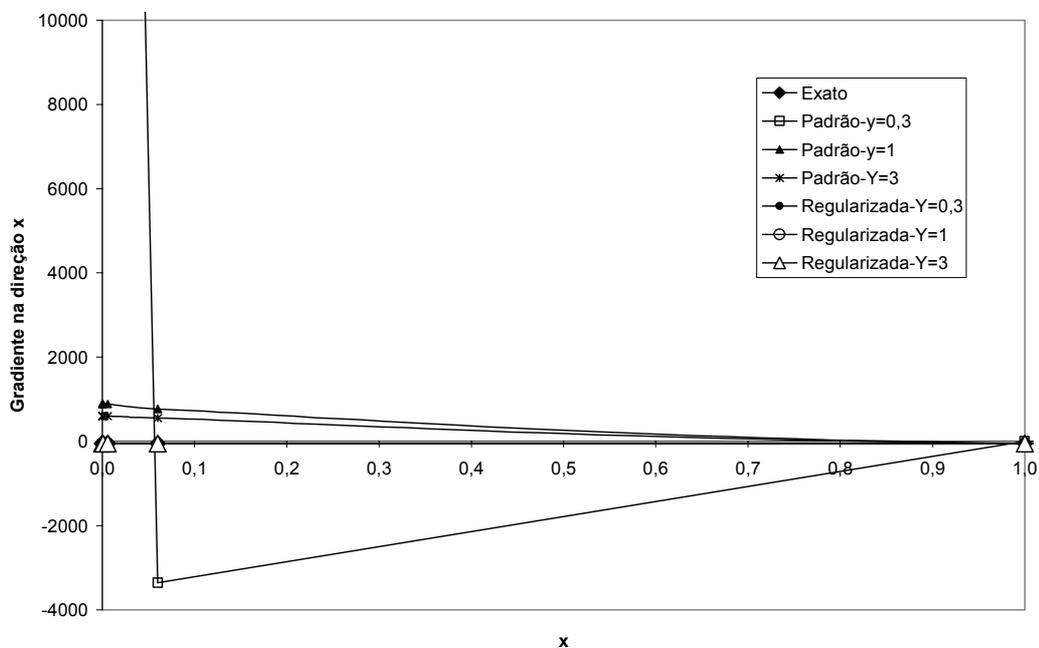


Figura 5.5 – Exemplo 1 – componente do gradiente na direção x nos pontos internos

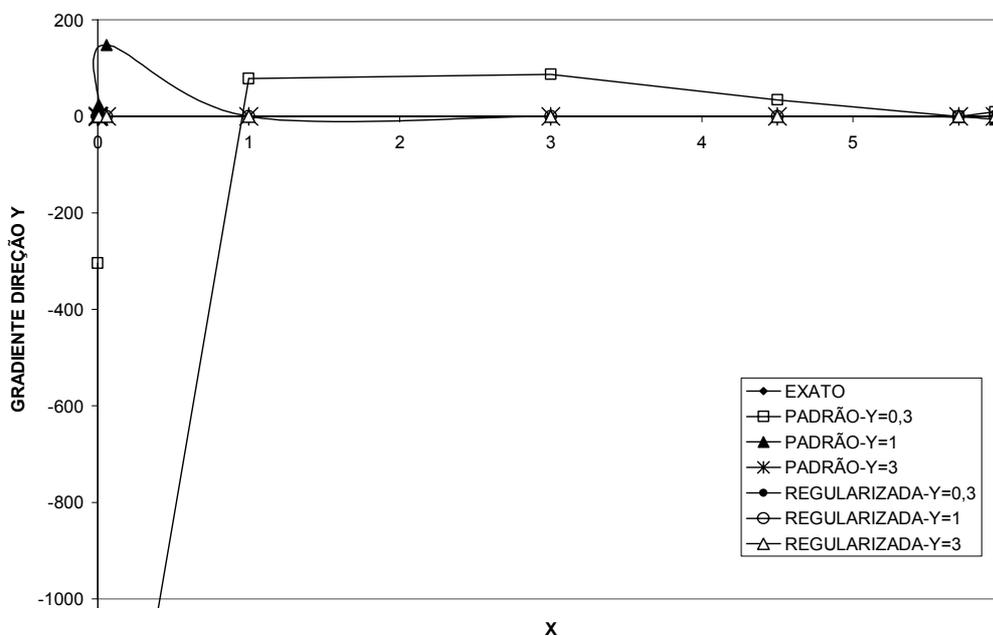


Figura 5.6 – Exemplo 1 – componente de gradiente na direção y nos pontos internos

Na Fig.5.6 apresenta-se o gráfico da componente do gradiente na direção y para pontos internos. Nesse caso a formulação auto-regularizada também apresentou resultados muito mais precisos que a formulação tradicional, principalmente para pontos muito próximos do contorno.

Pode-se concluir portanto que, quando o ponto interno se aproxima do contorno a formulação regularizada supera totalmente a formulação padrão devido ao problema de quase singularidade existente nesta última.

5.2 – Exemplo 2 – Tubo de parede espessa

Problema de transmissão de calor através de um tubo de parede espessa em regime permanente. O tubo possui seção transversal com raio interno igual a 1,0 e raio externo igual a 5,0. Apenas um quarto da seção transversal do tubo foi discretizada aproveitando-se a simetria axial do problema, conseqüentemente o fluxo é nulo sobre as bordas radiais coincidentes com os eixos de simetria. A borda circular interna possui fluxo prescrito igual a 31,21, enquanto a borda circular externa possui temperatura prescrita igual a 20, conforme Fig.5.7.

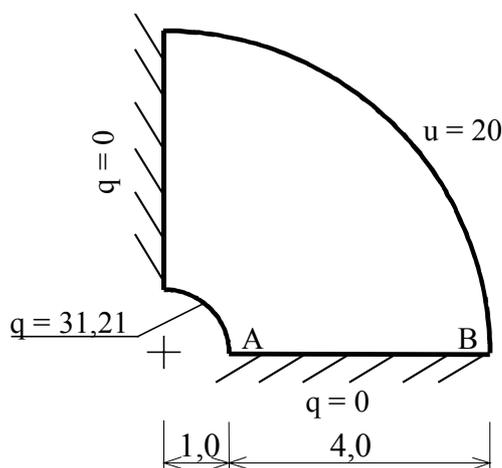


Figura 5.7: Exemplo 2 - geometria

A solução analítica exata do problema é dada por

$$u(x) = 31,21 \ln (9,49018552875 / r)$$

e

$$\frac{du}{dr} = \frac{-31,21}{r} \quad q = -k \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}$$

O contorno foi discretizado com uma malha inicial de 6 elementos conforme exemplificado na Fig.5.8, para elementos quadráticos. A partir desta malha foram feitos refinamentos sucessivos através da subdivisão dos elementos da malha anterior em dois elementos de mesmo tamanho. Foram estudadas também as implementações utilizando-se elementos cúbicos e quárticos. As malhas de elementos quadráticos e cúbicos foram divididas sucessivamente até a obtenção de malhas com 192 elementos, enquanto a malha de elementos quárticos foi refinada até 96 elementos.

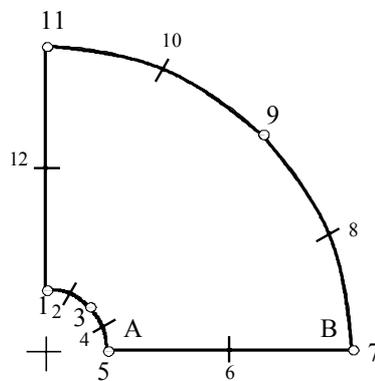


Figura 5.8: Primeira malha do contorno discretizado – 6 elementos quadráticos

A ordem de integração numérica utilizada foi igual a 12 e os valores de potencial e fluxo foram obtidos através de todos os algoritmos implementados. Adotou-se $\alpha = 0,25$ para a formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio associada à técnica de subelementação, enquanto a formulação auto-regularizada do potencial foi aplicada utilizando-se a integração logarítmica ou a transformação de Telles para avaliação da integral fracamente singular. Nas Tabelas

5.13 a 5.16 e nas Fig. 5.7 a 5.10 são apresentados os valores de erro do potencial no ponto A e de erro do fluxo no ponto B em relação à solução exata. O potencial exato vale 70,230557 em A e o fluxo exato vale - 6,242 em B.

Tabela 5.13: Exemplo 2- Formulação padrão com ponto de colocação fora do contorno

N.º de elementos Quadráticos	Número de Nós	Erro potencial (%)	Erro fluxo (%)
6	12	-2,66612	13,37697
12	24	-0,77835	2,05312
24	48	-0,18592	0,21956
48	96	-0,03555	0,04477
96	192	-0,00567	0,01164
192	384	-0,00071	0,00304
384	768	1,9317E-05	0,00078
N.º de elementos cúbicos	Número de Nós	Erro potencial (%)	Erro fluxo (%)
6	18	-0,98616	-8,31738
12	36	-0,20002	0,05477
24	72	-0,03020	-0,02768
48	144	-0,00349	-0,00301
96	288	-0,00042	-0,00033
192	576	-0,00012	-6,0997E-05
384	1152	-7,9459E-05	-2,8728E-05
N.º de elementos quárticos	Número de Nós	Erro potencial (%)	Erro fluxo (%)
6	24	-0,38241	3,88432
12	48	-0,05737	0,15767
24	96	-0,00854	0,00124
48	192	-0,00363	2,3853E-05
96	384	-0,00327	-9,3015E-05
192	768	-0,00323	-0,00013

A Tabela 5.13 apresenta os erros percentuais de potencial e fluxo para a formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio com elementos quadráticos, cúbicos e quárticos e a Fig.5.9 representa graficamente esses erros. Pode-se observar que os resultados obtidos através da utilização de elementos quárticos convergem para a solução exata muito mais rapidamente do que com os outros dois elementos.

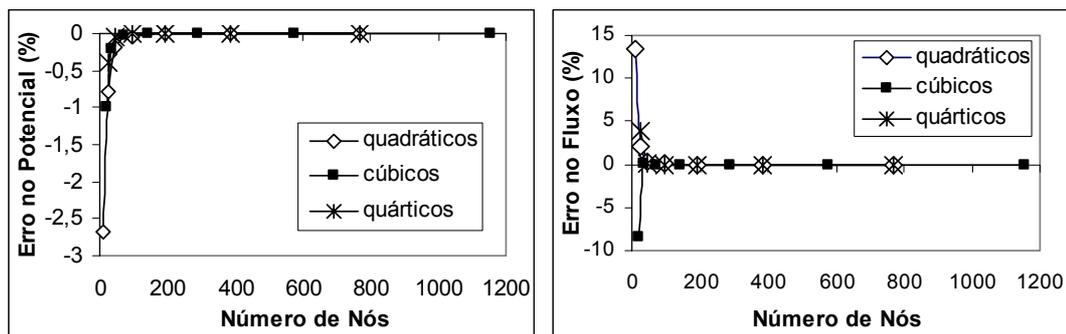


Figura 5.9: Formulação padrão com ponto de colocação fora do contorno

Visando fazer uma avaliação da influência da transformação de Telles em relação ao esquema de integração logarítmica, o problema foi também analisado por meio da formulação auto-regularizada do potencial usando elementos quadráticos, com a integral fracamente singular sendo calculada por meio das seguintes alternativas: integração logarítmica com 12 pontos de integração; transformação de Telles com 12 pontos de integração; transformação de Telles com 40 pontos de integração local e 12 geral. Os erros de potencial no ponto A e de fluxo no ponto B podem ser vistos na Tabela 5.14 e na Fig.5.10.

Tabela 5.14: Exemplo 2- Formulação auto-regularizada do potencial

N.º de elementos Quadráticos	Integ. Logarítmica Erro Potencial (%)	Transf. Telles-12 Erro Potencial (%)	Transf. Telles-40 Erro Potencial (%)
6	0,34121	0,329832	0,343918
12	0,0906	0,084457	0,092822
24	0,01826	0,015134	0,019809
48	0,00255	0,000988	0,0035448
96	0,00028	-0,000500	0,0008848
192	2,59E-05	-0,000359	0,0003863
N.º de elementos Quadráticos	Integ. Logarítmica Erro Fluxo (%)	Transf. Telles-12 Erro Fluxo (%)	Transf. Telles-40 Erro Fluxo (%)
6	1,16114	0,53745	1,144973
12	0,43252	-0,19275	0,407272
24	0,08994	-0,5253	0,054306
48	0,01042	-0,59618	-0,036414
96	0,00024	-0,60053	-0,058203
192	-2,80E-04	-0,59733	-0,070486

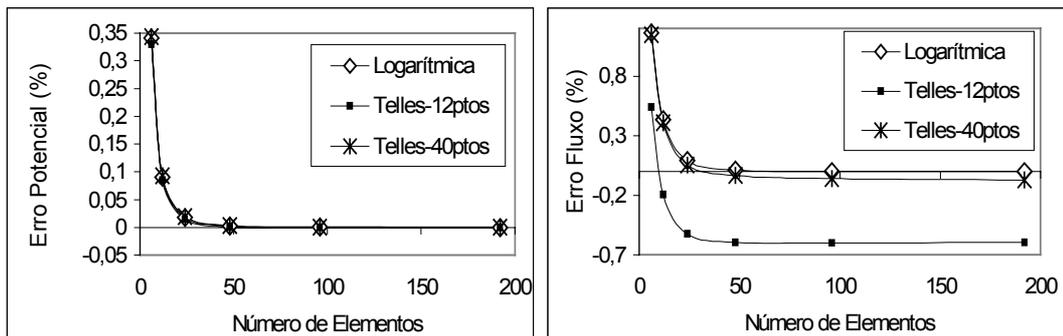


Figura 5.10: Formulação auto-regularizada do potencial

Pode-se observar através da Tabela 5.14 e da Fig.5.10 que o valor do potencial convergiu para a solução exata praticamente da mesma forma ao se utilizar integração logarítmica, transformação de Telles com 12 ou transformação de Telles com 40 pontos de integração. Pode-se observar ainda que o resultado de fluxo obtido com integração logarítmica convergiu rapidamente para a solução exata. A utilização da transformação de Telles para o cálculo da integral fracamente singular também apresentou uma melhora significativa dos resultados com o aumento do número de pontos de integração local, como observado no Exemplo 1. Os resultados obtidos com 40 pontos de integração foram muito próximos daqueles encontrados ao se utilizar integração logarítmica, com a vantagem de se utilizar apenas um esquema de integração para o cálculo de todas as integrais envolvidas.

A Fig.5.11 e a Tabela 5.15 apresentam os resultados para a formulação auto-regularizada do potencial com integração logarítmica para os três elementos estudados.

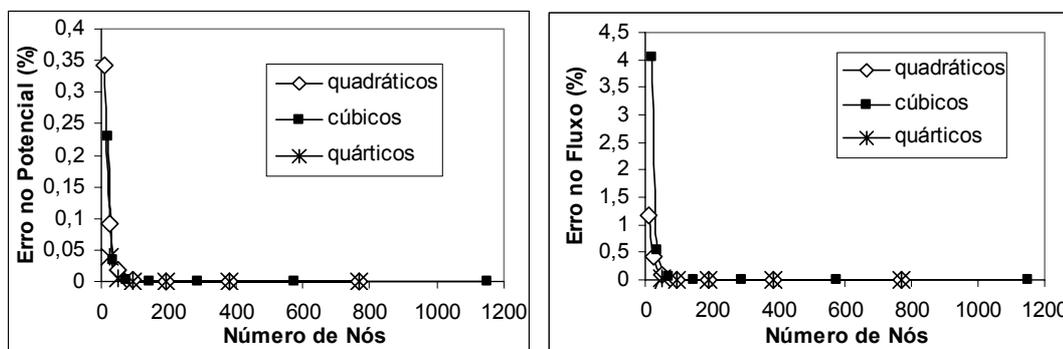


Figura 5.11: Formulação auto-regularizada do potencial com integração logarítmica

Tabela 5.15: Exemplo 2- Formulação auto-regularizada do potencial com integração logarítmica

N.º de elementos Quadráticos	Número de Nós	Erro potencial (%)	Erro fluxo (%)
6	12	0,34121	1,16114
12	24	0,09060	0,43252
24	48	0,01826	0,08994
48	96	0,00255	0,01042
96	192	0,00028	0,00024
192	384	2,5887E-05	-0,00028
384	768	2,2691E-06	-0,00011
N.º de elementos cúbicos	Número de Nós	Erro potencial (%)	Erro fluxo (%)
6	18	0,23029	4,04174
12	36	0,03506	0,55361
24	72	0,00388	0,06661
48	144	0,00032	0,00673
96	288	0,00002	0,00059
192	576	8,1699E-07	4,2541E-05
384	1152	-1,2071E-07	-2,84E-07
N.º de elementos quárticos	Número de Nós	Erro potencial (%)	Erro fluxo (%)
6	24	0,03813	-0,23960
12	48	0,00506	0,03680
24	96	0,00037	0,00339
48	192	0,00002	0,00021
96	384	1,50E-06	2,353E-05
192	768	3,0659E-07	8,768E-06

A Fig.5.11 mostra que a formulação auto-regularizada do potencial com integração logarítmica retornou valores de potencial e fluxo muito precisos. Pode-se observar também, que os resultados convergiram muito mais rapidamente para a solução exata ao se utilizar elementos quárticos.

