

**ANÁLISE DE ANTENAS REFLETORAS  
CIRCULARMENTE SIMÉTRICAS COM A  
PRESENÇA DE CORPOS DIELÉTRICOS**

**Úrsula do Carmo Resende**

---

**Tese de Doutorado**

**Orientador: Fernando José da Silva Moreira**

**Co-Orientador: Odilon Maroja Costa Pereira Filho**

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica**

**Universidade Federal de Minas Gerais**

**Maiο 2007**

*“Cada momento de busca é um momento de encontro:  
enquanto procurei meu tesouro, todos os dias foram dias luminosos,  
porque este meu tesouro, descobri no caminho,  
coisas que jamais teria sonhado encontrar;  
se não tivesse toda a coragem de tentar coisas impossíveis ...”*

*Paulo Coelho*

## AGRADECIMENTOS

- *Ao meu orientador Professor Fernando José da Silva Moreira e ao meu co-orientador Professor Odilon Maroja da Costa Pereira Filho, pela confiança, dedicação, compreensão, disponibilidade e paciência durante estes anos.*
- *Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) por ter financiado parte deste trabalho.*
- *Aos amigos do GAPTEM pela ajuda e o companheirismo em todos os momentos.*
- *Ao CEFET-MG por todo suporte que tenho recebido durante este trabalho.*
- *A meu marido, Salvador, pela generosidade, compreensão, dedicação e amor sempre.*
- *Aos meus Pais, Rubens e Sonia, e à Deus por tudo.*

# RESUMO

Neste trabalho é desenvolvido o ferramental teórico, analítico e numérico para o tratamento do espalhamento eletromagnético por corpos de revolução compostos por materiais condutores perfeitos e dielétricos, como, por exemplo, antenas refletoras com radome. A análise acurada destas estruturas é efetuada por um algoritmo baseado nas equações integrais dos campos elétrico e magnético avaliadas numericamente através do método dos momentos. A validade da formulação desenvolvida é confirmada através de vários testes cujos resultados são comparados com as respectivas soluções analíticas. Embora através da técnica desenvolvida seja possível a análise completa e direta de vários tipos de antenas refletoras axialmente simétricas constituídas de material dielétrico e condutor, neste trabalho ela é aplicada somente na análise de antenas duplo-refletoras com radome para cobertura omnidirecional. É importante destacar que para as antenas avaliadas neste trabalho a estrutura do alimentador é considerada. Este procedimento evita problemas de imprecisão associados ao uso de fontes de onda esférica pontuais para iluminarem a antena refletora.

Este trabalho apresenta alguns aspectos inovadores. Dentre eles pode-se destacar o tratamento empregado para a avaliação numérica das integrais presentes na solução através dos métodos dos momentos e inclusão de materiais dielétricos na análise de estruturas de grandes dimensões elétricas. Um outro ponto que merece destaque é a representação das correntes superficiais equivalentes através de funções de base triangulares. Este tipo de função garante uma boa representação do comportamento da corrente ao longo de toda a superfície dos corpos de revolução e produz equações integrais relativamente simples.

## **ABSTRACT**

This work develops theoretical, analytical and numerical tools for solution of electromagnetic scattering from bodies of revolution, composed by perfect conductors and dielectrics, such as reflector antennas with radomes. Accurate analyses of these structures are performed through algorithms based on electric and magnetic integral equations, numerically evaluated by the Method of the Moments. The formulation is validated through several tests where the results are compared with the respective analytical solutions. This work investigates only omnidirectional double-reflector antennas with radomes, although the technique allows analyses of several types of axially symmetric reflector antennas consisting of dielectric and conducting materials. It is important to stress that the feed structure is considered in the antenna analyzes, preventing inaccuracy problems associated to the use of spherical wave sources to excite the reflector antenna.

Some innovative aspects are presented, as the numerical evaluation of the integrals in the method of moments solution, and the addition of dielectric materials in the analysis of large structures. It should be also pointed out the superficial equivalent currents are represented by triangular basis functions, which guarantees a good representation for current behavior throughout all surfaces of the bodies of revolution, and produces relatively simple integral equations.

# SUMÁRIO

<b>Lista de Figuras</b> .....	<b>viii</b>
<b>Lista de Tabelas</b> .....	<b>xii</b>
<b>Lista de Siglas</b> .....	<b>xiii</b>
<b>Capítulo 1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 - Contexto .....	1
1.2 - Objetivos .....	12
1.3 - Apresentação do Trabalho .....	13
<b>Capítulo 2 ESPALHAMENTO ELTROMAGNÉTICO POR CORPOS DE REVOLUÇÃO</b> .....	<b>15</b>
2.1 - Geometria do Corpo de Revolução .....	15
2.2 - Equações Integrais dos Campos Elétrico e Magnético .....	17
2.2.1 - BOR Dielétrico .....	17
2.2.2 - BOR Condutor Perfeito .....	25
2.2.3 - BOR Constituído de Duas Camadas Dielétricas .....	26
2.2.4 - Outros Tipos de BOR .....	31
2.3 - Conclusões Parciais .....	36
<b>Capítulo 3 SOLUÇÃO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS MOMENTOS</b> .....	<b>37</b>
3.1 - Equação Matricial .....	37
3.2 - Funções de Peso e de Base .....	41
3.3 - Avaliação Numérica das Matrizes Z e Y .....	46
3.4 - Avaliação Numérica das integrais das Matrizes Z e Y .....	56
3.5 - Tratamento das Singularidades .....	60
3.5.1 - Método 1 para Tratamento das Singularidades .....	60
3.5.2 - Método 2 para Tratamento das Singularidades .....	66
3.5.2 - Método 2 para Tratamento das Singularidades .....	68
3.6 - Avaliação Numérica da Matriz Excitação .....	73
3.6.1 - Excitação Através de uma Onda Plana .....	73
3.6.2 - Excitação Através de uma Fonte de Onda Esférica .....	75

3.6.3 - Excitação Através de um Alimentador .....	80
3.6.3.1 - Impedance Boundary Condition – IBC .....	82
3.6.3.2 - Excitação Através do Modo Fundamental $TE_{11}$ de um Guia Circular .....	83
3.6.3.3 - Excitação Através do Modo Fundamental TEM de um Guia Coaxial .....	92
3.6.4 - Elementos das Matrizes Excitação e de Coeficientes para os Modos $m$ .....	95
3.7 - Equações Matriciais .....	96
3.7.1 - Nova Notação .....	96
3.7.2 - BOR Condutor .....	99
3.7.3 - BOR Dielétrico .....	100
3.7.4 - BOR com Superfícies CEP com IBC .....	101
3.7.5 - BOR Composto de Várias Camadas Homogêneas .....	103
3.7.6 - BOR Constituído de Várias Regiões Homogêneas.....	104
3.8 - Conclusões Parciais .....	105
<b>Capítulo 4 CÁLCULOS DE CAMPOS E DE POTÊNCIA .....</b>	<b>106</b>
4.1 - Campo Próximo .....	106
4.2 - Campo Distante .....	119
4.3 - Perda de Retorno.....	123
4.4 - Conclusões Parciais .....	125
<b>Capítulo 5 ESTUDO DE CASOS .....</b>	<b>126</b>
5.1 - Determinação do Número de Pontos de Integração .....	126
5.2 - Cálculo do Erro para a Avaliação dos Resultados .....	128
5.3 - Esfera CEP Iluminada por uma Onda Plana .....	129
5.4 - Esfera Dielétrica Iluminada por uma Onda Plana .....	139
5.5 - Esfera Condutora Recoberta por uma Camada Dielétrica .....	149
5.6 - Esfera Constituída de Camadas Homogêneas .....	150
5.7 - Espalhamento por Duas Esferas .....	157
5.8 - Esfera Constituída de Dois Hemisférios Homogêneos .....	160
5.9 - Esfera Dielétrica Parcialmente Recoberta por uma Casca CEP .....	164

5.10 - Refletor Parabólico Simétrico .....	168
5.11 - Excitação do Modo Fundamental em um Guia Circular .....	172
5.12 - Excitação do Modo TEM em um Guia Coaxial .....	177
5.13 - Corneta Corrugada Excitada pelo Modo TE <sub>11</sub> .....	182
5.14 - Corneta coaxial Excitada pelo Modo TEM .....	185
5.15 - Conclusões Parciais .....	189
<b>Capítulo 6 ANÁLISE DE ANTENAS DUPLO-REFLETORAS PARA COBERTURA OMNIDIRECIONAL .....</b>	<b>190</b>
6.1 - Antenas OADC e OADE para Cobertura Omnidirecional .....	192
6.2 - Antenas Refletoras Omnidirecional com Radome .....	205
6.2.1 - Antena Omnidirecional OADC com Radome .....	207
6.2.2 - Antena Omnidirecional OADE com Radome .....	220
6.3 - Investigação das Causas do Aumento no Nível de Lóbulos Secundários ..	233
6.3 - Conclusões Parciais .....	240
<b>Capítulo 7 CONCLUSÕES .....</b>	<b>241</b>
7.1 - Conclusões sobre o Trabalho .....	241
7.2 - Sugestões para Trabalhos Futuros .....	245
<b>Bibliografia .....</b>	<b>247</b>



## LISTA DE FIGURAS

1.1 - Antenas duplo-refletoras <i>offset</i> .....	3
1.2 - Antenas duplo-refletoras com simetria axial .....	4
1.3 - Antenas duplo-refletoras simétricas com eixo deslocado .....	5
1.4 - Antenas duplo-refletoras omnidirecional .....	7
1.5 - Antenas com materiais dielétricos .....	9
2.1 - Geometria do BOR .....	16
2.2 - Princípio da equivalência para o BOR dielétrico .....	18
2.3 - Equivalências para o BOR constituído de duas camadas dielétricas .....	28
2.4 - BOR constituído de n camadas dielétricas .....	32
2.5 - BOR Constituído de duas regiões dielétricas .....	35
3.1 - Funções triangulares .....	42
3.2 - Coordenadas referentes à fonte de onda esférica .....	77
3.3 - Geometria básica de uma corneta corrugada .....	81
3.4 - Guia circular excitado pelo o modo $TE_{11}$ .....	84
3.5 - Distribuição dos triângulos que representam as correntes na parede final interna do guia .....	90
3.6 - Correntes equivalentes para o modo TEM em um guia coaxial .....	93
5.1 - Esfera CEP iluminada por uma onda plana .....	130
5.2 - Corrente elétrica equivalente: esfera CEP de raio $a = 0,5 \lambda_0$ , discretização da curva em 55 segmentos (35 segmentos / $\lambda_0$ ) .....	132
5.3 - Campo próximo: esfera CEP de raio $a = 0,5 \lambda_0$ , discretização da curva em 55 segmentos (35 segmentos / $\lambda_0$ ) .....	133
5.4 - Campo elétrico na região de campo distante: esfera CEP de raio $a = 0,5 \lambda_0$ , discretização da curva em 55 segmentos (35 segmentos / $\lambda_0$ ) .....	134
5.5 - Corrente elétrica equivalente: esfera CEP de raio $a = 50 \lambda_0$ , discretização da curva em 2355 segmentos (15 segmentos / $\lambda_0$ ) .....	135
5.6 - Campo próximo: esfera CEP de raio $a = 50 \lambda_0$ , discretização da curva em 2355 segmentos (15 segmentos $\lambda_0$ ) .....	136
5.7 - Campo elétrico na região de campo distante: esfera CEP de raio $a = 50 \lambda_0$ , discretização da curva em 2355 segmentos (15 segmentos / $\lambda_0$ ) .....	137

5.8 - ONS para esferas CEP .....	138
5.9 - Correntes elétrica e magnética equivalentes: esfera dielétrica de raio $a = 0,5 \lambda_0$ e $\epsilon_r = 100$ , discretização da curva em 127 segmentos (81 segmentos / $\lambda_0$ ) .....	141
5.10 - Campo próximo: esfera dielétrica de raio $a = 0,5 \lambda_0$ e $\epsilon_r = 100$ , discretização da curva em 127 segmentos (81 segmentos / $\lambda_0$ ) .....	142
5.11 - Campo elétrico na região de campo distante: esfera dielétrica de raio $a = 0,5 \lambda_0$ e $\epsilon_r = 100$ , discretização da curva em 127 segmentos (81 segmentos / $\lambda_0$ ) .....	143
5.12 - Correntes elétrica e magnética equivalentes: esfera dielétrica de raio $a = 10 \lambda_0$ e $\epsilon_r = 50$ , discretização da curva em 943 segmentos (30 segmentos / $\lambda_0$ ) .....	144
5.13 - Campo próximo: esfera dielétrica de raio $a = 10 \lambda_0$ e $\epsilon_r = 50$ , discretização da curva em 943 segmentos (30 segmentos / $\lambda_0$ ) .....	145
5.14 - Campo elétrico na região de campo distante: esfera dielétrica de raio $a = 10 \lambda_0$ e $\epsilon_r = 50$ , discretização da curva em 943 segmentos (30 segmentos / $\lambda_0$ ) .....	146
5.15 - ONS para esferas dielétricas .....	148
5.16 - Esfera condutora recoberta por camada dielétrica .....	150
5.17 - Correntes elétrica e magnética equivalentes: esfera CEP com raio $a = 5 \lambda_0$ recoberta por uma casca dielétrica com raio $b = 10 \lambda_0$ e $\epsilon_r = 20$ .....	151
5.18 - Campo elétrico na região de campo distante: esfera CEP com raio $a = 5 \lambda_0$ recoberta por uma casca dielétrica com raio $b = 10 \lambda_0$ e $\epsilon_r = 20$ .....	152
5.19 - Esfera constituída de duas camadas dielétricas homogêneas .....	153
5.20 - Correntes elétrica e magnética equivalentes: esfera dielétrica com raio $a = 5 \lambda_0$ , $\epsilon_r = 20$ e recoberta por uma casca dielétrica com raio $b = 5,05 \lambda_0$ e $\epsilon_r = 5$ .....	154
5.21 - Esfera constituída de três camadas dielétricas homogêneas .....	155
5.22 - Correntes elétrica e magnética equivalentes na superfície externa de uma esfera constituída de três camadas dielétricas homogêneas .....	156
5.23 - Duas esferas homogêneas .....	157
5.24 - Correntes elétrica e magnética equivalentes: duas esferas com raio $a = 10 \lambda_0$ , uma CEP e outra dielétrica com $\epsilon_r = 10$ .....	158
5.25 - Campo próximo: duas esferas com raio $a = 10 \lambda_0$ , uma CEP e outra dielétrica com $\epsilon_r = 10$ .....	159
5.26 - Esfera constituída de dois hemisférios homogêneos .....	160
5.27 - Distribuição dos triângulos no ponto de junção .....	162
5.28 - Campo elétrico na região de campo distante: esfera dielétrica constituída de dois hemisférios homogêneos com raio $a = 5 \lambda_0$ , $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 20$ .....	163

5.29-	Esfera dielétrica parcialmente recoberta por uma fina casca condutora .....	164
5.30 -	Problemas equivalentes para esfera dielétrica parcialmente recoberta por uma fina casca condutora .....	166
5.31 -	Campo elétrico na região de campo distante: esfera dielétrica com $a = 10 \lambda_0$ , $\epsilon_{r1} = 1$ , parcialmente recoberta por uma fina casca condutora .....	167
5.32 -	Geometria do refletor parabólico simétrico .....	169
5.33 -	Corrente elétrica equivalente: refletor parabólico simétrico com diâmetro de $200 \lambda_0$ e distância focal de $60 \lambda_0$ .....	170
5.34 -	Diagrama de radiação no plano $\phi = 45^\circ$ do refletor parabólico simétrico com diâmetro de $200 \lambda_0$ e distância focal de $60 \lambda_0$ .....	171
5.35 -	Geometria da seção do guia circular excitado pelo modo $TE_{11}$ .....	173
5.36 -	Corrente elétrica equivalente: guia circular excitado pelo modo $TE_{11}$ .....	175
5.37 -	Campo próximo: guia circular excitado pelo modo $TE_{11}$ .....	176
5.38 -	Geometria da seção do guia coaxial excitado pelo modo TEM .....	178
5.39 -	Corrente elétrica equivalente: guia circular coaxial excitado pelo modo TEM ....	180
5.40 -	Campo próximo: guia circular excitado coaxial pelo modo TEM .....	181
5.41 -	Geometria da corneta corrugada excitada pelo modo $TE_{11}$ .....	183
5.42 -	Diagrama de radiado no plano $\phi = 45^\circ$ para corneta CEP corrugada e com IBC excitada pelo modo $TE_{11}$ .....	184
5.43 -	Geometria da corneta coaxial excitada pelo modo TEM .....	186
5.44 -	Diagrama de radiado para corneta para corneta coaxial .....	187
5.45 -	Perdas de retorno ao longo da faixa de frequências $0,9 f_0$ à $1,1 f_0$ .....	188
6.1 -	Geometria da antena omnidirecional OADC .....	193
6.2 -	Representação da corrente elétrica no ponto de junção entre superfícies condutoras .....	195
6.3 -	Diagrama de radiação na região de campo distante para antena omnidirecional OADC .....	196
6.4 -	Diagrama de radiação na região de campo distante para antena omnidirecional OADC ao longo da faixa de frequências de $0,9 f_0$ à $1.1 f_0$ .....	198
6.5 -	Geometria da antena omnidirecional OADE .....	201
6.6 -	Diagrama de radiação na região de campo distante para antena omnidirecional OADE .....	202
6.7 -	Ganho do campo distante para antena omnidirecional OADE ao longo da faixa de frequências de $0,9 f_0$ à $1.1 f_0$ .....	203

6.8 - Incidência oblíqua de uma onda plana em um radome .....	207
6.9 - Antena omnidirecional OADC com radome .....	210
6.10 - Interfaces, pontos de junção e problemas equivalentes para uma antena omnidirecional OADC com radome .....	211
6.11 - Ganho do campo distante para antena omnidirecional OADC com radome ao longo da faixa de frequências de $0,9 f_0$ à $1.1 f_0$ .....	216
6.12 - Diagrama de radiação na região de campo distante para antena omnidirecional OADC com radome e sem radome na frequência $f_0$ .....	218
6.13 - Comportamento das características eletromagnética de uma antena omnidirecional OADC ao longo da faixa de frequências de $0,9 f_0$ à $1.1 f_0$ .....	219
6.14 - Antena omnidirecional OADE com radome (incidência oblíqua) .....	222
6.15 - Antena omnidirecional OADE com radome (incidência normal) .....	223
6.16 - Junções e interfaces para a antena omnidirecional OADE com radome (incidência oblíqua) .....	224
6.17 - Junções e interfaces para a antena omnidirecional OADE com radome (incidência normal) .....	225
6.18 - Ganho do campo distante para antena omnidirecional OADE com radome (incidência oblíqua) ao longo da faixa de frequências de $0,9 f_0$ à $1.1 f_0$ .....	226
6.19 - Ganho do campo distante para antena omnidirecional OADE com radome (incidência normal) ao longo da faixa de frequências de $0,9 f_0$ à $1.1 f_0$ .....	228
6.20 - Diagrama de radiação na região de campo distante para antena omnidirecional OADE com radome e sem radome na frequência $f_0$ .....	231
6.21 - Comportamento das características eletromagnética de uma antena omnidirecional OADE ao longo da faixa de frequências de $0,9 f_0$ à $1.1 f_0$ .....	232
6.22 - Antena OADE com diferentes ângulos de inclinação do radome .....	234
6.23 - Diagrama de radiação na região de campo distante para antena omnidirecional OADE para diferentes ângulos de inclinação do radome .....	235
6.24 - Antena OADE: parâmetro de superfície $S(\lambda_0)$ .....	236
6.25 - Corrente nas faces superfícies do radome e do refletor principal para uma antena OADE com radome .....	237

## LISTA DE TABELAS

5.1 Resultados para esferas CEP .....	138
5.2 $E_{RMM}$ (%) para esfera dielétrica com raio igual a $5 \lambda_0$ .....	140
5.3 Tempos de processamento percentuais para os casos apresentados na Tabela 5.2 ..	147
5.4 $E_{AM}$ (dB) para esfera constituída de dois hemisférios homogêneos .....	164
5.5 Resultados para corneta corrugada excitada pelo modo $TE_{11}$ .....	185
5.6 Formulação mais indicada para a avaliação de diferentes tipos de BOR .....	189
6.1 Resultados para antena omnidirecional OADC .....	199
6.2 Resultados para antena omnidirecional OADE .....	204
6.3 Resultados para antena omnidirecional OADC com radome .....	217
6.4 Resultados para antena omnidirecional OADE com radome (incidência oblíqua) ..	227
6.5 Resultados para antena omnidirecional OADE com radome (incidência normal) ...	229

## LISTA DE SIGLAS

BOR	Bodies of revolution
CEP	Condutor elétrico perfeito
CMP	Condutor magnético perfeito
EFIE	Equação integral do campo elétrico
MFIE	Equação integral do campo magnético
PMCHWT	Formulação proposta por: Poggio, Miller, Chang, Harrington, Wu e Tsai
OADC	Omnidirectional Axis-Displaced Cassegrain
OADE	Omnidirectional Axis-Displaced Ellipse
OADG	Omnidirectional Axis-Displaced Gregorian
OADH	Omnidirectional Axis-Displaced Hyperbola
TE	Transverse electric
TEM	Transverse electromagnetic

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 - Contexto do Problema

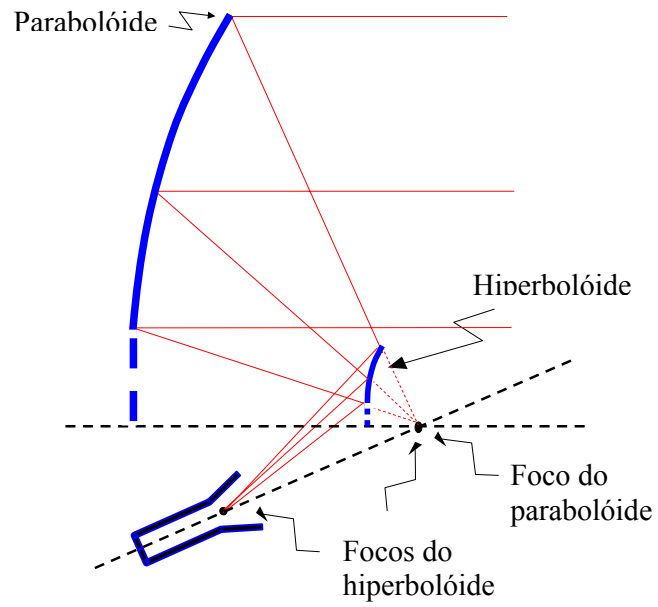
A partir do final do século XIX o espectro radioelétrico começou a ser empregado em comunicações sem fio a grandes distâncias, sendo então necessária a utilização de antenas na transmissão e recepção do sinal de rádio. A formulação teórica para a análise e síntese de antenas é baseada nas equações de Maxwell [1]. Em alguns tipos de comunicação a longas distâncias são necessárias antenas com alto ganho. Esta característica pode ser alcançada empregando uma antena do tipo refletora, utilizada pela primeira vez por Hertz no final do século XIX [2]. Atualmente estas antenas são utilizadas em inúmeras aplicações, tais como rádio-astronomia, enlaces de microondas, comunicação via satélite, enfim, em qualquer aplicação em telecomunicações onde a necessidade de uma antena com alto ganho é primordial [3].

Atualmente, devido à multiplicidade de enlaces de comunicação existentes, as especificações sobre os diagramas de radiação das antenas tornam-se cada vez mais restritivas, visando a diminuição de possíveis interferências entre os diversos enlaces. Estas restrições impõem baixos lóbulos secundários no diagrama da antena, o que geralmente acarreta degradação da eficiência de radiação. Assim, é eminente a necessidade de se projetar antenas com a máxima eficiência possível e que, simultaneamente, satisfaçam às restrições pertinentes.

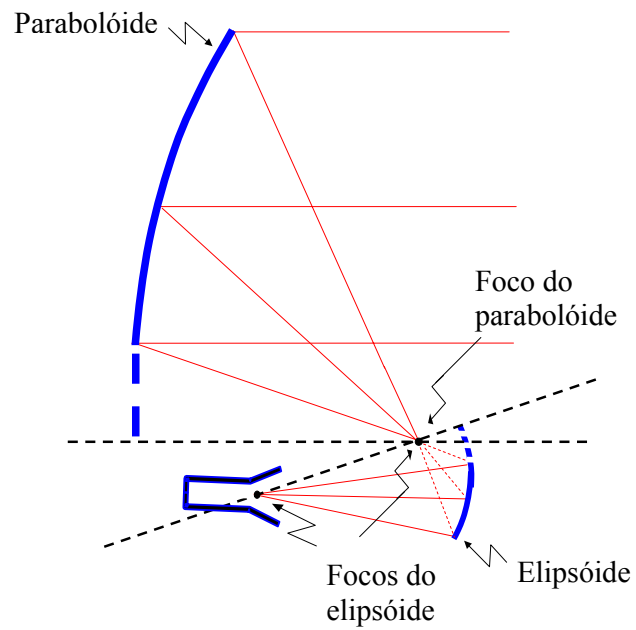
Altas eficiências podem ser alcançadas utilizando-se de configurações duplo-refletoras para o controle simultâneo da amplitude e da fase do campo eletromagnético na abertura da antena. A otimização da eficiência é obtida especificando-se uma iluminação uniforme de abertura (sem bloqueios), o que, em princípio, só pode ser alcançado através de configurações *offset*, como aquelas ilustradas na Figura 1.1. Contudo, tais geometrias possuem uma inerente complexidade que dificulta a fabricação com baixos custos, além dos problemas correspondentes ao alinhamento entre os refletores e a fonte de alimentação. Uma alternativa é o emprego de configurações de duplo-refletores com simetria axial. Nestes casos o bloqueio oferecido pelo subrefletor impossibilita uma iluminação uniforme da abertura (diminuindo a eficiência da antena) e aumenta o nível dos lóbulos secundários. Porém, devido à simetria axial, a fabricação e o alinhamento tornam-se menos complicados. As configurações de duplo-refletores com simetria axial mais empregadas são as clássicas *Cassegrain* e *Gregorian* [4], conforme ilustrado na Figura 1.2. Nestas geometrias, parte da energia do alimentador é espalhada em direções sem interesse pelas múltiplas reflexões entre os refletores e o alimentador, reduzindo ainda mais a eficiência da antena e aumentando o nível dos lóbulos secundários. Porém, estas múltiplas reflexões são significativamente reduzidas através do modelamento das superfícies refletoras ou da utilização de geometrias clássicas alternativas, como aquelas ilustradas na Figura 1.3. Embora o bloqueio da abertura continue presente nestas configurações, eficiências superiores a 90% podem ser alcançadas, em tese [5]-[10].

Antenas refletoras são tipicamente empregadas em enlaces radioelétricos ponto-a-ponto em microondas. Elas também são aplicadas em serviços de comunicação via satélite para cobertura ponto-multiponto. Estas aplicações são conseqüências de sua alta eficiência, relativa simplicidade mecânica e características inerentes de banda larga. Tais aplicações ilustram o uso de configurações diretivas. Porém antenas refletoras também podem ser utilizadas para cobertura omnidirecional. Nos últimos anos o crescente interesse por serviços de comunicação sem fio e em alta velocidade, os quais requerem uma larga e alta faixa de frequências de operação, tem impulsionado as pesquisas e investigações a respeito do tipo de



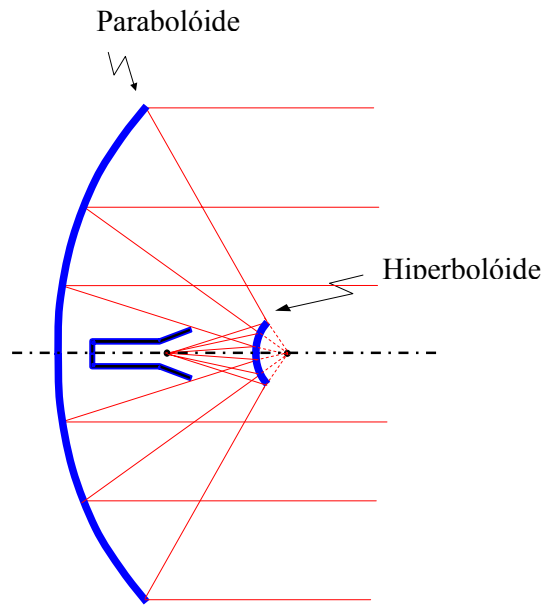


a) Configuração Cassegrain

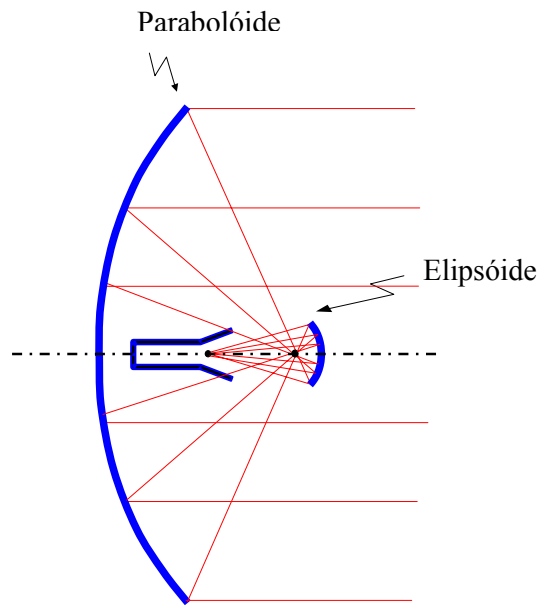


b) Configuração Gregorian

Figura 1.1 – Antenas duplo-refletores *offset*.



a) Configuração Cassegrain



b) Configuração Gregorian

Figura 1.2 – Antenas duplo-refletoras com simetria axial.

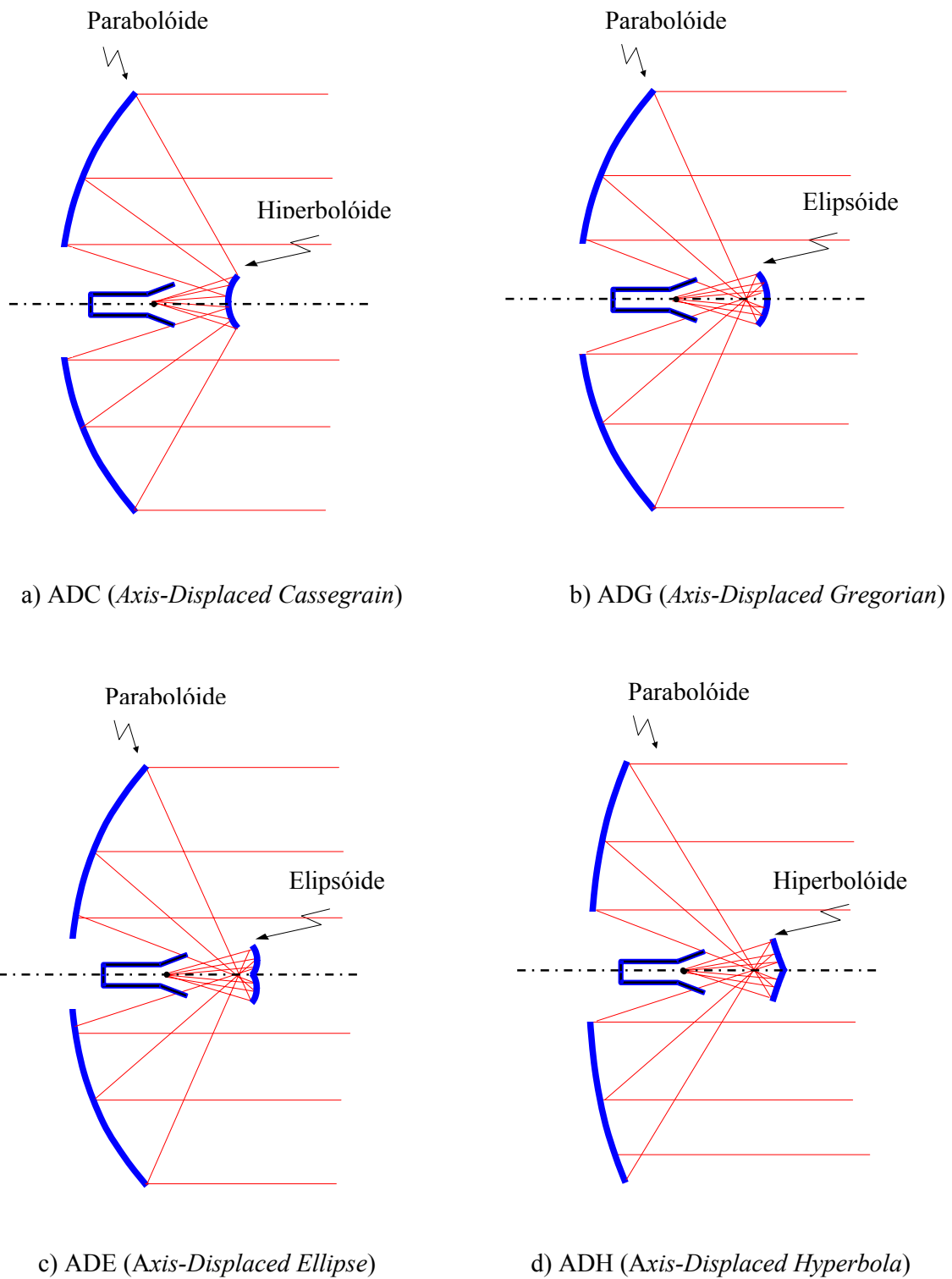
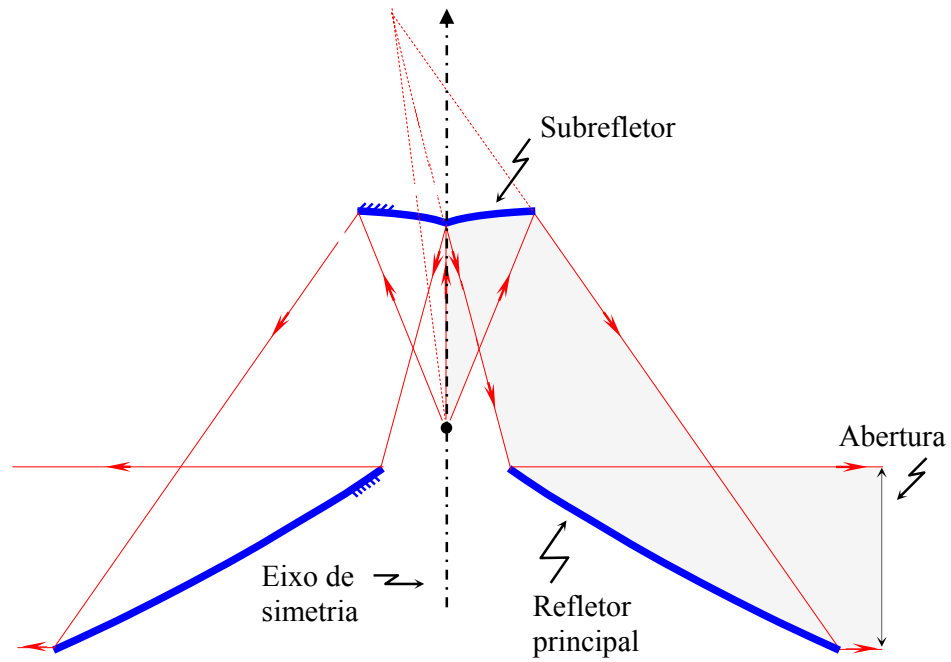


Figura 1.3 – Antenas duplo-refletoras simétricas com eixo deslocado.

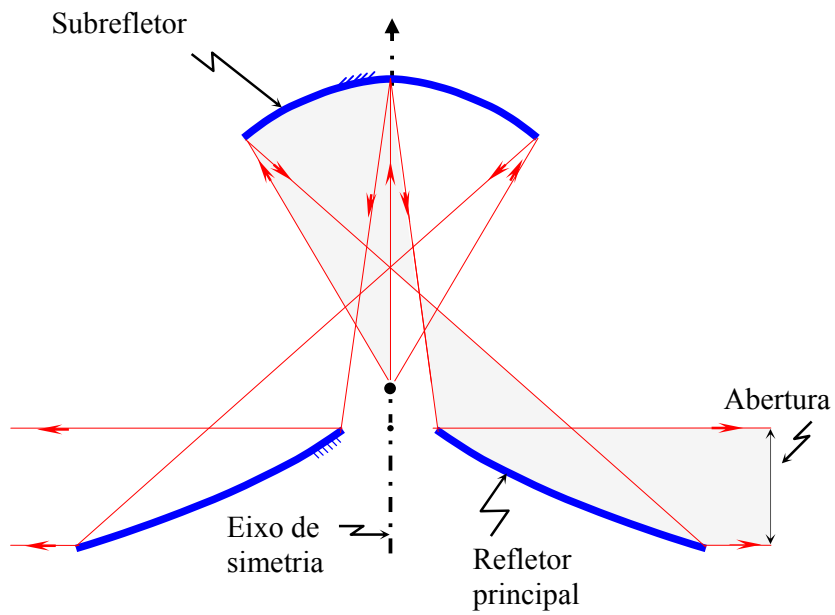
antena mais adequado para realizar tal tarefa. As antenas duplo-refletoras têm despertado especial interesse para esta aplicação, principalmente devido às suas características geométricas inerentes que permitem o projeto de uma antena compacta e capaz de prover a largura de banda requerida. Para operar em serviços de banda larga sem fio as antenas duplo-refletoras têm sido geralmente utilizadas para cobertura omnidirecional em enlaces radioelétricos ponto-multiponto nas estações rádio-bases correspondentes [11]-[16]. Em princípio existem quatro famílias distintas de antenas com dois refletores axialmente simétricos que podem ser utilizadas para cobertura omnidirecional: a OADC (*Omnidirectional Axis-Displaced Cassegrain*), OADE (*Omnidirectional Axis-Displaced Ellipse*), OADG (*Omnidirectional Axis-Displaced Gregorian*) e OADH (*Omnidirectional Axis-Displaced Hyperbola*), ilustradas na Figura 1.4 [11]-[16].

Materiais dielétricos podem ser empregados em antenas refletoras, como aquelas ilustradas na Figura 1.5. O avanço da tecnologia de fabricação de materiais dielétricos com baixas perdas ôhmicas tem impulsionado a pesquisa, projeto e construção deste tipo de antena. Dentre as principais aplicações dos materiais dielétricos na constituição das antenas refletoras podem-se destacar a construção de lentes dielétricas para o controle do campo eletromagnético na abertura de sistemas refletores. Materiais dielétricos também vêm sendo utilizados para a sustentação do subrefletor, evitando a necessidade de estais para o seu suporte. Neste caso, a superfície de contato entre o cone dielétrico e o espaço livre pode servir como uma lente para o controle dos campos refratados, possibilitando a fabricação de uma antena compacta e sem a necessidade do modelamento do refletor principal [17]-[21]. Materiais dielétricos também têm sido utilizados como invólucro (radome) agregado à antena, visando proteger seu desempenho eletromagnético da degradação oferecida pelos efeitos do ambiente [22]-[30].

Configurações como aquelas ilustradas na Figura 1.5 (a) e (b) têm sido apropriadamente investigadas e exploradas na literatura [17]-[29]. Porém resultados conclusivos sobre o desempenho de antenas duplo-refletoras com radome para a cobertura omnidirecional, como

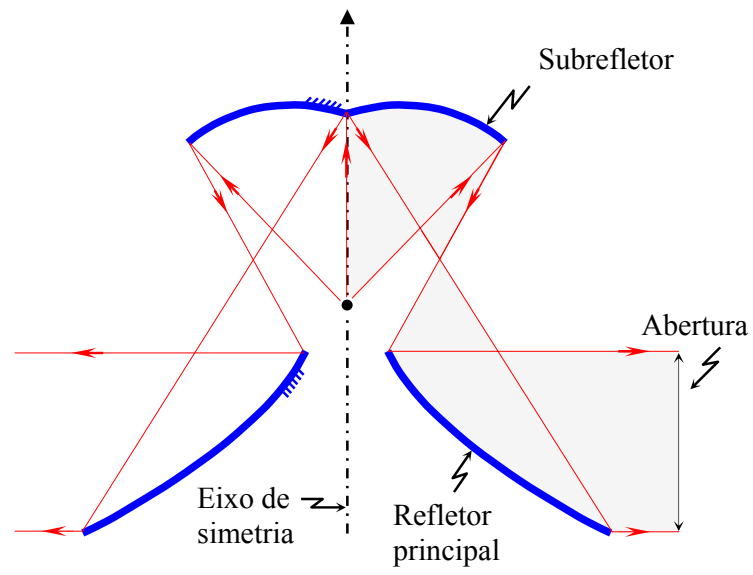


a) OADC (*Omnidirectional Axis-Displaced Cassegrain*)

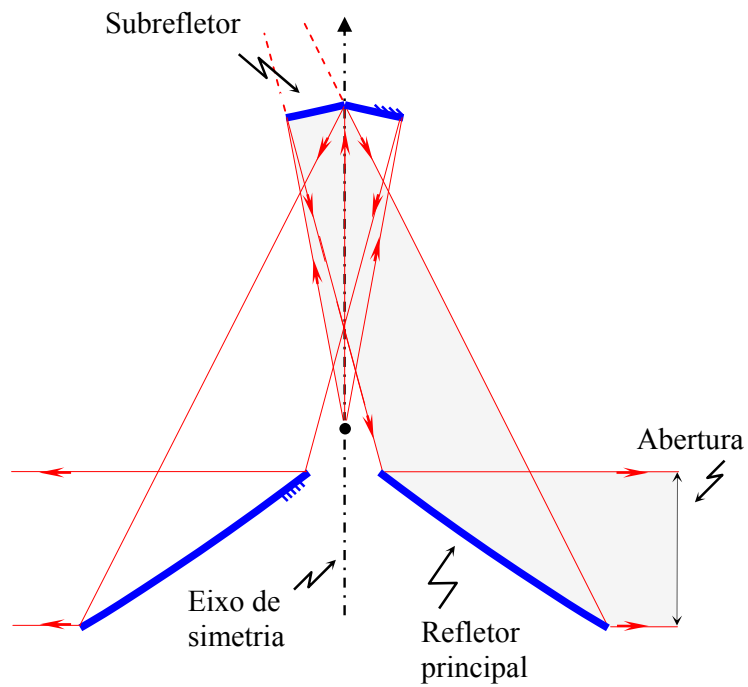


b) OADG (*Omnidirectional Axis-Displaced Gregorian*)

Figura 1.4 – Antenas duplo-refletoras omnidirecional.

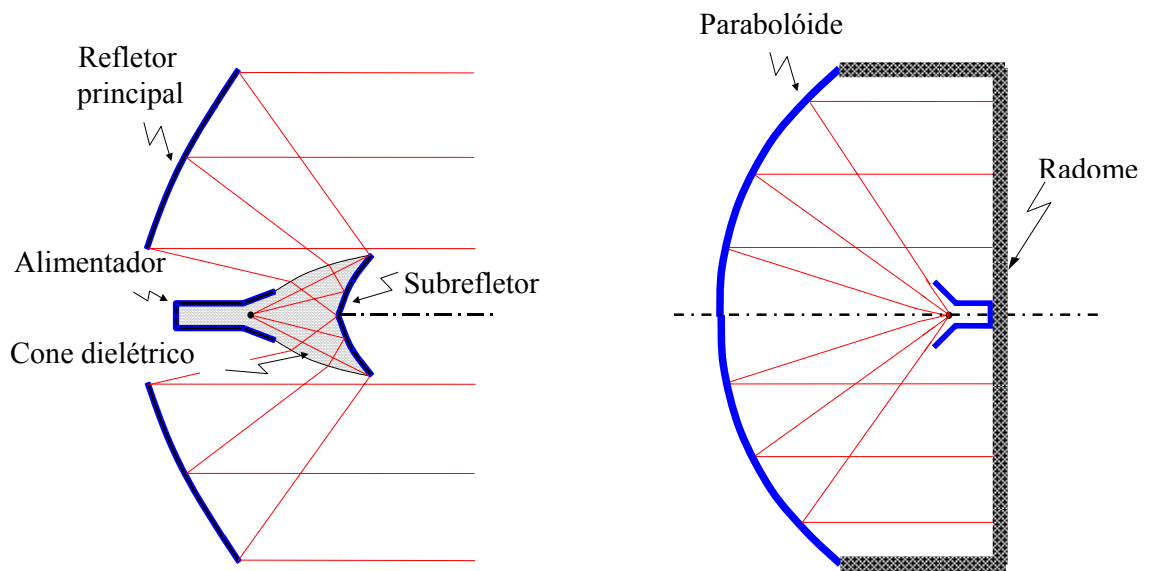


c) OADE (*Omnidirectional Axis-Displaced Ellipse*)



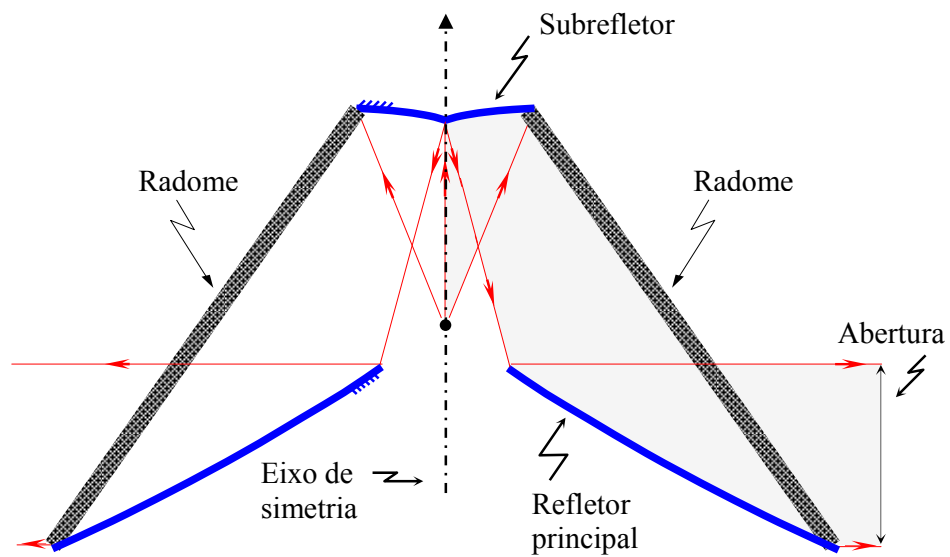
d) OADH (*Omnidirectional Axis-Displaced Hyperbola*)

Figura 1.4 – Antenas duplo-refletoras omnidirecional (continuação).



a) Antena duplo-refletores ADC com cone dielétrico

b) Antena refletora com radome



c) Antena duplo-refletores omnidirecional OADC com radome

Figura 1.5 – Antenas refletoras com a presença de materiais dielétricos.

aquela ilustrada na Figura 1.5 (c), não foram ainda adequadamente reportados [30]. Assim, embora através da ferramenta desenvolvida neste trabalho seja possível a análise completa e direta de todas as antenas ilustradas nas Figuras 1.1 a 1.5, somente antenas duplo-refletoras com radome para cobertura omnidirecional são investigadas.

Para a análise e síntese de antenas refletoras os métodos mais empregados baseiam-se nas aproximações da Ótica Física (PO) [31] ou da Teoria Geométrica da Difração (GTD) [32]. Estes métodos vêm sendo empregados com sucesso no projeto e análise de antenas refletoras, especialmente nas de grandes dimensões elétricas. Porém, eles não são capazes de incluir com precisão os efeitos de espalhamento e acoplamento associados aos vários elementos da antena (isto é, superfícies refletoras, alimentador, estruturas de suporte, radome, etc.), que reduzem a eficiência global da antena e aumentam o nível de lóbulos secundários no diagrama de radiação. A atual tecnologia solicita sistemas de comunicação cada vez mais eficientes, assim requerimentos cada vez mais restritivos são impostos para a performance das antenas refletoras. Isto cria uma necessidade de um modelamento rigoroso, que conduza a projeto com a menor margem de erro possível. Uma análise acurada das propriedades eletromagnéticas da antena, que leve em consideração todos os efeitos relevantes, pode ser feita em termos das equações integrais juntamente com as condições de contorno apropriadas sobre as superfícies da antena. Através desta técnica é possível prever as características elétricas de uma antena com uma precisão extremamente alta, proporcionando a possibilidade um projeto inteiramente computacional, e assim evitando custos associados à medições e experiências laboratoriais. A solução é obtida numericamente através do Método dos Momentos (MoM) [33]. Embora esta técnica seja capaz de avaliar as características elétricas da antena com extrema precisão, sua implementação numérica exige um extraordinário esforço computacional, dificultando a análise de antenas com elevadas dimensões elétricas. Porém, em geometrias com simetria axial a análise é efetuada em duas dimensões, ou seja, apenas sobre as geratrizes que definem as diversas superfícies da antena [34]-[41]. Assim o esforço computacional é sensivelmente reduzido possibilitando a análise rigorosa de grandes antenas refletoras circularmente simétricas. Para configurações de antenas com superfície refletoras extremamente grandes, as



quais requerem um severo esforço computacional quando avaliadas pelo MoM, técnicas híbridas baseadas no MoM e na PO podem ser satisfatoriamente aplicadas conduzindo à resultados precisos sem uma solicitação computacional tão severa [42]-[43]. No presente trabalho, o qual é desenvolvido para a análise de grandes antenas refletoras com simetria axial, estruturas com diâmetro de 200 comprimentos de onda são rigorosa e inteiramente analisadas usando o MoM.

Nos últimos anos muitos trabalhos têm sido desenvolvidos na investigação da utilização do MoM para a análise de antenas refletoras. Estes trabalhos são baseados nas inúmeras publicações disponíveis sobre espalhamento eletromagnético por corpos de revolução e propõem soluções para alcançar a precisão desejada, através do MoM, com o menor esforço computacional possível. Por exemplo, em [44]-[46] é sugerida a utilização de representações mais sofisticadas para o modelamento da corrente. Em [47] a estrutura da antena é incluída na análise e em [48] aproximações para campo próximo são utilizadas. Muitos estudos para a aplicação do MoM na análise de estruturas dielétricas [49],[53] e compostas (combinando materiais dielétricos e condutores) [54]-[57] têm sido desenvolvidos. A partir destes estudos, muitas técnicas e formulações foram propostas e se mostraram eficientes para a análise do espalhamento eletromagnético a partir deste tipo de estrutura. Cada uma destas soluções atinge satisfatoriamente os requisitos desejados de precisão e esforço computacional, porém envolvem diferentes limitações de uso. Dentre estas limitações pode-se destacar a aplicabilidade à análise de estruturas com grandes dimensões elétricas (em torno de 100 comprimentos de onda de raio), a não inclusão da estrutura do alimentador no sistema da antena refletora e ainda limitações associadas à dificuldade de inclusão de materiais dielétricos na análise. As principais dificuldades associadas à análise de superfícies dielétricas estão relacionadas ao aumento da complexidade da formulação e do esforço computacional requerido.

## 1.2 - Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento do ferramental teórico, analítico e numérico e sua aplicação à análise de antenas refletoras circularmente simétricas com elevadas dimensões elétricas, constituídas de materiais condutores e dielétricos, como por exemplo, antenas refletoras com radome, alimentadores carregados com cones dielétricos, lentes dielétricas, dentre outras. É importante destacar que neste trabalho a estrutura do alimentador é considerada, evitando problemas de imprecisão associados ao uso de fontes de onda esféricas pontuais para excitar a antena refletora. Embora através da formulação desenvolvida seja possível a análise completa e direta de qualquer tipo de antena axialmente simétrica constituída de material condutor e dielétrico, neste trabalho esta formulação é aplicada somente à análise de antenas omnidirecionais com radome, já que a análise deste tipo de antenas ainda não se encontra satisfatoriamente explorada na literatura [30].

Dentro do contexto apresentado na Seção 1.1, existem três principais técnicas para análise de antenas refletoras: PO, GTD e MoM. As duas primeiras são empregadas com sucesso na análise de antenas com grandes dimensões elétricas; porém elas não são capazes de incluir com precisão os efeitos de espalhamento associados aos vários componentes da antena e a presença de materiais dielétricos. O MoM é uma técnica extremamente precisa, não apresenta tais limitações e em geometrias com simetria axial requer um esforço computacional sensivelmente menor.

A investigação da utilização do MoM na análise de estruturas com dimensões elétricas reduzidas e constituídas de materiais condutores e dielétricos têm sido exaustivamente abordada [34]-[47], [49]-[57]. Porém existem poucos trabalhos que empregam o MoM à análise de antenas com simetria axial com grandes dimensões elétricas [9]-[16]. Nestes trabalhos os requisitos de precisão e tempo de processamento são satisfatoriamente atendidos; porém não se consideram materiais dielétricos na estrutura da antena. Assim, o objetivo deste trabalho é desenvolver a formulação e um algoritmo, baseados nas equações integrais dos campos elétrico e magnético avaliadas numericamente através do MoM, robustos o suficiente

para analisar com precisão grandes antenas refletoras circularmente simétricas cuja estrutura é constituída de materiais condutores e dielétricos.

Esta robustez é alcançada através de algumas medidas que diferenciam este trabalho dos outros disponíveis na literatura. A primeira delas é o tratamento numérico aplicado às integrais presentes na solução através do MoM. Para os casos em que estas integrais não apresentam singularidades este tratamento é inteiramente conduzido utilizando quadraturas Gaussianas e para os casos em que as singularidades estão presentes, é empregado um tratamento especial que combina a utilização de quadraturas Gaussianas e soluções analíticas para avaliação das integrais. A escolha de funções de base adequadas para a representação das correntes é outra medida muito importante para melhorar a precisão e convergência da análise numérica. Porém representações sofisticadas para a corrente podem conduzir a equações integrais muito complicadas e de difícil tratamento das singularidades. Neste trabalho a representação das correntes superficiais equivalentes é realizada através de funções de base triangulares. Este tipo de função garante uma boa representação do comportamento da corrente ao longo de toda a superfície dos corpos de revolução e produz equações integrais relativamente simples. E o último aspecto diferenciador deste trabalho é a inclusão de materiais dielétricos na análise de estruturas de grandes dimensões elétricas.

### **1.3 - Apresentação do Trabalho**

O trabalho é apresentado neste texto na seguinte ordem. No Capítulo 2 são apresentadas as equações integrais de superfície para a análise numérica rigorosa do espalhamento eletromagnético por diferentes tipos de corpos de revolução. No Capítulo 3 as equações integrais de superfície obtidas no Capítulo 2 são avaliadas numericamente através do método dos momentos. Neste trabalho, a excitação do sistema pode ser realizada de quatro formas diferentes, por uma onda plana, por uma fonte de onda esférica pontual (modelo cosseno elevado ou dipolo de Hertz) localizada sobre o eixo de simetria, através da excitação de um guia de onda circular pelo modo fundamental  $TE_{11}$  ou ainda através da excitação de um guia

de onda coaxial pelo modo TEM. A inclusão do alimentador na análise possibilita a avaliação precisa da estrutura completa da antena. Neste caso a excitação é provida por correntes equivalentes localizadas dentro do guia conectado à corneta. Estas correntes são especificadas para excitar os modos  $TE_{11}$  e TEM. Impedâncias de superfície (IBC - *impedance Boundary Conditions*) são incorporadas na formulação, possibilitando a simulação de corrugações na corneta e simulando uma condição de contorno absorvente para a propagação dos referidos modos. A simulação das corrugações na corneta permite uma análise precisa das características de radiação do alimentador sem a necessidade de modelamento da geometria das corrugações (isso reduz o esforço computacional na análise do alimentador). A simulação da condição de contorno absorvente para os modos  $TE_{11}$  e TEM permite a avaliação das perdas de retorno. Para prover a base necessária para a inclusão de dielétricos na análise, é conduzida uma discussão completa da formulação desenvolvida. No Capítulo 3 são também apresentadas as equações matriciais para a solução do espalhamento eletromagnético por diferentes tipos de corpos de revolução através do MoM. No Capítulo 4 são deduzidas as expressões completas para o cálculo dos campos elétrico e magnético nas regiões de campo próximo e distante, assim como as expressões para o cálculo das perdas de retorno.

Para validar a ferramenta desenvolvida e apresentada nos Capítulos 2 a 4, no Capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos (densidade de correntes elétrica e magnética, campos elétrico e magnético nas regiões de campo próximo e distante) na análise de diversos tipos de estruturas axialmente simétricas (esferas condutoras e dielétricas, esferas condutoras recobertas por uma camada dielétrica, esferas constituídas de 2 e 3 camadas homogêneas, esferas constituídas de dois hemisférios homogêneos, superfície parabólica, guias de onda circular e coaxial e cornetas circular corrugada e coaxial). No Capítulo 6 a formulação é aplicada na análise de antenas duplo-refletoras omnidirecionais OADC e OADE com e sem radome. É investigada a influência do radome no comportamento das características eletromagnéticas das antenas para incidência normal e oblíqua sobre a superfície do radome. No Capítulo 7 são tecidas conclusões gerais sobre o trabalho e os resultados obtidos e propostos temas para continuidade da pesquisa.

## Capítulo 2

# ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO POR CORPOS DE REVOLUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas formulações para a análise numérica rigorosa do espalhamento eletromagnético por corpos axialmente simétricos (corpos de revolução). Estes corpos de revolução são chamados ao longo do texto de BOR (*bodies of revolution*), e, neste trabalho, podem ser constituídos de material Condutor Elétrico Perfeito (CEP), de material Condutor Magnético Perfeito (CMP), de material dielétrico, ou ainda de composições destes materiais. Os diferentes tipos de formulações apresentados são obtidos a partir de combinações lineares entre a Equação Integral do Campo Elétrico (EFIE – *Electric Field Integral Equation*) e a Equação Integral do Campo Magnético (MFIE - *Magnetic Field Integral Equation*) [34]–[36], [41], [49]. Neste capítulo, a representação geométrica dos BOR é apresentada na Seção 2.1 e a Seção 2.2 discute brevemente as EFIE e MFIE aplicadas na análise do espalhamento eletromagnético por diferentes tipos de BOR.

### 2.1 - Geometria do Corpo de Revolução

O BOR pode ser constituído de uma ou mais superfícies, onde cada uma destas superfícies é definida pelo giro de sua respectiva curva geratriz ao redor do eixo de simetria. Neste trabalho o eixo de simetria é o eixo Cartesiano  $z$ . Cada curva geratriz é descrita através de um determinado número de segmentos, conforme ilustrado na Figura. 2.1. É conveniente definir,

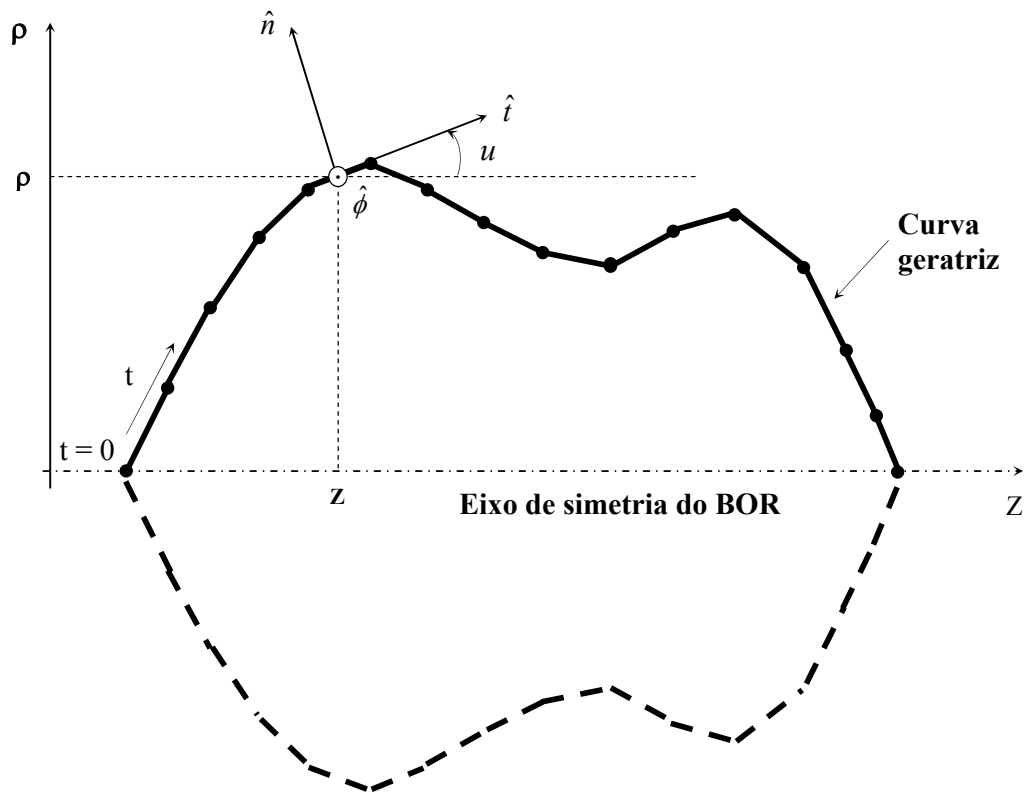


Figura 2.1 – Geometria do BOR.

como feito em [34] e [35], um sistema de coordenadas ortogonal local sobre a superfície do BOR, sistema este caracterizado pelos vetores ortonormais  $\hat{t}$ ,  $\hat{\phi}$  e  $\hat{n}$ , onde  $\hat{t}$  é o vetor tangente à superfície do BOR na direção da curva geratriz,  $\hat{\phi}$  é o vetor tangente à superfície do BOR na direção da circunferência e  $\hat{n} = \hat{\phi} \times \hat{t}$  é o vetor unitário normal à superfície do BOR. Os vetores unitários  $\hat{t}$  e  $\hat{n}$  são representados em coordenadas cilíndricas por

$$\hat{t} = \text{sen } u \hat{\rho} + \text{cos } u \hat{z}, \quad (2.1)$$

$$\hat{n} = \hat{\phi} \times \hat{t} = \text{cos } u \hat{\rho} - \text{sen } u \hat{z}, \quad (2.2)$$

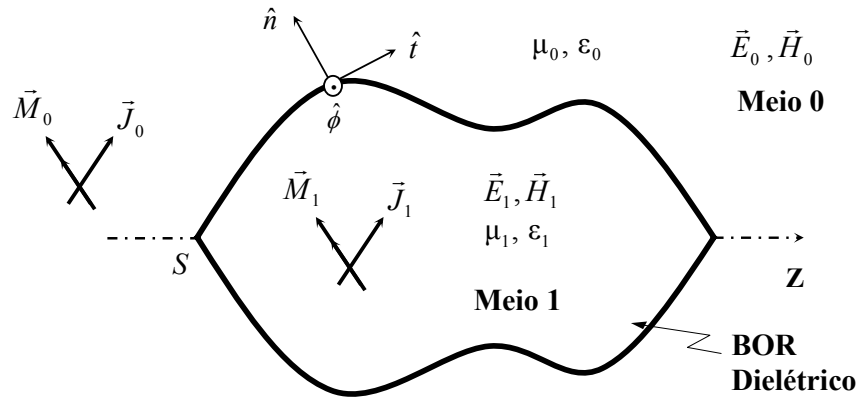
onde  $u$  é o ângulo entre  $\hat{t}$  e  $\hat{z}$ , como ilustrado na Figura 2.1.

## 2.2 - Equações Integrais dos Campos Elétrico e Magnético

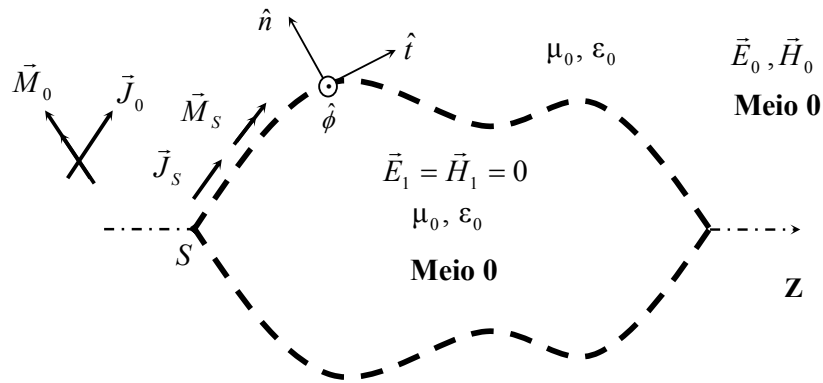
Nesta seção são apresentadas as equações integrais de superfície (EFIE e MFIE) para solução do espalhamento eletromagnético por corpos constituídos de materiais dielétricos, condutores perfeitos e de combinações destes materiais. Estas equações integrais são apresentadas em função das correntes equivalentes elétrica e magnética nas superfícies dos corpos, obtidas a partir do princípio da equivalência [58]. Ou seja, através deste princípio o problema original, onde os corpos de revolução estão presentes em um espaço linear, homogêneo e isotrópico (geralmente o vácuo), é substituído por um problema matematicamente equivalente, onde estes corpos são retirados e em seus lugares são colocadas as correntes superficiais equivalentes elétrica e magnética. O problema equivalente possui as correntes equivalentes (fontes impressas impostas ao problema equivalente que asseguram as condições de contorno originais nas superfícies dos BOR) junto com as fontes externas do problema original, “flutuando” no mesmo espaço do problema original, porém agora livre de obstáculos. Assim as EFIE e MFIE são escritas diretamente a partir da integração numérica destas correntes utilizando a função de Green para o espaço livre [59]. É importante destacar que na notação fasorial apresentada a seguir a variação temporal é da forma  $e^{j\omega t}$ .

### 2.2.1 - BOR Dielétrico

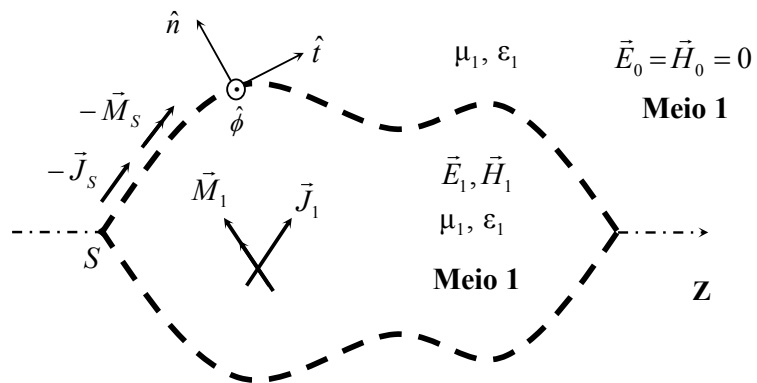
Seja o BOR homogêneo dielétrico ilustrado na Figura 2.2 (a), onde  $\mu_1$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\mu_0$  e  $\epsilon_0$  são os parâmetros constitutivos (permeabilidade magnética e permissividade elétrica, respectivamente) referentes ao meio interno do BOR, denominado meio 1, e ao meio onde o BOR está imerso, denominado meio 0, respectivamente.  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{H}_0$ ,  $\vec{E}_1$  e  $\vec{H}_1$ , são os campos elétrico e magnético nos meio 0 e 1, respectivamente,  $\vec{J}_0$ ,  $\vec{M}_0$ ,  $\vec{J}_1$  e  $\vec{M}_1$ , são as fontes externas de correntes elétrica e magnética nos meios 0 e 1, respectivamente e  $\vec{J}_s$  e  $\vec{M}_s$  são as correntes equivalentes elétrica e magnética, respectivamente, distribuídas sobre a superfície



a) Problema original



b) Problema equivalente externo



c) Problema equivalente interno

Figura 2.2 – Princípio da equivalência para o BOR dielétrico.



$S$  do BOR. Para a determinação das equações integrais (EFIE e MFIE) o problema original deve ser substituído por dois problemas equivalentes, um externo e outro interno, ilustrados nas Figuras 2.2 (b) e (c), respectivamente [58].

Para o problema equivalente externo, ilustrado na Figura 2.2 (b), os campos eletromagnéticos radiados pelas fontes de corrente no meio 0 são dados por [59]:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{E}_0(\vec{r})}{\Gamma(\vec{r})} = & -\frac{j}{4\pi} \left\{ \int_S \left[ \omega\mu_0 \vec{J}_s(\vec{r}') \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') - j \vec{M}_s(\vec{r}') \times \nabla' \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\omega\epsilon_0} \nabla' \cdot \vec{J}_s(\vec{r}') \nabla' \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') \right] ds' + \int_{fontes} \left[ \omega\mu_0 \vec{J}_0(\vec{r}') \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') \right. \right. \\ & \left. \left. - j \vec{M}_0(\vec{r}') \times \nabla' \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{1}{\omega\epsilon_0} \nabla' \cdot \vec{J}_0(\vec{r}') \nabla' \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') \right] dV' \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{H}_0(\vec{r})}{\Gamma(\vec{r})} = & -\frac{j}{4\pi} \left\{ \int_S \left[ \omega\epsilon_0 \vec{M}_s(\vec{r}') \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') + j \vec{J}_s(\vec{r}') \times \nabla' \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\omega\mu_0} \nabla' \cdot \vec{M}_s(\vec{r}') \nabla' \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') \right] ds' + \int_{fontes} \left[ \omega\epsilon_0 \vec{M}_0(\vec{r}') \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') \right. \right. \\ & \left. \left. + j \vec{J}_0(\vec{r}') \times \nabla' \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{1}{\omega\mu_0} \nabla' \cdot \vec{M}_0(\vec{r}') \nabla' \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') \right] dV' \right\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde  $\vec{r}$  localiza o ponto de observação,  $\vec{r}'$  localiza o ponto de fonte,  $\psi_l(\vec{r}, \vec{r}')$  é a função de Green para o espaço livre para o meio “ $l$ ”, definida como

$$\psi_l(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jk_l |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (2.5)$$

onde  $k_l = \omega\sqrt{\mu_l \epsilon_l}$ ,  $\mu_l$  e  $\epsilon_l$  são a permeabilidade e permissividade do meio “ $l$ ”, respectivamente e  $\Gamma(\vec{r})$  é um parâmetro que ajusta as equações (2.3) e (2.4) em função do ponto de observação. Este parâmetro é necessário pois para a determinação dos campos dentro ou fora da região limitada pela superfície  $S$  do BOR, as integrais das equações (2.3) e (2.4) fornecem exatamente os valores de  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ . Porém, se o cálculo for realizado exatamente sobre uma superfície  $S$  suave as equações integrais fornecem a metade dos valores de  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  [59]. Logo, o parâmetro  $\Gamma(\vec{r})$  pode ser definido como

$$\Gamma(\vec{r}) = \begin{cases} 2, & \vec{r} \in S \\ 1, & \vec{r} \notin S \end{cases}$$

desde que  $S$  seja suave. Caso  $S$  possua descontinuidades na curvatura,  $\Gamma(\vec{r})$  é definido em função do ângulo sólido no ponto em  $S$  onde os campos são calculados [59].

Nas equações (2.3) e (2.4) a integração sobre as fontes  $\vec{J}_0$  e  $\vec{M}_0$  representa o campo incidente  $(\vec{E}_{in0}, \vec{H}_{in0})$  para o problema equivalente externo da Figura 2.2 (b):

$$\begin{aligned} \vec{E}_{in0}(\vec{r}) = & -\frac{j}{4\pi} \int_{fontes} \left[ \omega \mu_0 \vec{J}_0(\vec{r}') \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') - j \vec{M}_0(\vec{r}') \times \nabla' \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') \right. \\ & \left. - \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \nabla' \cdot \vec{J}_0(\vec{r}') \nabla' \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') \right] d\nu', \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{in0}(\vec{r}) = & -\frac{j}{4\pi} \int_{fontes} \left[ \omega \varepsilon_0 \vec{M}_0(\vec{r}') \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') + j \vec{J}_0(\vec{r}') \times \nabla' \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') \right. \\ & \left. - \frac{1}{\omega \mu_0} \nabla' \cdot \vec{M}_0(\vec{r}') \nabla' \psi_0(\vec{r}, \vec{r}') \right] d\nu'. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para simplificar a notação das equações (2.3), (2.4), (2.6) e (2.7) são definidos os operadores integrodiferenciais para um dado meio “ $P$ ”:

$$L_l(\vec{X}) = -\frac{j}{4\pi k_l} \int_S \left[ k_l^2 \vec{X}(\vec{r}') \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') - \nabla' \cdot \vec{X}(\vec{r}') \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') \right] ds', \quad (2.8)$$

$$K_l(\vec{X}) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \vec{X}(\vec{r}') \times \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') ds'. \quad (2.9)$$

Assim, as equações (2.3) e (2.4) podem ser reescritas como:

$$\frac{\vec{E}_0(\vec{r})}{\Gamma(\vec{r})} = \eta_0 L_0(\vec{J}_S) + K_0(\vec{M}_S) + \vec{E}_{in0}(\vec{r}), \quad (2.10)$$

$$\frac{\vec{H}_0(\vec{r})}{\Gamma(\vec{r})} = \frac{1}{\eta_0} L_0(\vec{M}_S) - K_0(\vec{J}_S) + \vec{H}_{in0}(\vec{r}), \quad (2.11)$$

onde, das equações (2.6) e (2.7), considerando a integração sobre o volume  $\nu'$ , tem-se:

$$\vec{E}_{m0}(\vec{r}) = \eta_0 L_0(\vec{J}_0) + K_0(\vec{M}_0), \quad (2.12)$$

$$\vec{H}_{m0}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta_0} L_0(\vec{M}_0) - K_0(\vec{J}_0), \quad (2.13)$$

e  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$  é a impedância intrínseca do meio 0.

De forma semelhante, para o problema equivalente interno ilustrado na Figura 2.2 (c):

$$\frac{\vec{E}_1(\vec{r})}{\Gamma(\vec{r})} = \eta_1 L_1(-\vec{J}_S) + K_1(-\vec{M}_S) + \vec{E}_{m1}(\vec{r}), \quad (2.14)$$

$$\frac{\vec{H}_1(\vec{r})}{\Gamma(\vec{r})} = \frac{1}{\eta_1} L_1(-\vec{M}_S) - K_1(-\vec{J}_S) + \vec{H}_{m1}(\vec{r}), \quad (2.15)$$

onde

$$\vec{E}_{m1}(\vec{r}) = \eta_1 L_1(\vec{J}_1) + K_1(\vec{M}_1), \quad (2.16)$$

$$\vec{H}_{m1}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta_1} L_1(\vec{M}_1) - K_1(\vec{J}_1), \quad (2.17)$$

são os campos incidentes radiados pelas fontes  $\vec{J}_1$  e  $\vec{M}_1$  no meio 1 (que serão nulos caso tais fontes não existam) e  $\eta_1 = \sqrt{\mu_1 / \epsilon_1}$  é a impedância intrínseca do meio 1. Nas equações (2.14) e (2.15) o sinal negativo nas correntes equivalentes  $\vec{J}_S$  e  $\vec{M}_S$  indicam que no problema equivalente interno estas correntes têm o sentido oposto àquele definido para o problema equivalente externo devido à orientação fixa de  $\hat{n}$ , conforme ilustrado na Figura 2.2 (c).

As equações integrais do campo elétrico e magnético são obtidas através da imposição das condições de contorno sobre as componentes tangenciais do campo na interface  $S$  entre os meios 0 e 1. Isso pode ser feito através da observação do campo sobre  $S$  (ou seja,  $\vec{r}$  agora representa um observador sobre a interface  $S$ ) e operando o produto vetorial deste campo com  $\hat{n}$  (para remover a componente normal à  $S$ ). Neste caso, assumindo que a interface  $S$  é suave,  $\Gamma(\vec{r}) = 2$ , e avaliando as integrais segundo o valor principal de Cauchy, das equações (2.10), (2.11), (2.14) e (2.15) tem-se [59]:

$$\hat{n} \times \vec{E}_0(\vec{r}) = -\vec{M}_S(\vec{r}) = 2\hat{n} \times \left[ \eta_0 L_0(\vec{J}_S) + K_0(\vec{M}_S) + \vec{E}_{in0}(\vec{r}) \right], \quad (2.18)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_0(\vec{r}) = \vec{J}_S(\vec{r}) = 2\hat{n} \times \left[ \frac{1}{\eta_0} L_0(\vec{M}_S) - K_0(\vec{J}_S) + \vec{H}_{in0}(\vec{r}) \right], \quad (2.19)$$

$$\hat{n} \times \vec{E}_1(\vec{r}) = -\vec{M}_S = 2\hat{n} \times \left[ \eta_1 L_1(-\vec{J}_S) + K_1(-\vec{M}_S) + \vec{E}_{in1}(\vec{r}) \right], \quad (2.20)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_1(\vec{r}) = \vec{J}_S(\vec{r}) = 2\hat{n} \times \left[ \frac{1}{\eta_1} L_1(-\vec{M}_S) - K_1(-\vec{J}_S) + \vec{H}_{in1}(\vec{r}) \right]. \quad (2.21)$$

Nas equações (2.18)-(2.21) o processo de remoção da componente normal do campo provoca uma troca de direção das componentes  $t$  e  $\phi$  (componente  $t$  fica na direção  $\hat{\phi}$  e componente  $\phi$  fica na direção  $\hat{t}$ ). Uma outra forma de remover a componente normal do campo sem provocar tal troca de direção das componentes é observar que

$$\vec{E}_{tan} = -\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E},$$

$$\vec{H}_{tan} = -\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{H}.$$

Assim, utilizando as operações acima, as equações (2.18)-(2.21) podem ser reescritas como:

$$\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E}_0(\vec{r}) = -\hat{n} \times \vec{M}_S(\vec{r}) = 2\hat{n} \times \hat{n} \times \left[ \eta_0 L_0(\vec{J}_S) + K_0(\vec{M}_S) + \vec{E}_{in0}(\vec{r}) \right], \quad (2.22)$$

$$\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{H}_0(\vec{r}) = \hat{n} \times \vec{J}_S(\vec{r}) = 2\hat{n} \times \hat{n} \times \left[ \frac{1}{\eta_0} L_0(\vec{M}_S) - K_0(\vec{J}_S) + \vec{H}_{in0}(\vec{r}) \right], \quad (2.23)$$

$$\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E}_1(\vec{r}) = -\hat{n} \times \vec{M}_S = 2\hat{n} \times \hat{n} \times \left[ \eta_1 L_1(-\vec{J}_S) + K_1(-\vec{M}_S) + \vec{E}_{in1}(\vec{r}) \right], \quad (2.24)$$

$$\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{H}_1(\vec{r}) = \hat{n} \times \vec{J}_S(\vec{r}) = 2\hat{n} \times \hat{n} \times \left[ \frac{1}{\eta_1} L_1(-\vec{M}_S) - K_1(-\vec{J}_S) + \vec{H}_{in1}(\vec{r}) \right]. \quad (2.25)$$

A primeira forma de apresentação das equações integrais, dada pelas equações (2.18)-(2.21), é classificada neste trabalho como forma *Vetorial*, e a segunda, dada pelas equações (2.22)-(2.25), como forma *Tangencial*.

Combinando as equações (2.18)-(2.21), forma *Vetorial*, ou as equações (2.22)-(2.25), forma *Tangencial*, é possível construir sete formulações distintas para a determinação do campo eletromagnético espalhado por um corpo de revolução dielétrico como aquele ilustrado na Figura 2.2 (a) [49], [51]. Estas formulações para a forma *Vetorial* são:

- 1) Formulação PMCHWT: é obtida utilizando duas combinações lineares das equações para os meios 0 e 1. Trata-se de uma combinação entre as EFIE e outra entre as MFIE da seguinte forma [49], [51]:

$$\hat{n} \times \left[ \vec{E}_{in0}(\vec{r}) + \alpha \vec{E}_{in1}(\vec{r}) \right] = -\frac{(\alpha+1)\vec{M}_s(\vec{r})}{2} - \hat{n} \times \left\{ \eta_0 L_0(\vec{J}_s) + K_0(\vec{M}_s) \right. \\ \left. - \alpha \left[ \eta_1 L_1(\vec{J}_s) + K_1(\vec{M}_s) \right] \right\}, \quad (2.26)$$

$$\hat{n} \times \left[ \vec{H}_{in0}(\vec{r}) + \beta \vec{H}_{in1}(\vec{r}) \right] = \frac{(1+\beta)\vec{J}_s(\vec{r})}{2} - \hat{n} \times \left\{ \frac{1}{\eta_0} L_0(\vec{M}_s) - K_0(\vec{J}_s) \right. \\ \left. - \beta \left[ \frac{1}{\eta_1} L_1(\vec{M}_s) - K_1(\vec{J}_s) \right] \right\}, \quad (2.27)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes multiplicativas das combinações lineares e valem  $\alpha = \beta = 1$  [49]. O nome *PMCHWT* é a junção das iniciais dos nomes dos pesquisadores que propuseram esta solução (Poggio, Miller, Chang, Harrington, Wu e Tsai).

- 2) Formulação de Müller: utiliza a mesma combinação linear da formulação *PMCHWT*, equações (2.26) e (2.27), porém com  $\alpha = -\varepsilon_1 / \varepsilon_0$  e  $\beta = -\mu_1 / \mu_0$  [49], [51].
- 3) Formulação Efield: é obtida utilizando as EFIE para os meios 0 e 1 [49]:

$$\hat{n} \times \vec{E}_{in0}(\vec{r}) = -\frac{\vec{M}_s(\vec{r})}{2} - \hat{n} \times \left[ \eta_0 L_0(\vec{J}_s) + K_0(\vec{M}_s) \right], \quad (2.28)$$

$$\hat{n} \times \vec{E}_{in1}(\vec{r}) = -\frac{\vec{M}_s(\vec{r})}{2} + \hat{n} \times \left[ \eta_1 L_1(\vec{J}_s) + K_1(\vec{M}_s) \right]. \quad (2.29)$$

- 4) Formulação Hfield: é obtida utilizando as MFIE para os meios 0 e 1 [49]:

$$\hat{n} \times \vec{H}_{in0}(\vec{r}) = \frac{\vec{J}_s(\vec{r})}{2} - \hat{n} \times \left[ \frac{1}{\eta_0} L_0(\vec{M}_s) - K_0(\vec{J}_s) \right], \quad (2.30)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_{in1}(\vec{r}) = \frac{\vec{J}_s(\vec{r})}{2} + \hat{n} \times \left[ \frac{1}{\eta_1} L_1(\vec{M}_s) - K_1(\vec{J}_s) \right]. \quad (2.31)$$

5) Formulação *Cfield*: é obtida utilizando uma combinação linear entre as EFIE e MFIE para os meios 0 e 1, da seguinte forma [49]:

$$\hat{n} \times \left[ \alpha \vec{E}_{in0}(\vec{r}) + \beta \vec{H}_{in0}(\vec{r}) \right] = \beta \frac{\vec{J}_s(\vec{r})}{2} - \alpha \frac{\vec{M}_s(\vec{r})}{2} - \hat{n} \times \left\{ \alpha \left[ \eta_0 L_0(\vec{J}_s) + K_0(\vec{M}_s) \right] + \beta \left[ 1/\eta_0 L_0(\vec{M}_s) - K_0(\vec{J}_s) \right] \right\}, \quad (2.32)$$

$$\hat{n} \times \left[ \alpha \vec{E}_{in1}(\vec{r}) + \beta \vec{H}_{in1}(\vec{r}) \right] = \beta \frac{\vec{J}_s(\vec{r})}{2} - \alpha \frac{\vec{M}_s(\vec{r})}{2} + \hat{n} \times \left\{ \alpha \left[ \eta_1 L_1(\vec{J}_s) + K_1(\vec{M}_s) \right] + \beta \left[ 1/\eta_1 L_1(\vec{M}_s) - K_1(\vec{J}_s) \right] \right\}, \quad (2.33)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes multiplicativas quaisquer das combinações lineares.

6) Formulação *EHfield*: obtida utilizando a EFIE para o meio 0 e a MFIE para o meio 1:

$$\hat{n} \times \vec{E}_{in0}(\vec{r}) = -\frac{\vec{M}_s(\vec{r})}{2} - \hat{n} \times \left[ \eta_0 L_0(\vec{J}_s) + K_0(\vec{M}_s) \right], \quad (2.34)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_{in1}(\vec{r}) = \frac{\vec{J}_s(\vec{r})}{2} + \hat{n} \times \left[ \frac{1}{\eta_1} L_1(\vec{M}_s) - K_1(\vec{J}_s) \right]. \quad (2.35)$$

7) Formulação *HEfield*: obtida utilizando a EFIE para o meio 1 e a MFIE para o meio 0:

$$\hat{n} \times \vec{H}_{in0}(\vec{r}) = \frac{\vec{J}_s(\vec{r})}{2} - \hat{n} \times \left[ \frac{1}{\eta_0} L_0(\vec{M}_s) - K_0(\vec{J}_s) \right], \quad (2.36)$$

$$\hat{n} \times \vec{E}_{in1}(\vec{r}) = -\frac{\vec{M}_s(\vec{r})}{2} + \hat{n} \times \left[ \eta_1 L_1(\vec{J}_s) + K_1(\vec{M}_s) \right]. \quad (2.37)$$

As formulações na forma *Tangencial* são obtidas diretamente a partir das formulações na forma *Vetorial*, ou seja, operando o produto vetorial das equações (2.26)-(2.37) por  $\hat{n}$ .

A partir das sete formulações para as formas *Tangencial* e *Vetorial* é possível construir 32 combinações lineares diferentes entre as equações. Dentre estas combinações as que apresentaram os melhores resultados foram as formulações *de Müller* e *PMCHWT* na forma

*Tangencial*. Assim, ao longo deste texto, para a avaliação do espalhamento eletromagnético por superfícies dielétricas as expressões apresentadas e os testes realizados são conduzidos considerando as formulações *de Müller* e *PMCHWT* na forma *Tangencial*, as quais possuem formas idênticas, diferindo apenas nas constantes multiplicativas  $\alpha$  e  $\beta$ .

## 2.2.2 - BOR Condutor Perfeito

Para o caso particular de um obstáculo condutor elétrico perfeito (CEP) é necessário considerar somente o problema equivalente externo. Neste caso das equações (2.18) e (2.19) (forma *Vetorial*),

$$\hat{n} \times \vec{E}_{in0}(\vec{r}) = -\eta_0 \hat{n} \times L_0(\vec{J}_S), \quad (2.38)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_{in0}(\vec{r}) = \frac{\vec{J}_S(\vec{r})}{2} + \hat{n} \times K_0(\vec{J}_S), \quad (2.39)$$

e das equações (2.22) e (2.23) (forma *Tangencial*),

$$\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E}_{in0}(\vec{r}) = -\eta_0 \hat{n} \times \hat{n} \times L_0(\vec{J}_S), \quad (2.40)$$

$$\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{H}_{in0}(\vec{r}) = \hat{n} \times \frac{\vec{J}_S(\vec{r})}{2} + \hat{n} \times \hat{n} \times K_0(\vec{J}_S), \quad (2.41)$$

observando que  $\vec{M}_S = 0$  [59].

Combinando as equações (2.38) e (2.39), na forma *Vetorial*, ou as equações (2.40) e (2.41), na forma *Tangencial*, é possível construir três formulações distintas para a determinação do campo eletromagnético espalhado por um BOR CEP [41]. Estas formulações para a forma *Vetorial* são:

- 1) Formulação *Efield*: utiliza a equação (2.38) [34], [35], [41].
- 2) Formulação *Hfield*: utiliza a equação (2.39) [41].
- 3) Formulação *Cfield*: é obtida através de uma combinação linear entre as equações (2.38) e (2.39) da seguinte forma [41]:

$$\hat{n} \times [\alpha \vec{E}_{m0}(\vec{r}) + \beta \vec{H}_{m0}(\vec{r})] = -\alpha \eta_0 \hat{n} \times L_0(\vec{J}_S) + \beta \left( \hat{n} \times K_0(\vec{J}_S) + \frac{\vec{J}_S(\vec{r})}{2} \right), \quad (2.42)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes multiplicativas quaisquer da combinação linear. As formas *Tangenciais* das formulações podem ser obtidas a partir da multiplicação vetorial das equações (2.38), (2.39) e (2.42) por  $\hat{n}$ .

Superfícies condutoras abertas (cascas) devem ser tratadas somente pela formulação *Efield*, onde  $\vec{J}_S$  neste caso representa a soma das correntes dos dois lados de  $S$  [59]. Para superfícies fechadas pode ser utilizada qualquer uma das três formulações. Porém, as soluções *Efield* e *Hfield* não são únicas para frequências correspondentes às frequências de ressonância da região interna do BOR e assim produzem resultados espúrios para a corrente  $\vec{J}_S(\vec{r}')$  [41]. Mas uma solução única e precisa pode ser obtida através da formulação *Cfield* [41]. Neste trabalho a forma *Tangencial* da formulação *Efield* é adotada para a análise de superfícies CEP abertas [34], [35], [41]. Para a formulação *Cfield*, aplicada a superfícies CEP fechadas, é possível construir quatro tipos distintos de formulações combinando as formas *Vetorial* e *Tangencial*. Dentre estas formulações, conforme testes realizados e de acordo com [41], a mais acurada e, portanto, utilizada ao longo deste trabalho é aquela que combina a forma *Tangencial* da EFIE com a forma *Vetorial* da MFIE.

As equações para a análise de BOR CMP podem ser obtidas diretamente a partir das equações para CEP aplicando dualidade [58].

### 2.2.3 - BOR Constituído de Duas Camadas Dielétricas

Seja o caso de um BOR constituído por duas camadas dielétricas, como aquele ilustrado na Figura 2.3 (a), onde  $\vec{E}_l$ ,  $\vec{H}_l$ ,  $\mu_l$ ,  $\varepsilon_l$ ,  $\vec{J}_l$  e  $\vec{M}_l$ , são os campos totais elétrico e magnético, os parâmetros constitutivos e as fontes externas de correntes elétrica e magnética no meio “ $l$ ” do BOR, respectivamente, onde  $l = 0, 1, 2$ , conforme o meio em questão.  $\vec{J}_{S_j}(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_{S_j}(\vec{r}')$  são as correntes elétrica e magnética equivalentes na superfície  $S_j$  do BOR, respectivamente, onde



$j = 1, 2$ . O espalhamento eletromagnético por este tipo de geometria deve ser avaliado aplicando problemas equivalentes interno e externo à cada uma das superfícies através do mesmo tratamento utilizado na Seção 2.2.1 para um BOR homogêneo. Ou seja, deve ser aplicado o problema equivalente interno à superfície  $S_1$  como ilustrado na Figura 2.3. (b), o problema equivalente externo à superfície  $S_1$  e interno à superfície  $S_2$  como ilustrado na Figura 2.3. (c) e o problema equivalente externo à superfície  $S_2$  como ilustrado na Figura 2.3. (d). Utilizando as equações (2.18) e (2.19), as quais estão na forma *Vetorial*, para o problema equivalente externo à superfície  $S_2$  tem-se:

$$\hat{n}_2 \times \vec{E}_0(\vec{r}) = -\vec{M}_{S_2}(\vec{r}) = 2 \hat{n}_2 \times \left[ \eta_0 L_0(\vec{J}_{S_2}) + K_0(\vec{M}_{S_2}) + \vec{E}_{in0}(\vec{r}) \right], \quad (2.43)$$

$$\hat{n}_2 \times \vec{H}_0(\vec{r}) = \vec{J}_{S_2}(\vec{r}) = 2 \hat{n}_2 \times \left[ \frac{1}{\eta_0} L_0(\vec{M}_{S_2}) - K_0(\vec{J}_{S_2}) + \vec{H}_{in0}(\vec{r}) \right], \quad (2.44)$$

onde  $\vec{r}$  localiza o ponto de observação sobre  $S_2$ . Para o problema equivalente interno superfície  $S_1$ , utilizando as equações (2.20) e (2.21), as quais estão na forma *Vetorial*, tem-se:

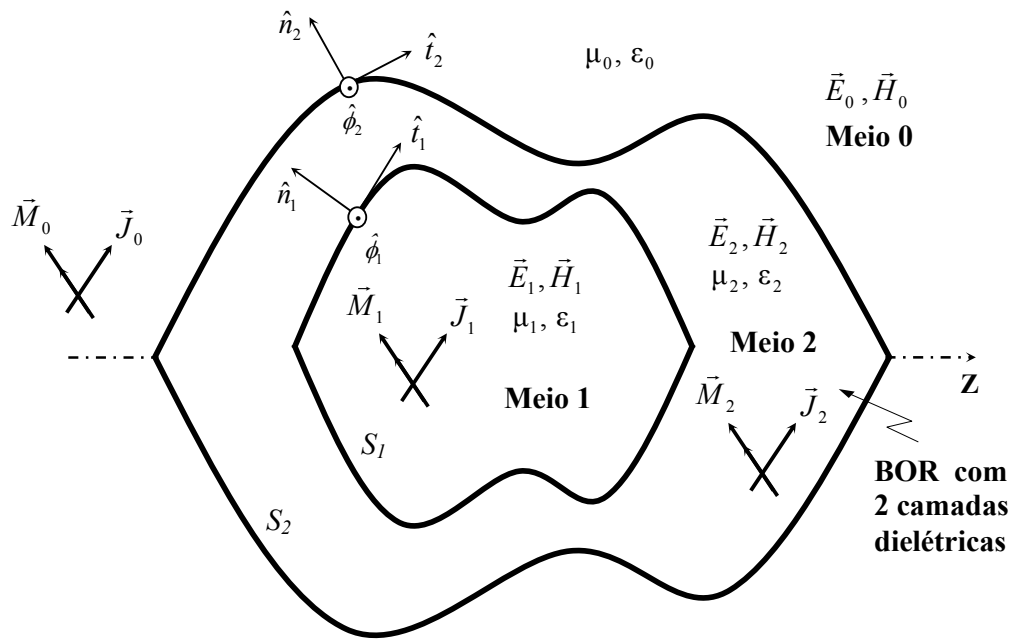
$$\hat{n}_1 \times \vec{E}_1(\vec{r}) = -\vec{M}_{S_1} = 2 \hat{n}_1 \times \left[ \eta_1 L_1(-\vec{J}_{S_1}) + K_1(-\vec{M}_{S_1}) + \vec{E}_{in1}(\vec{r}) \right], \quad (2.45)$$

$$\hat{n}_1 \times \vec{H}_1(\vec{r}) = \vec{J}_{S_1}(\vec{r}) = 2 \hat{n}_1 \times \left[ \frac{1}{\eta_1} L_1(-\vec{M}_{S_1}) - K_1(-\vec{J}_{S_1}) + \vec{H}_{in1}(\vec{r}) \right], \quad (2.46)$$

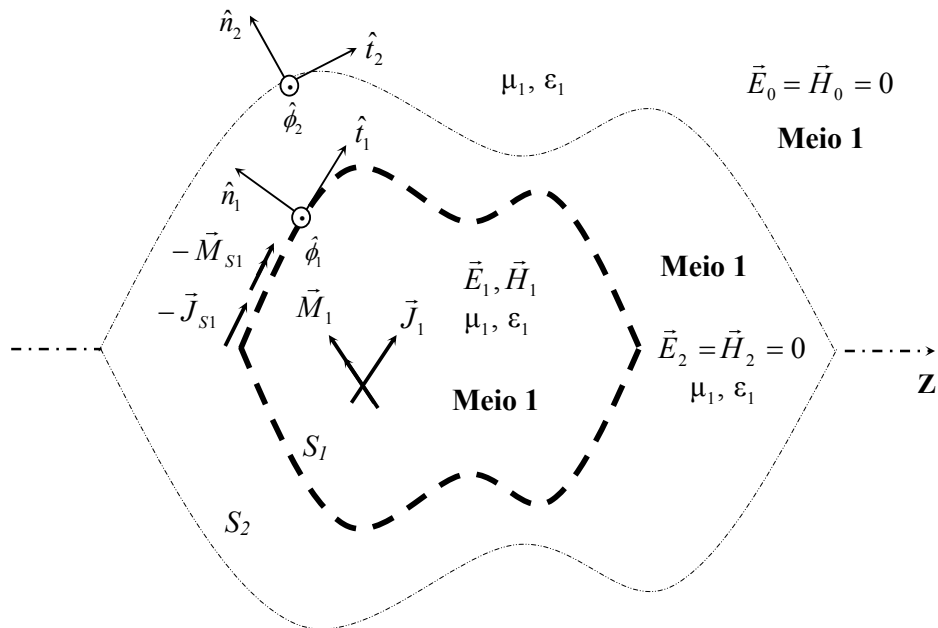
onde  $\vec{r}$  localiza o ponto de observação sobre  $S_1$ . Para o meio 2, que é limitado pelas superfícies  $S_1$  e  $S_2$  utilizando o problema equivalente externo à superfície  $S_1$  e interno à superfície  $S_2$  e as equações (2.18)-(2.21) tem-se:

$$\hat{n}_1 \times \vec{E}_2(\vec{r}) = -\vec{M}_{S_1} = 2 \hat{n}_1 \times \left[ \eta_2 L_2(\vec{J}_{S_1}) + K_2(\vec{M}_{S_1}) - \eta_2 L_2(\vec{J}_{S_2}) - K_2(\vec{M}_{S_2}) + \vec{E}_{in2}(\vec{r}) \right], \quad (2.47)$$

$$\hat{n}_1 \times \vec{H}_2(\vec{r}) = \vec{J}_{S_1}(\vec{r}) = 2 \hat{n}_1 \times \left[ \frac{1}{\eta_2} L_2(\vec{M}_{S_1}) - K_2(\vec{J}_{S_1}) - 1/\eta_2 L_2(\vec{M}_{S_2}) + K_2(\vec{J}_{S_2}) + \vec{H}_{in2}(\vec{r}) \right], \quad (2.48)$$

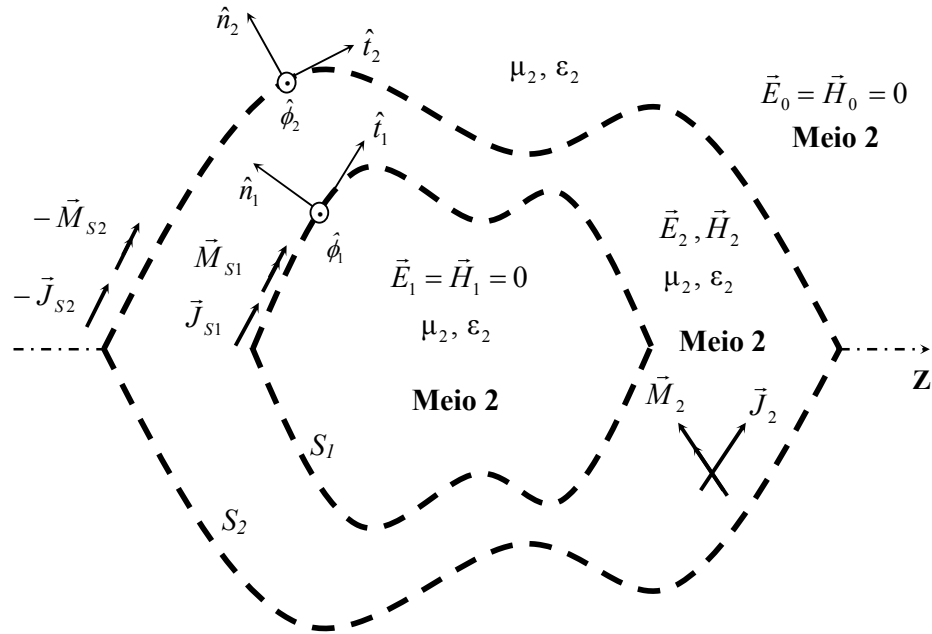


a) Problema original

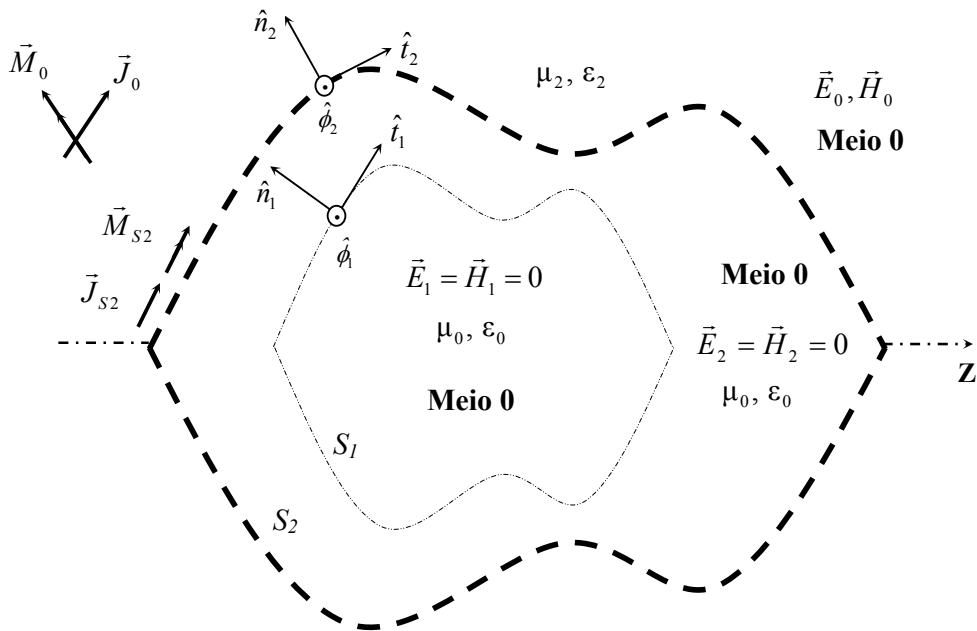


b) Problema equivalente interno para a superfície  $S_1$

Figura 2.3 – Equivalências para o BOR constituído de duas camadas dielétricas.



c) Problema equivalente externo para a superfície  $S_1$  e interno para a superfície  $S_2$



d) Problema equivalente externo para a superfície  $S_2$

Figura 2.3 – Equivalências para o BOR constituído de duas camadas dielétricas (continuação).

onde  $\vec{r}$  localiza o ponto de observação sobre  $S_1$ . Se  $\vec{r}$  localizar um ponto de observação sobre  $S_2$  as equações (2.47) e (2.48) continuam válidas sendo apenas necessário substituir  $\hat{n}_1$  por  $\hat{n}_2$ .

