

Junia Taíze Santos Roberto Compart

Investigação de Técnicas de Condições de Contorno para Problemas de Eletromagnetismo em Alta-Frequência

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Engenharia de Computação e Telecomunicações
Linha de Pesquisa: Eletromagnetismo Computacional

Orientador: *Prof. Jaime Arturo Ramírez*
Co-orientadora: *Prof. Ana de Oliveira Rodrigues*

Defesa: 2º semestre de 2007

Belo Horizonte
Escola de Engenharia – UFMG
2º semestre de 2007

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um estudo crítico sobre a utilização de condições de contorno absorventes (CCA) para problemas de espalhamento de campos eletromagnéticos em alta-frequência em domínios bidimensionais fechados. Em particular, pretende-se investigar a precisão e a facilidade de implementação de dois conjuntos de métodos; o primeiro, constituído por condições analíticas, entre as quais, Mur, Trefethen e Higdon, o segundo, formado por condições absorventes, com destaque para a técnica de Berenger, ou técnica da camada perfeitamente casada.

Utilizou-se o método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) como técnica numérica para resolver o problema de espalhamento de campos eletromagnéticos e implementação das condições de contorno.

O modelo utilizado para a avaliação dos resultados foi um domínio bidimensional preenchido com ar com 100 células na direção x e 50 células na direção y . A fonte de campo eletromagnético foi representada por uma fonte puntual do tipo “hard”, localizada no centro do domínio.

Para a validação dos resultados do FDTD, utilizou-se a definição de erro relativo que compara a solução numérica com a solução analítica. Para a análise da precisão das CCAs, empregou-se a definição de erro local, observado em pontos do domínio onde espera-se as maiores reflexões, e a definição de erro global, que representa o erro acumulado no domínio ao longo do tempo.

Os resultados obtidos indicam que o erro relativo das CCAs analíticas encontram-se na escala de 10^{-3} e que da CCA absorvente (PML) situa-se na escala de 10^{-5} , sendo portanto, 100 vezes mais preciso. Os erros locais obtidos para as CCAs analíticas foram da ordem de 10^{-2} e para a CCA PML da ordem de 10^{-6} . Para o erro global, as CCAs analíticas apresentaram um erro da ordem de 10^{-4} e a CCA absorvente da ordem de 10^{-5} .

A CCA absorvente apresentou uma maior precisão nos resultados, porém uma maior dificuldade de implementação. Por outro lado, as CCAs analíticas de Mur, Trefethen e Higdon, obtiveram resultados menos precisos, porém satisfatórios, contudo apresentaram uma maior facilidade de implementação.

Abstract

The main purpose is to develop a critical study on the use of absorbing boundary conditions (CCA) for high-frequency electromagnetic scattering problems in bidimensional closed domains. In particular, the investigation is focused in the precision of two sets of CCAs. The first is constituted of analytical conditions, with emphasis in the techniques suggested by Mur, Trefthen and Higdon; the second is composed of absorbing conditions, with emphasis in the method proposed by Berenger, the perfect matching layer (PML).

The finite difference time domain (FDTD) method is the numerical technique used to solve the electromagnetic scattering problem and to implement the boundary conditions.

The model used in the numerical simulations is a bidimensional domain, filled with air, with 100 cells in the x direction and 50 cells in the y direction. The electromagnetic field source was represented by a “hard” source, located in the center of the domain.

The numerical results obtained by the FDTD were validated using the definition of relative error, which compares the numerical result with the analytical solution. The precision of CCAs was investigated using the definition of local error, calculated in points of the domain where the highest reflections are expected; and the definition of global error, that represents the accumulated error in the domain throughout time.

The results indicate that the relative errors of the analytical CCAs are in the order of 10^{-3} whereas in the CCA PML it is in the order of 10^{-5} . The CCA PML is, therefore, 100 times more accurate. The local error obtained for the analytical CCAs are in the order of 10^{-2} whereas the CCA PML is in the order of 10^{-6} . For the global error, the analytical CCAs presented errors in the order of 10^{-4} and the CCA PML in the order of 10^{-5} .

The CCA PML presented a higher precision, but also presented a higher difficulty of implementation. On the other hand, the analytical CCAs of Mur, Trefethen and Higdon showed less accurate results, when compared to the CCA PML, but an easier implementation.

“Se consegui enxergar mais longe é porque estava apoiado sobre ombros de gigantes.”
Isaac Newton

Agradecimentos

Ao Professor Jaime Arturo Ramírez, por sua orientação dedicada e amiga. Não fosse sua paciência e confiança que me fizeram prosseguir, não teria concluído o árduo desafio. Seu entusiasmo pela pesquisa e pelo conhecimento embutiu em mim a busca contínua pelo crescimento profissional e humano.

À Professora Ana de Oliveira Rodrigues, por sua co-orientação com dedicação e paciência, por acreditar e confiar em mim, nessa relação que ultrapassou a de mestre e aluno, tornando-se uma grande amizade.

Aos Professores Cássio Gonçalves do Rego e Márcio Matias Afonso pelas construtivas críticas que muito contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

Aos Professores do PPGEE (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - EEUFMG) e aos amigos do GOPAC (Grupo de Otimização e Projeto Assistido por Computador).

Ao Professor Marco Aurélio de Oliveira Schroeder, meu grande amigo, por ter me mostrado quão belo e magnífico é o caminho da ciência.

À minha amiga Mariana Geny, que no cotidiano soube o verdadeiro significado da amizade. Este trabalho é dela também.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo suporte financeiro ao projeto “Investigação de Técnicas de Condições de Contorno para Problemas de Eletromagnetismo em Alta-Frequência” (projeto n.º. 130097/2006-3).

Aos meus pais, Célio e Neuza, pelo amor e apoio imprescindível nos momentos de dificuldades, pois sempre estão e estarão ao meu lado.

Às minhas irmãs, Marry e Cynthia, pela amizade e companheirismo. Aos meus sobrinhos, símbolos da renovação da humanidade e belos na inocência da infância.

Ao André, pelo carinho e atenção. Seu amor tornou o significado da minha vida mais pleno e a sua presença alegre o meu viver, fazendo de pequenos instantes grandes acontecimentos.

À todos os demais que de alguma forma contribuíram para que eu chegasse até aqui. Faço minhas as palavras de Newton ao dizer que jamais estaria aqui se não tivesse me apoiado em ombros de gigantes.

Sumário

Lista de Abreviações	vii
Lista de Símbolos	viii
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
1.1 Introdução	1
1.2 Objetivos do Trabalho	2
1.2.1 Objetivo Geral	2
1.2.2 Objetivos Específicos	3
1.3 Limitações do Trabalho	4
1.4 Estruturação do Trabalho	5
2 Problemas de Contorno em Eletromagnetismo	6
2.1 Introdução	6
2.2 Definição do Problema	6
2.3 O Método de Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD)	8
2.3.1 Algoritmo de Yee	8
2.3.2 Desenvolvimento Matemático do FDTD	11
2.3.3 Redução do FDTD em 2D para os modos TE_z e TM_z	14
2.3.4 Critérios de Dispersão e Estabilidade Numéricas	17
2.3.5 Condições de Contorno	23
2.4 Revisão da Literatura	24
2.4.1 Condições de Contorno	24
2.5 Conclusão	26
3 Formulação Matemática de Condições de Contorno	28
3.1 Introdução	28
3.2 Condição de Contorno Analítica	28
3.2.1 Condição de Contorno Analítica de Mur	28
3.2.2 Condição de Contorno Analítica de Trefethen	36
3.2.3 Condição de Contorno Analítica de Higdon	37
3.3 Condição de Contorno Absorvente	39
3.3.1 Condição de Contorno Absorvente PML	39
3.4 Conclusão	43

4	Resultados	45
4.1	Introdução	45
4.2	Definição do Problema	45
4.2.1	Erro Relativo	47
4.2.2	Erro Local e Global	47
4.2.3	Condições de Dispersão e Estabilidade	50
4.3	Resultados de Condições de Contorno Analíticas	51
4.3.1	Condição de Contorno Analítica de Mur	51
4.3.2	Condição de Contorno Analítica de Trefethen	56
4.3.3	Condição de Contorno Analítica de Higdon	65
4.4	Resultados de Condições de Contorno Absorventes	74
4.4.1	Condição de Contorno Absorvente PML	74
4.5	Discussão	79
4.5.1	Erro Relativo	79
4.5.2	Erro Local e Global	79
4.5.3	Considerações Finais	80
5	Conclusões	81
5.1	Conclusões	81
5.1.1	Resultados Obtidos e Considerações Finais	81
	Referências Bibliográficas	82
A	Coefficientes de Reflexão e Transmissão	86
A.1	Incidência Normal	86
A.2	Incidência Oblíqua	89
A.2.1	Polarização Perpendicular	89
A.2.2	Polarização Paralela	91

Lista de Abreviações

<i>FDTD</i>	método de diferenças finitas no domínio do tempo (<i>finite-difference time-domain</i>)
<i>FEM</i>	método de elementos finitos (<i>finite element method</i>)
<i>BEM</i>	método de elementos de fronteira (<i>boundary element method</i>)
<i>MoM</i>	método dos momentos (<i>moment method</i>)
<i>EDP</i>	equações diferenciais parciais (<i>differential partial equation</i>)
<i>CCA</i>	condição de contorno absorvente (<i>absorbing boundary conditions</i>)
<i>PML</i>	camada perfeitamente casada (<i>perfectly matched layer</i>)

Lista de Símbolos

\mathbf{E}	vetor campo elétrico	$[V/m]$
\mathbf{H}	vetor campo magnético	$[A/m]$
\mathbf{B}	vetor densidade de fluxo magnético	$[Wb/m^2]$
\mathbf{D}	vetor densidade de fluxo elétrico	$[C/m^2]$
\mathbf{J}_i	densidade de corrente elétrica impressa	$[A/m^2]$
\mathbf{J}_c	densidade de corrente de condução = $\sigma \mathbf{E}$	$[A/m^2]$
\mathbf{M}	densidade de corrente magnética (teórica)	$[V/m^2]$
ε	permissividade elétrica	$[F/m]$
μ	permeabilidade magnética	$[H/m]$
q_{mv}	densidade volumétrica de carga magnética (teórica)	$[Wb/m^3]$
q_{ev}	densidade volumétrica de carga elétrica	$[C/m^3]$
q_{ms}	densidade superficial de carga magnética (teórica)	$[Wb/m^2]$
q_{es}	densidade superficial de carga elétrica	$[C/m^2]$
Δt	passo no tempo	$[s]$
Δx	passo no espaço na direção x	$[m]$
Δy	passo no espaço na direção y	$[m]$
Δz	passo no espaço na direção z	$[m]$
c	velocidade de propagação da onda no vácuo	$[m/s]$
i, j	localização no espaço nas coordenadas x e y	$[-]$
i, j, k	localização no espaço nas coordenadas x, y e z	$[-]$
\equiv	equivalente	$[-]$
\cong	congruente	$[-]$

Lista de Figuras

1.1	Domínio computacional finito	4
2.1	Domínio Computacional [Taflove and Hagness, 2000]	7
2.2	Algoritmo de Yee 3D	9
2.3	Algoritmo de Yee 2D	10
2.4	Algoritmo de Yee 1D	11
2.5	Modo TE_z	15
2.6	Modo TM_z	16
2.7	Representação de um domínio	24
3.1	Domínio físico [Taflove and Hagness, 2000]	29
3.2	PML 3D	40
3.3	Camada PML superior [Berenger, 1996a]	41
3.4	PML 2D	42
3.5	Camada PML [Berenger, 1994]	43
4.1	Domínio proposto	46
4.2	Forma de onda da fonte para o cálculo do erro relativo	46
4.3	Forma de onda da Fonte para o Cálculo do Global e Local	47
4.4	Pontos analisados na solução analítica	48
4.5	Domínio proposto	48
4.6	Linhas de teste	49
4.7	Erro relativo para Mur no ponto $P1$	52
4.8	Erro relativo para Mur no ponto $P2$	52
4.9	Erro relativo para Mur no ponto $P3$	53
4.10	Erro relativo para Mur no ponto $P4$	53
4.11	Erro local para Mur na linha de teste T_x	54
4.12	Erro local para Mur na linha de teste T_y	54
4.13	Erro global para Mur	55
4.14	Coefficiente de reflexão	56
4.15	Erro relativo para Trefethen no ponto $P1$	57
4.16	Erro relativo para Trefethen no ponto $P2$	57
4.17	Erro relativo para Trefethen no ponto $P3$	58
4.18	Erro relativo para Trefethen no ponto $P4$	58
4.19	Erro relativo para Trefethen no ponto $P1$	59
4.20	Erro relativo para Trefethen no ponto $P2$	59
4.21	Erro relativo para Trefethen no ponto $P3$	60
4.22	Erro relativo para Trefethen no ponto $P4$	60
4.23	Erro local para Trefethen na linha de teste T_x	61

4.24	Erro local de referência [Moore et al., 1988]	62
4.25	Erro local para Trefethen na linha de teste Ty	62
4.26	Erro global para Trefethen	63
4.27	Erro global de referência [Moore et al., 1988]	63
4.28	Erro local para Trefethen na linha de teste Tx	64
4.29	Erro local para Trefethen na linha de teste Ty	64
4.30	Erro global para Trefethen	65
4.31	Erro relativo para Higdon no ponto $P1$	66
4.32	Erro relativo para Higdon no ponto $P2$	66
4.33	Erro relativo para Higdon no ponto $P3$	67
4.34	Erro relativo para Higdon no ponto $P4$	67
4.35	Erro relativo para Higdon no ponto $P1$	68
4.36	Erro relativo para Higdon no ponto $P2$	68
4.37	Erro relativo para Higdon no ponto $P3$	69
4.38	Erro relativo para Higdon no ponto $P4$	69
4.39	Erro local para Higdon na linha de teste Tx	70
4.40	Erro local para Higdon na linha de teste Ty	71
4.41	Erro global para Higdon	71
4.42	Erro local para Higdon na linha de teste Tx	72
4.43	Erro local para Higdon na linha de teste Ty	72
4.44	Erro global para Higdon	73
4.45	Erro relativo para PML no ponto $P1$	75
4.46	Erro relativo para PML no ponto $P2$	75
4.47	Erro relativo para PML no ponto $P3$	76
4.48	Erro relativo para PML no ponto $P4$	76
4.49	Erro local para PML na linha de teste Tx	77
4.50	Erro local para PML na linha de teste Ty	78
4.51	Erro global para PML	78
A.1	Incidência normal em uma superfície plana	87
A.2	Representação gráfica de uma incidência normal	87
A.3	Incidência oblíqua e campo com polarização perpendicular	90
A.4	Incidência oblíqua e campo com polarização paralela	92

Lista de Tabelas

3.1	Coeficientes para a CCA de Trefethen de Segunda Ordem	37
3.2	Coeficientes para a CCA de Trefethen de Terceira Ordem	37

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

A grande inovação tecnológica na área da Engenharia, especialmente na Engenharia Elétrica e de Telecomunicações, traz consigo uma necessidade de solução de problemas de eletromagnetismo em alta-freqüência, além de levantar questões relacionadas à precisão e robustez dos resultados obtidos.

Utilizando as equações de Maxwell pode-se unificar campos elétrico e magnético, e o fenômeno das ondas eletromagnéticas representam uma consequência desta unificação. A partir de então, pesquisadores de todo o mundo, especialmente engenheiros e matemáticos, utilizam tais equações para solucionar uma série de problemas em diferentes aplicações.

As primeiras aplicações foram motivadas pelas exigências da defesa militar. Durante a Segunda Guerra Mundial, o estudo do eletromagnetismo era voltado para aplicações militares. O desenvolvimento da tecnologia de radar de microondas, durante esta época, motivou trabalhos essenciais que proporcionaram o aprimoramento tecnológico dos equipamentos de ataque e defesa utilizados [Taflove, 2002], [Taflove and Hagness, 2005].

Atualmente, o campo de estudo do eletromagnetismo está deslocando rapidamente para aplicações comerciais importantes em comunicação de alta velocidade [Taflove, 2002], [Taflove and Hagness, 2005].

O modelamento dos sistemas de engenharia eletromagnética foi implementado primeiramente utilizando técnicas para solução das equações de Maxwell no estado estacionário senoidal. Até 1960, as principais aproximações nesta área envolviam soluções analíticas utilizando séries infinitas e os resultados eram obtidos por meio de calculadoras mecânicas. Após 1960, a disponibilidade crescente de computadores eletrônicos programáveis permitiu que houvesse um crescente desenvolvimento das técnicas numéricas para a solução dos problemas eletromagnéticos [Taflove and Hagness, 2005].

Os problemas de eletromagnetismo envolvem, normalmente, a solução de ondas que se propagam em domínios abertos, ou domínios limitados tais como guias de ondas, linhas de transmissão e cabos coaxiais. Os domínios abertos ou infinitos são representações do espaço livre, ou seja, servem como um modelo simplificado para examinar o comportamento da onda minimizando complexidades matemáticas.

A solução de problemas de espalhamento de campos em alta-freqüência é tema de grande interesse científico e tecnológico devido ao vasto número de aplicações relevantes nas diversas áreas do conhecimento como arqueologia, biomédica, defesa nacional, engenharias, física, geofísica, meteorologia, navegação espacial e marítima, radar e telecomunicações, e em particular projeto de antenas, guias de ondas, etc. Há várias técnicas numéricas

disponíveis para abordar problemas de espalhamento de campos eletromagnéticos, como o método de elementos finitos (FEM), o método de elementos de fronteira (BEM), o método dos momentos (MoM), o método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD), entre outros.

O FDTD, e outras técnicas relacionadas, são procedimentos variantes no tempo que simulam uma propagação de uma onda eletromagnética contínua em uma região espacial finita utilizando de amostras de dados numéricos análogos à propagação em um espaço computacional. Para simulações nas quais a região modelada deve estender ao infinito, condições de contorno absorventes (CCA) são empregadas para truncar as bordas para que estas idealmente permitam que as ondas que incidem na superfície “saíam” da região, sendo a reflexão insignificante, [Taflove and Hagness, 2000].

O FDTD é uma das técnicas computacionais que se destacam atualmente na solução de problemas de espalhamento. O FDTD pode ser utilizado para calcular dinamicamente campos eletromagnéticos, distribuições de temperatura ou outros fenômenos descritos por equações diferenciais parciais (EDPs), e possui grande aplicação em tais áreas, como pode ser exemplificada por Taflove [Taflove and Brodwin, 1975a], [Taflove and Brodwin, 1975b], Mur [Mur, 1981] e Moore [Moore et al., 1988].

Para técnicas numéricas diferenciais, como é o caso do FDTD, por questões de processamento computacional, é imprescindível limitar a região de interesse de investigação do fenômeno físico descritos pelas EDPs a um domínio fechado. Daí a necessidade de impor CCAs apropriadas nos limites do domínio para evitar reflexões espúrias dos campos eletromagnéticos.

No FDTD, o cálculo dos campos é feito de forma alternada no tempo e no espaço, isto é, os campos elétrico (\mathbf{E}) e magnético (\mathbf{H}) são calculados a partir dos valores destes campos em células próximas e em instantes de tempos anteriores. Desta forma, as CCAs são essenciais neste método pois não é possível saber o valor do campo na célula seguinte à da fronteira, o que impossibilita o cálculo nas células da fronteira, conseqüentemente impossibilitando o cálculo em todo o domínio. Em geral, o comportamento do campo ao atingir esta fronteira deve ser tal que simule o espaço livre, impedindo qualquer reflexão de volta para dentro do domínio.

As CCAs para as células da borda em uma simulação no FDTD são necessárias na ordem de prevenir reflexões geradas pelas ondas propagantes em uma escala de ângulos de incidência tão larga quanto possível. O desempenho das primeiras CCAs desenvolvidas piorava se o ângulo de incidência divergia do ângulo de incidência normal, porém os avanços nesta área de estudo proporcionam uma maior precisão nos resultados das CCAs para todos os ângulos, [Kosmas and Rappaport, 2004].

É importante ressaltar, portanto, a necessidade de se ter CCAs apropriadas no FDTD, isto é, que não produzam reflexões espúrias na solução de problemas de espalhamento de campos eletromagnéticos em alta-freqüência em domínios fechados. Este é o contexto desta dissertação.

1.2 Objetivos do Trabalho

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é investigar técnicas de condição de contorno absorvente (CCA) para um programa de cálculo de campo eletromagnético utilizando o FDTD.

As técnicas investigadas são as CCAs analíticas de Mur, Trefethen e Higdon, e a CCA absorvente PML.

Esta investigação abordará questões relacionadas à aplicabilidade do método, à precisão dos resultados, à facilidade de implementação e ao desempenho apresentado, na exposição à irradiação de alta frequência gerada por uma antena.

1.2.2 Objetivos Específicos

Para satisfazer o objetivo geral deste trabalhos, foram traçados alguns objetivos específicos. Com o intuito de melhor exemplificar tais objetivos específicos, primeiramente serão apresentados o conceito das equações de Maxwell e da equação de onda plana, para em seguida definir os objetivos específicos.

Equações de Maxwell

O comportamento dos campos eletromagnéticos em qualquer meio é definido pelas equações de Maxwell apresentadas a seguir.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_c + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_{ev} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = q_{mv} \quad (1.4)$$

nas quais, \mathbf{E} denota o campo elétrico, \mathbf{H} o campo magnético, \mathbf{B} o vetor densidade de fluxo magnético, \mathbf{D} o vetor densidade de fluxo elétrico, \mathbf{J}_i uma possível fonte de densidade de corrente elétrica, \mathbf{J}_c é a densidade de corrente de condução, \mathbf{M} uma possível fonte de densidade de corrente magnética (teórica), ε a permissividade elétrica do material, μ a permeabilidade magnética do material, q_{mv} a densidade volumétrica de carga magnética (teórica) e q_{ev} a densidade volumétrica de carga elétrica.

Completam estas equações as equações constitutivas, dadas a seguir.

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.6)$$

Equação de Onda Plana

Considere a Fig. 1.1 a qual representa esquematicamente um domínio computacional finito, Ω , o qual utilizaremos para exemplificar o problema de espalhamento de campos eletromagnéticos. No interior de Ω , aplica-se um conjunto de Equações Diferenciais Parciais (EDP) descritas por (1.7), as quais representam fisicamente a propagação de ondas nas direções x , y e z .

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

onde u é um componente escalar de campo e c é a velocidade da luz.

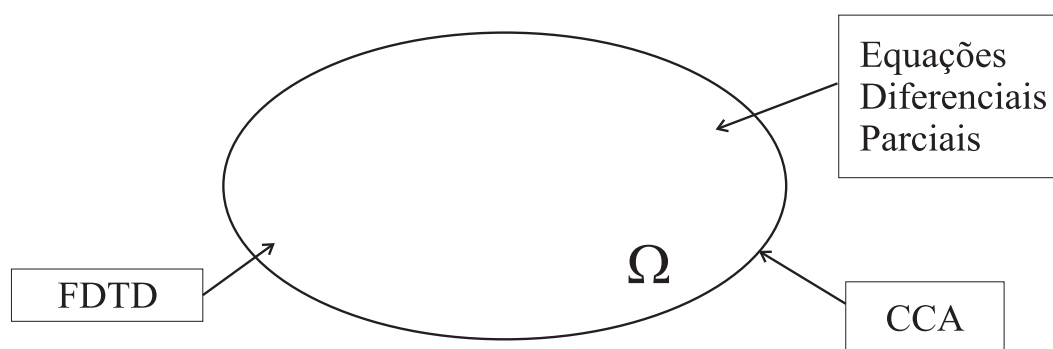


Figura 1.1: Domínio computacional finito

Este trabalho utilizará o método de Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD) para resolver a equação descrita por (1.7).

O domínio Ω apresenta dimensões muito extensas ou praticamente infinitas, portanto, é necessário impor nas bordas de Ω Condições de Contorno Absorventes ou Analíticas (CCA) que evitem reflexões espúrias, permitindo que a solução do FDTD permaneça válida por todos os passos no tempo e no espaço.

Após esta apresentação preliminar das equações de Maxwell e da equação de onda plana, define-se os objetivos específicos que são:

1. Implementar um programa computacional em duas dimensões, utilizando o FDTD para calcular os campos eletromagnéticos a partir das equações de Maxwell (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4).
2. Modelar e implementar a fonte dos campos eletromagnéticos, ou seja, uma antena simples que opere em alta-freqüência, neste trabalho a freqüência utilizada foi $f = 1.8GHz$.
3. Implementar no programa computacional, mencionado no item 1, as CCAs propostas por Mur [Mur, 1981], Trefethen [Trefethen and Halpern, 1986], Higdon [Higdon, 1986], e Berenger [Berenger, 1994].
4. Testar, validar e apresentar um estudo crítico das CCAs mencionadas no item 3 em relação à aplicabilidade do método, à precisão dos resultados, à facilidade de implementação e ao desempenho.

1.3 Limitações do Trabalho

O presente trabalho pretende investigar as condições de contornos absorventes que são impostas em programas de cálculos de campos eletromagnéticos que propagam em domínios abertos gerados por uma antena em alta-freqüência em 2D.

Sendo o domínio em 2D, este trabalho limita-se a modelos computacionais nos quais o problema apresenta simetria infinita no eixo z .

As CCAs abordadas neste trabalho são utilizadas no FDTD, desta forma, o desenvolvimento teórico e matemático de outros métodos numéricos não são apresentados.

Não é objetivo deste trabalho desenvolver modelos detalhados da antena e dos materiais do meio de propagação. Assim, a antena é representada como uma fonte puntual de onda

plana. O modelo do domínio computacional deste trabalho é sempre composto por ar, logo, o meio de propagação será representado pelas características do espaço livre.

1.4 Estruturação do Trabalho

Este trabalho é composto de cinco capítulos dispostos de maneira a facilitar a apresentação dos métodos a serem investigados, a definição do problema e a avaliação dos resultados.

O Capítulo 2 abordará os problemas de contorno em eletromagnetismo, através da apresentação da formulação matemática do FDTD. Em seguida é apresentada a revisão bibliográfica, detalhando o estado da arte neste campo de pesquisa.

O Capítulo 3 detalha o desenvolvimento matemático das CCAs utilizadas neste trabalho. Tais CCAs compreendem duas técnicas distintas, as analíticas e as absorventes. As CCAs analíticas estudadas neste trabalhos são as CCAs de Mur, Trefethen e Higdon. A CCA absorvente utilizada é a CCA PML.

O Capítulo 4 consiste dos resultados obtidos. O problema investigado é composto por um domínio em duas dimensões (2D) composto de 100 células na direção x e 50 células na direção y . O ponto de excitação é uma fonte do tipo *Hard* localizada no centro do domínio de teste. As avaliações dos programas foram realizadas de duas maneiras distintas, primeiramente foram obtidos os erros global e local no domínio computacional, e posteriormente foi obtida a comparação da solução do FDTD com a solução analítica de um problema cuja solução é conhecida.

Finalmente, o Capítulo 5 apresenta as conclusões finais do trabalho e sugere contínuações para o trabalho desenvolvido.

Capítulo 2

Problemas de Contorno em Eletromagnetismo

2.1 Introdução

Este capítulo dedica-se à definição de problemas de contorno em eletromagnetismo, com destaque para a necessidade de se impor condições de contorno apropriadas nas bordas do domínio e ao estudo do método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD).

A apresentação do FDTD é feita utilizando o algoritmo de Yee para as equações de Maxwell. Em seguida, é apresentada a simplificação das equações para um domínio em duas dimensões para os modos TE_z e TM_z . Posteriormente, são discutidos os critérios de dispersão e estabilidade numéricas do FDTD.

Apresenta-se, também, neste capítulo uma breve revisão da literatura sobre as principais técnicas de condições de contorno utilizadas em problemas de espalhamento de campos eletromagnéticos em alta-freqüência em domínios fechados.

2.2 Definição do Problema

Problemas em eletromagnetismo, cujo domínio possui dimensões infinitas, precisam ser representados por um domínio computacional finito Ω , como mostra a Fig. 2.1. Esta limitação do domínio se deve ao fato de ser impossível representar domínios infinitos em simulações computacionais.

Como resultado desta limitação há a necessidade de se ter condições de contorno nas bordas do domínio para a correta resolução do problema, ou seja, deve-se simular corretamente um domínio computacional de extensão infinita. No interior de Ω , é aplicado um esquema numérico que simula a propagação de ondas em todas as direções.

As equações de propagação de ondas que regem este problema são descritas por um conjunto de equações diferenciais parciais (EDP), descritas por (2.1). Esta é a equação de onda escalar em três dimensões na qual $u = u(x, y, z, t)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

Há várias técnicas numéricas disponíveis para abordar problemas de campos eletromagnéticos, por exemplo o método de elementos finitos (FEM), o método de elementos

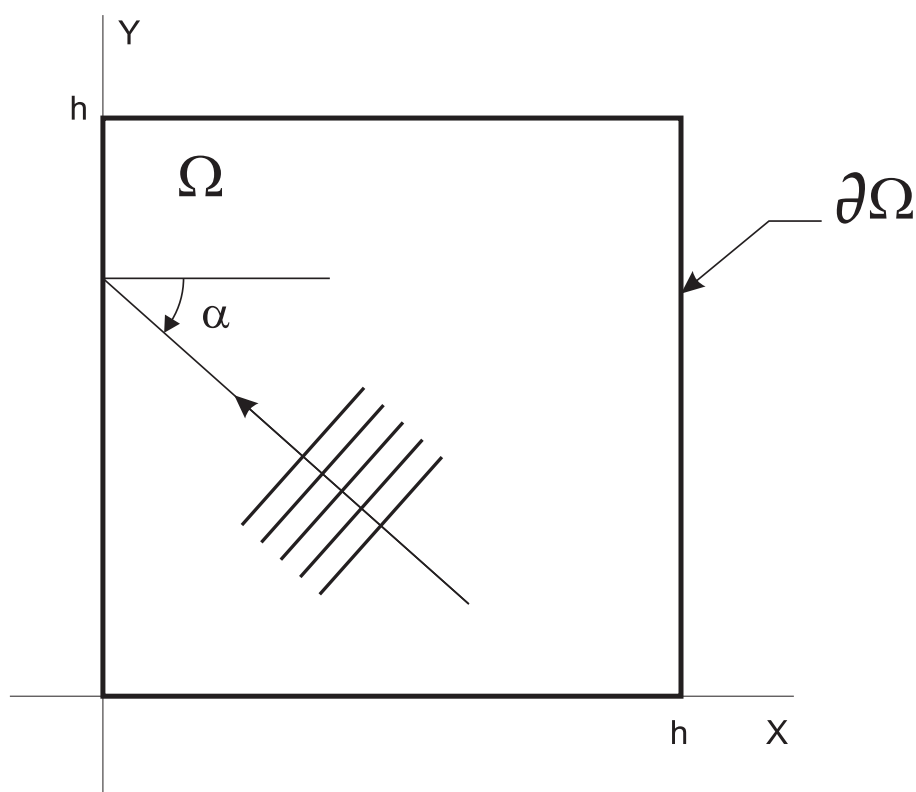


Figura 2.1: Domínio Computacional [Taflove and Hagness, 2000]

de fronteira (BEM), o método dos momentos (MoM), o método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) [Taflove and Hagness, 2000], entre outros.

O FEM é um método matemático, que utiliza uma aproximação discreta para um problema contínuo - o meio contínuo é discretizado (subdividido) em elementos que mantêm as propriedades de quem os originou. Esses elementos são descritos por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos. O FEM consiste em uma aproximação da solução no interior de elementos finitos. Cada elemento possui um pequeno sistema de equações que é um a um inserido num sistema global de equações. Após a inserção de todas as contribuições de cada elemento e da substituição das condições de contorno do problema, o sistema global é resolvido por uma técnica adequada. A solução do sistema global permite a determinação dos valores das incógnitas, os quais podem agora ser utilizados na visualização dos resultados [Balanis, 1982],[Compart, 2005].

O MoM é um método numérico integral que consiste na transformação de uma equação integral em um conjunto de equações algébricas. Este método baseia-se no fato de que uma resposta desconhecida para uma função F pode ser expandida como uma combinação linear de N termos desta função F . Enquanto o problema inverso é freqüentemente intratável, a linearidade do operador F torna a solução numérica possível, ou seja, matematicamente, este método consiste em reduzir uma equação funcional em uma equação matricial por meio de equações não-homogêneas [Balanis, 1982],[Balanis, 1989].

O FDTD vem se destacando na solução de problemas térmicos e eletrodinâmicos. No eletromagnetismo, o método consiste em resolver, diretamente, de forma discretizada, as equações de Maxwell. Assim, o desenvolvimento do FDTD apresenta-se como uma alternativa às extensas deduções necessárias para a solução de problemas eletromagnéticos

envolvendo estruturas complexas.

O FDTD destaca-se entre as demais técnicas por possibilitar a solução de EDPs - derivadas das equações de Maxwell - de forma dinâmica sem a necessidade de manipulação de matrizes, utilizando diferenças finitas para discretizar estas EDPs, resolvendo-as espacialmente no domínio do tempo. Para campos eletromagnéticos especificamente, este método consiste em calcular as componentes de campo elétrico (\mathbf{E}) e magnético (\mathbf{H}) separadamente no tempo e no espaço [Taflove and Hagness, 2005].

Neste processo, a condição de contorno deve suprimir reflexões espúrias que partem da onda numérica para um nível aceitável, permitindo que a solução do FDTD permaneça válida por todos os passos no tempo, especialmente após a onda refletida retornar para a vizinhança da estrutura modulada. Dependendo da formulação utilizada, estas condições de fronteira são chamadas de condições de fronteira de radiação (RBCs) ou condições de contorno absorventes (CCAs).

2.3 O Método de Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD)

O FDTD constitui um método numérico para cálculo de campos eletromagnéticos utilizando equações discretizadas no tempo e no espaço. A base de cálculo são as equações de Maxwell [Taflove and Hagness, 2005].

2.3.1 Algoritmo de Yee

O desenvolvimento da análise de campos eletromagnéticos utilizando o FDTD foi impulsionado pelo surgimento do algoritmo de Yee por meio da apresentação do trabalho pioneiro de Kane S. Yee em 1966 [Yee, 1966]. A novidade apresentada por Yee foi escolher uma relação geométrica para a amostragem das componentes vetoriais dos campos elétrico (\mathbf{E}) e magnético (\mathbf{H}) que representassem com consistência as equações de Maxwell, como mostra a Fig. 2.2. Nesta figura é possível observar a representação gráfica do rotacional dos campos \mathbf{E} e \mathbf{H} na célula clássica de Yee.