Os erros obtidos quando da aplicação da formulação auto-regularizada do fluxo com elementos quadráticos, cúbicos e quárticos podem ser vistos na Fig.5.12. Essa formulação foi implementada utilizando o conceito de “continuidade relaxada”, como explicado na seção 4.2.3.

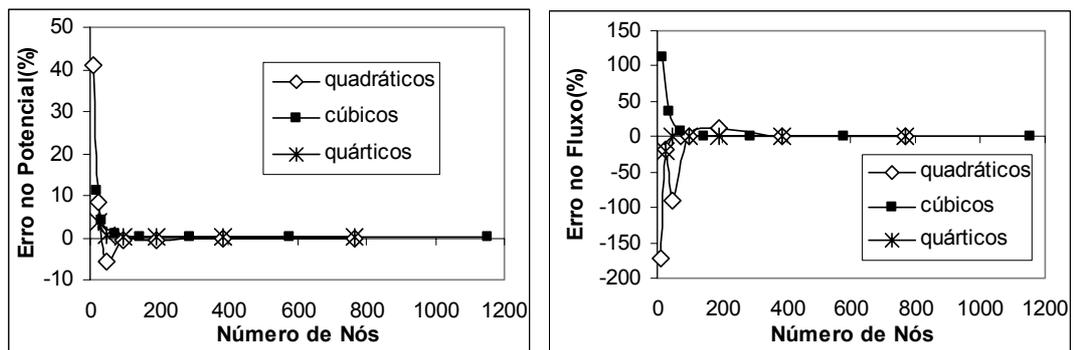


Figura 5.12: Formulação auto-regularizada do fluxo

Os resultados numéricos são apresentados na Tabela 5.16.

Tabela 5.16: Exemplo 2 – Formulação auto-regularizada do fluxo

N.º de elementos quadráticos	Número de Nós	Erro potencial (%)	Erro fluxo (%)
6	12	41,159	-172,994
12	24	8,286	-18,944
24	48	-5,553	-90,052
48	96	-0,590	1,4400
96	192	-0,638	11,168
192	384	-0,041	0,217
384	768	-0,003	0,073
N.º de elementos cúbicos	Número de Nós	Erro potencial (%)	Erro fluxo (%)
6	18	11,3440	111,7340
12	36	3,9910	36,3580
24	72	1,0780	7,8620
48	144	0,2230	1,4440
96	288	0,0390	0,2630
192	576	0,0060	0,0460
384	1152	0,0009	0,0078
N.º de elementos quárticos	Número de Nós	Erro potencial (%)	Erro fluxo (%)
6	24	3,85600	-19,8960
12	48	0,45000	0,0140
24	96	0,03200	-0,0840
48	192	0,00210	-0,0070
96	384	0,00030	0,0002
192	768	0,00008	0,0002

Nos gráficos apresentados na Fig.5.12 pode-se perceber que os resultados com elementos quárticos convergem rapidamente para a solução exata de forma monotônica. Essa convergência monotônica não foi observada ao se utilizar elementos quadráticos. Analisando a Tabela 5.16 pode-se perceber que os resultados obtidos com a formulação auto-regularizada do fluxo são muito pobres para malhas pouco refinadas, porém eles melhoram significativamente com o aumento do número de nós, para todos os elementos analisados.

Numa avaliação geral de todas as análises efetuadas é possível observar que todas as formulações utilizadas fornecem resultados que convergem para a solução exata quando a malha se torna mais refinada. Os resultados obtidos através da formulação auto-regularizada do potencial se mostraram muito precisos inclusive para as malhas mais grosseiras como pode ser observado nas Fig.5.10 e 5.11, onde o erro máximo encontrado para potencial foi de 0,35% e para fluxo foi de 4%. Os resultados da formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio, associada à técnica de subelementação também convergiram rapidamente, de forma monotônica, para a solução exata. A formulação auto-regularizada do fluxo, entretanto, necessita de malhas muito refinadas para obter resultados confiáveis principalmente quando se utilizam elementos quadráticos. Adotando-se um critério de convergência de erro máximo de 1% seriam necessárias malhas com 24 elementos quadráticos, 12 elementos cúbicos e 12 elementos quárticos para a utilização da formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio e subelementação. No caso de formulação auto-regularizada do potencial esta precisão é encontrada com 12 elementos quadráticos ou cúbicos, ou 6 elementos quárticos. Com base no mesmo critério, para o algoritmo baseado na formulação auto-regularizada do fluxo seriam necessárias malhas com 192 elementos quadráticos, 96 cúbicos ou 12 quárticos. Esta última formulação é portanto muito sensível ao grau do polinômio de interpolação utilizado, convergindo muito mais rapidamente para a solução exata à medida que se aumenta o grau do polinômio interpolador.

As formulações utilizadas para o cálculo de potencial e gradiente do potencial para pontos internos foram estudadas através do cálculo desses valores nos pontos internos pertencentes à uma reta que coincide com a bissetriz do quadrante analisado. Como esses valores são obtidos em fase de pós-processamento a partir dos

resultados do contorno, é necessária a utilização de uma formulação que forneça resultados confiáveis. Nesse exemplo os valores do contorno foram calculados através da formulação auto-regularizada do potencial com integração logarítmica, 48 elementos quárticos e 12 pontos de integração.

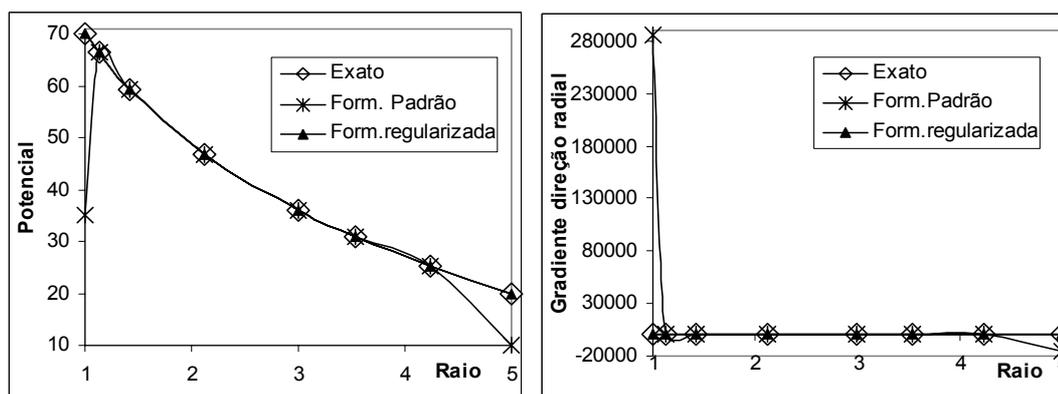


Figura 5.13: Potencial e fluxo para pontos internos

Na Fig.5.13 são apresentados os valores de potencial e da componente radial do gradiente do potencial. Como pode ser observado, o comportamento da solução numérica baseada na representação integral padrão e regularizada para pontos internos é semelhante àquele observado no Exemplo 1. Aqui também é possível perceber a vantagem da formulação regularizada para pontos internos próximos ao contorno, devido ao fato da mesma evitar as perturbações numéricas decorrentes da tendência ao comportamento quase singular.

5.3 – Exemplo 3 – “Motz problem” , MOTZ (1946)

Este é um problema clássico da teoria de potencial usado como um problema de referência para a comparação entre os diferentes algoritmos visando avaliar a sua precisão para tratar campos com singularidade. Ele consiste de um domínio retangular cuja geometria e condições de contorno são apresentadas na Fig.5.14. Neste problema há uma singularidade no ponto O resultante de uma descontinuidade de fluxo nesse ponto.

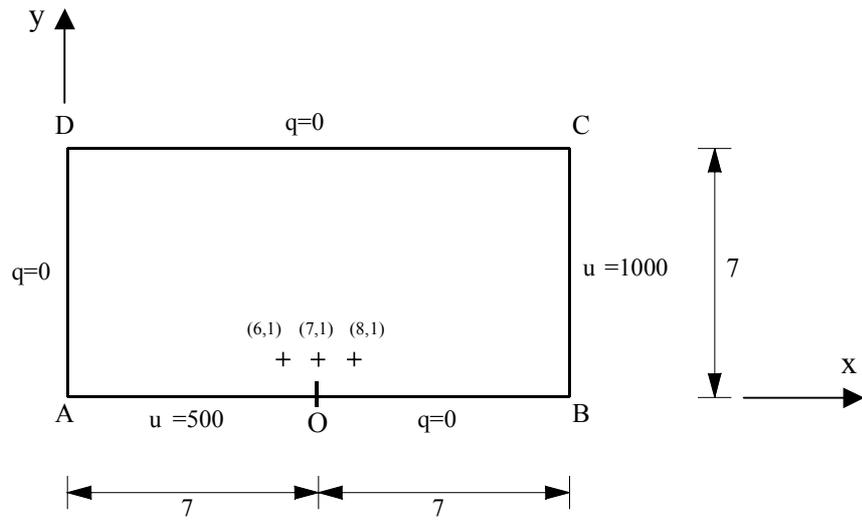


Figura 5.14 – Exemplo 3 – geometria

A primeira malha utilizada é apresentada na Fig.5.15, onde é apresentada a numeração dos elementos do contorno. Essa figura também contém os pontos internos localizados próximos ao ponto singular, onde foram calculados os valores de potencial e gradiente do potencial.

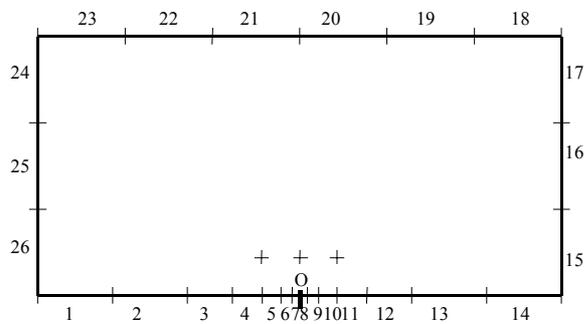
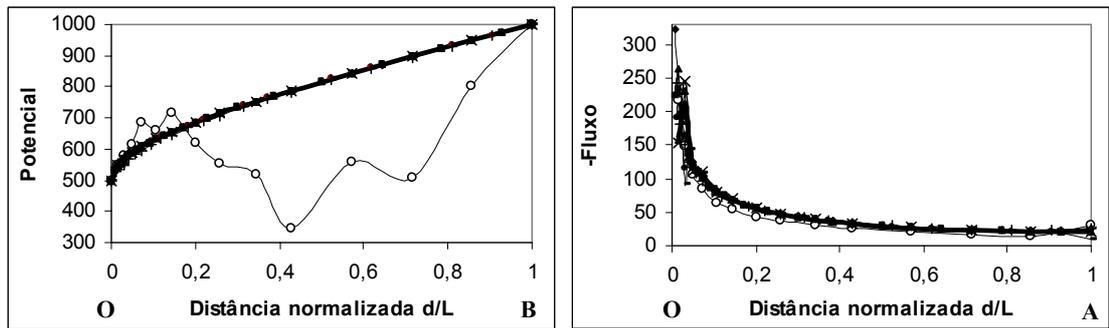


Figura 5.15 – Exemplo 3 – malha com 26 elementos

O problema foi calculado através da utilização da formulação auto-regularizada do potencial com integração logarítmica, da formulação auto-regularizada do fluxo e da formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio associada à técnica de subelementação. Foram aplicados os três tipos de elementos, com malhas de 26 elementos cada uma. Ao estudar este problema é dada ênfase à borda inferior pois esta é a borda de maior interesse devido à presença do ponto singular sobre a mesma.



- Paris e Cañas-quadrático —▲— Auto-Reg Pot-quadrático
- Auto-Reg Fluxo-quadrático —×— Ponto fora-quadrático
- Auto-Reg Pot-cúbico —+— Auto-Reg Fluxo-cúbico
- Ponto fora-cúbico —■— Auto-Reg Pot-quártico
- ◆— Auto-Reg Fluxo-quártico —▲— Ponto fora-quártico

Figura 5.16: Exemplo 3 - Potencial e fluxo na borda inferior

A Fig.5.16 apresenta os valores de potencial no trecho OB e de fluxo no trecho AO, na borda inferior, para todas as formulações analisadas. Os resultados obtidos foram comparados aos valores apresentados por PARÍS e CAÑAS (1997) com elementos quadráticos, que estão muito próximos da solução obtida por WHITEMAN e PAPAMICHAEL (1972) e JASWON e SYMM (1977). Uma análise desses gráficos mostra que o resultado converge para a solução de referência para todas as formulações e todos os elementos utilizados, exceto para a formulação auto-regularizada do fluxo com elementos quadráticos. Através deste exemplo é possível perceber que, assim como mencionado por RIBEIRO et al.(2000), a formulação auto-regularizada do potencial é totalmente equivalente à formulação padrão do MEC.

O gráfico do fluxo na borda OA mostra que todos os resultados obtidos longe do ponto singular são muito próximos da solução de referência, a menos daqueles obtidos quando se utiliza a formulação auto-regularizada do fluxo com elementos quadráticos, que apresenta uma diferença significativa. Para pontos próximos ao ponto singular, entretanto, obteve-se um resultado oscilatório que pode ser observado na Fig. 5.17.

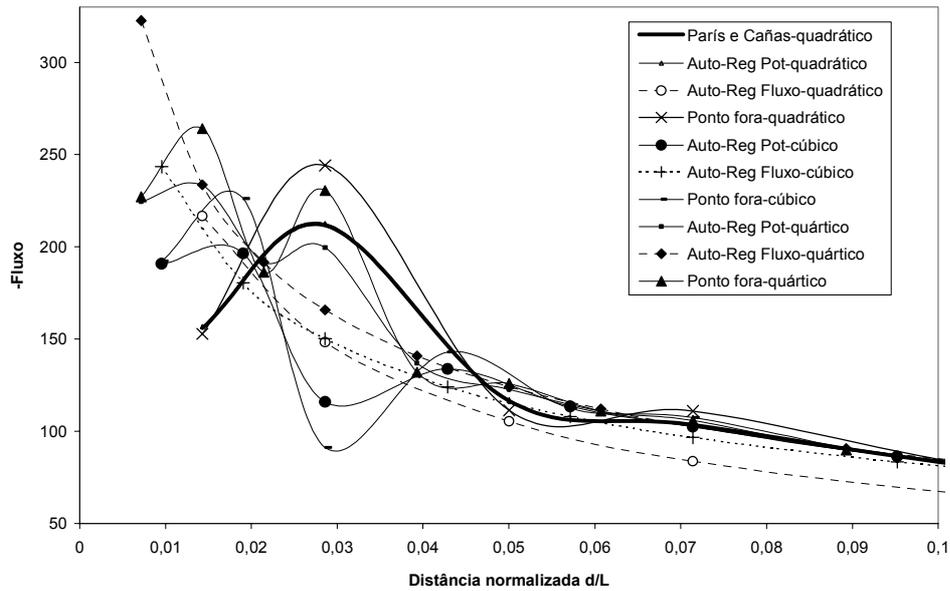


Figura 5.17: Exemplo 3 - Fluxo na borda inferior próximo ao ponto singular

Nesta figura percebe-se que, próximo ao ponto singular, a formulação auto-regularizada do fluxo é a que melhor representa o comportamento singular do problema, sem apresentar o comportamento oscilatório presente nas outras formulações.

Tabela 5.17: Exemplo 3 – Resultados numéricos do potencial no trecho OB

d/L	Jaswon e Symm	Auto-regularizada Potencial/Integ. Log.			Auto-regularizada Fluxo			Padrão com Ponto Fora / subelementação		
		Quadr.	Cubic.	Quart.	Quadr.	Cubic.	Quart.	Quadr.	Cubic.	Quart.
0	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00
0,035714	576,4	573,83	574,84	575,29	586,20	561,39	578,53	574,29	576,01	576,01
0,071429	608,9	607,22	607,84	608,12	686,31	594,74	609,05	607,93	608,50	608,62
0,107143	634,4	633,77	633,61	633,81	660,10	624,69	634,81	633,79	634,19	634,24
0,142857	656,5	655,32	655,79	655,95	716,35	646,25	656,86	655,90	656,30	656,30
0,285714	728,5	727,64	728,10	728,14	557,21	722,02	728,54	728,02	728,43	728,36
0,428571	788,9	788,39	788,75	788,67	345,95	783,81	788,72	788,68	788,94	788,83
0,571429	844,4	844,77	844,42	844,20	559,43	840,65	843,90	844,20	844,56	844,31
0,714286	897,3	897,72	897,76	897,20	508,85	894,77	896,54	897,16	898,45	897,27
0,857143	948,9	948,82	949,52	948,88	803,33	946,26	948,15	948,88	949,88	948,92

A Tabela 5.17 apresenta os resultados numéricos para o potencial no trecho OB utilizando como referência a distância normalizada d/L , onde d é a distância do ponto singular ao ponto analisado e L é a distância de O a B, que vale 7. Esta tabela é apresentada de forma a se obter uma melhor comparação entre os resultados calculados através das formulações estudadas neste trabalho e os resultados existentes na literatura. Através desses resultados é possível observar claramente a vantagem de se utilizar o refinamento p , ou seja, o refinamento no qual se aumenta o grau do polinômio. Principalmente quando se utiliza a formulação auto-regularizada do fluxo é mais vantajoso utilizar elementos quárticos do que elementos quadráticos ou cúbicos.