As equações na forma *Tangencial* podem ser obtidas diretamente a partir das formulações na forma *Vetorial* operando o produto vetorial das equações (2.43)-(2.48) por  $\hat{n}$ .

Utilizando o mesmo tratamento empregado na Seção 2.2.1 é possível construir as sete formulações apresentadas na Seção 2.2.1 para cada forma (*Vetorial* e *Tangencial*). Para o caso particular das formulações de *Müller* ou *PMCHWT* na forma *Vetorial*, tem-se [50]:

$$\begin{aligned} \hat{n}_2 \times [\vec{E}_{in0}(\vec{r}) + \alpha \vec{E}_{in2}(\vec{r})] &= -\frac{(\alpha + 1) \vec{M}_{S2}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_2 \times \left\{ \eta_0 L_0(\vec{J}_{S2}) + K_0(\vec{M}_{S2}) \right. \\ &\quad \left. - \alpha [\eta_2 L_2(\vec{J}_{S2}) + K_2(\vec{M}_{S2}) - \eta_2 L_2(\vec{J}_{S1}) - K_2(\vec{M}_{S1})] \right\}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_2 \times [\vec{H}_{in0}(\vec{r}) + \beta \vec{H}_{in2}(\vec{r})] &= \frac{(1 + \beta) \vec{J}_{S2}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_2 \times \left\{ \frac{1}{\eta_0} L_0(\vec{M}_{S2}) - K_0(\vec{J}_{S2}) \right. \\ &\quad \left. - \beta \left[ \frac{1}{\eta_2} L_2(\vec{M}_{S2}) - K_2(\vec{J}_{S2}) - \frac{1}{\eta_2} L_2(\vec{M}_{S1}) + K_2(\vec{J}_{S1}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_1 \times [\vec{E}_{in2}(\vec{r}) + \alpha \vec{E}_{in1}(\vec{r})] &= -\frac{(\alpha + 1) \vec{M}_{S1}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_1 \times \left\{ \eta_2 L_2(\vec{J}_{S1}) + K_2(\vec{M}_{S1}) \right. \\ &\quad \left. - \eta_2 L_2(\vec{J}_{S2}) - K_2(\vec{M}_{S2}) - \alpha [\eta_1 L_1(\vec{J}_{S1}) + K_1(\vec{M}_{S1})] \right\}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_1 \times [\vec{H}_{in2}(\vec{r}) + \beta \vec{H}_{in1}(\vec{r})] &= \frac{(1 + \beta) \vec{J}_{S1}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_1 \times \left\{ \frac{1}{\eta_2} L_2(\vec{M}_{S1}) - K_2(\vec{J}_{S1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\eta_2} L_2(\vec{M}_{S2}) + K_2(\vec{J}_{S2}) - \beta \left[ \frac{1}{\eta_1} L_1(\vec{M}_{S1}) - K_1(\vec{J}_{S1}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Conforme apresentado na Seção 2.2.1, as formulações de *Müller* e *PMCHWT* possuem formas idênticas diferindo apenas nas constantes multiplicativas  $\alpha$  e  $\beta$ . Ou seja, para a formulação de *Müller*  $\alpha = -\varepsilon_e / \varepsilon_i$  e  $\beta = -\mu_e / \mu_i$ , enquanto que para a formulação *PMCHWT*  $\alpha = \beta = 1$ , onde  $e$  e  $i$  representam os meios externo e interno à superfícies onde a observação é realizada.

A forma *Tangencial* para as formulações de *Müller* ou *PMCHWT*, apresentadas nas equações (2.49)-(2.52) na forma *Vetorial*, podem ser obtidas obtida pelo mesmo processo já descrito para obtenção da forma *Tangencial* das equações.

## 2.2.4 - Outros Tipos de BOR

Para o caso de um BOR constituído de  $n$  camadas dielétricas homogêneas, como aquele ilustrado na Figura 2.4, com  $n > 2$ , as formulações para avaliação do espalhamento eletromagnético, obtidas através de combinações lineares entre as equações integrais EFIE e MFIE, podem ser obtidas empregando o mesmo tratamento utilizado na Seção 2.2.2 para o BOR constituído de duas camadas dielétricas. Isto é, aplicando as equivalências interna e externa e impondo a continuidade das componentes tangenciais do campo em cada superfície do BOR [50]. Neste caso também é possível construir as mesmas sete formulações apresentadas na Seção 2.2.1 para cada forma (*Vetorial* e *Tangencial*). Assim, utilizando a forma *Vetorial* da formulação de *Müller* ou *PMCHWT*, para a observação realizada sobre superfície externa  $S_n$  do BOR tem-se [50]:

$$\begin{aligned} \hat{n}_n \times [\vec{E}_{in0}(\vec{r}) + \alpha \vec{E}_{inn}(\vec{r})] = & -\frac{(\alpha + 1) \vec{M}_{Sn}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_n \times \left\{ \eta_0 L_0(\vec{J}_{Sn}) + K_0(\vec{M}_{Sn}) \right. \\ & \left. - \alpha \left[ \eta_n L_n(\vec{J}_{Sn}) + K_n(\vec{M}_{Sn}) - \eta_n L_n(\vec{J}_{Sn-1}) - K_n(\vec{M}_{Sn-1}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_n \times [\vec{H}_{in0}(\vec{r}) + \beta \vec{H}_{inn}(\vec{r})] = & \frac{(1 + \beta) \vec{J}_{Sn}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_n \times \left\{ \frac{1}{\eta_0} L_0(\vec{M}_{Sn}) - K_0(\vec{J}_{Sn}) \right. \\ & \left. - \beta \left[ \frac{1}{\eta_n} L_n(\vec{M}_{Sn}) - K_n(\vec{J}_{Sn}) - \frac{1}{\eta_n} L_n(\vec{M}_{Sn-1}) + K_n(\vec{J}_{Sn-1}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Para a observação realizada sobre superfície interna  $S_l$  do BOR tem-se [50]:

$$\begin{aligned} \hat{n}_1 \times [\vec{E}_{in2}(\vec{r}) + \alpha \vec{E}_{in1}(\vec{r})] = & -\frac{(\alpha + 1) \vec{M}_{S1}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_1 \times \left\{ \eta_2 L_2(\vec{J}_{S1}) + K_2(\vec{M}_{S1}) \right. \\ & \left. - \eta_2 L_2(\vec{J}_{S2}) - K_2(\vec{M}_{S2}) - \alpha \left[ \eta_1 L_1(\vec{J}_{S1}) + K_1(\vec{M}_{S1}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

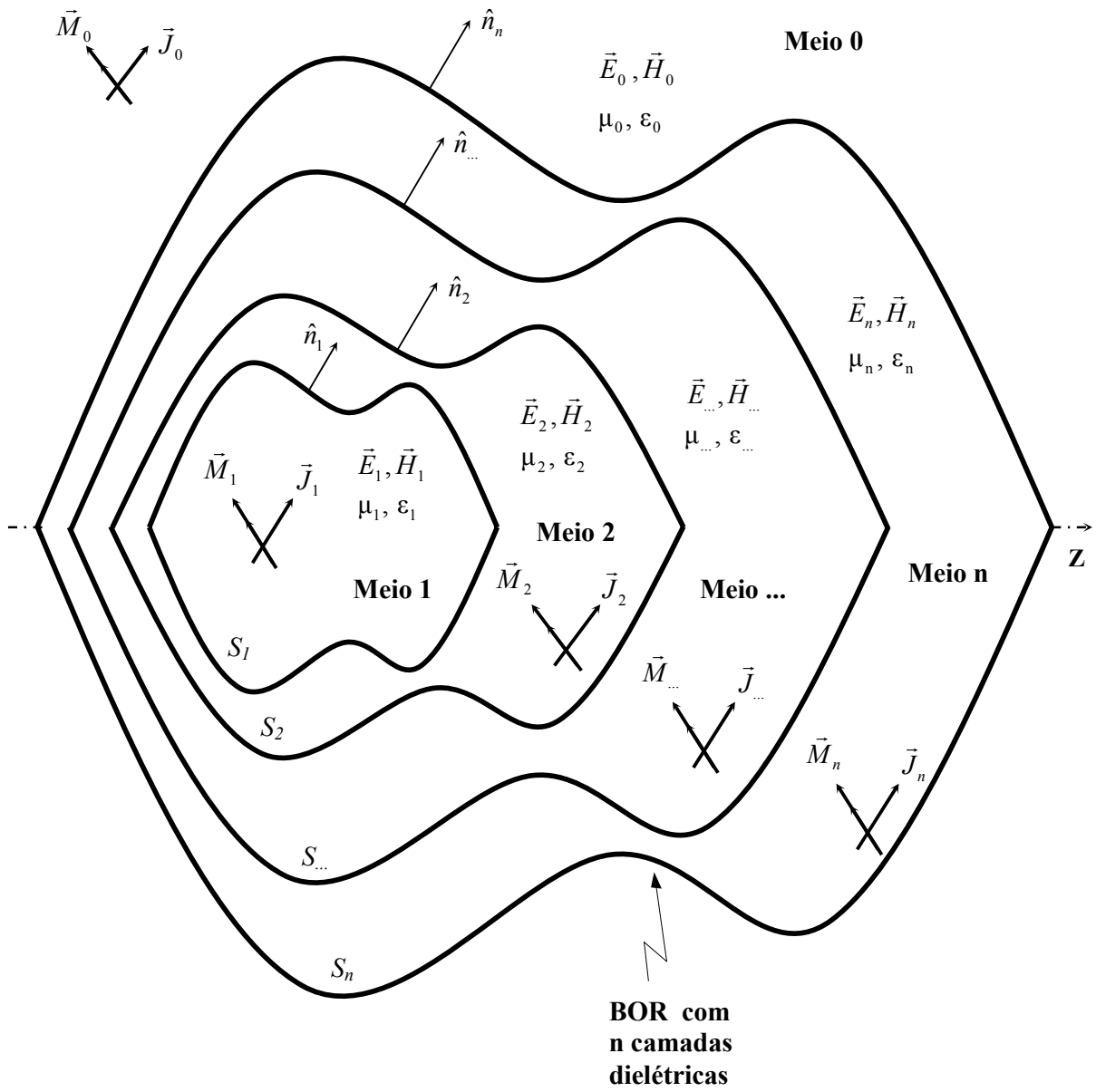


Figura 2.4 – BOR constituído de n camadas dielétricas.

$$\begin{aligned} \hat{n}_1 \times [\bar{H}_{in2}(\vec{r}) + \beta \bar{H}_{in1}(\vec{r})] &= \frac{(1 + \beta) \bar{J}_{S1}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_1 \times \left\{ \frac{1}{\eta_2} L_2(\bar{M}_{S1}) - K_2(\bar{J}_{S1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\eta_2} L_2(\bar{M}_{S2}) + K_2(\bar{J}_{S2}) - \beta \left[ \frac{1}{\eta_1} L_1(\bar{M}_{S1}) - K_1(\bar{J}_{S1}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

enquanto que para uma superfície intermediária,  $S_j$ , separando os meios  $a$  e  $b$ , onde  $a$  é o meio mais interno e  $b$  o mais externo [50]

$$\begin{aligned} \hat{n}_j \times [\bar{E}_{inb}(\vec{r}) + \alpha \bar{E}_{ina}(\vec{r})] &= -\frac{(\alpha + 1) \bar{M}_{Sj}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_j \times \left\{ \eta_b L_b(\bar{J}_{Sj}) + K_b(\bar{M}_{Sj}) \right. \\ &\quad - \eta_b L_b(\bar{J}_{Sj+1}) - K_b(\bar{M}_{Sj+1}) - \alpha \left[ \eta_a L_a(\bar{J}_{Sj}) + K_a(\bar{M}_{Sj}) \right. \\ &\quad \left. \left. - \eta_a L_a(\bar{J}_{Sj-1}) - K_a(\bar{M}_{Sj-1}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_j \times [\bar{H}_{inb}(\vec{r}) + \beta \bar{H}_{ina}(\vec{r})] &= \frac{(1 + \beta) \bar{J}_{Sj}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_j \times \left\{ \frac{1}{\eta_b} L_b(\bar{M}_{Sj}) - K_b(\bar{J}_{Sj}) \right. \\ &\quad - \frac{1}{\eta_b} L_b(\bar{M}_{Sj+1}) + K_b(\bar{J}_{Sj+1}) - \beta \left[ \frac{1}{\eta_a} L_a(\bar{M}_{Sj}) - K_a(\bar{J}_{Sj}) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\eta_a} L_a(\bar{M}_{Sj-1}) + K_a(\bar{J}_{Sj-1}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

É importante lembrar que para a formulação de Müller  $\alpha = \beta = 1$ , enquanto que para a formulação *PMCHWT*  $\alpha = -\epsilon_e / \epsilon_i$  e  $\beta = -\mu_e / \mu_i$ , onde  $e$  e  $i$  representam os meios externo e interno à superfícies onde a observação é realizada. A forma *Tangencial* para as formulações de Müller ou *PMCHWT*, apresentadas nas equações (2.53)-(2.58) na forma *Vetorial*, podem ser obtidas pelo mesmo processo já descrito para obtenção da forma *Tangencial* das equações.

Para o caso particular do um BOR constituído de  $n$  camadas, como aquele ilustrado na Figura 2.4, onde a camada mais interna é condutora e as demais são dielétricas, as formulações para avaliação do espalhamento eletromagnético, obtidas através de combinações lineares entre as equações integrais EFIE e MFIE, podem ser determinadas aplicando equivalências interna e externa para as superfícies dielétricas, somente a equivalência externa

para a superfície condutora e impondo a continuidade das componentes tangenciais do campo em cada superfície do BOR [50]. Para a superfície condutora é utilizada a formulação *Cfield*, por se tratar de uma superfície condutora fechada, conforme definido na Seção 2.2.2. Para as superfícies dielétricas pode ser utilizada qualquer uma das formulações apresentadas na Seção 2.2.1. Assim, para a superfície mais externa,  $S_n$ , continuam válidas as equações (2.53) e (2.54), para qualquer superfície intermediária,  $S_j$ , continuam válidas as equações (2.57) e (2.58) com  $\alpha = \beta = 1$  para a formulação de Müller e  $\alpha = -\epsilon_e / \epsilon_i$  e  $\beta = -\mu_e / \mu_i$  para a formulação *PMCHWT*. Para a superfície interna do BOR,  $S_1$  (condutora), tem-se [54], [56]:

$$\begin{aligned} \hat{n}_1 \times [\alpha \vec{E}_{in2}(\vec{r}) + \beta \vec{H}_{in2}(\vec{r})] = \beta \frac{\vec{J}_{S1}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_1 \times \left\{ \alpha \left[ \eta_2 [L_2(\vec{J}_{S1}) - L_2(\vec{J}_{S2})] - K_2(\vec{M}_{S2}) \right] \right. \\ \left. + \beta \left[ -\frac{1}{\eta_2} L_2(\vec{M}_{S2}) + K_2(\vec{J}_{S2}) - K_2(\vec{J}_{S1}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

$\alpha$  e  $\beta$  são constantes multiplicativas quaisquer da combinação linear, conforme discutido na Seção 2.2.2. Novamente a forma *Tangencial* para as formulações é obtida pelo mesmo processo já descrito para obtenção da forma *Tangencial* das equações.

A formulação desenvolvida para o BOR constituído de  $n$  camadas pode ser estendida para um BOR consistido de  $n$  regiões, como aquele ilustrado na Figura 2.5. As formulações para avaliação do espalhamento eletromagnético podem ser obtidas através de combinações lineares entre as equações integrais EFIE e MFIE como feito para o BOR constituído de  $n$  camadas. Isto é, aplicando equivalências interna e externa para as regiões dielétricas, somente a equivalência externa para as regiões condutoras e impondo a continuidade das componentes tangenciais do campo em cada superfície do BOR [50]. As superfícies condutoras fechadas devem ser avaliadas através da formulação *Cfield* e para superfícies CEP abertas deve ser utilizada a *Efield*, conforme definido na Seção 2.2.2. Para as superfícies dielétricas pode ser utilizada qualquer uma das formulações apresentadas na Seção 2.2.1. Assim, para o BOR ilustrado na Figura 2.5, considerando que todas as regiões são dielétricas e utilizando a forma *Vetorial* da formulação de Müller ou *PMCHWT* tem-se [52]:



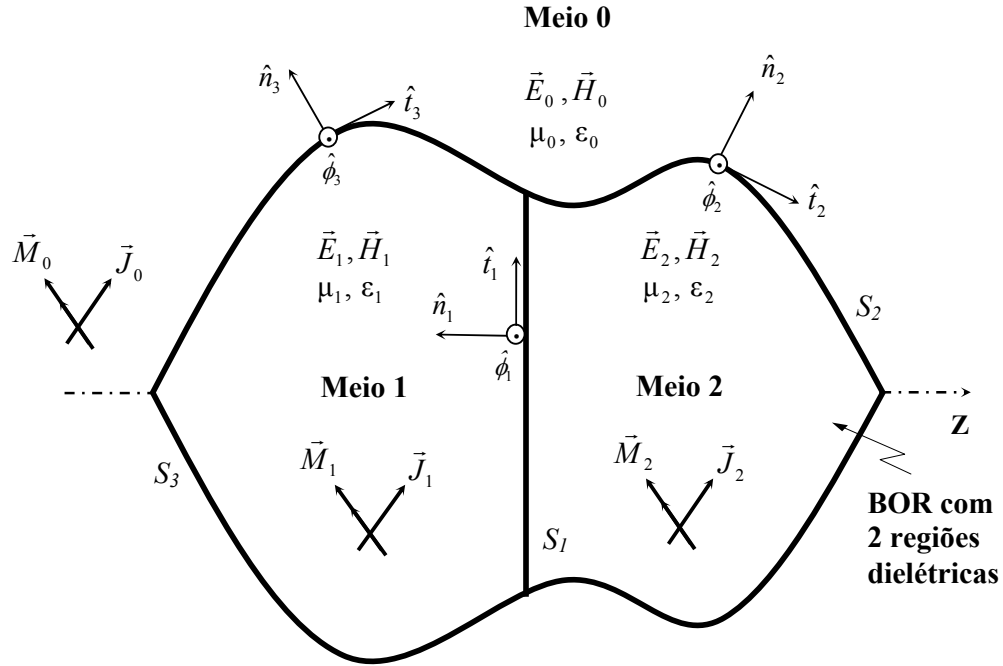


Figura 2.5 – BOR Constituído de duas regiões dielétricas.

$$\begin{aligned} \hat{n}_3 \times [\vec{E}_{in0}(\vec{r}) + \alpha \vec{E}_{in1}(\vec{r})] = & -\frac{(\alpha+1) \vec{M}_{S3}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_3 \times \left\{ \eta_0 L_0(\vec{J}_{S3}) + K_0(\vec{M}_{S3}) \right. \\ & \left. - \alpha [\eta_1 L_1(\vec{J}_{S3}) + K_1(\vec{M}_{S3}) - \eta_1 L_1(\vec{J}_{S1}) - K_1(\vec{M}_{S1})] \right\}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_3 \times [\vec{H}_{in0}(\vec{r}) + \beta \vec{H}_{in1}(\vec{r})] = & \frac{(1+\beta) \vec{J}_{S3}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_3 \times \left\{ \frac{1}{\eta_0} L_0(\vec{M}_{S3}) - K_0(\vec{J}_{S3}) \right. \\ & \left. - \beta [1/\eta_1 L_1(\vec{M}_{S3}) - K_1(\vec{J}_{S3}) - 1/\eta_1 L_1(\vec{M}_{S1}) + K_1(\vec{J}_{S1})] \right\}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_2 \times [\vec{E}_{in0}(\vec{r}) + \alpha \vec{E}_{in2}(\vec{r})] = & -\frac{(\alpha+1) \vec{M}_{S2}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_2 \times \left\{ \eta_0 L_0(\vec{J}_{S2}) + K_0(\vec{M}_{S2}) \right. \\ & \left. - \alpha [\eta_2 L_2(\vec{J}_{S2}) + K_2(\vec{M}_{S2}) + \eta_2 L_2(\vec{J}_{S1}) + K_2(\vec{M}_{S1})] \right\}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_2 \times [\vec{H}_{in0}(\vec{r}) + \beta \vec{H}_{in2}(\vec{r})] = & \frac{(1+\beta) \vec{J}_{S2}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_2 \times \left\{ \frac{1}{\eta_0} L_0(\vec{M}_{S2}) - K_0(\vec{J}_{S2}) \right. \\ & \left. - \beta [1/\eta_2 L_2(\vec{M}_{S2}) - K_2(\vec{J}_{S2}) + 1/\eta_2 L_2(\vec{M}_{S1}) - K_2(\vec{J}_{S1})] \right\}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\hat{n}_1 \times [\vec{E}_{in1}(\vec{r}) + \alpha \vec{E}_{in2}(\vec{r})] = -\frac{(\alpha+1) \vec{M}_{S1}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_1 \times \left\{ \eta_1 L_1(\vec{J}_{S1}) + K_1(\vec{M}_{S1}) - \eta_1 L_1(\vec{J}_{S3}) \right. \\ \left. - K_1(\vec{M}_{S3}) - \alpha \left[ \eta_2 L_2(\vec{J}_{S1}) + K_2(\vec{M}_{S1}) + \eta_2 L_2(\vec{J}_{S1}) + K_2(\vec{M}_{S1}) \right] \right\}, \quad (2.64)$$

$$\hat{n}_1 \times [\vec{H}_{in1}(\vec{r}) + \beta \vec{H}_{in2}(\vec{r})] = \frac{(1+\beta) \vec{J}_{S2}(\vec{r})}{2} - \hat{n}_1 \times \left\{ \frac{1}{\eta_1} L_1(\vec{M}_{S1}) - K_1(\vec{J}_{S1}) - \frac{1}{\eta_1} L_1(\vec{M}_{S3}) \right. \\ \left. + K_1(\vec{J}_{S3}) - \beta \left[ \frac{1}{\eta_2} L_2(\vec{M}_{S1}) - K_2(\vec{J}_{S1}) + \frac{1}{\eta_2} L_2(\vec{M}_{S1}) - K_2(\vec{J}_{S1}) \right] \right\}, \quad (2.65)$$

onde  $\alpha = \beta = 1$  para a formulação de Müller e  $\alpha = -\varepsilon_e / \varepsilon_i$  e  $\beta = -\mu_e / \mu_i$  para a formulação PMCHWT, onde  $e$  e  $i$  representam os meios externo e interno à superfícies onde a observação é realizada.

Para a análise do acoplamento eletromagnético entre diversos BOR as equações integrais podem ser obtidas utilizando o mesmo tratamento empregado para o BOR constituído de  $n$  regiões homogêneas. Ou seja, aplicando as equivalências interna e externa para as regiões dielétricas e a equivalência externa para as regiões condutoras [52]-[56].

## 2.3 - Conclusões Parciais

Neste capítulo o princípio da equivalência foi utilizado, juntamente com as condições de contorno apropriadas, para determinação das equações integrais dos campos elétrico e magnético para avaliação do espalhamento eletromagnético por diferentes tipos de corpos de revolução (isto é, corpos condutores, dielétricos, constituídos de camadas homogêneas e constituídos e regiões homogêneas). Foram também apresentadas e discutidas diferentes possibilidades de combinação linear entre estas equações integrais, ou seja, formulações para a solução numérica do espalhamento eletromagnético.

## Capítulo 3

### SOLUÇÃO ATRAVÉS DO MÉTODOS DOS MOMENTOS

A solução numérica do espalhamento eletromagnético por diferentes tipos de BOR apresentada no Capítulo 2 é obtida aplicando o método dos momentos (MoM) à EFIE e ou à MFIE, presentes nos diferentes tipos de formulação discutidas. O MoM é uma técnica que permite a solução de equações integrais que possuem em seu integrando um parâmetro desconhecido [33]. Esta técnica consiste basicamente em transformar a equação integral em um sistema linear de equações algébricas [33], [59]. Neste capítulo é apresentada a formulação para a aplicação do MoM às equações integrais associadas ao problema equivalente externo discutido na Seção 2.2.1. A solução para o problema equivalente interno, assim como a solução para os demais problemas apresentados no Capítulo 2, podem ser diretamente obtidas a partir da formulação para problema equivalente externo e são apresentadas na Seção 3.7.

#### 3.1 - Equação Matricial

Para transformar as equações integrais (2.18)-(2.25) em um sistema linear de equações algébricas, as densidades de corrente equivalente elétrica,  $\vec{J}_s(\vec{r}')$ , e magnética,  $\vec{M}_s(\vec{r}')$ , ilustradas na Figura 2.2 (b), devem ser representadas por uma soma finita de funções de base conhecidas,  $\vec{J}_j(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_j(\vec{r}')$ , multiplicadas por coeficientes desconhecidos,  $I_j^J$  e  $I_j^M$  [33]:

$$\vec{J}_s(\vec{r}') = \sum_{j=1}^{N_j} I_j^J \vec{J}_j(\vec{r}'), \quad (3.1)$$

$$\vec{M}_s(\vec{r}') = \sum_{j=1}^{N_\phi} I_j^M \vec{M}_j(\vec{r}'), \quad (3.2)$$

onde  $N$  é o número total de funções de base que devem ser cuidadosamente escolhidas para representar corretamente o comportamento eletromagnético das correntes nas superfícies do BOR. Substituindo as equações (3.1) e (3.2) nas equações (2.18) e (2.19), que descrevem a forma *Vetorial* das EFIE e MFIE para o problema equivalente externo, têm-se:

$$\sum_{j=1}^N I_j^M \vec{M}_j(\vec{r}) = -2 \hat{n} \times \left[ \eta_0 \sum_{j=1}^N I_j^J L_0(\vec{J}_j) + \sum_{j=1}^N I_j^M K_0(\vec{M}_j) + \vec{E}_{m0}(\vec{r}) \right], \quad (3.3)$$

$$\sum_{j=1}^N I_j^J \vec{J}_j(\vec{r}) = 2 \hat{n} \times \left[ \frac{1}{\eta_0} \sum_{j=1}^N I_j^M L_0(\vec{M}_j) - \sum_{j=1}^N I_j^J K_0(\vec{J}_j) + \vec{H}_{i0}(\vec{r}) \right]. \quad (3.4)$$

Para a forma *Tangencial*, a partir das equações (2.22) e (2.23) têm-se:

$$\hat{n} \times \sum_{j=1}^N I_j^M \vec{M}_j(\vec{r}) = -2 \hat{n} \times \hat{n} \times \left[ \eta_0 \sum_{j=1}^N I_j^J L_0(\vec{J}_j) + \sum_{j=1}^N I_j^M K_0(\vec{M}_j) + \vec{E}_{m0}(\vec{r}) \right], \quad (3.5)$$

$$\hat{n} \times \sum_{j=1}^N (I_j^J \vec{J}_j(\vec{r})) = 2 \hat{n} \times \hat{n} \times \left[ \frac{1}{\eta_0} \sum_{j=1}^N I_j^M L_0(\vec{M}_j) - \sum_{j=1}^N I_j^J K_0(\vec{J}_j) + \vec{H}_{i0}(\vec{r}) \right]. \quad (3.6)$$

Os coeficientes desconhecidos,  $I_j^J$  e  $I_j^M$ , são obtidos operando o produto escalar de funções de peso,  $\vec{W}_i(\vec{r})$ , em ambos os lados das equações (3.3)-(3.6) e resolvendo a integral sobre a superfície  $S$  do BOR ( $S$  refere-se às coordenadas de observação) [33], [59]. Através deste procedimento as equações (3.3) e (3.4), forma *Vetorial*, fornecem:

$$\int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot [\hat{n} \times \vec{E}_{m0}(\vec{r})] ds = - \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{I_j^M \vec{M}_j(\vec{r})}{2} + \hat{n} \times [\eta_0 I_j^J L_0(\vec{J}_j) + I_j^M K_0(\vec{M}_j)] \right\} ds, \quad (3.7)$$

$$\int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot [\hat{n} \times \vec{H}_{i0}(\vec{r})] ds = \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{I_j^J \vec{J}_j(\vec{r})}{2} - \hat{n} \times \left[ \frac{1}{\eta_0} I_j^M L_0(\vec{M}_j) - I_j^J K_0(\vec{J}_j) \right] \right\} ds, \quad (3.8)$$

e as equações (3.5) e (3.6), forma *Tangencial*, fornecem:

$$\int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \left[ \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E}_{in0}(\vec{r}) \right] ds = - \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \sum_{j=1}^N \hat{n} \times \left\{ \frac{I_j^M \vec{M}_j(\vec{r})}{2} + \hat{n} \times \left[ \eta_0 I_j^J L_0(\vec{J}_j) + I_j^M K_0(\vec{M}_j) \right] \right\} ds, \quad (3.9)$$

$$\int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \left[ \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{H}_{in0}(\vec{r}) \right] ds = \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \sum_{j=1}^N \hat{n} \times \left\{ \frac{I_j^J \vec{J}_j(\vec{r})}{2} - \hat{n} \times \left[ \frac{1}{\eta_0} I_j^M L_0(\vec{M}_j) - I_j^J K_0(\vec{J}_j) \right] \right\} ds. \quad (3.10)$$

Aplicando as equações (3.7)-(3.10) a cada função de peso  $\vec{W}_i(\vec{r})$ , são obtidas as equações matriciais [33], [59]:

$$[V^E] = [Z^E][I^J] + [Y^E][I^M], \quad (3.11)$$

$$[V^H] = [Z^H][I^J] + [Y^H][I^M], \quad (3.12)$$

onde os índices  $E$  e  $H$  denotam a equação matricial obtida através da EFIE, equações (3.7) ou (3.9), e MFIE, equações (3.8) ou (3.10), respectivamente. A matriz  $[V]$  é denominada matriz excitação, as matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$  são as matrizes impedância e admitância, respectivamente, e as matrizes  $[I^J]$  e  $[I^M]$  são as matrizes dos coeficientes desconhecidos. Os  $i$ -ésimos elementos das matrizes  $[V^E]$  e  $[V^H]$  de dimensão  $[N \times 1]$  obtidos das equações (3.7) e (3.8) são:

$$V_i^E = \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \left[ \hat{n} \times \vec{E}_{in0}(\vec{r}) \right] ds, \quad (3.13)$$

$$V_i^H = \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \left[ \hat{n} \times \vec{H}_{in0}(\vec{r}) \right] ds, \quad (3.14)$$

e aqueles obtidos das equações (3.9) e (3.10) são:

$$V_i^E = \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \left[ \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E}_{in0}(\vec{r}) \right] ds, \quad (3.15)$$

$$V_i^H = \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \left[ \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{H}_{in0}(\vec{r}) \right] ds. \quad (3.16)$$

Os elementos das matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$  de dimensão  $[N \times N]$  obtidos das equações (3.7) e (3.8) são

$$Z_{ij}^E = - \eta_0 \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot [\hat{n} \times L_0(\vec{J}_j)] ds, \quad (3.17)$$

$$Y_{ij}^E = - \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \left[ \frac{\vec{M}_j(\vec{r})}{2} + \hat{n} \times K_0(\vec{M}_j) \right] ds, \quad (3.18)$$

$$Z_{ij}^H = \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \left[ \frac{\vec{J}_j(\vec{r})}{2} + \hat{n} \times K_0(\vec{J}_j) \right] ds, \quad (3.19)$$

$$Y_{ij}^H = - \frac{1}{\eta_0} \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot [\hat{n} \times L_0(\vec{M}_j)] ds, \quad (3.20)$$

e obtidos aqueles obtidos das equações (3.9) e (3.10) são:

$$Z_{ij}^E = - \eta_0 \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot [\hat{n} \times \hat{n} \times L_0(\vec{J}_j)] ds, \quad (3.21)$$

$$Y_{ij}^E = \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \hat{n} \times \left[ -\frac{\vec{M}_j(\vec{r})}{2} - \hat{n} \times K_0(\vec{M}_j) \right] ds, \quad (3.22)$$

$$Z_{ij}^H = \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \hat{n} \times \left[ \frac{\vec{J}_j(\vec{r})}{2} + \hat{n} \times K_0(\vec{J}_j) \right] ds, \quad (3.23)$$

$$Y_{ij}^H = - \frac{1}{\eta_0} \int_S \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot [\hat{n} \times \hat{n} \times L_0(\vec{M}_j)] ds. \quad (3.24)$$

Os  $j$ -ésimos elementos das matrizes  $[I^J]$  e  $[I^M]$  são os coeficientes desconhecidos  $I_j^J$  e  $I_j^M$ , respectivamente.

O processo para a avaliação numérica das equações (3.13), (3.14), (3.17)-(3.20), forma *Vetorial*, é análogo ao processo para avaliação das equações (3.15), (3.16), (3.21)-(3.24), forma *Tangencial*. Assim optou-se por apresentar somente o processo para a forma *Tangencial*. As equações matriciais finais na forma *Vetorial* podem ser obtidas diretamente a partir das equações matriciais na forma *Tangencial* e são apresentadas na Seção 3.7.

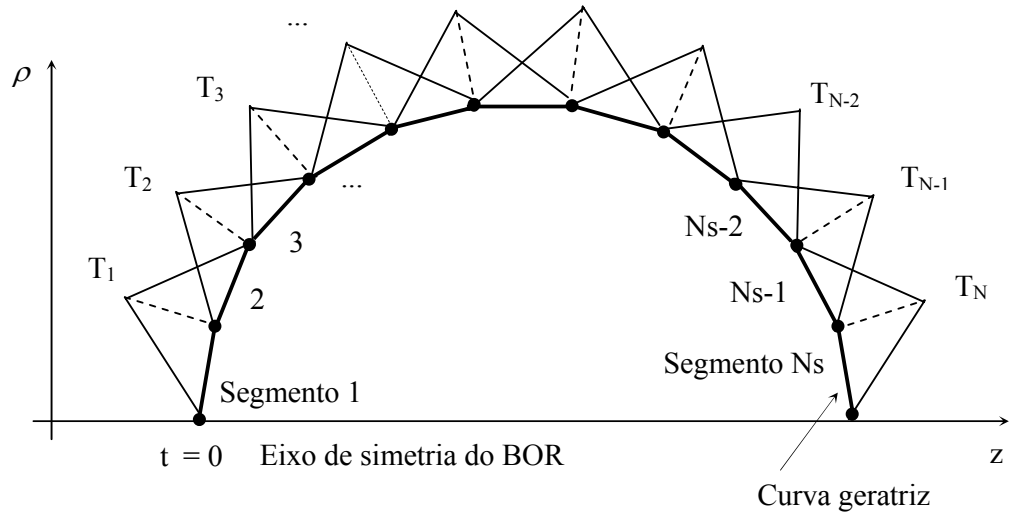
### 3.2 - Funções de Peso e de Base

A escolha de funções de base adequadas para a representação das correntes é muito importante para melhorar a precisão e convergência da análise numérica. Porém, representações sofisticadas para a corrente podem conduzir a equações integrais muito complicadas e de difícil tratamento das singularidades [36]. Neste trabalho a representação das correntes superficiais equivalentes elétrica,  $\vec{J}_s(\vec{r}')$ , e magnética,  $\vec{M}_s(\vec{r}')$ , é realizada através de funções de base triangulares (FBT) representadas da seguinte forma [34], [35]:

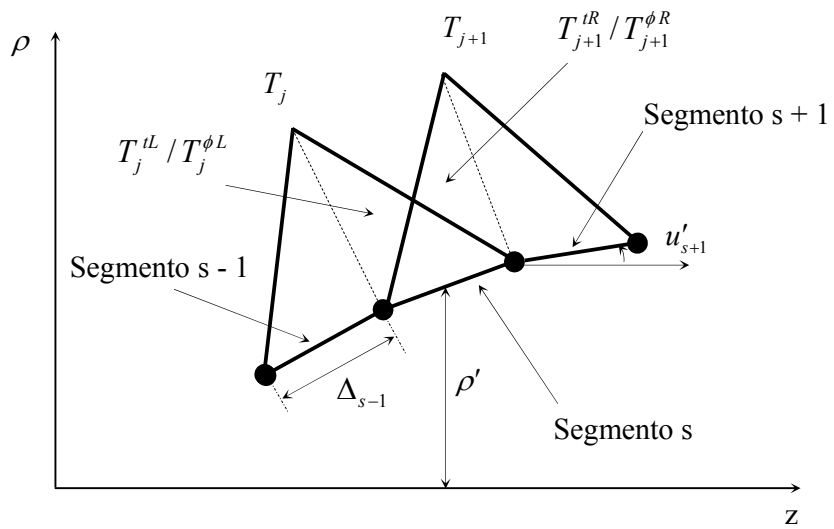
$$\vec{J}_s(\vec{r}') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{NJ_t} I_{jn}^{J_t} \frac{T_j^t(t')}{\rho'} \hat{t}' + \sum_{j=1}^{NM_\phi} I_{jn}^{J_\phi} \frac{T_j^\phi(t')}{\rho'} \hat{\phi}' \right\} e^{jn\phi'}, \quad (3.25)$$

$$\vec{M}_s(\vec{r}') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{NM_t} I_{jn}^{M_t} \frac{T_j^t(t')}{\rho'} \hat{t}' + \sum_{j=1}^{NM_\phi} I_{jn}^{M_\phi} \frac{T_j^\phi(t')}{\rho'} \hat{\phi}' \right\} e^{jn\phi'}, \quad (3.26)$$

onde  $\hat{t}'$  e  $\hat{\phi}'$  são as direções unitárias no ponto  $\vec{r}'$  sobre a superfície,  $t'$  e  $\phi'$  são as coordenadas que localizam o ponto  $\vec{r}'$  sobre a superfície,  $T_j^t(t')$  e  $T_j^\phi(t')$  são FBT nas direções  $\hat{t}'$  e  $\hat{\phi}'$ , respectivamente,  $I_{jn}^{J_t}$ ,  $I_{jn}^{J_\phi}$ ,  $I_{jn}^{M_t}$  e  $I_{jn}^{M_\phi}$  são os coeficientes complexos desconhecidos associados às funções  $T_j^t(t')$  e  $T_j^\phi(t')$ , respectivamente, e  $\rho'$  é a distância do ponto  $\vec{r}'$  ao eixo de simetria. Nas equações (3.25) e (3.26) a multiplicação pelo termo  $e^{jn\phi'}$  representa a variação adotada para  $\phi'$ , que nada mais é do que uma série de Fourier, e a divisão por  $\rho'$  evita problemas de singularidades no integrando das equações integrais quando  $\rho'$  tende a zero [35]. Conforme ilustrado nas Figuras 3.1 (a) e (b), cada FBT  $T_j^t(t')$  e  $T_j^\phi(t')$  é definida sobre dois segmentos consecutivos. Assim, cada segmento é associado a quatro meios triângulos (MT),  $T_j^{tL}$  (MT  $\hat{t}'$  à esquerda),  $T_j^{tR}$  (MT  $\hat{t}'$  à direita),  $T_j^{\phi L}$  (MT  $\hat{\phi}'$  à esquerda) e  $T_j^{\phi R}$  (MT  $\hat{\phi}'$  à direita). Para um determinado segmento fonte os MT  $T_j^{tL}$  e  $T_j^{\phi L}$  possuem derivada negativa em relação à variável  $t$ , enquanto os MT  $T_j^{tR}$  e  $T_j^{\phi R}$  possuem derivada positiva.



a) Definição das funções de base triangulares



b) Definição dos meios triângulos

Figura 3.1 – Funções triangulares.



As FBT garantem uma boa representação para as correntes equivalentes ao longo de toda a superfície do BOR e, em especial, nas extremidades da superfície. Elas também produzem equações integrais relativamente simples com singularidades da ordem  $1/R$ ,  $1/(R\rho)$ ,  $1/(R\rho')$ ,  $1/(R\rho\rho')$  e  $1/R^3$ , onde  $R$  é a distancia entre os pontos de observação e fonte e  $\rho$  é a distância do ponto de observação ao eixo de simetria. Assim, para o caso em que uma ou ambas as extremidades da superfície intercepta o eixo de simetria, conforme ilustrado na Figura 3.1 (a), os segmentos da curva geratriz do BOR que tocam o eixo de simetria possuem somente um meio triângulo nas direções  $\hat{t}'$  e  $\hat{\phi}'$ . Isto permite representar corretamente a corrente nesta região e evita problemas de singularidades quando  $\rho'$  tende a zero [35]. Nestes casos, quando  $\text{sen } u' < 0$  são considerados somente os meios triângulos da esquerda, enquanto que para  $\text{sen } u' > 0$  são considerados os meios triângulos da direita. Para o caso de uma superfície aberta, o segmento da extremidade da geratriz que não intercepta o eixo de simetria possui todos os meios triângulos na direção  $\hat{\phi}'$  e somente o meio triângulo da esquerda na direção  $\hat{t}'$ . Este procedimento garante a descrição correta do comportamento da corrente na borda do BOR, ou seja, garante que a corrente na direção  $\hat{t}$  tenda a zero e na direção  $\hat{\phi}$  tenda para um valor finito.

Para representar as funções de peso,  $\vec{W}_i(\vec{r})$ , é utilizado o método de Galerkin. A aplicação desta técnica geralmente garante maior precisão, rapidez e a conservação de energia da solução [57], [60]. Neste caso, as funções de peso são definidas como o conjugado das funções de base da seguinte forma:

$$\vec{W}_i(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{T_i^t(t)}{\rho} \hat{t} + \frac{T_i^\phi(t)}{\rho} \hat{\phi} \right\} e^{-jm\phi}, \quad (3.27)$$

onde  $\hat{t}$  e  $\hat{\phi}$  são as direções unitárias no ponto  $\vec{r}$  sobre a superfície,  $t$  e  $\phi$  são as coordenadas que localizam o ponto  $\vec{r}$ .

Aplicando as equações (3.25)-(3.27) nas equações matriciais (3.11) e (3.12) para cada modo  $m$  e  $n$ , estas podem ser reescritas como (forma *Tangencial*):

$$\begin{bmatrix} V^{Et} \\ V^{E\phi} \end{bmatrix} = \eta_0 \begin{bmatrix} Z^{Et} & Z^{E\phi} \\ Z^{E\phi t} & Z^{E\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y^{Et} & Y^{E\phi} \\ Y^{E\phi t} & Y^{E\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Mt} \\ I^{M\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} V^{Ht} \\ V^{H\phi} \end{bmatrix} = \eta_0 \begin{bmatrix} Z^{Ht} & Z^{H\phi} \\ Z^{H\phi t} & Z^{H\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y^{Ht} & Y^{H\phi} \\ Y^{H\phi t} & Y^{H\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Mt} \\ I^{M\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

onde os elementos das submatrizes das matrizes excitação,  $V^E$  e  $V^H$  são:

$$V_i^{Et} = \int_S \frac{T_i^T(t)}{\rho} e^{-jm\phi} \hat{t} \cdot [\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E}_{in0}(\vec{r})] ds, \quad (3.30)$$

$$V_i^{E\phi} = \int_S \frac{T_i^\phi(t)}{\rho} e^{-jm\phi} \hat{\phi} \cdot [\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{E}_{in0}(\vec{r})] ds, \quad (3.31)$$

$$V_i^{Ht} = \eta_0 \int_S \frac{T_i^T(t)}{\rho} e^{-jm\phi} \hat{t} \cdot [\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{H}_{in0}(\vec{r})] ds, \quad (3.32)$$

$$V_i^{H\phi} = \eta_0 \int_S \frac{T_i^\phi(t)}{\rho} e^{-jm\phi} \hat{\phi} \cdot [\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{H}_{in0}(\vec{r})] ds. \quad (3.33)$$

Operando o produto escalar entre a função de peso  $\vec{W}_i(\vec{r})$  e o operador definido na equação (2.8) obtém-se:

$$\vec{W}_i(\vec{r}) \cdot L_l(\vec{X}) = -\frac{j}{4\pi k_l} \int_{S'} [k_l^2 \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \vec{X}(\vec{r}') + \nabla' \cdot \vec{X}(\vec{r}') \nabla \cdot \vec{W}_i(\vec{r})] \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') ds', \quad (3.34)$$

e operando o produto escalar entre a função de peso  $\vec{W}_i(\vec{r})$  e o resultado do produto vetorial entre a normal,  $\hat{n}$  e operador definido na equação (2.9) obtém-se:

$$\vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \hat{n} \times K_l(\vec{X}) = [\vec{W}_i(\vec{r}) \times \hat{n}] \cdot [\vec{X}(\vec{r}') \times \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}')], \quad (3.35)$$

onde  $l$  representa o meio onde as relações são aplicadas. Aplicando as equações (3.34) e (3.35) às equações (3.21)-(3.24) e realizando algumas manipulações algébricas e vetoriais, os elementos das submatrizes das matrizes  $Z^E$  e  $Y^E$  podem ser reescritos como:

$$\begin{aligned}
 Z_{ij}^{Ett} &= \frac{j}{4\pi k_l} \iint_{S S'} \left\{ k_l^2 \frac{T_i^t(t) T_j^t(t')}{\rho \rho'} \hat{t} \cdot \hat{t}' e^{j(n\phi' - m\phi)} - \nabla \cdot \left[ \frac{T_i^t(t)}{\rho} e^{-jm\phi} \hat{t} \right] \right. \\
 &\quad \left. \times \nabla' \cdot \left[ \frac{T_j^t(t')}{\rho'} e^{jn\phi'} \hat{t}' \right] \right\} \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') ds' ds, \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{ij}^{Et\phi} &= \frac{j}{4\pi k_l} \iint_{S S'} \left\{ k_l^2 \frac{T_i^t(t) T_j^\phi(t')}{\rho \rho'} \hat{t} \cdot \hat{\phi}' e^{j(n\phi' - m\phi)} - \nabla \cdot \left[ \frac{T_i^t(t)}{\rho} e^{-jm\phi} \hat{t} \right] \right. \\
 &\quad \left. \times \nabla' \cdot \left[ \frac{T_j^\phi(t')}{\rho'} e^{jn\phi'} \hat{\phi}' \right] \right\} \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') ds' ds, \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{ij}^{E\phi t} &= \frac{j}{4\pi k_l} \iint_{S S'} \left\{ k_l^2 \frac{T_i^\phi(t) T_j^t(t')}{\rho \rho'} \hat{\phi} \cdot \hat{t}' e^{j(n\phi' - m\phi)} - \nabla \cdot \left[ \frac{T_i^\phi(t)}{\rho} e^{-jm\phi} \hat{\phi} \right] \right. \\
 &\quad \left. \times \nabla' \cdot \left[ \frac{T_j^t(t')}{\rho'} e^{jn\phi'} \hat{t}' \right] \right\} \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') ds' ds, \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{ij}^{E\phi\phi} &= \frac{j}{4\pi k_l} \iint_{S S'} \left\{ k_l^2 \frac{T_i^\phi(t) T_j^\phi(t')}{\rho \rho'} \hat{\phi} \cdot \hat{\phi}' e^{j(n\phi' - m\phi)} - \nabla \cdot \left[ \frac{T_i^\phi(t)}{\rho} e^{-jm\phi} \hat{\phi} \right] \right. \\
 &\quad \left. \times \nabla' \cdot \left[ \frac{T_j^\phi(t')}{\rho'} e^{jn\phi'} \hat{\phi}' \right] \right\} \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') ds' ds, \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

$$Y_{ij}^{Ett} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S S'} \left\{ \frac{T_i^t(t) T_j^t(t')}{\rho \rho'} e^{j(n\phi' - m\phi)} \hat{t} \cdot [\hat{t}' \times \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}')] \right\} ds' ds, \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{ij}^{Et\phi} &= \frac{1}{2} \int_S \frac{T_i^t(t) T_i^\phi(t)}{\rho \rho} e^{j(n\phi - m\phi)} ds \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_{S S'} \left\{ \frac{T_i^t(t) T_j^\phi(t')}{\rho \rho'} e^{j(n\phi' - m\phi)} \hat{t} \cdot [\hat{\phi}' \times \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}')] \right\} ds' ds, \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{ij}^{E\phi t} &= -\frac{1}{2} \int_S \frac{T_i^\phi(t) T_i^t(t)}{\rho \rho} e^{j(n\phi - m\phi)} ds \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_{S S'} \left\{ \frac{T_i^\phi(t) T_j^t(t')}{\rho \rho'} e^{j(n\phi' - m\phi)} \hat{\phi} \cdot [\hat{t}' \times \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}')] \right\} ds' ds, \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

$$Y_{ij}^{E\phi\phi} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S S'} \left\{ \frac{T_i^\phi(t) T_j^\phi(t')}{\rho \rho'} e^{j(n\phi' - m\phi)} \hat{\phi} \cdot [\hat{\phi}' \times \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}')] \right\} ds' ds. \quad (3.43)$$

$$Z_{if}^H = -Y_{if}^E, \quad (3.44)$$

$$Y_{if}^H = Z_{if}^E. \quad (3.45)$$

### 3.3 - Avaliação Numérica das Matrizes Z e Y

Nesta seção é feita a avaliação numérica dos elementos das matrizes impedância e admitância apresentadas na Seção 3.2. A avaliação das integrais das equações (3.36)-(3.43) segue um procedimento semelhante ao empregado em [34] e [35] e é realizada considerando o sistema de coordenadas definido na Figura 2.1. Neste caso

$$ds = \rho dt d\phi, \quad (3.46)$$

$$ds' = \rho' dt' d\phi'. \quad (3.47)$$

Utilizando as relações

$$\hat{t} \cdot \hat{t}' = \sin u' \sin u \cos(\phi - \phi') + \cos u \cos u', \quad (3.48)$$

$$\hat{t} \cdot \hat{\phi}' = \sin u \sin(\phi - \phi'), \quad (3.49)$$

$$\hat{\phi} \cdot \hat{t}' = -\sin u' \sin(\phi - \phi'), \quad (3.50)$$

$$\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}' = \cos(\phi - \phi'), \quad (3.51)$$

$$\nabla \cdot (F_t \hat{t} + F_\phi \hat{\phi}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\rho F_t) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\phi), \quad (3.52)$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 + 4\rho\rho' \sin^2\left(\frac{\phi - \phi'}{2}\right)}, \quad (3.53)$$

as equações (3.36)-(3.39) podem ser reescritas como:

$$Z_{ij}^{Eu} = \frac{j}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_t^{2\pi} \int_{t'}^{2\pi} \left\{ k_l^2 T_i'(t) T_j'(t') [\text{sen } u' \text{sen } u \cos(\phi - \phi') + \text{cos } u \text{cos } u'] \right. \\ \left. - \frac{\partial T_i'}{\partial t} \frac{\partial T_j'}{\partial t'} \right\} e^{j(n\phi' - m\phi)} G_E dt' d\phi' dt d\phi, \quad (3.54)$$

$$Z_{ij}^{E\phi} = \frac{j}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_t^{2\pi} \int_{t'}^{2\pi} \left\{ k_l^2 T_i'(t) T_j^\phi(t') \text{sen } u \text{sen}(\phi - \phi') - jn \frac{\partial T_i'}{\partial t} \frac{T_j^\phi(t')}{\rho'} \right\} \\ \times e^{j(n\phi' - m\phi)} G_E dt' d\phi' dt d\phi, \quad (3.55)$$

$$Z_{ij}^{E\phi t} = \frac{-j}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_t^{2\pi} \int_{t'}^{2\pi} \left\{ k_l^2 T_i^\phi(t) T_j'(t') \text{sen } u' \text{sen}(\phi - \phi') - jm \frac{T_i^\phi(t)}{\rho} \frac{\partial T_j'}{\partial t'} \right\} \\ \times e^{j(n\phi' - m\phi)} G_E dt' d\phi' dt d\phi, \quad (3.56)$$

$$Z_{ij}^{E\phi\phi} = \frac{j}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_t^{2\pi} \int_{t'}^{2\pi} \left\{ k_l^2 T_i^\phi(t) T_j^\phi(t') \text{cos}(\phi - \phi') - mn \frac{T_i^\phi(t)}{\rho} \frac{T_j^\phi(t')}{\rho'} \right\} \\ \times e^{j(n\phi' - m\phi)} G_E dt' d\phi' dt d\phi, \quad (3.57)$$

onde  $l$  representa é o meio onde as equações são aplicadas e

$$G_E = \frac{e^{-jk_l R}}{k_l R}. \quad (3.58)$$

Utilizando as relações

$$\nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') = (\vec{r} - \vec{r}') \left( \frac{jk_l}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \psi_l(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (3.59)$$

$$X(\vec{r}') \times \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') = [X(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] \left( \frac{jk_l}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \psi_l(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (3.60)$$

$$\hat{t} \cdot (\hat{t}' \times \vec{r}) = \text{sen } u' \text{sen}(\phi - \phi') [z \text{sen } u + \rho \text{cos } u], \quad (3.61)$$

$$\hat{t} \cdot (\hat{t}' \times \vec{r}') = \text{sen } u \text{sen}(\phi - \phi') [z' \text{sen } u' - \rho' \text{cos } u'], \quad (3.62)$$

$$\hat{t} \cdot (\hat{\phi}' \times \vec{r}) = \text{cos}(\phi - \phi') [z \text{sen } u - \rho \text{cos } u], \quad (3.63)$$

$$\hat{t} \cdot (\hat{\phi}' \times \bar{r}') = -z' \operatorname{sen} u \cos(\phi - \phi') + \rho' \cos u, \quad (3.64)$$

$$\hat{\phi} \cdot (\hat{t}' \times \bar{r}) = -z \operatorname{sen} u' \cos(\phi - \phi') + \rho \cos u', \quad (3.65)$$

$$\hat{\phi} \cdot (\hat{t}' \times \bar{r}') = \cos(\phi - \phi') [z' \operatorname{sen} u' - \rho' \cos u'], \quad (3.66)$$

$$\hat{\phi} \cdot (\hat{\phi}' \times \bar{r}) = -z \operatorname{sen}(\phi - \phi'), \quad (3.67)$$

$$\hat{\phi} \cdot (\hat{\phi}' \times \bar{r}') = z' \operatorname{sen}(\phi - \phi'), \quad (3.68)$$

as equações (3.40)-(3.43) podem ser reescritas como:

$$Y_{ij}^{Eu} = \frac{k_l^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_t^{2\pi} \int_{t'}^{2\pi} T_i^t(t) T_j^t(t') \{ \rho \cos u \operatorname{sen} u' - \rho' \cos u' \operatorname{sen} u - (z - z') \operatorname{sen} u \operatorname{sen} u' \} \\ \times \operatorname{sen}(\phi - \phi') G_H e^{j(n\phi' - m\phi)} dt' d\phi' dt d\phi, \quad (3.69)$$

$$Y_{ij}^{E1\phi} = \int_0^{2\pi} \int_t^{2\pi} \frac{T_i^t(t) T_i^\phi(t)}{2\rho} e^{j(n-m)\phi} dt d\phi + \frac{k_l^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_t^{2\pi} \int_{t'}^{2\pi} T_i^t(t) T_j^\phi(t') \\ \times \{ \cos u [\rho' - \rho \cos(\phi - \phi')] + (z - z') \operatorname{sen} u \cos(\phi - \phi') \} G_H e^{j(n\phi' - m\phi)} dt' d\phi' dt d\phi, \quad (3.70)$$

$$Y_{ij}^{E\phi t} = - \int_0^{2\pi} \int_t^{2\pi} \frac{T_i^\phi(t) T_i^t(t)}{2\rho} e^{j(n-m)\phi} dt d\phi + \frac{k_l^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_t^{2\pi} \int_{t'}^{2\pi} T_i^\phi(t) T_j^t(t') \\ \times \{ -(z - z') \operatorname{sen} u' \cos(\phi - \phi') + \cos u' [\rho - \rho' \cos(\phi - \phi')] \} G_H e^{j(n\phi' - m\phi)} dt' d\phi' dt d\phi, \quad (3.71)$$

$$Y_{ij}^{E\phi\phi} = \frac{k_l^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_t^{2\pi} \int_{t'}^{2\pi} \{ T_i^\phi(t) T_j^\phi(t') \operatorname{sen}(\phi - \phi') (z - z') G_H e^{j(n\phi' - m\phi)} \} dt' d\phi' dt d\phi, \quad (3.72)$$

onde

$$G_H = \left[ \frac{1 + jk_l R}{(k_l R)^2} \right] G_E = \frac{1}{k_l^3} \left( \frac{jk_l}{|\bar{r} - \bar{r}'|} + \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} \right) \psi_1(\bar{r} - \bar{r}'). \quad (3.73)$$

Para as equações (3.54)-(3.57) e (3.69)-(3.72) observa-se que todas as funções em  $\phi$  e  $\phi'$  são periódicas no intervalo de 0 a  $2\pi$ . Neste caso é aplicada a relação

$$\int_0^{2\pi} F(\phi - \phi') e^{j(n\phi' - m\phi)} d\phi' = \int_0^{2\pi} F(\phi) e^{j[(n-m)\phi' - m\phi]} d\phi' = F(\phi) e^{-jm\phi} \begin{cases} 2\pi, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (3.74)$$

A equação (3.74) indica que os elementos das matrizes impedância e admitância são zero sempre que  $m \neq n$ . Assim, as equações matriciais (3.28) e (3.29) podem ser separadas em vários sistemas lineares independentes, um para cada modo de excitação diferente ( $m = n$ ), onde  $m$  é definido de acordo com o campo incidente radiado pelas fontes externas.

Substituindo a equação (3.74) nas equações (3.54)-(3.57) e (3.69)-(3.72) para cada modo  $m$  independente, têm-se:

$$Z_{ij}^{Eu} = j \iint_{t, t'} \left\{ k_l^2 T_i'(t) T_j'(t') [\text{sen } u' \text{sen } u G_5(t, t') + \text{cos } u \text{cos } u' G_7(t, t')] - \frac{\partial T_i'}{\partial t} \frac{\partial T_j'}{\partial t} G_7(t, t') \right\} dt' dt, \quad (3.75)$$

$$Z_{ij}^{E1\phi} = \iint_{t, t'} \left\{ k_l^2 T_i'(t) T_j^\phi(t') \text{sen } u G_6(t, t') + n \frac{\partial T_i'}{\partial t} \frac{T_j^\phi(t')}{\rho'} G_7(t, t') \right\} dt' dt, \quad (3.76)$$

$$Z_{ij}^{E\phi t} = - \iint_{t, t'} \left\{ k_l^2 T_i^\phi(t) T_j'(t') \text{sen } u' G_6(t, t') + m \frac{T_i^\phi(t)}{\rho} \frac{\partial T_j'}{\partial t} G_7(t, t') \right\} dt' dt, \quad (3.77)$$

$$Z_{ij}^{E\phi\phi} = j \iint_{t, t'} \left\{ k_l^2 T_i^\phi(t) T_j^\phi(t') G_5(t, t') - m^2 \frac{T_i^\phi(t)}{\rho} \frac{T_j^\phi(t')}{\rho'} G_7(t, t') \right\} dt' dt, \quad (3.78)$$

$$Y_{ij}^{Eu} = j \iint_{t, t'} k_l^3 T_i'(t) T_j'(t') \left\{ \rho \text{cos } u \text{sen } u' - \rho' \text{cos } u' \text{sen } u - (z - z') \text{sen } u \text{sen } u' \right\} \times G_3(t, t') dt' dt, \quad (3.79)$$

$$Y_{ij}^{E1\phi} = \pi \int_t \frac{T_i'(t) T_i^\phi(t)}{\rho} dt + \iint_{t, t'} k_l^3 T_i'(t) T_j^\phi(t') \times \left\{ \rho' \text{cos } u G_1(t, t') - [(\rho - \rho') \text{cos } u - \text{sen } u (z - z')] G_2(t, t') \right\} dt' dt, \quad (3.80)$$

$$Y_{ij}^{E\phi t} = -\pi \int_t \frac{T_i^\phi(t) T_i^\phi(t)}{\rho} dt + \iint_{t, t'} k_l^3 T_i^\phi(t) T_j^T(t') \quad (3.81)$$

$$\times \{ \rho \cos u' G_1(t, t') + [(\rho - \rho') \cos u' - \text{sen } u'(z - z')] G_2(t, t') \} dt' dt ,$$

$$Y_{ij}^{E\phi\phi} = j \iint_{t, t'} \{ k_l^3 T_i^\phi(t) T_j^\phi(t') (z - z') G_3(t, t') \} dt' dt , \quad (3.82)$$

onde

$$G_1(t, t') = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) e^{-jm\varphi} G_H d\varphi = 2 \int_0^\pi \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos m\varphi G_H d\varphi , \quad (3.83)$$

$$G_2(t, t') = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \varphi e^{-jm\varphi} G_H d\varphi = \int_0^\pi \cos \varphi \cos m\varphi G_H d\varphi , \quad (3.84)$$

$$G_3(t, t') = \frac{j}{2} \int_0^{2\pi} \text{sen } \varphi e^{-jm\varphi} G_H d\varphi = \int_0^\pi \text{sen } \varphi \text{sen } m\varphi G_H d\varphi , \quad (3.85)$$

$$G_4(t, t') = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) e^{-jm\varphi} G_E d\varphi = 2 \int_0^\pi \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos m\varphi G_E d\varphi , \quad (3.86)$$

$$G_5(t, t') = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \varphi e^{-jm\varphi} G_E d\varphi = \int_0^\pi \cos \varphi \cos m\varphi G_E d\varphi , \quad (3.87)$$

$$G_6(t, t') = \frac{j}{2} \int_0^{2\pi} \text{sen } \varphi e^{-jm\varphi} G_E d\varphi = \int_0^\pi \text{sen } \varphi \text{sen } m\varphi G_E d\varphi , \quad (3.88)$$

$$G_7(t, t') = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-jm\varphi} G_E d\varphi = \int_0^\pi \cos m\varphi G_E d\varphi = G_4(t, t') + G_5(t, t') , \quad (3.89)$$

$$R = \sqrt{(\rho - \rho')^2 - (z - z')^2 + 4\rho\rho' \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} . \quad (3.90)$$

Através de uma mudança apropriada de variáveis, as coordenadas  $t$  e  $t'$  são parametrizadas em função das variáveis  $\alpha$  e  $\alpha'$ , respectivamente, da seguinte forma:



$$t' = t_q + \alpha' \frac{\Delta_q}{2}, \quad (3.91)$$

$$t = t_p + \alpha \frac{\Delta_p}{2}, \quad (3.92)$$

onde  $q$  e  $p$  são índices utilizados para identificar os parâmetros dos segmentos fonte e observação, respectivamente,  $t_p$  e  $t_q$  são os pontos centrais dos segmentos de tamanho  $\Delta_q$  e  $\Delta_p$  respectivamente,  $\alpha$  ( $\alpha'$ ) = 0 representam os centros dos respectivos segmentos e  $\alpha$  ( $\alpha'$ ) =  $\pm 1$  representam os extremos. Desta forma:

$$\rho' = \rho_q + \alpha' \frac{\Delta_q}{2} \text{sen } u_q, \quad (3.93)$$

$$z' = z_q + \alpha' \frac{\Delta_q}{2} \text{cos } u_q, \quad (3.94)$$

$$\rho = \rho_p + \alpha \frac{\Delta_p}{2} \text{sen } u_p, \quad (3.95)$$

$$z = z_p + \alpha \frac{\Delta_p}{2} \text{cos } u_p, \quad (3.96)$$

onde  $u_q$  e  $u_p$  são os ângulos de inclinação dos segmentos fonte e de observação, respectivamente,  $z_q$  e  $\rho_q$  são as coordenadas do ponto médio do segmento fonte e  $z_p$  e  $\rho_p$  são as coordenadas do ponto médio do segmento de observação. Utilizando os parâmetros  $\alpha$  e  $\alpha'$  e a definição das funções triangulares, conforme ilustrado na Figura 3.1, as funções  $T_i(t)$  e  $T_j(t')$  e suas derivadas em cada segmentos são convenientemente representadas por

$$T_j(t') = \frac{1 - (-1)^{iq} \alpha'}{2}, \quad (3.97)$$

$$T_i(t) = \frac{1 - (-1)^{ip} \alpha}{2}, \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial t'} = \frac{-(-1)^{iq} 1}{\Delta_q}, \quad (3.99)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{-(-1)^{ip} 1}{\Delta_p}, \quad (3.100)$$

onde os índices  $ip$  e  $iq$  são iguais a 1 e 2 para os meios triângulos da direita e esquerda, respectivamente. Utilizando as equações (3.91)-(3.100), e após algumas manipulações algébricas, as equações (3.75)-(3.82) são reescritas como

$$\begin{aligned} Z_{ij}^{Et} = & \frac{j}{4} \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \left\{ \frac{\Delta_q \Delta_p k_l^2}{4} \left[ \text{sen } u_q \text{sen } u_p \left[ G_{5aa} - (-1)^{ip} G_{5ab} - (-1)^{iq} G_{5ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{5bb} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{cos } u_p \text{cos } u_q \left[ G_{7aa} - (-1)^{ip} G_{7ab} - (-1)^{iq} G_{7ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{7bb} \right] - (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{7aa} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} Z_{ij}^{E1\phi} = & \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \left\{ \frac{\Delta_q \Delta_p k_l^2}{16} \text{sen } u_p \left[ G_{6aa} - (-1)^{ip} G_{6ab} - (-1)^{iq} G_{6ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{6bb} \right] \right. \\ & \left. - (-1)^p \frac{\Delta_q m}{8} \left[ G_{7aa}^2 - (-1)^{iq} G_{7ba}^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} Z_{ij}^{E\phi t} = & - \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \left\{ \frac{\Delta_q \Delta_p k_l^2}{16} \text{sen } u_q \left[ G_{6aa} - (-1)^{ip} G_{6ab} - (-1)^{iq} G_{6ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{6bb} \right] \right. \\ & \left. - (-1)^q \frac{\Delta_p m}{8} \left[ G_{7aa}^1 - (-1)^{ip} G_{7ab}^1 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} Z_{ij}^{E\phi\phi} = & j \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \frac{\Delta_q \Delta_p k_l^2}{16} \left\{ \left[ G_{5aa} - (-1)^{ip} G_{5ab} - (-1)^{iq} G_{5ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{5bb} \right] \right. \\ & \left. - m^2 \left[ G_{7aa}^3 - (-1)^{ip} G_{7ab}^3 - (-1)^{iq} G_{7ba}^3 + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{7bb}^3 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} Y_{ij}^{Et} = & -j k_l^3 \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \frac{\Delta_q \Delta_p}{16} \left\{ \left[ \rho_p \text{cos } u_p \text{sen } u_q - \rho_q \text{cos } u_q \text{sen } u_p - (z_p - z_q) \text{sen } u_p \text{sen } u_q \right] \right. \\ & \left. \times \left[ G_{3aa} - (-1)^{ip} G_{3ab} - (-1)^{iq} G_{3ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{3bb} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned}
 Y_{ij}^{E\phi} = & \pi \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \left\{ G \delta(i, j) + \frac{\Delta_q \Delta_p k_l^3}{16} \left\{ \left[ \rho_q \left[ G_{1aa} - (-1)^{ip} G_{1ab} - (-1)^{iq} G_{1ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{1bb} \right] \right. \right. \\
 & + \frac{\Delta_q}{2} \text{sen } u_q \left[ G_{1ba} - (-1)^{ip} G_{1bb} - (-1)^{iq} G_{1b^2a} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{1b^2b} \right] \left. \right\} \cos u_p \\
 & + \left[ (z_p - z'_q) \text{sen } u_p - (\rho_p - \rho_q) \cos u_p \right] \times \left[ G_{2aa} - (-1)^{ip} G_{2ab} - (-1)^{iq} G_{2ba} \right. \\
 & + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{2bb} \left. \right] + \frac{\Delta_q}{2} \left[ \text{sen } u_q \cos u_p - \cos u_q \text{sen } u_p \right] \\
 & \times \left. \left[ G_{2ba} - (-1)^{ip} G_{2bb} - (-1)^{iq} G_{2b^2a} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{2b^2b} \right] \right\} , \tag{3.106}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{ij}^{E\phi t} = & -\pi \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \left\{ G \delta(i, j) + \frac{\Delta_q \Delta_p k_l^3}{16} \left\{ \left[ \rho_p \left[ G_{1aa} - (-1)^{ip} G_{1ab} - (-1)^{iq} G_{1ba} \right. \right. \right. \\
 & + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{1bb} \left. \right] + \frac{\Delta_p}{2} \text{sen } u_p \left[ G_{1ab} - (-1)^{ip} G_{1ab^2} - (-1)^{iq} G_{1bb} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{1bb^2} \right] \left. \right\} \\
 & \times \cos u_q + \left[ (\rho_p - \rho'_q) \cos u_q - (z_p - z_q) \text{sen } u_q \right] \times \left[ G_{2aa} - (-1)^{ip} G_{2ab} - (-1)^{iq} G_{2ba} \right. \\
 & + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{2bb} \left. \right] + \frac{\Delta_p}{2} \left[ \text{sen } u_p \cos u_q - \cos u_p \text{sen } u_q \right] \\
 & \times \left. \left[ G_{2ab} - (-1)^{ip} G_{2ab^2} - (-1)^{iq} G_{2bb} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{2bb^2} \right] \right\} , \tag{3.107}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{ij}^{E\phi\phi} = & j \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \frac{\Delta_q \Delta_p k_l^3}{16} \left\{ (z_p - z'_q) \left[ G_{3aa} - (-1)^{ip} G_{3ab} - (-1)^{iq} G_{3ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{3bb} \right] + \right. \\
 & + \frac{\Delta_p}{2} \cos u_p \left[ G_{3ab} - (-1)^{ip} G_{3ab^2} - (-1)^{iq} G_{3bb} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{3bb^2} \right] - \\
 & \left. + \frac{\Delta_q}{2} \cos u_q \left[ G_{3ba} - (-1)^{ip} G_{3bb} - (-1)^{iq} G_{3b^2a} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{3b^2b} \right] \right\} , \tag{3.108}
 \end{aligned}$$

onde

$$G_{vaa}(t, t') = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G_v(t, t') d\alpha' d\alpha , \quad v = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \tag{3.109}$$

$$G_{vab}(t, t') = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha G_v(t, t') d\alpha' d\alpha , \quad v = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \tag{3.110}$$

$$G_{vba}(t, t') = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha' G_v(t, t') d\alpha' d\alpha , \quad v = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \tag{3.111}$$

$$G_{vbb}(t, t') = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha \alpha' G_v(t, t') d\alpha' d\alpha, \quad v = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (3.112)$$

$$G_{vaa}^1(t, t', \rho) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{G_7(t, t')}{\rho} d\alpha' d\alpha, \quad v = 4, 5 \quad (3.113)$$

$$G_{vab}^1(t, t', \rho) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha \frac{G_7(t, t')}{\rho} d\alpha' d\alpha, \quad v = 4, 5 \quad (3.114)$$

$$G_{vaa}^2(t, t', \rho') = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{G_7(t, t')}{\rho'} d\alpha' d\alpha, \quad v = 4, 5 \quad (3.115)$$

$$G_{vba}^2(t, t', \rho') = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha' \frac{G_7(t, t')}{\rho'} d\alpha' d\alpha, \quad v = 4, 5 \quad (3.116)$$

$$G_{vaa}^3(t, t', \rho, \rho') = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{G_7(t, t')}{\rho \rho'} d\alpha' d\alpha, \quad v = 4, 5 \quad (3.117)$$

$$G_{vab}^3(t, t', \rho, \rho') = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha \frac{G_7(t, t')}{\rho \rho'} d\alpha' d\alpha, \quad v = 4, 5 \quad (3.118)$$

$$G_{vba}^3(t, t', \rho, \rho') = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha' \frac{G_7(t, t')}{\rho \rho'} d\alpha' d\alpha, \quad v = 4, 5 \quad (3.119)$$

$$G_{vbb}^3(t, t', \rho, \rho') = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha \alpha' \frac{G_7(t, t')}{\rho \rho'} d\alpha' d\alpha, \quad v = 4, 5 \quad (3.120)$$

$$G_{vab^2}(t, t') = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha^2 G_v(t, t') d\alpha' d\alpha, \quad v = 1, 2, 3 \quad (3.121)$$

$$G_{vbb^2}(t, t') = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha' \alpha^2 G_v(t, t') d\alpha' d\alpha, \quad v = 1, 2, 3 \quad (3.122)$$

$$G_{vb^2a}(t, t') = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha'^2 G_v(t, t') d\alpha' d\alpha, \quad v = 1, 2, 3 \quad (3.123)$$

$$G_{vb^2b}(t, t') = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha'^2 \alpha G_v(t, t') d\alpha' d\alpha, \quad v = 1, 2, 3 \quad (3.124)$$

$$G(t) = \int_{-1}^1 \frac{T_i(t) T_j(t)}{\rho} d\alpha = \frac{\Delta_p}{8} \int_{-1}^1 \frac{(1 \pm \alpha)(1 \pm \alpha)}{\left[ \rho_p + \alpha \frac{\Delta_p}{2} \text{sen } u_p \right]} d\alpha, \quad (3.125)$$

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1 \rightarrow i = j \\ 0 \rightarrow i \neq j \end{cases}. \quad (3.126)$$

Para evitar problemas de singularidades a integral  $G_7(t, t')$  é calculada utilizando as integrais as integrais  $G_4(t, t')$  e  $G_5(t, t')$ , conforme equação (3.89).

O preenchimento das matrizes Z e Y é realizado considerando as contribuições de cada par de segmentos fonte e observação. Desta forma muitos cálculos comuns podem ser reaproveitados e assim reduzir o esforço computacional. As equações (3.101)-(3.108) têm um comportamento tal, que o resultado para o modo  $m$  pode ser utilizado para o cálculo do modo  $-m$  da seguinte forma:

$$(Z_{ij}^{uu})_m = (Z_{ij}^{uu})_{-m}, \quad (3.127)$$

$$(Z_{ij}^{t\phi})_m = -(Z_{ij}^{t\phi})_{-m}, \quad (3.128)$$

$$(Z_{ij}^{\phi t})_m = -(Z_{ij}^{\phi t})_{-m}, \quad (3.129)$$

$$(Z_{ij}^{\phi\phi})_m = (Z_{ij}^{\phi\phi})_{-m}, \quad (3.130)$$

$$(H_{ij}^{uu})_m = (H_{ij}^{uu})_{-m}, \quad (3.131)$$

$$(H_{ij}^{t\phi})_m = -(H_{ij}^{t\phi})_{-m}, \quad (3.132)$$

$$(H_{ij}^{\phi t})_m = -(H_{ij}^{\phi t})_{-m}, \quad (3.133)$$

$$(H_{ij}^{\phi\phi})_m = (H_{ij}^{\phi\phi})_{-m}, \quad (3.134)$$

e assim também reduzir o esforço computacional.

### 3.4 - Avaliação Numérica das Integrais das Matrizes $Z$ e $Y$

Nesta seção é apresentada a avaliação numérica aplicada à integral tripla das equações (3.109)-(3.124). O tratamento empregado é semelhante ao utilizado em [34], [35], ou seja, para os casos em que as integrais não apresentam singularidades a avaliação numérica é inteiramente conduzida utilizando quadraturas Gaussianas. Para os casos em que as singularidades estão presentes, ou seja, sempre que o ponto de observação está muito próximo do ponto da fonte, é empregado um tratamento especial que combina a utilização de quadraturas Gaussianas e soluções analíticas para avaliação das integrais.

Embora o processo para a avaliação numérica da integral tripla das equações (3.109)-(3.124) seja baseado no tratamento empregado em [34], [35] pode-se destacar alguns aspectos importantes que diferenciam este trabalho. Primeiramente, em [34], [35] a integral em  $\alpha$  é aproximada através do método do retângulo (o resultado da integral é o valor da função no centro do segmento multiplicado pelo comprimento do segmento) e a integração numérica em  $\alpha'$  e  $\varphi$  é realizada através de quadraturas Gaussianas de 2 e 20 pontos, respectivamente. Neste trabalho a integração em  $\alpha$ ,  $\alpha'$  e  $\varphi$  é realizada através de quadraturas Gaussianas de  $n_\alpha$ ,  $n'_\alpha$  e  $n_\varphi$  pontos, respectivamente, onde  $n_\alpha$ ,  $n'_\alpha$  e  $n_\varphi$  são definidos em função das características elétricas e geométricas do BOR a ser analisado, de forma a garantir a convergência da solução. Para a integral em  $\varphi$  o intervalo de integração entre 0 e  $\pi$  é dividido em  $n_{int}$  subintervalos e uma quadratura Gaussiana de  $n_\varphi$  pontos é aplicada a cada um destes subintervalos. Outra fundamental diferença entre este trabalho e aqueles apresentados em [34], [35] é o tipo de função de base utilizado. Em [34], [35] são utilizadas funções de base triangulares para representar a distribuição das correntes equivalentes na direção  $\hat{t}$  e pulsos para representar a distribuição das correntes equivalentes na direção  $\hat{\phi}$ , enquanto que neste trabalho são utilizadas somente funções triangulares para representar a distribuição das correntes equivalentes em ambas direções. Estas escolhas conduzem a expressões inteiramente diferentes daquelas apresentadas em [34], [35] para a avaliação das integrais

(3.109)-(3.124). É importante ainda destacar que em [34], [35] somente BOR CEP são avaliados, enquanto que neste trabalho a análise é realizada para BOR CEP, dielétricos e compostos.

A integração em relação a  $\alpha$  e  $\alpha'$  nas equações (3.109)-(3.124) quando realizada por quadraturas Gaussianas de  $n_\alpha$  e  $n'_\alpha$  pontos, respectivamente, gera as seguintes expressões:

$$G_{vaa}(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} G_v(t, t'), \quad v=1,2,3,4,5,6 \quad (3.135)$$

$$G_{vab}(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} \alpha_\xi w_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} G_v(t, t'), \quad v=1,2,3,4,5,6 \quad (3.136)$$

$$G_{vba}(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} \alpha'_{\xi'} G_v(t, t'), \quad v=1,2,3,4,5,6 \quad (3.137)$$

$$G_{vbb}(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} \alpha'_{\xi'} G_v(t, t'), \quad v=1,2,3,4,5,6 \quad (3.138)$$

$$G_{vaa}^1(t, t', \rho) = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} \frac{G_v(t, t')}{\rho}, \quad v=4,5 \quad (3.139)$$

$$G_{vab}^1(t, t', \rho) = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} \frac{G_v(t, t')}{\rho}, \quad v=4,5 \quad (3.140)$$

$$G_{vaa}^2(t, t', \rho') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} \frac{G_v(t, t')}{\rho'}, \quad v=4,5 \quad (3.141)$$

$$G_{vba}^2(t, t', \rho') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} \alpha'_{\xi'} \frac{G_v(t, t')}{\rho'}, \quad v=4,5 \quad (3.142)$$

$$G_{vaa}^3(t, t', \rho, \rho') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} \frac{G_7(t, t')}{\rho\rho'}, \quad v=4,5 \quad (3.143)$$

$$G_{vab}^3(t, t', \rho, \rho') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} \frac{G_7(t, t')}{\rho\rho'}, \quad v=4,5 \quad (3.144)$$

$$G_{vba}^3(t, t', \rho, \rho') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} \alpha'_{\xi'} \frac{G_7(t, t')}{\rho\rho'}, \quad v=4,5 \quad (3.145)$$

$$G_{vbb}^3(t, t', \rho, \rho') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} \alpha'_{\xi'} \frac{G_7(t, t')}{\rho\rho'}, \quad v=4,5 \quad (3.146)$$

$$G_{vab^2}(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi^2 \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} G_v(t, t'), \quad v = 1, 2, 3 \quad (3.147)$$

$$G_{vbb^2}(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi^2 \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} \alpha'_{\xi'} G_v(t, t'), \quad v = 1, 2, 3 \quad (3.148)$$

$$G_{vb^2_a}(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} \alpha_\xi'^2 G_v(t, t'), \quad v = 1, 2, 3 \quad (3.149)$$

$$G_{vbb^2}(t, t') = \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi \sum_{\xi'=1}^{n'_\alpha} w'_{\xi'} \alpha_\xi'^2 G_v(t, t'), \quad v = 1, 2, 3 \quad (3.150)$$

onde  $\alpha_\xi$ ,  $w_\xi$ ,  $\alpha'_\xi$  e  $w'_\xi$  são as abscissas e os pesos das quadraturas de  $n_\alpha$  e  $n'_\alpha$  pontos, respectivamente. Para a integral em  $\varphi$ , considerando  $n_{int}$  quadraturas Gaussianas de  $n_\varphi$  pontos, as equações (3.83)-(3.88) podem ser avaliadas da seguinte forma:

$$G_1(t, t') = 2 \sum_{\zeta=1}^{n_{int}} \varphi_\zeta \sum_{\beta=1}^{n_\phi} w_\beta \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\varphi_\beta}{2} \right) \cos m \varphi_\beta G_H, \quad (3.151)$$

$$G_2(t, t') = \sum_{\zeta=1}^{n_{int}} \varphi_\zeta \sum_{\beta=1}^{n_\phi} w_\beta \cos \varphi_\beta \cos m \varphi_\beta G_H, \quad (3.152)$$

$$G_3(t, t') = \sum_{\zeta=1}^{n_{int}} \varphi_\zeta \sum_{\beta=1}^{n_\phi} w_\beta \operatorname{sen} \varphi_\beta \operatorname{sen} m \varphi_\beta G_H, \quad (3.153)$$

$$G_4(t, t') = 2 \sum_{\zeta=1}^{n_{int}} \varphi_\zeta \sum_{\beta=1}^{n_\phi} w_\beta \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\varphi_\beta}{2} \right) \cos m \varphi_\beta G_E, \quad (3.154)$$

$$G_5(t, t') = \sum_{\zeta=1}^{n_{int}} \varphi_\zeta \sum_{\beta=1}^{n_\phi} w_\beta \cos \varphi_\beta \cos m \varphi_\beta G_E, \quad (3.155)$$

$$G_6(t, t') = \sum_{\zeta=1}^{n_{int}} \varphi_\zeta \sum_{\beta=1}^{n_\phi} w_\beta \operatorname{sen} \varphi_\beta \cos m \varphi_\beta G_E, \quad (3.156)$$

onde

$$\varphi_\beta = \left( \frac{\varphi_F - \varphi_I}{2} \right) \alpha_\beta + \frac{\varphi_F + \varphi_I}{2}, \quad (3.157)$$

$$\varphi_\zeta = \frac{\varphi_F - \varphi_I}{2}, \quad (3.158)$$



$\varphi_1$  e  $\varphi_F$  são os ângulos inicial e final em cada subintervalo, respectivamente e  $\alpha_\beta$  e  $w_\beta$  são as abscissas e os pesos da quadratura Gaussiana de  $n_\varphi$  pontos, respectivamente. Os valores de  $n_\alpha$  e  $n'_\alpha$  e  $n_\varphi$  utilizados neste trabalho são apresentados e discutidos na Seção 5.1.

Utilizando os parâmetros das quadraturas Gaussianas de  $n_\alpha$  e  $n'_\alpha$  e  $n_\varphi$  pontos, as equações (3.90), (3.93)-(3.96) podem ser reescritas como:

$$R = \sqrt{(\rho - \rho')^2 - (z - z')^2 + 4\rho\rho' \sin^2\left(\frac{\varphi_\beta}{2}\right)}, \quad (3.159)$$

$$\rho' = \rho_q + \alpha'_\xi \frac{\Delta_q}{2} \sin u_q, \quad (3.160)$$

$$z' = z_q + \alpha'_\xi \frac{\Delta_q}{2} \cos u_q, \quad (3.161)$$

$$\rho = \rho_p + \alpha'_\xi \frac{\Delta_p}{2} \sin u_p, \quad (3.162)$$

$$z = z_p + \alpha'_\xi \frac{\Delta_p}{2} \cos u_p. \quad (3.163)$$

Com o objetivo de garantir uma boa precisão nos resultados, o número total de pontos,  $n_{\phi T} = n_\varphi n_{\text{int}}$ , utilizado na avaliação das integrais em  $\varphi$  em (3.151)-(3.156) é determinado em função do comportamento do integrando das equações (3.83)-(3.88) correspondentes. Logo, para estimar o valor apropriado de  $n_{\phi T}$  determina-se o número de oscilações do integrando, NO, obtido a partir do valor de  $\varphi = \varphi_{\max}$  onde o argumento da exponencial  $e^{-jkR}$  tem sua variação máxima, definido em [34] como

$$NO \approx \frac{k \Delta R}{2\pi} \frac{\pi}{2\delta} = \frac{\pi \Delta R}{2\lambda\delta}, \quad (3.164)$$

onde  $\Delta R = R(\varphi = \varphi_2) - R(\varphi = \varphi_1)$ ,  $\varphi_1 = \varphi_{\max} + \delta$ ,  $\varphi_2 = \varphi_{\max} - \delta$ ,  $\delta = \pi/36$ . A partir do valor de NO,  $n_{\phi T}$  é definido como [34]:

$$n_{\phi T} = 4 NO. \quad (3.165)$$

### 3.5 - Tratamento das Singularidades

A avaliação numérica das integrais nas equações (3.109)-(3.124) apresenta singularidades sempre que o ponto de observação,  $\vec{r}$ , está muito próximo do ponto da fonte,  $\vec{r}'$ . Neste caso, as equações (3.135)-(3.150) e (3.151)-(3.156) não podem ser utilizadas. Assim, para tratar as singularidades destas integrais são utilizados os três métodos descritos a seguir. A seleção do método mais adequado para a aplicação a um determinado par de segmentos, fonte e observação, é determinada com a ajuda dos parâmetros:

- $R_c = \sqrt{(\rho_p - \rho_q)^2 - (z_p - z_q)^2}$ , distância entre os pontos centrais dos segmentos fonte e observação quando  $\varphi = 0$ ,
- $C_t = 2.0$  e  $C_\phi = 0.1$ , constantes multiplicativas, definidas em [35].

Para segmentos de observação e fonte diferentes e atendendo às condições

$$R_c \geq C_t \frac{\Delta_q}{2}, \quad (3.166)$$

$$R_c \geq C_\phi \rho_q, \quad (3.167)$$

a avaliação numérica das integrais é realizada somente através de quadraturas Gaussianas, equações (3.135)-(3.150) e (3.151)-(3.156). Este tratamento será classificado neste trabalho como Método 0, aplicado quando não existirem problemas de singularidades.

#### 3.5.1 - Método1 para Tratamento das Singularidades

O Método 1 é aplicado para segmentos observação e fonte diferentes entre si e atendendo às seguintes condições:

$$R_c \leq C_t \frac{\Delta_q}{2}, \quad (3.168)$$

$$R_c \geq C_\phi \rho_q. \quad (3.169)$$

Ou seja, segmentos fonte e observação próximos entre si e próximos ao eixo de simetria. Neste caso a integral em  $\alpha'$  apresenta resultados pouco precisos no limite  $\varphi \rightarrow 0$  devido à grande variação de R. Assim, o Método 1 é aplicado somente ao primeiro subintervalo da integral em  $\varphi$  [ $\zeta = 1$  nas equações (3.151)-(3.156)] para as integrais em relação a  $\alpha'$ , que podem ser extraídas das equações (3.109)-(3.124) e reescritas como:

$$G_a^{1Z} = \int_{-1}^1 \frac{e^{jkR}}{kR} d\alpha' = \int_{-1}^1 \frac{e^{jkR} - 1}{kR} d\alpha' + \int_{-1}^1 \frac{1}{kR} d\alpha' = G_{a1}^{1Z} + G_{a2}^{1Z} , \quad (3.170)$$

$$G_b^{1Z} = \int_{-1}^1 \alpha' \frac{e^{jkR}}{kR} d\alpha' = \int_{-1}^1 \alpha' \frac{e^{jkR} - 1}{kR} d\alpha' + \int_{-1}^1 \frac{\alpha'}{kR} d\alpha' = G_{b1}^{1Z} + G_{b2}^{1Z} , \quad (3.171)$$

$$G_a^{2Z} = \int_{-1}^1 \frac{e^{jkR}}{kR\rho'} d\alpha' = \int_{-1}^1 \frac{e^{jkR} - 1}{kR\rho'} d\alpha' + \int_{-1}^1 \frac{1}{kR\rho'} d\alpha' = G_{a1}^{2Z} + G_{a2}^{2Z} , \quad (3.172)$$

$$G_b^{2Z} = \int_{-1}^1 \alpha' \frac{e^{jkR}}{kR\rho'} d\alpha' = \int_{-1}^1 \alpha' \frac{(e^{jkR} - 1)}{kR\rho'} d\alpha' + \int_{-1}^1 \frac{\alpha'}{kR\rho'} d\alpha' = G_{b1}^{2Z} + G_{b2}^{2Z} , \quad (3.173)$$

$$G_a^Y = \int_{-1}^1 G_H d\alpha' = \int_{-1}^1 (G_H - G_H^\Delta) d\alpha' + \int_{-1}^1 G_H^\Delta d\alpha' = G_{a1}^Y + G_{a2}^Y , \quad (3.174)$$

$$G_b^Y = \int_{-1}^1 \alpha' G_H d\alpha' = \int_{-1}^1 \alpha' (G_H - G_H^\Delta) d\alpha' + \int_{-1}^1 \alpha' G_H^\Delta d\alpha' = G_{b1}^Y + G_{b2}^Y , \quad (3.175)$$

$$G_c^Y = \int_{-1}^1 \alpha'^2 G_H d\alpha' = \int_{-1}^1 \alpha'^2 (G_H - G_H^\Delta) d\alpha' + \int_{-1}^1 \alpha'^2 G_H^\Delta d\alpha' = G_{c1}^Y + G_{c2}^Y , \quad (3.176)$$

onde  $G_H$  é dado pela equação (3.73) e  $G_H^\Delta$  é definido em [34] como

$$G_H^\Delta = \frac{1}{(kR)^3} + \frac{1}{2kR} - \frac{j}{3} . \quad (3.177)$$

Para  $\zeta > 1$  as integrais nas equações (3.109)-(3.124) são numericamente avaliadas através do Método 0.