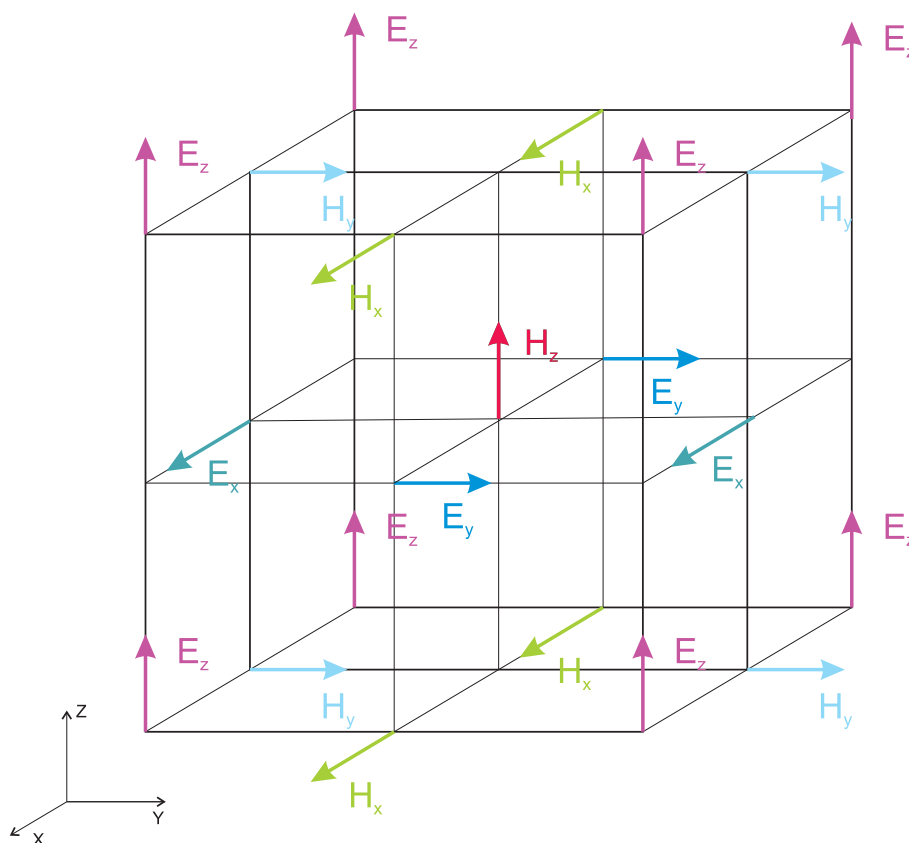


Figura 2.2: Representação gráfica do Algoritmo de Yee para 3D

O algoritmo de Yee resolve os campos \mathbf{E} e \mathbf{H} no tempo e no espaço utilizando as equações rotacionais de Maxwell acopladas, obtendo um desempenho melhor que para os campos \mathbf{E} e \mathbf{H} sozinhos, utilizando a equação de onda. Desta forma, o resultado é mais robusto, ou seja, mais preciso, e as propriedades elétricas e magnéticas dos materiais podem ser modeladas de forma direta.

Como ilustrado na Fig. 2.2, o algoritmo de Yee aloca os campos \mathbf{E} e \mathbf{H} em três dimensões (3D) de maneira que toda componente \mathbf{E} esteja “circulada” por quatro componentes \mathbf{H} , e toda componente \mathbf{H} esteja “circulada” por quatro componentes \mathbf{E} , satisfazendo, portanto, as equações rotacionais de Maxwell.

Baseado nesta característica de análise dos campos, o FDTD foi desenvolvido como um método computacional para solução de problemas de contorno em eletromagnetismo, o qual consiste em calcular as componentes de \mathbf{E} e \mathbf{H} alternadamente no tempo e no espaço. Ou seja, a cada instante de tempo uma representação do domínio na forma do cubo de Yee é calculada utilizando a mesma representação calculada no instante anterior, como exemplificado nas Figs. 2.3 e 2.4.

Devido a sua alta aplicabilidade, o FDTD pode ser utilizado em diferentes áreas, como solução de problemas de espalhamento [Taflove and Brodwin, 1975b], [de Lima, 2006], cálculo de eficiência de antenas, [Adachi, 1995], e cálculo de campo eletromagnético, SAR e aumento de temperatura na cabeça humana [Dimbylow and Mann, 1994], [Furse et al., 1996], [Gandhi et al., 2001], [Rodrigues, 2003], [Watanabe et al., 1996], entre outros.

Em 2000, Taflove publica “Computational Electrodynamics - The Finite-Difference Time-Domain Method” [Taflove and Hagness, 2000], que se torna a referência para uti-

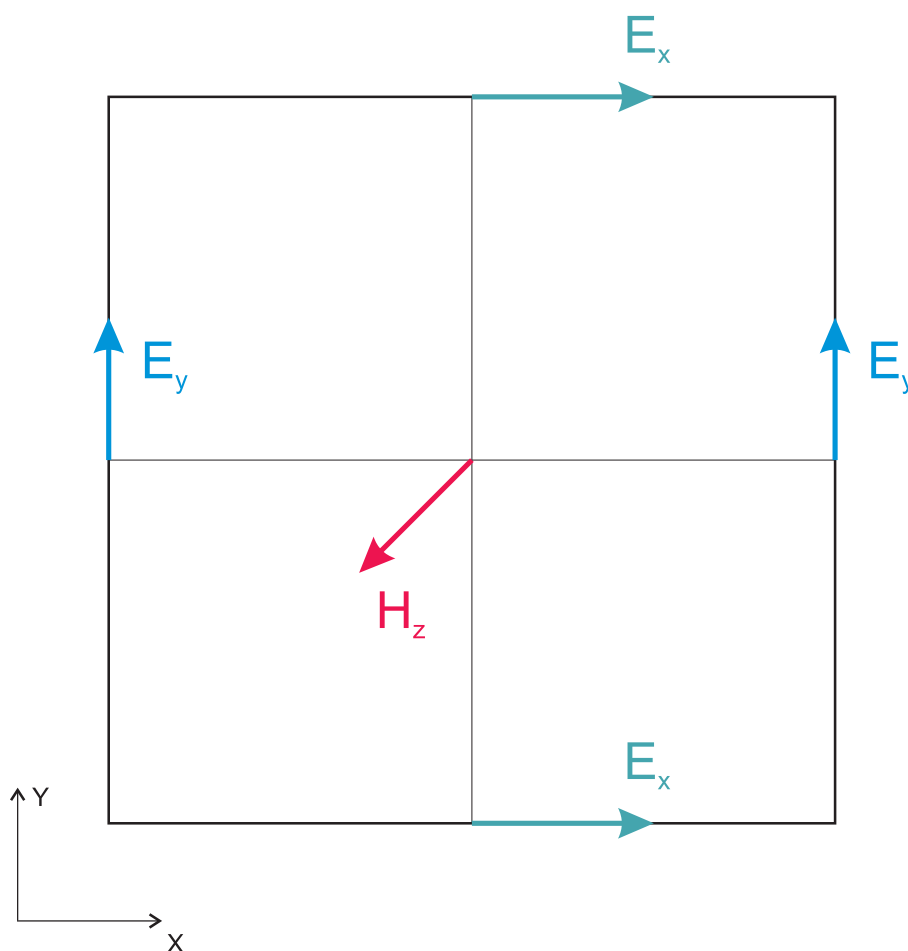


Figura 2.3: Representação gráfica do Algoritmo de Yee para 2D

lização do FDTD. Além de extensa revisão sobre o assunto, o método é apresentado de forma completa e didática.

Indiferente à complexidade do problema composto, a limitação da capacidade de resolver problemas eletromagnéticos do FDTD depende apenas da capacidade computacional disponível. Esta é uma das características mais interessantes do FDTD. Vários trabalhos fazem uma avaliação das vantagens do FDTD em relação a outros métodos. Também são feitas comparações com modelos físicos e medições. Os autores concluem que o FDTD é um método indicado para problemas de alta-frequência em domínios fechados complexos devido as seguintes vantagens:

- No FDTD não é necessário resolver um sistema de equações lineares. Apesar dos avanços consideráveis alcançados nos últimos anos na solução de sistemas de equações de grandes dimensões, o FDTD mostra-se mais simples de ser implementado do que técnicas numéricas que envolvem a solução de sistemas de equações lineares.
- A modelagem de estruturas complexas é razoavelmente simples no FDTD, bastando identificar o material contido em cada cubo do domínio.
- É possível implementar novas estruturas sem a necessidade de re-escrever equações ou refazer malhas. Para incluir uma nova estrutura, basta determinar quais cubos terão os novos materiais no modelo.

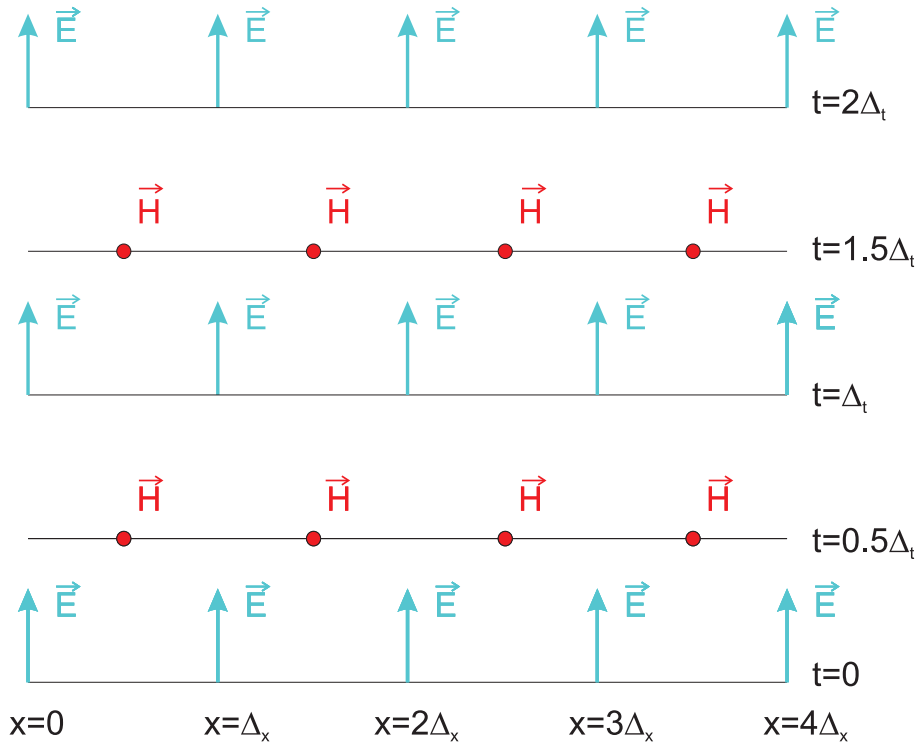


Figura 2.4: Representação gráfica do Algoritmo de Yee para 1D

2.3.2 Desenvolvimento Matemático do FDTD

O FDTD foi desenvolvido a partir das equações de Maxwell descritas pelas equações (2.2) a (2.5) apresentadas abaixo na forma diferencial [Balanis, 1989]:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_c + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{M} - \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = q_{mv} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_{ev} \quad (2.5)$$

onde \mathbf{E} é definido como intensidade de campo elétrico (V/m); \mathbf{H} intensidade de campo magnético (A/m); \mathbf{B} o vetor densidade de fluxo magnético (Wb/m^2); \mathbf{D} o vetor densidade de fluxo elétrico (C/m^2); \mathbf{J}_i uma possível fonte de densidade de corrente elétrica; \mathbf{J}_c densidade de corrente de condução (A/m^2); \mathbf{M} uma possível fonte de densidade de corrente magnética (teórica) (V/m^2); ε é a permissividade elétrica do meio (F/m); μ é a permeabilidade magnética do meio (H/m); q_{mv} a densidade volumétrica de carga magnética teórica e q_{ev} a densidade volumétrica de carga elétrica.

A Fig. 2.2 apresenta uma representação gráfica do rotacional dos campos \mathbf{E} e \mathbf{H} na célula clássica de Yee. É possível observar claramente que esta é uma interpretação geométrica das equações Eq. (2.2) e Eq. (2.3), uma vez que a circulação dos componentes de campo elétrico geram a componente de campo magnético, e vice-versa.

No presente trabalho, não consideraremos correntes ou cargas magnéticas, portanto, \mathbf{M} e q_{mv} são iguais a zero. Assim, reescrevemos (2.2) a (2.5) como:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = q_{mv} \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_{ev} \quad (2.9)$$

Considerando que os materiais são lineares, isotrópicos e não dispersivos, obtém-se:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad (2.12)$$

na qual ε é a permissividade elétrica do meio (F/m), μ é a permeabilidade magnética do meio (H/m) e σ é a condutividade elétrica do meio (S/m).

Embora o FDTD não inclua as equações (2.8) e (2.9) diretamente em sua formulação, é possível mostrar que estas estão incluídas em (2.6) e (2.7) quando $q_{ev} = 0$ (domínio sem acúmulo de carga) [Taflove and Hagness, 2000]. Se q_{ev} for diferente de zero, são necessárias modificações na formulação, porém estas modificações não se fazem necessárias neste trabalho. As fontes são incluídas por meio do termo J_i .

Para o desenvolvimento das equações do FDTD, utiliza-se a seguinte notação:

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) \quad (2.13)$$

$$u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = u_{i,j,k}^n \quad (2.14)$$

Utilizando-se diferenças finitas centrais em (2.14), obtém-se:

$$\frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial x} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} = \frac{u_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2] \quad (2.16)$$

na qual Δt é o passo no tempo, e Δx , Δy e Δz são os passos no espaço nas direções x, y e z, respectivamente, $O[(\Delta x)^2]$ e $O[(\Delta t)^2]$ são termos de ordem superior.

A partir de (2.6) e (2.7), e utilizando-se as definições de rotacional em coordenadas cartesianas, temos:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x - J_{ix} \right) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y - J_{iy} \right) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - J_{iz} \right) \quad (2.22)$$

Substituindo (2.10) a (2.12) em (2.6) e (2.7), obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{J}_i + \sigma \mathbf{E}) \quad (2.24)$$

As equações (2.17) e (2.20) podem ser reescritas em um ponto (i, j, k) nas coordenadas cartesianas como:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu_{i,j,k}} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_{i,j,k}} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_{i,j,k} E_z - J_{iz} \right) \quad (2.26)$$

Por similaridade, pode-se obter a representação de H_x , H_y , E_x e E_y .

Utilizando (2.13) a (2.16), pode-se reescrever as equações (2.25) e (2.26) em termos de diferenças finitas. Para exemplificar, detalharemos a componente E_z , deduzida a partir de (2.22).

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_{i,j,k}} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_{i,j,k} E_z - J_{iz} \right) \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_z|_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - E_z|_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= \frac{1}{\varepsilon_{i,j,k}} \left[\frac{H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - H_y|_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta x} - \frac{H_x|_{i,j+\frac{1}{2},k}^n - H_x|_{i,j-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. - \sigma_{i,j,k} E_z|_{i,j,k}^n - J_{iz}|_{i,j,k}^n \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Para eliminar o termo $E_z|_{i,j,k}^n$ da equação, utiliza-se a aproximação semi-implícita dada por:

$$E_z|_{i,j,k}^n = \frac{E_z|_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + E_z|_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \quad (2.29)$$

Assim, é possível reescrever (2.28) como:

$$\begin{aligned} \frac{E_z|_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - E_z|_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= \frac{1}{\varepsilon_{i,j,k}} \left[\frac{H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - H_y|_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta x} - \frac{H_x|_{i,j+\frac{1}{2},k}^n - H_x|_{i,j-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. - \sigma_{i,j,k} \frac{E_z|_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + E_z|_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{2} - J_{iz}|_{i,j,k}^n \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Organizando os termos em função da componente desejada, $E_z|_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}}$, a equação (2.31) mostra a forma final da componente. As outras componentes são análogas e podem ser facilmente deduzidas utilizando-se a mesma metodologia.

A Eq. (2.32) mostra a forma final da componente H_z para o FDTD.

$$E_z|_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) E_z|_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - H_y|_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta x} + \\ -\frac{H_x|_{i,j+\frac{1}{2},k}^n - H_x|_{i,j-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y} + \\ -J_{i_z}|_{i,j,k}^n \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

$$H_z|_{i,j,k}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) H_z|_{i,j,k}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{E_y|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} - E_y|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \\ -\frac{E_x|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - E_x|_{i,j-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y} + \\ -J_{i_z}|_{i,j,k}^n \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Assumindo um meio sem fontes ($\mathbf{J}_i = 0$), as eqs.(2.33) e (2.34) representam a forma final das componentes E_z e H_z para o FDTD, respectivamente.

$$E_z|_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) E_z|_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}} + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - H_y|_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta x} + \\ -\frac{H_x|_{i,j+\frac{1}{2},k}^n - H_x|_{i,j-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

$$H_z|_{i,j,k}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) H_z|_{i,j,k}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{E_y|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} - E_y|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \\ -\frac{E_x|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - E_x|_{i,j-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

As equações (2.31) e (2.32) ilustram as potencialidades do FDTD para a solução das equações de Maxwell, i.e. (i) trata diretamente com as componentes de campo sem a necessidade de variáveis auxiliares, (ii) possibilita a solução com discretização espacial e temporal e (iii) não necessita da inversão de sistemas matriciais.

2.3.3 Redução do FDTD em 2D para os modos TE_z e TM_z

As equações de diferenças finitas em 3D podem ser reduzidas aos algoritmos apropriados em duas dimensões (2D) dos casos TE_z e TM_z .

Assume-se que a estrutura modelada estende para o infinito na direção z . Se a onda incidente também é uniforme na direção z , então a derivada parcial dos campos com respeito a z serão iguais a 0. Desta forma, as equações (2.17) a (2.22) reduzem para:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \sigma E_x - J_{ix} \right) \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y - J_{iy} \right) \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - J_{iz} \right) \quad (2.40)$$

Para reduzir corretamente as equações do FDTD em 3D para 2D nos modos TE_z ou TM_z as seguintes condições devem ser atendidas:

1. O conjunto das componentes (H_z, E_x, E_y) localizadas em cada corte do plano z são designadas como pertencentes ao modo TE_z , conforme a Fig. 2.5.
2. O conjunto das componentes (E_z, H_x, H_y) localizadas em cada corte do plano z são designadas como pertencentes ao modo TM_z , conforme a Fig. 2.6.
3. Os modos TE_z e TM_z são completamente desacoplados um do outro.

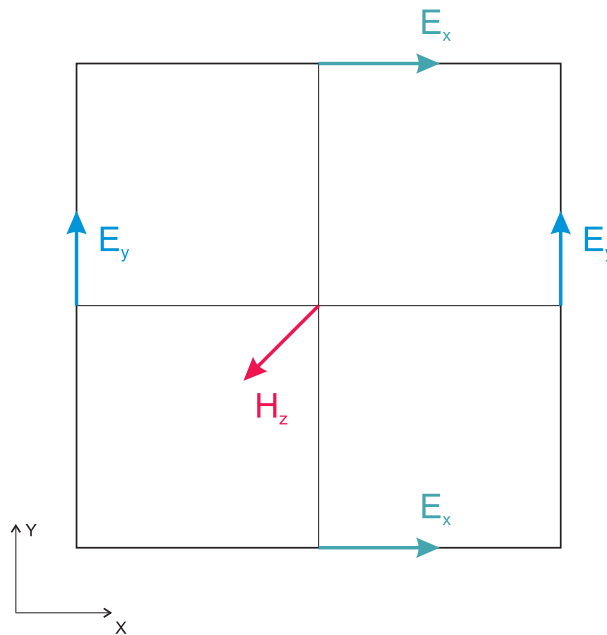
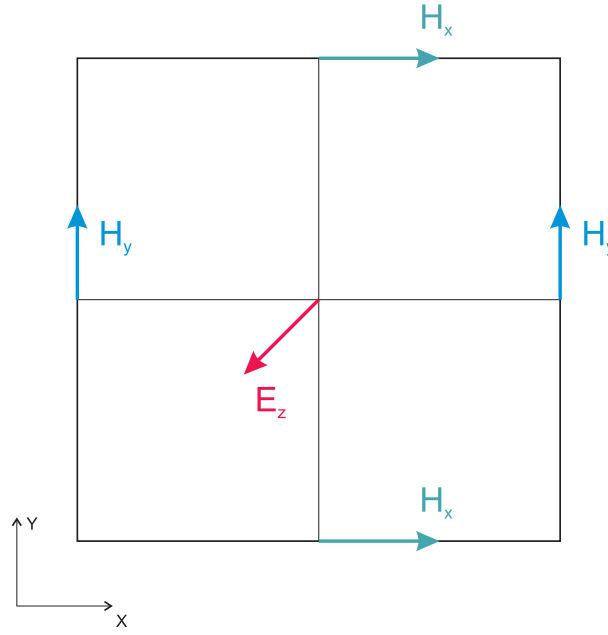


Figura 2.5: Representação do modo TE_z

Figura 2.6: Representação do modo TM_z **Modo TE_z**

O modo TE_z é composto por linhas do campo \mathbf{E} em um plano infinitamente perpendicular ao eixo z do domínio. Considerando o grupo de equações (2.35) a (2.40), pode-se designar que o *modo transversal elétrico na direção z* TE_z em 2D é descrito pelas equações:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \sigma E_x - J_{i_x} \right) \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y - J_{i_y} \right) \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (2.43)$$

Ao aplicar o esquema de diferenças finitas nas equações (2.41), (2.42) e (2.43) tem-se:

$$E_x|_{i,j}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}} \right) E_x|_{i,j}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}} \right) \cdot \left(\frac{H_z|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - H_z|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right) \quad (2.44)$$

$$E_y|_{i,j}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}} \right) E_y|_{i,j}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}} \right) \cdot \left(\frac{H_z|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_z|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \quad (2.45)$$

$$H_z|_{i,j}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}} \right) H_z|_{i,j}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}} \right) \cdot \left(\frac{E_y|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - E_y|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{E_x|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - E_x|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right) \quad (2.46)$$

O conjunto das equações (2.44), (2.45) e (2.46) representam as equações de diferenças finitas para o modo TE_z .

Modo TM_z

Diferentemente do modo TE_z , o modo TM_z é composto por linhas do campo \mathbf{E} em um plano infinitamente paralelo ao eixo z do domínio. Considerando o grupo de equações (2.35) a (2.40), pode-se designar que o *modo transverso magnético na direção z* TM_z em 2D é descrito pelas equações:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - J_{iz} \right) \quad (2.49)$$

Ao aplicar o esquema de diferenças finitas nas equações (2.47), (2.48) e (2.49) tem-se:

$$H_x|_{i,j}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}} \right) H_x|_{i,j}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}} \right) \cdot \left(\frac{E_z|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - E_z|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right) \quad (2.50)$$

$$H_y|_{i,j}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}} \right) H_y|_{i,j}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}} \right) \cdot \left(\frac{E_z|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - E_z|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \quad (2.51)$$

$$E_z|_{i,j}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}} \right) E_z|_{i,j}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j}}} \right) \cdot \left(\frac{H_y|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - H_y|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{H_x|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_x|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right) \quad (2.52)$$

As equações de diferenças finitas para o modo TM_z são representadas pelas equações (2.50), (2.51) e (2.52).

Neste trabalho, serão usadas as equações do modo TE_z .

2.3.4 Critérios de Dispersão e Estabilidade Numéricas

A seguir serão apresentados os conceitos de dispersão numérica e estabilidade numérica. Também são apresentadas as considerações específicas para o caso estudado.

Dispersão Numérica

Dispersão numérica é definida como a variação do comprimento de onda λ com a frequência f . Por conveniência, a dispersão numérica é em geral representada como a variação no número de onda $k = 2\pi/\lambda$ em relação à frequência angular $\omega = 2\pi f$.

As equações de Maxwell (2.6) e (2.7) em coordenadas cartesianas para o modo bidimensional TE_z , admitindo um meio sem fontes, são dadas por:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (2.55)$$

Para simplificar este problema, assume-se que o modelamento espacial do FDTD é preenchido por materiais homogêneos sem variação de μ ou ε com a posição do *grid*. Então, as expressões de diferenças finitas para as equações (2.53), (2.54) e (2.55) são:

$$\frac{E_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} - E_x|_{i,j+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon_{i,j+1/2}} \frac{H_z|_{i,j+1}^n - H_z|_{i,j}^n}{\Delta y} \quad (2.56)$$

$$\frac{E_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - E_y|_{i+1/2,j}^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon_{i+1/2,j}} \frac{H_z|_{i+1,j}^n - H_z|_{i,j}^n}{\Delta x} \quad (2.57)$$

$$\frac{H_z|_{i,j}^{n+1} - H_z|_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_{i,j}} \left(\frac{E_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - E_y|_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{E_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} - E_x|_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \quad (2.58)$$

O procedimento básico para a análise de dispersão numérica envolve a substituição da onda plana e monocromática, na solução do sistema de diferenças finitas de (2.56), (2.57) e (2.58). Fazendo-se uma manipulação algébrica, a equação é obtida em relação ao número de onda, da frequência da onda, do passo no tempo e do incremento espacial no *grid*. Esta equação, a relação de dispersão numérica, pode ser resolvida por uma variedade de discretizações do *grid*, número de onda e frequência da onda para ilustrar o resultado associado ao modelamento não físico com dispersão numérica.

Inicializando este procedimento, assume-se a seguinte onda plana, monocromática, para solução do modo TM_z :

$$H_z|_{I,J}^n = H_{z0} e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{\kappa}_x I \Delta x - \tilde{\kappa}_y J \Delta y)} \quad (2.59)$$

$$E_x|_{I,J}^n = E_{x0} e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{\kappa}_x I \Delta x - \tilde{\kappa}_y J \Delta y)} \quad (2.60)$$

$$E_y|_{I,J}^n = E_{y0} e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{\kappa}_x I \Delta x - \tilde{\kappa}_y J \Delta y)} \quad (2.61)$$

na qual, $\tilde{\kappa}_x$ e $\tilde{\kappa}_y$ são os componentes x e y do número de onda e ω é a frequência angular. Substituindo as equações (2.59), (2.60) e (2.61) nas equações (2.56), (2.57) e (2.58), obtém-se:

$$E_{x0} e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{\kappa}_x I \Delta x - \tilde{\kappa}_y J \Delta y)} \cdot \left[e^{j\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)} - e^{-j\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)} \right] \cdot \frac{e^{j\left(\frac{\tilde{\kappa}_y \Delta y}{2}\right)}}{\Delta t} =$$

$$\frac{1}{\mu\Delta y} \cdot H_{z_0} e^{j(\omega n\Delta t - \tilde{\kappa}_x I\Delta x - \tilde{\kappa}_y J\Delta y)} \cdot \left[e^{j(\tilde{\kappa}_y \Delta y)} - 1 \right] \quad (2.62)$$

$$E_{y_0} e^{j(\omega n\Delta t - \tilde{\kappa}_x I\Delta x - \tilde{\kappa}_y J\Delta y)} \cdot \left[e^{j\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)} - e^{-j\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)} \right] \cdot \frac{e^{j\left(\frac{\tilde{\kappa}_x \Delta x}{2}\right)}}{\Delta t} =$$

$$\frac{1}{\mu\Delta x} \cdot H_{z_0} e^{j(\omega n\Delta t - \tilde{\kappa}_x I\Delta x - \tilde{\kappa}_y J\Delta y)} \cdot \left[e^{j(\tilde{\kappa}_x \Delta x)} - 1 \right] \quad (2.63)$$

$$H_{z_0} e^{j(\omega n\Delta t - \tilde{\kappa}_x I\Delta x - \tilde{\kappa}_y J\Delta y)} \cdot \frac{(e^{\omega\Delta t} - 1)}{\Delta t} =$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot E_{x_0} e^{j(\omega n\Delta t - \tilde{\kappa}_x I\Delta x - \tilde{\kappa}_y J\Delta y)} \cdot \left[e^{j\left(\frac{\tilde{\kappa}_y \Delta y}{2}\right)} - e^{-j\left(\frac{\tilde{\kappa}_y \Delta y}{2}\right)} \right] \cdot \frac{e^{j\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}}{\Delta t} -$$

$$\frac{1}{\varepsilon} E_{y_0} e^{j(\omega n\Delta t - \tilde{\kappa}_x I\Delta x - \tilde{\kappa}_y J\Delta y)} \cdot \left[e^{j\left(\frac{\tilde{\kappa}_x \Delta x}{2}\right)} - e^{-j\left(\frac{\tilde{\kappa}_x \Delta x}{2}\right)} \right] \cdot \frac{e^{j\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}}{\Delta t} \quad (2.64)$$

Após fazer as devidas manipulações algébricas em (2.62), (2.63) e (2.64), chega-se nas seguintes relações:

$$E_{x_0} = \frac{\Delta t H_{z_0}}{\mu\Delta y} \cdot \frac{\sin(\tilde{\kappa}_y \Delta y/2)}{\sin(\omega\Delta t/2)} \quad (2.65)$$

$$E_{y_0} = -\frac{\Delta t H_{z_0}}{\mu\Delta x} \cdot \frac{\sin(\tilde{\kappa}_x \Delta x/2)}{\sin(\omega\Delta t/2)} \quad (2.66)$$

$$H_{z_0} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{E_{x_0}}{\Delta y} \sin\left(\frac{\tilde{\kappa}_y \Delta y}{2}\right) - \frac{E_{y_0}}{\Delta x} \sin\left(\frac{\tilde{\kappa}_x \Delta x}{2}\right) \right] \quad (2.67)$$

Substituindo E_{x_0} de (2.65) e E_{y_0} de (2.66) em (2.67), obtém-se:

$$H_{z_0} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{\Delta t}{\varepsilon} \cdot \left[\frac{\frac{\Delta t H_{z_0}}{\mu\Delta y} \cdot \frac{\sin(\tilde{\kappa}_y \Delta y/2)}{\sin(\omega\Delta t/2)}}{\Delta y} \sin\left(\frac{\tilde{\kappa}_y \Delta y}{2}\right) - \frac{-\frac{\Delta t H_{z_0}}{\mu\Delta x} \cdot \frac{\sin(\tilde{\kappa}_x \Delta x/2)}{\sin(\omega\Delta t/2)}}{\Delta x} \sin\left(\frac{\tilde{\kappa}_x \Delta x}{2}\right) \right] \quad (2.68)$$

$$H_{z_0} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{\Delta t^2 H_{z_0}}{\varepsilon\mu} \cdot \left[\frac{1}{\Delta y^2} \cdot \frac{\sin(\tilde{\kappa}_y \Delta y/2)}{\sin(\omega\Delta t/2)} \cdot \sin\left(\frac{\tilde{\kappa}_y \Delta y}{2}\right) + \frac{1}{\Delta x^2} \cdot \frac{\sin(\tilde{\kappa}_x \Delta x/2)}{\sin(\omega\Delta t/2)} \cdot \sin\left(\frac{\tilde{\kappa}_x \Delta x}{2}\right) \right] \quad (2.69)$$

$$H_{z_0} \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{\Delta t^2 H_{z_0}}{\varepsilon\mu} \left[\frac{1}{\Delta y^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\tilde{\kappa}_y \Delta y}{2}\right) + \frac{1}{\Delta x^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\tilde{\kappa}_x \Delta x}{2}\right) \right] \quad (2.70)$$

$$\frac{\varepsilon\mu}{\Delta t^2 H_{z_0}} H_{z_0} \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \left[\frac{1}{\Delta y^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\tilde{\kappa}_y\Delta y}{2}\right) + \frac{1}{\Delta x^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\tilde{\kappa}_x\Delta x}{2}\right) \right] \quad (2.71)$$

Simplificando o H_{z_0} e fazendo a velocidade da luz $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$, tem-se:

$$\left[\frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x} \sin\left(\frac{\tilde{\kappa}_x\Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta y} \sin\left(\frac{\tilde{\kappa}_y\Delta y}{2}\right) \right]^2 \quad (2.72)$$

Por definição $\sin(\alpha) \simeq \alpha$, se $\alpha \rightarrow 0$. Assumindo $\Delta x = \Delta y$ e com valores bem pequenos, tem-se:

$$\left(\frac{\omega\Delta t}{2c\Delta t}\right)^2 = \left(\frac{\tilde{\kappa}_x\Delta x}{2\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\kappa}_y\Delta y}{2\Delta y}\right)^2 \quad (2.73)$$

Simplificando todos os termos repetidos e extraindo a raiz quadrada dos dois lados, encontra-se:

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \tilde{\kappa}_x^2 + \tilde{\kappa}_y^2 \quad (2.74)$$

Após a dedução da dispersão numérica, definem-se três casos com os seguintes resultados:

- Malha com alto refinamento ($\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$): à medida que o passo no tempo e a discretização da malha tendem para zero, a solução tende para a solução exata.
- Passo de tempo mágico ($c\Delta x = \Delta t$): novamente, a solução numérica é exata.
- Solução geral: à medida que escolhe-se relações diferentes de $\Delta x/\Delta t$, obtém-se diferentes erros na velocidade de propagação da onda (dispersão). Para $\Delta x = \lambda_0/10$, onde λ_0 é o comprimento de onda no vácuo, este erro na velocidade de propagação é de 1,27%, com um erro de fase de $45,72^\circ$. Para $\Delta x = \lambda_0/20$, o erro na velocidade de propagação é reduzido para -0,31%, com conseqüente erro de fase de $11,20^\circ$. Ou seja, para uma redução pela metade no Δx , o erro é reduzido em aproximadamente 4 vezes. Estas soluções demonstram a necessidade de malhas refinadas para reduzir o erro de dispersão numérica.

Estabilidade Numérica

A questão da estabilidade numérica é de grande importância. Garantir a estabilidade numérica evita que os resultados calculados cresçam de forma descontrolada à medida que os cálculos são feitos. Esta possibilidade está presente nos métodos de solução de equações utilizando diferenças finitas explícitas, como o FDTD [Taflove and Hagness, 2000]. Para evitar esta instabilidade, o passo no tempo Δt deve ser mantido dentro de um certo limite, definido pela escolha dos incrementos espaciais (Δx , Δy e Δz).

Considere uma onda senoidal viajante em uma malha bidimensional do FDTD e amostrada discretamente em (x_I, y_J, t_n) , e considerando também a possibilidade de uma frequência angular complexa, $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{re} + j\tilde{\omega}_{im}$.

O vetor de campo desta onda pode ser escrito como:

$$\mathbf{V} |_{I,J}^n = V_0 e^{j[(\tilde{\omega}_{re} + j\tilde{\omega}_{im})n\Delta t - \tilde{\kappa}_x I \Delta x - \tilde{\kappa}_y J \Delta y]} \quad (2.75)$$

$$\mathbf{V} |_{I,J}^n = V_0 e^{-\tilde{\omega}_{im}n\Delta t} e^{j(\tilde{\omega}_{re}n\Delta t - \tilde{\kappa}_x I \Delta x - \tilde{\kappa}_y J \Delta y)} \quad (2.76)$$

Nota-se que (2.75) admite três possibilidades, uma amplitude da onda constante com o tempo $\tilde{\omega}_{im} = 0$, uma amplitude decrescendo exponencialmente com o tempo $\tilde{\omega}_{im} > 0$ ou uma amplitude aumentando exponencialmente com o tempo $\tilde{\omega}_{im} < 0$.

A partir deste conceito, analisa-se a relação de dispersão numérica, equação (2.77), para um valor de frequência angular complexa:

$$\left[\frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left[\frac{1}{c\Delta x} \sin\left(\frac{\tilde{\kappa}_x\Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{1}{c\Delta y} \sin\left(\frac{\tilde{\kappa}_y\Delta y}{2}\right) \right]^2 \quad (2.77)$$

Isolando a frequência angular $\tilde{\omega}$, encontra-se:

$$\tilde{\omega} = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1}(\xi) \quad (2.78)$$

na qual

$$\xi = c\Delta t \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{\kappa}_x\Delta x}{2}\right) + \frac{1}{(\Delta y)^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{\kappa}_y\Delta y}{2}\right)} \quad (2.79)$$

Pode-se observar, a partir de (2.79), que:

$$0 \leq \xi \leq c\Delta t \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}} \equiv \xi_{\text{limite superior}} \quad (2.80)$$

para todo valor real possível de $\tilde{\kappa}$, que significa uma onda com atenuação exponencial igual a zero por célula do *grid*, $\xi_{\text{limite superior}}$ é obtido quando cada termo de \sin^2 dentro da raiz quadrada de (2.79) simultaneamente resulta o valor 1. Isto ocorre para a onda numérica propagada com os seguintes números de onda:

$$\tilde{\kappa}_x = \pm \frac{\pi}{\Delta x} \quad (2.81)$$

$$\tilde{\kappa}_y = \pm \frac{\pi}{\Delta y} \quad (2.82)$$

Dependendo do valor de Δt escolhido, $\xi_{\text{limitesuperior}}$ pode exceder 1, resultando em um valor complexo de $\sin^{-1}(\xi)$ em (2.78), e por esta razão os valores complexos de $\tilde{\kappa}$ elevam as instabilidade numérica. Dessa forma, faz-se necessário o estudo da região instável.