Devido ao fato da formulação auto-regularizada do fluxo com elementos quadráticos ter apresentado resultados tão ruins para o cálculo de potencial, foi feito um refinamento da malha quadrática para um estudo mais aprofundado da mesma. Neste estudo, a primeira malha é composta por 26 elementos de contorno como na Fig.5.15, porém os nós da borda inferior foram reposicionados com a ajuda de um programa que calcula as coordenadas dos nós através de um processo de gradação por progressão geométrica. A proporção entre o elemento mais distante do nó singular e o mais próximo é mantida igual a 10 e o refinamento é feito simplesmente dobrando-se o número de elementos de uma malha para outra. Nas outras bordas o refinamento é feito de forma que as malhas refinadas possuem sempre o dobro de elementos da malha anterior através da divisão do comprimento de cada elemento ao meio. Foram utilizadas sete malhas sendo que a primeira possui 26 elementos e a mais refinada 1664 elementos. O número de nós destas malhas pode ser calculado multiplicando-se o número de elementos por dois, já que cada elemento quadrático possui três nós.

Os resultados obtidos através destes refinamentos podem ser vistos nas Fig. 5.18 e 5.19. Nestas figuras a solução de Referência é aquela obtida através da aplicação da formulação com ponto fora associada à técnica de subelementação, utilizando elementos quadráticos para a Malha 3.

onde v é o campo de velocidade, h o potencial hidráulico e K o coeficiente de permeabilidade. A escavação é suficientemente grande para permitir um estudo plano do problema, onde deve-se calcular o fluxo de água no fundo da mesma. Considera-se que não há influência da escavação a uma distância de 100 metros do centro da mesma e que existe uma camada impermeável coincidente com a borda EF.

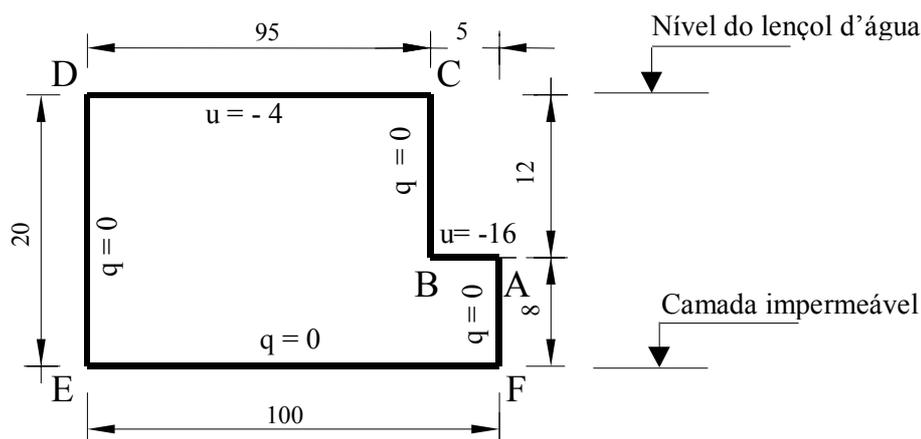


Figura 5.23 – Exemplo 4 – geometria

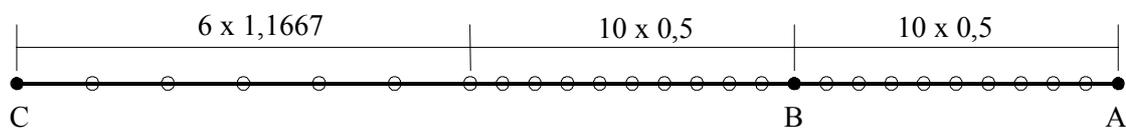
Aproveitando-se a simetria do problema, coincidente com a borda AF, tem-se as condições de contorno e a geometria apresentadas na Fig.5.23. Nessa figura são apresentados os níveis da camada impermeável e do lençol d'água. Sob a hipótese de solo e água incompressíveis este problema é governado pela equação de Laplace e o fluxo é singular no ponto B.

Este problema foi analisado a partir da formulação padrão com ponto de colocação fora do contorno associada à técnica de subelementação, formulação auto-regularizada do potencial com integração logarítmica e formulação auto-regularizada do fluxo. Foram utilizados os três tipo de elementos descritos no capítulo 4 de forma a verificar a influência da formulação e do tipo de elemento nos resultados. A discretização foi feita de forma que todos os elementos sobre as bordas que não concorrem no nó singular, possuem comprimentos iguais e constantes. Nas bordas AB e BC, que concorrem no nó singular tem-se gradações diferentes de acordo com o elemento utilizado.

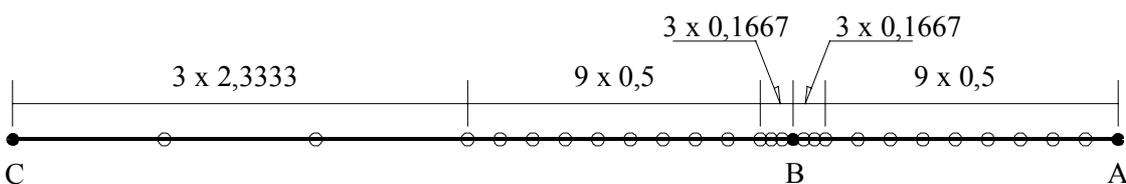
Os dados da geometria da primeira malha utilizada são apresentados na Tabela 5.20 e na Fig.5.24, onde a malha de elementos quadráticos possui 34 elementos, com 68 nós ao todo, a de elementos cúbicos possui 23 elementos com um total de 69 nós e a de elementos quárticos possui 18 elementos e 72 nós.

Tabela 5.20 – Detalhe das malhas

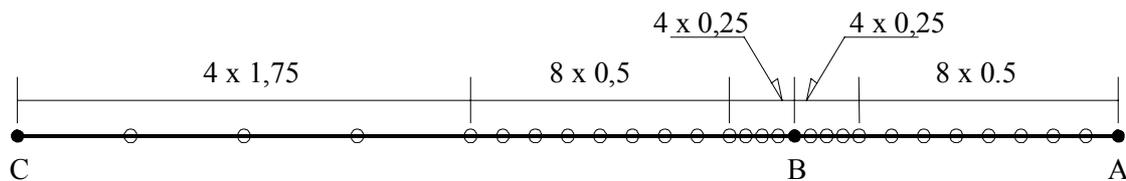
Tipo do Elemento	Número de elementos / distância entre os nós					
	Borda AB	Borda BC	Borda CD	Borda DE	Borda EF	Borda FA
Quadrático	5 (Fig. 5.22)	8 (Fig. 5.22)	7 6,786	3 3,333	8 6,250	3 1,333
Cúbico	4 (Fig. 5.22)	5 (Fig. 5.22)	5 6,333	2 3,333	5 6,667	2 1,333
Quártico	3 (Fig. 5.22)	4 (Fig. 5.22)	4 5,936	1 5,000	4 6,250	2 1,000



Elementos quadráticos



Elementos Cúbicos



Elementos Quárticos

Figura 5.24 – Malha para as bordas AB e BC

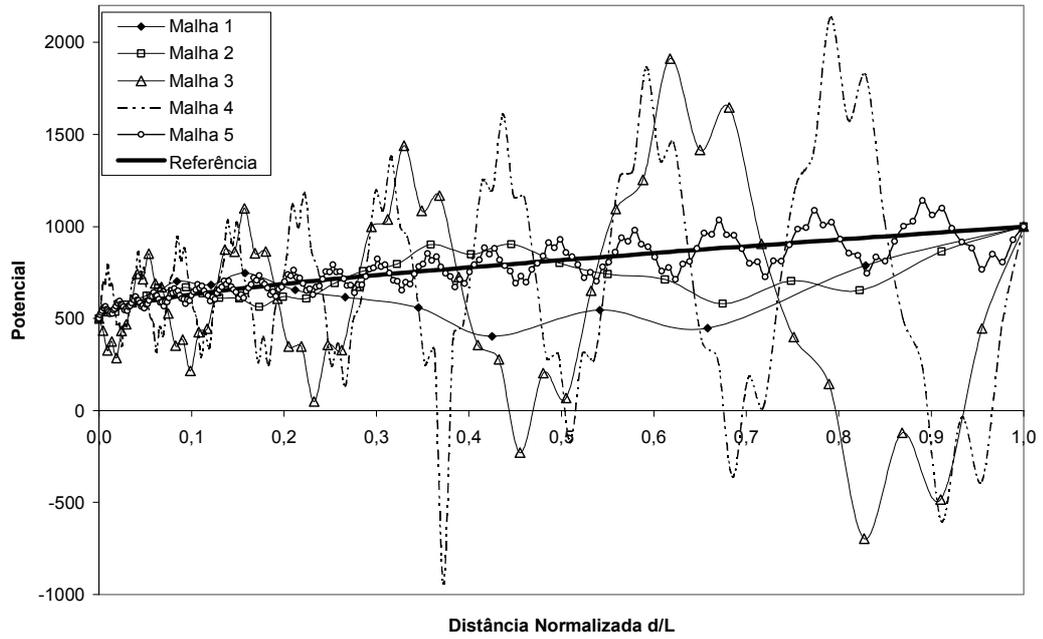


Figura 5.18 – Exemplo 3 – Potencial no trecho OB por meio da formulação auto-regularizada do fluxo para elementos quadráticos – malhas 1 a 5

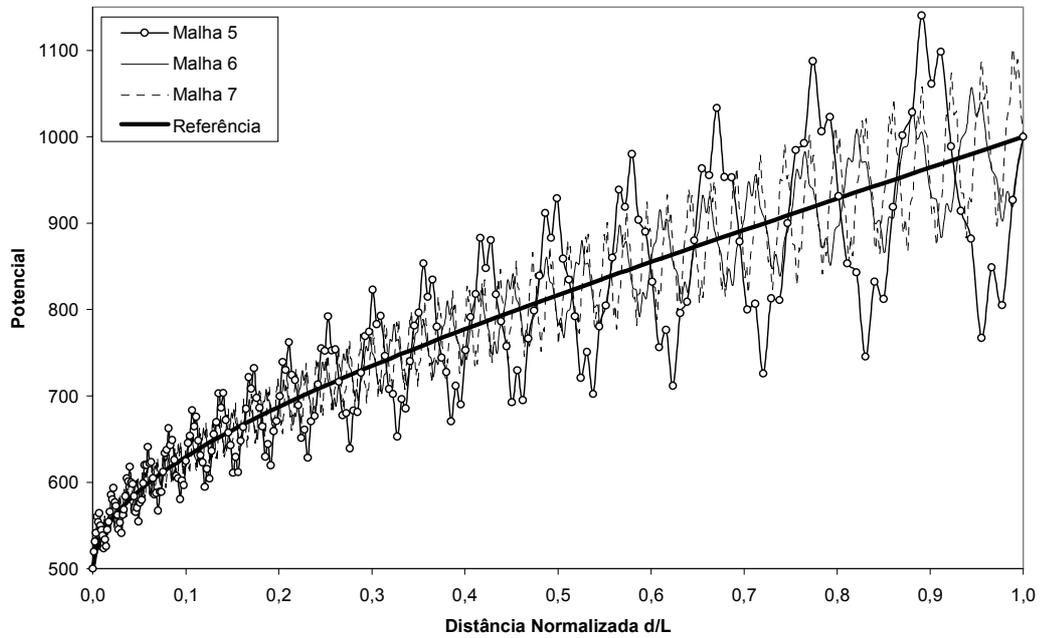


Figura 5.19 – Exemplo 3 – Potencial no trecho OB por meio da formulação auto-regularizada do fluxo para elementos quadráticos – malhas 5 a 7

Estes resultados mostram que a precisão obtida para as malhas 3 e 4 é muito pobre. Porém à medida que se refina a malha, os valores calculados tendem à solução de referência de forma oscilatória, com diminuição da amplitude das oscilações e aumento da frequência.

Na equação auto-regularizada do fluxo é requerida uma representação explícita do gradiente para pontos do contorno. Este gradiente é composto por valores de derivada normal e derivada tangencial. Como não se deseja entrar com mais variáveis no problema, a componente do gradiente na direção tangencial é calculada localmente com base na interpolação sobre cada elemento, sendo função da derivada das funções de forma e do potencial prescrito nos pontos do contorno (Eq.4.11). Isso significa que, quando a derivada normal possui uma aproximação quadrática, a derivada tangencial possui uma aproximação linear. Nas Fig.5.20 e 5.21 são apresentados os gráficos da derivada tangencial, utilizados para tentar mostrar a relação existente entre a oscilação do potencial e a oscilação que ocorre no cálculo da derivada tangencial.

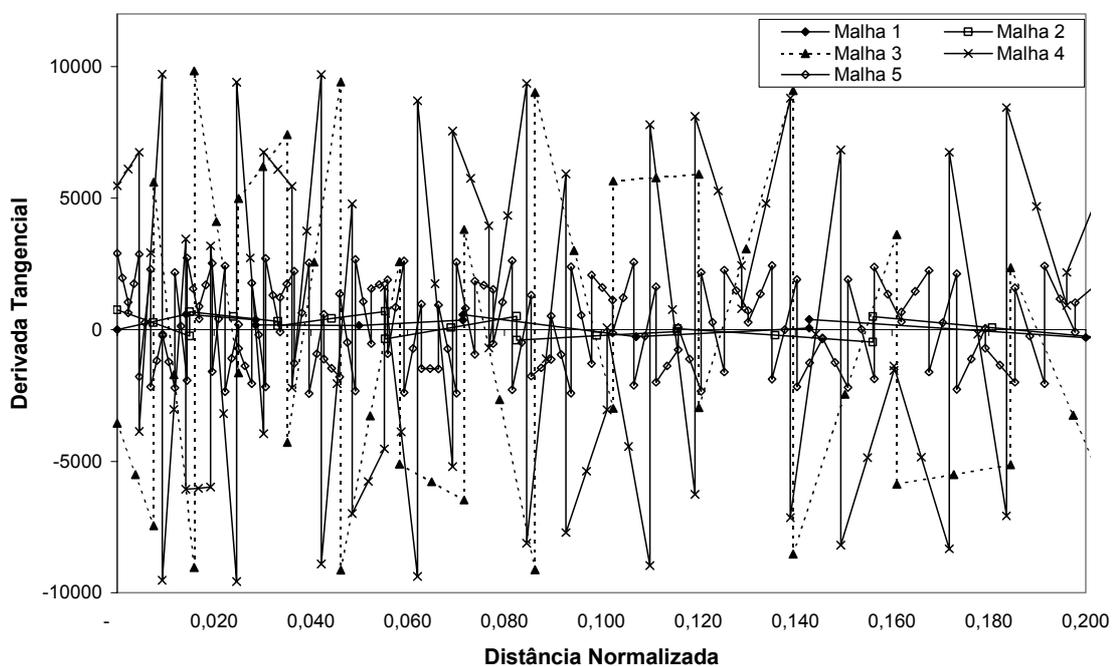


Figura 5.20 – Derivada tangencial – refinamento elementos quadráticos –
formulação auto-regularizada do fluxo – malhas 1 a 5

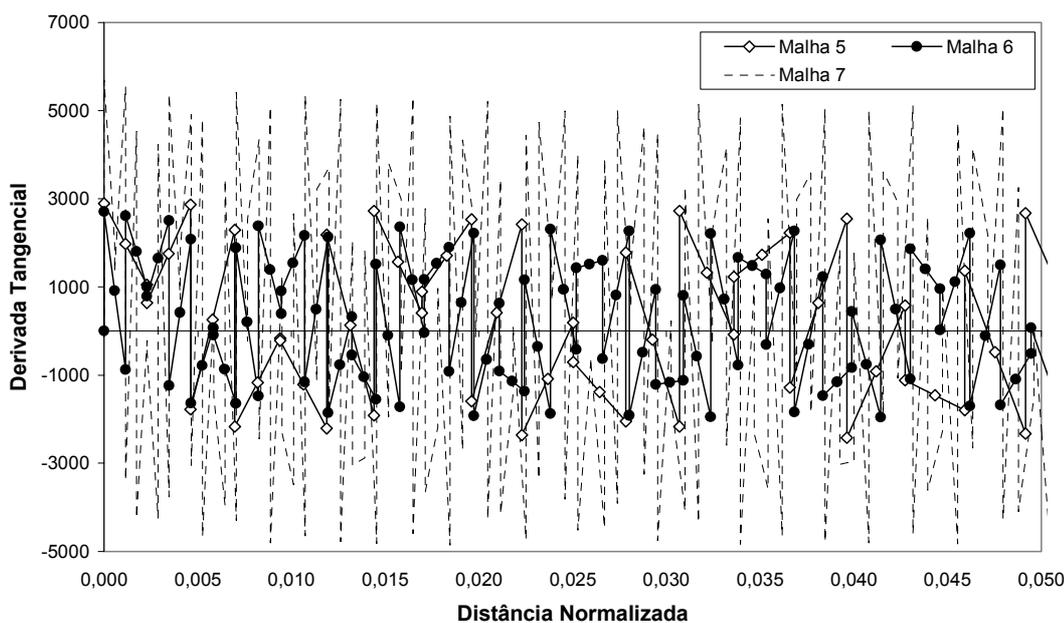


Figura 5.21 – Derivada tangencial – refinamento elementos quadráticos - formulação auto-regularizada do fluxo – malhas 5 a 7

Nas Fig.5.20 e 5.21 podem ser observadas grandes discontinuidades nos valores da derivada tangencial nos pontos que compartilham dois elementos, por exemplo no caso das malhas 3 e 4. É possível também verificar claramente a variação linear da derivada tangencial, que possui um grau a menos que o grau de interpolação do elemento. Nesse problema o valor da derivada tangencial do potencial parece influenciar de forma significativa a resposta do potencial através da formulação auto-regularizada do fluxo, pois o comportamento oscilatório observado nas Fig.5.20 e 5.21, que representam a variação da derivada tangencial no trecho OB, também pode ser observado na resposta de potencial nas Fig.5.18 e 5.19.