As integrais  $G_{a1}^{1Z}$ ,  $G_{b1}^{1Z}$ ,  $G_{a1}^{2Z}$ ,  $G_{b1}^{2Z}$ ,  $G_{a1}^Y$ ,  $G_{b1}^Y$  e  $G_{c1}^Y$  não apresentam singularidades e podem ser avaliadas usando a quadratura Gaussiana de  $n'_\alpha$  pontos. Neste caso é conveniente usar a relação

$$\frac{e^{jkR} - 1}{kR} = - \frac{\text{sen}\left(\frac{kR}{2}\right)}{\left(\frac{kR}{2}\right)} \left[ \text{sen}\left(\frac{kR}{2}\right) + j \cos\left(\frac{kR}{2}\right) \right], \quad (3.178)$$

para as equações (3.170)-(3.173), e a relação

$$G_H - G_H^\Delta = \frac{\cos(kR) - 1 + (kR)^2/2}{(kR)^3} - j \left[ \frac{\text{sen}(kR) - kR + (kR)^3/6}{(kR)^3} \right] + j \left[ \frac{\cos(kR) - 1 + (kR)^2/2}{(kR)^2} \right] + \frac{\text{sen}(kR) - kR}{(kR)^2}, \quad (3.179)$$

para as equações (3.174)-(3.176), para melhor representar estas funções no limite em que  $R$  tende a zero. As integrais  $G_{a2}^{1Z}$ ,  $G_{b2}^{1Z}$ ,  $G_{a2}^{2Z}$ ,  $G_{b2}^{2Z}$ ,  $G_{a2}^Y$ ,  $G_{b2}^Y$  e  $G_{c2}^Y$  são avaliadas analiticamente. Para tal é conveniente definir alguns parâmetros para simplificar a notação. Assim, utilizando as equações (3.160)-(3.163), a equação (3.159) pode ser reescrita como

$$R = \sqrt{\left(\frac{\alpha'_\xi \Delta_q}{2} + \alpha_o\right)^2 + d^2}, \quad (3.180)$$

onde

$$\alpha_o = (\rho_q - \rho) \text{sen } u_q + (z_q - z) \cos u_q + 2\rho \text{sen } u_q \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad (3.181)$$

$$d_m^2 = (\rho_q - \rho)^2 + (z_q - z)^2 + 4\rho_q \rho \text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad (3.182)$$

$$d^2 = d_m^2 - \alpha_o^2. \quad (3.183)$$

Utilizando a equação (3.180), a integração de  $G_{a2}^{1Z}$ ,  $G_{b2}^{1Z}$ ,  $G_{a2}^{2Z}$ ,  $G_{b2}^{2Z}$  nas equações (3.170)-(3.173) fornece [61]:

$$G_{a2}^{1Z} = \int_{-1}^1 \frac{1}{kR} d\alpha' = \frac{2}{k\Delta_q} I_G^1, \quad (3.184)$$

$$G_{b2}^{1Z} = \int_{-1}^1 \frac{\alpha'}{kR} d\alpha' = \frac{4\alpha_0}{\Delta_q k} \left( \frac{2}{\alpha_4 + \alpha_5} - \frac{I_G^1}{\Delta_q} \right), \quad (3.185)$$

$$G_{a2}^{2Z} = \int_{-1}^1 \frac{1}{kR\rho'} d\alpha' = \frac{I_G^2}{k\beta_5}, \quad (3.186)$$

$$G_{b2}^{2Z} = \int_{-1}^1 \frac{\alpha'}{kR\rho'} d\alpha' = \frac{\beta_5 I_G^1 - \frac{\Delta_q}{2} \rho_q I_G^2}{\frac{\Delta_q^2}{4} k \beta_5 \text{sen } u_q}, \quad (3.187)$$

onde

$$\alpha_1 = |\alpha_0| + \frac{\Delta_q}{2} + \alpha_4, \quad (3.188)$$

$$\alpha_2 = |\alpha_0| - \frac{\Delta_q}{2} + \alpha_5, \quad (3.189)$$

$$\alpha_3 = \frac{\Delta_p}{2} - |\alpha_0| + \alpha_5, \quad (3.190)$$

$$\alpha_4 = \sqrt{\left( |\alpha_0| + \frac{\Delta_q}{2} \right)^2 + d^2}, \quad (3.191)$$

$$\alpha_5 = \sqrt{\left( |\alpha_0| - \frac{\Delta_q}{2} \right)^2 + d^2}, \quad (3.192)$$

$$\beta_1 = \frac{\Delta_q}{2} \left[ \Delta_q \rho_q + 2\alpha_0 \left( \rho_q - \frac{\Delta_q}{2} \text{sen } u_q \right) - 2d_m^2 \text{sen } u_q \right], \quad (3.193)$$

$$\beta_2 = \frac{\Delta_q}{2} \left[ \Delta_q \rho_q - 2\alpha_0 \left( \rho_q + \frac{\Delta_q}{2} \text{sen } u_q \right) + 2d_m^2 \text{sen } u_q \right], \quad (3.194)$$

$$\beta_3 = \rho_q + \frac{\Delta_q}{2} \text{sen } u_q, \quad (3.195)$$

$$\beta_4 = \rho_q - \frac{\Delta_q}{2} \text{sen } u_q, \quad (3.196)$$

$$\beta_5 = \frac{\Delta_q}{2} \sqrt{\rho_q^2 - 2\rho_q \text{sen } u_q \alpha_0 + (\text{sen } u_q d_m)^2}, \quad (3.197)$$

$$I_G^1 = \begin{cases} \ln \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right), & |\alpha_0| \geq \frac{\Delta_q}{2} \\ \ln \left( \frac{\alpha_1 \alpha_3}{d^2} \right), & |\alpha_0| < \frac{\Delta_q}{2} \end{cases} \quad (3.198)$$

$$I_G^2 = \ln \left[ \left( \frac{\beta_2 + 2\alpha_5 \beta_5}{2\alpha_4 \beta_5 - \beta_1} \right) \frac{\beta_3}{\beta_4} \right]. \quad (3.199)$$

Utilizando a equação (3.180), a integração de  $G_{a2}^Y$ ,  $G_{b2}^Y$  e  $G_{c2}^Y$  nas equações (3.174)-(3.176) fornece [61]:

$$G_{a2}^Y = \int_{-1}^1 G_H^\Delta d\alpha' = \frac{2}{k\Delta_p} \alpha_1^H - j\frac{2}{3}, \quad (3.200)$$

$$G_{b2}^Y = \int_{-1}^1 \alpha' G_H^\Delta d\alpha' = \left( \frac{2}{k\Delta_p} \right)^2 (\alpha_2^H - k\alpha_o \alpha_1^H), \quad (3.201)$$

$$G_{c2}^Y = \int_{-1}^1 \alpha'^2 G_H^\Delta d\alpha' = \left( \frac{2}{k\Delta_p} \right)^3 [\alpha_3^H - k\alpha_o (\alpha_2^H - k\alpha_o \alpha_1^H)] - j\frac{2}{9}, \quad (3.202)$$

onde

$$\alpha_1^H = \frac{\Delta_q}{2(kd)^2} \frac{1}{\alpha_4 \alpha_5} \left[ \alpha_4 + \alpha_5 - \frac{4\alpha_0^2}{\alpha_4 + \alpha_5} \right] + \frac{1}{2} I_G^1, \quad (3.203)$$

$$\alpha_2^H = \frac{2k\alpha_0 \Delta_q}{\alpha_4 + \alpha_5} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{k^2 \alpha_4 \alpha_5} \right], \quad (3.204)$$

$$\alpha_3^H = \frac{\Delta_q}{2} \left[ (\alpha_4 + \alpha_5) \left( \frac{k^2}{4} - \frac{1}{\alpha_4 \alpha_5} \right) - \frac{(k\alpha_0)^2}{\alpha_4 + \alpha_5} \right] + \left[ 1 - \frac{(kd)^2}{4} \right] I_G^1. \quad (3.205)$$

Assim, ao utilizar o Método 1 para remoção de singularidades, as equações (3.109)-(3.124) são numericamente avaliadas como:

$$G_{vxa}(t, t') = \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_{\zeta} \sum_{\beta=1}^{n_{\phi}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} P_{vx}^q(t, t'), \quad v=1,2,3,4,5,6, \quad q=1Z, Y, \quad x=a, b \quad (3.206)$$

$$G_{vxb}(t, t') = \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_{\zeta} \sum_{\beta=1}^{n_{\phi}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} \alpha_{\xi} P_{vx}^q(t, t'), \quad v=1,2,3,4,5,6, \quad q=1Z, Y, \quad x=a, b \quad (3.207)$$

$$G_{va}^1(t, t', \rho) = \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_{\zeta} \sum_{\beta=1}^{n_{\phi}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} \frac{P_{vx}^q(t, t')}{\rho}, \quad v=4,5, \quad q=1Z, \quad x=a \quad (3.208)$$

$$G_{vb}^1(t, t', \rho) = \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_{\zeta} \sum_{\beta=1}^{n_{\phi}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} \alpha_{\xi} \frac{P_{vx}^q(t, t')}{\rho}, \quad v=4,5, \quad q=1Z, \quad x=a \quad (3.209)$$

$$G_{vxa}^2(t, t', \rho') = \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_{\zeta} \sum_{\beta=1}^{n_{\phi}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} P_{vx}^q(t, t'), \quad v=4,5, \quad q=2Z, \quad x=a, b \quad (3.210)$$

$$G_{vxa}^3(t, t', \rho, \rho') = \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_{\zeta} \sum_{\beta=1}^{n_{\phi}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} \frac{P_{vx}^q(t, t')}{\rho}, \quad v=4,5, \quad q=2Z, \quad x=a, b \quad (3.211)$$

$$G_{vxb}^3(t, t', \rho, \rho') = \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_{\zeta} \sum_{\beta=1}^{n_{\phi}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} \alpha_{\xi} \frac{P_{vx}^q(t, t')}{\rho}, \quad v=4,5, \quad q=2Z, \quad x=a, b \quad (3.212)$$

$$G_{vxb^2}(t, t') = \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_{\zeta} \sum_{\beta=1}^{n_{\phi}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} \alpha_{\xi} \alpha_{\xi} P_{vx}^q(t, t'), \quad v=1,2,3, \quad q=Y, \quad x=a, b \quad (3.213)$$

$$G_{vb^2a}(t, t') = \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_{\zeta} \sum_{\beta=1}^{n_{\phi}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} P_{vx}^q(t, t'), \quad v=1,2,3, \quad q=Y, \quad x=c \quad (3.214)$$

$$G_{vb^2b}(t, t') = \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_{\zeta} \sum_{\beta=1}^{n_{\phi}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} \alpha_{\xi} P_{vx}^q(t, t'), \quad v=1,2,3, \quad q=Y, \quad x=c \quad (3.215)$$

onde

$$P_{1x}^q(t, t') = 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\varphi_{\beta}}{2}\right) \cos m \varphi_{\beta} G_x^q(t, t'), \quad x=a, b, c, \quad q=Y \quad (3.216)$$

$$P_{2x}^q(t, t') = \cos \varphi_{\beta} \cos m \varphi_{\beta} G_x^q(t, t'), \quad x=a, b, c, \quad q=Y \quad (3.217)$$

$$P_{3x}^q(t, t') = \operatorname{sen} \varphi_{\beta} \operatorname{sen} m \varphi_{\beta} G_x^q(t, t'), \quad x=a, b, c, \quad q=Y \quad (3.218)$$

$$P_{4x}^q(t, t') = 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\varphi_\beta}{2}\right) \cos m\varphi_\beta G_x^q(t, t'), \quad x = a, b, \quad q = 1Z, 2Z \quad (3.219)$$

$$P_{5x}^q(t, t') = \cos \varphi_\beta \cos m\varphi_\beta G_x^q(t, t'), \quad x = a, b, \quad q = 1Z, 2Z \quad (3.220)$$

$$P_{6x}^q(t, t') = \operatorname{sen} \varphi_\beta \operatorname{sen} m\varphi_\beta G_x^q(t, t'), \quad x = a, b, \quad q = 1Z, 2Z \quad (3.221)$$

### 3.5.2 - Método 2 para Tratamento das Singularidades

O Método 2 para remoção das singularidades é aplicado para segmentos observação e fonte diferentes entre si e atendendo à condição:

$$R_c \leq C_F \rho_q. \quad (3.222)$$

Ou seja, segmentos fonte e observação próximos entre si e afastados do eixo de simetria. Neste caso, os integrandos de  $G_4(t, t')$  e  $G_6(t, t')$  nas equações (3.86) e (3.88), respectivamente, são bem comportados e o método é aplicado somente às integrais  $G_1(t, t')$ ,  $G_2(t, t')$ ,  $G_3(t, t')$  e  $G_5(t, t')$  em relação a  $\varphi$ , equações (3.83)-(3.85) e (3.87), respectivamente, onde o problema de singularidades ocorre próximo de  $\varphi = 0$ . Nesta região, o integrando de  $G_1(t, t')$  pode ser aproximado por:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left[ 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\varphi_\beta}{2}\right) \cos m\varphi_\beta G_H \right] \approx \frac{\varphi^2}{2k^3} [(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 + \rho\rho'\varphi_\beta^2]^{-\frac{3}{2}}, \quad (3.223)$$

o de  $G_2(t, t')$  pode ser aproximado por:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} [\cos \varphi_\beta \cos m\varphi_\beta G_H] \approx \frac{1}{k^3} [(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 + \rho\rho'\varphi_\beta^2]^{-\frac{3}{2}}, \quad (3.224)$$

o de  $G_3(t, t')$  por:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} [\operatorname{sen} \varphi_\beta \operatorname{sen} m\varphi_\beta G_H] \approx \frac{m\varphi^2}{k^3} [(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 + \rho\rho'\varphi_\beta^2]^{-\frac{3}{2}}, \quad (3.225)$$

o de  $G_5(t, t')$  por:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} [\cos \varphi_\beta \cos m\varphi_\beta G_E] \approx \frac{1}{k} [(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 + \rho\rho'\varphi_\beta^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.226)$$



Este método calcula as integrais  $G_1(t, t')$ ,  $G_2(t, t')$ ,  $G_3(t, t')$  e  $G_5(t, t')$ , utilizando as equações (3.151)-(3.153) e (3.155), respectivamente, subtraindo destes resultados as respostas da quadratura  $n_\phi$  aplicada às equações (3.223)-(3.226), respectivamente, e, finalmente, somando a estes resultados a solução exata das equações (3.223)-(3.226). Este processo resulta em:

$$G_1(t, t') = 2 \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_\zeta \sum_{\beta=1}^{n_\phi} w_\beta \sin^2 \left( \frac{\varphi_\beta}{2} \right) \cos m \varphi_\beta G_H + \frac{1}{2} I_1 - \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_\zeta \sum_{\beta=1}^{n_\phi} w_\beta \frac{\varphi_\beta^2}{2k^3} [(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 + \rho \rho' \varphi_\beta^2]^{-\frac{3}{2}}, \quad (3.227)$$

$$G_2(t, t') = \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_\zeta \sum_{\beta=1}^{n_\phi} w_\beta \cos \varphi_\beta \cos m \varphi_\beta G_H + I_2 - \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_\zeta \sum_{\beta=1}^{n_\phi} w_\beta \frac{1}{k^3} [(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 + \rho \rho' \varphi_\beta^2]^{-\frac{3}{2}}, \quad (3.228)$$

$$G_3(t, t') = \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_\zeta \sum_{\beta=1}^{n_\phi} w_\beta \sin \varphi_\beta \sin m \varphi_\beta G_H + m I_1 - \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_\zeta \sum_{\beta=1}^{n_\phi} w_\beta \frac{m \varphi_\beta^2}{k^3} [(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 + \rho \rho' \varphi_\beta^2]^{-\frac{3}{2}}, \quad (3.229)$$

$$G_5(t, t') = \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_\zeta \sum_{\beta=1}^{n_\phi} w_\beta \cos \varphi_\beta \cos m \varphi_\beta G_E + I_5 - \sum_{\zeta=1}^{n_{\text{int}}} \varphi_\zeta \sum_{\beta=1}^{n_\phi} w_\beta \frac{1}{k} [(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 + \rho \rho' \varphi_\beta^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.230)$$

onde

$$I_1 = \frac{1}{(k^2 \rho \rho')^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{-v_1}{\sqrt{1+v_1^2}} + \ln(v_1 + \sqrt{1+v_1^2}) \right], \quad (3.231)$$

$$I_2 = \frac{\pi}{k^3} \frac{[(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+v_1^2}}, \quad (3.232)$$

$$I_5 = \frac{\ln(v_1 + \sqrt{1+v_1^2})}{k \sqrt{\rho \rho'}}, \quad (3.233)$$

$$v_1 = \pi \sqrt{\frac{\rho\rho'}{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2}}. \quad (3.234)$$

Assim, para os casos em que o Método 2 é aplicado, as integrais  $G_1(t, t')$ ,  $G_2(t, t')$ ,  $G_3(t, t')$  e  $G_5(t, t')$  são calculadas através de (3.227)-(3.230), e as demais integrais,  $G_4(t, t')$  e  $G_6(t, t')$ , são calculadas através das equações (3.154) e (3.156). Os resultados obtidos são então aplicados às equações (3.135)-(3.150) para o cálculo das integrais em  $\alpha$  e  $\alpha'$ .

### 3.5.3 - Método 3 para Tratamento das Singularidades

O Método 3 é aplicado sempre que os segmentos fonte e observação são coincidentes. Nestes casos os integrandos de  $G_4(t, t')$  e  $G_6(t, t')$ , são bem comportados. Uma observação detalhada dos elementos da matriz Y revela que nestes casos as integrais  $G_2(t, t')$  e  $G_{3aa}(t, t')$  são multiplicadas por zero e, conseqüentemente, não é necessário remover as singularidades destas integrais. Assim o método é aplicado apenas às integrais das equações (3.109)-(3.124) para  $v = 1, 2, 3$  e 5 onde o problema de singularidades ocorre, ou seja, para  $\alpha = \alpha'$  e  $\varphi = 0$ .

Nesta região o integrando de  $G_1(t, t')$  pode ser aproximado por:

$$\lim_{\substack{\varphi \rightarrow 0 \\ \alpha \rightarrow \alpha'}} \left[ 2 \sin^2 \left( \frac{\varphi_\beta}{2} \right) \cos m\varphi_\beta G_H \right] \approx \frac{\varphi^2}{2k^3} \left[ \frac{\Delta_q^2}{4} (\alpha_\xi - \alpha'_\xi)^2 + \rho_q^2 \varphi_\beta^2 \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (3.235)$$

o de  $G_3(t, t')$  por:

$$\lim_{\substack{\varphi \rightarrow 0 \\ \alpha \rightarrow \alpha'}} \left[ \sin \varphi_\beta \sin m\varphi_\beta G_H \right] \approx \frac{m\varphi^2}{k^3} \left[ \frac{\Delta_q^2}{4} (\alpha_\xi - \alpha'_\xi)^2 + \rho_q^2 \varphi_\beta^2 \right]^{\frac{3}{2}} \approx 2mG_1(t, t'), \quad (3.236)$$

e o de  $G_5(t, t')$  por:

$$\lim_{\substack{\varphi \rightarrow 0 \\ \alpha \rightarrow \alpha'}} \left[ \cos \varphi_\beta \cos m\varphi_\beta G_E \right] \approx \frac{1}{k} \left[ \frac{\Delta_q^2}{4} (\alpha_\xi - \alpha'_\xi)^2 + \rho_q^2 \varphi_\beta^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.237)$$

A filosofia do Método 3 é subtrair do resultado obtido através do Método 1 as respostas das quadraturas Gaussianas com  $n_\alpha$  e  $n_\varphi$  pontos aplicadas às soluções exatas das integrais em

relação a  $\alpha'$  das equações (3.235)-(3.237), e somar a estes resultados os resultados da quadratura Gaussiana de  $n_\alpha$  pontos aplicada às soluções exatas das integrais em relação a  $\alpha'$  e  $\varphi$  das equações (3.235)-(3.237). Todo este processo resulta em:

$$G_{vxa}(t, t') = \sum_{\beta=1}^{n_{\theta r}} w_\beta \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi P_{vx}^q(t, t') + \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi I_{vx}^1 - \sum_{\beta=1}^{n_{\theta r}} w_\beta \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi I_{vx}^2, \quad (3.238)$$

$$v = 1, 3, 5, \quad q = 1Z, Y, \quad x = a, b$$

$$G_{vxb}(t, t') = \sum_{\beta=1}^{n_{\theta r}} w_\beta \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi P_{vx}^q(t, t') + \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi I_{vx}^1 - \sum_{\beta=1}^{n_{\theta r}} w_\beta \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi I_{vx}^2, \quad (3.239)$$

$$v = 1, 3, 5, \quad q = 1Z, Y, \quad x = a, b$$

$$G_{vaa}^1(t, t', \rho) = \sum_{\beta=1}^{n_{\theta r}} w_\beta \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \frac{P_{vx}^q(t, t')}{\rho} + \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \frac{I_{vx}^1}{\rho} - \sum_{\beta=1}^{n_{\theta r}} w_\beta \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \frac{I_{vx}^2}{\rho}, \quad (3.240)$$

$$v = 5, \quad q = 1Z, \quad x = a$$

$$G_{vab}^1(t, t', \rho) = \sum_{\beta=1}^{n_{\theta r}} w_\beta \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi \frac{P_{vx}^q(t, t')}{\rho} + \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi \frac{I_{vx}^1}{\rho} - \sum_{\beta=1}^{n_{\theta r}} w_\beta \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi \frac{I_{vx}^2}{\rho}, \quad (3.241)$$

$$v = 5, \quad q = 1Z, \quad x = a$$

$$G_{vxa}^2(t, t', \rho') = G_{vax}^1(t, t', \rho'), \quad v = 5, \quad x = a, b \quad (3.242)$$

$$G_{vxa}^3(t, t', \rho, \rho') = \sum_{\beta=1}^{n_{\theta r}} w_\beta \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \frac{P_{vx}^q(t, t')}{\rho} + \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \frac{I_{vx}^1}{\rho \rho_q} - \sum_{\beta=1}^{n_{\theta r}} w_\beta \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \frac{I_{vx}^2}{\rho \rho_q}, \quad (3.243)$$

$$v = 5, \quad q = 2Z, \quad x = a, b$$

$$G_{vxb}^3(t, t', \rho, \rho') = \sum_{\beta=1}^{n_{\theta r}} w_\beta \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi \frac{P_{vx}^q(t, t')}{\rho} + \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi \frac{I_{vx}^1}{\rho \rho_q} - \sum_{\beta=1}^{n_{\theta r}} w_\beta \sum_{\xi=1}^{n_\alpha} w_\xi \alpha_\xi \frac{I_{vx}^2}{\rho \rho_q}, \quad (3.244)$$

$$v = 5, \quad q = 2Z, \quad x = a, b$$

$$G_{vxb^2}(t, t') = \sum_{\beta=1}^{n_{\beta T}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} \alpha_{\xi} \alpha_{\xi} P_{vx}^q(t, t') + \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} \alpha_{\xi} \alpha_{\xi} I_{vx}^1 - \sum_{\beta=1}^{n_{\beta T}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} \alpha_{\xi} \alpha_{\xi} I_{vx}^2, \quad (3.245)$$

$$v=1,3, \quad q=Y, \quad x=a,b$$

$$G_{vxb^2_a}(t, t') = \sum_{\beta=1}^{n_{\beta T}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} P_{vx}^q(t, t') + \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} I_{vx}^1(t, t') - \sum_{\beta=1}^{n_{\beta T}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} I_{vx}^2, \quad (3.246)$$

$$v=1,3, \quad q=Y, \quad x=c$$

$$G_{vxb^2_b}(t, t') = \sum_{\beta=1}^{n_{\beta T}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} \alpha_{\xi} P_{vx}^q(t, t') + \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} \alpha_{\xi} I_{vx}^1 - \sum_{\beta=1}^{n_{\beta T}} w_{\beta} \sum_{\xi=1}^{n_{\alpha}} w_{\xi} \alpha_{\xi} I_{vx}^2, \quad (3.247)$$

$$v=1,3, \quad q=Y, \quad x=c$$

onde

$$\begin{aligned} I_{5a}^1 = & \frac{1}{k \Delta_q \rho_q} \left\{ \Delta_q \ln(64) + \Delta_q \left[ (\alpha_{\xi} - 1) \ln(4 \Delta_q | \alpha_{\xi} - 1 |) - (\alpha_{\xi} + 1) \ln(4 \Delta_q | \alpha_{\xi} + 1 |) \right. \right. \\ & - (\alpha_{\xi} - 1) \ln \left[ \frac{(\alpha_{\xi} - 1) \Delta_q}{2} \left| \left( p_1 + \sqrt{1 + \frac{1}{p_1^2}} \right) \right| + (\alpha_{\xi} + 1) \ln \left[ \frac{(\alpha_{\xi} + 1) \Delta_q}{2} \left| \left( p_2 + \sqrt{1 + \frac{1}{p_2^2}} \right) \right| \right] \right. \\ & \left. \left. + 2\pi \rho_q \left[ -\ln \left[ |\alpha_{\xi} - 1| \Delta_q \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{p_1^2}} \right) \right] + \ln \left[ |\alpha_{\xi} + 1| \Delta_q \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{p_2^2}} \right) \right] \right] \right\}, \quad (3.248) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{5b}^1 = & \frac{1}{2k \Delta_q \rho_q} \left\{ 2\pi \rho_q \left[ |\alpha_{\xi} - 1| \sqrt{1 + \frac{1}{p_1^2}} - |\alpha_{\xi} + 1| \sqrt{1 + \frac{1}{p_2^2}} \right] \right. \\ & + \Delta_q \left[ (\alpha_{\xi}^2 - 1) \ln(4 \Delta_q | \alpha_{\xi} - 1 |) + (1 - \alpha_{\xi}^2) \ln(4 \Delta_q | \alpha_{\xi} + 1 |) \right. \\ & + (1 - \alpha_{\xi}^2) \left[ \ln \left( p_1 + \sqrt{1 + \frac{1}{p_1^2}} \right) + \ln \left( \frac{|\alpha_{\xi} - 1| \Delta_q}{2} \right) \right] \\ & \left. + (\alpha_{\xi}^2 - 1) \left[ \ln \left( p_2 + \sqrt{1 + \frac{1}{p_2^2}} \right) + \ln \left( \frac{|\alpha_{\xi} + 1| \Delta_q}{2} \right) \right] \right] \\ & \left. + 4\pi \alpha_{\xi} \rho_q \left[ \ln \left( \frac{\alpha_{\xi} + 1}{|\alpha_{\xi} + 1|} + \sqrt{1 + \frac{1}{p_2^2}} \right) - \ln \left( \frac{\alpha_{\xi} - 1}{|\alpha_{\xi} - 1|} + \sqrt{1 + \frac{1}{p_1^2}} \right) \right] \right\}, \quad (3.249) \end{aligned}$$

$$I_{5a}^2 = - \frac{2 \left\{ \ln \left( q_1 + \sqrt{1+q_1^2} \right) - \ln \left( q_2 + \sqrt{1+q_2^2} \right) \right\}}{k \Delta_q}, \quad (3.250)$$

$$I_{5b}^2 = \frac{2 \left\{ 2 \varphi_\beta \rho_q \left( \sqrt{1+q_1^2} - \sqrt{1+q_2^2} \right) + \alpha_\xi \Delta_q \left[ -\ln \left( q_1 + \sqrt{1+q_1^2} \right) + \ln \left( q_2 + \sqrt{1+q_2^2} \right) \right] \right\}}{k \Delta_q^2}, \quad (3.251)$$

$$I_{va}^1 = \frac{1}{2k^3 \rho_q^3} \left\{ -\ln \left[ \left( \alpha_\xi^2 - 1 \right)^2 \Delta_q^2 \right] - \ln \left[ \left( \alpha_\xi^2 + 1 \right)^2 \Delta_q^2 \right] + \alpha_\xi \ln \left[ \frac{\left( \alpha_\xi - 1 \right)^2}{\left( \alpha_\xi + 1 \right)^2} \right] \right. \\ \left. + 2 \ln \left[ 2\pi\rho_q \left( 1 + \sqrt{1+p_1^2} \right) \right] + 2 \ln \left[ 2\pi\rho_q \left( 1 + \sqrt{1+p_2^2} \right) \right] + 2\alpha_\xi \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1+p_1^2}}{1 + \sqrt{1+p_2^2}} \right] \right\}, \quad (3.252)$$

$v=1,3$

$$I_{vb}^1 = \frac{1}{2k^3 \Delta_q^2 \rho_q^3} \left\{ 4\pi^2 \rho_q^2 \left[ \sqrt{1+p_2^2} - \sqrt{1+p_1^2} \right] + \left( \alpha_\xi - 1 \right)^2 \Delta_q^2 \ln \left[ \frac{\left( \alpha_\xi - 1 \right)^2}{\left( \alpha_\xi + 1 \right)^2} \right] \right\} \\ + \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1+p_1^2}}{1 + \sqrt{1+p_2^2}} \right], \quad v=1,3 \quad (3.253)$$

$$I_{vc}^1 = \frac{\pi^2}{3k^3 \Delta_q^3 \rho_q^3} \left\{ 4\Delta_q \left[ \sqrt{1+p_2^2} \left( 2\alpha_\xi - 1 \right) - \sqrt{1+p_1^2} \left( 2\alpha_\xi + 1 \right) \right] + 8\pi\rho_q \ln \left[ \frac{-p_1 + \sqrt{1+p_1^2}}{-p_2 + \sqrt{1+p_2^2}} \right] \right\} \\ + \frac{1}{6k^3 \rho_q^3} \left\{ -\ln \left[ \left( \alpha_\xi^2 - 1 \right)^2 \Delta_q^2 \right] - \ln \left[ \left( \alpha_\xi^2 + 1 \right)^2 \Delta_q^2 \right] + \alpha_\xi^3 \ln \left[ \frac{\left( \alpha_\xi - 1 \right)^2}{\left( \alpha_\xi + 1 \right)^2} \right] \right. \\ \left. + 2 \ln \left[ 2\pi\rho_q \left( 1 + \sqrt{1+p_1^2} \right) \right] + 2 \ln \left[ 2\pi\rho_q \left( 1 + \sqrt{1+p_2^2} \right) \right] + \alpha_\xi^3 \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1+p_1^2}}{1 + \sqrt{1+p_2^2}} \right] \right\}, \quad v=1,3 \quad (3.254)$$

$$I_{va}^2 = \frac{1}{k^3 \rho_q^3 |\varphi_\beta|} \left[ \frac{1 - \alpha_\xi}{\sqrt{1+q_1^2}} + \frac{1 + \alpha_\xi}{\sqrt{1+q_2^2}} \right], \quad v=1,3 \quad (3.255)$$

$$I_{vb}^2 = \frac{4\varphi_\beta^2}{k^3 \rho_q |\varphi_\beta| \Delta_q^2} \left\{ \frac{-\left[ \frac{v_1 \Delta_q \alpha_\xi}{2 \rho_q \varphi_\beta} + 1 \right]}{\sqrt{1+q_1^2}} + \frac{\left[ \frac{v_2 \Delta_q \alpha_\xi}{2 \rho_q \varphi_\beta} + 1 \right]}{\sqrt{1+q_2^2}} \right\}, \quad v=1,3 \quad (3.256)$$

$$I_{vc}^2 = \frac{4\varphi_\beta^2}{k^3 \rho_q |\varphi_\beta| \Delta_q^2} \left\{ \left[ \frac{v_2 \frac{\Delta_q \alpha_\xi^2}{2\rho_q \varphi_\beta} + (\alpha_\xi - 1)}{\sqrt{1+q_1^2}} \right] - \left[ \frac{v_1 \frac{\Delta_q \alpha_\xi^2}{2\rho_q \varphi_\beta} + (\alpha_\xi + 1)}{\sqrt{1+q_1^2}} \right] \right\} \quad (3.257)$$

$$+ \frac{8\varphi_\beta^2}{k^3 \Delta_q^3} \log \left[ \frac{-p_1 + \sqrt{1+q_1^2}}{-p_2 + \sqrt{1+q_2^2}} \right], \quad v=1,3$$

$$p_1 = \frac{(\alpha_\xi - 1) \Delta_q}{2\rho_q \pi}, \quad (3.258)$$

$$p_2 = \frac{(\alpha_\xi + 1) \Delta_q}{2\rho_q \pi}, \quad (3.259)$$

$$q_1 = \frac{(\alpha_\xi - 1) \Delta_q}{2\rho_q \varphi_\beta}, \quad (3.260)$$

$$q_2 = \frac{(\alpha_\xi + 1) \Delta_q}{2\rho_q \varphi_\beta}, \quad (3.261)$$

onde  $\varphi_\beta$  é dado pela equação (3.157).

Neste método, para tornar os cálculos mais precisos, a quadratura Gaussiana com  $n_\varphi$  pontos é avaliada através de um único intervalo, ou seja,  $n_\varphi = n_{\varphi T}$ , conforme equações (3.238)-(3.247). Em resumo, para os casos onde o Método 3 é aplicado, são utilizadas as equações (3.238)-(3.247) para o cálculo das integrais  $G_1(t, t')$ ,  $G_3(t, t')$  e  $G_5(t, t')$ , e as equações (3.135)-(3.150) para as demais integrais.

### 3.6 - Avaliação Numérica da Matriz Excitação

Os elementos da matriz excitação,  $V_i^{Et}$ ,  $V_i^{E\phi}$ ,  $V_i^{Ht}$  e  $V_i^{H\phi}$  expressos através das equações (3.30)-(3.33), dependem dos campos incidentes radiados pelas fontes externas. Estas fontes externas determinarão quais modos  $m$  (onde  $m$  corresponde aos termos da série de Fourier excitados pelas fontes externas) estarão presentes na formulação e, conseqüentemente, quais sistemas lineares das equações (3.28) e (3.29) devem ser resolvidos. Nesta seção são derivadas expressões para os elementos da matriz excitação para diferentes tipos de fontes. Assim,  $\vec{E}_{in}(\vec{r})$  e  $\vec{H}_{in}(\vec{r})$  são assumidos serem uma onda plana se propagando na direção do eixo de simetria ou uma onda esférica radiada por uma fonte pontual sobre o eixo de simetria. Para a fonte de onda esférica são apresentadas expressões para o dipolo de Hertz [62], um tipo de fonte Maxwelliana extremamente utilizada, assim como para o modelo cosseno elevado (RCF - *Raised-Cosine Feed*) [62], capaz de modelar as características de radiação de muitos alimentadores usados em aplicações de antenas refletoras. São também apresentadas expressões para excitações através do modo fundamental  $TE_{11}$  de um guia de onda circular, ou ainda através do modo TEM de um guia de onda coaxial, o que permite a inclusão da estrutura do alimentador na análise das antenas refletoras e possibilita a determinação do acoplamento mútuo entre os vários componentes da antena.

#### 3.6.1 - Excitação Através de uma Onda Plana

Para uma onda plana propagando com constante de propagação  $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  na direção  $\hat{z}$ , os campos incidentes  $\vec{E}_{in}(\vec{r})$  e  $\vec{H}_{in}(\vec{r})$  são expressos como [58]:

$$\vec{E}_{in}(\vec{r}) = E_0 e^{-jkz} \hat{x}, \quad (3.262)$$

$$\vec{H}_{in}(\vec{r}) = H_0 e^{-jkz} \hat{y} = \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz} \hat{y}, \quad (3.263)$$

onde  $E_0$  e  $H_0$  são as amplitudes dos campos elétrico e magnético incidentes, respectivamente, e está sendo assumida uma polarização linear em  $\hat{x}$ .

Utilizando as equações (2.1), (3.27), (3.262) e (3.263) e realizando algumas manipulações algébricas, as expressões para os elementos da matriz excitação das equações (3.30)-(3.33), podem ser reescritas como:

$$V_i^{Et} = E_0 \text{sen } u \int_t T_i(t) e^{-jkz} dt \int_0^{2\pi} e^{-jm\phi} \cos \phi d\phi, \quad (3.264)$$

$$V_i^{E\phi} = - E_0 \int_t T_i(t) e^{-jkz} dt \int_0^{2\pi} e^{-jm\phi} \text{sen } \phi d\phi, \quad (3.265)$$

$$V_i^H = \eta H_0 \text{sen } u \int_t T_i(t) e^{-jkz} dt \int_0^{2\pi} e^{-jm\phi} \text{sen } \phi d\phi, \quad (3.266)$$

$$V_i^{H\phi} = \eta H_0 \int_t T_i(t) e^{-jkz} dt \int_0^{2\pi} e^{-jm\phi} \cos \phi d\phi. \quad (3.267)$$

A avaliação numérica das equações (3.264)-(3.267) é realizada utilizando um processo similar ao descrito nas Seções 3.4 e 3.5. Ou seja, a integral em  $t$  é avaliada utilizando uma quadratura Gaussiana de  $n'_\alpha$  pontos, onde  $n'_\alpha$  é o mesmo utilizado para o cálculo dos elementos das matrizes  $Z$  e  $Y$ , e a integral em  $\phi$  é avaliada analiticamente através das equações

$$I_1^\phi = \int_0^{2\pi} e^{-jm\phi} \cos \phi d\phi = \begin{cases} \pi, & m = \pm 1, \\ 0, & m \neq \pm 1, \end{cases} \quad (3.268)$$

$$I_2^\phi = \int_0^{2\pi} e^{-jm\phi} \text{sen } \phi d\phi = \begin{cases} \mp j\pi, & m = \pm 1, \\ 0, & m \neq \pm 1. \end{cases} \quad (3.269)$$

Como pode ser verificado através das equações (3.268) e (3.269), para a excitação através de uma onda plana somente os modos  $m = \pm 1$  estão presentes. Porém, como os resultados para o modo  $m = -1$  podem ser obtidos diretamente a partir dos resultados para o modo  $m = 1$ , conforme discutido na Seção 3.6.4, os cálculos para determinação dos elementos



da matriz excitação são realizados somente para o modo  $m = 1$ . Assim, utilizando as equações (3.268) e (3.269), somente para o modo  $m = 1$ , e aplicando a quadratura Gaussiana de  $n'_\alpha$  pontos, os elementos das submatrizes  $V^{Et}$ ,  $V^{E\phi}$ ,  $V^{Ht}$  e  $V^{H\phi}$  das equações (3.264)-(3.267) podem ser reescritos como:

$$V_i^{Et} = \frac{E_o}{4} I_1^\phi \sum_{ip=1}^2 [I_a^t - (-1)^{ip} I_b^t] \Delta_p \text{sen } u_p, \quad (3.270)$$

$$V_i^{E\phi} = -\frac{E_o}{4} I_2^\phi \sum_{ip=1}^2 [I_a^t - (-1)^{ip} I_b^t] \Delta_p, \quad (3.271)$$

$$V_i^{Ht} = \frac{E_o}{4} I_2^\phi \sum_{ip=1}^2 [I_a^t - (-1)^{ip} I_b^t] \Delta_p \text{sen } u_p, \quad (3.272)$$

$$V_i^{H\phi} = \frac{E_o}{4} I_1^\phi \sum_{ip=1}^2 [I_a^t - (-1)^{ip} I_b^t] \Delta_p, \quad (3.273)$$

onde

$$I_a^t = \int_{-1}^1 e^{-jkz} d\alpha_\xi, \quad (3.274)$$

$$I_b^t = \int_{-1}^1 e^{-jkz} \alpha_\xi d\alpha_\xi. \quad (3.275)$$

### 3.6.2 - Excitação Através de uma Fonte de Onda Esférica

Para uma fonte de onda esférica localizada no eixo  $z$  em  $z = z_S$ , conforme ilustrado na Figura 3.2, o campo incidente  $\vec{E}_{in}(\vec{r})$  é expresso como:

$$\vec{E}_{in}(\vec{r}) = [F_r(r_F, \theta_F) \cos \phi_F \hat{r}_F + F_\theta(r_F, \theta_F) \cos \phi_F \hat{\theta}_F + F_\phi(r_F, \theta_F) \text{sen } \phi_F \hat{\phi}_F] \frac{e^{-jk r_F}}{r_F}, \quad (3.276)$$

onde  $r_F$ ,  $\theta_F$  e  $\phi_F$  são as coordenadas esféricas referentes ao sistema de alimentação centralizado em  $z = z_S$  e  $F_r(r_F, \theta_F)$ ,  $F_\theta(r_F, \theta_F)$  e  $F_\phi(r_F, \theta_F)$  definem as componentes do

campo. Para uma fonte representada pelo modelo RCF radiando na direção  $\hat{z}$  tem-se [62]:

$$F_r(r_F, \theta_F) = 0, \quad (3.277)$$

$$F_\theta(r_F, \theta_F) = \begin{cases} \cos^e \theta_F, & 0 \leq \theta_F \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq \theta_F \leq \pi, \end{cases} \quad (3.278)$$

$$F_\phi(r_F, \theta_F) = \begin{cases} -\cos^h \theta_F, & 0 \leq \theta_F \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq \theta_F \leq \pi, \end{cases} \quad (3.279)$$

onde  $e$  e  $h$  são os parâmetros de controle do diagrama de radiação do modelo RCF. Para um dipolo de Hertz polarizado na direção  $\hat{x}$  tem-se [62]:

$$F_r(r_F, \theta_F) = -j\eta_0 \frac{(I\ell)}{\lambda} \frac{1 + jkr_F}{(kr_F)^2} \sin\theta_F, \quad (3.280)$$

$$F_\theta(r_F, \theta_F) = j\eta_0 \frac{(I\ell)}{2\lambda} \frac{[1 + jkr_F - (kr_F)^2]}{(kr_F)^2} \cos\theta_F, \quad (3.281)$$

$$F_\phi(r_F, \theta_F) = -j\eta_0 \frac{(I\ell)}{2\lambda} \frac{[1 + jkr_F - (kr_F)^2]}{(kr_F)^2}, \quad (3.282)$$

onde  $I\ell$  é o momento do dipolo.

Para o modelo RCF das equações (3.277)-(3.279) as equações de Maxwell são satisfeitas somente quando  $r_F$ , e conseqüentemente  $|\vec{r}|$  tem valor infinito. Então para este modelo deve-se esperar bons resultados somente para pontos de observação,  $\vec{r}$ , suficientemente afastados da fonte. Assim, para o modelo RCF a aproximação TEM

$$\vec{H}_{in}(\vec{r}) \approx \frac{1}{\eta} \hat{r} \times \vec{E}_{in}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta} \left[ F_\phi(r_F, \theta_F) \sin\phi_F \hat{\theta}_F - F_\theta(r_F, \theta_F) \cos\phi_F \hat{\phi}_F \right] \frac{e^{-jkr_F}}{r_F}, \quad (3.283)$$

deve ser utilizada junto com as equações (3.276)-(3.279). Para o dipolo de Hertz, o campo

$\vec{H}_{in}(\vec{r})$  pode ser escrito com o auxílio das equações (3.276) e (3.280)-(3.282) como:

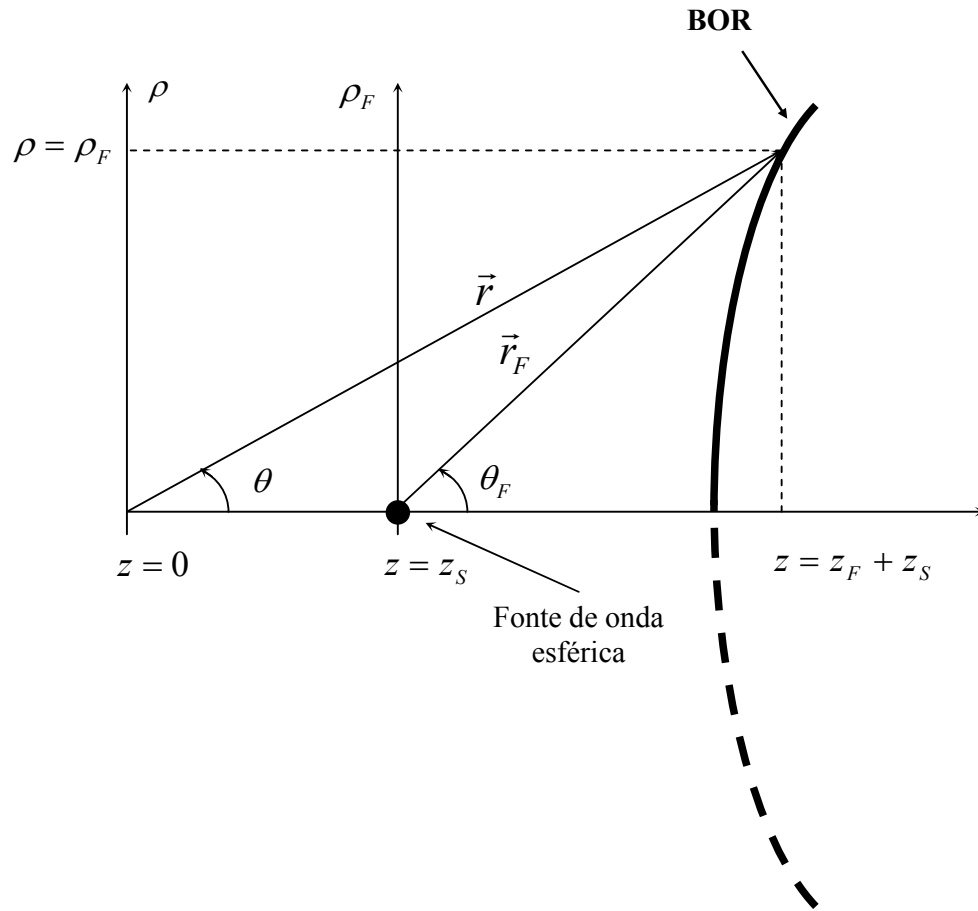


Figura 3.2 – Coordenadas referentes à fonte de onda esférica.

$$\vec{H}_{in}(\vec{r}) = \frac{1}{\omega\mu} \nabla^F \times \vec{E}_{in}(\vec{r}) = \frac{(I\ell)}{2\lambda} \left( \frac{1 + jkr_F}{kr_F} \right) (\sin\phi_F \theta_F + \cos\phi_F \phi_F) \frac{e^{-jkr_F}}{r_F}, \quad (3.284)$$

onde  $\nabla^F$  indica que a operação é realizada no sistema de onda esférica da fonte.

Utilizando a equação (3.27) e as relações

$$\hat{t} \cdot \hat{r}_F = \text{sen } u \text{ sen } \theta_F \hat{\rho} + \text{cos } u \text{ cos } \theta_F \hat{z}, \quad (3.285)$$

$$\hat{t} \cdot \hat{\theta}_F = \text{sen } u \text{ cos } \theta_F \hat{\rho} - \text{cos } u \text{ sen } \theta_F \hat{z}, \quad (3.286)$$

$$\hat{t} \cdot \hat{\phi}_F = 0, \quad (3.287)$$

$$\hat{\phi}_F \cdot \hat{r}_F = \hat{\phi}_F \cdot \hat{\theta}_F = 0, \quad (3.288)$$

$$\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}_F = 1, \quad (3.289)$$

onde

$$\hat{r}_F = \text{sen } \theta_F \hat{\rho} + \text{cos } \theta_F \hat{z}, \quad (3.290)$$

$$\hat{\theta}_F = \text{cos } \theta_F \hat{\rho} - \text{sen } \theta_F \hat{z}, \quad (3.291)$$

$$\hat{\phi}_F = \hat{\phi}, \quad (3.292)$$

$$\text{sen } \theta_F = \frac{\rho}{r_F}, \quad (3.293)$$

$$\text{cos } \theta_F = \frac{(z - zs)}{r_F}, \quad (3.294)$$

$$r_F = \sqrt{\rho^2 + (z - zs)^2}, \quad (3.295)$$

e  $\rho$ ,  $\phi$  e  $z$  são as coordenadas cilíndricas do sistema de coordenadas principal, as equações (3.30)-(3.33) podem ser reescritas como

$$V_i^{Et} = I_1^\phi \int_t T_i(t) F_i^t(t) dt, \quad (3.296)$$

$$V_i^{E\phi} = I_2^\phi \int_t T_i(t) F_i^\phi(t) dt, \quad (3.297)$$

$$V_i^{Ht} = \frac{I_2^\phi}{\eta} \int_t T_i(t) F_i^t(t) dt, \quad (3.298)$$

$$V_i^{H\phi} = \frac{I_1^\phi}{\eta} \int_t T_i(t) F_i^\phi(t) dt, \quad (3.299)$$

onde

$$F_i^t(t) = [F_r(r_F, \theta_F)(\text{sen } u \text{sen } \theta_F + \text{cos } u \text{cos } \theta_F) + F_\theta(r_F, \theta_F)(\text{sen } u \text{cos } \theta_F - \text{cos } u \text{sen } \theta_F)] \frac{e^{-jkr_F}}{r_F}, \quad (3.300)$$

$$F_i^\phi(t) = F_\phi(r_F, \theta_F) \frac{e^{-jkr_F}}{r_F}, \quad (3.301)$$

e  $I_1^\phi$  e  $I_2^\phi$  são dados pelas equações (3.268) e (3.269), respectivamente, o que determina que apenas os modos  $m = \pm 1$  estão presentes, assim como para a excitação através de uma onda plana. Aplicando a quadratura Gaussiana de  $n'_\alpha$  pontos para solução da integral em  $t$ , as equações (3.296)-(3.299), podem ser reescritos como:

$$V_i^{Et} = \frac{I_1^\phi}{4} \sum_{ip=1}^2 [F_a^t - (-1)^{ip} F_b^t] \Delta_p, \quad (3.302)$$

$$V_i^{E\phi} = \frac{I_2^\phi}{4} \sum_{ip=1}^2 [F_a^\phi - (-1)^{ip} F_b^\phi] \Delta_p, \quad (3.303)$$

$$V_i^{Ht} = \frac{I_2^\phi}{4} \sum_{ip=1}^2 [F_a^t - (-1)^{ip} F_b^t] \Delta_p, \quad (3.304)$$

$$V_i^{H\phi} = \frac{I_1^\phi}{4} \sum_{ip=1}^2 [F_a^\phi - (-1)^{ip} F_b^\phi] \Delta_p, \quad (3.305)$$

onde

$$F_a^t = \int_{-1}^1 F_i^t(t) d\alpha_\xi, \quad (3.306)$$

$$F_b^t = \int_{-1}^1 F_i^t(t) \alpha_\xi d\alpha_\xi, \quad (3.307)$$

$$F_a^\phi = \int_{-1}^1 F_i^\phi(t) d\alpha_\xi, \quad (3.308)$$

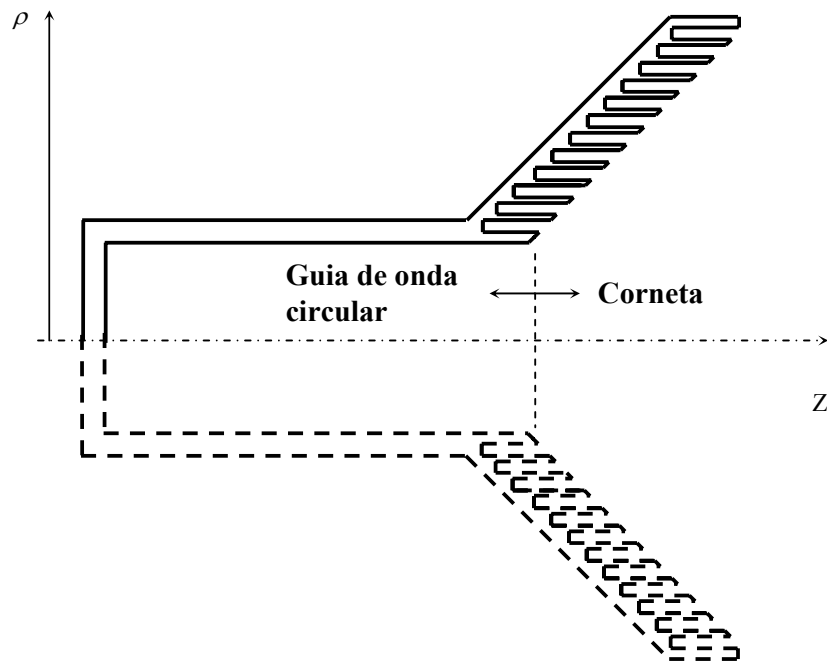
$$F_b^\phi = \int_{-1}^1 F_i^\phi(t) \alpha_\xi d\alpha_\xi. \quad (3.309)$$

O número de pontos da quadratura Gaussiana,  $n'_\alpha$ , é o mesmo utilizado para o cálculo dos elementos das matrizes Z e Y.

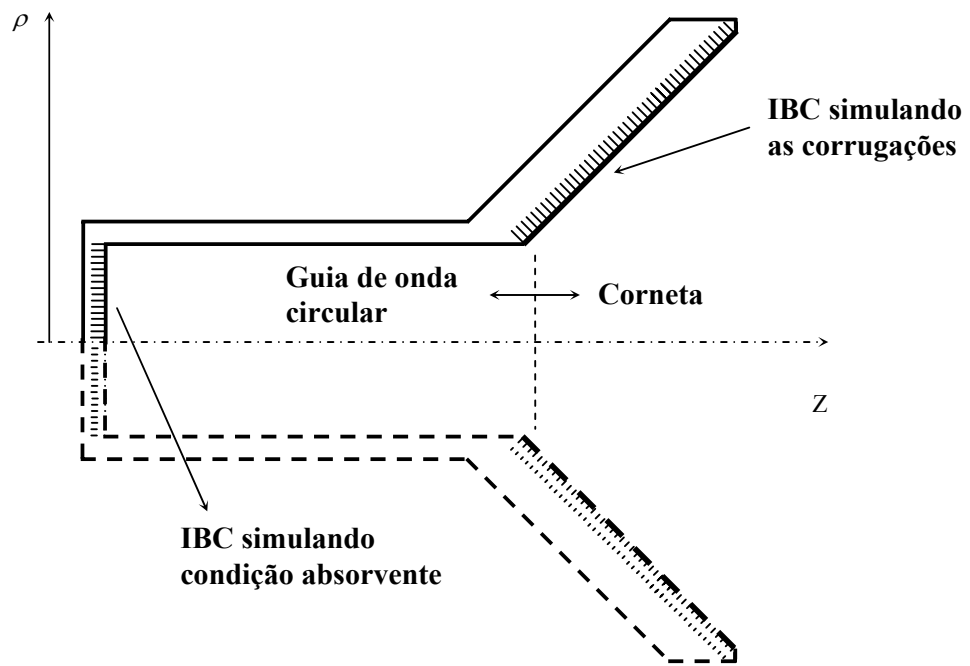
Também para a excitação através de uma fonte de onda esférica os resultados para o modo  $m = -1$  podem ser obtidos diretamente a partir dos resultados para o modo  $m = 1$ , conforme discutido na Seção 3.6.4. assim, os cálculos para determinação dos elementos da matriz excitação são realizados somente para o modo  $m = 1$ .

### 3.6.3 - Excitação Através de um Alimentador

Embora as expressões para excitação através de uma fonte de onda esférica localizada sobre o eixo de simetria tenham sido apresentadas na Seção 3.6.2, uma análise mais acurada do sistema da antena refletora pode ser realizada se os efeitos de radiação da estrutura do alimentador forem rigorosamente considerados. Um alimentador com corneta corrugada, como aquele ilustrado na Figura 3.3 (a), é um dos tipos mais utilizados em aplicações de antenas refletoras, devido ao seu alto desempenho. As corrugações presentes sobre a superfície interna da corneta simulam uma impedância de superfície equivalente que permite a propagação de um modo híbrido balanceado dentro da corneta, que acaba radiando um campo com baixa polarização cruzada e, conseqüentemente, com diagrama de polarização quase circularmente simétrico [63], [64]. Este diagrama de radiação quase circularmente simétrico resulta numa iluminação mais uniforme da superfície do refletor e melhora a performance da antena. A análise de cornetas corrugadas pode ser conduzida utilizando o MoM através da segmentação de toda a superfície da corneta. Porém, através deste processo, deve ser utilizado um número extremamente grande de segmentos para descrever as corrugações sobre a curva geratriz da corneta e alcançar a precisão desejada. Uma aproximação para a análise deste tipo de corneta é utilizar a técnica *Impedance Boundary Condition* (IBC) [65] juntamente com as EFIE e MFIE. A IBC é utilizada para simular a condição de contorno assintótica criada pelas corrugações sobre a superfície interior da corneta. Através desta técnica a análise aproximada da radiação de cornetas com corrugações pode ser realizada sem a necessidade de utilização de um elevado número de segmentos, como ilustrado na Figura 3.3 (b). Ou seja, através desta técnica a extensa superfície da corneta que possui corrugações é substituída por uma superfície sem corrugações (lisa e, portanto menos extensa) e com uma IBC que simula a condição de contorno assintótica criada pelas corrugações. A IBC também pode ser utilizada para simular uma condição absorvente para o alimentador. Ou seja, uma IBC com valor escolhido de acordo com a impedância do modo que se deseja absorver é atribuída à superfície interna da corneta [parede final, conforme



a) Corneta CEP com corrugações



b) Corneta CEP com a aproximação da IBC

Figura 3.3 – Geometria básica de uma corneta corrugada.

ilustrado na Figura 3.3 (b)], de forma que não ocorra reflexão deste modo. O raio do guia é especificado de forma que somente o modo fundamental ( $TE_{11}$  para o guia circular ou TEM para o guia coaxial) possa se propagar dentro do guia. Assim, o guia deve ser suficientemente grande de forma que os modos evanescentes tenham amplitude suficientemente pequena ao chegar na parede final do guia, conforme ilustrado na Figura 3.4.

### 3.6.3.1 - Impedance Boundary Condition - IBC

A IBC representa uma relação entre as componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético sobre uma superfície. Neste trabalho a IBC simula a impedância de superfície assintótica criada por corrugações ou uma condição absorvente para guias de onda circulares ou coaxiais. As referidas relações para as componentes tangenciais de campo sobre a superfície do BOR descritas em termos de IBC's são [58], [65]:

$$Z_t^{IBC} = \frac{-E_t}{H_\phi}, \quad (3.310)$$

$$Z_\phi^{IBC} = \frac{E_\phi}{H_t}, \quad (3.311)$$

onde os subscritos  $t$  e  $\phi$  estão associados ao sistema ortonormal de coordenadas ilustrado na Figura 2.1. Para definir um problema equivalente em termos do princípio da equivalência, as informações das condições de contorno contidas nas equações (3.310) e (3.311) são transformadas em relações entre as correntes equivalentes sobre a superfície do BOR, definidas da seguinte forma:

$$\vec{M}(\vec{r}) = Z_\phi^{IBC} J_\phi(\vec{r}) \hat{t} - Z_t^{IBC} J_t(\vec{r}) \hat{\phi}. \quad (3.312)$$

A equação (3.312) indica que  $\vec{M}(\vec{r})$  está relacionada com  $\vec{J}(\vec{r})$  através da IBC.

A EFIE e MFIE na forma *Tangencial* para os problemas equivalentes interno e externo, considerando a existência de uma superfície com IBC, continuam sendo dadas pelas equações

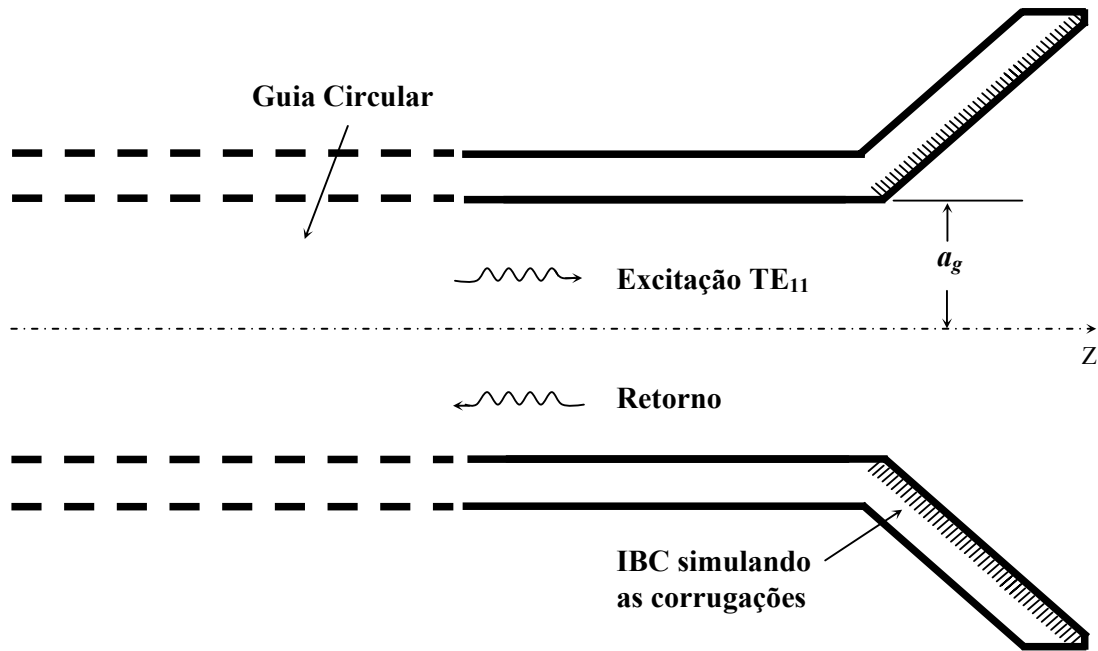


(2.22)-(2.25), respectivamente. Porém, neste caso a corrente magnética  $\vec{M}(\vec{r})$  na superfície com IBC, deve ser representada em função da corrente elétrica  $\vec{J}(\vec{r})$ , utilizando a relação expressa na equação (3.312). Assim, a solução através do MoM segue exatamente o mesmo processo descrito nas seções anteriores e as formulações apresentadas para superfícies condutoras na Seção 2.2.2 [equações (2.38)-(2.42)] e para superfícies dielétricas na Seção 2.2.1 [equações (2.26)-(2.37)] continuam inteiramente válidas. As equações matriciais para BOR que possuem superfícies com IBC são apresentadas na Seção 3.7.4.

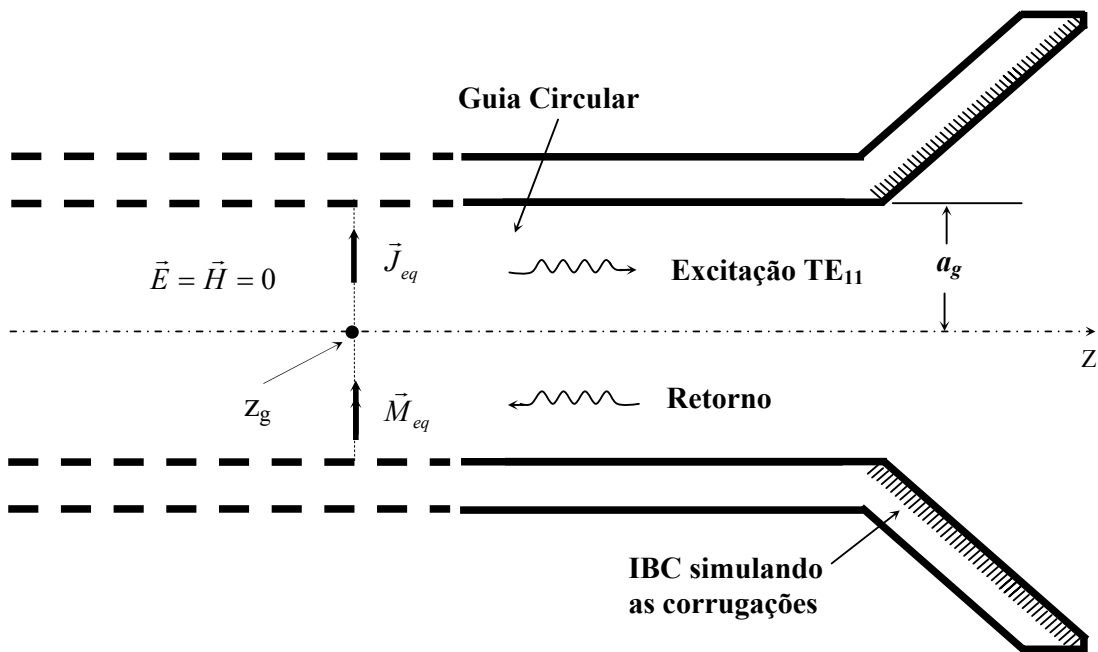
### 3.6.3.2 - Excitação Através do Modo Fundamental $TE_{11}$ de um Guia Circular

Nesta seção é apresentada a formulação para a excitação através do modo fundamental  $TE_{11}$  de um guia circular conectado a uma corneta. Este guia circular tem raio  $a_g$  e é assumido que ele permite a propagação somente do modo fundamental  $TE_{11}$ . Na Figura 3.4 são apresentados o problema original e os problemas equivalentes utilizados na análise. A Figura 3.4 (a) ilustra o problema original: um guia semi-infinito excitado pelo modo  $TE_{11}$  e conectado a uma corneta. Este problema é substituído por outro equivalente, ilustrado na Figura 3.4 (b), onde correntes equivalentes  $\vec{J}_{eq}(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_{eq}(\vec{r}')$  são colocadas dentro do guia em  $z = z_g$  tais que na região  $z < z_g$  o campo é nulo. As correntes equivalentes  $\vec{J}_{eq}(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_{eq}(\vec{r}')$  são determinadas a partir das condições de contorno na superfície  $z = z_g$  entre as duas regiões  $z < z_g$  e  $z > z_g$ . Como para a região  $z < z_g$  é assumido que não existe campo, é realizado o fechamento do guia com uma interface condutora em  $z = z_g$ , o que não altera a solução do problema na região  $z > z_g$ , conforme ilustrado na Figura 3.4 (c). Assim, a análise é conduzida somente para região  $z > z_g$ , o que reduz o esforço computacional requerido na solução.

As correntes equivalentes  $\vec{J}_{eq}(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_{eq}(\vec{r}')$  podem ser separadas em duas componentes. Uma componente associada ao modo fundamental  $TE_{11}$  propagando na direção  $\hat{z}$  positiva ( $\vec{J}_g(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_g(\vec{r}')$ ) e outra componente associada ao campo que retorna

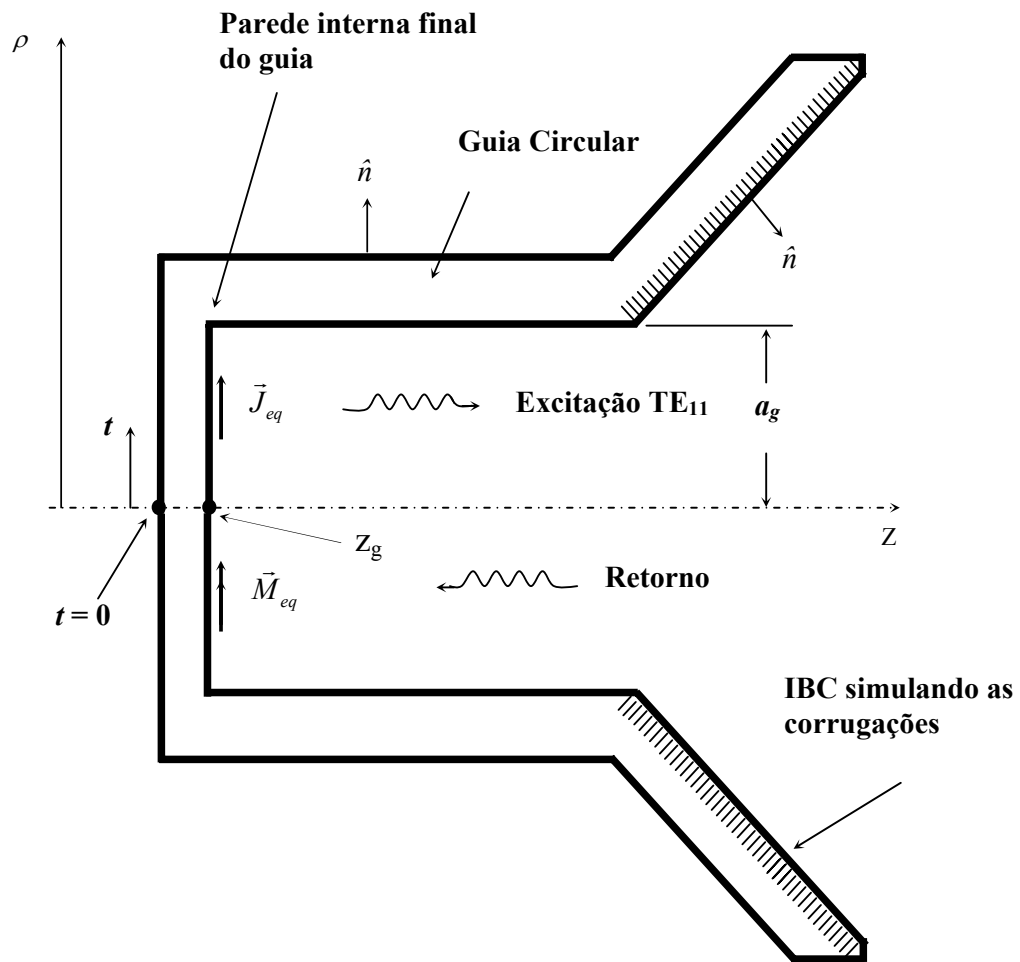


a) Problema Original



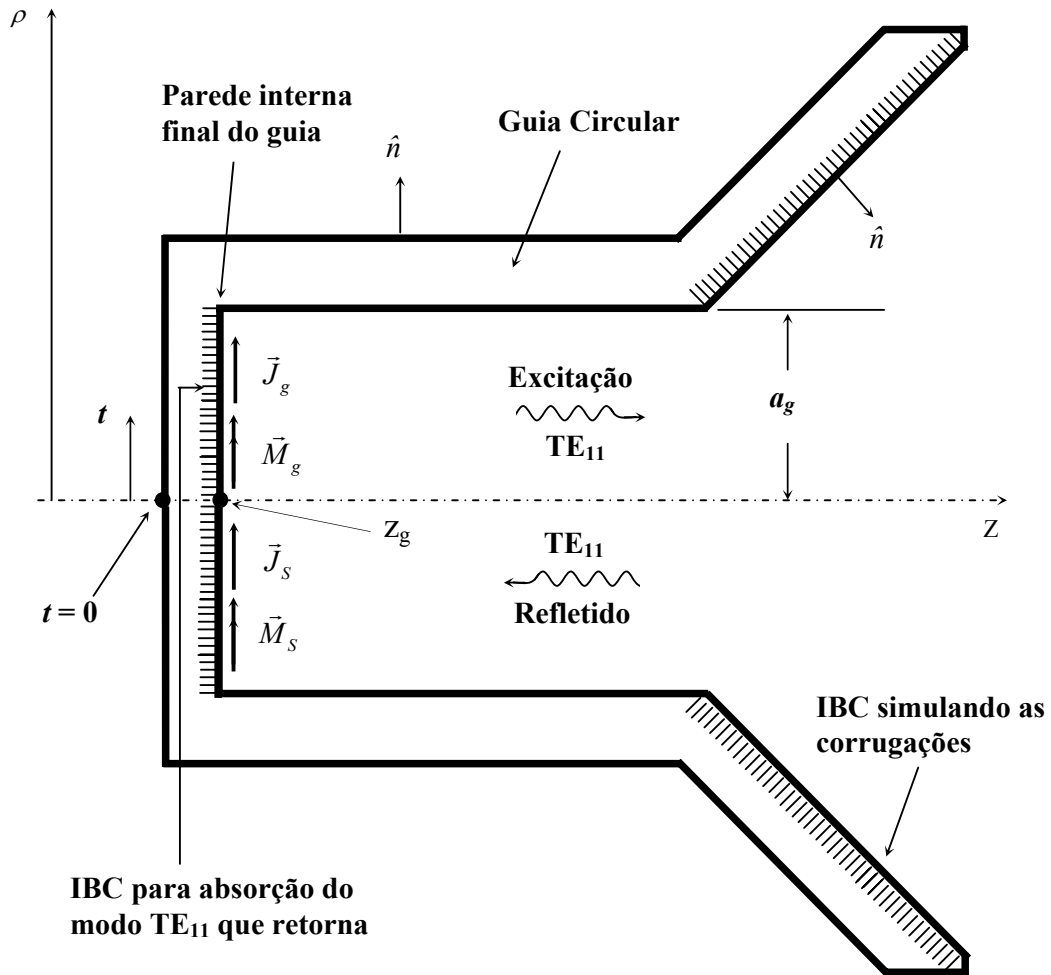
b) Problema Equivalente

Figura 3.4 – Guia circular excitado pelo o modo  $TE_{11}$ .



c) Fechamento da parede final do guia

Figura 3.4 – Guia circular excitado pelo o modo  $TE_{11}$ .  
(continuação)



d) Correntes equivalentes para o modo  $TE_{11}$

Figura 3.4 – Guia circular excitado pelo o modo  $TE_{11}$ .  
(continuação)

direção  $\hat{z}$  negativa ( $\vec{J}_s(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_s(\vec{r}')$ ), conforme ilustrado na Figura 3.4 (d). Assumindo que a seção do guia a ser considerada ( $z > z_g$ ) é suficientemente maior do que o comprimento de onda guiado, somente o modo fundamental  $TE_{11}$  retornará até a parede interna no final do guia, pois os demais modos serão evanescentes. As componentes da corrente equivalente  $\vec{J}_s(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_s(\vec{r}')$  estão relacionadas entre si através das componentes do campo  $TE_{11}$  que retorna. Essa relação pode ser representada através de uma IBC presente na parede final do guia, conforme descrito na equação (3.312) e ilustrado na Figura 3.4 (d).

O campo eletromagnético para o modo  $TE_{11}$  polarizado na direção  $\hat{x}$  é [33]:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{TE_{11}}|_{-}^{+} &= E_{\rho}|_{-}^{+} \hat{\rho} + E_{\phi}|_{-}^{+} \hat{\phi} \\
 &= \frac{k_{\rho}}{\Im_{TE_{11}}} \left[ -\frac{J_1(k_{\rho}\rho)}{k_{\rho}\rho} \cos\phi \hat{\rho} + J_1'(k_{\rho}\rho) \sin\phi \hat{\phi} \right] e^{\mp j\sqrt{k^2-k_{\rho}^2}z},
 \end{aligned} \tag{3.313}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_{TE_{11}}|_{-}^{+} &= H_{\rho}|_{-}^{+} \hat{\rho} + H_{\phi}|_{-}^{+} \hat{\phi} + H_z|_{-}^{+} \hat{z} \\
 &= \pm Z_{TE_{11}} \left( -E_{\phi}|_{-}^{+} \hat{\rho} + E_{\rho}|_{-}^{+} \hat{\phi} \right) - \frac{jk_{\rho}^2}{\Im_{TE_{11}}\omega\mu} J_1(k_{\rho}\rho) \sin\phi e^{\mp j\sqrt{k^2-k_{\rho}^2}z} \hat{z},
 \end{aligned} \tag{3.314}$$

onde os sinais positivo e negativo correspondem ao modo  $TE_{11}$  propagando na direção  $\hat{z}$  positiva e negativa, respectivamente,

$$\Im_{TE_{11}} = J_1(k_{\rho}a_g) \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{(k_{\rho}a_g)^2 - 1}{Z_{TE_{11}}}}, \tag{3.315}$$

$$Z_{TE_{11}} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{k^2 - k_{\rho}^2}} = \frac{k\eta}{\sqrt{k^2 - k_{\rho}^2}}, \tag{3.316}$$

$$k_{\rho} = \frac{1,84118}{a_g}, \tag{3.317}$$

$$J_1(k_{\rho}a_g) = 0,58187, \tag{3.318}$$

$J_1(x)$  é a função de Bessel de primeira ordem e  $J_1'(x)$  é sua derivada em relação ao argumento. As componentes de campo nas equações (3.313) e (3.314) foram normalizadas

através do parâmetro  $\mathfrak{S}_{TE_{11}}$  tal que a potência associada com o modo  $TE_{11}$  é igual a 1 Watt. A partir destas equações as correntes equivalentes,  $\vec{J}_g(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_g(\vec{r}')$ , obtidas utilizando o princípio da equivalência são [58]:

$$\vec{J}_g(\vec{r}') = \hat{z} \times \vec{H}_{TE_{11}} = \frac{k_\rho}{\mathfrak{S}_{TE_{11}} Z_{TE_{11}}} \left[ \frac{J_1(k_\rho \rho)}{k_\rho \rho} \cos \phi \hat{\rho} - J_1'(k_\rho \rho) \sin \phi \hat{\phi} \right] e^{-j\sqrt{k^2 - k_\rho^2} z_g}, \quad \rho \leq a_g, \quad (3.319)$$

$$\vec{M}_g(\vec{r}') = -\hat{z} \times \vec{E}_{TE_{11}} = Z_{TE_{11}} \hat{z} \times \vec{J}_g(\vec{r}'), \quad \rho \leq a_g. \quad (3.320)$$

Para a excitação através do guia circular descrito nesta seção os elementos da matriz excitação das equações (3.30)-(3.33) podem ser obtidos aplicando as correntes elétrica,  $\vec{J}_g(\vec{r}')$ , e magnética,  $\vec{M}_g(\vec{r}')$ , equivalentes à EFIE e MFIE. Porém tal processo requer um considerável esforço computacional uma vez que o cálculo de todas as integrais apresentadas na Seção 3.3 deve ser novamente realizado para as correntes  $\vec{J}_g(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_g(\vec{r}')$ . Uma forma mais simples para determinação dos elementos da matriz excitação é reaproveitar os cálculos das integrais já realizados para a construção das matrizes  $Z$  e  $Y$ , uma vez que as correntes  $\vec{J}_g(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_g(\vec{r}')$  foram colocadas ao longo de uma das superfícies do guia [veja Figura 3.4 (d)], onde também foram definidas correntes equivalentes induzidas ( $\vec{J}_s(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_s(\vec{r}')$ ), conforme ilustrado na Figura 3.4 (e). Assim, os sistemas lineares das equações (3.28) e (3.29) podem ser reescritos da seguinte forma:

$$\eta_0 \begin{bmatrix} Z^{Ett} & Z^{Et\phi} \\ Z^{E\phi t} & Z^{E\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} + I_g^{Jt} \\ I^{J\phi} + I_g^{J\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y^{Ett} & Y^{Et\phi} \\ Y^{E\phi t} & Y^{E\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Mt} + I_g^{Mt} \\ I^{M\phi} + I_g^{M\phi} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.321)$$

$$\eta_0 \begin{bmatrix} Z^{Htt} & Z^{Ht\phi} \\ Z^{H\phi t} & Z^{H\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} + I_g^{Jt} \\ I^{J\phi} + I_g^{J\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y^{Htt} & Y^{Ht\phi} \\ Y^{H\phi t} & Y^{H\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Mt} + I_g^{Mt} \\ I^{M\phi} + I_g^{M\phi} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.322)$$

onde  $I_g^{Jt}, I_g^{J\phi}, I_g^{Mt}$  e  $I_g^{M\phi}$  são os coeficientes das correntes  $\vec{J}_g(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_g(\vec{r}')$  nas direções  $\hat{t}$  e  $\hat{\phi}$ , respectivamente, quando estas correntes são representados pelos somatórios apresentados nas equações (3.25) e (3.26), respectivamente, definidos como:

$$I_g^{Jt} = \frac{k_\rho \rho}{2 \mathfrak{I}_{TE_{11}} Z_{TE_{11}}} \frac{J_1(k_\rho \rho)}{k_\rho} e^{-j\sqrt{k^2 - k_\rho^2} z_g}, \quad (3.323)$$

$$I_g^{J\phi} = -\frac{j k_\rho \rho}{2 \mathfrak{I}_{TE_{11}} Z_{TE_{11}}} J_1'(k_\rho \rho) \rho e^{-j\sqrt{k^2 - k_\rho^2} z_g}, \quad (3.324)$$

$$I_g^{Mt} = -\frac{j k_\rho \rho}{\mathfrak{I}_{TE_{11}}} J_1'(k_\rho \rho) \rho e^{-j\sqrt{k^2 - k_\rho^2} z_g}, \quad (3.325)$$

$$I_g^{M\phi} = \frac{k_\rho \rho}{2 \mathfrak{I}_{TE_{11}}} \frac{J_1(k_\rho \rho)}{k_\rho} e^{-j\sqrt{k^2 - k_\rho^2} z_g}. \quad (3.326)$$

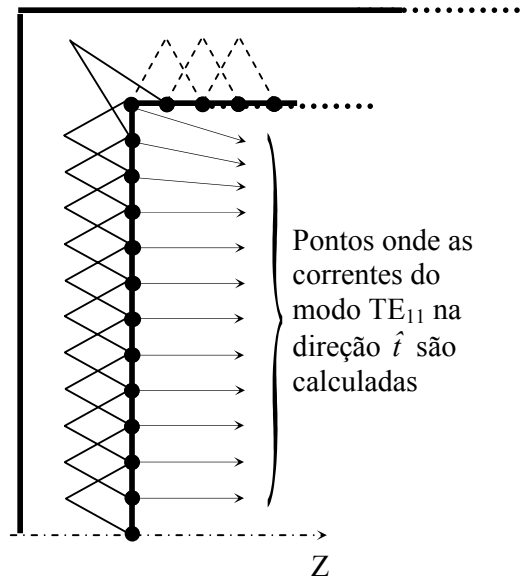
$I_g^{Jt}$ ,  $I_g^{J\phi}$ ,  $I_g^{Mt}$  e  $I_g^{M\phi}$  são calculados no ponto correspondente ao pico de cada triângulo na superfície onde  $\vec{J}_g(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_g(\vec{r}')$  são definidas, conforme ilustrado nas Figuras 3.4 e 3.5, e são iguais a zero nos pontos correspondentes ao pico de cada triângulo nas demais superfícies da do alimentador.

Utilizando a equação (3.312) para representar a corrente magnética,  $\vec{M}_g(\vec{r}')$ , em função da corrente elétrica,  $\vec{J}_g(\vec{r}')$ , as equações (3.321) e (3.322) podem ser reescritas como

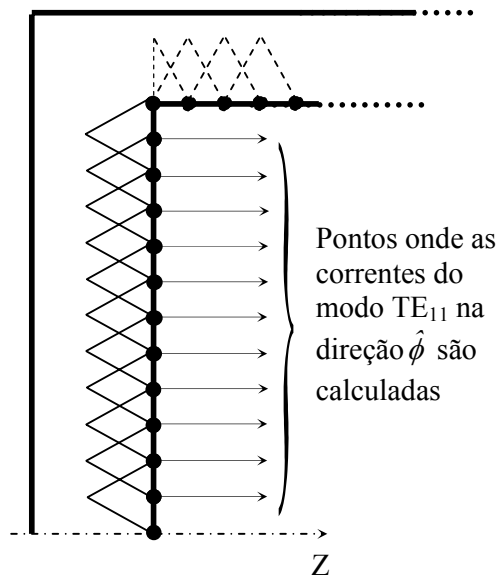
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V^{Et} \\ V^{E\phi} \end{bmatrix} &= -\eta_0 \begin{bmatrix} -Z^{Ett} & Z^{Et\phi} \\ -Z^{E\phi t} & Z^{E\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_g^{Jt} \\ I_g^{J\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y^{Et\phi} Z_t^{IBC} & -Y^{Ett} Z_\phi^{IBC} \\ -Y^{E\phi t} Z_t^{IBC} & -Y^{E\phi\phi} Z_\phi^{IBC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_g^{Jt} \\ I_g^{J\phi} \end{bmatrix} \\ &= \eta_0 \begin{bmatrix} Z^{Ett} & Z^{Et\phi} \\ Z^{E\phi t} & Z^{E\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_g^{Jt} \\ I_g^{J\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y^{Ett} & Y^{Et\phi} \\ Y^{E\phi t} & Y^{E\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_g^{Mt} \\ I_g^{M\phi} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.327)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V^{Ht} \\ V^{H\phi} \end{bmatrix} &= -\eta_0 \begin{bmatrix} -Z^{Htt} & Z^{Ht\phi} \\ -Z^{H\phi t} & Z^{H\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_g^{Jt} \\ I_g^{J\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y^{Ht\phi} Z_t^{IBC} & -Y^{Htt} Z_\phi^{IBC} \\ -Y^{H\phi\phi} Z_t^{IBC} & -Y^{H\phi t} Z_\phi^{IBC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_g^{Jt} \\ I_g^{J\phi} \end{bmatrix} \\ &= \eta_0 \begin{bmatrix} Z^{Htt} & Z^{Ht\phi} \\ Z^{H\phi t} & Z^{H\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_g^{Jt} \\ I_g^{J\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y^{Htt} & Y^{Ht\phi} \\ Y^{H\phi t} & Y^{H\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_g^{Mt} \\ I_g^{M\phi} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.328)$$

Desta forma os elementos já calculados das matrizes  $Z$  e  $Y$  podem ser reaproveitados no cálculo dos elementos da matriz excitação. Porém durante este processo de reaproveitamento são necessárias duas sucessivas trocas de sinal para os elementos das matrizes  $Z$  e  $Y$  conforme apresentado nas equações (3.327) e (3.328). Estas trocas de sinal se devem a:



a) Direção  $\hat{t}$



b) Direção  $\hat{\phi}$

Figura 3.5 – Distribuição dos triângulos que representam as correntes na parede final interna do guia.



- 1) troca de sinal nas componentes de  $Z^{IBC}$  em relação ao que foi definido em (3.310) e (3.311), uma vez que o campo produzido pelas correntes  $\vec{J}_g(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_g(\vec{r}')$  propaga na direção  $\hat{z}$  positiva, e o campo a ser absorvido por  $Z^{IBC}$  propaga na direção  $\hat{z}$  negativa.
- 2) troca de sinal da componente  $Z_t^{IBC}$  uma vez que as correntes  $\vec{J}_g(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_g(\vec{r}')$  são definidas no sentido contrário à direção  $\hat{t}$  na parede em que elas são colocada, como pode ser verificado na Figura 3.4 (d).

Substituindo as equações (3.319) e (3.320) nas equações (2.6) e (2.7) para determinação dos campos incidentes elétrico,  $\vec{E}_{in0}(\vec{r}')$ , e magnético,  $\vec{H}_{in0}(\vec{r}')$ , respectivamente, e a seguir substituindo estes campos nas equações (3.30)-(3.33) para determinação dos elementos da matriz excitação, pode-se verificar que, assim como para a excitação através de uma onda plana e uma onda esférica, para a excitação através do modo fundamental  $TE_{11}$  de um guia circular somente os modos  $m = \pm 1$  estão presentes. Também neste caso os resultados para o modo  $m = -1$  podem ser obtidos diretamente a partir dos resultados para o modo  $m = 1$ , conforme discutido na Seção 3.6.4. Assim, os cálculos para determinação dos elementos da matriz excitação são realizados somente para o modo  $m = 1$ .

A distribuição de triângulos apresentada na Figura 3.5 para a parede final interna do guia tem o objetivo de assegurar a continuidade da corrente elétrica na direção  $\hat{t}$  e a descontinuidade desta corrente na direção  $\hat{\phi}$ , conforme exigido pelas condições de contorno nesta região. Para as funções de peso, ainda é utilizado o método de Galerkin, exceto para a região do guia ilustrada na Figura 3.5. Para esta região as funções de peso nas direções  $\hat{t}$  e  $\hat{\phi}$  são definidas da mesma forma que são definidas as funções de base direção  $\hat{t}$  nesta região, ou seja, como ilustrado na Figura 3.5 a). Esta estratégia tem o objetivo de testar, observar, adequadamente o campo nesta região e assim garantir a precisão da solução através da formulação *Cfield*. A solução através da formulação *Cfield* é necessária para evitar problemas de ressonância uma vez que a junção das superfícies que formam o alimentador constitui uma superfície fechada.

### 3.6.3.3 - Excitação Através do Modo TEM de um Guia Coaxial

Nesta seção é apresentada a formulação para a excitação através do modo TEM de um guia coaxial conectado a uma corneta. As expressões para a excitação através deste modo são obtidas utilizando o mesmo processo empregado na Seção 3.6.3.2 para o modo  $TE_{11}$ . Assim considerando um guia coaxial, como aquele ilustrado na Figura 3.6, e assumindo que ele permite a propagação somente do modo TEM na direção  $\hat{z}$  positiva, a excitação deste modo também pode ser simulada através da distribuição de correntes equivalentes elétrica,  $\vec{J}_g(\vec{r}')$ , e magnética,  $\vec{M}_g(\vec{r}')$  [33]. Estas correntes são, então, colocadas dentro do guia circular, sobre a parede interna final do guia em  $z = z_g$  juntamente com as correntes equivalentes  $\vec{J}_s(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_s(\vec{r}')$  associadas ao modo TEM refletido, conforme ilustrado na Figura 3.6. O campo eletromagnético para o modo TEM é [33]

$$\vec{E}_{TEM}|_{-}^{+} = E_{\rho}|_{-}^{+} \hat{\rho} = \frac{\pm V_o}{\mathfrak{Z}_{TEM} \ln(b/a)} \frac{1}{\rho} e^{\mp jkz} \hat{\rho}, \quad (3.329)$$

$$\vec{H}_{TEM}|_{-}^{+} = H_{\phi}|_{-}^{+} \hat{\phi} = \frac{\pm V_o}{Z_{TEM} \mathfrak{Z}_{TEM} \ln(b/a)} \frac{1}{\rho} e^{\mp jkz} \hat{\phi}, \quad (3.330)$$

onde os sinais positivo e negativo correspondem ao modo TEM propagando na direção  $\hat{z}$  positiva e negativa, respectivamente, e  $a$  e  $b$  são os raios interno e externo do guia coaxial, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 3.6, e  $V_o$  é o potencial elétrico em  $\rho = a$ ,

$$\mathfrak{Z}_{TEM} = \sqrt{\frac{\pi}{Z_{TEM}} \frac{V_o^2}{\ln(b/a)}}, \quad (3.331)$$

$$Z_{TEM} = \eta. \quad (3.332)$$

As componentes de campo das equações (3.329) e (3.330) também foram normalizadas através do parâmetro  $\mathfrak{Z}_{TEM}$  tal que a potência associada com o modo TEM é igual a 1 Watt, para  $V_o = 1$ . A partir destas equações as correntes equivalentes,  $\vec{J}_g(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_g(\vec{r}')$ , obtidas utilizando o princípio da equivalência são [58]:

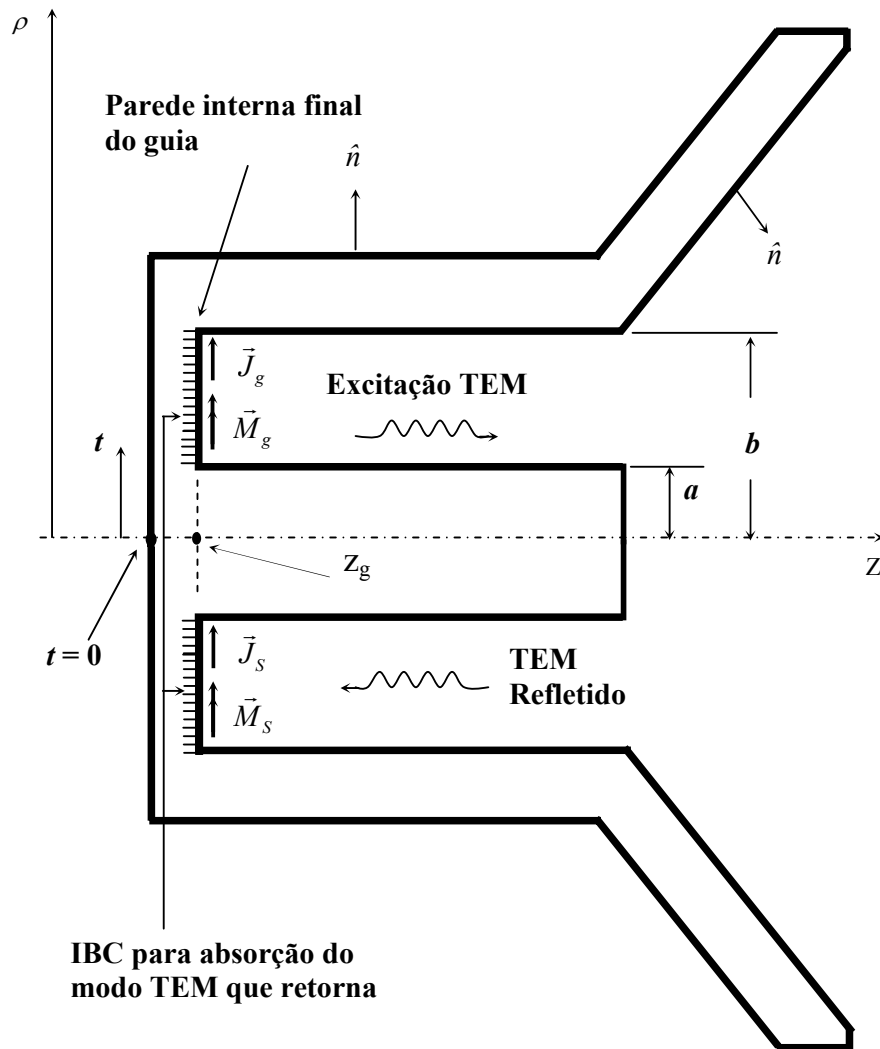


Figura 3.6 – Correntes equivalentes para o modo TEM em um guia coaxial.

$$\vec{J}_g(\vec{r}) = \hat{z} \times \vec{H}_{TEM} = -\frac{V_o}{Z_{TEM} \mathfrak{I}_{TEM} \ln(b/a)} \frac{1}{\rho} e^{-jkz_g} \hat{\rho}, \quad a < \rho < b, \quad (3.333)$$

$$\vec{M}_g(\vec{r}) = -\hat{z} \times \vec{E}_{TEM} = -\frac{V_o}{\mathfrak{I}_{TEM} \ln(b/a)} \frac{1}{\rho} e^{-jkz_g} \hat{\phi}, \quad a < \rho < b. \quad (3.334)$$

Para o guia coaxial os elementos da matriz excitação podem ser obtidos pelo mesmo processo descrito na Seção 3.6.3.2 para o guia circular. Assim, utilizando as equações (3.327) e (3.328) para este caso os coeficientes  $I_g^{Jt}$ ,  $I_g^{J\phi}$ ,  $I_g^{Mt}$  e  $I_g^{M\phi}$  são:

$$I_g^{Jt} = -\frac{V_o}{Z_{TEM} \mathfrak{I}_{TEM} \ln(b/a)} e^{-jkz_g}, \quad (3.335)$$

$$I_g^{J\phi} = 0, \quad (3.336)$$

$$I_g^{Mt} = 0, \quad (3.337)$$

$$I_g^{M\phi} = -\frac{V_o}{\mathfrak{I}_{TEM} \ln(b/a)} e^{-jkz_g}, \quad (3.338)$$

obtidos no ponto correspondente ao pico de cada triângulo na superfície onde  $\vec{J}_g(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_g(\vec{r}')$  são colocadas, conforme ilustrado na Figura 3.5, e são iguais a zero nos pontos correspondentes ao pico de cada triângulo nas demais superfícies do alimentador.

Substituindo as equações (3.333) e (3.334) nas equações (2.6) e (2.7) para determinação dos campos incidentes elétrico,  $\vec{E}_{in0}(\vec{r}')$ , e magnético,  $\vec{H}_{in0}(\vec{r}')$ , respectivamente, e a seguir substituindo estes campos nas equações (3.30)-(3.33) para determinação dos elementos da matriz excitação, pode-se verificar que para a excitação através do modo fundamental TEM de um guia coaxial somente o modo  $m = 0$  está presente.

De acordo com (3.329) e (3.330), para a excitação através do modo fundamental TEM, somente as componentes de campo  $E_\rho$  e  $H_\phi$  estão presentes. Uma vez que as correntes equivalentes para a solução do espalhamento eletromagnético são dadas por

$$\vec{J}(\vec{r}') = \hat{n} \times \vec{H}_{TEM}(\vec{r}), \quad (3.339)$$

$$-\vec{M}(\vec{r}') = \hat{n} \times \vec{E}_{TEM}(\vec{r}), \quad (3.340)$$

pode-se verificar que somente as componentes de corrente elétrica na direção  $\hat{t}$  e corrente magnética na direção  $\hat{\phi}$  são diferentes de zero.

