

Giovani Guimarães Rodrigues

# **Identificação de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares Utilizando Modelos NARMAX Polinomiais – Aplicação a Sistemas Reais**

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica  
Universidade Federal de Minas Gerais

"É uma experiência como nenhuma outra que eu possa descrever, a melhor coisa que pode acontecer a um cientista, compreender que alguma coisa que ocorreu em sua mente corresponde exatamente a alguma coisa que acontece na natureza. É surpreendente, todas as vezes que acontece. Ficamos espantados com o fato de que um construto de nossa própria mente possa realmente materializar-se no mundo real que existe lá fora. Um grande choque e uma alegria muito grande".

Leo Kadanoff<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Extraído de Gleick (1989).

## Resumo

A motivação desse trabalho é investigar a aplicação das técnicas de identificação de sistemas dinâmicos não-lineares utilizando modelos NARMAX polinomiais. Estes modelos são estruturas paramétricas do tipo entrada-saída capazes de representar uma ampla classe de sistemas não-lineares.

O procedimento de identificação de modelos não-lineares paramétricos pode ser dividido em cinco etapas. Estas cinco etapas são apresentadas e analisadas no âmbito da identificação de modelos não-lineares caixa-preta.

A seleção de estrutura é a etapa crucial da identificação de modelos não-lineares. Por esse motivo, ela é analisada em maior profundidade. Os conceitos de agrupamentos de termos e de coeficientes de agrupamentos são utilizados para derivar um procedimento auxiliar de seleção de estrutura de modelos não-lineares polinomiais. Este procedimento pode ser bastante eficaz em situações onde as técnicas usuais de seleção de estrutura falham.

Em seguida, são apresentados dois conjuntos de rotinas computacionais para a identificação de modelos NARMAX polinomiais. O primeiro conjunto de rotinas implementa as cinco etapas do procedimento de identificação. O segundo conjunto de rotinas implementa ferramentas úteis para a análise e a visualização dos modelos identificados. Estas rotinas são utilizadas para identificar modelos NARMAX polinomiais nesse trabalho.

Finalmente, o procedimento de identificação de modelos NARMAX é utilizado para construir modelos matemáticos para alguns sistemas não-lineares reais. Os sistemas a serem modelados são um forno elétrico sem estrutura de isolamento térmico e o circuito caótico de Chua. Os regimes dinâmicos destes sistemas não podem ser reproduzidos por modelos lineares convencionais. Portanto, a identificação dos mesmos constitui um bom teste para avaliar a qualidade dos modelos NARMAX polinomiais na representação de sistemas não-lineares reais.

## Abstract

The main motivation of this work is to investigate the use of techniques to identify non-linear dynamical systems using NARMAX polynomial models. Such models are parametric input-output structures able to represent dynamic behavior of a wide class of non-linear systems.

The identification of non-linear parametric models can be divided in five stages. These five stages are introduced and analyzed in the scope of non-linear black-box model identification.

Model structure selection is the crucial stage of non-linear model identification. So, it is analyzed more deeply. The concepts of term clusters and cluster coefficients are used to derive an auxiliary procedure to select terms of non-linear polynomial models. This procedure can work efficiently in situations where the other techniques of structure selection fail.

Two sets of computational routines are described. The first set implements the five stages of the identification procedure of NARMAX polynomial models. The second set implements useful tools for analysis and visualization of identified models. These routines are used to identify NARMAX polynomial models in this work.

Finally, the identification procedure of NARMAX polynomial models is used to build mathematical models for some real non-linear systems. The systems that will be modeled are an electrical furnace without thermal insulation and Chua's circuit. The dynamical behavior of these systems can not be described by conventional linear models. So, the identification of such systems constitutes a good test to evaluate the quality of NARMAX polynomial models in the representation of real non-linear systems.

## Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer aos meus pais Roberto e Glaura e às minhas irmãs Adriana e Elinan pela paciência e pelo apoio irrestrito durante a realização desse trabalho.

Eu gostaria de agradecer ao professor Luis Aguirre pela orientação acadêmica atuante e pela amizade durante a convivência diária.

Um agradecimento especial é dedicado a Eduardo Mendes pelas sugestões e pelo inestimável auxílio com simulações e rotinas computacionais. Outro agradecimento especial é dedicado aos professores Ivan Lopes, Wallace Boaventura e Porfírio Cortizo pela atenciosa assessoria durante os procedimentos de aquisição de dados.

Eu gostaria de agradecer a Anísio Braga e aos professores Ronaldo Pena e Fábio Jota pelas valiosas críticas e sugestões durante a elaboração desse trabalho.

Eu também gostaria de agradecer aos alunos de iniciação científica Álvaro Souza, Leonardo Torres e Ubiratan Freitas pelo auxílio em coletas de dados, em simulações e na edição de algumas figuras para esse trabalho.

Os amigos do Laboratório de Controle de Processos Industriais (*LCPI*) e Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica (*CPDEE*) garantiram a finalização desse trabalho com atitudes e palavras de apoio.

O apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (*CAPES*) e da Pró-Reitoria de Pesquisa (*PRPq*) dessa Universidade foram de vital importância.

# Índice Analítico

Resumo .....	i
Abstract .....	ii
Agradecimentos.....	iii
Nomenclatura.....	vi
Capítulo 1	
1. Considerações sobre a Modelagem de Sistemas .....	1
1.1 Introdução.....	1
1.2 Alguns Conceitos Básicos da Teoria de Sistemas .....	2
1.3 Modelagem Matemática de Sistemas Dinâmicos.....	4
1.4 Aspectos da Identificação de Sistemas .....	5
1.5 Apresentação do Trabalho .....	6
Capítulo 2	
2. Identificação de Sistemas Não-Lineares .....	9
2.1 Introdução.....	9
2.2 Identificação de Sistemas .....	9
2.2.1 Experimentação do Sistema.....	10
2.2.2 Detecção de Não-Linearidades .....	10
2.2.3 Escolha da Representação e de Estruturas .....	12
2.2.4 Detecção de Estrutura .....	14
2.2.5 Estimação de Parâmetros.....	15
Implementações Ortogonais do Algoritmo de Mínimos Quadrados.....	18
2.2.6 Critérios de Informação.....	20
2.2.7 Detecção de Estrutura Utilizando o ERR.....	21
2.2.8 Validação de Modelos .....	22
2.3 Técnicas de Reconstrução de Espaço de Estados .....	24
2.4 Comentários Finais .....	26
Capítulo 3	
3. Seleção de Estrutura de Modelos Não-Lineares: Agrupamentos de Termos e Coeficientes de Agrupamentos .....	28
3.1 Introdução.....	28
3.2 Agrupamentos de Termos e Coeficientes dos Agrupamentos.....	28
3.2.1 Agrupamentos Espúrios em Modelos Polinomiais Não-Lineares .....	31
3.3 Agrupamentos de Termos e Pontos Fixos .....	33

3.3.1 Pontos Fixos: Número e Localização.....	33
3.3.2 Estabilidade dos Pontos Fixos .....	35
3.3.3 Simetria dos Pontos Fixos .....	36
3.4 Escolha do Tempo de Atraso ou Período de Amostragem utilizando Funções de Correlação Não-Lineares.....	37
3.4.1 Escolha do Período de Amostragem $T_s$ .....	38
3.5 Comentários Finais .....	40
Capítulo 4	
4. Ambiente Computacional para Identificação de Sistemas Não-Lineares.....	41
4.1 Introdução.....	41
4.2 Descrição das Rotinas de Identificação.....	41
4.3 Análise das Rotinas de Identificação.....	46
4.4 Comentários Finais .....	48
Capítulo 5	
5. Modelagem Não-Linear de um Forno Elétrico .....	50
5.1 Introdução.....	50
5.2 Descrição do Sistema.....	50
5.3 Representação da Dinâmica Não-Linear do Forno Elétrico.....	51
5.3.1 Aquisição de Dados.....	51
5.3.2 Detecção de Não-Linearidades .....	56
5.3.3 Detecção de Estrutura e Estimação de Parâmetros.....	56
5.3.4 Detecção de Estrutura Utilizando ERR e Agrupamentos de Termos .....	59
5.3.5 Validação dos Modelos Identificados.....	62
5.4 Análise de Tendência em Dados de Sistemas Dinâmicos.....	68
5.5 Comentários Finais .....	69
Capítulo 6	
6. Modelagem Não-Linear do Circuito de Chua.....	72
6.1 Introdução.....	72
6.2 Descrição do Sistema.....	72
6.3 Representação da Dinâmica Não-Linear do Circuito de Chua.....	75
6.3.1 Aquisição de Dados.....	75
6.3.2 Detecção de Estrutura e Estimação de Parâmetros.....	80
6.3.3 Detecção de Estrutura Utilizando ERR e Agrupamentos de Termos .....	83
6.3.4 Validação dos Modelos Identificados.....	85
6.4 Comentários Finais .....	92
Conclusão. ....	94
Apêndice A	
A. Glossário sobre Sistemas Dinâmicos Não-Lineares.....	96
A.1 Introdução .....	96
A.2 Glossário .....	96
Referências Bibliográficas.....	106

# Nomenclatura

## Conjuntos Numéricos

$Z$	Conjunto dos números inteiros.
$Z^+$	Conjunto dos números inteiros positivos.
$N$	Conjunto dos números naturais.
$R$	Conjunto dos números reais.

## Variáveis

$A$	Matriz auxiliar, no procedimento de Gram-Schmidt, para estimação ortogonal de parâmetros.
$C(\epsilon)$	Função de correlação utilizada no cálculo da dimensão de correlação de um atrator.
$c_{ij}$	Coefficiente do termo $x(t)$ de um modelo NARMAX polinomial (definição de agrupamento de termos).
$D_C$	Dimensão de correlação do atrator de um sistema dinâmico não-linear.
$D_f$	Matriz Jacobiana de um sistema dinâmico não-linear.
$D_L$	Dimensão de Lyapunov de um sistema dinâmico não-linear.
$d$	Tempo de retardo de um sistema ou tempo morto.
$d_e$	Dimensão do "embedding" de um sistema dinâmico.
$e(t)$	Ruído ou perturbações em um sistema dinâmico.
$F(\cdot)$	Função não-linear genérica.
$f(\cdot)$	Função matemática genérica (definida no contexto da citação).
$f$	Frequência de um dado sinal.
$g(\cdot)$	Função de observação utilizada na construção de "embeddings".
$g$	Parâmetro do modelo ortogonalizado, no procedimento de Gram-Schmidt.
$\hat{g}$	Estimativa do parâmetro $g$ .
$h(\cdot)$	Função de saída de um sistema dinâmico.



$J_N(\cdot)$	Índice de desempenho ou função de custo.
$k$	Intervalo de predição.
$l$	Grau de não-linearidade de um mapeamento não-linear polinomial.
$M$	Mapa de Poincaré de um sistema dinâmico não-linear.
$m$	Ordem dos termos $x(t)$ de um modelo NARMAX polinomial.
$N$	Comprimento do registro de dados disponíveis.
$n$	Ordem de um sistema dinâmico.
$n_e$	Atraso máximo nos termos em $e(t)$ , em modelos discretos.
$n_p$	Número de termos de processo em um modelo NARMAX polinomial.
$n_y$	Atraso máximo nos termos em $y(t)$ , em modelos discretos.
$n_\xi$	Número de termos de ruído em um modelo NARMAX polinomial.
$n_\theta$	Número de termos em um modelo NARMAX polinomial.
$P$	Matriz dos regressores de um modelo NARMAX polinomial.
$PTP$	Matriz de informação.
$p(t)$	Regressor de um modelo NARMAX polinomial representado na configuração preditor de "um-passo-a-frente".
$\bar{p}$	Ponto fixo de um sistema dinâmico.
$Q$	Matriz ortogonal (decomposição $QR$ ).
$\bar{Q}$	Matriz ortogonal aumentada (decomposição $QR$ ).
$R$	Matriz triangular superior (decomposição $QR$ ).
$r$	Dimensão do atrator de um sistema dinâmico.
$T_s$	Período de amostragem de um dado sinal.
$t$	Tempo ou número de amostras no caso discreto.
$u(t)$	Sinal medido de entrada de um sistema.
$v(t)$	Variável instrumental.
$W$	Matriz de regressores ortogonais.
$w(t)$	Regressor ortogonal.
$\omega_c$	Frequência de corte (normalizada) de um filtro.
$X$	Campo vetorial não-linear.
$x(t)$	Termo de um modelo NARMAX polinomial.
$x$	Vetor de variáveis de estado de um sistema dinâmico.

$Y$	Vetor de saídas.
$y(t)$	Sinal medido de saída de um sistema.
$\hat{y}(t)$	Saída do preditor de "um-passo-a-frente".
$\mathbf{y}(t)$	Vetor de coordenadas de atraso.
$y_1, y_2$	Vetores auxiliares na estimação ortogonal de parâmetros pelo método da transformação de Householder.
$\bar{y}$	Ponto fixo de um modelo NARMAX polinomial.
$z$	Autovalor de um sistema discreto ou discretizado.
$\alpha$	Autovalor da matriz Jacobiana de um modelo NARMAX polinomial.
$\Gamma$	Seção de Poincaré de um sistema dinâmico não-linear.
$\Delta t$	Passo de integração numérica.
$\delta(\cdot)$	Função delta de Dirac.
$\lambda_1$	Maior expoente de Lyapunov de um sistema dinâmico não-linear.
$\{\lambda_i\}_{i=1}^n$	Espectro de expoentes de Lyapunov de um sistema dinâmico não-linear.
$\mu_b$	Parâmetro de bifurcação de um sistema dinâmico.
$\Theta$	Vetor de parâmetros de um modelo NARMAX polinomial.
$\theta$	Parâmetro nominal de um sistema dinâmico representado por um modelo NARMAX.
$\hat{\theta}$	Parâmetro de um modelo NARMAX, estimado pelo método dos mínimos quadrados.
$\Xi$	Vetor de resíduos de modelagem em um modelo NARMAX polinomial.
$\xi(t)$	Resíduo de identificação.
$\Sigma_i$	Coefficiente de um agrupamento de termos em um modelo NARMAX polinomial.
$\tau$	Tempo de atraso na definição das coordenadas de atraso.
$\tau_m$	Valor mínimo entre $\tau_y$ e $\tau_{y^2}$ .
$\tau_y$	Tempo em que ocorre o primeiro mínimo da auto-correlação linear de um sinal.
$\tau_{y^2}$	Tempo em que ocorre o primeiro mínimo da auto-correlação não-linear de um sinal.
$\Phi_{y_1, y_1}(\cdot)$	Função auto-correlação do sinal $y_1(t)$ .

$\Phi_{y_1 y_2}(\cdot)$	Função correlação cruzada dos sinais $y_1(t)$ e $y_2(t)$ .
$\varphi(x, t)$	Fluxo da dinâmica de um dado sistema.
$\Omega$	Agrupamento de termos em um modelo NARMAX polinomial.

## Operadores

$E\{\cdot\}$	Esperança matemática.
$Var\{y(t)\}$	Variância de $y(t)$ .
$\ \cdot\ $	Norma genérica.
$\ \cdot\ _2$	Norma euclidiana.
$ \cdot $	Valor absoluto de um número.
$[\cdot]^T$	Transposição de vetor ou matriz.
$\cup$	União de conjuntos.

## Siglas

ARMAX	Modelo (linear) auto-regressivo, de média móvel e entrada externa (" <u>A</u> uto- <u>r</u> egressive, <u>m</u> oving- <u>a</u> verage with <u>e</u> xogenous input model").
ERR	Taxa de redução do erro (" <u>E</u> rror <u>r</u> eduction <u>r</u> atio").
FFT	Transformada rápida de Fourier (" <u>F</u> ast <u>F</u> ourier <u>t</u> ransform").
FPE	Erro de predição final (" <u>F</u> inal <u>p</u> rediction <u>e</u> rror").
NAR	Modelo não-linear auto-regressivo (" <u>N</u> on-linear <u>a</u> uto- <u>r</u> egressive model").
NARMA	Modelo não-linear auto-regressivo, de média móvel (" <u>N</u> on-linear <u>a</u> uto- <u>r</u> egressive, <u>m</u> oving <u>a</u> verage model").
NARMAX	Modelo não-linear auto-regressivo, de média móvel e entrada externa (" <u>N</u> on-linear <u>a</u> uto- <u>r</u> egressive, <u>m</u> oving <u>a</u> verage with <u>e</u> xogenous input model").
NARX	Modelo não-linear auto-regressivo com entrada externa (" <u>N</u> on-linear <u>a</u> uto- <u>r</u> egressive <u>m</u> oving <u>a</u> verage with <u>e</u> xogenous input").
NTC	Elemento sensor de temperatura (" <u>N</u> egative <u>t</u> hermal <u>c</u> oefficient").
PID	Controle " <u>P</u> roportional- <u>I</u> ntegral- <u>D</u> erivativo".
PRBS	Sinal binário pseudo-aleatório (" <u>P</u> seudo <u>r</u> andom <u>b</u> inary <u>s</u> ignal").
RAM	Memória de acesso aleatório (" <u>R</u> andom <u>a</u> ccess <u>m</u> emory").
RBF	Função de base radial (" <u>R</u> adial <u>b</u> asis <u>f</u> unction").

SNR            Relação sinal/ruído ("Signal/noise ratio").

™              Marca registrada ("Trade mark").

# Capítulo 1

## 1. Considerações sobre a Modelagem de Sistemas

### 1.1 Introdução

A modelagem de sistemas é uma tarefa de vital importância para o desenvolvimento da ciência e da tecnologia. A evolução do conhecimento científico ao longo dos séculos baseou-se na construção e na análise de modelos para os sistemas em estudo. Tais modelos procuravam reproduzir padrões de comportamento observados na natureza. A modelagem permitiu estudar sistemas minúsculos, como o átomo, e sistemas imensos, como o nosso sistema solar.

Existem tipos distintos de modelos para representar o comportamento de sistemas. No cotidiano, é natural utilizar *modelos mentais* para desempenhar determinadas tarefas. Estes modelos indicam a sequência adequada de ações para atingir um dado objetivo. Os modelos mentais podem ser extremamente complexos e são construídos a partir da experiência diária das pessoas. A habilidade de dirigir um veículo, por exemplo, é gerada pelo processamento de um modelo mental. Um outro tipo de representação para sistemas é o *modelo gráfico*. Nesse caso, o comportamento do sistema é descrito por tabelas numéricas ou curvas de desempenho. Um exemplo de modelo gráfico é a curva característica tensão–corrente de um dispositivo eletrônico. Por fim, a estrutura mais utilizada para representar o comportamento de sistemas é o *modelo matemático*. Um modelo matemático é constituído por um conjunto de equações diferenciais (tempo contínuo) ou equações de diferenças (tempo discreto) que descrevem a variação temporal e/ou espacial das variáveis de interesse no sistema. O grau de detalhamento utilizado na construção de um modelo matemático dependerá da aplicação visada. Klamkin (1987) descreve a modelagem matemática de uma ampla classe de sistemas reais.

O levantamento e a formulação matemática de todos os fenômenos que afetam o comportamento de um dado sistema é uma tarefa extremamente complexa, para não dizer impossível. Dessa maneira, um modelo nunca reproduz exatamente o comportamento do sistema original. Os bons modelos para a representação de sistemas em estudo serão aqueles que descrevem os fenômenos de interesse com uma considerável exatidão.

A modelagem de sistemas possui uma especial importância na solução de problemas físicos e de engenharia. Através do modelo matemático, pode-se analisar e prever o comportamento de um sistema, sob diversas condições de operação, e ajustar o

desempenho do mesmo, caso ele não se mostre satisfatório. O modelo deve ser capaz de refletir o comportamento do sistema original da melhor maneira possível, pois em caso contrário todos os esforços posteriores para análise do modelo e controle do sistema serão pouco eficientes.

Esse capítulo pretende descrever e analisar os principais métodos utilizados para derivar modelos matemáticos para sistemas em estudo. Estes métodos são a modelagem pela física do processo e a identificação de sistemas (lineares ou não-lineares). O objetivo do capítulo é estabelecer a importância da identificação no cenário da modelagem de sistemas.

## 1.2 Alguns Conceitos Básicos da Teoria de Sistemas

Essa seção apresenta e discute alguns conceitos da teoria de sistemas que foram utilizados ao longo do capítulo e da dissertação. As definições formais destes conceitos podem ser encontradas em (Kalman et al., 1969; Casti, 1977).

Um sistema é *monovariável* se e somente se ele possui uma única entrada e uma única saída. Por outro lado, um sistema é *multivariável* se e somente se ele possui mais de uma entrada e/ou mais de uma saída. As variáveis  $u(t)$  e  $y(t)$  representam os sinais de entrada e de saída de um sistema, respectivamente. Quando o sistema é do tipo multivariável,  $u(t)$  e  $y(t)$  são vetores cujas componentes representam as diversas entradas e saídas do sistema.

Um sistema é classificado como *dinâmico* quando o valor atual de sua saída  $y(t)$  depende do valor atual da entrada  $u(t)$  aplicada e também da evolução temporal da entrada e da saída. Um sistema é classificado como *estático* quando o valor atual de sua saída  $y(t)$  depende apenas do valor atual da entrada  $u(t)$  aplicada.

A saída  $y(t)$  de um sistema dinâmico depende da história passada do sistema. Por esse motivo, os sistemas dinâmicos também são conhecidos como sistemas com memória. O comportamento de um sistema dinâmico pode ser descrito matematicamente por um conjunto de equações diferenciais (tempo contínuo) ou equações de diferenças (tempo discreto). Por sua vez, um sistema estático pode ser representado por um conjunto de equações algébricas. Nesse contexto, os sistemas estáticos podem ser considerados sistemas dinâmicos com memória nula. As medições do sinal de saída de um sistema dinâmico cujas entradas externas não são medidas (ou observadas) constituem uma série temporal.

O conhecimento da entrada  $u(t)$  aplicada e das condições iniciais de um sistema dinâmico *determinístico* determina unicamente a sua saída  $y(t)$ . Entretanto, o conhecimento da entrada  $u(t)$  e das condições iniciais não é suficiente para determinar unicamente a saída  $y(t)$  de um sistema *estocástico*. A descrição completa de um sistema estocástico exige a especificação das características estatísticas dos sinais aleatórios que afetam o seu comportamento. Estes sinais aleatórios podem ser modelados por estruturas conhecidas como processos estocásticos (Davis e Vinter, 1985; Papoulis, 1991).

Considere o sistema representado pelas equações dinâmicas:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) + v(t), \quad (1.1)$$

$$y = h(x, u, t) + e(t), \quad (1.2)$$

onde  $x$  é o vetor de estados do sistema e  $f, h$  são funções vetoriais genéricas.  $v(t)$  é um processo estocástico que representa o ruído dinâmico que atua sobre o sistema e  $e(t)$  é um processo estocástico que modela o ruído de observação (medição). As variáveis  $v(t)$  e  $e(t)$  devem ser omitidas na representação de um sistema dinâmico *completamente* determinístico (não afetado por sinais estocásticos de qualquer natureza).

A equação (1.1) é denominada equação de estados do sistema, enquanto que (1.2) é a sua equação de saída. A solução simultânea do conjunto de equações diferenciais (1.1) determina o fluxo da dinâmica do sistema. O fluxo da dinâmica do sistema descrito por (1.1) e (1.2) pode ser representado como  $\varphi = \varphi(t, t_0, x(t_0), u(t), v(t))$ , onde  $x(t_0)$  é o estado inicial do sistema (no tempo  $t_0$ ) e  $u(t)$  é a entrada aplicada. Obviamente, este fluxo depende também da dinâmica do ruído  $v(t)$  que atua sobre o sistema.

Um sistema dinâmico determinístico é dito *invariante no tempo* (ou estacionário) se e somente se ele satisfaz as seguintes relações:

- $\varphi(t, t_0, x(t_0), u(t)) = \varphi(t + \tau, t_0 + \tau, x(t_0), u(t + \tau)), \forall t, \tau \in \mathbf{R}$  e  $\forall x(t_0) \in \mathbf{R}^n$ ;
- $h(x, u, t) = h(x, u, t + \tau), \forall \tau \in \mathbf{R}$ .

Um sistema determinístico que não satisfaz estas relações é dito *variante no tempo*.

A função de saída  $h(\cdot)$  de um sistema dinâmico invariante no tempo independe do tempo absoluto  $t$ . De acordo com esse conceito, um sistema com parâmetros variantes deverá ser classificado como variante no tempo. Obviamente, os procedimentos de modelagem e análise se tornam mais complexos quando o sistema em estudo é do tipo variante no tempo (Ljung, 1987). Os sistemas estudados nesse trabalho apresentam comportamento dinâmico invariante no tempo.

Um sistema dinâmico é *autônomo* quando as suas equações dinâmicas não dependem explicitamente do tempo  $t$ . Nesse caso, as equações (1.1) e (1.2) podem ser reescritas como:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) + v(t), \quad (1.3)$$

$$y = h(x, u) + e(t). \quad (1.4)$$

As equações dinâmicas de um sistema *não-autônomo* dependem explicitamente do tempo  $t$ , como em (1.1) e (1.2).

Os conceitos descritos nessa seção também podem ser apresentados a partir das equações entrada-saída de um sistema dinâmico. Entretanto, estas equações entrada-saída podem ser reescritas na forma de equações de estado utilizando substituições de variáveis adequadas<sup>1</sup>. Por esse motivo, as versões entrada-saída dos conceitos analisados não serão apresentadas nesse texto.

### 1.3 Modelagem Matemática de Sistemas Dinâmicos

Duas abordagens possíveis para a modelagem matemática de sistemas dinâmicos são:

- modelagem pela física do processo (Doebelin, 1980; Klamkin, 1987);
- identificação de sistemas (Box e Jenkins, 1976; Ljung, 1987).

A modelagem matemática baseada na física do processo exige o conhecimento das leis teóricas e empíricas que regem o comportamento dinâmico do sistema em estudo. A utilização desta abordagem permite derivar modelos que descrevem a dinâmica interna do sistema, além da relação entrada-saída.

A construção de modelos pela física do processo pode ser bastante complicada quando o sistema a ser modelado é grande e complexo. Nesse caso, as interações entre as variáveis envolvidas ficam bastante complexas e torna-se difícil descrevê-las matematicamente. Uma alternativa para minimizar esse problema é utilizar a abordagem de identificação de sistemas para derivar modelos matemáticos.

A identificação de sistemas é uma técnica que permite construir modelos matemáticos para sistemas dinâmicos a partir de dados medidos. Os modelos gerados pela identificação de sistemas podem ser utilizados para inferir propriedades dinâmicas e estatísticas do sistema original.

Um sistema dinâmico pode ser analisado no domínio do tempo e/ou no domínio da frequência. Por esse motivo, a identificação deve ser capaz de derivar modelos (lineares ou não-lineares) que descrevam o comportamento do sistema original no domínio do tempo (equações diferenciais) ou domínio da frequência (resposta em frequência), conforme o enfoque desejado.

Os métodos desenvolvidos para a identificação de sistemas podem ser divididos em três grupos (Ljung, 1987):

- métodos paramétricos;
- métodos não-paramétricos;
- métodos do domínio da frequência.

---

<sup>1</sup> Uma equação entrada-saída pode ser transformada em equação de estados escolhendo a saída do sistema e as suas derivadas como variáveis de estado. Esta escolha de variáveis de estado gera uma representação dinâmica na forma companheira (Chen, 1984).



Os métodos ditos *paramétricos* utilizam estruturas matemáticas parametrizadas para descrever o comportamento dinâmico original no domínio do tempo. Os parâmetros destas estruturas matemáticas são ajustados por algoritmos de estimação a partir dos dados medidos (Ljung, 1987). Os métodos ditos *não-paramétricos* também geram modelos no domínio do tempo. Nesse caso, o comportamento dinâmico do sistema é determinado através de funções de correlação calculadas sobre os dados disponíveis. Por fim, os métodos do *domínio da frequência* geram modelos representados neste domínio. Estes métodos utilizam a transformada de Fourier (Hougen, 1972) para calcular a resposta em frequência dos sistemas analisados.

Os estatísticos G. Box e G. Jenkins foram pioneiros na identificação de *modelos paramétricos* (Box e Jenkins, 1976). Eles apresentaram uma estrutura genérica e concisa capaz de modelar uma ampla classe de sistemas dinâmicos. Os modelos de Box e Jenkins foram utilizados para representar sistemas econômicos, biológicos, físicos, entre outros. Alguns pesquisadores da área de sistemas de controle interessaram-se pela identificação de sistemas na década de 60 e procuraram utilizá-la na análise, predição e controle de sistemas industriais reais (Aström e Bohlin, 1965; Aström e Eykhoff, 1971; Goodwin e Payne, 1977; Söderström et al., 1978; Zervos et al., 1988).

A identificação de sistemas foi inicialmente utilizada para desenvolver modelos matemáticos lineares para os sistemas em estudo (Box e Jenkins, 1976). Entretanto, os sistemas reais são não-lineares e a representação linear de um sistema não-linear é limitada. Um modelo linear descreve a dinâmica de um sistema não-linear apenas na vizinhança de um ponto de operação (linearização do sistema original). Além disso, os modelos lineares não são capazes de reproduzir uma gama de comportamentos dinâmicos observados na natureza. Destacam-se entre esses comportamentos os regimes bilineares, os ciclos limite, as bifurcações e o caos (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994). Apesar destas limitações, os modelos lineares identificados foram amplamente utilizados, pois os principais métodos de projeto, análise e controle da época assumiam a linearidade dos sistemas (Hougen, 1972). Essa suposição decorria das restrições teóricas e computacionais vigentes, aliadas à vantajosa facilidade de manipular modelos lineares. Mesmo utilizando representações lineares para sistemas não-lineares, a teoria de sistemas progrediu bastante nas três últimas décadas (Aström, 1994).

O interesse pela identificação de modelos não-lineares paramétricos surgiu no início da década de 80. Em grande parte, este interesse foi motivado pelo desenvolvimento de ferramentas matemáticas e computacionais que simplificavam a obtenção e manipulação de tais modelos. Atualmente, o crescente interesse pelo assunto é refletido pelo elevado número de trabalhos publicados em revistas especializadas (como será visto no capítulo 2). Obviamente, o desenvolvimento da teoria de identificação de modelos não-lineares deverá motivar a elaboração de novos métodos (algoritmos) para a análise e controle dos sistemas modelados (Seborg, 1994).

#### 1.4 Aspectos da Identificação de Sistemas

Os dados utilizados para identificar modelos dinâmicos são denominados *dados de identificação*. Os dados de identificação são gerados por medições da resposta  $y(t)$  do

sistema alimentado por uma entrada  $u(t)$  pré-especificada. O sinal de entrada  $u(t)$  deve possuir espectro suficientemente amplo em amplitude e frequência para excursionar o sistema pelos regimes dinâmicos de interesse. Os dados de identificação de sistemas dinâmicos autônomos constituem séries temporais.

Os modelos matemáticos gerados pela identificação de sistemas podem ser divididos em duas classes:

- modelos entrada-saída;
- modelos em espaço de estados.

Os modelos entrada-saída descrevem a resposta  $y(t)$  do sistema em função da entrada  $u(t)$  aplicada. Entretanto, estes modelos não permitem analisar o comportamento de variáveis internas do sistema.

As técnicas de identificação de sistemas também podem ser utilizadas para derivar modelos matemáticos em espaços de estados. Estes modelos permitem analisar o comportamento de variáveis internas do sistema, além da saída  $y(t)$ , em uma dada região de operação. As variáveis de estado destes modelos podem possuir ou não significado físico real.

A escolha da estrutura a ser utilizada para representar os regimes dinâmicos descritos pelos dados é um problema crucial na identificação de sistemas. Este problema pode ser suavizado pela utilização de propriedades do sistema conhecidas "a priori" na seleção da estrutura do modelo que deverá representá-lo. Os modelos matemáticos gerados pela identificação de sistemas podem ser classificados em três grupos de acordo com o nível de conhecimento "a priori" utilizado na seleção de sua estrutura (Ljung, 1987):

- modelos caixa-branca ("white-box");
- modelos caixa-cinza ("grey-box");
- modelos caixa-preta ("black-box").

Os modelos *caixa-branca* têm suas estruturas completamente ajustadas a partir de informações conhecidas "a priori". Nesse caso, a forma da função matemática que descreve o comportamento dinâmico do sistema original é pré-conhecida. Os modelos *caixa-cinza* são identificados utilizando algum conhecimento "a priori" para simplificar os algoritmos de seleção de estrutura. Por fim, a identificação dos modelos *caixa-preta* não utiliza informações conhecidas "a priori". A estrutura destes modelos é ajustada dentro de famílias de representações conhecidas por apresentar boa flexibilidade na modelagem de sistemas (Ljung, 1987; Ljung, 1995).

## 1.5 Apresentação do Trabalho

O objetivo principal desse trabalho é descrever o procedimento de identificação de sistemas dinâmicos não-lineares utilizando modelos NARMAX polinomiais.

Os modelos NARMAX polinomiais são estruturas paramétricas entrada-saída capazes de representar o comportamento de uma ampla classe de sistemas dinâmicos não-lineares reais (Leontaritis e Billings, 1985a, 1985b; Billings e Chen, 1989).

O procedimento de identificação de modelos paramétricos não-lineares pode ser dividido em cinco etapas: (i) aquisição de dados do sistema que se deseja modelar; (ii) aplicação de testes para detecção de não-linearidades nos dados medidos; (iii) seleção da estrutura do modelo que deverá representar a dinâmica original; (iv) estimação dos parâmetros da estrutura selecionada; (v) validação do modelo identificado. O capítulo 2 descreve e analisa as cinco etapas do procedimento de identificação de modelos NARMAX polinomiais (modelos caixa-preta) com base na literatura correlata.

O capítulo 3 analisa a etapa crucial da identificação de sistemas não-lineares: a seleção da estrutura dos modelos. Modelos não-lineares sobreparametrizados tendem a apresentar regimes dinâmicos espúrios; isto é, regimes dinâmicos não apresentados pelo sistema original. O capítulo revisa um procedimento auxiliar de seleção de estrutura de modelos NARMAX polinomiais. Este procedimento utiliza os conceitos de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos para selecionar o conjunto de termos importantes para reproduzir a dinâmica do sistema. Em seguida, os termos de modelos NARMAX polinomiais podem ser escolhidos dentro deste conjunto utilizando técnicas usuais de seleção de estrutura.

Os conceitos de agrupamentos de termos e de coeficientes de agrupamentos também podem ser empregados na análise da autoestrutura e da estabilidade e simetria dos pontos fixos de modelos NARMAX polinomiais. Em alguns casos, esta análise poderá ser utilizada na validação de modelos identificados. Por fim, o capítulo 3 descreve e analisa uma técnica para a determinação do período de amostragem de um sinal a partir de algumas funções de correlação. Tais ferramentas foram utilizadas para determinar os períodos de amostragem adequados para os sinais de interesse nessa dissertação.

O capítulo 4 descreve dois conjuntos de rotinas computacionais codificadas para a identificação de modelos NARMAX polinomiais. O primeiro conjunto de rotinas implementa as diversas etapas do procedimento de identificação de modelos NARMAX polinomiais. O segundo conjunto de rotinas implementa algoritmos utilizados na análise e na visualização dos modelos identificados. Estes dois conjuntos de rotinas foram utilizados para identificar todos os modelos apresentados nesse trabalho. Ainda no capítulo 4, são analisadas as vantagens e desvantagens da codificação das rotinas de identificação em algumas linguagens de programação de alto-nível adequadas ao processamento matemático numérico.

Os capítulos 5 e 6 mostram a aplicação das técnicas de identificação de modelos NARMAX polinomiais à modelagem de sistemas dinâmicos não-lineares reais. A identificação dos modelos apresentados nestes capítulos seguiu todas as etapas descritas nos capítulos 2 e 3.

O capítulo 5 analisa a identificação não-linear de um forno elétrico sem estrutura de isolamento térmico e que apresenta dinâmica bilinear (Rodrigues et al., 1996). O forno

elétrico utilizado nesse trabalho é uma das plantas piloto disponíveis no Laboratório de Controle de Processos Industriais (*LCPI*) da Universidade Federal de Minas Gerais (Abreu, 1993). O comportamento bilinear evidencia-se pela existência de constantes de tempo de subida (aquecimento) e de descida (resfriamento) distintas. Além disso, o mecanismo de transferência de calor por radiação térmica que se processa no interior do forno é altamente não-linear. Dessa maneira, o comportamento dinâmico do forno elétrico não pode ser bem representado por modelos lineares (mesmo quando estes modelos são obtidos em estreitas faixas de operação). Por este motivo, a identificação do forno elétrico constitui um bom teste para avaliar a qualidade dos modelos NARMAX polinomiais na representação de sistemas não-lineares reais.

O capítulo 6 descreve a modelagem não-linear do circuito caótico de Chua (Aguirre, Rodrigues e Mendes, 1996). O circuito de Chua apresenta uma topologia bastante simples. Ele é constituído por alguns componentes passivos lineares e um componente não-linear denominado diodo de Chua. O diodo de Chua possui uma curva característica corrente–tensão linear por partes. A variação de um potenciômetro do circuito permite alterar o comportamento dinâmico apresentado pelo sistema. Os dois regimes dinâmicos modelados neste capítulo são aqueles representados pelos atratores caóticos de dupla volta e em espiral. Aguirre e Billings (1994b) identificaram modelos NARMAX polinomiais para o circuito de Chua utilizando dados de simulação das equações dinâmicas do sistema. O objetivo desse trabalho é identificar modelos NARMAX polinomiais para o circuito de Chua utilizando dados reais. Estes dados são gerados durante a operação de um protótipo do circuito montado e testado no *LCPI* (Torres e Aguirre, 1995b).

Após os seis capítulos descritos, são apresentadas as conclusões desse trabalho e algumas propostas para a sua continuação. Por fim, o apêndice A apresenta um glossário sobre sistemas dinâmicos não-lineares. Este glossário descreve alguns conceitos da teoria de sistemas dinâmicos não-lineares utilizados na elaboração da dissertação.

## Capítulo 2

### 2. Identificação de Sistemas Não-Lineares

#### 2.1 Introdução

Historicamente, o procedimento de identificação foi desenvolvido assumindo a linearidade dos sistemas dinâmicos em estudo. Isso ocorreu devido a restrições teóricas e computacionais vigentes. Entretanto, os sistemas reais são não-lineares e a representação linear é limitada em algumas aplicações. A utilização de modelos lineares impede que uma gama de comportamentos dinâmicos apresentados pelos sistemas reais seja reproduzida. Entre os regimes dinâmicos não-modelados por estruturas lineares, pode-se destacar os ciclos limite, as bifurcações, as dinâmicas quasi-periódicas e o caos<sup>1</sup>.

Nas duas últimas décadas, um grande número de pesquisadores tem se dedicado à solução do problema de identificação de sistemas dinâmicos não-lineares (Billings, 1980; Leontaritis e Billings, 1985a, 1985b; Korenberg et al., 1988; Billings et al., 1989; Chen et al., 1989; Haber e Unbehauen, 1990; Aguirre, 1994a; Billings e Zhu, 1994; Johansen, 1994; Ljung, 1994; Pröl e Karim, 1994; Aguirre e Billings, 1995a, 1995b, 1995c; Aguirre e Mendes, 1996).

O objetivo desse capítulo é apresentar uma revisão dos principais tópicos relacionados à identificação de sistemas não-lineares, baseando-se para isso em algoritmos descritos na literatura. Uma breve revisão da teoria de sistemas dinâmicos não-lineares é apresentada no apêndice A, onde são explicados os principais conceitos e algoritmos relacionados.

#### 2.2 Identificação de Sistemas

O problema de identificação de sistemas pode ser dividido em cinco etapas principais (Ljung, 1987):

- Obtenção de dados de experimentação do sistema que se deseja modelar;
- Aplicação de testes aos dados obtidos para detecção de não-linearidades;
- Escolha da estrutura que será utilizada para representar o modelo;
- Estimação dos parâmetros do modelo;
- Validação do modelo obtido.

O procedimento descrito acima é empregado na identificação tanto de sistemas lineares quanto sistemas não-lineares. As principais diferenças se devem à maneira como cada

---

<sup>1</sup>A descrição de tais regimes dinâmicos pode ser encontrada, por exemplo, em Fiedler-Ferrara e Prado (1994, Parte II) e no apêndice A dessa dissertação.

passo é implementado, conforme será descrito nas subseções seguintes.

### 2.2.1 Experimentação do Sistema

Nessa etapa do processo de identificação, o sistema deve ser experimentado através da aplicação de entradas pré-determinadas e da observação das saídas correspondentes (ou das variáveis de estado observáveis). Os dados assim obtidos serão utilizados na detecção de não-linearidades e no ajuste dos parâmetros do modelo escolhido.

As entradas a serem utilizadas para excitar o sistema devem ser projetadas para satisfazer um conjunto de propriedades (Billings, 1980; Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986) que garantirão a adequabilidade dos dados obtidos. Deseja-se, em princípio, que os sinais de entrada tenham um espectro de frequências adequado para excitar a dinâmica do sistema (no caso de sistemas não-lineares, isto requer que os efeitos não-lineares sejam excitados por tais sinais e assim estejam presentes nos dados). Em sistemas não-lineares, nos quais variações da amplitude do sinal de entrada podem provocar mudanças qualitativas no comportamento do mesmo, é necessário projetar um perfil de amplitudes para os sinais de teste (Aguirre e Billings, 1995a).

Certas classes de representações de sistemas não-lineares podem gerar modelos sensíveis ao sinal de entrada. Este tipo de modelo depende de parâmetros do sinal de teste aplicado ao sistema (média e variância, por exemplo) e só será válido para a excitação considerada. Um exemplo desse fenômeno é apresentado e discutido em Billings e Voon (1983, 1984).