A Fig.5.20 apresenta o resultado do fluxo próximo ao nó singular, obtido através da formulação auto-regularizada do fluxo com elementos quadráticos, para o refinamento descrito anteriormente. No caso de fluxo, os resultados para as malhas 3 e 4 também são pobres, e ao se utilizar a malha 3 pode-se perceber que o gráfico possui sentido contrário ao das outras malhas, apesar disso a malha mais refinada tende a representar melhor o comportamento do fluxo.

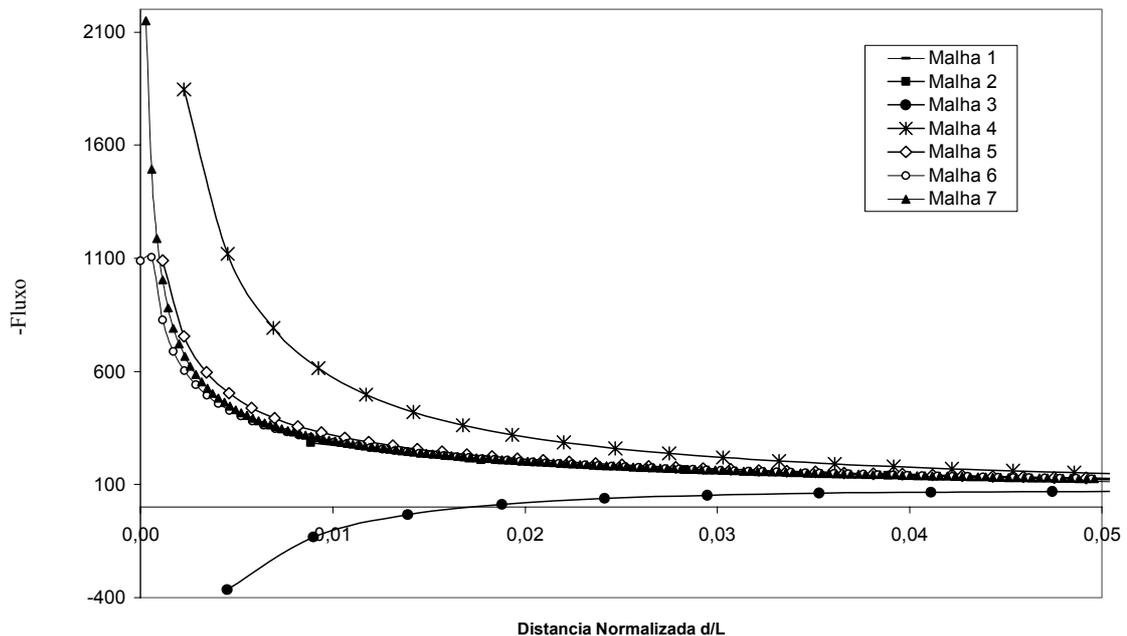


Figura 5.22- Fluxo – refinamento elementos quadráticos - formulação auto-regularizada do fluxo

A Tabela 5.18 apresenta os valores de potencial para os pontos internos indicados na Fig.5.14. Estes valores foram calculados através das formulações regularizadas, Eq.3.13 e 3.17 e não regularizadas, Eq.3.8 e 3.9. Os resultados aqui apresentados fazem parte de um pós-processamento partindo dos valores de contorno obtidos através da formulação auto-regularizada do potencial com integração logarítmica, a sexta malha e elementos quárticos. É feita uma comparação com a solução de WHITEMAN e PAPAMICHAEL (1972) e de PARÍS e CAÑAS (1997).

Tabela 5.18- Resultado pontos internos

Pontos	**	Formulação não regularizada	Formulação regularizada
(6;1,0)	561,94	561,7826786	561,7826786
(7;1,0)	603,77	603,3927550	603,3927550
(8;1,0)	669,54	669,1433126	669,1433126

** Whiteman e Papamichael

Na Tabela 5.18 percebe-se que os resultados obtidos com as duas formulações foram iguais, pois esses pontos estão suficientemente afastados do

contorno. Na seqüência foram utilizados pontos internos mais próximos do contorno de forma a verificar o comportamento do resultados de potencial na região adjacente ao contorno.

Tabela 5.19- Pontos internos próximos ao contorno

Ponto (x;y)	Valor do Potencial	
	Formulação não regularizada	Formulação regularizada
(6;0,1)	506,871757417708	506,871278790772
(7;0,1)	532,516386493298	532,516386491589
(8;0,1)	656,119375036315	656,118747129728
(6;0,01)	509,798124754576	500,682476002777
(7;0,01)	507,335993544256	507,669819801589
(8;0,01)	667,918955275975	655,960213600257
(6;0,001)	328,556189012836	500,097525652716
(7;0,001)	449,909396242496	501,227402459143
(8;0,001)	430,896843256564	655,940456436186

Através da Tabela 5.19 é possível perceber que existe uma grande diferença entre o resultado do potencial calculado para os pontos internos através da utilização da formulação regularizada e da formulação não regularizada. Nesse caso novamente percebe-se a tendência de comportamento quase singular quando o ponto interno se aproxima do contorno, evidenciando a vantagem da utilização da formulação auto-regularizada.

5.4 – Exemplo 4 – Percolação de água através do subsolo

Este problema representa o estudo da influência de uma escavação na percolação de água no subsolo seguindo a lei de Darcy. Esta lei relaciona o fluxo de água através do solo e o gradiente do potencial hidráulico. Para o caso isotrópico esta lei assume a forma

$$v = -K \nabla h$$

As Fig.5.25 e 5.26 apresentam o resultado do fluxo nas bordas DC e BA e do potencial nas bordas BC, ED, EF e FA respectivamente, conforme legenda apresentada na Fig.5.27. Neste exemplo considera-se como resposta de referência a formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio associada à técnica de subelementação, utilizando elementos quárticos.

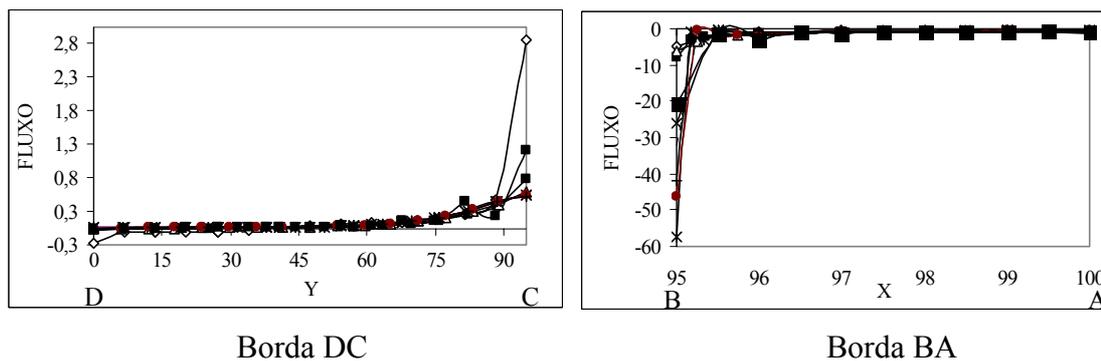


Figura 5.25 - Fluxo nas bordas DC e BA, para a primeira malha

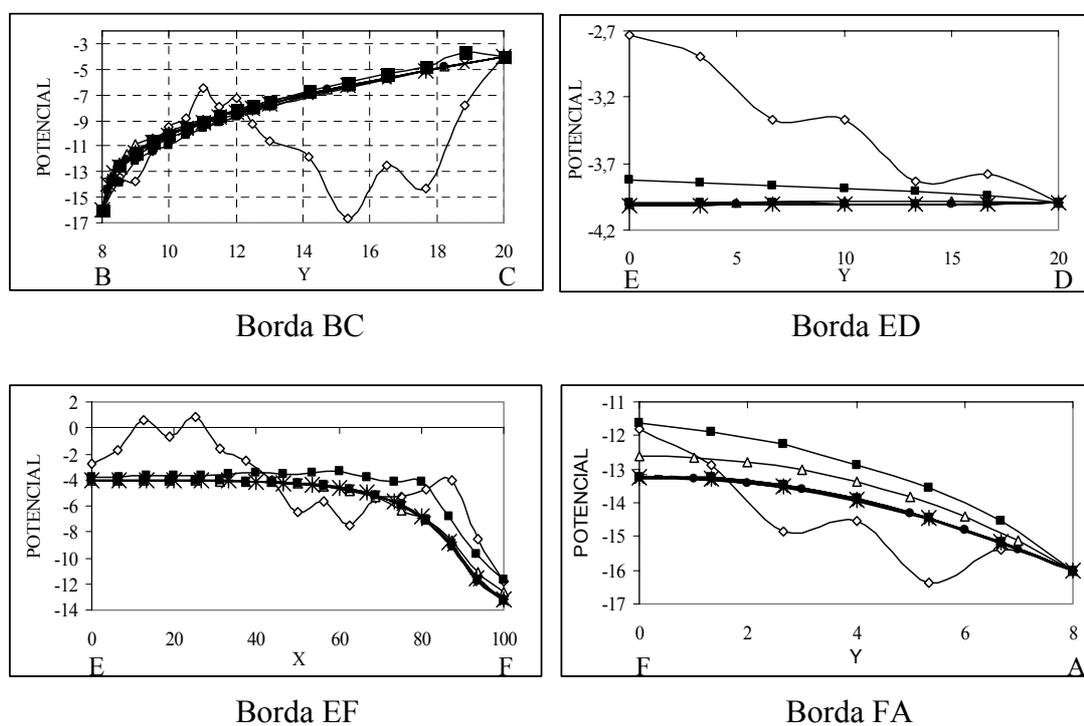


Figura 5.26- Potencial nas bordas BC, ED, EF, FA, para a primeira malha

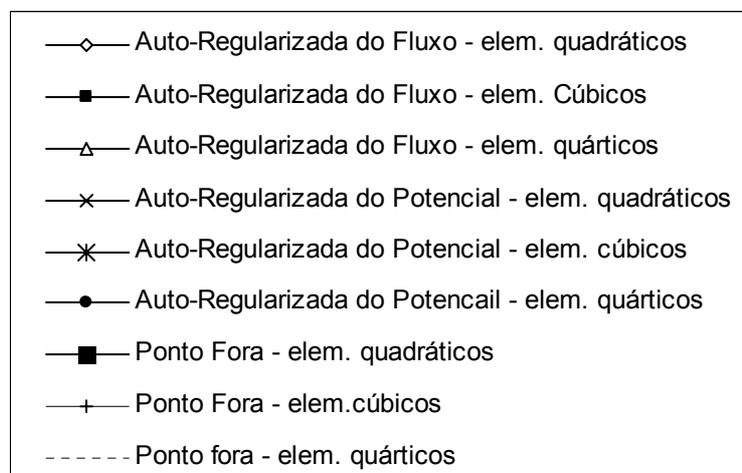


Figura 5.27- Legenda

A partir destes gráficos pode-se perceber que o comportamento observado nos resultados deste problema é muito semelhante àquele encontrado no Exemplo 3. Os resultados de fluxo, apresentados na Fig.5.25, representam bem a solução do problema para todas as formulações utilizadas, em pontos localizados ao longo das bordas, fora das proximidades dos cantos, podendo ser observadas diferenças significativas apenas em pontos próximos aos cantos B e C. Pode-se observar também que a resposta obtida através da utilização da formulação com ponto fora representa bem o comportamento do fluxo, tendendo a infinito no ponto singular, sem saltos ou oscilações. Os resultados de potencial são apresentados na Fig.5.26. O resultado obtido através da formulação auto-regularizada do fluxo com elementos quárticos está de acordo com aquele obtido utilizando-se a formulação padrão com ponto fora do contorno e elementos quárticos e com a solução apresentada por PARÍS e CAÑAS (1997); os resultados para elementos cúbicos com a formulação auto-regularizada do fluxo apresentaram alguns erros significativos, mas, no geral, as curvas que representam essa solução seguem a resposta de referência. Através da formulação auto-regularizada do fluxo com elementos quadráticos obteve-se resultados de potencial oscilatórios e muito ruins, apresentando erros acima de 12%, como pode ser visto nas bordas ED e FA. Todas as outras formulações analisadas apresentam resultados muito precisos, sendo comparáveis aos resultados obtidos por PARIS e CAÑAS (1997).

Na seqüência foi feito um refinamento das malhas simplesmente dividindo-se os elementos das malhas anteriores ao meio. Estas novas malhas foram testadas através da utilização da formulação auto-regularizada do fluxo com elementos quadráticos, cúbicos e quárticos e os resultados de potencial na borda BC são apresentados na Fig.5.28.

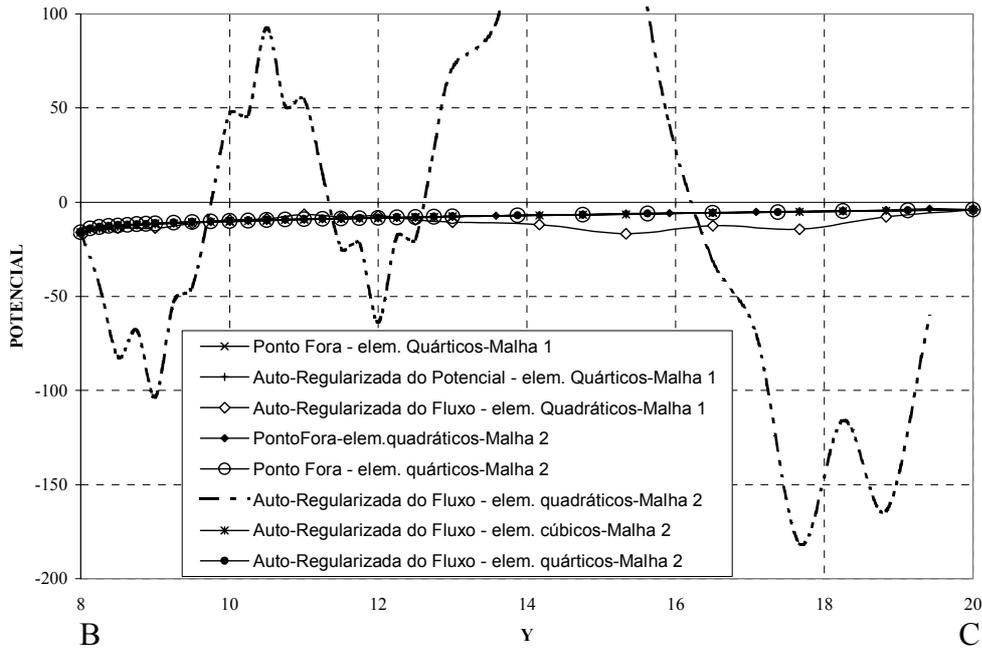


Figura 5.28 – Refinamento geral das malhas

Novamente percebe-se claramente que a formulação auto-regularizada do fluxo com elementos quadráticos apresentou comportamento oscilatório e resultados divergentes. Foi feito então outro refinamento para a malha de elementos quadráticos, seguindo a discretização utilizada por Paris e Cañas, conforme Fig.5.29 no qual apenas as bordas BA e BC são refinadas, mantendo-se as outras bordas como na malha anterior, Tabela 5.20.