### 3.6.4 - Elementos das Matrizes Excitação e de Coeficientes para os Modos $m$

As expressões para os elementos da matriz excitação para uma fonte de onda plana, equações (3.270)-(3.273), para uma fonte de onda esférica, equações (3.302)-(3.305), ou para a excitação através do modo fundamental de um guia circular TE<sub>11</sub>, equações (3.327) e (3.328), têm um comportamento tal que o resultado para o modo  $m = 1$  pode ser reaproveitado na determinação dos resultados para  $m = -1$  da seguinte forma [34]:

$$(V_i^{Et})_m = (V_i^{Et})_{-m}, \quad (3.341)$$

$$(V_i^{E\phi})_m = -(V_i^{E\phi})_{-m}, \quad (3.342)$$

$$(V_i^{Ht})_m = (V_i^{Ht})_{-m}, \quad (3.343)$$

$$(V_i^{H\phi})_m = -(V_i^{H\phi})_{-m}. \quad (3.344)$$

Aplicando as relações (3.127)-(3.134) e (3.341)-(3.344) às equações matriciais (3.28) e (3.29), os coeficientes desconhecidos  $I_j^J$  e  $I_j^M$  para o modo  $m = 1$ , também podem ser escritos a partir do resultado obtido para o modo  $m = -1$  da seguinte forma [34]:

$$(I_j^{Jt})_m = (I_j^{Jt})_{-m}, \quad (3.345)$$

$$(I_j^{J\phi})_m = -(I_j^{J\phi})_{-m}, \quad (3.346)$$

$$(I_j^{Mt})_m = (I_j^{Mt})_{-m}, \quad (3.347)$$

$$(I_j^{M\phi})_m = -(I_j^{M\phi})_{-m}. \quad (3.348)$$

Desta forma, é necessário resolver o sistema linear somente para o modo  $m = 1$ , o que reduz pela metade o esforço computacional na obtenção das correntes superficiais  $\vec{J}_s(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_s(\vec{r}')$ .

Para o modo TEM as expressões (3.341)-(3.348) não são necessárias, uma vez que neste caso somente o modo  $m = 0$  está presente. Assim os elementos da matriz excitação são calculados diretamente para  $m = 0$ , e é necessário resolver somente um sistema linear para a obtenção das correntes superficiais  $\vec{J}_s(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_s(\vec{r}')$ . Conforme discutido na última Seção 3.6.3.3, para a excitação através do modo TEM somente as componentes de corrente elétrica na direção  $\hat{t}$  e corrente magnética na direção  $\hat{\phi}$  estão presentes, assim os elementos das matrizes do sistema linear associados às componente que são iguais a zero podem ser extraídos, o que reduz as dimensões do sistema linear pela metade (aproximadamente) e diminui significativamente o esforço computacional para a solução do mesmo.

### 3.7 - Equações Matriciais

As equações (3.28) e (3.29) apresentam os sistemas lineares para a forma *Tangencial* da EFIE e MFIE, respectivamente, obtidas a partir do problema equivalente externo e avaliadas através do MoM, conforme discutido nas Seções 3.2 à 3.6. Nesta seção são apresentados os sistemas lineares para a análise de diferentes tipos de BOR através das várias formulações discutidas no Capítulo 2. Assim, na Seção 3.7.1 é apresentada uma nova notação para os elementos das submatrizes das matrizes  $Z$  e  $Y$  e nas Seções 3.7.2 a 3.7.8 esta notação é utilizada para estabelecer as novas equações matriciais.

#### 3.7.1 - Nova Notação

A partir das equações (3.101)-(3.108), para simplificar a notação das equações matriciais, são definidos os seguintes operadores:

$$\begin{aligned}
 L_l^{aZ} = & \frac{j}{4} \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \left\{ \frac{\Delta_q \Delta_p k_l^2}{4} \left[ \text{sen } u_q \text{sen } u_p \left[ G_{5aa} - (-1)^{ip} G_{5ab} - (-1)^{iq} G_{5ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{5bb} \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \cos u_p \cos u_q \left[ G_{7aa} - (-1)^{ip} G_{7ab} - (-1)^{iq} G_{7ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{7bb} \right] - (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{7aa} \right] \right\}, \quad (3.349)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_l^{bZ} = & \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \left\{ \frac{\Delta_q \Delta_p k_l^2}{16} \text{sen } u_p \left[ G_{6aa} - (-1)^{ip} G_{6ab} - (-1)^{iq} G_{6ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{6bb} \right] \right. \\
 & \left. - (-1)^p \frac{\Delta_q m}{8} \left[ G_{7aa}^2 - (-1)^{iq} G_{7ba}^2 \right] \right\}, \quad (3.350)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_l^{cZ} = & - \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \left\{ \frac{\Delta_q \Delta_p k_l^2}{16} \text{sen } u_q \left[ G_{6aa} - (-1)^{ip} G_{6ab} - (-1)^{iq} G_{6ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{6bb} \right] \right. \\
 & \left. - (-1)^q \frac{\Delta_p m}{8} \left[ G_{7aa}^1 - (-1)^{ip} G_{7ab}^1 \right] \right\}, \quad (3.351)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_l^{dZ} = & j \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \frac{\Delta_q \Delta_p k_l^2}{16} \left\{ k_0^2 \left[ G_{5aa} - (-1)^{ip} G_{5ab} - (-1)^{iq} G_{5ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{5bb} \right] \right. \\
 & \left. - m^2 \left[ G_{7aa}^3 - (-1)^{ip} G_{7ab}^3 - (-1)^{iq} G_{7ba}^3 + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{7bb}^3 \right] \right\}, \quad (3.352)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_l^{aY} = & -j \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \frac{\Delta_q \Delta_p k_l^3}{16} \left\{ \left[ \rho_p \cos u_p \text{sen } u_q - \rho_q \cos u_q \text{sen } u_p - (z_p - z_q) \text{sen } u_p \text{sen } u_q \right] \right. \\
 & \left. \times \left[ G_{3aa} - (-1)^{ip} G_{3ab} - (-1)^{iq} G_{3ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{3bb} \right] \right\}, \quad (3.353)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_l^{bY} = & \pi \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \left\{ \frac{\Delta_q \Delta_p k_l^3}{16} \left[ \rho_q \left[ G_{1aa} - (-1)^{ip} G_{1ab} - (-1)^{iq} G_{1ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{1bb} \right] \right. \right. \\
 & + \frac{\Delta_q}{2} \text{sen } u_q \left[ G_{1ba} - (-1)^{ip} G_{1bb} - (-1)^{iq} G_{1b^2a} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{1b^2b} \right] \left. \right] \cos u_p \\
 & + \left[ (z_p - z'_q) \text{sen } u_p - (\rho_p - \rho_q) \cos u_p \right] \times \left[ G_{2aa} - (-1)^{ip} G_{2ab} - (-1)^{iq} G_{2ba} \right. \\
 & + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{2bb} \left. \right] + \frac{\Delta_q}{2} \left[ \text{sen } u_q \cos u_p - \cos u_q \text{sen } u_p \right] \\
 & \left. \times \left[ G_{2ba} - (-1)^{ip} G_{2bb} - (-1)^{iq} G_{2b^2a} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{2b^2b} \right] \right\}, \quad (3.354)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_i^{cY} = & -\pi \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 \left\{ (\Delta_q \Delta_p k_l^3) / 16 \left[ \rho_p \left[ G_{1aa} - (-1)^{ip} G_{1ab} - (-1)^{iq} G_{1ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{1bb} \right] \right. \right. \\
 & + \Delta_p / 2 \operatorname{sen} u_p \left[ G_{1ab} - (-1)^{ip} G_{1ab^2} - (-1)^{iq} G_{1bb} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{1bb^2} \right] \cos u_q \\
 & + \left[ (\rho_p - \rho'_q) \cos u_q - (z_p - z_q) \operatorname{sen} u_q \right] \times \left[ G_{2aa} - (-1)^{ip} G_{2ab} - (-1)^{iq} G_{2ba} \right. \\
 & + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{2bb} \left. \right] + \Delta_p / 2 \left[ \operatorname{sen} u_p \cos u_q - \cos u_p \operatorname{sen} u_q \right] \\
 & \left. \times \left[ G_{2ab} - (-1)^{ip} G_{2ab^2} - (-1)^{iq} G_{2bb} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{2bb^2} \right] \right\}, \quad (3.355)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_i^{dY} = & j \sum_{ip=1}^2 \sum_{iq=1}^2 (\Delta_q \Delta_p k_l^3) / 16 \left\{ (z_p - z'_q) \left[ G_{3aa} - (-1)^{ip} G_{3ab} - (-1)^{iq} G_{3ba} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{3bb} \right] + \right. \\
 & + \Delta_p / 2 \cos u_p \left[ G_{3ab} - (-1)^{ip} G_{3ab^2} - (-1)^{iq} G_{3bb} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{3bb^2} \right] - \\
 & \left. + \Delta_p / 2 \cos u_q \left[ G_{3ba} - (-1)^{ip} G_{3bb} - (-1)^{iq} G_{3b^2a} + (-1)^{ip} (-1)^{iq} G_{3b^2b} \right] \right\}, \quad (3.356)
 \end{aligned}$$

$$L = \pi \sum_{s=1}^2 \sum_{s'=1}^2 G \delta(i, j), \quad (3.357)$$

e  $l$  representa o meio onde o operador é aplicado.

Utilizando os novos operadores definidos nas equações (3.349)-(3.357), os sistemas lineares das equações (3.28) e (3.29) podem ser reescritos como

$$\begin{bmatrix} V^{Et} \\ V^{E\phi} \end{bmatrix} = \eta_0 \begin{bmatrix} L_0^{aZ} & L_0^{bZ} \\ L_0^{cZ} & L_0^{dZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_0^{aY} & L_0^{bY} + L \\ L_0^{cY} - L & L_0^{dY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Mt} \\ I^{M\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.358)$$

$$\begin{bmatrix} V_0^{Ht} \\ V_0^{H\phi} \end{bmatrix} = \eta_0 \begin{bmatrix} -L_0^{aY} & -L_0^{bY} - L \\ -L_0^{cY} + L & -L_0^{dY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_0^{aZ} & L_0^{bZ} \\ L_0^{cZ} & L_0^{dZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Mt} \\ I^{M\phi} \end{bmatrix}. \quad (3.359)$$

Conforme exposto na Seção 3.1, são possíveis dois tipos de formas para as equações matriciais (3.28) e (3.29), ou seja, a forma *Tangencial*, apresentada nas Seções 3.2 a 3.6, e a forma *Vetorial*. Esta última pode ser obtida através do mesmo processo empregado para obtenção da forma *Tangencial*, o que resulta, em relação a forma *Tangencial*, em uma simples troca de posição e sinais dos elementos das matrizes impedância, admitância e excitação da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} V^{E\phi} \\ -V^{Et} \end{bmatrix} = \eta_0 \begin{bmatrix} L_0^{cZ} & L_0^{dZ} \\ -L_0^{aZ} & -L_0^{bZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_0^{cY} - L & -L_0^{dY} \\ -L_0^{aY} & L_0^{bY} + L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Mt} \\ I^{M\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.360)$$



$$\begin{bmatrix} V_0^{H\phi} \\ -V_0^{Ht} \end{bmatrix} = \eta_0 \begin{bmatrix} -L_0^{cY} + L & -L_0^{dY} \\ L_0^{aY} & L_0^{bY} + L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_0^{cZ} & L_0^{dZ} \\ -L_0^{aZ} & -L_0^{bZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Mt} \\ I^{M\phi} \end{bmatrix}. \quad (3.361)$$

Neste trabalho, conforme estabelecido na Seção 3.1, a matriz que contém o campo incidente é chamada de matriz excitação, a matriz que contém os coeficientes desconhecidos de matriz de coeficientes e as matrizes  $Z$  e  $Y$  de matriz impedância e admitância, respectivamente. Uma combinação linear destas duas últimas será chamada nesta seção de matriz acoplamento, para simplificar o tratamento dos casos analisados.

As equações matriciais nas formas *Tangencial* e *Vetorial* para o problema equivalente interno podem ser obtidas diretamente a partir das equações (3.358)-(3.361), respectivamente. Para tanto basta apenas inverter o sinal dos operadores, exceto para o operador  $L$ , que formam os elementos das matrizes impedância e admitância.

### 3.7.2 - BOR Condutor

Para um BOR constituído de uma superfície CEP aberta, conforme ilustrado na Figura 3.7, é utilizada a formulação *Efield* na forma *Tangencial*, conforme discutido na Seção 2.2.2, que produz a seguinte equação matricial [34], [35]:

$$\begin{bmatrix} V_l^{Et} \\ V_l^{E\phi} \end{bmatrix} = \eta_l \begin{bmatrix} L_l^{aZ} & L_l^{bZ} \\ L_l^{cZ} & L_l^{dZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \end{bmatrix}. \quad (3.362)$$

Para o caso de um BOR constituído de uma superfície CEP fechada é utilizada a formulação *Cfield* que emprega a forma *Tangencial* para EFIE e a forma *Vetorial* para MFIE, conforme definido na Seção 2.2.2, o que resulta na seguinte equação matricial [41]:

$$\begin{bmatrix} \alpha V_l^{Et} + \beta V_l^{H\phi} \\ \alpha V_l^{E\phi} - \beta V_l^{Ht} \end{bmatrix} = \eta_l \left[ \alpha \begin{bmatrix} L_l^{aZ} & L_l^{bZ} \\ L_l^{cZ} & L_l^{dZ} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} L - L_l^{cY} & -L_l^{dY} \\ L_l^{aY} & L_l^{bY} + L \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.363)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes multiplicativas da combinação linear. Nas equações (3.362) e (3.363) o índice  $l$  se refere ao meio externo à superfície condutora do BOR, ou seja o meio no qual o BOR está imerso.

### 3.7.3 - BOR Dielétrico

Para o BOR dielétrico discutido na Seção 2.2.1 as equações matriciais na forma *Tangencial* para as sete formulações apresentadas são:

1) Formulações PMCHWT e de Muller :

$$\begin{bmatrix} V_0^{E_t} + \alpha V_1^{E_t} \\ V_0^{E_\phi} + \alpha V_1^{E_\phi} \\ V_0^{H_t} + \beta V_1^{H_t} \\ V_0^{H_\phi} + \beta V_1^{H_\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\eta_0 L_0^{aZ} - \alpha \eta_1 L_1^{aZ}) & (\eta_0 L_0^{bZ} - \alpha \eta_1 L_1^{bZ}) & (L_0^{aY} - \alpha L_1^{aY}) & \begin{pmatrix} L_0^{bY} - \alpha L_1^{bY} \\ + (1 + \alpha)L \end{pmatrix} \\ (\eta_0 L_0^{cZ} - \alpha \eta_1 L_1^{cZ}) & (\eta_0 L_0^{dZ} - \alpha \eta_1 L_1^{dZ}) & \begin{pmatrix} L_0^{cY} - \alpha L_1^{cY} \\ -(1 + \alpha)L \end{pmatrix} & (L_0^{dY} - \alpha L_1^{dY}) \\ -(\eta_0 L_0^{aY} - \beta \eta_1 L_1^{aY}) & -\begin{pmatrix} \eta_0 L_0^{bY} - \beta \eta_1 L_1^{bY} \\ + (\eta_0 + \beta \eta_1)L \end{pmatrix} & (L_0^{aZ} - \beta L_1^{aZ}) & (L_0^{bZ} - \beta L_1^{bZ}) \\ -\begin{pmatrix} \eta_0 L_0^{cY} - \beta \eta_1 L_1^{cY} \\ -(\eta_0 + \beta \eta_1)L \end{pmatrix} & -(\eta_0 L_0^{dY} - \beta \eta_1 L_1^{dY}) & (L_0^{cZ} - \beta L_1^{cZ}) & (L_0^{dZ} - \beta L_1^{dZ}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{J_t} \\ I^{J_\phi} \\ I^{M_t} \\ I^{M_\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.364)$$

2) Formulação Efield :

$$\begin{bmatrix} V_0^{E_t} \\ V_0^{E_\phi} \\ V_1^{E_t} \\ V_1^{E_\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_0 L_0^{aZ} & \eta_0 L_0^{bZ} & L_0^{aY} & L_0^{bY} + L \\ \eta_0 L_0^{cZ} & \eta_0 L_0^{dZ} & L_0^{cY} - L & L_0^{dY} \\ -\eta_1 L_1^{aZ} & -\eta_1 L_1^{bZ} & -L_1^{aY} & -L_1^{bY} + L \\ -\eta_1 L_1^{cZ} & -\eta_1 L_1^{dZ} & -L_1^{cY} - L & -L_1^{dY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{J_t} \\ I^{J_\phi} \\ I^{M_t} \\ I^{M_\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.365)$$

4) Formulação Hfield :

$$\begin{bmatrix} V_0^{H_t} \\ V_0^{H_\phi} \\ V_1^{H_t} \\ V_1^{H_\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta_0 L_0^{aY} & -\eta_0 (L_0^{bY} + L) & L_0^{aZ} & L_0^{bZ} \\ -\eta_0 (L_0^{cY} - L) & -\eta_0 L_0^{dY} & L_0^{cZ} & L_0^{dZ} \\ \eta_1 L_1^{aY} & \eta_1 (L_1^{bY} - L) & -L_1^{aZ} & -L_1^{bZ} \\ \eta_1 (L_1^{cY} + L) & \eta_1 L_1^{dY} & -L_1^{cZ} & -L_1^{dZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{J_t} \\ I^{J_\phi} \\ I^{M_t} \\ I^{M_\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.366)$$

5) Formulação Cfield :

$$\begin{bmatrix} \alpha V_0^{E_t} + \beta V_0^{H_t} \\ \alpha V_0^{E_\phi} + \beta V_0^{H_\phi} \\ \alpha V_1^{E_t} + \beta V_1^{H_t} \\ \alpha V_1^{E_\phi} + \beta V_1^{H_\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} \eta_0 L_0^{aZ} & \eta_0 L_0^{bZ} & L_0^{aY} & L_0^{bY} + L \\ \eta_0 L_0^{cZ} & \eta_0 L_0^{dZ} & L_0^{cY} - L & L_0^{dY} \\ -\eta_1 L_1^{aZ} & -\eta_1 L_1^{bZ} & -L_1^{aY} & -L_1^{bY} + L \\ -\eta_1 L_1^{cZ} & -\eta_1 L_1^{dZ} & -L_1^{cY} - L & -L_1^{dY} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -\eta_0 L_0^{aY} & -\eta_0 (L_0^{bY} + L) & L_0^{aZ} & L_0^{bZ} \\ -\eta_0 (L_0^{cY} - L) & -\eta_0 L_0^{dY} & L_0^{cZ} & L_0^{dZ} \\ \eta_1 L_1^{aY} & \eta_1 (L_1^{bY} - L) & -L_1^{aZ} & -L_1^{bZ} \\ \eta_1 (L_1^{cY} + L) & \eta_1 L_1^{dY} & -L_1^{cZ} & -L_1^{dZ} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{J_t} \\ I^{J_\phi} \\ I^{M_t} \\ I^{M_\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.367)$$

6) Formulação EHfield :

$$\begin{bmatrix} V_0^{Et} \\ V_0^{E\phi} \\ V_1^{Ht} \\ V_1^{H\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_0 L_0^{aZ} & \eta_0 L_0^{bZ} & L_0^{aY} & L_0^{bY} + L \\ \eta_0 L_0^{cZ} & \eta_0 L_0^{dZ} & L_0^{cY} - L & L_0^{dY} \\ \eta_1 L_1^{aY} & \eta_1 (L_1^{bY} - L) & -L_1^{aZ} & -L_1^{bZ} \\ \eta_1 (L_1^{cY} + L) & \eta_1 L_1^{dY} & -L_1^{cZ} & -L_1^{dZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \\ I^{Mt} \\ I^{M\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.368)$$

7) Formulação HEfield :

$$\begin{bmatrix} V_0^{Ht} \\ V_0^{H\phi} \\ V_1^{Et} \\ V_1^{E\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta_0 L_0^{aY} & -\eta_0 (L_0^{bY} + L) & L_0^{aZ} & L_0^{bZ} \\ -\eta_0 (L_0^{cY} - L) & -\eta_0 L_0^{dY} & L_0^{cZ} & L_0^{dZ} \\ -\eta_1 L_1^{aZ} & -\eta_1 L_1^{bZ} & -L_1^{aY} & -L_1^{bY} + L \\ -\eta_1 L_1^{cZ} & -\eta_1 L_1^{dZ} & -L_1^{cY} - L & -L_1^{dY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \\ I^{Mt} \\ I^{M\phi} \end{bmatrix}. \quad (3.369)$$

As constantes multiplicativas da combinação linear  $\alpha$  e  $\beta$  presentes nas equações (3.364) e (3.367) são definidas na Seção 2.2.1. Os subíndices 0 e 1 correspondem os meios externo e interno ao BOR, respectivamente. Caso não existam fontes em qualquer um destes meios, as respectivas submatrizes excitação valem zero. As equações matriciais na forma *Vetorial* podem ser obtidas diretamente a partir das equações na forma tangencial através do processo discutido na Seção 3.7.1.

### 3.7.4 - BOR com Superfícies CEP com IBC

Para um BOR que possui uma ou mais superfícies com a IBC apresentada na Seção 3.6.3, ou seja, superfícies condutoras que possuem correntes elétrica e magnética que se relacionam através da relação da equação (3.312), a equação matricial para qualquer uma das superfícies condutoras do BOR é [66]:

$$\begin{bmatrix} \alpha V_l^{Et} \\ \alpha V_l^{E\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_l^{aZ} & L_l^{bZ} \\ L_l^{cZ} & L_l^{dZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(L_l^{bY} + L) Z_t^{IBC} & L_l^{aY} Z_\phi^{IBC} \\ -L_l^{dY} Z_t^{IBC} & (L_l^{cY} - L) Z_\phi^{IBC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.370)$$

para *Efield* na forma *Tangencial*, e

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha V_l^{Et} + \beta V_l^{H\phi} \\ \alpha V_l^{E\phi} - \beta V_l^{Ht} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha \left[ \eta_l \begin{bmatrix} L_l^{aZ} & L_l^{bZ} \\ L_l^{cZ} & L_l^{dZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(L_l^{bY} + L) Z_t^{IBC} & L_l^{aY} Z_\phi^{IBC} \\ -L_l^{dY} Z_t^{IBC} & (L_l^{cY} - L) Z_\phi^{IBC} \end{bmatrix} \right] + \\ \beta \left[ \eta_l \begin{bmatrix} L - L_l^{cY} & -L_l^{dY} \\ L_l^{aY} & L_l^{bY} + L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_l^{dZ} Z_t^{IBC} & L_l^{cZ} Z_\phi^{IBC} \\ L_l^{bZ} Z_t^{IBC} & -L_l^{aZ} Z_\phi^{IBC} \end{bmatrix} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.371)$$

para *Cfield* que emprega a forma *Tangencial* para EFIE e a forma *Vetorial* para MFIE. E para uma superfície dielétrica qualquer do BOR, considerando que as superfícies CEP com IBC encontram-se na região externa à esta superfície dielétrica, as equações matriciais para as sete formulações discutidas são:

1) Formulações *PMCHWT e de Muller* :

$$\begin{bmatrix} V_0^{Et} \\ V_0^{E\phi} \\ V_0^{Ht} \\ V_0^{H\phi} \end{bmatrix} = \eta_0 \begin{bmatrix} L_0^{aZ} & L_0^{bZ} \\ L_0^{cZ} & L_0^{dZ} \\ -L_0^{aY} & -(L_0^{bY} + L) \\ L - L_0^{cY} & -L_0^{dY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(L_0^{bY} + L) Z_t^{IBC} & L_0^{aY} Z_\phi^{IBC} \\ -L_0^{dY} Z_t^{IBC} & (L_0^{cY} - L) Z_\phi^{IBC} \\ -L_0^{bZ} Z_t^{IBC} & L_0^{aZ} Z_\phi^{IBC} \\ -L_0^{dZ} Z_t^{IBC} & L_0^{cZ} Z_\phi^{IBC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.372)$$

2) Formulações *Efield e EHfield* :

$$\begin{bmatrix} V_0^{Et} \\ V_0^{E\phi} \end{bmatrix} = \eta_0 \begin{bmatrix} L_0^{aZ} & L_0^{bZ} \\ L_0^{cZ} & L_0^{dZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(L_0^{bY} + L) Z_t^{IBC} & L_0^{aY} Z_\phi^{IBC} \\ -L_0^{dY} Z_t^{IBC} & (L_0^{cY} - L) Z_\phi^{IBC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.373)$$

3) Formulações *Hfield e Efield* :

$$\begin{bmatrix} V_0^{Ht} \\ V_0^{H\phi} \end{bmatrix} = \eta_0 \begin{bmatrix} -L_0^{aY} & -(L_0^{bY} + L) \\ -(L_0^{cY} - L) & -L_0^{dY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_0^{bZ} Z_t^{IBC} & L_0^{aZ} Z_\phi^{IBC} \\ -L_0^{dZ} Z_t^{IBC} & L_0^{cZ} Z_\phi^{IBC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.374)$$

4) Formulação *Cfield* :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha V_0^{Et} + \beta V_0^{Ht} \\ \alpha V_0^{E\phi} + \beta V_0^{H\phi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha \left[ \eta_0 \begin{bmatrix} L_0^{aZ} & L_0^{bZ} \\ L_0^{cZ} & L_0^{dZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(L_0^{bY} + L) Z_t^{IBC} & L_0^{aY} Z_\phi^{IBC} \\ -L_0^{dY} Z_t^{IBC} & (L_0^{cY} - L) Z_\phi^{IBC} \end{bmatrix} \right] + \\ \beta \left[ \eta_0 \begin{bmatrix} -L_0^{aY} & -(L_0^{bY} + L) \\ -(L_0^{cY} - L) & -L_0^{dY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_0^{bZ} Z_t^{IBC} & L_0^{aZ} Z_\phi^{IBC} \\ -L_0^{dZ} Z_t^{IBC} & L_0^{cZ} Z_\phi^{IBC} \end{bmatrix} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{Jt} \\ I^{J\phi} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.375)$$

Uma vez que as constantes multiplicativas das formulações *PMCHWT* e de *Muller* estão associada ao problema equivalente interno elas não aparecem na equação (3.372). Na equação (3.375)  $\alpha$  e  $\beta$  são as constantes multiplicativas da combinação linear, conforme discutido na

Seção 2.2.1. Caso as superfícies CEP com IBC encontrem-se na região interna à superfície dielétrica as equações matriciais para as sete formulações podem ser obtidas diretamente a partir das equações (3.372)-(3.375), respectivamente. Para tanto basta apenas inverter o sinal dos operadores, exceto para o operador  $L$ . Caso não existam fontes em qualquer um destes meios, as respectivas submatrizes excitação valem zero. As equações matriciais na forma *Vetorial* podem ser obtidas diretamente a partir das equações na forma tangencial através do processo discutido na Seção 3.7.1.

### 3.7.5 - BOR Composto de Várias Camadas Homogêneas

Para o caso de um BOR constituído de  $n$  camadas dielétricas homogêneas e  $S$  superfícies, como aquele ilustrado na Figura 2.4, onde  $n \geq 2$ , o campo em cada uma destas camadas é obtido aplicando as equivalências interna e externa para cada superfície do BOR, conforme discutido na Seção 2.2.4. Através deste processo é obtido o seguinte sistema linear, cuja matriz acoplamento é *Block triadiagonal* conforme descrito em [50] e apresentado a seguir:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_s \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{s,s-1} & L_{ss} & L_{s,s+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{n,n-1} & L_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_s \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix}, \quad (3.376)$$

onde

$$U_s = \begin{bmatrix} I_s^{Jt} \\ I_s^{J\phi} \\ I_s^{Mt} \\ I_s^{M\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.377)$$

é a matriz de coeficientes a serem determinados para cada superfície  $S$ ,  $L_{ss}$ ,  $L_{s,s\pm 1}$  e  $F_s$  são matrizes acoplamento e excitação, respectivamente, cuja constituição para cada um dos sete tipos de formulação apresentados na Seção 3.7.3, é dada pelas equações (3.364)-(3.369). Para

o caso de existência de fontes somente no meio externo ao BOR, os elementos da matriz  $F_s$  relacionados com as camadas internas ao BOR são iguais a zero.

Para a equação matricial (3.376) é possível a solução do sistema linear de forma recursiva, processo este que pode reduzir significativamente o esforço computacional. Para tanto, considerando a existência de fontes somente no meio externo ao BOR, são obtidos os coeficientes desconhecidos na superfície mais externa,  $S_n$ , e a partir destes são obtidas os coeficientes nas superfícies internas da seguinte forma [50]:

$$U_s = K_s F_s, \quad (3.378)$$

$$K_s = [L_{ss} - L_{s,s-1} K_{s-1} L_{s-1,s}]^{-1}, \quad (3.379)$$

$$U_{s-1} = K_{s-1} L_{s-1,s} U_s. \quad (3.380)$$

Para um BOR constituído de  $n$  camadas homogêneas, onde  $n \geq 2$  e a camada mais interna é constituída de um material condutor, a equação matricial é semelhante aquela apresentada na equação (3.376). Ou seja, os elementos da matriz  $F_s$ , matriz excitação, referentes as camadas internas ao BOR são iguais a zero (considerando a existência de fonte somente no meio externo ao BOR). As matrizes  $L_{ss}$  e  $L_{s,s\pm 1}$  para as superfícies dielétricas são iguais as matrizes acoplamento das equações (3.364)-(3.369), dependendo da formulação utilizada, e para a superfície condutora são iguais à matriz acoplamento da equação (3.363). A matriz de coeficientes,  $U_s$ , é igual aquela apresentada na equação (3.377) para as superfícies dielétricas, e para a superfície condutora possui somente os coeficientes elétricos [50]. A matriz acoplamento obtida para a equação matricial continua sendo *Block triadiagonal*, logo a solução do sistema linear de forma recursiva continua válida.

### 3.7.6 - BOR Constituído de Várias Regiões Homogêneas

Para um BOR constituído de mais de uma região homogênea, como aquele ilustrado na Figura 2.5, a equação matricial é obtida utilizando o mesmo processo utilizado na Seção 3.7.5. Ou

seja, para as superfícies dielétricas utiliza-se uma das equações (3.364)-(3.369) ou (3.372)-(3.375), dependendo da formulação utilizada, e a equação (3.362), (3.363), (3.370) ou (3.371) para a superfície condutora, dependendo se esta é aberta ou fechada. Neste caso é importante lembrar que, o campo eletromagnético em qualquer região é determinado considerando as contribuições das correntes em todas as superfícies que limitam esta região [50], [54], [56]. Para este caso, a matriz acoplamento obtida não é *Block triadiagonal*, e assim não é possível a solução do sistema linear utilizando as equações (3.376)-(3.380).

Os sistemas lineares discutidos nesta seção são numericamente avaliados através da decomposição LU com pivoteamento [67]. Esta técnica se mostrou suficiente para garantir o bom condicionamento da matriz de acoplamento, sem a necessidade de utilização de técnicas iterativas para a solução do sistema linear [68], desde que todos os cálculos para a solução do sistema sejam executados utilizando precisão dupla.

### 3.8 - Conclusões Parciais

Neste capítulo foi apresentada a solução numérica das equações integrais discutidas no Capítulo 2 através do método dos momentos. Inicialmente foi realizada uma breve discussão sobre as funções de base e de peso utilizadas, e foram então obtidos os sistemas lineares requeridos para a solução. As equações dos elementos das matrizes impedância e admitância destes sistemas lineares foram rigorosamente investigadas e foi apresentado o procedimento utilizado para a avaliação numérica das integrais presentes nestas equações. Foi também apresentado o método utilizado para o tratamento das singularidades presentes nestas integrais. Foram ainda discutidas e rigorosamente avaliadas quatro formas distintas de excitação (onda plana, fonte de onda esférica, guia circular excitado pelo modo  $TE_{11}$  e guia coaxial excitado pelo modo TEM). E finalmente foram apresentados os sistemas lineares para a análise de diferentes tipos de BOR através das várias formulações discutidas no Capítulo 2.

## Capítulo 4

### CÁLCULOS DE CAMPOS E DE POTÊNCIA

Neste capítulo são apresentadas as equações para o cálculo dos campos próximo e distante e perda de retorno associados a um BOR iluminado por qualquer um dos tipos de excitação discutidos na Seção 3.6. Para determinação destas equações são utilizados os coeficientes desconhecidos apresentados nas equações (3.25) e (3.26) e obtidos na solução dos diferentes sistemas lineares discutidos na Seção 3.7.

#### 4.1 - Campo Próximo

Uma vez obtidos os coeficientes  $I^J$  e  $I^M$  da representação das correntes dada pelas equações (3.25) e (3.26), os campos elétrico e magnético em uma região  $l$  próxima ao BOR podem ser obtidos utilizando:

$$\vec{E}^{NF}(\vec{r}) = \vec{E}_J^{NF}(\vec{r}) + \vec{E}_M^{NF}(\vec{r}) + \vec{E}_{in}^{NF}(\vec{r}), \quad (4.1)$$

$$\vec{H}^{NF}(\vec{r}) = \vec{H}_J^{NF}(\vec{r}) + \vec{H}_M^{NF}(\vec{r}) + \vec{H}_{in}^{NF}(\vec{r}), \quad (4.2)$$

onde  $\vec{E}_{in}^{NF}(\vec{r})$  e  $\vec{H}_{in}^{NF}(\vec{r})$  são os campos elétrico e magnético produzidos pelas fontes externas, respectivamente, e  $\vec{E}_J^{NF}(\vec{r})$ ,  $\vec{E}_M^{NF}(\vec{r})$ ,  $\vec{H}_J^{NF}(\vec{r})$  e  $\vec{H}_M^{NF}(\vec{r})$  são os campos elétrico e magnético produzidos pelas fontes de corrente equivalentes elétrica,  $\vec{J}_s(\vec{r}')$ , e magnética,  $\vec{M}_s(\vec{r}')$ , respectivamente, dados por [62]:



$$\vec{E}_J^{NF}(\vec{r}) = \frac{-j}{4\pi\omega\epsilon_l} \int_{s'} \left\{ k_l^2 \vec{J}_s(\vec{r}') \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') + [\vec{J}_s(\vec{r}') \cdot \nabla'] \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') \right\} ds', \quad (4.3)$$

$$\vec{E}_M^{NF}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{s'} \vec{M}_s(\vec{r}') \times \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') ds', \quad (4.4)$$

$$\vec{H}_J^{NF}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{s'} \vec{J}_s(\vec{r}') \times \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') ds', \quad (4.5)$$

$$\vec{H}_M^{NF}(\vec{r}) = \frac{j}{4\pi\omega\mu_l} \int_{s'} \left\{ k_l^2 \vec{M}_s(\vec{r}') \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') + [\vec{M}_s(\vec{r}') \cdot \nabla'] \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') \right\} ds', \quad (4.6)$$

onde  $k_l = \omega \sqrt{\mu_l \epsilon_l}$ ,  $\psi_l(\vec{r}, \vec{r}')$  é a função de Green do espaço livre (meio  $l$ ) dada pela equação (2.5),  $\vec{J}_s(\vec{r}') \times \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}')$  e  $\vec{M}_s(\vec{r}') \times \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}')$  são dados pela equação (3.60) e

$$\begin{aligned} [\vec{X}(\vec{r}') \cdot \nabla'] \nabla' \psi_l(\vec{r}, \vec{r}') = & \left\{ \left( -\frac{k_l^2}{R} + \frac{j3k_l}{R^3} + \frac{3}{R^4} \right) [\vec{X}(\vec{r}') \cdot \vec{R}] \vec{R} \right. \\ & \left. - \left( jk_l + \frac{1}{R} \right) \frac{\vec{X}(\vec{r}')}{R} \right\} \psi_l(\vec{r}, \vec{r}'), \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $\vec{X}(\vec{r}') = \vec{J}_s(\vec{r}')$  ou  $\vec{M}_s(\vec{r}')$  e  $R = \vec{r} - \vec{r}'$ .

Aplicando as relações

$$\vec{R} = \rho \hat{\rho} - \rho' \hat{\rho}' + (z - z') \hat{z}, \quad (4.8)$$

$$\hat{t}' = \text{sen } u' \hat{\rho}' + \text{cos } u' \hat{z}, \quad (4.9)$$

$$\hat{\rho}' = \text{cos}(\phi' - \phi) \hat{\rho} + \text{sen}(\phi' - \phi) \hat{\phi}, \quad (4.10)$$

$$\hat{\phi}' = -\text{sen}(\phi' - \phi) \hat{\rho} + \text{cos}(\phi' - \phi) \hat{\phi}, \quad (4.11)$$

às equações (4.3)-(4.6), obtém-se

$$\vec{E}_J^{NF}(\vec{r}) = E_{J\rho}^{NF} \hat{\rho} + E_{J\phi}^{NF} \hat{\phi} + E_{Jz}^{NF} \hat{z}, \quad (4.12)$$

$$\vec{E}_M^{NF}(\vec{r}) = E_{M\rho}^{NF} \hat{\rho} + E_{M\phi}^{NF} \hat{\phi} + E_{Mz}^{NF} \hat{z}, \quad (4.13)$$

$$\vec{H}_J^{NF}(\vec{r}) = H_{J\rho}^{NF} \hat{\rho} + H_{J\phi}^{NF} \hat{\phi} + H_{Jz}^{NF} \hat{z}, \quad (4.14)$$

$$\vec{H}_M^{NF}(\vec{r}) = H_{M\rho}^{NF} \hat{\rho} + H_{M\phi}^{NF} \hat{\phi} + H_{Mz}^{NF} \hat{z}, \quad (4.15)$$

onde

$$\begin{aligned} E_{J\rho}^{NF} = & \frac{-j\eta_l k_l^2}{4\pi} \int_{s'} \left\{ J^t(\vec{r}') \left[ \text{sen } u' \cos(\phi' - \phi) (G_E - G_H) + k_l^2 [\rho - \rho' \cos(\phi' - \phi)] \right] \right. \\ & \times \left[ \text{sen } u' [\rho \cos(\phi' - \phi) - \rho'] - \cos u' (z' - z) \right] G_{EH} \left. - J^\phi(\vec{r}') \left[ \text{sen}(\phi' - \phi) \right. \right. \\ & \left. \left. \times (G_E - G_H) + k_l^2 \rho \text{sen}(\phi' - \phi) [\rho - \rho' \cos(\phi' - \phi)] G_{EH} \right] \right\} ds', \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} E_{J\phi}^{NF} = & \frac{-j\eta_l k_l^2}{4\pi} \int_{s'} \left\{ J^t(\vec{r}') \left[ \text{sen } u' \text{sen}(\phi' - \phi) (G_E - G_H) - k_l^2 \rho' \text{sen}(\phi' - \phi) \right] \right. \\ & \times \left[ \text{sen } u' [\rho \cos(\phi' - \phi) - \rho'] - \cos u' (z' - z) \right] G_{EH} \left. \right. \\ & \left. + J^\phi(\vec{r}') \left[ \cos(\phi' - \phi) (G_E - G_H) + k_l^2 \rho \rho' \text{sen}^2(\phi' - \phi) G_{EH} \right] \right\} ds', \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} E_{Jz}^{NF} = & \frac{-j\eta_l k_l^2}{4\pi} \int_{s'} \left\{ J^t(\vec{r}') \left[ \cos u' (G_E - G_H) - k_l^2 (z' - z) \times \left[ \text{sen } u' [\rho \cos(\phi' - \phi) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \rho'] - \cos u' (z' - z) \right] G_{EH} \right. \left. + J^\phi(\vec{r}') \left[ k_l^2 \rho (z' - z) \text{sen}(\phi' - \phi) G_{EH} \right] \right\} ds', \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} H_{J\rho}^{NF} = & \frac{k_l^3}{4\pi} \int_{s'} \left\{ J^t(\vec{r}') \left[ \rho' \cos u' - (z' - z) \text{sen } u' \right] \text{sen}(\phi' - \phi) - J^\phi(\vec{r}') (z' - z) \right. \\ & \left. \times \cos(\phi' - \phi) \right\} G_H ds', \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} H_{J\phi}^{NF} = & \frac{-k_l^3}{4\pi} \int_{s'} \left\{ J^t(\vec{r}') \left[ \left[ \rho' \cos u' - (z' - z) \text{sen } u' \right] \cos(\phi' - \phi) - \rho \cos u' \right] \right. \\ & \left. + J^\phi(\vec{r}') (z' - z) \text{sen}(\phi' - \phi) \right\} G_H ds', \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$H_{Jz}^{NF} = \frac{-k_l^3}{4\pi} \int_{s'} \left\{ J^t(\vec{r}') \left[ \rho \text{sen } u' \text{sen}(\phi' - \phi) \right] + J^\phi(\vec{r}') \left[ \rho \cos(\phi' - \phi) - \rho' \right] \right\} G_H ds', \quad (4.21)$$

$G_E$  e  $G_H$  são dados pelas equações (3.58) e (3.73), respectivamente, e

$$G_{EH} = \frac{3G_H - G_E}{(k_l R)^2}. \quad (4.22)$$

Aplicando dualidade às equações (4.16)-(4.21) chega-se às expressões de  $E_{M\rho}^{NF}$ ,  $E_{M\phi}^{NF}$ ,  $E_{Mz}^{NF}$ ,  $H_{M\rho}^{NF}$ ,  $H_{M\phi}^{NF}$  e  $H_{Mz}^{NF}$  [58]:

$$E_{M\rho}^{NF} = -\frac{\eta_l k_l^3}{4\pi} \int_{s'} \left\{ M^t(\bar{r}') [\rho' \cos u' - (z' - z) \operatorname{sen} u'] \operatorname{sen}(\phi' - \phi) - M^\phi(\bar{r}')(z' - z) \right. \\ \left. \times \cos(\phi' - \phi) \right\} G_H ds' , \quad (4.23)$$

$$E_{M\phi}^{NF} = \frac{\eta_l k_l^3}{4\pi} \int_{s'} \left\{ M^t(\bar{r}') [\rho' \cos u' - (z' - z) \operatorname{sen} u'] \cos(\phi' - \phi) - \rho \cos u' \right. \\ \left. + M^\phi(\bar{r}')(z' - z) \operatorname{sen}(\phi' - \phi) \right\} G_H ds' , \quad (4.24)$$

$$E_{Mz}^{NF} = \frac{\eta_l k_l^3}{4\pi} \int_{s'} \left\{ M^t(\bar{r}') [\rho \operatorname{sen} u' \operatorname{sen}(\phi' - \phi)] + M^\phi(\bar{r}') [\rho \cos(\phi' - \phi) - \rho'] \right\} G_H ds' , \quad (4.25)$$

$$H_{M\rho}^{NF} = \frac{-j k_l^2}{4\pi} \int_{s'} \left\{ M^t(\bar{r}') [\operatorname{sen} u' \cos(\phi' - \phi) (G_E - G_H) + k_l^2 [\rho - \rho' \cos(\phi' - \phi)]] \right. \\ \times [\operatorname{sen} u' [\rho \cos(\phi' - \phi) - \rho'] - \cos u' (z' - z)] G_{EH} \left. - M^\phi(\bar{r}') [\operatorname{sen}(\phi' - \phi) \right. \\ \left. \times (G_E - G_H) + k_l^2 \rho \operatorname{sen}(\phi' - \phi) [\rho - \rho' \cos(\phi' - \phi)] G_{EH}] \right\} ds' , \quad (4.26)$$

$$H_{M\phi}^{NF} = \frac{-j k_l^2}{4\pi} \int_{s'} \left\{ M^t(\bar{r}') [\operatorname{sen} u' \operatorname{sen}(\phi' - \phi) (G_E - G_H) - k_l^2 \rho' \operatorname{sen}(\phi' - \phi) \right. \\ \times [\operatorname{sen} u' [\rho \cos(\phi' - \phi) - \rho'] - \cos u' (z' - z)] G_{EH} \left. + M^\phi(\bar{r}') [\cos(\phi' - \phi) (G_E - G_H) + k_l^2 \rho \rho' \operatorname{sen}^2(\phi' - \phi) G_{EH}] \right\} ds' , \quad (4.27)$$

$$H_{Mz}^{NF} = \frac{-j k_l^2}{4\pi} \int_{s'} \left\{ M^t(\bar{r}') [\cos u' (G_E - G_H) - k_l^2 (z' - z) \times [\operatorname{sen} u' [\rho \cos(\phi' - \phi) \right. \\ \left. - \rho'] - \cos u' (z' - z)] G_{EH} \right. \left. + M^\phi(\bar{r}') [k_l^2 \rho (z' - z) \operatorname{sen}(\phi' - \phi) G_{EH}] \right\} ds' . \quad (4.28)$$

Substituindo as equações (3.25) e (3.26) nas equações (4.16)-(4.21) e (4.23)-(4.28) e resolvendo a integral bidimensional utilizando uma quadratura Gaussiana de  $n'_\alpha$  pontos para a integral em  $\alpha'$  e  $n_{int}$  quadraturas Gaussianas de  $n'_\alpha$  pontos para integral em  $\varphi = \phi' - \phi$ , como feito na Seção 3.4 para as integrais das matrizes Z e Y, obtém-se:

$$\begin{aligned} \vec{E}_J^{NF}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{N_t} I_{mj}^{Jt} \left[ (E_{J\rho}^{NF})_{mj}^t \hat{\rho} + (E_{J\phi}^{NF})_{mj}^t \hat{\phi} + (E_{Jz}^{NF})_{mj}^t \hat{z} \right] \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N_\phi} I_{mj}^{J\phi} \left[ (E_{J\rho}^{NF})_{mj}^\phi \hat{\rho} + (E_{J\phi}^{NF})_{mj}^\phi \hat{\phi} + (E_{Jz}^{NF})_{mj}^\phi \hat{z} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_M^{NF}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{N_t} I_{mj}^{Mt} \left[ (E_{M\rho}^{NF})_{mj}^t \hat{\rho} + (E_{M\phi}^{NF})_{mj}^t \hat{\phi} + (E_{Mz}^{NF})_{mj}^t \hat{z} \right] \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N_\phi} I_{mj}^{M\phi} \left[ (E_{M\rho}^{NF})_{mj}^\phi \hat{\rho} + (E_{M\phi}^{NF})_{mj}^\phi \hat{\phi} + (E_{Mz}^{NF})_{mj}^\phi \hat{z} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_J^{NF}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{N_t} I_{mj}^{Jt} \left[ (H_{J\rho}^{NF})_{mj}^t \hat{\rho} + (H_{J\phi}^{NF})_{mj}^t \hat{\phi} + (H_{Jz}^{NF})_{mj}^t \hat{z} \right] \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N_\phi} I_{mj}^{J\phi} \left[ (H_{J\rho}^{NF})_{mj}^\phi \hat{\rho} + (H_{J\phi}^{NF})_{mj}^\phi \hat{\phi} + (H_{Jz}^{NF})_{mj}^\phi \hat{z} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_M^{NF}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{N_t} I_{mj}^{Mt} \left[ (H_{M\rho}^{NF})_{mj}^t \hat{\rho} + (H_{M\phi}^{NF})_{mj}^t \hat{\phi} + (H_{Mz}^{NF})_{mj}^t \hat{z} \right] \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N_\phi} I_{mj}^{M\phi} \left[ (H_{M\rho}^{NF})_{mj}^\phi \hat{\rho} + (H_{M\phi}^{NF})_{mj}^\phi \hat{\phi} + (H_{Mz}^{NF})_{mj}^\phi \hat{z} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde,

$$\begin{aligned}
 (E_{J\rho}^{NF})_{mj}^t &= \frac{-j\eta_l k_l^2}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ \text{sen } u_q [G_{5a}(\bar{r}, t') - G_{2a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} [G_{5b}(\bar{r}, t') - G_{2b}(\bar{r}, t')]] \right. \\
 &\quad + k_l^2 \left[ (\rho_q - \rho) [(\rho_q - \rho) \text{sen } u_q + \cos u_q (z_q - z)] + \frac{\rho\rho_q}{2} \text{sen } u_q \right] [G_{8a}(\bar{r}, t') \\
 &\quad - (-1)^{iq} G_{8b}(\bar{r}, t')] + k_l^2 \frac{\Delta_q}{2} \left[ \rho_q - \rho + \left[ \left( \rho_q - \frac{\rho}{2} \right) \text{sen } u_q + \cos u_q (z_q - z) \right] \text{sen } u_q \right] \\
 &\quad \times [G_{8b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{8c}(\bar{r}, t')] + k_l^2 \left( \frac{\Delta_q}{2} \right)^2 \text{sen } u_q [G_{8c}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{8d}(\bar{r}, t')] \\
 &\quad - k_l^2 \frac{\rho\rho_q}{2} \text{sen } u_q \left[ G_{10a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{10b}(\bar{r}, t') + \frac{\Delta_q \text{sen } u_q}{2\rho_q} [G_{10b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{10c}(\bar{r}, t')] \right] \\
 &\quad - k_l^2 \rho \left[ \frac{3\rho_q}{2} \text{sen } u_q + \cos u_q (z_q - z) \right] [G_{12a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{12b}(\bar{r}, t')] \\
 &\quad \left. - k_l^2 \rho \frac{\Delta_q}{2} \left( 1 + \frac{\text{sen } u_q^2}{2} \right) [G_{12b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{12c}(\bar{r}, t')] \right\}, \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (E_{J\rho}^{NF})_{mj}^\phi &= \frac{-\eta_l k_l^2}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ G_{6a}(\bar{r}, t') - G_{3a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} [G_{6b}(\bar{r}, t') - G_{3b}(\bar{r}, t')] \right. \\
 &\quad + k_l^2 \rho^2 [G_{9a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{9b}(\bar{r}, t')] - k_l^2 \frac{\rho\rho_q}{2} [G_{11a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{11b}(\bar{r}, t')] \\
 &\quad \left. + \frac{\Delta_q \text{sen } u_q}{2\rho_q} [G_{11b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{11c}(\bar{r}, t')] \right\}, \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (E_{J\phi}^{NF})_{mj}^t &= \frac{\eta_l k_l^2}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ \text{sen } u_q [G_{6a}(\bar{r}, t') - G_{3a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} [G_{6b}(\bar{r}, t') - G_{3b}(\bar{r}, t')]] \right. \\
 &\quad + k_l^2 \rho_q [\rho_q \text{sen } u_q + \cos u_q (z_q - z)] [G_{9a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{9b}(\bar{r}, t')] \\
 &\quad + k_l^2 \frac{\Delta_q}{2} [\rho_q (1 + \text{sen}^2 u_q) + (z_q - z) \cos u_q \text{sen } u_q] [G_{9b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{9c}(\bar{r}, t')] \\
 &\quad + k_l^2 \left( \frac{\Delta_q}{2} \right)^2 \text{sen } u_q [G_{9c}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{9d}(\bar{r}, t')] - k_l^2 \frac{\rho_q \rho}{2} \text{sen } u_q \\
 &\quad \left. \times \left[ G_{11a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{11b}(\bar{r}, t') + \frac{\Delta_q}{2\rho_q} \text{sen } u_q [G_{11b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{9c}(\bar{r}, t')] \right] \right\}, \tag{4.35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (E_{J\phi}^{NF})_{mj}^{\phi} &= \frac{-j\eta_l k_l^2}{8\pi} e^{jm\phi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \{ G_{5a}(\vec{r}, t') - G_{2a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} [G_{5b}(\vec{r}, t') - G_{2b}(\vec{r}, t')] \\
 &\quad + k_l^2 \frac{\rho \rho_q}{2} [G_{8a}(\vec{r}, t') + G_{12a}(\vec{r}, t') - G_{10a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} [G_{8b}(\vec{r}, t') + G_{12b}(\vec{r}, t') \\
 &\quad - G_{10b}(\vec{r}, t')] ] + k_l^2 \rho \frac{A_q}{4} \text{sen } u_q [G_{8b}(\vec{r}, t') + G_{12b}(\vec{r}, t') - G_{10b}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} \\
 &\quad \times [G_{8c}(\vec{r}, t') + G_{12c}(\vec{r}, t') - G_{10c}(\vec{r}, t')]] \}, \tag{4.36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (E_{JZ}^{NF})_{mj}^t &= \frac{-j\eta_l k_l^2}{8\pi} e^{jm\phi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ \cos u_q [G_{7a}(\vec{r}, t') - G_{1a}(\vec{r}, t') - G_{2a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} \right. \\
 &\quad \times [G_{7b}(\vec{r}, t') - G_{1b}(\vec{r}, t') - G_{2b}(\vec{r}, t')]] + k_l^2 \left( \frac{A_q}{2} \right)^2 \cos u_q [G_{12c}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{12d}(\vec{r}, t')] \\
 &\quad + k_l^2 (z_q - z) [\text{sen } u_q \rho_q + \cos u_q (z_q - z)] [G_{12a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{12b}(\vec{r}, t')] \\
 &\quad + k_l^2 \frac{A_q}{2} [z_q - z + \cos u_q [\text{sen } u_q \rho_q + \cos u_q (z_q - z)]] [G_{12b}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{12c}(\vec{r}, t')] \tag{4.37} \\
 &\quad + k_l^2 (z_q - z) [(\rho_q - \rho) \text{sen } u_q + \cos u_q (z_q - z)] [G_{8a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{8b}(\vec{r}, t')] \\
 &\quad + k_l^2 \frac{A_q}{2} [z_q - z + \cos u_q [\text{sen } u_q (\rho_q - \rho) + \cos u_q (z_q - z)]] [G_{8b}(\vec{r}, t') \\
 &\quad - (-1)^{iq} G_{8c}(\vec{r}, t')] + k_l^2 \left( \frac{A_q}{2} \right)^2 \cos u_q [G_{8c}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{8d}(\vec{r}, t')] \left. \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (E_{JZ}^{NF})_{mj}^{\phi} &= \frac{\eta_l k_l^2}{8\pi} e^{jm\phi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ k_l^2 \rho (z_q - z) [G_{9a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{9b}(\vec{r}, t')] \right. \\
 &\quad \left. + k_l^2 \frac{A_q}{2} \cos u_q \rho [G_{9b}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{9c}(\vec{r}, t')] \right\}, \tag{4.38}
 \end{aligned}$$

$$(H_{J\rho}^{NF})_{mj}^t = \frac{jk_l^3}{8\pi} e^{jm\phi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ [\rho_q \cos u_q - (z_q - z) \text{sen } u_q] [G_{3a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{3b}(\vec{r}, t')] \right\}, \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
 (H_{J\rho}^{NF})_{mj}^{\phi} &= \frac{-k_l^3}{8\pi} e^{jm\phi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ (z_q - z) [G_{2a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{2b}(\vec{r}, t')] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{A_q}{2} \cos u_q [G_{2b}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{2c}(\vec{r}, t')] \right\}, \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (H_{J\phi}^{NF})_{mj}^t &= \frac{k_l^3}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ \rho \cos u_q [G_{1a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{1b}(\vec{r}, t')] \right. \\
 &\quad \left. - [(\rho_q - \rho) \cos u_q - (z_q - z) \text{sen } u_q] [G_{2b}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{2c}(\vec{r}, t')] \right\}, \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (H_{J\phi}^{NF})_{mj}^\phi &= \frac{-jk_l^3}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ (z_q - z) [G_{3a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{3b}(\vec{r}, t')] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Delta_q}{2} \cos u_q [G_{3b}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{3c}(\vec{r}, t')] \right\}, \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

$$(H_{JZ}^{NF})_{mj}^t = \frac{-jk^3}{8\pi} e^{jm\varphi} \rho \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ \text{sen } u_q [G_{3a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{3b}(\vec{r}, t')] \right\}, \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned}
 (H_{JZ}^J)_{mj}^\phi &= \frac{-k^3}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ \rho [G_{2a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{2b}(\vec{r}, t')] \right. \\
 &\quad - \rho_q \left[ [G_{1a}(\vec{r}, t') + G_{2a}(\vec{r}, t')] - (-1)^{iq} [G_{1b}(\vec{r}, t') + G_{2b}(\vec{r}, t')] \right] \\
 &\quad \left. - \frac{\Delta_q}{2} \text{sen } u_q \left[ [G_{1b}(\vec{r}, t') + G_{2b}(\vec{r}, t')] - (-1)^{iq} [G_{1c}(\vec{r}, t') + G_{2c}(\vec{r}, t')] \right] \right\}, \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

$$(E_{M\rho}^{NF})_{mj}^t = \frac{-j\eta_l k_l^3}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ [\rho_q \cos u_q - (z_q - z) \text{sen } u_q] [G_{3a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{3b}(\vec{r}, t')] \right\}, \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}
 (E_{M\rho}^{NF})_{mj}^\phi &= \frac{\eta_l k_l^3}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ (z_q - z) [G_{2a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{2b}(\vec{r}, t')] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Delta_q}{2} \cos u_q [G_{2b}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{2c}(\vec{r}, t')] \right\}, \quad (4.46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (E_{M\phi}^{NF})_{mj}^t &= \frac{-\eta_l k_l^3}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ \rho \cos u_q [G_{1a}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{1b}(\vec{r}, t')] \right. \\
 &\quad \left. - [(\rho_q - \rho) \cos u_q - (z_q - z) \text{sen } u_q] [G_{2b}(\vec{r}, t') - (-1)^{iq} G_{2c}(\vec{r}, t')] \right\}, \quad (4.47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E_{M\phi}^{NF})_{mj}^{\phi} &= \frac{j\eta_l k_l^3}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ (z_q - z) [G_{3a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{3b}(\bar{r}, t')] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta_q}{2} \cos u_q [G_{3b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{3c}(\bar{r}, t')] \right\}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$(E_{MZ}^{NF})_{mj}^t = \frac{j\eta_l k_l^3}{8\pi} e^{jm\varphi} \rho \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ \text{sen } u_q [G_{3a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{3b}(\bar{r}, t')] \right\}, \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} (E_{MJ}^J)_{mj}^{\phi} &= \frac{\eta_l k_l^3}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ \rho [G_{2a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{2b}(\bar{r}, t')] \right. \\ &\quad - \rho_q [[G_{1a}(\bar{r}, t') + G_{2a}(\bar{r}, t')] - (-1)^{iq} [G_{1b}(\bar{r}, t') + G_{2b}(\bar{r}, t')]] \\ &\quad \left. - \frac{\Delta_q}{2} \text{sen } u_q [[G_{1b}(\bar{r}, t') + G_{2b}(\bar{r}, t')] - (-1)^{iq} [G_{1c}(\bar{r}, t') + G_{2c}(\bar{r}, t')]] \right\}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} (H_{M\rho}^{NF})_{mj}^t &= \frac{-jk_l^2}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ \text{sen } u_q [G_{5a}(\bar{r}, t') - G_{2a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} [G_{5b}(\bar{r}, t') - G_{2b}(\bar{r}, t')]] \right. \\ &\quad + k_l^2 \left[ (\rho_q - \rho) [(\rho_q - \rho) \text{sen } u_q + \cos u_q (z_q - z)] + \frac{\rho\rho_q}{2} \text{sen } u_q \right] [G_{8a}(\bar{r}, t') \\ &\quad - (-1)^{iq} G_{8b}(\bar{r}, t')] + k_l^2 \frac{\Delta_q}{2} \left[ \rho_q - \rho + \left[ (\rho_q - \frac{\rho}{2}) \text{sen } u_q + \cos u_q (z_q - z) \right] \text{sen } u_q \right] \\ &\quad \times [G_{8b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{8c}(\bar{r}, t')] + k_l^2 \left( \frac{\Delta_q}{2} \right)^2 \text{sen } u_q [G_{8c}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{8d}(\bar{r}, t')] \\ &\quad - k_l^2 \frac{\rho\rho_q}{2} \text{sen } u_q \left[ G_{10a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{10b}(\bar{r}, t') + \frac{\Delta_q \text{sen } u_q}{2\rho_q} [G_{10b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{10c}(\bar{r}, t')] \right] \\ &\quad - k_l^2 \rho \left[ \frac{3\rho_q}{2} \text{sen } u_q + \cos u_q (z_q - z) \right] [G_{12a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{12b}(\bar{r}, t')] \\ &\quad \left. - k_l^2 \rho \frac{\Delta_q}{2} \left( 1 + \frac{\text{sen } u_q^2}{2} \right) [G_{12b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{12c}(\bar{r}, t')] \right\}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} (H_{M\rho}^{NF})_{mj}^{\phi} &= \frac{-k_l^2}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ G_{6a}(\bar{r}, t') - G_{3a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} [G_{6b}(\bar{r}, t') - G_{3b}(\bar{r}, t')] \right. \\ &\quad + k_l^2 \rho^2 [G_{9a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{9b}(\bar{r}, t')] - k_l^2 \frac{\rho\rho_q}{2} [G_{11a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{11b}(\bar{r}, t')] \\ &\quad \left. + \frac{\Delta_q \text{sen } u_q}{2\rho_q} [G_{11b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{11c}(\bar{r}, t')] \right\}, \end{aligned} \quad (4.52)$$



$$\begin{aligned}
 (H_{M\phi}^{NF})_{mj}^t &= \frac{k_l^2}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ \text{sen } u_q [G_{6a}(\bar{r}, t') - G_{3a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} [G_{6b}(\bar{r}, t') - G_{3b}(\bar{r}, t')]] \right. \\
 &\quad + k_l^2 \rho_q [\rho_q \text{sen } u_q + \cos u_q (z_q - z)] [G_{9a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{9b}(\bar{r}, t')] \\
 &\quad + k_l^2 \frac{\Delta_q}{2} [\rho_q (1 + \text{sen}^2 u_q) + (z_q - z) \cos u_q \text{sen } u_q] [G_{9b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{9c}(\bar{r}, t')] \\
 &\quad + k_l^2 \left( \frac{\Delta_q}{2} \right)^2 \text{sen } u_q [G_{9c}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{9d}(\bar{r}, t')] - k_l^2 \frac{\rho_q \rho}{2} \text{sen } u_q \\
 &\quad \times \left[ G_{11a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{11b}(\bar{r}, t') + \frac{\Delta_q}{2\rho_q} \text{sen } u_q [G_{11b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{9c}(\bar{r}, t')] \right] \left. \right\}, \tag{4.53}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (H_{M\phi}^{NF})_{mj}^\phi &= \frac{-jk_l^2}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ G_{5a}(\bar{r}, t') - G_{2a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} [G_{5b}(\bar{r}, t') - G_{2b}(\bar{r}, t')] \right. \\
 &\quad + k_l^2 \frac{\rho\rho_q}{2} [G_{8a}(\bar{r}, t') + G_{12a}(\bar{r}, t') - G_{10a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} [G_{8b}(\bar{r}, t') + G_{12b}(\bar{r}, t') \\
 &\quad - G_{10b}(\bar{r}, t')]] + k_l^2 \rho \frac{\Delta_q}{4} \text{sen } u_q [G_{8b}(\bar{r}, t') + G_{12b}(\bar{r}, t') - G_{10b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} \\
 &\quad \times [G_{8c}(\bar{r}, t') + G_{12c}(\bar{r}, t') - G_{10c}(\bar{r}, t')]] \left. \right\}, \tag{4.54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (H_{MZ}^{NF})_{mj}^t &= \frac{-jk_l^2}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ \cos u_q [G_{7a}(\bar{r}, t') - G_{1a}(\bar{r}, t') - G_{2a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} \right. \\
 &\quad \times [G_{7b}(\bar{r}, t') - G_{1b}(\bar{r}, t') - G_{2b}(\bar{r}, t')]] + k_l^2 \left( \frac{\Delta_q}{2} \right)^2 \cos u_q [G_{12c}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{12d}(\bar{r}, t')] \\
 &\quad + k_l^2 (z_q - z) [\text{sen } u_q \rho_q + \cos u_q (z_q - z)] [G_{12a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{12b}(\bar{r}, t')] \\
 &\quad + k_l^2 \frac{\Delta_q}{2} [z_q - z + \cos u_q [\text{sen } u_q \rho_q + \cos u_q (z_q - z)]] [G_{12b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{12c}(\bar{r}, t')] \\
 &\quad + k_l^2 (z_q - z) [(\rho_q - \rho) \text{sen } u_q + \cos u_q (z_q - z)] [G_{8a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{8b}(\bar{r}, t')] \\
 &\quad + k_l^2 \frac{\Delta_q}{2} [z_q - z + \cos u_q [\text{sen } u_q (\rho_q - \rho) + \cos u_q (z_q - z)]] [G_{8b}(\bar{r}, t') \\
 &\quad - (-1)^{iq} G_{8c}(\bar{r}, t')] + k_l^2 \left( \frac{\Delta_q}{2} \right)^2 \cos u_q [G_{8c}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{8d}(\bar{r}, t')] \left. \right\}, \tag{4.55}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (H_{MZ}^{NF})_{mj}^\phi &= \frac{k_l^2}{8\pi} e^{jm\varphi} \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ k_l^2 \rho (z_q - z) [G_{9a}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{9b}(\bar{r}, t')] \right. \\
 &\quad + k_l^2 \frac{\Delta_q}{2} \cos u_q \rho [G_{9b}(\bar{r}, t') - (-1)^{iq} G_{9c}(\bar{r}, t')] \left. \right\}, \tag{4.56}
 \end{aligned}$$

Nas equações (4.33)-(4.56)  $\rho$  e  $z$  são as coordenadas cilíndricas do ponto de observação  $\vec{r}$ , e as integrais bidimensionais são:

$$G_{va}(t, t') = \int_{-1}^1 G_v(\vec{r}, t') d\alpha', \quad v = 1, \dots, 12 \quad (4.57)$$

$$G_{vb}(t, t') = \int_{-1}^1 \alpha' G_v(\vec{r}, t') d\alpha', \quad v = 1, \dots, 12 \quad (4.58)$$

$$G_{vc}(t, t') = \int_{-1}^1 \alpha'^2 G_v(\vec{r}, t') d\alpha', \quad v = 1, 2, 3, 8, \dots, 12 \quad (4.59)$$

$$G_{vd}(t, t') = \int_{-1}^1 \alpha'^3 G_v(\vec{r}, t') d\alpha', \quad v = 8, 9, 12 \quad (4.60)$$

onde  $G_v(\vec{r}, t')$ , para  $v = 1, \dots, 7$ , são dados pelas equações (3.83)-(3.89), respectivamente, e para  $v = 8, \dots, 12$  são dados por:

$$G_8(\vec{r}, t') = \int_0^\pi \cos \varphi \cos m\varphi G_{EH} d\varphi, \quad (4.61)$$

$$G_9(\vec{r}, t') = \int_0^\pi \sen \varphi \sen m\varphi G_{EH} d\varphi, \quad (4.62)$$

$$G_{10}(\vec{r}, t') = \int_0^\pi \cos 2\varphi \cos m\varphi G_{EH} d\varphi, \quad (4.63)$$

$$G_{11}(\vec{r}, t') = \int_0^\pi \sen 2\varphi \sen m\varphi G_{EH} d\varphi, \quad (4.64)$$

$$G_{12}(\vec{r}, t') = 2 \int_0^\pi \sen^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos m\varphi G_{EH} d\varphi. \quad (4.65)$$

Para pontos de observação próximos à superfície do BOR, para minimizar os efeitos das singularidades a integral em  $\alpha$  é avaliada utilizando uma quadratura Gaussiana de  $n'_\alpha$  pontos, onde,  $n'_\alpha = 10$  e a integral em  $\varphi$  é avaliada utilizando uma única quadratura Gaussiana de  $n_\varphi$ , onde  $n_\varphi$  é determinado de acordo com as equações (3.164) e (3.165).

As equações (4.33)-(4.56) têm um comportamento tal que o resultado para o modo  $m$  pode ser utilizado para o cálculo do modo  $-m$ , da seguinte forma [34]:

$$\left(E_{J\rho}^{NF}\right)_{mj}^t e^{-jm\varphi} = \left(E_{J\rho}^{NF}\right)_{-mj}^t e^{jm\varphi}, \quad (4.66)$$

$$\left(E_{J\phi}^{NF}\right)_{mj}^t e^{-jm\varphi} = -\left(E_{J\phi}^{NF}\right)_{-mj}^t e^{jm\varphi}, \quad (4.67)$$

$$\left(E_{JZ}^{NF}\right)_{mj}^t e^{-jm\varphi} = \left(E_{JZ}^{NF}\right)_{-mj}^t e^{jm\varphi}, \quad (4.68)$$

$$\left(E_{J\rho}^{NF}\right)_{mj}^\phi e^{-jm\varphi} = -\left(E_{J\rho}^{NF}\right)_{-mj}^\phi e^{jm\varphi}, \quad (4.69)$$

$$\left(E_{J\phi}^{NF}\right)_{mj}^\phi e^{-jm\varphi} = \left(E_{J\phi}^{NF}\right)_{-mj}^\phi e^{jm\varphi}, \quad (4.70)$$

$$\left(E_{JZ}^{NF}\right)_{mj}^\phi e^{-jm\varphi} = -\left(E_{JZ}^{NF}\right)_{-mj}^\phi e^{jm\varphi}, \quad (4.71)$$

$$\left(H_{J\rho}^{NF}\right)_{mj}^t e^{-jm\varphi} = -\left(H_{J\rho}^{NF}\right)_{-mj}^t e^{jm\varphi}, \quad (4.72)$$

$$\left(H_{J\phi}^{NF}\right)_{mj}^t e^{-jm\varphi} = \left(H_{J\phi}^{NF}\right)_{-mj}^t e^{jm\varphi}, \quad (4.73)$$

$$\left(H_{JZ}^{NF}\right)_{mj}^t e^{-jm\varphi} = -\left(H_{JZ}^{NF}\right)_{-mj}^t e^{jm\varphi}, \quad (4.74)$$

$$\left(H_{J\rho}^{NF}\right)_{mj}^\phi e^{-jm\varphi} = \left(H_{J\rho}^{NF}\right)_{-mj}^\phi e^{jm\varphi}, \quad (4.75)$$

$$\left(H_{J\phi}^{NF}\right)_{mj}^\phi e^{-jm\varphi} = -\left(H_{J\phi}^{NF}\right)_{-mj}^\phi e^{jm\varphi}, \quad (4.76)$$

$$\left(H_{JZ}^{NF}\right)_{mj}^T e^{-jm\varphi} = \left(H_{JZ}^{NF}\right)_{-mj}^\phi e^{jm\varphi}. \quad (4.77)$$

$$\left(E_{M\rho}^{NF}\right)_{mj}^t e^{-jm\varphi} = \left(E_{M\rho}^{NF}\right)_{-mj}^t e^{jm\varphi}, \quad (4.78)$$

$$\left(E_{M\phi}^{NF}\right)_{mj}^t e^{-jm\varphi} = -\left(E_{M\phi}^{NF}\right)_{-mj}^t e^{jm\varphi}, \quad (4.79)$$

$$\left(E_{MZ}^{NF}\right)_{mj}^t e^{-jm\varphi} = \left(E_{MZ}^{NF}\right)_{-mj}^t e^{jm\varphi}, \quad (4.80)$$

$$\left(E_{M\rho}^{NF}\right)_{mj}^{\phi} e^{-jm\varphi} = -\left(E_{M\rho}^{NF}\right)_{-mj}^{\phi} e^{jm\varphi}, \quad (4.81)$$

$$\left(E_{M\phi}^{NF}\right)_{mj}^{\phi} e^{-jm\varphi} = \left(E_{M\phi}^{NF}\right)_{-mj}^{\phi} e^{jm\varphi}, \quad (4.82)$$

$$\left(E_{MZ}^{NF}\right)_{mj}^{\phi} e^{-jm\varphi} = -\left(E_{MZ}^{NF}\right)_{-mj}^{\phi} e^{jm\varphi}, \quad (4.83)$$

$$\left(H_{M\rho}^{NF}\right)_{mj}^t e^{-jm\varphi} = \left(H_{M\rho}^{NF}\right)_{-mj}^t e^{jm\varphi}, \quad (4.84)$$

$$\left(H_{M\phi}^{NF}\right)_{mj}^t e^{-jm\varphi} = -\left(H_{M\phi}^{NF}\right)_{-mj}^t e^{jm\varphi}, \quad (4.85)$$

$$\left(H_{JZ}^{NF}\right)_{Mj}^t e^{-jm\varphi} = \left(H_{JZ}^{NF}\right)_{-Mj}^t e^{jm\varphi}, \quad (4.86)$$

$$\left(H_{M\rho}^{NF}\right)_{mj}^{\phi} e^{-jm\varphi} = -\left(H_{M\rho}^{NF}\right)_{-mj}^{\phi} e^{jm\varphi}, \quad (4.87)$$

$$\left(H_{M\phi}^{NF}\right)_{mj}^{\phi} e^{-jm\varphi} = \left(H_{M\phi}^{NF}\right)_{-mj}^{\phi} e^{jm\varphi}, \quad (4.88)$$

$$\left(H_{MZ}^{NF}\right)_{mj}^t e^{-jm\varphi} = -\left(H_{MZ}^{NF}\right)_{-mj}^t e^{jm\varphi}. \quad (4.89)$$

Os campos elétrico,  $\vec{E}_{in}^{NF}(\vec{r})$ , e magnético,  $\vec{H}_{in}^{NF}(\vec{r})$ , radiados por fontes de ondas esféricas são dados pelas equações (3.276)-(3.284) utilizando as coordenadas cilíndricas  $\rho$ ,  $\phi$  e  $z$  associadas com o ponto  $\vec{r}$  onde o campo está sendo calculado. Para o caso em que a excitação é realizada através de um sistema alimentador, como aqueles discutidos na Seção 3.6.3, os campos próximos incidentes elétrico,  $\vec{E}_{in}^{NF}(\vec{r})$ , e magnético,  $\vec{H}_{in}^{NF}(\vec{r})$ , são diretamente determinadas através das equações (4.33)-(4.56) utilizando as correntes equivalentes elétrica,  $\vec{J}_g(\vec{r})$ , e magnética,  $\vec{M}_g(\vec{r})$ , apresentadas na Seção 3.6.3, ao invés das correntes elétrica,  $\vec{J}_s(\vec{r}')$ , e magnética,  $\vec{M}_s(\vec{r}')$ .

## 4.2 - Campo Distante

Utilizando um processo semelhante ao empregado na Seção 4.1 para o campo próximo, o campo elétrico em um meio  $l$  em uma região distante ao BOR podem ser obtido utilizando:

$$\vec{E}^{FF}(\vec{r}) = \vec{E}_J^{FF}(\vec{r}) + \vec{E}_M^{FF}(\vec{r}) + \vec{E}_{in}^{FF}(\vec{r}), \quad (4.90)$$

$$\vec{H}^{FF}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta} \hat{r} \times \vec{E}^{FF}(\vec{r}), \quad (4.91)$$

onde  $\hat{r}$  é um vetor unitário apontando para a direção de propagação,  $\vec{E}_{in}^{FF}(\vec{r})$  é o campo elétrico na região de campo distante radiado pelas fontes externas e  $\vec{E}_J^{FF}(\vec{r})$  e  $\vec{E}_M^{FF}(\vec{r})$  são os campos elétricos na região de campo distante radiado pelas fontes corrente equivalentes elétrica,  $\vec{J}_s(\vec{r}')$ , e magnética,  $\vec{M}_s(\vec{r}')$ , respectivamente, e definido em [62] como:

$$\vec{E}_J^{FF}(\vec{r}) = \frac{-j\omega\mu_l}{4\pi} \frac{e^{-jk_l r}}{r} \int_{s'} \left\{ \vec{J}_s(\vec{r}') - [\vec{J}_s(\vec{r}') \cdot \hat{r}] \hat{r} \right\} e^{jk_l \vec{r} \cdot \vec{r}'} ds', \quad (4.92)$$

$$\vec{E}_M^{FF}(\vec{r}) = -\frac{jk_l}{4\pi} \frac{e^{-jk_l r}}{r} \int_{s'} [\vec{M}_s(\vec{r}')_s \times \hat{r}] e^{jk_l \vec{r} \cdot \vec{r}'} ds'. \quad (4.93)$$

Aplicando as relações

$$\begin{aligned} \hat{t}' = & \left\{ [\sin u' \sin \theta \cos(\phi' - \phi) + \cos \theta \cos u'] \hat{r} + [\sin u' \cos \theta \cos(\phi' - \phi) \right. \\ & \left. - \sin \theta \cos u'] \hat{\theta} + \sin u' \sin(\phi' - \phi) \hat{\phi} \right\}, \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\hat{\phi}' = -\sin(\phi' - \phi) [\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}] + \cos(\phi' - \phi) \hat{\phi}, \quad (4.95)$$

$$\vec{r}' \cdot \hat{r} = \rho' \sin \theta \cos(\phi' - \phi) + z' \cos \theta, \quad (4.96)$$

nas equações (4.92) e (4.93), obtêm-se

$$\vec{E}_J^{FF}(\vec{r}) = E_{J\theta}^{FF} \hat{\theta} + E_{J\phi}^{FF} \hat{\phi}, \quad (4.97)$$

$$\vec{E}_M^{FF}(\vec{r}) = E_{M\theta}^{FF} \hat{\theta} + E_{M\phi}^{FF} \hat{\phi}, \quad (4.98)$$

onde

$$E_{J\theta}^{FF} = \frac{-j\omega\mu_l}{4\pi} \frac{e^{-jk_l r}}{r} \int_{s'} \left\{ J^t(\vec{r}') [sen u' \cos \theta \cos(\phi' - \phi) - sen \theta \cos u'] - J^\phi(\vec{r}') sen(\phi' - \phi) \cos \theta \right\} e^{jk_l [\rho' sen \theta \cos(\phi' - \phi) + z' \cos \theta]} ds' , \quad (4.99)$$

$$E_{J\phi}^{FF} = \frac{-j\omega\mu_l}{4\pi} \frac{e^{-jk_l r}}{r} \int_{s'} \left\{ J^t(\vec{r}') sen u' sen(\phi' - \phi) + J^\phi(\vec{r}') \cos(\phi' - \phi) \right\} \times e^{jk_l [\rho' sen \theta \cos(\phi' - \phi) + z' \cos \theta]} ds' , \quad (4.100)$$

$$E_{M\theta}^{FF} = \frac{-jk_l}{4\pi} \frac{e^{-jk_l r}}{r} \int_{s'} \left\{ M^t(\vec{r}') sen u' sen(\phi' - \phi) + M^\phi(\vec{r}') \cos(\phi' - \phi) \right\} \times e^{jk_l [\rho' sen \theta \cos(\phi' - \phi) + z' \cos \theta]} ds' , \quad (4.101)$$

$$E_{M\phi}^{FF} = \frac{jk_l}{4\pi} \frac{e^{-jk_l r}}{r} \int_{s'} \left\{ M^t(\vec{r}') [sen u' \cos \theta \cos(\phi' - \phi) - sen \theta \cos u'] - M^\phi(\vec{r}') sen(\phi' - \phi) \cos \theta \right\} e^{jk_l [\rho' sen \theta \cos(\phi' - \phi) + z' \cos \theta]} ds' , \quad (4.102)$$

e  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  são as coordenadas esféricas do ponto  $\vec{r}$  na região de campo distante.

Substituindo as equações (3.25) e (3.26) nas equações (4.99) a (4.102) e resolvendo a integral bidimensional utilizando uma quadratura  $n'_\alpha$  para a integral em  $t'$ , e de forma exata para a integral em  $\varphi = \phi' - \phi$ , obtêm-se:

$$\vec{E}_J^{FF}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{N_t} I_{mj}^{Jt} \left[ (E_{J\theta}^{FF})_{mj}^t \hat{\theta} + (E_{J\phi}^{FF})_{mj}^t \hat{\phi} \right] + \sum_{j=1}^{N_\phi} I_{mj}^{J\phi} \left[ (E_{J\theta}^{FF})_{mj}^\phi \hat{\theta} + (E_{J\phi}^{FF})_{mj}^\phi \hat{\phi} \right] \right\} , \quad (4.103)$$

$$\vec{E}_M^{FF}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{N_t} I_{mj}^{Mt} \left[ (E_{M\theta}^{FF})_{mj}^t \hat{\theta} + (E_{M\phi}^{FF})_{mj}^t \hat{\phi} \right] + \sum_{j=1}^{N_\phi} I_{mj}^{M\phi} \left[ (E_{M\theta}^{FF})_{mj}^\phi \hat{\theta} + (E_{M\phi}^{FF})_{mj}^\phi \hat{\phi} \right] \right\} , \quad (4.104)$$

onde

$$(E_{J\theta}^{FF})_{mj}^t = \frac{-j\eta_l k_l}{8} \frac{e^{-jk_l r}}{r} (j e^{j\varphi})^m \sum_{iq=1}^2 A_q \left\{ \frac{j sen u_q \cos \theta}{2} [F_{m+1,a}(t') - F_{m-1,a}(t') - (-1)^{iq} [F_{m+1,b}(t') - F_{m-1,b}(t')]] - sen \theta \cos u_q [F_{m,a}(t') - (-1)^{iq} F_{m,b}(t')] \right\} , \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} (E_{J\phi}^{FF})_{mj}^t &= \frac{-j\eta_l k_l e^{-jk_l r}}{8r} (je^{j\phi})^m \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \frac{\text{sen } u_q}{2} \{F_{m+1,a}(t') + F_{m-1,a}(t') \\ &\quad - (-1)^{iq} [F_{m+1,b}(t') + F_{m-1,b}(t')]\}, \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} (E_{J\theta}^{FF})_{mj}^\phi &= \frac{j\eta_l k_l e^{-jk_l r}}{8r} (je^{j\phi})^m \sum_{iq=1}^2 \frac{\Delta_q \cos \theta}{2} \{F_{m+1,a}(t') + F_{m-1,a}(t') \\ &\quad - (-1)^{iq} [F_{m+1,b}(t') + F_{m-1,b}(t')]\}, \end{aligned} \quad (4.107)$$

$$(E_{J\phi}^{FF})_{mj}^\phi = \frac{\eta_l k_l e^{-jk_l r}}{8r} (je^{j\phi})^m \sum_{iq=1}^2 \frac{\Delta_q}{2} \{F_{m+1,a}(t') - F_{m-1,a}(t') - (-1)^{iq} [F_{m+1,b}(t') - F_{m-1,b}(t')]\}, \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} (E_{M\theta}^{FF})_{mj}^t &= \frac{-jk_l e^{-jk_l r}}{8r} (je^{j\phi})^m \sum_{iq=1}^2 \frac{\Delta_q \text{sen } u_q}{2} \{F_{m+1,a}(t') + F_{m-1,a}(t') \\ &\quad - (-1)^{iq} [F_{m+1,b}(t') + F_{m-1,b}(t')]\}, \end{aligned} \quad (4.109)$$

$$\begin{aligned} (E_{M\phi}^{FF})_{mj}^t &= \frac{jk_l e^{-jk_l r}}{8r} (je^{j\phi})^m \sum_{iq=1}^2 \Delta_q \left\{ \frac{j \text{sen } u' \cos \theta}{2} [F_{m+1,a}(t') - F_{m-1,a}(t') \right. \\ &\quad \left. - (-1)^{iq} [F_{m+1,b}(t') - F_{m-1,b}(t')]] - \text{sen } \theta \cos u_q [F_{m,a}(t') - (-1)^{iq} F_{m,b}(t')] \right\}, \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$(E_{M\theta}^{FF})_{mj}^\phi = \frac{k_l e^{-jk_l r}}{8r} (je^{j\phi})^m \sum_{iq=1}^2 \frac{\Delta_q}{2} \{F_{m+1,a}(t') - F_{m-1,a}(t') - (-1)^{iq} [F_{m+1,b}(t') - F_{m-1,b}(t')]\}, \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned} (E_{M\phi}^{FF})_{mj}^\phi &= \frac{-jk_l e^{-jk_l r}}{8r} (je^{j\phi})^m \sum_{iq=1}^2 \frac{\Delta_q \cos \theta}{2} \{F_{m+1,a}(t') + F_{m-1,a}(t') \\ &\quad - (-1)^{iq} [F_{m+1,b}(t') + F_{m-1,b}(t')]\}, \end{aligned} \quad (4.112)$$

e integral em relação a  $\alpha'$  é dada por:

$$F_{n,a}(t') = \int_{-1}^1 J_n(k\rho' \text{sen } \theta) e^{jk'z' \cos \theta} d\alpha', \quad n = m-1, m, m+1, \quad (4.113)$$

$$F_{n,a}(t') = \int_{-1}^1 J_n(k\rho' \text{sen } \theta) e^{jk'z' \cos \theta} \alpha' d\alpha', \quad n = m-1, m, m+1, \quad (4.114)$$

onde  $J_n(k\rho' \text{sen } \theta)$  é a função de Bessel de ordem  $n$  com argumento  $k\rho' \text{sen } \theta$  e  $\rho'$  e  $z'$  são as coordenadas do segmento fonte dadas pelas equações (3.93) e (3.94), respectivamente.

Também para o campo distante o resultado para o modo  $m$  pode ser utilizado para o cálculo do modo  $-m$ , da seguinte forma:

$$\left(E_{J\theta}^{FF}\right)_{mj}^t (je^{j\phi})^{-m} = (-1)^m \left(E_{J\rho}^{FF}\right)_{-mj}^t (je^{j\phi})^m, \quad (4.115)$$

$$\left(E_{J\phi}^{FF}\right)_{mj}^t (je^{j\phi})^{-m} = (-1)^{m+1} \left(E_{J\phi}^{FF}\right)_{-mj}^t (je^{j\phi})^m, \quad (4.116)$$

$$\left(E_{J\theta}^{FF}\right)_{mj}^\phi (je^{j\phi})^{-m} = (-1)^{m+1} \left(E_{J\rho}^{FF}\right)_{-mj}^\phi (je^{j\phi})^m, \quad (4.117)$$

$$\left(E_{J\phi}^{FF}\right)_{mj}^\phi (je^{j\phi})^{-m} = (-1)^m \left(E_{J\phi}^{FF}\right)_{-mj}^\phi (je^{j\phi})^m, \quad (4.118)$$

$$\left(E_{M\theta}^{FF}\right)_{mj}^t (je^{j\phi})^{-m} = (-1)^m \left(E_{M\rho}^{FF}\right)_{-mj}^t (je^{j\phi})^m, \quad (4.119)$$

$$\left(E_{M\phi}^{FF}\right)_{mj}^t (je^{j\phi})^{-m} = (-1)^{m+1} \left(E_{M\phi}^{FF}\right)_{-mj}^t (je^{j\phi})^m, \quad (4.120)$$

$$\left(E_{M\theta}^{FF}\right)_{mj}^\phi (je^{j\phi})^{-m} = (-1)^{m+1} \left(E_{M\rho}^{FF}\right)_{-mj}^\phi (je^{j\phi})^m, \quad (4.121)$$

$$\left(E_{M\phi}^{FF}\right)_{mj}^\phi (je^{j\phi})^{-m} = (-1)^m \left(E_{M\phi}^{FF}\right)_{-mj}^\phi (je^{j\phi})^m. \quad (4.122)$$

O campo elétrico incidente,  $\vec{E}_{in}^{FF}(\vec{r})$ , radiado pelas fontes externas para o modelo RCF é

$$\vec{E}_{in}^{FF}(\vec{r}) = \left[ \cos^e \theta \cos \phi \hat{\theta} - \cos^h \theta \sin \phi \hat{\phi} \right] \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad (4.123)$$

e satisfaz as equações de Maxwell somente na região de campo distante. Para um dipolo de Hertz polarizado na direção  $\hat{x}$  tem-se:

$$\vec{E}_{in}^{FF}(\vec{r}) = -j\eta \frac{(I\ell)}{2\lambda} \left[ \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi} \right] \frac{e^{-jkr}}{r}. \quad (4.124)$$

Para o caso em que a excitação é realizada através de um sistema alimentador, o campo elétrico incidente,  $\vec{E}_{in}^{FF}(\vec{r})$ , pode ser obtido pelo mesmo processo descrito na Seção 4.1 para obtenção dos próximos incidentes,  $\vec{E}_{in}^{NF}(\vec{r})$  e  $\vec{H}_{in}^{NF}(\vec{r})$ . Ou seja, diretamente através das equações (4.105) e (4.112) utilizando as correntes equivalentes,  $\vec{J}_g(\vec{r})$  e  $\vec{M}_g(\vec{r})$  ao invés das correntes  $\vec{J}_s(\vec{r}')$  e  $\vec{M}_s(\vec{r}')$ .



### 4.3 - Perda de Retorno

Para a excitação de guias de onda através dos modos discutidos na Seção 3.6.3, parte da energia excitando a corneta é radiada pelo sistema da antena enquanto o restante é refletido para trás no guia circular conectado à corneta (perda de retorno). Assumindo que o guia é especificado para permitir a propagação somente do modo fundamental  $TE_{11}$  para o guia circular e do modo TEM para o guia coaxial, dentro do guia esta energia retornada é completamente transferida para o modo propagando na direção  $\hat{z}$  negativa. Para simular uma absorção para a estrutura do alimentador, o guia é truncado em  $z = z_g$  e uma impedância de superfície com valor escolhido de acordo com o modo que se deseja absorver é especificada para a parede no final do guia evitando a reflexão do modo retornado, como ilustrado nas Figuras 3.4 e 3.6 e discutido na Seção 3.6.3. Este processo também permite a determinação das perda de retorno do guia, pois no plano  $z = z_g$  o campo total no guia é representado por uma combinação linear entre o modo propagando nas direções  $\hat{z}$  positiva e negativa. Assim, utilizando as equações (3.310)-(3.314), (3.329) e (3.330) e observando a orientação de  $\hat{t}$  nas Figuras 3.4 e 3.6, a impedância de superfície para absorção dos modos  $TE_{11}$  e TEM é:

$$Z_t^{IBC} = \frac{E_\rho^-}{H_\phi} = -Z_{modo}, \quad (4.125)$$

$$Z_\phi^{IBC} = -\frac{E_\phi}{H_\rho} = -Z_{modo}, \quad (4.126)$$

onde  $Z_{modo}$  representa a impedância característica para o modo  $TE_{11}$ , equação (3.316), ou TEM, equação (3.332), e as componentes de campo são aquelas associadas aos respectivos modos. Assim, a corrente elétrica  $\vec{J}(\vec{r}')$  induzida sobre a parede no final do guia é relacionada ao modo por

$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{J}_t(\vec{r}') \hat{t}' + \vec{J}_\phi(\vec{r}') \hat{\phi}' = \hat{z} \times \vec{H}_{TE_{11}}^- = H_\phi^- \hat{t}' + H_\rho^-(\vec{r}') \hat{\phi}'. \quad (4.127)$$

A partir das equações (3.313), (3.314), (3.329), (3.330) e (4.127) e lembrando que os modos foram normalizados para fornecerem potência unitária, conforme discutido nas Seções 3.6.3.2 e 3.6.3.3, a potência associada ao modo retornado (perda de retorno) é dada por [62]:

$$\begin{aligned}
 P_{RL} &= \frac{1}{2} \Re e \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{a_g} \left( \bar{E}_{TE_{11}}^- \times \bar{H}_{TE_{11}}^{-*} \right) \cdot \rho' d\rho' d\phi \right\} \\
 &= \frac{Z_{modo}}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_g} \left( |H_{\rho}^-|^2 + |H_{\phi}^-|^2 \right) \cdot \rho' d\rho' d\phi \\
 &= \frac{Z_{modo}}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_g} \left( |\bar{J}_t(\bar{r}')|^2 + |\bar{J}_{\phi}(\bar{r}')|^2 \right) \cdot \rho' d\rho' d\phi, \quad \text{em } z = z_e
 \end{aligned} \tag{4.128}$$

onde o símbolo \* denota o complexo conjugado. Utilizando a equação (3.25) a corrente elétrica  $\bar{J}(\bar{r}')$  induzida para o modo TE<sub>11</sub> ( $m = \pm 1$ ) pode ser reescrita como:

$$J_t(\bar{r}') = 2 \cos \phi' \sum_j I_{1j}^T \frac{T_j(t')}{\rho'}, \tag{4.129}$$

$$J_{\phi}(\bar{r}') = j 2 \sin \phi' \sum_j I_{1j}^{\phi} \frac{T_j(t')}{\rho'}, \tag{4.130}$$

onde  $j$  representa somente as funções de base localizadas na superfície interna final do guia ( $z = z_g$ ). Substituindo (4.129) e (4.130) em (4.128) e avaliando as integrais em relação a  $\phi'$  de forma fechada, obtém-se:

$$P_{RL} = 2\pi Z_{modo} \sum_j \sum_i \left\{ \int_0^{a_g} \left[ I_{1j}^T I_{1i}^{T*} \frac{1}{\rho'} T_j(t') T_i(t') + I_{1j}^{\phi} I_{1i}^{\phi*} \frac{1}{\rho'} T_j(t') T_i(t') \right] d\rho' \right\}, \tag{4.131}$$

onde  $i$  representa somente as funções de base localizadas na superfície interna final do guia ( $z = z_g$ ). Utilizando as equações (3.125) e (3.126) as integrais em (4.131) podem ser avaliadas de forma fechada o que resulta em

$$P_{RL} = 2\pi Z_{modo} \sum_j \sum_i \left[ I_{1j}^T I_{1i}^{T*} G(t) \delta(i, j) + I_{1j}^{\phi} I_{1i}^{\phi*} G(t) \delta(i, j) \right], \tag{4.132}$$

onde  $\delta(i, j)$  é dado pela equação (3.126). Para excitação através do TEM do guia coaxial em que somente o modo  $m = 0$  está presente, as equações (4.129) e (4.130) devem ser simplificadas para:

$$J_i(\vec{r}') = \sum_j I_{1j}^T \frac{T_j(t')}{\rho'}, \quad (4.133)$$

$$J_\phi(\vec{r}') = 0, \quad (4.134)$$

o que resulta em:

$$P_{RL} = \pi Z_{\text{modo}} \sum_j \sum_i \left[ I_{1j}^T I_{1i}^{T*} G(t) \delta(i, j) \right]. \quad (4.135)$$

## 4.4 - Conclusões Parciais

Neste capítulo foram obtidas as equações para o cálculo dos campos nas regiões de campos próximo e distante e da perda de retorno associados a um BOR iluminado por qualquer um dos tipos de excitação discutidos na Seção 3.6. Para determinação destas equações foram utilizados os coeficientes obtidos na solução dos sistemas lineares discutidos na Seção 3.7.

# Capítulo 5

## ESTUDOS DE CASOS

As formulações apresentadas nos Capítulos 2 a 4 foram implementadas em um código de computador e sua precisão foi verificada através de vários testes considerando diferentes tipos de BOR. Nesta seção são apresentados alguns dos resultados obtidos (correntes equivalentes superficiais e campos nas regiões de campo próximo e distante) no tratamento do espalhamento eletromagnético por diferentes estruturas CEP ou dielétricas, iluminadas por uma onda plana, por uma fonte de onda esférica ou através de um guia. Todos os resultados obtidos são avaliados através de comparações com os respectivos resultados analíticos, quando estes são possíveis, ou com resultados numéricos disponíveis na literatura.