Na prática, os sinais mais utilizados para excitar os sistemas são ondas quadradas, sinais binários pseudo-aleatórios, PRBS (Leontaritis e Billings, 1987), e ruído branco (pseudo-aleatório), que têm um espectro de frequências relativamente largo.

Os dados obtidos na experimentação do sistema devem ser processados por filtros passa-baixas, a fim de que o falseamento dos sinais amostrados seja evitado. O espectro de frequências de um sinal adequadamente amostrado corresponde ao espectro do sinal original no intervalo  $-1/(2T_s) \leq f \leq 1/(2T_s)$  e se repete com "período"  $1/T_s$ , onde  $T_s$  é o período de amostragem escolhido. As componentes de altas frequências que estejam superpostas ao sinal original irão aparecer como componentes de baixas frequências no sinal amostrado, distorcendo o espectro de frequências deste. A distorção do espectro de frequências do sinal amostrado implica em perda de informações a respeito do sinal original. Assim, deve-se garantir que a frequência de amostragem seja maior que o dobro da maior frequência do sinal original para evitar o falseamento do sinal amostrado (Shannon, 1949).

### 2.2.2 Detecção de Não-Linearidades

Todos os sistemas reais são, em última instância, não-lineares. No entanto, a não-linearidade apresentada por alguns é bem suave, permitindo que a utilização de modelos linearizados (em torno de um ponto de operação) seja satisfatória. Quando isso não

acontece, é essencial empregar um modelo não-linear para melhor descrever a dinâmica do sistema.

Os dados obtidos na experimentação do sistema podem ser processados por algoritmos de detecção de não-linearidades no ensejo de verificar se existem interações não-lineares que devam ser modeladas (Billings e Voon, 1983; Haber, 1985; Haber e Unbehauen, 1990). Estes testes verificam se os dados do sistema satisfazem (dentro de limites pré-estabelecidos) certas propriedades características de sistemas lineares. Adotar-se-á um modelo não-linear para o sistema quando tais propriedades não forem verificadas.

Os algoritmos mais utilizados na detecção de não-linearidades são (Haber, 1985):

- teste no domínio do tempo;
- método da correlação cruzada não-linear;
- método da autocorrelação de ordem elevada.

Neste trabalho, o teste de detecção de não-linearidades apresentado em (Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986) será utilizado para detectar a presença de interações não-lineares em conjuntos de dados. Considere o sistema dinâmico descrito pela equação discreta:

$$y(t) = f(y(t-1), \dots, y(t-n_y), \dots, u(t-d), \dots, u(t-d-n_u+1), \dots, e(t-1), \dots, e(t-n_e)) + e(t), \quad (2.1)$$

onde  $y(t)$ ,  $u(t)$  e  $e(t)$  são saída, entrada e ruído do sistema, respectivamente, com atrasos máximos representados por  $n_y$ ,  $n_u$ ,  $n_e$ .  $d$  representa o retardo ou tempo morto do sistema e  $f$  é uma função matemática genérica. O período de amostragem  $T_s$  foi normalizado para gerar uma representação simples e concisa. Os autores mostraram que a relação:

$$\Phi_{y^2, y^2}(\tau) = E\{(y(t) - E\{y(t)\})(y^2(t-\tau) - E\{y^2(t)\})\} = 0 \quad \forall \tau \quad (2.2)$$

é válida se e somente se o sistema (2.1) for linear<sup>2</sup>. Um intervalo de confiança probabilístico delimita a região onde a função de correlação (2.2) deve permanecer para ser considerada nula. Os limites do intervalo de confiança de 95 % são:  $\pm 1,96/\sqrt{N}$ , onde  $N$  é o comprimento do registro de dados disponíveis (Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986).

A função de correlação (2.2) pode ser estimada utilizando os dados de identificação disponíveis. O sistema que gerou os dados deverá ser representado por um modelo não-linear quando a correlação calculada não permanece dentro do intervalo de confiança.

---

<sup>2</sup>O sinal  $u(t)$  deve satisfazer algumas propriedades para que o resultado apresentado seja válido (Billings e Voon, 1983). No entanto, sinais de entrada usuais (senóides, sinais gaussianos, PRBS) possuem tais propriedades. O ruído  $e(t)$  e a entrada  $u(t)$  são supostos independentes (não-correlacionados).

### 2.2.3 Escolha da Representação e de Estruturas

Na modelagem, uma importante questão é a escolha da estrutura que deverá representar o comportamento de um sistema dinâmico. Esta questão se torna ainda mais importante no caso de sistemas não-lineares devido à grande diversidade de não-linearidades distintas.

A estrutura escolhida deve ser suficientemente complexa para representar uma grande classe de não-linearidades possíveis, sem que isto torne inviável sua manipulação matemática. Algumas representações utilizadas na modelagem de sistemas não-lineares são:

- redes neurais (Elsner, 1992);
- funções de base radial, RBFs (Casdagli, 1989);
- séries de Volterra (Billings, 1980);
- "wavelets" (Strang, 1989);
- funções racionais e funções polinomiais (Billings e Chen, 1989; Haber e Unbenhauen, 1990; Casdagli et al., 1992).

Essas estruturas permitem, em muitos casos, descrever a dinâmica do sistema de forma global.

Uma alternativa é a utilização de representações locais. Nestas, o espaço de estados do sistema é dividido em vizinhanças, nas quais a dinâmica é aproximada por um mapeamento linear. A descrição global pode ser obtida a partir da interpolação desses modelos locais (Foss e Johansen, 1992; Johansen, 1994; Foss et al., 1994), em detrimento da simplicidade, da facilidade de análise do modelo e do tempo de processamento computacional.

Neste trabalho, serão utilizadas as estruturas "não-lineares auto-regressivas com média móvel e entrada exógena" ("non-linear auto-regressive with moving average and exogenous inputs", NARMAX) (Leontaritis e Billings, 1985a; Leontaritis e Billings, 1985b), que constituem uma representação natural para uma grande classe de sistemas não-lineares (Billings e Chen, 1989).

A estrutura de um modelo NARMAX com período de amostragem normalizado é (Leontaritis e Billings, 1985a; Leontaritis e Billings, 1985b; Billings e Chen, 1989):

$$y(t) = F^l [y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-n_y), u(t-d), u(t-d-1), \dots, u(t-d-n_u+1), e(t-1), e(t-2), \dots, e(t-n_e)] + e(t), \quad (2.3)$$

onde  $t=1, \dots, N$ .  $F^l$  é uma função não-linear qualquer.  $y(t)$ ,  $u(t)$ ,  $e(t)$  são saída, entrada e ruído (aditivo) do sistema, cujos atrasos máximos são representados por  $n_y$ ,  $n_u$ ,  $n_e$ <sup>3</sup>.  $d$  representa o retardo ou tempo morto do sistema.

<sup>3</sup>Existem procedimentos estatísticos que permitem estimar os atrasos  $n_y$ ,  $n_u$ ,  $n_e$  a partir dos dados de operação do sistema (Davis e Vinter, 1985, capítulo 4; Granger e Lin, 1994).



A forma da função  $F^l$  normalmente não é conhecida "a priori". Assim, a dinâmica do sistema deve ser reconstruída utilizando-se uma aproximação para representar  $F^l$ . Possíveis aproximações são: modelos polinomiais, racionais e "output-affine" (Billings e Chen, 1989).

Um modelo não-linear polinomial de grau  $l$  apresenta a seguinte estrutura (Billings e Chen, 1989):

$$y(t) = \theta_0 + \sum_{i_1=1}^n \theta_{i_1} x_{i_1}(t) + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=i_1}^n \theta_{i_1 i_2} x_{i_1}(t) x_{i_2}(t) + \dots + \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_l=i_{l-1}}^n \theta_{i_1 \dots i_l} x_{i_1}(t) \dots x_{i_l}(t) + e(t), \quad (2.4)$$

onde

$$x_1(t) = y(t-1), \quad x_2(t) = y(t-2), \quad \dots, \quad x_{n_y+1}(t) = u(t-d), \quad \dots, \\ x_{n_y+n_u+1}(t) = e(t-1), \quad \dots, \quad x_n(t) = e(t-n_e). \quad n = n_y + n_u + n_e.$$

Os  $\theta$ 's são os parâmetros que devem ser estimados para que a estrutura escolhida para o modelo se ajuste à janela de dados utilizada na estimação. É desejável que o modelo também reproduza a dinâmica do sistema e não somente se ajuste aos dados de estimação (Aguirre e Billings, 1994a).

A utilização de modelos polinomiais apresenta algumas vantagens óbvias sobre as outras representações. É possível obter modelos NARMAX polinomiais que ajustem os dados de identificação com boa exatidão desde que estes dados não apresentem variações abruptas (nessa situação, o sinal utilizado na obtenção dos modelos apresenta taxa de variação elevada em curtos espaços de tempo)<sup>4</sup>. Além disso, um modelo NARMAX polinomial se transforma em uma representação linear quando o ponto de operação do sistema é mantido aproximadamente fixo (linearização do modelo) (Billings e Chen, 1989). Outra vantagem da representação polinomial é a facilidade com que a informação analítica sobre a dinâmica do modelo pode ser obtida. Essa característica será discutida em detalhes no próximo capítulo.

As funções não-lineares polinomiais são lineares nos parâmetros, o que permite a utilização de algoritmos de estimação de parâmetros para sistemas lineares. Esses algoritmos de estimação são fáceis de implementar, convergem rapidamente e já foram estudados em um vasto número de artigos (Davis e Vinter, 1985, capítulo 4; Korenberg et al., 1988; Chen et al., 1989, Aström e Wittenmark, 1990, capítulo 13).

<sup>4</sup> Nesse caso, as representações mais adequadas parecem ser os modelos racionais e os "output-affine" (Billings e Chen, 1989).

### 2.2.4 Detecção de Estrutura

O número de termos possíveis em modelos polinomiais cresce bastante com o aumento do grau de não-linearidade  $l$  e da ordem  $n_y$  do modelo. Como pode ser visto na equação (2.4), o número de termos também depende de  $n_u$  e  $n_e$ . De fato, esse número pode ser determinado através da seguinte expressão (Korenberg et al., 1988):

$$n_\theta = M + 1, \quad (2.5)$$

onde  $n_\theta$  é o número de termos (de processo e de ruído) no modelo e

$$M = \sum_{i=1}^l n_i,$$

$$n_i = \frac{n_{i-1}(n_y + n_u + n_e + i - 1)}{i}, \quad n_0 = 1.$$

O valor de  $n_\theta$  pode se tornar impraticavelmente grande para modelos polinomiais. Entretanto, o problema aqui não é tão crítico quanto no caso das séries de Volterra ou modelos de Wiener, onde o número de termos pode facilmente chegar a  $10^{10}$  para sistemas relativamente simples (Billings, 1980). A união de todos os termos possíveis de serem incluídos em um modelo polinomial é denominado conjunto de termos candidatos.

Na tentativa de melhor explicar os dados de identificação do sistema, os modelos tendem a se tornar excessivamente complexos. A utilização desses modelos na prática torna-se inviável, pois muito tempo e esforço computacional serão necessários para implementar a estimação de parâmetros, simular o modelo e prever o comportamento do sistema. Além disso, modelos não-lineares sobreparametrizados tendem a apresentar regimes dinâmicos espúrios; ou seja, regimes dinâmicos não apresentados pelo sistema original (Aguirre e Billings, 1995a).

Embora o número de termos possíveis em modelos polinomiais seja muito elevado, apenas um pequeno número deles é suficiente para aproximar a dinâmica do processo, na maioria dos casos. Garantindo que os termos importantes no modelo possam ser corretamente encontrados, representações concisas podem ser obtidas para uma grande diversidade de sistemas não-lineares. O procedimento de encontrar os termos a serem incluídos no modelo é denominado *detecção de estrutura*.

Existem alguns algoritmos para implementar a detecção de estrutura de modelos não-lineares. O uso de algoritmos genéticos para detecção de termos em modelos NARMAX foi investigado por Fonseca et al. (1993). Cada modelo possível foi codificado como um indivíduo com uma cadeia de genes, onde cada gene indica um termo constituinte do modelo. Através do uso de técnicas evolutivas, foi selecionado o indivíduo mais forte; ou seja, o melhor modelo. Outro método utilizado para a detecção de estrutura de modelos não-lineares é o "zeroing-and-refitting" (Kadtke et al., 1993). Neste método, considera-se um modelo inicial com todos os termos possíveis. Todos os parâmetros deste modelo que apresentarem valor absoluto menor que uma tolerância (previamente ajustada) são zerados; ou seja, seus respectivos termos são eliminados do modelo. Os termos cujos

parâmetros não foram zerados constituem o novo modelo. Os parâmetros desse novo modelo são, então, reestimados. O procedimento descrito acima pode ser repetido um número definido de vezes ou até que nenhum termo possa mais ser eliminado, gerando assim o modelo final.

A taxa de redução do erro ("error reduction ratio" ou ERR) é um outro critério utilizado na detecção de estrutura de modelos NARMAX polinomiais (Korenberg et al., 1988; Billings et al., 1989; Chen et al., 1989). O ERR de cada termo candidato é um número que indica a melhoria obtida na representação do sistema através da sua inclusão no modelo. Um algoritmo de detecção de estrutura baseado no ERR será descrito após a apresentação do algoritmo de estimação de parâmetros.

### 2.2.5 Estimação de Parâmetros

Determinada a estrutura de um modelo, deve-se estimar seus parâmetros para aproximar o comportamento dinâmico apresentado pelo sistema. Isto é normalmente feito (no caso de modelos polinomiais) aplicando-se técnicas de mínimos quadrados<sup>5</sup> aos dados obtidos em experimentação.

A estrutura apresentada em ( 2.4 ) pode ser representada como:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_{\theta}} p_i(t)\theta_i + e(t) , \quad (2.6)$$

onde os regressores do modelo,  $p_i(t)$ , correspondem aos diferentes termos no polinômio e os  $\theta_i$  são os respectivos parâmetros.

A equação ( 2.6 ) pode ser escrita na forma do erro de predição:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_{\theta}} p_i(t)\hat{\theta}_i + \xi(t) , \quad (2.7)$$

onde o chapéu sobre as variáveis faz referência à valores estimados e o resíduo de identificação  $\xi(t, \theta)$  é definido como:

$$\xi(t, \hat{\theta}) = y(t) - \hat{y}(t, \hat{\theta}) , \quad (2.8)$$

$$\hat{y}(t, \hat{\theta}) = \sum_{i=1}^{n_{\theta}} p_i(t)\hat{\theta}_i . \quad (2.9)$$

O vetor de resíduos  $\{\xi(t), t=1, \dots, N\}$  representa os erros de modelagem, o ruído aditivo do sistema e incertezas de ordem qualquer. A equação ( 2.9 ) é denominada preditor de "um-passo-a-frente" e  $\hat{y}(t)$  é a predição de "um-passo-a-frente" de  $y(t)$ .

<sup>5</sup> Outras alternativas possíveis são indicadas em Billings e Voon (1984).

Os parâmetros  $\theta_i$  do modelo devem ser escolhidos, dentro de um espaço de busca, de modo a minimizar um índice de desempenho pré-estabelecido. Considerar-se-á o índice de desempenho (Aström e Wittenmark, 1990, capítulo 13; Jota, 1994):

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N f(\xi(t, \theta)), \quad (2.10)$$

onde  $f(\xi)$  é uma função matemática genérica.

Os parâmetros estimados serão diferentes para cada  $f$  considerada. Utilizando  $f(\xi) = \xi^T \xi$ , tem-se o chamado método dos mínimos quadrados. Nesse caso, (2.10) transforma-se em:

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi(t, \theta)^T \xi(t, \theta), \quad (2.11)$$

que deverá ser minimizado para determinar o conjunto de parâmetros correspondente<sup>6</sup>.

O vetor de parâmetros estimados será omitido na representação dos resíduos de identificação e da saída predita do modelo, no texto que se segue, para simplificação de notação. Representando a equação (2.7) em notação matricial:

$$Y = P \Theta + \Xi, \quad (2.12)$$

onde

$$Y = [y(1) \quad y(2) \quad \dots \quad y(N)]^T$$

$$\Xi = [\xi(1) \quad \xi(2) \quad \dots \quad \xi(N)]^T,$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1(1) & p_2(1) & \dots & p_{n_\theta}(1) \\ p_1(2) & p_2(2) & \dots & p_{n_\theta}(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1(N) & p_2(N) & \dots & p_{n_\theta}(N) \end{bmatrix},$$

$$\Theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_{n_\theta}]^T,$$

e  $T$  indica transposição da matriz ou vetor. A matriz  $P$  é denominada matriz de regressores do modelo e  $\Theta$  indica o vetor de parâmetros nominal.

A solução do problema de mínimos quadrados é conhecida e dada por (Golub e Van Loan, 1989):

<sup>6</sup>É possível dar pesos diferentes aos resíduos  $\xi(1), \dots, \xi(N)$ , no método dos mínimos quadrados, mudando-se adequadamente a função de custo a ser minimizada (Davis e Vinter, 1985, capítulo 4).

$$\hat{\Theta}_{LS} = (P^T P)^{-1} P^T Y. \quad (2.13)$$

As matrizes  $Y$  e  $P$  foram definidas em (2.12). A matriz  $P^T P$  é denominada matriz de informação. Esta matriz é simétrica e positiva definida quando  $P$  tem posto pleno de colunas<sup>7</sup>. Entretanto, ela pode perder essas propriedades em casos de mal-condicionamento numérico grave.

A equação (2.13) é denominada equação normal. A solução  $\hat{\Theta}_{LS}$  existe e é única desde que  $P^T P$  seja não-singular. Para que isso seja verificado, a matriz  $P$  deve ter posto pleno de colunas. Nessa situação, as colunas de  $P$  são linearmente independentes e formam uma base num espaço vetorial gerado por  $P\Theta$  (espaço imagem de  $P$ ). Quando  $Y$  não pertence ao espaço vetorial descrito pelas colunas de  $P$  (como irá acontecer na quase totalidade dos casos), os dados do sistema não poderão ser completamente explicados pelos regressores. Nesse caso,  $P\hat{\Theta}_{LS}$  representará a projeção ortogonal de  $Y$  no espaço imagem de  $P$  e os resíduos da estimação  $\xi(t)$  serão mínimos e ortogonais a tal espaço (Golub e Van Loan, 1989).

A estimativa obtida é dita não-polarizada se o vetor de resíduos  $\{\xi(t), t=1, \dots, N\}$  for branco e não apresentar correlação com os regressores; isto é (Davis e Vinter, 1985, capítulo 4; Korenberg et al., 1988):

$$E\{\hat{\Theta}_{LS}\} = \Theta, \quad (2.14)$$

onde  $E$  representa esperança matemática e  $\Theta$  é o vetor nominal de parâmetros. Quando isso não acontece, os resíduos apresentam alguma dinâmica que não foi devidamente explicada pelo modelo. Novos termos devem ser incluídos no mesmo para que as estimativas se tornem não-polarizadas e toda a dinâmica dos dados seja absorvida pelo modelo<sup>8</sup>.

Existem métodos de estimação de parâmetros que garantem a obtenção de estimativas não-polarizadas mesmo quando o ruído  $e(t)$  do sistema for não-branco e não estiver devidamente modelado. Um desses métodos é o da variável instrumental (Billings e Voon, 1984; Davis e Vinter, 1985, capítulo 4; Jota, 1994), no qual é definida uma nova variável aleatória  $v(t)$  que apresenta correlação com os regressores do modelo e é não-correlacionada com  $e(t)$ . Essa nova variável será, então, utilizada na estimação, no lugar

<sup>7</sup> A matriz de informação  $P^T P$  é simétrica e positiva semidefinida quando a matriz de regressores  $P$  não tem posto pleno de colunas.

<sup>8</sup> Um cuidado especial deve ser tomado com os termos em ruído, no modelo. Na prática, modela-se o ruído apenas para evitar a polarização dos parâmetros. Obtido o modelo, despreza-se a parte estocástica e considera-se apenas a parte determinística para simulação e análise (Aguirre, 1994a).

Em algumas aplicações tais como predição a curto prazo, filtragem e controle adaptativo, entre outras, tanto a parte estocástica quanto a parte determinística do modelo são utilizadas (Jota, 1994; Aguirre e Billings, 1995b; Aguirre et al., 1996).

dos regressores antigos<sup>9</sup>.

### Implementações Ortogonais do Algoritmo de Mínimos Quadrados

Quando  $P$  é mal-condicionada, a formação da matriz  $P^T P$  torna-se sujeita a problemas numéricos (propagação de erros, precisão insuficiente nos cálculos) que podem afetar a estabilidade do algoritmo de mínimos quadrados (Chen et al., 1989). Nesse caso, a solução da equação normal através da expressão ( 2.13 ) torna-se inviável. Mal-condicionamento numérico acontece quando as colunas de regressores na matriz  $P$  são altamente correlacionadas entre si.

Uma alternativa para aliviar tal problema é a ortogonalização da matriz  $P$ . Nesta situação, as colunas de  $P$  serão não-correlacionadas e formarão uma base ortogonal para o espaço vetorial solução de  $P\theta$ . Alguns algoritmos utilizados na solução do problema de mínimos quadrados ortogonais são o procedimento de Gram-Schmidt (clássico e modificado) e o método da transformação de Householder.

Descrever-se-á, em seguida, o método da transformação de Householder (Chen et al., 1989), o qual será utilizado na estimação ortogonal de parâmetros neste trabalho (vide capítulo 4).

Se a matriz  $P$  tiver posto pleno de colunas, ela pode ser decomposta em:

$$P = QR, \quad (2.15)$$

onde  $Q \in \mathbf{R}^{N \times n_0}$  é uma matriz ortonormal ( $Q^T Q = I$ ) e  $R \in \mathbf{R}^{n_0 \times n_0}$  é uma matriz triangular superior.

Criando a matriz aumentada  $\bar{Q}$ , obtém-se:

$$\bar{Q} = [Q \mid q_{n_0+1} \dots q_N], \quad (2.16)$$

$$P = \bar{Q} \cdot \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

onde  $\bar{Q}$  tem dimensão  $N \times N$ . As novas colunas acrescentadas a  $Q$  podem ser quaisquer, desde que  $\bar{Q}$  tenha posto pleno de colunas.

Aplicando  $\bar{Q}^T$  a  $Y$  (vetor de saídas do sistema):

---

<sup>9</sup>O método da Variável Instrumental para sistemas não-lineares pode ser inviável ou bastante complexo e, portanto, é pouco utilizado (Billings e Voon, 1984; Billings e Voon, 1986).

$$\bar{Q}^T Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

onde  $y_1$  e  $y_2$  têm dimensão  $n_\theta \times 1$  e  $(N-n_\theta) \times 1$ , respectivamente.

Assim:

$$\|Y - P\Theta\|_2 = \|\bar{Q}^T (Y - P\Theta)\|_2 = \|y_1 - R\Theta\|_2 + \|y_2\|_2, \quad (2.19)$$

onde  $\|\cdot\|_2$  indica norma euclidiana.

A estimativa dos parâmetros pode ser obtida solucionando-se o sistema linear triangular (usando substituição reversa, por exemplo):

$$R\Theta = y_1. \quad (2.20)$$

A fatoração  $QR$  da matriz  $P$  pode ser implementada utilizando-se transformações de Householder devidamente projetadas para tanto (Chen et al., 1989; Golub e Van Loan, 1989).

O procedimento de Gram-Schmidt será descrito a seguir, pois ele constitui uma outra opção para implementar a ortogonalização do conjunto de regressores do algoritmo de mínimos quadrados, a qual é bastante utilizada na literatura (Korenberg et al., 1988; Billings et al., 1989; Chen et al., 1989).

No procedimento de Gram-Schmidt, a matriz  $P$  é decomposta no produto de duas matrizes, uma ortogonal e a outra triangular superior, como na fatoração de Householder. A forma de implementar tal decomposição é o que diferencia os dois métodos.

Considere:

$$P = WA, \quad (2.21)$$

onde  $A$  é uma matriz triangular superior com a diagonal unitária, de dimensão  $n_\theta \times n_\theta$  e  $W$  é uma matriz ortogonal ( $W^T W = D$ , sendo  $D$  uma matriz diagonal), de dimensão  $N \times n_\theta$ , a ser construída a partir dos dados de operação.

Da equação (2.12):

$$Y = P(A^{-1}A)\Theta + \Xi. \quad (2.22)$$

Define-se:

$$W = PA^{-1}, \quad (2.23)$$

$$g = A\Theta, \quad (2.24)$$

$$Y = Wg + \Xi, \quad (2.25)$$

onde as colunas de  $W$  constituem os novos regressores (ditos ortogonais) do problema e  $g$  é o vetor de parâmetros para este conjunto de regressores.

A solução do problema de mínimos quadrados ortogonais ( 2.25 ) é (Korenberg et al., 1988; Billings et al., 1989; Chen et al., 1989):

$$\hat{g} = D^{-1} W^T Y. \quad (2.26)$$

Determinado  $\hat{g}$  através de ( 2.26 ), os parâmetros do modelo original podem ser obtidos segundo ( 2.24 )<sup>10</sup>.

## 2.2.6 Critérios de Informação

Na literatura de identificação de sistemas, existem procedimentos que permitem estimar a ordem de modelos dinâmicos a partir de dados, utilizando algum critério de otimização. Entre tais métodos, destacam-se o critério de informação de Akaike, AIC (Akaike, 1974), o critério de informação de Bayes, BIC (Kashyap, 1977), o critério de informação de Schwarz (Crutchfield e McNamara, 1987) e a "entropia do modelo" (Mees, 1993).

O método mais utilizado para estimar o número de termos que devem ser incluídos em modelos dinâmicos é o critério de informação de Akaike (1974). De acordo com o critério de Akaike, o número ótimo de termos em um modelo deve minimizar a seguinte função de custo:

$$J = N \log(\text{Var}\{\xi(t)\}) + 2n_p, \quad (2.27)$$

onde  $N$  é o comprimento dos registros de dados e  $n_p$  é o número de termos de processo no modelo. A função de custo de Akaike estabelece um compromisso entre a qualidade do ajuste aos dados de identificação (quantificada pelo primeiro termo) e a procura por representações parcimoniosas (quantificada pelo segundo termo). O critério de Akaike e outros critérios de informação (de Gooijer et al., 1985) foram desenvolvidos no contexto de sistemas lineares. Contudo, tais critérios fornecem resultados consistentes para muitos sistemas não-lineares (Aguirre, 1994b).

O número de termos determinado a partir do critério de Akaike minimiza a variância dos resíduos de identificação em uma estrutura fixa (a qual foi previamente ajustada através

<sup>10</sup> Chen et al. (1989) apresentam ainda um algoritmo de estimação ortogonal baseado na decomposição em valores singulares da matriz de regressores  $P$ . Este algoritmo pode ser utilizado para solucionar o problema de mínimos quadrados em casos onde a matriz de regressores  $P$  não tem posto pleno de colunas e a matriz  $P^T P$  é singular.



de um critério de seleção de estrutura qualquer). Entretanto, não se pode afirmar que um modelo selecionado pelo critério de informação seja capaz de reproduzir as propriedades dinâmicas do sistema original (Aguirre e Billings, 1994a). Aguirre (1994b) mostra que os critérios de informação nem sempre selecionam os modelos com melhores propriedades dinâmicas, embora geralmente se aproximem deles. O critério de Akaike não determina o "melhor" modelo, mas delimita a região de busca no espaço de estruturas de modelos.

### 2.2.7 Detecção de Estrutura Utilizando o ERR

Utilizando ( 2.25 ) e considerando  $E\{\xi(t)\} = 0$ , define-se a variância do erro de modelagem  $\xi(t)$  como:

$$\text{Var}\{\xi(t)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \Xi^T \Xi = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[ Y^T Y - \sum_{i=1}^{n_0} g_i^2 w_i^T w_i \right], \quad (2.28)$$

onde  $g_i$  indica os elementos do vetor de parâmetros  $g$  e  $w_i$  indica os regressores ortogonais (colunas da matriz  $W$ ).

Supondo que nenhum termo fosse incluído no modelo, a variância de  $\xi(t)$  seria igual ao erro quadrático médio da saída  $y(t)$ . A cada novo termo colocado no modelo, a variância de  $\xi(t)$  é decrescida de um fator  $\frac{1}{N} (g_i^2 w_i^T w_i)$ , onde  $w_i$  indica o termo incluído e  $g_i$  o seu respectivo parâmetro. A redução no valor da variância pode ser normalizada com relação ao erro quadrático médio do sinal de saída. Assim, o ERR de cada termo é definido formalmente como:

$$[ERR]_i = \frac{g_i^2 w_i^T w_i}{Y^T Y}, \quad 1 \leq i \leq n_0. \quad (2.29)$$

O ERR indica a porção da variância da saída explicada pela inclusão de um novo termo no modelo. Ele pode ser utilizado na detecção de estrutura de modelos polinomiais. Escolhe-se o número de termos desejados para o modelo e considerar-se-ão aqueles que possuírem os maiores valores de ERR.

O valor do ERR depende da posição em que o termo considerado é incluído no modelo. Em (Billings et al., 1989) é apresentado um esquema de detecção de estrutura, baseado no ERR, que visa contornar esse defeito. No algoritmo, denominado "regressão-direta", todos os regressores  $p_i(t)$  são considerados na determinação de cada  $w_i(t)$ , sendo escolhido aquele que apresentar o maior valor de ERR naquela posição.

Nos algoritmos descritos nesta seção, a estimação de parâmetros é feita de maneira "off-line". A estimação pode ser também implementada "on-line". Nesse caso, o vetor de parâmetros é inicializado e recalculado segundo uma expressão recursiva a cada intervalo de amostragem, quando um novo registro de entrada e saída do sistema é obtido.

Existem algoritmos para detecção de estrutura e estimação de parâmetros "on-line", também baseados na ortogonalização da matriz de regressores do modelo (Billings et al., 1994). No entanto, tais algoritmos são sensivelmente mais complexos do que aqueles disponíveis para a detecção "off-line" e sua utilidade prática ainda precisa ser estabelecida.

Os algoritmos de estimação "on-line" são utilizados quando o sistema que está sendo modelado é variante no tempo. Nessa situação, os parâmetros precisam ser continuamente estimados e mudanças refletidas nos dados do sistema devem ser capazes de forçar a atualização destes parâmetros. Para que isso aconteça, os algoritmos "on-line" utilizam um fator de esquecimento, geralmente exponencial, que privilegia os dados mais recentes em detrimento dos mais antigos. A estimação "on-line" também é utilizada no projeto de controladores adaptativos. Pröl e Karim (1994) apresentam um controlador preditivo adaptativo baseado em modelos NARX polinomiais, com detecção de estrutura "off-line" e estimação "on-line".

### 2.2.8 Validação de Modelos

A ausência de algum termo importante pode provocar a polarização dos parâmetros estimados. Dessa maneira, torna-se necessário submeter o modelo obtido a alguns testes que deverão avaliar sua adequabilidade em representar o sistema original.

Uma das vertentes da validação de modelos dinâmicos prevê o uso de funções de correlação para detectar alguma possível dinâmica não-modelada nos resíduos. Tratando-se de sistemas lineares, deve ser verificado se os resíduos  $\xi(t)$  são brancos e não-correlacionados com a entrada. Esta verificação pode ser feita calculando-se as funções auto-correlação dos resíduos e correlação cruzada dos resíduos com a entrada (Box e Jenkins, 1976; Ljung, 1987). Tratando-se de sistemas não-lineares, esses testes não são suficientes pois eles falham em detectar termos cruzados de ruído, entre outros (Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986).

Na validação de modelos não-lineares, devem ser verificadas as seguintes identidades (Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986; Billings e Zhu, 1994):

$$\Phi_{\xi\xi}(\tau_1) = E\{\xi(t)\xi(t - \tau_1)\} = \delta(\tau_1) \quad , \quad (2.30)$$

$$\Phi_{\xi u}(\tau_1) = E\{\xi(t)u(t - \tau_1)\} = 0, \quad \forall \tau_1 \quad (2.31)$$

$$\Phi_{\xi\xi u}(\tau_1) = E\{\xi(t+1)\xi(t - \tau_1)u(t - \tau_1)\} = 0, \quad \forall \tau_1 \quad (2.32)$$

$$\Phi_{u^2\xi}(\tau_1) = E\{(u^2(t) - E\{u^2(t)\})\xi(t - \tau_1)\} = 0, \quad \forall \tau_1 \quad (2.33)$$

$$\Phi_{u^2\xi^2}(\tau_1) = E\{(u^2(t) - E\{u^2(t)\})\xi^2(t - \tau_1)\} = 0, \quad \forall \tau_1 \quad (2.34)$$

$$\Phi_{\xi, \xi}(\tau_1) = E\{(\xi(t) - E\{\xi(t)\})(\xi(t - \tau_1) - E\{\xi(t)\})\} = \delta(\tau_1) \quad (2.35)$$

$$\Phi_{\xi, \xi^2}(\tau_1) = E\{(\xi(t) - E\{\xi(t)\})(\xi^2(t - \tau_1) - E\{\xi^2(t)\})\} = 0, \quad \forall \tau_1 \quad (2.36)$$

$$\Phi_{\xi^2, \xi^2}(\tau_1) = E\{(\xi^2(t) - E\{\xi^2(t)\})(\xi^2(t - \tau_1) - E\{\xi^2(t)\})\} = \delta(\tau_1) \quad (2.37)$$

$$\Phi_{(y\xi), \xi^2}(\tau_1) = E\{(y(t)\xi(t) - E\{y(t)\xi(t)\})(\xi^2(t - \tau_1) - E\{\xi^2(t)\})\} = \delta(\tau_1) \quad (2.38)$$

$$\Phi_{(y\xi), u^2}(\tau_1) = E\{(y(t)\xi(t) - E\{y(t)\xi(t)\})(u^2(t - \tau_1) - E\{u^2(t)\})\} = 0, \quad \forall \tau_1 \quad (2.39)$$

onde  $\delta(\tau_1)$  é a função delta de Dirac e o apóstrofe indica que a média foi subtraída dos sinais.

Baseado no comprimento do registro de dados disponíveis,  $N$ , é definido um intervalo probabilístico de 95 % de confiança, dentro do qual as funções de correlação devem se manter para serem consideradas nulas. Os limites do intervalo de confiança de 95 % são:  $\pm 1,96/\sqrt{N}$  (Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986).

O procedimento de validação descrito acima garante apenas que não existem correlações não-modeladas nos resíduos de identificação. A validação assim implementada é denominada estatística, pois baseia-se em critérios estatísticos. No entanto, os modelos validados podem não apresentar o mesmo comportamento dinâmico que os sistemas originais (Aguirre e Billings, 1994a; Aguirre e Billings, 1995a).

A validação dinâmica deve verificar se um modelo apresenta características dinâmicas semelhantes àquelas do sistema que está sendo identificado. Algumas propriedades dinâmicas que podem ser utilizadas para validar modelos são (Aguirre e Billings, 1994a):

- expoentes de Lyapunov (expoentes de Lyapunov positivos quantificam a sensibilidade do sistema às condições iniciais);
- mapas e seções de Poincaré;
- dimensão de correlação;
- diagramas de bifurcação (indicam mudanças qualitativas no comportamento do sistema à medida que um determinado parâmetro do sistema é variado).

Os invariantes dinâmicos acima citados descrevem aspectos qualitativos ou quantitativos da dinâmica do sistema. Segundo Aguirre e Billings (1994a), os diagramas de bifurcação são mais adequados na validação por serem mais sensíveis à mudanças na estrutura do modelo. Estes diagramas que podem ser obtidos via simulação do modelo.

Parameswaran e Raol (1994) propuseram um algoritmo para obtenção do modelo dos resíduos de estimação. Esse procedimento pode ser utilizado na validação estatística de modelos. Por sua vez, Brown et al. (1994) descrevem uma técnica de validação baseada no princípio da sincronização de sistemas dinâmicos.

### 2.3 Técnicas de Reconstrução de Espaço de Estados

Uma importante ferramenta na análise e na predição de séries temporais é a técnica de reconstrução de espaços de estados. Esta técnica de reconstrução será descrita e analisada nessa seção, pois ela constitui uma alternativa para a representação de sistemas dinâmicos não-lineares. Além disso, ela guarda muitas semelhanças com a identificação de modelos não-lineares, assunto pesquisado nessa dissertação.

Um "embedding" é um espaço topologicamente equivalente ao espaço de estados de um dado sistema dinâmico<sup>11</sup>. Este "embedding" pode ser gerado a partir de séries temporais que descrevem a dinâmica do sistema (Casdagli et al., 1992). Os principais invariantes dinâmicos do sistema original podem ser estimados sobre a dinâmica reconstruída no "embedding", pois os dois espaços são equivalentes no sentido topológico.

Normalmente, não se sabe "a priori" quantas e quais são as variáveis de estado de um sistema dinâmico. Esse fato dificulta a construção de "embeddings" para o sistema. Além disso, dispõe-se, quase sempre, de medições de uma única variável do processo (saída ou outra grandeza observável). Assim, deverá ser definido um conjunto de coordenadas que servirá como base para a reconstrução do espaço de estados original. O conjunto de coordenadas será escolhido de acordo com o tipo de dados disponíveis e deve apresentar alguma relação com o processo em estudo. Breeden e Packard (1994) discutem uma variedade de coordenadas de reconstrução.

O sistema de coordenadas mais utilizado na construção de "embeddings" é baseado nas coordenadas de atraso. Define-se o vetor de coordenadas de atraso como:

$$\mathbf{y}(t) = [y(t) \quad y(t - \tau) \quad \dots \quad y(t - (d_e - 1)\tau)]^T, \quad (2.40)$$

onde  $\tau$  é o tempo de atraso e  $d_e$  é a dimensão do "embedding".

A escolha do tempo de atraso  $\tau$  é de vital importância na construção do "embedding" (Casdagli et al., 1992; Aguirre, 1995a). Se ele for muito grande, a distância entre os dados considerados na formação do vetor de atraso é grande e eles poderão não ser suficientes para reproduzir a dinâmica do sistema em estudo. Por outro lado, se ele for pequeno demais, as coordenadas escolhidas serão altamente correlacionadas. Nesse caso, poderão aparecer problemas de mal-condicionamento numérico, o que irá gerar reconstruções pobres.

Floris Takens propôs e demonstrou alguns teoremas sobre a reconstrução de espaços de estados de sistemas dinâmicos não-lineares (Takens, 1980). Uma versão de um destes teoremas é apresentada a seguir.

<sup>11</sup> Dois espaços vetoriais são topologicamente equivalentes quando as propriedades métricas definidas sobre eles são idênticas. Nesse caso, a razão entre distâncias medidas nos dois espaços é uniforme, limitada e diferente de zero (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994).

**Teorema de Takens (1980):**

Seja  $M$  uma variedade compacta de dimensão  $r$ . Considere ainda pares  $(X, g)$ , onde  $X$  é um campo vetorial suave (classe  $C^2$ ) e  $g$  é uma função suave sobre  $M$ . Assim,  $\Phi_{X,g}: M \rightarrow \mathbb{R}^{2r+1}$  definido por:

$$\Phi_{X,g}(x) = \{g(x), g(\varphi_1(x)), \dots, g(\varphi_{2r}(x))\} ,$$

é um "embedding", onde  $\varphi_i(x)$  é o fluxo gerado por  $X$ .

O campo vetorial  $X$  descreve a dinâmica do sistema original em equação de estados (onde  $x$  é o vetor de estados).  $r$  indica a dimensão do atrator do sistema descrito pelo campo  $X$ , enquanto que  $g(\cdot)$  é uma função de observação. De acordo com o teorema, um "embedding" deste sistema pode ser construído utilizando coordenadas de atraso escolhidas de tal maneira que  $d_e > 2r + 1$ <sup>12</sup>. Nesse caso, existe um mapeamento suave  $f$  tal que:

$$y(t + k) = f(\mathbf{y}(t)) , \tag{2.41}$$

onde  $\mathbf{y}(t)$  representa a dinâmica reconstruída no "embedding",  $y$  é a variável de saída do sistema original e  $k$  é o intervalo de predição considerado ( $k \in \mathbf{N}$ ).

O resultado de Takens garante que a série temporal de uma única variável bastará para a reconstrução quando a dimensão do "embedding" for escolhida suficientemente grande (Mañé, 1980; Takens, 1980; Sauer et al., 1991).

Os resultados de Takens foram estabelecidos considerando-se dados infinitos e sem ruído. Como os dados reais não se encaixam nessa situação, deverão ser analisadas quais as consequências da utilização dos mesmos no processo de reconstrução. Em (Casdagli et al., 1992) é feito um estudo da amplificação do ruído presente nos dados, no processo de reconstrução.

O processo de obtenção do mapeamento  $f$  é semelhante à identificação de sistemas<sup>13</sup>. Em um primeiro passo, deve ser escolhida a estrutura que será utilizada para representar o mapeamento  $f$ . Neste trabalho, serão utilizados modelos polinomiais (globais), cujos parâmetros podem ser ajustados através de um algoritmo de mínimos quadrados ortogonais. A representação obtida para  $f$  deve passar ainda por um procedimento de validação dinâmica.

Um cuidado importante a ser tomado na obtenção do mapeamento  $f$  é o ajuste correto do modelo de ruído na estrutura escolhida para reproduzir a dinâmica do sistema. Da mesma maneira que na identificação de modelos NARMAX polinomiais, um modelo incorreto de ruído pode levar à polarização dos parâmetros estimados.

<sup>12</sup> Nesse caso, a função de observação  $g(\cdot)$  mapeia o vetor de estados original na saída do sistema.

<sup>13</sup> Um modelo NARMAX polinomial para séries temporais pode ser visto como um caso especial do mapeamento suave  $f$ , onde a dimensão da reconstrução ( $d_e$ ) é feita igual à ordem do sistema ( $n_y$ ) e o tempo de atraso ( $\tau$ ) é feito igual ao período de amostragem ( $T_s$ ).