Região Instável: $1 < \xi < \xi_{\text{limite superior}}$

Esta região existe apenas se:

$$\xi_{\text{limite superior}} = c\Delta t \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}} > 1 \quad (2.83)$$

A região instável é definida de uma maneira equivalente por:

$$\Delta t > \frac{1}{c\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}}} \equiv \Delta t_{\text{ls3D}} \quad (2.84)$$

Para provar a alegação de instabilidade para a região $\xi > 1$, aplica-se ao valor complexo de $\sin^{-1}(\xi)$ a seguinte função:

$$\sin^{-1}(\xi) = -j \ln \left(j\xi + \sqrt{1 - \xi^2} \right) \quad (2.85)$$

Substituindo (2.85) em (2.78) e resolvendo para $\tilde{\omega}$, obtém-se:

$$\tilde{\omega} = \frac{-j^2}{\Delta t} \ln \left(j\xi + \sqrt{1 - \xi^2} \right) \quad (2.86)$$

Fatorando $j = e^{+j\frac{\pi}{2}}$ no argumento do logaritmo natural, resulta em:

$$\tilde{\omega} = \frac{-j^2}{\Delta t} \ln \left[\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) e^{+j\frac{\pi}{2}} \right] \quad (2.87)$$

$$\tilde{\omega} = \frac{-j^2}{\Delta t} \left[\ln \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) + j\frac{\pi}{2} \right] \quad (2.88)$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi}{\Delta t} - \frac{j^2}{\Delta t} \ln \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \quad (2.89)$$

Finalmente, a parte real e a parte imaginária podem ser separadas.

$$\tilde{\omega}_{re} = \frac{\pi}{\Delta t} \quad (2.90)$$

$$\tilde{\omega}_{im} = -\frac{2}{\Delta t} \ln \left(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1} \right) \quad (2.91)$$

Agora, substituindo (2.90) e (2.91) em (2.75), obtém-se:

$$\mathbf{V} |_{I,J}^n = V_0 e^{2n \ln \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} e^{j \left[\left(\frac{\pi}{\Delta t} \right) (n\Delta t) - \tilde{\kappa}_x I \Delta x - \tilde{\kappa}_y J \Delta y \right]} \quad (2.92)$$

$$\mathbf{V} |_{I,J}^n = V_0 \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)^{**2n} e^{j \left[\left(\frac{\pi}{\Delta t} \right) (n\Delta t) - \tilde{\kappa}_x I \Delta x - \tilde{\kappa}_y J \Delta y \right]} \quad (2.93)$$

na qual $**2n$ denota o fator de potência de 2. A partir de (2.93) é definido o fator de crescimento de onda que amplifica a onda numérica a cada passo no tempo como:

$$q \equiv \left(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1} \right)^2 \quad (2.94)$$

Em [Taflove and Hagness, 2000] é detalhado como a escolha do incremento espacial Δx e de tempo Δt podem afetar a velocidade de propagação na aproximação unidimensional da equação da onda e, portanto, do erro numérico.

É definido que Δt deve ser limitado de forma a evitar que os resultados aumentem sem limites a medida que o tempo progride. Após avaliar as características do problema de média no tempo, do problema da média no espaço e de como forçar a estabilidade, por meio da solução dos problemas de auto-valor no tempo e no espaço, é possível mostrar que a condição indispensável e suficiente para a estabilidade é a adoção do chamado *passo de tempo mágico*, onde a escolha dos incrementos espaciais Δx e Δy resultam na definição do valor máximo do passo no tempo Δt . Por ser uma dedução extensa e estar detalhada na referência [Taflove and Hagness, 2000], esta não será repetida aqui. O resultado obtido para o Δt máximo encontra-se em (2.95):

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}}} \quad (2.95)$$

onde c é a velocidade de propagação da onda no meio em questão.

Observa-se que adotando-se a velocidade da luz no vácuo como sendo o valor de c , estaremos adotando o pior caso. Nos possíveis materiais que compõem o modelo, a velocidade de propagação da onda será sempre menor do que no vácuo, de forma que o Δt poderia ser maior.

Além de garantir os critérios de dispersão e estabilidade numéricas, é necessário impedir que fatores externos influenciem a precisão e a robustez dos cálculos no FDTD. A aplicação de CCAs garante um nível de reflexão baixo e tolerável, cujo valor não interfere significativamente no resultado final da solução do problema.

2.3.5 Condições de Contorno

As CCAs são essenciais no FDTD pois não é possível saber qual o valor de campo na célula seguinte à da fronteira, o que impossibilitaria o cálculo em todas as células da fronteira. Geralmente, o comportamento do campo ao atingir esta fronteira deve ser tal que simule o espaço livre, impedindo qualquer reflexão de volta para dentro do domínio.

Para calcular o valor de campo nas células da fronteira foram desenvolvidos vários conjuntos de equações. O presente estudo utilizará dois deles:

- CCA Analíticas, como as propostas por Mur [Mur, 1981], podem ser obtidas utilizando a equação de onda de sentido único mostrada na Eq. (2.96), proposta por [Engquist and Majda, 1977], em termos da derivada parcial. Essa onda absorve os efeitos das ondas espalhadas ao ser aplicada na fronteira externa de uma malha de FDTD; e
- CCA Absorventes, como exemplo a camada perfeitamente casada (Perfectly Matched Layer Absorbing Boundary Conditions - PML), propostas por Berenger [Berenger, 1994], podem ser definidas como uma camada absorvente colocada nas bordas do domínio, a qual absorve toda onda que chega até a fronteira.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.96)$$

onde u é um campo escalar e c é a velocidade da luz no vácuo.

2.4 Revisão da Literatura

Nesta seção será feita uma revisão bibliográfica do método FDTD e suas principais CCAs. Serão discutidas brevemente diversas CCAs que indicam o avanço da pesquisa nesta área, as quais são apresentadas em ordem cronológica.

2.4.1 Condições de Contorno

As condições de contorno absorventes (CCA) são um conjunto de equações que relacionam os valores de campo na fronteira artificial com aqueles no domínio de estudo, representadas esquematicamente na Figura 2.7.

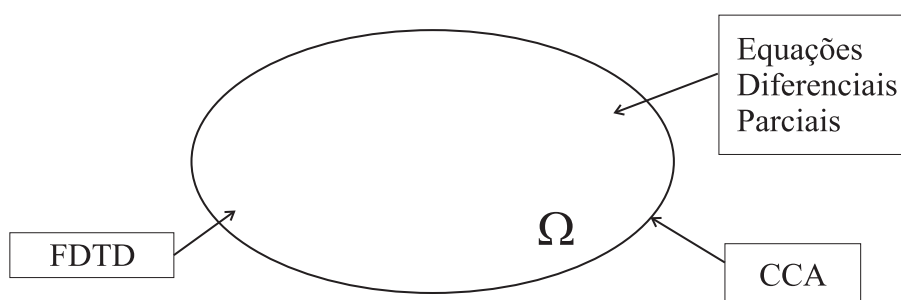


Figura 2.7: Representação simplificada de um domínio

As CCAs simulam uma quantidade infinita de espaço livre além dos limites do domínio, permitindo que haja a menor reflexão possível nas fronteiras.

Ao resolver problemas de interação de ondas eletromagnéticas, muitas geometrias de interesse são definidas em regiões “abertas” onde o domínio espacial do campo computado é ilimitado em um ou mais sentidos de coordenadas.

Claramente, no computador não pode haver uma ilimitada quantidade de dados, e conseqüentemente, o domínio do campo computado deve ser limitado em tamanho. O domínio computacional deve ser grande o bastante para incluir a estrutura de interesse, e uma condição de contorno apropriada deve ser usada nas bordas para simular a extensão para o infinito.

Bayliss - Turkel

Bayliss e Turkel, [Bayliss and Turkel, 1980], [A. Bayliss and Turkel, 1982], propuseram a teoria e a aplicação do operador diferencial. Este estudo representa uma das maiores realizações da teoria das CCAs entre as décadas de 70 e 80. Este operador constitui uma classe de CCA baseada na expansão externa da solução da equação de propagação de ondas, (2.96), em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas. A idéia básica é construir uma soma de três derivadas parciais do campo:

- Uma derivada parcial espacial na direção de propagação da onda;
- Uma derivada parcial espacial na direção transversa à direção de propagação da onda;
- Uma derivada parcial temporal.

Construído corretamente, este operador diferencial sistematicamente cancela uma onda arbitrária, deixando um termo restante que representa um erro residual do processo. O conhecimento do campo na direção de propagação da onda permite que a zona de simulação seja fechada com um baixo nível de reflexão.

Embora o operador Bayliss-Turkel possa ser adaptado para fornecer CCA para malhas cartesianas do FDTD em duas ou três dimensões, esta é uma adaptação forçada. A malha de fronteira externa no espaço cartesiano não é tão grande quanto a distância radial fixada ao centro da malha, e as aproximações de diferenças finitas são necessárias na derivada espacial azimutal no tempo completamente dentro do espaço computacional. Aqui, a melhor aproximação é definir um sistema de coordenada local na fronteira externa que segue o plano natural da malha. Este será o próximo grupo de CCAs a serem consideradas.

Engquist - Majda

A partir da eq. (2.96) e da teoria da equação de onda de sentido único, Engquist e Majda, [Engquist and Majda, 1977], propuseram CCAs apropriadas para malhas cartesianas no FDTD. Estas CCAs apresentam um nível de reflexão suficientemente baixo para as simulações no FDTD.

Mur

A partir de Engquist - Majda, em 1981 Mur, [Mur, 1981], discute detalhadamente a necessidade de condições de contorno eficientes, até então limitadas à média dos valores próximos ou médias baseadas em soluções analíticas. A maior limitação apresentada por estes métodos era a alta reflexão observada quando o ângulo de incidência não era perpendicular à fronteira.

Desta forma, Mur propôs uma CCA derivada de Engquist - Majda que diminui a reflexão de campos com os diversos ângulos de incidência.

Os cuidados necessários para evitar erros e instabilidade utilizando a nova CCA proposta incluem:

1. afastar a fonte da CCA: quanto mais distante das bordas do domínio, menor será a reflexão observada. Entretanto, é desejável que o domínio de estudo seja o menor possível. Uma distância padrão que garante reflexão da ordem de 1% seria afastar a fonte um mínimo de meio comprimento de onda ou um mínimo de 5 células, o que for maior.
2. utilizar “aproximação de 2a. ordem”: a formulação das condições de contorno de Mur permite utilizar aproximações com variações de primeira e segunda ordens. As deduções destas formulações serão detalhadas posteriormente.

Em [Taflove and Hagness, 2000] são apresentados resultados obtidos com esta CCA que são bem próximos da solução analítica. Estas CCAs são usadas pela grande maioria dos trabalhos com FDTD por sua simplicidade de implementação e boa precisão.

Trefethen

Trefethen e Halpern, [Trefethen and Halpern, 1986], [Halpern and Trefethen, 1986], propuseram maneiras para melhorar a exatidão das CCAs derivadas da equação de onda de sentido único. A idéia básica é utilizar a série de Taylor para encontrar uma aproximação adequada e acrescentar esta aproximação nas equações de Enquist - Majda.

Higdon

Similar ao método de Bayliss - Turkel, a técnica de Higdon, [Higdon, 1986], [Higdon, 1987], envolve a construção de séries de operadores diferenciais lineares para anular as ondas externas ao domínio. Contudo, o operador de Higdon absorve ondas planas propagando a ângulos específicos em uma malha cartesiana.

PML

Em 1994, Berenger [Berenger, 1994] sugere uma nova abordagem para as CCAs. Esta nova condição de contorno absorvente, chamada de camada perfeitamente casada (*perfectly matched layer - PML*), implementa a idéia de uma borda absorvente ao redor do domínio, citada por Taflove em 1975 [Taflove and Brodwin, 1975a].

Esta idéia não foi implementada na época por requerer um alto custo computacional. As equações da PML para 2D são detalhadas, e é sugerido que estas substituam as condições utilizadas até então, que apresentam grande reflexão quando a onda propaga em direções diferentes da perpendicular à fronteira.

A PML consiste em separar as componentes do campo elétrico e magnético e adotar valores adequados de σ e σ^* em cada direção de forma a evitar reflexões nas camadas exteriores ao domínio. São apresentados resultados numéricos que comprovam a independência do ângulo de incidência na absorção da onda. Também são apresentados valores de reflexão uma ordem de grandeza menor do que os obtidos anteriormente.

Em relação aos resultados obtidos com a condição de contorno de segunda ordem de Mur [Mur, 1981], por exemplo, o campo refletido total é 400 vezes menor e a média do campo refletido no domínio é 100.000 vezes menor. Os resultados apresentados são consistentes e esta técnica define o atual estado da arte das condições de contorno para FDTD. Entretanto, sua implementação em 3D implica em um aumento considerável do custo computacional necessário e da complexidade de implementação.

Avaliações posteriores mostram que a condição de contorno de Mur [Mur, 1981] em 3D tende à instabilidade a longo prazo [Yusheng, 1996]. Este efeito é causado pela aproximação por expressões de diferenças centrais. É demonstrado que aumentar a distância entre a fonte e a borda do domínio melhora o desempenho do método, mas não elimina a instabilidade a longo prazo.

Apesar das limitações das CCA de Mur apresentadas por [Yusheng, 1996] e das vantagens de se implementar a PML apresentadas por [Taflove and Hagness, 2000], a diferença nos resultados entre implementar as CCA de Mur ou a PML é de menos de 1% se a distância da fonte à fronteira for suficientemente grande [Nikita et al., 2000].

2.5 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada a definição de problemas de contorno em eletromagnetismo, com ênfase para a necessidade de se impor condições de contorno apropriadas nas bordas

do domínio para evitar reflexões espúrias.

Em seguida, foram detalhadas as equações do FDTD para a solução de problemas de contorno em eletromagnetismo. Posteriormente, foi feita uma revisão bibliográfica do método e das principais CCAs estudadas.

A escolha do FDTD neste trabalho foi motivada pelas vantagens em relação a outros métodos comumente utilizados. Tais vantagens incluem a facilidade de implementação e a não necessidade de inversão de matrizes. Porém sua principal desvantagem está na capacidade de processamento do computador utilizado. Para problemas com geometrias simples, como o que será estudado neste trabalho, o FDTD é indicado, pois a aplicação do método é mais específica e requer menos esforço computacional.

No próximo capítulo serão apresentadas as equações das CCA de Mur, Trefethen, Higdon e PML, utilizadas para limitar o domínio computacional do FDTD para a solução de problemas de contorno em eletromagnetismo. Também será detalhada a formulação matemática correspondente a cada CCA.

Capítulo 3

Formulação Matemática de Condições de Contorno

3.1 Introdução

Este capítulo dedica-se a apresentação da formulação matemática de dois conjuntos de condições de contorno absorvente (CCA), as quais podem ser aplicadas para a solução de problemas de espalhamento de campos eletromagnéticos usando o método de diferenças finitas no domínio do tempo descrito no capítulo anterior.

O primeiro conjunto de condições de contorno refere-se a condições analíticas, as quais são deduzidas a partir da equação de onda e tem como princípio definir uma equação específica na borda do domínio para cancelar a onda incidente. São apresentadas as CCAs de Mur, Trefethen e Higdon.

O segundo conjunto de condições de contorno refere-se a condições absorventes, as quais tem como princípio implementar uma camada de material absorvente ao redor do domínio que absorve as ondas incidentes. Uma das CCA absorvente mais estudadas é a CCA *perfectly matched layer* (PML).

3.2 Condição de Contorno Analítica

O princípio da CCAs analíticas consiste em definir equações específicas nas bordas para cancelar a onda incidente. Isso é detalhado a seguir.

3.2.1 Condição de Contorno Analítica de Mur

Considere a equação de onda escalar em três dimensões (3D) representada pela equação (3.1), sendo $u = u(x, y, z, t)$.

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

a qual representa um fenômeno físico no interior do domínio definido a seguir.

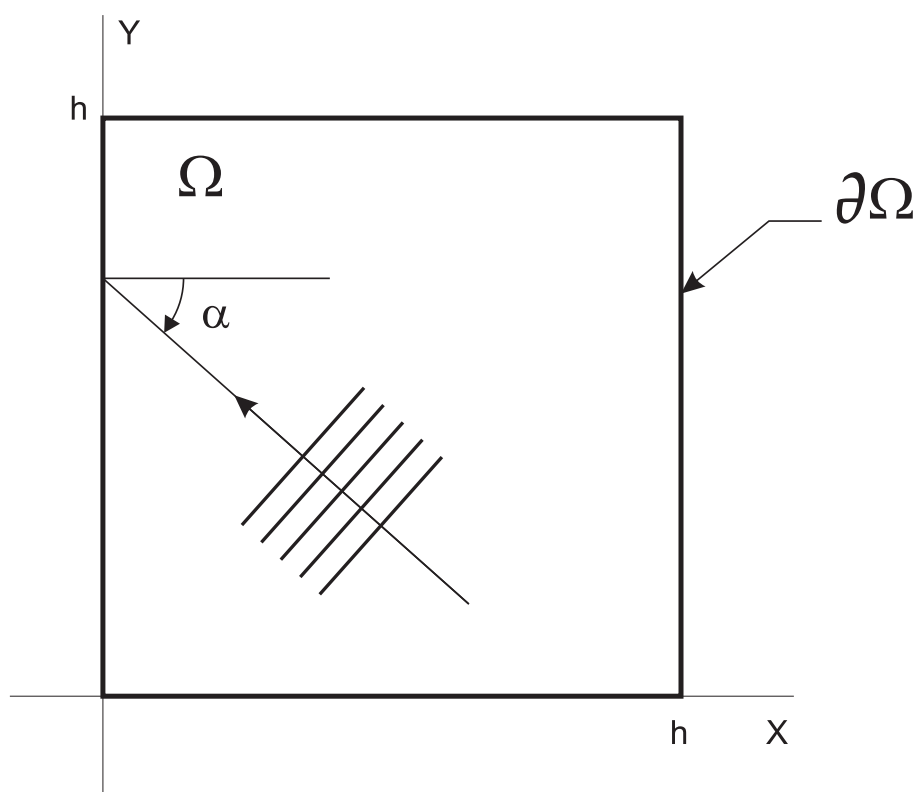


Figura 3.1: Representação de um domínio físico [Taflove and Hagness, 2000]

Enquist e Majda

A equação de onda de sentido único proposta por Enquist e Majda, [Engquist and Majda, 1977], quando aplicada na fronteira externa de uma malha de FDTD absorve os efeitos das ondas espalhadas.

Esta teoria pode ser explicada nos termos da fatoração do operador de derivada parcial. Para a equação de onda em três dimensões em coordenadas cartesianas (3.1), tem-se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2)$$

na qual, u é um campo escalar e c é a velocidade de fase. Pode-se definir o operador de derivada parcial como:

$$G \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

$$G \equiv D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 - \frac{1}{c^2} D_t^2 \quad (3.4)$$

A equação de onda pode então ser escrita compactamente e fatorada da seguinte forma:

$$Gu = 0 \quad (3.5)$$

$$Gu = G^+ G^- u = 0 \quad (3.6)$$

na qual G^- é definido como:

$$G^- = D_x - \frac{D_t}{c^2} \sqrt{1 - S^2} \quad (3.7)$$

Considerando o segundo termo da série de Taylor, a aproximação para a raiz quadrada é:

$$\sqrt{1 - S^2} \cong 1 - \frac{1}{2} S^2 \quad (3.8)$$

Para obter absorção exata na fronteira $x = 0$, S é dado por:

$$S = \sqrt{\left(\frac{D_y}{D_t/c}\right)^2 + \left(\frac{D_z}{D_t/c}\right)^2} \quad (3.9)$$

Substituindo (3.8) em (3.7), obtém-se:

$$G^- \cong D_x - \frac{D_t}{c} \left(1 - \frac{1}{2} S^2\right) \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} &\cong D_x - \frac{D_t}{c} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{D_y}{D_t/c}\right)^2 + \left(\frac{D_z}{D_t/c}\right)^2}\right)^2\right] \\ &\cong D_x - \frac{D_t}{c} + \frac{cD_y^2}{2D_t} + \frac{cD_z^2}{2D_t} \end{aligned} \quad (3.11)$$

ou seja:

$$\left(D_x - \frac{D_t}{c^2} + \frac{cD_y^2}{2D_t} + \frac{cD_z^2}{2D_t}\right) u = 0 \quad (3.12)$$

Multiplicando a equação (3.12) por D_t e identificando o operador diferencial, as derivadas parciais desejadas para $x = 0$ são:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.13)$$

Analogamente à equação (3.13), pode-se encontrar as derivadas parciais respectivas às outras fronteiras do domínio.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \longrightarrow x = X_{max} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \longrightarrow y = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \longrightarrow y = Y_{max} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \longrightarrow z = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \longrightarrow z = Z_{max} \quad (3.18)$$

Para a simulação das equações de Maxwell no FDTD a equação (3.13), e as equações respectivas para as outras fronteiras, que são obtidas por similaridade, são aplicadas individualmente para as componentes cartesianas de \mathbf{E} e \mathbf{H} , localizadas nas fronteiras externas do domínio.

Mur

As condições de contorno propostas por Mur [Mur, 1981] consistem em utilizar equações específicas para fazer o cálculo na fronteira do domínio.

Mur introduziu um esquema simples e bem sucedido de diferenças finitas para as CCAs das equações (3.13) a (3.18), detalhado a seguir.

Seja $u|_{0,j,k}^{n+1}$ a representação cartesiana de \mathbf{E} e \mathbf{H} localizadas no cubo de Yee em $x = 0$ e tangencial à esta fronteira.

Mur implementou as derivadas parciais de (3.13) como diferenças numéricas centrais expandida sobre uma malha auxiliar $(1/2, j, k)$.

No primeiro passo, a derivada em relação a x e t é escrita como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{1/2,j,k}^n = \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{1/2,j,k}^{n+1} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{1/2,j,k}^{n-1} \right) \quad (3.19)$$

$$= \frac{1}{2\Delta t} \left[\left(\frac{u|_{1,j,k}^{n+1} - u|_{0,j,k}^{n+1}}{\Delta x} \right) - \left(\frac{u|_{1,j,k}^{n-1} - u|_{0,j,k}^{n-1}}{\Delta x} \right) \right] \quad (3.20)$$

No próximo passo, a derivada segunda em relação ao tempo é escrita como a média das derivadas segundas no tempo nos pontos $(0, j, k)$ e $(1, j, k)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{1/2,j,k}^n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{0,j,k}^n + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{1,j,k}^n \right) \quad (3.21)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{u|_{0,j,k}^{n+1} - 2u|_{0,j,k}^n + u|_{0,j,k}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \right] + \left[\frac{u|_{1,j,k}^{n+1} - 2u|_{1,j,k}^n + u|_{1,j,k}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \right] \right\} \quad (3.22)$$

Em seguida, a derivada segunda em relação à y é escrita como a média das derivadas segundas em y nos pontos $(0, j, k)$ e $(1, j, k)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{1/2,j,k}^n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{0,j,k}^n + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{1,j,k}^n \right) \quad (3.23)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{u|_{0,j+1,k}^n - 2u|_{0,j,k}^n + u|_{0,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} \right] + \left[\frac{u|_{1,j+1,k}^n - 2u|_{1,j,k}^n + u|_{1,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} \right] \right\} \quad (3.24)$$

E para finalizar, a derivada segunda em relação à z é escrita como a média das derivadas segundas em z nos pontos $(0, j, k)$ e $(1, j, k)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{1/2,j,k}^n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{0,j,k}^n + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{1,j,k}^n \right) \quad (3.25)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{u|_{0,j,k+1}^n - 2u|_{0,j,k}^n + u|_{0,j,k-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] + \left[\frac{u|_{1,j,k+1}^n - 2u|_{1,j,k}^n + u|_{1,j,k-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] \right\} \quad (3.26)$$

Substituindo as expressões de diferenças finitas de (3.20), (3.22), (3.24) e (3.26) em (3.13), e então resolvendo para $u|_{0,j,k}^{n+1}$, obtém-se a seguinte expressão com o passo no tempo ao longo da fronteira $x = 0$.

$$\begin{aligned}
u|_{0,j,k}^{n+1} &= -u|_{1,j,k}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u|_{1,j,k}^{n+1} + u|_{0,j,k}^{n-1}) \\
&+ \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u|_{0,j,k}^n + u|_{1,j,k}^n) \\
&+ \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta y)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u|_{0,j+1,k}^n & -2u|_{0,j,k}^n & +u|_{0,j-1,k}^n \\ +u|_{1,j+1,k}^n & -2u|_{1,j,k}^n & +u|_{1,j-1,k}^n \end{pmatrix} \\
&+ \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta z)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u|_{0,j,k+1}^n & -2u|_{0,j,k}^n & +u|_{0,j,k-1}^n \\ +u|_{1,j,k+1}^n & -2u|_{1,j,k}^n & +u|_{1,j,k-1}^n \end{pmatrix} \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Para as outras fronteiras, $x = max$, $y = 0$, $y = max$, $z = 0$ e $z = max$, as equações correspondentes são representadas por (3.28), (3.29), (3.30), (3.31) e (3.32), respectivamente:

$$\begin{aligned}
u|_{imax,j,k}^{n+1} &= -u|_{imax-1,j,k}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u|_{imax-1,j,k}^{n+1} + u|_{imax,j,k}^{n-1}) \\
&+ \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u|_{imax,j,k}^n + u|_{imax-1,j,k}^n) \\
&- \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta y)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u|_{imax,j+1,k}^n & -2u|_{imax,j,k}^n & +u|_{imax,j-1,k}^n \\ +u|_{imax-1,j+1,k}^n & -2u|_{imax-1,j,k}^n & +u|_{imax-1,j-1,k}^n \end{pmatrix} \\
&- \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta z)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u|_{imax,j,k+1}^n & -2u|_{imax,j,k}^n & +u|_{imax,j,k-1}^n \\ +u|_{imax-1,j,k+1}^n & -2u|_{imax-1,j,k}^n & +u|_{imax-1,j,k-1}^n \end{pmatrix} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u|_{i,0,k}^{n+1} &= -u|_{i,1,k}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u|_{i,1,k}^{n+1} + u|_{i,0,k}^{n-1}) \\
&+ \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u|_{i,0,k}^n + u|_{i,1,k}^n) \\
&+ \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta y)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u|_{i+1,0,k}^n & -2u|_{i,0,k}^n & +u|_{i-1,0,k}^n \\ +u|_{i+1,1,k}^n & -2u|_{i,1,k}^n & +u|_{i-1,1,k}^n \end{pmatrix} \\
&+ \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta z)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u|_{i,1,k+1}^n & -2u|_{i,0,k}^n & +u|_{i,0,k-1}^n \\ +u|_{i,1,k+1}^n & -2u|_{i,1,k}^n & +u|_{i,1,k-1}^n \end{pmatrix} \quad (3.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u|_{i,j,max,k}^{n+1} &= -u|_{i,j,max-1,k}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u|_{i,j,max-1,k}^{n+1} + u|_{i,j,max,k}^{n-1}) \\
&+ \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u|_{i,j,max,k}^n + u|_{i,j,max-1,k}^n) \\
&- \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta y)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u|_{i+1,j,max,k}^n & -2u|_{i,j,max,k}^n & +u|_{i-1,j,max,k}^n \\ +u|_{i+1,j,max-1,k}^n & -2u|_{i,j,max-1,k}^n & +u|_{i-1,j,max-1,k}^n \end{pmatrix} \\
&- \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta z)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u|_{i,j,max,k+1}^n & -2u|_{i,j,max,k}^n & +u|_{i,j,max,k-1}^n \\ +u|_{i,j,max-1,k+1}^n & -2u|_{i,j,max-1,k}^n & +u|_{i,j,max-1,k-1}^n \end{pmatrix} \quad (3.30)
\end{aligned}$$

$$u|_{i,j,0}^{n+1} = -u|_{i,j,1}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u|_{i,j,1}^{n+1} + u|_{i,j,0}^{n-1})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{i,j,0}^n + u_{i,j,1}^n) \\
& + \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta y)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u_{i+1,j,0}^n & -2u_{i,j,0}^n & +u_{i-1,j,0}^n \\ +u_{i+1,j,1}^n & -2u_{i,j,1}^n & +u_{i-1,j,1}^n \end{pmatrix} \\
& + \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta z)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u_{i,j+1,1}^n & -2u_{i,j,0}^n & +u_{i,j-1,0}^n \\ +u_{i,j+1,1}^n & -2u_{i,j,1}^n & +u_{i,j-1,1}^n \end{pmatrix} \quad (3.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{i,j,k_{max}}^{n+1} & = -u_{i,j,k_{max}-1}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{i,j,k_{max}-1}^{n+1} + u_{i,j,k_{max}}^{n-1}) \\
& + \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{i,j,k_{max}}^n + u_{i,j,k_{max}-1}^n) \\
& - \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta y)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u_{i+1,j,k_{max}}^n & -2u_{i,j,k_{max}}^n & +u_{i-1,j,k_{max}}^n \\ +u_{i+1,j,k_{max}-1}^n & -2u_{i,j,k_{max}-1}^n & +u_{i-1,j,k_{max}-1}^n \end{pmatrix} \\
& - \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta z)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u_{i,j+1,k_{max}}^n & -2u_{i,j,k_{max}}^n & +u_{i,j-1,k_{max}}^n \\ +u_{i,j+1,k_{max}-1}^n & -2u_{i,j,k_{max}-1}^n & +u_{i,j-1,k_{max}-1}^n \end{pmatrix} \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Para uma malha cúbica, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$, a CCA de Mur pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
u_{0,j,k}^{n+1} & = -u_{1,j,k}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta}{c\Delta t + \Delta} \cdot (u_{1,j,k}^{n+1} + u_{0,j,k}^{n-1}) \\
& + \frac{2\Delta}{c\Delta t + \Delta} \cdot (u_{0,j,k}^n + u_{1,j,k}^n) \\
& + \frac{(c\Delta t)^2}{2\Delta (c\Delta t + \Delta)} \cdot \begin{pmatrix} u_{0,j+1,k}^n & +u_{0,j-1,k}^n & +u_{1,j-1,k}^n & +u_{1,j+1,k}^n \\ +u_{0,j,k+1}^n & +u_{0,j,k-1}^n & +u_{1,j,k+1}^n & +u_{1,j,k-1}^n \\ -4u_{0,j,k}^n & -4u_{1,j,k}^n & & \end{pmatrix} \quad (3.33)
\end{aligned}$$

É interessante notar que para alguns pontos, certos termos de (3.51) são indefinidos ($j = 0$ provoca indefinição nos pontos onde $y = j - 1$, por exemplo). Nestes casos, devemos utilizar as condições de contorno de primeira (3.34) ou de segunda ordem (3.35).

$$\begin{aligned}
u_{0,j,k}^{n+1} & = -u_{1,j,k}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{1,j,k}^{n+1} + u_{0,j,k}^{n-1}) \\
& + \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{0,j,k}^n + u_{1,j,k}^n) \quad (3.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{0,j,k}^{n+1} & = -u_{1,j,k}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{1,j,k}^{n+1} + u_{0,j,k}^{n-1}) \\
& + \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{0,j,k}^n + u_{1,j,k}^n) \\
& + \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta y)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u_{0,j+1,k}^n & -2u_{0,j,k}^n & +u_{0,j-1,k}^n \\ u_{1,j+1,k}^n & -2u_{1,j,k}^n & +u_{1,j-1,k}^n \end{pmatrix} \quad (3.35)
\end{aligned}$$

De maneira semelhante, pode-se obter as expressões de diferenças finitas para a CCA de Mur nas outras fronteiras ($x = X_{max}$, $y = 0$, $y = Y_{max}$, $z = 0$ e $z = Z_{max}$) utilizando as equações (3.14) a (3.18), respectivamente. Estas expressões podem ser obtidas por inspeção de (3.51) e (3.34) usando o argumento de coordenadas simétricas para trocar os índices de u .

Simplificação para 2D

Em duas dimensões (2D), assume-se que as derivadas parciais em relação a z são nulas, portanto a equação de onda de sentido único proposta por Enquist e Majda, [Enquist and Majda, 1977], resume-se a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.36)$$

na qual, u é um campo escalar e c é a velocidade de fase. Analogamente, o operador de derivada parcial é definido como:

$$G \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3.37)$$

$$G \equiv D_x^2 + D_y^2 - \frac{1}{c^2} D_t^2 \quad (3.38)$$

Para obter absorção exata na fronteira $x = 0$, S é dado por:

$$S \equiv \frac{D_y}{(D_t/c)} \quad (3.39)$$

Substituindo (3.39) em (3.7), obtém-se:

$$G^- \cong D_x - \frac{D_t}{c} \left(1 - \frac{1}{2} S^2\right) \quad (3.40)$$

$$\cong D_x - \frac{D_t}{c} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{c D_y}{D_t}\right)^2\right]$$

$$\cong D_x - \frac{D_t}{c} + \frac{c D_y^2}{2 D_t} \quad (3.41)$$

ou seja:

$$\left(D_x - \frac{D_t}{c} + \frac{c D_y^2}{2 D_t}\right) u = 0 \quad (3.42)$$

Similarmente a 3D, ao multiplicar a equação (3.42) por D_t e identificar os operadores diferenciais, as derivadas parciais desejadas são:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \longrightarrow x = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \longrightarrow x = X_{max} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \longrightarrow y = 0 \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \longrightarrow y = Y_{max} \quad (3.46)$$

Substituindo as equações (3.19) a (3.24) nas equações (3.43) a (3.46), com as reduções necessárias em relação a coordenada z , obtém-se as expressões de diferenças finitas para a CCA de Mur nas fronteiras $x = 0$, $x = X_{max}$, $y = 0$ e $y = Y_{max}$, respectivamente. A equação (3.47) apresenta a forma final da CCA de Mur para $x = 0$, as equações das outras fronteiras são obtidas facilmente por meio de substituições.

$$\begin{aligned}
u_{0,j}^{n+1} &= -u_{1,j}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{1,j}^{n+1} + u_{0,j}^{n-1}) + \\
&+ \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{0,j}^n + u_{1,j}^n) + \\
&+ \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta y)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u_{0,j+1}^n & -2u_{0,j}^n & +u_{0,j-1}^n \\ +u_{1,j+1}^n & -2u_{1,j}^n & +u_{1,j-1}^n \end{pmatrix} \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Para as outras fronteiras, $x = max$, $y = 0$ e $y = max$, as equações correspondentes são representadas por (3.48), (3.49) e (3.50), respectivamente:

$$\begin{aligned}
u_{i,max,j}^{n+1} &= -u_{i,max-1,j}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{i,max-1,j}^{n+1} + u_{i,max,j}^{n-1}) \\
&+ \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{i,max,j}^n + u_{i,max-1,j}^n) \\
&- \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta y)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u_{i,max,j+1}^n & -2u_{i,max,j}^n & +u_{i,max,j-1}^n \\ +u_{i,max-1,j+1}^n & -2u_{i,max-1,j}^n & +u_{i,max-1,j-1}^n \end{pmatrix} \quad (3.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{i,0}^{n+1} &= -u_{i,1}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{i,1}^{n+1} + u_{i,0}^{n-1}) \\
&+ \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{i,0}^n + u_{i,1}^n) \\
&+ \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta y)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u_{i+1,0}^n & -2u_{i,0}^n & +u_{i-1,0}^n \\ +u_{i+1,1}^n & -2u_{i,1}^n & +u_{i-1,1}^n \end{pmatrix} \quad (3.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{i,j,max}^{n+1} &= -u_{i,j,max-1}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{i,j,max-1}^{n+1} + u_{i,j,max}^{n-1}) \\
&+ \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \cdot (u_{i,j,max}^n + u_{i,j,max-1}^n) \\
&- \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta y)^2 (c\Delta t + \Delta x)} \cdot \begin{pmatrix} u_{i+1,j,max}^n & -2u_{i,j,max}^n & +u_{i-1,j,max}^n \\ +u_{i+1,j,max-1}^n & -2u_{i,j,max-1}^n & +u_{i-1,j,max-1}^n \end{pmatrix} \quad (3.50)
\end{aligned}$$

Para uma malha quadrada $\Delta x = \Delta y = \Delta$, a CCA de Mur pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
u_{0,j}^{n+1} &= -u_{1,j}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta}{c\Delta t + \Delta} \cdot (u_{1,j}^{n+1} + u_{0,j}^{n-1}) \\
&+ \frac{2\Delta}{c\Delta t + \Delta} \cdot (u_{0,j}^n + u_{1,j}^n) \\
&+ \frac{(c\Delta t)^2}{2\Delta (c\Delta t + \Delta)} \cdot \begin{pmatrix} u_{0,j+1}^n & -2u_{0,j}^n & +u_{0,j-1}^n \\ +u_{1,j+1}^n & -2u_{1,j}^n & +u_{1,j-1}^n \end{pmatrix} \quad (3.51)
\end{aligned}$$

3.2.2 Condição de Contorno Analítica de Trefethen

Trefethen e Halpern, [Halpern and Trefethen, 1986] e [Trefethen and Halpern, 1986], propuseram uma maneira de promover um refinamento das CCA's derivadas das equação de onda de sentido único. Esta idéia significava encontrar a melhor aproximação para $\sqrt{1 - S^2}$ em (3.7) usando a série de Taylor. Um interpolador geral $r(S)$ para esta proposta foi definido sobre a escala $-1 \leq S \leq +1$. Este interpolador foi postulado para ser uma relação de dois polinômios em S , um polinômio numerador $p_m(S)$ de grau m , e um polinômio denominador $q_n(S)$ de grau n :

$$\sqrt{1 - S^2} \cong r(S) = \frac{p_m(S)}{q_n(S)} \quad (3.52)$$

$r(S)$ é chamado de função-racional interpoladora do tipo (m, n) sobre o intervalo $S [-1, 1]$. Desde que $S \equiv cD_y/D_t$, implementando (3.52) é equivalente a aproximar a exata equação de onda de sentido único de (3.5) ao longo da fronteira $x = 0$ para ondas que partem da direção $-y$, incidem ao longo da fronteira ($S = -1$), seguem para ($S = 0$), e chegam a $+y$ incidindo em ($S = +1$).