### 5.1 - Determinação do Número de Pontos de Integração

Conforme descrito na Seção 3.4, a avaliação numérica das integrais em  $\alpha$ ,  $\alpha'$  e  $\varphi$  das equações (3.109)-(3.124) é realizada utilizando quadraturas Gaussianas de  $n_\alpha$ ,  $n'_\alpha$  e  $n_\varphi$  pontos, respectivamente. Os testes realizados indicaram que para as integrais em  $\alpha$  e  $\alpha'$ , embora o aumento no número de pontos de integração para valores maiores que 2 melhore a precisão do resultado de cada uma das integrais individualmente, esta melhora não proporciona aumento significativo na precisão dos resultados das correntes superficiais, além de aumentar consideravelmente o tempo de processamento do algoritmo. Nestes testes observou-se também, conforme descrito em [35], que para BOR condutores que possuem raio

máximo menor que  $\lambda_0$  ( $\lambda_0$  é o comprimento de onda no vácuo) o resultado da corrente elétrica superficial obtida através da formulação *Efield* é pouco preciso, quando comparado com a respectiva solução analítica. Para solução através da formulação *Cfield* este problema, embora com menor intensidade, também foi verificado [41]. De acordo com [35], [69], [70], desde que a superfície sob análise esteja adequadamente discretizada, a imprecisão no resultado da corrente está associada a um erro numérico que ocorre quando o termo do vetor potencial, termo que contém o fator  $k^2$  nas equações (3.101)-(3.104), é muito menor do que os demais termos destas equações. Conforme [41], foi verificado que para a formulação *Cfield* este problema pode ser minimizado fazendo a constante multiplicativa  $\alpha$  na equação (3.363) ser menor do que a constante multiplicativa  $\beta$ . Ou seja, esta solução propõe a minimização do termo que gera problema. Porém, verificou-se que para estes casos, condutores com raio máximo menor do que  $\lambda_0$ , a precisão nos resultados das correntes pode ser aumentada através a formulação *Efield* ou *Cfield*, utilizando 1 ponto de integração para a integral em  $\alpha$  e dois pontos de integração para a integral em  $\alpha'$ . Ou seja, esta solução propõe a utilização de *Point Matching* para a avaliação das integrais em  $\alpha$ . Assim definiu-se que

$$n_\alpha = n'_\alpha = 2, \quad (5.1)$$

para superfícies dielétricas ou condutoras onde o raio máximo é maior que  $\lambda_0$ , e

$$\begin{aligned} n_\alpha &= 1, \\ n'_\alpha &= 2, \end{aligned} \quad (5.2)$$

para superfícies condutoras onde o raio máximo é menor que  $\lambda_0$ .

Para a integral em  $\varphi$  o intervalo de integração entre 0 e  $\pi$  é dividido em  $n_{int}$  subintervalos e uma quadratura Gaussiana com  $n_\varphi$  pontos é aplicada a cada um destes subintervalos, conforme descrito na Seção 3.4. O valor de  $n_\varphi$  é definido como:

$$n_\varphi = \frac{n_{\varphi Tmáximo}}{MNSI}, \quad (5.3)$$

onde  $n_{\varphi T_{\text{máximo}}}$  é maior número de pontos necessários para avaliar o BOR, obtido utilizando o raio máximo do BOR e as equações (3.164) e (3.165), e  $MNSI$  é o maior número de subintervalos que divide o intervalo de integração entre 0 e  $\pi$ . Esta técnica permite a análise de BOR de grandes dimensões sem um aumento significativo no tempo de processamento, pois os parâmetros da quadratura Gaussiana de  $n_{\varphi}$  pontos são calculados uma única vez e disponibilizados quando necessário, ou seja, em função do número de intervalos requerido para cada integração.

Através dos testes realizados observou-se que quando os segmentos fonte e observação são os mesmos, caso onde o Método 3 de eliminação das singularidades é aplicado (veja Seção 3.5.3), o resultado para integral em  $\varphi$  é significativamente melhorado se o intervalo de integração entre 0 e  $\pi$  não é dividido em subintervalos. Assim, neste caso  $n_{\text{int}} = 1$  e o valor de  $n_{\varphi}$  necessário é determinado utilizando a equação (3.165).

## 5.2 - Cálculo do Erro para a Avaliação dos Resultados

Para a avaliação dos resultados numéricos obtidos nos testes realizados foram utilizados dois tipos de erro. O erro relativo máximo médio ( $E_{RMM}$ ) para a corrente é definido como:

$$E_{RMM}(\%) = \frac{E_{RM}(J_i) + E_{RM}(J_{\phi}) + E_{RM}(M_i) + E_{RM}(M_{\phi})}{4}, \quad (5.4)$$

onde  $E_{RMM}$  leva em conta os erros relativos máximos das componentes tangenciais ( $\hat{t}$  e  $\hat{\phi}$ ) das correntes equivalentes superficiais  $\vec{J}(\vec{r}')$  e  $\vec{M}(\vec{r}')$ , da seguinte forma:

$$E_{RM} = 100 \frac{\max |X^{MoM}(j) - X^{Ref}(j)|}{\max |X^{Ref}(j)|} (\%), \quad (5.5)$$

onde  $X^{MoM}(j)$  e  $X^{Ref}(j)$  são as correntes tangenciais superficiais obtidas através do MoM e através de uma solução de referência (solução analítica ou disponível na literatura),

respectivamente. O outro tipo de erro utilizado para avaliar os resultados é o erro absoluto médio,  $E_{AM}$ , para o campo na região de campo distante, definido como:

$$E_{AM} = \frac{1}{2NP} \left\{ \sum_{l=1}^{NP} |E_{FF\theta}^{MoM}(l) - E_{FF\theta}^{Ref}(l)| + \sum_{l=1}^{NP} |E_{FF\phi}^{MoM}(l) - E_{FF\phi}^{Ref}(l)| \right\} \text{ (dB)}, \quad (5.6)$$

onde  $E_{FF}^{MoM}(l)$  e  $E_{FF}^{Ref}(l)$  são os campos elétrico em cada ponto de observação na região de campo distante calculados através do MoM e da solução de referência, respectivamente, e  $NP$  é o número de pontos onde o campo é observado.

Ao utilizar o MoM para a avaliação do espalhamento eletromagnético por BOR o número de funções de base utilizado para representar a corrente superficial equivalente (isto é, número de segmentos utilizados na discretização das superfícies do BOR) é fundamental para alcançar a precisão e convergência desejadas na análise numérica. Assim, com o objetivo de estabelecer o número mínimo de segmentos para discretizar superfícies condutoras e dielétricas, foram realizados vários testes em esferas condutoras e dielétricas com diferentes tamanhos elétricos e valores de permissividade elétrica,  $\epsilon_r$  (para esferas dielétricas). Para cada caso avaliado a segmentação da superfície foi aumentada até que  $E_{RMM}$  fosse menor do que 1%. Os resultados destes testes conduzirão a fórmulas empíricas que indicam o número ótimo de segmentos por  $\lambda_0$ , ONS (*Optimal Number of Segments*), em função das características elétricas e geométricas da esfera, onde  $\lambda_0$  é o comprimento de onda no vácuo. Tais fórmulas, apresentadas nas Seções 5.3 e 5.4, foram utilizadas como base para a escolha do número de segmentos para a análise de todos os BOR avaliados neste trabalho.

### 5.3 - Esfera CEP Iluminada por uma Onda Plana

A Figura 5.1 ilustra a estrutura sob análise nesta seção, ou seja, uma esfera condutora centrada em  $z = 0$ , com raio  $R = a \lambda_0$  e iluminada por uma onda plana de amplitude  $E_o = 1$  (V/m), polarizada na direção  $\hat{x}$  e propagando na direção  $\hat{z}$ . Para validar a formulação apresentada nos Capítulos 2 a 4 e encontrar ONS para superfícies condutoras, a esfera ilustrada na

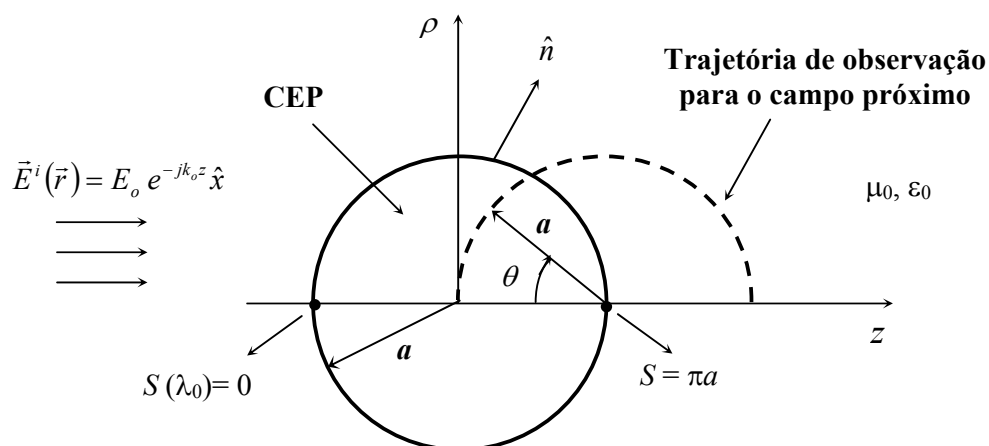


Figura 5.1 – Esfera CEP iluminada por uma onda plana.

Figura 5.1 foi analisada para diferentes valores raio. As análises foram conduzidas utilizando a formulação *Cfield* para evitar problemas de ressonância uma vez que, a esfera constitui uma superfície fechada, conforme discutido na Seção 2.2.2.

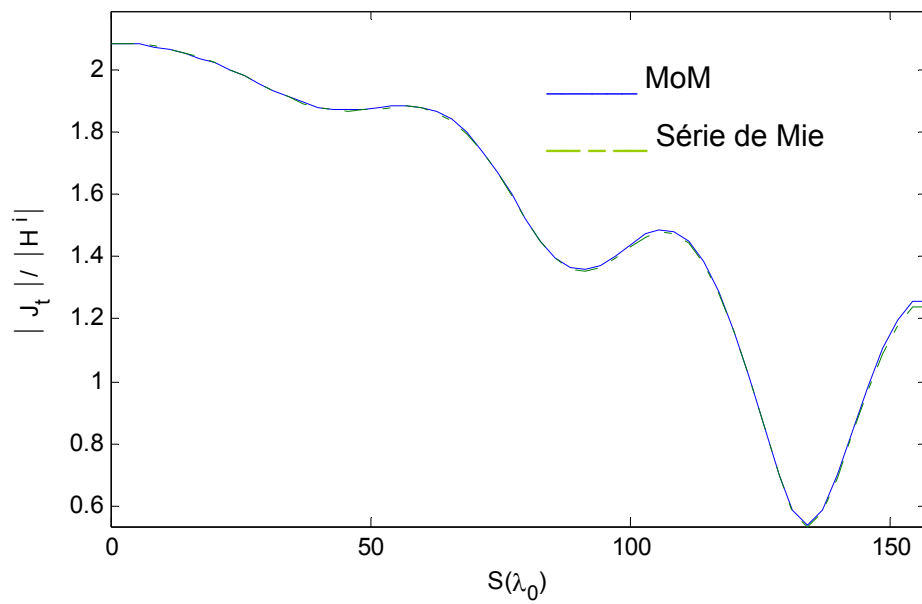
Alguns dos resultados obtidos na análise de esferas condutoras são apresentados nas Figuras 5.2 a 5.7. As Figuras 5.2 e 5.5 apresentam a densidade de corrente elétrica superficial,  $\vec{J}(\vec{r}')$ , normalizada em relação ao campo magnético incidente, nas direções  $\hat{i}$  e  $\hat{\phi}$  em função da coordenada de superfície  $S(\lambda_0)$ , que vale zero em frente a esfera e é igual a  $\lambda a$  atrás da esfera. As Figuras 5.3 e 5.6 apresentam a amplitude das componentes  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  dos campos próximos  $\vec{E}(\vec{r})$  e  $\vec{H}(\vec{r})$  observados ao longo da trajetória indicada na Figura 5.1. Esta trajetória permite a observação em pontos muito próximos à superfície da esfera condutora. Assim é possível avaliar o desempenho das equações para o cálculo das componentes de campo próximo, tendo em vista as singularidades presentes nestes casos. Para os campos na região de campo próximo foram realizadas observações em diferentes planos  $\phi$ , porém, conforme Figuras 5.3 e 5.6, são apresentados os resultados somente para o plano  $\phi = 45^\circ$  para que todas as componentes de  $\vec{E}(\vec{r})$  e  $\vec{H}(\vec{r})$  tenham valores não nulos. E as Figuras 5.4 e 5.7 ilustram a seção reta de radiação bi-estática ( $\sigma/\lambda^2$ ) nas direções  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\phi}$ . São apresentados



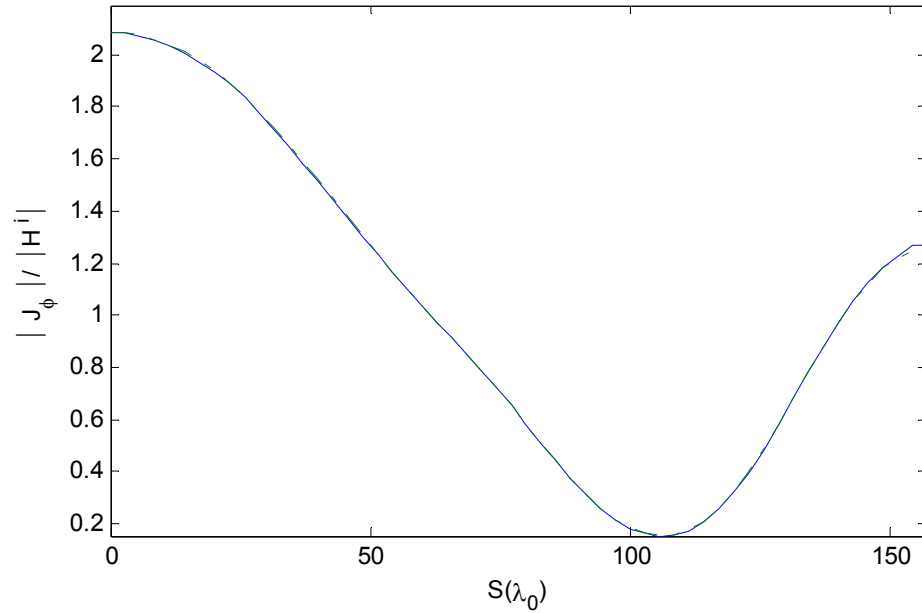
resultados para esferas com raio  $a = 0,5 \lambda_0$  e  $a = 50 \lambda_0$ , respectivamente. Estes resultados são comparados com as respectivas soluções analíticas (série de Mie [71]). Para a esfera de raio  $a = 0,5 \lambda_0$ ,  $E_{RMM} = 0,93 \%$  e  $E_{AM} = 0,0285$  dB quando utilizados 55 segmentos para discretizar a curva geratriz (aproximadamente 35 segmentos por  $\lambda_0$ ). Para a esfera de raio  $a = 50 \lambda_0$ ,  $E_{RMM} = 0,97 \%$  e  $E_{AM} = 0,1143$  dB quando utilizados 2355 segmentos para discretizar a curva geratriz (aproximadamente 15 segmentos por  $\lambda_0$ ). Como pode ser verificado nas Figuras 5.3 e 5.6, para pontos de observação muito próximos à superfície da esfera condutora o campo elétrico apresenta um pico. Este comportamento se deve às singularidades presentes nas equações (3.83)-(3.89), cujo tratamento não faz parte do escopo deste trabalho.

A esfera condutora ilustrada na Figura 5.1 foi analisada para diferentes valores de raio ( $0,25 \lambda_0$ ,  $0,5 \lambda_0$ ,  $1 \lambda_0$ ,  $2,5 \lambda_0$ ,  $5 \lambda_0$ ,  $10 \lambda_0$ ,  $25 \lambda_0$ ,  $50 \lambda_0$  e  $100 \lambda_0$ ). Para cada caso avaliado a segmentação da superfície foi aumentada até que  $E_{RMM}$  fosse menor do que 1%. Assim foi possível determinar o número ótimo de segmentos, em função do comprimento de onda no vácuo (ONS) para cada caso. Na Tabela 5.1 são apresentados os resultados obtidos nestas análises e a Figura 5.8 ilustra o valor de ONS obtido para diferentes valores de raios. A interpolação dos pontos na Figura 5.8 conduz a uma fórmula empírica, apresentada na equação (5.7) e também plotada na Figura 5.8, que determina ONS para análise de esferas condutoras. Na Tabela 5.1 também é apresentado o tempo de processamento requerido para o cálculo da corrente superficial para cada uma das esferas avaliadas. Para as simulações foi utilizado um computador com processador ADM Turion 64, 512 MB de memória RAM e clock de 1.8 GHz.

$$\text{ONS}|_{\text{CEP}} = 14,636 + 29,615 e^{-0,8759R} \quad (5.7)$$

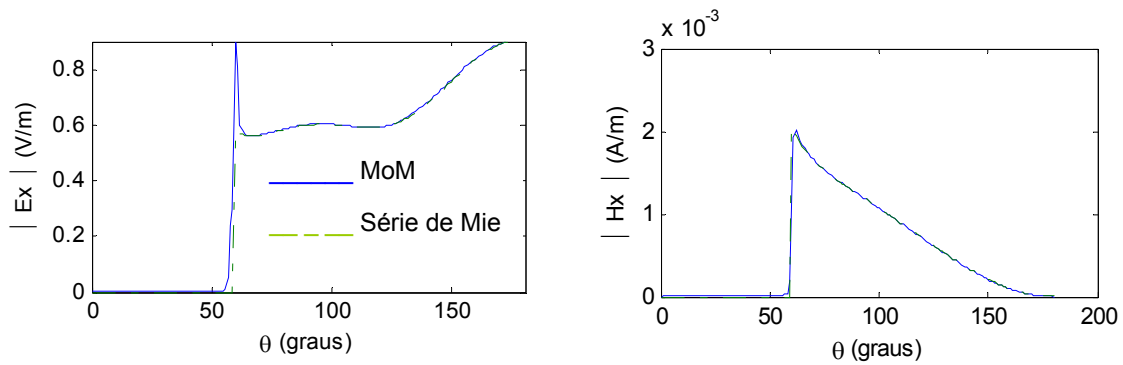


Componente na direção  $\hat{t}$

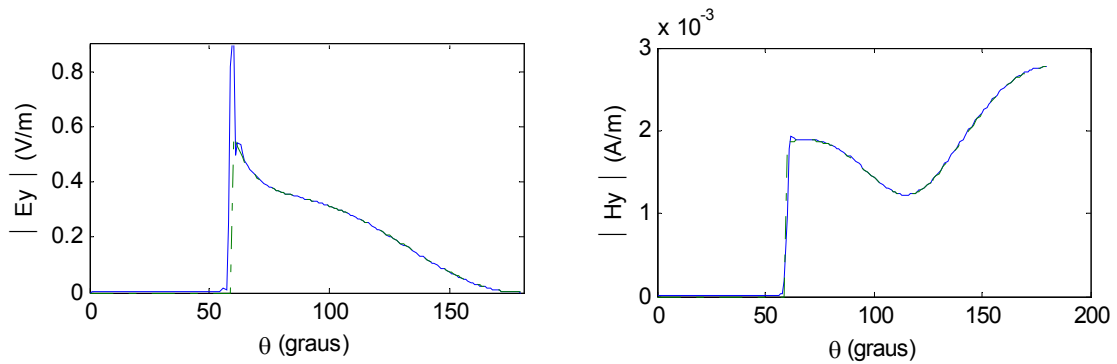


b) Componente na direção  $\hat{\phi}$

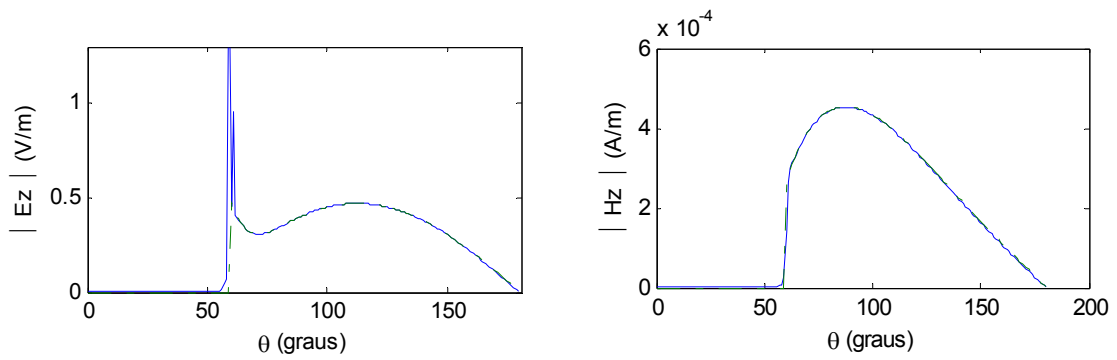
Figura 5.2 – Corrente elétrica equivalente: esfera CEP de raio  $a = 0,5 \lambda_0$ , discretização da curva em 55 segmentos (35 segmentos /  $\lambda_0$ ).



a) Campo elétrico componente na direção  $\hat{x}$       b) Campo magnético componente na direção  $\hat{x}$



c) Campo elétrico componente na direção  $\hat{y}$       d) Campo magnético componente na direção  $\hat{y}$



e) Campo elétrico componente na direção  $\hat{z}$       f) Campo magnético componente na direção  $\hat{z}$

Figura 5.3 – Campo próximo: esfera CEP de raio  $a = 0,5 \lambda_0$ , discretização da curva em 55 segmentos (35 segmentos /  $\lambda_0$ ).

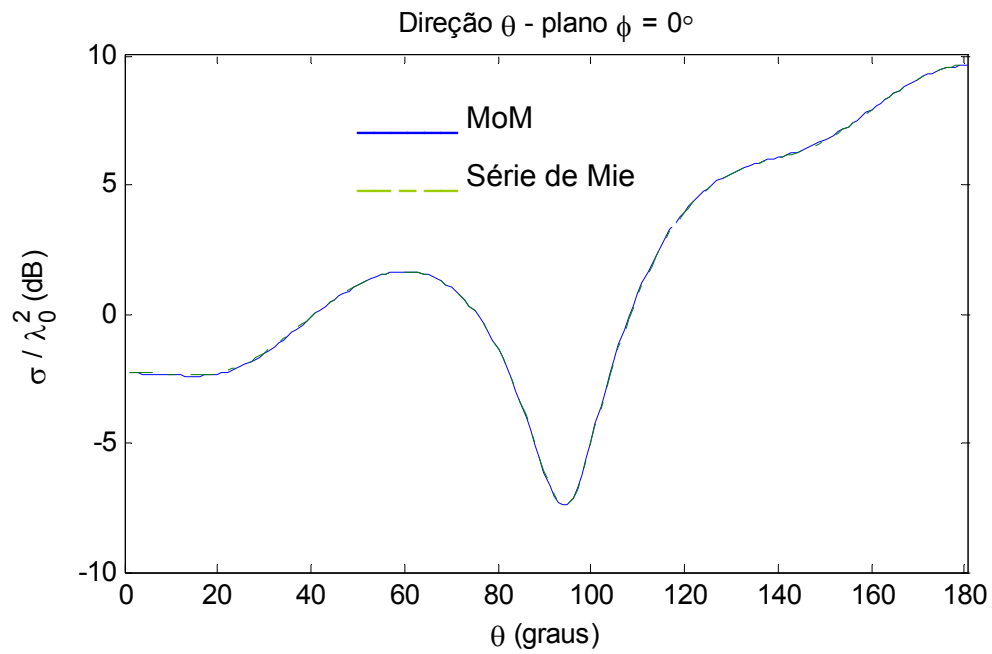
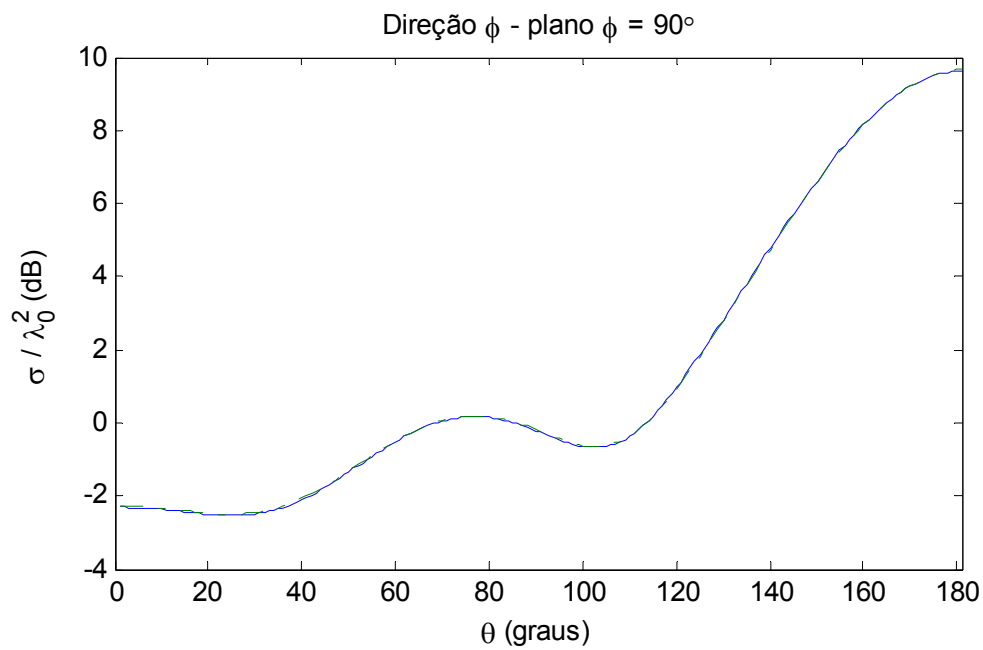
a) Componente na direção  $\hat{\theta}$ b) Componente na direção  $\hat{\phi}$ 

Figura 5.4 – Seção reta de radiação bi-estática: esfera CEP de raio  $a = 0,5 \lambda_0$ , discretização da curva em 55 segmentos (35segmentos /  $\lambda_0$ ).

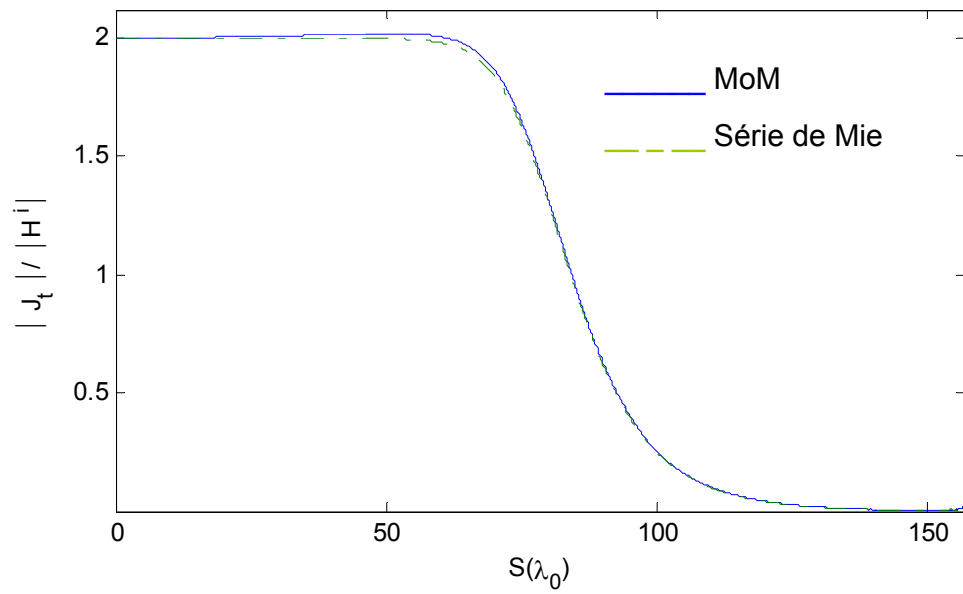
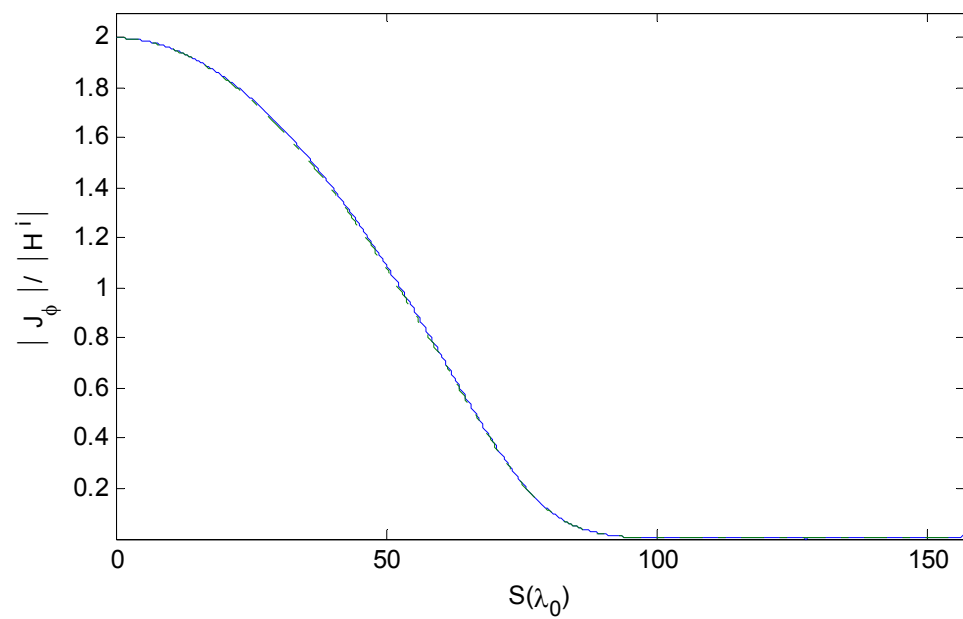
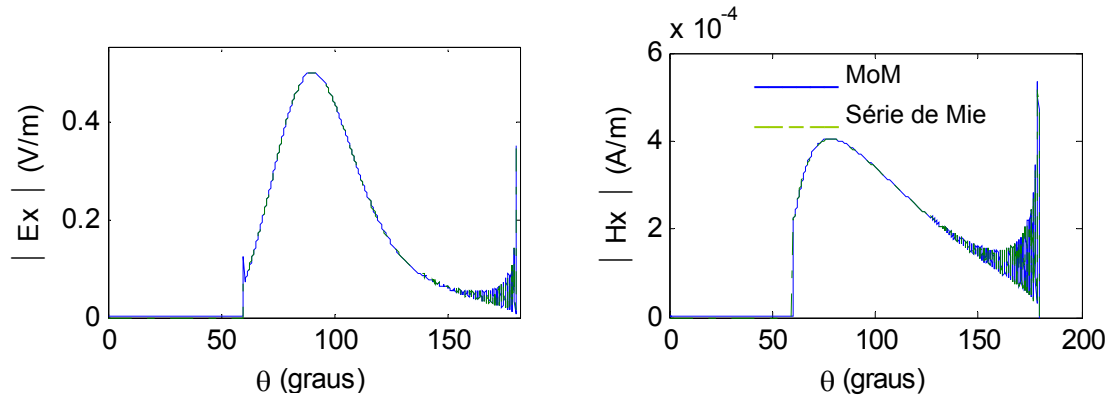
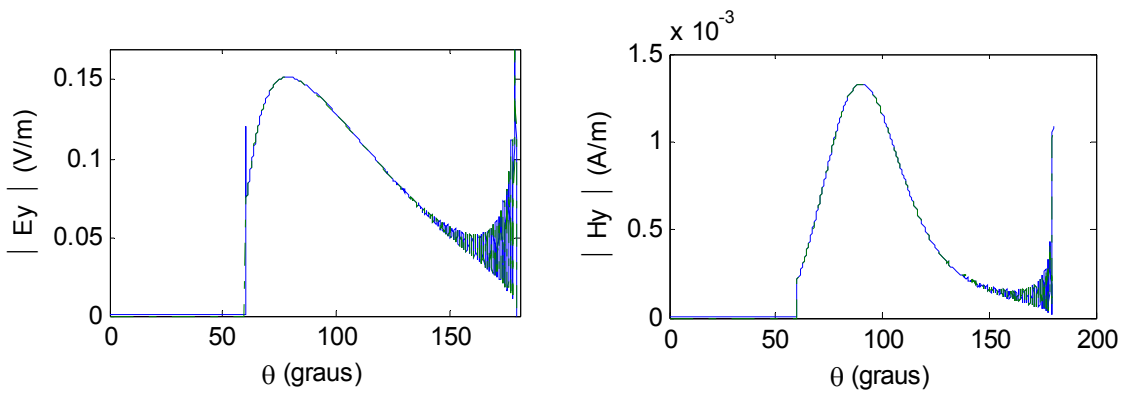
a) Componente na direção  $\hat{t}$ b) Componente na direção  $\hat{\phi}$ 

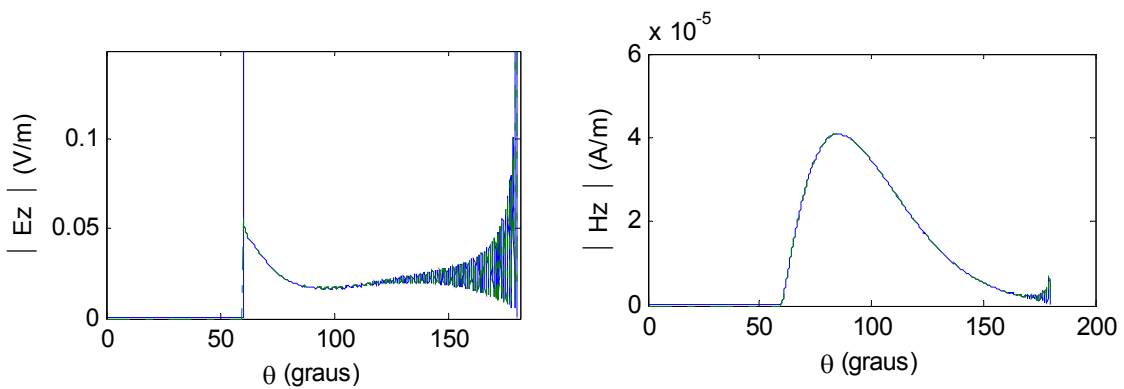
Figura 5.5 – Corrente elétrica equivalente: esfera CEP de raio  $a = 50 \lambda_0$ , discretização da curva em 2355 segmentos (15 segmentos /  $\lambda_0$ ).



a) Campo elétrico componente na direção  $\hat{x}$       b) Campo magnético componente na direção  $\hat{x}$



c) Campo elétrico componente na direção  $\hat{y}$       d) Campo magnético componente na direção  $\hat{y}$



e) Campo elétrico componente na direção  $\hat{z}$       f) Campo magnético componente na direção  $\hat{z}$

Figura 5.6 – Campo próximo: esfera CEP de raio  $a = 50 \lambda_0$ , discretização da curva em 2355 segmentos (15 segmentos  $\lambda_0$ ).

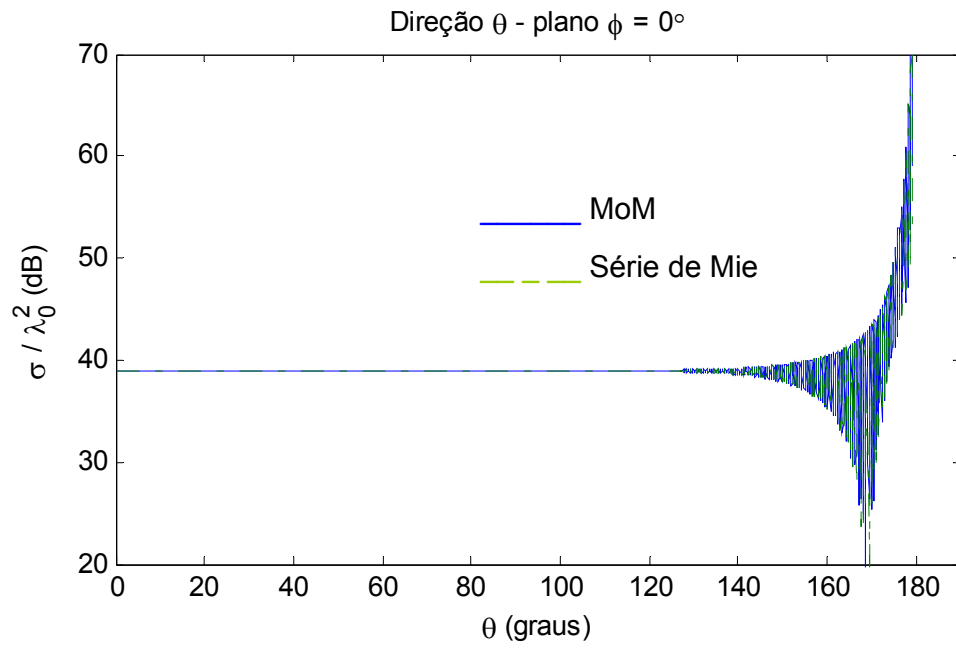
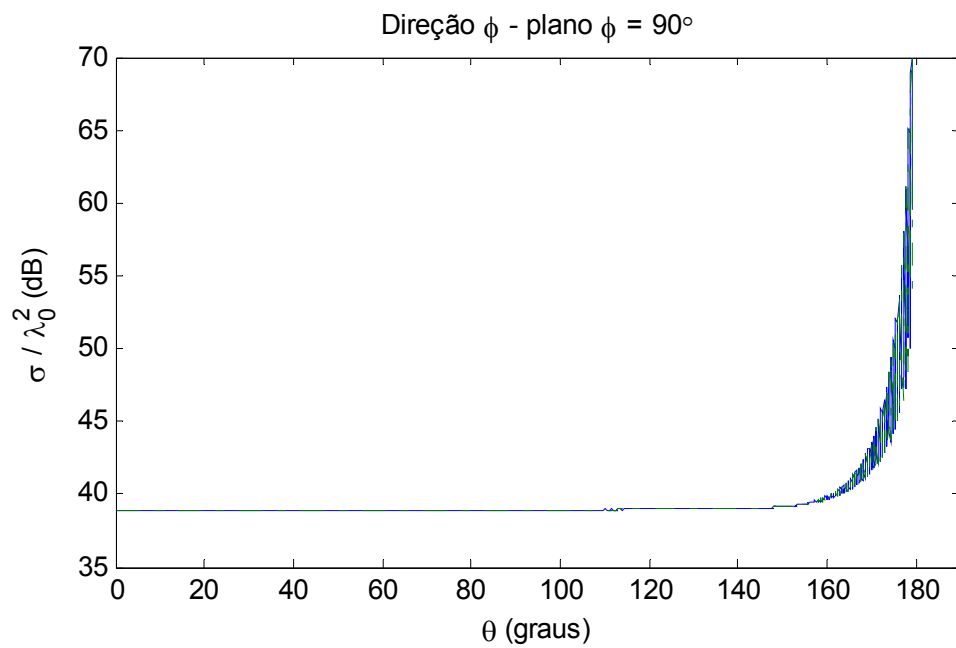
a) Componente na direção  $\hat{\theta}$ b) Componente na direção  $\hat{\phi}$ 

Figura 5.7 – Seção reta de radiação bi-estática: esfera CEP de raio  $a = 50 \lambda_0$ , discretização da curva em 2355 segmentos (15 segmentos /  $\lambda_0$ ).

Tabela 5.1 – Resultados para esferas CEP

Raio da espera ( $\lambda_0$ )	ONS	Nº de Segmentos	$E_{RMM}$ (%)	Tempo de Processamento (Seg)
0,25	41	31	0,93	1
0,5	35	54	0,93	2
1	35	109	0,82	6
2,5	20	156	0,61	20
5	15	235	0,90	67
10	15	471	0,91	436
25	15	1178	0,92	5.738
50	15	2355	0,97	41.177
100	15	4710	1,01	257.766

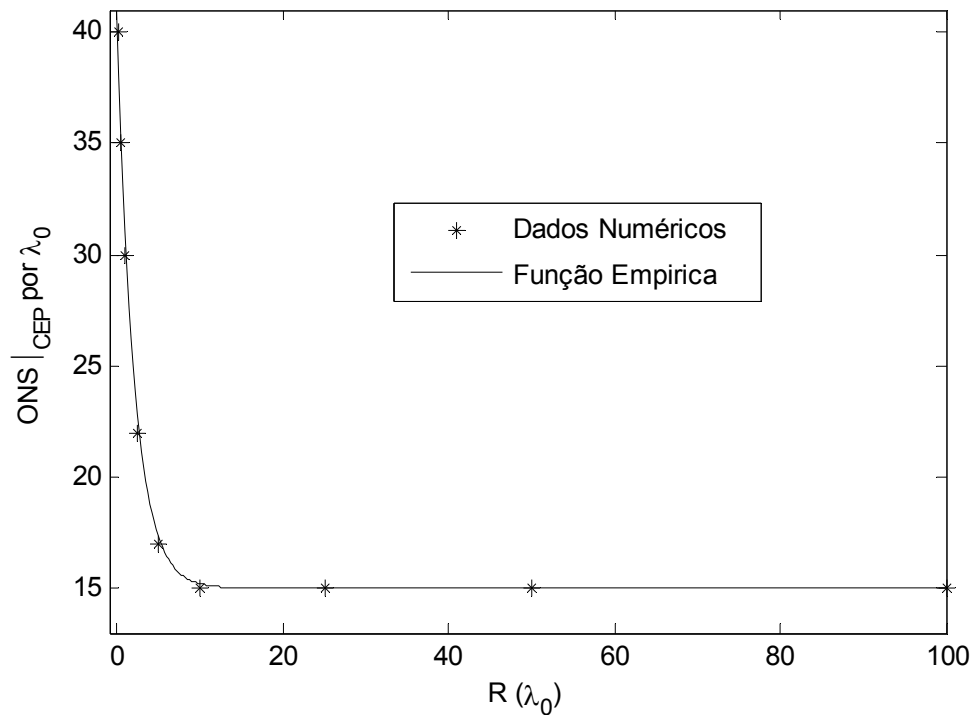


Figura 5.8 – ONS para esferas CEP.



Os resultados apresentados na Tabela 5.1 e ilustrados na Figura 5.8 demonstram, conforme esperado, que à medida que o raio  $R(\lambda_0)$  aumenta (isto é, a curvatura da esfera é mais suave) menos segmentos por  $\lambda_0$  são necessários para alcançar a precisão estabelecida. Pode ser verificado também que a precisão estabelecida é alcançada para valores relativamente baixos de ONS, o que gera um custo computacional reduzido. É importante lembrar que estes resultados foram obtidos utilizando a formulação *Cfield*, e para as integrais em  $\alpha$  e  $\alpha'$  foi considerada a regra estabelecida através das equações (5.1) e (5.3).

## 5.4 - Esfera Dielétrica Iluminada por uma Onda Plana

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos nos testes realizados com esferas semelhantes àquela ilustrada na Figura 5.1, porém constituída por material dielétrico. Para validar a formulação apresentada nos Capítulos 2 a 4 e encontrar ONS para superfícies dielétricas, o espalhamento eletromagnético de uma onda plana de amplitude  $E_o = 1$  (V/m), polarizada na direção  $\hat{x}$  e propagando na direção  $\hat{z}$  foi analisado através das formulações de *Müller*, *PMCHWT*, *Efield*, *Hfield*, *Cfield*, *EHfield* e *HEfield* para diferentes valores raio ( $0,5 \lambda_0$ ,  $2 \lambda_0$ ,  $5 \lambda_0$ ,  $10 \lambda_0$ ,  $25 \lambda_0$ ,  $50 \lambda_0$  e  $75 \lambda_0$ ) e permissividade elétrica relativa,  $\epsilon_r$  (1, 2, 10, 25, 50 e 100). A partir dos resultados obtidos em todos os testes realizados, incluindo aqueles não apresentados neste texto, pôde ser observado que, para a maioria dos casos, os resultados mais precisos são obtidos quando a formulação de *Müller* é utilizada, conforme discutido na Seção 2.2.1. Para os casos em que esta formulação não conduz ao resultado mais preciso, ainda assim este resultado encontra-se entre os melhores. Alguns dos resultados obtidos nos testes realizados são apresentados nas Figuras 5.9 a 5.14. As Figuras 5.9 e 5.12 apresentam a densidade das correntes superficiais elétrica,  $\vec{J}(\vec{r}')$ , e magnética,  $\vec{M}(\vec{r}')$ , normalizadas em relação aos campos magnético e elétrico incidentes, respectivamente, nas direções  $\hat{t}$  e  $\hat{\phi}$  em função da coordenada de superfície  $S(\lambda_0)$ . Nas Figuras 5.10 e 5.13 são apresentadas a amplitude das componentes  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  dos campos próximos  $\vec{E}(\vec{r})$  e  $\vec{H}(\vec{r})$  no plano  $\phi = 45^\circ$

ao longo da trajetória indicada na Figura 5.1. E as Figuras 5.11 e 5.14 ilustram a seção reta de radiação bi-estática ( $\sigma/\lambda^2$ ) nas direções  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\phi}$ . São avaliadas duas esferas, uma raio  $a = 0,5 \lambda_0$  e  $\epsilon_r = 100$  e outra com raio  $a = 10 \lambda_0$  e  $\epsilon_r = 50$ . Estes resultados foram obtidos pela formulação de Müller e são comparados com as respectivas soluções analíticas (série de Mie [71]). Para a esfera de raio  $a = 0,5 \lambda_0$ ,  $E_{RMM} = 0,998 \%$  e  $E_{AM} = 0,1423$  dB quando são utilizados 127 segmentos para discretizar a curva geratriz (aproximadamente 81 segmentos por  $\lambda_0$ ). Para a esfera de raio  $a = 10 \lambda_0$ ,  $E_{RMM} = 1,065 \%$  e  $E_{AM} = 0,3639$  dB quando são utilizados 943 segmentos para discretizar a curva geratriz (aproximadamente 30 segmentos por  $\lambda_0$ ). Utilizando um computador com processador ADM Turion 64, 512 MB de memória RAM e clock de 1.8 GHz para o cálculo das correntes superficiais foram necessários 193 segundos para a esfera de raio  $a = 0,5 \lambda_0$  e 68.835 segundos para a esfera de raio  $a = 10 \lambda_0$ .

Para ilustrar alguns outros resultados obtidos, na Tabela 5.2 são apresentados os valores de  $E_{RMM}$  obtidos na análise de uma esfera dielétrica de raio igual  $5 \lambda_0$ .

Tabela 5.2 –  $E_{RMM}$  (%) para esfera dielétrica com raio igual a  $5 \lambda_0$

$\epsilon_r$	ONS	Müller	PMCHWT	Efield	Hfield	Cfield	EHfield	HEfield
1	15	1,02	1,16	1,51	1,51	2,32	1,44	1,44
2	22	1,01	4,26	3,52	2,05	1,68	1,49	2,40
10	30	1,07	3,35	2,27	2,20	2,14	1,39	54,28
25	40	1,08	2,23	1,56	2,38	9,62	1,27	2,79
50	30	1,03	1,59	0,88	1,54	0,90	1,52	1,99
100	65	1,75	2,93	6,89	2,98	11,67	1,76	5,14

É importante ressaltar que, conforme equação (5.4) o erro  $E_{RMM}$  é uma média do erro relativo máximo para as correntes elétrica e magnética nas direções  $\hat{t}$  e  $\hat{\phi}$ . Ou seja, uma média de erros pontuais. Assim mesmo para valores altos de  $E_{RMM}$ , com alguns presentes na Tabela 5.2, verificou-se que estes erros pontuais não acarretam imprecisão nos cálculos dos campos nas regiões de campo próximo e distante.

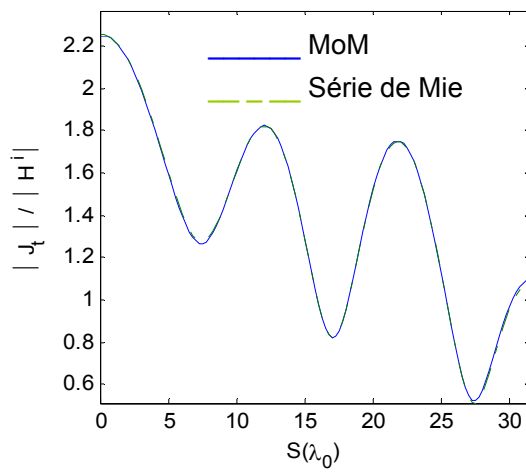
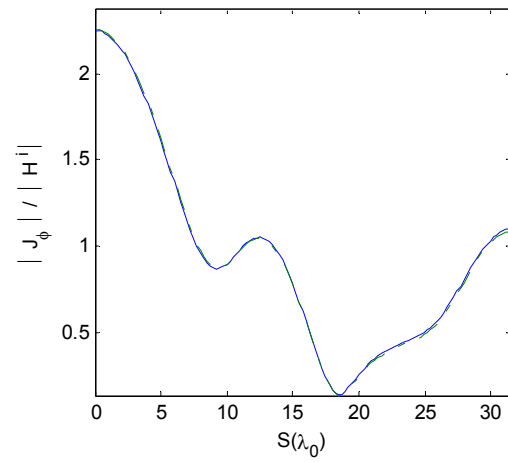
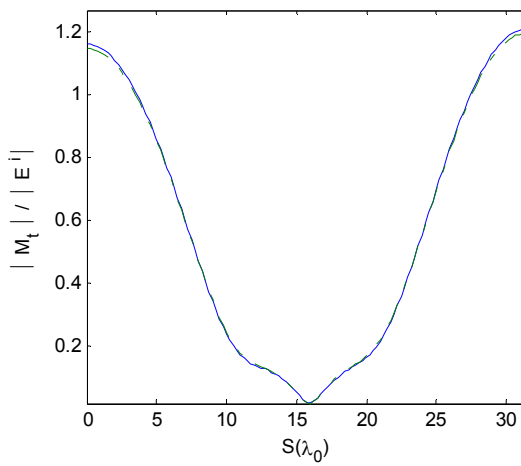
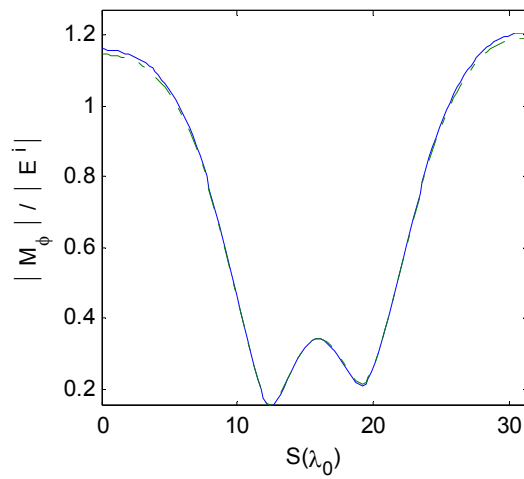
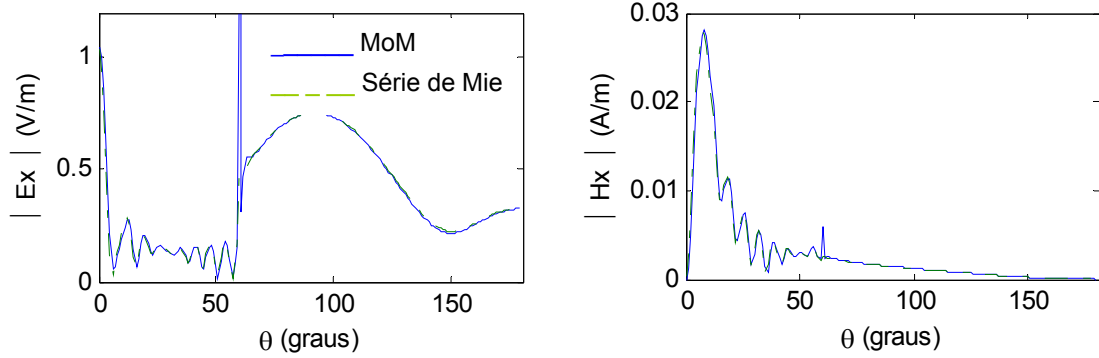
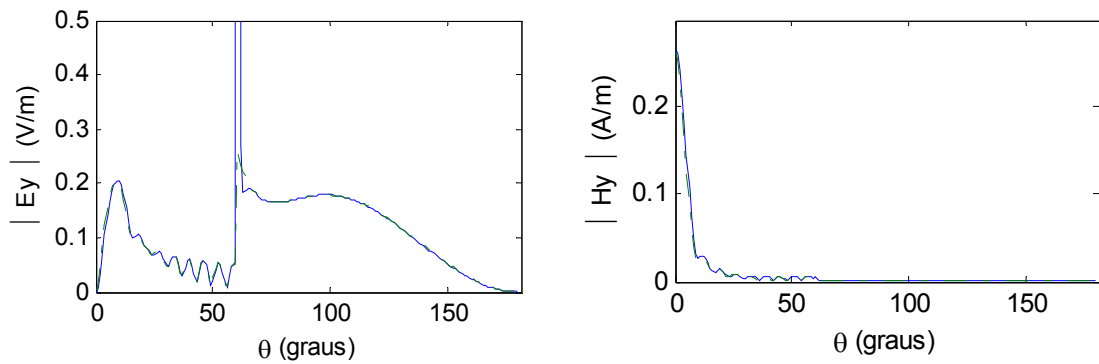
a) Corrente elétrica na direção  $\hat{t}$ b) Corrente elétrica na direção  $\hat{\phi}$ c) Corrente magnética na direção  $\hat{t}$ d) Corrente magnética na direção  $\hat{\phi}$ 

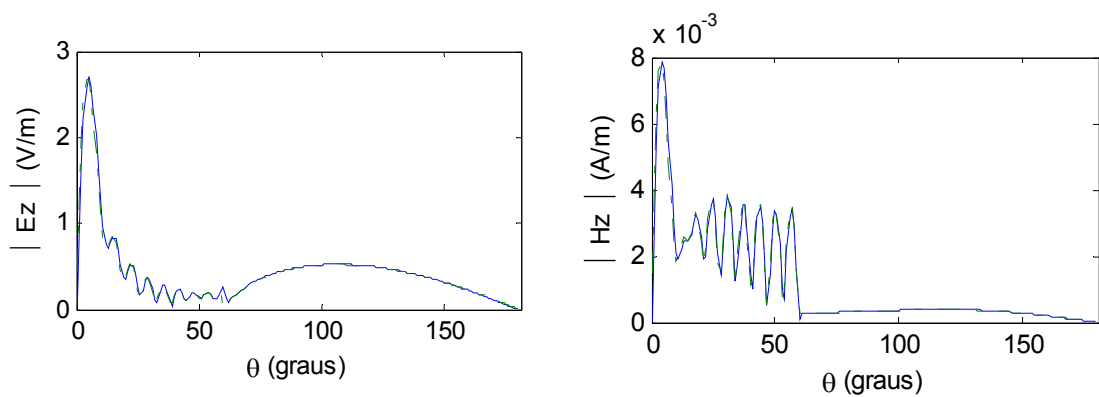
Figura 5.9 – Correntes elétrica e magnética equivalentes: esfera dielétrica de raio  $a = 0,5 \lambda_0$  e  $\epsilon_r = 100$ , discretização da curva em 127 segmentos (81 segmentos /  $\lambda_0$ ).



a) Campo elétrico componente na direção  $\hat{x}$     b) Campo magnético componente na direção  $\hat{x}$



c) Campo elétrico componente na direção  $\hat{y}$     d) Campo magnético componente na direção  $\hat{y}$



e) Campo elétrico componente na direção  $\hat{z}$     f) Campo magnético componente na direção  $\hat{z}$

Figura 5.10 – Campo próximo: esfera dielétrica de raio  $a = 0,5 \lambda_0$  e  $\epsilon_r = 100$ , discretização da curva em 127 segmentos (81 segmentos /  $\lambda_0$ ).

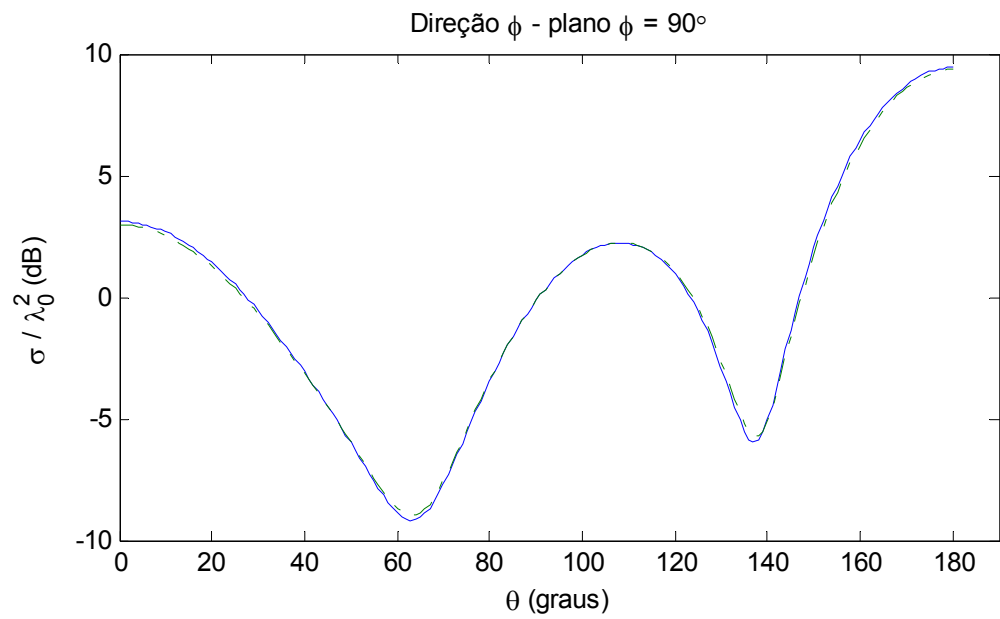
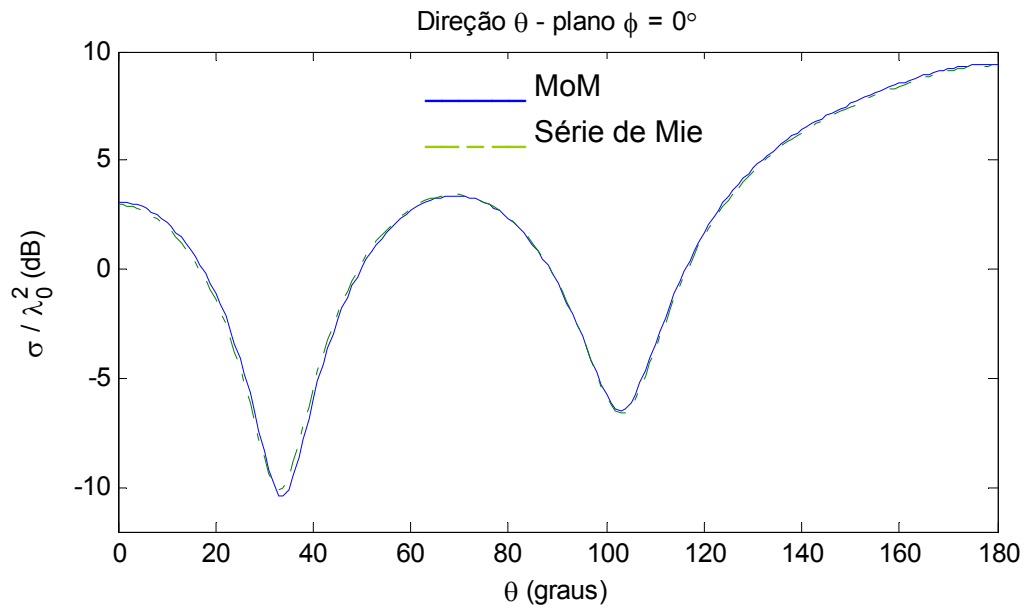


Figura 5.11 – Seção reta de radiação bi-estática: esfera dielétrica de raio  $a = 0,5 \lambda_0$  e  $\epsilon_r = 100$ , discretização da curva em 127 segmentos (81 segmentos /  $\lambda_0$ ).

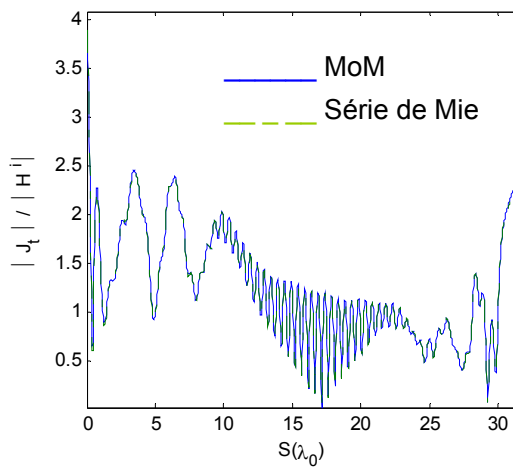
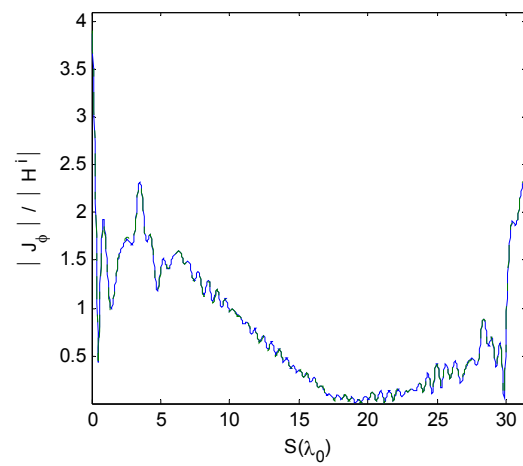
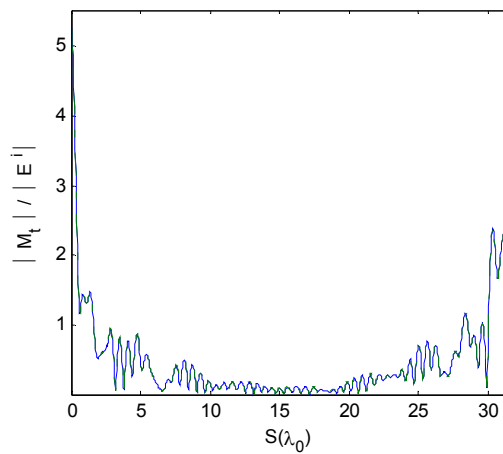
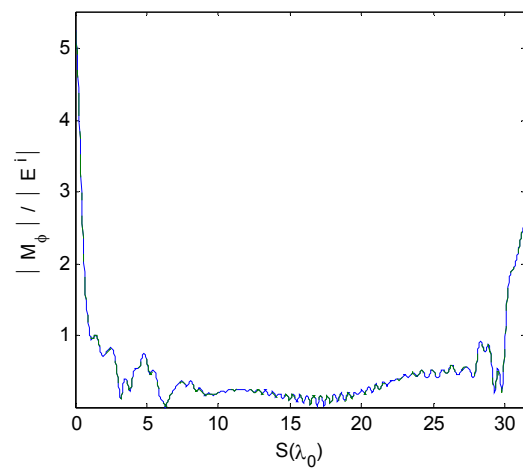
a) Corrente elétrica na direção  $\hat{t}$ b) Corrente elétrica na direção  $\hat{\phi}$ c) Corrente magnética na direção  $\hat{t}$ d) Corrente magnética na direção  $\hat{\phi}$ 

Figura 5.12 – Correntes elétrica e magnética equivalentes: esfera dielétrica de raio  $a = 10 \lambda_0$  e  $\epsilon_r = 50$ , discretização da curva em 943 segmentos (30 segmentos /  $\lambda_0$ ).

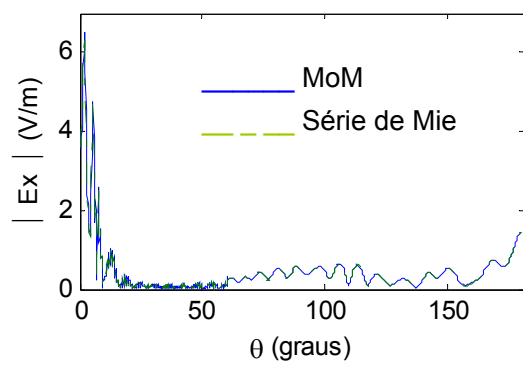
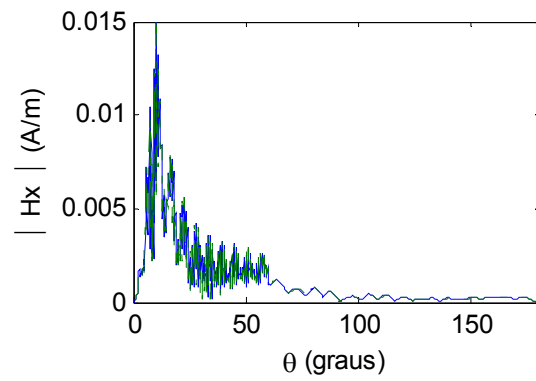
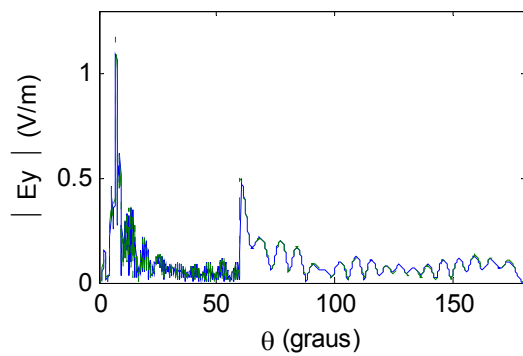
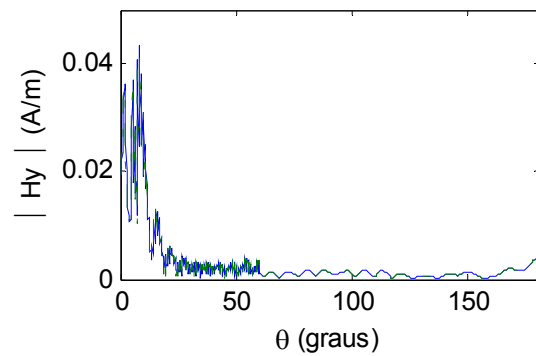
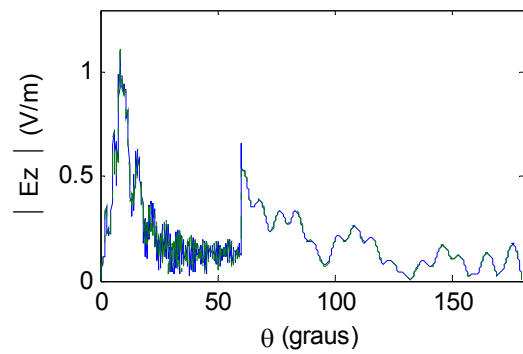
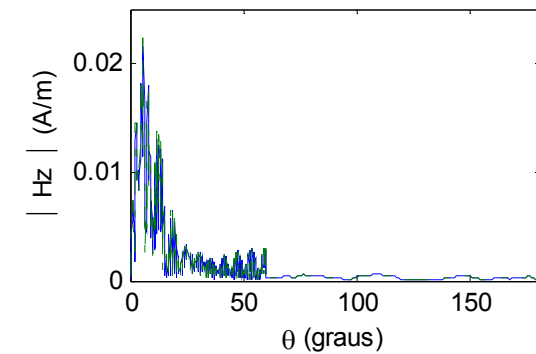
a) Campo elétrico componente na direção  $\hat{x}$ b) Campo magnético componente na direção  $\hat{x}$ c) Campo elétrico componente na direção  $\hat{y}$ d) Campo magnético componente na direção  $\hat{y}$ e) Campo elétrico componente na direção  $\hat{z}$ f) Campo magnético componente na direção  $\hat{z}$ 

Figura 5.13 – Campo próximo: esfera dielétrica de raio  $a = 10 \lambda_0$  e  $\epsilon_r = 50$ , discretização da curva em 943 segmentos (30 segmentos /  $\lambda_0$ ).

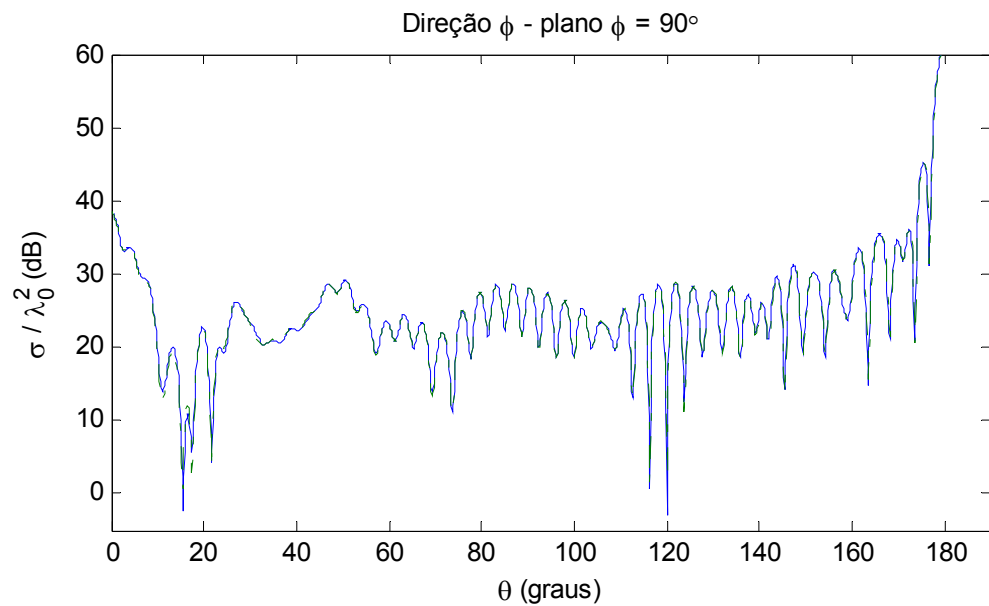
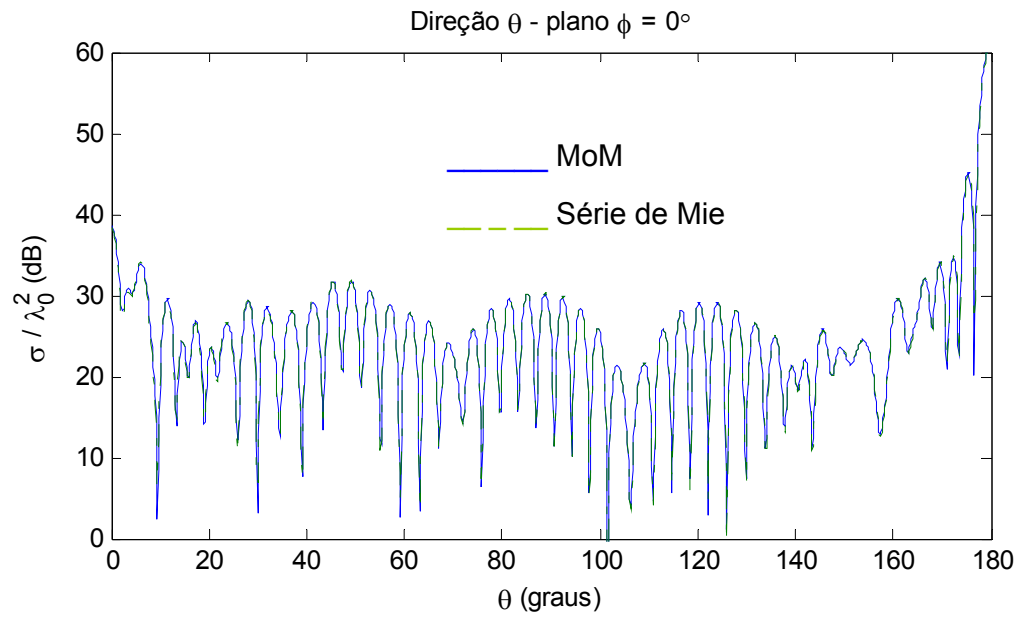


Figura 5.14 – Seção reta de radiação bi-estática: esfera dielétrica de raio  $a = 10 \lambda_0$  e  $\epsilon_r = 50$ , discretização da curva em 943 segmentos (30 segmentos /  $\lambda_0$ ).



Os tempos de processamento percentuais relativos aos casos da Tabela 5.2 são apresentados na Tabela 5.3. Nesta Tabela o tempo de processamento percentual é considerado em relação à formulação mais demorada. De acordo com os resultados, não existe uma diferença significativa entre o tempo de processamento requerido por cada formulação, principalmente quando são analisadas estruturas que necessitam de muitos segmentos para a discretização da curva geratriz e, conseqüentemente, muitas funções de base para a representação das correntes equivalentes.

Tabela 5.3 – Tempos de processamento percentuais para os casos apresentados na Tabela 5.2

Formulação	Tempo de Processamento (%)	
	Estrutura Segmentada com 200 Segmentos	Estrutura Segmentada com 700 Segmentos
<i>PMCHWT</i>	87	100
<i>Müller</i>	88	99,87
<i>Efield</i>	94	99,64
<i>Hfield</i>	100	99,63
<i>Cfield</i>	87	99,85
<i>EHfield</i>	85	99,61
<i>HEfield</i>	82	99,87

Tendo em vista a precisão dos resultados aliada ao tempo de processamento, a formulação de *Müller*, que se mostra mais indicada para a análise de BOR dielétricos homogêneos [51], foi a escolhida para ser utilizada nos testes que conduziram ao número ótimo de segmentos, ONS, para análise de esferas dielétricas homogêneas. Em todos os testes realizados foi assegurado, através do aumento do número de segmentos utilizados para descrever a curva geratriz, um erro  $E_{RMM}$  menor do que 1%, e assim foi estabelecido ONS para cada caso avaliado. Na Figura 5.15 os pontos indicam o valor de ONS para os diferentes casos avaliados em função da permissividade elétrica relativa,  $\epsilon_r$ , da esfera dielétrica. A interpolação destes pontos conduz a uma fórmula empírica, apresentada na equação (5.8) e também ilustrada na Figura 5.15, que determina ONS para análise de esferas dielétricas.

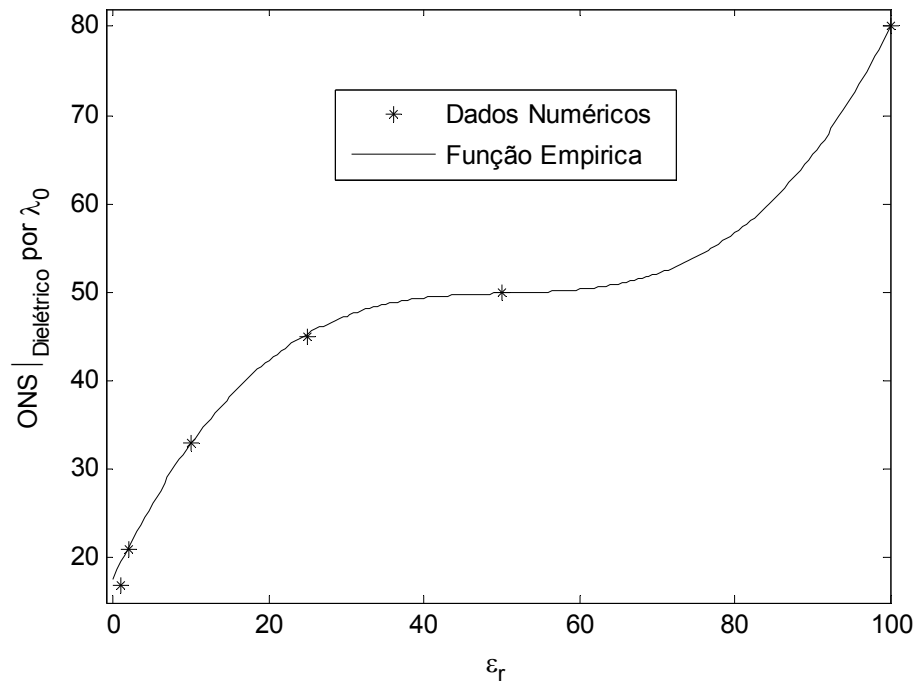


Figura 5.15 – ONS para esferas dielétricas.

$$\text{ONS}_{\text{Dielétrico}} = 0,00024 \epsilon_r^3 - 0,036 \epsilon_r^2 + 1,87 \epsilon_r + 17,71 \quad (5.8)$$

De acordo com a equação (5.8) pode-se observar que ONS não varia com o raio da esfera,  $R(\lambda_0)$ , mas conforme esperado, à medida que  $\epsilon_r$  aumenta mais segmentos por  $\lambda_0$  são necessários para discretizar a superfície da esfera dielétrica. A precisão estabelecida foi alcançada para valores relativamente baixos de ONS, o que conduz à uma solução numérica com um esforço computacional reduzido. Verificou-se que para todas as formulações a solução não deteriora quando a constante dielétrica aumenta desde que seja utilizado um suficiente de segmentos para discretizar a curva geratriz. Observou-se também, que todas as formulações fornecem bons resultados e estão aptas para a utilização na maioria dos casos estudados. Ainda assim, a partir destes resultados, pode-se afirmar que dentre as sete formulações apresentadas para a análise de superfícies dielétricas, para todos os valores de  $\epsilon_r$

considerados, a que fornece os resultados mais precisos é a formulação de *Müller*. É importante lembrar que para as integrais em  $\alpha$  e  $\alpha'$ , foi considerada a regra expressa através das equações (5.1) e (5.3), pois o aumento no número de pontos de integração não proporciona uma melhora na solução proporcional ao custo de processamento quando o valor de  $\epsilon_r$  aumenta, que contraria o que é exposto em [53].

## 5.5 - Esfera Condutora Recoberta por uma Camada Dielétrica

O objetivo desta seção é demonstrar a validade da formulação apresentada nos Capítulos 2 a 4 para a análise de BOR constituídos de materiais dielétricos e condutores. Para tanto é considerada uma esfera condutora recoberta por uma camada dielétrica conforme ilustrado na Figura 5.16. A esfera condutora tem raio  $a$ , está centrada em  $z = 0$  e é recoberta por uma camada dielétrica de raio  $b$  com permissividade elétrica relativa  $\epsilon_r$ . A estrutura é iluminada por uma onda plana de amplitude  $E_o = 1$  (V/m), polarizada na direção  $\hat{x}$  e propagando na direção  $\hat{z}$ .

As Figuras 5.17 e 5.18 apresentam os resultados da densidade das correntes superficiais elétrica,  $\vec{J}(\vec{r}')$ , e magnética,  $\vec{M}(\vec{r}')$ , normalizadas em relação aos campos magnético e elétrico incidentes, respectivamente, nas direções  $\hat{t}$  e  $\hat{\phi}$  e a seção reta de radiação bi-estática  $(\sigma/\lambda^2)$  nas direções  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\phi}$ , respectivamente, obtidos na análise da estrutura ilustrada na Figura 5.16 para  $a = 5 \lambda_0$ ,  $b = 10 \lambda_0$  e  $\epsilon_r = 20$ . No gráfico da Figura 5.17 os segmentos de número 1 a 280 descrevem a superfície da esfera CEP interna e os segmentos de número 281 a 1610 descrevem a superfície da casca dielétrica. A superfície condutora foi discretizada utilizando 280 segmentos o que corresponde a aproximadamente 17,36 segmentos por  $\lambda_0$ , conforme determinado pela equação (5.7), e para a superfície dielétrica foram utilizados 1330 segmentos o que corresponde a aproximadamente 42,36 segmentos por  $\lambda_0$ , conforme

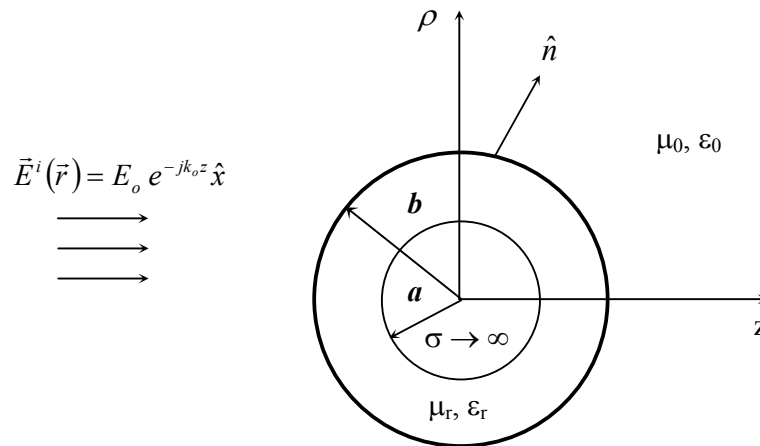


Figura 5.16 – Esfera condutora recoberta por camada dielétrica.

determinado pela equação (5.8). A análise foi realizada considerando a formulação *Cfield* para a superfície CEP para evitar problemas de ressonância, já que se trata de uma superfície fechada, e a formulação de *Müller* para a superfície dielétrica. Os resultados numéricos são comparados com as respectivas soluções analíticas (série de Mie [71]) e os valores de erro obtidos são  $E_{RMM} = 0,949\%$  (menor que 1% conforme esperado) e  $E_{AM} = 0,51$  dB.

## 5.6 - Esfera Constituída de Camadas Homogêneas

Nesta seção é investigada a validade da formulação apresentada nos Capítulos 2 a 4 para a análise de BOR constituídos por camadas homogêneas de diferentes materiais dielétricos. Primeiramente é obtida a solução do espalhamento eletromagnético por uma esfera dielétrica de raio  $a$  com permissividade elétrica relativa  $\epsilon_{r1}$ , centrada em  $z = 0$  e recoberta por uma camada dielétrica de raio  $b$  com permissividade elétrica relativa  $\epsilon_{r2}$ . A estrutura é iluminada por uma onda plana de amplitude  $E_o = 1$  (V/m), polarizada na direção  $\hat{x}$  e propagando na direção  $\hat{z}$ , conforme ilustrado na Figura 5.19.

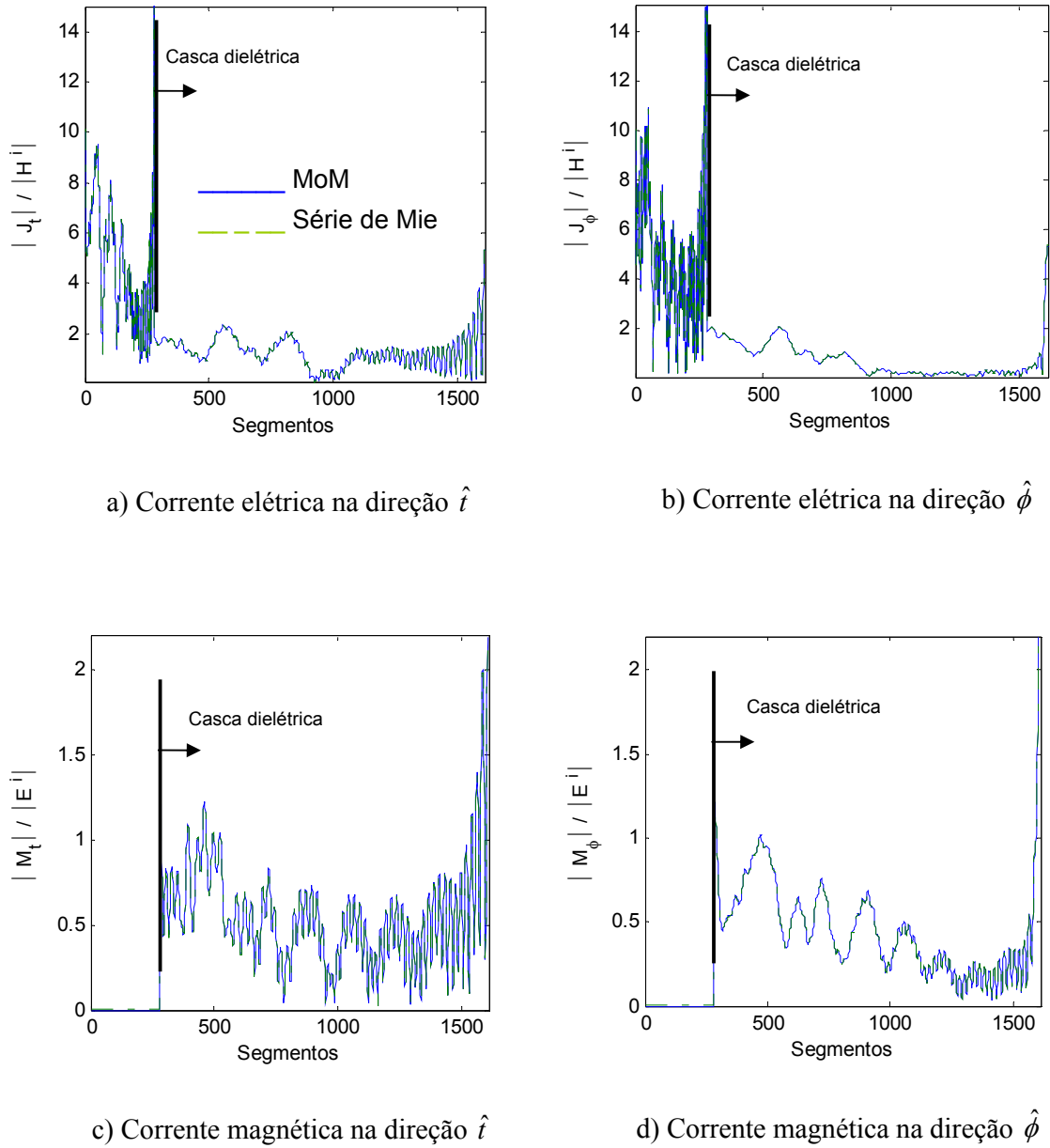


Figura 5.17 – Correntes elétrica e magnética equivalentes: esfera CEP com raio  $a = 5 \lambda_0$  recoberta por uma casca dielétrica com raio  $b = 10 \lambda_0$  e  $\epsilon_r = 20$ .

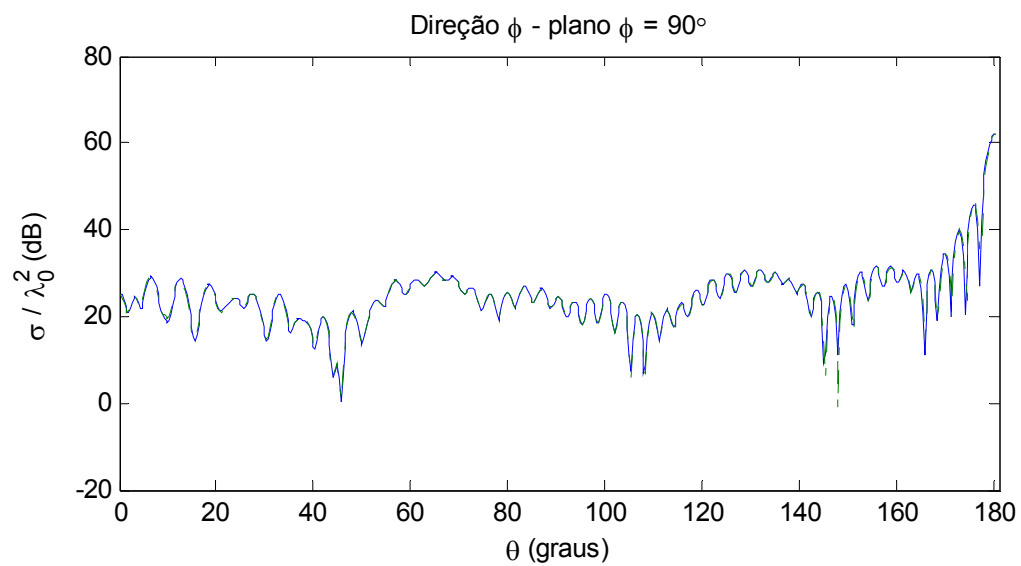
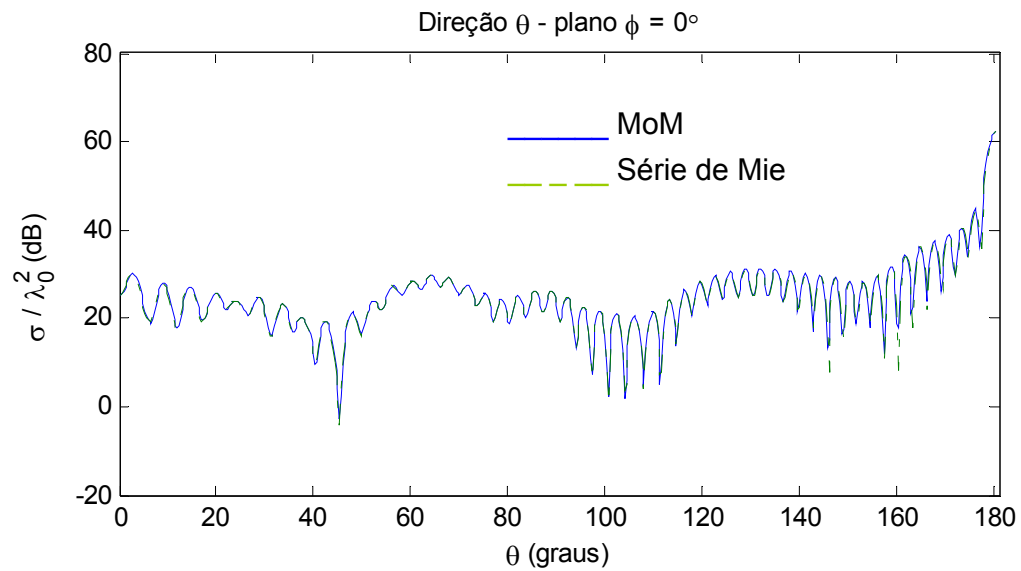


Figura 5.18 – Seção reta de radiação bi-estática: esfera CEP com raio  $a = 5 \lambda_0$  recoberta por uma casca dielétrica com raio  $b = 10 \lambda_0$  e  $\epsilon_r = 20$ .

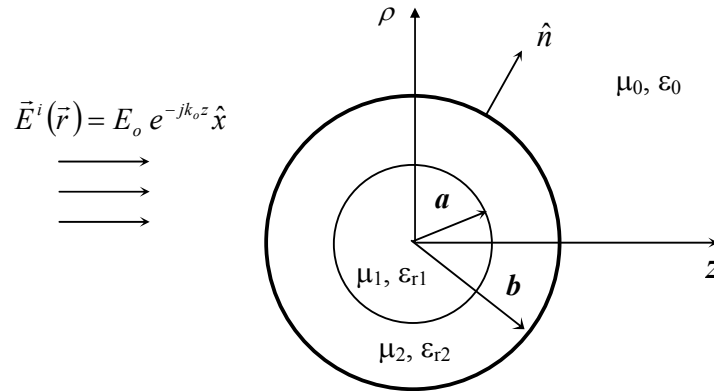
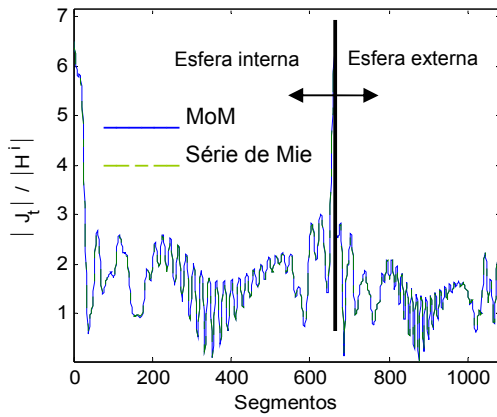
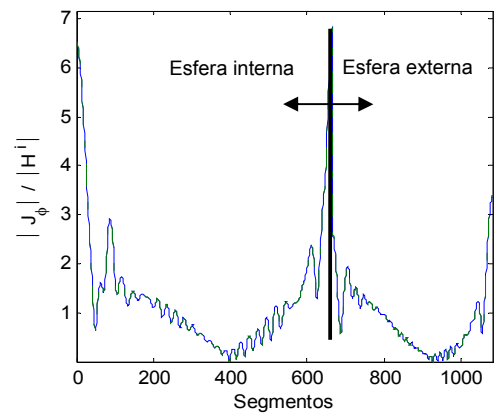


Figura 5.19 – Esfera constituída de duas camadas dielétricas homogêneas.

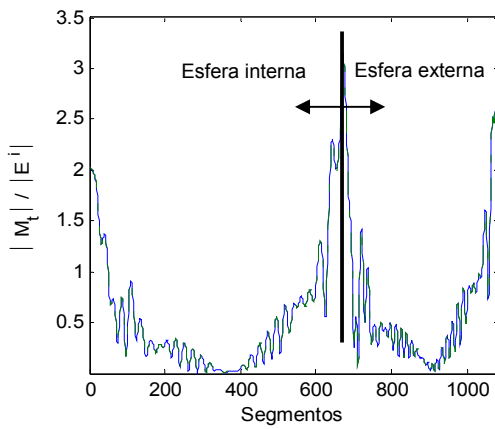
A Figura 5.20 apresenta a densidade das correntes superficiais elétrica e magnética normalizadas em relação aos campos magnético e elétrico incidentes, respectivamente, nas direções  $\hat{t}$  e  $\hat{\phi}$ , obtidos na análise da estrutura ilustrada na Figura 5.19 para  $a = 5 \lambda_0$ ,  $b = 5,05 \lambda_0$ , permissividade relativa da camada interna igual a 20 e da camada externa igual a 5. No gráfico da Figura 5.20 os segmentos de número 1 a 665 descrevem a superfície da esfera interna e os segmentos de número 666 a 1080 descrevem a superfície dielétrica externa. A segmentação da superfície dielétrica interna foi executada utilizando 665 segmentos, o que corresponde a aproximadamente 42,36 segmentos por  $\lambda_0$ , e na superfície dielétrica externa foram utilizados 415 segmentos, o que corresponde a aproximadamente 26,16 segmentos por  $\lambda_0$ , conforme determinado pela equação (5.8). Os resultados obtidos com as respectivas soluções analíticas (série de Mie [71]) e os valores de erro obtidos são  $E_{RMM} = 0,949 \%$  (menor que 1% conforme esperado) e  $E_{AM} = 0,51 \text{ dB}$ . A análise foi realizada utilizando a formulação de Müller para ambas as superfícies. Para a análise através das demais formulações e para valores diferentes de raios e permissividade elétrica relativa os resultados obtidos, não apresentados neste texto, também foram satisfatórios. Porém verificou-se que na maior parte dos casos a formulação de Müller, assim como para a esfera homogênea, produz os melhores resultados.



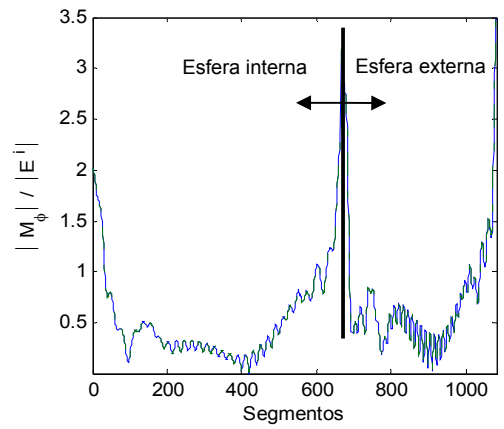
a) Corrente elétrica na direção  $\hat{t}$



b) Corrente elétrica na direção  $\hat{\phi}$



c) Corrente magnética na direção  $\hat{t}$



d) Corrente magnética na direção  $\hat{\phi}$

Figura 5.20 – Correntes elétrica e magnética equivalentes: esfera dielétrica com raio  $a = 5 \lambda_0$ ,  $\epsilon_r = 20$  e recoberta por uma casca dielétrica com raio  $b = 5,05 \lambda_0$  e  $\epsilon_r = 5$ .



O segundo caso investigado nesta seção considera o BOR ilustrado na Figura 5.21, onde  $k_0 a_1 = 0,4$ ,  $k_0 a_2 = 0,75$ ,  $k_0 a_3 = 1$ ,  $\epsilon_{r1} = 2$ ,  $\epsilon_{r2} = 3$  e  $\epsilon_{r3} = 4$ . A Figura 5.22 (a) apresenta os resultados obtidos para as correntes elétrica,  $\vec{J}(\vec{r}')$ , e magnética,  $\vec{M}(\vec{r}')$ , nas direções  $\hat{t}$  e  $\hat{\phi}$ , na superfície  $S_3$  da estrutura ilustrada na Figura 5.21. Estes resultados, que podem ser comparados com aqueles disponíveis em [50] e reproduzidas na Figura 5.22 (b), foram obtidos considerando a formulação de Müller. A segmentação das superfícies foi realizada considerando o mesmo número de segmentos utilizados em [50] (16 segmentos por superfícies), e pode-se verificar uma concordância satisfatória entre ambas as soluções.