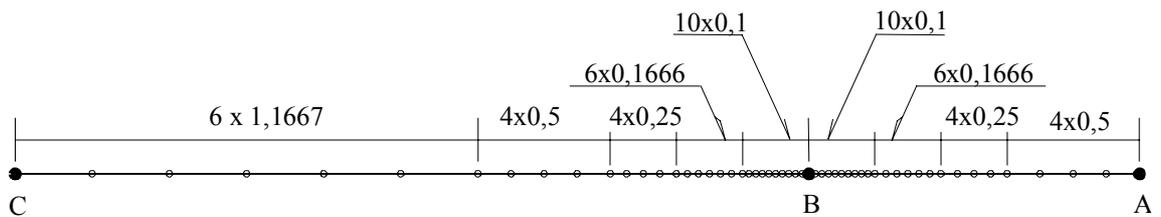


Figura 5.29 – Malha 3 para as bordas AB e BC – com elementos quadráticos

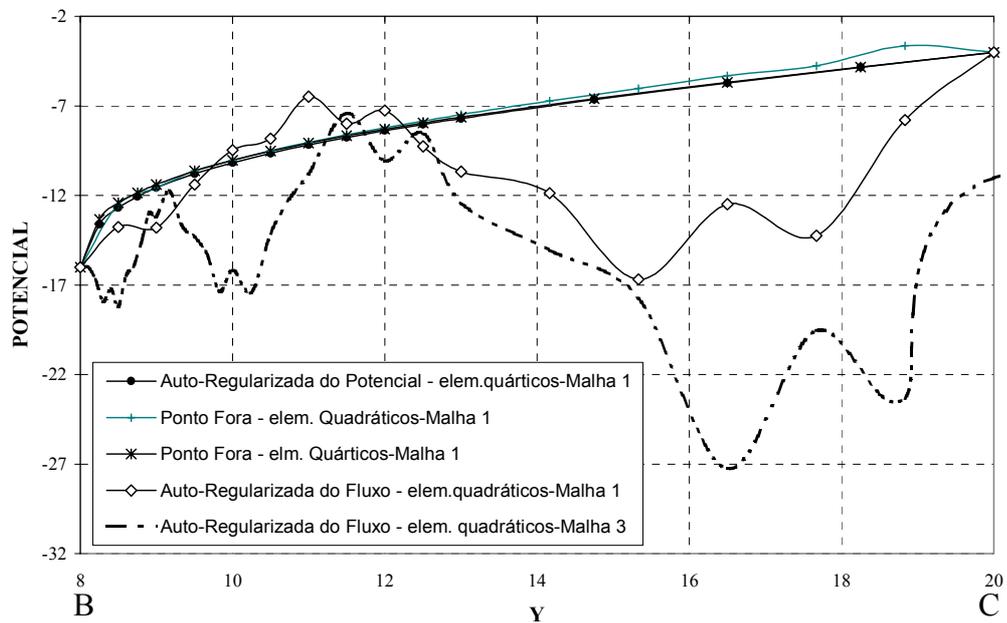


Figura 5.30 – Refinamento das bordas BA e BC

Os resultados obtidos através deste segundo refinamento, podem ser visto na Fig.5.30. Esses resultados foram melhores do que aqueles obtidos através da Malha 2, porém piores que os obtidos através da utilização da primeira malha.

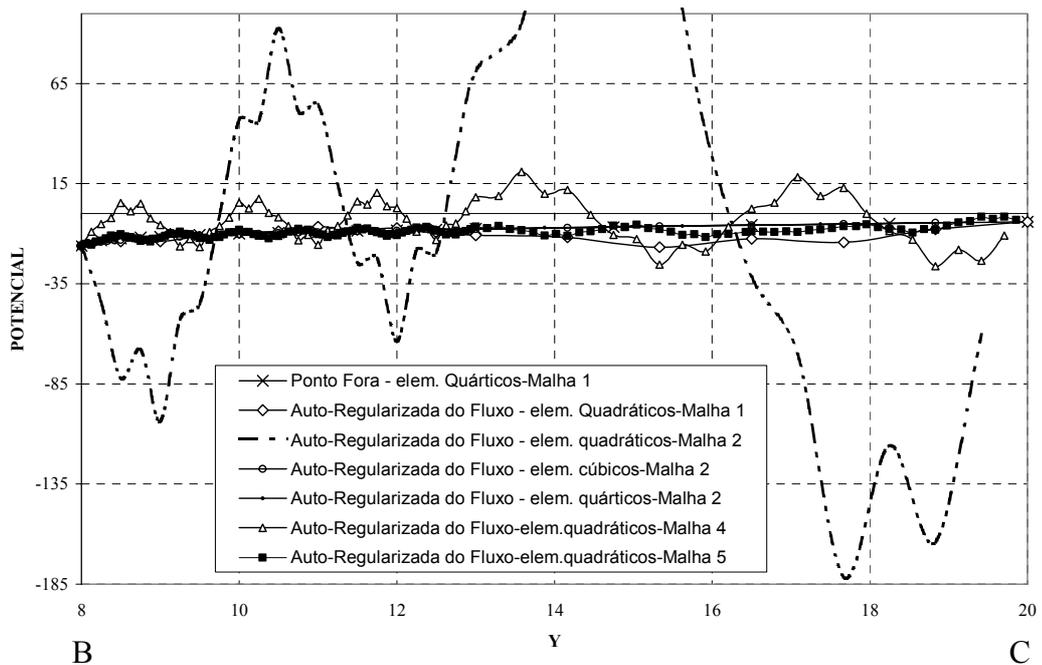


Figura 5.31 – Refinamento geral 2

A segunda malha de elementos quadráticos foi refinada por mais duas vezes globalmente e o resultado é apresentado na Fig.5.31, onde pode-se perceber que, após uma piora dos resultados o mesmo volta a convergir de forma oscilatória para a solução de referência, como aconteceu no Exemplo 3.

Os Exemplos 3 e 4 representam problemas com singularidade de fluxo. Pode-se observar que, em ambos os casos, apareceu um comportamento oscilatório ao se utilizar a formulação auto-regularizada do fluxo com elementos quadráticos. A influência do gradiente regularizador, considerado como a média dos gradientes nodais calculados localmente com base nos esquemas de interpolação dos elementos que concorrem no ponto de colocação, quando este ponto é localizado em nós de extremidade, é provavelmente uma das causas que contribuem para o comportamento oscilatório nos resultados de potencial utilizando a formulação auto-regularizada do fluxo com elementos quadráticos. Este tipo de erro não é introduzido quando o ponto de colocação se localiza dentro do elemento. É interessante enfatizar que esse comportamento oscilatório não foi observado na aplicação de elementos de contorno cúbicos e quárticos para todos os exemplos analisados. Ao que tudo indica a utilização da hipótese de continuidade relaxada não trabalha bem com elementos quadráticos no MEC baseado na formulação auto-regularizada do fluxo. Não possuir pelo menos termos quadráticos parece ser uma restrição muito forte para a derivada tangencial do potencial no caso de elementos quadráticos. Os termos de ordem mais alta, presentes na derivada tangencial do potencial ao se utilizar elementos cúbicos e quárticos na formulação auto-regularizada do fluxo, parecem dar os graus de liberdade necessários para se obter uma suavidade razoável para a solução do potencial. É necessário um aprofundamento da pesquisa numérica para a confirmação desta observação.

6- CONCLUSÃO

Neste trabalho foram implementados três algoritmos não-singulares do Método dos Elementos de Contorno para a análise de problemas bidimensionais de potencial utilizando elementos isoparamétricos quadráticos, cúbicos e quárticos. O primeiro algoritmo se baseia na formulação padrão da Equação Integral de Contorno com ponto de colocação fora do domínio, implementado de forma a permitir a utilização ou não da técnica de subelementação. Os dois outros algoritmos são baseados em formulações auto-regularizadas das Equações Integrais de Contorno, nas quais a regularização é feita na equação integral antes da mesma ser discretizada. Essas são as chamadas formulação auto-regularizada do potencial e formulação auto-regularizada do fluxo. A formulação auto-regularizada do potencial não é totalmente regularizada, pois ainda permanece com uma integral fracamente singular. Essa integral fracamente singular foi calculada, neste trabalho, através da utilização de quadratura logarítmica e através da transformação proposta por TELLES (1987), sendo neste último caso necessária a utilização de apenas um esquema de integração numérica Gaussiana tradicional para o cálculo de todas as integrais envolvidas. Por outro lado a formulação auto-regularizada do fluxo é totalmente regularizada, porém requer continuidade de Hölder $C^{1,\alpha}$ das funções densidade, requisito não satisfeito quando se utilizam elementos de contorno isoparamétricos. Adota-se, nesse caso, o conceito de “continuidade relaxada” no processo de discretização da equação, que significa uma redução dos requisitos de suavidade, podendo-se utilizar funções densidade contínuas por partes. A obtenção de bons resultados depende não só da formulação utilizada, mas também de uma discretização adequada do contorno. As possíveis fontes de erro ao se utilizar o Método dos Elementos de Contorno são a modelagem matemática, a limitação dos computadores à representação dos números

reais e a discretização do contorno. A modelagem matemática pode causar erros devido à diferença existente entre valores exatos, obtidos através do modelo matemático, e os valores medidos no sistema físico. Essa diferença se torna pequena se as hipóteses do modelo matemático, forem razoáveis para o sistema real. A limitação dos computadores à representação dos números reais causa erros de arredondamento cumulativos. Nesse programa utilizou-se precisão dupla, que significa precisão até a décima quarta casa decimal, de forma a minimizar esse problema. A discretização do contorno pode introduzir erros devido à aproximação da geometria e das grandezas do contorno, causando uma diferença entre a solução exata, obtida pelo modelo matemático, e a solução apresentada através do modelo discreto, pois ao se discretizar o problema utiliza-se um número finito de graus de liberdade para representar o número infinito existente no modelo matemático, que é contínuo. Como estamos utilizando elementos isoparamétricos, as condições de contorno são aproximadas pelo mesmo esquema de interpolação utilizado para aproximar a geometria de forma que se garante que os valores prescritos são exatos apenas nos nós dos elementos.

A formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio se mostrou altamente eficaz, apresentando uma melhora significativa dos resultados ao ser utilizada associada à técnica de subelementação. Nesse caso é possível a utilização de pontos de colocação tão próximos do contorno quanto necessário. Os resultados obtidos foram tão confiáveis que, para os problemas mais complexos nos quais não se tinha a solução exata, essa formulação passou a ser utilizada como referência.

Quando a integral fracamente singular remanescente na formulação auto-regularizada do potencial é calculada através de quadratura logarítmica, obtêm-se resultados muito precisos em todos os exemplos analisados, podendo-se observar no Exemplo1 que esses resultados foram plenamente equivalentes aos encontrados através da formulação padrão baseada no Valor Principal de Cauchy. Percebe-se ainda, neste exemplo, que os resultados não se alteram ao variar a ordem de integração logarítmica de 4 a 12 pontos e que apenas a variação da ordem de integração gaussiana padrão influencia nesse cálculo.

A formulação auto-regularizada do potencial com a integral fracamente singular calculada através de transformação de Telles possui a vantagem de

necessitar apenas um esquema de integração para o cálculo de todas as integrais envolvidas, porém, deve-se tomar cuidado ao se integrar o elemento que contém o ponto singular, pois nesse caso, o número de pontos de integração pode influenciar significativamente o resultado. Como pode ser observado no Exemplo 1, a precisão do resultado aumenta à medida que se aumenta o número de pontos de integração local, ao passo que a variação da ordem de integração para o cálculo dos elementos que não possuem o ponto singular praticamente não altera o resultado.

Ao se utilizar a formulação auto-regularizada do fluxo é possível perceber que a utilização do conceito de “continuidade relaxada” mostrou-se válida quando se utilizam elementos cúbicos e quárticos, para todos os problemas analisados. Entretanto essa formulação apresentou um comportamento oscilatório bem evidente para potencial, ao se utilizar elementos quadráticos para a solução de problemas com singularidade, Exemplos 3 e 4, inclusive para malhas refinadas. A formulação auto-regularizada do fluxo foi também a que melhor representou o comportamento do fluxo próximo ao ponto singular, sem saltos e oscilações. A influência do gradiente regularizador, calculado de forma diferente para pontos sobre o elemento que contém o ponto de colocação e elementos que não o contém parece ser uma das causas do comportamento oscilatório do potencial quando utilizam-se elementos quadráticos. Esse comportamento, que ocorre em problemas com singularidade, parece estar relacionado à derivada tangencial calculada localmente sobre o elemento que contém o ponto de colocação a partir dos valores nodais de potencial. Isso é necessário pois a derivada tangencial não faz parte da formulação original do problema. A derivada tangencial possui portanto um grau a menos que aquele relativo às funções de interpolação dos elementos. Esse fato parece explicar por que a solução encontrada por meio de elementos cúbicos e quárticos é significativamente melhor. Nesse caso acredita-se que os graus de liberdade fornecidos por essas funções são suficientes para garantir a suavidade da solução do potencial e conseqüentemente um comportamento melhor da derivada tangencial correspondente. No Exemplo 3, pode-se perceber que o resultado do potencial para a formulação auto-regularizada do potencial com elementos quadráticos apresentou valores extremamente pobres e oscilatórios para as malhas 3 e 4, mas esse resultado finalmente convergiu para o valor de referência de forma oscilatória com o

refinamento das malhas. No Exemplo 4 essa formulação também apresentou comportamento oscilatório, similar ao ocorrido no Exemplo 3, pois ao refinar uma vez a malha 1 os resultados pioraram significativamente, entretanto foi possível obter resultados que convergiram para a solução de referência para os dois refinamentos seguintes.

Além disto, a influência do gradiente regularizador considerado como a média dos gradientes nodais, calculados localmente com base no esquema de interpolação dos elementos compartilhando o ponto de colocação, é provavelmente uma das causas que contribui para o comportamento oscilatório na resposta do potencial quando se utilizou a equação auto-regularizada do fluxo e elementos quadráticos.

Este tipo de erro não é introduzido quando o ponto de colocação está dentro do elemento e é interessante notar que o comportamento oscilatório não foi observado nas aplicações usando elementos cúbicos e quárticos nos Exemplos 3 e 4.

Não possuir pelo menos termos quadráticos parece ser uma restrição muito forte para a derivada tangencial do potencial no caso de elementos quadráticos. Os termos de ordem mais alta, presentes na derivada tangencial do potencial ao se utilizar elementos cúbicos e quárticos na formulação auto-regularizada do fluxo, parecem dar os graus de liberdade necessários para se obter uma suavidade razoável para a solução do potencial. É necessário um aprofundamento da pesquisa para confirmação dessa observação.

O cálculo dos valores de potencial e gradiente do potencial para pontos internos é feito numa etapa de pós-processamento, após a determinação da solução no contorno. Neste trabalho este cálculo foi feito utilizando-se as formulações padrão e as formulações regularizadas. Pode-se perceber que, quando os pontos internos estão distantes do contorno, o resultado obtido através da utilização das duas formas foi praticamente o mesmo, representando muito bem a solução exata do problema. Porém quando esses pontos se aproximaram do contorno a formulação regularizada superou totalmente a formulação padrão, que apresentou mal comportamento devido ao problema de quase singularidade que tende a ocorrer nesse caso.

Finalmente, através dos estudos realizados ao longo deste trabalho pode-se constatar que as formulações não-singulares do MEC aqui apresentadas fornecem

excelentes resultados, sendo necessário apenas a utilização adequada da técnica e da ordem de integração, para o caso da formulação auto-regularizada do potencial, e um esquema de interpolação de grau superior para a utilização da formulação auto-regularizada do fluxo. Dessa forma as formulações não-singulares apresentadas podem ser consideradas como uma alternativa robusta às formulações fortemente singulares para a solução de problemas bidimensionais de potencial, podendo ser estendida a problemas de elasticidade e de mecânica da fratura.

7- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARIZA, M.P.; DOMINGUES, J.; GALLEGO, R.; Flux and traction - boundary elements without hypersingular or strongly singular integrals, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 48, p.111-135, 1999.
- BREBBIA, C.A.; DOMINGUES, J.; Boundary Elements: An Introductory Course. 2.ed. Boston: *Computational Mechanics Publication e McGraw-Hill Book Company*, 1992.
- BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C.; Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering. Springer-Verlag: *Berlin Heidelberg New York Tokyo*, 1984.
- CHIEN, C.C.; RAJIYAH, H.; ATLURI, S.N.; On the evaluation of hyper-singular integrals arising in the boundary element method for linear elasticity, *Comp. Mech.*, 8, p.57-70.,1991.
- CHIEN, C.C.; RAJIYAH, H.; ATLURI, S.N.; An effective method for solving hypersingular integral equations in 3-D acoustics, *J. Acoust. Soc.*, n. 88, p. 918-937, 1990.
- CRUSE, T.A.; RICHARDSON, P.A.; Self-regularized hypersingular BEM for Laplace's equation. In M. Bonnet, A.M. Sändig and W.L. Wendland, editors, *Mathematical Aspects of Boundary Element Methods*, Boca Raton, *Chapman & Hall*, 2000.
- CRUSE, T.A.; An Improved Boundary Integral Equation Method for Three Dimensional Elastic Stress Analysis, *Computers & Structures*, 4, p.741-754, 1974.
- CRUSE, T.A.; Application of the Boundary-Integral Equation solution method in solid mechanics, *Dep. of civil Eng.*, Southampton, England, 1972.
- CRUSE, T.A.; AITHAL, R.; Non-singular boundary integral equation implementation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 36, p.237-254, 1993.