Por exemplo, especificando $r(S)$ como uma aproximação geral $(2, 0)$, a função raiz quadrada é interpolada por um polinômio da forma:

$$\sqrt{1 - S^2} \cong r(S) = p_0 + p_2 S^2 \quad (3.53)$$

Resultando na aproximação da equação geral da CCA de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{p_0}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p_2 c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.54)$$

Uma aproximação mais flexível é provida pela função racional geral $(2, 2)$.

$$\sqrt{1 - S^2} \cong r(S) = \frac{p_0 + p_2 S^2}{q_0 + q_2 S^2} \quad (3.55)$$

Isto, resulta na aproximação da equação geral da CCA de terceira ordem:

$$q_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + q_2 c^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{p_0}{c} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + p_2 c \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2} = 0 \quad (3.56)$$

A seleção apropriada dos coeficientes p e q nas equações (3.53) e (3.55) produzem várias famílias de CCA, como sugerido por Trefethen e Halpern. O padrão de Padé, menor quadrado, ou interpolação de Chebyshev são aplicados para encontrar o “melhor ajuste” para $\sqrt{1 - S^2}$ sobre parte ou toda a escala $-1 \leq S \leq 1$. Isto produz uma CCA aproximada cujo desempenho é bom por meio de todo ou parte da escala de direções de ondas que saem do domínio. O segundo termo da série de Taylor presente em Mur, (3.39), (3.40), (3.41) e (3.41), é agora visto em uma razão mais geral de ser Padé(2, 0) um interpolador com os coeficientes $p_0 = +1$ e $p_2 = -1/2$ em (3.53), produzindo um duplo zero nas reflexões de ondas em $S = 0$, ou seja, para ondas com incidência normal à fronteira $x = 0$.

A interpolação mais precisa envolve a escolha de $q_0 = p_0 = 1$, $p_2 = -3/4$ e $q_2 = -1/4$ em (3.55). Esta escolha da aproximação de Padé(2,2) produz um triplo zero nas reflexões de ondas com incidência normal à $S = 0$, sendo esta a CCA de Terceira Ordem proposta originalmente por Engquist a Majda em [Engquist and Majda, 1977]. Outros tipos de aproximações polinomiais levam a CCA a absorver a onda numérica incidente a ângulos específicos à exceção de fronteiras laterais distantes. Estas são consideradas por Trefethen e Halpern uma maneira de melhorar o ângulo de desempenho da CCA, e são apresentadas na Tabela 3.1 para a CCA de 2ª ordem e na Tabela 3.2 para a CCA de 3ª ordem e.

Tabela 3.1: Coeficientes para a CCA de Trefethen de Segunda Ordem [Halpern and Trefethen, 1986] e [Trefethen and Halpern, 1986]

Tipo de Aproximação	p_0	p_2	\pm Ângulo de Absorção Exata	
Padé	1,00000	-0,50000	0°	0°
Chebshhev em um subintervalo	1,00023	-0,51555	7,6°	18,7°
Chebshhev (pontos)	1,03597	-0,76537	22,5°	67,5°
Menor quadrado	1,03084	-0,73631	22,1°	64,4°
Chebshhev-Padé	1,06103	-0,84883	25,8°	73,9°
Newman (pontos)	1,00000	-1,00000	0°	90°
Chebshhev	1,12500	-1,00000	31,4°	81,6°

Tabela 3.2: Coeficientes para a CCA de Trefethen de Segunda Ordem [Halpern and Trefethen, 1986] e [Trefethen and Halpern, 1986]

Tipo de Aproximação	p_0	p_2	q_0	\pm Ângulo de Absorção Exata		
Padé	1,00000	-0,75000	-0,25000	0°	0°	0°
Chebshhev em um subintervalo	0,99973	-0,80864	-0,31657	11,7°	31,9°	43,5°
Chebshhev (pontos)	0,99650	-0,91296	-0,47258	15°	45°	75°
Menor quadrado	0,99250	-0,92233	-0,51084	18,4°	51,3°	76,6°
Chebshhev-Padé	0,99030	-0,94314	-0,55556	18,4°	53,1°	81,2°
Newman (pontos)	1,00000	-1,00000	-0,66976	0°	60,5°	90°
Chebshhev	0,95651	-0,94354	-0,70385	26,9°	66,6°	87,0°

3.2.3 Condição de Contorno Analítica de Higdon

A terceira família de CCA que surgiu durante as décadas de 70 e 80 foi originada por Higdon [Higdon, 1986] e [Higdon, 1987]. Similar ao método de Bayliss e Turkel, a técnica de Higdon envolve a construção de uma série de operadores diferenciais lineares para anular as ondas numéricas de saem do domínio. Entretanto, o operador de Higdon absorve ondas planas propagando a ângulos específicos no plano cartesiano.

Higdon propôs um operador “anulador” para a soma de ondas planas da forma:

$$\left[\prod_{l=1}^L \left(\cos \alpha_l \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] u = 0 \quad (3.57)$$

para permitir o fechamento do domínio computacional em $x = 0$, no qual α_l é o ângulo de incidência da onda na borda.

A simplicidade da aproximação de Higdon pode ser ilustrada escrevendo os dois primeiros operadores da seqüência definidos por (3.57). Tomando $L = 1$, obtém-se o primeiro operador:

$$\cos \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.58)$$

Este operador absorve completamente ondas planas propagando com a velocidade c e ângulos $\pm\alpha_1$ relativo ao eixo x . Se $\alpha_1 = 0^\circ$, (3.59) reduz para a CCA de Mur de Primeira Ordem em uma dimensão (1D).

Se for considerado o segundo operador na seqüência de Higdon, $L = 2$, obtém-se:

$$\left(\cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\cos \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.59)$$

Efetuando as operações e agrupando os termos semelhantes, tem-se:

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.60)$$

No plano da fronteira $x = 0$, a CCA de (3.60) absorve completamente ondas planas propagando com velocidade c e ângulos $\pm\alpha_1$ e $\pm\alpha_2$ com respeito ao eixo $-x$. Como mostrado por Higdon, (3.60) pode ser diretamente implementada com diferenças finitas em uma linha reta da malha perpendicular à fronteira. Entretanto, tem-se a opção de utilizar a equação de onda em duas dimensões

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.61)$$

para eliminar a segunda derivada parcial de x , e desse modo simplificar a equação de diferenças finitas para x na fronteira da malha. Isto permite uma comparação direta entre os termos da derivada parcial da CCA Higdon de Segunda Ordem e CCA geral de Trefethen-Halpern de Segunda Ordem dada por (3.53). Após manipulações algébricas, (3.60) é escrita como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c} \left(\frac{1 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\frac{c}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.62)$$

Comparando (3.62) com (3.53), observa-se que as duas equações podem ser idênticas se forem feitas as seguintes correspondências:

$$p_0 = \frac{1 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2} \quad (3.63)$$

$$p_2 = -\frac{1}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2} \quad (3.64)$$

3.3 Condição de Contorno Absorvente

As CCA absorventes surgiram com o propósito de utilizar uma camada ao redor da borda do domínio para absorver os campos incidentes na borda. Assim o domínio computacional fechado por esta CCA possui resultados mais precisos por não serem influenciados pelo campo refletido na borda.

3.3.1 Condição de Contorno Absorvente PML

A condição de contorno que utiliza a camada perfeitamente casada (*Perfectly Matched Layer* - PML) possui um conceito diferente das condições de contorno que têm seu ponto de partida nas equações de onda plana. Esta é uma nova técnica de simulação no espaço livre desenvolvida para solucionar problemas de eletromagnetismo em regiões abertas utilizando o FDTD, [Berenger, 1994], [Berenger, 1996a].

A PML é baseada na idéia de usar uma camada especialmente designada para absorver as ondas eletromagnéticas sem reflexões na interface PML-vácuo (ou outro material utilizado), [Berenger, 1996b].

No meio PML, cada componente do campo eletromagnético é separada em duas partes. Em coordenadas cartesianas, as seis componentes de campo H_x , H_y , H_z , E_x , E_y e E_z são divididas em doze subcomponentes denotadas por H_{xy} , H_{xz} , H_{yx} , H_{yz} , H_{zx} , H_{zy} , E_{xy} , E_{xz} , E_{yx} , E_{yz} , E_{zx} e E_{zy} , e as equações de Maxwell (2.2) e (2.3) são transformadas em:

$$\mu_0 \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{xy} = - \frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial y} \quad (3.65)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{xz} = \frac{\partial (E_{yx} + E_{yz})}{\partial z} \quad (3.66)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{yz} = - \frac{\partial (E_{xy} + E_{xz})}{\partial z} \quad (3.67)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{yx} = \frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial x} \quad (3.68)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = - \frac{\partial (E_{yx} + E_{yz})}{\partial x} \quad (3.69)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \frac{\partial (E_{xy} + E_{xz})}{\partial y} \quad (3.70)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \sigma_y E_{xy} = \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \quad (3.71)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \sigma_z E_{xz} = - \frac{\partial (H_{yx} + H_{yz})}{\partial z} \quad (3.72)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \sigma_z E_{yz} = - \frac{\partial (H_{xy} + H_{xz})}{\partial z} \quad (3.73)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} = \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \quad (3.74)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} = - \frac{\partial (H_{yx} + H_{yz})}{\partial x} \quad (3.75)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} = \frac{\partial (H_{xy} + H_{xz})}{\partial y} \quad (3.76)$$

nas quais, σ e σ^* denotam as possíveis condutividade elétrica e perda magnética associadas ao vácuo e os parâmetros $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*)$.

A camada absorvente ao redor do domínio deve seguir a Fig. 3.2, [Berenger, 1994] e [Taflove and Hagness, 2000].

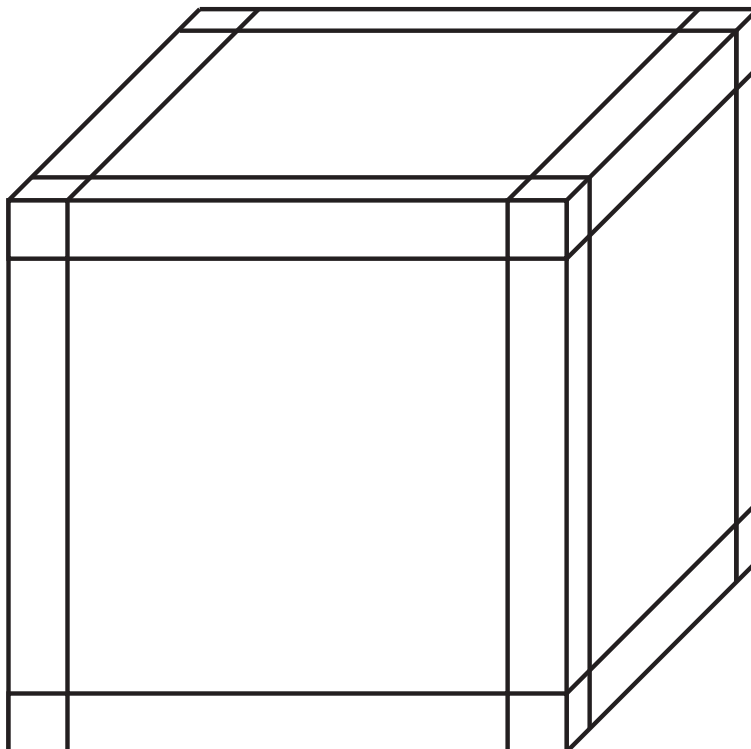


Figura 3.2: Representação gráfica da PML em 3D

Para que haja absorção na PML, os valores de σ e σ^* devem ser tais que:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (3.77)$$

$$\sigma(\rho) = \sigma_{max} \left(\frac{\rho}{\delta} \right) \quad (3.78)$$

onde ε_0 e μ_0 denotam a permissividade e a permeabilidade do vácuo, σ representa σ_x, σ_y ou σ_z , σ^* representa σ_x^*, σ_y^* ou σ_z^* , ρ é a profundidade de penetração na PML em $[m]$, δ é a largura da PML em $[m]$.

Assumindo corretamente estes valores, o fator de reflexão da PML será dado por (3.79) [Berenger, 1996a].

$$R(\theta) = e^{-2\sigma_{max} \frac{\delta \cos \theta}{(n+1)\varepsilon_0 c}} \quad (3.79)$$

Nos seis lados do domínio, os meios absorventes PML são casados com o meio transversal de condutividade igual a zero, por exemplo, a região superior direita do domínio $(0, 0, 0, 0, \sigma_z, \sigma_z^*)$, como mostra a Fig. 3.3, [Berenger, 1994].

Nas doze arestas do domínio, as condutividades são selecionadas de maneira que as condutividades transversais são iguais às da interface localizadas entre os meios da borda e os meios laterais. Isto é obtido por meios de duas condutividades iguais a zero e as outras

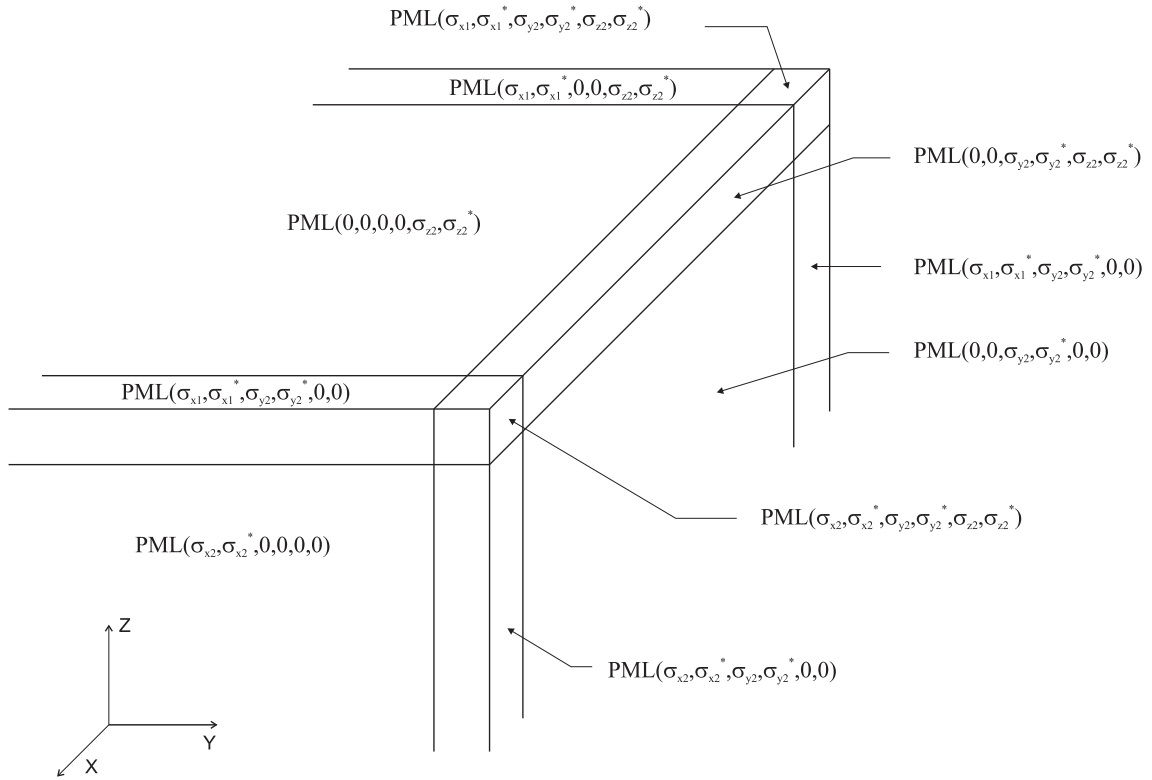


Figura 3.3: Região superior direita computacional cercada pela camada PML, [Berenger, 1996a]

quatro condutividades iguais às condutividades adjacentes aos meio laterais, apresentado pela Fig. 3.3. Como resultado, teoricamente não há reflexão nas interfaces borda-lateral, [Berenger, 1994].

Nos oito cantos do domínio, as condutividades são escolhidas iguais àquelas das arestas adjacentes, de modo que as condutividades transversais são iguais às das interfaces entre as camadas da borda e as camadas do canto. Então, a reflexão é igual a zero em todas as interfaces borda-canto, [Berenger, 1994].

Como uma observação física, nota-se que a velocidade de propagação em todo o domínio computacional é a velocidade da luz, e em todas as interfaces deve-se seguir lei de Snell-Descartes, detalhada no Apêndice A. Então, como uma onda viaja de um meio para outro através da interface, sua forma é preservada. Isto está próximo da relação com a ausência de reflexão nas interfaces.

Simplificação para 2D

Em 2D, as simplificações possíveis são eliminar as componentes E_z , H_x e H_y . Assim, para conseguir as componentes cartesianas de campo E_x , E_y e H_z as equações de Maxwell (2.6) e (2.7) são transformadas em:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \frac{\partial (H_z)}{\partial y} \quad (3.80)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = -\frac{\partial (H_z)}{\partial x} \quad (3.81)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma_y^* H_z = \frac{\partial (E_x)}{\partial y} + \frac{\partial (E_y)}{\partial x} \quad (3.82)$$

nas quais σ e σ^* denotam as possíveis condutividade elétrica e perda magnética associadas ao vácuo.

Similarmente ao modelo em três dimensões, a camada absorvente ao redor do domínio em duas dimensões deve seguir a Fig. 3.4.

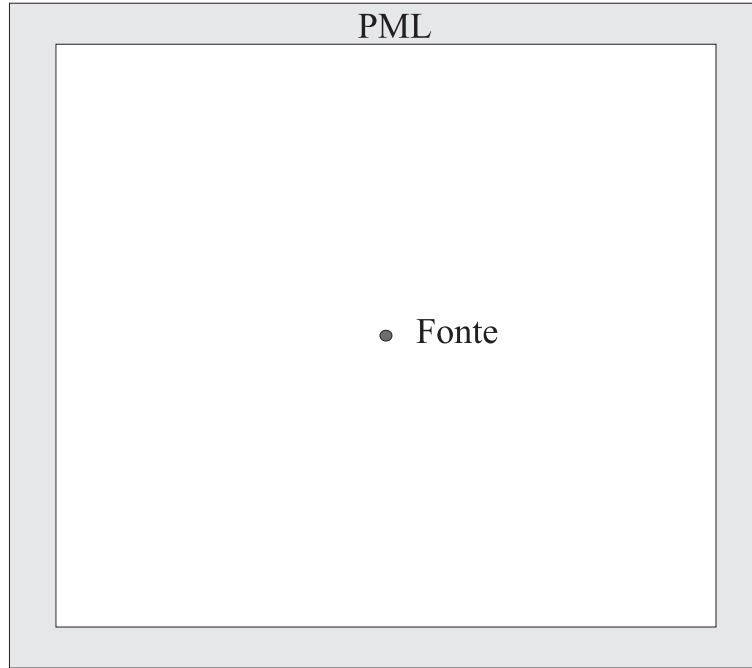


Figura 3.4: Representação gráfica da PML em 2D

Como foi dito anteriormente, para que haja absorção na PML, os valores de σ e σ^* devem ser tais que:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (3.83)$$

$$\sigma(\rho) = \sigma_{max} \left(\frac{\rho}{\delta} \right) \quad (3.84)$$

onde ε_0 e μ_0 denotam a permissividade e a permeabilidade do vácuo, σ representa σ_x , σ_y ou σ_z , σ^* representa σ_x^* , σ_y^* ou σ_z^* , ρ é a profundidade de penetração na PML em $[m]$, δ é a largura da PML em $[m]$.

O fator de reflexão da PML será dado por (3.85).

$$R(\theta) = e^{-2\sigma_{max} \frac{\delta \cos \theta}{(n+1)\varepsilon_0 c}} \quad (3.85)$$

Nos lados direito e esquerdo do domínio computacional, as camadas absorventes PML são casadas com o meio $(\sigma_x, \sigma_x^*, 0, 0)$, como mostra a Fig. 3.5. Então, nas interfaces vácuo-PML normais ao eixo x , o fator de reflexão é teoricamente nulo, como mostra a equação (3.85). As ondas viajantes podem propagar sem reflexão por meio das interfaces vácuo-PML direita e esquerda, [Berenger, 1994].

Similarmente, o meio $(0, 0, \sigma_y, \sigma_y^*)$ são usados nos lados superior e inferior de domínio computacional de maneira que as ondas viajantes podem propagar sem reflexão por meio das interfaces vácuo-PML normais ao eixo y , [Berenger, 1994].

Nos quatro cantos do domínio computacional, as camadas absorventes PML são feitas do meio $(\sigma_x, \sigma_x^*, \sigma_y, \sigma_y^*)$, possuindo condutividades iguais àquelas dos meios adjacentes $(\sigma_x, \sigma_x^*, 0, 0)$ e $(0, 0, \sigma_y, \sigma_y^*)$. Como resultado, teoricamente não há reflexão nas interfaces que encontram-se entre as camadas laterais e as camadas dos cantos.

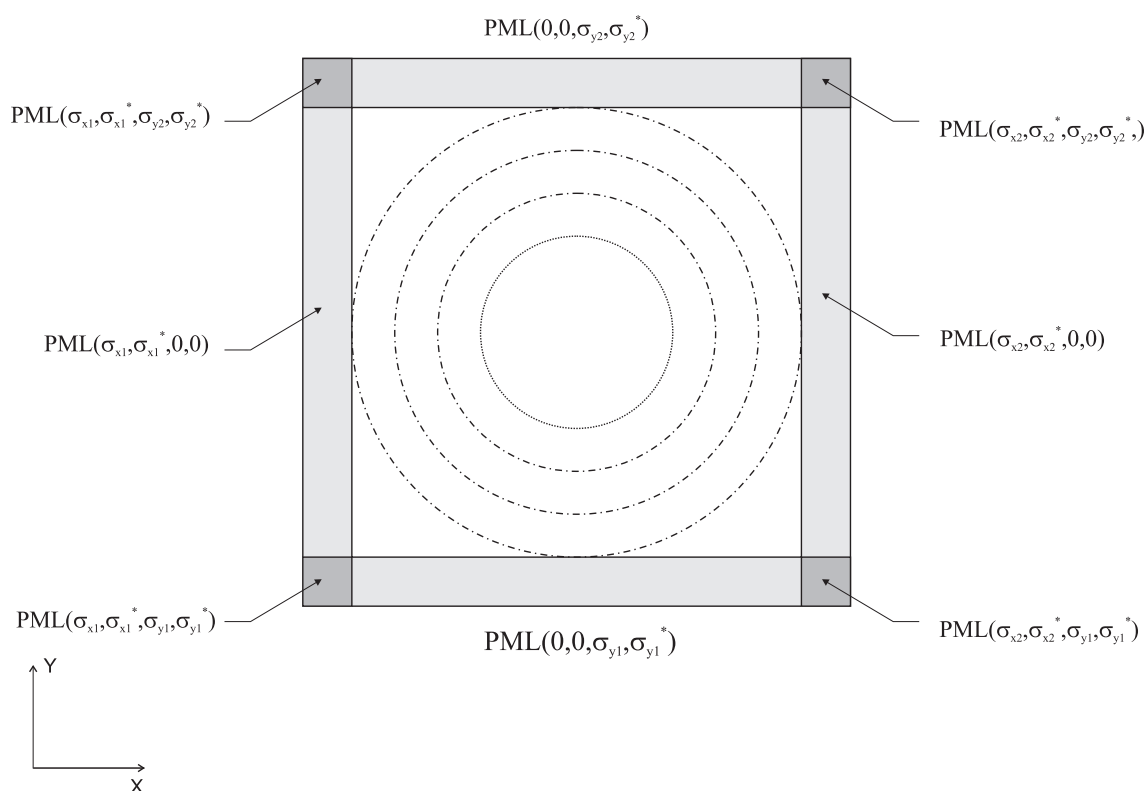


Figura 3.5: A técnica PML [Berenger, 1994]

3.4 Conclusão

Neste capítulo foram detalhadas as equações das CCA de Mur, Trefethen, Higdon e PML, utilizadas para limitar o domínio computacional do FDTD para a solução de problemas de contorno em eletromagnetismo.

A CCA de Mur é um tratamento mais generalizado da equação de onda, isto é, trabalha com as componentes individuais dos campos \mathbf{E} e \mathbf{H} . É uma CCA com um baixo grau de dificuldade em sua implementação.

As CCAs de Trefethen e Higdon são derivadas da CCA de Mur, com a inclusão de constantes porém definem constantes com o intuito de propiciarem uma maior precisão nos resultados. Contudo, tais constantes são específicas para certos ângulos de incidência.

A CCA PML tem a finalidade de criar uma camada absorvente ao redor do domínio, onde os campos incidentes são absorvidos. Esta CCA possui uma formulação matemática mais complexa, que envolve a divisão dos campos eletromagnéticos e a extensão do domínio por meio de uma camada absorvente. Conclui-se, portanto, que a CCA PML apresenta uma dificuldade maior de implementação em comparação com as CCAs analíticas.

A seguir serão apresentados os resultados obtidos com estas CCAs.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo os resultados das simulações numéricas utilizando o método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) para as formulações de condições de contorno absorventes (CCA) discutidas no capítulo anterior. O capítulo é dividido em três partes.

Na primeira parte é apresentada a definição de um problema bidimensional, o qual será utilizado como referência para avaliar a precisão das CCAs estudadas. Define-se, também, três métricas, isto é, os erros relativo, local e global, os quais serão utilizados para investigar a precisão dos resultados.

Na segunda parte são apresentados os resultados obtidos para as CCAs de Mur, Trefethen, Higdon e PML.

Na terceira parte os resultados são discutidos e comparados em relação a precisão, aplicabilidade e implementação.

4.2 Definição do Problema

O problema proposto neste trabalho é composto por um domínio em duas dimensões (2D) composto de 100 células na direção x e 50 células na direção y , conforme a Fig. 4.1. O ponto de excitação é uma fonte do tipo *hard* e está localizado no centro do domínio de teste. Este domínio foi escolhido devido aos métodos utilizados para a investigação da precisão das CCAs. Foram utilizados três métodos distintos, sendo que dois deles foram baseados do artigo do Moore [Moore et al., 1988]. Para estes dois métodos de cálculo de erro, os valores utilizados para as simulações foram os mesmos utilizados no artigo.

Existem duas maneiras distintas de representar uma fonte em problemas de eletromagnetismo. A primeira é uma fonte do tipo *soft*. A segunda é uma fonte do tipo *hard*.

A onda plana foi implementada como uma fonte do tipo *hard*. Existem diferenças substanciais entre fontes do tipo *soft* e do tipo *hard* [Balanis, 1989]. Neste trabalho será utilizado exclusivamente fontes do tipo *hard*.

Quando uma fonte do tipo *hard* é implementada, isto significa que os campos nos pontos da fonte não são influenciados por campos externos, como campos refletidos e outras fontes. Neste caso, os cálculos do FDTD não são feitos nos cubos onde a fonte está localizada. O valor do campo nos cubos da fonte é dado apenas pela equação da fonte.

A primeira fonte de campo magnético é dada pela equação (4.1) a seguir, cuja solução

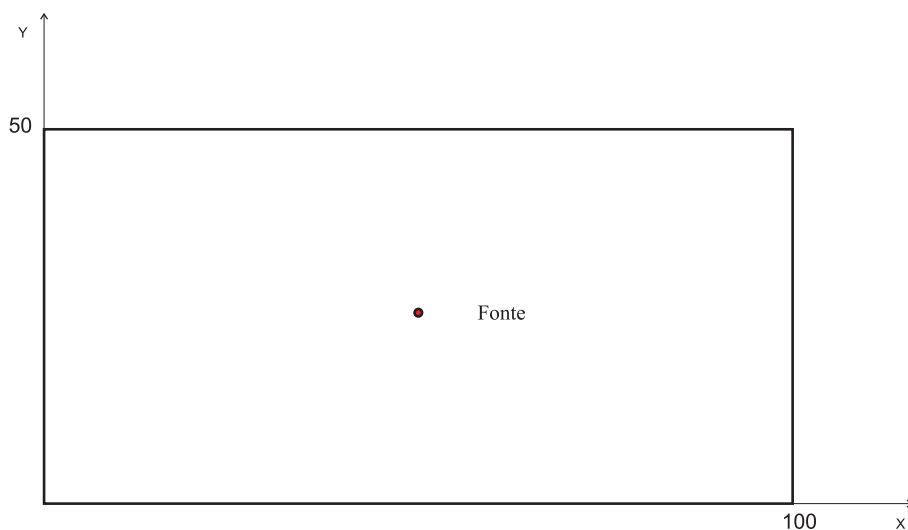


Figura 4.1: Domínio proposto

analítica é ilustrada na Fig. 4.2. Esta equação será utilizada para verificar a precisão do erro relativo da solução do FDTD.

$$H_z = 2 \sin(\omega n \Delta t) \quad (4.1)$$

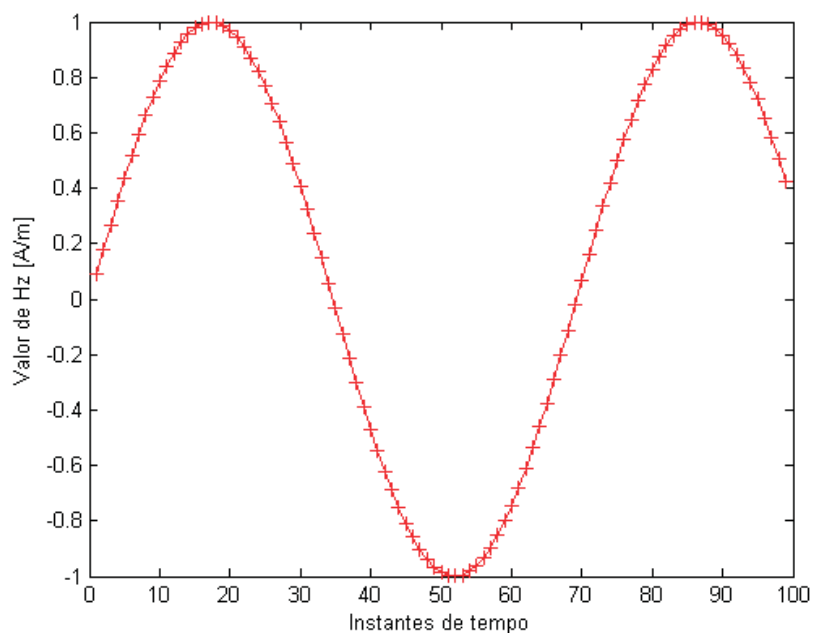


Figura 4.2: Forma de onda da fonte para o cálculo do erro relativo

A segunda fonte de campo magnético é um pulso com valor máximo de 0.1 [A/m] localizado no instante de tempo $n = 20$, expresso pela equação (4.2), cuja representação é ilustrada na Fig. 4.3. Esta equação será utilizada para analisar os erros local e global da solução do FDTD [Moore et al., 1988].

$$H_z = \begin{cases} \frac{1}{32} \left[10 - 15 \cos\left(\frac{\pi n}{20}\right) + 6 \cos\left(\frac{2\pi n}{20}\right) - \cos\left(\frac{3\pi n}{20}\right) \right] & n \leq 40 \\ 0 & n > 40 \end{cases} \quad (4.2)$$

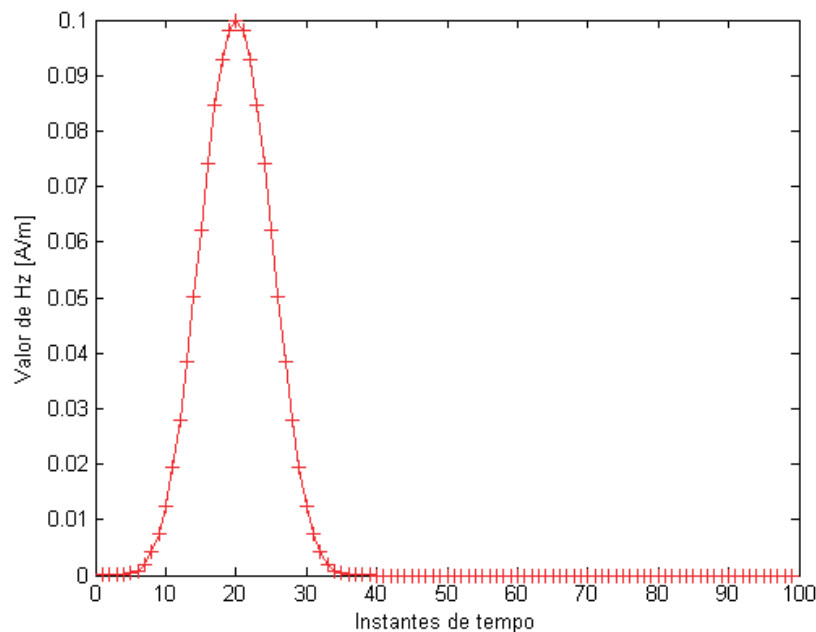


Figura 4.3: Forma de onda da Fonte para o Cálculo do Global e Local

A característica principal deste pulso é ter uma transição extremamente suave para zero.