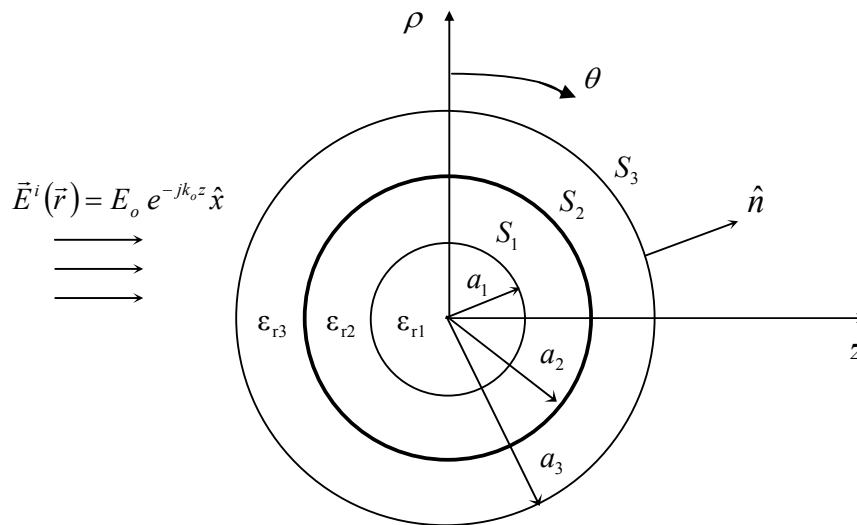
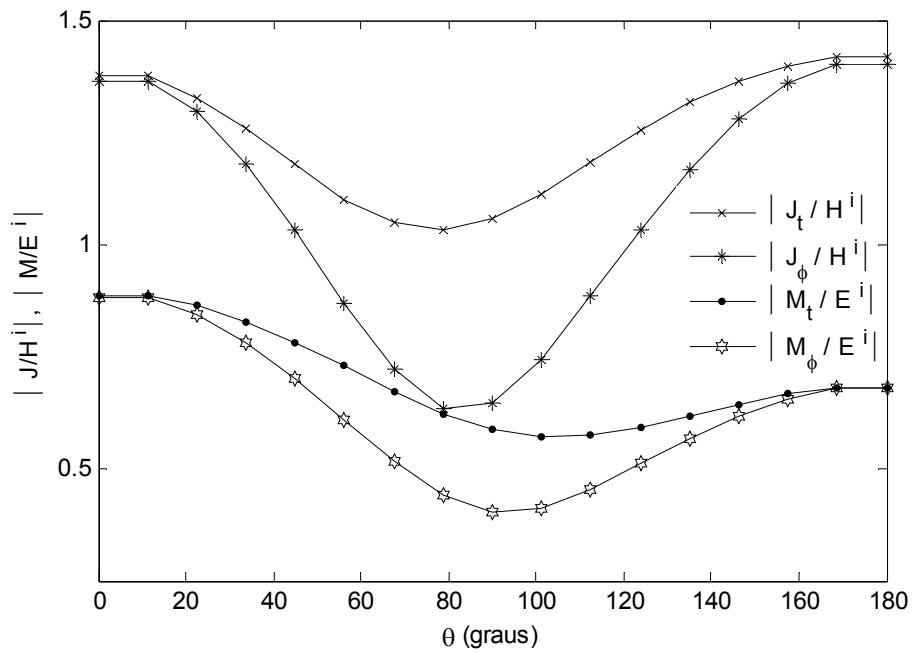
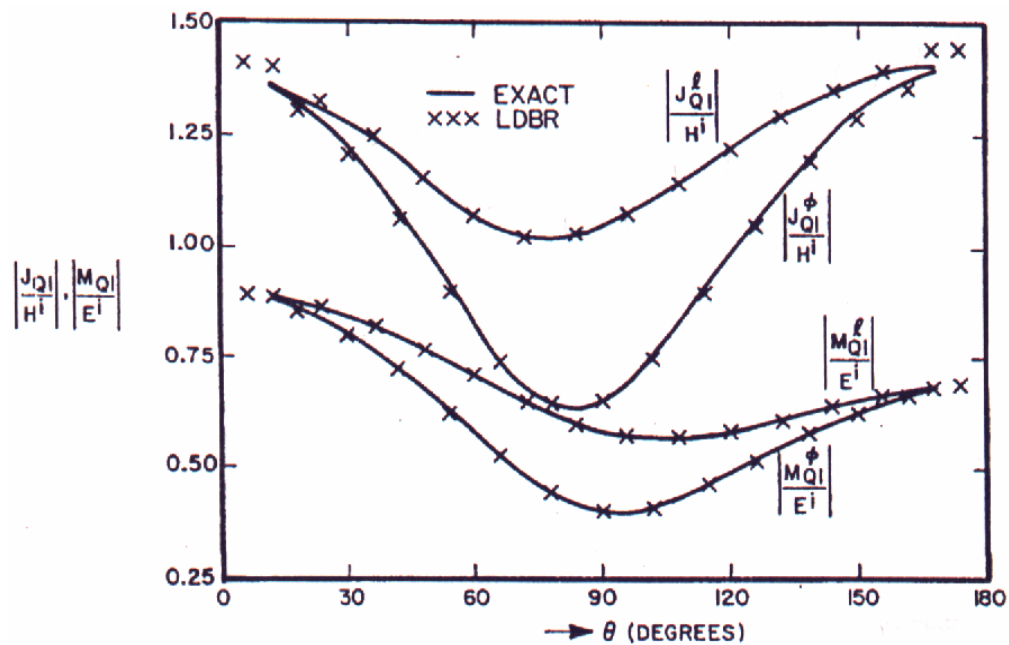


Figura 5.21 – Esfera constituída de três camadas dielétricas homogêneas.

Conforme foi discutido na Seção 3.7.5, para estruturas constituídas de duas ou mais camadas homogêneas é possível obter a solução do sistema linear utilizando as equações recursivas (3.376)-(3.380). Esta solução conduz aos mesmos resultados obtidos utilizando decomposição LU para solução do sistema linear. Observou-se que para a estrutura apresentada na Figura 5.21 o tempo de processamento requerido para ambas as soluções foi praticamente igual. Porém espera-se que para estruturas com dimensões maiores a solução utilizando as equações recursivas conduza a uma redução significativa do esforço computacional.



a) Correntes elétrica e magnética equivalentes na superfície  $S_3$  obtidas utilizando formulação desenvolvida.



b) Correntes elétrica e magnética equivalentes na superfície  $S_3$  conforme [50].

Figura 5.22 – Correntes elétrica e magnética equivalentes na superfície externa de uma esfera constituída de três camadas dielétricas homogêneas.

## 5.7 - Espalhamento por Duas Esferas

Nesta seção é avaliada a validade da formulação apresentada nos Capítulos 2 a 4 para a análise do espalhamento eletromagnético por dois BOR. Assim é considerada uma esfera condutora de raio  $a = 10 \lambda_0$  centrada em  $z = 0$  e uma esfera dielétrica também com raio  $a = 10 \lambda_0$  centrada em  $z = 40 \lambda_0$  com  $\epsilon_r = 10$ . As esferas são iluminadas por uma onda plana de amplitude  $E_o = 1$  (V/m), polarizada na direção  $\hat{x}$  e propagando na direção  $\hat{z}$ , conforme ilustrado na Figura 5.23.

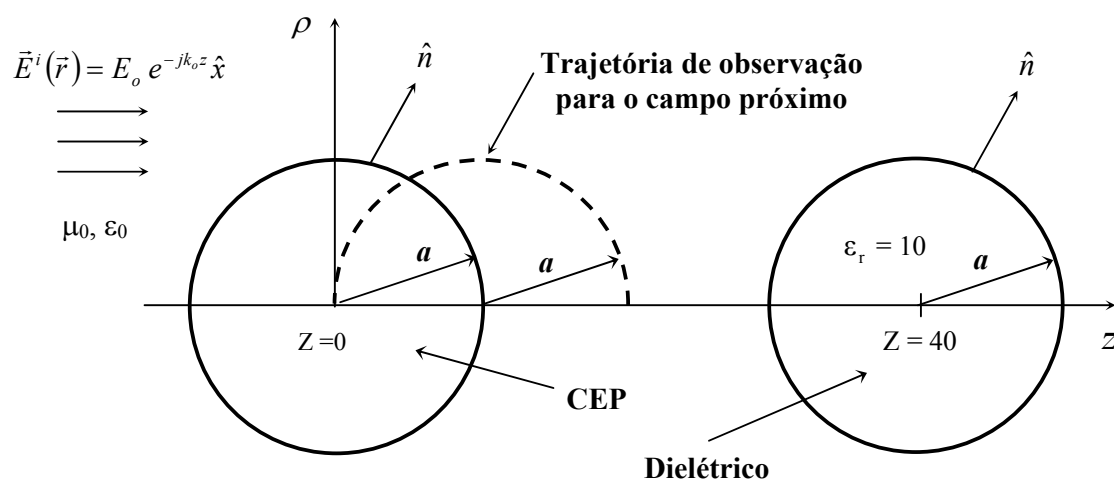


Figura 5.23 – Duas esferas homogêneas.

A Figura 5.24 apresenta a densidade das correntes superficiais elétrica e magnética normalizadas em relação aos campos magnético e elétrico incidentes, respectivamente, nas direções  $\hat{t}$  e  $\hat{\phi}$ . A amplitude das componentes  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  dos campos próximos  $\vec{E}(\vec{r})$  e  $\vec{H}(\vec{r})$  no plano  $\phi = 45^\circ$  observados ao longo da trajetória indicada na Figura 5.23 são apresentadas na Figura 5.25. Para o gráfico da Figura 5.24 os segmentos de número 1 a 500 descrevem a superfície da esfera CEP e os segmentos de número 501 a 1535 descrevem a superfície da dielétrica. A discretização das curvas geratrizes é realizada de acordo com os critérios

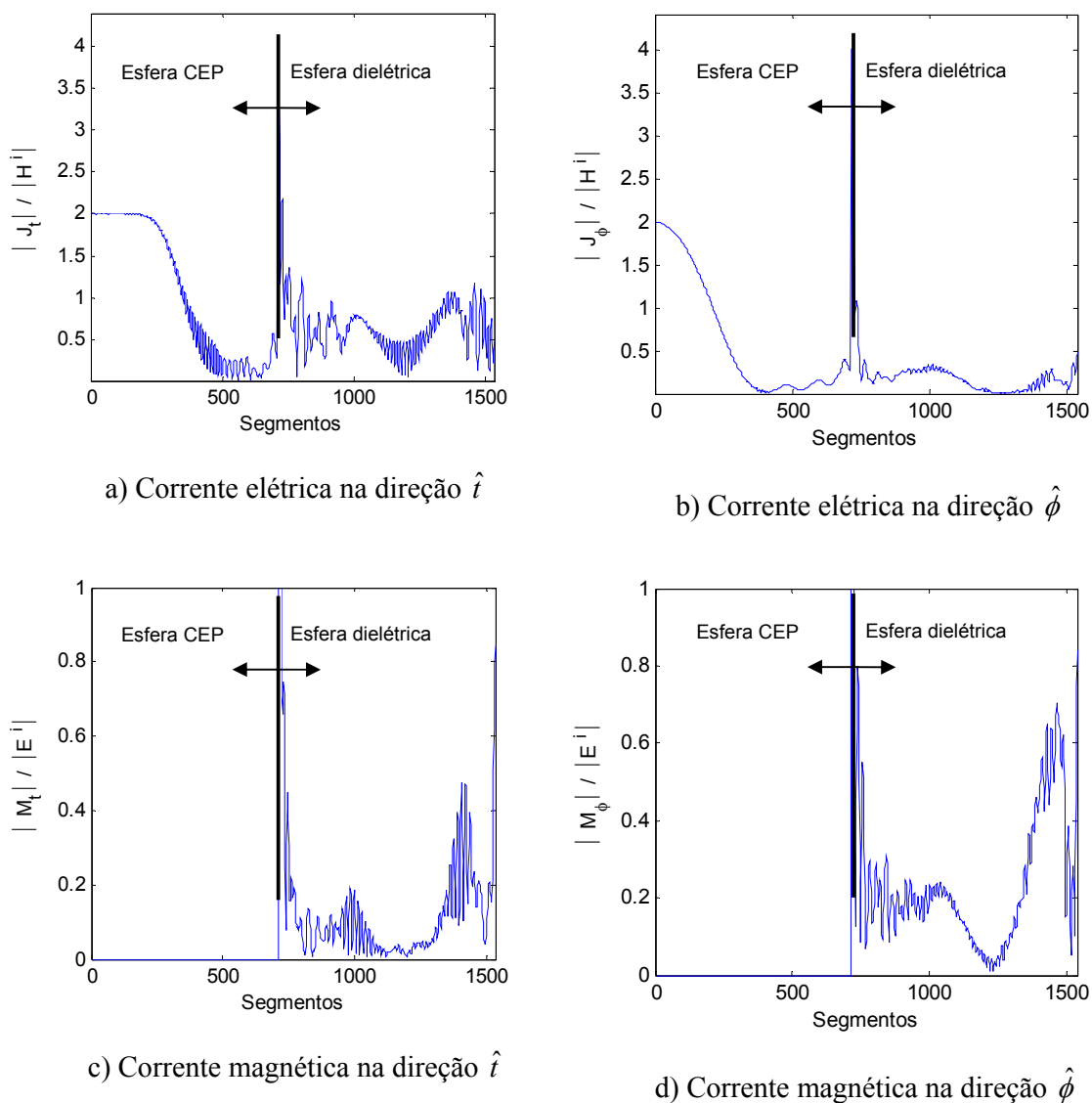
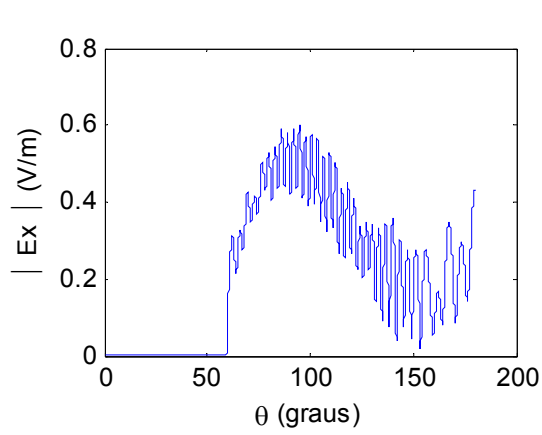
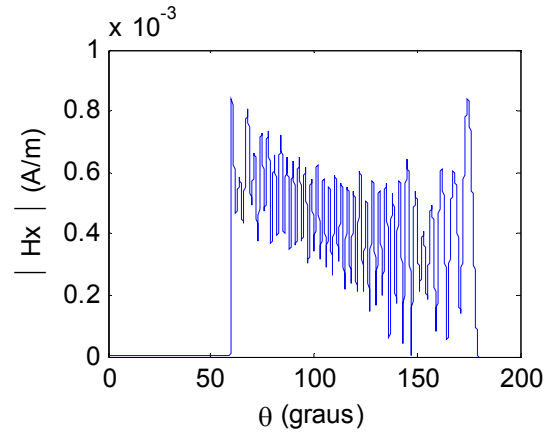


Figura 5.24 – Correntes elétrica e magnética equivalentes: duas esferas com raio  $a = 10 \lambda_0$ , uma CEP e outra dielétrica com  $\epsilon_r = 10$ .

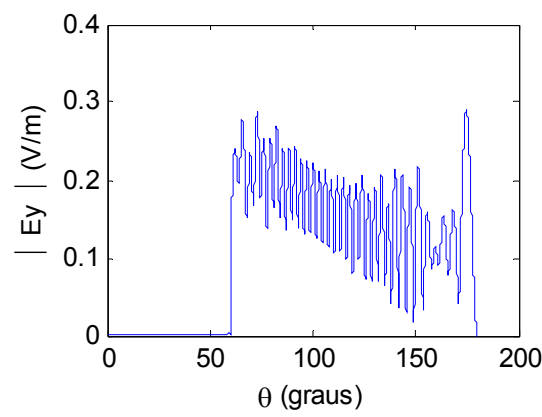
estabelecidos nas Seções 5.2 e 5.3. A análise é realizada utilizando a formulação *Cfield* para a esfera CEP, para evitar problemas de ressonância, e a formulação de *Müller* para a esfera dielétrica. A exatidão dos resultados pode ser verificada observando-se que a corrente magnética na superfície da esfera condutora e campo dentro desta esfera são iguais a zero, como esperado.



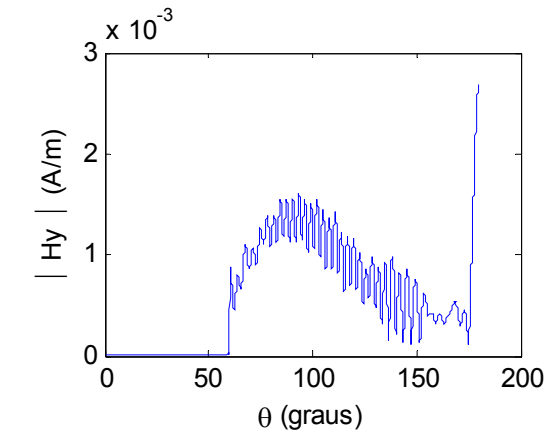
a) Campo elétrico componente na direção  $\hat{x}$



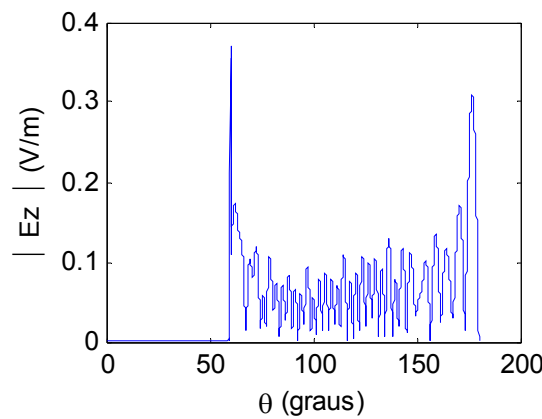
b) Campo magnético componente na direção  $\hat{x}$



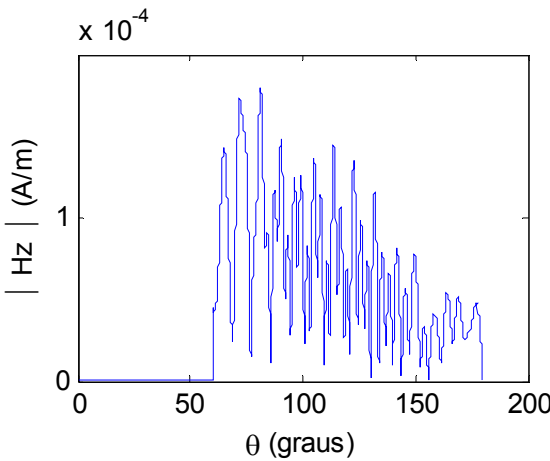
c) Campo elétrico componente na direção  $\hat{y}$



d) Campo magnético componente na direção  $\hat{y}$



e) Campo elétrico componente na direção  $\hat{z}$



f) Campo magnético componente na direção  $\hat{z}$

Figura 5.25 – Campo próximo: duas esferas com raio  $a = 10 \lambda_0$ , uma CEP e outra dielétrica com  $\epsilon_r = 10$ .

## 5.8 - Esfera Constituída de Dois Hemisférios Homogêneos

Nesta seção a formulação apresentada nos Capítulos 2 a 4 é aplicada na solução do espalhamento eletromagnético por uma esfera constituída de dois hemisférios. O objetivo desta análise é verificar a validade do tratamento empregado na representação da corrente superficial equivalente na junção de interfaces envolvendo mais de dois meios distintos. A Figura 5.26 ilustra a estrutura sob análise, ou seja, uma esfera com raio  $a$ , constituída de dois hemisférios homogêneos, centrada em  $z = 0$  e iluminada por uma onda plana de amplitude  $E_o = 1$  (V/m), polarizada na direção  $\hat{x}$  e propagando na direção  $\hat{z}$ .

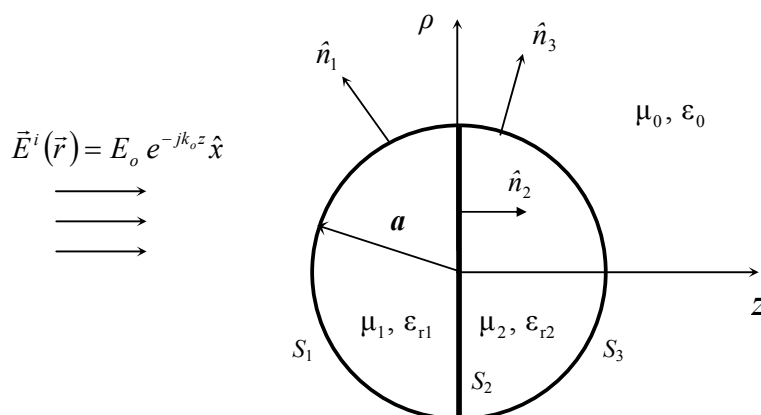


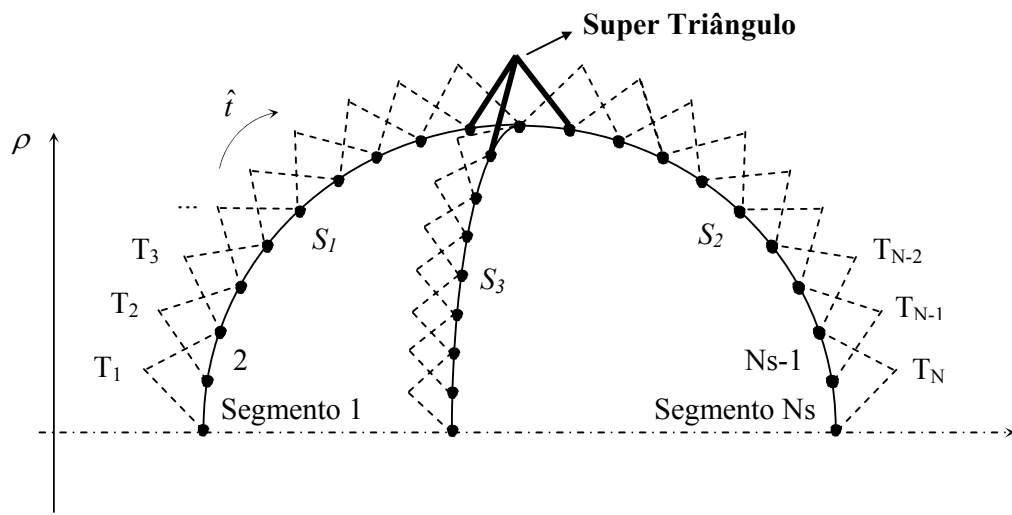
Figura 5.26 – Esfera constituída de dois hemisférios homogêneos.

Para BOR constituídos de regiões, como a esfera sob análise, a representação da corrente superficial equivalente no ponto de junção de interfaces envolvendo mais de dois meios distintos deve receber um tratamento especial. Este tratamento deve assegurar a continuidade e descontinuidade da corrente nas direções  $\hat{t}$  e  $\hat{\phi}$ , respectivamente. Assim, para a corrente na direção  $\hat{t}$  a representação através de funções triangulares no ponto da referida junção é realizada utilizando um único triângulo, denominado neste trabalho “*Super Triângulo*”, ilustrado na Figura 5.27 (a). Através deste único triângulo a continuidade da

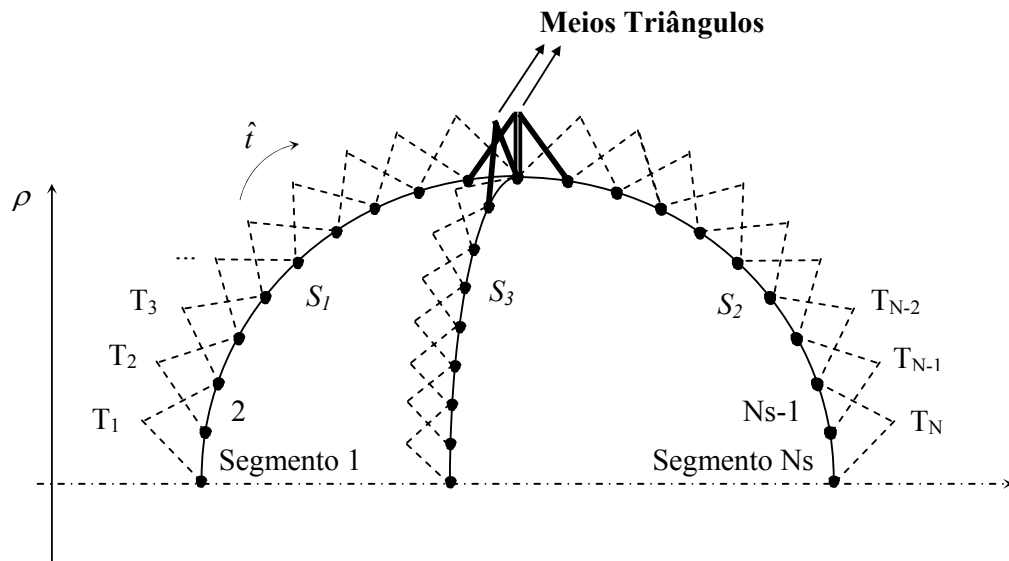
corrente é assegurada para cada problema equivalente individualmente (para a esfera constituída de dois hemisférios homogêneos devem ser considerados três problemas equivalentes, um problema equivalente externo e dois problemas equivalentes internos). Ou seja, por exemplo, para o problema equivalente externo, a continuidade da corrente na direção  $\hat{t}$  entre as interfaces  $S_1$  e  $S_2$  é assegurada através do “*Super Triângulo*” que possui vértices nestas duas interfaces. Para a corrente na direção  $\hat{\phi}$  a representação através de funções triangulares no ponto da junção é realizada utilizando meios triângulos para a corrente em cada interface, como ilustrado na Figura 5.27 (b). Através destes meios triângulos a descontinuidade da corrente na direção  $\hat{\phi}$  é assegurada [52], [72].

Para verificar a validade do tratamento empregado na representação da corrente superficial equivalente no ponto de junção, os resultados obtidos na análise do espalhamento eletromagnético por uma esfera com dois hemisférios onde  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$  são comparados com aqueles obtidos através da solução analítica (série de Mie [71]) para uma esfera homogênea com  $\varepsilon_r = \varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$ . Uma vez que ambos os obstáculos são fisicamente iguais, esta comparação provê uma excelente forma de validar a formulação e verificar a precisão dos resultados numéricos. Assim, a Figura 5.28 apresenta a seção reta de radiação bi-estática ( $\sigma/\lambda^2$ ) nas direções  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\phi}$  obtidas na análise da estrutura ilustrada na Figura 5.26 para  $a = 5 \lambda_0$ ,  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 20$  e os resultados obtidos através da respectiva solução analítica. A discretização das curvas geratrizes foi realizada de acordo com os critérios estabelecidos na Seção 5.4. A análise foi conduzida utilizando a formulação *PMCHWT* que, de acordo com [72]-[74] e os testes realizados neste trabalho, é a formulação que produz os resultados mais precisos na análise de BOR constituído de regiões homogêneas. O valor de erro obtido entre as duas soluções é  $E_{AM} = 0,0285$  dB.

Para ilustrar alguns dos resultados obtidos, a Tabela 5.4 apresenta os valores de  $E_{AM}$ , em relação à solução analítica para a esfera homogênea, obtidos através de todas as formulações discutidas na Seção 2.2.1 para uma esfera com dois hemisférios de raio  $a = 2 \lambda_0$ . Como poder ser observado o menor valor de  $E_{AM}$  é obtido através da formulação *PMCHWT*.



a) Triângulos para corrente na direção  $\hat{t}$



a) Triângulos para corrente na direção  $\hat{\phi}$

Figura 5.27 – Distribuição dos triângulos no ponto de junção.



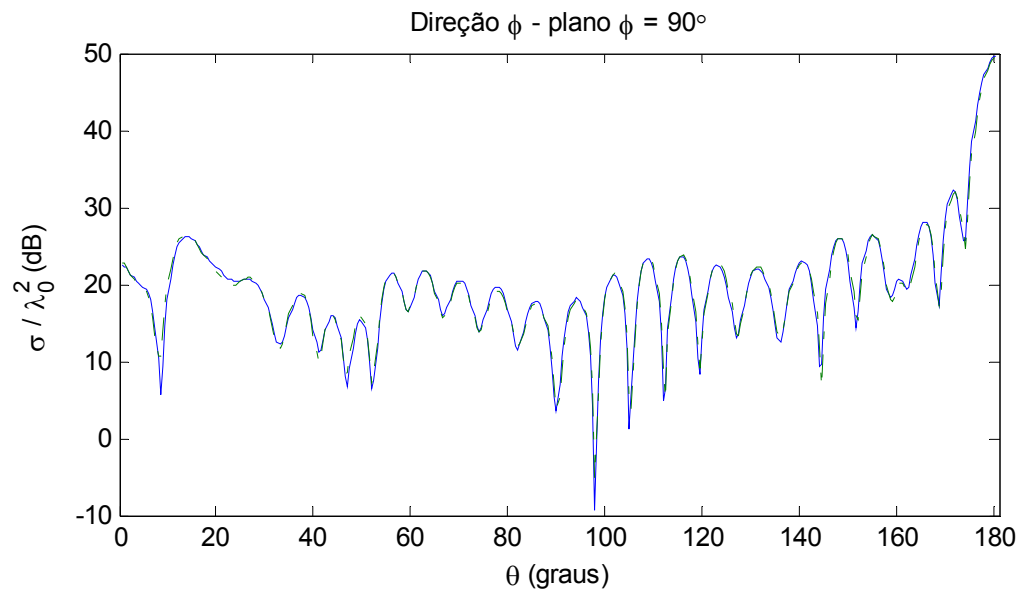
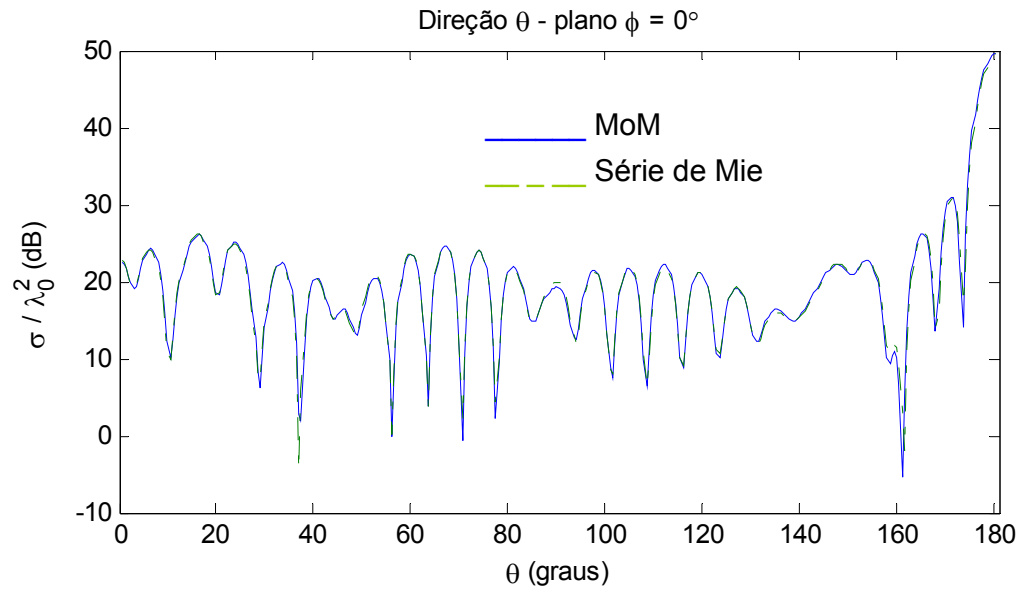


Figura 5.28 – Seção reta de radiação bi-estática: esfera dielétrica constituída de dois hemisférios homogêneos com raio  $a = 5 \lambda_0$ ,  $\epsilon_{r1} = 20$  e  $\epsilon_{r2} = 20$ .

Tabela 5.4 –  $E_{AM}$  (dB) para esfera constituída de dois hemisférios homogêneos

$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	ONS	Müller	PMCHWT	Efield	Hfield	Cfield	EHfield	HEfield
4	4	22	0,29	0,19	2,89	4,10	0,42	0,65	0,32
10	10	30	0,57	0,20	1,68	7,90	0,77	0,38	0,41
20	20	40	3,43	0,32	2,67	7,69	1,97	0,38	0,37

## 5.9 - Esfera Dielétrica Parcialmente Recoberta por uma Casca CEP

O objetivo desta seção é investigar a validade da formulação desenvolvida para a solução do espalhamento eletromagnético por BOR que possuem regiões dielétricas parcialmente recobertas por uma fina casca condutora. Este tipo de estrutura pode ser encontrada, por exemplo, em antenas carregadas com cone dielétrico, como aquela ilustrada na Figura 1.5 (a), na região de fixação do radome às superfícies refletoras da antena, como aquelas ilustradas na Figura 1.5 (b) e (c), etc. Assim, a Figura 5.29 ilustra a estrutura sob análise, ou seja, uma esfera dielétrica centrada em  $z = 0$ , de raio  $a$ , parcialmente recoberta por uma fina camada condutora e iluminada por uma onda plana de amplitude  $E_o = 1$  (V/m), polarizada na direção  $\hat{x}$  e propagando na direção  $\hat{z}$ .

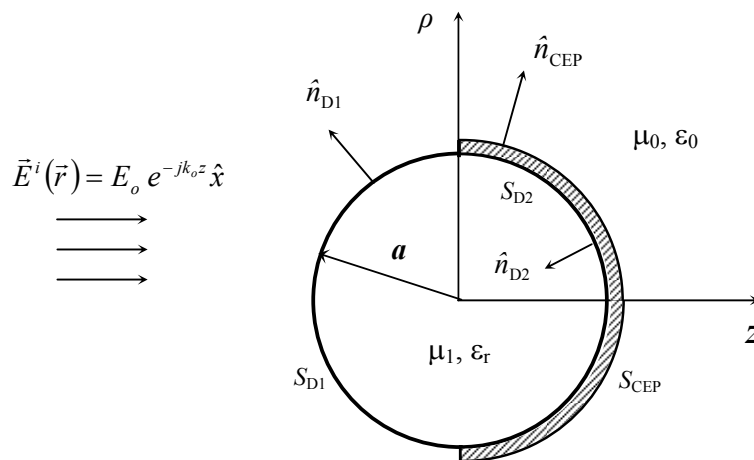
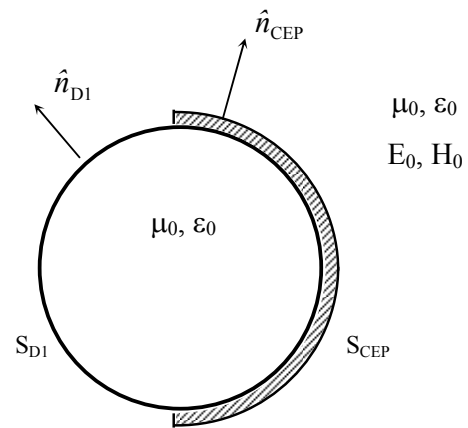


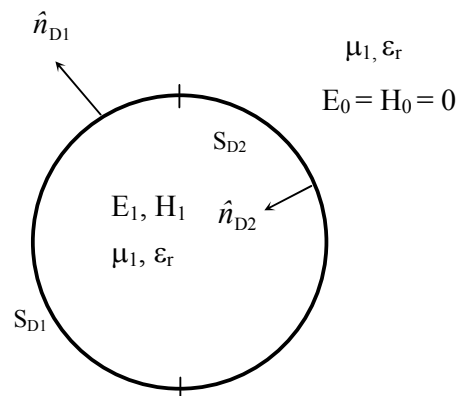
Figura 5.29 – Esfera dielétrica parcialmente recoberta por uma fina casca condutora.

A análise deste tipo de BOR deve ser conduzida através de duas equivalências: uma externa e outra interna [75], como ilustrado na Figura 5.30. A região de junção entre as três interfaces (duas dielétricas e uma condutora) deve ser tratada pelo mesmo processo descrito na Seção 5.8. Neste caso, para simular uma superfície condutora extremamente fina, esta superfície foi descrita através da mesma curva geratriz da superfície  $S_{D2}$ .

Para verificar a validade do tratamento empregado na análise do espalhamento eletromagnético pelo BOR ilustrado na Figura 5.29 foi considerada uma esfera dielétrica com raio  $a = 10 \lambda_0$ , permissividade elétrica relativa  $\epsilon_r = 1$  e com um hemisfério recoberto por uma casca condutora. A escolha de  $\epsilon_r = 1$  permite a comparação dos resultados com aqueles obtidos quando somente a casca condutora é considerada na análise. Uma vez que ambos os obstáculos são fisicamente iguais, esta comparação provê uma excelente forma de validar a formulação e verificar a precisão dos resultados numéricos. A Figura 5.31 apresenta as seções retas de radiação bi-estática ( $\sigma/\lambda^2$ ) nas direções  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\phi}$  obtidas em ambas as análises (esfera dielétrica com  $\epsilon_r = 1$  parcialmente recoberta por uma casca condutora e somente a casca condutora). A análise foi conduzida utilizando a formulação *PMCHWT* para as superfícies dielétricas. De acordo com [72]-[75] e os demais testes realizados, cujos resultados não são apresentados neste texto, esta é a formulação que produz os resultados mais preciso para a análise deste tipo de BOR. A superfície condutora aberta foi avaliada através da formulação *Efield*. A discretização das curvas geratrizes foi realizada de acordo com os critérios estabelecidos nas Seções 5.3 e 5.4. O valor de erro obtido entre as duas soluções é  $E_{AM} = 0,0966$  dB.



a) Problema equivalente externo



a) Problema equivalente interno

Figura 5.30 – Problemas equivalentes para esfera dielétrica parcialmente recoberta por uma fina casca condutora.

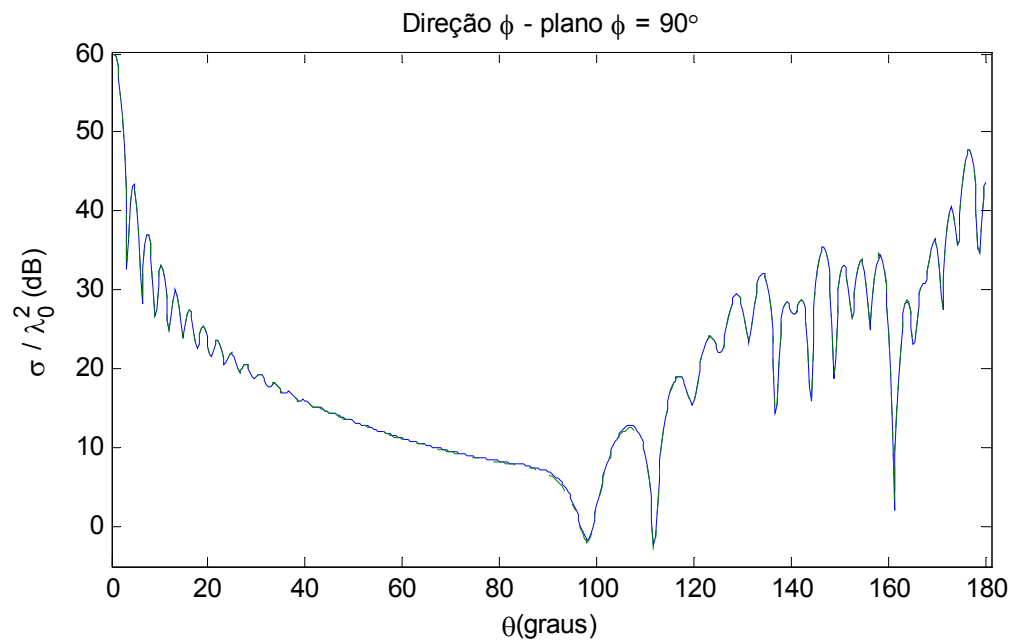
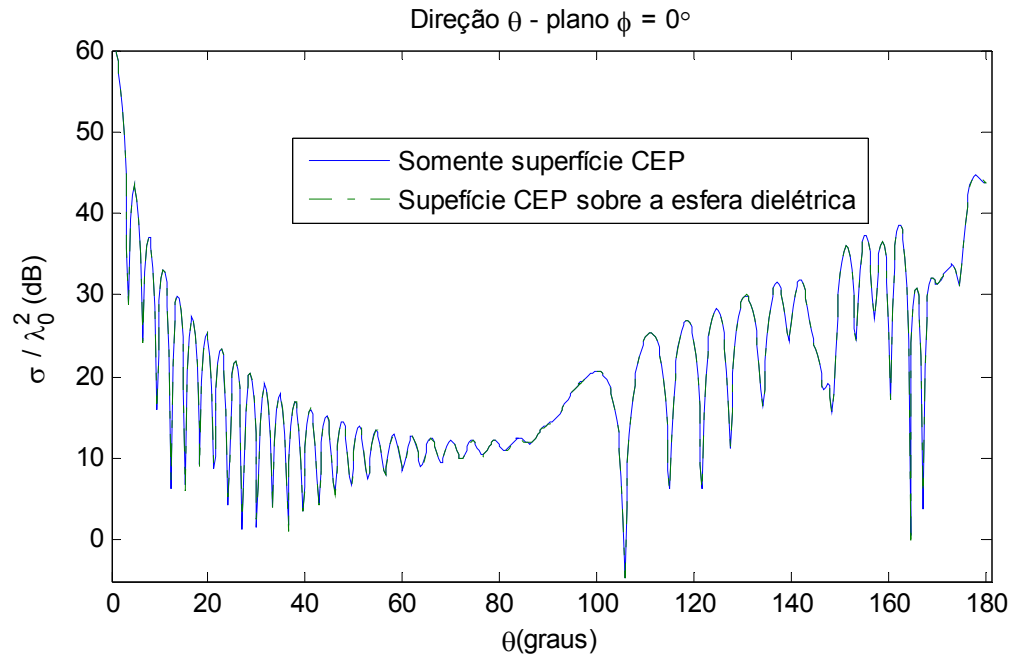


Figura 5.31 – Seção reta de radiação bi-estática: esfera dielétrica com  $a = 10 \lambda_0$ ,  $\epsilon_{r1} = 1$ , parcialmente recoberta por uma fina casca condutora.

## 5.10 - Refletor Parabólico Simétrico

A Figura 5.32 ilustra a estrutura sob análise, ou seja, um refletor parabólico de diâmetro igual a  $200 \lambda_0$ , distância focal  $60 \lambda_0$ , ângulo de borda igual a  $79,61^\circ$  e foco localizado na origem do sistema principal de coordenadas. O refletor é iluminado por uma fonte de onda esférica polarizada na direção  $\hat{x}$ , como aquela apresentada na Seção 3.6.2. É utilizado o modelo RCF cujos parâmetros de controle são  $e = h = 0,671$ . Para a discretização da curva geratriz foram utilizados 1660 segmentos (aproximadamente 15 segmentos  $/\lambda_0$ ), conforme determinado pela equação (5.7).

A Figura 5.33 apresenta os resultados da corrente elétrica superficial,  $\vec{J}(\vec{r}')$ , nas direções  $\hat{t}$  e  $\hat{\phi}$  em função da coordenada de superfície  $S(\lambda_0)$ , que vale zero no centro da superfície parabólica e é igual a 110,59 na borda desta superfície. A Figura 5.34 apresenta o diagrama de radiação da antena no plano  $\phi = 45^\circ$ . Em ambas as figuras são apresentados os resultados obtidos através do MoM e através da Ótica Física (PO), que produz bons resultados quando empregada para análise de antenas refletoras com grandes dimensões elétricas [31]. A solução através do MoM utiliza a formulação *Efield*, já que a estrutura sob análise é uma superfície CEP aberta. A definição da polarização principal e cruzada é realizada atendendo a terceira definição de Ludwig [76]. A análise das Figuras 5.33 e 5.34 mostra uma concordância satisfatória entre os resultados, conforme esperado, já que o refletor parabólico tem uma superfície com curvatura suave e é eletricamente grande.

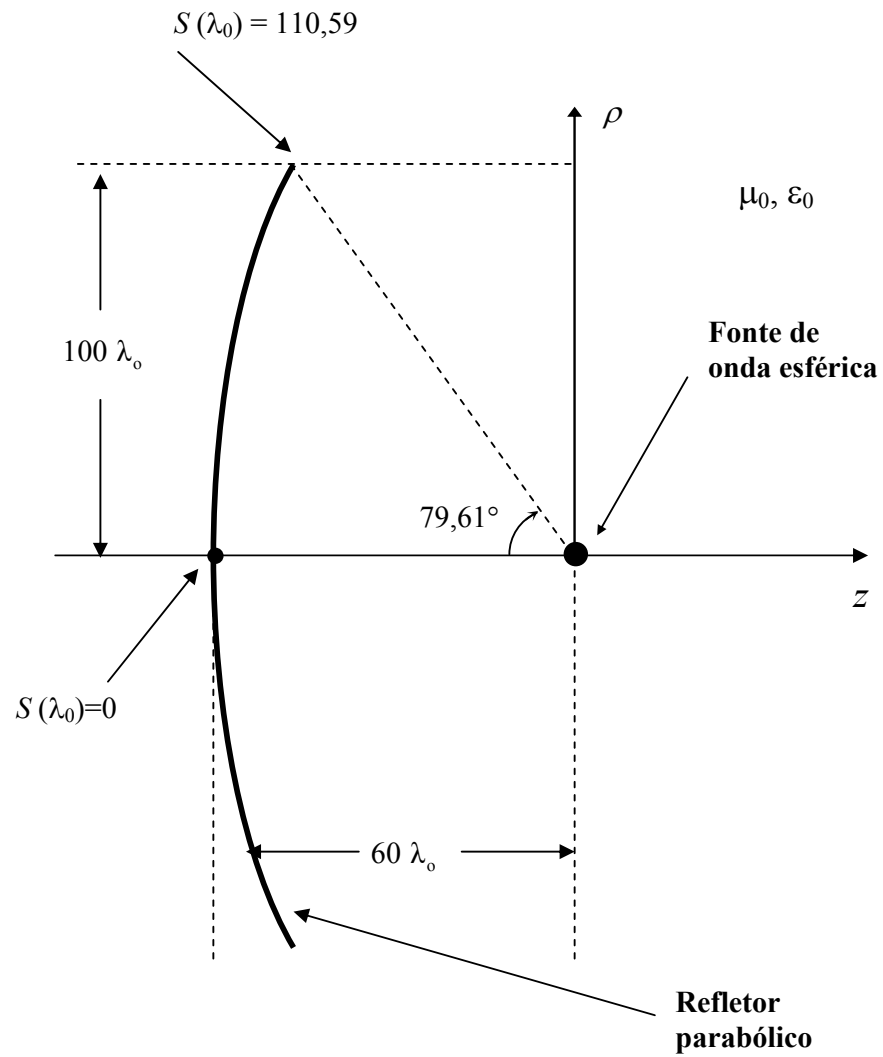


Figura 5.32 – Geometria do refletor parabólico simétrico.

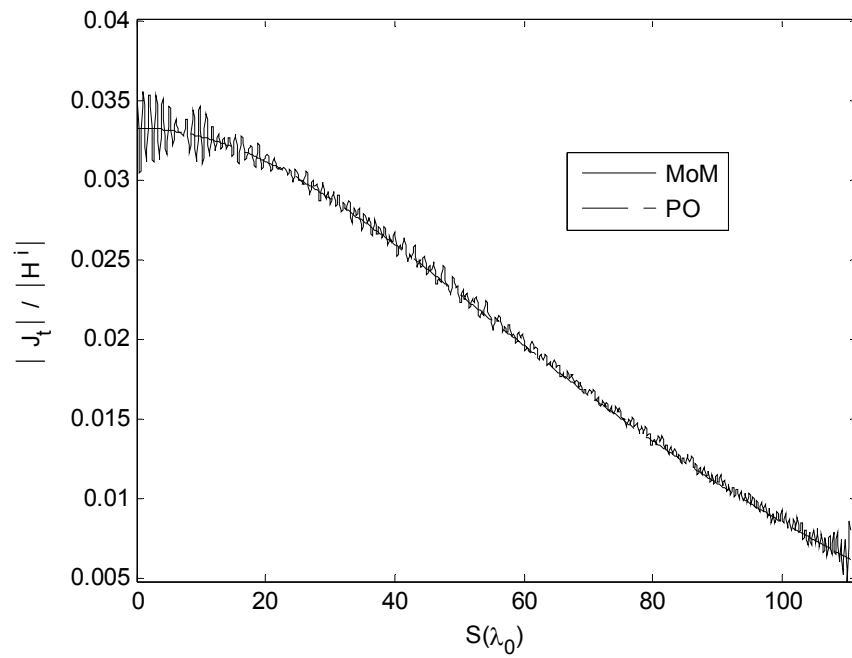
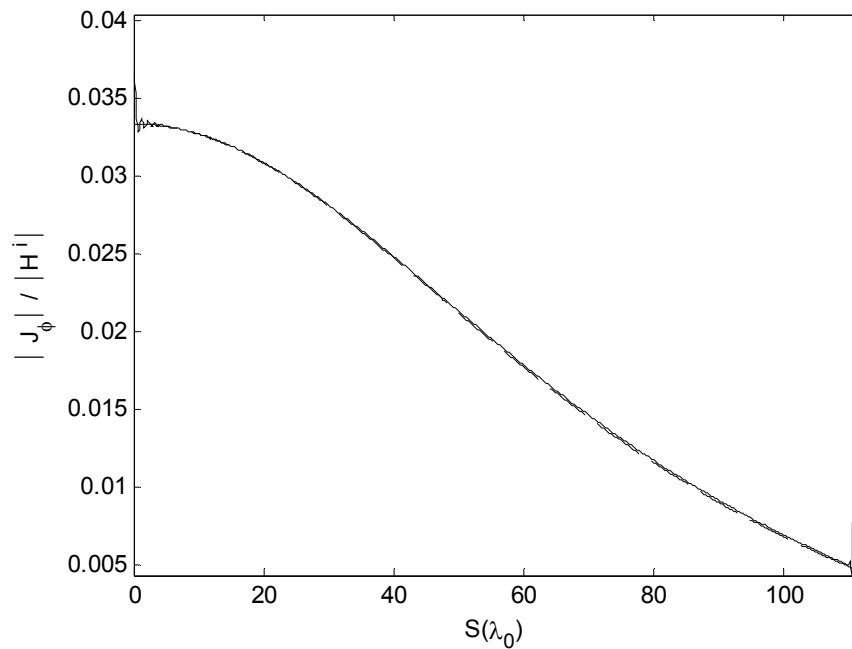
a) Componente na direção  $\hat{t}$ b) Componente na direção  $\hat{\phi}$ 

Figura 5.33 – Corrente elétrica equivalente: refletor parabólico simétrico com diâmetro de  $200 \lambda_0$  e distância focal de  $60 \lambda_0$ .



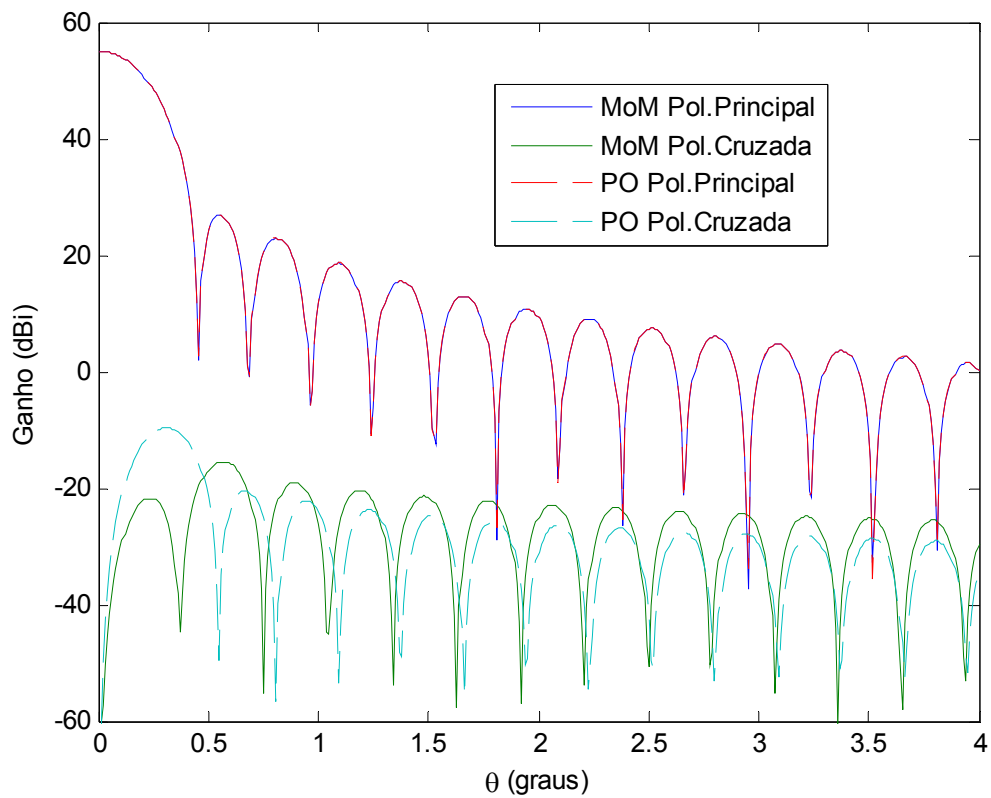


Figura 5.34 – Diagrama de radiação no plano  $\phi = 45^\circ$  do refletor parabólico simétrico com diâmetro de  $200 \lambda_0$  e distância focal de  $60 \lambda_0$ .

## 5.11 - Excitação do Modo Fundamental em um Guia Circular

O objetivo desta seção é apresentar um estudo de caso para verificar a validade da formulação apresentada na Seção 3.6.3.2. Ou seja, verificar se a excitação de um guia circular através do modo fundamental  $TE_{11}$  esta sendo realizada de forma correta e avaliar o emprego de IBC's para simular uma condição absorvente para o modo  $TE_{11}$  dentro do guia.

A geometria de uma seção do guia circular sob análise é ilustrada na Figura 5.35. A frequência de operação é tal que o comprimento de onda do espaço livre  $\lambda_0 = 1$  m. A seção do guia tem raio igual  $a_g = 0,37 \lambda_0$  de forma que somente o modo fundamental  $TE_{11}$  é propagante [33]. As correntes equivalentes  $\vec{J}_g(\vec{r})$  e  $\vec{M}_g(\vec{r})$  são colocadas dentro do guia em  $z = -2 \lambda_0$  e excitam somente o modo fundamental  $TE_{11}$  propagando na direção  $\hat{z}$  positiva, conforme discutido na Seção 3.6.3.2. O guia é geometricamente limitado em  $z = -2 \lambda_0$  e  $z = 2 \lambda_0$ . Como o vetor normal,  $\hat{n}$ , deve apontar para a região onde a excitação está presente, a curva geratriz da presente geometria é descrita no sentido anti-horário, isto é de  $z = 2 \lambda_0$  até  $z = -2 \lambda_0$ . São utilizados 176 segmentos para descrever a curva geratriz (13 em cada parede final e 150 na região  $\rho = a_g$ ) o que resulta em aproximadamente 60 segmentos por  $\lambda_g$  (onde  $\lambda_g = 1,63788 \lambda_0$  é o comprimento de onda guiado do modo  $TE_{11}$ ). Este número de segmentos foi estabelecido de acordo a Seção 5.3 substituindo o raio do guia na equação (5.7), o que resulta em um ONS igual a 36,76. A porção do guia onde  $\rho = a_g$  é CEP. Uma IBC é colocada sobre a parede  $z = 2 \lambda_0$  para casar o modo  $TE_{11}$  excitado pelas correntes  $\vec{J}_g(\vec{r})$  e  $\vec{M}_g(\vec{r})$ . Nesta situação, o presente exemplo está simulando a propagação do modo  $TE_{11}$  dentro de um guia infinito para a região  $z > -2 \lambda_0$  e nenhum campo deve estar presente na região  $z < -2 \lambda_0$ . Para absorver qualquer possível retorno do modo  $TE_{11}$  uma outra IBC é colocada sobre a parede  $z = -2 \lambda_0$ . Em ambas as paredes finais do guia as componentes da IBC são dadas pelas equações (4.125) e (4.126).

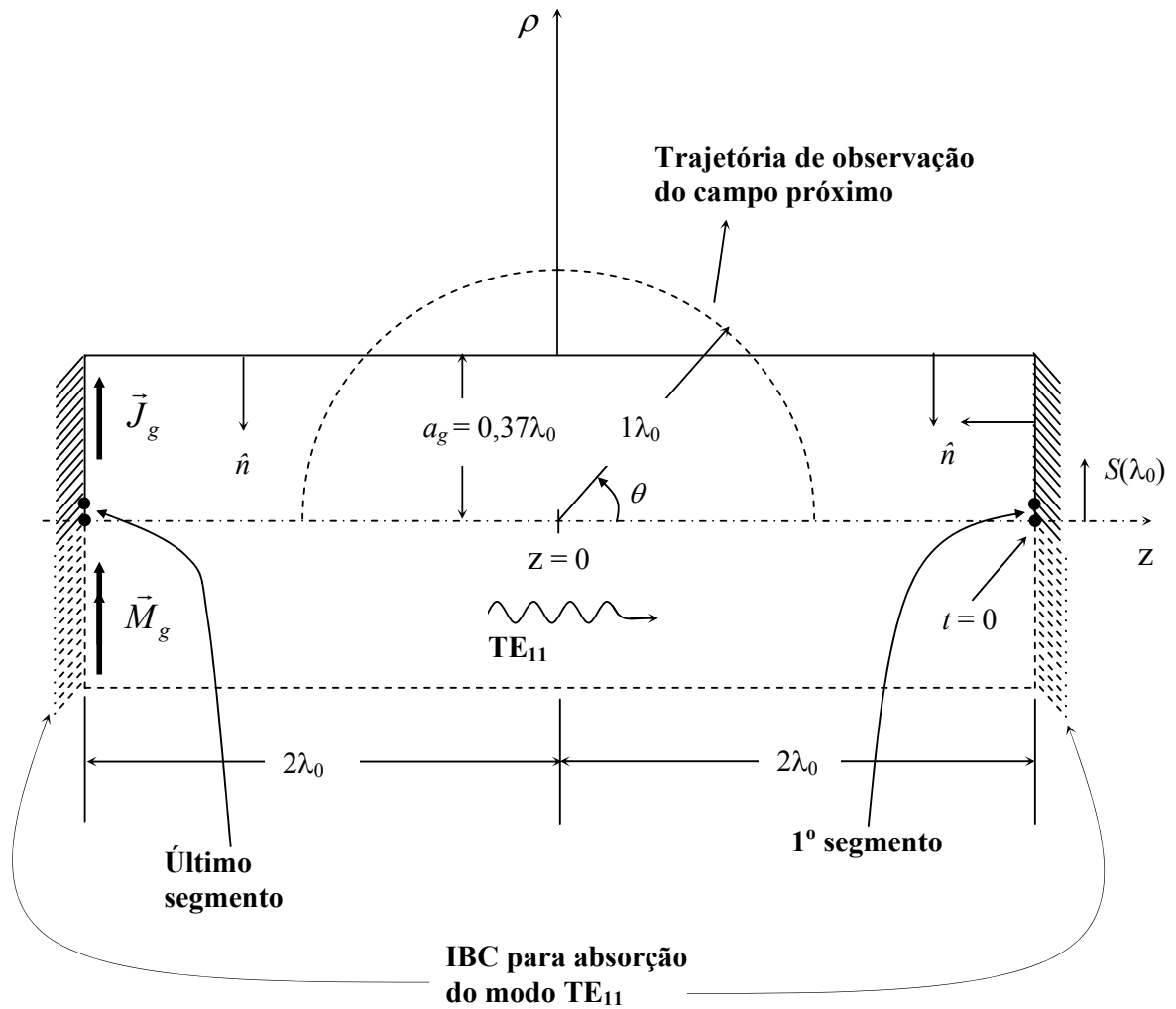


Figura 5.35 – Geometria da seção do guia circular excitado pelo modo  $\text{TE}_{11}$ .

A Figura 5.36 apresenta a corrente elétrica superficial,  $\vec{J}(\vec{r}')$ , nas direções  $\hat{t}$  e  $\hat{\phi}$  em função do parâmetro de superfície  $S(\lambda_0)$ , ilustrado na Figura 5.35. A Figura 5.37 ilustra a amplitude das componentes  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  dos campos próximos  $\vec{E}(\vec{r})$  e  $\vec{H}(\vec{r})$  no plano  $\phi = 45^\circ$  ao longo ao longo da trajetória indicada na Figura 5.35. Para evitar problemas de ressonância a solução foi obtida através da formulação *Cfield*, já que a estrutura sob análise é uma superfície CEP fechada. A exatidão dos resultados pode ser verificada observando que a corrente elétrica equivalente,  $\vec{J}_s(\vec{r})$ , na superfície do guia onde  $\rho = a_g$  tem amplitude constante e fase progressiva e que o campo próximo na região fora do guia é igual a zero, como esperado. Na superfície do guia onde  $z = -2\lambda_0$  as corrente equivalentes  $\vec{J}_s(\vec{r})$  e  $\vec{M}_s(\vec{r})$  são iguais a zero, indicando que a IBC colocada em  $z = 2\lambda_0$  evita a reflexão do campo na direção  $\hat{z}$  negativa. Para pontos de observação próximos à superfície condutora do guia ( $\theta = 21,716^\circ$  e  $\theta = 158,284^\circ$ ), observam-se singularidades nas equações (3.83)-(3.89) e (4.61)-(4.65), como previamente discutido na Seção 3.4. Para o ponto de observação localizado sobre o eixo  $z$  em  $z = 1\lambda_0$  os campos  $\vec{E}(\vec{r})$  e  $\vec{H}(\vec{r})$  determinados utilizando as equações (3.313)-(3.328) são:

$$\vec{E}_{TE_{11}} = 77,537 \angle -39,797 \hat{x} \text{ V/m},$$

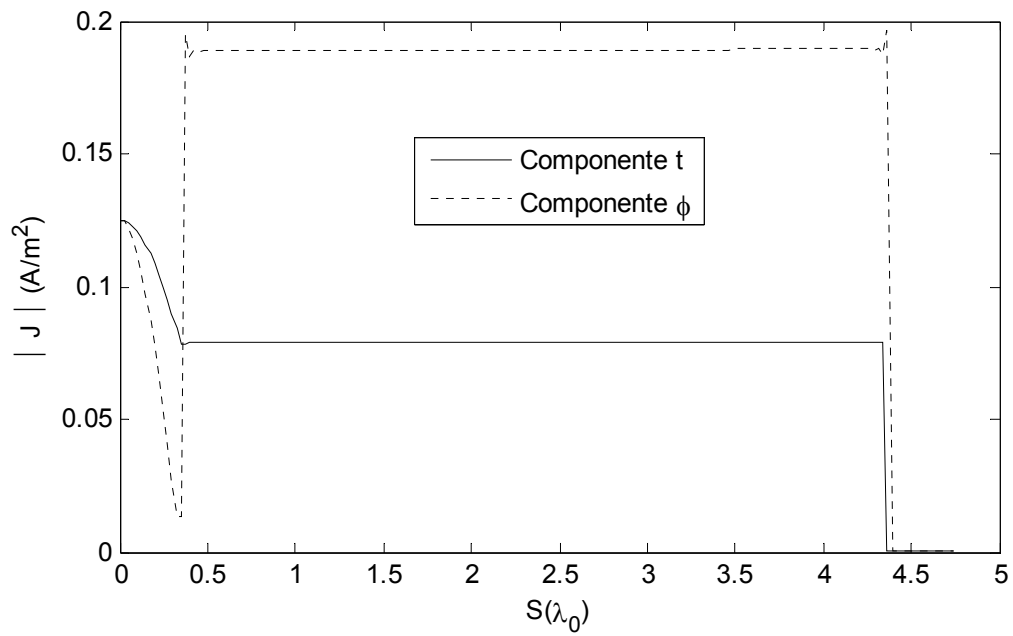
$$\vec{H}_{TE_{11}} = 0,1256 \angle -39,797 \hat{y} \text{ A/m}.$$

Na mesma localização, os resultados numéricos obtidos são:

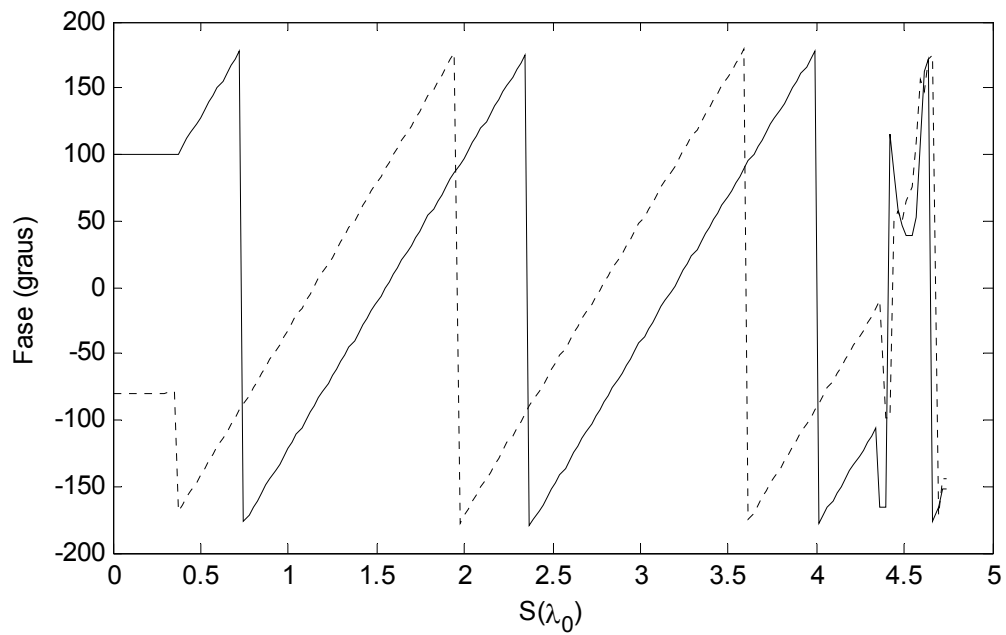
$$\vec{E}_{TE_{11}} = 77,328 \angle -39,642 \hat{x} \text{ V/m},$$

$$\vec{H}_{TE_{11}} = 0,1238 \angle -39,85 \hat{y} \text{ A/m},$$

O que resulta em um erro de 0,26 % e 1,43 % para a amplitude dos campos os campos  $\vec{E}(\vec{r})$  e  $\vec{H}(\vec{r})$ , respectivamente.

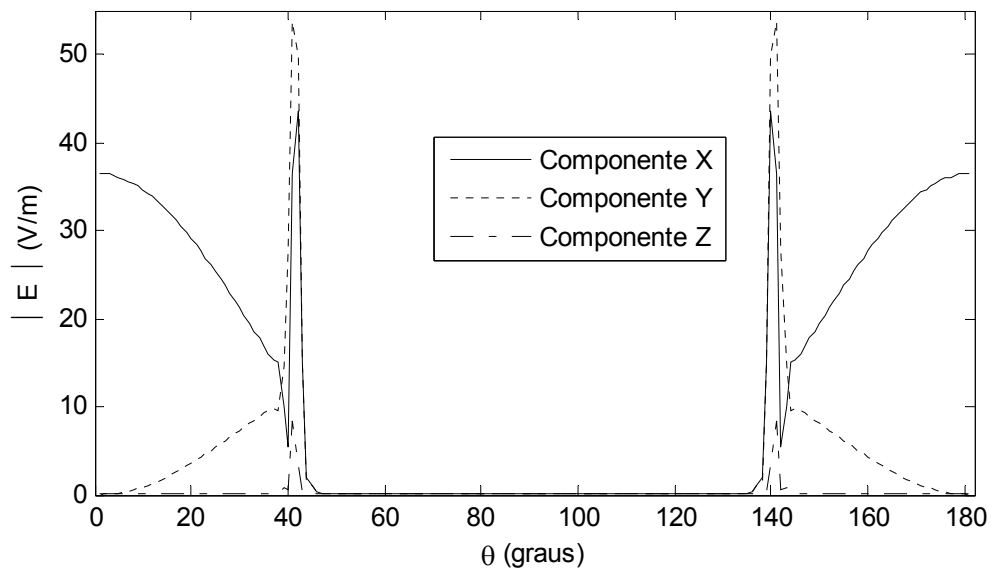
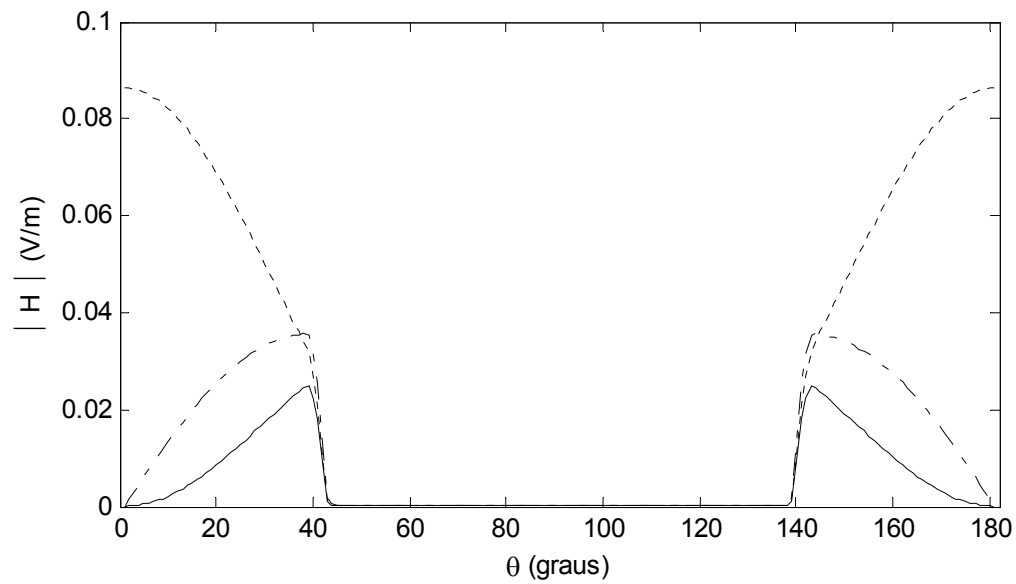


a) Amplitude da corrente elétrica superficial equivalente.



a) Fase da corrente elétrica superficial equivalente.

Figura 5.36 – Corrente elétrica equivalente: guia circular excitado pelo modo  $TE_{11}$ .

a) Campo elétrico componentes na direção  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ a) Campo magnético componentes na direção  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ Figura 5.37 – Campo próximo: guia circular excitado pelo modo  $TE_{11}$ .

## 5.12 - Excitação do Modo TEM em um Guia Coaxial

De forma semelhante ao que foi apresentado na Seção 5.11, nesta seção pretende-se verificar a validade da formulação apresentada na Seção 3.6.3.3. Ou seja, verificar se a excitação, agora de um guia coaxial através do modo fundamental TEM, esta sendo realizada de forma correta e também avaliar o emprego de IBC's para simular uma condição absorvente para o modo TEM dentro do guia.

A seção do guia coaxial utilizado nesta análise é ilustrado na Figura 5.38. A frequência de operação também é tal que o comprimento de onda do espaço livre  $\lambda_0 = 1$  m. Assim como para o guia circular, correntes equivalentes  $\vec{J}_g(\vec{r})$  e  $\vec{M}_g(\vec{r})$  são colocadas dentro do guia coaxial também em  $z = -2\lambda_0$  e excitam somente o modo fundamental TEM propagando na direção  $\hat{z}$  positiva, conforme discutido na Seção 3.6.3.3. O guia é geometricamente limitado em  $z = -2\lambda_0$  e  $z = 2\lambda_0$ . Como o vetor normal,  $\hat{n}$ , deve apontar para a região onde a excitação está presente, assim a curva geratriz da presente geometria também é descrita no sentido anti-horário. São utilizados 326 segmentos para descrever a curva geratriz (13 em cada parede final e 150 nas regiões  $\rho = 0,37\lambda_0$  e  $\rho = 0,74\lambda_0$ ) de forma que são utilizados aproximadamente 38 segmentos por  $\lambda_g$  (onde  $\lambda_g = \lambda_0$  é o comprimento de onda guiado do modo TEM). Este número de segmentos foi estabelecido de acordo a Seção 5.3 substituindo o menor raio do guia coaxial,  $b = 0,37\lambda_0$ , na equação (5.7), o que resulta também em um ONS igual a 36,76. Assim como para o guia circular, para o guia coaxial uma IBC é colocada sobre a parede  $z = 2\lambda_0$  para casar o modo TEM excitado pelas correntes  $\vec{J}_g(\vec{r})$  e  $\vec{M}_g(\vec{r})$  e outra IBC é colocada sobre a parede  $z = -2\lambda_0$  para absorver qualquer possível retorno deste modo. Em ambas as paredes finais do guia as componentes da IBC são dadas por equações (4.125) e (4.126).

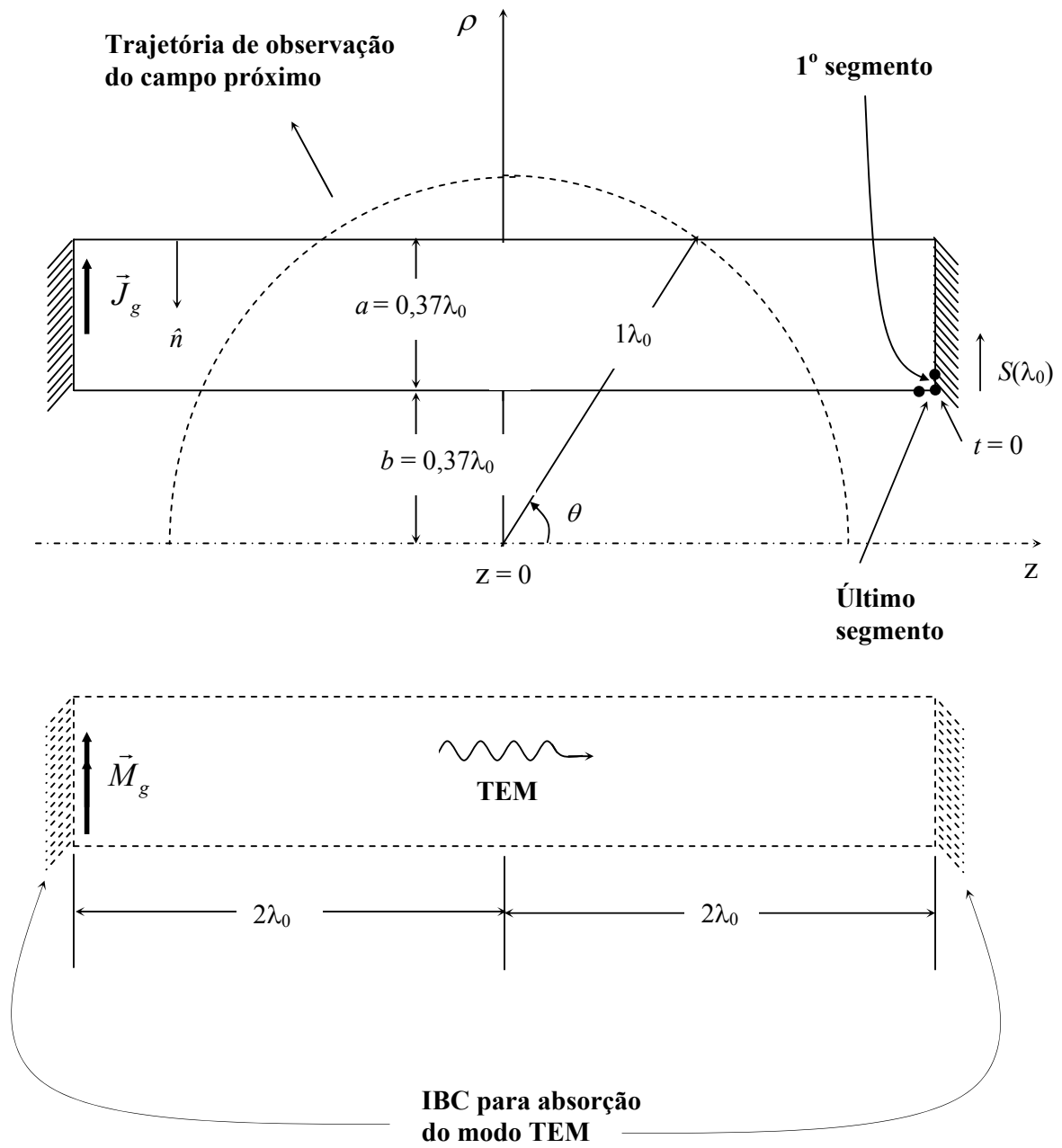


Figura 5.38 – Geometria da seção do guia coaxial excitado pelo modo TEM.



A Figura 5.39 apresenta a corrente elétrica superficial,  $\vec{J}(\vec{r}')$ , na direção  $\hat{t}$  (para excitação através do modo TEM a componente da corrente elétrica na direção  $\hat{\phi}$  é igual a zero) em função de  $S(\lambda_0)$ , ilustrada na Figura 5.38. A Figura 5.40 ilustra a amplitude das componentes  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  dos campos próximos  $\vec{E}(\vec{r})$  e  $\vec{H}(\vec{r})$  no plano  $\phi = 45^\circ$  ao longo ao longo da trajetória indicada na Figura 5.38. Neste caso a solução também foi obtida através da formulação *Cfield* para evitar problemas de ressonância. Assim como para o guia circular, neste caso a exatidão dos resultados pode ser verificada observando que a corrente elétrica equivalente,  $\vec{J}_s(\vec{r})$ , nas superfícies puramente CEP tem amplitude constante e fase progressiva e que o campo próximo na região fora do guia é igual a zero, como esperado. Na superfície do guia onde  $z = -2\lambda_0$  as corrente equivalentes  $\vec{J}_s(\vec{r})$  e  $\vec{M}_s(\vec{r})$  são iguais a zero, indicando que a IBC colocada em  $z = 2\lambda_0$  evita a propagação (reflexão) de campo na direção  $\hat{z}$  negativa. Para o ponto de observação localizado em  $z = 0,76604\lambda_0$  e  $\rho = 0,64279\lambda_0$  os campos  $\vec{E}(\vec{r})$  e  $\vec{H}(\vec{r})$  determinados utilizando as equações (3.329)-(3.332) são:

$$\vec{E}_{TE_{11}} = 14,4510 \angle -95,75 \hat{x} \text{ V/m} ,$$

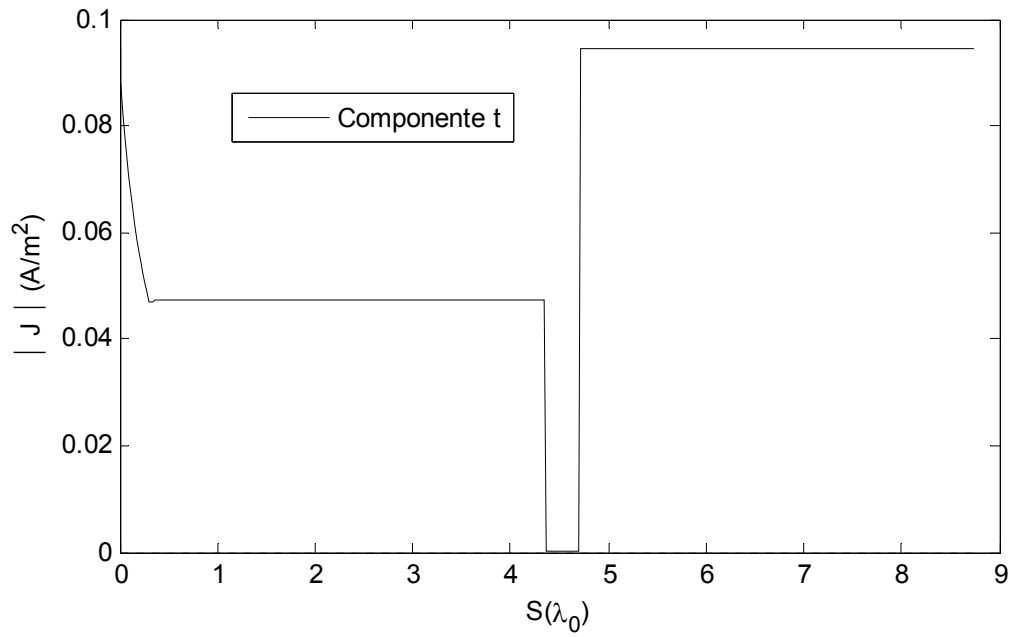
$$\vec{H}_{TE_{11}} = 0,0384 \angle -95,728 \hat{y} \text{ A/m} .$$

Na mesma localização, os resultados numéricos obtidos são:

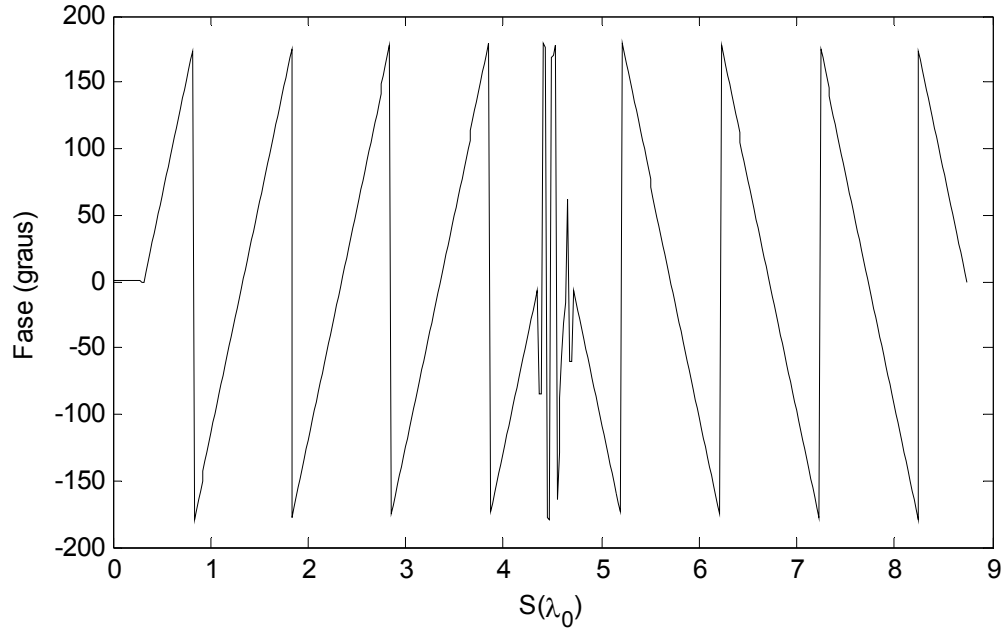
$$\vec{E}_{TE_{11}} = 14,471 \angle -95,776 \hat{x} \text{ V/m} ,$$

$$\vec{H}_{TE_{11}} = 0,0384 \angle -95,776 \hat{y} \text{ A/m} .$$

O que resulta em um erro de 0,14 % e 0 % para a amplitude dos campos os campos  $\vec{E}(\vec{r})$  e  $\vec{H}(\vec{r})$ , respectivamente.



a) Amplitude da corrente elétrica superficial equivalente.



a) Fase da corrente elétrica superficial equivalente.

Figura 5.39 – Corrente elétrica equivalente: guia circular coaxial excitado pelo modo TEM.

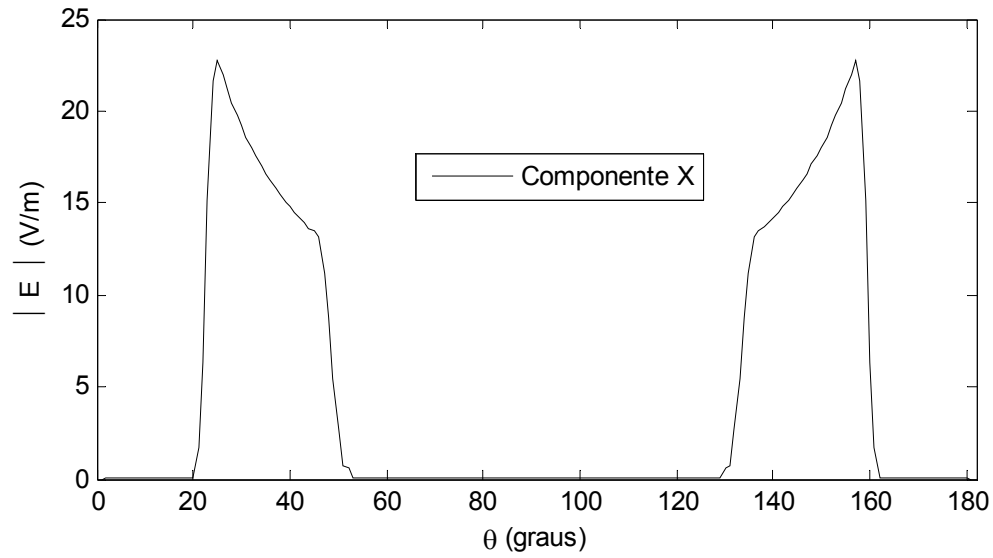
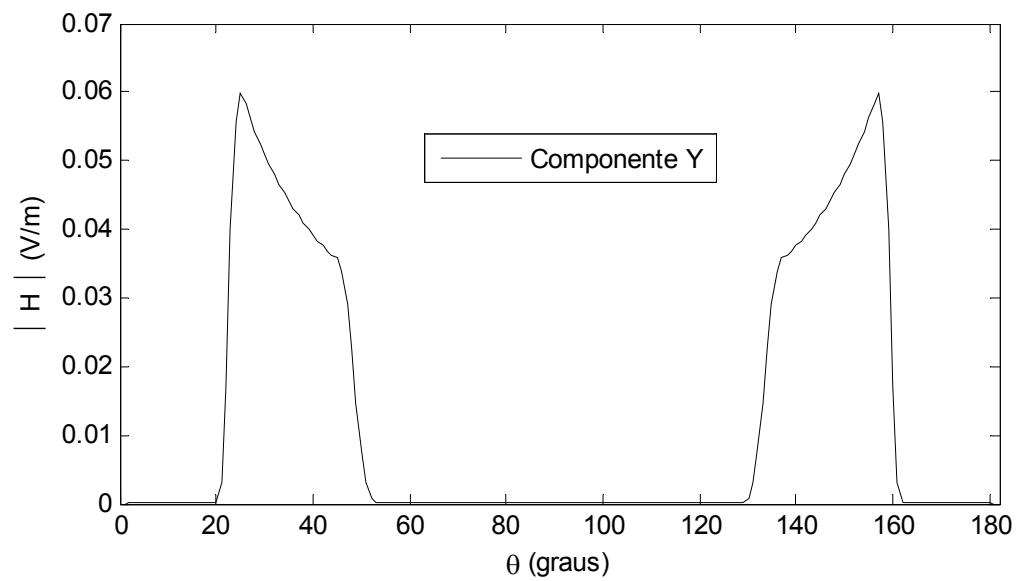
a) Campo elétrico componentes na direção  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ a) Campo magnético componentes na direção  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ 

Figura 5.40 – Campo próximo: guia circular excitado coaxial pelo modo TEM.

### 5.13 - Corneta Corrugada Excitada pelo Modo TE<sub>11</sub>

O objetivo desta seção é demonstrar a validade da formulação apresentada nos Capítulos 2 a 4 para a análise da radiação de uma corneta corrugada. Pretende-se validar a excitação da corneta através do modo TE<sub>11</sub> e avaliar o emprego de IBC's para simular as corrugações na superfície da corneta. A análise da corneta ilustrada na Figura 5.41(a) é conduzida de duas formas, considerando as corrugações CEP na curva geratriz, conforme Figura 5.41 (a), e aplicando uma IBC para simular estas corrugações, Figura 5.41 (b), [34]. Novamente, a frequência de operação é tal que o comprimento de onda do espaço livre  $\lambda_0 = 1$  m. Ambas as geometrias têm as mesmas dimensões básicas. O raio interno do guia circular é  $a_g = 0,37 \lambda_0$ , assegurando que somente o modo fundamental TE<sub>11</sub> propaga. As correntes equivalentes  $\vec{J}_g(\vec{r})$  e  $\vec{M}_g(\vec{r})$  são colocadas sobre a parede interna no final do guia em  $z = 0,05\lambda_0$ . A IBC dada pelas equações (4.125) e (4.126) é colocada sobre a parede interna no final do guia para absorver o retorno do modo TE<sub>11</sub>.

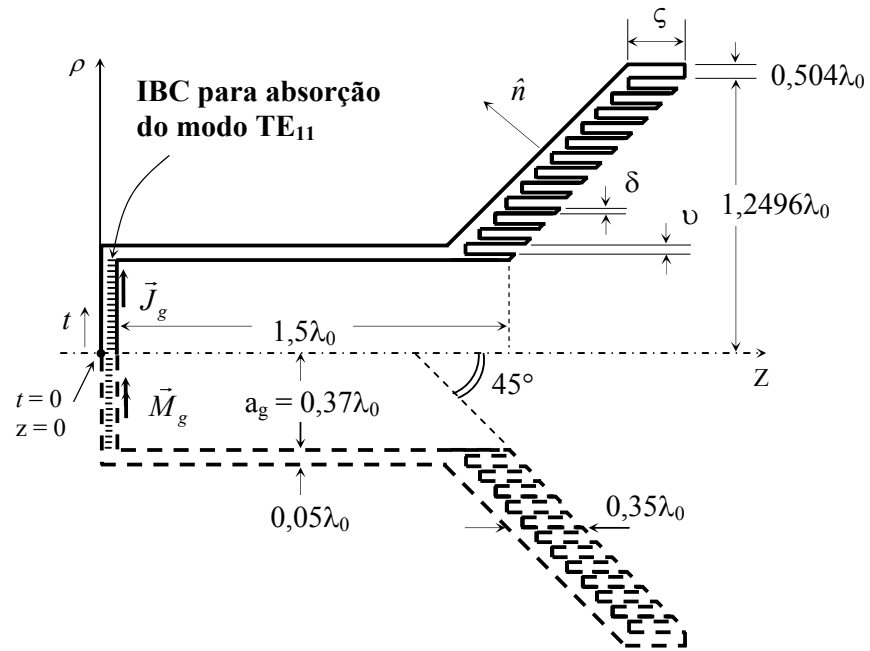
No caso da Figura 5.41 (a) onde as corrugações CEP estão presentes, 12 corrugações são colocadas sobre a superfície da corneta. A abertura de cada corrugação é  $\upsilon = 0,0489 \lambda_0$  ao longo da direção radial. A espessura do dente de cada corrugação é  $\delta = 0,0244 \lambda_0$ . A profundidade de cada corrugação medida a partir do centro da abertura é  $\varsigma = 0,27515 \lambda_0$ . No caso da Figura 5.41 (b) em que uma IBC é utilizada para simular as corrugações CEP sobre a superfície interna da corneta, as componentes desta IBC são dadas por [65]:

$$Z_t^{IBC} = -j \frac{\upsilon}{\upsilon + \delta} \tan(K_0 \varsigma), \quad (5.9)$$

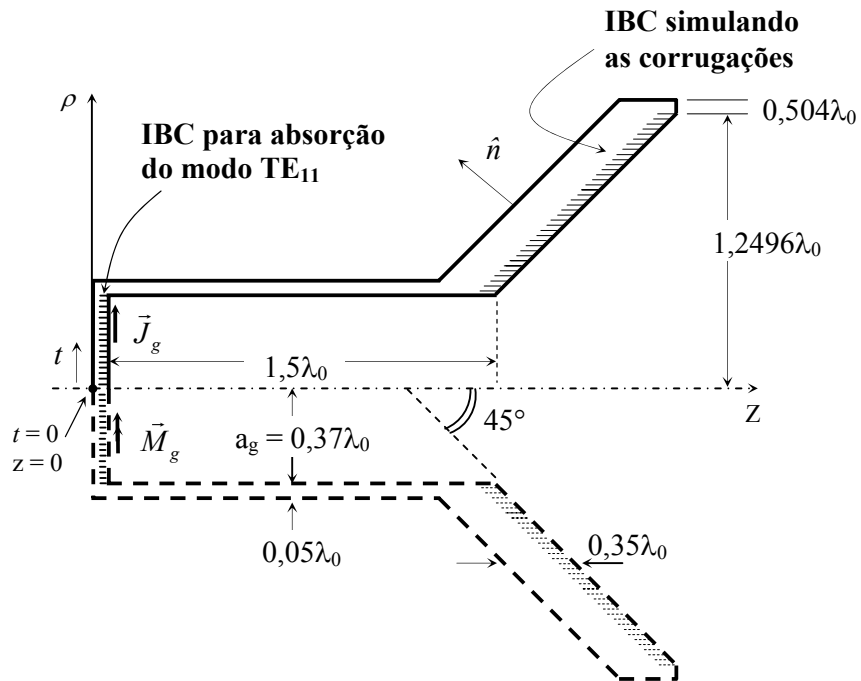
$$Z_\phi^{IBC} = 0, \quad (5.10)$$

onde  $\upsilon$ ,  $\delta$  e  $\varsigma$  são os parâmetros associados com a geometria das corrugações.

O número de segmentos utilizado para descrever a curva geratriz das cornetas ilustradas nas Figuras 5.41 (a) e (b) foi estabelecido de acordo a Seção 5.3. Ou seja, substituindo o raio do guia na equação (5.7), o que resulta em um ONS igual a 36,76.



a) Corneta CEP com corrugações



b) Corneta com a aproximação da IBC para as corrugações

Figura 5.41 – Geometria da corneta corrugada excitada pelo modo  $TE_{11}$ .

A curva geratriz em ambas as geometrias é percorrida no sentido horário (começando na parede externa atrás do guia e terminando na parede interna do guia) com o vetor normal  $\hat{n}$  apontando para a região externa à superfície do alimentador. A solução foi obtida através da formulação *Cfield* para evitar problemas de ressonância. Os diagramas de radiação obtidos na análise das cornetas das Figuras 5.41 (a) e (b) são apresentados na Figura 5.42. Estes resultados podem ser comparados com aqueles disponíveis na Figura 3.8 em [34]. A definição da polarização principal e cruzada é realizada atendendo a terceira definição de Ludwig [76]. A análise dos gráficos da Figura 5.42 e dos resultados apresentados na Tabela 5.6 demonstra uma excelente concordância entre os resultados obtidos em ambas as análises e aquele apresentado em [34].

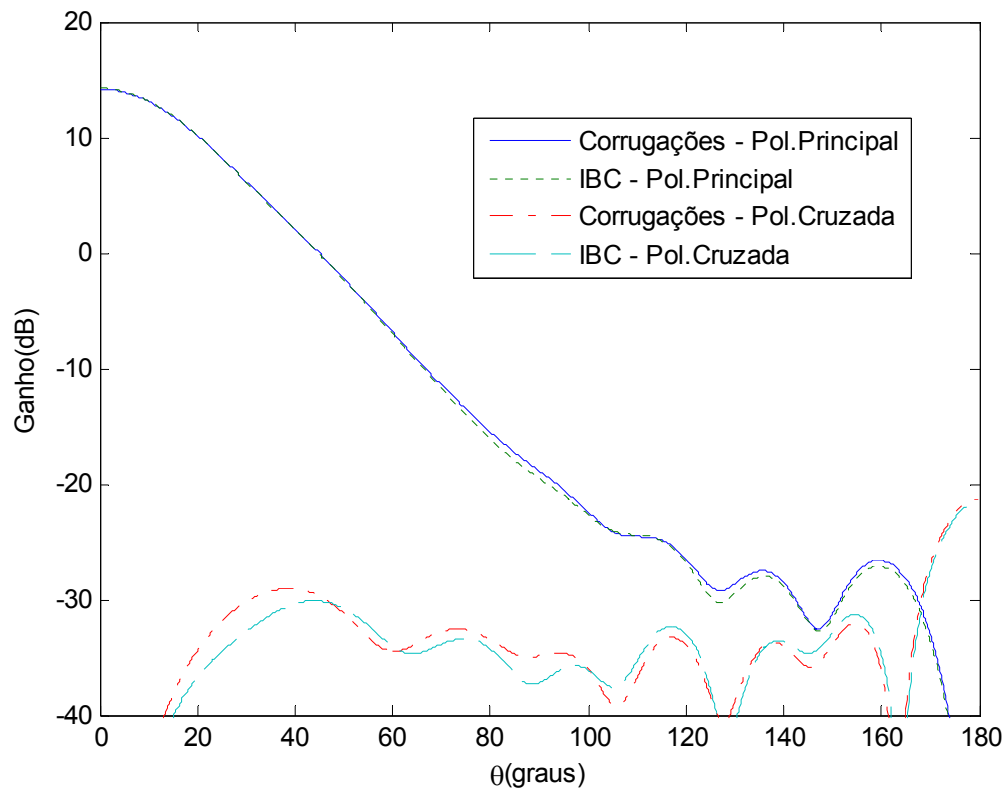


Figura 5.42 – Diagrama de radiado no plano  $\phi = 45^\circ$  para corneta CEP corrugada e com IBC excitada pelo modo  $TE_{11}$ .