O mapeamento  $f$  poderá ser utilizado na implementação da análise, predição e controle do sistema original (Crutchfield e McNamara, 1987; Casdagli, 1989; Sauer et al., 1991; Casdagli, 1992; Casdagli et al., 1992; Breeden e Packard, 1994).

## 2.4 Comentários Finais

Neste capítulo, foram revisados os principais passos da identificação de sistemas dinâmicos não-lineares. O processo de obtenção de modelos não-lineares é, em essência, semelhante à identificação de sistemas lineares (problema este conhecido na literatura). Os dois procedimentos são diferenciados pela maneira que cada etapa do processo é implementada.

O projeto de excitações para coleta de dados de sistemas não-lineares deve levar em consideração que tais sistemas podem apresentar comportamentos dinâmicos distintos, de acordo com a região de operação considerada.

Os algoritmos de detecção de não-linearidades têm como função informar o grau de não-linearidade apresentado nos dados de experimentação do sistema. De acordo com a indicação destes algoritmos, será feita a opção entre a utilização de um modelo linear ou um modelo não-linear. Assim, os dados de experimentação devem refletir o comportamento do sistema em todas as suas faixas de operação. Sempre que possível, é desejável utilizar modelos lineares, pois estes são mais simples e fáceis de serem analisados e controlados.

A grande dificuldade verificada na modelagem não-linear é a escolha da estrutura a ser utilizada para representar a dinâmica do sistema em estudo. Essa estrutura deve ser suficientemente complexa para permitir a representação de uma ampla classe de não-linearidades, garantindo-se que os modelos obtidos sejam passíveis de manipulação computacional posterior.

Nesse trabalho, utilizaram-se modelos NARMAX polinomiais para representar a dinâmica de sistemas não-lineares. Os algoritmos de identificação devem ser capazes de selecionar os termos do modelo que são necessários para reproduzir o comportamento dinâmico refletido nos dados de experimentação. A sobreparametrização de modelos não-lineares polinomiais faz com que estes apresentem dinâmicas não contidas nos dados. A estimação de parâmetros deverá ajustar a estrutura escolhida para representar o sistema original. Por fim, os modelos obtidos devem passar por testes que irão avaliar a sua capacidade em ajustar os dados de identificação e reproduzir a dinâmica apresentada pelo sistema.

Uma outra estrutura bastante utilizada na representação de sistemas não-lineares é a rede neural. As redes neurais têm estruturas muito flexíveis que podem ajustar dados de treinamento com considerável exatidão. A derivação de modelos dinâmicos na forma de redes neurais também pode ser subdividida nas cinco etapas do procedimento de identificação descrito nesse capítulo. A seleção de estrutura de redes neurais consiste em determinar:

- o número de neurônios em cada uma das camadas da rede;
- o número de camadas de entrada, de camadas escondidas e de camadas de saída;
- a interconexão entre os neurônios da rede.

Os modelos em redes neurais também apresentam regimes dinâmicos espúrios quando sobreparametrizados. Mais uma vez, o procedimento de seleção de estrutura é de vital importância na derivação de modelos matemáticos (Narendra e Parthasarathy, 1990). Destaca-se que as redes são estruturas não-lineares nos pesos (ou parâmetros), o que exige a utilização de algoritmos mais complexos para a estimação dos mesmos sobre os dados de treinamento. Um algoritmo muito utilizado para estimar pesos de uma rede neural é o "back-propagation". Este algoritmo é uma versão não-linear do método dos mínimos quadrados (Rummelhart et al., 1986; Casdagli et al., 1992).

Ali Çinar (1995) descreve e analisa o desempenho de algumas estruturas na derivação de modelos entrada-saída para sistemas dinâmicos não-lineares. As estruturas analisadas são polinômios não-lineares, redes neurais, funções de base radial, funções lineares por partes, funções de regressão, entre outras. O autor conclui que a utilização de uma estrutura não compatível com os tipos de não-linearidades existentes nos dados tem um efeito significativo sobre o esforço de identificação e a qualidade do modelo gerado. Assim, o processo de seleção da estrutura de um modelo dinâmico para sistemas não-lineares deve receber uma atenção especial durante o procedimento de identificação.

A determinação do retardo ou tempo morto de um sistema dinâmico é uma tarefa difícil e de vital importância para o sucesso dos procedimentos de modelagem, análise e controle. Em princípio, o critério do ERR deve ser capaz de selecionar termos de entrada com atraso igual ou maior que o retardo, embora isso nem sempre aconteça na prática. Nessa situação, é necessário conhecer o retardo do sistema "a priori". Jota (1994) discute a determinação do retardo de um sistema dinâmico com base na qualidade de ajuste dos dados de identificação.

O procedimento de identificação de modelos NARMAX para sistemas multivariáveis é semelhante àquele utilizado para derivar modelos monovariáveis. Neste caso, as funções que relacionam cada uma das saídas do sistema com as demais saídas e entradas são funções não-lineares que podem ser representadas por modelos NARMAX polinomiais de grau  $l$ . Estes modelos NARMAX polinomiais serão identificados simultaneamente, a partir de dados, utilizando as técnicas descritas nesse capítulo. As grandes dificuldades associadas à identificação de modelos NARMAX multivariáveis são a ordem elevada da matriz de regressores (acarretando um elevado esforço computacional) e a necessidade de sincronismo na amostragem de todas as variáveis envolvidas. Um exemplo da utilização das técnicas de identificação de modelos NARMAX polinomiais na modelagem de sistemas multivariáveis é apresentado em (Billings et al., 1989).

A técnica de reconstrução de espaços de estados é semelhante ao procedimento de identificação de sistemas não-lineares. A equação de estados obtida através da técnica de reconstrução pode ser utilizada na derivação de um mapeamento suave  $f$  que descreve o comportamento entrada-saída do sistema (empregando algoritmos de identificação). Este mapeamento  $f$  será utilizado para a análise, predição e controle do sistema modelado.

## Capítulo 3

### 3. Seleção de Estrutura de Modelos Não-Lineares: Agrupamentos de Termos e Coeficientes de Agrupamentos

#### 3.1 Introdução

Uma importante etapa no procedimento de obtenção de modelos não-lineares é a escolha da estrutura a ser empregada na representação do sistema em estudo. Estruturas passíveis de serem utilizadas na modelagem de sistemas não-lineares foram apresentadas no capítulo anterior. O número de termos possíveis nestas estruturas cresce bastante com o aumento do grau de não-linearidade e da ordem do modelo considerado. Modelos com um número excessivo de termos podem apresentar regimes dinâmicos espúrios (Aguirre e Billings, 1995a), além da dificuldade na manipulação analítica e computacional. Dessa maneira, torna-se importante desenvolver procedimentos que permitam selecionar os termos da estrutura que serão importantes na reprodução da dinâmica do sistema original.

Um dos métodos empregados na seleção de estrutura de modelos não-lineares é o ERR, apresentado no capítulo anterior. Será descrito, nas seções seguintes, um método para escolha de termos em modelos não-lineares baseado nos conceitos de agrupamentos de termos e de coeficientes de agrupamentos. Este método ajusta a estrutura de um modelo NARMAX polinomial através da determinação dos agrupamentos de termos necessários para reproduzir a dinâmica do sistema. Feito isso, os termos do modelo poderão ser selecionados dentro destes agrupamentos de termos, através do critério do ERR.

Será discutida, ainda, a utilização de funções de correlação não-lineares para determinar o tempo de atraso adequado para a identificação de modelos NARMAX e para a reconstrução de espaços de estados de sistemas dinâmicos.

#### 3.2 Agrupamentos de Termos e Coeficientes dos Agrupamentos<sup>1</sup>

O modelo NARMAX polinomial foi definido na equação ( 2.4 ). A parte determinística (que não envolve termos contendo o ruído  $e(t)$ ) do modelo polinomial pode ser reescrita como (Peyton-Jones e Billings, 1989):

---

<sup>1</sup>Este assunto é descrito detalhadamente em (Aguirre, 1994a; Aguirre e Billings, 1995c; Aguirre e Mendes, 1996).



$$y(t) = \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^m \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p,m-p}(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^p y(t-n_i) \prod_{i=p+1}^m u(t-n_i), \quad (3.1)$$

onde

$$\sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} \equiv \sum_{n_1=1}^{n_y} \cdots \sum_{n_m=1}^{n_u} .$$

Os monômios da equação ( 2.4 ) são agrupados de acordo com sua ordem  $m$  ( $0 \leq m \leq l$ , onde  $l$  é o grau de não-linearidade do modelo). Cada termo de ordem  $m$  contém  $p$  fatores multiplicativos em  $y(t-i)$  e  $m-p$  fatores multiplicativos em  $u(t-j)$ . Os parâmetros destes termos são representados por  $c_{p,m-p}(n_1, \dots, n_m)$ , onde  $n_1, \dots, n_m$  indicam os atrasos de cada fator constituinte do monômio considerado. O período de amostragem  $T_s$  foi omitido na expressão ( 3.1 ) por questões de coesão e simplicidade.

O primeiro somatório da equação ( 3.1 ) faz referência aos monômios de ( 2.4 ), separando-os de acordo com sua ordem. O segundo somatório referencia o número de fatores em  $y(t-i)$  no termo considerado. Dentro do conjunto de termos de ordem  $m$ , um termo qualquer pode ser acessado através do ajuste do valor de  $p$  adequado. Por fim, o último somatório permite que seja feita a distinção entre os termos de ( 2.4 ) através do ajuste dos atrasos de cada um dos fatores constituinte do termo.

### Exemplo 3.1.

Seja o modelo NARMAX polinomial<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} y(t) = & 0,44551y(t-1) + 0,57773y(t-2) - 0,83997u(t-2) + 0,64166u(t-1) \\ & - 0,00867y(t-1)^2u(t-1) - 1,31720u(t-3)u(t-1)^2 - 0,16796y(t-3)^3 \\ & + 0,78831y(t-2)u(t-2) + 0,00056y(t-3)^2u(t-3). \end{aligned} \quad (3.2)$$

O modelo acima foi obtido com  $l=3$ ,  $n_y = n_u = 3$ . Os nove termos do modelo foram escolhidos a partir de um conjunto de oitenta e quatro termos candidatos, pelo critério do ERR.

Expressando o modelo ( 3.2 ) como em ( 3.1 ):

$$y(t) = \sum_{m=0}^3 \sum_{p=0}^m \sum_{n_1, n_m}^{3,3} c_{p,m-p}(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^p y(t-n_i) \prod_{i=p+1}^m u(t-n_i), \quad (3.3)$$

onde:

<sup>2</sup> Os modelos apresentados neste capítulo foram obtidos utilizando-se modelo linear de ruído para evitar a polarização das estimativas de parâmetros. Entretanto, será apresentada somente a parte determinística dos modelos, pois apenas ela é levada em consideração na definição de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos.

$$\begin{aligned}
 c_{1,0}(1) &= 0,44551, & c_{0,3}(3,1,1) &= -1,31720, \\
 c_{1,0}(2) &= 0,57773, & c_{3,0}(3,3,3) &= -0,16796, \\
 c_{0,1}(2) &= -0,83997, & c_{1,1}(2,2) &= 0,78831, \\
 c_{0,1}(1) &= 0,64166, & c_{2,1}(3,3) &= 0,00056, \\
 c_{2,1}(1,1) &= -0,00867, & \text{demais } c_{p,m-p}(\cdot) &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\sum_{n_1, n_m}^{3,3} \equiv \sum_{n_1=1}^3 \cdots \sum_{n_m=1}^3 .$$

Se o período de amostragem,  $T_s$ , é escolhido suficientemente pequeno ( $T_s \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned}
 y(t-1) &\approx y(t-2) \approx \cdots \approx y(t-n_y), \\
 u(t-1) &\approx u(t-2) \approx \cdots \approx u(t-n_u).
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Aplicando (3.4) na equação (3.1):

$$y(t) \approx \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_1, \dots, n_m) \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^m y(t-1)^p u(t-1)^{m-p}.$$

(3.5)

O conjunto de termos da forma  $y(t-i)^p u(t-j)^{m-p}$  é denominado *agrupamento de termos* ("term cluster" em Aguirre e Billings, 1995c). Os *agrupamentos de termos* serão representados por  $\Omega_{y^p u^{m-p}}$  ( $m=0, \dots, l$  e  $p=0, \dots, m$ ). A constante  $\sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_1, \dots, n_m)$  é o *coeficiente do agrupamento de termos*  $\Omega_{y^p u^{m-p}}$  ("cluster coefficient" em Aguirre e Billings, 1995c) e será representada por  $\sum_{y^p u^{m-p}}$ . Todos os termos pertencentes a um dado agrupamento de termos explicam o mesmo tipo de não-linearidade no modelo.

Nas definições de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamento, considerou-se que o intervalo de amostragem  $T_s$  tende a zero no limite. Apesar disso, a aproximação descrita na equação (3.5) continua válida para os valores usuais de  $T_s$  e  $n_y$  (Aguirre e Billings, 1995c).

O conjunto de termos candidatos é a união de todos os agrupamentos de termos possíveis; isto é:

$$\{\text{termos candidatos}\} = \bigcup_{\substack{p=0, \dots, m \\ m=0, \dots, l}} \Omega_{y^p u^{m-p}}.$$

(3.6)

Será apresentado, a seguir, um exemplo que irá ilustrar as definições acima.

**Exemplo 3.2.**

O modelo NARMAX polinomial ( 3.2 ) possui seis agrupamentos de termos distintos. Os agrupamentos do modelo e seus coeficientes são:

Agrupamento	Coeficiente
$\Omega_y$	$\sum_y = c_{1,0}(1) + c_{1,0}(2) = 1,00324$
$\Omega_u$	$\sum_u = c_{0,1}(1) + c_{0,1}(2) = -0,19831$
$\Omega_{yu}$	$\sum_{yu} = c_{1,1}(2,2) = 0,78831$
$\Omega_{y^2u}$	$\sum_{y^2u} = c_{2,1}(1,1) + c_{2,1}(3,3) = -0,00811$
$\Omega_{y^3}$	$\sum_{y^3} = c_{3,0}(3,3,3) = -0,16796$
$\Omega_{u^3}$	$\sum_{u^3} = c_{0,3}(3,1,1) = -1,31720$

( 3.7 )

**3.2.1 Agrupamentos Espúrios em Modelos Polinomiais Não-Lineares**

Os conceitos de agrupamentos de termos e de coeficientes de agrupamentos de termos podem ser utilizados para derivar um procedimento auxiliar de seleção de estrutura de modelos não-lineares polinomiais.

Um algoritmo de seleção de estrutura que utilize a idéia de agrupamentos de termos deverá ser capaz de determinar quais são os agrupamentos que deverão estar presentes no modelo para reproduzir a dinâmica do sistema. Após a escolha dos agrupamentos mais importantes ou efetivos, os termos do modelo poderão ser selecionados utilizando o ERR.

Os modelos NARMAX polinomiais são bastante sensíveis à sobreparametrização de sua estrutura, conforme citado na seção 2.2.4. Assim, um modelo que contenha termos que não estejam dentro dos agrupamentos efetivos pode apresentar regimes dinâmicos espúrios.

A importância de um agrupamento de termos em um modelo não-linear pode ser quantificada pelo coeficiente do agrupamento. O coeficiente de um agrupamento de termos será nulo se os termos nele contidos não forem importantes para reproduzir a dinâmica do sistema modelado. Este resultado é válido quando  $T_s \rightarrow 0$ . Na prática,  $T_s$  será suficientemente pequeno e não nulo. Nessa situação, um agrupamento de termos que não seja essencial possuirá um coeficiente muito pequeno (e não nulo) em comparação com aqueles apresentados pelos agrupamentos importantes.

O coeficiente de um agrupamento efetivo não é drasticamente alterado pela presença de ruído nos dados de identificação (desde que a relação sinal/ruído seja suficientemente elevada). Por outro lado, o coeficiente dos agrupamentos espúrios irá apresentar grandes variações quando o nível de ruído nos dados é alterado. Este fato poderá ser utilizado

como indicação de que tais agrupamentos não devem estar presentes no modelo polinomial (Aguirre e Billings, 1995c).

**Exemplo 3.3.**

Utilizando dados de uma série temporal obtida experimentalmente<sup>3</sup>, foram identificados modelos NARMA (autônomos) polinomiais com  $l = 3$ ,  $n_y = 3$  e número de termos de processo variando entre 14 e 20.

Os agrupamentos de termos existentes em um modelo polinomial com  $l=3$  são:  $\Omega_0, \Omega_y, \Omega_{y^2}, \Omega_{y^3}$ . Calculou-se o coeficiente de cada um dos agrupamentos de termos dos modelos identificados. Os resultados obtidos são apresentados na figura 3.1.  $n_p$  indica o número de termos de processo no modelo.

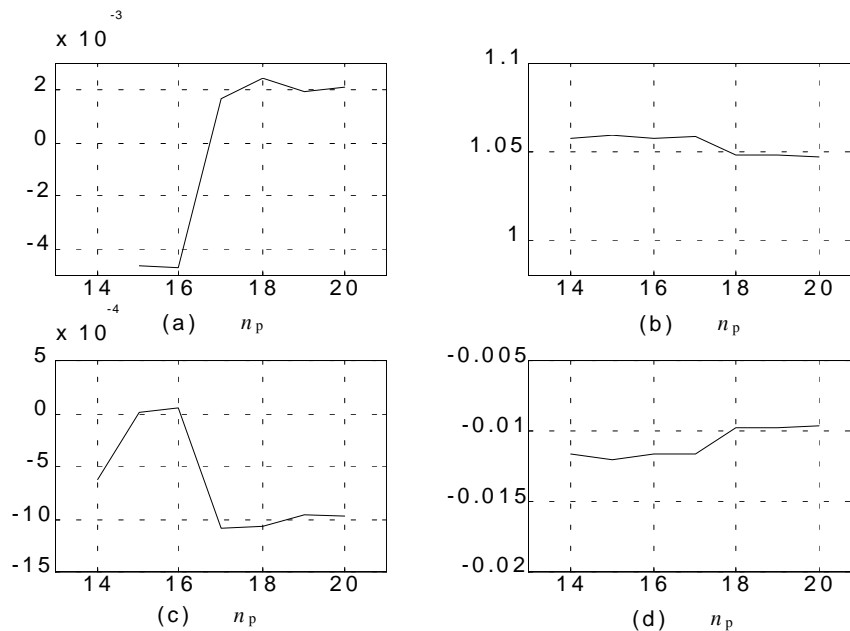


Figura 3.1. Coeficientes dos agrupamentos de termos em função do número de termos do modelo.

$$(a) \sum_0 \quad (b) \sum_y \quad (c) \sum_{y^2} \quad (d) \sum_{y^3}$$

Através dos gráficos apresentados, verifica-se que os coeficientes dos agrupamentos  $\Omega_0$  e  $\Omega_{y^2}$  apresentam magnitude reduzida em comparação com os coeficientes dos outros dois agrupamentos ( $\Omega_y$  e  $\Omega_{y^3}$ ). O valor dos dois primeiros coeficientes varia bastante quando o número de termos do modelo é aumentando, inclusive trocando de sinal, enquanto os outros dois coeficientes permanecem relativamente constantes. Esses fatos sugerem que os agrupamentos  $\Omega_0$  e  $\Omega_{y^2}$  são provavelmente espúrios no modelo e podem ser excluídos do conjunto de termos candidatos.

<sup>3</sup> A variável medida é a tensão sobre um capacitor do circuito de Chua (1992), o qual será apresentado e analisado no capítulo 6.

Os modelos polinomiais não-lineares identificados a partir do conjunto de agrupamentos efetivos têm melhores chances de reproduzir as bifurcações do sistema original. Além disso, estes modelos tendem a ser mais robustos aos efeitos prejudiciais da sobreparametrização (Aguirre e Billings, 1995c).

Modelos polinomiais poderão apresentar sobreparametrização de estrutura sem que isto implique na introdução de regimes dinâmicos espúrios, desde que os termos daqueles tenham sido escolhidos dentro do conjunto de agrupamentos efetivos<sup>4</sup>.

### 3.3 Agrupamentos de Termos e Pontos Fixos

Os agrupamentos de termos e seus coeficientes podem ser utilizados na determinação dos pontos fixos de um sistema não-linear representado por um modelo NARMAX polinomial. O conhecimento da posição e da estabilidade dos pontos fixos de um sistema é importante na análise de seu comportamento dinâmico.

#### 3.3.1 Pontos Fixos: Número e Localização

Os pontos fixos (ou pontos de equilíbrio) de um sistema autônomo discreto são os pontos que satisfazem a seguinte relação:  $y(t) = y(t+i)$ ,  $\forall i \in \mathbf{Z}^+$ . A definição de ponto fixo para sistemas não-autônomos é a mesma, considerando apenas a parte autônoma do sistema (obtida fazendo  $u(t+i) = 0$ ,  $\forall i \in \mathbf{Z}^+$ ).

Os sistemas dinâmicos não-lineares possuem mais de um ponto fixo, enquanto que os sistemas lineares possuem apenas um ponto fixo trivial. O número de pontos fixos de um modelo NARMAX polinomial é determinado pelo grau de não-linearidade  $l$  utilizado na sua derivação.

Os pontos fixos de um modelo NARMAX podem ser calculados através da seguinte equação (obtida por Aguirre e Mendes (1996) utilizando a definição de pontos fixos e a equação (3.1)):

$$y(t) = c_{0,0} + y(t) \sum_{n_1=1}^{n_y} c_{1,0}(n_1) + y(t)^2 \sum_{n_1, n_2}^{n_y, n_y} c_{2,0}(n_1, n_2) + \dots + y(t)^l \sum_{n_1, n_l}^{n_y, n_y} c_{l,0}(n_1, \dots, n_l) . \quad (3.8)$$

A equação (3.8) pode ser reescrita utilizando a definição de coeficientes de agrupamentos:

$$\sum_{y^l} y(t)^l + \dots + \sum_{y^2} y(t)^2 + (\sum_y -1)y(t) + \sum_0 = 0 , \quad (3.9)$$

<sup>4</sup> Os termos constituintes de um dado agrupamento são muito semelhantes quando o período de amostragem é suficientemente pequeno. Nesta situação, pode ocorrer o *compartilhamento* de informação entre os termos de um mesmo agrupamento (Aguirre e Billings, 1995c).

onde  $\sum_0 = c_{0,0}$  é o termo constante do modelo.

Um modelo NARMAX polinomial irá apresentar  $l$  pontos fixos, garantindo-se que  $\sum_{y^l} \neq 0^5$ .

#### Exemplo 3.4.

Deseja-se calcular os pontos fixos do seguinte modelo NARMA polinomial:

$$\begin{aligned}
 y(t) = & 2,97700y(t-1) - 2,60430y(t-2) - 0,09248y(t-5) - 0,55171y(t-1)^3 \\
 & - 0,59999y(t-5)^3 - 3,27480y(t-2)^3 - 0,59810y(t-3)^2 y(t-1) \\
 & + 0,13473y(t-3) - 0,49828y(t-5)^2 y(t-2) + 2,28880y(t-4)y(t-2)^2 \\
 & + 0,64710y(t-4) + 0,30857y(t-5)^2 y(t-1) + 0,20633y(t-2)y(t-1)^2 \\
 & - 1,65400y(t-4)y(t-2)y(t-1) - 0,16888y(t-4)^2 y(t-2) \\
 & + 1,67400y(t-5)^2 y(t-4) - 1,12370y(t-5)y(t-4)^2 \\
 & + 2,90600y(t-2)^2 y(t-1) + 1,01980y(t-3)y(t-2)^2 + 0,05325y(t-4)^3 ,
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde  $l = 3$ ,  $n_y = 5$  e  $n_p = 20$ .

Os agrupamentos de termos existentes no modelo são:

Agrupamento	Coeficiente
$\Omega_y$	$\sum_y = 1,06208$
$\Omega_{y^3}$	$\sum_{y^3} = -0,01256$

(3.11)

De acordo com as expressões (3.9) e (3.11), os pontos fixos do modelo podem ser obtidos através da solução da seguinte equação:

$$-0,01256y(t)^3 + (1 - 1,06208)y(t) = 0. \tag{3.12}$$

Assim, os pontos fixos do modelo (3.10) são:

$$\begin{aligned}
 \bar{y}_1 &= 2,22258 , \\
 \bar{y}_2 &= 0 , \\
 \bar{y}_3 &= -2,22258.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

<sup>5</sup>Aguirre e Mendes (1996) apresentam as soluções literais da equação (3.9) para  $1 \leq l \leq 3$ .

### 3.3.2 Estabilidade dos Pontos Fixos

Um ponto fixo  $\bar{p}$  (ou  $\bar{y}$ ) é dito estável no sentido de Lyapunov quando a resposta do sistema submetido a uma pequena perturbação permanece pequena (em torno do ponto fixo) à medida que  $t \rightarrow \infty$ . O ponto fixo  $\bar{p}$  é instável se a perturbação cresce quando o tempo aumenta.

A estabilidade de um ponto fixo (no sentido de Lyapunov) pode ser verificada através dos autovalores da matriz Jacobiana do sistema avaliada sobre o respectivo ponto fixo.

Um modelo polinomial NAR (autônomo e sem termos de ruído) pode ser representado por um mapeamento suave  $f: \mathbf{R}^{n_y} \rightarrow \mathbf{R}^{n_y}$  tal que:

$$y(t+k) = f(\mathbf{y}(t)) \quad , \tag{3.14}$$

onde  $\mathbf{y}(t)$  é o vetor de estados do "embedding" gerado a partir dos dados de identificação e  $k$  é o intervalo de predição considerado.

A equação (3.14) pode ser expandida da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} y(t-n_y+1) \\ y(t-n_y+2) \\ \vdots \\ y(t-1) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{f}{y(t-n_y)} & \frac{f}{y(t-n_y+1)} & \frac{f}{y(t-n_y+2)} & \cdots & \frac{f}{y(t-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t-n_y) \\ y(t-n_y+1) \\ \vdots \\ y(t-2) \\ y(t-1) \end{bmatrix} \quad , \tag{3.15}$$

onde  $f/y(t-i) = 0$  se  $f(\cdot)$  não inclui  $y(t-i)$ .

Assim, a matriz Jacobiana do mapeamento  $f$  é definida como:

$$Df = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y(t-n_y)} & \frac{\partial f}{\partial y(t-n_y+1)} & \frac{\partial f}{\partial y(t-n_y+2)} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y(t-1)} \end{bmatrix} \quad . \tag{3.16}$$

O próximo passo na análise da estabilidade é o cálculo dos autovalores da matriz Jacobiana avaliada sobre os pontos fixos do sistema. Os autovalores estáveis estarão situados dentro de um círculo de raio unitário, centrado na origem do plano  $z = e^{sT_s}$  ( $z = \sigma_z + j\omega_z$ , onde  $\sigma_z$  e  $\omega_z$  são as partes real e imaginária do autovalor, respectivamente). Os demais autovalores serão instáveis.

**Exemplo 3.5.**

Os autovalores da matriz Jacobiana de (3.10), avaliada no ponto fixo  $\bar{y}_1$ , são:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0,94112 + 0,37499j , \\ \alpha_2 &= 0,94112 - 0,37499j , \\ \alpha_3 &= -0,44005 + 0,15059j , \\ \alpha_4 &= -0,44005 - 0,15059j , \\ \alpha_5 &= 0,58762.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Os dois primeiros autovalores, complexos e conjugados, são instáveis. Os outros dois autovalores complexos e conjugados são estáveis, enquanto que o quinto autovalor do modelo é estável. Assim, o ponto fixo  $\bar{y}_1$  é um ponto de sela (instável).

O sistema original (circuito de Chua (1992)) é de terceira ordem e possui três pontos fixos. Existem três autovalores associados a cada um dos pontos fixos do sistema. Entretanto, a reconstrução (3.10) é de quinta ordem e existem cinco autovalores associados a cada um dos pontos fixos do modelo. Este assunto é discutido com mais detalhes em (Aguirre, 1994a), onde é indicada uma maneira de descobrir quais são os autovalores "excedentes".

Os autovalores associados ao ponto fixo trivial são:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0,94065 + 0,35710j , \\ \alpha_2 &= 0,94065 - 0,35710j , \\ \alpha_3 &= -0,44055 , \\ \alpha_4 &= 0,14955 , \\ \alpha_5 &= 1,38672.\end{aligned}\tag{3.18}$$

O par de autovalores complexos e conjugados é instável. O terceiro e o quarto autovalor são estáveis, enquanto que o último é instável. Os autovalores para o ponto fixo  $\bar{y}_3$  são idênticos àqueles apresentados na equação (3.17), em função da simetria do sistema. Maiores detalhes sobre a simetria do sistema serão discutidos na próxima seção.

**3.3.3 Simetria dos Pontos Fixos**

Os pontos fixos constituem um ponto de partida para a análise da autoestrutura e do comportamento dinâmico de um sistema (Guckenheimer e Holmes, 1983). Nesse contexto, um outro problema interessante é a verificação da simetria dos pontos fixos de um modelo NARMAX.



Pontos fixos simétricos são aqueles equidistantes da origem do sistema de coordenadas utilizado para descrever uma dada dinâmica. A análise de simetria considera apenas pontos fixos reais, pois sistemas físicos não possuem pontos fixos complexos.

Utilizando a equação ( 3.9 ), pode-se determinar quais os agrupamentos de termos que devem estar presente no modelo para que este apresente pontos fixos não-triviais simétricos. Em (Aguirre e Mendes, 1996) é apresentada uma tabela que indica os agrupamentos de termos de um modelo NARMA polinomial em função da localização de seus pontos fixos. Esta tabela encontra-se reproduzida abaixo.

Tabela 3.1. Agrupamentos de termos dentro dos quais devem ser escolhidos os termos de um modelo para que este apresente pontos fixos não-triviais simétricos e pontos triviais na quantidade indicada na segunda coluna (Aguirre e Mendes, 1996).

$l$	Nº de pontos fixos triviais	Agrupamentos de termos
1	1	$\Omega_y$
2	0	$\Omega_{y^2}, \Omega_0$
3	1	$\Omega_{y^3}, \Omega_y$
4	0	$\Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}, \Omega_0$
4	2	$\Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}$
5	1	$\Omega_{y^5}, \Omega_{y^3}, \Omega_y$
5	3	$\Omega_{y^5}, \Omega_{y^3}$
6	0	$\Omega_{y^6}, \Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}, \Omega_0$
6	2	$\Omega_{y^6}, \Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}$
6	4	$\Omega_{y^6}, \Omega_{y^4}$

**Exemplo 3.6.**

O modelo ( 3.10 ) possui um ponto fixo trivial e um par não-trivial e simétrico (vide expressão ( 3.13 )). Os agrupamentos de termos presentes no modelo são:  $\Omega_y$  e  $\Omega_{y^3}$ . Pode ser constatado que a inclusão de termos do agrupamento  $\Omega_{y^2}$  no modelo implica em perda da simetria dos pontos fixos não-triviais (conforme será apresentado no capítulo 6).

**3.4 Escolha do Tempo de Atraso ou Período de Amostragem utilizando Funções de Correlação Não-Lineares**

A análise de um sistema dinâmico não modelado começa com a obtenção de dados que descrevam o seu comportamento. Estes dados poderão ser utilizados na derivação de modelos NARMAX polinomiais ou na reconstrução de espaços de estados do sistema original.

A construção de um "embedding" começa com a escolha das coordenadas que serão utilizadas para representá-lo. O sistema de coordenadas mais utilizado é aquele das coordenadas de atraso, apresentadas na expressão ( 2.40 ) e rerepresentadas aqui:

$$\mathbf{y}(t) = [y(t) \quad y(t - \tau) \quad \dots \quad y(t - (d_e - 1)\tau)]^T. \quad (3.19)$$

A determinação da dimensão do "embedding"  $d_e$  e do tempo de atraso  $\tau$  foi abordada na seção 2.3. Na identificação de modelos NARMAX polinomiais, os parâmetros a serem ajustados são o grau de não-linearidade  $l$ , os atrasos ( $n_y$ ,  $n_u$  e  $n_e$ ) e o período de amostragem  $T_s$ .

Existem diversos procedimentos para escolha do período de amostragem  $T_s$  ou do tempo de atraso  $\tau$ , conforme a abordagem considerada (Rosenstein et al., 1994).

### 3.4.1 Escolha do Período de Amostragem $T_s$ <sup>6</sup>

Será apresentado, nessa seção, um método para escolha do período de amostragem  $T_s$  que será utilizado na identificação de modelos NARMAX polinomiais. Esta técnica utiliza uma função de correlação não-linear para detectar interações lineares e não-lineares presentes nos dados de identificação.

As funções de correlação linear e não-linear a serem utilizadas são definidas como (Billings e Tao, 1991):

$$\Phi_{yy}(\tau_1) = E\{y(t)y(t - \tau_1)\} , \quad (3.20)$$

$$\Phi_{y^2, y^2}(\tau_1) = E\{(y^2(t) - E\{y^2(t)\})(y^2(t - \tau_1) - E\{y^2(t)\})\} , \quad (3.21)$$

onde  $E$  indica esperança matemática.

O procedimento de escolha de  $T_s$  começa com a obtenção das auto-correlações citadas, utilizando os dados de identificação. Em seguida, define-se:

$$\tau_m = \min\{\tau_y, \tau_{y^2}\} , \quad (3.22)$$

onde  $\tau_y$  e  $\tau_{y^2}$  são os primeiros mínimos das auto-correlações linear e não-linear, respectivamente. Por fim, o período de amostragem pode ser escolhido de acordo com:

$$\frac{\tau_m}{20} \leq T_s \leq \frac{\tau_m}{10}. \quad (3.23)$$

<sup>6</sup> Esta técnica é descrita em (Aguirre, 1995a).

A equação ( 3.23 )<sup>7</sup> não representa, necessariamente, uma relação matemática precisa. No entanto, ela tem sido usada com sucesso na identificação de diversos sistemas não-lineares (Aguirre, 1995a; Chen et al., 1996).

### Exemplo 3.7.

Uma série temporal, com 15.000 pontos, foi obtida a partir da integração numérica de um sistema de equações diferenciais não-lineares, com passo de integração  $\Delta t = 4 \times 10^{-6}$ . As auto-correlações linear e não-linear desta série temporal foram obtidas e são apresentadas na figura abaixo.

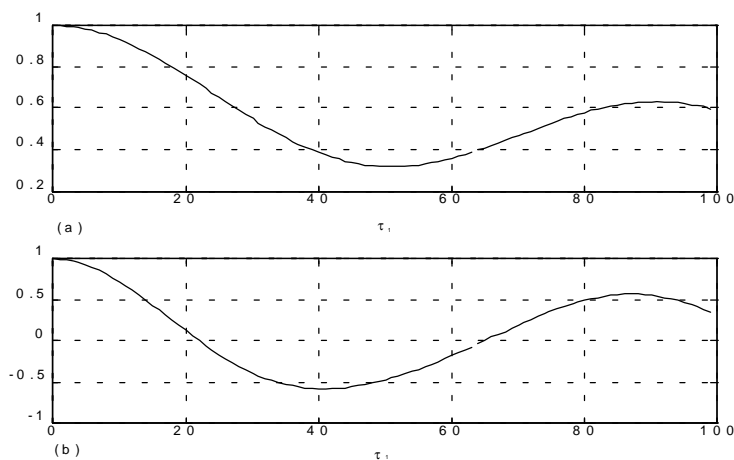


Figura 3.2. Funções correlação de uma série temporal. (a) Correlação linear (b) Correlação não-linear

De acordo com a figura 3.2, o primeiro mínimo da função de correlação linear ocorre em  $\tau_y \approx 50 \times 4 \times 10^{-6} = 200 \mu s$ . Por sua vez, o primeiro mínimo da correlação não-linear ocorre em  $\tau_{y^2} \approx 40 \times 4 \times 10^{-6} = 160 \mu s$ . Assim,  $\tau_m = \min\{200 \mu s, 160 \mu s\} = 160 \mu s$  e o período de amostragem deverá ser escolhido dentro da faixa  $8 \mu s \leq T_s \leq 16 \mu s$ . Escolhendo  $T_s = 12 \mu s$ , os dados de identificação poderão ser obtidos selecionando um ponto a cada três da série temporal original.

Os valores obtidos para o período de amostragem utilizando o procedimento acima são geralmente menores que aqueles indicados pelos demais métodos encontrados na literatura (Rosenstein et al., 1994; Aguirre, 1995a). Estes métodos determinam o período de amostragem a ser utilizado na identificação do mapeamento suave  $f$  (seção 2.3). Este mapeamento será utilizado para estimar propriedades dinâmicas do sistema (tais como dimensão de correlação) e o período de amostragem pode ser maior (Aguirre, 1995a; Chen et al., 1996).

<sup>7</sup> Os limites inferior e superior da equação ( 3.23 ) podem ser frequentemente relaxados para  $\tau_m/25$  e  $\tau_m/5$ , respectivamente.

### 3.5 Comentários Finais

Este capítulo abordou algumas questões relacionadas à identificação de modelos NARMAX polinomiais. Em uma primeira etapa, foram revistas as definições de agrupamentos de termos e de coeficientes de agrupamentos. Estes conceitos podem ser utilizados no desenvolvimento de um procedimento auxiliar de seleção de estrutura de modelos não-lineares polinomiais. Por fim, descreveu-se uma técnica de determinação do período de amostragem a ser utilizado em reconstruções de sistemas dinâmicos não-lineares.

A importância de um agrupamento de termos é refletida pelo valor de seu coeficiente. Analisando os coeficientes dos agrupamentos de termos, pode-se determinar quais são os agrupamentos mais importantes na construção de modelos discretos para um sistema em estudo. Os termos deste modelo deverão ser escolhidos dentro dos agrupamentos efetivos, utilizando critérios tais como o ERR.

Modelos não-lineares polinomiais que contenham termos pertencentes aos agrupamentos não-efetivos podem apresentar regimes dinâmicos espúrios, não contidos nos dados de identificação. Modelos polinomiais identificados dentro do conjunto de agrupamentos efetivos são mais robustos aos efeitos negativos da sobreparametrização. A utilização da técnica de seleção de estrutura baseada no conceito de agrupamentos de termos geralmente leva a modelos que melhor reproduzem a dinâmica do sistema original.

A análise da autoestrutura e da dinâmica de um modelo polinomial é facilitada pelo conhecimento dos agrupamentos de termos nele presentes e do valor de seus respectivos coeficientes. Os coeficientes dos agrupamentos de termos de um modelo são utilizados na determinação do número de pontos fixos do mesmo e de suas localizações. Questões tais como estabilidade e simetria de pontos fixos também podem ser estudadas sob o prisma dos agrupamentos de termos.

Um outro problema analisado neste capítulo foi a escolha do período de amostragem a ser utilizado na identificação de modelos NARMAX polinomiais. O procedimento descrito utiliza uma função de correlação não-linear para detectar interações presentes nos dados e que não tenham sido percebidas pela correlação linear. Assim, o período de amostragem indicado pelo procedimento é menor do que aquele obtido considerando-se apenas interações lineares.

Deve ser ressaltado que as definições e os procedimentos apresentados nesse capítulo foram propostos há pouco tempo. Tais procedimentos apresentam um potencial ainda não explorado completamente e serão utilizados em capítulos subsequentes desta dissertação.

## Capítulo 4

### 4. Ambiente Computacional para Identificação de Sistemas Não-Lineares

#### 4.1 Introdução

O procedimento de identificação de modelos NARMAX polinomiais foi descrito nos capítulos 2 e 3. Algumas etapas deste procedimento são a aquisição de dados do sistema que se deseja modelar, a estimação de parâmetros da estrutura selecionada para representar a dinâmica original e a validação do modelo identificado. A literatura técnica apresenta diversos algoritmos para a implementação computacional destas etapas da identificação de modelos regressivos não-lineares (Billings, 1980; Billings e Voon, 1983; 1984; Leontaritis e Billings, 1987; Chen et al., 1989; Golub e Van Loan, 1989; Foss e Johansen, 1992; Granjer e Lin, 1994; Luo et al., 1994; Parameswaran e Raol, 1994; Aguirre, 1995a). Estes algoritmos utilizam princípios de álgebra matricial, otimização e processamento de sinais para derivar modelos para sistemas não-lineares genéricos.

O objetivo desse capítulo é descrever um conjunto de rotinas computacionais implementadas para derivar modelos NARMAX polinomiais para sistemas não-lineares (Mendes e Aguirre, 1995). Estas rotinas foram codificadas a partir de algoritmos descritos na literatura e posteriormente foram empregadas na modelagem de alguns sistemas não-lineares reais, conforme será descrito nos capítulos seguintes. As principais rotinas utilizadas serão descritas e analisadas quanto à velocidade de processamento e a carga computacional. Por fim, serão propostas modificações nestas rotinas para otimizar o procedimento de identificação.

#### 4.2 Descrição das Rotinas de Identificação

As rotinas computacionais utilizadas nessa dissertação foram implementadas no ambiente MATLAB™ (MathWorks, 1990a).

O MATLAB é um ambiente de desenvolvimento projetado para simplificar a manipulação computacional de matrizes (MATLAB é uma sigla para "MATrix LABoratory" ou Laboratório de Matrizes). O MATLAB pode interpretar rotinas codificadas em uma linguagem de programação de alto-nível própria. Esta linguagem de programação é estruturada e foi utilizada para implementar internamente ao ambiente uma série de ferramentas úteis no processamento de sinais e na modelagem e controle de sistemas dinâmicos ("toolboxes", MathWorks, 1990b, 1990c, 1990d). O "software" apresenta ainda uma interface gráfica bastante amigável e intuitiva.