4.2.1 Erro Relativo

O erro relativo é definido conforme a equação (4.3) [Taflove and Hagness, 2005]:

$$E_r(t) = \frac{H_z(t) - H_{z_a}(t)}{\max[H_{z_a}(t)]} \quad (4.3)$$

onde $H_z(t)$ é a solução obtida pelo FDTD e $H_{z_a}(t)$ é calculado conforme a equação (4.1).

O erro relativo será calculado nos pontos $P1$ a $P4$, cujas coordenadas são $P1(x = 0.156m; y = 0.150m)$, $P2(x = 0.180m; y = 0.150m)$, $P3(x = 0.210m; y = 0.150m)$ e $P4(x = 0.297m; y = 0.150m)$, como ilustrado na Fig. 4.4.

Neste caso, os dados utilizados nas simulações são os seguintes: $\Delta x = \Delta y = \Delta = 3.0 \times 10^{-3}m$, $\Delta t = 1 / \left[c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}} \right]$, $\omega = 2\pi f$, c é a velocidade da luz, n é o número de passos no tempo e a frequência utilizada foi 1.8GHz.

4.2.2 Erro Local e Global

Para efeito do cálculo dos erros local e global utilizaremos o domínio definido na Fig. 4.5, ilustrada a seguir, que é derivada da Fig. 4.1, e a fonte descrita na equação (4.2).

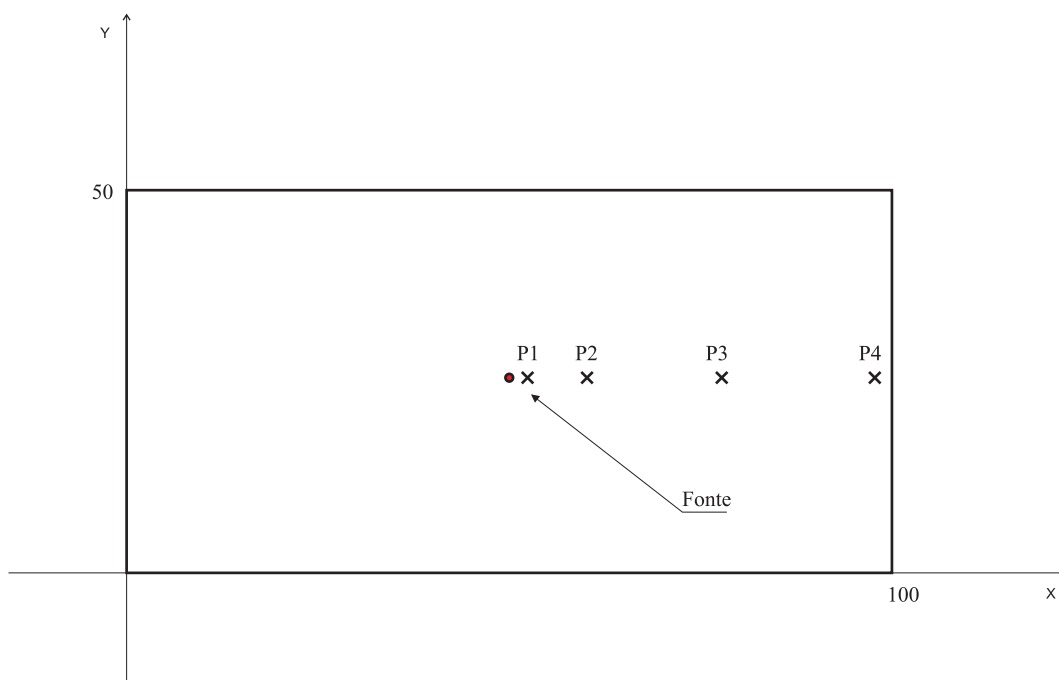


Figura 4.4: Pontos analisados na solução analítica

Neste caso, será utilizado o valor de $\Delta t = 2.5 \times 10^{-11} s$ e $\Delta x = \Delta y = \Delta = 2c\Delta t$, na qual c é a velocidade da luz no espaço livre (m/s) e Δ é o incremento espacial na malha do FDTD, [Moore et al., 1988].

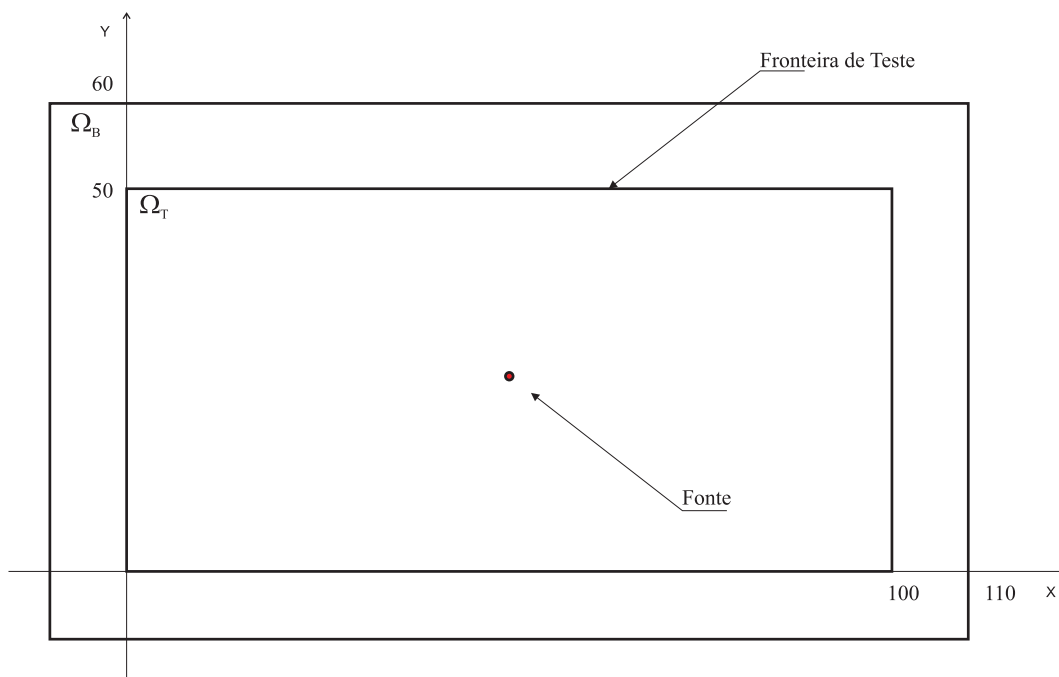


Figura 4.5: Domínio proposto

Na borda do domínio de teste Ω_T , as CCAs a serem analisadas foram aplicadas. Para cada ponto de Ω_T , existe um ponto correspondente em Ω_B . Nos dois domínios, a fonte está localizada no mesmo ponto. A fonte propaga ondas cilíndricas que são espacialmente coincidentes nos dois domínios até o instante de tempo no qual as ondas incidem na fronteira de Ω_T . Algumas reflexões da fronteira de Ω_T fazem com que a solução dos pontos no interior de Ω_T seja diferente da solução dos pontos correspondentes em Ω_B . A solução nos pontos interiores de Ω_B representam a modelagem numérica desejada para a propagação no espaço livre até o instante de tempo quando reflexões da própria fronteira de Ω_B entram na região de Ω_B correspondente a Ω_T [Moore et al., 1988].

Para mensurar a diferença entre Ω_B e Ω_T em cada ponto e em cada instante de tempo, a medida das reflexões espúrias causadas pela borda de Ω_T foi calculada. Este cálculo foi definido como erro global, E_g . Como mostra a equação (4.4), para todo (x, y) interno a Ω_T o erro global refletido no interior do domínio de teste para qualquer instante de tempo é medido, ou seja, para cada ponto interno (x, y) do domínio de teste, no qual H_z^T é a solução interna de Ω_T e H_z^B é a solução interna de Ω_B para os pontos correspondentes a Ω_T , o erro é calculado. O erro local E_l , representado pela equação (4.5), é definido como o erro local em uma linha do domínio de teste causado pela reflexão da borda.

$$E_g|^n = \sum_x \sum_y |H_z^T|^n_{x,y} - H_z^B|^n_{x,y}|^2 \quad (4.4)$$

$$E_l|^n_{x,j} = H_z^T|^n_{x,y} - H_z^B|^n_{x,y} \quad (4.5)$$

Para a obtenção do erro local foram definidas duas linhas de teste, como definidas na Fig. 4.6. A primeira linha de teste, Tx , é paralela ao eixo x e localiza-se uma célula acima da fronteira $x = 0$. A segunda linha de teste, Ty , é paralela ao eixo y e localiza-se uma célula antes da fronteira $y = \max$.

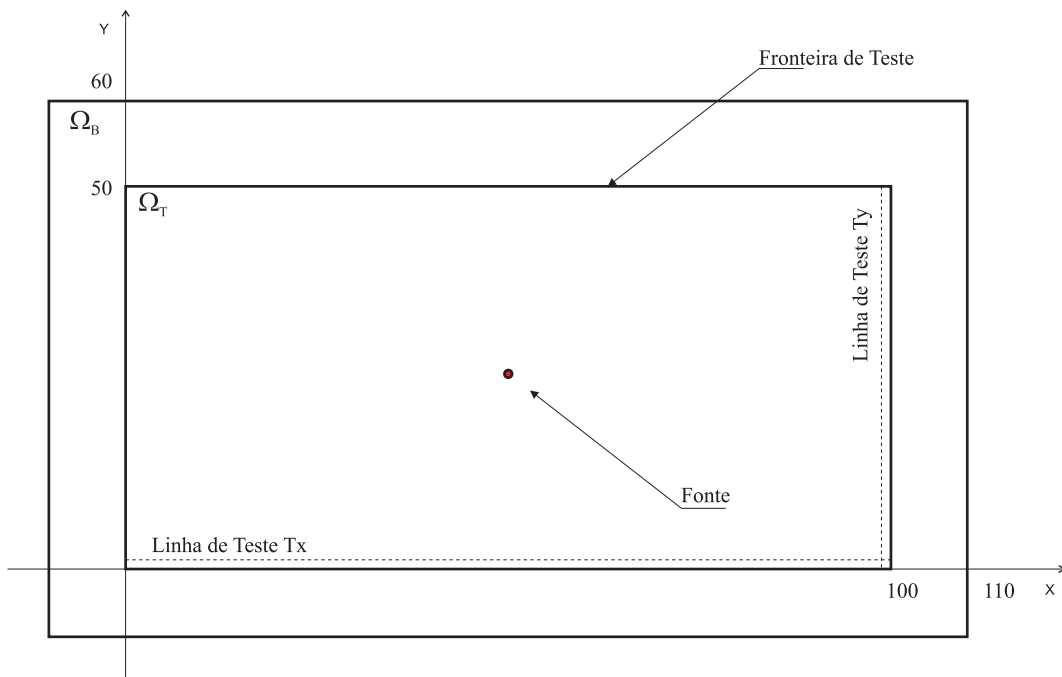


Figura 4.6: Linhas de teste

Para efeito do cálculo do erro local, em Tx considera-se $n = 100$ instantes de tempo, e em Ty considera-se $n = 150$ instantes de tempo. Isso se justifica pelas seguintes razões. A fonte, conforme ilustrado na Fig. 4.6, situa-se 25 células de Ω_T em $y = 0$ e 50 de Ω_T em $x = 0$. Utilizando a definição $\Delta x = \Delta y = \Delta = 2c\Delta t$, a onda emitida pela fonte necessitará de 50 instantes de tempo para alcançar a fronteira em $y = 0$ e 100 instantes de tempo para atingir $x = 0$. No instante de tempo 70 o pico do pulso começa a ultrapassar a fronteira $y = 0$, e no instante de tempo 120 para a fronteira $x = 0$.

Escolheu-se observar a reflexão na primeira linha da malha a partir dos limites da fronteira, linhas Tx e Ty definidos na Fig. 4.6, porque nestes pontos espera-se as maiores reflexões.

4.2.3 Condições de Dispersão e Estabilidade

Aplicando os conceitos apresentados anteriormente na seção 2.3.4, é possível avaliar a precisão da malha no presente estudo utilizando as propriedades do material que compõe o modelo.

Para o cálculo do erro relativo no domínio da Fig. 4.4, tem-se que o comprimento de onda no vácuo λ_0 é dado por:

$$\lambda_0 = v_0/f \quad (4.6)$$

onde v_0 é a velocidade de propagação da onda ($3 \times 10^8 m/s$ no vácuo) e f é a frequência de interesse ($1.8GHz$). Assim, o comprimento de onda é de $0.1667m$ para $1.8GHz$.

Como os cubos possuem lados de comprimento idênticos, iguais à $0.003m$, tem-se, no vácuo, 55 cubos por comprimento de onda. Este é o refinamento da malha em todo o domínio, que é composto de ar. Nesta região um alto refinamento é necessário para calcular corretamente os campos elétrico e magnético.

Como neste modelo o valor é de 55 cubos por comprimento de onda, pode-se avaliar a malha como sendo de bom refinamento e que o critério de dispersão numérica foi respeitado.

Com relação aos critérios de estabilidade numérica, determinou-se neste estudo que o passo de tempo seria o chamado *passo de tempo mágico*. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta t &= \Delta t_{\text{mágico}} = \frac{1}{c\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}}} \\ &= \frac{1}{2c\sqrt{\frac{1}{(3mm)^2} + \frac{1}{(3mm)^2}}} = 7.071 \cdot 10^{-12} s \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para o cálculo dos erros local e global no domínio descrito pela Fig. 4.5, o valor de Δ é:

$$\Delta = 2c\Delta t = 2 \times 3 \times 10^8 \times 2.5 \times 10^{-11} \quad (4.8)$$

$$\Delta = 0.015m \quad (4.9)$$

Com a especificação de $\Delta = 2c\Delta t$, a fonte necessita de 50 instantes de tempo para propagar até a fronteira em $y = 0$. Como a fonte localiza-se a 25 células da mesma fronteira, temos que a velocidade de propagação do pulso é:

$$v_p = d/t = (25 \times 0.015)/(50 \times 2.5 \times 10^{-11}) = 3 \times 10^8 m/s \quad (4.10)$$

Porém, como este pulso não possui uma frequência principal, temos 25 células para a propagação total da onda.

Para garantir uma avaliação detalhada do comportamento do campo dentro do domínio e assegurar que o critério de dispersão numérica seja atingido, recomenda-se um mínimo de 10 pontos por comprimento de onda [Taflove and Hagness, 2000] na região de campo distante. Para a região de campo próximo, não há uma recomendação específica, mas é desejável um valor bem maior, para que os campos sejam corretamente calculados.

Assim, esta malha possui um refinamento adequado respeitando o critério de dispersão numérica.

4.3 Resultados de Condições de Contorno Analíticas

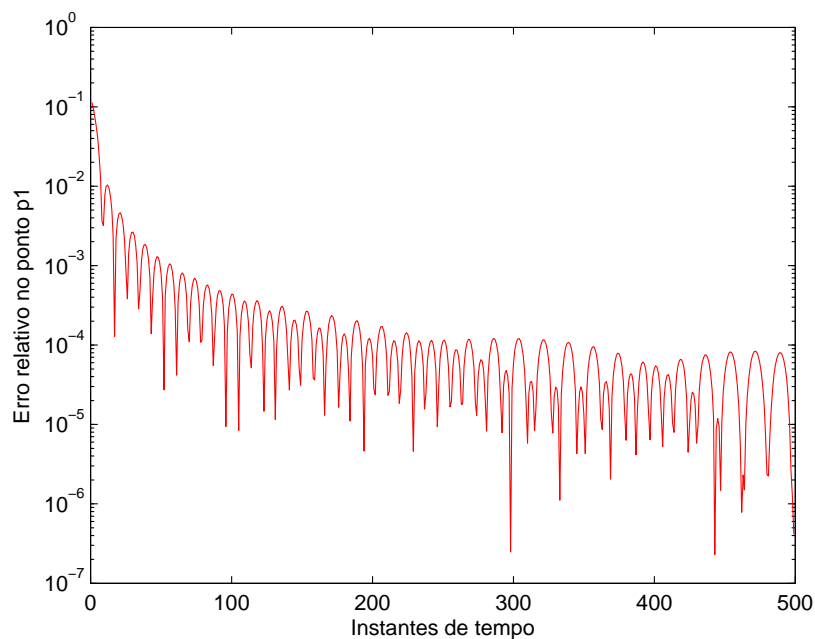
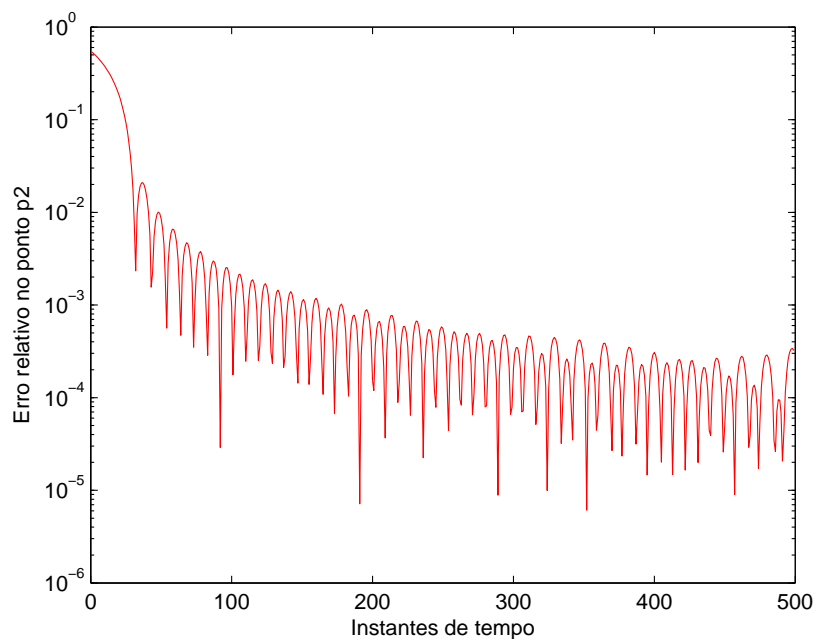
4.3.1 Condição de Contorno Analítica de Mur

Erro Relativo

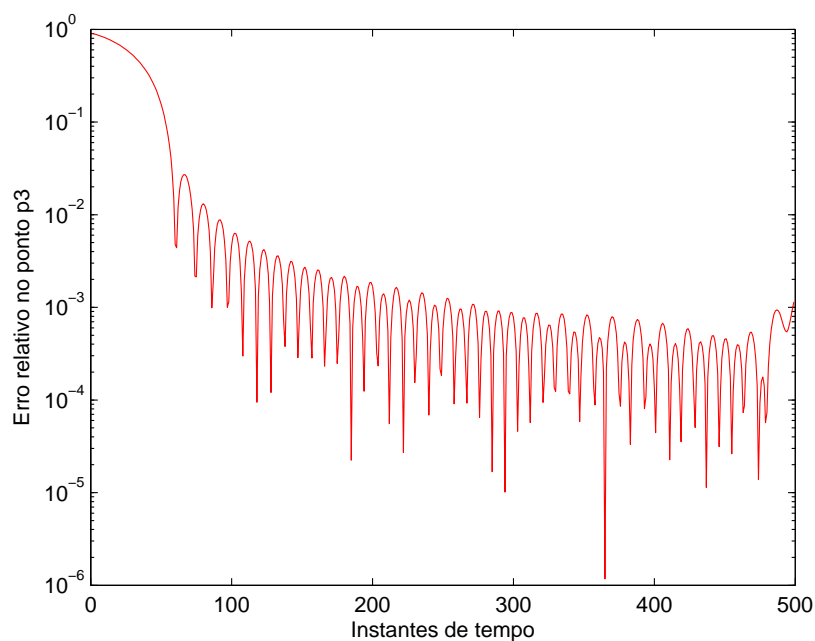
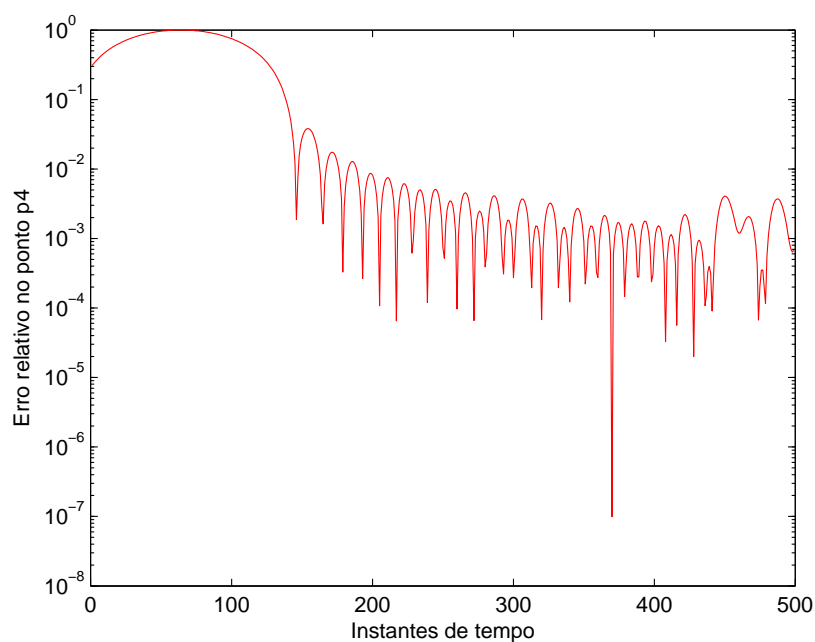
As Figs. 4.7 a 4.10 mostram o erro relativo de H_z calculado pela equação (4.3) utilizando as equações de Mur de 2ª ordem para os pontos $P1$ a $P4$ definidos na Fig. 4.4.

O erro relativo observado nos pontos $P1$ a $P3$ situa-se na escala entre 10^{-2} a 10^{-4} a partir de $n \geq 50$. Para o ponto $P4$, observa-se que o erro relativo encontra-se na faixa 10^{-2} a 10^{-3} a partir de $n \geq 150$, sendo portanto, da ordem de 10 vezes maior em comparação com os pontos $P1$ a $P3$.

Para $n \leq 50$, nos pontos $P1$ a $P3$, e $n \leq 150$, no ponto $P4$, observa-se que o erro relativo apresenta valores na ordem de 10^0 a 10^{-2} . Isso se justifica pelo fato de a solução analítica considerar que no instante $n = 0$ já existe campo em todos os pontos, o que difere da solução do FDTD, pois o campo “demora” alguns instantes de tempo para atingir os quatro pontos de interesse.

Figura 4.7: Erro relativo para a CCA de Mur no ponto $P1$ Figura 4.8: Erro relativo para a CCA de Mur no ponto $P2$

Constata-se, portanto, que a formulação de Mur de 2ª ordem apresenta erros relativos da ordem de 10^{-3} , o que é aceitável para uma grande gama de problemas envolvendo simulações em engenharia.

Figura 4.9: Erro relativo para a CCA de Mur no ponto P_3 Figura 4.10: Erro relativo para a CCA de Mur no ponto P_4

Erro Local e Global

Os erros locais, nas linhas T_x e T_y da Fig. 4.6, e o erro global obtidos com a formulação de Mur 2ª ordem estão ilustrados nas Figs. 4.11 a 4.13.

Observa-se que em T_x o erro local encontra-se na faixa de 10^{-2} , em concordância com a literatura [Moore et al., 1988]. Em T_y , o erro local encontra-se na faixa de 10^{-2} , sendo,

portanto, semelhante ao erro encontrado em T_x .

O erro global situa-se na faixa de 10^{-4} para os 150 primeiros instantes de tempo, em concordância com [Moore et al., 1988].

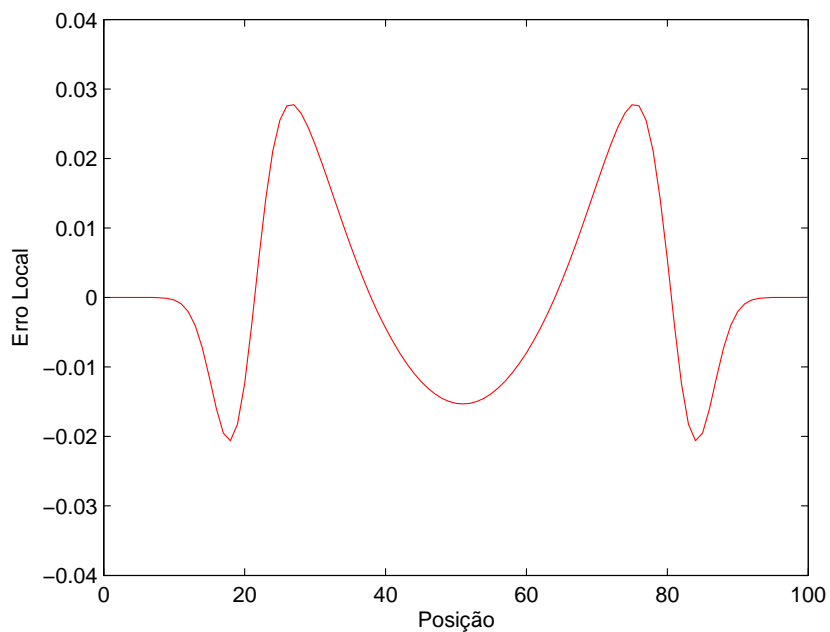


Figura 4.11: Erro local para Mur na linha de teste T_x

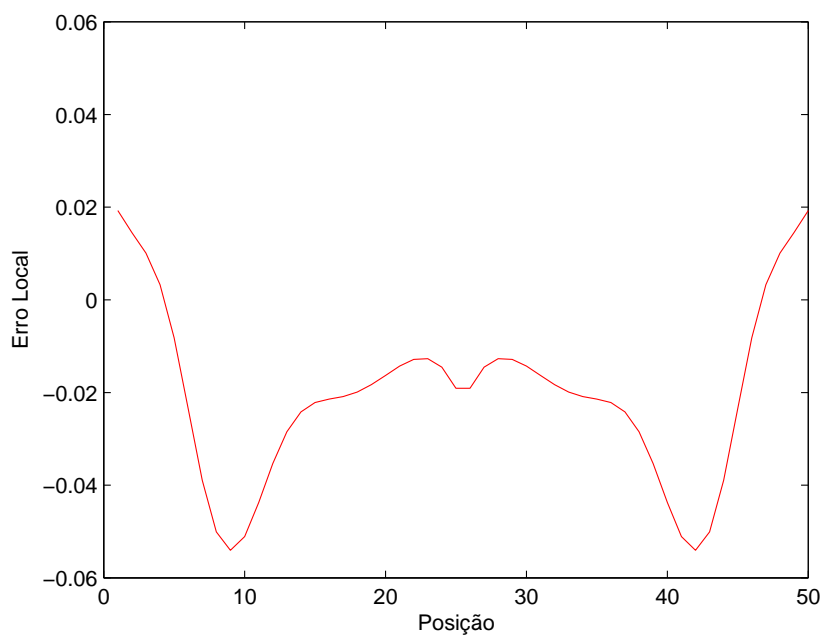


Figura 4.12: Erro local para Mur na linha de teste T_y

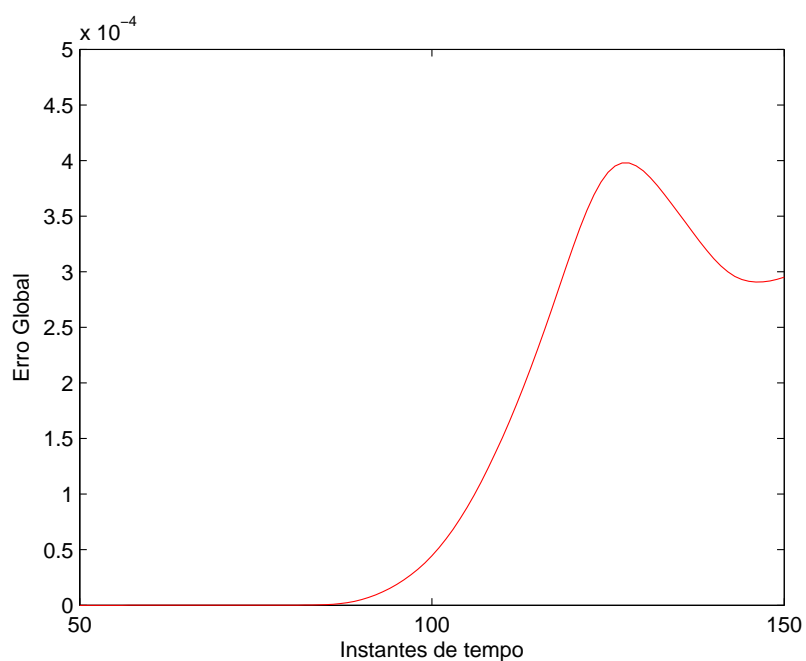


Figura 4.13: Erro global para Mur

Constata-se, portanto, que a formulação de Mur de 2ª ordem apresenta valores aceitáveis para simulações em engenharia para os erros locais e global. Tal constatação se justifica pela concordância dos valores apresentados comparados com os valores disponíveis em [Moore et al., 1988].

4.3.2 Condição de Contorno Analítica de Trefethen

Ao aplicar as aproximações da Tabela 3.1 para a CCA de Trefethen foi verificado que apenas as duas primeiras aproximações, Padé e Chebyshev em um subintervalo, apresentaram resultados satisfatórios. As outras aproximações se mostraram instáveis.

A Fig. 4.14 apresenta o comportamento do coeficiente de reflexão para a CCA de Trefethen utilizando as aproximações de Padé e Chebyshev em um subintervalo em função do ângulo de incidência no intervalo $[0, \pi/2]$. A figura mostra R menor que 1% para $0 < \theta < 45^\circ$ para as duas aproximações. A medida que o ângulo de incidência aumenta, os valores para os coeficientes de reflexão tendem a se estabilizar, o valor máximo apresentado é referente à incidência normal. O ângulo de absorção exata ocorre quando $\theta = 0^\circ$.

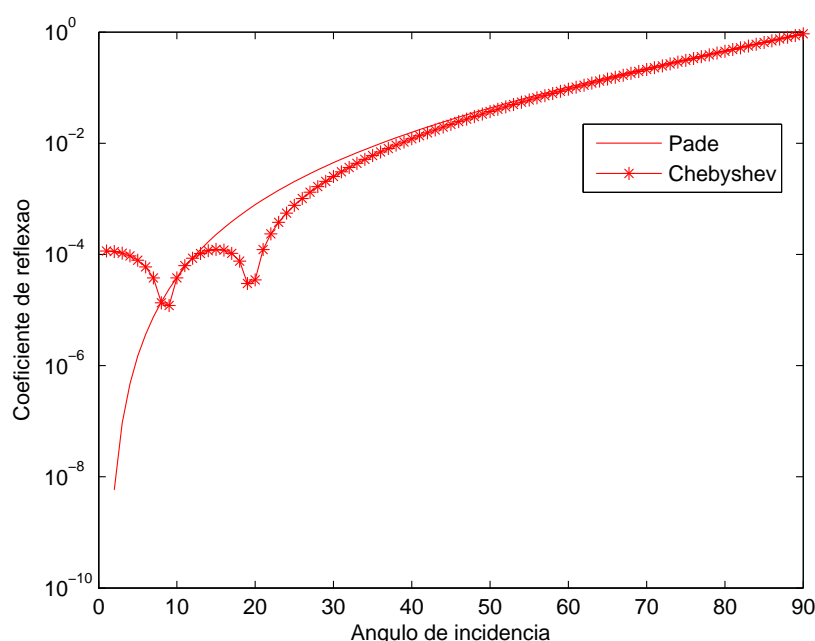


Figura 4.14: Coeficiente de reflexão versus ângulo de incidência da onda para as aproximações de Padé e Chebyshev

Erro Relativo

As Figs. 4.15 a 4.18 mostram o erro relativo de H_z calculado pela equação (4.3) para as equações de Trefethen utilizando a aproximação de Padé para os pontos $P1$ a $P4$ definidos na Fig. 4.4.

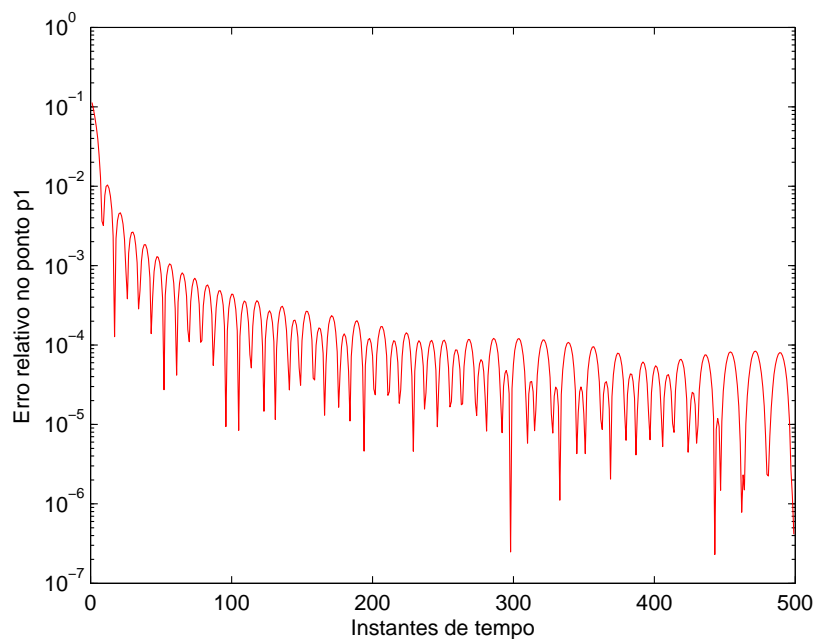


Figura 4.15: Erro relativo para a CCA de Trefethen utilizando a aproximação de Padé no ponto P_1

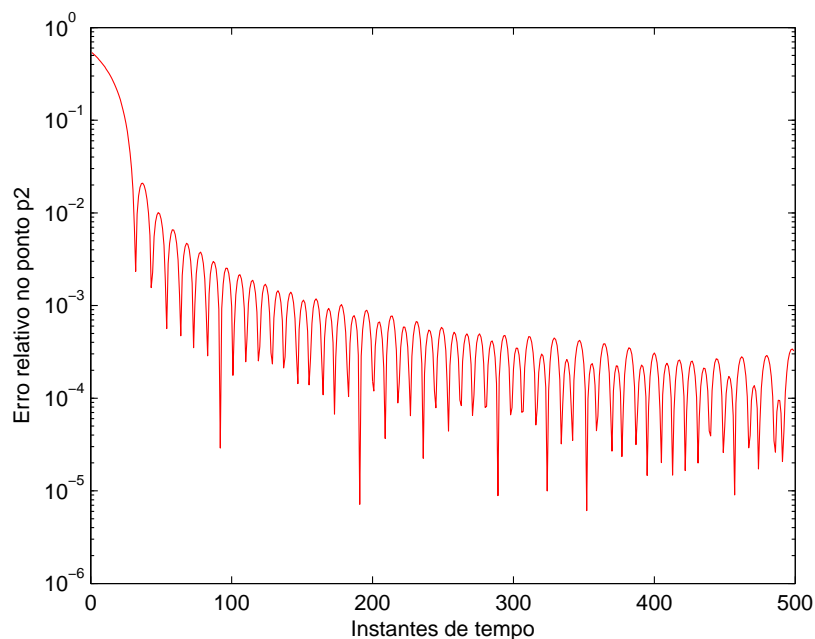


Figura 4.16: Erro relativo para a CCA de Trefethen utilizando a aproximação de Padé no ponto P_2

As Figs. 4.19 a 4.22 mostram o erro relativo de H_z calculado pela equação (4.3) para as equações de Trefethen utilizando a aproximação de Chebyshev para os pontos P_1 a P_4 definidos na Fig. 4.4.