Tabela 5.5 – Resultados para corneta corrugada excitada pelo modo  $TE_{11}$ 

Parâmetro avaliado	Resultados obtidos neste trabalho		Resultados disponíveis em [34]	
	Corneta corrugada	Corneta com IBC	Corneta corrugada	Corneta com IBC
Ganho em $\theta^\circ$ (dB)	14,20	14,24	14,22	14,24
Perdas de retorno (dB)	-15,41	-17,15	-14,55	-17,03

## 5.14 - Corneta coaxial Excitada pelo Modo TEM

De forma semelhante ao que foi apresentado na Seção 5.13, o objetivo desta seção é demonstrar a validade da formulação apresentada nos Capítulos 2 a 4, agora para a análise da radiação de uma corneta coaxial. Assim, pretende-se validar a excitação da corneta coaxial através do modo TEM, conforme discutido na Seção 3.6.3.3. A geometria da corneta sob análise é apresentada na Figura 5.43. As correntes equivalentes  $\vec{J}_g(\vec{r})$  e  $\vec{M}_g(\vec{r})$  são colocadas sobre a parede interna no final do guia em  $z = -4,241 \lambda_0$ . A IBC dada pelas equações (4.125) e (4.126) é colocada sobre a parede interna no final do guia para absorver o retorno do modo TEM. O número de segmentos utilizado para descrever a curva geratriz da corneta foi estabelecido de acordo a Seção 5.3, ou seja, substituindo o maior raio da corneta ( $1,161 \lambda_0$ ) na equação (5.7), o que resulta em um ONS igual a 29,89. Também neste caso a curva geratriz é percorrida no sentido horário com o vetor normal  $\hat{n}$  apontando para a região externa à superfície do alimentador. A análise do comportamento da corneta coaxial foi realizada ao longo de uma faixa de frequências. A frequência em que o comprimento de onda do espaço livre  $\lambda_0 = 1$  m é escolhida como frequência central da faixa. Os valores de frequência foram variados de  $0,9 f_0$  à  $1,1 f_0$ . O diagrama de radiação obtido na análise da corneta para as frequências de  $0,9 f_0$  e  $1,1 f_0$  são apresentados na Figura 5.42 juntamente com os resultados de medições disponíveis em [13] e reproduzidos nesta figura. A perda de retorno obtida na análise ao longo de toda a faixa de frequências é apresentada na Figura 5.43. Estes resultados também concordam com aqueles apresentados na Figura 5 em [13].

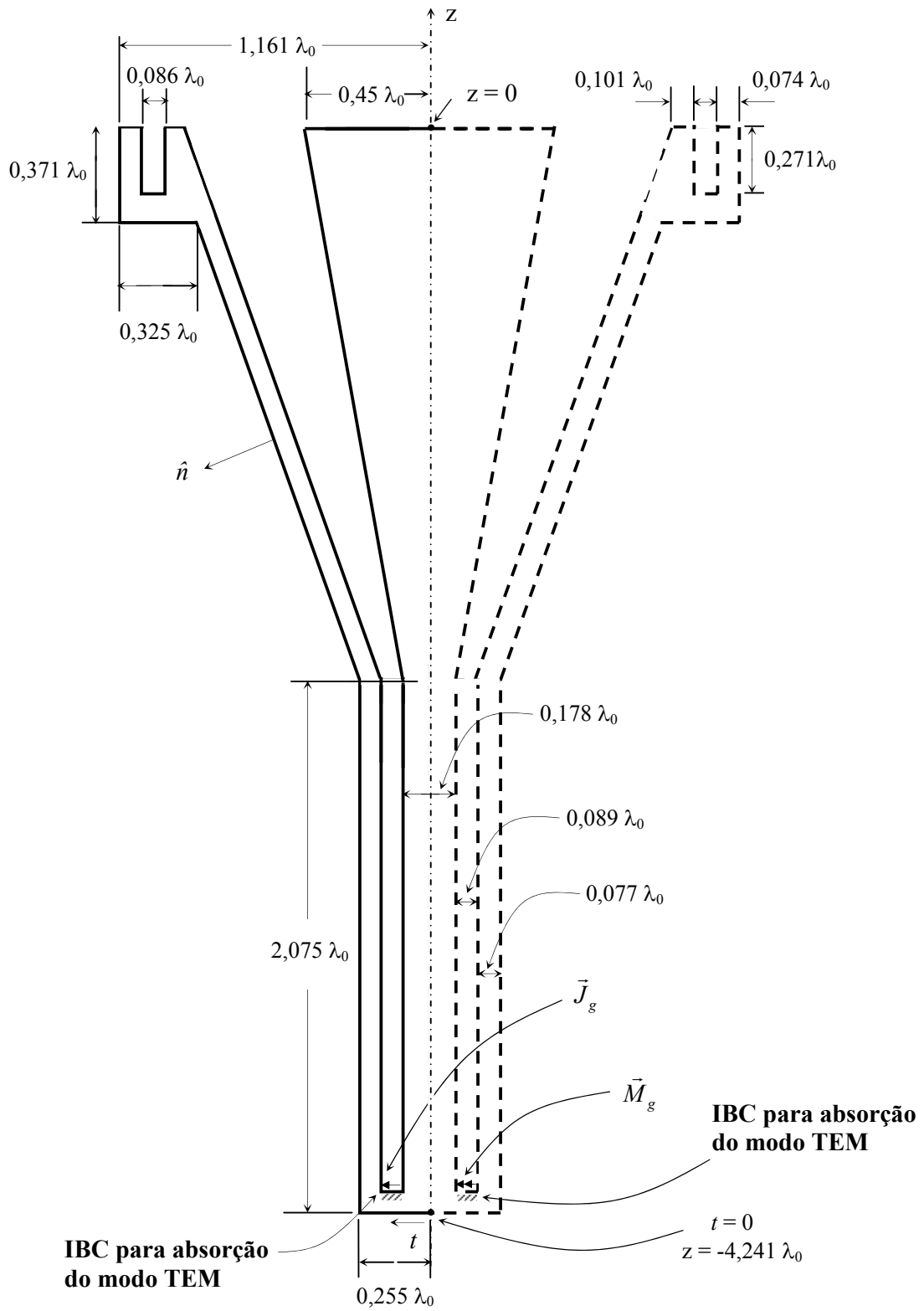


Figura 5.43 – Geometria da corneta coaxial excitada pelo modo TEM.



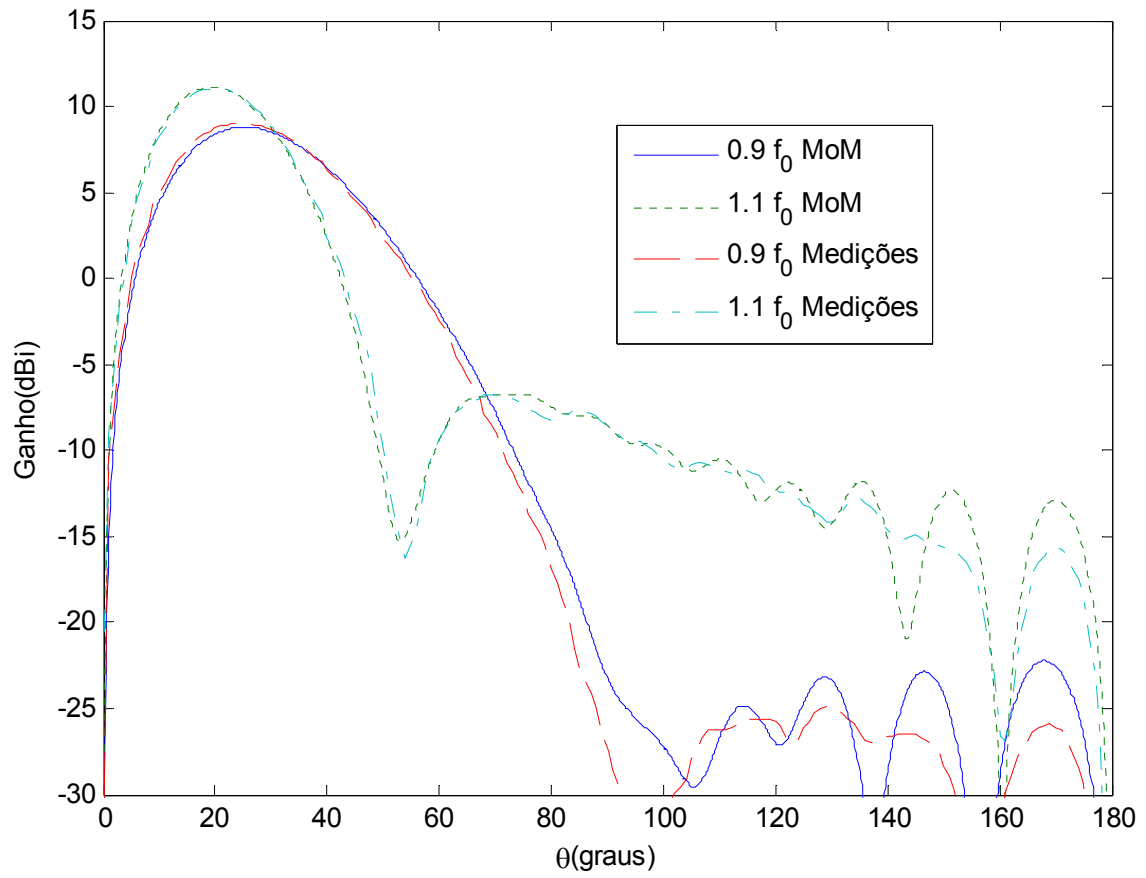


Figura 5.44 – Diagrama de radiado para corneta para corneta coaxial.

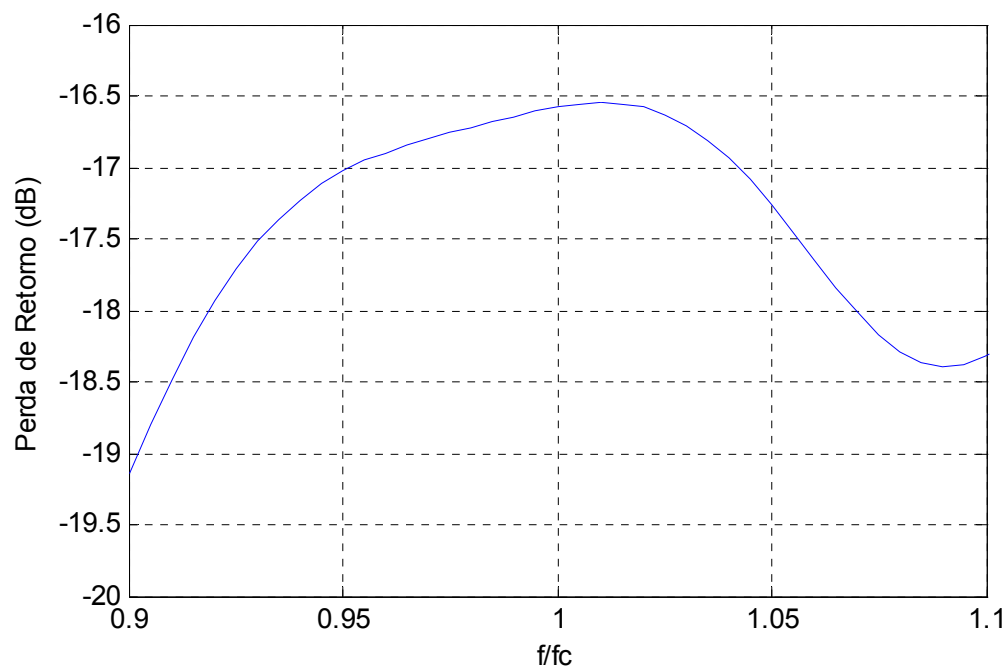


Figura 5.45 – Perdas de retorno ao longo da faixa de frequências  $0,9 f_0$  à  $1,1$ .

## 5.15 - Conclusões Parciais

Neste capítulo foi realizada a verificação da validade da formulação apresentada nos Capítulos 2 a 4 através de vários testes considerando diferentes tipos de BOR cujos resultados são conhecidos (soluções analíticas ou disponíveis na literatura). Foram avaliadas esferas condutoras e dielétricas de diferentes tamanhos elétricos e com diferentes valores de permissividade elétrica relativa (para esferas dielétricas). A partir dos resultados destas simulações foram obtidas funções empíricas para a determinação do número ótimo de segmentos (ONS) para a discretização de superfícies condutoras e dielétricas. Estas fórmulas empíricas foram então utilizadas para a indicação do ONS para avaliação de outros tipos de estruturas mais complexas, como por exemplo, esferas condutoras recobertas por uma camada dielétrica, esferas constituídas de 2 e 3 camadas homogêneas, duas esferas simultaneamente (uma dielétrica e outra condutoras), esferas constituídas de dois hemisférios homogêneos, refletor parabólico simétrico, guias de onda circular e coaxial e cornetas circular corrugada e coaxial). Os resultados obtidos em todas as simulações confirmaram a precisão e robustez da formulação desenvolvida.

De acordo com os resultados de todas as simulações realizadas foi verificado que determinadas formulações são mais apropriadas (conduzem a resultados mais precisos) para a avaliação de alguns tipos de BOR, ou seja:

Tabela 5.6 – Formulação mais indicada para a avaliação de diferentes tipos de BOR

<b>Formulação Indicada</b>	<b>Geometria do BOR</b>
<i>Efield</i>	Superfícies condutoras abertas
<i>Cfield</i>	Superfícies condutoras fechadas
<i>Müller</i>	BOR homogêneos
<i>Müller</i>	BOR constituído de camadas homogêneas
<i>PMCHWT</i>	BOR constituído de regiões homogêneas

## Capítulo 6

### ANÁLISE DE ANTENAS DUPLO-REFLETORAS PARA COBERTURA OMNIDIRECIONAL

O crescente interesse pela internet em alta velocidade tem criado uma enorme demanda pelo acesso em banda larga. Quando comparada com outras tecnologias, a de banda larga sem fio é mais barata, está sujeita a um rápido desenvolvimento e requer baixos custos de manutenção e atualização. Entre os serviços sem fio, o LDMS (*Local Multipoint Distribution Service*) oferece uma forma de acessar os serviços interativos de banda larga quando uma estação base se comunica com muitos pontos fixos (consumidores) na região da estação simultaneamente. Normalmente o LDMS opera em frequências acima de 26 GHz. Porém em frequências desta ordem de grandeza a operação do sistema requer um enlace direto entre a estação base e os consumidores. Nos usuários é possível a utilização de antenas direcionais. Porém, na estação base para obter uma iluminação adequada de toda a área de cobertura é indicado o uso de uma antena omnidirecional [14].

As antenas refletoras são tipicamente empregadas em enlaces radioelétricos ponto-a-ponto em microondas e em serviços de comunicação via satélite para cobertura ponto-multiponto. Tais aplicações ilustram o uso de configurações diretivas e são conseqüência de sua alta eficiência, relativa simplicidade mecânica e características inerentes de banda larga. Porém, as antenas refletoras também podem ser utilizadas para cobertura omnidirecional. Nos últimos anos tal aplicação tem despertado bastante interesse, especialmente devido às suas características geométricas inerentes que permitem o projeto de antenas compactas e eficientes para transmissão e recepção de sinais banda larga. A cobertura omnidirecional

através de antenas refletoras encontra interesse em aplicações envolvendo enlaces radioelétricos ponto-multiponto, onde tais antenas podem ser empregadas nas estações rádio-base correspondentes [11]-[16].

Os serviços de comunicação sem fio para frequências relativamente altas (acima de 3 GHz) tornam atrativo o uso de antenas refletoras compactas capazes de prover a largura de banda necessária para transmissão de sinais, os quais envolvem vários tipos de serviços. Antenas refletoras e duplo-refletoras têm sido investigadas para cobertura omnidirecional, porém as duplo-refletoras conduzem a projetos mais compactos uma vez que estas requerem um subrefletor com diâmetro consideravelmente menor para obter a largura de abertura necessária para o controle adequado da radiação vertical. Além disto, através das configurações duplo-refletoras é possível controlar a perda de retorno minimizando a radiação do subrefletor na direção do alimentador [14]. Em princípio existem quatro tipos distintos de antenas com dois refletores axialmente simétricos que podem ser utilizadas para cobertura omnidirecional: a OADC (*Omnidirectional Axis-Displaced Cassegrain*), OADE (*Omnidirectional Axis-Displaced Ellipse*), OADG (*Omnidirectional Axis-Displaced Gregorian*) e OADH (*Omnidirectional Axis-Displaced Hyperbola*) [9]-[15]. Dentre estes quatro tipos de antenas as que fornecem a geometria mais compacta para cobertura omnidirecional são as antenas dos tipos OADE e OADC, uma vez que requerem um subrefletor com diâmetro consideravelmente menor. Configurações ADG e ADH necessitam de uma distância entre o subrefletor e o alimentador relativamente grande, dificultando o projeto de configurações compactas [12], [13], [15].

Para uma cobertura omnidirecional com polarização vertical, um possível alimentador é a corneta coaxial excitada pelo modo TEM, conforme ilustrado na Figura 6.1. Assim, todas as antenas investigadas neste capítulo utilizam este tipo de alimentador.

Uma vez que a análise e a síntese de antenas refletoras direcionais constituídas somente de materiais condutores [4]-[11] ou de materiais condutores e dielétricos [17]-[29] encontra-se devidamente explorada na literatura, o objetivo deste capítulo é aplicar as técnicas apresentadas nos Capítulos 2 a 4 e validadas no Capítulo 5 na análise rigorosa do sistema

completo (refletor principal, subrefletor, alimentador, radome, etc.) de antenas duplo-refletores OADC e OADE para cobertura omnidirecional. Primeiramente, é realizada uma análise considerando as antenas constituídas somente de material condutor e os resultados obtidos são comparados com aqueles disponíveis em [15]. A seguir a estrutura do radome é incluída na análise. Quando a presença do radome é considerada, são avaliados os casos de incidência sobre o radome, normal para antenas OADC e OADE e oblíqua para antenas OADE.

## 6.1 - Antenas OADC e OADE para Cobertura Omnidirecional

Nesta seção é realizada a análise rigorosa do sistema completo (refletor principal, subrefletor e alimentador) de antenas duplo-refletores OADC e OADE para cobertura omnidirecional. Primeiramente a análise é conduzida para uma antena OADC, como aquela ilustrada na Figura 6.1, onde os parâmetros geométricos,  $W_A$ ,  $D_M$ ,  $D_S$ ,  $D_B$ ,  $V_S$ ,  $\theta_E$ ,  $R_e$  e  $R_i$ , são os mesmos utilizados na figura 3 de [15] para comparação dos resultados.

Inicialmente, a frequência de operação é tal que o comprimento de onda do espaço livre  $\lambda_0 = 1$  m. As correntes equivalentes  $\vec{J}_g(\vec{r})$  e  $\vec{M}_g(\vec{r})$ , apropriadas para gerar o modo TEM dentro do guia coaxial, são colocadas sobre a parede interna no final do guia. A IBC definida nas equações (4.125) e (4.126) é colocada sobre a parede interna no final do guia para absorver o modo TEM. O número de segmentos utilizado para descrever as curvas geratrizes da antena foi determinado de acordo com a Seção 5.3. Ou seja, substituindo o raio do subrefletor na equação (5.7), o que resulta em um ONS igual a 16. A análise é conduzida utilizando a formulação *Cfield* para observação realizada sobre a superfície fechada da corneta e a formulação *Efield* para observação realizada sobre as superfícies abertas do subrefletor e do refletor principal.

No ponto da junção entre as superfícies condutoras da corneta coaxial e do refletor principal, a representação espacial da corrente deve receber um tratamento especial de forma

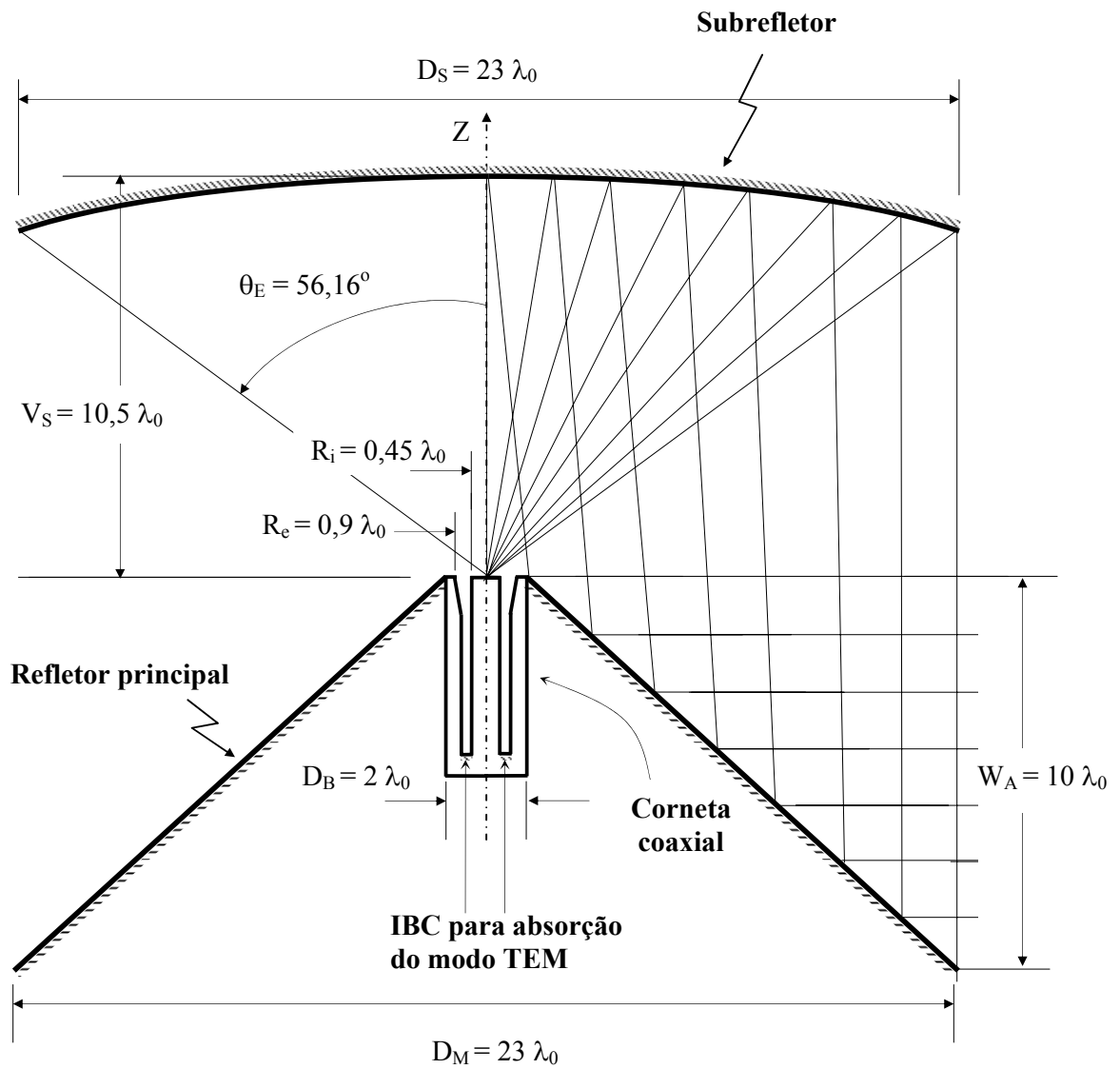


Figura 6.1 – Geometria da antena omnidirecional OADC.

a assegurar a continuidade da corrente elétrica na direção  $\hat{t}$  (para excitação TEM não existe corrente elétrica na direção  $\hat{\phi}$ , conforme discutido na Seção 3.6.3.3) ao utilizar o problema equivalente externo para análise das superfícies condutoras. Neste caso, conforme ilustrado na Figura 6.2, assegurar a continuidade da corrente elétrica na direção  $\hat{t}$  significa atender à lei de Kirchhoff das correntes no ponto da junção. Este tratamento especial é executado estendendo em um segmento extra a superfície do refletor principal sobre a superfície da corneta de forma que o segmento extra é considerado duas vezes (uma associada à superfície do refletor principal e outra associada à superfície da corneta) assegurando, assim, o atendimento à lei de Kirchhoff das correntes.

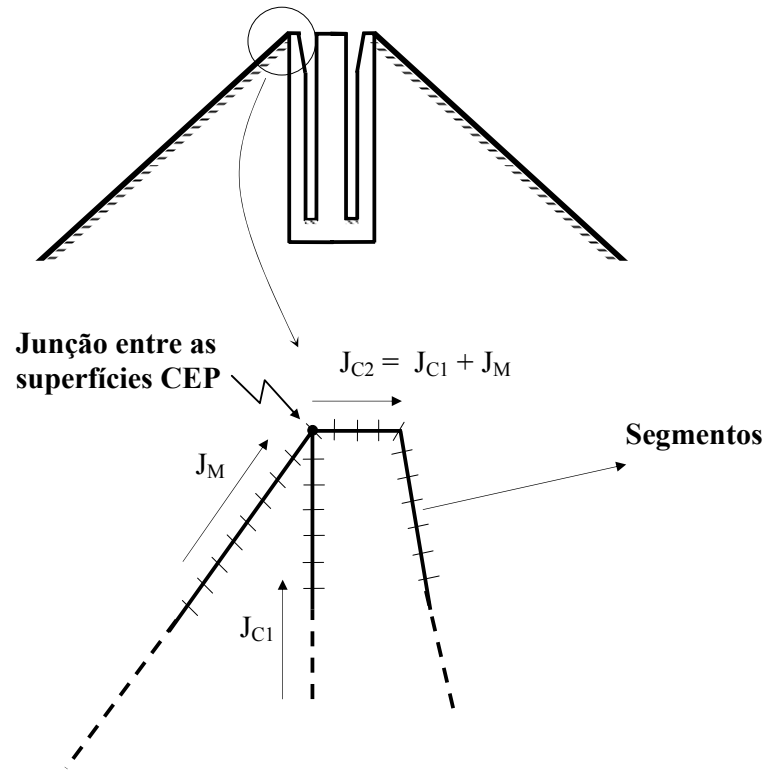
O diagrama de radiação na região de campo distante obtido na análise é apresentado na Figura 6.3 a). Comparações entre este resultado e aquele apresentado na Figura 3 de [15] e reproduzido na Figura 6.3 b), demonstram uma excelente concordância entre as soluções (o ganho da antena obtido nesta análise é 11,6 dBi e o apresentado em [15] é 11,8 dBi).

A seguir foi realizada a análise do comportamento da antena omnidirecional OADC ao longo de uma faixa de frequências. A frequência em que o comprimento de onda no espaço livre  $\lambda_0 = 1$  m é escolhida como frequência central da faixa,  $f_0$ . Os valores de frequência foram variados de  $0,9 f_0$  à  $1,1 f_0$  sem nenhuma alteração na geometria da antena (Figura 6.1). Os diagramas de radiação obtidos ao longo da faixa de frequências estabelecida são apresentados na Figura 6.4. O ganho máximo, o ângulo onde o ganho máximo ocorre, a largura de meia potência do feixe (HPBW), a perda de retorno e o Nível Médio de Lóbulos Secundários (NMLS) definido como

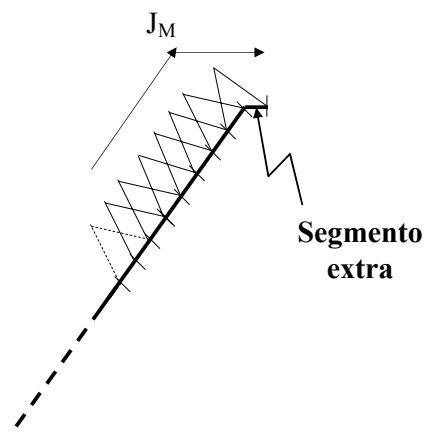
$$NMLS = \frac{G_{LS}(\theta)}{NPO}, \quad (6.1)$$

onde  $G_{LS}$  é o somatório do ganho nos lóbulos secundários e  $NPO$  é o número de pontos de observação para os lóbulos secundários são apresentados na Tabela 6.1. Como pode ser

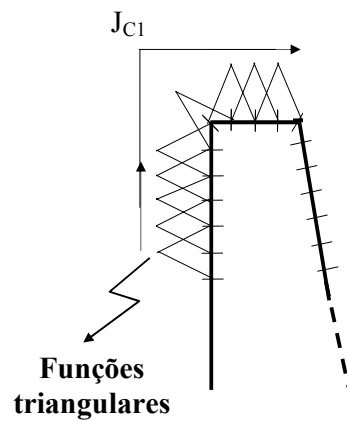




a) Junção entre as superfícies condutoras do refletor principal e da corneta coaxial

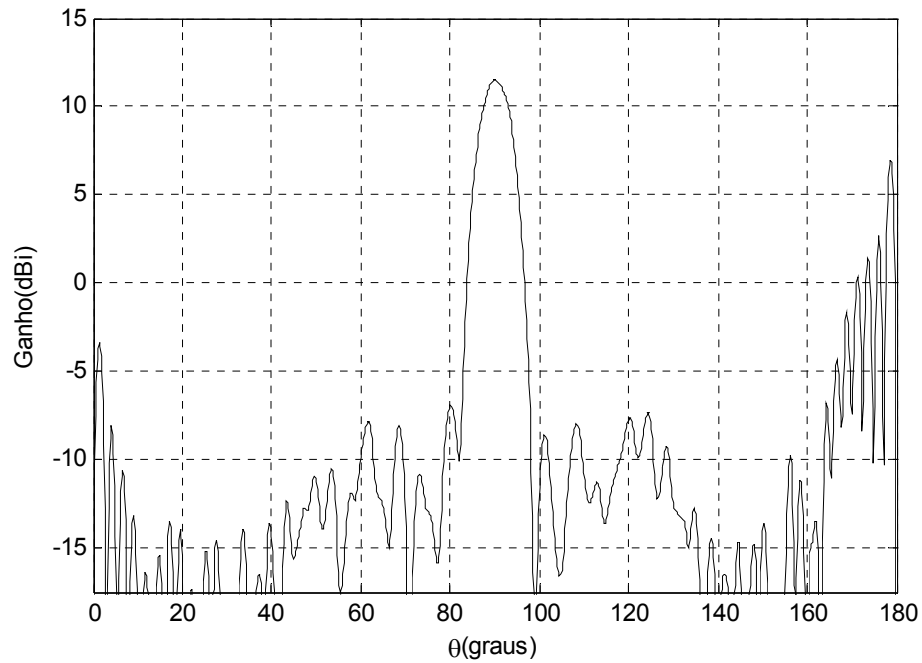


b) Superfície do refletor principal

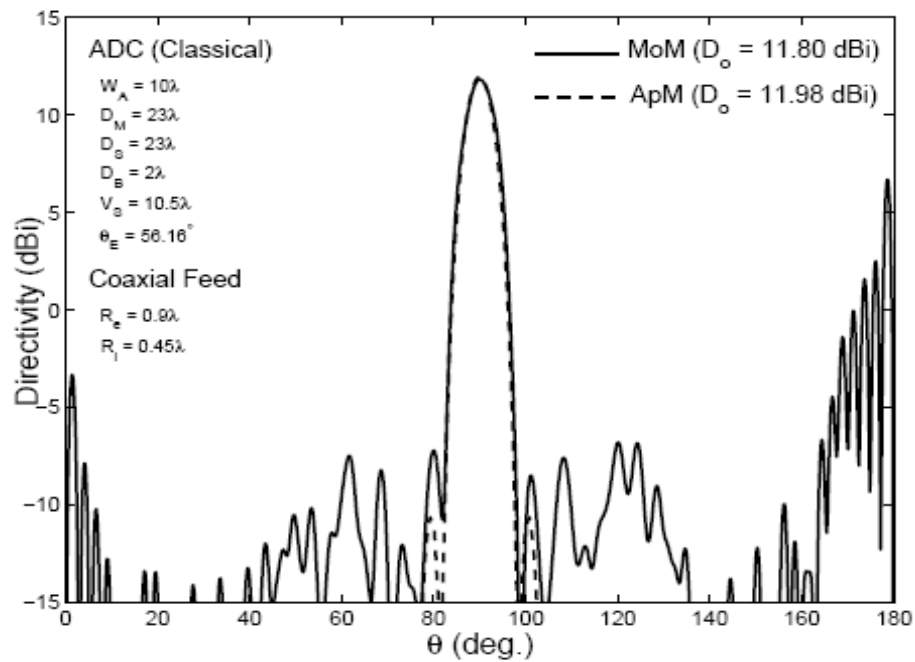


c) Superfície da corneta coaxial

Figura 6.2 – Representação da corrente elétrica no ponto de junção entre superfícies condutoras.



a) Resultados obtidos utilizando a formulação desenvolvida



b) Resultados disponíveis em [15]

Figura 6.3 – Diagrama de radiação na região de campo distante para antena omnidirecional OADC.

verificado através destes resultados, a forma do diagrama de radiação não sofre mudanças significativas (o lóbulo principal permanece praticamente inalterado e pequenas modificações podem ser verificadas nos lóbulos secundários), ao longo de toda a faixa de frequências. O ganho máximo varia de forma oscilatória entre 11,07 dBi e 12,74 dBi e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de 1,21 dBi. O ângulo em que o ganho máximo ocorre varia de forma oscilatória entre  $89,2^\circ$  a  $91,4^\circ$  e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de  $1,4^\circ$ . HPBW varia de forma oscilatória entre  $5,4^\circ$  e  $7,8^\circ$  e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de  $2,2^\circ$ . NMLS cai de forma oscilatória variando entre  $-11,9$  dBi e  $-17,45$  dBi e a perda de retorno aumentam de forma oscilatória variando entre  $-17,24$  dB e  $-13,04$  dB.

Através dos resultados apresentados na Figura 6.4 e na Tabela 6.1 verifica-se que ao longo da faixa de frequências estabelecida o comportamento das características eletromagnéticas da antena duplo-refletora omnidirecional OADC não sofre alterações significativas, o que, em princípio, habilita esta antena para operação com sinais banda-larga.

Para a antena omnidirecional OADE ilustrada na Figura 6.5 os parâmetros geométricos  $W_A$ ,  $D_M$ ,  $D_S$ ,  $D_B$ ,  $V_S$ ,  $\theta_E$ ,  $R_e$  e  $R_i$ , são os mesmos utilizados na figura 4 de [15] para comparação dos resultados. Para a análise desta antena foram mantidas todas as condições inicialmente assumidas para a antena OADC (ou seja, frequência de operação, posição das correntes equivalentes  $\vec{J}_g(\vec{r})$  e  $\vec{M}_g(\vec{r})$  apropriadas para gerar o modo TEM, colocação da IBC definida nas equações (4.125) e (4.126) para absorver o modo TEM, determinação do número de segmentos para descrever as curvas geratrizes de acordo com a Seção 5.3 (substituindo o raio do subrefletor na equação (5.7), o que resulta em um ONS de aproximadamente 16), utilização das formulações  $Cfield$  para observação sobre a superfície da corneta e  $Efield$  para observação sobre as superfícies abertas do subrefletor e do refletor principal e procedimento para representação da corrente superficial no ponto da junção entre as interfaces condutoras).

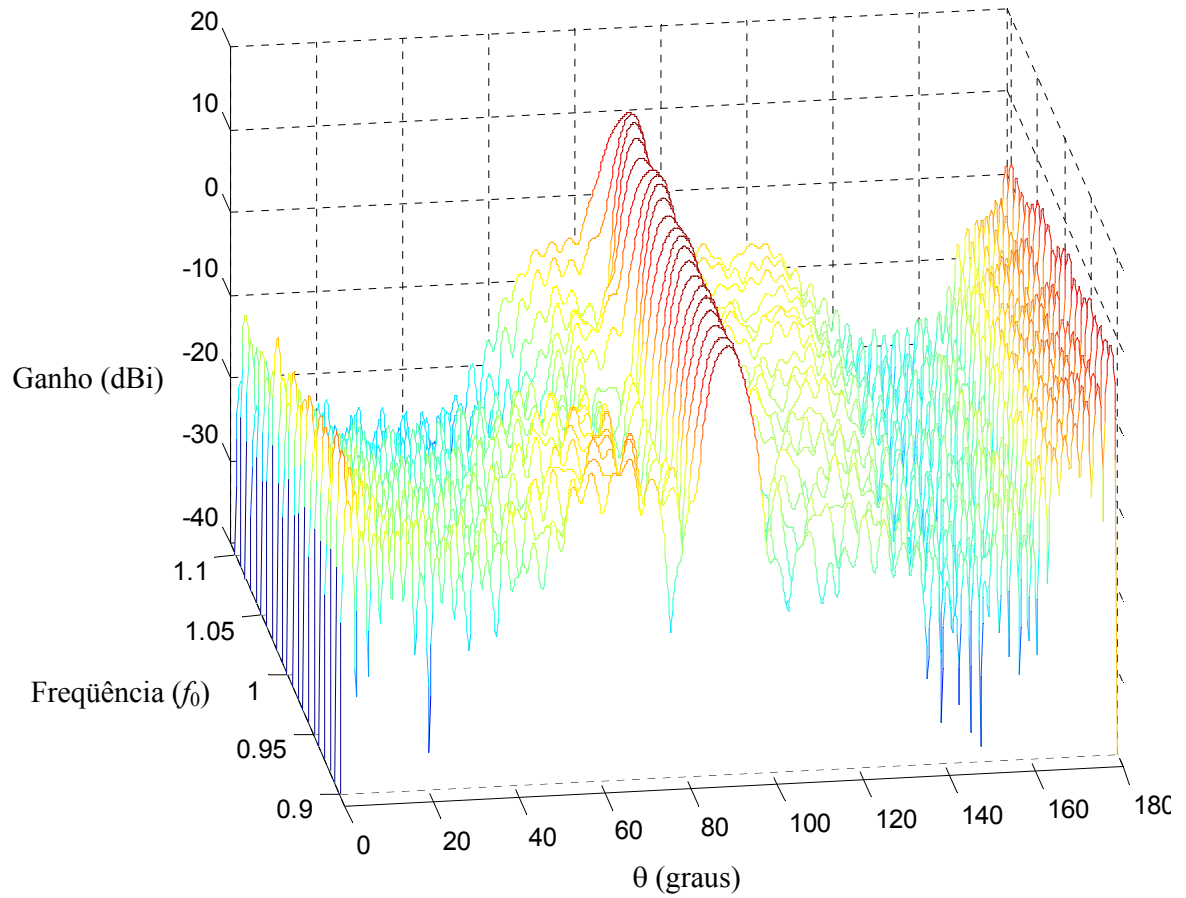


Figura 6.4 – Diagrama de radiação na região de campo distante para antena omnidirecional OADC ao longo da faixa de frequências de  $0,9 f_0$  à  $1,1 f_0$ .

Tabela 6.1 – Resultados para antena omnidirecional OADC

<b>Frequência</b>	<b>Ganho Máximo <math>G_{\max}</math> (dBi)</b>	<b><math>\theta</math> onde <math>G_{\max}</math> ocorre (<math>^{\circ}</math>)</b>	<b>HPBW</b>	<b>NMLS (dBi)</b>	<b>Perda de Retorno (dB)</b>
$0,90 f_0$	11,59	90,00	6,80	-12,44	-15,93
$0,91 f_0$	11,32	90,20	7,20	-11,96	-16,55
$0,92 f_0$	11,27	89,40	7,20	-12,09	-17,24
$0,93 f_0$	11,63	89,20	6,80	-13,06	-16,52
$0,94 f_0$	11,88	89,60	6,60	-12,72	-15,83
$0,95 f_0$	11,75	90,00	6,80	-12,74	-15,27
$0,96 f_0$	11,59	89,60	7,00	-13,60	-14,97
$0,97 f_0$	11,90	89,20	6,40	-13,73	-15,28
$0,98 f_0$	12,20	89,40	6,00	-13,48	-15,15
$0,99 f_0$	12,05	90,00	6,40	-13,87	-14,60
$1,0 f_0$	11,53	90,00	7,60	-13,59	-13,66
$1,01 f_0$	11,61	89,40	7,20	-14,55	-13,79
$1,02 f_0$	12,29	89,40	6,00	-15,39	-14,61
$1,03 f_0$	12,57	90,00	5,60	-14,88	-14,36
$1,04 f_0$	12,18	90,60	6,20	-14,74	-13,41
$1,05 f_0$	11,34	90,80	7,60	-16,09	-13,18
$1,06 f_0$	11,42	89,20	7,40	-16,49	-13,60
$1,07 f_0$	12,37	89,40	5,60	-17,45	-14,17
$1,08 f_0$	12,74	90,20	5,40	-17,28	-14,01
$1,09 f_0$	12,35	90,80	5,60	-15,83	-13,17
$1,10 f_0$	11,07	91,40	7,80	-16,67	-13,04

O diagrama de radiação na região de campo distante obtido na análise é apresentado na Figura 6.6 a). Comparações entre este resultado e aquele apresentado na Figura 4 de [15] e reproduzido na Figura 6.6 b), demonstram uma excelente concordância entre as soluções (o ganho da antena obtido nesta análise é 12,06 dBi e o apresentado em [15] é 11,19 dBi). Também para esta antena foi realizada a análise do comportamento ao longo da mesma faixa de frequências utilizada para a antena OADC e os resultados obtidos são apresentados na Figura 6.7 e Tabela 6.2. Como pode ser verificado através dos resultados ilustrados na Figura 6.7, a forma do diagrama de radiação não sofre mudanças significativas (o lóbulo principal permanece praticamente inalterado, e pequenas modificações podem ser verificadas nos lóbulos secundários), ao longo de toda a faixa de frequências. Através dos resultados da Tabela 6.2 observa-se que o ganho máximo varia de forma oscilatória entre 10,55 dBi e 12,65i dB e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de 1,51 dBi. O ângulo em que o ganho máximo ocorre varia de forma oscilatória entre  $88^\circ$  e  $90,6^\circ$  e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de  $1,4^\circ$ . HPBW varia de forma oscilatória entre  $5,4^\circ$  e  $7,8^\circ$  e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de  $2,4^\circ$ . NMLS cai de forma oscilatória variando entre  $-12,28$  dBi e  $-18,66$  dBi e a perda de retorno aumentam de forma oscilatória variando entre  $-19,77$  dB e  $-12,74$  dB.

Com base nos resultados apresentados na Figura 6.7 e na Tabela 6.2 pode-se concluir que ao longo da faixa de frequências estabelecida, assim como para a antena duplo-refletora omnidirecional OADC, para a antena OADE o comportamento das características eletromagnéticas não sofre alterações significativas. Assim, em princípio, também esta antena se mostra apta para operação com sinais banda-larga.

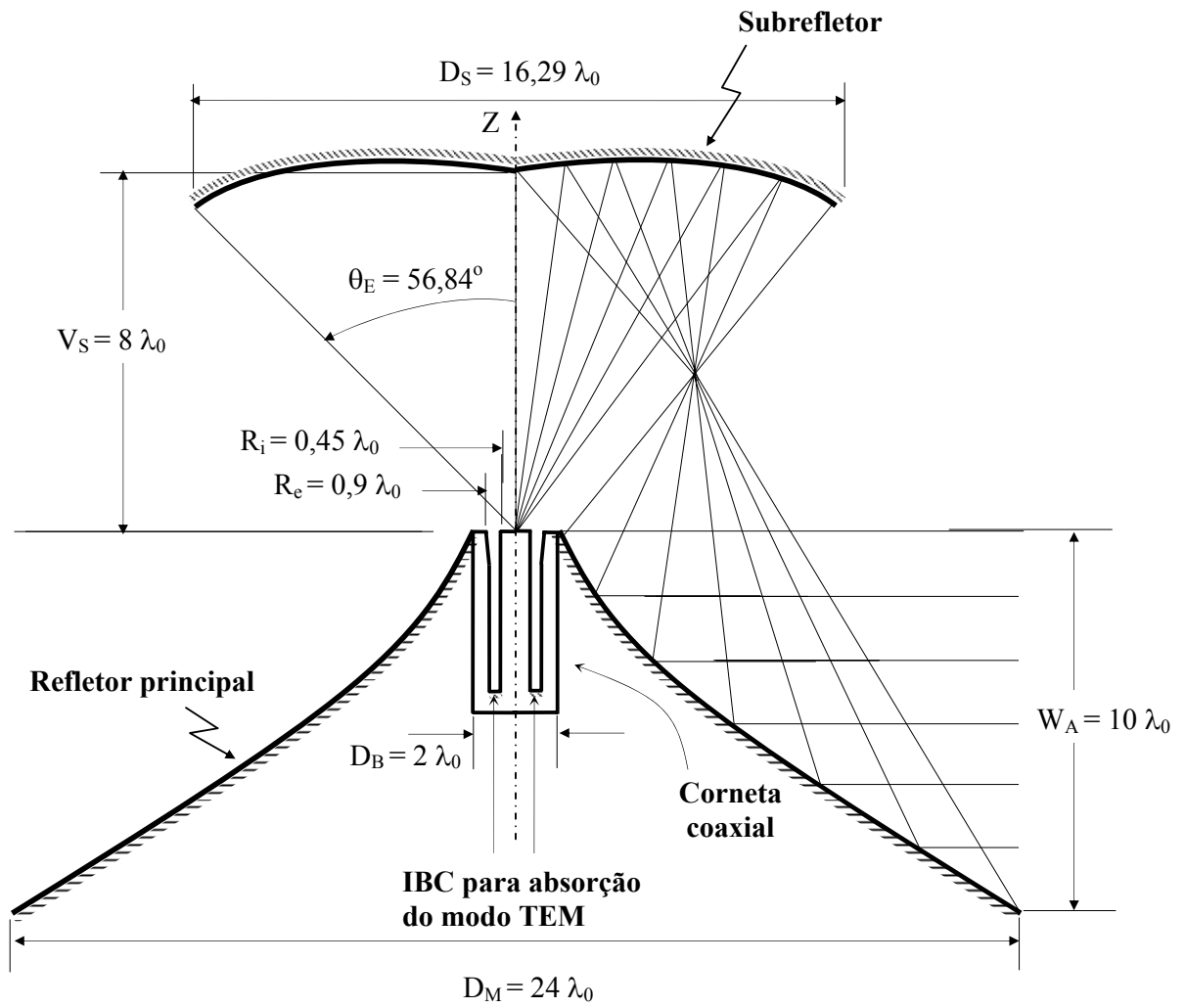
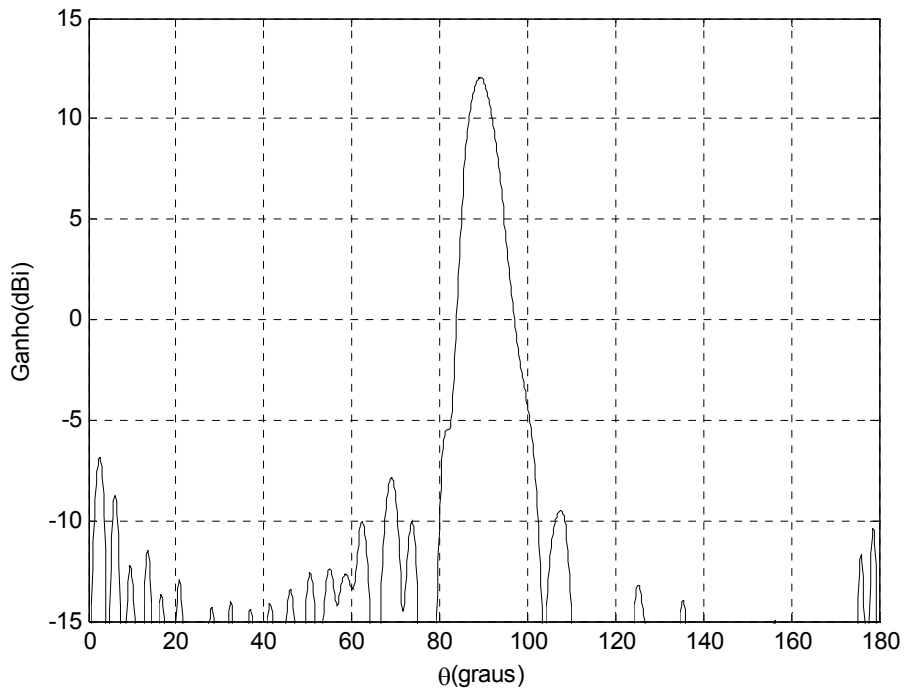
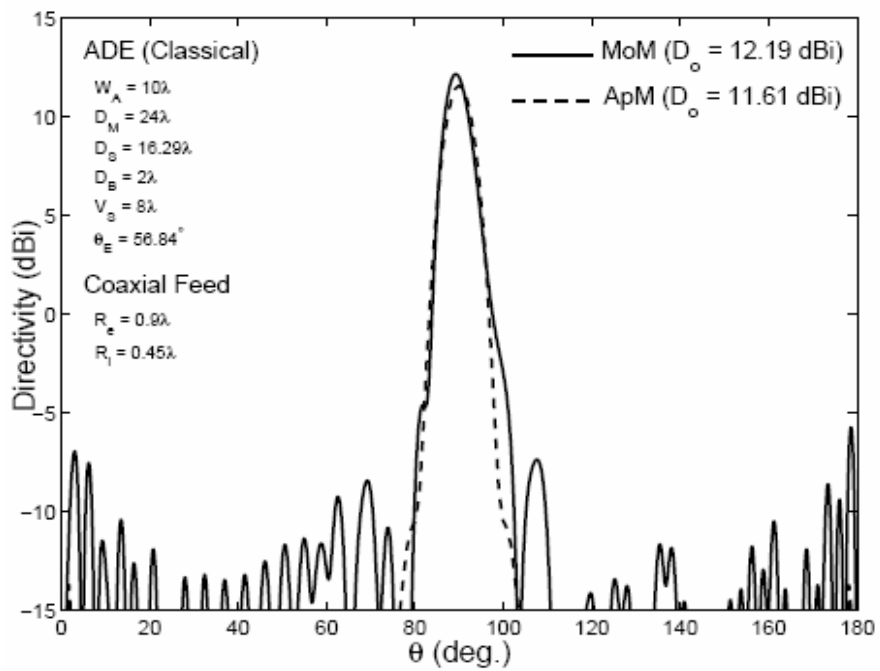


Figura 6.5 – Geometria da antena omnidirecional OADE.



a) Resultados obtidos utilizando a formulação desenvolvida



b) Resultados disponíveis em [15]

Figura 6.6 – Diagrama de radiação na região de campo distante para antena omnidirecional OADE.



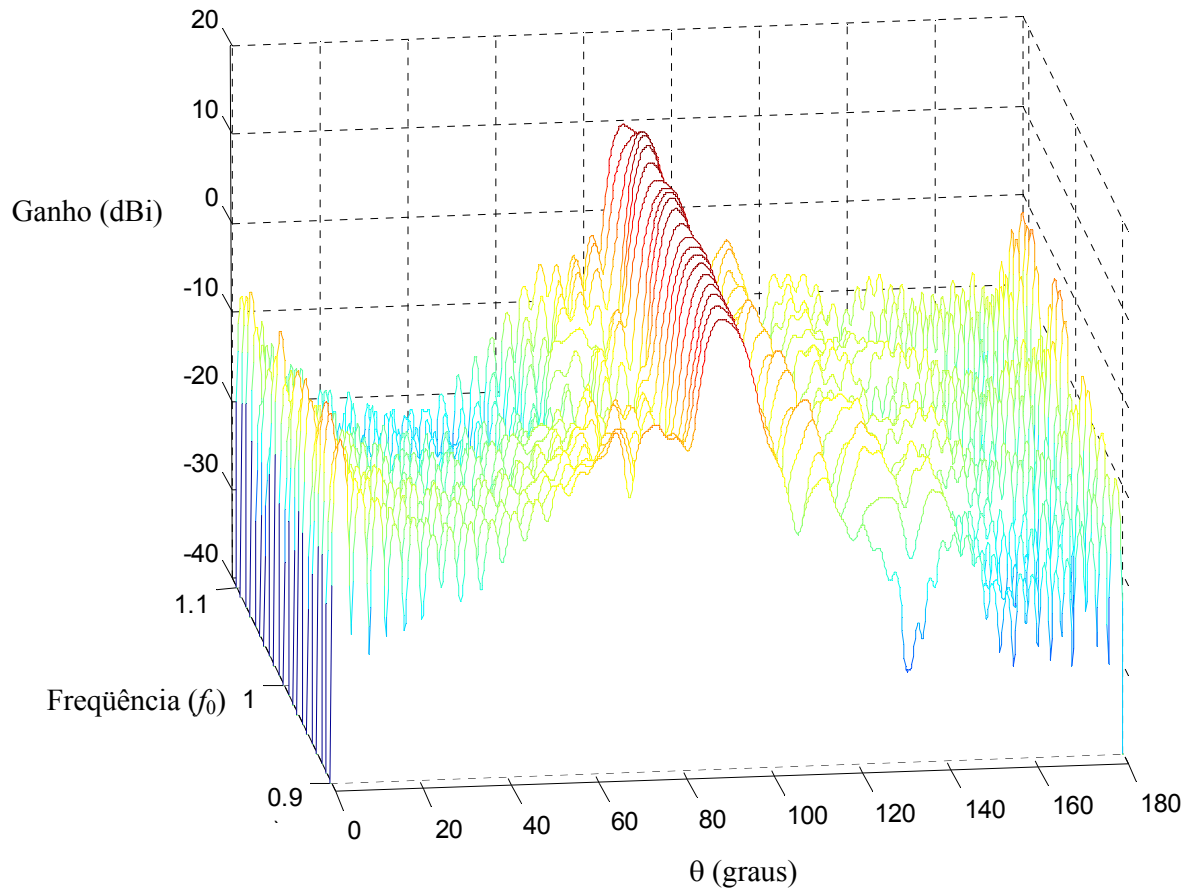


Figura 6.7 – Ganho do campo distante para antena omnidirecional OADE ao longo da faixa de frequências de  $0,9 f_0$  à  $1,1 f_0$ .

Tabela 6.2 – Resultados para antena omnidirecional OADE

<b>Frequência</b>	<b>Ganho Máximo <math>G_{\max}</math> (dBi)</b>	<b><math>\theta</math> onde <math>G_{\max}</math> ocorre (<math>^{\circ}</math>)</b>	<b>HPBW</b>	<b>NMLS (dBi)</b>	<b>Perda de Retorno (dB)</b>
$0,90 f_0$	10,55	88,80	8,60	-13,32	-19,39
$0,91 f_0$	10,99	88,80	7,80	-14,74	-13,83
$0,92 f_0$	11,24	89,20	7,20	-13,13	-12,74
$0,93 f_0$	11,20	89,60	7,00	-12,28	-14,11
$0,94 f_0$	11,27	89,60	7,20	-13,44	-19,77
$0,95 f_0$	11,36	89,60	7,40	-14,39	-18,38
$0,96 f_0$	11,25	89,80	7,80	-13,43	-13,95
$0,97 f_0$	11,09	90,00	8,00	-13,04	-12,81
$0,98 f_0$	11,07	89,80	7,80	-13,42	-13,36
$0,99 f_0$	11,46	89,40	7,20	-15,11	-15,87
$1,0 f_0$	12,06	89,20	6,40	-16,52	-15,88
$1,01 f_0$	12,19	89,20	6,20	-15,81	-14,05
$1,02 f_0$	11,78	90,00	7,00	-15,65	-13,1
$1,03 f_0$	11,14	90,60	7,80	-14,30	-13,04
$1,04 f_0$	10,918	89,40	8,40	-14,44	-13,91
$1,05 f_0$	11,82	88,80	6,60	-17,21	-14,13
$1,06 f_0$	12,57	89,20	5,60	-18,66	-13,92
$1,07 f_0$	12,65	89,60	5,40	-17,78	-13,64
$1,08 f_0$	12,01	90,20	6,20	-15,14	-13,53
$1,09 f_0$	10,78	90,60	8,80	-14,62	-13,18
$1,10 f_0$	10,62	88,00	8,80	-13,40	-13,47

## 6.2 - Antenas Refletoras Omnidirecional com Radome

Para análise acurada das propriedades eletromagnéticas de uma antena refletora é necessário considerar os efeitos de todos elementos que constituem o sistema da antena (a estrutura de suporte sobre a qual a antena é montada, alimentador, invólucro dielétrico que eventualmente envolve a antena (radome), etc.), pois estes elementos podem afetar consideravelmente a performance da antena. Assim, o objetivo desta seção é realizar a análise das antenas duplo-refletoras OADC e OADE avaliadas na Seção 6.1 considerando a existência do radome.

O radome pode ser encontrado em diferentes tipos de antenas. Sua função principal é proteger a antena da degradação oferecida pelos efeitos do ambiente onde ela é exposta (ventos, temperatura, umidade, neve, condensação, sal, gelo, etc.) e ainda atender os requerimentos estéticos e ambientais impostos pela sociedade [22]-[30]. Porém, não é toda a energia eletromagnética que incide sobre o radome que é transmitida. Parte desta energia é absorvida e outra parte é refletida. A energia refletida, na direção do alimentador e das superfícies refletoras da antena, pode provocar uma atenuação significativa do sinal transmitido devido às possíveis interferências entre a onda transmitida pela antena e a refletida pelo radome. A reflexão provocada pelo radome pode causar não somente a alteração da amplitude do diagrama de radiação assim como uma total degradação de sua forma, ou seja, alteração do número, nível e direção dos lóbulos secundários e principal. Em princípio, estes problemas são sensivelmente reduzidos se a superfície do radome é plana e a incidência sobre este é normal [62].

É desejável que um radome atenda além dos requisitos elétricos alguns mecânicos e físicos tais como: não deformar facilmente, suportar impacto de água e rochas, não dever ser solúvel em solvente, resistir a altas temperaturas sem tornar-se macio e suportar baixas temperaturas sem tornar-se frágil e não deve absorver qualquer tipo de mistura. Uma espuma dielétrica que atende a estes requisitos e vem sendo muito utilizada na confecção de radomes é um composto que possui permissividade elétrica relativa,  $\epsilon_r = 2,08$ . Os radomes utilizados nas antenas avaliados neste trabalho são considerados constituídos desta espuma.

A reflexão de uma onda eletromagnética ocorre somente para uma descontinuidade, isto é, a transição de um meio para outro. A estrutura do radome deve ser tratada como um par de tais descontinuidades (interfaces dielétricas). O radome ideal deve transmitir a onda eletromagnética sem nenhuma reflexão e absorção. Embora esta situação ideal não possa ser alcançada, na prática a transmissão pode ser maximizada ou a reflexão minimizada, dependendo do tipo de radome, ajustando o espaço entre suas interfaces (isto é, sua espessura),  $d$ , de forma a obter o cancelamento parcial ou total da energia refletida.

A Figura 6.8 ilustra uma onda plana com polarização vertical incidindo obliquamente sobre uma das interfaces de um radome. Nesta figura  $\vec{E}_{i1}$ ,  $\vec{E}_{i2}$ ,  $\vec{E}_{r1}$ ,  $\vec{E}_{r2}$ ,  $\vec{E}_{t2}$  e  $\vec{E}_{t3}$  são os campos incidentes, refletidos e transmitidos e  $\theta_{i1}$ ,  $\theta_{i2}$ ,  $\theta_{r1}$ ,  $\theta_{r2}$ ,  $\theta_{t2}$  e  $\theta_{t3}$  são os ângulos de incidência, reflexão e transmissão nos meios 1 e 2 e 3, respectivamente. A espessura ótima do radome (isto é, espessura que minimiza a reflexão),  $d$ , pode ser obtida a partir do coeficiente de reflexão total dado por [77]:

$$\Gamma_{total} = \frac{\Gamma_{12} + \Gamma_{23} e^{-2jk_2 d}}{1 + \Gamma_{12} \Gamma_{23} e^{-2jk_2 d}}, \quad (6.2)$$

onde

$$\Gamma_{12} = \frac{\eta_2 \cos \theta_{i1} - \eta_1 \cos \theta_{t2}}{\eta_2 \cos \theta_{i1} + \eta_1 \cos \theta_{t2}}, \quad (6.3)$$

$$\Gamma_{23} = \frac{\eta_3 \cos \theta_{i2} - \eta_2 \cos \theta_{t3}}{\eta_3 \cos \theta_{i2} + \eta_2 \cos \theta_{t3}}, \quad (6.4)$$

e  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  e  $\eta_3$  são as impedâncias características dos meios 1, 2 e 3 respectivamente. A espessura  $d$ , pode ser obtida fazendo  $\Gamma_{total}$ , igual a zero, o que resulta em:

$$d = n \frac{\lambda_d}{2 \cos \theta_{t2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.5)$$

onde  $\lambda_d = \lambda_2$  é o comprimento de onda do radome, ou seja do meio dielétrico entre as duas interfaces. É importante destacar que a equação (6.5) foi obtida considerando os meios 1 e 3 constituídos do mesmo material, como é o caso dos radomes.

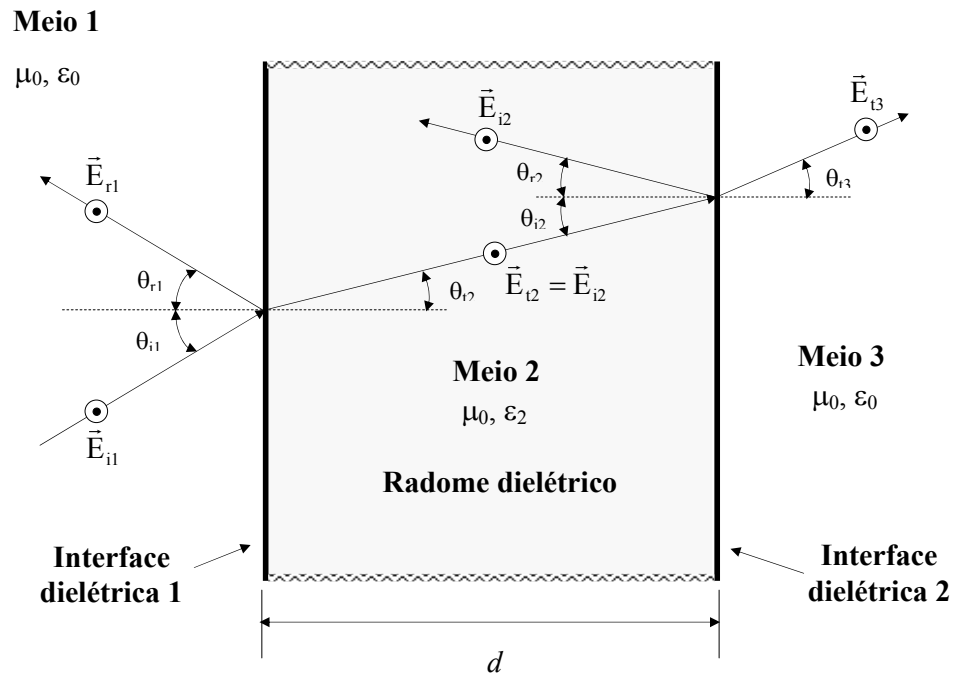


Figura 6.8 – Incidência obliqua de uma onda plana em um radome.

Para o caso particular da plana da Figura 6.8 incidindo perpendicularmente sobre uma das interfaces do radome a espessura ótima do radome,  $d$ , obtida a partir de (6.5) é [62], [77]:

$$d = n \frac{\lambda_d}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.6)$$

### 6.2.1 - Antena Omnidirecional OADC com Radome

Nesta seção é realizada a análise rigorosa da antena duplo-refletora OADC avaliada na Seção 6.1, considerando agora a presença do radome dielétrico, conforme ilustrado na Figura 6.9. As dimensões, o tipo de excitação e o número de segmentos por  $\lambda_0$  utilizados para representar as curvas geratrizes dos refletores e alimentador não foram alterados. É utilizado um radome com permissividade elétrica relativa  $\epsilon_r = 2,08$  e cuja espessura é definida de acordo com a equação (6.6), uma vez que neste caso a incidência sobre a superfície do radome é normal. Na Figura 6.9  $\lambda_d$  é o comprimento de onda no meio dielétrico do radome. Para representar a

curva geratriz do radome dielétrico foram utilizados 21,43 segmentos/ $\lambda_0$ . Este número foi obtido substituindo  $\epsilon_r = 2,08$  na equação (5.8).

Para facilitar a apresentação do procedimento empregado para análise da antena refletora ilustrada na Figura 6.9, esta antena é reapresentada, fora de escala para melhorar a visualização, nas Figuras 6.10 (a), (b), (c) e (d) destacando as junções de interfaces envolvendo mais de dois meios distintos e os problemas equivalentes utilizados na análise, respectivamente.

A análise desta antena omnidirecional requer a utilização de três problemas equivalentes distintos, conforme ilustrado nas Figuras 6.10 (b), (c) e (d). Para cada um destes problemas equivalentes o campo eletromagnético é determinado considerando a contribuição das correntes em todas as interfaces que limitam a região em questão. Para uma interface condutora que participa de dois problemas equivalentes distintos, a corrente superficial equivalente deve ser separada em duas componentes, uma para cada face desta interface. Este procedimento é executado utilizando duas curvas geratrizes, uma para cada problema equivalente, para representar a mesma interface. Assim é possível considerar a contribuição da corrente superficial equivalente em cada face das interfaces condutoras separadamente em cada problema equivalente.

Na de junção de interfaces condutoras e dielétricas, a continuidade da corrente elétrica na direção  $\hat{t}$  (para excitação TEM não existe corrente elétrica na direção  $\hat{\phi}$ , conforme discutido na Seção 3.6.3.3) deve ser assegurada empregando o mesmo procedimento utilizado na Seção 5.8, ou seja, utilizando um “*Super Triângulo*” em cada uma destas junções, conforme ilustrado nas Figuras 6.10 (b) e (c). Para as correntes magnéticas, não é necessário aplicar qualquer tratamento especial para a região da junção, uma vez que estas só estão presentes ao longo das superfícies dielétricas.

Para a análise de antenas com radome, a representação espacial da corrente equivalente na de junção entre as interfaces condutoras da corneta coaxial e do refletor principal deve receber um tratamento especial de forma a assegurar a continuidade da corrente na direção  $\hat{t}$ ,

ou seja, atender a lei de Kirchhoff das correntes no ponto da junção para cada problema equivalente. Este procedimento é realizado empregando um tratamento semelhante ao que foi utilizado na Seção 6.1 para antenas OADC e OADE sem radome. Para o problema equivalente 1, ilustrado na Figura 6.10 (b), este tratamento especial é executado estendendo a curva geratriz que representa a face interna da superfície condutora do refletor principal,  $S_4$ , sobre a curva geratriz da corneta,  $S_1$ . Desta forma a lei de Kirchhoff das correntes é satisfeita na junção, e a continuidade da corrente elétrica é assegurada ao longo de todos os percursos fechados presentes neste problema equivalente. No problema equivalente 3, ilustrado na Figura 6.10 (d), o tratamento especial na junção entre as interfaces condutoras é naturalmente executado simplesmente garantindo a continuidade da corrente ao longo da face externa da interface do refletor principal,  $S_2$ . Para o problema equivalente 2, ilustrado na Figura 6.10 (c), a representação da corrente nas junções é realizada através de “*Super Triângulos*”, uma vez que estas junções conectam superfícies condutoras e dielétricas, conforme discutido na Seção 5.8. Em todos os problemas equivalentes a continuidade da corrente elétrica deve ser garantida ao longo de todos os percursos fechados presente nestes problemas.

Como em cada problema equivalente as correntes elétricas constituem um percurso fechado, a análise é conduzida utilizando a formulação *Cfield* para observações realizadas sobre superfícies condutoras. Para observações realizadas sobre superfícies dielétricas é utilizada a formulação *PMCHWT*, que, conforme discutido na Seção 5.8, é a formulação mais indicada para avaliar superfícies dielétricas em um BOR composto por diferentes regiões.

Para validar as soluções obtidas quando o radome é incluído na estrutura da antena foram realizados testes (cujos resultados não são apresentados neste texto) nos quais a permissividade elétrica relativa do radome  $\epsilon_r = 1$ . Os resultados destes testes foram comparados àqueles obtidos para a antena sem o radome ilustrada na Figura 6.1. Uma vez que ambas as antenas fisicamente iguais, esta comparação provê uma excelente forma de validar a formulação e verificar a precisão dos resultados numéricos. Estas comparações mostraram que ambas as soluções são praticamente iguais, o que indica que a técnica apresentada nesta seção está apta para a análise de antenas refletoras com radome.

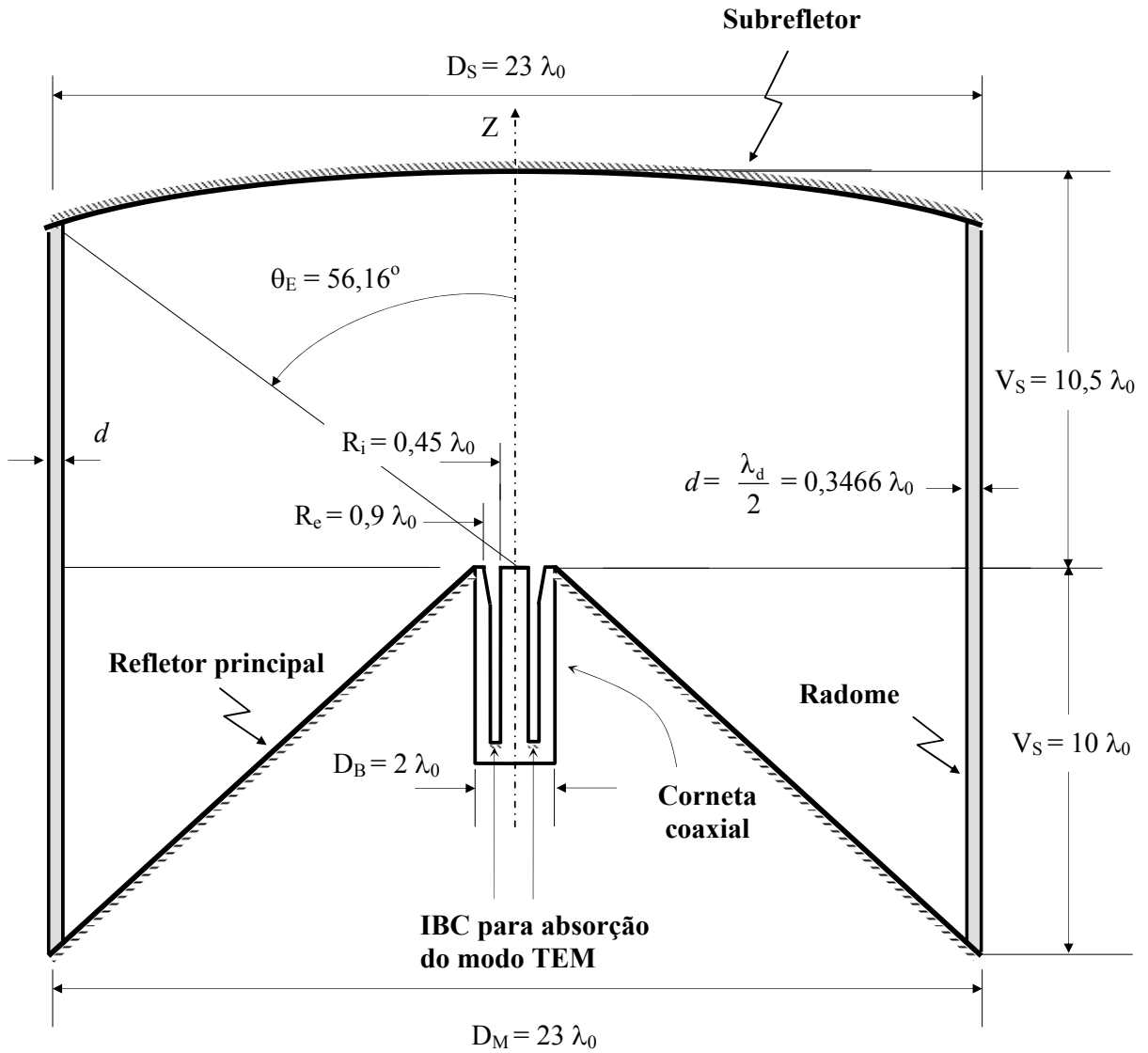
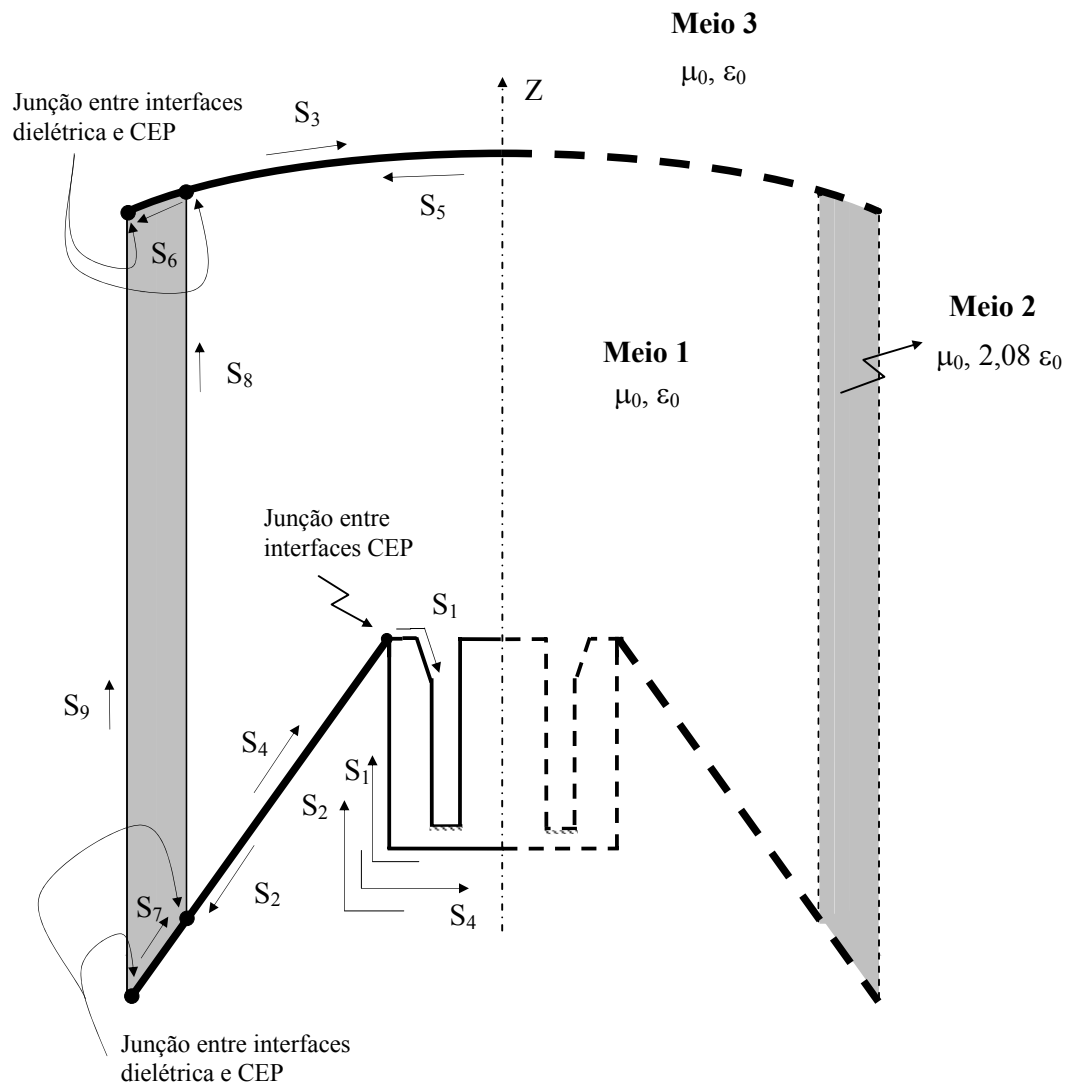


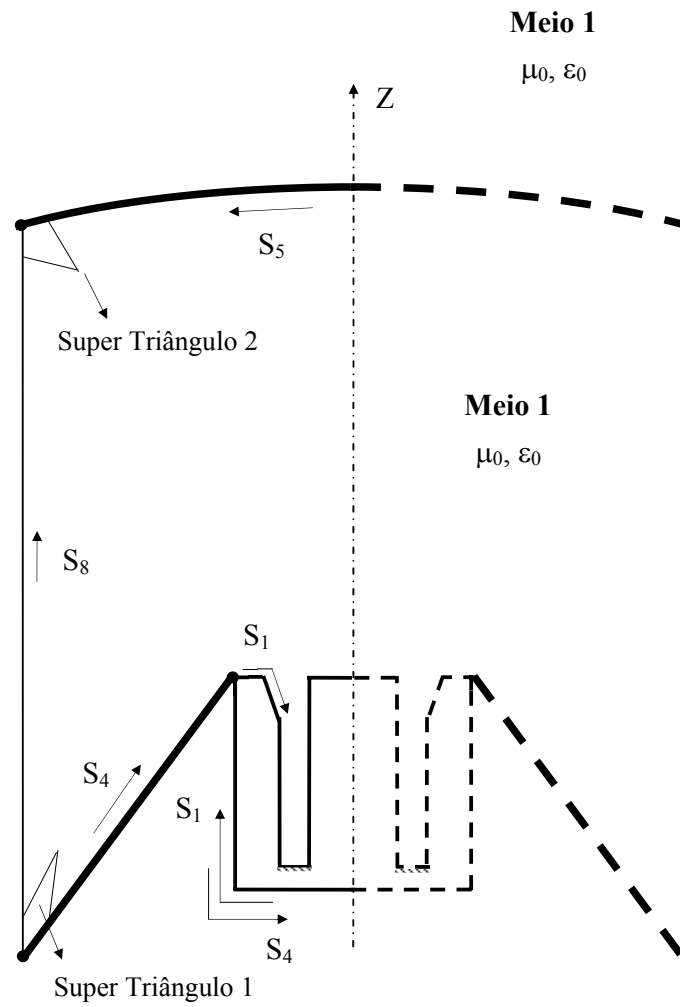
Figura 6.9 – Antena omnidirecional OADC com radome.





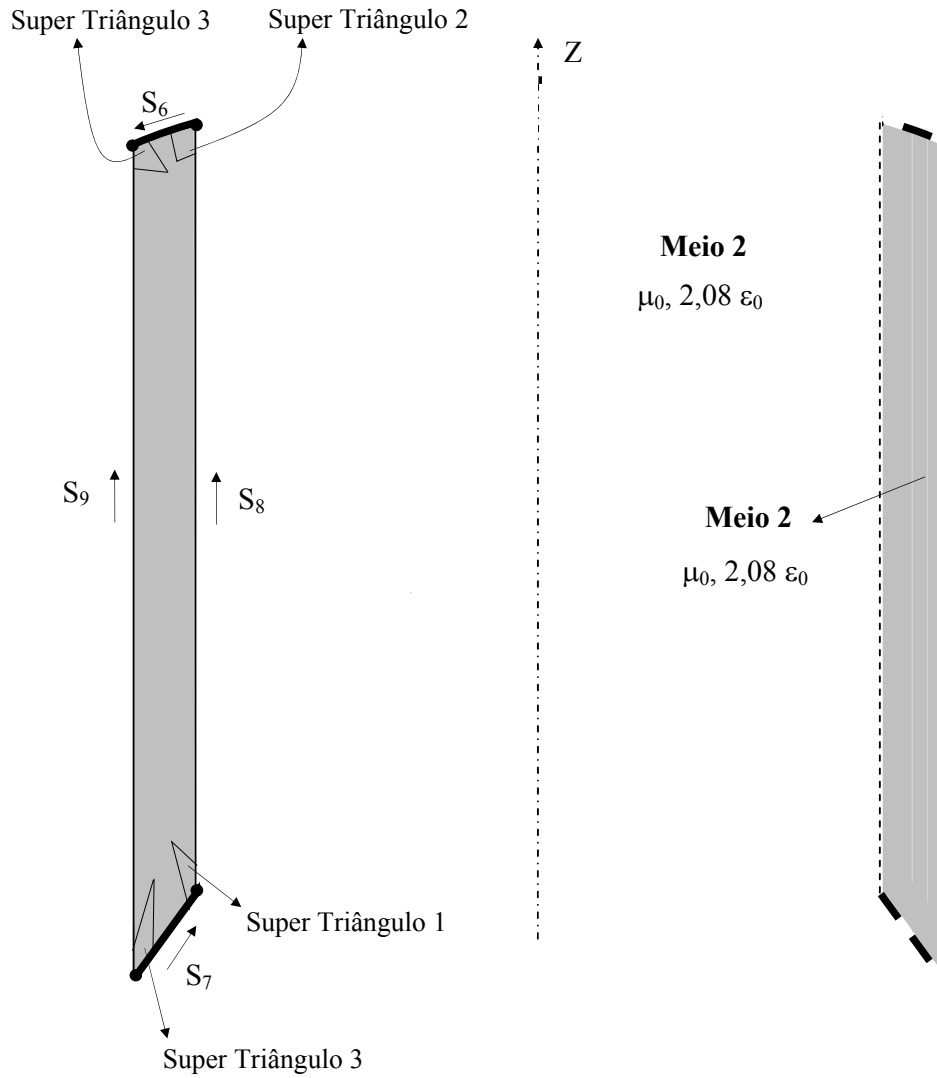
a) Superfícies e pontos de junção para antena OADC com radome

Figura 6.10 – Interfaces, pontos de junção e problemas equivalentes para uma antena omnidirecional OADC com radome.



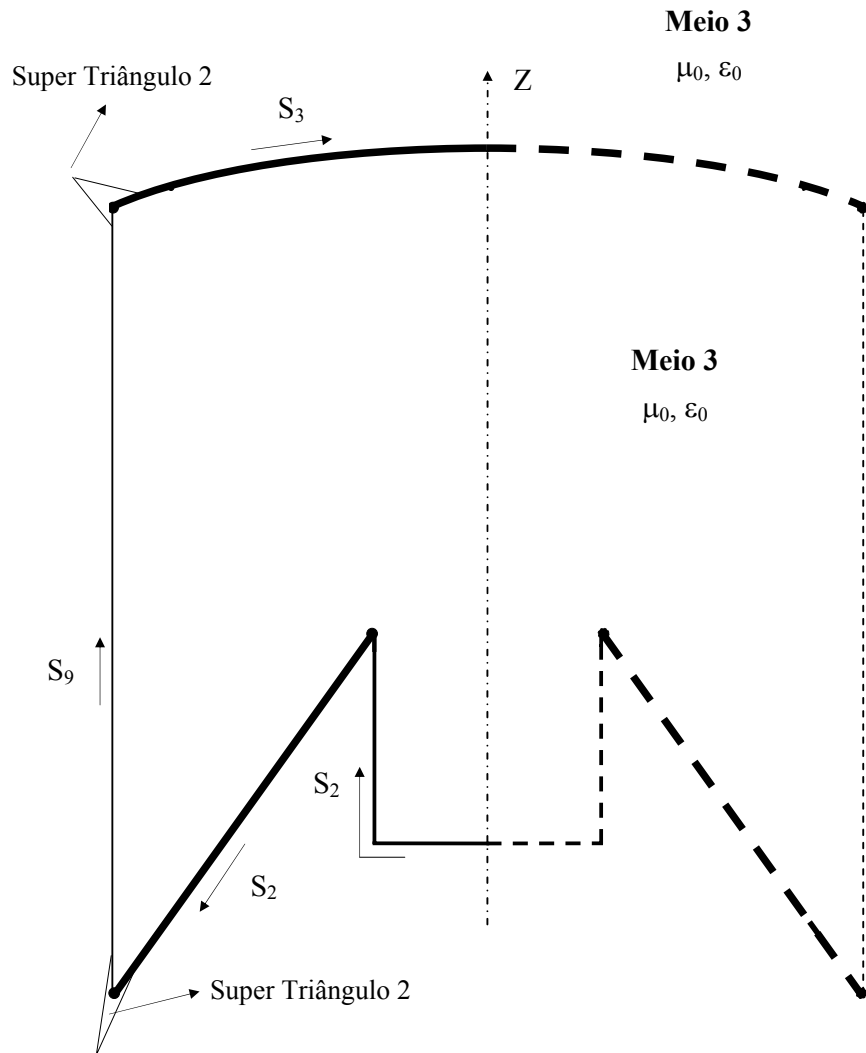
b) Problema equivalente 1

Figura 6.10 – Interfaces, pontos de junção e problemas equivalentes para uma antena omnidirecional OADC com radome.  
(continuação)



c) Problema equivalente 2

Figura 6.10 – Interfaces, pontos de junção e problemas equivalentes para uma antena omnidirecional OADC com radome.  
(continuação)



d) Problema equivalente 3

Figura 6.10 – Interfaces, pontos de junção e problemas equivalentes para uma antena omnidirecional OADC com radome.  
(continuação)

A análise do comportamento da antena duplo-refletora omnidirecional OADC com radome foi realizada ao longo da mesma faixa de frequências utilizada para a antena OADC sem radome na Seção 6.1. Os diagramas de radiação obtidos são apresentados nas Figuras 6.11 e 6.12. O ganho máximo, o ângulo onde o ganho máximo ocorre, HPBW, a perda de retorno e NMLS obtidos na análise são apresentados na Figura 6.13 e na Tabela 6.3. A partir destes resultados pode-se observar que a forma do diagrama de radiação não sofre mudanças significativas (o lóbulo principal permanece praticamente inalterado, e pequenas modificações podem ser verificadas nos lóbulos secundários) ao longo de toda a faixa de frequências. O ganho máximo varia de forma oscilatória entre 10,85 dBi e 12,66 dBi e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de 1,37 dBi. O ângulo em que o ganho máximo ocorre varia de forma oscilatória entre 88,6° e 91,4° e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de 1,6°. HPBW varia de forma oscilatória entre 5,6° e 8,2° e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de 2,2°. NMLS cai de forma oscilatória variando entre -10,48 dBi e -17,44 dBi e a perda de retorno aumentam de forma oscilatória variando entre -22,83 dB e -10,89 dB. Em relação aos resultados obtidos para a antena sem radome, ao longo de toda a faixa de frequências analisada, não foram observadas alterações significativas no comportamento das características eletromagnéticas da antena. O diagrama de radiação para a frequência  $f_0$  e os valores das demais grandezas sob análise são apresentados nas Figuras 6.12 e 6.13, respectivamente, para a antena OADC com e sem radome. Como pode ser verificado o diagrama de radiação não sofre mudanças significativas, o lóbulo principal permanece praticamente inalterado e pequenas modificações podem ser verificadas nos lóbulos secundários. Para as demais grandezas (ganho máximo, ângulo onde o ganho máximo ocorre, HPBW, NMLS e perda de retorno), veja Figuras 6.15 (a), (b), (c) e (d), também não foram verificadas mudanças significativas em seus valores devido à inclusão do radome. Para o ganho máximo, o ângulo onde o ganho máximo ocorre, HPBW e NMLS as maiores alterações ocorrem para frequências menores que aproximadamente  $f_0$  e para a perda de retorno as maiores alterações ocorrem para frequências nas extremidades da faixa de frequências estabelecida.

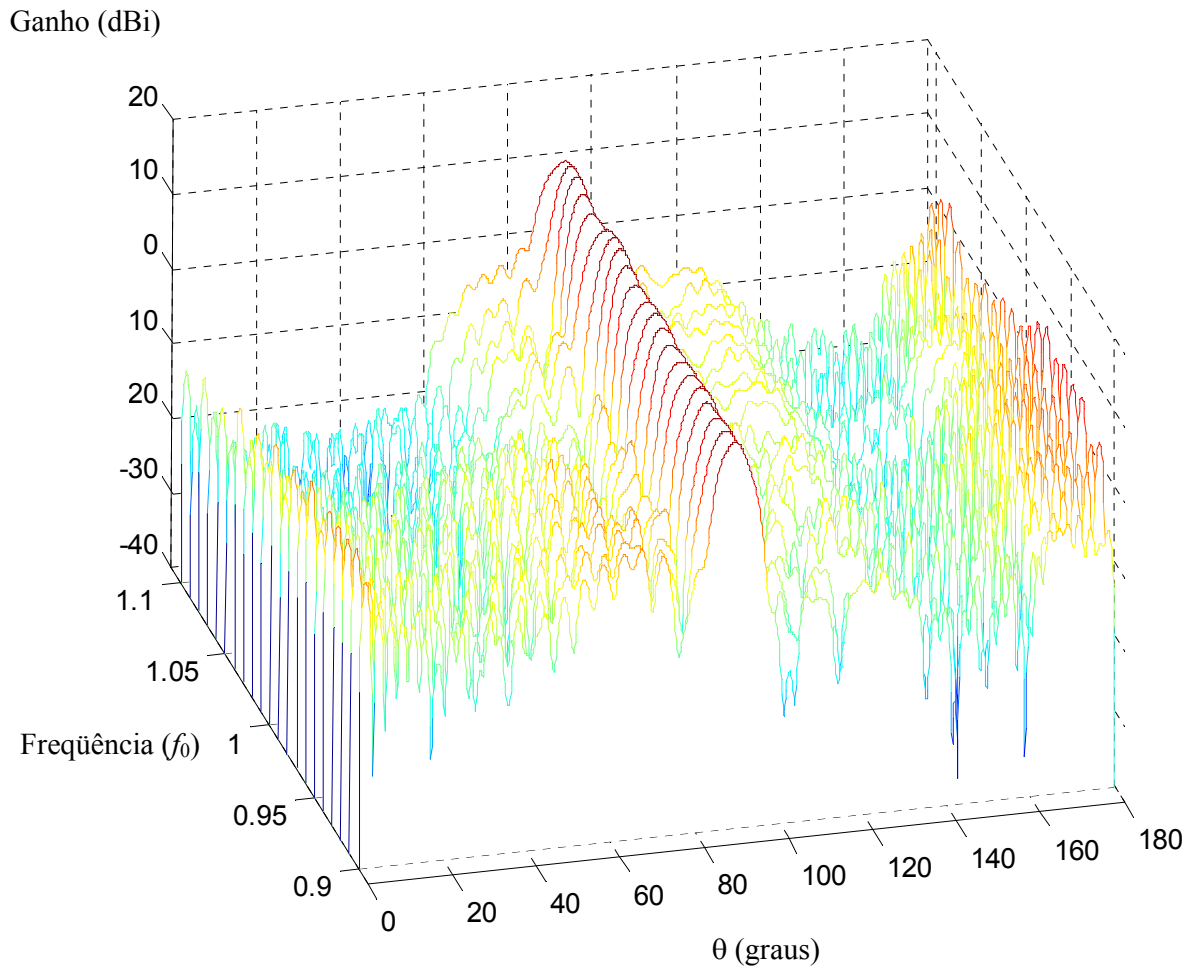


Figura 6.11 – Ganho do campo distante para antena omnidirecional OADC com radome ao longo da faixa de frequências de  $0,9 f_0$  à  $1,1 f_0$ .

Tabela 6.3 – Resultados para antena omnidirecional OADC com radome.

<b>Frequência</b>	<b>Ganho Máximo <math>G_{max}</math> (dBi)</b>	<b><math>\theta</math> onde <math>G_{max}</math> ocorre (<math>^{\circ}</math>)</b>	<b>HPBW</b>	<b>NMLS (dBi)</b>	<b>Perda de Retorno (dB)</b>
$0,90 f_0$	11,63	89,60	6,80	-11,64	-17,02
$0,91 f_0$	11,24	89,60	7,40	-12,78	-16,65
$0,92 f_0$	11,13	89,20	7,60	-11,92	-13,28
$0,93 f_0$	11,29	89,20	7,20	-10,48	-22,33
$0,94 f_0$	11,36	89,60	7,20	-12,07	-14,68
$0,95 f_0$	11,11	89,40	8,20	-12,60	-13,02
$0,96 f_0$	10,93	89,40	8,00	-11,80	-17,69
$0,97 f_0$	11,29	88,60	7,20	-11,94	-14,6
$0,98 f_0$	11,60	89,00	6,80	-12,78	-14,97
$0,99 f_0$	11,66	89,40	7,00	-14,06	-14,39
$1,0 f_0$	11,29	89,80	7,80	-13,09	-13,91
$1,01 f_0$	11,54	88,80	7,20	-14,71	-13,86
$1,02 f_0$	12,23	89,00	6,00	-15,08	-14,3
$1,03 f_0$	12,56	89,80	5,60	-16,09	-15,26
$1,04 f_0$	12,24	90,40	6,20	-14,98	-12,04
$1,05 f_0$	11,26	90,60	7,80	-15,71	-14,54
$1,06 f_0$	11,54	89,20	7,40	-16,77	-13,05
$1,07 f_0$	12,29	89,40	5,60	-17,45	-12,23
$1,08 f_0$	12,66	90,00	5,60	-15,74	-18,29
$1,09 f_0$	12,14	90,60	6,00	-16,11	-10,89
$1,10 f_0$	10,85	91,40	8,20	-15,82	-12,63

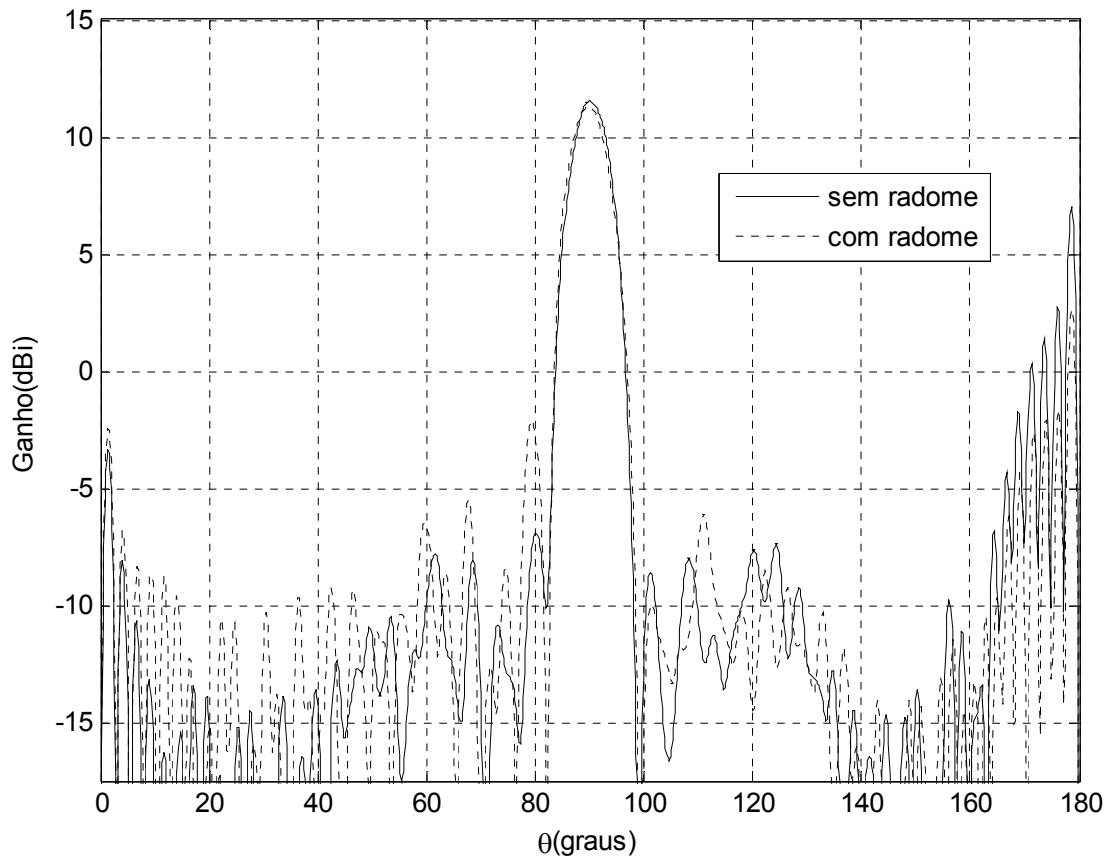


Figura 6.12 – Diagrama de radiação na região de campo distante para antena omnidirecional OADC com radome e sem radome na frequência  $f_0$ .