As características do MATLAB facilitaram o desenvolvimento de rotinas computacionais para a identificação de sistemas dinâmicos não-lineares utilizando modelos NARMAX polinomiais. Estas rotinas em conjunto com o MATLAB constituem um ambiente computacional para a identificação de sistemas não-lineares. Algumas rotinas internas do MATLAB são utilizadas na análise dos modelos identificados.

As rotinas computacionais codificadas para a identificação de modelos não-lineares polinomiais podem ser divididas em dois conjuntos. As rotinas de um primeiro conjunto implementam a seleção de estrutura, a estimação de parâmetros, a simulação e a validação estatística de modelos NARMAX polinomiais monovariáveis (Mendes e Aguirre, 1995). Os algoritmos codificados nas rotinas são apresentados em (Chen et al., 1989; Golub e Van Loan, 1989). O segundo conjunto de rotinas MATLAB implementa algoritmos utilizados na análise e na visualização dos modelos monovariáveis identificados. Estas rotinas foram codificadas ao longo da elaboração do presente trabalho e englobam ferramentas para:

- análise de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos em modelos NARMAX polinomiais;
- análise da estabilidade dos pontos fixos de um modelo;
- predição de comportamento de modelos NARMAX polinomiais;
- estimação de invariantes dinâmicos dos modelos identificados.

Uma descrição sucinta dos parâmetros de entrada e de saída das rotinas MATLAB citadas é apresentada em (Rodrigues e Aguirre, 1996).

As figuras 4.1 – 4.4 mostram fluxogramas do procedimento de identificação de modelos NARMAX polinomiais monovariáveis a partir de dados entrada-saída de um sistema dinâmico. Os fluxogramas destacam as rotinas MATLAB que implementam cada uma das etapas da identificação.

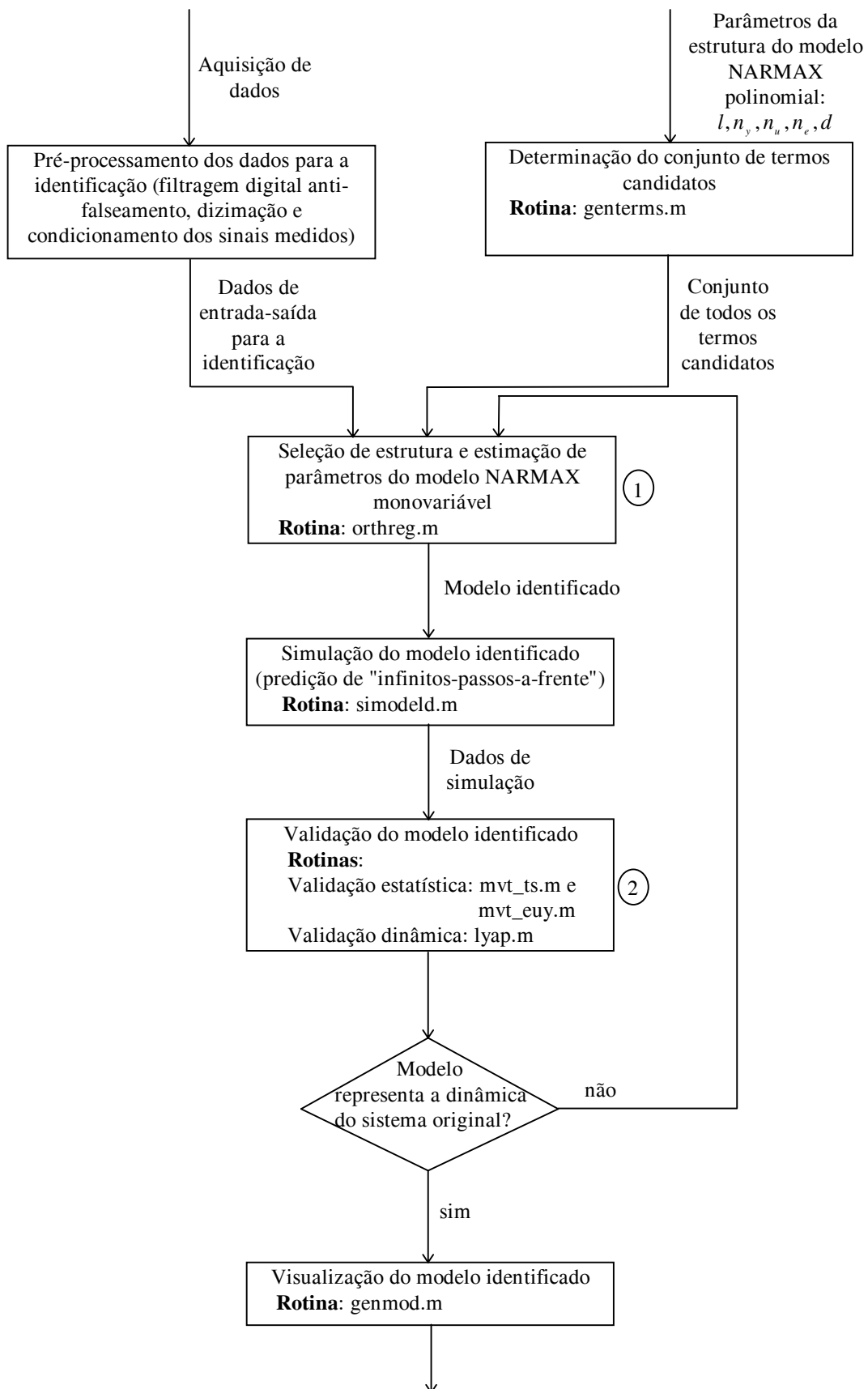


Figura 4.1. Fluxograma do procedimento de identificação de modelos NARMAX polinomiais.

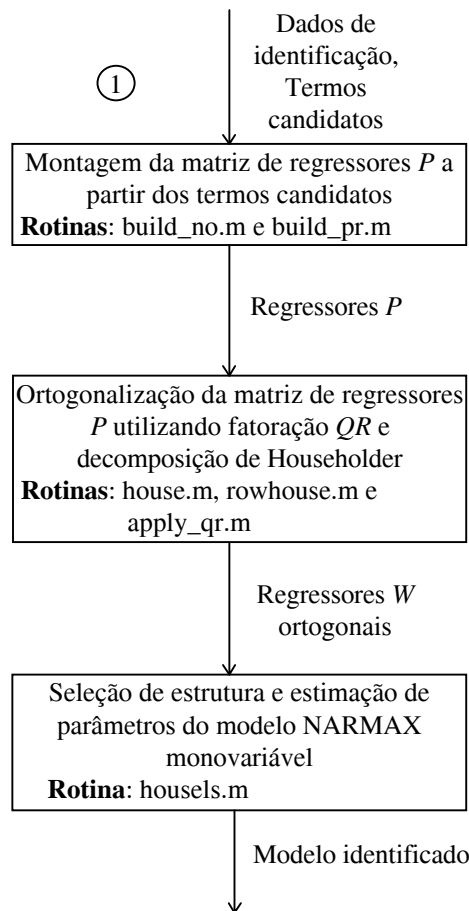


Figura 4.2. Detalhe do fluxograma apresentado na figura 4.1.

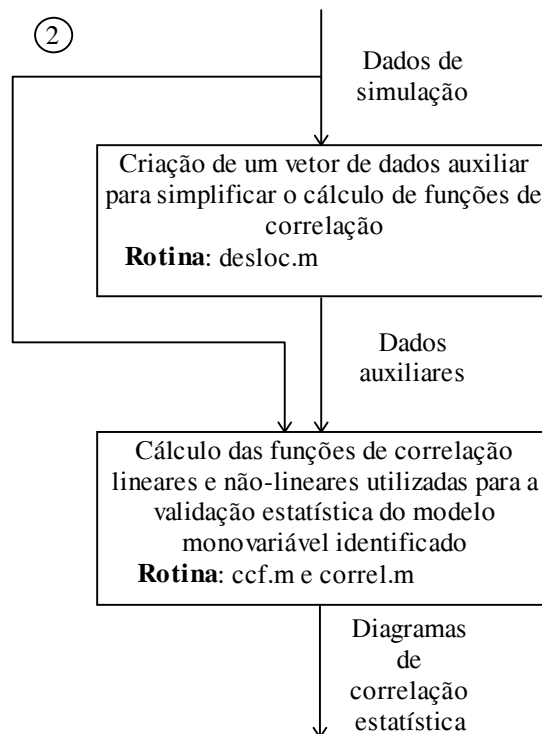


Figura 4.3. Detalhe do fluxograma apresentado na figura 4.1.



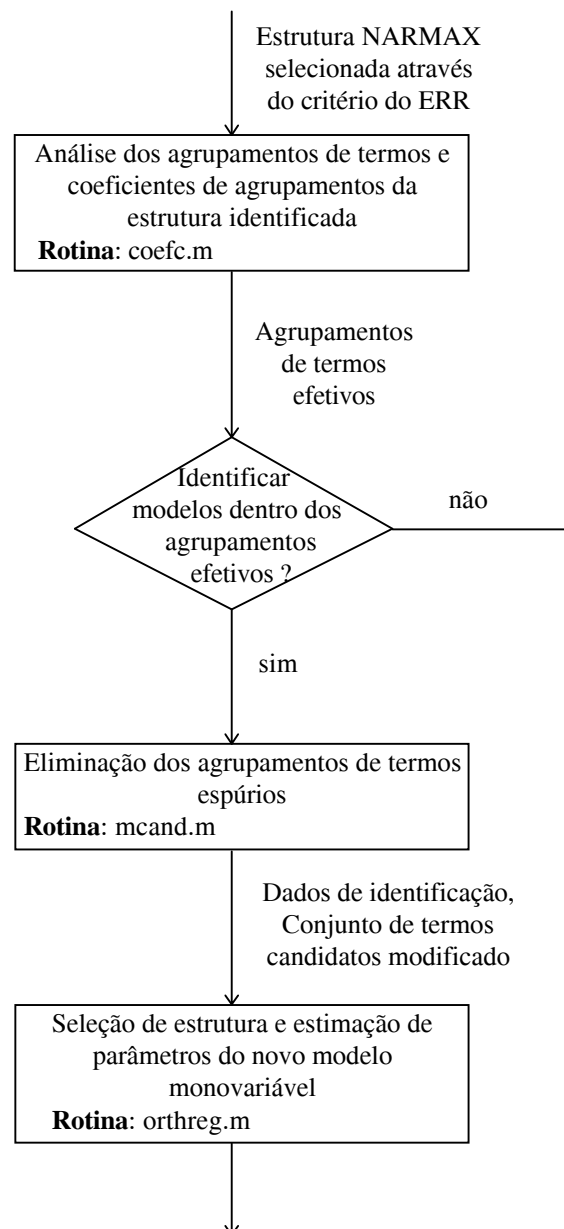


Figura 4.4. Fluxograma da análise dos agrupamentos de termos dos modelos NARMAX polinomiais.

#### Exemplo 4.1.

A figura 4.5 apresenta um exemplo de rotina MATLAB implementada para identificar modelos NARMAX polinomiais. Este exemplo pretende mostrar a estrutura da linguagem de programação MATLAB e destacar alguns parâmetros de entrada e saída das rotinas citadas nos fluxogramas anteriores. A rotina foi codificada para identificar um conjunto de 15 modelos NARMAX polinomiais monovariáveis com número de termos de processo variando entre  $11 \leq n_p \leq 25$ . A estrutura dos modelos será selecionada através do critério de ERR (na rotina `orthreg`) e os seus parâmetros serão estimados pelo método de mínimos quadrados ortogonais "off-line" (vide capítulo 2).

```

% Demonstração NARMAX
echo on;

% Carregando e visualizando os dados de identificação
load c:\dados\arqdados.dat
u=arqdados(1:2000,1);
y=arqdados(1:2000,2);
plot([y u]);

% Gerando o conjunto de termos candidatos com:
% grau de não-linearidade:  $l = 3$ , atraso máximo em  $y(t)$ :  $n_y = 2$ ,
% atraso máximo em  $u(t)$ :  $n_u = 1$ , atraso máximo em  $\xi(t)$ :  $n_\xi = 5$ 
[Cand,tot2]=genterms(3,2,1,5);

% Identificando modelos NARMAX polinomiais com np termos de processo
% e 15 termos de ruído. A variável de saída model retorna a estrutura
% selecionada, enquanto que a variável x retorna os parâmetros estimados
% e o ERR de cada termo do modelo
for np=11:1:25,
    [model,x,e,va]=orthreg(Cand,u,y,[np,15],5);

% Simulando o modelo identificado
% Os 15 primeiros pontos dos dados de identificação são usados como
% condições iniciais.
ym=simodeld(model,x(:,1),u,y(1:15));
plot([ym u]);

end;

% Validando estatisticamente o modelo identificado
% A rotina mvt_euy traça na tela os diagramas de correlação utilizados
% para validar modelos dinâmicos não-lineares
mvt_euy(e,u,y,30,1,1);

```

Figura 4.5. Exemplo de rotina MATLAB para a identificação de modelos NARMAX polinomiais.

### 4.3 Análise das Rotinas de Identificação

As rotinas de identificação descritas na seção anterior foram codificadas na linguagem de programação do MATLAB. O MATLAB apresenta diversas características úteis para a construção de um ambiente computacional de identificação de sistemas. Entre estas características, destacam-se a interface gráfica amigável e as rotinas de suporte pré-construídas<sup>1</sup>. Por outro lado, o MATLAB não gera código executável e possui uma capacidade de processamento restrita – fato refletido pela velocidade de interpretação de

<sup>1</sup> Rotinas para a filtragem de dados, análise espectral de sinais, identificação de modelos regressivos lineares, controle de sistemas dinâmicos, etc.

código não muito elevada e pelos problemas de gerenciamento da memória RAM que aparecem quando a matriz de regressores  $P$  possui um número elevado de termos. Estes problemas podem inviabilizar a utilização de rotinas MATLAB em experimentos de modelagem e controle que exijam processamento mais rápido. Nesse caso, as rotinas usadas deverão ser recodificadas em outra linguagem de programação mais adequada.

As rotinas de identificação de modelos NARMAX polinomiais podem ser implementadas em uma série de linguagens de programação distintas. Estas linguagens podem ser de baixo-nível (ASSEMBLY) ou de alto-nível (BASIC, PASCAL, FORTRAN, C). Entretanto, as linguagens de programação mais adequadas para o processamento matemático numérico são o FORTRAN ("FORmula TRANslation") e o C (C++), além do MATLAB. Estas linguagens de programação são amplamente utilizadas nos meios científico e acadêmico.

O C++ é uma linguagem de programação estruturada que se caracteriza por:

- alto desempenho no processamento computacional;
- flexibilidade nas operações de leitura e escrita em dispositivos periféricos;
- alta portabilidade de código.

Estas características são bastante desejadas na montagem do ambiente de identificação de sistemas dinâmicos reais. Assim, as rotinas de identificação da seção 4.2 podem ser recodificadas em C++ quando necessário. Destaca-se a existência do aplicativo MATCOM™ (Yeren, 1995) que faz conversão de código MATLAB para código C++ compilável. Este aplicativo é "freeware" e atualmente está disponível na INTERNET para transferência<sup>2</sup>.

Uma outra possibilidade consiste em utilizar as linguagens MATLAB e C++ interligadas no processamento das rotinas de identificação. A função *cmex* do MATLAB (MathWorks, 1990a) gera arquivos mex que executam código C++ (ou FORTRAN) dentro do ambiente MATLAB. Esta interligação permite aproveitar as qualidades dos dois ambientes de programação na execução da tarefa em questão.

As rotinas de identificação disponíveis (Mendes e Aguirre, 1995) podem ser otimizadas para diminuir o tempo de processamento associado e minimizar os problemas de gerenciamento de memória. Uma série de alterações no código destas rotinas podem promover uma melhoria significativa de desempenho do ambiente de identificação de modelos não-lineares polinomiais. Algumas diretivas capazes de diminuir a carga computacional das rotinas de identificação são:

- utilizar algoritmos com um número mínimo de multiplicações e adições;
- minimizar o uso de estruturas de comparação, as quais demandam muito tempo computacional para serem realizadas;
- implementar os algoritmos em um bloco único de código, evitando utilizar funções externas (além daquelas providas pela linguagem de programação);

---

<sup>2</sup> O MATCOM pode ser transferido no site INTERNET: <http://techunix.technion.ac.il/~yak/ug.html>.

- gerar código enxuto, sem comentários e instruções para contornar falhas do usuário.

A implementação das diretivas acima determinaria uma redução da estruturação e da legibilidade das rotinas, além de torná-las susceptíveis a falhas do usuário. Entretanto, estas diretivas podem ser utilizadas para otimizar o código das rotinas quando o usuário visado possui algum conhecimento sobre identificação de sistemas e sobre os algoritmos implementados. Destaca-se ainda que esse trabalho não pretende gerar um ambiente otimizado para a identificação de sistemas dinâmicos não-lineares, mas apenas utilizar um conjunto de rotinas computacionais para modelar sistemas não-lineares em aplicações reais.

As rotinas MATLAB originais foram utilizadas para testar a validade de algumas diretivas descritas no parágrafo anterior. Nestas rotinas, as instruções para verificar a consistência dos dados de entrada e os comentários explicativos foram eliminados. Em seguida, as rotinas originais e as rotinas modificadas foram avaliadas durante a execução de uma mesma tarefa. Esta tarefa consumiu cerca de 190 MFlops de processamento em um computador PC486DX2 66 MHz. Observou-se que as rotinas modificadas desempenharam a dada tarefa em aproximadamente metade do tempo consumido pelas rotinas originais. Nesse caso, as alterações implementadas promoveram uma significativa melhora de desempenho na identificação de modelos NARMAX polinomiais. Os modelos apresentados nessa dissertação foram identificados a partir do conjunto de rotinas modificadas.

#### 4.4 Comentários Finais

Esse capítulo descreveu um conjunto de rotinas MATLAB implementadas para derivar modelos NARMAX monovariáveis para sistemas dinâmicos não-lineares. Este conjunto de rotinas foi utilizado na modelagem de alguns sistemas não-lineares reais (vide capítulo 5 e capítulo 6).

O MATLAB foi escolhido como suporte para um ambiente computacional de identificação de sistemas não-lineares por apresentar uma interface gráfica amigável e um conjunto de rotinas úteis pré-implementadas, além de interpretar rotinas externas codificadas em uma linguagem de programação específica. Esta linguagem de programação do MATLAB apresenta estruturas sintáticas encontradas em muitas outras linguagens de alto-nível.

O MATLAB possui um conjunto de rotinas pré-implementadas para a identificação de modelos regressivos lineares (Box e Jenkins, 1976; Ljung, 1987). O "toolbox" de identificação de sistemas (MathWorks, 1990c) inclui rotinas para a estimação de parâmetros (métodos dos mínimos quadrados ortogonais e de variáveis instrumentais), a simulação e a validação estatística (análise de funções de correlação dos resíduos de identificação) de modelos ARMAX (modelo linear auto-regressivo, de média móvel e entrada externa).

Os experimentos de identificação e controle em tempo real exigem uma velocidade de processamento computacional adequada (em comparação com a velocidade de resposta

do sistema em questão) e uma boa flexibilidade nas operações de leitura e escrita em dispositivos periféricos (para a interação com o sistema). Nessa situação, a utilização de rotinas codificadas em MATLAB pode ser inviável. Então, torna-se necessário recodificar as rotinas de identificação e controle em outra linguagem de programação como o C++, por exemplo.

As rotinas MATLAB utilizadas para identificar modelos NARMAX polinomiais nesse trabalho podem ser otimizadas para diminuir o tempo de processamento numérico associado. Algumas alterações capazes de diminuir a carga computacional destas rotinas foram apresentadas na seção 4.3. Observou-se que estas alterações implementadas nas rotinas MATLAB originais promoveram uma significativa melhora de desempenho na identificação de modelos NARMAX monovariáveis.

Por fim, destaca-se a necessidade de rotinas computacionais para identificação de modelos NARMAX polinomiais multivariáveis e para a estimação de parâmetros "on-line" (descrita no capítulo 2). Estas rotinas podem ser implementadas em MATLAB no futuro.

## Capítulo 5

### 5. Modelagem Não-Linear de um Forno Elétrico

#### 5.1 Introdução

Um forno elétrico foi o primeiro sistema escolhido para avaliar a aplicabilidade e o desempenho dos algoritmos de identificação descritos no capítulo anterior.

O forno elétrico utilizado nesse trabalho encontra-se montado no Laboratório de Controle de Processos Industriais (*LCPI*) do Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica (*CPDEE*) da Universidade Federal de Minas Gerais. O sistema foi selecionado por apresentar alguns fenômenos não-lineares, os quais não poderiam ser reproduzidos com modelos lineares.

#### 5.2 Descrição do Sistema

O forno elétrico do *LCPI - CPDEE* (Abreu, 1993) é uma caixa metálica com dimensões  $15 \times 10 \times 31$  cm<sup>3</sup>, construído a partir de uma chapa de alumínio com espessura igual a 2 mm. O elemento de aquecimento interno é uma lâmpada elétrica de 200W. O forno não é isolado termicamente, de modo que variações na temperatura ambiente afetam o seu comportamento dinâmico.

O sensor utilizado para medição de temperatura é um resistor com coeficiente de temperatura negativo (NTC) ligado em ponte de Wheatstone, a qual encontra-se equilibrada à temperatura ambiente. O sinal de tensão resultante do desbalanceamento da ponte é processado por um conversor A/D de 12 bits e por um microcomputador, onde são implementados os algoritmos de controle. O sinal de controle gerado é aplicado à planta, conforme figura 5.1 na página seguinte. O elemento atuador é um triac operando como chave.

O sensor de temperatura é apoiado sobre a superfície externa do forno elétrico, sem ser afixado a sua estrutura metálica. Essa configuração de medição torna o sistema sensível a distúrbios externos tais como flutuações da temperatura ambiente e a existência de correntes de ar.

O objetivo de controle é ajustar a temperatura de um ponto na superfície externa do forno a um perfil de referência previamente estabelecido. O controlador determina o tempo em que a lâmpada permanece acesa entre duas amostragens, gerando um sinal de controle normalizado entre 0 % e 100 %. A lâmpada permanece acesa por um tempo  $uT_s/100$ , onde  $u$  é o sinal de controle e  $T_s$  é o período de amostragem.

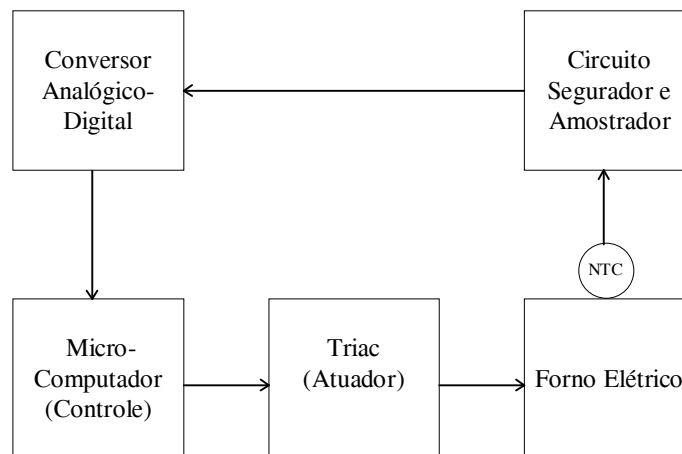


Figura 5.1. Diagrama de blocos do forno elétrico implementado no LCPI - CPDEE.

Abreu (1993) desenvolveu um modelo do sistema, baseado na física do processo. A troca de calor entre a lâmpada e a superfície externa do forno se processa através de dois fenômenos: convecção e radiação. A taxa de transferência de calor por radiação depende da quarta potência da temperatura absoluta do meio emissor, o que torna o processo não-linear e dependente da condição de operação (fato caracterizado por ganhos e constantes de tempo variantes com o ponto de operação). A transferência de calor por convecção depende diretamente da diferença de temperatura absoluta entre os meios envolvidos.

A transferência de calor por radiação irá predominar em relação à transferência por convecção durante o período de aquecimento do forno. Esse fato ocorre porque as dimensões reduzidas do forno impedem a circulação das ondas de convecção. Por outro lado, durante o resfriamento do forno predomina a transferência de calor por convecção (do forno para o meio ambiente). Este mecanismo de transferência de calor faz com que o forno apresente diferentes constantes de tempo de aquecimento e resfriamento (Abreu, 1993). Estas constantes de tempo e o ganho do sistema em regime permanente dependem das condições iniciais do sistema e da região de operação considerada. Maiores detalhes sobre o comportamento dinâmico do forno são encontrados em (Abreu, 1993).

### 5.3 Representação da Dinâmica Não-Linear do Forno Elétrico

A modelagem do forno elétrico será apresentada nas seções seguintes, onde cada seção referencia um dos passos do procedimento de identificação descrito no capítulo 2.

#### 5.3.1 Aquisição de Dados

O primeiro passo do procedimento de identificação é a obtenção de dados que caracterizem a operação do sistema que se deseja modelar. Idealmente, os dados de identificação devem ser capazes de refletir os diversos regimes dinâmicos apresentados pelo sistema. Para tanto, o sinal de excitação da planta deve apresentar espectro suficientemente amplo em frequência e amplitude de tal forma que excursionsse o sistema

pelos regimes dinâmicos de interesse. Infelizmente, isso nem sempre é possível em sistemas reais, devido a restrições operacionais.

No procedimento de aquisição de dados do forno, a planta operou em malha fechada com um controlador automático proporcional-integral-derivativo (PID) até que um dado perfil de referência fosse ajustado. Em seguida, a malha de realimentação foi aberta, o sinal de teste aplicado ao comando do triac e o correspondente sinal de temperatura da chapa do forno foi medido e processado.

O sinal de teste utilizado para gerar os dados de identificação do forno é denominado "ruído quantizado" (Jota,1995). O algoritmo de geração do "ruído quantizado" sorteia aleatoriamente a amplitude do sinal e a mantém constante durante um intervalo de tempo previamente escolhido (pelo usuário). Ao final deste intervalo, o algoritmo modifica a amplitude do sinal de maneira quantizada e a mantém constante durante o mesmo intervalo de tempo anterior. O sinal gerado (vide sinal de entrada mostrado na figura 5.2) apresenta média próxima de zero em torno do valor de inicialização do algoritmo.

As figuras 5.2 e 5.3 mostram algumas massas de dados obtidas durante a experimentação do forno elétrico. O sinal de saída mostrado é a temperatura da superfície externa do forno, normalizada em relação a uma temperatura máxima possível. Por sua vez, a entrada mostra o sinal normalizado de tensão aplicado ao comando do triac que controla o estado da lâmpada. Destaca-se que os dados apresentados são adimensionais e as escalas verticais dos gráficos indicam porcentagens dos valores máximos de temperatura do forno (sinal de saída) e de tensão aplicada ao triac (sinal de entrada). O período de amostragem dos sinais é  $T_s = 70$  s e  $t$ , na figura, indica o número de amostras.

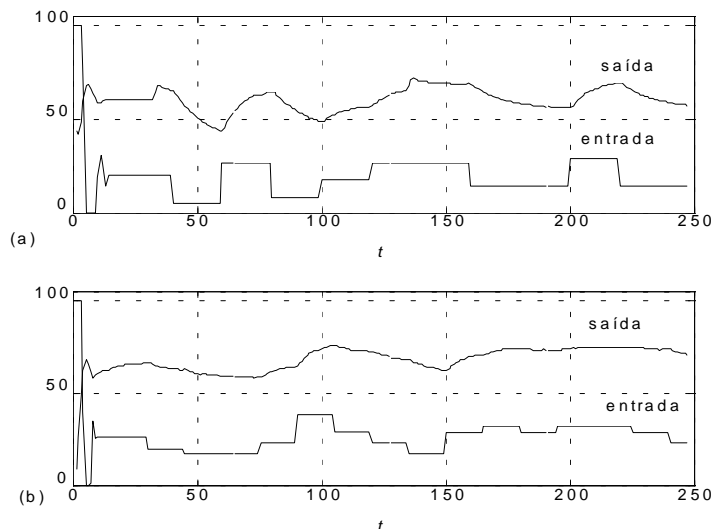


Figura 5.2. Resposta do forno elétrico ao ruído quantizado. (a) Massa de dados *frq1* (b) Massa de dados *frq2*. A variável  $t$  indica o número de amostras. Os dados são adimensionais e estão normalizados ao intervalo [0 %, 100 %].

O sinal de saída da massa de dados *frq1* apresenta variações bruscas em  $t \approx 30$  e  $t \approx 130$ , as quais não refletem mudanças no sinal de entrada. Acredita-se que estas variações ocorram por falhas de comunicação entre o microcomputador e o processo, constituindo



condições anormais de funcionamento (Jota, 1995). O sistema operou em malha fechada até  $t=10$ , aproximadamente. Nessa condição, os parâmetros do controlador PID eram:

$$K_p = 10, T_i = 150, T_d = 0,$$

onde  $K_p$  é o ganho proporcional,  $T_i$  é o tempo integral e  $T_d$  é o tempo derivativo. Esses valores não apresentam influência sobre os posteriores testes de aquisição dos dados de identificação.

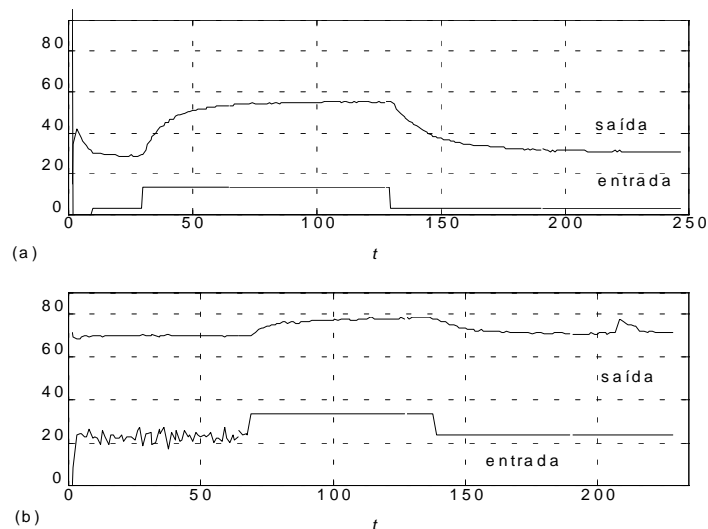


Figura 5.3. Resposta do forno elétrico ao degrau. (a) Massa de dados *fd1* (b) Massa de dados *fd2*. A variável  $t$  indica o número de amostras. Os dados são adimensionais e estão normalizados ao intervalo [0 %, 100 %].

Os dados *fd1* e *fd2* foram coletados em duas regiões de operação sobre as quais o forno elétrico apresenta dinâmica distinta. A figura 5.3 mostra a existência de constantes de tempo de aquecimento e resfriamento distintas.

Analisando as massas de dados *fd1* e *fd2* no intervalo  $60 \leq t \leq 130$ , observa-se que a saída do sistema continua a aumentar lentamente enquanto o sinal de controle é mantido constante. Esta análise mostra que o forno apresenta duas constantes de tempo de aquecimento, uma rápida e outra lenta. A existência de duas constantes de tempo de subida é uma característica de alguns processos térmicos. A constante de tempo rápida reflete a transferência de calor do elemento de aquecimento (lâmpada elétrica) para o meio aquecido (chapa metálica do forno). A constante de tempo lenta, por sua vez, indica a perda de calor do meio aquecido para a sua vizinhança, até que o equilíbrio térmico seja alcançado. No forno elétrico, esse fenômeno se manifesta através do aquecimento da camada de ar que o envolve. Um fenômeno semelhante pode ser observado na dinâmica de um *termopar intrínseco* (Doebelin, 1990, Capítulo 8, páginas 638-639). Esse sensor utiliza a própria superfície metálica cuja temperatura se deseja medir para compor o termopar. O sensor apresenta uma constante de tempo de subida bastante rápida, considerada instantânea, e uma constante de subida lenta, conforme pode ser observado na sua curva de resposta (Doebelin, 1990, figura 8.17).

Um outro fenômeno que pode levar ao aparecimento das duas constantes de tempo de aquecimento é a ação de distúrbios externos sobre o processo, visto que o forno elétrico não é isolado termicamente e a sua dinâmica é lenta. Alguns destes distúrbios que podem afetar a dinâmica do forno elétrico são a variação da temperatura ambiente e as correntes de ar. Um fenômeno semelhante ocorre no resfriamento do forno, embora em menor intensidade. A presença dessas constantes de tempo distintas não é evidente nas massas de dados *frq1* e *frq2* devido à grande atividade do sinal de saída. Observa-se que o sinal de saída da massa de dados *fd2* apresenta uma variação brusca em  $t \approx 210$ , tal como as verificadas na massa de dados *frq1*.

A massa de dados *frq2* foi utilizada para derivar modelos NARMAX polinomiais para o forno, pois os seus sinais de entrada e saída são bastante ativos e não apresentam as falhas verificadas na massa *frq1*. As demais massas de dados foram empregadas na validação dos modelos identificados, sendo que *fd1* e *fd2* foram utilizadas para verificar se as constantes de tempo de aquecimento e resfriamento dos modelos estavam próximas dos seus valores reais.

As relações sinal/ruído<sup>1</sup> (SNR) estimadas para as massas de dados obtidas são apresentadas na tabela 5.1.

Tabela 5.1. Relação sinal/ruído das massas de dados de operação do forno elétrico.

Massa de Dados	SNR (dB)
<i>frq1</i>	35,31
<i>frq2</i>	56,23
<i>fd1</i>	64,84
<i>fd2</i>	17,51

No cálculo das relações sinal/ruído, a variância do ruído foi aproximada pela variância dos resíduos de identificação de modelos NARMAX polinomiais derivados para o processo. Esse é um procedimento padrão na área de processamento de sinais (Ljung, 1987). As massas de dados *frq1* e *fd2* apresentam SNR reduzidas em relação aos dois outros conjuntos de dados porque os modelos NARMAX estimados não reproduzem as variações abruptas verificadas nos respectivos sinais de saída medidos. Assim, estas variações encontram-se refletidas nos resíduos da identificação, aumentando a variância destes e diminuindo a relação sinal/ruído.

A filtragem para evitar falseamento do sinal amostrado não foi implementada neste caso. Essa opção foi feita com base no seguintes fatos: o espectro de frequências do sinal de saída do forno elétrico é limitado; o ruído *observacional* que corrompe o sistema apresenta baixas amplitudes e altas frequências; eventualmente, o elemento sensor utilizado pode atuar como um filtro passa-baixas com as características desejadas (Abreu, 1993). A qualidade dos modelos identificados indica que a exclusão da filtragem anti-falseamento não comprometeu os resultados obtidos.

<sup>1</sup>A definição empregada aqui é:  $SNR (dB) = 20 \times \log(Var\{y(t)\}/Var\{\xi(t)\})$ , onde *Var* indica variância,  $y(t)$  é o sinal de saída medido e  $\xi(t)$  indica os resíduos de identificação. *log* indica logaritmo decimal.

Um filtro passa-baixas digital de décima ordem e fase nula foi implementado no MATLAB (MathWorks, 1990a, 1990b) e usado para filtrar dados super-amostrados<sup>2</sup> do forno. O sinal filtrado foi amostrado e utilizado na derivação de modelos. Os modelos identificados apresentaram propriedades dinâmicas e estatísticas semelhantes àquelas dos modelos obtidos sem filtragem dos dados e, portanto, não serão mostrados nesse texto.

O período de amostragem dos sinais manipulados foi escolhido de acordo com o procedimento descrito no capítulo 3. As funções de auto-correlação linear e não-linear do sinal de saída de *frq1* foram calculadas (usando as equações (3.20) e (3.21)) e utilizadas para escolher  $T_s$ , conforme pode ser observado na figura 5.4.

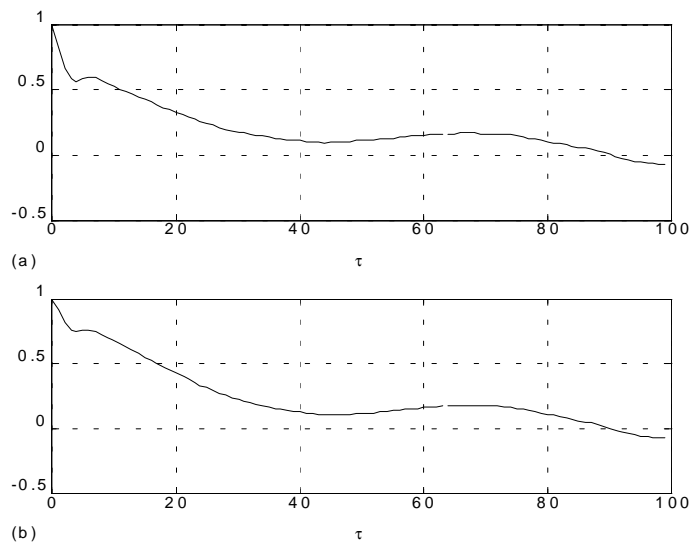


Figura 5.4. Funções de auto-correlação da saída de *frq1*. (a) auto-correlação linear, equação (3.20) (b) auto-correlação não-linear, equação (3.21).

Os primeiros mínimos das funções de auto-correlação ocorrem em instantes idênticos; isto é:  $\tau_y = \tau_{y^2} \approx 45 \times 70 = 3150$  s. Logo, o período de amostragem deve ser escolhido na faixa  $157 \text{ s} \leq T_s \leq 315 \text{ s}$ . Os dados de identificação do forno elétrico foram obtidos selecionando-se um a cada três pontos das massas de dados apresentadas anteriormente, o que resulta em um período de amostragem final de  $T_s = 210 \text{ s}$ <sup>3</sup>.

Observa-se que as funções de auto-correlação apresentadas possuem um mínimo local em  $t \approx 3 \times 70 = 210$  s. Este primeiro mínimo não foi considerado na determinação do período de amostragem porque ele reflete uma escala de tempo bem mais curta presente nos dados. Visivelmente, esta escala não é a base de tempo dominante nos dados e parece razoável conjecturar que ela aparece devido às falhas ocorridas em *frq1* e ao ruído que corrompe o sistema.

<sup>2</sup> Dados super-amostrados são amostrados a uma taxa maior que  $1/T_s$ .

<sup>3</sup> O ensaio para obtenção de uma massa de 250 pontos utilizando-se  $T_s = 210$  s seria muito demorado (cerca de 14 horas e 30 minutos). Assim, optou-se por dizimar os dados obtidos anteriormente e trabalhar com séries mais curtas ( $\approx 250/3$  pontos).

### 5.3.2 Detecção de Não-Linearidades

Os algoritmos de detecção de não-linearidades são utilizados para quantificar a presença de interações não-lineares nos dados de identificação. O resultado destes algoritmos indicará se é necessário utilizar modelos não-lineares para reproduzir a dinâmica do sistema em estudo.

O teste de detecção de não-linearidades apresentado no capítulo 2 (Billings e Voon, 1983, 1986) foi utilizado para verificar se o relacionamento entrada-saída do forno é linear ou não-linear. A figura 5.5 mostra o resultado do teste aplicado aos dados do forno. As linhas pontilhadas indicam os intervalos de confiança de 90 % e 95 %.

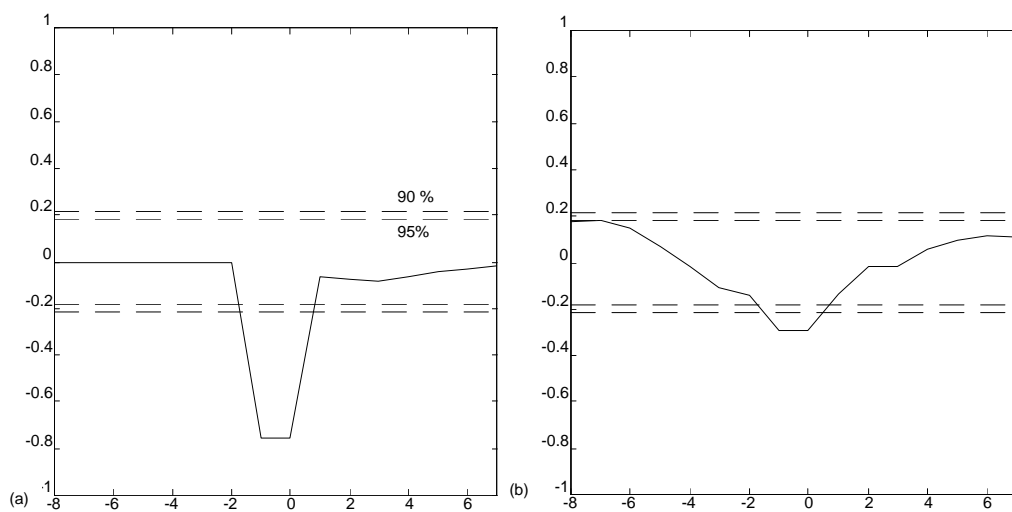


Figura 5.5. Detecção de não-linearidade nos dados do forno. (a) dados *frq1* (b) dados *frq2*.

As interações não-lineares presentes nos dados do forno são significativas, visto que a função de correlação (2.2) não permanece dentro da região delimitada pelo intervalo de confiança. Assim, é necessário utilizar estruturas não-lineares para representar a dinâmica do forno.

Analisando a figura 5.5, observa-se que a massa de dados *frq1* apresenta interações não-lineares bem mais significativas do que aquelas encontradas em *frq2*. Acredita-se que isso acontece porque o sinal de entrada da série *frq1* excursiona o sistema em uma região de operação mais ampla do que a faixa visitada pelos dados de *frq2*. Além disso, a massa de dados *frq1* apresenta variações abruptas não-lineares, as quais não são verificadas em *frq2*.

### 5.3.3 Detecção de Estrutura e Estimação de Parâmetros

Um passo importante na identificação de um sistema dinâmico é a escolha da estrutura que será usada para representá-lo. Nesse trabalho, utilizaram-se modelos NARMAX polinomiais para reproduzir a dinâmica do forno elétrico.