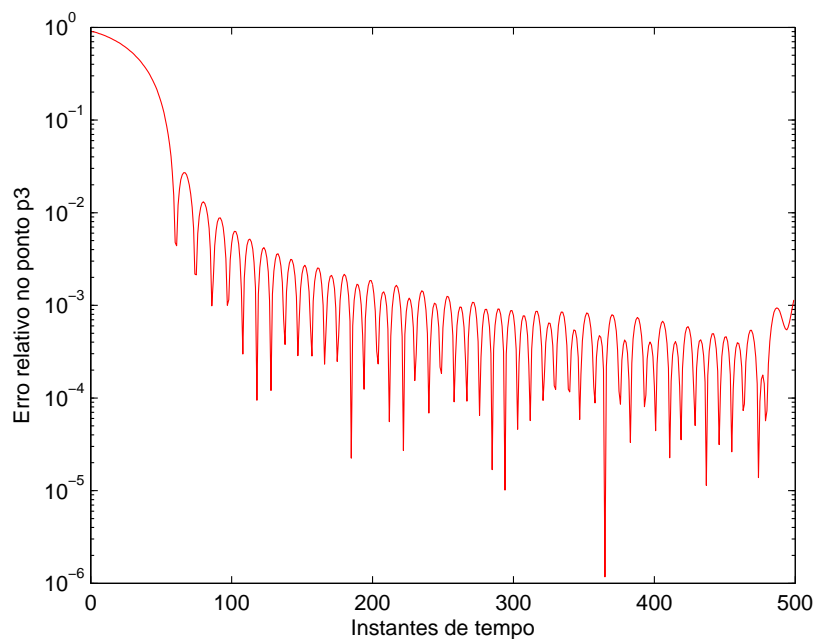


Figura 4.17: Erro relativo para a CCA de Trefethen utilizando a aproximação de Padé no ponto P_3

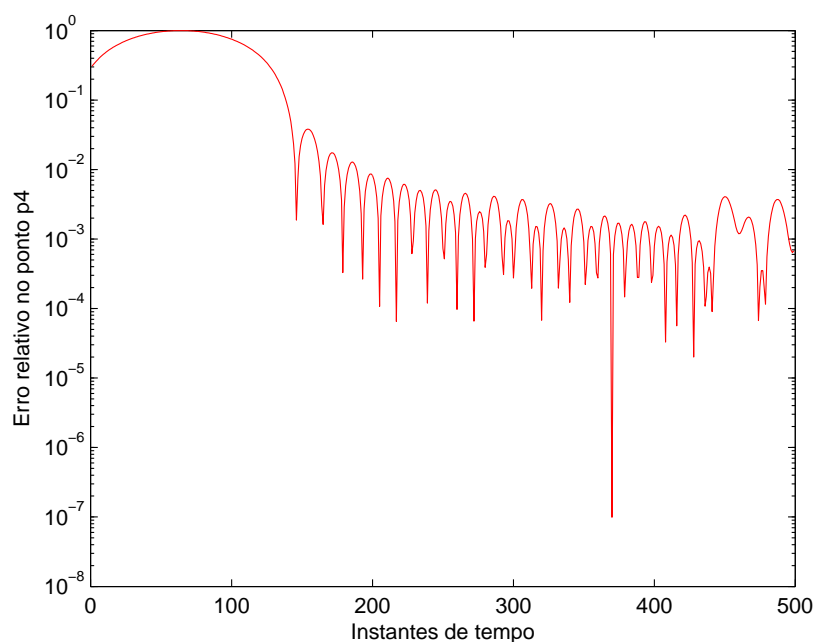


Figura 4.18: Erro relativo para a CCA de Trefethen utilizando a aproximação de Padé no ponto P_4

Semelhante ao resultado apresentado para Mur de 2^a ordem, o erro relativo observado nos pontos P_1 a P_3 , para as duas aproximações estudadas, situa-se na escala entre 10^{-2} a 10^{-4} a partir de $n \geq 50$. Para o ponto P_4 , observa-se que o erro relativo encontra-se na faixa 10^{-2} a 10^{-3} a partir de $n \geq 150$, sendo portanto, da ordem de 10 vezes maior em

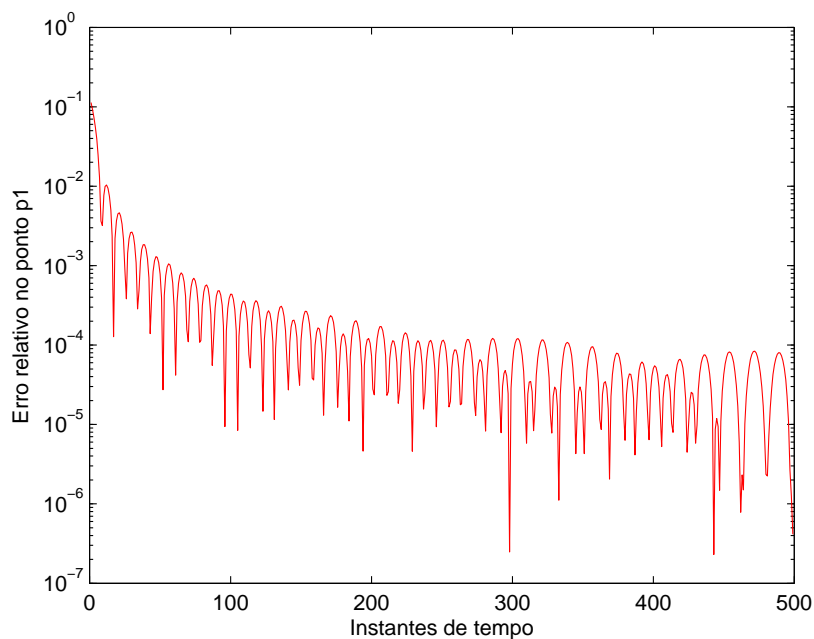


Figura 4.19: Erro relativo para a CCA de Trefethen utilizando a aproximação de Chebyshev no ponto P_1 .

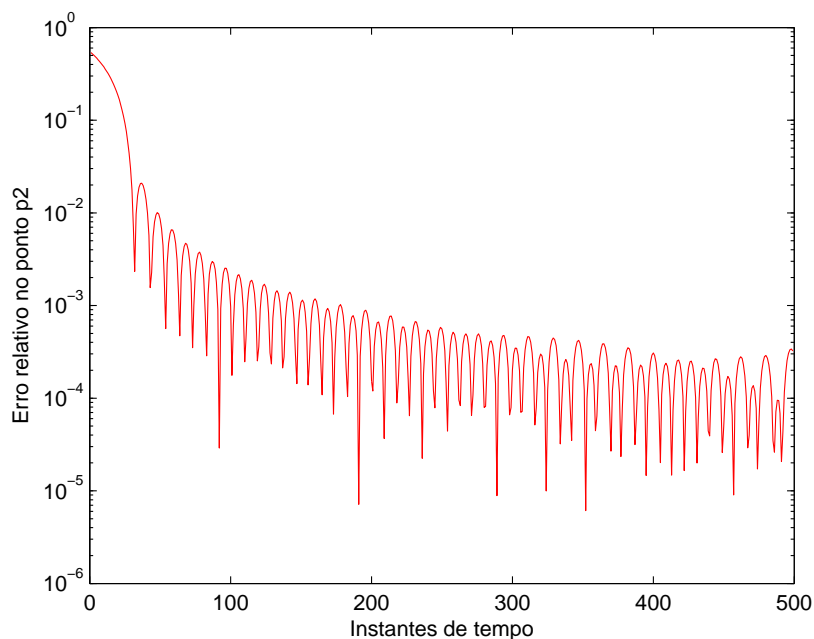


Figura 4.20: Erro relativo para a CCA de Trefethen utilizando a aproximação de Chebyshev no ponto P_2 .

comparação com os pontos P_1 a P_3 .

Para $n \leq 50$, nos pontos P_1 a P_3 , e $n \leq 150$, no ponto P_4 , observa-se que o erro relativo apresenta valores na ordem de 10^0 a 10^{-2} . Isso se justifica pelo fato de a solução analítica considerar que no instante $n = 0$ já existe campo em todos os pontos, o que difere

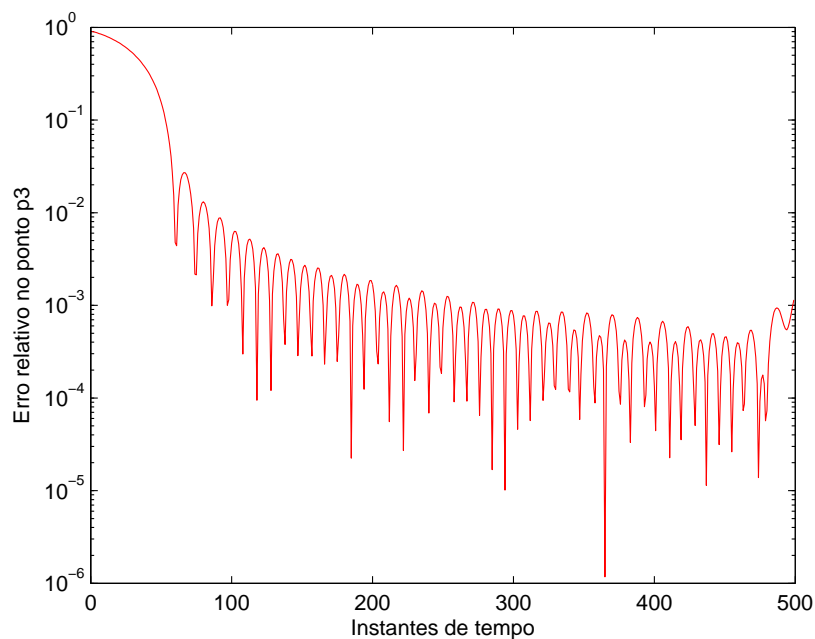


Figura 4.21: Erro relativo para a CCA de Trefethen utilizando a aproximação de Chebyshev no ponto P_3 .

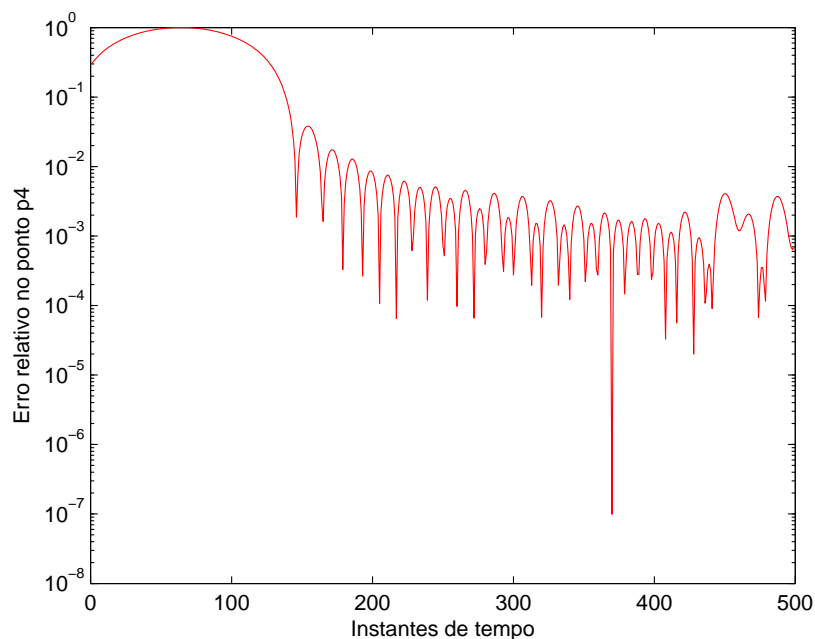


Figura 4.22: Erro relativo para a CCA de Trefethen utilizando a aproximação de Chebyshev no ponto P_4 .

da solução do FDTD, pois o campo “demora” alguns instantes de tempo para atingir os quatro pontos de interesse.

Constata-se, portanto, que a formulação de Trefethen, utilizando as aproximações de Padé e Chebyshev, apresenta erros relativos da ordem de 10^{-3} , o que é aceitável para uma

grande gama de problemas envolvendo simulações em engenharia.

Erro Local e Global

Os erros locais, nas linhas Tx e Ty da Fig. 4.6, e o erro global obtidos com a formulação de Trefethen utilizando a aproximação de Padé estão ilustrados nas Figs. 4.23 a 4.26.

As Figs. 4.24 e 4.27 ilustram os erros local e global, respectivamente, apresentados pelo artigo utilizado como referência para estes cálculos [Moore et al., 1988]. Como pode-se notar, existe uma semelhança significativa entre as figuras apresentadas pelo artigo e as figuras obtidas nas simulações propostas. Isto significa que a implementação obteve um resultado satisfatório.

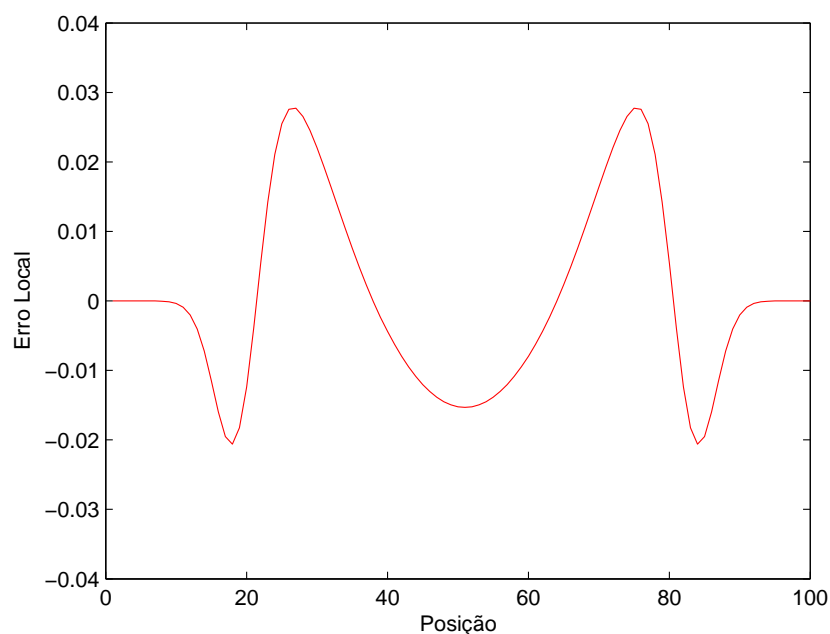


Figura 4.23: Erro local para Trefethen utilizando a aproximação de Padé na linha de teste Tx

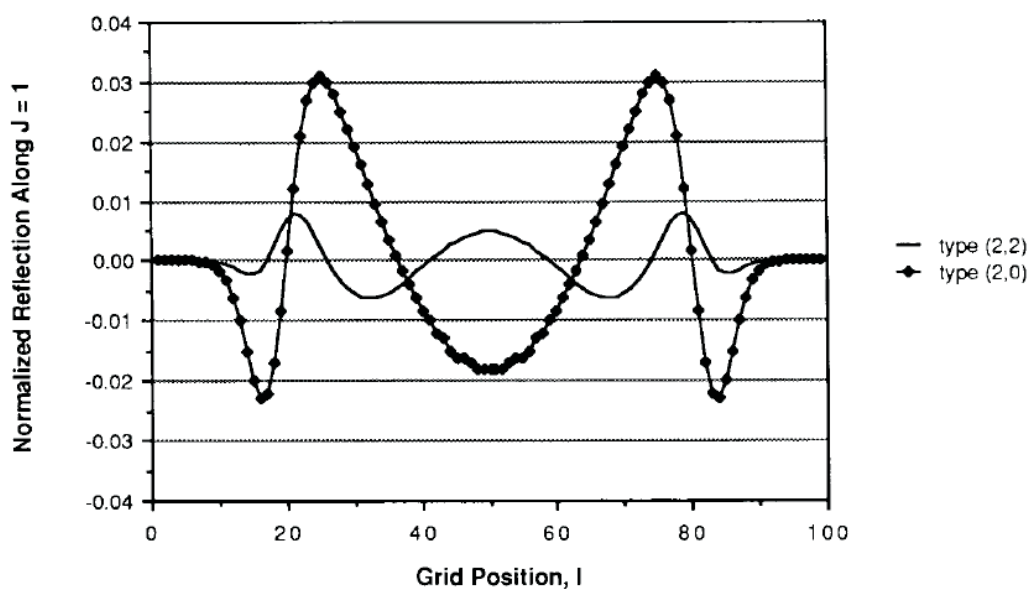


Figura 4.24: Erro local para Trefethen utilizando a aproximação de Padé apresentado no artigo [Moore et al., 1988]

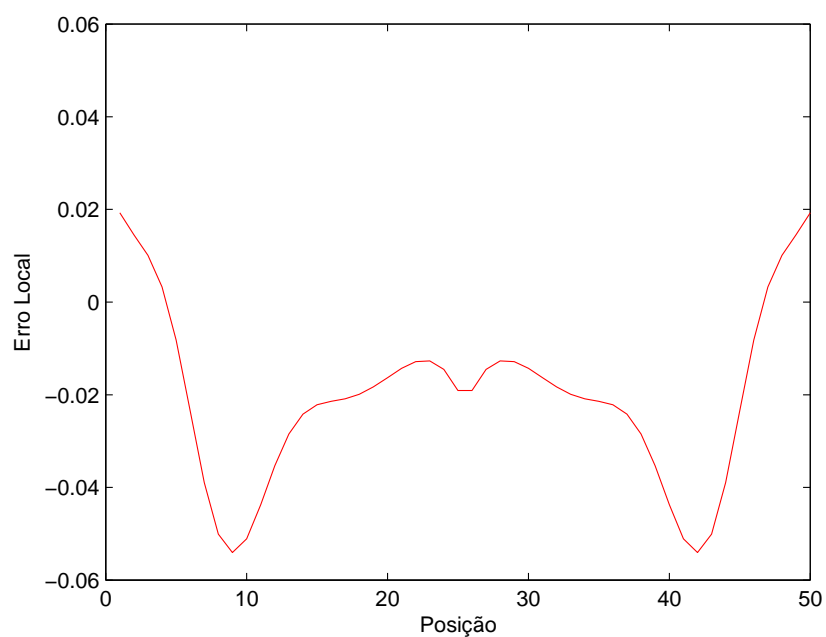


Figura 4.25: Erro local para Trefethen utilizando a aproximação de Padé na linha de teste T_y

Os erros locais, nas linhas T_x e T_y da Fig. 4.6, e o erro global obtidos com a formulação de Trefethen utilizando a aproximação de Chebyshev estão ilustrados nas Figs. 4.28 a 4.30.

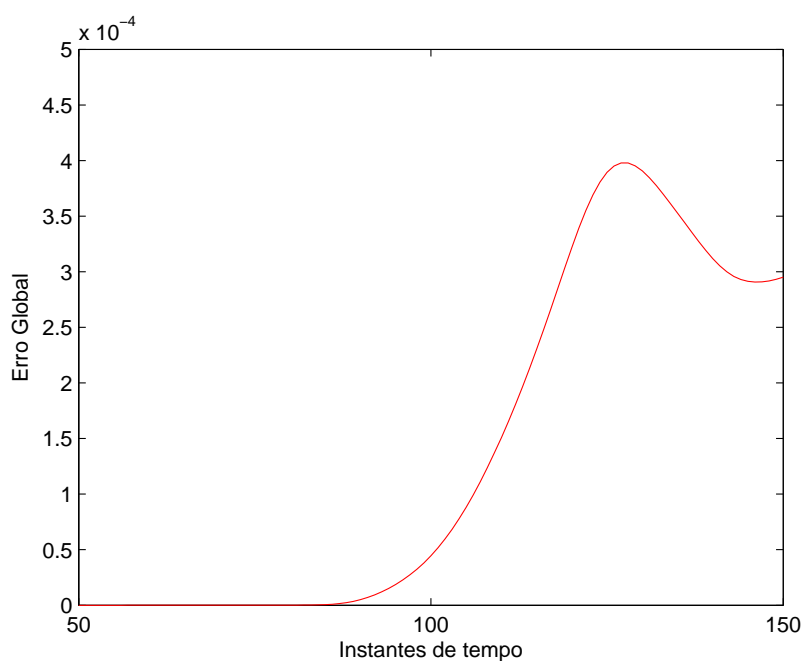


Figura 4.26: Erro global para Trefethen utilizando a aproximação de Padé

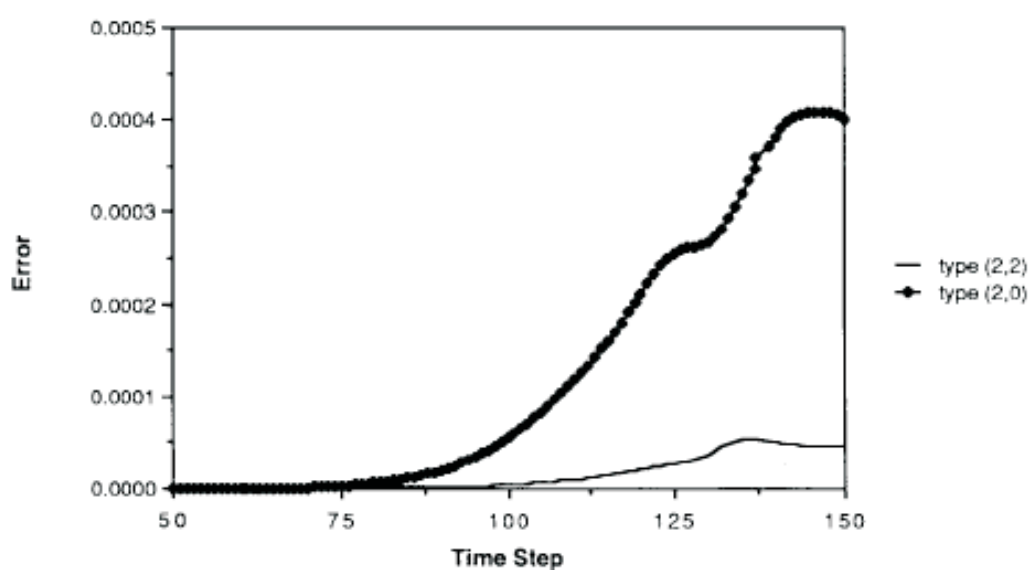


Figura 4.27: Erro global para Trefethen utilizando a aproximação de Padé apresentado no artigo [Moore et al., 1988]

Para as duas aproximações, observa-se que em Tx o erro local encontra-se na faixa de 10^{-2} , em concordância com a literatura [Moore et al., 1988]. Em Ty , o erro local encontra-se na faixa de 10^{-2} , sendo, portanto, semelhante ao erro encontrado em Tx .

O erro global situa-se na faixa de 10^{-4} para os 150 primeiros instantes de tempo, em concordância com [Moore et al., 1988].

Constata-se, portanto, que a formulação de Trefethen, utilizando as aproximações de

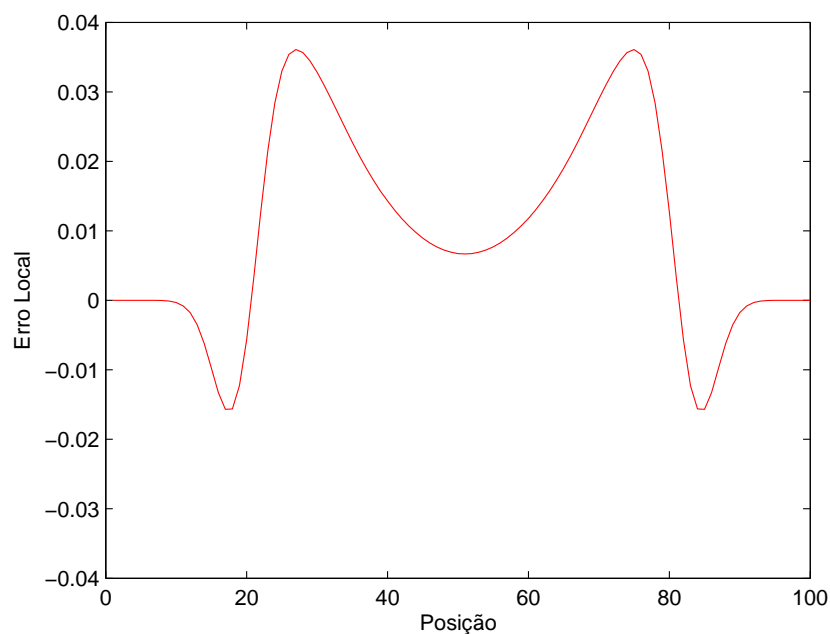


Figura 4.28: Erro local para Trefethen utilizando a aproximação de Chebyshev na linha de teste Tx

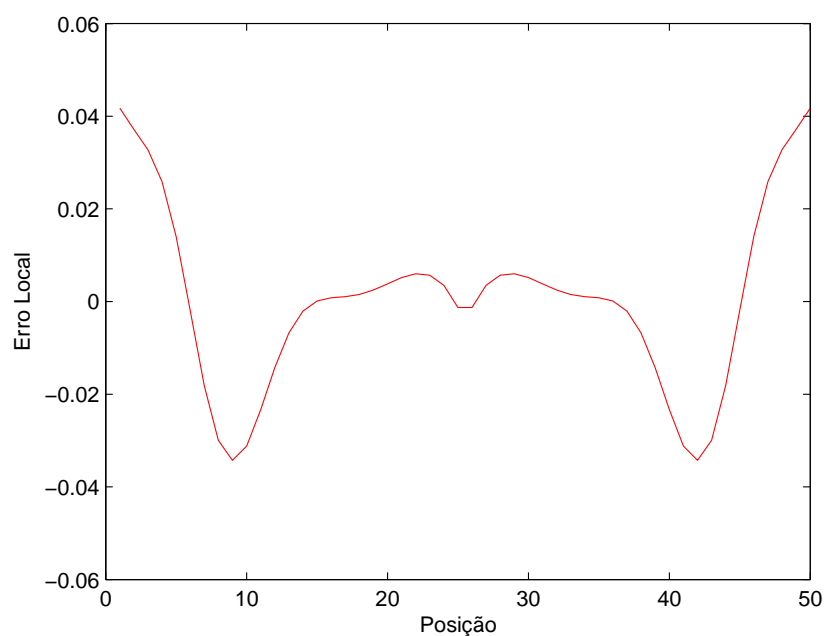


Figura 4.29: Erro local para Trefethen utilizando a aproximação de Chebyshev na linha de teste Ty

Padé e Chebyshev, apresenta valores aceitáveis para simulações em engenharia para os erros locais e global. Tal constatação se justifica pela concordância dos valores apresentados comparados com os valores disponíveis em [Moore et al., 1988].

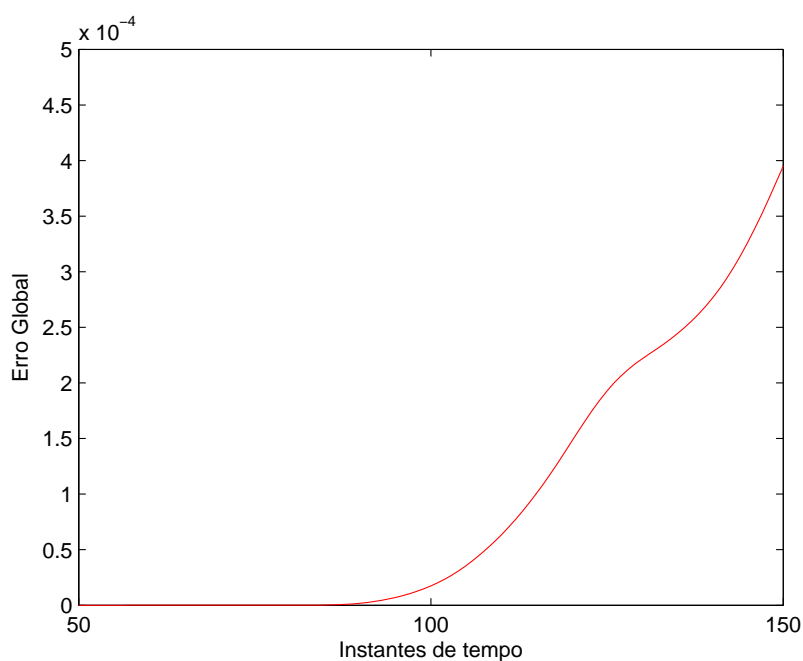


Figura 4.30: Erro global para Trefethen utilizando a aproximação de Chebyshev

4.3.3 Condição de Contorno Analítica de Higdon

De forma análoga a Trefethen, para Higdon foi verificado que apenas as duas primeiras aproximações da Tabela 3.1, Padé e Chebyshev em um subintervalo, apresentaram resultados satisfatórios. As outras aproximações se mostraram instáveis.

Erro Relativo

As Figs. 4.31 a 4.34 mostram o erro relativo de H_z calculado pela equação (4.3) para as equações de Higdon utilizando a aproximação de Padé para os pontos $P1$ a $P4$ definidos na Fig. 4.4.

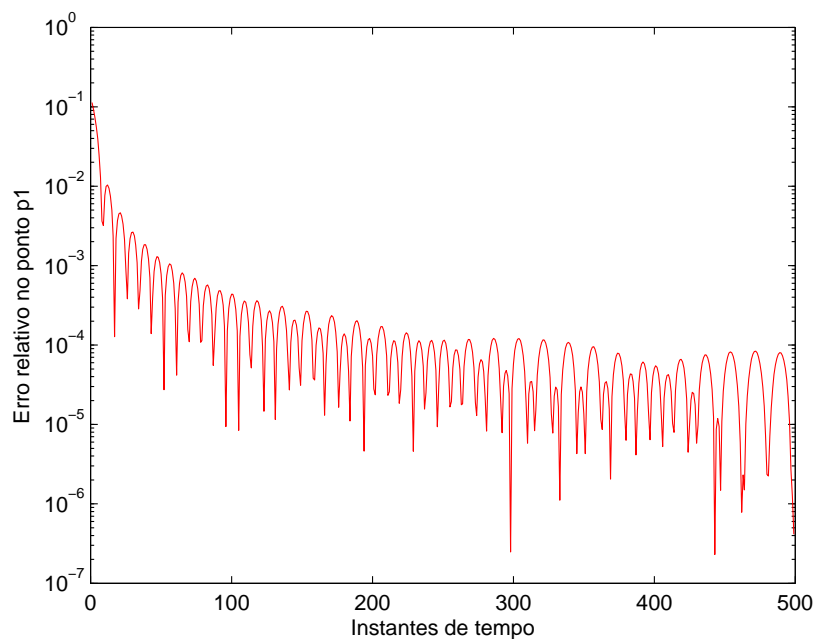


Figura 4.31: Erro relativo para a CCA de Higdon utilizando a aproximação de Padé no ponto P_1

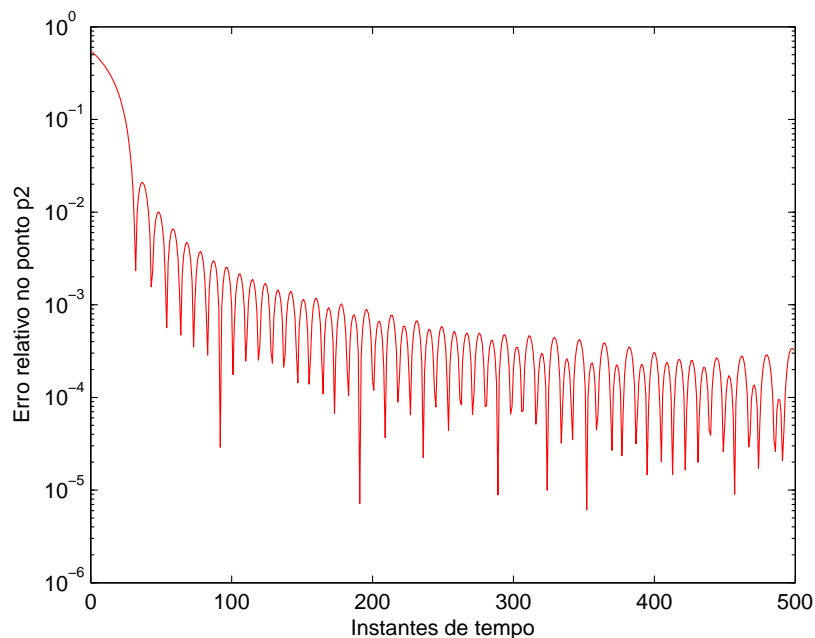


Figura 4.32: Erro relativo para a CCA de Higdon utilizando a aproximação de Padé no ponto P_2

As Figs. 4.35 a 4.38 mostram o erro relativo de H_z calculado pela equação (4.3) para as equações de Higdon utilizando a aproximação de Chebyshev para os pontos P_1 a P_4 definidos na Fig. 4.4.