- CRUSE, T.A.; Numerical solutions in three dimensional elastostatics, *Int. J. Sol. Struct.*, 5, p.1259-1274, 1969.
- CRUSE, T.A.; RICHARDSON J.D.; Self-regularized Hypersingular BEM for Laplace's Equation: Mathematical Aspects of Boundary Element Methods, *special issue for IABEM 98*, Edison Wesley Longman, 1999.
- CRUSE, T.A.; RICHARDSON, J.D.; Non-singular Somigliana Stress Identities in Elasticity, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 39, p.3273-3304, 1996.
- CRUSE, T.A.; RICHARDSON, J.D.; On the non-singular Traction-BIE in Elasticity, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37, p.2041-2072, 1994.
- CRUSE, T.A.; VAN BUREN; A three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack, *Int. J. Frac. Mech.*, 7, p.1-15, 1971.
- CRUSE, T.A.; HUANG, Q.; RICHARDSON, J.D.; On the Validity of Conforming BEM Algorithms for Hypersingular Boundary Integral Equations, *Computational Mechanics*, 20, p.213-220, 1997.
- CRUSE, T.A.; JORGE, A.B.; RIBEIRO, G.O.; Self-regularized Approaches for the Hypersingular Boundary Integral Formulation for Laplace's Equation in 2-D, *XX CILAMCE: 20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, São Paulo, 1999.
- CRUSE, T.A.; SUWITO W.; On the Somigliana stress identity in Elasticity *Computational Mechanics*, 11, p.1-10, 1993.
- CRUSE, T.A.; Mathematical Foundations of the Boundary-Integral Equation Method in Solid Mechanics. *Conn :Pratt & Whitney Aircraft Group United Technologies Corporation*, 1977.
- HAYAMI, K.; BREBBIA, C.A.; Quadrature methods for singular and nearly singular integrals in 3-D boundary element method, - *Proc. 10th Int. Conf. Cruse, T. A. e on BEM, Southampton, U.K.*, p.237-264, 1988.
- HUANG Q.; CRUSE, T.A.; Some notes on Singular Integral Techniques in Boundary Element Analysis, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 36, p.2643-2659, 1993.
- HUANG Q.; CRUSE, T.A.; On the non-singular traction-BIE in elasticity- *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37, p.2041-2072, 1994.
- HUANG, Q.; Boundary Element Methods: An Introduction. Department of Mechanical Engineering. *Vanderbilt University*, 1993.
- JASWON, M.A.; SYMM, G.T.; Integral equation methods in potential theory and elastostatics. *Academic Press*, 1977.

- JASWON, M.A.; Integral equation methods in potential theory I, *Royal Society*, London, p.23-32, 1963.
- JORGE, A.B.; RIBEIRO, G.O.; CRUSE, T.A.; FISHER, T.S.; Self-regular boundary integral formulations for Laplace's equation in 2-D. *Int. J. Num.Meth. Eng.*, 51, p.1-29, 2001.
- KELLOG, O.D.; Foundations of Potential Theory. New York: *Springer-Verlag*, 1967;
- KREITH, F.; Princípio da transmissão de calor. São Paulo, *ed. brasileira*, 1973.
- KRISHNASAMY, G.; RIZZO, F.J.; RUDOLPHI, T.J.; Continuity requirements of the hypersingular boundary integral equation method. *Comput.Mech.*, 9, p.267-284, 1992.
- KUPRADZE, V.D.; Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity, *Noth-Holland Publishing Company*, 1979.
- LACHAT, J.C.; WATSON, J.O.; Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics- *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10, p.991-1005, 1976.
- LEAN, M. H.; WEXLER, A.; Accurate numerical integration of singular boundary element kernels over boundaries with singularities – *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 21, p.211-228, 1985.
- LIU, Y.; RUDOLPHI, T.J.; New identities for fundamental solutions and their applications to non-singular boundary elements formulations. *Comput.Mech.*, 22, p.286-292, 1999.
- LIU, Y.; RUDOLPHI, T.J.; New Identities for Fundamental Solutions and Their Applications to Non-singular Boundary Element Formulations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 22, p.73-92, 1986.
- MARTIN, P.A.; RIZZO, F.J.; Hypersingular integrals: How smooth must the density be?, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 39, p.687-704, 1996.
- MARTIN, P.A.; RIZZO, F.P.; CRUSE, T.A.; Smoothness Relaxation Strategies for Singular and Hypersingular Integral Equations, *Int. J. for Num. Meth. Eng.*, 42, p.885-906, 1998.
- MOTZ, H.; The treatment of singularities of partial differential equations by relaxation methods, *Quart. Appl. Math.*, IV, 371-7, 1946.
- PARÍS, F.; CAÑAS, J.; Boundary element method: fundamentals and applications. *Oxford Univ. Press*, 1997.

- PRADO, A.A.; TELLES, J.C.F.; Uma formulação do método dos elementos de contorno para problemas bidimensionais de potencial. *SIMMEC*, 1991.
- PRADO, A.A.; TELLES, J.C.F.; Uma verificação do efeito da continuidade da derivada do potencial na formulação hipersingular do método dos elementos de contorno. *CILAMCE*, 1995.
- RIBEIRO, G.O.; CRUZ, J.P.; JORGE, A.B.; The self-regularized BEM for 2-D Laplace's equation based on the potential BIE .In: *Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering – 21st*. CILAMCE, Rio de Janeiro, 2000.
- RIBEIRO, G.O.; JORGE, A.B.; Formulações auto-regularizadas do método dos elementos de contorno para problemas de potencial .In: *Jornadas Sudamericanas de Ingeniería estructural – JUBILEO, 29*, Uruguai, 2000.
- RICHARDSON, J.D.; CRUSE, T.A.; HUANG, Q.; On the validity of conforming BEM algorithms for hypersingular boundary integral equations. *Comput.Mech.*, 20, p. 213-220, 1997.
- RICHARDSON, J.D.; CRUSE, T.A.; Weakly Singular Stress-BEM for 2D Elastostatics, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 45, p.13-35, 1999.
- RIZZO, F.J.; An Integral Equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *University of Washington*, p.83-95, 1967.
- SILVA, N.A.; Aplicação do método dos elementos de contorno a placas com enrijecedores utilizando a teoria de Reissner, *São Carlos*, Tese de doutorado. 1996.
- SYMM, G.T.; Integral equation methods in potential theory II, *Royal Society*, London, p.23-32, 1963;
- TELLES, J. C. F.; A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24, p.959-973, 1987.
- WHITEMAN J.R.; PAPAMICHAEL, N.; Treatment of mixed boundary value problems by conformal transformation methods. *J. Appl. Math Physics*, 23, p. 655-664, 1972.
- YOUNG, A.; Improved Numerical Method for the Traction Boundary Integral Equation by Application of Stoke's Theorem, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 40, p.3141-3161, 1997.

APÊNDICES

APÊNDICES

Apêndice 1 - Cálculo com integração logarítmica

A implementação da quadratura logarítmica para a avaliação da integral fracamente singular remanescente na Equação Integral de Contorno auto-regularizada do potencial é feita seguindo procedimentos análogos aos apresentados por Brebbia et al. (1984).

Seja a integral fracamente singular remanescente na Eq.4.8 onde

$$\frac{du}{dn} = q = \bar{\nabla}u \cdot \bar{n}$$

e sabendo que u^* segue a Eq.3.1, tem-se:

$$\sum_{k=1}^N \int_{\Delta S_k} u^*(P, Q) q(Q) dS(Q) \quad (A1.1)$$

Substituindo a Eq.4.2 na Eq.A1.1 escreve-se:

$$\sum_{k=1}^N \int_{\Delta S_k} u^*(N_1 q^1 + N_2 q^2 + \dots + N_i q^i) dS$$

ou

$$\sum_{k=1}^N \int_{\Delta S_k} (u^* N_1 q^1 + u^* N_2 q^2 + \dots + u^* N_i q^i) dS$$

ou ainda

$$\sum_{k=1}^N \int_{\Delta S_k} (a_{jl}^{(1)} q^1 + a_{jl}^{(2)} q^2 + \dots + a_{jl}^{(i)} q^i) dS$$

Nessa equação $a_{jl}^{(i)}$ vale:

$$a_{jl}^{(i)} = \int_{\Delta S_k} u^* N_i dS$$

para $i = 1, 2, \dots, m$,

onde m corresponde ao número de nós do elemento.

$$a_{jl}^{(i)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta S_k} \ln \frac{1}{r} N_i dS$$

$$a_{jl}^{(i)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{r} N_i |J| d\xi$$

Para problemas bidimensionais $a_{jl}^{(i)}$ são integrais fracamente singulares onde pode-se utilizar quadratura logarítmica, Eq.A1.2:

$$\int_0^1 f(\eta) \ln \frac{1}{\eta} d\eta = \sum_{j=1}^m f(n_j) w_j \quad (A1.2)$$

Como o limite de integração para a quadratura logarítmica varia de 0 a 1, deve-se fazer uma transformação sobre o limite da integral utilizada com quadratura de Gauss padrão, que varia de -1 a 1 , para o atual. Para isso deve-se escrever r para diferentes casos. Neste trabalho o processo de transformação será detalhado para elementos quadráticos. Para elementos cúbicos e quárticos serão fornecidas apenas as equações principais.

Para esta transformação ξ varia de -1 a 1 e η varia de 0 a 1 .

Seja r a distância do ponto fonte ao ponto de integração.

$$r^2 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \quad (A1.3)$$

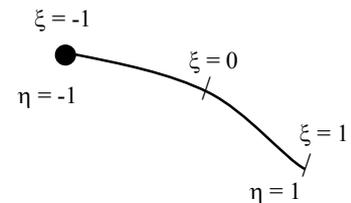
onde x_p e y_p são as coordenadas do ponto de colocação.

O valor de r varia conforme a posição do ponto de colocação sobre o elemento

1) Elementos quadráticos

a) Ponto fonte sobre o 1º nó $\xi = -1$

$$x - x_p = x - x_1$$



onde

$$x = x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3$$

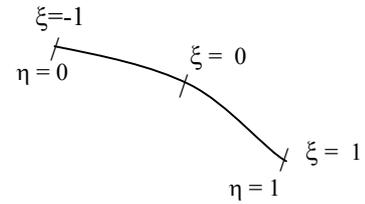
$$x - x_p = x - x_1 = x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 - x_1 = x_1 (N_1 - 1) + x_2 N_2 + x_3 N_3$$

Substituindo N_1 , N_2 e N_3 , pelas respectivas funções de forma, para elementos quadráticos, Eq.4.3, tem-se:

$$x - x_p = \frac{1}{2} x_1 (\xi - 2)(\xi + 1) + x_2 (1 - \xi)(\xi + 1) + \frac{1}{2} x_3 \xi (\xi + 1) \quad (A1.4)$$

Faz-se uma mudança de variáveis para utilizar integração logarítmica, visto que as funções de forma e o Jacobiano utilizados no programa foram deduzidos para coordenadas intrínsecas que variam de -1 a 1 :

$$\left. \begin{aligned} \eta &= a\xi + b \\ \eta = 0 \quad \xi &= -1 \\ \eta = 1 \quad \xi &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} a &= 1/2 \\ b &= 1/2 \end{aligned}$$



De forma que:

$$\begin{aligned} \eta &= 1/2\xi + 1/2 \\ \xi &= 2\eta - 1 \end{aligned}$$

Reescrevendo a Eq.A1.4 de forma a se ter ξ ou um múltiplo de ξ em evidência, tem-se:

$$x - x_p = \frac{1 + \xi}{2} [(\xi - 2)x_1 + 2(1 - \xi)x_2 + \xi x_3]$$

ou

$$x - x_p = \frac{1 + \xi}{2} g_{1x}(\xi) \quad (A1.5)$$

onde

$$g_{1x}(\xi) = [(\xi - 2)x_1 + 2(1 - \xi)x_2 + \xi x_3] \quad (A1.6)$$

Faz-se o mesmo procedimento para y obtendo-se:

$$y - y_p = \frac{1 + \xi}{2} g_{1y}(\xi) \quad (A1.7)$$

onde

$$g_{1y}(\xi) = [(\xi - 2)y_1 + 2(1 - \xi)y_2 + \xi y_3] \quad (A1.8)$$

Substituindo as Eq.A1.5 e A1.7, na Eq.A1.2 tem-se

$$r^2 = \left[\frac{1+\xi}{2} g_{1x}(\xi) \right]^2 + \left[\frac{1+\xi}{2} g_{1y}(\xi) \right]^2$$

$$r = \frac{1+\xi}{2} \left[g_{1x}(\xi)^2 + g_{1y}(\xi)^2 \right]^{1/2}$$

Dessa forma:

$$\ln r = \ln \left[\frac{1+\xi}{2} \right] + \ln \left[g_{1x}^2(\xi) + g_{1y}^2(\xi) \right]^{1/2} = \ln \left[\frac{1+\xi}{2} \right] + \frac{1}{2} \ln \left[g_{1x}^2(\xi) + g_{1y}^2(\xi) \right] \quad (A1.9)$$

Como, em coordenadas intrínsecas para a utilização de Gauss padrão $a_{jl}^{(i)}$ é igual a

$$a_{jl}^{(i)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 J(\xi) N_k(\xi) \ln r d\xi \quad (A1.10)$$

Substitui-se a Eq.A1.8 em Eq.A1.9, obtendo-se

$$a_{jl}^{(i)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 J(\xi) N_i(\xi) \left\{ \ln \frac{1+\xi}{2} + \frac{1}{2} \ln \left[g_{1x}^2 + g_{1y}^2 \right] \right\} d\xi$$

ou

$$a_{jl}^{(i)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 J(\xi) N_i(\xi) \ln \frac{1+\xi}{2} d\xi - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 J(\xi) N_i(\xi) \frac{1}{2} \ln \left[g_{1x}^2 + g_{1y}^2 \right] d\xi \quad (A1.11)$$

Na Eq.A1.11 a primeira integral é fracamente singular e será calculada por integração logarítmica, Eq.A1.2 e a segunda é não-singular e será calculada por integração de Gauss padrão.

Primeira Integral da Eq.A1.11:

$$I1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 J(\xi) N_i(\xi) \ln \frac{1+\xi}{2} d\xi$$

Como:

$$\eta = \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}$$

$$\xi = 2\eta - 1$$

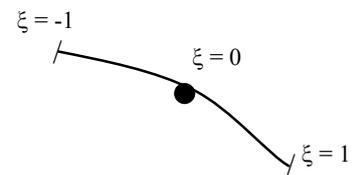
$$d\xi = 2 d\eta$$

Tem-se que

$$I1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 J(\xi) N_i(\xi) \ln \eta 2 d\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^1 J(\xi) N_i(\xi) \ln \frac{1}{\eta} d\eta \quad (A1.12)$$

b) Ponto fonte sobre o 2º nó $\xi = 0$

$$x - x_p = x - x_2$$

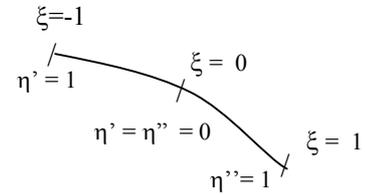


então

$$x - x_p = \frac{1}{2} x_1 \xi (\xi - 1) - x_2 \xi^2 + \frac{1}{2} x_3 \xi (\xi + 1) \quad (A1.13)$$

Para pontos no interior do elemento, a mudança de variáveis é feita em dois trechos, como pode ser observado a seguir.

$$\begin{array}{l} \eta = -\xi \\ \xi_1 = -\eta \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} \eta = \xi \\ \xi_2 = \eta \end{array}$$



$$x - x_p = \xi g_{1x}(\xi)$$

onde

$$g_{1x}(\xi) = \left[\left(\frac{\xi-1}{2} \right) x_1 - \xi x_2 + \left(\frac{\xi+1}{2} \right) x_3 \right] \quad (A1.15)$$

e

$$y - y_p = \xi g_{1y}(\xi) \quad (A1.16)$$

onde

$$g_{1y}(\xi) = \left[\left(\frac{\xi-1}{2} \right) y_1 - \xi y_2 + \left(\frac{\xi+1}{2} \right) y_3 \right] \quad (A1.17)$$

$$r = \xi \left[g_{1x}(\xi)^2 + g_{1y}(\xi)^2 \right]^{1/2}$$

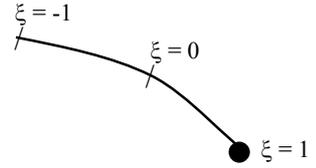
A integral fracamente singular, de acordo com o procedimentos análogos aos utilizados para o primeiro ponto, é então dada pela seguinte equação

$$I1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 J(\xi_1) N_i(\xi_1) \ln \eta d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 J(\xi_2) N_i(\xi_2) \ln \eta d\eta$$

$$I1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 J(\xi 1) N_i(\xi 1) \ln \frac{1}{\eta} d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 J(\xi 2) N_i(\xi 2) \ln \frac{1}{\eta} d\eta \quad (A1.18)$$

b) Ponto fonte sobre o 3º nó $\xi = 1$

$$x - x_p = x - x_3$$



então

$$x - x_p = \frac{1}{2} x_1 \xi (\xi - 1) + x_2 (1 - \xi)(\xi + 1) + \frac{1}{2} x_3 (1 - \xi)(-\xi - 2) \quad (A1.19)$$

A mudança de variáveis é dada por

$$\eta = \frac{1 - \xi}{2}$$

$$\xi = 1 - 2\eta$$

Então

$$x - x_p = \frac{1 - \xi}{2} g_{1x}(\xi) \quad (A1.20)$$

onde

$$g_{1x}(\xi) = [(-\xi)x_1 + 2(1 + \xi)x_2 + (-\xi - 2)x_3] \quad (A1.21)$$

e

$$y - y_p = \frac{1 - \xi}{2} g_{1y}(\xi) \quad (A1.22)$$

onde

$$g_{1y}(\xi) = [(-\xi)y_1 + 2(1 + \xi)y_2 + (-\xi - 2)y_3] \quad (A1.23)$$

$$r = \frac{1-\xi}{2} [g_{1x}(\xi)^2 + g_{1y}(\xi)^2]^{1/2}$$

A integral fracamente singular é dada por

$$I1 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 J(\xi) N_i(\xi) \ln \frac{1}{\eta} d\eta \quad (A1.24)$$

Essas integrais não-singulares e fracamente singulares apresentadas anteriormente são, então, as integrais a serem calculadas para elementos quadráticos ao se utilizar quadratura logarítmica.