Os modelos NARMAX polinomiais do forno foram identificados utilizando grau de não-linearidade  $l = 3$ . Polinômios não-lineares de ordem 3 são capazes de representar um ampla classe de sistemas não-lineares (Billings e Fadzil, 1985; Billings et al., 1989; Noshiro et al., 1993; Jang e Kim, 1994; Pröl e Karim, 1994; Aguirre e Billings, 1994b, 1995a).

A escolha dos atrasos e do número de termos dos modelos foi feita de maneira experimental. Em um primeiro passo, ajustou-se  $n_y = n_u = 2$  e identificou-se um conjunto de modelos NARMAX com  $n_p$  variando entre 5 e 20. Em seguida, incrementou-se os valores dos atrasos, fazendo  $n_y = n_u = 3$ , e identificou-se outro conjunto de modelos. Alguns modelos foram preliminarmente escolhidos de acordo com a capacidade de ajuste dos dados de identificação. Os melhores modelos do forno foram então selecionados com base nos resultados dos testes de validação estatística e dinâmica. Os procedimentos de validação dos modelos escolhidos serão apresentados na seção 5.3.5.

Na intenção de verificar a qualidade da modelagem não-linear do forno, identificou-se um conjunto de modelos lineares a partir dos dados *frq2*. Os melhores modelos lineares foram comparados com os modelos NARMAX polinomiais selecionados anteriormente.

Os termos dos modelos NARMAX de ordem 2 e 3 foram selecionados dentro de conjuntos de 35 e 84 termos candidatos, respectivamente. O procedimento de detecção da estrutura dos modelos foi implementado a partir do critério do ERR e do conceito de agrupamentos de termos efetivos, enquanto que o algoritmo de mínimos quadrados ortogonal foi utilizado para estimar os parâmetros. Utilizou-se um modelo linear de ruído, com 22 termos, para minimizar a polarização dos parâmetros estimados. O número de termos deste modelo linear de ruído foi ajustado de modo a derivar modelos estatisticamente válidos.

Alguns dos melhores modelos obtidos para representar a dinâmica do forno elétrico são apresentados a seguir.

- modelo não-linear *nl281*

Especificações:  $l = 3$ ,  $n_y = n_u = 2$ , 8 termos de processo, 22 termos lineares de ruído e  $T_s = 210$  s.

$$\begin{aligned}
 y(t) = & -0,96659y(t-1) + 1,81300y(t-2) - 0,01888u(t-2) + 0,74820u(t-1) \\
 & - 5,65530 \times 10^{-5} y(t-1)^2 u(t-1) - 7,4452 \times 10^{-5} u(t-1)^3 \\
 & - 1,15340 \times 10^{-4} y(t-2)^3 + 1,16990 \times 10^{-4} y(t-1)^3 + \sum_{i=1}^{22} \theta_i \xi(t-i) + \xi(t) .
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

- modelo não-linear *nl391*

Especificações:  $l = 3$ ,  $n_y = n_u = 3$ , 9 termos de processo, 22 termos lineares de ruído e  $T_s = 210$  s.

$$\begin{aligned}
 y(t) = & 0,44551y(t-1) + 0,57773y(t-2) - 0,63628u(t-2) + 0,48606u(t-1) \\
 & - 1,14580 \times 10^{-6} y(t-1)^2 u(t-1) - 9,97760 \times 10^{-5} u(t-3)u(t-1)^2 \\
 & - 2,92710 \times 10^{-5} y(t-3)^3 + 7,88310 \times 10^{-3} y(t-2)u(t-2) \\
 & + 7,43860 \times 10^{-8} y(t-3)^2 u(t-3) + \sum_{i=1}^{22} \theta_i \xi(t-i) + \xi(t) .
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

- modelo linear *ml371*

Especificações:  $l = 1$ ,  $n_y = n_u = 3$ , 7 termos de processo, 22 termos lineares de ruído e  $T_s = 210$  s.

$$\begin{aligned}
 y(t) = & 2,04900 + 0,79715y(t-1) + 0,67033y(t-2) - 0,16872u(t-2) \\
 & + 0,30468u(t-1) - 0,50961y(t-3) - 0,09997u(t-3) \\
 & + \sum_{i=1}^{22} \theta_i \xi(t-i) + \xi(t) .
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

Alguns termos dos modelos não-lineares apresentam parâmetros cujos valores absolutos são bastante reduzidos em relação aos demais. Isso acontece porque tais modelos foram identificados utilizando-se dados não-normalizados ao intervalo  $[0,1]$  e estes parâmetros são pequenos para compensar os elevados valores dos termos quadráticos e cúbicos que os multiplicam.

Os modelos discretos acima conseguem ajustar os dados de identificação com considerável exatidão. Observou-se que os dois modelos não-lineares não apresentam diferença sensível de desempenho. O modelo linear leva aos maiores erros de predição, os quais correspondem à diferença entre a saída do sistema e a predição de "infinitos-passos-a-frente" do modelo. Em cada passo da predição de "infinitos-passos-a-frente", o modelo é reinicializado com as suas predições em iterações passadas e não com os dados do sistema.

O critério de informação de Akaike (capítulo 2) também foi utilizado para estimar o número adequado de termos para a identificação do forno elétrico. O objetivo desse teste foi comparar os modelos NARMAX polinomiais apresentados acima e os melhores modelos não-lineares segundo o critério de Akaike. No teste, o conjunto de termos candidatos foi previamente ordenado de acordo com o valor do ERR de cada termo. Utilizando este conjunto ordenado, identificou-se uma série de modelos NARMAX polinomiais com número de termos crescente. Em seguida, avaliou-se o índice de Akaike para cada um dos modelos derivados. Os resultados obtidos são apresentados na figura 5.6. O primeiro mínimo do critério de Akaike indica o modelo que minimiza a variância dos resíduos de identificação para aquela disposição de termos gerada pelo ERR.

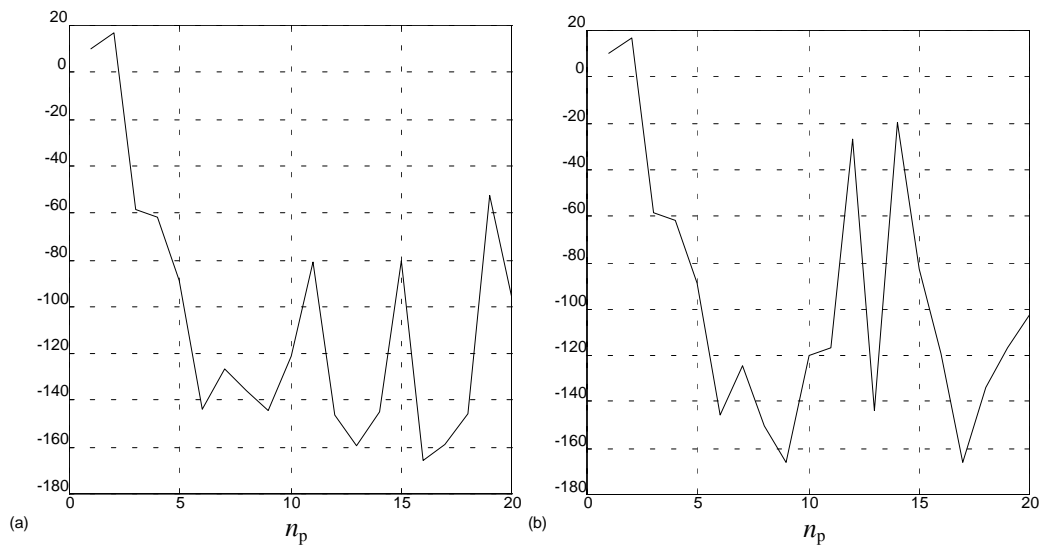


Figura 5.6. Critério de Akaike na detecção de estrutura de modelos NARMAX. (a)  $n_y = n_u = 2$  (b)  $n_y = n_u = 3$ . A estrutura dos modelos foi selecionada através do critério do ERR.

A curva mostrada na figura 5.6(a) não apresenta um primeiro mínimo bem definido. Entretanto, o melhor modelo de ordem 2 deverá ser encontrado na faixa  $6 \leq n_p \leq 9$ .

Os modelos *nl281* e *nl391* foram selecionados por representar adequadamente a dinâmica do forno elétrico e também por minimizar o critério de Akaike. Assim, as duas aproximações levam a resultados semelhantes, o que vem reiterar a qualidade dos citados modelos.

O critério do erro de predição final ou FPE (Akaike, 1974; Gooijer et al., 1985) também foi empregado na estimação do número adequado de termos para os modelos do forno. Os resultados coincidem com as estimativas do critério de Akaike e não serão mostrados aqui.

### 5.3.4 Detecção de Estrutura Utilizando ERR e Agrupamentos de Termos

Os termos dos modelos do forno elétrico foram escolhidos através do critério do ERR. O ERR consegue selecionar modelos com boa qualidade estatística e dinâmica quando os dados de identificação apresentam elevada relação sinal/ruído e taxa de amostragem adequada. Em situações onde o ERR não funciona adequadamente, um procedimento auxiliar pode ser utilizado para ajustar a estrutura de modelos NARMAX polinomiais (Aguirre e Billings, 1995c). Neste procedimento, os termos dos modelos são escolhidos dentro de agrupamentos de termos considerados efetivos, conforme foi descrito no capítulo 3.

Essa seção apresenta uma análise dos agrupamentos de termos presentes em modelos do forno elétrico. O objetivo desta análise é verificar o desempenho do critério do ERR na seleção dos termos destes modelos.

No intuito de determinar os agrupamentos de termos importantes na representação da dinâmica do forno, dois conjuntos de modelos NARMAX polinomiais foram identificados. O primeiro conjunto foi gerado a partir dos dados *frq2* amostrados na taxa  $f_s = 1/T_s = 1/210 \text{ s}^{-1} = 0,48 \text{ mHz}$ . O segundo conjunto de modelos foi derivado utilizando os dados *frq2* super-amostrados<sup>4</sup> para delimitar o conjunto de termos candidatos e dados amostrados na taxa  $f_s$  para ajustar a estrutura e estimar os parâmetros. Os coeficientes dos agrupamentos de termos destes modelos foram calculados e são apresentados nas figuras 5.7 e 5.8 da página seguinte. Os dados foram normalizados ao intervalo [0,1] para permitir a comparação entre as amplitudes dos diversos coeficientes de agrupamentos.

Os coeficientes dos agrupamentos de termos  $\Omega_y, \Omega_{y^2}, \Omega_{y^3}, \Omega_u, \Omega_{u^2}, \Omega_{u^3}$  apresentaram comportamentos semelhantes sobre os dois conjuntos de modelos identificados. Para sistematizar a informação, apenas uma figura de cada caso será apresentada.

Um agrupamento de termos é considerado espúrio na representação de um sistema dinâmico quando o seu coeficiente apresenta valor reduzido em relação aos demais coeficientes de agrupamentos (Aguirre e Billings, 1995c; Aguirre e Mendes, 1996). A oscilação do coeficiente de um agrupamento, à medida que o número de termos do modelo é aumentado, também pode significar que ele não é necessário para reproduzir a dinâmica do sistema original. Deve ser destacado que o valor de um coeficiente de agrupamento é mais significativo quando:

- o número de termos do modelo analisado é reduzido, pois problemas de mal-condicionamento numérico são inevitáveis à medida que o tamanho do modelo cresce;
- os dados de identificação estão super-amostrados, visto que a definição de agrupamentos de termos supõe que  $T_s \rightarrow 0$ , no limite (capítulo 3).

Os resultados obtidos através da análise dos agrupamentos de termos não "determinam" a estrutura de um modelo NARMAX que deve representar a dinâmica do forno. Eles devem ser encarados como apoio ao processo de seleção da estrutura dos modelos.

---

<sup>4</sup>No presente trabalho, utilizaram-se os 250 pontos da série *frq2* ( $T_s = 70 \text{ s}$ ) para delimitar o conjunto de termos candidatos.



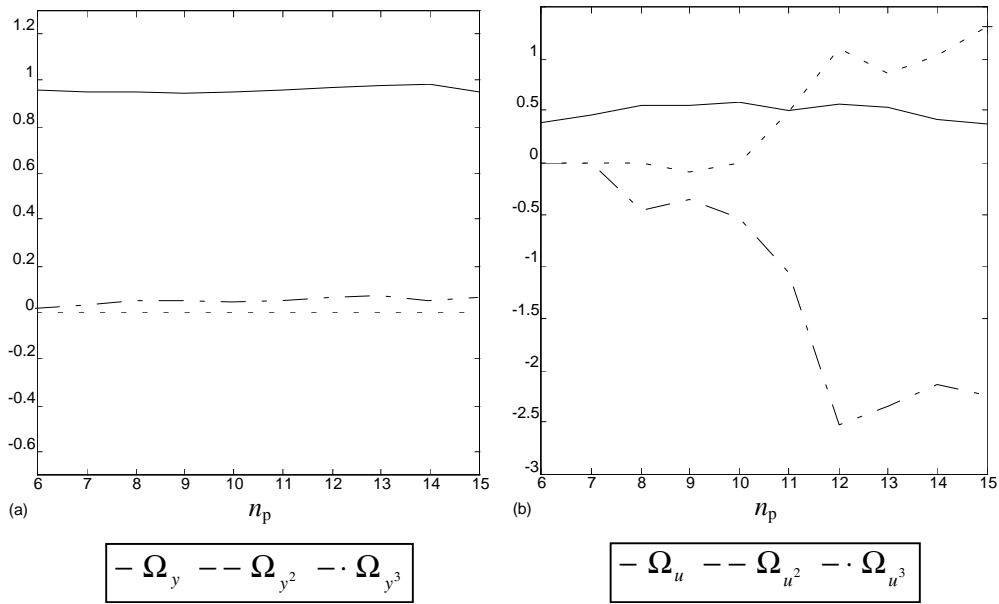


Figura 5.7. Coeficientes de agrupamentos de termos em modelos NARMAX do forno. (a) agrupamentos de termos de saída (b) agrupamentos de termos de entrada.

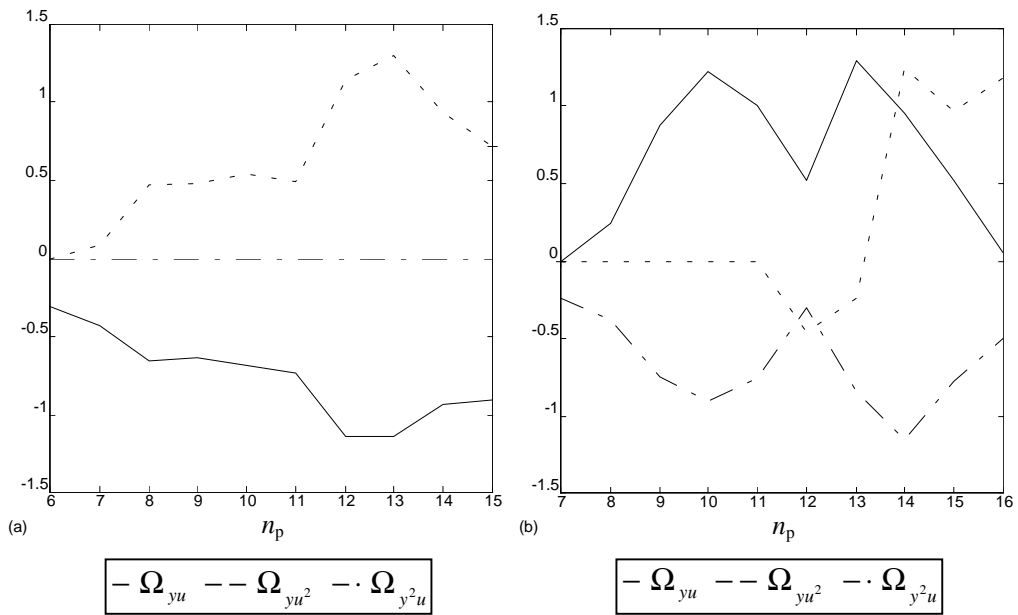


Figura 5.8. Coeficientes de agrupamentos de termos em modelos NARMAX do forno. (a) modelos identificados a partir de dados amostrados à taxa  $f_s$  (b) modelos identificados a partir de dados super-amostrados.

Os agrupamentos  $\Omega_0$  (termo constante) e  $\Omega_{y^2}$  não aparecem em nenhum dos modelos identificados. De acordo com a figura 5.7(b), o agrupamento  $\Omega_{u^2}$  parece ser espúrio, já que o seu coeficiente oscila em torno de zero e apresenta valor reduzido (em relação aos demais coeficientes) nos primeiros modelos analisados. Assim, os termos pertencentes a estes agrupamentos podem ser excluídos do conjunto de termos candidatos.

Os resultados apresentados na figura 5.8 são aparentemente contraditórios. A figura 5.8(a) mostra que o agrupamento  $\Omega_{y^2u}$  não é encontrado em modelos identificados a

partir da massa de dados *frq2*. Por outro lado, a figura 5.8(b) parece indicar que o agrupamento  $\Omega_{yu^2}$  não precisa ser considerado na identificação do forno, pois ele só aparece em modelos com  $n_p \geq 12$ , os quais são instáveis nas faixas de operação consideradas. Além disso, ocorre uma inversão no sinal dos coeficientes investigados. Portanto, um estudo comparativo foi necessário para determinar a importância dos agrupamentos  $\Omega_{yu^2}$  e  $\Omega_{y^2u}$  na modelagem do forno elétrico. Em uma primeira etapa, identificaram-se modelos NARMAX polinomiais excluindo os termos do agrupamento  $\Omega_{yu^2}$ . Em seguida, os termos não considerados foram aqueles pertencentes ao agrupamento  $\Omega_{y^2u}$ . Observou-se que apenas os modelos identificados após a exclusão de  $\Omega_{yu^2}$  foram capazes de reproduzir os dados de validação. Assim, acredita-se que os agrupamentos de termos *mais significativos* na modelagem do forno elétrico são:  $\Omega_y, \Omega_{y^3}, \Omega_u, \Omega_{u^3}, \Omega_{yu}, \Omega_{y^2u}$ .

É interessante observar que todos os termos dos modelos não-lineares *nl281* e *nl391* pertencem aos agrupamentos considerados importantes. Além disso, os melhores modelos identificados dentro do conjunto de agrupamentos efetivos são idênticos à *nl281* e *nl391*, destacando que estes novos modelos foram identificados a partir dos dados *frq2* sem utilizar nenhuma informação conhecida "a priori". Esse fato mostra a qualidade dos modelos identificados utilizando o critério do ERR para ajuste de estrutura.

### 5.3.5 Validação dos Modelos Identificados

O último passo do procedimento de identificação de sistemas é a validação dos modelos obtidos. A validação estatística de um modelo deve indicar se os seus resíduos de identificação são brancos ou não, o que pode ser feito através da análise das funções de correlação (2.30) a (2.39). A validação dinâmica, por sua vez, deve indicar se o modelo é capaz de reproduzir propriedades dinâmicas do sistema original.

Os resultados dos testes de validação estatística dos modelos *nl281*, *nl391* e *ml371* são apresentados nas figuras 5.9 – 5.11.

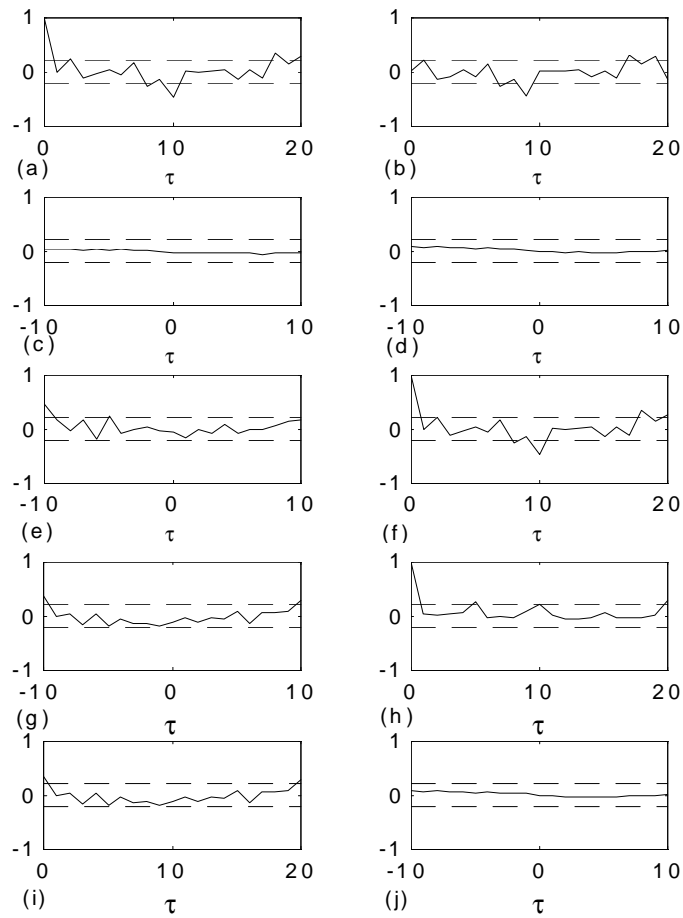
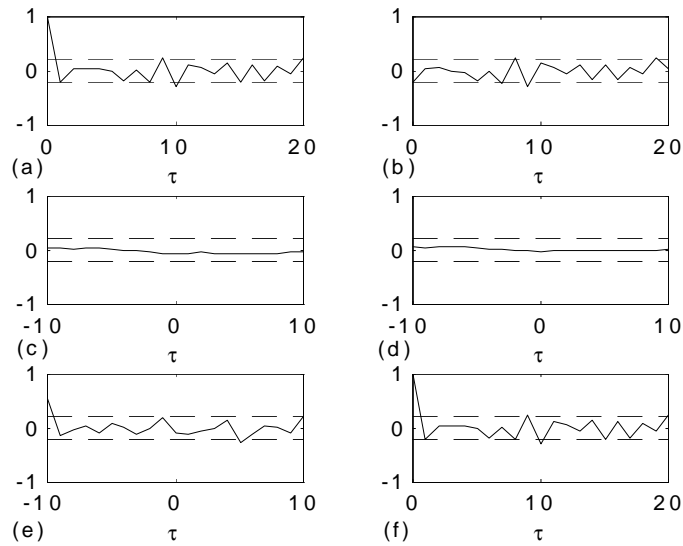


Figura 5.9. Validação estatística do modelo *nl281*. Correlações calculadas: (a)  $\xi(t) \times \xi(t)$  (b)  $u(t) \times \xi(t)$  (c)  $\xi(t) \times \xi(t) \times u(t)$  (d)  $u^2(t) \times \xi(t)$  (e)  $u^2(t) \times \xi^2(t)$  (f)  $\xi^2(t) \times \xi(t)$  (g)  $\xi^2(t) \times \xi^2(t)$  (h)  $\xi^2(t) \times \xi^2(t)$  (i)  $(y(t) \times \xi(t)) \times \xi^2(t)$  (j)  $(y(t) \times \xi(t)) \times u^2(t)$ .



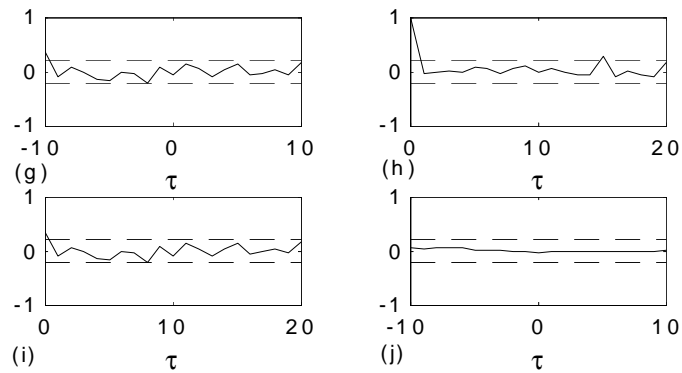


Figura 5.10. Validação estatística do modelo *ml391*. Correlações calculadas: (a)  $\xi(t) \times \xi(t)$  (b)  $u(t) \times \xi(t)$  (c)  $\xi(t) \times \xi(t) \times u(t)$  (d)  $u^2(t) \times \xi(t)$  (e)  $u^2(t) \times \xi^2(t)$  (f)  $\xi(t) \times \xi(t)$  (g)  $\xi(t) \times \xi^2(t)$  (h)  $\xi^2(t) \times \xi^2(t)$  (i)  $(y(t) \times \xi(t)) \times \xi^2(t)$  (j)  $(y(t) \times \xi(t)) \times u^2(t)$ .

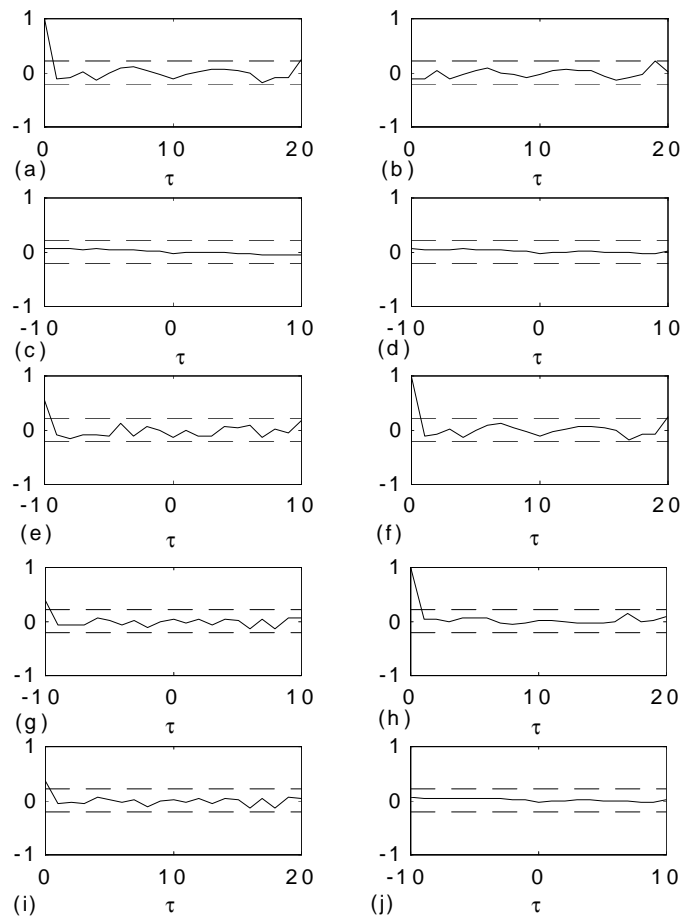


Figura 5.11. Validação estatística do modelo *ml371*. Correlações calculadas: (a)  $\xi(t) \times \xi(t)$  (b)  $u(t) \times \xi(t)$  (c)  $\xi(t) \times \xi(t) \times u(t)$  (d)  $u^2(t) \times \xi(t)$  (e)  $u^2(t) \times \xi^2(t)$  (f)  $\xi(t) \times \xi(t)$  (g)  $\xi(t) \times \xi^2(t)$  (h)  $\xi^2(t) \times \xi^2(t)$  (i)  $(y(t) \times \xi(t)) \times \xi^2(t)$  (j)  $(y(t) \times \xi(t)) \times u^2(t)$ .

O apóstrofe nas variáveis indica que a média foi subtraída dos sinais. As linhas tracejadas delimitam um intervalo de confiança de 95 %, dentro do qual as correlações calculadas devem permanecer para serem consideradas nulas.

As figuras acima indicam que os modelos do forno elétrico são capazes de explicar adequadamente os regimes dinâmicos contidos nos dados de identificação. Os resíduos

de identificação não podem ser preditos a partir da história passada do sistema, o que garante estimativas de parâmetros não-polarizadas. As correlações lineares do modelo *nl281* (figuras 5.9(a), 5.9(b) e 5.9(f)) saem da faixa delimitada pelo intervalo de confiança apenas em  $\tau = 10$ , o que não compromete a qualidade do mesmo.

Os parâmetros de comparação utilizados para a validação dinâmica dos modelos analisados são as constantes de tempo de aquecimento e resfriamento e o ganho em regime permanente. Para tanto, os modelos foram simulados com os sinais de entrada de cada uma das massas de dados de validação: *frq1*, *fd1* e *fd2*. A simulação foi implementada utilizando a estrutura identificada para gerar previsões do sinal de saída "infinitos-passos-a-frente". Em seguida, as previsões foram comparadas com o sinal de saída do conjunto de dados correspondentes (Rodrigues et al., 1996). As primeiras 22 amostras da massa de dados *frq2* foram utilizadas para inicializar os modelos.

As figuras 5.12 – 5.17 mostram as simulações dos modelos do forno. Apenas os resultados mais significativos são apresentados.

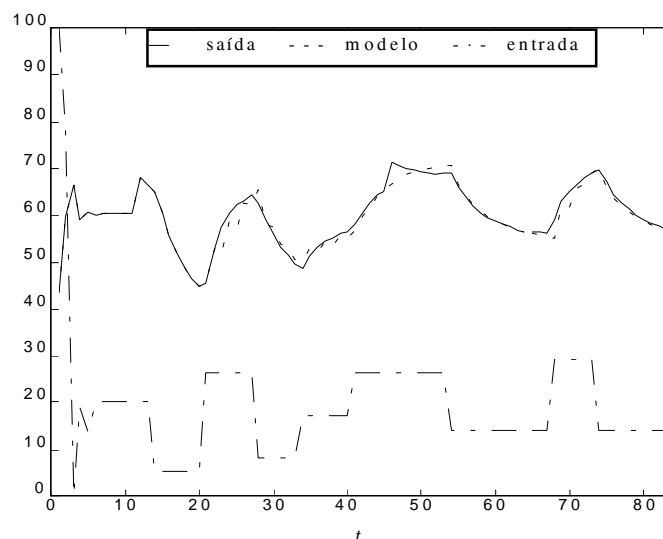


Figura 5.12. Simulação do modelo *nl281* utilizando *frq1*.

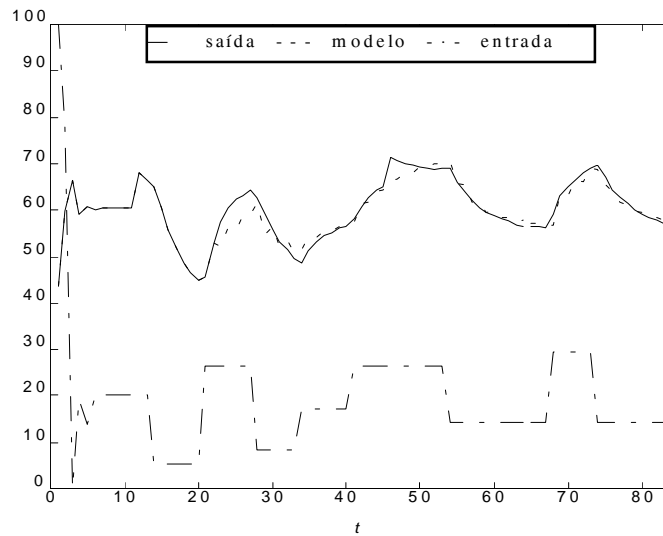


Figura 5.13. Simulação do modelo *nl391* utilizando *frq1*.

Os modelos não-lineares foram capazes de reproduzir, com considerável exatidão, a saída de *frq1* quando simulados com o correspondente sinal de entrada.

Os modelos analisados foram identificados a partir da massa de dados *frq2*, a qual não apresenta as falhas verificadas em *frq1* nos instantes  $t \approx 30$  e  $t \approx 130$ . Como era de se esperar, os modelos não predizem estas falhas, o que indica boa consistência dos resultados. Deve ser destacado que o modelo “segue” a falha em uma predição “um-passo-a-frente”.

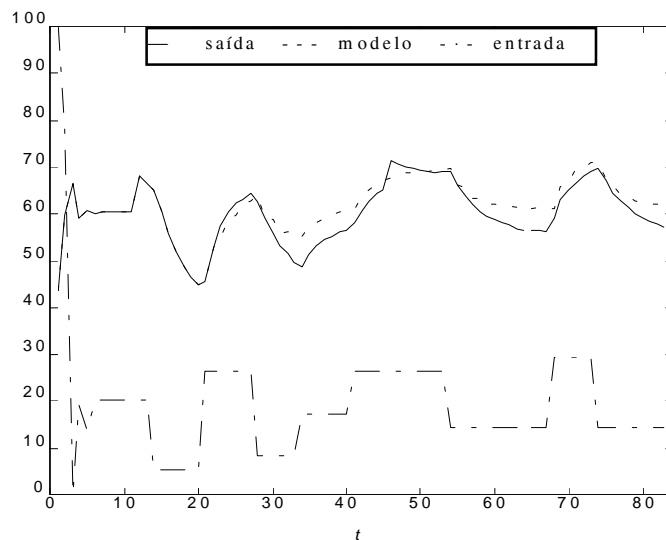


Figura 5.14. Simulação do modelo *ml371* utilizando *frq1*.

Um modelo linear apresenta constantes de tempo de subida e de descida idênticas. De fato, o modelo *ml371* ajusta o mesmo valor para as constantes de tempo de subida e descida, na resposta ao degrau. Este valor aparenta ser uma média das constantes de aquecimento e de resfriamento do forno. Esse fato reitera a necessidade de estruturas não-lineares para reproduzir a dinâmica do forno elétrico.

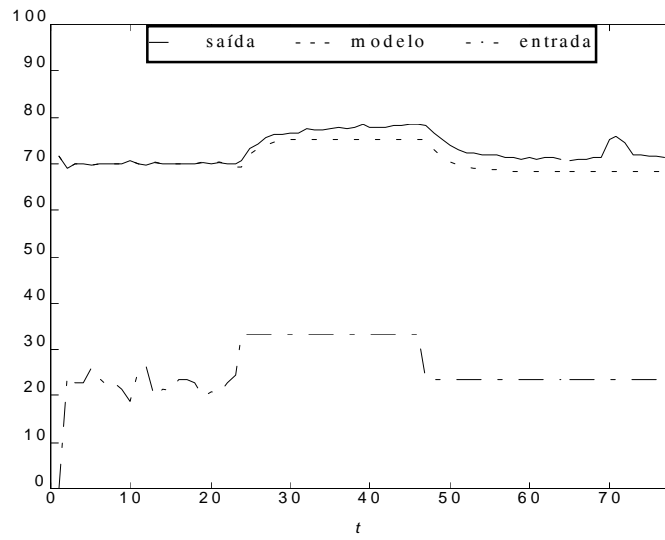


Figura 5.15. Simulação do modelo *nl281* utilizando *fd2*.

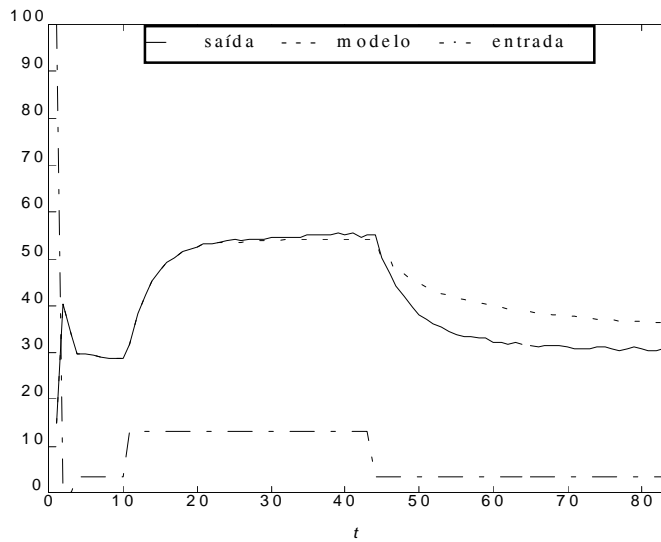


Figura 5.16. Simulação do modelo *nl391* utilizando *fd1*.

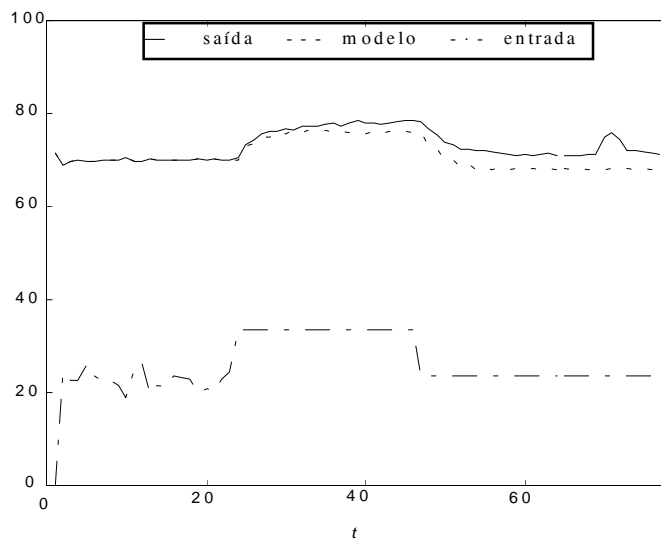


Figura 5.17. Simulação do modelo *nl391* utilizando *fd2*.

O modelo *nl281* é instável nas regiões de operação visitadas pela massa de dados *fd1*. Essas regiões de operação diferem daquelas onde foram gerados os dados de identificação *frq2*. Assim, este modelo reproduz a dinâmica do forno apenas em determinadas regiões de operação.

Os modelo não conseguem reproduzir adequadamente os dados de *fd2*. A constante de tempo de subida dos modelos reproduz a constante rápida de aquecimento do forno. A constante de tempo de descida aparenta ser uma composição das constantes rápida e lenta do resfriamento. Mesmo assim, *os modelos não-lineares ajustam duas constantes distintas para o aquecimento e o resfriamento do forno*. Observa-se, ainda, que os modelo não reproduzem a variação brusca do sinal de saída da massa de dados *fd2*.

A tabela 5.2 compila o valor do desvio padrão dos erros de predição dos modelos *nl281*, *nl391* e *ml371*.

Tabela 5.2. Desvio padrão dos erros de predição dos modelos do forno (dados em porcentagem).

Dados	Modelo		
	<i>nl281</i>	<i>nl391</i>	<i>ml371</i>
<i>frq1</i>	1,42	1,75	2,23
<i>fd1</i>	–	3,53	9,12
<i>fd2</i>	1,66	1,77	1,49

O modelo *nl281* apresenta o melhor ajuste dos dados de validação. Por sua vez, o modelo linear gera os maiores erros de predição (exceto na simulação com a entrada da massa de dados *fd2*).

#### 5.4 Análise de Tendência em Dados de Sistemas Dinâmicos

Um sinal pode ser decomposto em três parcelas (Box e Jenkins, 1976, capítulo 9):

- uma componente que "explica" a dinâmica do sistema em estudo;
- uma componente aleatória – ruído que corrompe o sinal;
- uma tendência.

A existência de uma tendência em um conjunto de dados dificulta a análise da dinâmica do sistema original, já que esta tendência se superpõe às componentes de interesse. A tendência poderá ser eliminada (ou reduzida) em situações onde o objetivo primordial é a análise de comportamento de sistemas dinâmicos e não o ajuste de dados. Destaca-se que a identificação de modelos e a predição de comportamento devem ser feitas a partir dos dados originais, incluindo a tendência.

Os sinais de saída das massas de dados *fd1* e *fd2* apresentam tendências visíveis, conforme pode ser verificado na figura 5.3 <sup>5</sup>. Os modelos *nl281* e *nl391* não conseguem

<sup>5</sup> Nessa análise, a constante de aquecimento lenta do forno elétrico foi considerada como uma tendência nos dados.



reproduzir estas tendências (figuras 5.15 – 5.17), pois foram identificados a partir de  $frq2$ , cujo sinal de saída é bastante ativo e não apresenta tendência visível.

A tendência em  $fd2$  (observada no intervalo  $30 \leq t \leq 45$ , principalmente) foi reduzida, visando isolar o sinal que reflete a dinâmica do forno. Para tanto, utilizou-se a função *detrend* do "software" MATLAB (MathWorks, 1990a, 1990b). Esta função usa a transformada rápida de Fourier, FFT, para ajustar uma reta aos dados originais e eliminar qualquer tendência. Os dados sem tendência foram utilizados na validação dinâmica dos modelos NARMAX polinomiais identificados.

A figura 5.18 mostra a simulação dos modelos  $nl281$  e  $nl391$  com o sinal de entrada da massa de dados  $fd2$ . Os resultados destas simulações foram comparados com os dados de  $fd2$  sem a tendência.

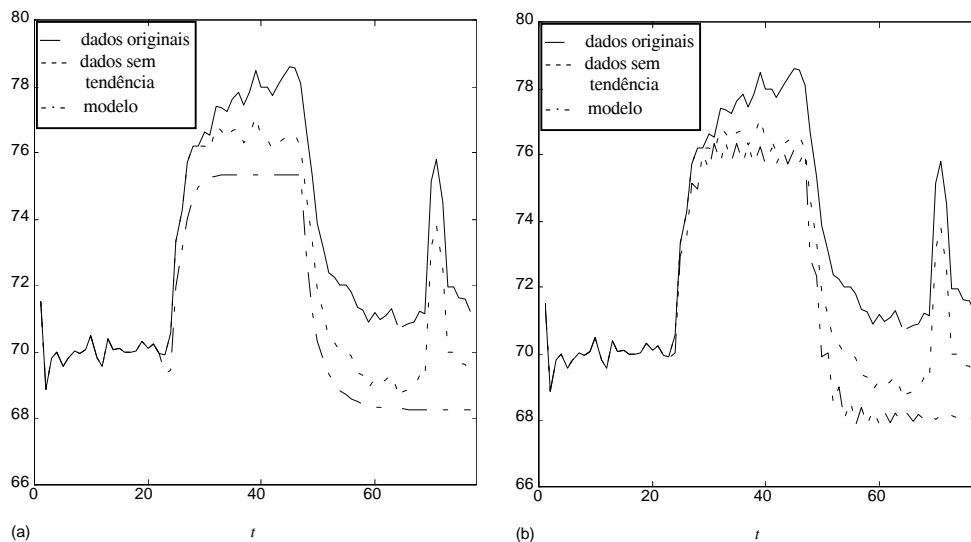


Figura 5.18. Análise de tendência na massa de dados  $fd2$ . (a) validação do modelo  $nl281$  (b) validação do modelo  $nl391$ .