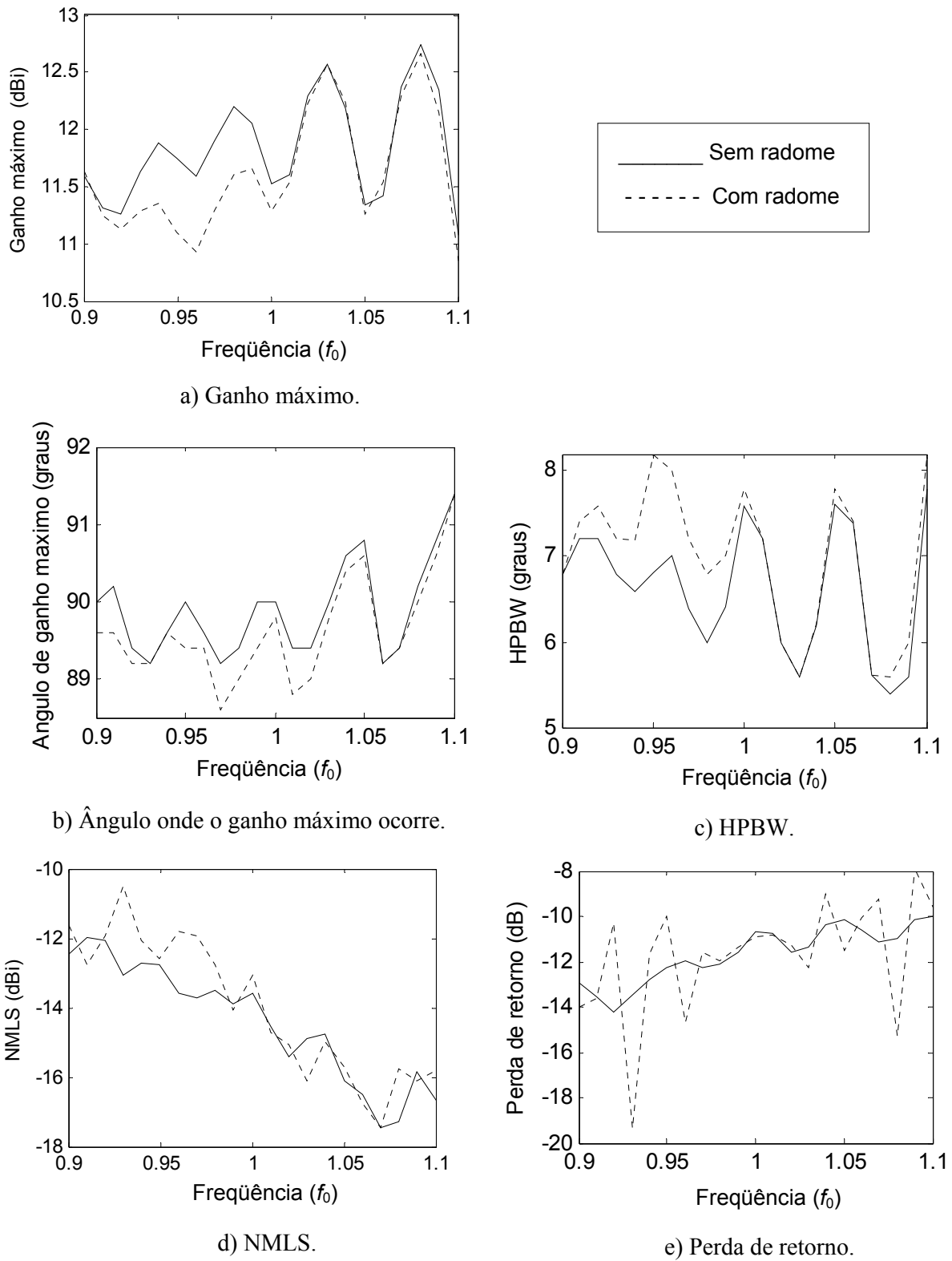


Figura 6.13 – Comportamento das características eletromagnética de uma antena omnidirecional OADC ao longo da faixa de frequências de  $0,9 f_0$  à  $1,1 f_0$ .

De acordo com os resultados apresentados nas Figuras 6.11 a 6.13 e na Tabela 6.3 pode-se concluir que as características eletromagnéticas de uma antena omnidirecional OADC equipada com um radome em que a incidência sobre sua superfície é normal, permissividade elétrica relativa  $\epsilon_r = 2,08$  e cuja espessura é definida de acordo com a equação (6.6) não são significativamente alteradas ao longo da faixa de frequências avaliada. Assim, em princípio, esta antena continua apta para operação com sinais banda-larga.

### 6.2.2 - Antena Omnidirecional OADE com Radome

Nesta seção é realizada a análise rigorosa da antena duplo-refletora OADE avaliada na Seção 6.1 considerando agora a presença do radome. São consideradas duas geometrias diferentes para o radome. Na primeira análise a fixação do radome na estrutura da antena é tal que a energia eletromagnética radiada pela antena incide obliquamente sobre a superfície do radome, conforme ilustrado na Figura 6.14. Para a segunda análise a forma de fixação do radome na antena é altera de modo que a energia radiada pela antena incida perpendicularmente sobre a superfície do radome, conforme ilustrado na Figura 6.15. Todas as condições inicialmente estabelecidas na Seção 6.1 para a antena OADE (dimensões, o tipo de excitação e o número de segmentos por  $\lambda_0$  utilizados para representar as curvas geratrizes dos refletores e alimentador) foram mantidas durante as análises realizadas nesta seção. É utilizado um radome com permissividade elétrica relativa  $\epsilon_r = 2,08$  e cuja espessura é definida de acordo com as equações (6.6) (incidência normal) e (6.5) (incidência oblíqua). Nas Figuras 6.14 e 6.15  $\lambda_d$  é o comprimento de onda no meio dielétrico do radome. Para representar a curva geratriz do radome dielétrico foram utilizados 21,43 segmentos/ $\lambda_0$ . Este número foi obtido substituindo  $\epsilon_r = 2,08$  na equação (5.8). A representação da corrente superficial nos pontos de junção segue o mesmo procedimento empregado para a antena OADC com radome através de três problemas equivalentes idênticos àqueles ilustrados na Figura 6.10.

As antenas refletoras ilustradas nas Figuras 6.14 e 6.15 são rerepresentadas, fora de escala para melhorar a visualização, nas Figuras 6.16 e 6.17 destacando as junções e as interfaces S presentes nos três problemas equivalentes utilizados na análise.

A análise do comportamento da antena duplo-refletora omnidirecional OADE ilustrada na Figura 6.14 (incidência oblíqua sobre o radome) foi realizada ao longo da mesma faixa de frequências utilizada para a antena OADE sem radome na Seção 6.1. Os diagramas de radiação, o ganho máximo, o ângulo onde o ganho máximo ocorre, HPBW, a perda de retorno e NMLS obtidos são apresentados na Figura 6.18 e na Tabela 6.4, respectivamente. A partir destes resultados pode-se observar que também neste caso a forma do diagrama de radiação não sofre mudanças significativas (o lóbulo principal permanece praticamente inalterado, e pequenas modificações podem ser verificadas nos lóbulos secundários) ao longo de toda a faixa de frequências. O ganho máximo varia de forma oscilatória entre 10,16 dBi e 12,52 dBi e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de 1,67 dBi. O ângulo em que o ganho máximo ocorre varia de forma oscilatória entre  $88,2^\circ$  e  $90,8^\circ$  e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de  $1,4^\circ$ . HPBW varia de forma oscilatória entre  $5,4^\circ$  e  $8,8^\circ$  e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de  $2,8^\circ$ . NMLS oscila variando entre  $-9,43$  dBi e  $-12,77$  dBi e a perda de retorno aumentam de forma oscilatória variando entre  $-18,54$  dB e  $-10,25$  dB.

Os diagramas de radiação, o ganho máximo, o ângulo onde o ganho máximo ocorre, HPBW, a perda de retorno e NMLS obtidos na análise da antena ilustrada na Figura 6.15 (incidência normal sobre o radome) são apresentados na Figura 6.19 e na Tabela 6.5. A partir destes resultados pode-se observar que também neste caso a forma do diagrama de radiação não sofre mudanças (o lóbulo principal permanece praticamente inalterado e pequenas modificações podem ser verificadas nos lóbulos secundários). O ganho máximo varia de forma oscilatória entre 10,37 dBi e 12,64 dBi e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de 1,7 dBi. O ângulo em que o ganho máximo ocorre varia de forma oscilatória entre  $88,4^\circ$  e  $90,6^\circ$  e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de  $1,4^\circ$ . HPBW

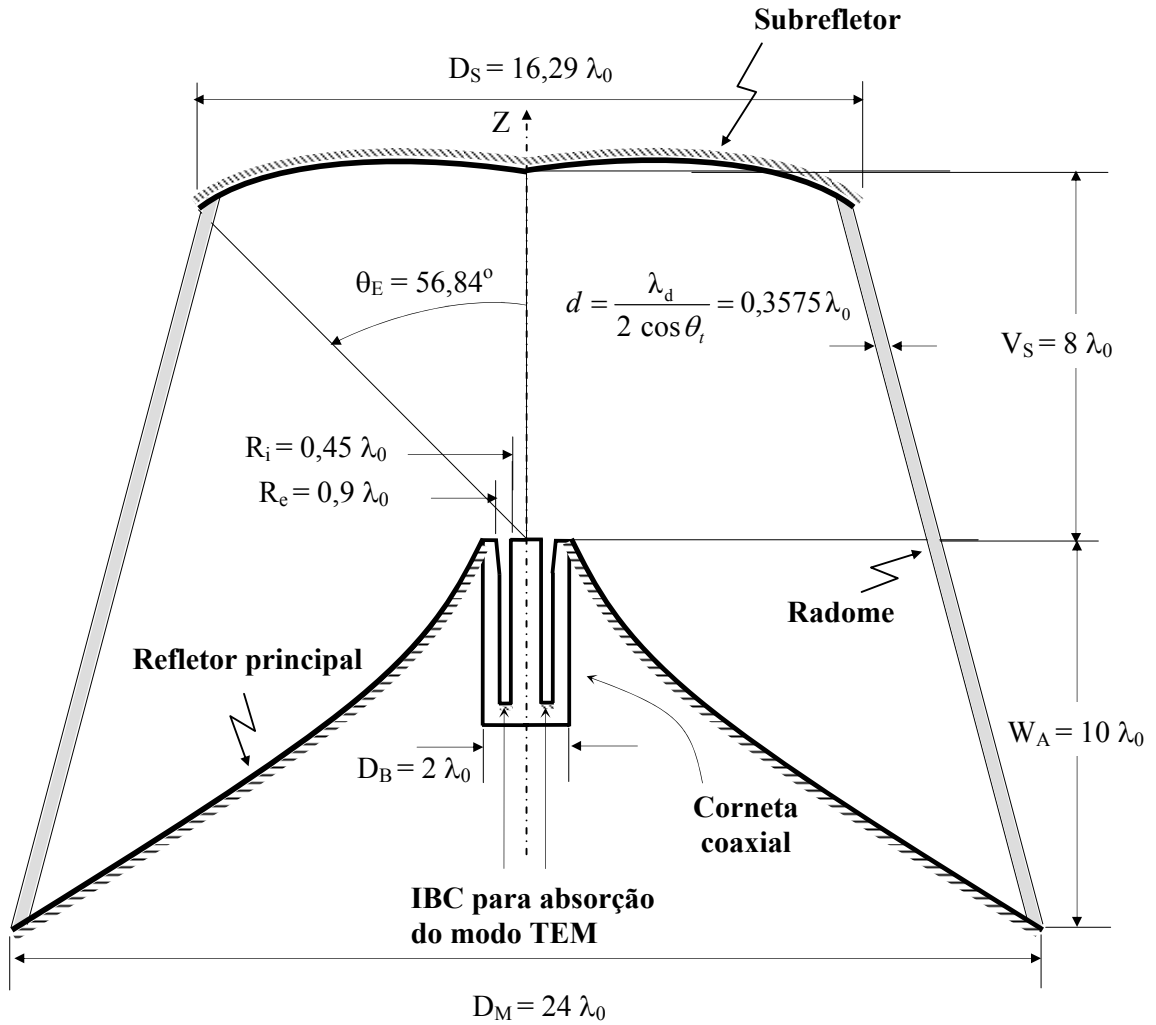


Figura 6.14 – Antena omnidirecional OADE com radome (incidência oblíqua).

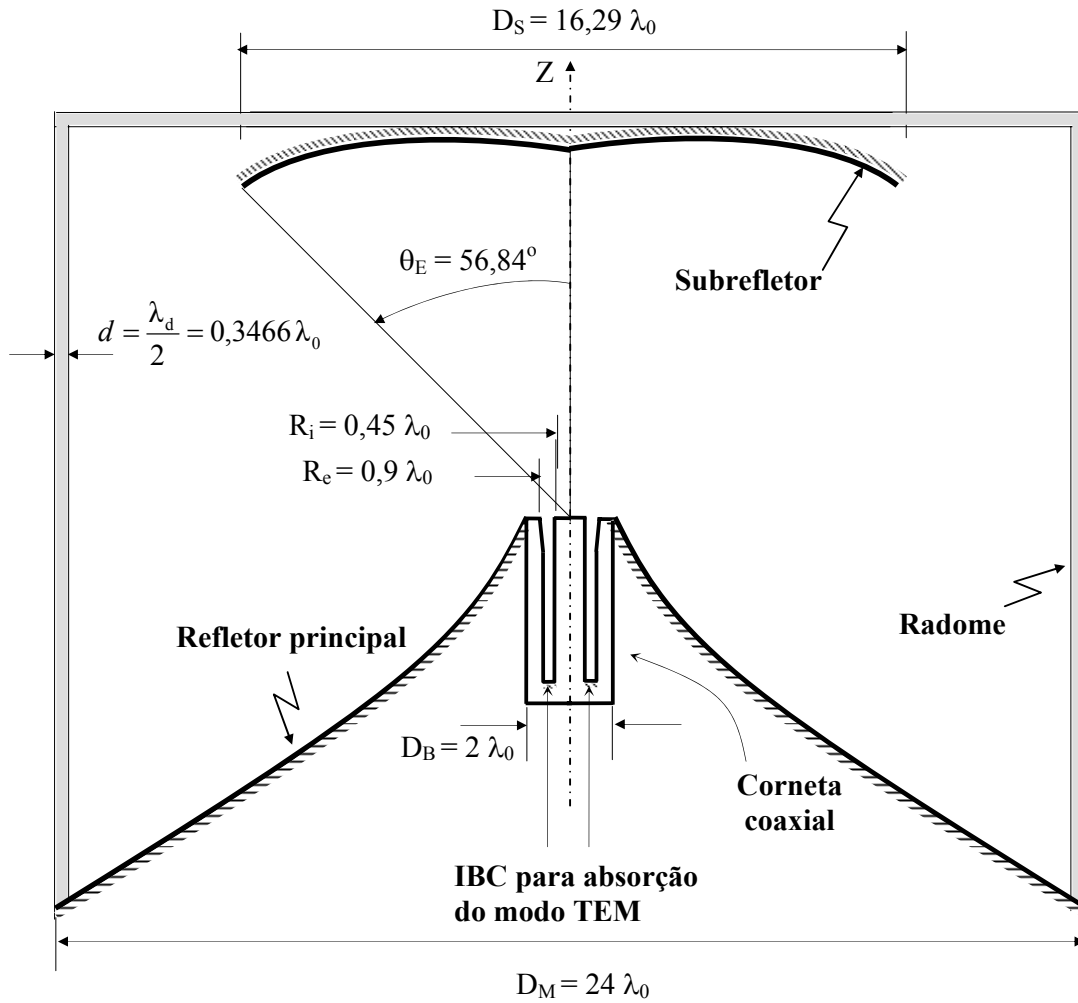


Figura 6.15 – Antena omnidirecional OADE com radome (incidência normal).

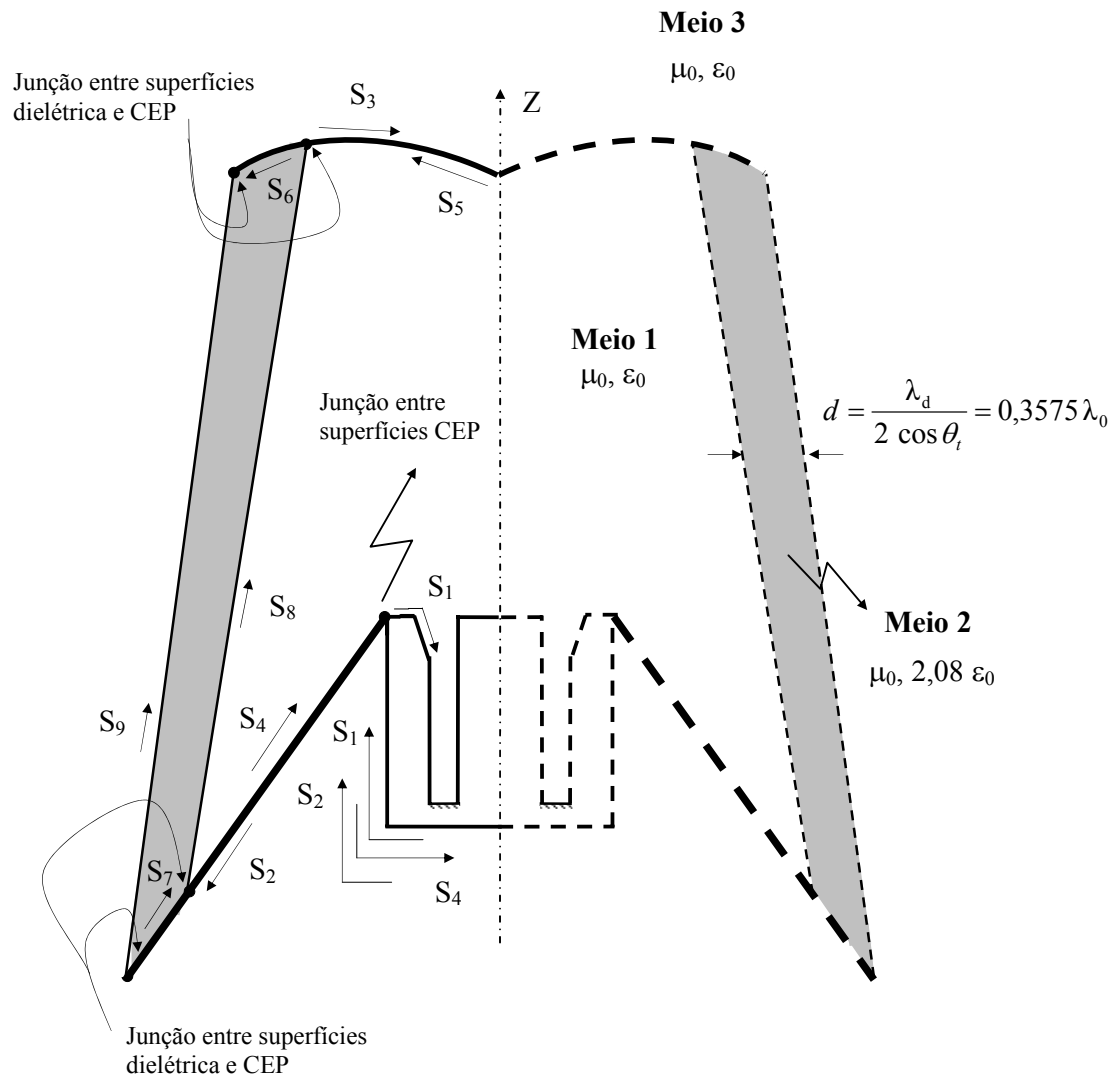


Figura 6.16 – Junções e interfaces para a antena omnidirecional OADE com radome (incidência oblíqua).

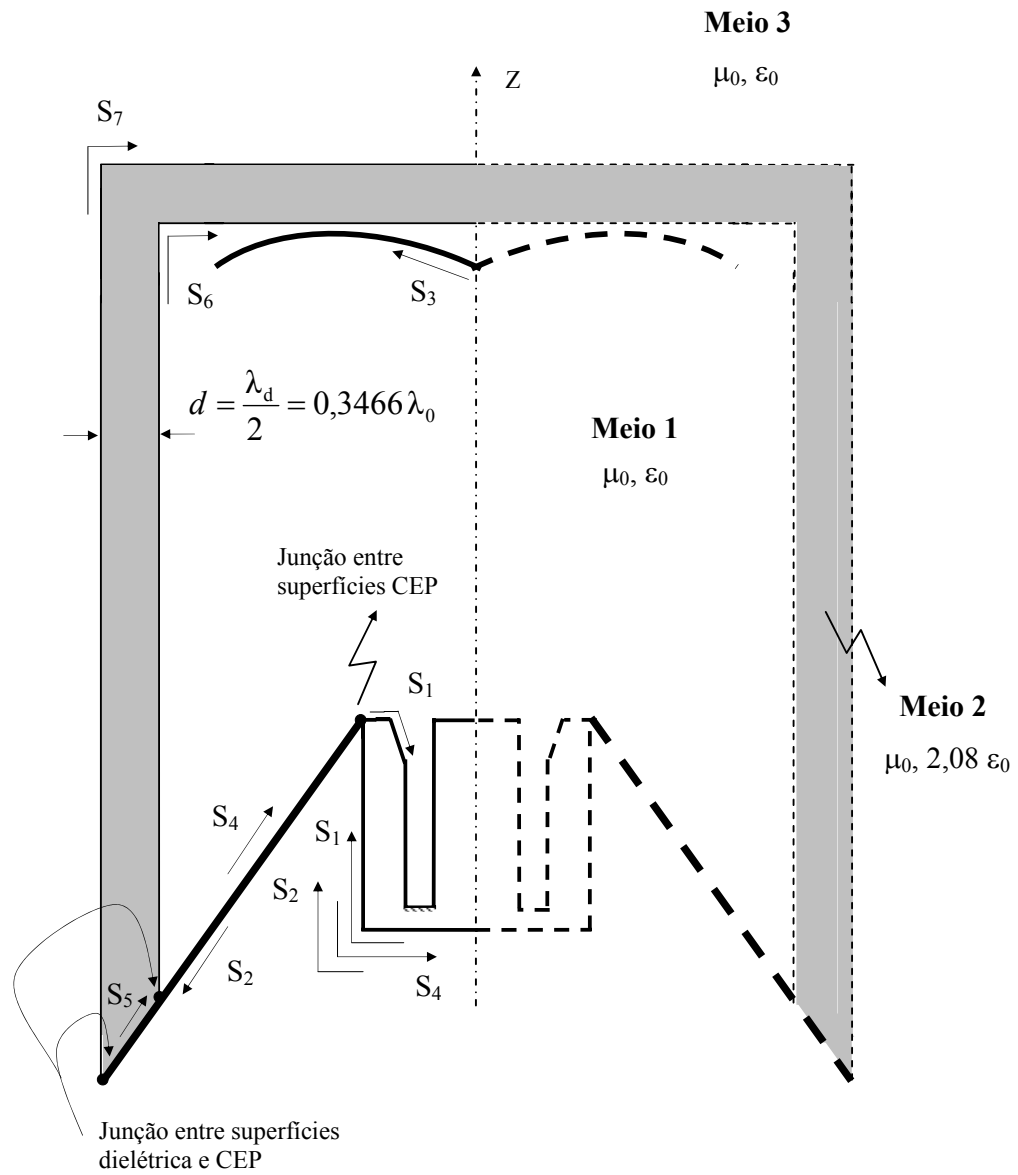


Figura 6.17 – Junções e interfaces para a antena omnidirecional OADE com radome (incidência normal).

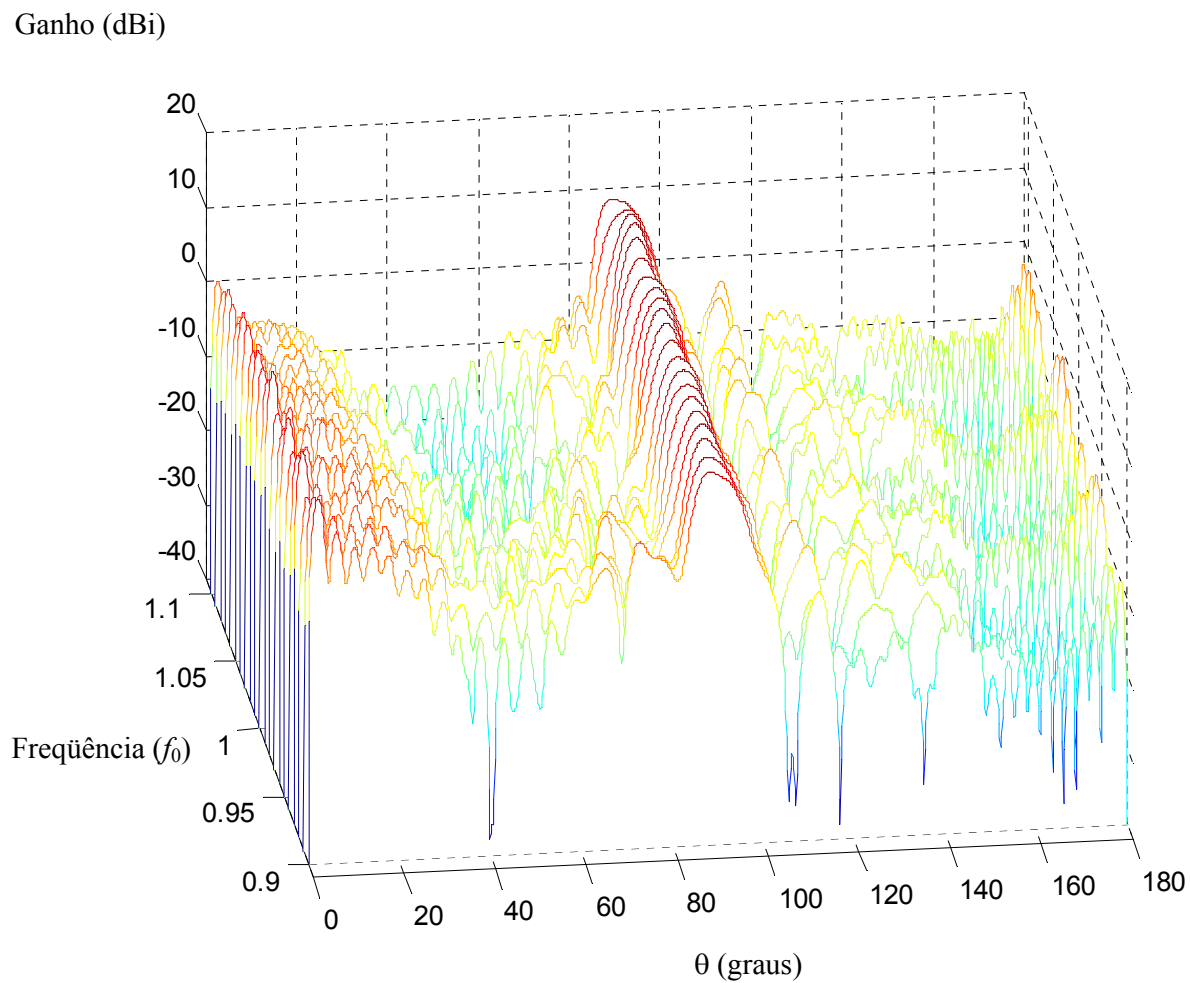


Figura 6.18 – Ganho do campo distante para antena omnidirecional OADE com radome (incidência oblqua) ao longo da faixa de freqüências de  $0,9 f_0$  à  $1,1 f_0$ .



Tabela 6.4 – Resultados para antena omnidirecional OADE com radome (incidência oblíqua).

<b>Frequência</b>	<b>Ganho Máximo <math>G_{max}</math> (dBi)</b>	<b><math>\theta</math> onde <math>G_{max}</math> ocorre (<math>^{\circ}</math>)</b>	<b>HPBW</b>	<b>NMLS (dBi)</b>	<b>Perda de Retorno (dB)</b>
$0,90 f_0$	10,16	88,40	8,80	-11,46	-18,12
$0,91 f_0$	10,38	88,80	8,40	-10,56	-15,13
$0,92 f_0$	10,98	89,20	6,80	-9,43	-12,69
$0,93 f_0$	11,08	89,80	6,60	-11,67	-16,01
$0,94 f_0$	11,05	89,60	6,40	-9,68	-17,38
$0,95 f_0$	11,07	89,60	7,20	-10,96	-18,14
$0,96 f_0$	10,85	89,60	8,20	-10,77	-14,62
$0,97 f_0$	10,99	89,80	7,60	-10,47	-12,89
$0,98 f_0$	10,89	89,80	7,80	-10,26	-13,49
$0,99 f_0$	11,40	89,40	6,60	-12,12	-14,85
$1,0 f_0$	11,83	89,40	6,00	-11,32	-16,51
$1,01 f_0$	11,99	89,40	6,20	-11,70	-13,87
$1,02 f_0$	11,64	90,20	6,60	-11,27	-13,59
$1,03 f_0$	11,12	90,20	7,40	-11,02	-12,93
$1,04 f_0$	10,78	89,40	8,20	-10,99	-13,89
$1,05 f_0$	11,56	89,20	6,40	-12,77	-14,02
$1,06 f_0$	12,36	89,40	5,40	-12,48	-14,06
$1,07 f_0$	12,52	90,00	5,60	-12,47	-14,03
$1,08 f_0$	11,90	90,20	6,00	-12,19	-13,07
$1,09 f_0$	10,67	90,80	8,40	-11,24	-13,28
$1,1 f_0$	10,28	88,20	8,80	-10,07	-13,21

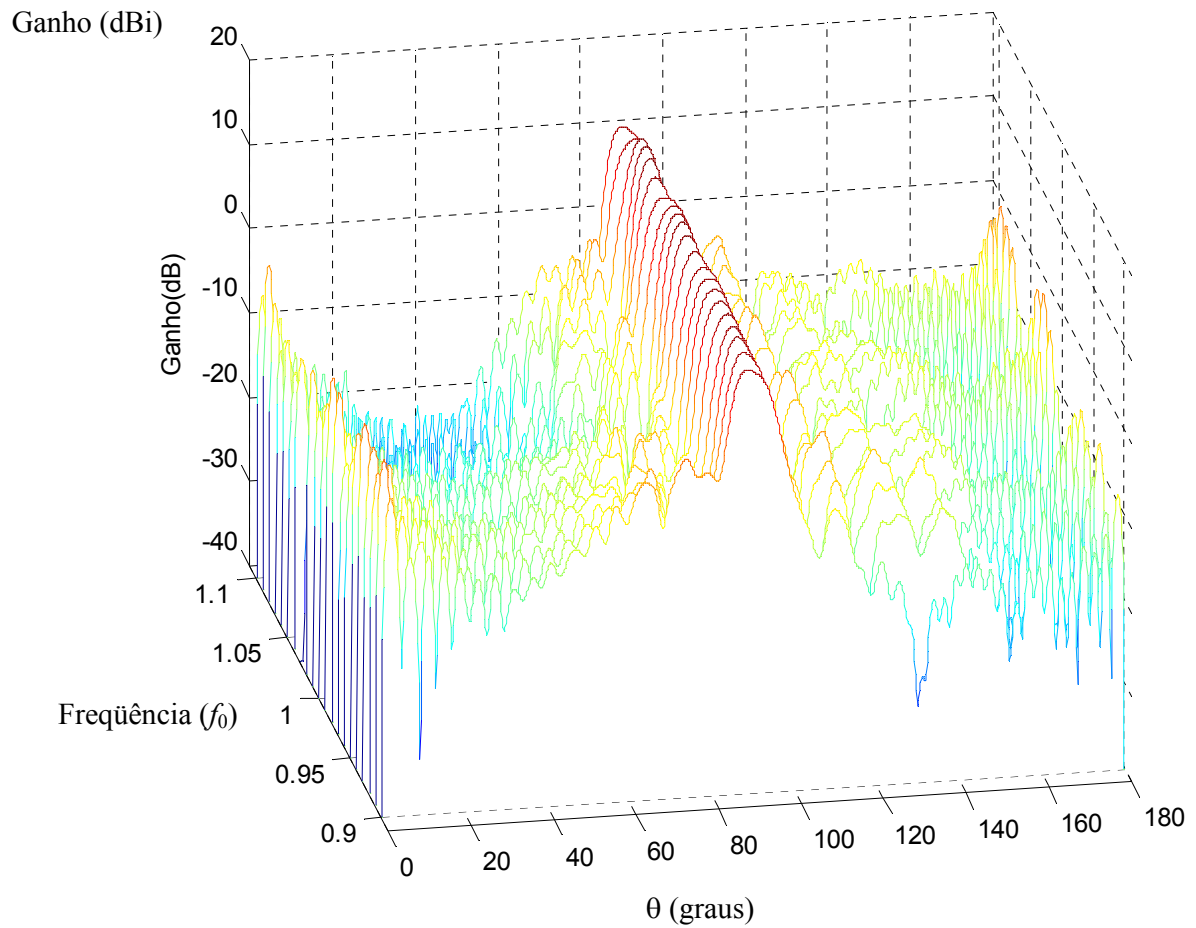


Figura 6.19 – Ganho do campo distante para antena omnidirecional OADE com radome (incidência normal) ao longo da faixa de frequências de  $0,9 f_0$  à  $1,1 f_0$ .

Tabela 6.5 – Resultados para antena omnidirecional OADE com radome (incidência normal).

<b>Frequência</b>	<b>Ganho Máximo <math>G_{max}</math> (dBi)</b>	<b><math>\theta</math> onde <math>G_{max}</math> ocorre (<math>^{\circ}</math>)</b>	<b>HPBW</b>	<b>NMLS (dBi)</b>	<b>Perda de Retorno (dB)</b>
$0,90 f_0$	10,38	88,60	8,60	-12,78	-14,05
$0,91 f_0$	10,98	89,00	7,800	-13,51	-18,54
$0,92 f_0$	11,37	89,20	7,00	-13,49	-10,25
$0,93 f_0$	11,14	89,60	7,20	-11,90	-17,93
$0,94 f_0$	11,25	89,80	7,40	-13,41	-15,97
$0,95 f_0$	11,28	89,60	7,40	-14,12	-16,15
$0,96 f_0$	11,24	89,80	7,80	-13,50	-15,75
$0,97 f_0$	11,14	89,80	8,00	-13,44	-11,69
$0,98 f_0$	10,99	89,80	7,80	-13,58	-14,25
$0,99 f_0$	11,47	89,40	7,20	-14,86	-15,34
$1,0 f_0$	12,07	89,20	6,40	-16,24	-15,92
$1,01 f_0$	12,17	89,40	6,40	-16,13	-13,79
$1,02 f_0$	11,74	89,80	7,00	-14,90	-13,7
$1,03 f_0$	11,23	90,60	7,60	-14,97	-12,11
$1,04 f_0$	10,83	89,40	8,40	-14,36	-15,48
$1,05 f_0$	11,78	89,00	6,60	-18,20	-13,07
$1,06 f_0$	12,63	89,20	5,40	-18,25	-13,16
$1,07 f_0$	12,64	89,80	5,40	-17,78	-15,3
$1,08 f_0$	12,05	90,20	6,00	-15,76	-10,89
$1,09 f_0$	10,67	90,40	8,80	-14,44	-17,7
$1,1 f_0$	10,69	88,40	8,60	-14,91	-10,74

varia de forma oscilatória entre  $5,4^\circ$  e  $8,8^\circ$  e em relação ao valor na frequência  $f_0$  a variação máxima é de  $2,4^\circ$ . NMLS cai de forma oscilatória variando entre  $-11,89$  dBi e  $-18,25$  dBi e a perda de retorno oscilam variando entre  $-18,14$  dB e  $-12,69$  dB.

Em relação aos resultados obtidos para a antena sem radome, ao longo de toda a faixa de frequências analisada, tanto para incidência oblíqua quanto para normal, não foram observadas alterações muito significativas no comportamento das características eletromagnéticas da antena. O diagrama de radiação para a frequência  $f_0$  e os valores das demais grandezas sob análise são apresentados nas Figuras 6.20 e 6.21, respectivamente, para a antena OADE com (incidência normal e oblíqua) e sem radome. Como pode ser verificado o diagrama de radiação sofre algumas mudanças, o lóbulo principal permanece praticamente inalterado e para os lóbulos secundários observa-se pequenas modificações para a incidência normal e mudanças bastante significativas para a incidência oblíqua. Neste caso o nível de lóbulos secundários aumenta significativamente na região atrás do subrefletor, NMLS aumenta em média em  $3,5$  dBi. Para as demais grandezas (ganho máximo, ângulo onde o ganho máximo ocorre, HPBW e perda de retorno), veja Figura 6.21, não foram verificadas mudanças significativas em seus valores devido à inclusão do radome. Para o ganho máximo, o ângulo onde o ganho máximo ocorre e HPBW as maiores alterações ocorrem para frequências menores que aproximadamente  $f_0$  e são maiores para incidência oblíqua. Para a perda de retorno as maiores alterações ocorrem para incidência normal ao longo de toda a faixa de frequências estabelecida.

Com base em todos os testes realizados pode-se concluir que as características eletromagnéticas da antena omnidirecional OADE equipada com um radome com permissividade elétrica relativa  $\epsilon_r = 2,08$  e cuja espessura é definida de acordo com a equação (6.5) (incidência oblíqua) ou a equação (6.6) (incidência normal), não são significativamente alteradas ao longo de toda a faixa de frequências considerada. Assim, em princípio, esta antena continua apta para operação com sinais banda-larga. Em relação aos resultados para a antena sem o radome, para a antena com radome em que a incidência sobre sua superfície é oblíqua verificou um aumento significativo no nível de lóbulos secundários.

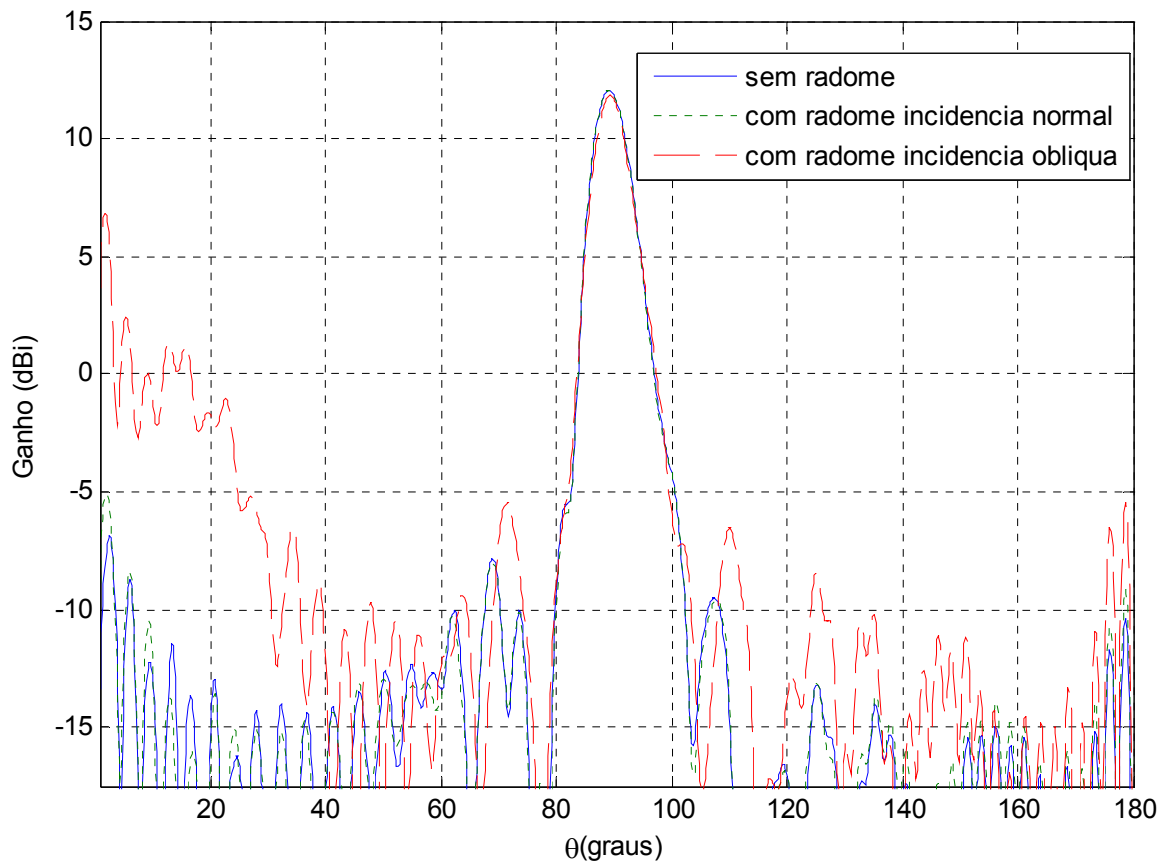


Figura 6.20 – Diagrama de radiação na região de campo distante para antena omnidirecional OADE com radome e sem radome na frequência  $f_0$ .

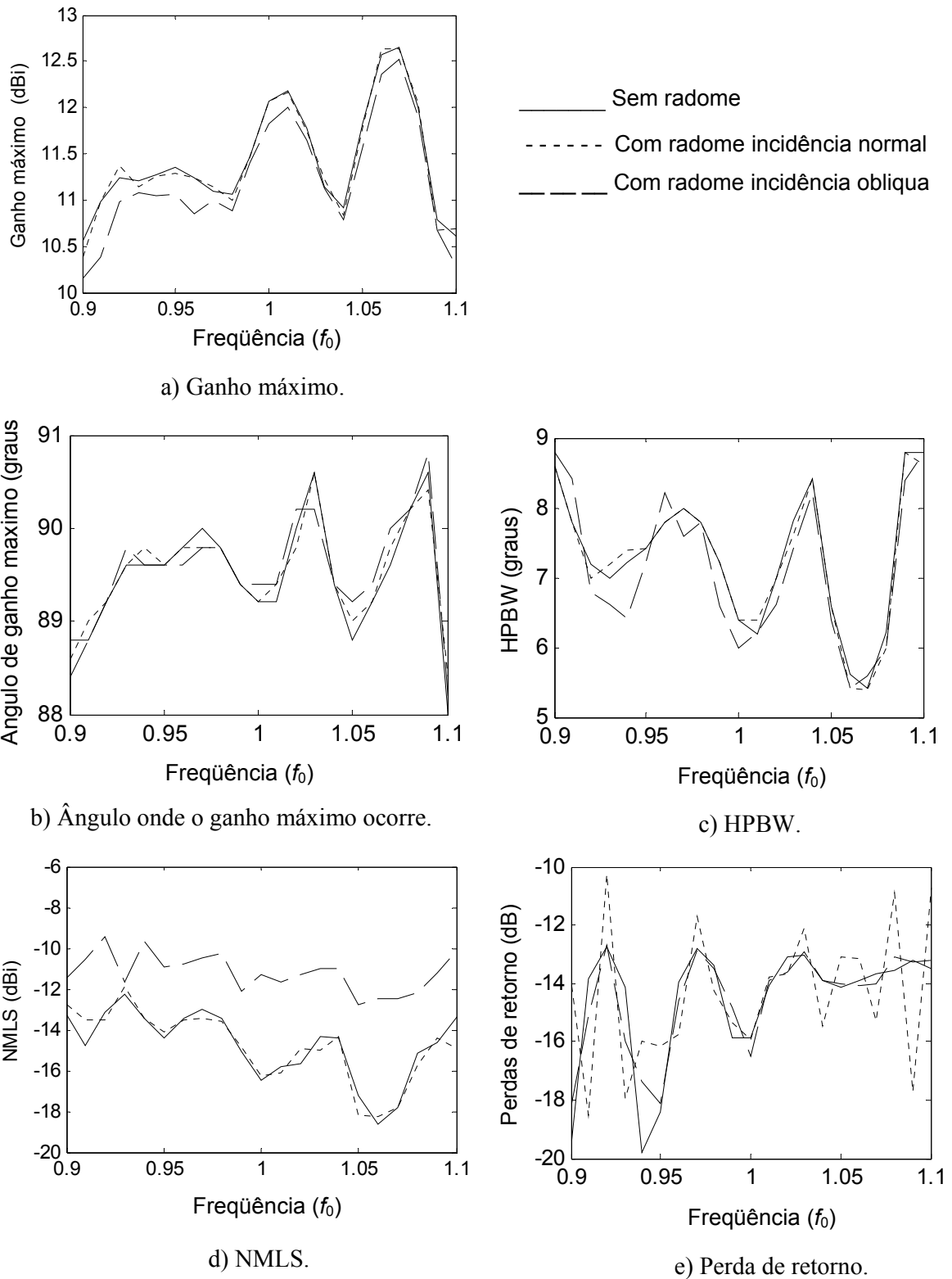


Figura 6.21 – Comportamento das características eletromagnética de uma antena omnidirecional OADE ao longo da faixa de frequências de  $0,9f_0$  à  $1,1f_0$ .

### 6.3 - Investigação das Causas do Aumento no Nível de Lóbulos Secundários

Para antena OADE ilustrada na Figura 6.15 verificou-se que a inclusão do radome provoca um aumento significativo no nível médio de lóbulos secundários ao longo de toda a faixa de frequências considerada, como pode ser observado nas Figuras 6.20 e 6.21 d). Assim, com o objetivo de explicar as causas deste problema, a antena ilustrada na figura 6.15 foi avaliada para diferentes ângulos de inclinação do radome ( $\theta_{incl}$ ), como apresentado na Figura 6.22. Os diagramas de radiação obtidos durante estas análises para a frequência central da faixa são apresentados na Figura 6.23. Como pode ser verificado, a inclinação do radome não provoca mudanças significativas no comportamento do diagrama de radiação da antena. E em especial, não acarreta o aumento no nível dos lóbulos secundários. Assim, ainda na tentativa de tentar explicar as causas do aumento no nível de lóbulos secundários para a antena OADE ilustrada na Figura 6.14 foi observado o comportamento da corrente ao longo das superfícies do radome e refletor principal para as geometrias ilustradas nas Figuras 6.22 e 6.24, respectivamente. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 6.25 em função da coordenada de superfície  $S(\lambda_0)$  a qual representa a extensão da superfície onde a corrente é observada, conforme ilustrado nas Figuras 6.22 e 6.24. Como pode ser verificado, para a antena ilustrada na Figura 6.24 as correntes ao longo das faces interna e externa do radome e do refletor principal apresentam oscilações muito mais significativas do que aquelas observadas para as antenas ilustradas na Figura 6.22. Assim acredita-se que o aumento do nível médio de lóbulos secundários está associado à forma de fixação do radome à estrutura da antena.

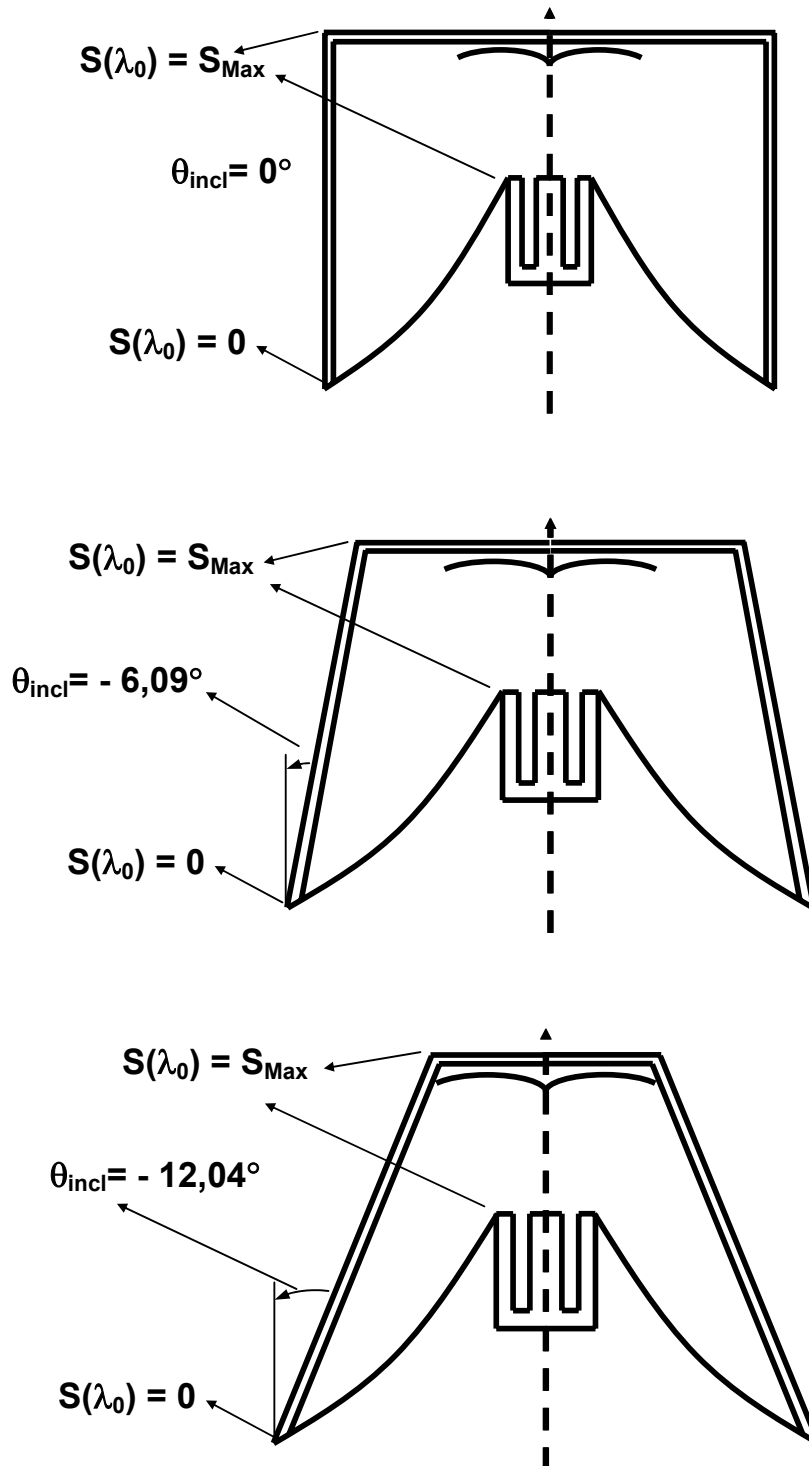


Figura 6.22 – Antena OADE com diferentes ângulos de inclinação do radome.



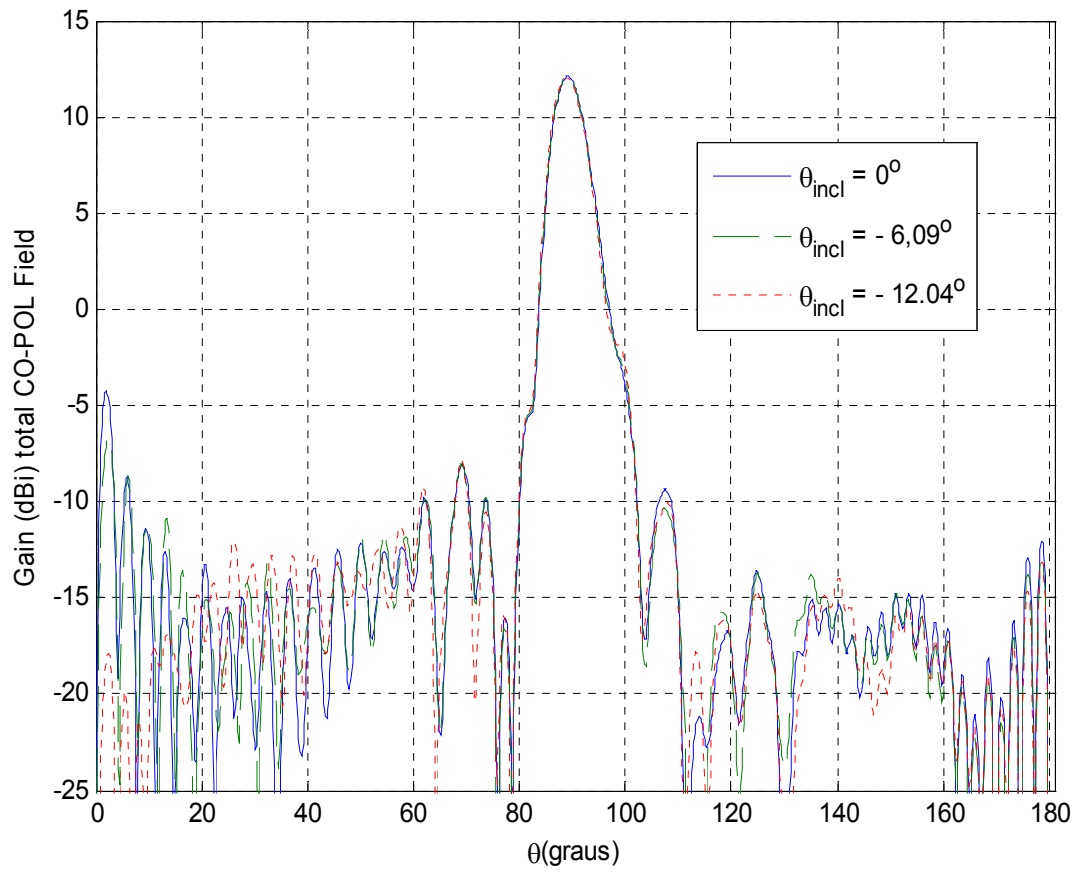


Figura 6.23 – Diagrama de radiação na região de campo distante para antena omnidirecional OADE para diferentes ângulos de inclinação do radome.

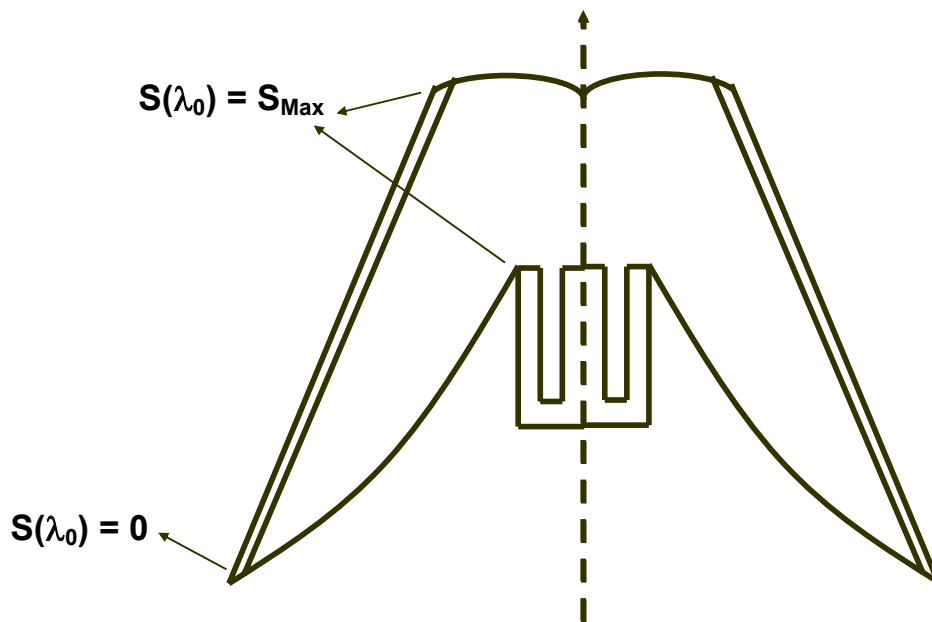
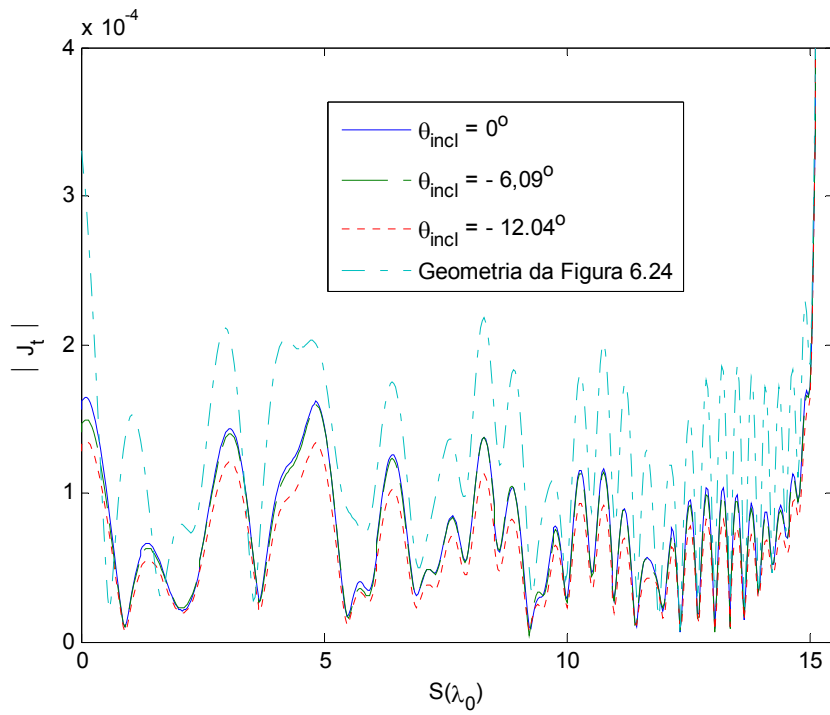
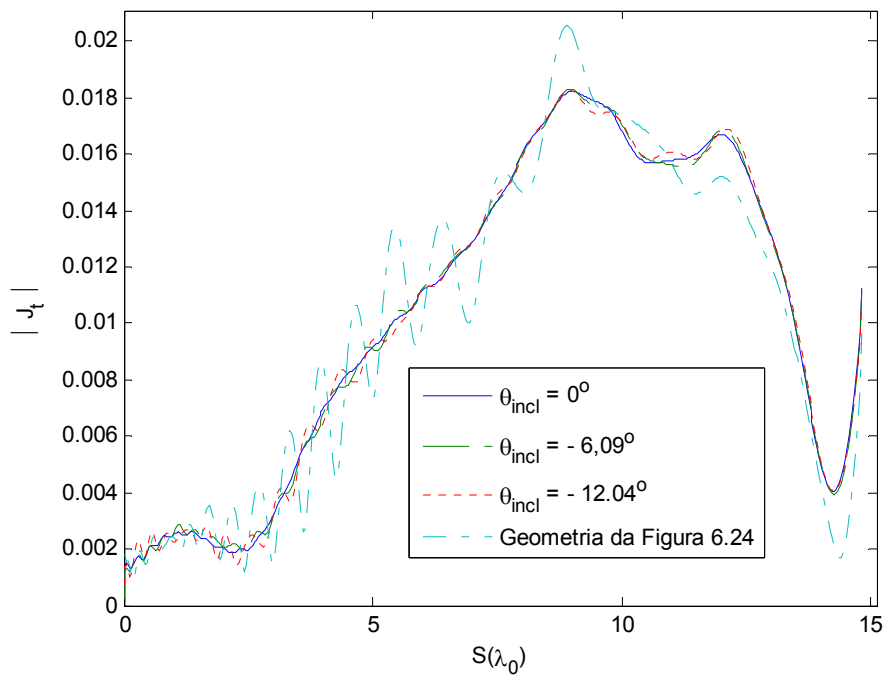


Figura 6.24 – Antena OADE: parâmetro de superfície  $S(\lambda_0)$ .

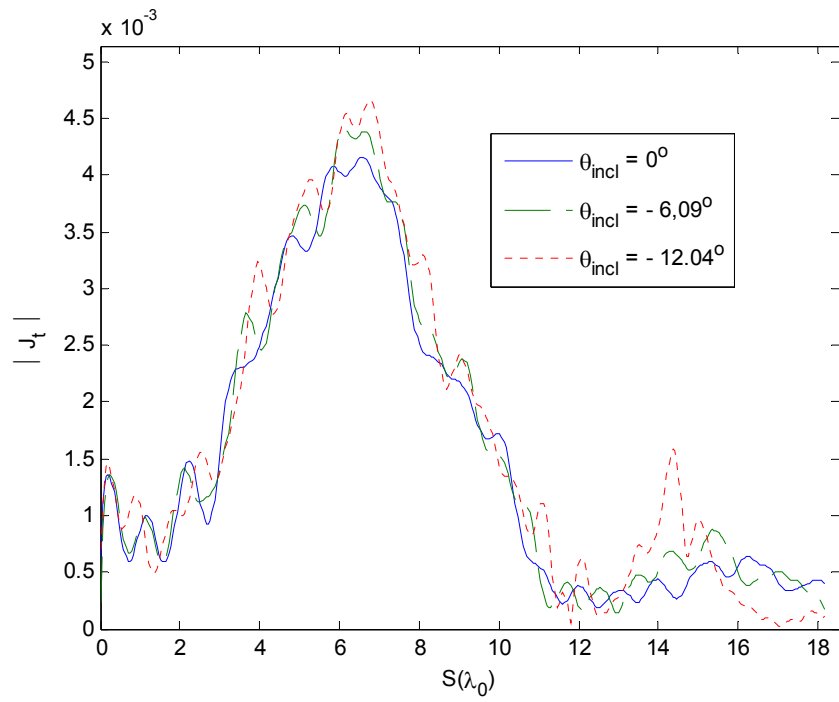


a) Corrente na face interna do refletor principal

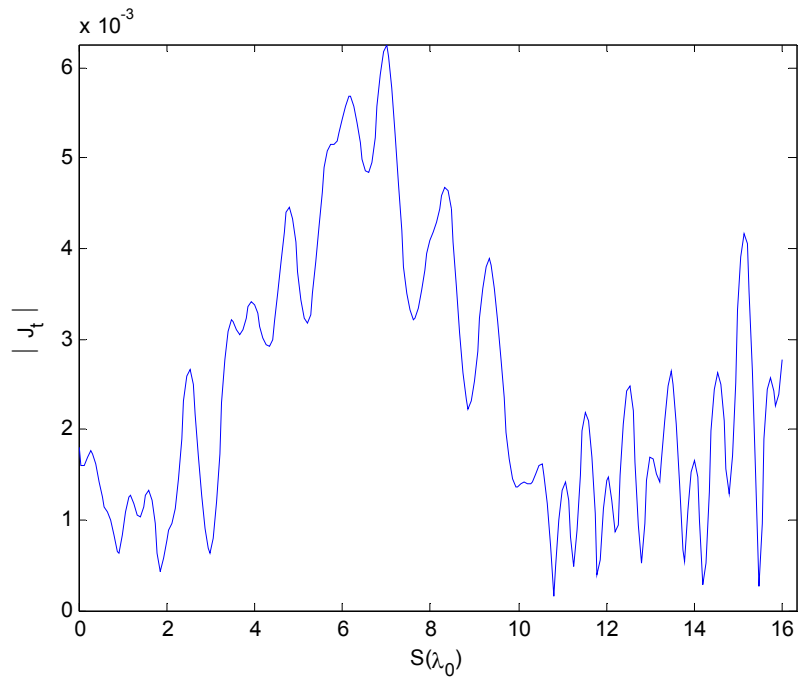


b) Corrente na face externa do refletor principal

Figura 6.25 – Corrente nas superfícies do radome e do refletor principal para uma antena OADE com radome.

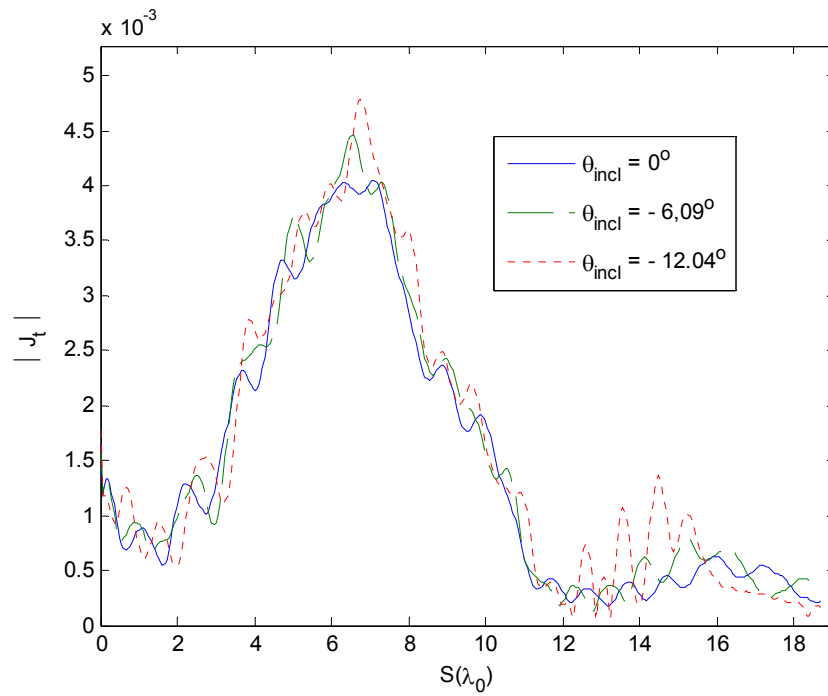


c) Corrente na face interna do radome: antenas da Figura 6.22

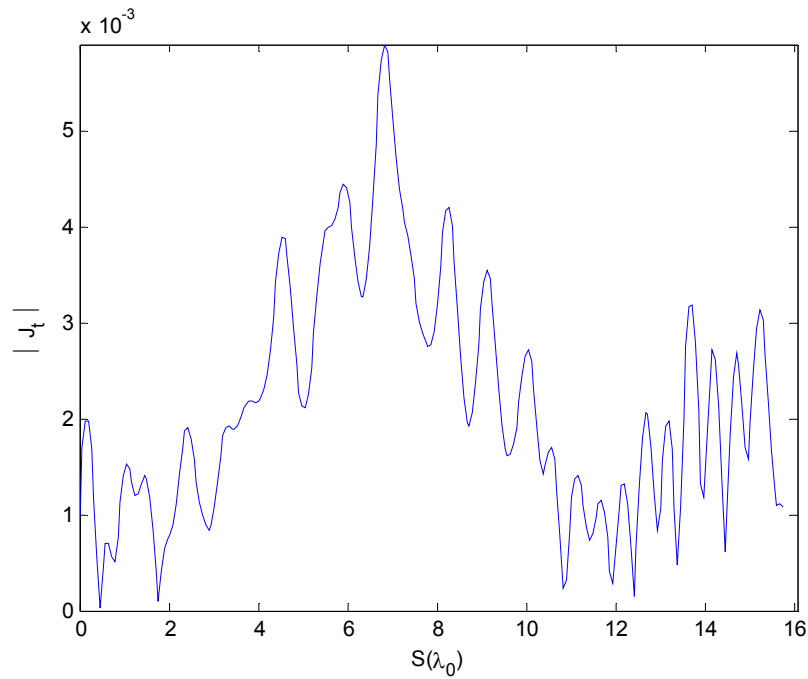


d) Corrente na face interna do radome: antena da Figura 6.24

Figura 6.25 – Corrente nas superfícies do radome e do refletor principal para uma antena OADE com radome (Continuação).



e) Corrente na face externa do radome: antenas da Figura 6.22



f) Corrente na face externa do radome: antena da Figura 6.24

Figura 6.25 – Corrente nas superfícies do radome e do refletor principal para uma antena OADE com radome (Continuação).

## 6.4 - Conclusões Parciais

Neste capítulo as técnicas apresentadas nos Capítulos 2 a 4 e validadas no Capítulo 5 foram utilizadas na análise rigorosa do sistema completo (refletor principal, subrefletor, alimentador, radome, etc.) de antenas duplo-refletoras OADC e OADE para cobertura omnidirecional. Primeiramente, foi realizada uma análise considerando as antenas constituídas somente de material condutor e os resultados obtidos apresentaram excelente concordância com aqueles disponíveis em [15]. A seguir a estrutura do radome foi incluída na análise. Quando a presença do radome foi considerada, foram avaliados os casos de incidência sobre o radome, normal para antenas OADC (Figura 6.9) e OADE (Figura 6.15) e oblíqua para antenas OADE (Figura 6.14). Para todas as geometrias avaliadas a análise foi conduzida ao longo de uma faixa de frequências onde a frequência em que o comprimento de onda no espaço livre  $\lambda_0 = 1$  m é escolhida como frequência central da faixa,  $f_0$ . Os valores de frequência foram variados de  $0,9 f_0$  à  $1,1 f_0$ . Verificou-se que ao longo de toda a faixa de frequências considerada as características eletromagnéticas de todas as antenas avaliadas não sofrem alterações significativas. Observou-se também que para a configuração OADC investigada neste trabalho, a inclusão do radome, da forma ilustrada na Figura 6.9, não provoca alterações importantes no comportamento das características desta antena. Para a configuração OADE investigada, verificou-se que a inclusão do radome da forma ilustrada na Figura 6.15 não provoca alterações importantes no comportamento das características desta antena. Porém para a forma de fixação do radome à estrutura da antena ilustrada na Figura 6.14, verificou-se um aumento significativo no nível médio de lóbulos secundários ao longo de toda a faixa de frequências considerada. De acordo com os resultados de alguns testes realizados acredita-se que este aumento no nível médio de lóbulos secundários está associado à forma de fixação do radome à estrutura da antena.

# Capítulo 7

## CONCLUSÕES

### 7.1 - Conclusões sobre o Trabalho

Neste trabalho foi realizado o desenvolvimento (teórico, analítico e numérico) e a aplicação de uma técnica numérica eficiente para o tratamento do espalhamento eletromagnético por corpos de revolução. O objetivo principal do trabalho é a aplicação desta técnica na análise de antenas refletoras circularmente simétricas com elevadas dimensões elétricas e constituídas de materiais condutores e dielétricos, como, por exemplo, antenas refletoras com radome. A técnica apresentada é baseada nas equações integrais dos campos elétrico (EFIE) e magnético (MFIE) avaliadas numericamente através do método dos momentos (MoM).

Tradicionalmente a análise e síntese de antenas refletoras tem sido realizada empregando técnicas baseadas nas aproximações da Ótica Física (PO) ou da Teoria Geométrica da Difração (GTD). Embora excelentes resultados possam ser alcançados através de ambas as técnicas, elas não podem incluir com precisão os efeitos de espalhamento e acoplamento associados aos vários elementos da antena (alimentador, subrefletor, radome, etc.). Estes efeitos reduzem a eficiência global da antena e aumentam o nível de lóbulos secundários no diagrama de radiação. O MoM é uma técnica que permite avaliar as características elétricas da antena com extrema precisão, e quando aplicada a geometrias com simetria axial conduz a uma análise efetuada em duas dimensões (apenas sobre as geratrizes que definem as diversas superfícies da antena). Este fato associado aos modernos avanços

computacionais possibilita a análise rigorosa de grandes antenas sem uma solicitação computacional tão severa.

A robustez pretendida para a análise de grandes antenas refletoras circularmente simétricas cuja estrutura é constituída de materiais condutores e dielétricos é alcançada através de algumas medidas que diferenciam este trabalho dos demais existentes na literatura. A primeira delas é o tratamento numérico aplicado às integrais presentes na solução através do MoM. Para os casos em que estas não apresentam singularidades este tratamento é inteiramente conduzido utilizando quadraturas Gaussianas e para os casos em que as singularidades estão presentes, é empregado um tratamento especial que combina a utilização de quadraturas Gaussianas e soluções analíticas para avaliação das integrais. A escolha das funções de base adequadas para a representação das correntes é outra medida muito importante para melhorar a precisão e convergência da análise numérica. Neste trabalho a representação das correntes superficiais equivalentes é realizada através de funções de base triangulares. Este tipo de função garante uma boa representação do comportamento da corrente ao longo de toda a superfície dos corpos de revolução e produz equações integrais relativamente simples. Um outro aspecto diferenciador deste trabalho é a inclusão de materiais dielétricos na análise de estruturas de grandes dimensões elétricas. É importante destacar também que neste trabalho a estrutura do alimentador é considerada nas análises. Este procedimento evita problemas de imprecisão associados ao uso de fontes de onda esféricas pontuais para excitar a antena refletora.

A investigação da utilização do MoM na análise do espalhamento eletromagnético por corpos de revolução condutores tem sido apropriadamente abordada. Porém existem poucos trabalhos que empregam o MoM à análise de antenas com simetria axial com grandes dimensões, e que consideram materiais dielétricos presentes na estrutura da antena. A maioria destes trabalhos se concentra na avaliação de antenas cujos alimentadores são carregados com cone dielétrico e de antenas refletoras diretivas com radome.

Embora através da técnica desenvolvida neste trabalho seja possível a análise completa e direta de vários tipos de antenas refletoras axialmente simétricas constituídas de material



dielétrico e condutor, somente antenas duplo-refletoras para cobertura omnidirecional são investigadas, uma vez que resultados conclusivos sobre o desempenho de tais antenas com radome não foram ainda adequadamente reportados. Sendo este tipo de análise mais um aspecto inovador deste trabalho.

O desenvolvimento da ferramenta apresentada neste trabalho foi realizado na seguinte seqüência, inicialmente as equações integrais de superfície para a análise numérica rigorosa do espalhamento eletromagnético por diferentes tipos de corpos de revolução (condutores, dielétricos e compostos, isto é, constituídos de materiais condutores e dielétricos) foram obtidas e apresentadas no Capítulo 2. A seguir estas equações integrais foram numericamente avaliadas através do MoM, conforme discutido no Capítulo 3. Neste trabalho foram consideradas quatro formas diferentes para excitação dos BOR, uma onda plana, uma fonte de onda esférica pontual (modelo cosseno elevado ou dipolo de Hertz) localizada sobre o eixo de simetria, ou ainda através da excitação de um guia de onda circular pelo modo fundamental  $TE_{11}$  ou de um guia coaxial excitado através do modo TEM. A excitação através dos guias circular e coaxial permite a inclusão do alimentador na análise e possibilita a avaliação precisa da estrutura completa da antena. A excitação através dos modos  $TE_{11}$  e TEM é provida por correntes equivalentes localizadas dentro do guia conectado à corneta. Impedâncias de superfície (IBC) foram utilizadas para simular corrugações na corneta e a absorção do modo que retorna dentro do guia. No Capítulo 4 foram apresentadas as expressões completas para o cálculo dos campos elétrico e magnético nas regiões de campo próximo e distante, assim como as expressões para o cálculo da perda de retorno. A formulação apresentada nos Capítulos 2, 3 e 4 provê as ferramentas necessárias para avaliar rigorosamente as características eletromagnéticas de corpos de revolução condutores, dielétricos e compostos (isto é, correntes superficiais, diagrama de radiação, ganho, perda de retorno, etc.) através de uma única simulação computacional.

Assim, uma vez desenvolvida a ferramenta numérica para avaliação do espalhamento eletromagnético por corpos de revolução, esta foi aplicada na análise de diferentes tipos de BOR (esferas condutoras e dielétricas, esferas condutoras recobertas por uma camada

dielétrica, esferas constituídas de 2 e 3 camadas homogêneas, esferas constituídas de dois hemisférios, superfície parabólica, guias de onda circular e coaxial e cornetas circular corrugada e coaxial). No Capítulo 5 foram apresentados os resultados obtidos (densidade de correntes elétrica e magnética e campos elétrico e magnético nas regiões de campo próximo e distante) na análise destas estruturas. Estes resultados numéricos são comparados com as respectivas soluções analíticas ou outros resultados numéricos disponíveis na literatura. A análise destas comparações mostra uma concordância satisfatória entre as soluções em todos os casos avaliados, o que demonstra a validade, precisão e a robustez da formulação apresentada nos Capítulos 2, 3 e 4 e a habilita para a análise de antenas duplo-refletoras com simetria axial constituídas de materiais condutores e dielétricos. Neste capítulo também são apresentadas equações obtidas empiricamente que conduzem a um número ótimo de segmentos para análise de superfícies condutoras e dielétricas. Estas fórmulas empíricas foram utilizadas para a determinação do número de segmentos de todas as estruturas avaliadas neste trabalho, e conduziram a resultados com a precisão desejada.

No Capítulo 6 a técnica desenvolvida é aplicada na análise de antenas duplo-refletoras para cobertura omnidirecional. São avaliadas as configurações clássicas OADC e OADE, as quais apresentam alta eficiência e baixos níveis de lóbulos secundários e geometria mais compacta. Primeiramente a análise é realizada para estas antenas sem radome. Esta análise é conduzida ao longo de uma faixa de frequências. A frequência em que o comprimento de onda no espaço livre  $\lambda_0 = 1$  m é escolhida como frequência central da faixa,  $f_0$ . Os valores de frequência foram variados de  $0,9 f_0$  à  $1,1 f_0$ . Os resultados obtidos nesta análise foram comparados com outros disponíveis na literatura e assim foi demonstrada a validade da técnica desenvolvida para análise deste tipo de antena. Nesta análise também foi verificado que ao longo de toda a faixa de frequências considerada não foram verificadas alterações significativas nas características eletromagnéticas das antenas, o que em princípio habilita tais antenas para operação com sinais banda larga. Em um segundo momento foi realizada a análise para as mesmas antenas considerando a existência de um radome com permissividade elétrica relativa  $\epsilon_r = 2,08$ . Para antena OADC foi avaliado somente o caso de incidência

normal sobre o radome. Para a configuração OADE foram considerados dois tipos de incidência sobre a superfície do radome, normal e oblíqua. A espessura do radome em todas as análises foi projetada para que as reflexões fossem minimizadas. Neste caso observou-se, assim como para as antenas sem radome, que ao longo de toda a faixa de frequências não foram verificadas alterações significativas nas características eletromagnéticas das antenas, o que em princípio habilita tais antenas para operação com sinais banda larga. Em relação aos resultados obtidos para as antenas sem radome verificou-se que para a antena OADC a inclusão do radome (incidência normal) não provoca mudanças significativas no diagrama de radiação da antena. Para as demais grandezas (ganho máximo, ângulo onde o ganho máximo ocorre, HPBW, NMLS e perda de retorno), também não foram verificadas mudanças significativas em seus valores. Para o ganho máximo, o ângulo onde o ganho máximo ocorre, HPBW e NMLS as maiores alterações ocorrem para frequências menores que aproximadamente  $f_0$  e para a perda de retorno as maiores alterações ocorrem para frequências nas extremidades da faixa de frequências estabelecida. Para as antenas com radome OADE avaliadas verificou-se um comportamento semelhante ao da antena OADC devido à inclusão do radome, exceto em relação ao nível de lóbulos secundários para a incidência oblíqua que aumentou em média em 3,5 dB ao longo da faixa de frequências avaliada.

É importante salientar que para os casos em que o radome é considerado a validade da formulação desenvolvida foi verificada através de comparações entre os resultados obtidos para as antenas sem radome e aqueles obtidos quando é utilizado um radome com permissividade elétrica relativa  $\epsilon_r = 1$ .

## 7.2 - Sugestões para Futuros Trabalhos

Não obstante ao que foi realizado neste trabalho existem alguns pontos que merecem ainda serem investigados em futuros trabalhos. Na presente formulação a técnica utilizada para avaliação numérica das integrais, assim como para o tratamento das singularidades presente

nestas integrais, demanda um considerável esforço computacional. Isto se deve ao fato de ser necessária a utilização vários laços (*Loops*) para implantação da solução numérica através de quadraturas Gaussianas para a avaliação de cada integral. Uma vez que o esforço computacional e tempo de processamento é um fator primordial na análise de grandes antenas, a investigação de uma técnica diferente, que mantenha a mesma precisão alcançada neste trabalho, para a avaliação das integrais e tratamento das singularidades é um aspecto que se mostra relevante para continuidade e aprimoramento deste trabalho.

Neste trabalho a representação das correntes superficiais equivalentes é realizada através de funções de base triangulares (FBT). A escolha de funções de base adequadas para a representação das correntes é muito importante para a precisão e convergência da análise numérica. Porém, representações sofisticadas para a corrente podem conduzir a equações integrais muito complicadas e de difícil tratamento das singularidades. Assim, a busca e investigação de funções que possam representar adequadamente o comportamento da corrente superficial e não conduzam a equações integrais muito complicadas mostram-se muito atrativas.

Embora neste trabalho tenham sido investigadas somente antenas duplo-refletores (com e sem radome) para cobertura omnidirecional, através da ferramenta desenvolvida é possível a análise completa e direta de diferentes tipos de antenas com simetria axial. Assim pode-se propor como objeto de pesquisa para continuidade deste trabalho, a utilização da ferramenta desenvolvida para análise de diferentes tipos de antenas refletores com simetria axial.

## Bibliografia

- [1] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford, New York, 2002.
- [2] H. Hertz, *Electric Wave*, Macmillan & Co., London, 1893.
- [3] W. L. Stutzman, G. A. Thiele, *Antenna Theory and Design*, John Wiley & Sons, 1998.
- [4] P. W. Hannan, "Microwave Antennas Derived from the Cassegrain Telescope," IRE Transactions on Antennas and Propagation, AP-9, No. 2, pp. 140-153, March 1961.
- [5] V. Galindo, "Design of Dual-Reflector Antennas with Arbitrary Phase and Amplitude Distributions," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, AP-12, No. 4, pp. 403-408, July 1964
- [6] Yu. A. Yerukhimovich, "Analysis of Two-Mirror Antennas of a General Type," Telecommunications and Radio Engineering, Part 2, 27, No. 11, pp. 97-103, 1972.
- [7] Yu. A. Yerukhimovich and A. Ya. Mirosnichenko, "Development of Double-Reflector Antennas with a Displaced Focal Axis," Telecommunications and Radio Engineering, Part 2, 30, No. 9, pp. 90-94, 1975.
- [8] W. Rotman and J. C. Lee, "Compact Dual Frequency Reflector Antennas for EHF Mobile Satellite Communication Terminals," 1984 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium Digest, Boston, Massachusetts, USA, pp. 771-774, June 1984.
- [9] F. J. S. Moreira and A. Prata, Jr., "Generalized Classical Axially-Symmetric Dual-Reflector Antennas," 1997 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium Digest, Montreal, Canada, pp. 1402-1405, July 1997.
- [10] F. J. S. Moreira and Aluizio Prata, Jr., "Generalized Classical Axially Symmetric Dual-Reflector Antennas," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 49, no. 4, pp. 547-554, April 2001.
- [11] F. J. S. Moreira and J. R. Bergmann, "Classical Axis-Displaced Dual-Reflector Antennas for Ominidirectional Coverage," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 53, no. 9, pp. 2799-2808, September 2005.
- [12] J. R. Bergmann and F. J. S. Moreira, "Simple Design Equations for Ominidirectional Axis-Displaced Dual-Reflector Antennas," Microwave and Optical Technology Letters, vol. 45, no. 2, pp. 159-163, April 2005.
- [13] J. R. Bergmann and F. J. S. Moreira, "An Omnidirectional ADE Reflector Antenna," Microwave and Optical Technology Letters, vol. 40, no. 3, pp. 250-254, February 2004.

- 
- [14] F. J. S. Moreira and J. R. Bergmann, "Axis-Displaced Dual-Reflector Antennas for Omnidirectional Coverage with Arbitrary Main-Beam Direction in the Elevation Plane," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 54, no. 10, pp. 2854-2861, October 2006.
- [15] F. J. S. Moreira, A. Prata, Jr. and J. R. Bergmann, "GO Shaping of Omnidirectional Dual-reflector Antennas for a Prescribed Equi-Phase aperture Field Distribution," *IEEE Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 1, pp. 99-106, January 2007.
- [16] F. F. Dubrovka and A. S. Kim, "A New Mathematical Model of Dual-Reflector Omnidirectional Antennas," *Radioelectronics and Communications Systems*, Allerton Press, N.Y., USA, vol. 42, no. 6, pp 1-10, 1999.
- [17] A. D. Olver, P. J. B. Clarricoats, and E. E. Voglis, "Study of Dual-Offset Reflector Antenna with Dielectric Cone Feed," *IEE Proceedings*, nr. 131, Pt. H, pp. 69-76, 1984.
- [18] E. E. Voglis and A. D. Olver, "Shaped Dual-Offset Antenna with Dielectric Cone Feed for DBS Reception," *IEE Proceedings*, 132, Pt. H, pp. 110-114, 1985.
- [19] J. R. Bergmann, "Shaped Dual-Offset Antenna with Dielectric Cone Feed," *18th European Microwave Conference Proceedings*, Stockholm, Sweden, pp. 477-481, September 1988.
- [20] A. D. Olver, P. J. B. Clarricoats, and K. Raghavan, "Dielectric Cone Loaded Horn Antennas," *IEE Proceedings*, 135, Pt. H, nr. 3, pp.158-162, June 1988.
- [21] A. A. Kishk and L. Shafai, "Small Reflector Antenna with Low Sidelobes," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 10, pp. 2907-2912, October 2003.
- [22] L. W. Li, M. S. Leong, P. S. Kooi, T. S. Yeo and Y. L. Qiu, "Radiation of an Aperture Antenna Covered by a Spherical-Shell Chiral Radome and Feed by a Circular Waveguide," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, no. 5, pp. 664-671, May 1998.
- [23] V. B. Yurchenko, A. Altintas and A. I. Nosich, "Numerical Optimization of a Cylindrical Reflector-in-Radome Antenna System," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 47, no. 4, pp. 668-673, April 1999.
- [24] T. Oguzer, "Analysis of Circular Reflector Antenna Covered by Concentric Dielectric Radome," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 49, no. 3, pp. 458-463, March 2001.
- [25] M. A. A. Moneun, Z. Shen, J. L. Volakis and O. Graham, "Hybrid PO-MoM Analysis of Large Axi-Symmetric Radomes," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 49, no. 12, pp. 1657-1665, December 2001.
- [26] W. J. Zhao, L. W. Li, and Y. B. Gan, "Efficient Analysis of Antenna Radiation in the Presence of Airborne Dielectric Radomes of Arbitrary Shape," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 1, pp.442-449, January 2005.

- 
- [27] A. Y. Svezhentsev, A. I. Nosich, A. Altintas and T. Oguzer, "Simulation of Reflector Antenna Covered by a Circular Radome," IEE Conference Publication, nr. 407, pp. 532-535, 1995.
- [28] C.C. Lu, "Dielectric Radome Analysis Using Multilevel Fast Multiple Algorithm," Antennas and Propagation Society International Symposium, pp 730-733, 2001.
- [29] J. Ruze, H. Weiss, "Use of Radomes for Large Radio Astronomy Antennas," Antennas and Propagation Society International Symposium, pp 416-421, 1970.
- [30] O. S. Kim, "Optimization of a Dielectric Radome for a Dual-Reflector Omnidirectional Antenna," MSMW 2001, Symposium Proceedings, Kharkov, Ukraine, June 2001.
- [31] W. V. T. Rusch and P. D. Potter, *Analysis of Reflector Antennas*, Academic Press, New York, 1970.
- [32] R. G. Kouyoumjian and P. H. Pathak, "A Uniform Geometrical Theory of Diffraction for an Edge in a Perfectly Conducting Surface," Proceedings of the IEEE, 62, No. 11, pp. 1448-1461, November 1974.
- [33] R.F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, IEEE Press, Piscataway NJ, 1993.
- [34] F. J. S. Moreira, "Design and Rigorous Analysis of Generalized Axially-Symmetric Dual-Reflector Antennas," Ph.D. Dissertation, Dept. Electrical Engineering-Electrophysics, University of Southern California, Los Angeles, EUA, August 1997.
- [35] J. R. Mautz and R. F. Harrington, "An Improved E-Field Solution for a Conducting Body of Revolution," Tech. Report TR-80-1, Dept. Electrical and Computer Engineering, Syracuse University, 1980.
- [36] A. W. Glisson, "On the Development of Numerical Techniques for Treating Arbitrarily-Shaped Surfaces," Ph.D. Dissertation, University of Mississippi, June 1975.
- [37] J. R. Mautz and R. F. Harrington, "Radiation and Scattering From Bodies of Revolution," Dept. Electrical and Computer Engineering, Syracuse University, 1969.
- [38] A. W. Glisson and D. R. Wilton, "Simple and Efficient Numerical Methods for Problems of Electromagnetic Radiation and Scattering from Surfaces," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-28, no. 5, pp. 593-603, September 1980.
- [39] S. M. Rao, A. W. Glisson and D. R. Wilton, "Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-30, no. 3, pp. 409-417, May 1982.
- [40] F. L. Teixeira and J. R. Bergmann, "Spatial-Frequency Localized Representation for Integral Equation Reflector Analysis," Proceedings of the 1996 IEEE AP-S International Symposium, Baltimore, Maryland, pp 890-893, July 1996.

- 
- [41] J. R. Mautz and R. F. Harrington, "H-Field, E-Field and Combined Field Solutions for Bodies of Revolution," Tech. Report TR-77-2, Dept. Electrical and Computer Engineering, Syracuse University, 1977.
- [42] T. J. Kim and G. A. Thiele, "A Hybrid Diffraction Technique-General Theory and Applications," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 30, no. 5, pp. 888-897, September 1982.
- [43] L. N. Medgyesi-Mitschang. And D. S. Wang, "A Hybrid Solution for Scattering from Perfectly Conducting Bodies of Revolution," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 31, no. 4, pp. 570-583, July 1983.
- [44] F. L. Teixeira and J. R. Bergmann, "Moment-Method Analysis of Circularly Symmetric Reflectors Using Bandlimited Basis Functions," IEE Proceedings Microwave Antennas and Propagation, vol. 144, no. 3, pp 179-183, June 1997.
- [45] M. R. Barclay and W. V. T. Rusch, "Moment-Method Analysis of Large, Axially Symmetric Reflector Antennas Using Entire-Domain Functions," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 39, no. 4, pp. 491-496, April 1991.
- [46] F. L. Teixeira, "Aplicação do Método dos Momentos para a Análise de Refletores Circularmente Simétricos," Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Março 1995.
- [47] D. C. Jenn and W. V. T. Rusch, "An E-Field Integral Equation Solution for the Radiation from Reflector Antennas with Struts," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 37, no. 6, pp. 683-689, June 1989.
- [48] A. McCowen, "Efficient 3-D Moment-Method Analysis for reflector Antennas Using a Far-Field Approximation Technique," IEE Proc. Microwave Antennas and Propagation, vol. 146, no. 1, pp7-12, February 1999.
- [49] J. R. Mautz and R. F. Harrington, "Electromagnetic Scattering from a Homogeneous Body of Revolution," Tech. Report TR-77-10, Dept. Electrical and Computer Engineering, Syracuse University, 1977.
- [50] G. Govind, D. R. Wilton, A. W. Glisson, "Scattering from Inhomogeneous Penetrable Bodies of Revolution," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-32, no. 11 pp. 1163-1173, November 1984.
- [51] P. Ylä-Oijala and M. Taskinen, "Well-conditioned Müller formulation for electromagnetic scattering by dielectric objects," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 53, no. 10, pp. 3316-3323, October 2005
- [52] L. N. Medgyesi-Mitschang and J. M. Putnam, "Electromagnetic Scattering from axially Inhomogeneous Bodies of Revolution," IEEE Antennas and Propagation, vol. 32, no. 8, pp. 797-806, August 1984.



- 
- [53] A. A. Kishk, L. Shafai, "Improvement of the Numerical Solution of Dielectric Bodies with High Permittivity," *IEEE Antennas and Propagation*, vol. 37, no. 11, pp. 1486-1490, November 1989.
- [54] A. A. Kishk, L. Shafai, "Numerical Solutions of Scattering from Coated Bodies of Revolution Using Different Integral Equation Formulations," *IEE Proceedings*, vol. 133, Pt. H, no. 3, pp 227-231, June 1986.
- [55] P. L. Huddleston, L. N. Medgyesy-Mitschang and J. M. Putnam, "Combined Field Integral Equation Formulation for Scattering by Dielectrically Coated Conducting," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-34, no. 4 pp. 510-520, April 1986.
- [56] A. A. Kishk, L. Shafai, "Different Formulations for Numerical Solution of Single or Multibodies of Revolution with Mixed Boundary Conditions," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-34, no. 5 pp. 666-673, May 1986.
- [57] B. M. Kolundzija and V. V. Petrovic, "Power Conservation in Method of Moments and Finite-Element Method for Radiation Problems," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, nr. 8, pp 2728-2737, August 2005.
- [58] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [59] A. J. Poggio and E. K. Miller, *Integral Equation Solutions of Three-dimensional Scattering Problems*, R. Mittra Editor, Pergamon Press, Oxford, 1973.
- [60] J. J. Wang, *Generalized Method of Moments in Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [61] M. R. Spiegel, *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, McGraw-Hill, São Paulo 1973.
- [62] S. Silver, editor, *Microwave Antenna Theory and Design*, Peter Peregrinus, London 1984.
- [63] C. Dragone, "Reflection, transmission, and Mode Conversion in a Corrugated Feed," *Bell System Technical Journal*, 56, No. 6, pp. 835-867, July-August 1977.
- [64] P. J. B. Claricoats and A. D. Olver, *Corrugated Horns for Microwave Antennas*, Peter Peregrinus, London, 1984.
- [65] K. A. Iskander, L. Shafai, A. Frandsen, and J. E. Hansen, "Application of Impedance Boundary Condition to Numerical Solution of Corrugated Circular Horns," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP 30, No. 3, pp. 366-372, May 1983.
- [66] A. A. Kishk, L. Shafai, "Integral Equation Formulations for Imperfectly Conducting Scatterers," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-33, no. 2 pp. 206-214, February 1985.

- 
- [67] H. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterlin and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C++*, 2a Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [68] P. H. R. Perni, “Um Estudo sobre os Métodos Iterativos na Solução de Sistemas de Equações Provenientes do Método dos Elementos de Contorno,” Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, 2002.
- [69] J. R. Mautz and R. F. Harrington, “An E-Field Solution for a Conducting Surface Small or Comparable to the Wavelength,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP 32, No. 4, pp.330-339, April 1984.
- [70] J. S. Zhao and W. C. Chew, “Integral Equation Solution of Maxwell’s Equations from Zero frequency to Microwave Frequencies,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP 48, No. 10, pp.1635-1645, October 2000.
- [71] G. Mie, “Beitrage zur Optik Truber Medien, Speziell Kolloider Metallo-Sungen” , *Ann. Phys.*, vol 25, p. 377, 1908.
- [72] J. M. Putnam and L. N. Medgyesi-Mitschang, “Combined Field Integral Equation Formulation for Inhomogeneous Two and Three Dimensional Bodies: The Junction Problem,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-39, No. 5, pp. 667-672, May 1991.
- [73] Y. Chu, W. C. Chew, S. Chen and J. Zhao, “Generalized PMCHWT Formulation for Low-Frequency Multi-Region Problems,” *Proc. IEEE AP-S Symp.*, vol. 3, 2002, pp. 664–667.
- [74] Y. Chu, W. C. Chew, J. Zhao and S. Chen, “A Surface Integral Equation Formulation for Low-Frequency Scattering from a Composite Object,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-51, No. 10, pp. 2837-2844, October 2003.
- [75] Y. M. M. Antar, A. A. Kishk, L. Shafai and L. E. Allan, “Radar Backscattering from Partially Coated Targets with Axial Symmetry,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-37, no. 5, pp. 564-575, May 1989.
- [76] A. C. Ludwig, “The Definition of Cross Polarization,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-21, no. 1, pp. 116-119, January 1973.
- [77] D. K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, Addison Wesley, second edition, New York 1992.