2) Elementos cúbicos

A posição dos nós desses elementos podem ser observados na Fig.4.1-b e os procedimentos para chegar às equações seguem o que foi apresentado para elementos quadráticos.

a) Ponto fonte sobre o 1º nó $\xi = -1$

$$x - x_p = x - x_1$$

$$x - x_p = \frac{1}{16} x_1 (-9\xi^3 + 9\xi^2 + \xi - 17) + \frac{9}{16} x_2 (1 - 3\xi)(1 - \xi^2) + \frac{9}{16} x_3 (1 + 3\xi)(1 - \xi^2) + \frac{1}{16} x_4 (\xi + 1)(9\xi^2 - 1) \quad (A1.25)$$

mudança de variáveis

$$\eta = \frac{1+\xi}{2}$$

$$\xi = 2\eta - 1$$

Dessa forma

$$x - x_p = \frac{1 + \xi}{2} g_{1x}(\xi) \quad (A1.26)$$

onde

$$g_{1x} = \frac{1}{8} x_1 (-9\xi^2 + 18\xi - 17) + \frac{9}{8} x_2 (3\xi^2 - 4\xi + 1) + \frac{9}{8} x_3 (-3\xi^2 + 2\xi + 1) + \frac{1}{8} x_4 (9\xi^2 - 1) \quad (A1.27)$$

e

$$y - y_p = \frac{1 + \xi}{2} g_{1y}(\xi) \quad (A1.28)$$

onde

$$g_{1y} = \frac{1}{8} y_1 (-9\xi^2 + 18\xi - 17) + \frac{9}{8} y_2 (3\xi^2 - 4\xi + 1) + \frac{9}{8} y_3 (-3\xi^2 + 2\xi + 1) + \frac{1}{8} y_4 (9\xi^2 - 1) \quad (A1.29)$$

$$r = \frac{1 + \xi}{2} [g_{1x}(\xi)^2 + g_{1y}(\xi)^2]^{1/2}$$

A integral fracamente singular é:

$$I1 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 J(\xi) N_i(\xi) \ln \frac{1}{\eta} d\eta \quad (A1.30)$$

b) Ponto fonte sobre o 2º nó $\xi = -1/3$

$$x - x_p = x - x_2$$

$$\begin{aligned}
x - x_p = & \frac{1}{16} x_1 (\xi - 1)(1 - 9\xi^2) + \frac{1}{16} x_2 (-1,5\xi - 0,5)(-18\xi^2 + 12\xi + 14) \\
& + \frac{9}{16} x_3 (1 + 3\xi)(1 - \xi^2) + \frac{1}{16} x_4 (\xi + 1)(9\xi^2 - 1)
\end{aligned} \quad (A1.31)$$

mudança de variáveis

$$\begin{aligned}
\eta = -1,5\xi - 0,5 & & \eta = 0,75\xi + 0,25 \\
\xi_1 = -\frac{(\eta + 0,5)}{1,5} & \text{e} & \xi_2 = \frac{(\eta - 0,25)}{0,75}
\end{aligned}$$

Dessa forma

$$x - x_p = (-1,5\xi - 0,5) g_{1x}(\xi) \quad (A1.32)$$

onde

$$\begin{aligned}
g_{1x} = & \frac{1}{16} x_1 (6\xi^2 - 8\xi + 2) + \frac{1}{16} x_2 (-18\xi^2 + 12\xi + 14) + \frac{9}{16} x_3 (2\xi^2 - 2) \\
& + \frac{1}{16} x_4 (-6\xi^2 - 4\xi + 2)
\end{aligned} \quad (A1.33)$$

e

$$y - y_p = (-1,5\xi - 0,5) g_{1y}(\xi) \quad (A1.34)$$

onde

$$\begin{aligned}
g_{1y} = & \frac{1}{16} y_1 (6\xi^2 - 8\xi + 2) + \frac{1}{16} y_2 (-18\xi^2 + 12\xi + 14) + \frac{9}{16} y_3 (2\xi^2 - 2) \\
& + \frac{1}{16} y_4 (-6\xi^2 - 4\xi + 2)
\end{aligned} \quad (A1.35)$$

$$r = (-1,5\xi - 0,5) [g_{1x}(\xi)^2 + g_{1y}(\xi)^2]^{\frac{1}{2}}$$

A integral fracamente singular é:

$$I1 = \frac{1}{3\pi} \int_0^1 J(\xi1)N_i(\xi1) \ln \frac{1}{\eta} d\eta + \frac{1}{1,5\pi} \int_0^1 J(\xi2)N_i(\xi2) \ln \frac{1}{\eta} d\eta - \frac{0,23104906}{\pi} \int_{-1}^1 J(\xi3)N_i(\xi3) \ln \frac{1}{\gamma} d\gamma \quad (A1.36)$$

onde

$$\xi3 = \frac{\gamma + 0,5}{1,5}$$

e γ coordenada para quadratura de Gauss padrão ξ

c) Ponto fonte sobre o 3º nó $\xi = 1/3$

$$x - x_p = x - x_3$$

$$x - x_p = \frac{1}{16}x_1(\xi - 1)(1 - 9\xi^2) + \frac{9}{16}x_2(1 - 3\xi)(1 - \xi^2) + \frac{1}{16}x_3(-0,75\xi + 0,25)(36\xi^2 + 24\xi - 28) + \frac{1}{16}x_4(\xi + 1)(9\xi^2 - 1) \quad (A1.37)$$

mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \eta = -0,75\xi + 0,25 & \quad \text{e} \quad \eta = 1,5\xi - 0,5 \\ \xi1 = \frac{(-\eta + 0,25)}{0,75} & \quad \xi2 = \frac{(\eta + 0,5)}{1,5} \end{aligned}$$

Dessa forma

$$x - x_p = (-0,75\xi + 0,25) g_{1x}(\xi) \quad (A1.38)$$

onde

$$g_{1x} = \frac{1}{16}x_1(12\xi^2 - 8\xi - 4) + \frac{9}{16}x_2(-4\xi^2 + 4) + \frac{1}{16}x_3(36\xi^2 + 24\xi - 28) + \frac{1}{16}x_4(-12\xi^2 - 16\xi - 4) \quad (A1.39)$$

e

$$y - y_p = (-0,75\xi + 0,25)g_{1y}(\xi) \quad (A1.40)$$

onde

$$g_{1y} = \frac{1}{16}y_1(12\xi^2 - 8\xi - 4) + \frac{9}{16}y_2(-4\xi^2 + 4) + \frac{1}{16}y_3(36\xi^2 + 24\xi - 28) + \frac{1}{16}y_4(-12\xi^2 - 16\xi - 4) \quad (A1.41)$$

$$r = (-0,75\xi + 0,25)[g_{1x}(\xi)^2 + g_{1y}(\xi)^2]^{1/2}$$

A integral fracamente singular é:

$$I1 = \frac{1}{1,5\pi} \int_0^1 J(\xi1)N_i(\xi1) \ln \frac{1}{\eta} d\eta + \frac{1}{3\pi} \int_0^1 J(\xi2)N_i(\xi2) \ln \frac{1}{\eta} d\eta + \frac{0,11552453}{\pi} \int_{-1}^1 J(\xi3)N_i(\xi3) \ln \frac{1}{\gamma} d\gamma \quad (A1.42)$$

onde

$$\xi3 = \frac{\gamma + 2}{3}$$

e γ coordenada para quadratura de Gauss padrão ξ

d) Ponto fonte sobre o 4º nó $\xi = 1$

$$x - x_p = x - x_4$$

$$\begin{aligned}
x - x_p = & \frac{1}{16} x_1 (\xi - 1)(1 - 9\xi^2) + \frac{9}{16} x_2 (1 - 3\xi)(1 - \xi^2) + \frac{9}{16} x_3 (1 + 3\xi)(1 - \xi^2) \\
& + \frac{1}{16} x_4 (-\xi + 1)(-9\xi^2 - 18\xi - 17) \quad (A1.43)
\end{aligned}$$

mudança de variáveis

$$\eta = \frac{1 - \xi}{2}$$

$$\xi = 1 - 2\eta$$

Dessa forma

$$x - x_p = \frac{1 - \xi}{2} g_{1x}(\xi) \quad (A1.44)$$

onde

$$\begin{aligned}
g_{1x} = & \frac{1}{8} x_1 (9\xi^2 - 1) + \frac{9}{8} x_2 (-3\xi^2 - 2\xi + 1) + \frac{9}{8} x_3 (3\xi^2 + 4\xi + 1) \\
& + \frac{1}{8} x_4 (-9\xi^2 - 18\xi - 17) \quad (A1.45)
\end{aligned}$$

e

$$y - y_p = \frac{1 - \xi}{2} g_{1y}(\xi) \quad (A1.46)$$

onde

$$\begin{aligned}
g_{1y} = & \frac{1}{8} y_1 (9\xi^2 - 1) + \frac{9}{8} y_2 (-3\xi^2 - 2\xi + 1) + \frac{9}{8} y_3 (3\xi^2 + 4\xi + 1) \\
& + \frac{1}{8} y_4 (-9\xi^2 - 18\xi - 17) \quad (A1.47)
\end{aligned}$$

$$r = \frac{1-\xi}{2} [g_{1x}(\xi)^2 + g_{1y}(\xi)^2]^{1/2}$$

A integral fracamente singular é:

$$I1 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 J(\xi) N_i(\xi) \ln \frac{1}{\eta} d\eta \quad (A1.48)$$

3) Elementos quárticos

A posição dos nós dos elementos quárticos podem ser observados na Fig.4.1-c e os procedimentos para chegar às equações seguem o que foi apresentado para elementos quadráticos.

a) Ponto fonte sobre o 1º nó $\xi = -1$

$$x - x_p = x - x_1$$

$$\begin{aligned} x - x_p = & \frac{1}{1,5} x_1 ((\xi + 0,5)\xi(\xi - 0,5)(\xi - 1) - 1,5) + \frac{1}{1,5} x_2 (-4\xi(\xi + 1)(\xi - 0,5)(\xi - 1)) \\ & + x_3 ((4(\xi + 1)(\xi + 0,5)(\xi - 0,5)(\xi - 1)) + \frac{1}{1,5} x_4 ((-4\xi(\xi + 1)(\xi + 0,5)(\xi - 1)) \\ & + \frac{1}{1,5} x_5 ((\xi + 1)(\xi + 0,5)\xi(\xi - 0,5)) \end{aligned} \quad (A1.49)$$

mudança de variáveis

$$\eta = \frac{1+\xi}{2}$$

$$\xi = 2\eta - 1$$

Dessa forma

$$x - x_p = \frac{1 + \xi}{2} g_{1x}(\xi) \quad (A1.50)$$

onde

$$\begin{aligned} g_{1x} = & \frac{1}{0,75} x_1 (\xi^3 - 2\xi^2 + 1,75\xi - 1,5) - \frac{4}{0,75} x_2 (\xi^3 - 1,5\xi^2 + 0,5\xi) \\ & + \frac{6}{0,75} x_3 (\xi^3 - \xi^2 - 0,25\xi + 0,25) - \frac{4}{0,75} x_4 (\xi^3 - 0,5\xi^2 - 0,5\xi) \\ & + \frac{1}{0,75} x_5 (\xi^3 - 0,25\xi) \end{aligned} \quad (A1.51)$$

e

$$y - y_p = \frac{1 + \xi}{2} g_{1y}(\xi) \quad (A1.52)$$

onde

$$\begin{aligned} g_{1y} = & \frac{1}{0,75} y_1 (\xi^3 - 2\xi^2 + 1,75\xi - 1,5) - \frac{4}{0,75} y_2 (\xi^3 - 1,5\xi^2 + 0,5\xi) \\ & + \frac{6}{0,75} y_3 (\xi^3 - \xi^2 - 0,25\xi + 0,25) - \frac{4}{0,75} y_4 (\xi^3 - 0,5\xi^2 - 0,5\xi) \\ & + \frac{1}{0,75} y_5 (\xi^3 - 0,25\xi) \end{aligned} \quad (A1.53)$$

$$r = \frac{1 + \xi}{2} [g_{1x}(\xi)^2 + g_{1y}(\xi)^2]^{1/2}$$

A integral fracamente singular é dada por

$$I1 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 J(\xi) N_i(\xi) \ln \frac{1}{\eta} d\eta \quad (A1.54)$$

b) Ponto fonte sobre o 2º nó $\xi = -0,5$

$$x - x_p = x - x_2$$

$$\begin{aligned} x - x_p &= \frac{1}{1,5} x_1 ((\xi + 0,5)\xi(\xi - 0,5)(\xi - 1)) - \frac{1}{0,375} x_2 (\xi(\xi + 1)(\xi - 0,5)(\xi - 1) - 0,375) \\ &\quad + x_3 ((4(\xi + 1)(\xi + 0,5)(\xi - 0,5)(\xi - 1)) - \frac{1}{0,375} x_4 ((\xi(\xi + 1)(\xi + 0,5)(\xi - 1)) \\ &\quad + \frac{1}{1,5} x_5 ((\xi + 1)(\xi + 0,5)\xi(\xi - 0,5)) \end{aligned} \quad (A1.55)$$

mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \eta &= -2\xi - 1 & \eta &= 0,666\xi + 0,333 \\ \xi_1 &= -\frac{(\eta + 1)}{2} & \xi_2 &= \frac{(\eta - 0,333)}{0,666} \end{aligned} \quad e$$

Dessa forma

$$x - x_p = (-2\xi - 1)g_{1x}(\xi) \quad (A1.56)$$

onde

$$\begin{aligned} g_{1x} &= \frac{1}{1,5} x_1 (-0,5\xi^3 + 0,75\xi^2 - 0,25\xi) - \frac{1}{0,375} x_2 (-0,5\xi^3 + 0,5\xi^2 + 0,25\xi - 0,375) \\ &\quad + \frac{1}{0,25} x_3 (-0,5\xi^3 + 0,25\xi^2 + 0,5\xi - 0,25) - \frac{1}{0,375} x_4 (-0,5\xi^3 + 0,5\xi) \\ &\quad + \frac{1}{1,5} x_5 (-0,5\xi^3 - 0,25\xi^2 + 0,25\xi) \end{aligned} \quad (A1.57)$$

e

$$y - y_p = (-2\xi - 1)g_{1y}(\xi) \quad (A1.58)$$

onde

$$\begin{aligned}
 g_{1y} = & \frac{1}{1,5} y_1 (-0,5\xi^3 + 0,75\xi^2 - 0,25\xi) - \frac{1}{0,375} y_2 (-0,5\xi^3 + 0,5\xi^2 + 0,25\xi - 0,375) \\
 & + \frac{1}{0,25} y_3 (-0,5\xi^3 + 0,25\xi^2 + 0,5\xi - 0,25) - \frac{1}{0,375} y_4 (-0,5\xi^3 + 0,5\xi) \\
 & + \frac{1}{1,5} y_5 (-0,5\xi^3 - 0,25\xi^2 + 0,25\xi)
 \end{aligned} \tag{A1.59}$$

$$r = (-2\xi - 1) [g_{1x}(\xi)^2 + g_{1y}(\xi)^2]^{\frac{1}{2}}$$

A integral fracamente singular é dada por:

$$\begin{aligned}
 I1 = & \frac{1}{4\pi} \int_0^1 J(\xi1) N_i(\xi1) \ln \frac{1}{\eta} d\eta + \frac{1,5}{2\pi} \int_0^1 J(\xi2) N_i(\xi2) \ln \frac{1}{\eta} d\eta \\
 & - \frac{0,4119796}{\pi} \int_{-1}^1 J(\xi3) N_i(\xi3) \ln \frac{1}{\gamma} d\gamma
 \end{aligned} \tag{A1.60}$$

onde

$$\xi3 = \frac{\gamma + 0,333}{1,333}$$

e γ coordenada para quadratura de Gauss padrão ξ

c) Ponto fonte sobre o 3º nó $\xi = 0$

$$x - x_p = x - x_3$$

$$\begin{aligned}
x - x_p &= \frac{1}{1,5} x_1 ((\xi + 0,5)\xi(\xi - 0,5)(\xi - 1)) - \frac{1}{0,375} x_2 (\xi(\xi + 1)(\xi - 0,5)(\xi - 1)) \\
&+ x_3 ((4(\xi + 1)(\xi + 0,5)(\xi - 0,5)(\xi - 1) - 1) - \frac{1}{0,375} x_4 ((\xi(\xi + 1)(\xi + 0,5)(\xi - 1)) \\
&+ \frac{1}{1,5} x_5 ((\xi + 1)(\xi + 0,5)\xi(\xi - 0,5)) \quad (A1.61)
\end{aligned}$$

mudança de variáveis

$$\begin{array}{ccc}
\eta = -\xi & & \eta = \xi \\
\xi_1 = -\eta & \text{e} & \xi_2 = \eta
\end{array}$$