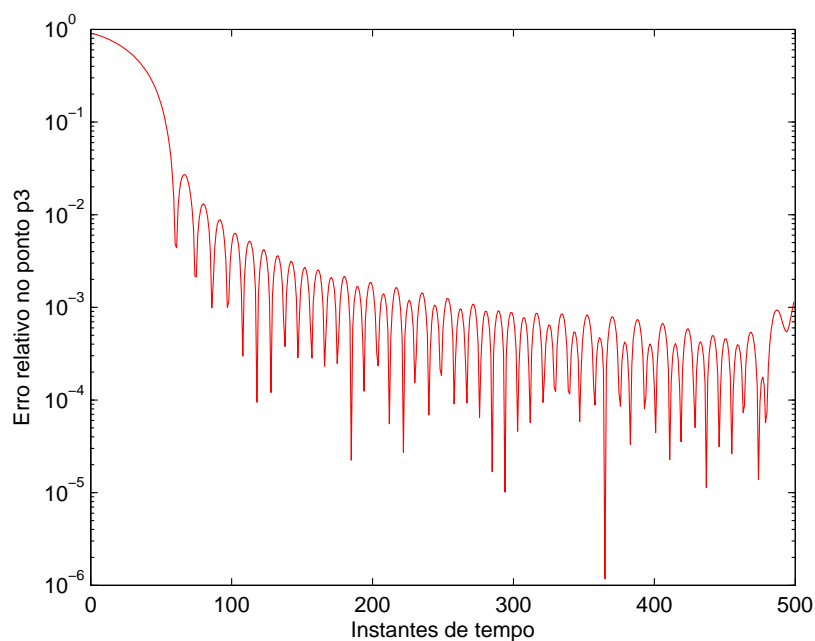


Figura 4.33: Erro relativo para a CCA de Higdon utilizando a aproximação de Padé no ponto P_3

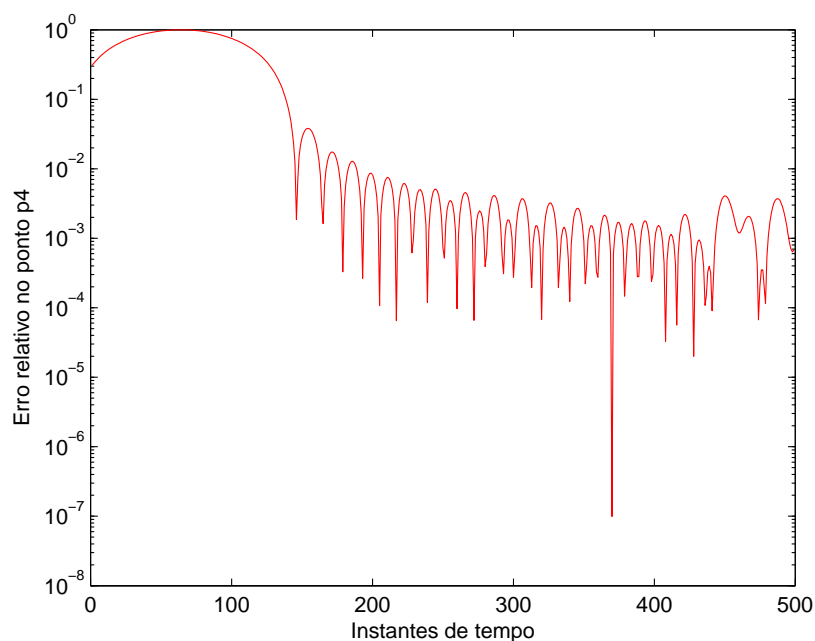


Figura 4.34: Erro relativo para a CCA de Higdon utilizando a aproximação de Padé no ponto P_4

De forma análoga aos resultados apresentado para Mur de 2^a ordem e Trefethen, utilizando as aproximações de Padé e Chebyshev, o erro relativo observado nos pontos P_1 a P_3 , para as duas aproximações estudadas, situa-se na escala entre 10^{-2} a 10^{-4} a partir de

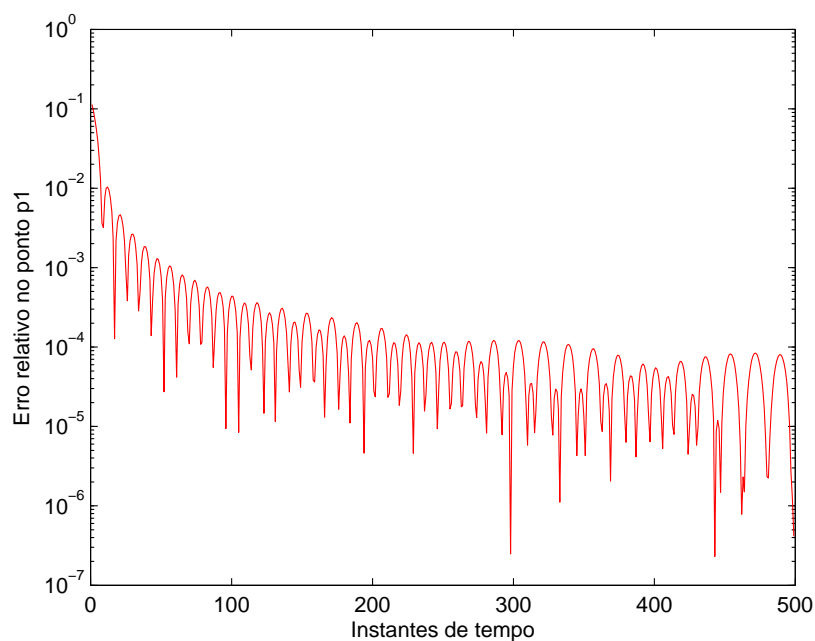


Figura 4.35: Erro relativo para a CCA de Higdon utilizando a aproximação de Chebyshev no ponto P_1 .

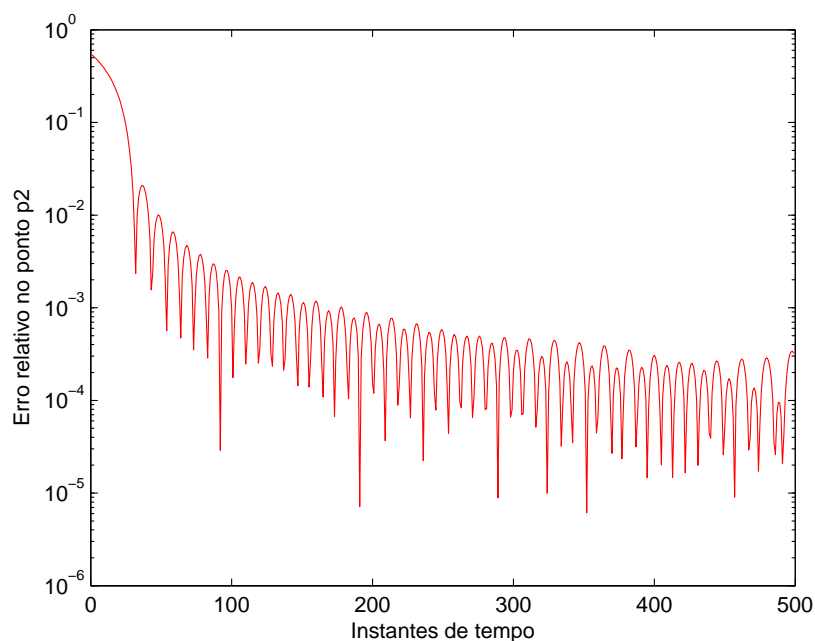


Figura 4.36: Erro relativo para a CCA de Higdon utilizando a aproximação de Chebyshev no ponto P_2 .

$n \geq 50$. Para o ponto P_4 , observa-se que o erro relativo encontra-se na faixa 10^{-2} a 10^{-3} a partir de $n \geq 150$, sendo portanto, da ordem de 10 vezes maior em comparação com os pontos P_1 a P_3 .

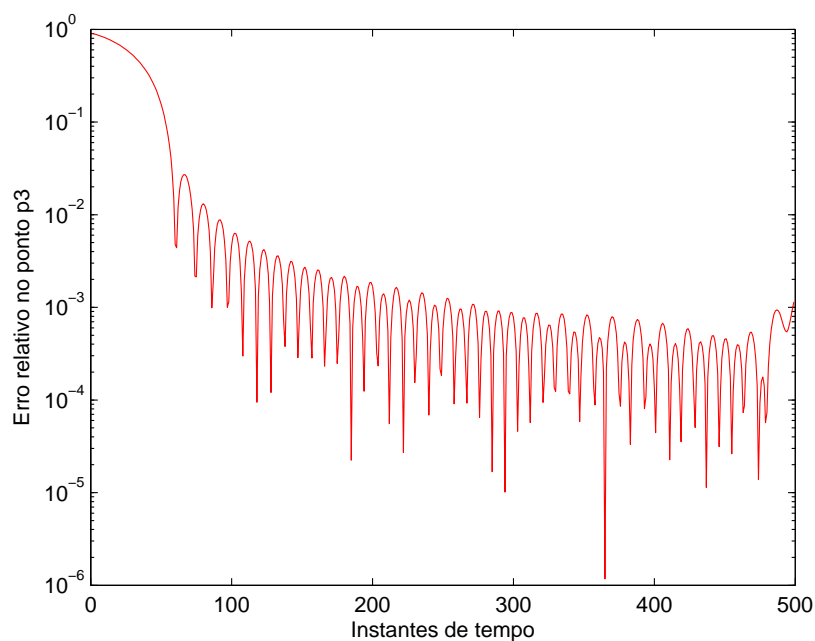


Figura 4.37: Erro relativo para a CCA de Higdon utilizando a aproximação de Chebyshev no ponto P_3 .

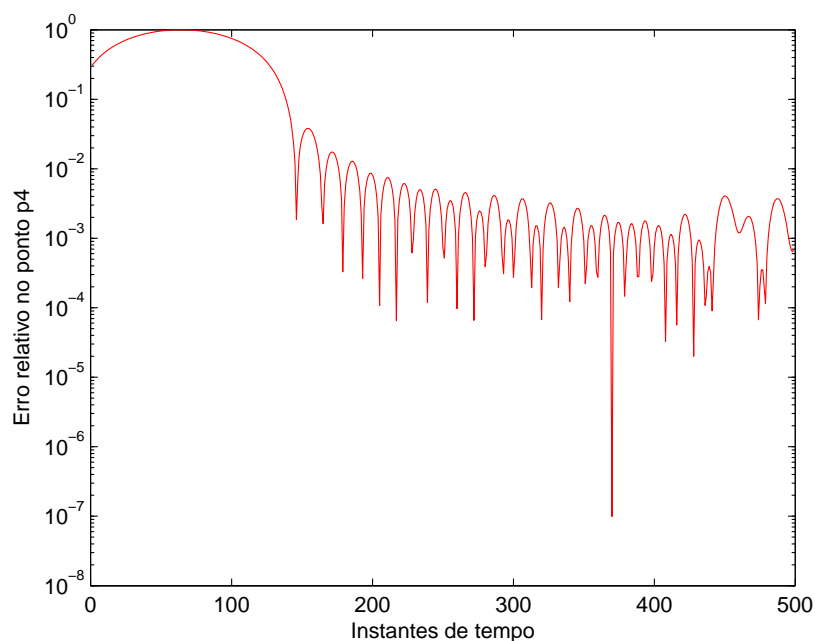


Figura 4.38: Erro relativo para a CCA de Higdon utilizando a aproximação de Chebyshev no ponto P_4 .

Para $n \leq 50$, nos pontos P_1 a P_3 , e $n \leq 150$, no ponto P_4 , observa-se que o erro relativo apresenta valores na ordem de 10^0 a 10^{-2} . Isso se justifica pelo fato de a solução analítica considerar que no instante $n = 0$ já existe campo em todos os pontos, o que difere

da solução do FDTD, pois o campo “demora” alguns instantes de tempo para atingir os quatro pontos de interesse.

Constata-se, portanto, que a formulação de Higdon, utilizando as aproximações de Padé e Chebyshev, apresenta erros relativos da ordem de 10^{-3} , o que é aceitável para uma grande gama de problemas envolvendo simulações em engenharia.

Erro Local e Global

Os erros locais, nas linhas T_x e T_y da Fig. 4.6, e o erro global obtidos com a formulação de Higdon utilizando a aproximação de Padé estão ilustrados nas Figs. 4.39 a 4.41.

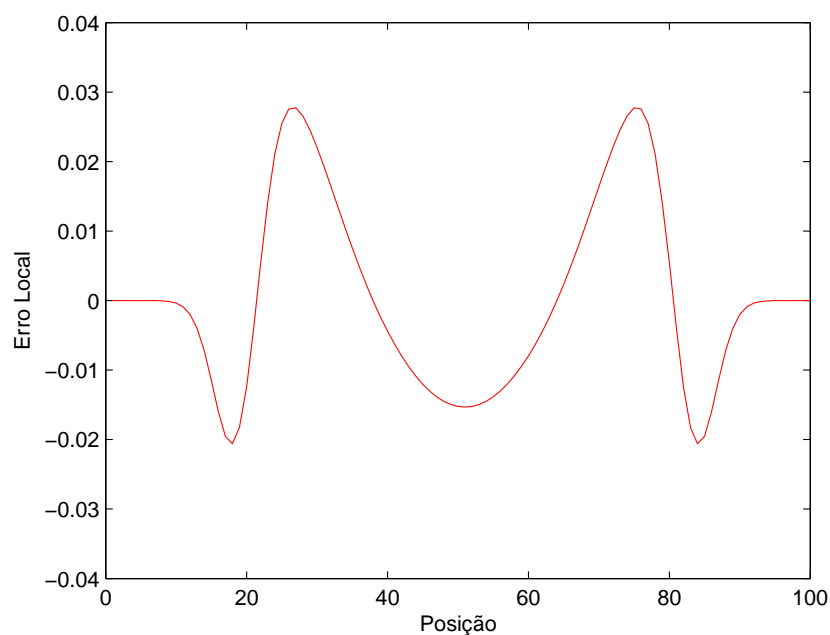


Figura 4.39: Erro local para Higdon utilizando a aproximação de Padé na linha de teste T_x

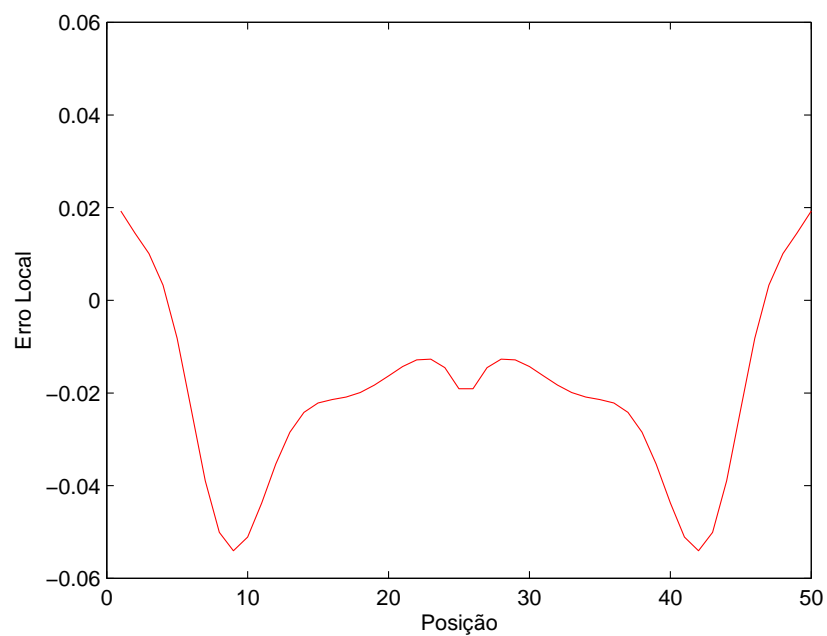


Figura 4.40: Erro local para Higdon utilizando a aproximação de Padé na linha de teste Ty

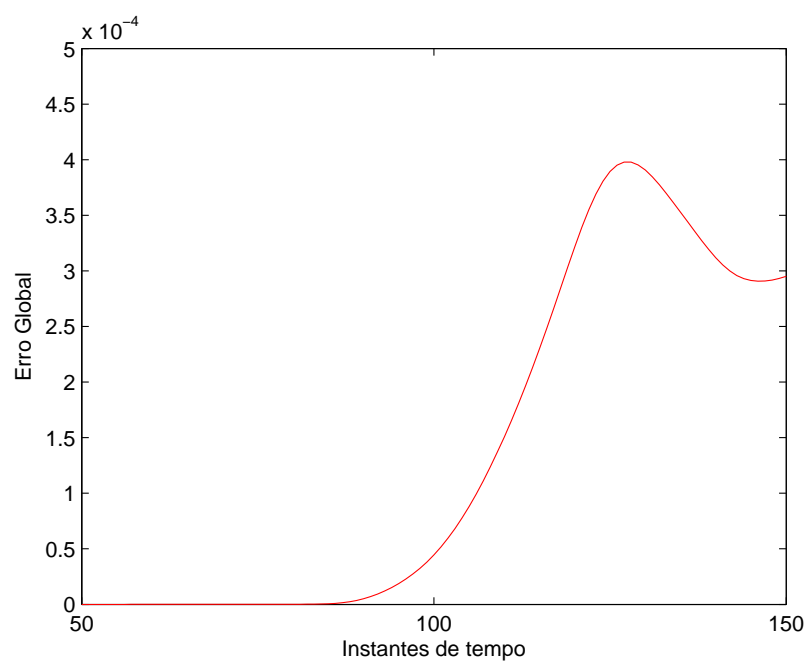


Figura 4.41: Erro global para Higdon utilizando a aproximação de Padé

Os erros locais, nas linhas T_x e T_y da Fig. 4.6, e o erro global obtidos com a formulação de Higdon utilizando a aproximação de Chebyshev estão ilustrados nas Figs. 4.42 a 4.44.

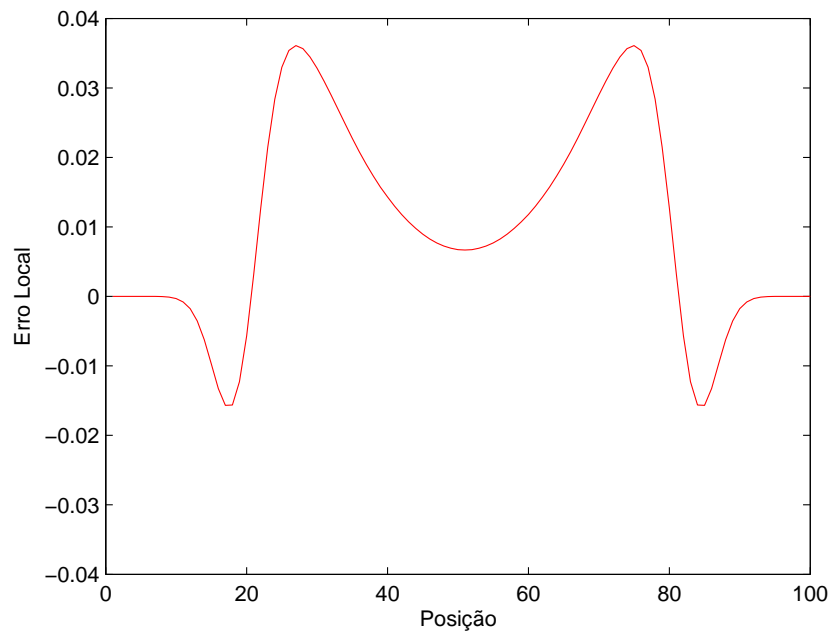


Figura 4.42: Erro local para Higdon utilizando a aproximação de Chebyshev na linha de teste T_x

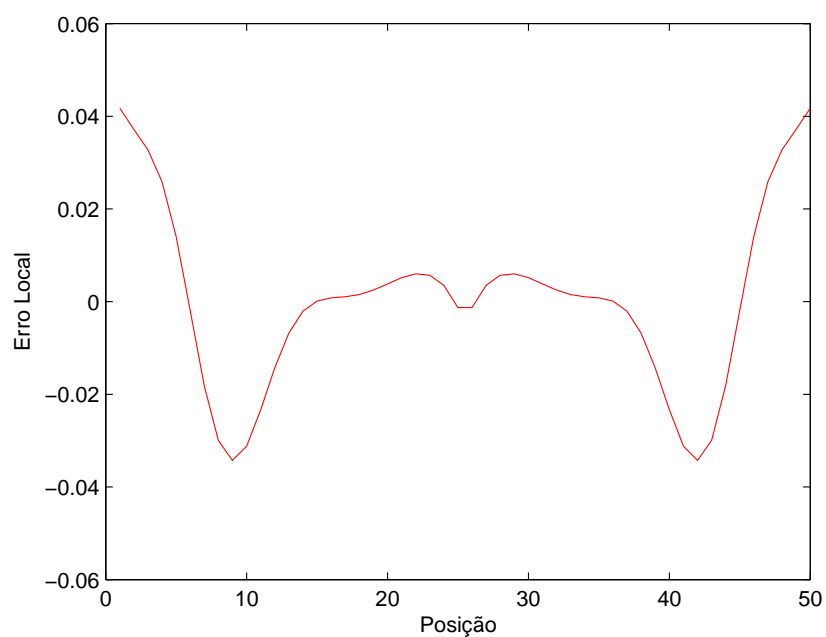


Figura 4.43: Erro local para Higdon utilizando a aproximação de Chebyshev na linha de teste T_y

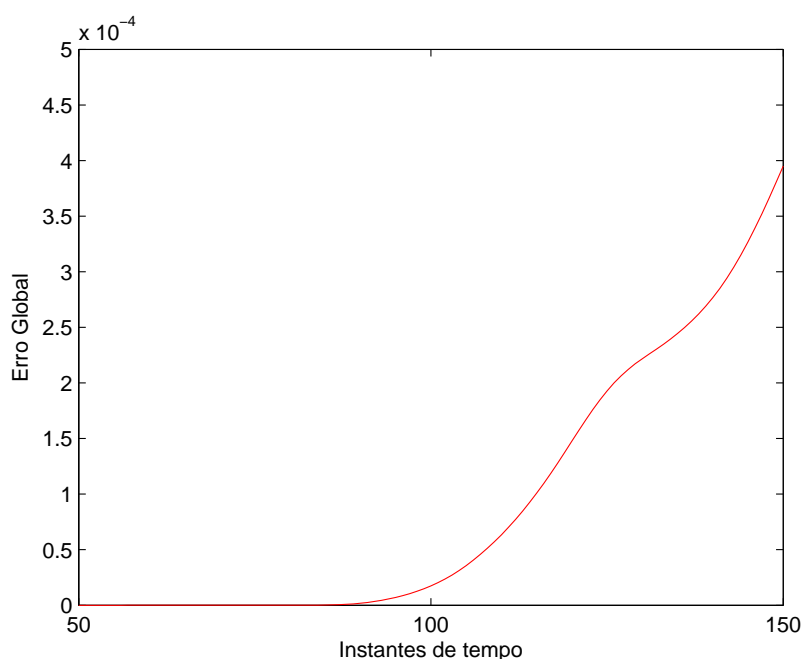


Figura 4.44: Erro global para Higdon utilizando a aproximação de Chebyshev

Para as duas aproximações, observa-se que em Tx o erro local encontra-se na faixa de 10^{-2} , em concordância com a literatura [Moore et al., 1988]. Em Ty , o erro local encontra-se na faixa de 10^{-2} , sendo, portanto, semelhante ao erro encontrado em Tx .

O erro global situa-se na faixa de 10^{-4} para os 150 primeiros instantes de tempo, em concordância com [Moore et al., 1988].

Constata-se, portanto, que a formulação de Higdon, utilizando as aproximações de Padé e Chebyshev, apresenta valores aceitáveis para simulações em engenharia para os erros locais e global. Tal constatação se justifica pela concordância dos valores apresentados comparados com os valores disponíveis em [Moore et al., 1988].

Como pode-se observar, os resultados referentes a Mur, Trefethen e Higdon forma bastante próximos. Tal fato se deve à semelhança entre a formulação destas Condições de Contorno Analíticas, isto é, a formulação de Higdon é derivada de Trefethen, que por sua vez é derivada de Mur.

4.4 Resultados de Condições de Contorno Absorventes

4.4.1 Condição de Contorno Absorvente PML

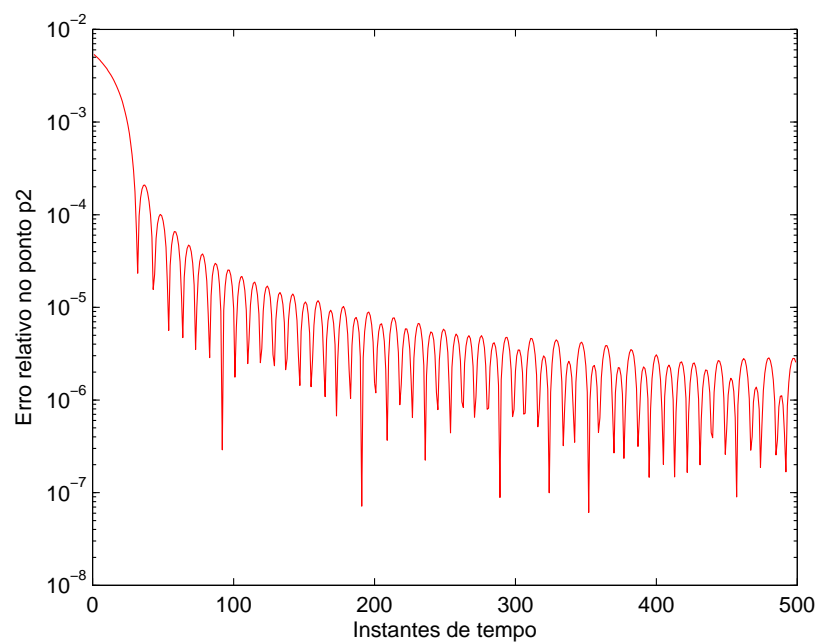
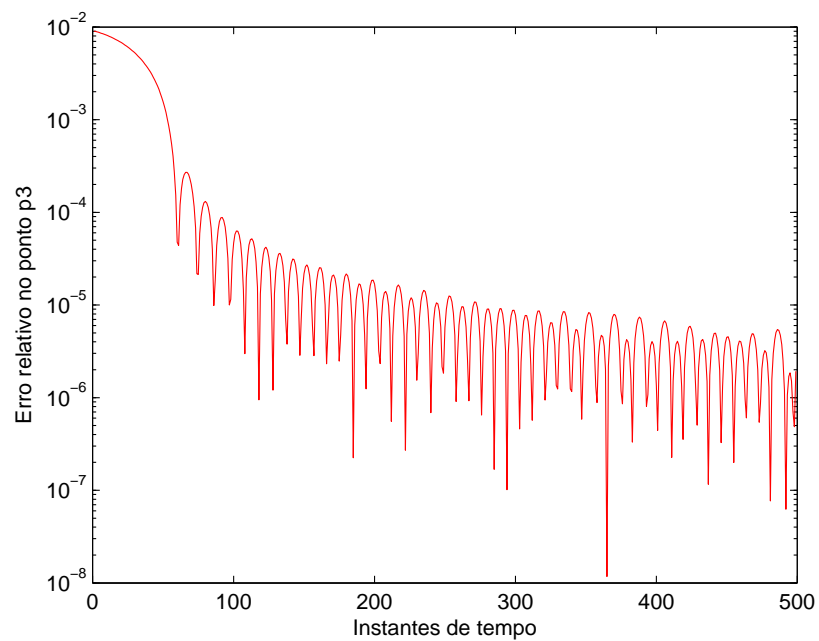
Erro Relativo

As Figs. 4.45 a 4.48 mostram o erro relativo de H_z calculado pela equação (4.3) utilizando as equações da PML para os pontos $P1$ a $P4$ definidos na Fig. 4.4.

O erro relativo observado nos pontos $P1$ a $P3$ situa-se na escala entre 10^{-4} a 10^{-6} a partir de $n \geq 50$. Para o ponto $P4$, observa-se que o erro relativo encontra-se na faixa 10^{-3} a 10^{-5} a partir de $n \geq 150$, sendo portanto, 10 vezes maior em comparação com os pontos $P1$ a $P3$.

Para $n \leq 50$, nos pontos $P1$ a $P3$, e $n \leq 150$, no ponto $P4$, observa-se que o erro relativo apresenta valores na ordem de 10^0 a 10^{-2} . Isso se justifica pelo fato de a solução analítica considerar que no instante $n = 0$ já existe campo em todos os pontos, o que difere da solução do FDTD, pois o campo “demora” alguns instantes de tempo para atingir os quatro pontos de interesse.

Ao comparar os resultados obtidos para a CCA PML com os resultados obtidos para a CCA de Mur, percebe-se que os resultados para as formulações da PML são da ordem de 10^2 mas precisos, como pode se observar na Fig. 4.48.

Figura 4.45: Erro relativo para a CCA de PML no ponto $P1$ Figura 4.46: Erro relativo para a CCA de PML no ponto $P2$

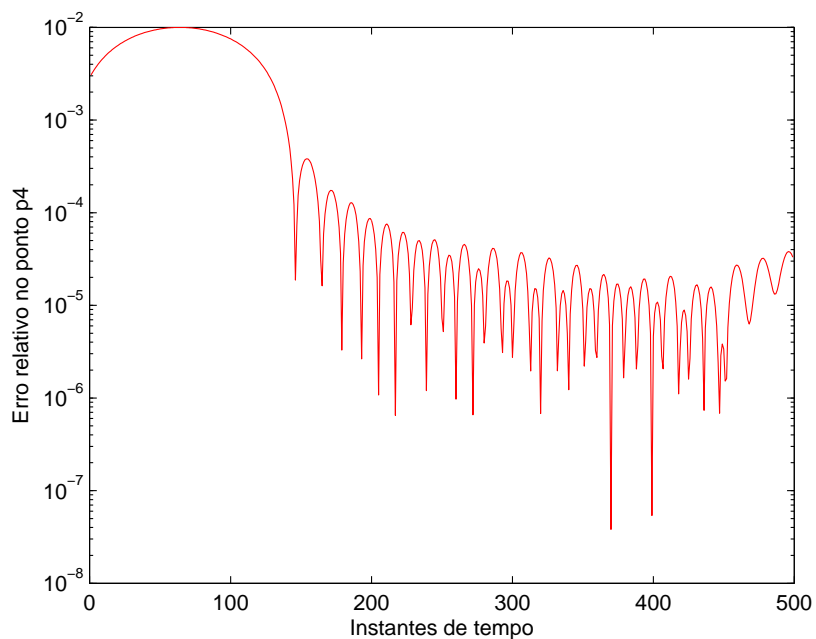


Figura 4.47: Erro relativo para a CCA de PML no ponto $P3$

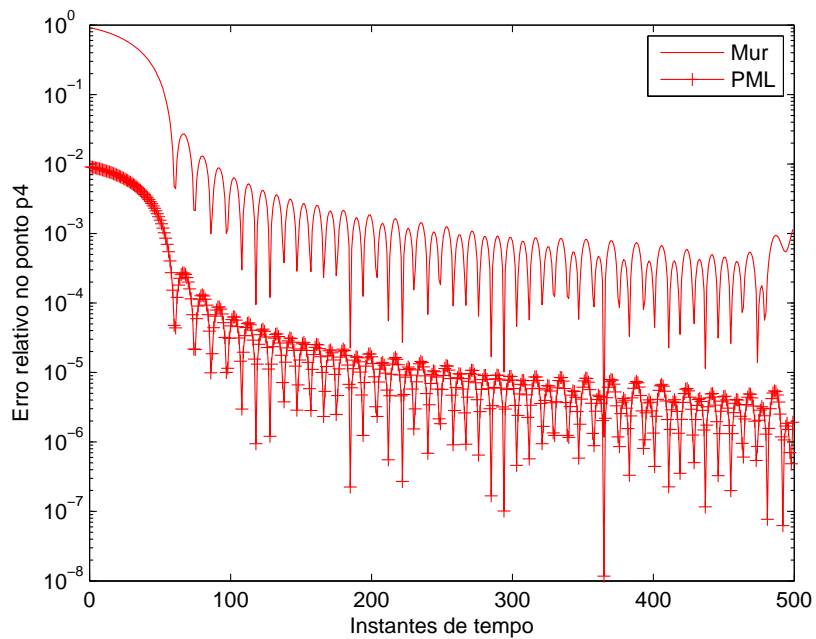


Figura 4.48: Erro relativo para a CCA de PML no ponto $P4$

Constata-se, portanto, que a formulação da PML apresenta erros relativos da ordem de 10^{-5} , cerca de 100 vezes menor que os resultados apresentados para a formulação das CCAs analíticas, o que é desejável para problemas envolvendo simulações em engenharia.

Erro Local e Global

Os erros locais, nas linhas T_x e T_y da Fig. 4.6, e o erro global obtidos com a formulação de Mur 2^a ordem estão ilustrados nas Figs. 4.49 a 4.51.

Observa-se que em T_x o erro local encontra-se na faixa de 10^{-6} , e em T_y , o erro local também encontra-se na faixa de 10^{-6} . Este resultado é aproximadamente 10^4 vezes menor que o resultado apresentado pelas formulação das CCAs analíticas.

O erro global situa-se na faixa de 10^{-5} para os 150 primeiros instantes de tempo, mantendo o formato característico da curva e apresentando-se menor que o erro global obtido para as CCAs analíticas.

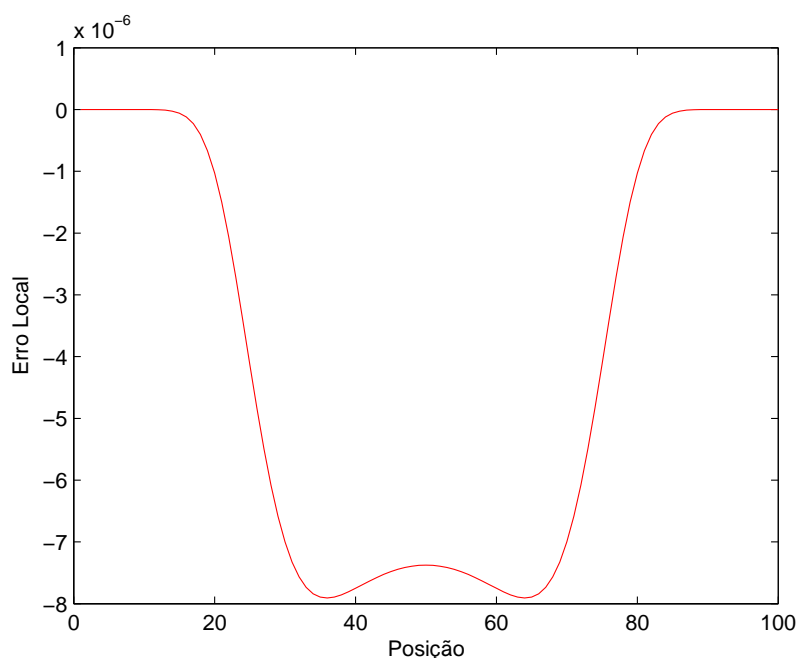


Figura 4.49: Erro local para PML na linha de teste Tx

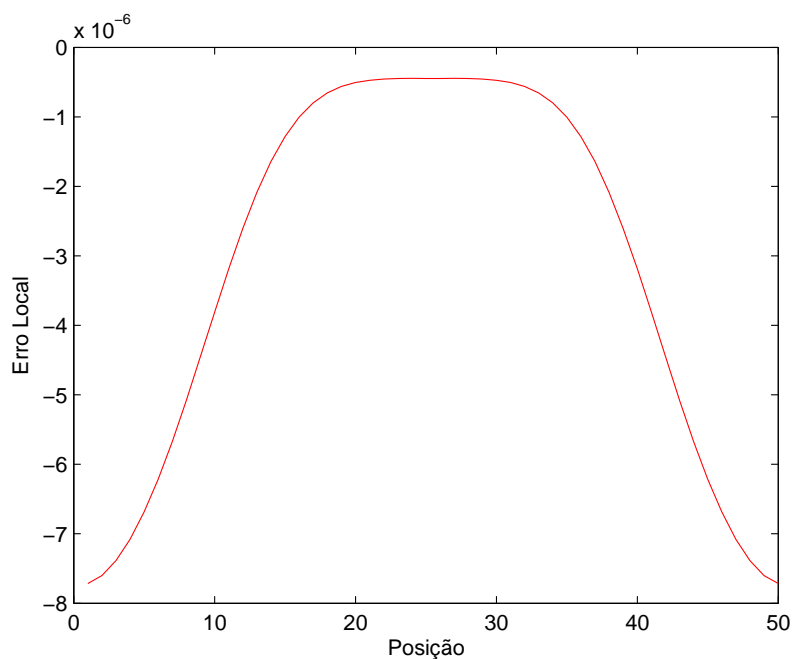


Figura 4.50: Erro local para PML na linha de teste Ty

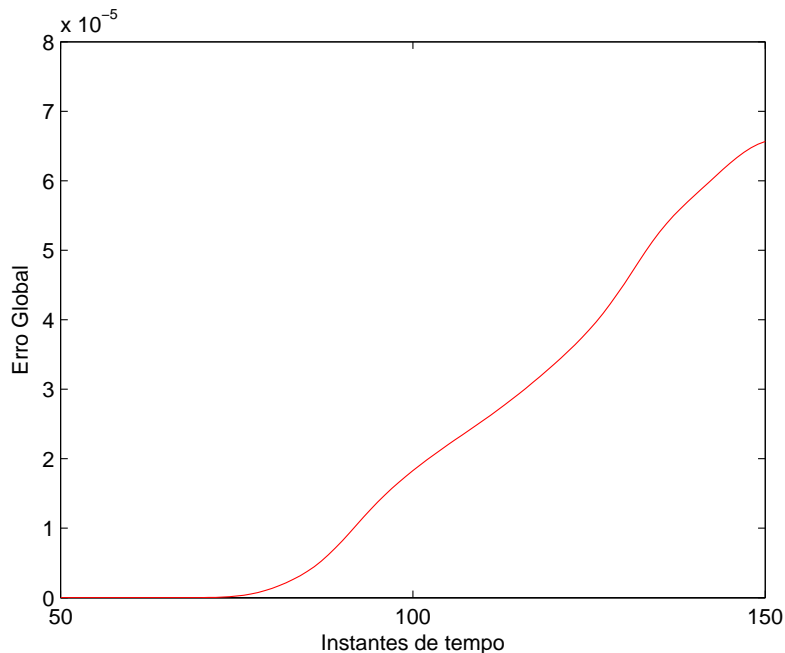


Figura 4.51: Erro global para PML

Constata-se, portanto, que a formulação da PML apresenta valores desejáveis para simulações em engenharia para os erros locais e global. Tal constatação se justifica pelos valores inferiores apresentados comparados com os valores apresentados pelas CCAs analíticas.