A saída dos modelos identificados está mais próxima dos dados de validação após a eliminação da tendência. As constantes de resfriamento destes modelos reproduzem a constante original do forno, embora o valor final dos modelos seja diferente daquele apresentado pela saída sem tendência. Observa-se, ainda, que o modelo  $nl281$  não consegue reproduzir adequadamente o ganho do forno em regime permanente. Os fatos destacados confirmam a qualidade dinâmica dos modelos  $nl281$  e  $nl391$ .

## 5.5 Comentários Finais

Este capítulo descreveu a modelagem de um sistema não-linear real utilizando as técnicas de identificação apresentadas anteriormente. O sistema modelado foi um forno elétrico construído para estudar problemas de identificação e controle.

O forno elétrico apresenta diferentes constantes de tempo de aquecimento e de resfriamento. As duas constantes de tempo são distintas porque o mecanismo de aquecimento do forno é forçado, através da atuação sobre uma lâmpada elétrica,

enquanto que o resfriamento é passivo. Além disso, a transferência de calor no forno se processa através de fenômenos distintos, radiação e convecção térmica, de acordo com a região de operação considerada. A transferência de calor por radiação é altamente não-linear, dependendo da quarta potência da temperatura absoluta do meio emissor. A transferência de calor por convecção, por sua vez, depende linearmente da diferença das temperaturas absolutas dos meios envolvidos.

Vários modelos NARMAX polinomiais foram identificados para representar a dinâmica do forno elétrico. Alguns modelos foram apresentados ao longo do texto. Observa-se que não existe o *melhor* modelo e sim uma família de modelos que reproduzem a dinâmica do forno elétrico com boa exatidão. A escolha de um modelo dentro desta família dependerá da aplicação em questão (análise, previsão ou controle).

Os dados obtidos não abrangem toda a faixa de operação do forno. Em consequência, os modelos identificados são capazes de descrever a dinâmica do sistema apenas nas regiões visitadas pelos dados disponíveis. A obtenção de modelos globais estará condicionada à obtenção de dados de identificação que excitem todos os modos de operação do forno.

Os algoritmos de identificação (apresentados no capítulo 4) mostraram-se bastante robustos e poderosos, pois estimaram bons modelos para o forno elétrico utilizando uma quantidade reduzida de dados (84 pontos). Os registros de dados de identificação tiveram seus tamanhos comprometidos devido ao valor elevado do período de amostragem do sistema. A relação sinal/ruído das massas de dados não era muito baixa, o que simplificou os procedimentos de seleção de estrutura e estimação de parâmetros. Deve ainda ser destacado que a filtragem anti-falseamento de sinais não foi implementada. Embora não seja um procedimento recomendável, a eliminação dessa etapa de pré-processamento dos dados do sistema não resultou em distorção do espectro de frequências do sinal amostrado.

A detecção da estrutura dos modelos identificados para o forno foi implementada através do critério do ERR e do conceito de agrupamentos de termos efetivos. O ERR consegue selecionar modelos com boa qualidade estatística e dinâmica quando os dados de identificação apresentam elevada relação sinal/ruído e taxa de amostragem adequada. O critério do ERR ajustou adequadamente a estrutura dos modelos do forno elétrico, selecionando apenas termos pertencentes aos agrupamentos considerados efetivos.

Observou-se experimentalmente que modelos não-lineares predizem melhor a dinâmica do forno elétrico em comparação com modelos lineares gerados a partir dos mesmos dados. Basicamente, esse fato acontece porque os modelos não-lineares ajustam constantes de tempo distintas para o aquecimento e para o resfriamento do forno elétrico, enquanto que os modelos lineares ajustam uma única constante de tempo para o processo.

A validação estatística de um modelo dinâmico deve estar sempre conjugada com um procedimento de validação dinâmica. O modelo linear *ml371*, por exemplo, apresentou resíduos de identificação brancos, embora não tenha reproduzido adequadamente as constantes de tempo do processo.

O estudo do forno elétrico foi considerado bastante significativo pois envolveu diversos problemas relacionados à modelagem e análise de sistemas dinâmicos. Esse capítulo mostrou que a aplicação das técnicas de identificação de sistemas não-lineares a sistemas reais é viável pois produziu modelos capazes de representar adequadamente a dinâmica do sistema em estudo.

## Capítulo 6

### 6. Modelagem Não-Linear do Circuito de Chua

#### 6.1 Introdução

O circuito de Chua é um dos circuitos eletrônicos não-lineares mais estudados e um grande número de trabalhos sobre ele têm sido publicados na literatura especializada (Glover e Mees, 1992; Chua e Hasler, 1993; Hartley e Mossayebi, 1993; Madan, 1993; Aguirre e Billings, 1994b; Aguirre, 1995b).

O circuito de Chua foi utilizado para avaliar o procedimento de identificação de sistemas não-lineares usando modelos NARMA polinomiais. Nesse capítulo, serão apresentados e analisados os principais resultados obtidos na modelagem deste circuito. Os principais conceitos da teoria de sistemas dinâmicos não-lineares abordados nesse texto são descritos no apêndice A.

As figuras 6.1 e 6.2 desse capítulo foram gentilmente cedidas por Leonardo Torres (Torres e Aguirre, 1995a).

#### 6.2 Descrição do Sistema

O circuito de Chua apresenta uma topologia bastante simples. Ele é constituído por elementos passivos lineares (dois capacitores, um indutor e um potenciômetro) e um elemento não-linear denominado *diodo de Chua* (Chua et al., 1986; Chua, 1992). O *diodo de Chua* é um resistor de dois terminais e comportamento linear por partes. A figura 6.1 mostra o diagrama esquemático do circuito e a figura 6.2 apresenta a curva característica do *diodo de Chua*<sup>1</sup>.

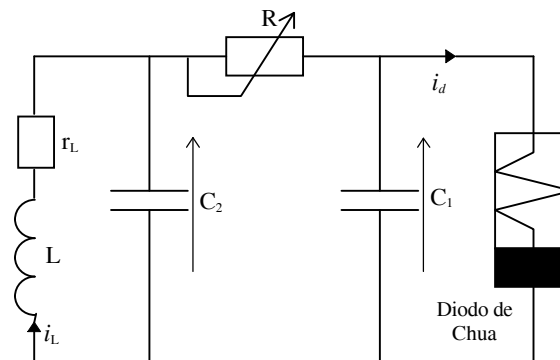


Figura 6.1. Circuito eletrônico de Chua.

<sup>1</sup> O diodo de Chua pode ser implementado utilizando componentes discretos (Kennedy, 1992) ou integrados (Cruz e Chua, 1992).

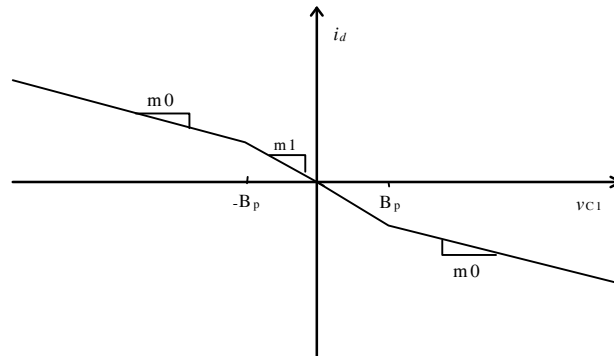


Figura 6.2. Curva característica do diodo de Chua.

As equações dinâmicas do circuito de Chua são:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} &= \frac{v_{C_2} - v_{C_1}}{R} - i_d(v_{C_1}), \\ C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} &= \frac{v_{C_1} - v_{C_2}}{R} + i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_{C_2} - r_L i_L. \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde  $v_{C_1}$  e  $v_{C_2}$  são as tensões sobre os capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente, e  $i_L$  é a corrente no indutor  $L$ .  $r_L$  indica a resistência interna do indutor.

A característica corrente–tensão do diodo de Chua é (Chua et al., 1986; Chua, 1992):

$$\begin{aligned} i_d(v_{C_1}) &= m_0 v_{C_1} + B_p(m_0 - m_1), \text{ se } v_{C_1} < -B_p \\ i_d(v_{C_1}) &= m_1 v_{C_1}, \text{ se } -B_p \leq v_{C_1} \leq B_p \\ i_d(v_{C_1}) &= m_0 v_{C_1} + B_p(m_1 - m_0), \text{ se } v_{C_1} > B_p \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde as constantes  $m_0$ ,  $m_1$  são as inclinações das regiões lineares e  $B_p$  é o valor de tensão onde ocorre a mudança na característica  $i \times v$  do dispositivo (vide figura 6.2). Observa-se que esta curva apresenta uma simetria ímpar em relação ao eixo de correntes. Hartley (1989) propôs a utilização de um polinômio cúbico para aproximar a característica do diodo de Chua.

O circuito de Chua possui três elementos armazenadores de energia – os capacitores e o indutor – e apresenta equação de estados de terceira ordem, cujas variáveis são:  $v_{C_1}$ ,  $v_{C_2}$  e  $i_L$ . O sistema é autônomo, pois não existem fontes externas de energia atuando sobre ele. Em alguns trabalhos, as equações (6.1) são utilizadas em uma forma normalizada, com o objetivo de simplificar a análise da dinâmica do circuito.

As equações dinâmicas do circuito de Chua possuem três pontos fixos, os quais podem ser calculados segundo a definição mostrada no início da seção 3.3.1. Os pontos fixos da dinâmica deste sistema são (Torres e Aguirre, 1995a):

- $\bar{p}_1 = (v_{C_{11}}, v_{C_{21}}, i_{L_1})$ , onde

$$v_{C_{11}} = \frac{-B_p (R + r_L)(m_0 - m_1)}{1 + (R + r_L)m_0},$$

$$v_{C_{21}} = \frac{-B_p r_L (m_0 - m_1)}{1 + (R + r_L)m_0},$$

$$i_{L_1} = \frac{B_p (m_0 - m_1)}{1 + (R + r_L)m_0}.$$

- $\bar{p}_2 = (0,0,0)$ .
- $\bar{p}_3 = (-v_{C_{11}}, -v_{C_{21}}, -i_{L_1})$ .

O circuito apresenta dois pontos fixos simétricos ( $\bar{p}_1$  e  $\bar{p}_3$ ) e um ponto fixo trivial ( $\bar{p}_2$ ). A estabilidade destes pontos fixos foi analisada em (Torres e Aguirre, 1995a). Os três pontos fixos da dinâmica do circuito de Chua apresentam comportamento local instável, embora o sistema seja globalmente estável (característica de sistemas caóticos).

O circuito de Chua exibe vários comportamentos dinâmicos distintos quando o valor dos componentes e das constantes envolvidas são variados. Os dois regimes dinâmicos de maior interesse para esse estudo são aqueles representados pelo *atrator de dupla volta* e pelo *atrator em espiral* (Chua et al., 1986), sobre os quais o sistema apresenta comportamento caótico (vide figuras 6.3 e 6.4).

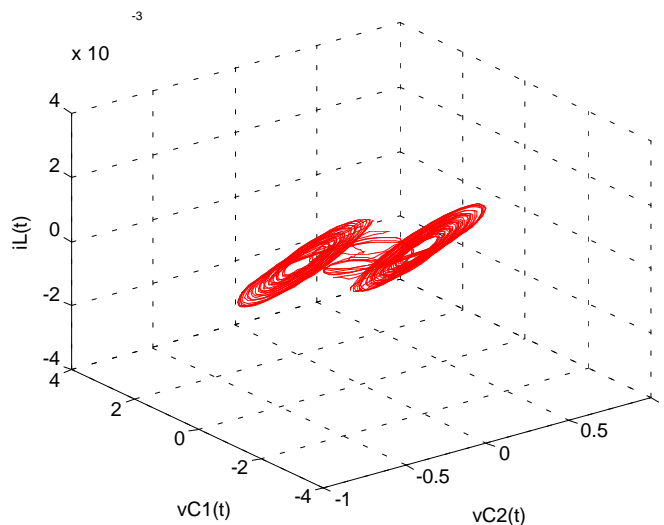


Figura 6.3. Atrator caótico de dupla volta, no circuito de Chua.

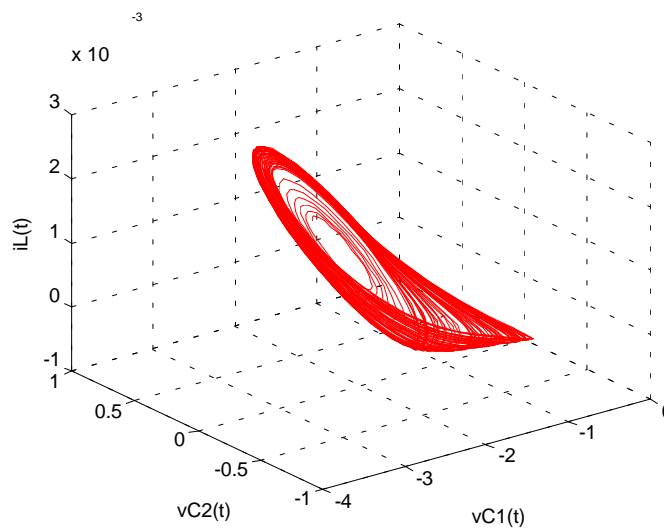


Figura 6.4. Atrator caótico em espiral, no circuito de Chua.

Uma análise detalhada mostra que o circuito de Chua apresenta comportamento caótico em determinadas condições de operação (Chua et al., 1986). Alguns autores acreditam que essa topologia é a configuração mais simples e robusta de um sistema autônomo que pode apresentar comportamento caótico (Wu, 1987). Por estes e outros motivos apresentados anteriormente, o circuito de Chua é considerado um padrão ("benchmark") para o estudo de sistemas dinâmicos não-lineares.

### 6.3 Representação da Dinâmica Não-Linear do Circuito de Chua

As seções seguintes descrevem as etapas do procedimento de modelagem do circuito de Chua operando sobre os atratores de dupla volta e em espiral. Observa-se que estas etapas diferem ligeiramente daquelas utilizadas na identificação não-linear do forno elétrico (capítulo 5).

#### 6.3.1 Aquisição de Dados

Os dados para a identificação do circuito de Chua foram gerados através de dois procedimentos distintos:

- simulação da dinâmica descrita pelas equações ( 6.1 ) e ( 6.2 );
- aquisição de dados de operação em um protótipo do circuito (Torres e Aguirre, 1995b).

Os dados de simulação foram obtidos a partir da solução numérica do sistema de equações diferenciais ( 6.1 ). Um algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem (Parker e Chua, 1989) foi utilizado para integrar numericamente as equações dinâmicas com um passo de cálculo igual a  $\Delta t=1 \times 10^{-7}$ . Nessa tarefa, foram utilizadas rotinas implementadas em linguagem C por Leonardo Torres. Os valores dos componentes do circuito e das constantes envolvidas foram variados de modo a simular vários regimes dinâmicos apresentados pelo sistema.

Os dados obtidos a partir da solução numérica das equações dinâmicas ( 6.1 ) foram utilizados na delimitação de uma região do espaço de estruturas de modelos (descrito com detalhes em Aguirre e Billings, 1995a) onde posteriormente seriam procurados modelos NARMA polinomiais para o circuito de Chua. A região selecionada no espaço de estruturas de modelos do sistema pode ser descrita por:  $4 \leq n_y \leq 6$ ,  $10 \leq n_p \leq 30$ .

Um segundo conjunto de dados de identificação foi obtido durante a operação de um protótipo do circuito. Este protótipo encontra-se montado no Laboratório de Controle de Processos Industriais (LCPI) do Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica (CPDEE) e foi projetado com fins didáticos e de pesquisa (Torres e Aguirre, 1995b). Os valores dos componentes eletrônicos utilizados e dos parâmetros do diodo de Chua implementado (utilizando componentes discretos) são:

$$\begin{aligned} C_1 &= 10 \text{ nF} \pm 5 \% ; \\ C_2 &= 90 \text{ nF} \pm 5 \% ; \\ L &= 21,0 \pm 0,5 \text{ mH} ; \\ r_L &= 15,0 \pm 0,5 \Omega ; \\ m_0 &= -0,37 \pm 0,04 \text{ mS} ; \\ m_1 &= -0,68 \pm 0,04 \text{ mS} ; \\ B_p &= 1,1 \pm 0,2 \text{ V} . \end{aligned}$$

A variação do potenciômetro R do protótipo permite alterar o comportamento dinâmico apresentado pelo circuito. Os atratores de dupla volta e em espiral foram gerados fazendo  $R \approx 1800 \Omega$  e  $R \approx 1900 \Omega$ , respectivamente.

Os períodos ideais para a amostragem dos sinais de tensão e de corrente no circuito foram determinados a partir dos dados de simulação, utilizando a técnica descrita no capítulo 3. O período escolhido para a amostragem dos sinais  $v_{C_1}$  e  $i_L$  sobre o atrator de dupla volta foi  $T_s = 12 \mu\text{s}$ , enquanto que o sinal  $v_{C_2}$  foi amostrado com  $T_s = 8 \mu\text{s}$ . O período de amostragem de  $v_{C_1}$  sobre o atrator em espiral foi escolhido como  $T_s = 20 \mu\text{s}$ .

A aquisição dos dados de operação do circuito foi feita através de um osciloscópio digital TEKTRONIX, modelo TDS 540 (Tektronix, 1992)<sup>2</sup>. Em um primeiro ensaio, utilizou-se o modo de aquisição "hi res" do osciloscópio para obter 5.000 amostras dos sinais  $v_{C_1}$ ,  $v_{C_2}$  e  $i_L$  sobre o atrator de dupla volta e 5.000 amostras de  $v_{C_1}$  sobre o atrator em espiral. A aquisição no modo "hi res" utiliza uma resolução de discretização dependente do período de amostragem considerado, conforme é mostrado na tabela 3-1 do manual de operação do osciloscópio (página 3-13, Tektronix, 1992). A resolução correspondente aos períodos de amostragem utilizados neste ensaio é 13 bits, o que

<sup>2</sup> A corrente no indutor L foi amostrada através de uma ponta de prova de corrente baseada no efeito Hall. Esta ponta de prova distorceu levemente o sinal medido sem, entretanto, alterar as suas características estatísticas básicas (média, variância, etc).



limita o número máximo de amostras que podem ser armazenadas na memória do aparelho em 5.000. Em um segundo ensaio, optou-se por utilizar o modo de aquisição "sample". Este modo de aquisição trabalha com uma resolução de discretização menor que aquela do modo "hi res" (8 bits). Entretanto, o número máximo de amostras é significativamente superior. Neste ensaio, foram amostrados 15.000 pontos dos sinais  $v_{C_1}$ ,  $v_{C_2}$  e  $i_L$  sobre o atrator de dupla volta (dados super-amostrados, com período  $T_s = 4 \mu s$ ) e 15.000 pontos de  $v_{C_1}$  sobre o atrator em espiral (dados também super-amostrados, com o mesmo período de amostragem anterior).

Algumas massas de dados experimentais são mostradas nas figuras 6.5 – 6.7. As três massas de dados iniciais (figura 6.5) correspondem ao primeiro ensaio, o qual utilizou resolução de discretização igual a 13 bits. As quatro massas de dados seguintes (figuras 6.6 e 6.7) foram obtidas no segundo ensaio, utilizando resolução de discretização igual a 8 bits e período de amostragem  $T_s = 4 \mu s$ . Os dados apresentados nas figura 6.6 e 6.7 foram gerados reamostrando-se as massas de dados originais às taxas necessárias para a identificação de modelos NARMA polinomiais. Os sinais de tensão foram medidos em volts, enquanto que o sinal de corrente foi medido em amperes. Nas figuras,  $t$  indica o número de amostras.

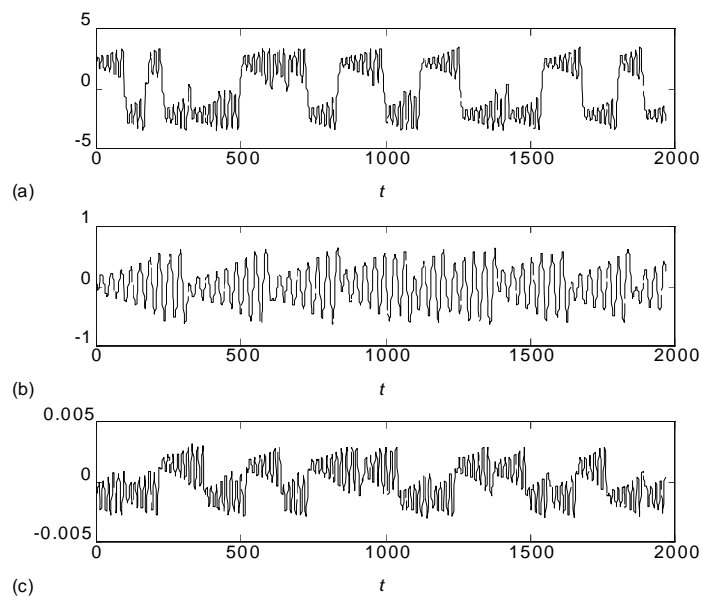


Figura 6.5. Dados experimentais do circuito de Chua sobre o atrator de dupla volta. (a) tensão  $v_{C_1}$  - massa *dsvc1* (volts) (b) tensão  $v_{C_2}$  - massa *dsvc2* (volts) (c) corrente  $i_L$  - massa *dsil* (amperes).  $t$  indica o número de amostras.

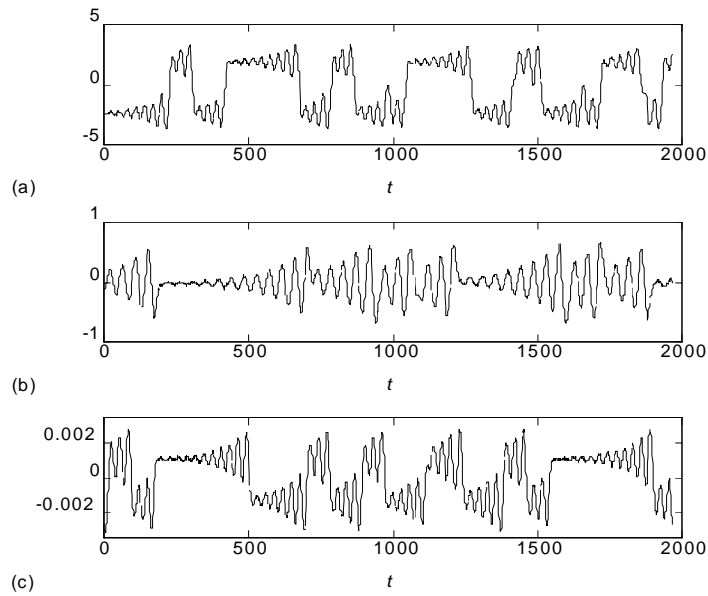


Figura 6.6. Dados experimentais do circuito de Chua sobre o atrator de dupla volta. (a) tensão  $v_{C1}$  - massa *ddsvc1* (volts) (b) tensão  $v_{C2}$  - massa *ddsvc2* (volts) (c) corrente  $i_L$  - massa *ddsil* (amperes).  $t$  indica o número de amostras.

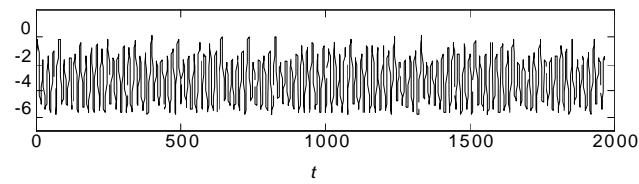


Figura 6.7. Dados experimentais da tensão  $v_{C1}$  sobre o atrator em espiral - massa *spivc1* (volts).  $t$  indica o número de amostras.

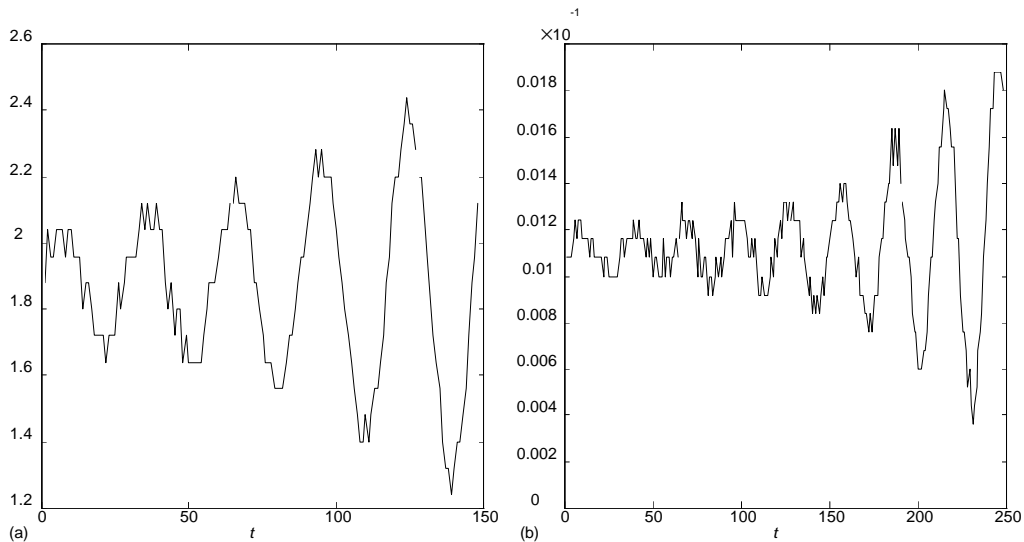


Figura 6.8. Ampliação da figura 6.6 para destacar a qualidade da conversão analógico-digital dos sinais medidos. (a) tensão  $v_{C1}$  (volts) (b) corrente  $i_L$  (amperes).

Observa-se, na figura 6.8, que as massas obtidas no segundo ensaio de aquisição de dados apresentam graves problemas de digitalização devidos à baixa resolução utilizada na conversão analógico-digital dos sinais medidos. Estes problemas de digitalização são mais evidentes quando a amplitude do sinal em conversão é reduzida (em relação ao

valor máximo do sinal). Tais erros de digitalização aparecerão como ruído aditivo para os algoritmos de identificação, o que tende a dificultar a seleção de estrutura e estimação de parâmetros a partir destas massas de dados. Além disso, os modelos NARMA polinomiais identificados a partir de dados com baixa relação sinal/ruído geralmente apresentam estruturas mais complexas em comparação com os modelos obtidos a partir de dados mais limpos (Aguirre e Billings, 1995b).

As relações sinal/ruído (SNR) estimadas para as massas de dados obtidas são apresentadas na tabela 6.1.

Tabela 6.1. Relação sinal/ruído das massas de dados de identificação do circuito de Chua.

Massa de Dados	SNR (dB)
<i>dsvc1</i>	72,30
<i>dsvc2</i>	69,71
<i>dsil</i>	49,81
<i>ddsvc1</i>	58,79
<i>ddsvc2</i>	50,71
<i>ddsil</i>	47,51
<i>spivc1</i>	49,28

No cálculo das relações sinal/ruído acima, a variância do ruído foi aproximada pela variância dos resíduos de identificação de modelos NARMA polinomiais derivados para o processo. Observa-se que as massas de dados *ddsvc1*, *ddsvc2* e *ddsil* apresentam relações sinal/ruído menores do que as correspondentes relações das massas *dsvc1*, *dsvc2* e *dsil*. A redução da relação sinal/ruído das massas de dados da figura 6.6 se deve ao ruído de digitalização presente nos dados, conforme foi discutido anteriormente.

A pré-filtragem dos dados para evitar o falseamento dos sinais amostrados não foi implementada neste trabalho. Embora esse não seja um procedimento recomendável, a qualidade dos modelos identificados (vide seção 6.3.4) indica que a exclusão da filtragem anti-falseamento não comprometeu os resultados obtidos, pois não houve perda de informação na amostragem. Destaca-se que as massas de dados obtidas no segundo ensaio de aquisição estão super-amostradas. Assim, estes dados poderiam ser facilmente pré-processados por filtros digitais no intuito de eliminar o possível falseamento dos sinais amostrados.

O procedimento de aquisição de dados através do osciloscópio digital TEKTRONIX permite detectar a existência de falseamento através de uma análise visual dos sinais exibidos em sua tela. Uma breve análise do fenômeno e métodos úteis para evitá-lo são discutidos no manual de operação do aparelho (página 2-15, Tektronix, 1992).

### 6.3.2 Detecção de Estrutura e Estimação de Parâmetros

As equações matemáticas (6.1) e (6.2) que descrevem a dinâmica do circuito de Chua são não-lineares. Visto que a estrutura do sistema era previamente conhecida, não foi necessário utilizar testes de detecção de não-linearidades para quantificar as interações presentes nos dados de identificação. Além disso, o comportamento caótico do sistema em determinadas regiões de operação não pode ser representado por estruturas lineares, o que também justificou a utilização de modelos não-lineares.

O circuito de Chua é um sistema autônomo que possui três elementos armazenadores de energia. Existem variáveis de estado físicas associadas a cada um destes elementos armazenadores de energia. Modelos dinâmicos multivariáveis para o circuito de Chua devem ser capazes de descrever o comportamento destas variáveis de estado em função da história passada do sistema. No presente trabalho, estes modelos seriam compostos por conjuntos de polinômios NARMA, conforme foi analisado na seção 2.4. Entretanto, o procedimento de identificação de modelos NARMA multivariáveis exige que todas as variáveis de interesse tenham sido amostradas simultaneamente. A aquisição simultânea de dados das três variáveis de estado do circuito de Chua mostrou-se inviável devido à inadequação dos equipamentos disponíveis. Por outro lado, o teorema de Takens (1980) mostra que os espaços de estados de sistemas dinâmicos podem ser reconstruídos a partir de medições de uma única variável do processo, garantindo-se que o registro de dados disponíveis seja suficientemente longo (e sem ruído) e a estrutura da reconstrução seja adequadamente ajustada (vide seção 2.3). Analisando o teorema de Takens, optou-se por tentar reconstruir os regimes dinâmicos caóticos do circuito através de modelos NARMA monovariáveis identificados a partir de cada uma das suas variáveis de estado. O procedimento de obtenção destes modelos monovariáveis será descrito na sequência dessa seção.

Os atratores de dupla volta e em espiral do circuito de Chua foram reconstruídos de acordo com o teorema de Takens. Os espaços de estados originais foram aproximados por sistemas de coordenadas de atraso fazendo  $d_e = n_y$  e  $\tau = T_s$ . A figura 6.9 (página seguinte) apresenta projeções bidimensionais de algumas destas reconstruções. Os atratores dos modelos NARMA polinomiais identificados para o circuito de Chua também serão apresentados dessa maneira, na seção 6.3.4.

A estrutura escolhida para representar a dinâmica do circuito de Chua foi apresentada na equação (2.4). O grau de não-linearidade desta estrutura foi ajustado em  $l = 3$ , com base em trabalhos similares anteriores (Aguirre e Billings, 1994b; Aguirre, 1995b).

Em uma primeira etapa, nenhuma informação conhecida "a priori" foi utilizada para facilitar o processo de seleção de estrutura dos modelos. A estrutura dos modelos obtidos foi ajustada de maneira experimental. Para tanto, identificaram-se três conjuntos de modelos NARMA polinomiais utilizando dados relativos a cada uma das variáveis de estado do sistema. Estes conjuntos de modelos foram identificados dentro da região do espaço de estruturas de modelos que foi delimitada a partir dos dados de simulação (conforme mencionado na seção 6.3.1). Os melhores modelos identificados para o circuito de Chua foram escolhidos através de procedimentos de validação dinâmica,

dentro do conjunto de modelos que reproduziram os atratores caóticos. Os modelos selecionados serão apresentados na seção 6.3.4.

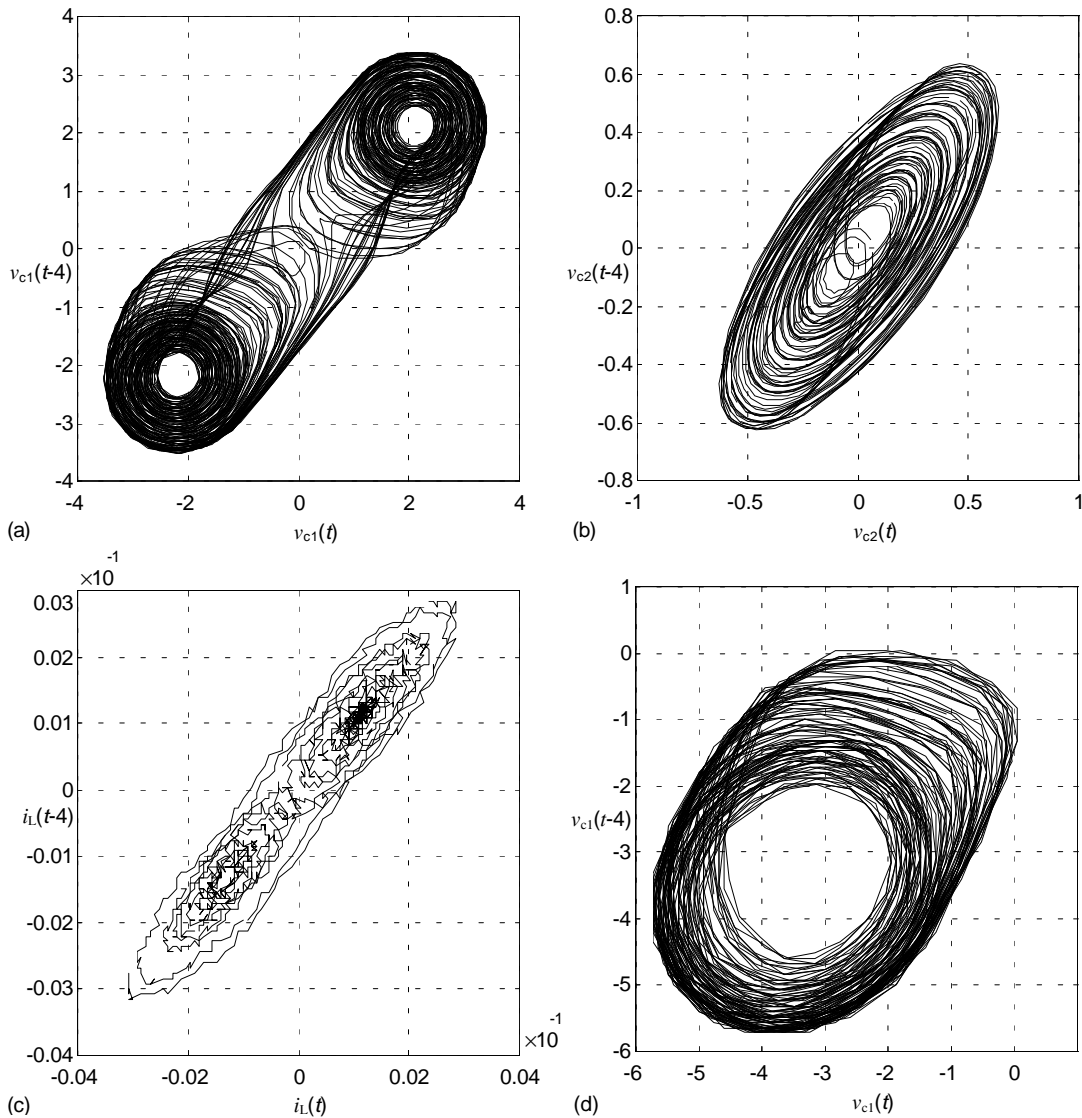


Figura 6.9. Projeções bidimensionais das reconstruções dos atratores caóticos do circuito de Chua.

- (a) atrator de dupla voltagem reconstruído a partir da massa de dados *dsvc1* (dados em volts)
- (b) atrator de dupla voltagem reconstruído a partir da massa de dados *dsvc2* (dados em volts)
- (c) atrator de dupla voltagem reconstruído a partir da massa de dados *ddsil* (dados em amperes)
- (d) atrator em espiral reconstruído a partir da massa de dados *spvc1* (dados em volts).

Os termos dos modelos identificados foram escolhidos através do critério do ERR, dentro de conjuntos de 35, 56 e 84 termos candidatos. Os parâmetros destes modelos foram estimados através de um algoritmo ortogonal de mínimos quadrados. Um modelo linear de ruído com 20 termos foi utilizado para minimizar a polarização dos parâmetros estimados. O número de termos do modelo linear de ruído foi ajustado de modo a gerar modelos estatisticamente válidos. Nesse caso, utilizou-se como referência o modelo linear de ruído ajustado por Aguirre e Billings (1994b).

A modelagem dos regimes caóticos do circuito de Chua a partir da variável  $v_{C_1}$  foi bastante eficiente. Uma série de modelos NARMA polinomiais com boa qualidade dinâmica e estatística foram identificados a partir de medições da tensão sobre o capacitor  $C_1$  (massa de dados *dsvc1*). A identificação destes modelos foi simplificada pela boa qualidade dos dados de identificação, os quais foram amostrados a uma taxa adequada para a identificação e apresentaram relação sinal/ruído relativamente elevada. Além disso, estes dados excursionaram o sistema pelas três regiões lineares da curva característica do diodo de Chua, permanecendo sobre elas um tempo suficiente para que os modelos pudessem "aprender" a dinâmica global do circuito.

Os modelos polinomiais identificados a partir da variável  $v_{C_2}$  (massas de dados *dsvc2* e *ddsvc2*) não foram capazes de reproduzir os regimes dinâmicos contidos nos dados. Estes modelos apresentaram comportamento dinâmico periódico, com periodicidades idênticas.

Uma propriedade interessante foi observada nos modelos NARMA polinomiais identificados a partir da variável  $i_L$ , utilizando a massa de dados *ddsil*. A princípio, os modelos obtidos não foram capazes de representar os regimes dinâmicos originais. Entretanto, alguns destes modelos reproduzem a sequência de bifurcações do sistema quando o parâmetro do primeiro termo linear (ou primeiro termo cúbico) é variado incrementalmente. Acredita-se que a estrutura destes modelos foi ajustada corretamente, embora os parâmetros não tenham sido adequadamente estimados. A reduzida relação sinal/ruído dos dados de identificação (tabela 6.1) dificulta a estimação destes parâmetros, pois a variância das estimativas é proporcional à variância do ruído (Davis e Vinter, 1985; Ljung, 1987).

Os modelos NARMA polinomiais para o atrator em espiral foram identificados a partir de dados filtrados. A variável escolhida para a modelagem foi a tensão  $v_{C_1}$ . Os dados *spivc1* originais não eram adequados para os procedimentos de seleção de estrutura e estimação de parâmetros, conforme foi comprovado experimentalmente. Assim, estes dados foram processados por um filtro digital passa-baixas de quarta ordem com frequência de corte normalizada  $\omega_c = 0,24$ . O filtro foi implementado no MATLAB (MathWorks, 1990a), utilizando a função *cheby2* (MathWorks, 1990b) para calcular os coeficientes do filtro e a função *filtfilt* (MathWorks, 1990b) para processar os dados. Esta função *filtfilt* gera um filtro digital de fase nula, no qual a filtragem é feita em sentido direto e posteriormente em sentido reverso para garantir uma defasagem total nula. A figura 6.10 mostra a massa de dados filtrada e uma projeção bidimensional do atrator reconstruído utilizando coordenadas de atraso. A relação sinal/ruído da massa de dados filtrada foi calculada: SNR = 70,6 dB.

Alguns modelos NARMA polinomiais identificados a partir dos dados *spivc1* filtrados foram capazes de reproduzir a dinâmica do circuito de Chua sobre o atrator em espiral. Estes modelos foram validados e aquele que melhor reproduziu as propriedades dinâmicas do sistema original será apresentado na seção 6.3.4.

Por fim, destaca-se que o procedimento de identificação de modelos NARMA polinomiais para o circuito de Chua mostrou-se bastante sensível ao comprimento das massas de dados utilizadas e ao padrão de comportamento<sup>3</sup> por elas apresentado. Por vezes, a alteração desses parâmetros mudou significativamente a qualidade dinâmica dos modelos estimados. Entretanto, esse efeito ainda não foi quantificado matematicamente.

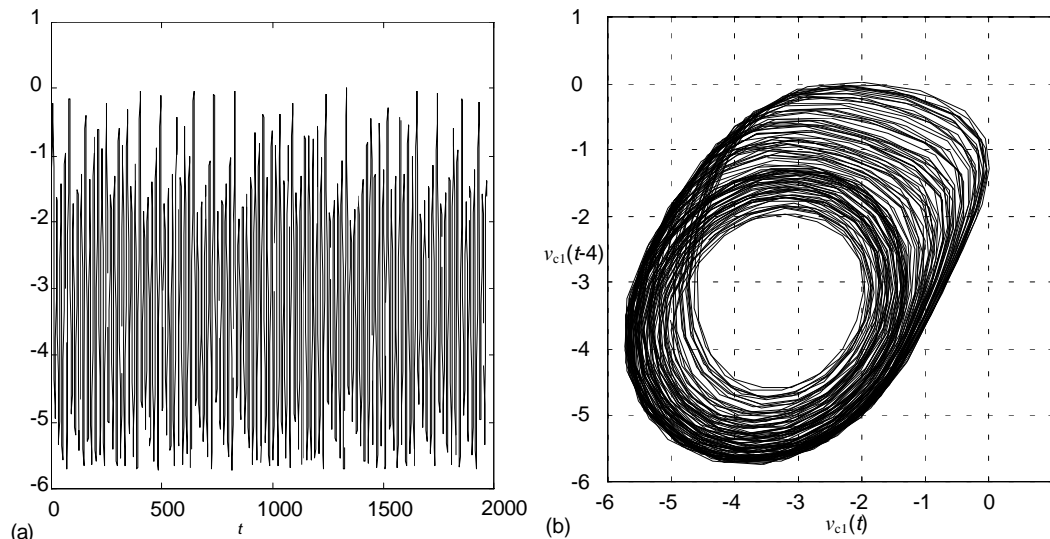


Figura 6.10. (a) Dados *spivc1* filtrados (volts) (b) Projeção do atrator reconstruído a partir dos dados filtrados.  $t$  indica o número de amostras.