Dessa forma

$$x - x_p = \xi g_{1x}(\xi) \quad (A1.62)$$

onde

$$\begin{aligned}
g_{1x} &= 0,666x_1 (\xi^3 - \xi^2 - 0,25\xi + 0,25) - 2,666x_2 (\xi^3 - 0,5\xi^2 - \xi + 0,5) \\
&+ 4x_3 (\xi^3 - 1,25\xi) - 2,666x_4 (\xi^3 + 0,5\xi^2 - \xi - 0,5) \\
&+ 0,666x_5 (\xi^3 + \xi^2 - 0,25\xi - 0,25) \quad (A1.63)
\end{aligned}$$

e

$$x - x_p = \xi g_{1y}(\xi) \quad (A1.64)$$

onde

$$\begin{aligned}
g_{1y} &= 0,666y_1 (\xi^3 - \xi^2 - 0,25\xi + 0,25) - 2,666y_2 (\xi^3 - 0,5\xi^2 - \xi + 0,5) \\
&+ 4y_3 (\xi^3 - 1,25\xi) - 2,666y_4 (\xi^3 + 0,5\xi^2 - \xi - 0,5) \\
&+ 0,666y_5 (\xi^3 + \xi^2 - 0,25\xi - 0,25) \quad (A1.65)
\end{aligned}$$

$$r = \xi \left[g_{1x}(\xi)^2 + g_{1y}(\xi)^2 \right]^{1/2}$$

A integral fracamente singular é dada por:

$$I1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 J(\xi1) N_i(\xi1) \ln \eta \, d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 J(\xi2) N_i(\xi2) \ln \eta \, d\eta \quad (A1.66)$$

d) Ponto fonte sobre o 4º nó $\xi = 0,5$

$$x - x_p = x - x_4$$

$$\begin{aligned} x - x_p &= \frac{1}{1,5} x_1 ((\xi + 0,5)\xi(\xi - 0,5)(\xi - 1)) - \frac{1}{0,375} x_2 (\xi(\xi + 1)(\xi - 0,5)(\xi - 1)) \\ &+ x_3 ((4(\xi + 1)(\xi + 0,5)(\xi - 0,5)(\xi - 1)) - \frac{1}{0,375} x_4 ((\xi(\xi + 1)(\xi + 0,5)(\xi - 1) - 0,375) \\ &+ \frac{1}{1,5} x_5 ((\xi + 1)(\xi + 0,5)\xi(\xi - 0,5)) \end{aligned} \quad (A1.67)$$

mudança de variáveis

$$\eta = -0,666\xi + 0,333$$

$$\eta = 2\xi - 1$$

$$\xi1 = \frac{(0,333 - \eta)}{0,666}$$

e

$$\xi2 = \frac{(\eta + 1)}{2}$$

Dessa forma

$$x - x_p = (-0,666\xi + 0,333)g_{1x}(\xi) \quad (A1.68)$$

onde

$$\begin{aligned}
g_{1x} = & \frac{1}{1,5} x_1 (-1,5\xi^3 + 0,75\xi^2 + 0,75\xi) - \frac{1}{0,375} x_2 (-1,5\xi^3 + 1,5\xi) \\
& + \frac{1}{0,25} x_3 (-1,5\xi^3 - 0,75\xi^2 + 1,5\xi + 0,75) - \frac{1}{0,375} x_4 (-1,5\xi^3 - 1,5\xi^2 + 0,75\xi + 1,125) \\
& + \frac{1}{1,5} x_5 (-1,5\xi^3 - 2,25\xi^2 - 0,75\xi) \quad (A1.69)
\end{aligned}$$

e

$$y - y_p = (-0,666\xi + 0,333)g_{1y}(\xi) \quad (A1.70)$$

onde

$$\begin{aligned}
g_{1y} = & \frac{1}{1,5} y_1 (-1,5\xi^3 + 0,75\xi^2 + 0,75\xi) - \frac{1}{0,375} y_2 (-1,5\xi^3 + 1,5\xi) \\
& + \frac{1}{0,25} y_3 (-1,5\xi^3 - 0,75\xi^2 + 1,5\xi + 0,75) - \frac{1}{0,375} y_4 (-1,5\xi^3 - 1,5\xi^2 + 0,75\xi + 1,125) \\
& + \frac{1}{1,5} y_5 (-1,5\xi^3 - 2,25\xi^2 - 0,75\xi) \quad (A1.71)
\end{aligned}$$

$$r = (-0,666\xi + 0,333)[g_{1x}(\xi)^2 + g_{1y}(\xi)^2]^{1/2}$$

A integral fracamente singular é dada por:

$$\begin{aligned}
I1 = & \frac{0,75}{\pi} \int_0^1 J(\xi1) N_i(\xi1) \ln \frac{1}{\eta} d\eta + \frac{1}{4\pi} \int_0^1 J(\xi2) N_i(\xi2) \ln \frac{1}{\eta} d\eta \\
& + \frac{0,137326}{\pi} \int_{-1}^1 J(\xi3) N_i(\xi3) \ln \frac{1}{\gamma} d\gamma \quad (A1.72)
\end{aligned}$$

onde

$$\xi3 = \frac{\gamma + 3}{4}$$

e γ coordenada para quadratura de Gauss padrão ξ

e) Ponto fonte sobre o 5º nó $\xi = 1$

$$x - x_p = x - x_5$$

$$\begin{aligned} x - x_p = & \frac{1}{1,5} x_1 ((\xi + 0,5)\xi(\xi - 0,5)(\xi - 1)) - \frac{1}{0,375} x_2 (\xi(\xi + 1)(\xi - 0,5)(\xi - 1)) \\ & + 4x_3 ((\xi + 0,5)(\xi + 1)(\xi - 0,5)(\xi - 1)) - \frac{1}{0,375} x_4 ((\xi(\xi + 1)(\xi + 0,5)(\xi - 1)) \\ & + \frac{1}{1,5} x_5 ((\xi + 1)(\xi + 0,5)\xi(\xi - 0,5) - 1,5 \end{aligned} \quad (A1.73)$$

mudança de variáveis:

$$\eta = \frac{1 - \xi}{2}$$

$$\xi = 1 - 2\eta$$

Dessa forma

$$x - x_p = \frac{1 - \xi}{2} g_{1x}(\xi) \quad (A1.74)$$

onde

$$\begin{aligned} g_{1x} = & 1,333x_1(-\xi^3 + 0,25\xi) + 5,333x_2(\xi^3 + 0,5\xi^2 - 0,5\xi) \\ & + 8x_3(-\xi^3 - \xi^2 + 0,25\xi + 0,25) + 5,333x_4(\xi^3 + 1,5\xi^2 + 0,5\xi) \\ & + 1,333x_5(-\xi^3 - 2\xi^3 - 1,75\xi - 1,5) \end{aligned} \quad (A1.75)$$

e

$$y - y_p = \frac{1 - \xi}{2} g_{1y}(\xi) \quad (A1.76)$$

onde

$$\begin{aligned}
g_{1y} = & 1,333y_1(-\xi^3 + 0,25\xi) + 5,333y_2(\xi^3 + 0,5\xi^2 - 0,5\xi) \\
& + 8y_3(-\xi^3 - \xi^2 + 0,25\xi + 0,25) + 5,333y_4(\xi^3 + 1,5\xi^2 + 0,5\xi) \\
& + 1,333y_5(-\xi^3 - 2\xi^3 - 1,75\xi - 1,5)
\end{aligned} \tag{A1.77}$$

$$r = \frac{1-\xi}{2} [g_{1x}(\xi)^2 + g_{1y}(\xi)^2]^{\frac{1}{2}}$$

A integral fracamente singular é dada por

$$I1 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 J(\xi) N_i(\xi) \ln \frac{1}{\eta} d\eta \tag{A1.78}$$

Apêndice 2- Cálculo do gradiente do potencial

As derivadas normal e tangencial do potencial no sistema local são conhecidas ou incógnitas, sendo portanto necessário fazer um mapeamento de forma a se obter essas derivadas no sistema global, que serão necessárias para se obter o gradiente do potencial, Eq.A2.1.

$$\vec{\nabla} u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (A2.1)$$

As derivadas normal e tangencial do potencial no sistema local podem ser escritas como

$$\frac{\partial u}{\partial n} = q = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (A2.2)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (A2.3)$$

onde utiliza-se as seguintes aproximações

$$\frac{\partial x}{\partial n} = n_1 \quad \frac{\partial y}{\partial n} = n_2$$

e

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = N'_i x^i \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = N'_i y^i$$

onde n_1 e n_2 são as componentes do vetor normal unitário do ponto de integração e N'_i são as derivadas das funções de forma na forma matricial, as equações Eq.A2.2 e A2.3 podem ser escritas como

$$\begin{Bmatrix} q \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ N'_i X^i & N'_i Y^i \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} q \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = [R]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

de onde se obtém as derivadas do potencial no sistema global

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} q \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} \end{Bmatrix}$$

é então necessário calcular a matriz R , que é a inversa da matriz $[R]^{-1}$

$$[R] = \begin{pmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_1 \end{pmatrix}$$

sendo

$$N'_i X^i = |J|n_1$$

e

$$N'_i Y^i = |J|n_2$$

as funções de mapeamento \vec{A} e \vec{B} , são dadas por

$$\vec{A}(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{n_2}{J(n_1^2 + n_2^2)} \\ \frac{n_1}{J(n_1^2 + n_2^2)} \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad \vec{B}(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} \\ \frac{n_2}{n_1^2 + n_2^2} \end{array} \right\}$$

como $n_1^2 + n_2^2 = 1$

$$\vec{A}(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{n_2}{J} \\ \frac{n_1}{J} \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad \vec{B}(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \right\} \quad (\text{A2.4})$$

Dessa forma, o gradiente do potencial pode ser escrito como

$$\vec{\nabla}u(s) \approx \vec{\nabla}u(\xi_s) = \vec{A}(\xi_s) \sum_{i=1}^m N_i(\xi) u^i + \vec{B}(\xi_s) \sum_{i=1}^m N_i F^i \quad (\text{A2.5})$$

Apêndice 3- Descrição da entrada de dados

A entrada de dados do programa é feita em duas etapas. A primeira etapa consiste da entrada de dados pela tela, na qual são fornecidos o tipo de formulação a ser utilizada assim como suas particularidades. A segunda etapa corresponde à entrada de dados a partir de um arquivo de dados, comum a todas as formulações utilizadas.

1) A entrada de dados pela tela é feita de maneira interativa com o usuário da seguinte forma:

a) Escolher o número da formulação a ser utilizada:

0-Formulação auto-regularizada do Potencial

1-Formulação auto-regularizada do Fluxo

2-Formulação padrão com ponto de colocação fora do elemento

a.1) Escolhendo 0 (Formulação auto-regularizada do Potencial):

Pode-se escolher a forma de se calcular a integral fracamente singular:

0-utilizando Transformação de Telles

1-utilizando Quadratura Logarítmica

a.1.1) Escolhendo 0 ou 1:

Pede o nome do arquivo de *Entrada de Dados* e o nome do arquivo de saída

a.2) Escolhendo 1 (Formulação auto-regularizada do Fluxo):

Pede o nome do arquivo *Entrada de Dados* e o nome do arquivo de saída

a.3) Escolhendo 2 (Formulação padrão com ponto de colocação fora do elemento):

Pode-se escolher com ou sem subelementação:

0-sem subelementação

1-com subelementação

a.3.1) Escolhendo 0 ou 1:

Pede o valor de alfa- porcentagem do elemento que o ponto fora estará afastado

Pede o nome do arquivo *Entrada de Dados* e o nome do arquivo de saída

1) O arquivo de *Entrada de Dados* deve ser constituído da seguinte maneira:

(Dados gerais)

ZKT

NDIM NPE INO INLOG NUMNODE NUMPI NUMELEM NDBC NTBC

(Coordenadas dos nós do contorno)

X1 X2 X3

(Coordenadas dos pontos internos)

X1 X2 X3

(Incidência dos elementos)

NCONN1 NCONN2 NCONN3 (Elementos Quadráticos)

NCONN1 NCONN2 NCONN3 NCONN4 (Elementos Cúbicos)

NCONN1 NCONN2 NCONN3 NCONN4 NCONN5 (Elementos Quárticos)

(Nós com potencial prescrito)

NDUMNOD ZU

(Nós com fluxo prescrito)

NDUMNOD ZT

(descontinuidade de fluxo, quando o fluxo é prescrito para um elemento e o potencial para o outro elemento que concorrem no nó)

NUMDISC

IWHELEM LPOS KDIRECT INODE TVALUE

Onde:

- ZKT – condutividade térmica K, adotado igual a 1.
- NDIM- dimensão do problema. O programa é aplicável a problemas bidimensionais.
- NPE – número de nós por elemento
 - 3 (Elementos Quadráticos)
 - 4 (Elementos Cúbicos)
 - 5 (Elementos Quárticos)
- INO - número de pontos de integração. Para integrar os elementos que não possuem o ponto de colocação.
- INLOG - número de pontos de integração. Para integrar os elementos que possuem o ponto de colocação.
- NUMNODE – número de nós do contorno
- NUMPI- número de pontos internos
- NUMELEM- número de elementos
- NDBC- número de nós com potencial prescrito
- NTBC- número de nós com fluxo prescrito
- X
 - X1- coordenada x
 - X2- coordenada y
 - X3- coordenada z
- NCONN
 - NCONN1- número global do 1º nó do elemento
 - NCONN2- número global do 2º nó do elemento
 - NCONNn- número global do n-ésimo nó do elemento
- NDUMNOD- número do nó com potencial ou fluxo prescrito
- ZU – valor do potencial prescrito no nó NDUMNOD
- ZT – valor do fluxo prescrito no nó NDUMNOD

- NUMDISC – número de nós com descontinuidade de fluxo. Quando o nó tiver descontinuidade de fluxo, prescreve-se o potencial e coloca-se o fluxo descontinuo.
- IWHELEM – número do elemento onde existe descontinuidade de fluxo
- LPOS – posição do nó com descontinuidade, em relação ao elemento
- KDIRECT - na direção x, y ou z (para problemas de potencial, direção x ou 1 sempre)
- 7INODE – número global do nó com descontinuidade de fluxo
- TVALUE – valor da descontinuidade

Exemplo – Problema de transmissão de calor em domínio quadrado, a ser calculado por meio de elementos quadráticos com doze pontos de integração, tanto local quanto geral. O contorno foi discretizado com uma malha de 4 elementos, num total de 8 nós. Nesse problema ainda existem cinco nós internos onde se calcula os valores de potencial e gradiente do potencial.

1.0000000000000000

2 3 12 12 8 5 4 6 2

.0000000000000000	0.0000000000000000	1.0000000000000000
3.0000000000000000	.0000000000000000	1.0000000000000000
6.0000000000000000	.0000000000000000	1.0000000000000000
6.0000000000000000	3.0000000000000000	1.0000000000000000
6.0000000000000000	6.0000000000000000	1.0000000000000000
3.0000000000000000	6.0000000000000000	1.0000000000000000
.0000000000000000	6.0000000000000000	1.0000000000000000
.0000000000000000	3.0000000000000000	1.0000000000000000
2.0000000000000000	2.0000000000000000	1.0000000000000000
2.0000000000000000	4.0000000000000000	1.0000000000000000
3.0000000000000000	3.0000000000000000	1.0000000000000000
4.0000000000000000	2.0000000000000000	1.0000000000000000
4.0000000000000000	4.0000000000000000	1.0000000000000000

1 2 3
3 4 5
5 6 7
7 8 1
1 300.0000000000000000
3 .0000000000000000
4 .0000000000000000
5 .0000000000000000
7 300.0000000000000000
8 300.0000000000000000

2 .0000000000000000
6 .0000000000000000

4

1 1 1 1 .0000000000000000
1 3 1 3 .0000000000000000
3 1 1 5 .0000000000000000
3 3 1 7 .0000000000000000