4.5 Discussão

4.5.1 Erro Relativo

Como dito anteriormente, a teoria das CCAs assumem que a propagação da onda no interior do domínio é igual à velocidade da luz, c . Contudo, em experimentos numéricos a velocidade de propagação, v_p é diferente e inferior à c . Taflove em [Taflove and Hagness, 2005], menciona que as CCAs tendem a forçar $v_p = c$, mas sem um refinamento de malha, é impossível evitar variações em v_p da ordem de 0,1% a 1%.

Para todas as CCAs analíticas estudadas neste trabalho os valores de reflexões espúrias obtidos permaneceram abaixo de 10^{-4} , garantindo assim a confiabilidade e a precisão desejada em relação as estas CCAs.

A CCA PML apresentou um padrão semelhante aos encontrados pelas CCAs analíticas, entretanto com um nível de precisão maior. Os valores médios encontrados para as CCAs analíticas permaneceram na faixa de 10^{-3} , enquanto que para a PML os valores médios permaneceram na faixa de 10^{-5} , ou seja, 10^2 vezes mais precisos.

Estes valores indicam que as CCAs analisadas possuem diferentes níveis de reflexões, sendo, portanto, aplicáveis em uma grande faixa de problemas em engenharia. Para problemas em que se necessita uma reflexão inferior a 10^{-4} recomenda-se a utilização da CCA PML.

4.5.2 Erro Local e Global

Analisando os erros locais e globais percebe-se que estes resultados seguem um padrão, ou seja, para todas as CCAs propostas as curvas resultantes apresentaram um formato semelhante. Tal padrão indica que não há discordâncias relevantes quanto à implementação das técnicas.

Comparando os erros globais obtidos para a CCA de Trefethen, utilizando a aproximação de Padé, com os erros apresentados para a mesma CCA no artigo original de Moore [Moore et al., 1988], verifica-se uma semelhança entre os valores. Desta forma, pode-se concluir que a implementação desta técnica foi efetuada de forma correta e os resultados correspondem ao esperado.

O mesmo pode-se dizer em relação aos erros globais obtidos para a CCA de Trefethen, utilizando a aproximação de Chebyshev, com os erros apresentados para a mesma CCA no artigo original de Moore [Moore et al., 1988].

Os erros locais encontrados para a CCA de Trefethen, utilizando as aproximações de Padé e Chebyshev, foram semelhantes aos apresentados por Moore [Moore et al., 1988].

As CCAs de Mur e Higdon, esta última utilizando as aproximações de Padé e Chebyshev, apresentaram valores para os erros locais e globais muito próximos aos obtidos para CCA de Trefethen.

Utilizando a CCA PML, os erros locais e globais obtidos apresentaram valores inferiores se comparados aos valores encontrados para as outras CCAs. Os valores encontrados para os erros locais para as CCAs analíticas foram da ordem de 10^{-2} , enquanto que para a PML os valores encontrados foram da ordem de 10^{-6} . No erro local, as CCAs analíticas apresentaram um erro da ordem de 10^{-4} , e a CCA absorvente apresentou um erro da ordem de 10^{-5} .

Analogamente aos resultados apresentados para o erro relativo, a CCA absorvente apresentou uma maior precisão nos resultados em relação as CCAs analíticas.

4.5.3 Considerações Finais

Avaliando todos os resultados apresentados, conclui-se que a CCA absorvente PML possui um desempenho superior às outras CCAs em relação aos erros globais e locais. Para esta CCA, os resultados para o erro relativo apresentaram uma precisão na ordem de 10^{-5} , sendo 10^2 mais preciso que as CCAs analíticas.

A CCA PML possui uma dificuldade maior de implementação, tal fato é explicado por meio da divisão dos campos, implementação e processamento da camada absorvente. Esta desvantagem não é percebida nas CCA analíticas, cujo objetivo é fechar o domínio com apenas uma equação.

As CCAs foram implementadas em 2D, e tais CCAs apresentaram eficiências muito próximas.

Com base nas considerações anteriores, conclui-se que todas as CCAs apresentadas possuem resultados satisfatórios, porém para efetuar a escolha da CCA mais adequada, alguns fatores precisam ser considerados:

- O tipo de problema e a precisão desejada;
- A facilidade de implementação; e
- O desempenho apresentado.

A CCA absorvente apresentou uma maior precisão nos resultados, porém uma maior dificuldade de implementação. Em contra-partida, as CCAs analíticas de Mur, Trefethen e Higdon, obtiveram resultados menos precisos, porém satisfatórios, contudo uma maior facilidade de implementação.

Em todas as CCAs estudadas o desempenho apresentado atendeu às expectativas, o que indica que todas as técnicas são eficientes e possíveis de serem utilizadas.

Ressalta-se, entretanto, que a ordem de grandeza dos erros encontrados aplicam-se apenas para as condições ideais do problema proposto, ou seja, domínio preenchido com ar e alta densidade do refinamento da malha.

No próximo capítulo serão apresentadas as conclusões finais deste trabalho.

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Conclusões

Neste capítulo é feita uma síntese do trabalho apresentado, ressaltando os resultados obtidos e o seu alcance. Após apresentar as conclusões relativas ao trabalho desenvolvido, serão destacadas as principais contribuições e sugestões de trabalhos futuros.

5.1.1 Resultados Obtidos e Considerações Finais

Este trabalho apresentou uma avaliação das técnicas de condição de contorno absorvente e analíticas (CCA) para um programa de cálculo de campo eletromagnético utilizando o método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD). As técnicas estudadas foram as CCAs analíticas de Mur, Trefethen e Higdon, e a CCA absorvente PML.

O modelo utilizado para esta avaliação foi um domínio em duas dimensões preenchido com ar, cujas dimensões foram de 100 células na direção x e 50 células na direção y . A utilização deste modelo deve-se ao fato de já existir na literatura resultados para esta implementação, permitindo a comparação entre os resultados.

Para garantir a confiabilidade dos resultados, a validação dos programas foi feita de duas maneiras distintas; a primeira utiliza a definição de erro relativo para comparar a solução do FDTD com a solução analítica, e a segunda emprega a definição de erro local e global.

A fonte foi modelada como um ponto localizado no centro do domínio irradiando em duas situações: primeiramente foi assumida a forma de uma onda senoidal contínua para a comparação entre o cálculo do FDTD e a solução analítica; e em seguida a fonte foi substituída para um pulso suave compacto para a obtenção dos erros globais e locais.

Utilizando-se o FDTD e as CCAs propostas, foram calculados os campos eletromagnéticos e as diferenças entre a solução ideal e a solução real para o problema.

Os erros relativos calculados através da comparação entre o cálculo obtido pelo programa proposto e a solução analítica, utilizando a equação (4.3), obtiveram valores da ordem de 10^{-3} para as CCAs analíticas e 10^{-5} para a CCA absorvente.

Os erros local e global foram obtidos através da aplicação das equações (4.5) e (4.4) no domínio Fig. 4.5. Tais erros estão em concordância com os valores apresentados na literatura. Desta maneira, pode-se concluir que os métodos utilizados são capazes de “fechar” o domínio computacional impedindo que reflexões espúrias retornem para dentro do domínio e influenciem nos resultados dos cálculos. A CCA absorvente apresentou resultados cerca

de 10^4 vezes mais precisos para os erros locais e 10^2 vezes mais precisos para o erro global, em comparação com as CCAs analíticas.

Os resultados sugerem que o programa proposto possui eficiência suficiente, aliando precisão dos resultados, facilidade de implementação e desempenho.

Entre as principais contribuições desta dissertação, em particular para o Grupo de Otimização e Projeto Assistido por Computador (GOPAC), destaca-se a implementação das técnicas de CCAs de Mur, Trefethen, Higdon e PML e a análise da aplicabilidade destas técnicas para problemas de contorno em eletromagnetismo em alta-frequência.

Como sugestão para trabalhos futuros, sugere-se estender a investigação para problemas em três dimensões nos sistemas de coordenadas cartesiano, cilíndrico e esférico.

Referências Bibliográficas

- [A. Bayliss and Turkel, 1982] A. Bayliss, M. G. and Turkel, E. (1982). Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 42:430–451.
- [Adachi, 1995] Adachi, S. (1995). Three-dimensional fdtd analysis of complicated antennas. *9th International Conference on Antennas and Propagation*, pages 299–304.
- [Balanis, 1982] Balanis, C. A. (1982). *Antenna Theory - Analysis and Design*. J. W. Sons, New York, NY.
- [Balanis, 1989] Balanis, C. A. (1989). *Advanced Engineering Electromagnetics*. J. W. and Sons, New York, NY.
- [Bayliss and Turkel, 1980] Bayliss, A. and Turkel, E. (1980). Radiation boundary condition for wave-like equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 33:707–725.
- [Berenger, 1994] Berenger, J. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114:185–200.
- [Berenger, 1996a] Berenger, J. (1996a). A perfectly matched layer for the fdtd solution of wave-structure interaction problems. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 44(1):110–117.
- [Berenger, 1996b] Berenger, J. (1996b). Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 127:363–379.
- [Compart, 2005] Compart, J. (2005). Comparação entre o método de elementos finitos (fem) e o método de diferenças finitas no domínio do tempo (fd-td). *Trabalho final submetido à Disciplina de Método de Elementos Finitos no segundo semestre de 2005*.
- [de Lima, 2006] de Lima, C. B. (2006). Análise de dispositivos eletromagnéticos para hipertermia usando o método fdtd. *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina*.
- [Dimbylow and Mann, 1994] Dimbylow, P. and Mann, S. (1994). Sar calculations in an anatomically realistic model of the head for mobile communication transceivers at 900 mhz and 1.8 ghz. *Phys. Med. Biol.*, 39:1537–1553.
- [Engquist and Majda, 1977] Engquist, B. and Majda, A. (1977). Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation*, 31:629–651.
- [Furse et al., 1996] Furse, C., Lazzi, G., and Gandhi, O. (1996). Fdtd computation of power deposition in the head for cellular telephones. *Antennas and Propagation Society International Symposium*, pages 1794–1797.

- [Gandhi et al., 2001] Gandhi, O., Li, Q.-X., and Kang, G. (2001). Temperature rise for the human head for cellular telephones and for peak sars prescribed in safety guidelines. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 49(9):1607–1613.
- [Halpern and Trefethen, 1986] Halpern, L. and Trefethen, L. N. (1986). Wide-angle one-way wave equations.
- [Hayt, 2001] Hayt, W. (2001). *Eletromagnetismo*. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, RJ.
- [Higdon, 1986] Higdon, R. L. (1986). Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation. *Mathematics of Computation*, 47:437–459.
- [Higdon, 1987] Higdon, R. L. (1987). Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation. *Mathematics of Computation*, 49:65–90.
- [Kosmas and Rappaport, 2004] Kosmas, P. and Rappaport, C. (2004). A simple absorbing boundary condition for fdtd modeling of lossy, dispersive based on the one-way wave equation. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 52(9):2476–2479.
- [Kraus, 1991] Kraus, J. (1991). *Electromagnetics*. McGraw-Hill., New York, NY.
- [Moore et al., 1988] Moore, T., Blaschar, J., Taflove, A., and Kriegsmann, G. (1988). Theory and application of radiation boundary operators. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 36:1797–1812.
- [Mur, 1981] Mur, G. (1981). Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 23(4):377–382.
- [Nikita et al., 2000] Nikita, K., Cavagnaro, M., Bernardi, P., Uzunoglu, N., Pisa, S., Piuze, E., Sahalos, J., Krikelas, G., Vaul, J., Excell, P., Cerri, G., Chiarandini, S., Leo, R., and Russo, P. (2000). A study of uncertainties in modeling antenna performance and power absorption in the head of a cellular phone user. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 48(12):2676–2685.
- [Rodrigues, 2003] Rodrigues, A. (2003). Caracterização da taxa de absorção específica e do aumento de temperatura induzidos por telefones celulares na cabeça humana. *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais*, vol.I.
- [Taflove, 2002] Taflove, A. (2002). Why study electromagnetics: The first unit in an undergraduate electromagnetics course. *Northwestern University, Department of Electrical and Computer Engineering*.
- [Taflove and Brodwin, 1975a] Taflove, A. and Brodwin, M. (1975a). Computation of the electromagnetic fields and induced temperatures within a model of the microwave-irradiated human eye. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 23(11):888–896.

- [Taflove and Brodwin, 1975b] Taflove, A. and Brodwin, M. (1975b). Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent maxwells equations. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 23(8):623–630.
- [Taflove and Hagness, 2000] Taflove, A. and Hagness, S. (2000). *Computational Electrodynamics - The Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House, Norwood, MA.
- [Taflove and Hagness, 2005] Taflove, A. and Hagness, S. (2005). *Computational Electrodynamics - The Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House, Norwood, MA.
- [Trefethen and Halpern, 1986] Trefethen, L. N. and Halpern, L. (1986). Well-posedness of one-way wave equation and absorbing boundary conditions. *Mathematics of Computation*, 47:421–435.
- [Watanabe et al., 1996] Watanabe, S.-I., Taki, M., Nojima, T., and Fujiwara, O. (1996). Characteristics of the sar distributions in a head exposed to electromagnetic fields radiated by a hand-held portable radio. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 44(10):1874–1883.
- [Yee, 1966] Yee, K. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwells equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14:302–307.
- [Yusheng, 1996] Yusheng, Z. (1996). The studies of the stability of fdtd with mur's absorbing boundary condition of second order in 3-d scattering problems. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 6(3):120–122.

Apêndice A

Coeficientes de Reflexão e Transmissão

Em problemas de contorno com interesse prático é necessário atentar para as regiões de tamanho infinito. Ao limitar uma região, as condições de fronteira devem ser consideradas, e neste caso, ocorrem fenômenos de reflexão e refração na fronteira de regiões compostas por dois materiais diferentes. Para isto, expressões são estabelecidas para a onda refletida pela interface e para a onda transmitida para a outra região, [Balanis, 1989].

Para analisar a transmissão e reflexão de ondas incidentes, primeiramente deve-se introduzir o conceito de plano incidente. Plano incidente é definido como o plano formado por um vetor unitário normal à interface refletora e o vetor na direção de incidência. Por exemplo, uma onda cujo vetor onda está no plano xz e é incidente na superfície paralela ao plano xy , ou seja, o plano de incidência é o plano xz [Balanis, 1989].

A.1 Incidência Normal

Considere uma onda polarizada linearmente, viajando na direção positiva de x com \mathbf{E} na direção y e \mathbf{H} na direção z , como mostra a Fig. A.1. Esta onda possui incidência normal à fronteira entre dois meios. A onda incidente é composta pelas componentes E_i e H_i , assim como as ondas refletidas e transmitidas, as quais são formadas por E_r e H_r , e E_t e H_t , respectivamente, conforme a Fig. A.2 [Balanis, 1989], [Kraus, 1991].

Pela condição de continuidade, tem-se na fronteira que:

$$E_i + E_r = E_t \quad (\text{A.1})$$

$$H_i + H_r = H_t \quad (\text{A.2})$$

Os campos \mathbf{E} e \mathbf{H} de ondas planas são relacionados com a impedância intrínseca do meio da seguinte forma:

$$\frac{E_i}{H_i} = Z_1 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{E_r}{H_r} = -Z_1 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{E_t}{H_t} = Z_2 \quad (\text{A.5})$$

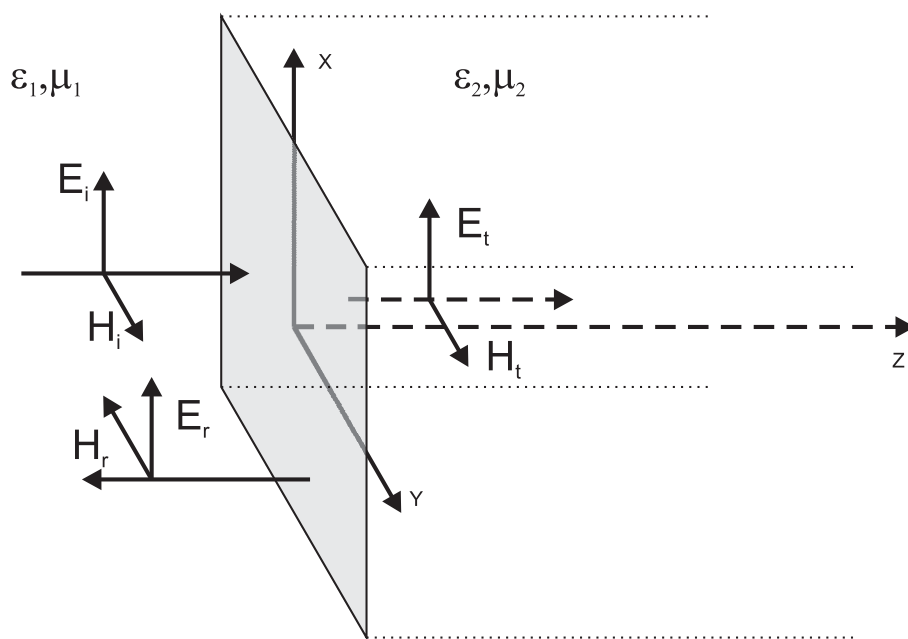


Figura A.1: Ondas refletidas e transmitidas para uma incidência normal em uma superfície plana

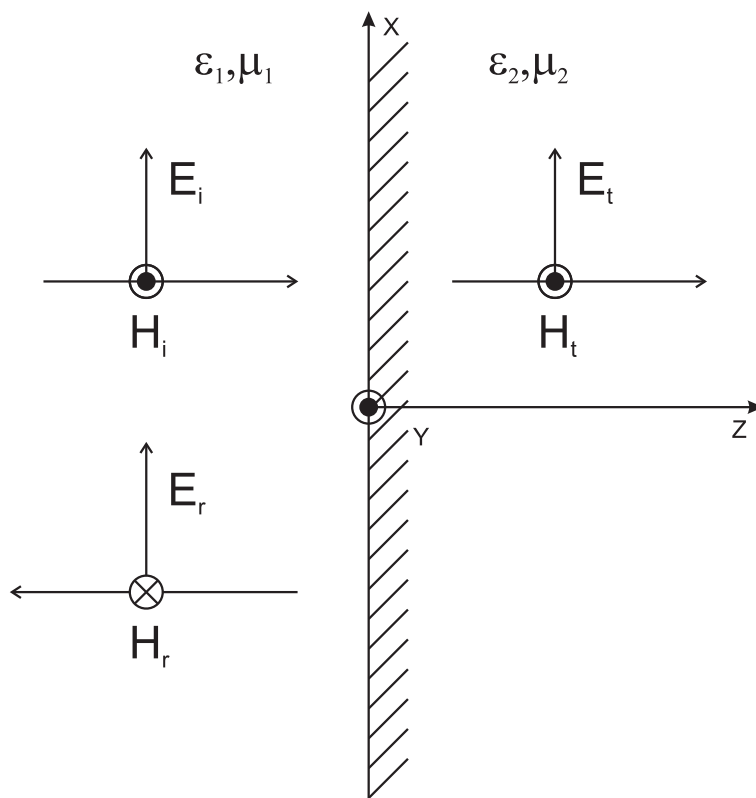


Figura A.2: Representação gráfica de uma incidência normal

Com a combinação de (A.1) a (A.5), tem-se:

$$H_t = \frac{E_t}{Z_2} = \frac{E_i}{Z_1} - \frac{E_r}{Z_1} \tag{A.6}$$

$$E_t = \frac{Z_2}{Z_1}E_i - \frac{Z_2}{Z_1}E_r \quad (\text{A.7})$$

Multiplicando (A.1) por Z_2/Z_1 , obtém-se:

$$\frac{Z_2}{Z_1}E_t = \frac{Z_2}{Z_1}E_i + \frac{Z_2}{Z_1}E_r \quad (\text{A.8})$$

Somando (A.7) e (A.8), resulta em:

$$E_t \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) = \frac{2Z_2}{Z_1}E_i \quad (\text{A.9})$$

ou

$$E_t = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}E_i = \tau E_i \quad (\text{A.10})$$

na qual τ chamado de coeficiente de transmissão, que é dado por:

$$\tau = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad (\text{A.11})$$

Subtraindo (A.7) de (A.8), resulta em:

$$E_t \left(\frac{Z_2}{Z_1} - 1\right) = \frac{2Z_2}{Z_1}E_r \quad (\text{A.12})$$

Substituindo E_t de (A.10) em (A.12) e resolvendo para E_r , tem-se:

$$E_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}E_i = \rho E_i \quad (\text{A.13})$$

na qual ρ chamado de coeficiente de reflexão, que é dado por:

$$\rho = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (\text{A.14})$$

Através de (A.11) e (A.14) conclui-se que:

$$\tau = \rho + 1 \quad (\text{A.15})$$

A equação (A.15) representa a relação entre os coeficientes de reflexão e transmissão de uma onda plana com incidência normal a uma superfície planar.

A.2 Incidência Oblíqua

Em uma polarização geral de ondas com incidência oblíqua, para examinar reflexões e transmissões é mais conveniente decompor os campos \mathbf{E} e \mathbf{H} em componentes perpendiculares e paralelas, em relação ao plano de incidência, e analisar cada uma delas individualmente. O campo refletido e transmitido total será o vetor soma de cada uma das duas polarizações [Balanis, 1989].

Pela Lei de Snell Descartes, temos:

$$\theta_r = \theta_i \quad (\text{A.16})$$

$$\eta_1 \sin \theta_i = \eta_2 \sin \theta_t \quad (\text{A.17})$$

nas quais a equação (A.16) é a Lei de Snell para a reflexão, a equação (A.17) é a Lei de Snell para a refração, η_1 e η_2 são os índices de refração dos meios 1 e 2, respectivamente.

Para um meio sem perdas o índice de refração η pode ser escrito como $\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$, e a Lei de Snell para a refração pode ser alterada para:

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} \sin \theta_i \quad (\text{A.18})$$

A.2.1 Polarização Perpendicular

A polarização perpendicular, também conhecida como polarização horizontal ou E, possui o campo \mathbf{E} orientado perpendicularmente ao plano de incidência, conforme mostrado na Fig. A.3 [Balanis, 1989], [Hayt, 2001].

Em uma polarização perpendicular, os campos incidentes E_i e H_i podem ser escritos como:

$$E_{i_\perp} = \hat{a}_y E_{i_\perp} e^{-j\beta_i \cdot \mathbf{r}} = \hat{a}_y E_0 e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} H_{i_\perp} &= (-\hat{a}_x \sin \theta_i + \hat{a}_z \cos \theta_i) H_{i_\perp} e^{-j\beta_i \cdot \mathbf{r}} \\ &= (-\hat{a}_x \sin \theta_i + \hat{a}_z \cos \theta_i) \frac{E_0}{Z_1} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

nas quais

$$E_{i_\perp} = E_0 \quad (\text{A.21})$$

$$H_{i_\perp} = \frac{E_{i_\perp}}{Z_1} = \frac{E_0}{Z_1} \quad (\text{A.22})$$

De maneira análoga, os campos refletidos E_r e H_r são dados por:

$$E_{r_\perp} = \hat{a}_y E_{r_\perp} e^{-j\beta_r \cdot \mathbf{r}} = \hat{a}_y \rho_\perp E_0 e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r + z \cos \theta_r)} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} H_{r_\perp} &= (\hat{a}_x \sin \theta_r + \hat{a}_z \cos \theta_r) H_{r_\perp} e^{-j\beta_r \cdot \mathbf{r}} \\ &= (\hat{a}_x \sin \theta_r + \hat{a}_z \cos \theta_r) \frac{\rho_\perp E_0}{Z_1} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r + z \cos \theta_r)} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

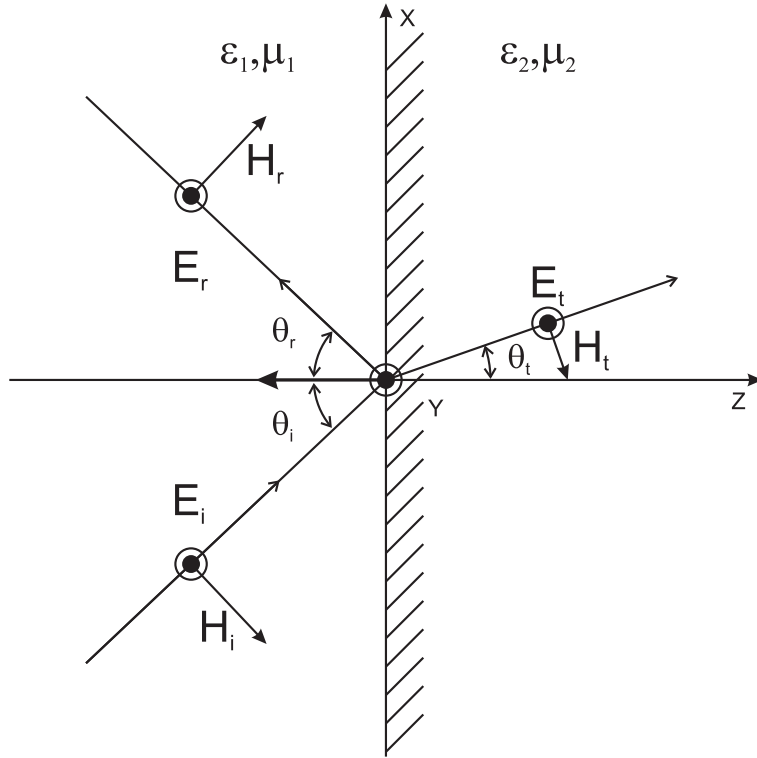


Figura A.3: Representação gráfica de uma incidência oblíqua e campo com polarização perpendicular

nas quais

$$E_{r\perp} = \rho_{\perp} E_i = \rho_{\perp} E_0 \quad (\text{A.25})$$

$$H_{r\perp} = \frac{E_{r\perp}}{Z_1} = \frac{\rho_{\perp} E_0}{Z_1} \quad (\text{A.26})$$

Similarmente, os campos transmitidos E_t e H_t são dados por:

$$E_{t\perp} = \hat{a}_y E_{t\perp} e^{-j\beta_2 \cdot \mathbf{r}} = \hat{a}_y \tau_{\perp} E_0 e^{-j\beta_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} H_{t\perp} &= (-\hat{a}_x \sin \theta_t + \hat{a}_z \cos \theta_t) H_{t\perp} e^{-j\beta_2 \cdot \mathbf{r}} \\ &= (-\hat{a}_x \sin \theta_t + \hat{a}_z \cos \theta_t) \frac{\tau_{\perp} E_0}{Z_2} e^{-j\beta_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

nas quais

$$E_{t\perp} = \tau_{\perp} E_i = \tau_{\perp} E_0 \quad (\text{A.29})$$

$$H_{t\perp} = \frac{E_{t\perp}}{Z_2} = \frac{\tau_{\perp} E_0}{Z_2} \quad (\text{A.30})$$

Os coeficientes de reflexão (ρ_{\perp}) e transmissão (τ_{\perp}), e a relação entre os ângulos incidente (θ_i), refletido (θ_r) e transmitido (refratado) (θ_t) podem ser obtidas por aplicação da condição de continuidade ou condição de fronteira nas componentes dos campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{H} .

$$E_{i_{\perp}} + E_{r_{\perp}} = E_{t_{\perp}} \quad (\text{A.31})$$

$$H_{i_{\perp}} + H_{r_{\perp}} = H_{t_{\perp}} \quad (\text{A.32})$$

Usando os termos apropriados de (A.19) a (A.30), as equações (A.31) e (A.32) podem ser escritas como:

$$e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} + \rho_{\perp} e^{-j\beta_1 x \sin \theta_r} = \tau_{\perp} e^{-j\beta_2 x \sin \theta_t} \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{1}{Z_1} \left(-\cos \theta_i e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} + \rho_{\perp} \cos \theta_r e^{-j\beta_1 x \sin \theta_r} \right) = \frac{\tau_{\perp}}{Z_2} \cos \theta_t e^{-j\beta_2 x \sin \theta_t} \quad (\text{A.34})$$

Utilizando as equações (A.16) e (A.17), as equações (A.33) e (A.34) reduzem a:

$$1 + \rho_{\perp} = \tau_{\perp} \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{\cos \theta_i}{Z_1} (-1 + \rho_{\perp}) = -\frac{\cos \theta_t}{Z_2} \tau_{\perp} \quad (\text{A.36})$$

Resolvendo (A.35) e (A.36) para τ_{\perp} e ρ_{\perp} , tem-se:

$$\tau_{\perp} = \frac{E_{t_{\perp}}}{E_{i_{\perp}}} = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t} = \frac{2\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_t} \quad (\text{A.37})$$

$$\rho_{\perp} = \frac{E_{r_{\perp}}}{E_{i_{\perp}}} = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_t} \quad (\text{A.38})$$

Os coeficientes τ_{\perp} e ρ_{\perp} são conhecidos como coeficientes de transmissão e reflexão de Fresnel para uma onda com polarização perpendicular.

A.2.2 Polarização Paralela

Na polarização paralela, ou polarização vertical ou H, o campo \mathbf{E} é paralelo ao plano de incidência, mostrado na Fig. A.4 [Balanis, 1989], [Hayt, 2001].

A polarização paralela pode ter os campos incidentes E_i e H_i escritos como:

$$\begin{aligned} E_{i_{\parallel}} &= (\hat{a}_x \sin \theta_i - \hat{a}_z \cos \theta_i) E_0 e^{-j\beta_i \cdot \mathbf{r}} \\ &= (\hat{a}_x \cos \theta_i - \hat{a}_z \sin \theta_i) E_0 e^{-j\beta_1 (x \cos \theta_i + z \sin \theta_i)} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$H_{i_{\parallel}} = \hat{a}_y H_{i_{\parallel}} e^{-j\beta_i \cdot \mathbf{r}} = \hat{a}_y \frac{E_0}{Z_1} e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \quad (\text{A.40})$$

nas quais

$$E_{i_{\parallel}} = E_0 \quad (\text{A.41})$$

$$H_{i_{\parallel}} = \frac{E_{i_{\parallel}}}{Z_1} = \frac{E_0}{Z_1} \quad (\text{A.42})$$

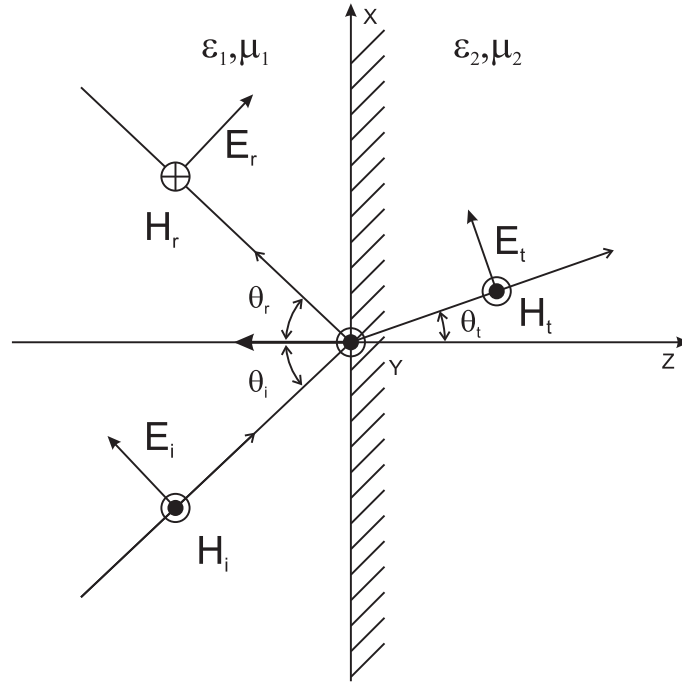


Figura A.4: Representação gráfica de uma incidência oblíqua e campo com polarização paralela

De maneira semelhante aos campos incidentes, os campos refletidos E_r e H_r são dados por:

$$\begin{aligned} E_{r\parallel} &= (\hat{a}_x \sin \theta_r + \hat{a}_z \cos \theta_r) E_0 e^{-j\beta_r \cdot \mathbf{r}} \\ &= (\hat{a}_x \cos \theta_r + \hat{a}_z \sin \theta_r) E_0 e^{-j\beta_1(x \cos \theta_r + z \sin \theta_r)} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

$$H_{r\parallel} = \hat{a}_y H_{r\parallel} e^{-j\beta_r \cdot \mathbf{r}} = \hat{a}_y \frac{\rho_{\parallel} E_0}{Z_1} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r + z \cos \theta_r)} \quad (\text{A.44})$$

nas quais

$$E_{r\parallel} = \rho_{\parallel} E_i = \rho_{\parallel} E_0 \quad (\text{A.45})$$

$$H_{r\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{Z_1} = \frac{\rho_{\parallel} E_0}{Z_1} \quad (\text{A.46})$$

Assim como os campos transmitidos E_t e H_t são dados por:

$$\begin{aligned} E_{t\parallel} &= (\hat{a}_x \sin \theta_t - \hat{a}_z \cos \theta_t) E_0 e^{-j\beta_t \cdot \mathbf{r}} \\ &= (\hat{a}_x \cos \theta_t - \hat{a}_z \sin \theta_t) E_0 e^{-j\beta_1(x \cos \theta_t + z \sin \theta_t)} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

$$H_{t\parallel} = \hat{a}_y H_{t\parallel} e^{-j\beta_t \cdot \mathbf{r}} = \hat{a}_y \frac{\tau_{\parallel} E_0}{Z_1} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \quad (\text{A.48})$$

nas quais

$$E_{t\parallel} = \tau_{\parallel} E_i = \tau_{\parallel} E_0 \quad (\text{A.49})$$

$$H_{t\parallel} = \frac{E_{t\parallel}}{Z_2} = \frac{\tau_{\parallel} E_0}{Z_2} \quad (\text{A.50})$$

Utilizando os termos apropriados de (A.39) a (A.50) e aplicando à polarização paralela, as equações (A.31) e (A.32) reduzem a:

$$\cos\theta_i e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i} + \rho_{\parallel} \cos\theta_r e^{-j\beta_1 x \sin\theta_r} = \tau_{\parallel} \cos\theta_t e^{-j\beta_2 x \sin\theta_t} \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{1}{Z_1} \left(e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i} - \rho_{\parallel} e^{-j\beta_1 x \sin\theta_r} \right) = \frac{\tau_{\parallel}}{Z_2} e^{-j\beta_2 x \sin\theta_t} \quad (\text{A.52})$$

Utilizando as equações (A.16) e (A.17) juntamente com as equações (A.35) e (A.36) e resolvendo para τ_{\parallel} e ρ_{\parallel} , tem-se:

$$\tau_{\parallel} = \frac{E_{t\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{2Z_2 \cos\theta_i}{Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t} = \frac{2\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_i}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_i + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_t} \quad (\text{A.53})$$

$$\rho_{\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{-Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t}{Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t} = \frac{-\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_i + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_t}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_i + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_t} \quad (\text{A.54})$$

Os coeficientes τ_{\parallel} e ρ_{\parallel} são conhecidos como coeficientes de transmissão e reflexão de Fresnel para uma onda com polarização perpendicular.