### 6.3.3 Detecção de Estrutura Utilizando ERR e Agrupamentos de Termos

Os conceitos de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos (descritos no capítulo 3) foram utilizados para analisar a estrutura dos modelos NARMA polinomiais identificados para o circuito de Chua.

Na identificação do circuito de Chua, o conjunto de termos candidatos pode ser dividido em quatro agrupamentos de termos:  $\Omega_0$ ,  $\Omega_y$ ,  $\Omega_{y^2}$  e  $\Omega_{y^3}$ . No intuito de determinar quais são os agrupamentos efetivos na modelagem do sistema, identificaram-se dois conjuntos de modelos NARMA polinomiais a partir de medições da tensão  $v_{c_1}$ . O primeiro conjunto de modelos foi identificado a partir de dados sobre o atrator de dupla volta, utilizando  $n_y = 4$  e  $10 \leq n_p \leq 20$ . Os dados de identificação foram normalizados ao intervalo  $[-1,1]$  para permitir a comparação entre as magnitudes dos coeficientes de agrupamentos e minimizar os problemas de mal-condicionamento numérico. A figura 6.11 mostra o comportamento destes coeficientes em função do número de termos dos modelos identificados.

Um segundo conjunto de modelos NARMA foi identificado a partir de dados sobre o atrator em espiral. A ordem dos modelos foi ajustada em  $n_y = 5$  e o número de termos variava entre  $15 \leq n_p \leq 30$ . A figura 6.12 mostra o comportamento dos coeficientes de agrupamentos dos modelos em função de  $n_p$ .

<sup>3</sup> Número de cruzamentos do sinal por zero, tempo de permanência em cada lóbulo do atrator, etc.

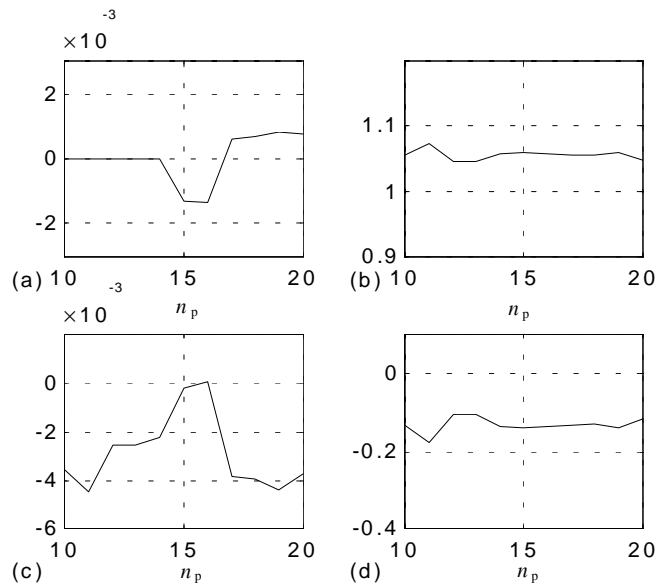


Figura 6.11. Coeficientes de agrupamentos de termos em modelos do atrator de dupla voltagem (coeficientes calculados sobre os dados *dsvcI*). (a)  $\sum_0$  (b)  $\sum_y$  (c)  $\sum_{y^2}$  (d)  $\sum_{y^3}$ .

Observa-se que os coeficientes dos agrupamentos  $\Omega_0$  e  $\Omega_{y^2}$  possuem magnitudes reduzidas em relação aos coeficientes dos outros dois agrupamentos e apresentam comportamento oscilatório à medida que o número de termos dos modelos é aumentado. Por esse motivo, os agrupamentos  $\Omega_0$  e  $\Omega_{y^2}$  podem ser considerados espúrios na modelagem da dinâmica sobre o atrator de dupla voltagem e podem ser eliminados do conjunto de termos candidatos no procedimento de seleção de estrutura. Assim, os agrupamentos efetivos serão:  $\Omega_y$  e  $\Omega_{y^3}$ .

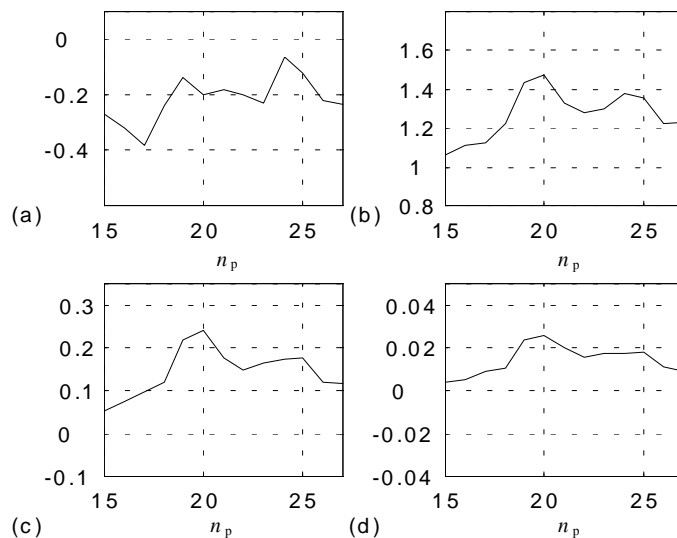


Figura 6.12. Coeficientes de agrupamentos de termos em modelos do atrator em espiral (coeficientes calculados sobre os dados *spivcI* filtrados). (a)  $\sum_0$  (b)  $\sum_y$  (c)  $\sum_{y^2}$  (d)  $\sum_{y^3}$ .



Os coeficientes dos agrupamentos de termos considerados possuem magnitudes próximas em valor absoluto, além de apresentar um comportamento estável à medida que  $n_p$  aumenta. Nesse caso, nenhum agrupamento de termos pode ser considerado espúrio e todos deverão compor o conjunto de termos candidatos na identificação da dinâmica sobre o atrator em espiral.

Os resultados apresentados nessa seção são validados pelos trabalhos (Elgar e Chandran, 1993; Elgar e Kennedy, 1993). Nestes trabalhos, a estrutura não-linear do circuito de Chua foi determinada a partir de uma análise espectral. A função de biespectro (Nikias e Raghuvver, 1987) não mostrou a existência de interações quadráticas significativas em dados obtidos sobre o atrator de dupla volta, enquanto que a função de triespectro detectou fortes interações cúbicas. Por outro lado, o biespectro e o triespectro revelaram consideráveis interações quadráticas e cúbicas nos dados sobre o atrator em espiral.

O estudo da autoestrutura da dinâmica do circuito de Chua e da simetria de seus pontos fixos também confirma os resultados obtidos nessa análise de agrupamentos de termos. A tabela 3.1 mostra que modelos NARMA polinomiais para o atrator de dupla volta devem ser compostos por termos dos agrupamentos  $\Omega_y$  e  $\Omega_{y^3}$ , pois a dinâmica do sistema sobre este atrator possui dois pontos fixos simétricos e um ponto fixo trivial.

Os melhores modelos obtidos dentro do conjunto de agrupamentos efetivos também serão apresentados e analisados na seção seguinte.

### 6.3.4 Validação dos Modelos Identificados

Os modelos NARMA polinomiais identificados para representar a dinâmica do circuito de Chua sobre os atratores caóticos tiveram as suas principais propriedades dinâmicas avaliadas. O objetivo primordial desta avaliação foi selecionar os modelos que reproduzem o comportamento do sistema original com maior exatidão e menor custo computacional.

As propriedades escolhidas para medir a qualidade dinâmica dos modelos do circuito de Chua são (Aguirre e Billings, 1994a)<sup>4</sup>:

- geometria do atrator (forma, tamanho, simetria e autoestrutura);
- espectro de expoentes de Lyapunov ( $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ );
- dimensão de Lyapunov do atrator ( $D_L$ );
- dimensão de correlação do atrator ( $D_C$ ).

Destaca-se que o diagrama de bifurcações seria a ferramenta mais adequada para a validação dinâmica dos modelos identificados (Aguirre e Billings, 1994a). Entretanto, o processo de obtenção do diagrama de bifurcações para sistemas dinâmicos autônomos é muito complexo (Parker e Chua, 1989). Por esse motivo, este método de validação foi omitido nessa etapa do trabalho.

---

<sup>4</sup> As definições destes termos são apresentadas no apêndice A.

A forma, o tamanho e a simetria dos atratores dos modelos identificados foram avaliadas visualmente. Os pontos fixos dos modelos e os autovalores associados foram calculados através das equações (3.9) e (3.16).

O espectro de expoentes de Lyapunov foi calculado através da fórmula (A.5), avaliando a autoestrutura da matriz Jacobiana do sistema sobre os dados disponíveis. Uma rotina MATLAB (MathWorks, 1990a) foi implementada para estimar o espectro de expoentes dos modelos identificados. Nesta tarefa, utilizaram-se 10.000 amostras da dinâmica dos modelos para estimar os expoentes de Lyapunov. Estas 10.000 amostras foram geradas em simulações dos modelos analisados.

Um grande problema associado ao cálculo dos expoentes de Lyapunov e demais invariantes dinâmicos é a verificação da convergência das estimativas. A convergência das estimativas dos expoentes de Lyapunov dos modelos estudados foi estabelecida experimentalmente, embora existam métodos mais elaborados para tanto (Ellner et al., 1991). Um outro problema importante é o teste do caráter estacionário dos dados utilizados, pois ele é um pré-requisito essencial para a existência de invariantes que caracterizem o regime dinâmico em questão (Islaker e Kurths, 1993). As massas de dados utilizadas foram supostas estacionárias no sentido restrito<sup>5</sup>.

As estimativas do espectro de Lyapunov foram empregadas no cálculo da dimensão de Lyapunov dos modelos através da equação (A.3). A dimensão de correlação dos atratores destes modelos foi calculada através das técnicas de reconstrução de espaços de estados e do algoritmo de Parker e Chua (1989, capítulo 7). 20.000 amostras da dinâmica dos modelos foram processadas para estimar as dimensões de correlação.

A estimação dos invariantes dinâmicos dos modelos é uma tarefa bastante complexa. A qualidade destas estimativas dependerá do tamanho dos registros de dados processados, da relação sinal/ruído destes dados e dos algoritmos computacionais utilizados. Por esses motivos, a avaliação do comportamento dinâmico dos modelos identificados ainda envolve fatores subjetivos ("juízo de engenharia"), além da análise dos invariantes.

As tabelas 6.2 e 6.3 mostram os pontos fixos e os principais invariantes dinâmicos do circuito de Chua, respectivamente. Os pontos fixos da dinâmica do circuito de Chua foram calculados de duas maneiras distintas. Em uma primeira etapa, eles foram calculados através da definição de ponto fixo (vide seções 3.3.1 e 6.2). Em uma segunda etapa, os pontos fixos da dinâmica do sistema foram calculados através do algoritmo sugerido em (Glover e Mees, 1992), utilizando os dados de operação do protótipo do circuito. Os invariantes dinâmicos apresentados na tabela 6.3 também foram calculados a partir dos dados de operação do protótipo.

---

<sup>5</sup> Um sinal estacionário no sentido restrito apresenta média constante no tempo e função de autocorrelação dependente apenas da distância entre as amostras consideradas (Papoulis, 1991).

Tabela 6.2. Autoestrutura dos atratores caóticos do circuito de Chua.

	<i>Atrator de dupla volta</i>	<i>Atrator em espiral</i>
(a) definição de ponto fixo	$\bar{p}_1 = (1,88 \text{ V}; 15,57 \text{ mV}; -1,04 \text{ mA})$ $\bar{p}_2 = (0; 0; 0)$ $\bar{p}_3 = -\bar{p}_1$	$\bar{p}_1 = (2,24 \text{ V}; 17,55 \text{ mV}; -1,17 \text{ mA})$ $\bar{p}_2 = (0; 0; 0)$ $\bar{p}_3 = -\bar{p}_1$
(b) algoritmo de (Glover e Mees, 1992) <sup>6</sup>	$\bar{p}_1 = (2,12 \pm 0,06 \text{ V}; \text{n.e.}; -1,23 \pm 0,26 \text{ mA})$ $\bar{p}_2 = (0; 0; 0)$ $\bar{p}_3 = (-2,20 \pm 0,06 \text{ V}; \text{n.e.}; 1,14 \pm 0,26 \text{ mA})$	$\bar{p}_1 = (\text{n.e.}; \text{n.e.}; \text{n.e.})$ $\bar{p}_2 = (0; 0; 0)$ $\bar{p}_3 = (-3,42 \pm 0,03 \text{ V}; \text{n.e.}; \text{n.e.})$

Tabela 6.3. Invariantes dinâmicos dos atratores caóticos do circuito de Chua.

	Atrator de dupla volta	Atrator em espiral
Dimensão Lyapunov	$2,26 \pm 2,78 \times 10^{-3}$	$2,24 \pm 1,09 \times 10^{-3}$
Dimensão Correlação	$2,06 \pm 6,59 \times 10^{-2}$	1,88

Alguns dos melhores modelos NARMA polinomiais identificados para representar os atratores caóticos do circuito de Chua são:

- modelo *dsI*

Variável identificada:  $v_{C_1}$  sobre o atrator de dupla volta (dados *dsvcI*).

Especificações:  $l = 3$ ,  $n_y = 5$ , 13 termos de processo, 20 termos lineares de ruído,

$$T_s = 12 \mu\text{s}.$$

$$\begin{aligned}
 y(t) = & 2,88045y(t-1) - 2,43319y(t-2) + 0,19256y(t-5) + 0,42319y(t-3) \\
 & - 0,00078y(t-1)^2 - 0,50164y(t-1)^3 - 0,03275y(t-5)^3 - 0,30319y(t-2)^3 \\
 & - 0,09080y(t-3)^2 y(t-1) + 0,02465y(t-5)^2 y(t-2) \\
 & + 0,39849y(t-5)y(t-2)^2 + 0,85829y(t-2)y(t-1)^2 \\
 & - 0,36564y(t-5)y(t-2)y(t-1) + \sum_{i=1}^{20} \theta_i \xi(t-i) + \xi(t).
 \end{aligned}$$

(6.3)

<sup>6</sup> A sigla n.e. indica valores não estimados. Algumas componentes dos pontos fixos do circuito de Chua não foram estimadas por falta de massas de dados adequadas.

- modelo *ds2*

Variável identificada:  $v_{C_1}$  sobre o atrator de dupla volta (dados *dsvcI*).

Especificações:  $l = 3$ ,  $n_y = 4$ , 20 termos de processo, 20 termos lineares de ruído e

$$T_s = 12 \mu\text{s}.$$

$$\begin{aligned}
y(t) = & 3,1757y(t-1) - 3,4226y(t-2) + 1,3374y(t-3) - 0,0389y(t-4) \\
& - 0,0007y(t-1)^2 - 1,4255y(t-1)^3 + 5,0857y(t-2)y(t-1)^2 \\
& - 2,2513y(t-3)y(t-1)^2 - 0,0481y(t-4)^3 - 0,2241y(t-4)^2y(t-3) \\
& + 4,8688y(t-3)y(t-2)y(t-1) + 0,1502y(t-4)y(t-1)^2 \\
& + 1,3821y(t-4)y(t-2)^2 - 0,0325y(t-3)^2y(t-2) \\
& - 1,5754y(t-4)y(t-3)y(t-2) - 0,9929y(t-4)y(t-2)y(t-1) \\
& - 1,4047y(t-3)^2y(t-1) - 4,8141y(t-2)^2y(t-1) \\
& + 0,8628y(t-4)y(t-3)^2 + 0,4088y(t-4)^2y(t-1) \\
& + \sum_{i=1}^{20} \theta_i \xi(t-i) + \xi(t).
\end{aligned}
\tag{6.4}$$

Observa-se que os modelos *ds1* e *ds2* possuem termos quadráticos com coeficientes muito pequenos em relação aos demais. Estes termos pertencem a um agrupamento de termos considerado espúrio na modelagem do atrator de dupla volta do circuito de Chua (vide seção 6.3.3). Apesar disso, os modelos *ds1* e *ds2* reproduzem o atrator de dupla volta com boa exatidão (conforme será mostrado na figura 6.13).

- modelo *dsae1*

Variável identificada:  $v_{C_1}$  sobre o atrator de dupla volta (dados *dsvcI*).

Especificações:  $l = 3$ ,  $n_y = 4$ , 17 termos de processo (selecionados dentro do conjunto de agrupamentos efetivos), 20 termos lineares de ruído e  $T_s = 12 \mu\text{s}$ .

$$\begin{aligned}
y(t) = & 3,5230y(t-1) - 4,2897y(t-2) - 0,2588y(t-4) + 2,0652y(t-3) \\
& - 1,7784y(t-1)^3 + 6,1761y(t-2)y(t-1)^2 \\
& + 0,1623y(t-4)y(t-2)y(t-1) - 2,7381y(t-3)y(t-1)^2 \\
& - 5,5369y(t-2)^2y(t-1) + 0,1031y(t-2)^3 + 0,4623y(t-4)^3 \\
& - 0,5247y(t-4)y(t-2)^2 - 1,8965y(t-3)^2y(t-1) \\
& + 5,4255y(t-3)y(t-2)y(t-1) + 0,7258y(t-4)^2y(t-2) \\
& - 1,7684y(t-4)^2y(t-3) + 1,1800y(t-4)y(t-3)^2 + \sum_{i=1}^{20} \theta_i \xi(t-i) + \xi(t).
\end{aligned}
\tag{6.5}$$

- modelo *dsae2*

Variável identificada:  $i_L$  sobre o atrator de dupla volta (dados *ddsil* dizimados).

Especificações:  $l = 3$ ,  $n_y = 6$ , 20 termos de processo (selecionados dentro do conjunto de agrupamentos efetivos), 20 termos lineares de ruído e  $T_s = 12 \mu s$ .

$$\begin{aligned}
 y(t) = & 1,4092y(t-1) - 0,6483y(t-4) + 0,3634y(t-2) + 0,6199y(t-6) \\
 & - 0,2903y(t-3) - 0,3988y(t-5) - 1891,2489y(t-6)y(t-5)y(t-1) \\
 & + 4628,2549y(t-6)y(t-4)y(t-2) - 2415,2616y(t-5)y(t-4)y(t-3) \\
 & - 527,2104y(t-1)^3 - 2915,2755y(t-6)^3 + 6979,7872y(t-6)^2 y(t-4) \\
 & + 921,1841y(t-3)y(t-2)y(t-1) + 50,8122y(t-6)^2 y(t-5) \\
 & - 1932,6477y(t-6)y(t-2)^2 - 4953,4587y(t-6)y(t-4)^2 \\
 & - 1869,3976y(t-6)^2 y(t-2) + 2054,9849y(t-5)y(t-4)y(t-1) \\
 & + 2250,7216y(t-6)y(t-5)y(t-3) - 558,6647y(t-6)^2 y(t-1) \\
 & + \sum_{i=1}^{20} \theta_i \xi(t-i) + \xi(t).
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

O modelo *dsae2* foi gerado através de uma variação incremental do parâmetro  $\theta_1$  do primeiro termo linear de um modelo NARMA polinomial identificado a partir dos dados *ddsil*. Os dois modelos apresentam atratores distintos, embora as suas estruturas sejam idênticas (os termos do primeiro modelo não foram alterados). O modelo original foi identificado utilizando dados normalizados ao intervalo  $[-0,025 \text{ A}; 0,025 \text{ A}]$  e o seu atrator era um ciclo limite instável de período unitário.

- modelo *espl*

Variável identificada:  $v_{C_1}$  sobre o atrator em espiral (dados *spivc1* filtrados e dizimados).

Especificações:  $l=3$ ,  $n_y = 5$ , 23 termos de processo, 20 termos lineares de ruído e  $T_s = 20 \mu s$ .

$$\begin{aligned}
 y(t) = & -0,228660 + 2,968064y(t-1) - 2,893206y(t-2) + 1,601020y(t-3) \\
 & - 0,287626y(t-4) - 0,088461y(t-5) + 0,653338y(t-1)^2 \\
 & + 0,043401y(t-5)^2 - 0,079976y(t-5)y(t-1) - 0,638002y(t-2)y(t-1) \\
 & + 0,186301y(t-4)y(t-3) + 0,088595y(t-5)^2 y(t-4) + 0,113172y(t-1)^3 \\
 & - 0,238244y(t-4)^3 - 0,247567y(t-4)y(t-1)^2 + 0,307877y(t-4)y(t-2)y(t-1) \\
 & + 0,170870y(t-3)^2 y(t-1) - 0,263581y(t-5)^2 y(t-3) \\
 & - 0,625514y(t-5)y(t-3)y(t-2) + 0,353422y(t-5)y(t-2)^2 \\
 & - 0,133970y(t-3)y(t-2)y(t-1) + 0,625611y(t-5)y(t-4)y(t-3) \\
 & - 0,133350y(t-2)^2 y(t-1) + \sum_{i=1}^{20} \theta_i \xi(t-i) + \xi(t).
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

A figura 6.13 mostra as projeções bidimensionais dos atratores caóticos dos cinco modelos escolhidos.

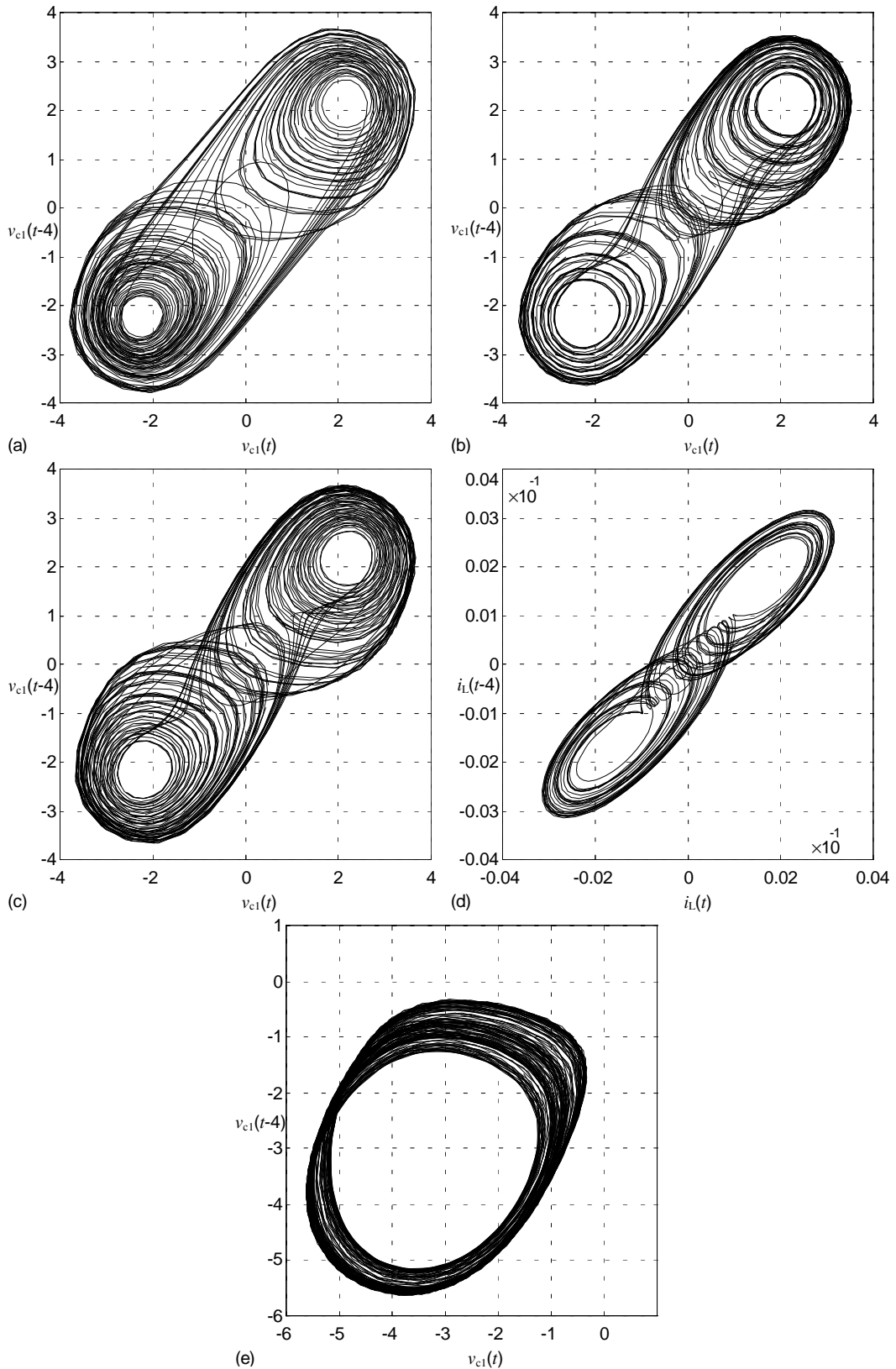


Figura 6.13. Projeções bidimensionais de atratores caóticos. (a) modelo *ds1* (volts) (b) modelo *ds2* (volts) (c) modelo *dsae1* (volts) (d) modelo *dsae2* (amperes) (e) modelo *espl* (volts).

As tabelas 6.4 e 6.5 compilam os pontos fixos e os invariantes dinâmicos dos modelos identificados para representar os regimes dinâmicos caóticos do circuito de Chua. É importante destacar que os pontos fixos dos modelos monovariáveis reproduzem apenas as componentes dos pontos fixos originais relativas à variável de estado utilizada para a identificação.

Tabela 6.4. Pontos fixos dos modelos identificados para o circuito de Chua.

	modelo <i>ds1</i>	modelo <i>ds2</i>
Pontos Fixos	$\bar{y}_1 = 2,21 \text{ V}$ $\bar{y}_2 = 0 \text{ V}$ $\bar{y}_3 = -2,27 \text{ V}$	$\bar{y}_1 = 2,20 \text{ V}$ $\bar{y}_2 = 0 \text{ V}$ $\bar{y}_3 = -2,27 \text{ V}$
	modelo <i>dsae1</i>	modelo <i>dsae2</i>
Pontos Fixos	$\bar{y}_1 = 2,24 \text{ V}$ $\bar{y}_2 = 0 \text{ V}$ $\bar{y}_3 = -2,24 \text{ V}$	$\bar{y}_1 = 1,75 \text{ mA}$ $\bar{y}_2 = 0 \text{ mA}$ $\bar{y}_3 = -1,75 \text{ mA}$
	modelo <i>espl</i>	
Pontos Fixos	$\bar{y}_1 = 0,57 \text{ V}$ $\bar{y}_2 = -3,49 \text{ V}$ $\bar{y}_3 = -6,62 \text{ V}$	– – –

Tabela 6.5. Invariantes dinâmicos dos atratores caóticos do circuito de Chua.

	Modelo <i>ds1</i>	Modelo <i>ds2</i>
Dimensão Lyapunov	$2,11 \pm 6,02 \times 10^{-3}$	$2,06 \pm 2,66 \times 10^{-4}$
Dimensão Correlação	$1,99 \pm 0,07$	$1,84 \pm 0,04$
	Modelo <i>dsae1</i>	Modelo <i>dsae2</i>
Dimensão Lyapunov	$2,18 \pm 9,72 \times 10^{-4}$	$2,07 \pm 1,55 \times 10^{-3}$
Dimensão Correlação	$1,83 \pm 0,01$	$2,06 \pm 0,05$
	Modelo <i>espl</i>	
Dimensão Lyapunov	$2,01 \pm 1,89 \times 10^{-4}$	–
Dimensão Correlação	1,95	–

Os modelos identificados reproduzem os pontos fixos (e os autovalores associados) da dinâmica do circuito de Chua com razoável exatidão. Os maiores erros relativos foram apresentados pelos modelos identificados a partir de dados com reduzida relação sinal/ruído (modelo *dsae2*) e dados filtrados (modelo *espl*). Conforme mencionado anteriormente, a variância das estimativas de parâmetros é proporcional à variância do ruído. Assim, a utilização de dados de identificação ruidosos tende a distorcer a autoestrutura (como também as propriedades dinâmicas) dos modelos gerados. Observa-se, ainda, uma assimetria dos pontos fixos não-triviais dos modelos *ds1* e *ds2*. Estes pontos fixos são assimétricos porque os modelos analisados possuem termos quadráticos (a simetria de pontos fixos de modelos NARX polinomiais foi analisada com detalhes na seção 3.3.3).

O maior expoente de Lyapunov de todos modelos analisados é positivo, o que indica um

comportamento dinâmico caótico. O erro relativo das estimativas obtidas variou entre 10 % e 100 % (Aguirre, Rodrigues e Mendes, 1996). Na estimação do maior expoente de Lyapunov, é difícil determinar qual parcela do erro observado foi gerada pelo desajuste do modelo e qual parcela foi gerada pela imprecisão da estimativa deste expoente utilizando poucos dados. Assim, acredita-se que existe uma boa consistência nos resultados apesar dos elevados erros. A dimensão de Lyapunov calculada para os modelos identificados ficou muito próxima da dimensão dos atratores originais, mesmo em situações onde as estimativas do espectro de Lyapunov não eram boas.

A dimensão de correlação dos atratores dos modelos identificados é não-inteira, o que indica a estranheza destes atratores. O erro relativo das estimativas obtidas atingiu valores muito reduzidos, conforme pode ser verificado nas tabelas 6.3 e 6.5.

Os resultados dos testes de validação estatística (descritos na seção 2.2.8) indicam que os modelos do circuito de Chua são capazes de representar adequadamente os regimes dinâmicos contidos nos dados, pois os seus resíduos de identificação são brancos (dentro de um intervalo probabilístico de 95 % de confiança). Assim, destaca-se que não existem correlações não-modeladas nestes resíduos.

#### **6.4 Comentários Finais**

Esse capítulo descreveu a identificação dos regimes dinâmicos caóticos do circuito não-linear de Chua. Os regimes dinâmicos analisados foram aqueles representados pelos atratores de dupla volta e em espiral (Chua, 1992). Este circuito eletrônico é considerado um "benchmark" no estudo da teoria de sistemas dinâmicos não-lineares (Chua e Hasler, 1993; Madan, 1993).

Os sistemas caóticos geralmente apresentam comportamentos dinâmicos complexos regidos por equações matemáticas concisas (Stewart, 1989). Logo, a principal motivação da modelagem NARMA do circuito de Chua foi verificar a capacidade dos algoritmos de identificação em derivar estruturas polinomiais compactas para representar os regimes dinâmicos originais. O procedimento de identificação do circuito foi bastante eficaz, pois ele derivou modelos NARMA polinomiais que reproduzem as principais propriedades dinâmicas dos atratores do sistema com razoável exatidão (sem utilizar estruturas demasiadamente complexas).

O procedimento de aquisição dos dados de identificação utilizando o osciloscópio digital TEKTRONIX apresentou algumas dificuldades. Alguns registros de dados obtidos apresentaram elevados erros de discretização devidos à baixa resolução de digitalização utilizada na amostragem. Entretanto, a utilização de uma elevada resolução de digitalização implica em uma redução do número máximo de amostras que podem ser armazenadas na memória do aparelho. Dessa maneira, torna-se necessário estabelecer um compromisso entre a resolução de digitalização a ser utilizada e o número de amostras desejado (para identificação e validação de modelos). A filtragem anti-falseamento dos sinais amostrados não foi implementada nesse trabalho. A eliminação dessa etapa de pré-processamento dos dados não comprometeu a qualidade dos resultados obtidos.



A utilização de modelos NARMA multivariáveis para representar os regimes dinâmicos caóticos do circuito de Chua foi evitada pela dificuldade operacional de amostrar três variáveis de estado simultaneamente (além da inexistência de rotina computacional para derivar tais modelos). Nesse trabalho, os regimes dinâmicos de interesse foram representados por modelos NARMA monovariáveis identificados a partir de cada uma variáveis de estado do circuito. O teorema de Takens mostra que esses regimes dinâmicos podem ser reproduzidos por modelos não-lineares monovariáveis, garantindo-se que o registro de dados de identificação seja suficientemente longo e que a estrutura dos modelos seja adequadamente ajustada. Observou-se que os modelos monovariáveis identificados possuem ordens superiores à ordem da equação dinâmica do circuito de Chua. Obviamente, estes modelos possuem invariantes dinâmicos espúrios, os quais não reproduzem propriedades dinâmicas do sistema original. Entretanto, os modelos monovariáveis precisam ajustar atrasos elevados na variável de identificação para suprir informações sobre o sistema que seriam fornecidas pelas outras variáveis nos modelos multivariáveis.

Aguirre (1995b) investigou o desempenho de alguns algoritmos de controle para sistemas caóticos utilizando modelos NARMA polinomiais para representar o comportamento dinâmico do circuito de Chua. O autor observou que os melhores controladores foram projetados a partir de modelos NARMA multivariáveis. Apesar disso, os modelos NARMA monovariáveis podem ser muito eficientes em outros algoritmos de controle para sistemas caóticos (Aguirre e Billings, 1994c).

As estruturas dos modelos NARMA polinomiais identificados foram analisadas através dos conceitos de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos. O critério do ERR não ajustou corretamente a estrutura dos modelos  $ds1$  e  $ds2$ , pois selecionou termos pertencentes a agrupamentos espúrios (de acordo com as considerações de simetria dos pontos fixos do sistema e a análise espectral). Mesmo assim, estes modelos reproduzem o atrator de dupla volta suficientemente bem. Os modelos polinomiais identificados dentro do conjunto de agrupamentos efetivos ( $dsae1$  e  $dsae2$ ) reproduzem as principais propriedades dinâmicas e estáticas do sistema original.

Observou-se experimentalmente que a dinâmica do circuito de Chua sobre o atrator em espiral pode ser reproduzida utilizando-se apenas termos lineares e cúbicos em modelos NARMA polinomiais (apesar da função de biespectro ter detectado consideráveis interações quadráticas em dados sobre este atrator).

## Conclusão

A obtenção de modelos matemáticos que reproduzam a dinâmica de sistemas em estudo é uma tarefa de vital importância em Engenharia. Uma abordagem possível para a construção de modelos matemáticos é a identificação de sistemas. A identificação de sistemas é a técnica que permite desenvolver modelos matemáticos a partir de dados medidos. Esse trabalho investigou a aplicação de técnicas para identificação de sistemas dinâmicos não-lineares utilizando modelos NARMAX polinomiais.

A identificação de sistemas dinâmicos não-lineares é uma área de pesquisa relativamente recente. Os fundamentos teóricos da identificação de modelos não-lineares ainda estão sendo estabelecidos, conforme pode ser verificado no grande número de trabalhos publicados em revistas especializadas. Atualmente, o procedimento de identificação necessita da experiência e da capacidade de julgamento do usuário para determinar modelos não-lineares para os sistemas em estudo, fato refletido pelos resultados publicados nessa dissertação. Assim, esta área de pesquisa ainda está em fase de consolidação.

Esse trabalho analisou a capacidade dos modelos polinomiais em reproduzir o comportamento de sistemas não-lineares a partir de dados reais. Os modelos NARMAX polinomiais podem representar a dinâmica de tais sistemas com considerável exatidão desde que utilizem estruturas adequadamente ajustadas e dados de identificação sem variações abruptas. Os modelos NARMAX polinomiais são lineares nos parâmetros, o que permite utilizar o algoritmo de estimação linear por mínimos quadrados. Além disso, as propriedades estatísticas e dinâmicas dos modelos polinomiais identificados podem ser calculadas com facilidade. Estas características fazem com que os modelos polinomiais sejam ferramentas úteis na modelagem e na análise de sistemas não-lineares. Por outro lado, a grande dificuldade associada à identificação de modelos NARMAX polinomiais é o ajuste de suas estruturas. Esse trabalho mostrou que as técnicas de seleção de estrutura baseadas no ERR e nos conceitos de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos podem ser bastante eficazes quando utilizadas adequadamente.

A validação de um modelo matemático deve indicar se ele é capaz de reproduzir as principais propriedades estatísticas e dinâmicas do sistema original. A validação estatística de modelos não-lineares identificados tipicamente utiliza funções de correlação lineares e não-lineares para acessar os regimes dinâmicos não-modelados. Por sua vez, a validação dinâmica baseia-se na avaliação de propriedades dinâmicas dos modelos. Entre estas propriedades, destacam-se os expoentes de Lyapunov, a dimensão de correlação, o mapa de Poincaré e o diagrama de bifurcações. Na prática, verifica-se que um modelo válido estatisticamente pode não ser válido dinamicamente. Dessa maneira, é desejável

que um procedimento de validação estatística esteja sempre associado a um procedimento de validação dinâmica dos modelos identificados.

Os modelos NARMAX polinomiais foram utilizados para representar o comportamento dinâmico de alguns sistemas não-lineares reais. Os sistemas modelados foram o forno elétrico do Laboratório de Controle de Processos Industriais (*LCPI*) e o circuito eletrônico de Chua. O procedimento de identificação derivou um conjunto de modelos que reproduzem os principais regimes dinâmicos destes sistemas com uma boa exatidão. Obviamente, a análise da qualidade da modelagem de um sistema utilizando uma dada estrutura dependerá da aplicação considerada.

A performance dos melhores modelos lineares e não-lineares derivados para o forno elétrico foi comparada (destaca-se que todos estes modelos foram identificados a partir das mesmas massas de dados). Observou-se que os modelos não-lineares são melhores preditores que os lineares. Além disso, os modelos não-lineares conseguem ajustar duas constantes de tempo distintas para o aquecimento e o resfriamento do forno. Essa observação é relevante visto que tal fenômeno é observado na planta e não pode ser descrito por modelos lineares convencionais.

Os dois regimes dinâmicos do circuito de Chua modelados nesse trabalho são aqueles representados pelos atratores de dupla volta e em espiral, sobre os quais o sistema apresenta comportamento caótico. A modelagem destes atratores (seleção de estrutura e estimação de parâmetros) foi dificultada pela utilização de algumas massas de dados com reduzida relação sinal/ruído. Mesmo assim, o procedimento de identificação derivou estruturas polinomiais compactas para reproduzir os atratores em estudo.

Alguns aspectos da identificação de sistemas não-lineares não foram analisados nessa dissertação. Assim, algumas propostas para a continuação desse trabalho podem ser apresentadas:

- análise mais profunda do papel dos agrupamentos de termos e dos coeficientes de agrupamentos na seleção de estrutura de modelos NARMAX polinomiais;
- desenvolvimento de rotinas computacionais para a identificação de modelos NARMAX polinomiais multivariáveis;
- desenvolvimento de rotinas computacionais para a determinação do diagrama de bifurcações dos modelos identificados (em alguns casos, o diagrama de bifurcações poderá ser utilizado para a validação destes modelos);
- identificação de sistemas não-lineares utilizando algoritmos "on-line" para a seleção de estrutura e estimação de parâmetros de modelos NARMAX polinomiais;
- análise da modelagem de sistemas não-lineares com tempo morto;
- projeto de controladores para sistemas não-lineares utilizando modelos NARMAX polinomiais identificados;
- utilização dos modelos NARMAX identificados para a detecção falhas de operação do sistema original.

## Referências Bibliográficas

- Abreu, S. D. G. (1993). Avaliação de desempenho de controladores auto-ajustáveis. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Aguirre, L. A. (1994a). Application of global polynomial models in the identification, analysis and control of nonlinear dynamics and chaos. PhD Thesis, Department of Automatic Control and Systems Engineering, University of Sheffield, U.K.
- Aguirre, L. A. (1994b). Some remarks on structure selection for nonlinear models. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(6):1707-1714.
- Aguirre, L. A. (1995a). A nonlinear correlation function for selecting the delay time in dynamical reconstructions. *Physics Letters A*, 203(1995):88-94.
- Aguirre, L. A. (1995b). The use of identified models in the control of chaotic circuit. Em IEEE Symposium on Circuits and Systems, Seattle, U.S.A.
- Aguirre, L. A. e Billings, S. A. (1994a). Validating identified nonlinear models with chaotic dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(1):109-125.
- Aguirre, L. A. e Billings, S. A. (1994b). Discrete reconstruction of strange attractors of Chua's circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(4):853-864.
- Aguirre, L. A. e Billings, S. A. (1994c). Model reference control of regular and chaotic dynamics in the Duffing-Ueda oscillator. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part I*, 41(7):477-480.
- Aguirre, L. A. e Billings, S. A. (1995a). Dynamical effects of overparametrization in nonlinear models. *Physica D*, 80:26-40.
- Aguirre, L. A. e Billings, S. A. (1995b). Identification of models for chaotic systems from noisy data: implications for performance and nonlinear filtering. *Physica D*, 85:239-258.
- Aguirre, L. A. e Billings, S. A. (1995c). Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering. *International Journal of Control*, 62(3):569-587.

- Aguirre, L. A. e Mendes, E. M. A. M. (1996). Global nonlinear polynomial models: Structure, term clusters and fixed points. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 6(2):279-294.
- Aguirre, L. A., Billings, S. A., Mendes, E. M. A. M. (1996). Smoothing data with local instabilities for the identification of chaotic systems. *International Journal of Control*, 63(3):483-505.
- Aguirre, L. A., Rodrigues, G. G. e Mendes, E. M. A. M. (1996). Nonlinear identification and cluster analysis of chaotic attractors from a real implementation of Chua's circuit. Submetido para publicação no *International Journal of Bifurcation and Chaos*.
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):716-723.
- Aström, K. J. e Bohlin, T. (1965). Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records. Em IFAC Symposium on Self-Adaptive Systems, Teddington, U. K.
- Aström, K. J. e Eykhoff, P. (1971). System Identification - A survey. *Automatica*, 7:123-167.
- Aström, K. J. e Wittenmark, B. (1990). Computer-controlled systems - Theory and design. Prentice-Hall International, New York, U.S.A.
- Aström, K. J. (1994). The future of control. *Modeling, Identification and Control*, Special 15th Anniversary Issue, 15(3):127-134.
- Billings, S. A. (1980). Identification of nonlinear systems - A survey. *IEE Proceedings, Part D*, 127(6):272-285.
- Billings, S. A. e Fadzil, M. B. (1985). The practical identification of systems with nonlinearities. Em IFAC Identification and System Parameter Estimation, páginas 155-160, York, U.K.
- Billings, S. A. e Voon, W. S. F. (1983). Structure detection and model validity tests in the identification of nonlinear systems. *IEE Proceedings, Part D*, 130(4):193-199.
- Billings, S. A. e Voon, W. S. F. (1984). Least squares parameter estimation algorithms for non-linear systems. *International Journal of Systems and Science*, 15(6):601-615.
- Billings, S. A. e Voon, W. S. F. (1986). Correlation based model validity tests for non-linear models. *International Journal of Control*, 44(1):235-244.

- Billings, S. A. e Chen, S. (1989). Representation of non-linear systems: the NARMAX model. *International Journal of Control*, 49(3):1013-1032.
- Billings, S. A., Chen, S. e Korenberg, M. J. (1989). Identification of MIMO non-linear systems using a forward-regression orthogonal estimator. *International Journal of Control*, 49(6):2157-2189.
- Billings, S. A. e Tao, Q. H. (1991). Model validation tests for nonlinear signal processing applications. *International Journal of Control*, 54:157-194.
- Billings, S. A. e Zhu, Q. M. (1994). Model validation tests for multivariable nonlinear models including neural networks. Research Report n. 484, Department of Automatic Control and Systems Engineering, University of Sheffield, U.K.
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M. (1976). Time series analysis: Forecasting and control. Holden-Day Series in Time Series Analysis and Digital Processing, Holden-Day.
- Breeden, J. L. e Packard, N. H. (1994). A learning algorithm for optimal representation of experimental data. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(2):311-326.
- Brown, R., Rulkov, N. F. e Tracy, E. R. (1994). Modeling and synchronizing chaotic systems from time-series data. *Physical Review E*, 49(5):3784-3800.
- Casdagli, M. (1989). Nonlinear prediction of chaotic time series. *Physica D*, 35:335-356.
- Casdagli, M. (1992). A dynamical systems approach to modeling input-output systems. Em *Nonlinear Modeling and Forecasting*, páginas 265-281, Addison Wesley.
- Casdagli, M., Jardins, D. D., Eubank, S., Farmer, J. D., Gibson, J., Theiler, J. e Hunter, N. (1992). Nonlinear modeling of chaotic time series: theory and applications. Em *Applied Chaos*, capítulo 15, páginas 335-380. John Wiley & Sons, New York, U.S.A.
- Casti, J. L. (1977). *Dynamical systems and their applications: Linear theory*. Academic Press, New York, U.S.A.
- Chen, C. T. (1984). *Linear system theory and design*. Holt, Rinehart and Winston, New York, U.S.A.
- Chen, S., Billings, S. A. e Luo, W. (1989). Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification. *International Journal of Control*, 50(5):1873-1896.
- Chen, G., Chen, G. e Figueiredo, R. J. P. (1996). Estimation and control of chaotic dynamical systems using time series data. Research Report, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Houston, U.S.A.

- Chua, L. O. (1992). The genesis of Chua's circuit. *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik*, 46(4):250-257.
- Chua, L. O. e Hasler, M. (1993). (Editores Convidados). Special issue on chaos in nonlinear electronic circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 40(10-11).
- Chua, L. O., Komuro, M. e Matsumoto, T. (1986). The double scroll family. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part I*, 33(11):1072-1118
- Crutchfield, J. P. e McNamara, B. S. (1987). Equations of motion from a data series. *Complex Systems*, 1:417-422.
- Cruz, J. e Chua, L. O. (1992). A CMOS IC nonlinear resistor for Chua's circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part I*, 39(12):985-995.
- Çinar, A. (1995). Nonlinear time series models for multivariable dynamic processes. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 30:147-158.
- Davis, M. H. A., Vinter, R. B. (1985). Stochastic modeling and control. Chapman and Hall, London, U.K.
- Doebelin, E. O. (1980). System modeling and response – Theoretical and experimental approaches. John Wiley & Sons, Inc.
- Doebelin, E. O. (1990). Measurement systems - Application and design. McGraw-Hill Publishing, Singapore.
- Eckmann, J. P. (1981). Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Review of Modern Physics*, 53.
- Elgar, S. e Chandram, V. (1993). High order spectral analysis to detect nonlinear interactions in measured time series and an application to Chua's circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(1):127-136.
- Elgar, S. e Kennedy, M. P. (1993). Bispectral analysis of Chua's circuit. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 3(1):33-48.
- Ellner, S., Gallant, A. R., McCaffrey, D. e Nychka, D. (1991). Convergence rates and data requirements for Jacobian-based estimates of Lyapunov exponents from data. *Physics Letters A*, 153(6,7):357-363.
- Elsner, J. B. (1992). Predicting time series using a neural network as a method of distinguishing chaos from noise. *Journal of Physics A: Mathematical Gen.*, 25:843-850.

- Fiedler-Ferrara, N., Prado, C. P. C. (1994). *Caos, Uma introdução*. Editora Edgar Blücher Ltda, São Paulo, Brasil.
- Fonseca, C. M., Mendes, E. M., Fleming, P. J. e Billings, S. A. (1993). Non-linear model term selection with genetic algorithms. Em IEE/IEEE Workshop on Natural Algorithms in Signal Processing, páginas 27/1-27/8.
- Foss, B. A. e Johansen, T. A. (1992). A NARMAX model representation for adaptive control based on local models. *Modeling, Identification and Control*, 13(1):25-39.
- Foss, B. A., Johansen, T. A. e Sørensen, A. V. (1994). Nonlinear predictive control using local models - Applied to batch processes. Em IFAC Chemistry, Japan.
- Gleick, J. (1989). *Caos – A criação de uma nova ciência*. Editora Campus, Rio de Janeiro, Brasil.
- Glover, J. e Mees, A. (1992). Reconstructing the dynamics of Chua's circuit. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 3(1):201-214.
- Golub, G. H. e Van Loan, C. F. (1989). *Matrix computations*. John Hopkins, London, U.K.
- Goodwin, G. C. e Payne, R. L. (1977). *Dynamic systems identification: Experiment, design and data analysis*. Academic Press, New York, U.S.A.
- de Gooijer, J. G., Abraham, B., Gould, A., Robinson, L. (1985). Methods for determining the order of an autoregressive-moving average process: a survey. *International Statistical Review*, 53(3):301-329.
- Granger, C. e Lin, J. (1994). Using the mutual information coefficient to identify lags in nonlinear models. *Journal of Time Series Analysis*, 15(4):371-384.
- Grassberger, P. e Procaccia, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, 9:189-208.
- Guckenheimer, J. e Holmes, P. (1983). *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields*. Springer-Verlag, New York, U.S.A.
- Haber, R. (1985). Nonlinearity tests for dynamic processes. Em IFAC Identification and System Parameter Estimation, páginas 409-413, York, U.K.
- Haber, R. e Unbehauen, H. (1990). Structure identification of nonlinear dynamic systems - A survey on input/output approaches. *Automatica*, 26(4):651-677.
- Hartley, T. T. (1989). The duffing double scroll. Em Proceedings of American Control Conference, páginas 419-423, Pittsburgh, U.S.A.



- Hartley, T. T. e Mossayebi, F. (1993). Control of Chua's circuit. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 3(1):173-194.
- Hougen, J. O. (1972). Measurements and control applications for practicing engineers. Cahners Books, Massachusetts, U.S.A.
- Islaker, H. e Kurths, J. (1993). A test for stationarity: Finding parts in time series apt for correlation dimension estimates. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3(6):1573-1579.
- Jang, H. e Kim, K. (1994). Identification of loudspeaker nonlinearities using the NARMAX modeling technique. *Journal of Audio Engineering Society*, 42(1/2):50-59.
- Johansen, T. A. (1994). Adaptive control of MIMO non-linear systems using local ARX models and interpolation. Em IFAC Chemistry, Japan.
- Jota, F. G. (1994). Controladores auto-sintonizáveis. Notas de Aula. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Jota, F. G. (1995). Comunicação pessoal. Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Kadtke, J. B., Brush, J. e Holzfuss, J. (1993). Global dynamical equations and Lyapunov exponents from noisy chaotic time series. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3(3):607-616.
- Kalman, R. E., Falb, P. L. e Arbib, M.A. (1969). Topics in mathematical system theory. McGraw-Hill Books Company, New York, U.S.A.
- Kapitaniak, T. (1993). Generating strange nonchaotic trajectories. *Physical Review E*, 47(2):1408-1410.
- Kaplan, J. e Yorke, J. (1979). Chaotic behaviour of multidimensional difference equations. Em Functional differential equations and approximation of fixed points, *Lecture Notes in Mathematics*, n. 730, Springer Verlag, Berlin, Germany.
- Kashyap, R. L. (1977). A bayesian comparison of different classes of dynamical models using empirical data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5):715-727.
- Keren, Y. (1995). MATCOM – A MATLAB™ to C++ translator and support libraries. Software Users Guide.
- Kennedy, M. P. (1992). Robust OP Amp realization of Chua's circuit. *Frequenz*, 46(3/4):66-80.

- Klamkin, M. S. (Editor) (1987). *Mathematical modeling: Classroom notes in applied mathematics*. SIAM, Philadelphia, U.S.A.
- Korenberg, M., Billings, S. A., Liu, Y. P. e McIlroy, P. J. (1988). Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear stochastic systems. *International Journal of Control*, 48(1):193-210.
- Leontaritis, I. J. e Billings, S. A. (1985a). Input-output parametric models for non-linear systems part I: deterministic non-linear systems. *International Journal of Control*, 41(2):303-328.
- Leontaritis, I. J. e Billings, S. A. (1985b). Input-output parametric models for non-linear systems part II: stochastic non-linear systems. *International Journal of Control*, 41(2):329-344.
- Leontaritis, I. J. e Billings, S. A. (1987). Experimental design and identifiability for nonlinear systems. *International Journal of Systems and Science*, 18(1):189-202.
- Ljung, L. (1987). *System identification - Theory for the user*. Prentice-Hall International, New Jersey, U.S.A.
- Ljung, L. (1994). System identification in a MIC perspective. *Modeling, Identification and Control*, Special 15th Anniversary Issue, 15(3):153-159.
- Ljung, L. (1995). System identification. Technical Report, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden.
- Luo, W., Billings, S. A., Tsang, K. M. (1994). On-line structures detection and parameter estimation with exponential windowing for nonlinear systems. Research Report n. 503, Department of Automatic Control and Systems Engineering, University of Sheffield, U.K.
- Madan, R. A. (1993). Special issue on Chua's circuit: a paradigm for chaos. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 3(1).
- Mañé, R. (1980). On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps. Em *Dynamical systems and turbulence, Lecture Notes in Mathematics*, n. 898, Springer Verlag, Berlin, Germany.
- MathWorks, Inc. (1990a). *PC-MATLAB™ for MS-DOS Personal Computers. Software Users Guide*.
- MathWorks, Inc. (1990b). *Signal Processing Toolbox - for use with MATLAB™. Software Users Guide*.
- MathWorks, Inc. (1990c). *System Identification Toolbox - for use with MATLAB™. Software Users Guide*.

- MathWorks, Inc. (1990d). Control System Toolbox - for use with MATLAB™. Software Users Guide.
- May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261:459-467.
- Mees, A. (1993) Parsimonious dynamical reconstruction. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3(3):669-675.
- Mendes, E. M. A. M. e Aguirre, L. A. (1995). Orthogonal estimation of nonlinear models. Relatório de Pesquisa CPDEE/LCPI/01-95, Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Moon, F. C. (1987). Chaotic vibrations - An introduction for applied scientist and engineers. John Wiley & Sons, New York, U.S.A.
- Narendra, K. e Parthasarathy, K. (1990). Identification and control of dynamical systems using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1(1).
- Nikias, C. L. e Raghuvver, M. R. (1987). Bispectrum estimation: A digital signal processing framework. *Proceedings of IEEE*, 75(7):869-891.
- Noshiro, M., Furuya, M., Linkens, D. e Goode, K. (1993). Nonlinear identification of PCO<sub>2</sub> control system in man. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 40:189-202.
- Papoulis, A. (1991). Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill International Editions, Singapore.
- Parameswaran, V. e Raol, J. R. (1994). Estimation of model error for nonlinear system identification. *IEE Proceedings, Part D*, 141(6):403-408.
- Parker, T. S. e Chua, L. O. (1989). Pratical numerical algorithms for chaotic systems. Springer Verlag, Berlin, Germany.
- Parlitz, U. (1992). Identification of true and spurious Lyapunov exponents from time series. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2(1):155-165.
- Peyton-Jones, J. C. e Billings, S. A. (1989). Recursive algorithm for computing the frequency response of a class of non-linear difference equation models. *International Journal of Control*, 50(5):1925-1940.
- Pröl, T. e Karim, M. N. (1994). Model-predictive PH control using real-time NARX approach. *AIChE Journal*, 40(2):269-282.

- Qammar, H. K. e Mossayebi, F. (1994). System identification and model-based control of a chaotic system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(4):843-851.
- Rodrigues, G. G., Aguirre, L. A., Freitas, U. S. e Pena, R. T. (1996). Modelagem não-linear de um forno elétrico utilizando modelos NARMAX polinomiais. Anais do XI Congresso Brasileiro de Automática, São Paulo-SP.
- Rodrigues, G. G. e Aguirre, L. A. (1996). Manual de utilização de rotinas MATLAB para a identificação de modelos NARMAX polinomiais. Relatório de Pesquisa CPDEE/LCPI/03-96, Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Rosenstein, M. T., Collins, J. J. e De Luca, C. J. (1994). Reconstruction Expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times. *Physica D*, 65:117-134.
- Rummelhart, D. E., Hinton, G. E. e Williams, R. J. (1986). Learning internal representations by error propagation. Em *Parallel Distributed Processing*, volume 1, páginas 318-362. MIT Press, Massachusetts, U.S.A.
- Sauer, T., Yorke, J. A., Casdagli, M. (1991). Embedology. *Journal of Statistical Physics*, 65(3/4):579-616.
- Seborg, D. E. (1994). A perspective on advanced strategies for process control. *Modeling, Identification and Control*, Special 15th Anniversary Issue, 15(3):179-189.
- Shannon, C. E. (1949). Communications in the presence of noise. *Proceedings of IRE*, 37:10-21.
- Söderström, T., Ljung, L. e Gustavsson, L. (1978). A theoretical analysis of recursive identification methods. *Automatica*, 14:231-244.
- Souza, A. V. P. (1996). Introdução à análise de sistemas dinâmicos não lineares. Monografia final do Programa de Aprimoramento Discente (PAD), Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Strang, G. (1989) Wavelets and dilation equations: a brief introduction. *SIAM Review*, 31(4):614-627.
- Stewart, I. (1989). Does God plays dice? the new mathematics of chaos. Penguin, Suffolk, U.K.
- Suykens, J. A. K. e Vandewalle, J. (1995). Learning a simple recurrent neural state space model to behave like Chua's double scroll. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part I*, 42(8):499-502.

- Takens, F. (1980). Detecting strange attractors in turbulence. Em *Dynamical systems and turbulence, Lecture Notes in Mathematics*, n. 898, Springer Verlag, Berlin, Germany.
- Tektronix, Inc. (1992). TDS 520 & 540 digitizing oscilloscopes - User manual. Operation Guide.
- Thompson, J. M. T. e Stewart, H. B. (1993). A tutorial glossary of geometrical dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3(2):223-239.
- Torres, L. A. B. e Aguirre, L. A. (1995a). Montagem e sintonia de um oscilador caótico. Relatório de Pesquisa CPDEE/LCPI/02-95, Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Torres, L. A. B. e Aguirre, L. A. (1995b). PEDINAL – Protótipo para o estudo de dinâmica não-linear. Relatório de Pesquisa CPDEE/LCPI/03-95, Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Wu, S. (1987). Chua's circuit family. *IEEE Proceedings*, 75(8):1022:1032.
- Zervos, C. Bélanger, P. R., Dumont, G. A. (1988). On PID controller tuning using orthonormal series identification. *Automatica*, 24(2):165-175.

## Apêndice A

### A. Glossário sobre Sistemas Dinâmicos Não-Lineares

#### A.1 Introdução

Esse apêndice apresenta uma breve descrição de alguns conceitos da teoria de sistemas dinâmicos não-lineares utilizados na dissertação<sup>1</sup>. No glossário, os termos em **negrito** são descritos em verbetes próprios.

As figuras mostradas nesse apêndice foram gentilmente cedidas por Álvaro V. P. Souza (Souza, 1996).

#### A.2 Glossário

- **Atrator**

Um atrator é a região do espaço de estados para a qual a dinâmica de um sistema dissipativo converge após o término do seu movimento transitório ( $t \rightarrow \infty$ ). O conceito de atrator não pode ser estendido para os sistemas dinâmicos conservativos, pois não é possível haver contração de elementos de hiper-volume no espaço de estados destes sistemas.

A dimensão do atrator deve ser menor que o número de graus de liberdade do sistema original. O único atrator possível para a dinâmica de sistemas lineares autônomos é a origem do seu espaço de estados. Entre os possíveis atratores para sistemas não-lineares, destacam-se os pontos fixos (dimensão 0), os ciclos limite (dimensão 1), os toróides (dimensão 2) e os **fractais** (dimensão não-inteira).

J. P. Eckmann (1981) propôs uma definição formal de atrator. Fiedler-Ferrara e Prado (1994) apresentam uma versão desta definição:

"Uma região compacta  $A$  é um atrator de um fluxo  $\varphi(x,t)$  se as quatro hipóteses a seguir valem ( $x$  é o vetor de estados do sistema que gerou o fluxo):

- $A$  é invariante segundo  $\varphi(x,t)$ :  $\varphi(x,t) \in A$  para todo  $x \in A$  e para todo  $t$ ;
- $A$  tem uma vizinhança contraente:  $\|\varphi(x,t) - \varphi(x',t)\| < \|x - x'\|$  para qualquer  $t$  e para quaisquer  $x \neq x'$  definidos na vizinhança de  $A$ ;

---

<sup>1</sup> Guckenheimer e Holmes (1983) apresentam definições rigorosas dos conceitos descritos.

- (iii) o fluxo é recorrente: trajetórias começando em qualquer subconjunto aberto de  $A$  voltam a esse subconjunto para valores de  $t$  suficientemente longos;
- (iv) o fluxo não pode ser decomposto:  $A$  não pode ser dividida em duas partes invariantes não-triviais".

Observa-se que um atrator é estável no sentido de Lyapunov, pois toda trajetória iniciada em uma vizinhança infinitesimal do atrator tende assintoticamente a ele quando  $t \rightarrow \infty$ .

### • Bacia de Atração

Uma bacia de atração é o lugar geométrico de todas as condições iniciais que levam um sistema dinâmico dissipativo ao mesmo **atrator**. Destaca-se que as bacias de atração de um sistema **caótico** podem estar separadas por uma superfície **fractal** (Thompson e Stewart, 1993).

### • Bifurcação

Uma bifurcação é uma mudança qualitativa na dinâmica de um sistema em decorrência da variação de um parâmetro de bifurcação  $\mu_b$  além de um valor crítico  $\mu_b = \mu_{bc}$ . As bifurcações promovem alterações na estabilidade estrutural de um sistema dinâmico.

As bifurcações de sistemas dinâmicos não-lineares podem ser divididas em duas classes: (i) bifurcações locais; (ii) bifurcações globais.

Os efeitos das bifurcações locais ficam restritos à vizinhança de um ponto ou ciclo no espaço de estados. As bifurcações locais ocorrem quando a parte real de um autovalor de um sistema contínuo apresenta uma mudança de sinal. Em sistemas discretos (mapas), as bifurcações locais ocorrem quando o módulo de um autovalor da dinâmica torna-se maior (ou menor) que um. Essa mudança é gerada pela variação do parâmetro de bifurcação  $\mu_b$  e pode afetar a estabilidade dos pontos fixos do sistema. Assim, estas bifurcações são denominadas locais porque estão associadas à alteração da estabilidade da dinâmica do sistema em torno de um dado ponto fixo (efeito local). As bifurcações locais podem ser subdivididas em supercríticas e subcríticas, de acordo com o sentido de variação do parâmetro de bifurcação  $\mu_b$ .

A bifurcação local do tipo sela-nó ocorre quando um autovalor real do sistema contínuo varia de um valor negativo a outro positivo (ou vice-versa). Após a bifurcação, o sistema possui pontos fixos instáveis (selas) e estáveis (nós). A bifurcação de Hopf, por sua vez, ocorre quando a parte real de um par de autovalores complexos e conjugados passa por zero. Nesse caso, o equilíbrio estável do sistema transforma-se em um ciclo limite estável (ou instável no caso subcrítico). As bifurcações do tipo duplicação de período<sup>2</sup> (ocorre em mapas), Neimark (ocorre em mapas) e forquilha são outros exemplos de bifurcações locais.

---

<sup>2</sup> A bifurcação de duplicação de período é uma rota para o **caos** (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994).

Ao contrário das bifurcações locais, os efeitos das bifurcações globais não ficam restritos a uma região do espaço de estados do sistema. As bifurcações globais provocam alterações abruptas na estrutura das **bacias de atração** do sistema. A intermitência é um fenômeno relacionado com a ocorrência de bifurcações do tipo global. Este fenômeno caracteriza-se pelo chaveamento repentino entre dois regimes dinâmicos distintos: periodicidade e **caos**, por exemplo.

As bifurcações dos sistemas dinâmicos não-lineares ainda podem ser classificadas em<sup>3</sup>: (i) bifurcações contínuas; (ii) bifurcações descontínuas. As bifurcações contínuas geram alterações suaves na dinâmica do sistema. Elas não promovem o chaveamento rápido da dinâmica e nem a expansão repentina do **atrator** do sistema. As bifurcações contínuas englobam as bifurcações locais supercríticas.

Existem dois tipos de bifurcações descontínuas: (i) bifurcações explosivas; (ii) bifurcações perigosas. As bifurcações explosivas são eventos globais que promovem a expansão abrupta e reversível do atrator do sistema afetado. Por sua vez, as bifurcações perigosas podem promover o chaveamento da dinâmica do sistema para atratores remotos. As bifurcações locais subcríticas são exemplos de bifurcações perigosas. Estas bifurcações podem gerar ciclos de histerese quando o atrator original não é imediatamente reestabelecido com a inversão do sentido de variação do parâmetro de bifurcação.

#### • **Caos**

O caos é um regime dinâmico determinístico caracterizado por uma grande sensibilidade às condições iniciais. A dinâmica de um sistema caótico possui direções de instabilidade local no seu espaço de estados. Por esse motivo, minúsculas variações na inicialização da dinâmica do sistema serão amplificadas exponencialmente ao longo de tais direções de instabilidade.

As três condições necessárias para a caracterização de um regime caótico em um sistema dinâmico são (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994):

(i) a existência de **expoentes de Lyapunov**  $\lambda_i$  positivos;

(ii)  $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$ , o que garantirá a contração de hiper-volumes no espaço de estados do sistema;

(iii) a dimensão de um sistema contínuo<sup>4</sup> deve satisfazer a relação:  $n \geq 3$ .

Os expoentes de Lyapunov positivos caracterizam as direções de instabilidade local no espaço de estados de um sistema caótico. Os sistemas dinâmicos que possuem mais de um expoente de Lyapunov positivo são denominados hiper-caóticos.

<sup>3</sup>Esta classificação é válida somente para as bifurcações de codimensão 1 (Thompson e Stewart, 1993). Estas bifurcações ocorrem a partir da variação de um único parâmetro de bifurcação.

<sup>4</sup>Sistema discretos unidimensionais podem apresentar regime dinâmico caótico (vide mapa logístico).



As principais propriedades dos regimes dinâmicos caóticos são (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994):

- (i) *imprevisibilidade*: a sensibilidade à variação das condições iniciais dificulta a predição de comportamento dos sistemas caóticos a longo prazo. Nesse caso, uma pequena imprecisão na avaliação da condição inicial do sistema provoca um grande erro de predição algum tempo depois.
- (ii) *espectro contínuo de frequências*: apenas sinais aperiódicos apresentam um espectro de frequências contínuo. Assim, os sinais caóticos são aperiódicos.
- (iii) *invariância na escala*: essa propriedade indica que a dinâmica de um sistema caótico (no seu espaço de estados) apresenta estrutura semelhante em qualquer grau de detalhamento (propriedade de auto-semelhança).
- (iv) "*caráter estacionário*": embora os sistemas caóticos sejam aperiódicos, os padrões observados *tendem* à repetição.

O **atrator** de um sistema dinâmico caótico é denominado atrator estranho. Os atratores estranhos geralmente apresentam **dimensões de correlação e de Lyapunov** não-inteiras (**fractais**). Entretanto, existem exemplos de atratores caóticos não-fractais e de atratores fractais não-caóticos. Os atratores fractais não-caóticos são caracterizados por estrutura fractal, embora as trajetórias vizinhas sobre ele não diverjam exponencialmente com o tempo (Kapitaniak, 1993).

#### • Diagrama de Bifurcações

O diagrama de bifurcações mostra a dinâmica de um sistema em função de um parâmetro de bifurcação  $\mu_b$ . Este diagrama apresenta de maneira concisa todas as **bifurcações** de comportamento do sistema analisado (dentro da faixa de variação considerada para o parâmetro de bifurcação).

A figura A.1 mostra o diagrama de bifurcações do mapa logístico (May, 1976) em função do parâmetro de bifurcação  $\alpha$ .

A dinâmica do mapa logístico tende a um ponto fixo estável quando  $\alpha < 3$ . A divisão da curva de bifurcação em  $\alpha = 3$  indica uma duplicação do período do sinal de saída (em relação ao período inicial). Esta duplicação de período é gerada por uma bifurcação local do tipo duplicação de período (ou "flip") (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994). O sistema apresenta outras bifurcações de duplicação de período à medida que o valor de  $\alpha$  aumenta até  $\alpha = \alpha_\infty = 3,569\dots$ . A partir deste valor de  $\alpha$ , o sistema apresenta órbitas aperiódicas (representadas pelas faixas difusas no diagrama de bifurcações). Estas órbitas aperiódicas caracterizam regimes dinâmicos complexos como o **caos**, por exemplo (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994). Observa-se ainda a existência de janelas de periodicidade par e ímpar na região  $\alpha_\infty < \alpha < 4$ .

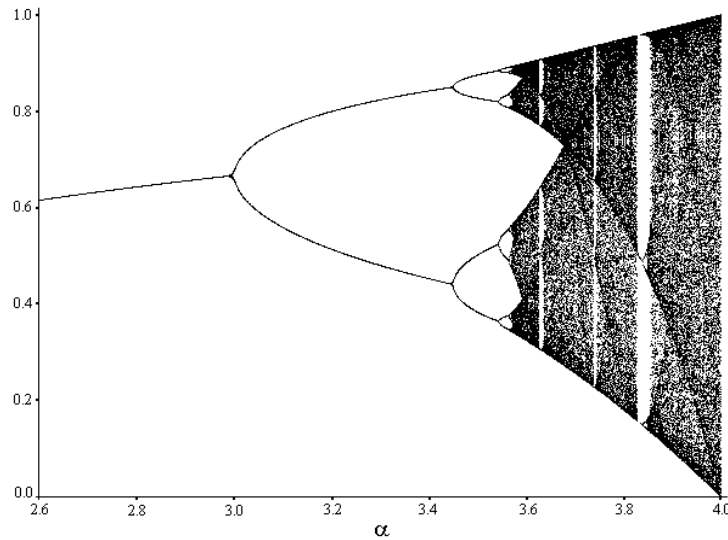


Figura A.1. Diagrama de bifurcações do mapa logístico em função do parâmetro de bifurcação  $\alpha$ .

### • Dimensão de Correlação

A dimensão de correlação é uma medida da dimensão de um **atrator**. A dimensão de correlação está relacionada com o número de equações diferenciais necessárias para caracterizar a dinâmica sobre o dado atrator. Se a dimensão de correlação de um atrator é  $D_C = d + \delta$ , onde  $d$  é inteiro e  $0 \leq \delta \leq 1$ , então o menor número de equações diferenciais necessárias para descrever a dinâmica do sistema original é  $d + 1$ .

O espaço de estados de um sistema dinâmico pode ser reconstruído a partir de uma série temporal  $\{y_t\}_{t=1}^N$ , onde  $y$  é uma variável observável do sistema<sup>5</sup>.  $\mathbf{y}_i$  e  $\mathbf{y}_j$  indicam dois pontos sobre as trajetórias do sistema no espaço de estados reconstruído e  $S_{ij}$  é uma métrica neste espaço:  $S_{ij} = \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|$ . A função de correlação pode ser definida como (Grassberger e Procaccia, 1983):

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\text{número de pares } (\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) \text{ que satisfazem } S_{ij} < \varepsilon), \quad (\text{A.1})$$

onde  $\varepsilon$  é um valor positivo e pequeno.

A dimensão de correlação é definida a partir da função de correlação na fórmula abaixo (Grassberger e Procaccia, 1983):

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\log_e C(\varepsilon)}{\log_e \varepsilon}. \quad (\text{A.2})$$

<sup>5</sup> A seção 2.3 da dissertação analisou a reconstrução de espaços de estados utilizando coordenadas de atraso.

- **Dimensão de Lyapunov**

A dimensão de Lyapunov (ou dimensão de Kaplan-Yorke) é uma outra medida da dimensão do **atrator** de um sistema dinâmico. A dimensão de Lyapunov estabelece uma conexão entre a dimensão **fractal** do atrator e a estabilidade de um sistema dinâmico não-linear (estabilidade medida pelos seus **expoentes de Lyapunov**).

Seja  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  o espectro de expoentes de Lyapunov de um sistema (ordenados de maneira decrescente). Define-se  $j$  como o maior inteiro tal que  $\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0$ . Assim, a dimensão de Lyapunov de um atrator é determinada como (Kaplan e Yorke, 1979):

$$D_L = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}. \quad (\text{A.3})$$

- **Expoentes de Lyapunov**

Os expoentes de Lyapunov medem a taxa de divergência exponencial de trajetórias vizinhas em certas direções do espaço de estados de um sistema dinâmico não-linear. Os expoentes de Lyapunov constituem uma generalização do conceito de autovalores para sistemas não-lineares.

Para entender o significado dos expoentes de Lyapunov, considere um pequeno hiper-volume esférico no espaço de estados de um sistema dinâmico não-linear. A dinâmica do sistema mapeia este pequeno hiper-volume de condições iniciais em uma região hiper-elipsoidal (considerando escalas de tempo suficientemente curtas e escalas de comprimento suficientemente pequenas). Nesse processo, a dinâmica do sistema comprime algumas direções da hiper-esfera e alarga outras direções. Os expoentes de Lyapunov medem a taxa de expansão exponencial dos eixos principais do hiper-volume elipsoidal sob o efeito da dinâmica do sistema. Em termos matemáticos, os expoentes de Lyapunov de um sistema dinâmico não-linear são definidos pela expressão (Moon, 1987):

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \log_e \frac{l_i(t)}{r(0)} \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.4})$$

onde  $n$  é a ordem do sistema,  $r(0)$  é o raio inicial da hiper-esfera de condições iniciais e  $l_i(t)$  é o comprimento do eixo principal  $i$  da região hiper-elipsoidal após um tempo  $t$ .

A existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define direções de instabilidade local na dinâmica do sistema. A soma dos expoentes de Lyapunov de um sistema dissipativo globalmente estável é negativa, embora alguns expoentes possam ser

positivos. Esse fato indica que trajetórias vizinhas no espaço de estados destes sistemas tendem a se aproximar e convergem para o **atrator** do sistema quando  $t \rightarrow \infty$ .

A expressão abaixo apresenta uma fórmula matemática para o cálculo dos expoentes de Lyapunov de um sistema dinâmico não-linear (Moon, 1987):

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \log_e |\alpha_i| \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.5})$$

onde:

- $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  são os autovalores da matriz  $[Df(y_N) Df(y_{N-1}) \cdots Df(y_1)]$ ;
- $Df(y_i) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  é a matriz Jacobiana do sistema avaliada em  $y_i$ ;
- $\{y_i\}_{i=1}^N$  é uma trajetória sobre o atrator do sistema.

Fiedler-Ferrara e Prado (1994) mostram os sinais dos expoentes de Lyapunov de um sistema em função da sua ordem e do seu comportamento dinâmico.

Os expoentes de Lyapunov também podem ser estimados a partir de modelos identificados para representar a dinâmica de um sistema em estudo. Entretanto, a ordem destes modelos é geralmente maior que  $n$  (vide teorema de Takens, seção 2.3). Nessa situação, tais modelos possuirão um número maior de expoentes de Lyapunov que o sistema original. Um subconjunto destes expoentes de Lyapunov estimados reproduzem os expoentes originais. Os expoentes "excedentes" são denominados espúrios e podem ser separados dos expoentes reais através de procedimentos descritos em (Parlitz, 1992).

### • **Fractal**

Um fractal é uma estrutura rica em detalhes em escalas arbitrariamente pequenas. Estas estruturas fractais não podem ser descritas pela geometria euclidiana tradicional. Ainda não existe uma definição matemática formal para o conceito fractal.

As principais propriedades das estruturas fractais são:

- (i) **dimensão de correlação** não-inteira;
- (ii) auto-semelhança;
- (iii) irregularidade local e global.

A propriedade da auto-semelhança indica que um fractal possui estrutura semelhante em qualquer grau de detalhamento. O **diagrama de bifurcações** do mapa logístico (figura A.1) possui uma estrutura fractal. A figura A.2 mostra a ampliação de uma pequena região deste diagrama (dentro da sua janela de periodicidade 3) para apresentar a propriedade da auto-semelhança. Observa-se, na figura, que esta pequena região possui uma estrutura semelhante ao diagrama completo.

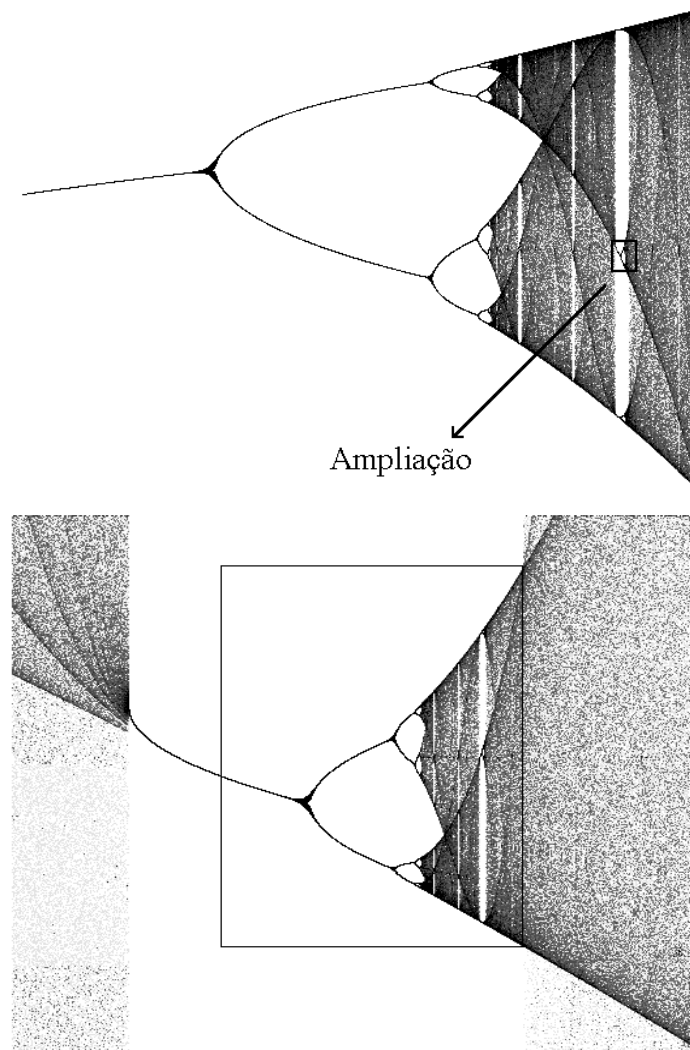


Figura A.2. Ampliação de uma região do diagrama de bifurcações do mapa logístico para demonstrar a propriedade de auto-similaridade das estruturas fractais.

- **Invariantes**

Os invariantes são grandezas utilizadas para caracterizar o comportamento dinâmico de um sistema. O valor numérico destes invariantes não depende do sistema de coordenadas utilizado para representar a dinâmica do sistema (Thompson e Stewart, 1993).

Os invariantes dinâmicos podem ser contínuos ou discretos. Os invariantes contínuos podem assumir quaisquer valores em um dado intervalo de números reais. Os **expoentes de Lyapunov** e a **dimensão de correlação** são exemplos de invariantes dinâmicos contínuos. Por outro lado, os invariantes dinâmicos discretos assumem valores sobre conjuntos finitos (ou enumeráveis). O índice de Poincaré de um ponto fixo (Guckenheimer e Holmes, 1983) é um exemplo de invariante discreto.

### • Mapa de Poincaré

Considere um sistema dinâmico autônomo descrito pela equação de estados:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (\text{A.6})$$

onde  $x \in \mathbf{R}^n$  é o vetor de estados do sistema e  $f$  é uma função vetorial não-linear.  $x_0$  é uma órbita periódica deste sistema. Seja  $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$  uma hiper-superfície de dimensão  $(n-1)$  transversal ao fluxo  $\varphi(x,t)$  gerado por (A.6).  $x'_0$  é o ponto no qual a órbita  $x_0$  intercepta a hiper-superfície  $\Gamma$  e  $U \subseteq \Gamma$  é uma vizinhança de  $x'_0$ . O mapa de Poincaré  $M:U \rightarrow \Gamma$  é definido em um ponto  $x_1 \in U$  como:

$$M(x_1) = \varphi(x_1, \tau(x_1)), \quad (\text{A.7})$$

onde  $\tau$  é o tempo necessário para que a órbita que saiu de  $x_1$  retorne à hiper-superfície  $\Gamma$ .

A hiper-superfície  $\Gamma$  é denominada seção de Poincaré. Logo, o mapa de Poincaré (ou mapa de "primeiro-retorno") é a sequência de pontos onde uma órbita do sistema intercepta a seção de Poincaré. Uma trajetória periódica do sistema corresponde a um ponto fixo do mapa de Poincaré  $M$ . De maneira semelhante, um subharmônico de frequência (frequência original/ $k$ ) corresponde a  $k$  pontos fixos de  $M$ . A figura A.3 ilustra o conceito do mapa de Poincaré para um sistema dinâmico autônomo genérico.

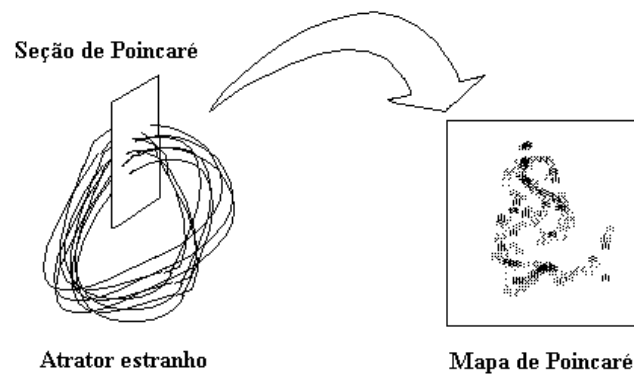


Figura A.3. Procedimento de obtenção do mapa de Poincaré de um sistema dinâmico.

Um sistema dinâmico não-autônomo de dimensão  $n$  pode ser transformado em um sistema autônomo de dimensão  $n+1$ . Nesse procedimento, o tempo  $t$  torna-se uma variável de estado do sistema. Assim, o mapa de Poincaré de um sistema não-autônomo pode ser obtido através da monitoração das interseções do fluxo da sua dinâmica com as hiper-superfícies  $t = iT$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . O valor de  $T$  deve ser ajustado de modo que o mapa de Poincaré gerado reproduza certas propriedades do atrator original (Moon, 1987). Na

obtenção do mapa de Poincaré de sistemas com excitação periódica, é comum ajustar o valor de  $T$  igual ao período do sinal de entrada aplicado.

O mapa de Poincaré é bastante utilizado na análise de sistemas dinâmicos não-lineares, pois ele reproduz algumas propriedades do sistema original em um espaço vetorial de dimensão inferior a  $n$ <sup>6</sup>. A obtenção do mapa de Poincaré de um sistema com dimensão  $n > 3$  pode ser muito complexa. Entretanto, existem artifícios para facilitar a análise da dinâmica destes sistemas utilizando mapas de Poincaré (Aguirre e Billings, 1994a).

O mapa de Poincaré de um sistema dinâmico **caótico** geralmente possui estrutura **fractal**.

- **Repulsor**

Um repulsor é a região do espaço de estados de um sistema dinâmico dissipativo que repele todas as trajetórias iniciadas em sua vizinhança. Assim, um repulsor é uma região instável no sentido de Lyapunov.

Observa-se que os conceitos de repulsor e **atrator** são opostos, pois o atrator concentra todas as trajetórias de estados que nele penetram.

---

<sup>6</sup> O mapa de Poincaré reproduz a estabilidade do sistema original, entre outras propriedades.